

THÈSE

Présentée devant l'

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

Domaine de

Sciences Mathématiques et leurs Applications

Par **Davit VARRON**

LSTA, Paris VI et CREST, Rennes, UFR 920

**Lois fonctionnelles uniformes du logarithme itéré pour les
accroissements du processus empirique généralisé. Lois
limites de type Chung-Mogulskii pour le processus
empirique uniforme local.**

Sous la direction du professeur Paul DEHEUVELS.

Soutenue le 14 décembre 2004 devant la Commission d'Examen

Composition du Jury

BERTHET Philippe	Examineur	Université de RENNES I
BOSQ Denis	Examineur	Université de PARIS VI
DELECROIX Michel	Président	CREST, Rennes
DEHEUVELS Paul	Directeur	Université de PARIS VI
EINMAHL Uwe	Invité	VRIJE UNIVERSITEIT, Brussel
LIFSHITS Mikhail	Rapporteur	Université de SAINT PETERSBOURG
SUQUET Charles	Rapporteur	Université de LILLE I.

Lois fonctionnelles limites uniformes pour les
accroissements généralisés du processus
empirique. Lois limites de type Chung-Mogulskii
pour le processus empirique uniforme local.

Davit Varron

LSTA, Université Paris VI et CREST, Rennes

Remerciements

Plusieurs personnes m'ont apporté une aide précieuse pendant ces trois années d'études.

Tout d'abord, je tiens à remercier le professeur Paul Deheuvels, pour la confiance qu'il m'a témoignée d'une part, ainsi que pour les entretiens fructueux que nous avons pu avoir. J'ai ainsi eu l'occasion de me rendre compte de l'importance de la rigueur mathématique, de l'importance de la rédaction et de la remise en cause répétée de mon propre travail. Merci aussi pour m'avoir poussé à l'initiative personnelle dans mes recherches, en m'indiquant quels articles récents offraient des pistes de recherche éventuelles, mais en me laissant complètement le champ libre dans mes investigations.

Je tiens également à exprimer mes profonds remerciements à Philippe Berthet. Merci d'abord pour m'avoir transmis une motivation qui s'est avérée "vitale" dans les moments où mes travaux étaient au point mort. Merci pour m'avoir expliqué de façon intuitive certains points techniques de la théorie des processus empiriques qui me paraissaient obscurs. Enfin, merci pour m'avoir toujours ouvert la porte de votre bureau pour parler de mathématiques pendant une, deux, et parfois trois heures.

J'adresse un grand merci à mes rapporteurs Mikhail Lifshits et Charles Suquet, d'une part pour leur promptitude en cette période "chargée" de premier trimestre universitaire, et d'autre part pour l'intérêt qu'ils ont porté au présent document.

Je tiens aussi à remercier le professeur Michel Delecroix, pour m'avoir accueilli au sein de l'équipe de CREST-Rennes, pour avoir eu confiance en moi, et pour m'avoir conseillé dans l'exercice difficile de la recherche d'une bourse de thèse.

Enfin, je tiens à remercier les professeurs Zhan Shi et David Mason pour m'avoir donné des conseils techniques ainsi que des références bibliographiques qui m'ont été très utiles.

Mes pensées vont ensuite à l'équipe du CREST-Rennes, ainsi qu'au groupe de doctorants du LSTA de Paris 6, avec qui j'ai passé des moments très agréables pendant ces trois années.

Je dédie cette thèse à ma femme Sophie ainsi qu'aux BIB et aux batraciens lumineux.

Table des matières

0.1	Le processus empirique uniforme	9
0.2	Accroissements du processus empirique généralisé	13
1	Rappels concernant les variables aléatoires gaussiennes	23
1.1	Mesures gaussiennes sur un espace de Banach	24
1.1.1	Définitions	24
1.1.2	Noyau associé à une mesure de Radon gaussienne	25
1.1.3	Variables aléatoires gaussiennes de dimension finie	26
1.1.4	Inégalité de concentration, formules de translation	26
1.2	Processus gaussiens réguliers	27
1.2.1	Définitions	27
1.2.2	Une condition suffisante pour la continuité des trajectoires	29
1.2.3	Mesure gaussienne engendrée par un processus gaussien régulier	33
1.2.4	Noyau associé à un processus régulier	37
1.3	Inégalités de petites boules pour le processus de Wiener	42
1.3.1	Intérieur la boule de Strassen	42
1.3.2	Bordure de la boule de Strassen	43
2	Le processus empirique uniforme sur $[0,1]$	47
2.1	Lois fonctionnelles du logarithme itéré	48
2.1.1	Relative compacité	48

2.1.2	Lois fonctionnelles standard du logarithme itéré pour le processus empirique uniforme : quelques résultats fonctionnels déjà connus	49
2.1.3	Représentation de Bahadur-Kiefer et conséquences sur le processus des quantiles	52
2.1.4	Applications des LFLI en statistiques	54
2.2	Vitesses de recouvrement dans les LFLI standard	54
2.2.1	Vitesses de recouvrement dans le théorème de Finkelstein	55
2.2.2	Vitesses de recouvrement dans la LFLI pour le processus empirique local	65
2.2.3	Applications des vitesses de recouvrement en statistiques	79
2.3	Lois fonctionnelles de type Chung-Mogulskii	83
2.3.1	Lois fonctionnelles de type Chung-Mogulskii pour le processus empirique local	85
2.3.2	Preuve de la borne inférieure dans le théorème 2.3.3	87
2.3.3	Preuve de la borne supérieure dans le théorème 2.3.3	94
3	Principes de grandes déviations uniformes	105
3.1	Définition du principe de grandes déviations	106
3.2	Variables aléatoires de dimension finie	109
3.2.1	Fonction de Laplace et grandes déviations	109
3.2.2	Principe de grandes déviations uniforme pour les v.a. gaussiennes	110
3.2.3	Fonction de Laplace et principe de grandes déviations uniforme	125
3.2.4	Un principe d'invariance pour les lois de dimensions finies	127

3.3	Principe de grandes déviations uniforme pour les processus stochastiques	131
3.3.1	Principe de grandes déviations pour les processus stochastiques bornés	131
3.3.2	Grandes déviations uniformes pour les tableaux triangulaires de processus	138
3.4	De la dimension finie à la dimension infinie : forme explicite de la fonction de coût	145
4	Une étude des accroissements du processus empirique généralisé	155
4.1	Introduction	155
4.1.1	Objet étudié	155
4.1.2	Processus gaussien associé aux $G_n(\cdot, h, z)$	158
4.1.3	Processus empiriques et mesurabilité	160
4.2	Comparaison de deux tailles de fenêtre significativement différentes	162
4.2.1	Hypothèses sur les tailles de fenêtre, ensemble limite de Θ_n	163
4.2.2	Énoncé du résultat	165
4.2.3	Une remarque sur les hypothèses du théorème 4.2.3	166
4.2.4	Preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3	170
4.2.5	Preuve de la partie (ii) du théorème 4.2.3	191
4.3	Uniformité en la taille de fenêtre	210
4.3.1	Présentation du problème	210
4.3.2	Preuve de la partie (i) du théorème 4.3.2	213
4.3.3	Preuve de la partie (ii) du théorème 4.3.2	241
4.4	Applications du théorème 4.3.2	250
4.4.1	Une application à l'estimation de la densité sur \mathbb{R}^d	251

4.4.2	Application à l'estimation de la densité de couple : construction et étude d'un estimateur à noyau	257
5	Domaine de non invariance pour les accroissements du processus empirique multivarié	269
5.1	Introduction et notations	269
5.2	Énoncé du résultat	274
5.3	Preuve de la partie (i) du théorème 5.2.1	275
5.3.1	Subdivision de H	275
5.3.2	Principe de grandes déviations	277
5.3.3	Fin de la preuve de la partie (i) du théorème 5.2.1	291
5.4	Preuve de la partie (ii) du théorème 5.2.1	292
5.4.1	Découpage de H	295
5.4.2	Découpage de H_l	296
5.4.3	Associations par blocs	297
5.4.4	Contrôle des oscillations entre n_{k-1} et n_k	300
5.5	Inégalités concernant le processus empirique réel	311
5.6	Inégalités concernant le processus empirique indexé par une classe de fonctions	312

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier le comportement asymptotique de certaines suites d'objets mathématiques issus de la théorie des processus empiriques. Nous distinguons deux types d'objets. D'une part, nous étudions des objets dérivés du processus empirique uniforme, d'autre part, nous nous intéressons aux accroissements du processus empirique indexé par une classe de fonctions (ou processus empirique généralisé).

0.1 Le processus empirique uniforme

Dans un premier temps, nous établissons quelques résultats concernant le processus empirique uniforme, noté $\alpha_n(\cdot)$, et défini de la façon suivante. Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires uniformément distribuées sur $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$F_n(t) := n^{-1} \#\{1 \leq i \leq n, U_i \leq t\}, \quad t \in [0, 1], \quad (0.1.0.1)$$

$$\alpha_n(t) := n^{1/2}(F_n(t) - t), \quad t \in [0, 1]. \quad (0.1.0.2)$$

Ainsi, $\alpha_n(\cdot)$ est un processus stochastique sur $[0, 1]$ décrivant l'écart entre la fonction de répartition empirique $F_n(\cdot)$ et la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous définissons également le processus des quantiles $\beta_n(\cdot)$ de la façon suivante, pour tout entier

$n \geq 1$.

$$F_n^{-1}(t) := \inf\{u \in [0, 1], F_n(u) \geq t\}, \quad t \in [0, 1], \quad (0.1.0.3)$$

$$\beta_n(t) := n^{1/2}(F_n^{-1}(t) - t), \quad t \in [0, 1]. \quad (0.1.0.4)$$

Ces quatre processus ont été beaucoup étudiés, principalement pour leur intérêt statistique (voir par exemple les livres de Shorack et Wellner [91] et de Csörgö et Revesz [17]). En effet, de nombreuses statistiques basées sur des échantillons i.i.d. de variables aléatoires réelles peuvent s'exprimer comme des fonctions de ces quatre objets. Citons, par exemple, l'estimation de la densité par la méthode du noyau, par projection tronquée ou par la méthode des k points les plus proches (voir par exemple [11] et [89]), les L -statistiques [56], l'estimateur de Hill pour les lois de type Paréto (voir, par exemple, [37, 31]), ou la méthode du bootstrap (voir, par exemple, [90, 58]). Notre étude de α_n et β_n se présente comme suit.

Chapitre 1.

Dans ce chapitre, nous faisons plusieurs rappels concernant la géométrie gaussienne, ou théorie des mesures gaussiennes dans les espaces de dimension infinie. En particulier, nous donnons la définition d'espace autoreproduisant et d'énergie gaussienne (ou norme hilbertienne) associés au processus de Wiener $W(\cdot)$ sur $[0, 1]$, ainsi que de la boule de Strassen \mathcal{S}_1 .

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ f : f(0) = 0, \frac{df}{d\lambda} = f' \text{ existe, et } \int_{[0,1]} f'^2(t) dt \leq 1 \right\}. \quad (0.1.0.5)$$

Enfin, nous citons les résultats issus des travaux de Grill [55], Gorn et Lifshits [54], De Acosta [2] et Berthet et Lifshits [9]. Les travaux de ces chercheurs ont abouti à l'établissement d'inégalités de "petites boules". Par inégalités de petites boules, nous entendons des inégalités

de contrôle, lorsque $T \rightarrow \infty$, des probabilités de type

$$\mathbb{P}\left(\left\|\frac{W}{T} - f\right\| \leq \mathcal{V}(T)\right),$$

où

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{V}(T) = 0,$$

et où

$$\|f\| := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Chapitre 2.

Dans ce chapitre, nous établissons deux types de résultats.

Les travaux de Finkelstein [49], Deheuvels [27, 25], Mason [76], et Deheuvels et Mason [33] ont abouti à des résultats appelés **lois fonctionnelles standard du logarithme itéré**. À titre d'exemple, Mason a établi le résultat suivant. Posons $\log_2(t) := \log(\log(t \vee e))$, $t \geq 0$.

Théorème (Mason, 1988)

Pour toute suite de constantes strictement positives $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$0 < a_n < 1, \quad a_n \downarrow 0,$$

$$na_n \uparrow \infty,$$

$$na_n / \log_2 n \rightarrow \infty,$$

on a presque sûrement

$$\frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} \rightsquigarrow \mathcal{S}_1. \tag{0.1.0.6}$$

Ici, le symbole " \rightsquigarrow " signifie que l'ensemble d'adhérence de la suite $(2a_n \log_2 n)^{-1/2} \alpha_n(a_n \cdot)$, $n \geq 1$, pour la norme uniforme $\|\cdot\|$, est égal à \mathcal{S}_1 .

En nous inspirant des travaux de Berthet [7], nous établissons, dans

un premier temps, des **vitesse de recouvrement** dans certaines lois fonctionnelles standard du logarithme itéré (voir le théorème 2.2.2 dans le §2.2 et le théorème 2.2.3 dans le §2.2.2). Par exemple, nous montrons qu'il existe un réel positif $\epsilon_0 > 0$ tel que, pour toute suite de constantes $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifiant, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} 0 < a_n < 1, \quad a_n \downarrow 0, \\ na_n \uparrow \infty, \\ na_n / (\log_2 n)^{7/3} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_0 (\log_2 n)^{2/3} \inf_{g \in \mathcal{S}_1} \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} - g \right\| \leq 1.$$

Ce résultat donne une idée de la vitesse à laquelle la suite $(2a_n \log_2 n)^{-1/2} \alpha_n(a_n \cdot)$, $n \geq 1$ est attirée par son ensemble d'adhérence \mathcal{S}_1 . Nos travaux s'inspirent de ceux de Berthet [7], et se basent essentiellement l'approximation forte de Komlós, Major et Tusnády [66, 67] ainsi que sur une inégalité de recouvrement pour le processus de Wiener due à Talagrand [95].

Dans un second temps, nous établissons des **lois de type Chung-Mogulskii** pour le processus empirique local $\alpha_n(a_n \cdot)$ (théorème 2.3.3 dans le §2.3.1). En utilisant les inégalités de "petites boules" présentées dans le chapitre 1, ainsi que l'approximation forte de Komlós, Major et Tusnády, nous montrons que, pour certaines fonctions $f \in \mathcal{S}_1$, il existe une constante $\chi_f > 0$, et une suite $(T_{n,f})_{n \geq 1}$ qui tend vers ∞ , telles que, sous certaines conditions sur la suite $(a_n)_{n \geq 1}$, on a presque sûrement

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T_{n,f} \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} - f \right\| = \chi_f.$$

Ce résultat généralise un résultat établi par Deheuvels [26], en couvrant

le cas où $f \in \mathcal{S}_1$ vérifie, en plus de certaines conditions de régularité,

$$\int_0^1 f'^2(t) dt = 1.$$

0.2 Accroissements du processus empirique généralisé

Malheureusement, l'étude du processus empirique uniforme devient plus délicate dans \mathbb{R}^d , à cause de problèmes liés à la transformation des quantiles. Un cadre théorique permettant l'étude de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans un espace mesurable plus général (par exemple \mathbb{R}^d , $d \geq 1$) est la théorie des **processus empiriques généralisés**. Nous définissons maintenant cette notion, restreinte au cas multidimensionnel.

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d , et soit \mathcal{G} une classe de fonctions réelles boréliennes sur \mathbb{R}^d . Pour tout entier $n \geq 1$ on pose

$$T_n(g) := \sum_{i=1}^n \left(g(Z_i) - \mathbb{E} \left(g(Z_i) \right) \right), \quad g \in \mathcal{G}.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, $T_n(\cdot)$ est un processus stochastique indexé par \mathcal{G} .

Nous étudierons dans cette thèse une classe d'objets mathématiques dérivés de $T_n(\cdot)$, appelés **accroissements du processus empirique généralisé**. Ce type d'objet, que nous définissons ci après, a été introduit pour la première fois par U.Einmahl et Mason [45]. Pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, pour tout réel $h > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$G_n(g, h, z) := \sum_{i=1}^n g \left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}} \right) - \mathbb{E} \left(g \left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}} \right) \right), \quad g \in \mathcal{G}.$$

Il d'agit là de l'estimateur à noyau de la densité classique (à une normalisation près), dont le noyau g varie dans la classe \mathcal{G} . Ainsi, si \mathcal{G} est une

classe de fonctions uniformément bornées, les $G_n(\cdot, z, h)$, $z \in \mathbb{R}^d$, $h > 0$, $n \geq 1$ peuvent être considérées comme des trajectoires aléatoires bornées sur \mathcal{G} . Nous traitons donc les $G_n(\cdot, z, h)$, $z \in \mathbb{R}^d$, $h > 0$, $n \geq 1$ comme des variables aléatoires à valeur dans un espace vectoriel de fonctions réelles bornées $\mathcal{B}(\mathcal{G})$, convenablement choisi pour des raisons de mesurabilité (voir la définition 4.1.3 dans le §4.1.3), et muni de la norme sup usuelle :

$$\|\Psi\|_{\mathcal{G}} := \sup_{g \in \mathcal{G}} |\Psi(g)|.$$

Dans [77], Mason a établi une loi fonctionnelle uniforme du logarithme itéré pour ces suites de processus, lorsque la taille de fenêtre $h := h_n$ décroît avec n en satisfaisant les hypothèses de Csörgö-Revesz-Stute suivantes, lorsque $n \rightarrow \infty$,

- (HV1) $0 < h_n \leq 1$, $h_n \downarrow 0$, $nh_n \uparrow \infty$,
- (HV2) $nh_n / \log n \rightarrow \infty$,
- (HV3) $\log(1/h_n) / \log_2 n \rightarrow \infty$,

et sous des conditions sur la taille de la classe de fonctions \mathcal{G} (voir (HK1)-(HK5) dans le §4.1.1).

Théorème (Mason, 2000)

Soient H un compact de \mathbb{R}^d d'intérieur non vide, $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes strictement positives satisfaisant les hypothèses (HV1)-(HV3) (voir §4.1.1), et \mathcal{G} une classe de fonctions vérifiant (HK1)-(HK5) (voir §4.1.1). Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue), telle que f est continue et strictement positive sur H . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit uniformément continue sur l'ensemble suivant (dilaté d'ordre α de H) :

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (0.2.0.7)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Alors on a presque sûrement

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot, z, h_n)}{(2f(z)nh_n \log(1/h_n))^{1/2}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0, \quad (0.2.0.8)$$

$$(ii) \forall \Psi \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, z, h_n)}{(2f(z)nh_n \log(1/h_n))^{1/2}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0. \quad (0.2.0.9)$$

Ici, \mathbb{K} est un compact de $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$, explicité dans le chapitre 1.

Notre contribution à l'étude des $G_n(\cdot, h_n, z)$, $z \in H$, $n \geq 1$ lorsque h_n converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ est présentée comme suit.

Chapitre 1.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques détails sur l'ensemble limite \mathbb{K} apparaissant dans (0.2.0.8) et (0.2.0.9). En effet, cet ensemble \mathbb{K} est la boule unité de l'espace autoreproduisant associé au processus gaussien $(W_{\mathcal{G}}(g))_{g \in \mathcal{G}}$, centré, dont la fonction de covariance est définie par

$$\text{Cov}\left(W_{\mathcal{G}}(f), W_{\mathcal{G}}(g)\right) := \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(z)dz, \quad f, g \in \mathcal{G}. \quad (0.2.0.10)$$

Les notions d'espace autoreproduisant et d'énergie gaussienne (notée J) associés à un processus gaussien ayant la forme de $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ sont définies. Ainsi, \mathbb{K} peut être vu comme l'ensemble des fonctions $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ dont l'énergie gaussienne J est inférieure à 1.

Chapitre 3.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques rappels sur la notion de principe de grandes déviations. En particulier, nous citons un résultat dû à Arcones [3] (théorème 3.3.1). Ce résultat donne un critère nécessaire et suffisant pour qu'une suite de processus stochastiques satisfasse

un principe de grandes déviations. Ce critère est très semblable au critère le plus utilisé pour montrer la convergence en loi d'une suite de processus stochastiques.

Nous introduisons ensuite la notion de **principe de grandes déviations uniforme** pour les tableaux triangulaires de variables aléatoires. Par exemple, nous dirons qu'un tableau triangulaire de variables aléatoires $(X_{i,n})_{n \geq 1, i \leq p_n}$, à valeurs dans \mathbb{R}^d satisfait le principe de grandes déviations uniforme pour un tableau triangulaire de réels strictement positifs $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction réelle J sur \mathbb{R}^d , lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} = 0,$$

pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$ on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in O \right) \right) \geq - \inf_{z \in O} J(z).$$

pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in F \right) \right) \leq - \inf_{z \in F} J(z).$$

Cette notion n'apporte, en elle même, rien de nouveau dans la théorie des grandes déviations. Cependant, elle s'avère être un outil très utile dont nous faisons usage dans les preuves des théorèmes 4.2.3, 4.3.2 et 5.2.1. En nous inspirant directement des travaux de Mason [77], Lynch et Sethuraman [75], Arcones [3], Cramér [15] et Chernoff [13], nous établissons plusieurs critères permettant de conclure qu'un tableau triangulaire $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait un principe de grandes déviations

Chapitre 4.

Ce chapitre comporte deux résultats principaux. Ces résultats sont des extensions du théorème de Mason cité plus haut (voir (0.2.0.8), (0.2.0.9)).

Dans un premier temps, nous étudions le comportement joint des couples

$$\left(\frac{G_n(\cdot, h_{n,1}, z)}{(2nh_{n,1} \log(1/h_{n,1}))^{1/2}}, \frac{G_n(\cdot, h_{n,2}, z)}{(2nh_{n,2} \log(1/h_{n,2}))^{1/2}} \right), z \in H$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, et lorsque les deux suites $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ vérifient les trois conditions (HV1)-(HV3), tout en étant significativement différentes. Par "significativement différentes", nous entendons qu'il existe $0 < d_1 < 1$ tel que

$$(HV4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(h_{n,1}) / \log(h_{n,2}) = d_1, \quad 0 < d_1 < 1.$$

Cette hypothèse est vérifiée, par exemple, lorsque $h_{n,1}$ et $h_{n,2}$ sont des puissances de n d'indices différents. En nous inspirant des méthodes développées par Mason [77] et Deheuvels [27], nous établissons le théorème suivant.

Théorème 4.2.3.

Soient H un compact de \mathbb{R}^d d'intérieur non vide, $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ deux suites de constantes strictement positives satisfaisant les hypothèses (HV1)-(HV4) (voir §4.1.1), et \mathcal{G} une classe de fonctions vérifiant (HK1)-(HK5) (voir §4.1.1). Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue). Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit continue et strictement positive sur l'ensemble suivant :

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\},$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Alors on a presque sûrement

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \forall (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}', \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \\
& \max \left\{ \left\| \Psi_1 - \frac{G_n(\cdot, h_{n,1}, z)}{(2nh_{n,1} \log(1/h_{n,1}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}}; \left\| \Psi_2 - \frac{G_n(\cdot, h_{n,2}, z)}{(2nh_{n,2} \log(1/h_{n,2}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} \right\} = 0, \\
(ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf_{(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}'} \\
& \max \left\{ \left\| \Psi_1 - \frac{G_n(\cdot, h_{n,1}, z)}{(2nh_{n,1} \log(1/h_{n,1}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}}; \left\| \Psi_2 - \frac{G_n(\cdot, h_{n,2}, z)}{(2nh_{n,2} \log(1/h_{n,2}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} \right\} = 0.
\end{aligned}
\tag{0.2.0.11}$$

Ce résultat est présenté et prouvé dans le §4.2. Le compact \mathbb{K}' est un ensemble dérivé de l'ensemble \mathbb{K} .

Dans un second temps, nous étendons le résultat de Mason (voir (0.2.0.8) et (0.2.0.9)) en montrant que ce résultat est vrai uniformément et $h_n \leq h \leq \tilde{h}_n$, lorsque $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ vérifient (HV1)-(HV3). Ainsi, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 4.3.2.

Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ deux suites de réels vérifiant (HV1)-(HV3), et soit \mathcal{G} une classe de fonctions réelles sur \mathbb{R}^d vérifiant (HK1)-(HK5). Soit H un hypercube fermé d'intérieur non vide, et soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue). Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit continue et strictement positive sur l'ensemble suivant :

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \tag{0.2.0.12}$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Alors on a presque sûrement

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n, z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0,$$

$$(ii) \forall \Psi \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0.$$

Ce résultat est présenté et prouvé dans le §4.3.

L'outil principal des preuves des théorèmes 4.2.3 et 4.3.2 est l'établissement de principes de grandes déviations uniformes pour les tableaux triangulaires de processus $(2f(z)nh_n \log(1/h_n))^{-1/2} G_n(\cdot, h_n, z)$, $n \geq 1$, $z \in H$. Grâce aux méthodes proposées par Mason [77], et avec les outils développés dans le chapitre 3, nous montrons que ce tableau triangulaire vérifie, sous (HV1)-(HV3), le principe de grandes déviations du processus gaussien $(W_{\mathcal{G}}(g))_{g \in \mathcal{G}}$ (voir (0.2.0.10)). Ainsi, sans utiliser de théorème d'approximation forte, il est possible d'établir ce genre de principe de grandes déviations. Ces derniers constituent l'outil principal pour établir des lois fonctionnelles du logarithme itéré.

Chapitre 5.

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement de $G_n(\cdot, z, h_n)$ dans le cas suivant. Tout d'abord, la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ ne vérifie pas (HV1)-(HV3), mais les conditions suivantes.

$$(HVE1) \quad 0 < h_n < 1, \quad h_n \downarrow 0, \quad nh_n \uparrow \infty$$

$$(HVE2) \quad nh_n / \log n \rightarrow c > 0,$$

Ce domaine de vitesses de convergence pour la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ est appelé "domaine de non invariance" ou "domaine d'Erdős-Rényi". En effet, Erdős et Rényi ont établi le premier résultat dans ce domaine [48], puis ce résultat a été étendu par de nombreux chercheurs. En particulier,

Deheuvels et Mason [33] ont établi une loi fonctionnelle uniforme **non standard** du logarithme itéré pour les accroissements du processus empirique uniforme, dont une application importante en statistique non paramétrique est un théorème de non consistance forte uniforme de l'estimateur à noyau de la densité sur \mathbb{R} . En nous inspirant des travaux de ces chercheurs, nous donnons une loi limite non standard pour $G_n(\cdot, z, h_n)$, sous les hypothèses (HVE1)-(HVE2), et en se restreignant au cas où la classe de fonctions \mathcal{G} est

$$\mathcal{G} := \left\{ 1_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]}, (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d \right\}.$$

En enlevant le paramètre de centrage (qui n'a plus aucun rôle sous (HVE1)-(HVE2)), notre étude se porte finalement sur l'objet suivant. Pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $f(z) > 0$ et pour tout $s = (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d$, on pose

$$\Delta_n(z, h_n, s) := \frac{\sum_{i=1}^n 1_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_i - z}{h_n^{1/d}} \right)}{c f(z) \log n}. \quad (0.2.0.13)$$

En utilisant les résultats du chapitre 3, nous établissons un principe de grandes déviations uniforme non standard pour le tableau triangulaire de processus $(\Delta_n(z, h_n \cdot))_{n \geq 1, z \in H}$. Il est ainsi montré que ce tableau triangulaire de processus suit le principe de déviations modérées d'un processus de Poisson standard sur $[0, 1]^d$. Nous établissons alors la loi fonctionnelle uniforme standard suivante.

Théorème 5.2.1.

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ un échantillon i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f . Soit H un compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d , et soit $\alpha > 0$. Supposons que f est continue et strictement positive sur l'ensemble suivant :

$$H^\alpha := \left\{ z' \in \mathbb{R}^d, \inf_{z \in H} \|z' - z\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (0.2.0.14)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes vérifiant (HVE1) et (HVE2). Alors on a presque sûrement

$$(i) \forall z \in H, \forall g \in \Gamma_{cf(z)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \|\Delta_n(z', h_n, \cdot) - g\|, z' \in H \right\} = 0, \quad (0.2.0.15)$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf \left\{ \|\Delta_n(z, h_n, \cdot) - g\|, g \in \Gamma_{cf(z)} \right\} = 0. \quad (0.2.0.16)$$

Ici, les ensembles $\Gamma_{cf(z)}$, $z \in H$ sont des compacts issus de la théorie des déviations modérées d'un processus de Poisson standard sur $[0, 1]^d$ (voir le §5.1).

Chapitre 1

Rappels concernant les variables aléatoires gaussiennes

Si cette thèse concerne le processus empirique, nous aurons à utiliser des outils mathématiques issus de la théorie relative à la géométrie gaussienne. Dans ce chapitre, nous avons pour but de donner un cadre théorique suffisant pour définir les objets et les outils que nous utiliserons dans les preuves des lois du logarithme itéré présentées dans ce document. Le premier sous-chapitre établit un cadre théorique pour les mesures gaussiennes de Radon dans un espace de Banach séparable. On y définit la notion d'espace autoreproduisant ainsi que l'énergie gaussienne. Dans le second sous-chapitre, nous montrons qu'un processus stochastique peut induire une mesure gaussienne de Radon sur un espace de Banach de fonctions uniformément continues. Nous considérons un cas particulier de processus gaussiens indexés par une classe de fonctions, et nous donnerons des expressions de l'espace autoreproduisant et de l'énergie gaussienne associés à ce type de processus. Dans ces deux premiers sous-chapitres, nous nous contenterons de donner des définitions et des résultats déjà bien connus en géométrie gaussienne. C'est pourquoi il y aura peu de preuves. Nous renvoyons par exemple à [73] pour des résultats étendus ainsi qu'à leur preuves. Enfin le troisième sous-chapitre concerne les inégalités dites de "petites boules" pour le

processus de Wiener. Ce sous-chapitre énonce les résultats issus des travaux de De Acosta [2], Gorn et Lifshits [54], et Berthet et Lifshits [9]. Ces résultats seront utilisés dans la preuve de lois limites de type Chung-Mogulskii pour le processus empirique local, dans le §2.3.1

1.1 Mesures gaussiennes sur un espace de Banach

La notion de mesure gaussienne s'étend aux espaces vectoriels topologiques localement convexes. Nous nous limitons au cas des espaces de Banach séparables.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Mesure gaussienne sur un espace de Banach séparable)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable. On dit qu'une mesure de probabilité μ sur les boréliens de $(E, \|\cdot\|)$ est une mesure gaussienne lorsque toute forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|)$ suit une loi gaussienne sous μ . On dit que la mesure gaussienne μ est centrée lorsque toute forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|)$ suit une loi centrée sous μ .

Une mesure gaussienne a des propriétés de concentration particulières lorsqu'elle est de Radon. Nous définissons ici cette notion.

Définition 1.1.2 (Mesure de Radon) *On dit qu'une mesure de probabilité μ sur un espace topologique (E, \mathcal{O}) est de Radon lorsque pour tout borélien B de (E, \mathcal{O}) , et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact K de (E, \mathcal{O}) inclus dans B vérifiant*

$$\mu(B) \leq \mu(K) + \epsilon.$$

On dit que μ est régulière lorsque pour tout borélien B de (E, \mathcal{O}) , et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F de (E, \mathcal{O}) inclus dans B vérifiant

$$\mu(B) \leq \mu(F) + \epsilon.$$

On dit que μ est tendue lorsque, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un compact K de (E, \mathcal{O}) vérifiant

$$\mu(K) > 1 - \epsilon.$$

1.1.2 Noyau associé à une mesure de Radon gaussienne

Les propriétés de linéarité des mesures gaussiennes permettent de définir les notions suivantes.

Définition 1.1.3 Soit μ une mesure gaussienne centrée sur un espace de Banach séparable $(E, \|\cdot\|)$. Nous notons E' le dual topologique de $(E, \|\cdot\|)$, et, comme $E' \subset L^2(\mu)$, nous définissons E^* comme la fermeture de E' dans l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$.

Propriété 1.1.1 Pour tout $z \in E^*$, il existe un unique élément de E noté $I(z)$ tel que, pour tout $g \in E^*$, on ait

$$g(I(z)) := \mathbb{E}_\mu(gz). \quad (1.1.2.1)$$

$I(\cdot)$ définit une application linéaire injective $L^2(\mu)$ -continue sur E^* .

Définition 1.1.4 (Énergie gaussienne) Soit $z \in E^*$, et $h=I(z)$. On définit l'énergie gaussienne de h par

$$J(h) = J_\mu(h) := \|z\|_{L^2(\mu)}^2.$$

Par convention, pour $h \in E - I(E^*)$, on pose

$$J(h) = \infty.$$

Définition 1.1.5 (Espace autoreproduisant) On appelle espace autoreproduisant d'une mesure gaussienne (noté H_μ) l'adhérence de l'image de E^* par I , adhérence prise au sens de la norme $\sqrt{J(\cdot)}$.

Définition 1.1.6 (Noyau d'une mesure gaussienne) Pour une mesure gaussienne μ , on définit le noyau associé à μ

$$\mathbb{K} := \left\{ h \in H_\mu, J_\mu(h) \leq 1 \right\}.$$

1.1.3 Variables aléatoires gaussiennes de dimension finie

Nous considérons ici des mesures gaussiennes dans \mathbb{R}^p , $p \geq 1$ entier. La propriété suivante nous sera utile dans le §3.4.

Propriété 1.1.2 *Soit μ une mesure de Radon sur un espace de Banach séparable $(E, \|\cdot\|_E)$, et soit L un application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ vers un autre espace de Banach séparable $(F, \|\cdot\|_F)$. Soit μ^L la mesure image de μ par L . Alors μ^L est une mesure de Radon gaussienne dont l'espace autoreproduisant est*

$$H_{\mu^L} = L(H_\mu),$$

et dont l'énergie gaussienne est

$$J_{\mu^L}(l) := \inf \{ J_\mu(e), e \in E, L(e) = l \}, l \in L.$$

La proposition suivante donne l'énergie gaussienne et l'espace autoreproduisant d'une mesure gaussienne de dimension finie.

Propriété 1.1.3 (Noyau associé à un vecteur gaussien) *Soit X un vecteur gaussien sur \mathbb{R}^p de matrice de variance-covariance Σ , et soit μ_X la mesure gaussienne induite par X . On a*

$$H_{\mu_X} = \text{Im}(\Sigma^{1/2}),$$

$$J_{\mu_X}(x) = \inf \{ y' \Sigma y, \Sigma y = x, y \in \mathbb{R}^p \}, x \in \mathbb{R}^p.$$

1.1.4 Inégalité de concentration, formules de translation

L'espace H_μ est une direction privilégiée qui détermine les propriétés de concentration d'une mesure de Radon gaussienne. Nous donnons ici deux propriétés de cet espace.

Théorème 1.1.1 [Formule de translation] *Soit $h=I(z) \in H_\mu$. La mesure μ_h image de μ par la translation de vecteur h est absolument continue par rapport à μ , de densité*

$$\frac{d\mu_h}{d\mu} = \exp \left(z(\cdot) - \frac{1}{2} \|z\|_{L_2(\mu)}^2 \right).$$

Inégalité 1.1.1 [*Inégalité isopérimétrique gaussienne*] Soit μ une mesure gaussienne sur $(E, \|\cdot\|)$. On a, pour tout A borélien de $(E, \|\cdot\|)$,

$$\mu\left(f \in E, \inf_{g \in A} \|f - g\| \leq u\right) \geq \Phi\left(u + \Phi^{-1}(\mu(A))\right),$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Preuve : Le chapitre 11 dans [73] donne une preuve détaillée et progressive de ce théorème. \square

Le théorème précédent n'est pas exactement l'inégalité isopérimétrique gaussienne, mais seulement une conséquence qui, dans les usages, a hérité de son nom.

1.2 Processus gaussiens réguliers

Dans ce sous-chapitre, nous définissons la notion de processus gaussien, et nous montrons que certains processus gaussiens peuvent induire une mesure de Radon sur un espace de Banach séparable.

1.2.1 Définitions

Nous donnons ici une série de définitions.

Définition 1.2.1 (Processus stochastique) Soit T un ensemble quelconque, et soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle processus stochastique indexé par T toute famille de variables aléatoires réelles définies sur Ω indexée par T .

Définition 1.2.2 (Processus gaussien) On appelle processus gaussien (resp. gaussien centré) indexé par T , tout processus $(X(t))_{t \in T}$ tel que, pour toute famille finie (t_1, \dots, t_p) de points de T , le vecteur aléatoire $(X(t_1), \dots, X(t_p))$ suit une loi gaussienne (resp. gaussienne centrée) dans \mathbb{R}^p .

Définition 1.2.3 (Semimétrie intrinsèque) Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus tel que

$$\forall t \in T, X(t) \in L^2(\mathbb{P}).$$

On définit la semimétrie suivante sur T

$$\rho_X(s, t) := \sqrt{\mathbb{E}(X(t) - X(s))^2}.$$

Définition 1.2.4 (Modification d'un processus) Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit qu'un processus $(Y(t))_{t \in T}$, défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une modification de $(X(t))_{t \in T}$ lorsque, pour tout $t \in T$ on a

$$X(t) = Y(t) \text{ p.s.}$$

Remarquons que deux processus modification l'un de l'autre ont la même semi-métrie intrinsèque.

Définition 1.2.5 (Processus séparable) On dit qu'un processus $(X(t))_{t \in T}$ indexé par un espace métrique (T, d) est séparable s'il existe un sous ensemble dénombrable $T' \subset T$ tel que, pour tout ouvert O de (T, d) , on ait

$$\sup_{t \in O} X(t) = \sup_{t \in O \cap T'} X(t)$$

avec probabilité 1.

Proposition 1.2.1 Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus stochastique. Si (T, ρ_X) est séparable, alors $(X(t))_{t \in T}$ admet une modification séparable.

Définition 1.2.6 (Normes de Orlicz) Soit ϕ une fonction convexe croissante sur $[0, \infty[$, telle que $\phi(0) = 0$. La quantité

$$\|X\|_\phi = \inf \left\{ C > 0 : \mathbb{E} \left(\phi \left(\frac{|X|}{C} \right) \right) < 1 \right\}$$

définit une norme appelée norme de Orlicz engendrée par ϕ , ou ϕ -norme.

Exemples :

Pour $p > 0$, le choix de $\phi : t \rightarrow t^p$ aboutit à la norme L^p classique. Nous noterons la fonction particulière suivante.

$$\phi_2(x) = \exp(x^2) - 1. \quad (1.2.1.1)$$

Les ϕ -normes issues de fonctions convexes croissant rapidement vers ∞ permettent d'établir des bornes supérieures de queues de distributions très fortes, comme le montre la propriété suivante.

Propriété 1.2.1 (Inégalité de Markov pour les ϕ -normes) *On a, pour tout $t > 0$*

$$\mathbb{P}\left(|X| > t\right) \leq \frac{1}{\phi\left(\frac{t}{\|X\|_\phi}\right)}$$

dès lors que cette norme est finie.

Preuve : Pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|X| > t\right) &\leq \mathbb{P}\left(\phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\phi}\right) \geq \phi\left(\frac{t}{\|X\|_\phi}\right)\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\left(\phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\phi}\right)\right)}{\phi\left(\frac{t}{\|X\|_\phi}\right)} \\ &= \frac{1}{\phi\left(\frac{t}{\|X\|_\phi}\right)}. \end{aligned}$$

La propriété est ainsi démontrée. \square

1.2.2 Une condition suffisante pour la continuité des trajectoires

Nous rappelons ici une condition suffisante pour qu'un processus gaussien $(X(t))_{t \in T}$ ait des trajectoires régulières sur l'espace semimétrique (T, ρ_X) , où ρ_X est la semimétrique intrinsèque de $(X(t))_{t \in T}$ (voir la définition 1.2.3).

Définition 1.2.7 (Nombre d'emboîtement) Soit (T, d) un espace semi-métrique. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on définit

$$\mathcal{N}(\epsilon, T, d) := \min \left\{ n \geq 1 : \exists (t_1, \dots, t_n) \in T^n, \forall t \in T, \exists i \in \{1, \dots, n\}, d(t, t_i) < \epsilon \right\}$$

Cette quantité est appelée nombre d'emboîtement de la classe T pour le rayon ϵ et la semi-métrique d . La notion suivante est primordiale pour contrôler la régularité d'un processus stochastique.

Définition 1.2.8 (Intégrale de Dudley) Soit (T, d) un espace semi-métrique. On définit

$$\mathcal{D}(T, d) := \int_0^\infty \sqrt{\log(\mathcal{N}(\epsilon, T, d))} d\epsilon.$$

Cette quantité est appelée intégrale de Dudley de la classe T pour la semi-métrique d .

Théorème 1.2.1 (Une condition suffisante de continuité des trajectoires)

Soit ϕ une fonction convexe croissante nulle en 0, telle qu'il existe une constante strictement positive $c > 0$ vérifiant

$$\limsup_{x, y \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)\phi(y)}{\phi(cxy)} < \infty.$$

Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus séparable sur un ensemble T muni d'une semi-métrique d , et tel que

$$\forall s, t \in T, \|X_s - X_t\|_\phi \leq Cd(s, t).$$

Alors il existe une constante K ne dépendant que de ϕ et C telle que, pour tous $\eta > 0, \delta > 0$ on ait

$$\left\| \sup_{s, t: d(s, t) \leq \delta} \|X_s - X_t\|_\phi \right\|_\phi \leq K \left[\int_0^\eta \phi^{-1}(\mathcal{N}(\epsilon, T, d)) d\epsilon + \delta \phi^{-1}(\mathcal{N}^2(\eta, T, d)) \right]. \quad (1.2.2.1)$$

Corollaire 1.2.1.1 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut choisir K , fonction de ϕ et C seulement, tel que*

$$\left\| \sup_{s,t \in T^2} |X_s - X_t| \right\|_{\phi} \leq K \int_0^{\text{diam}(T,d)} \phi^{-1}(\mathcal{N}(\epsilon, T, d)) d\epsilon.$$

Preuve : En choisissant $\eta = \delta = \text{diam}(T, d)$, on remarque que $\mathcal{N}(\eta, T, d) = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{s,t \in T^2} |X_s - X_t| \right\|_{\phi} &\leq K \int_0^{\text{diam}(T,d)} \phi^{-1}(\mathcal{N}(\epsilon, T, d)) d\epsilon + \text{diam}(T, d) \phi^{-1}(1) \\ &= K \int_0^{\text{diam}(T,d)} \left(\phi^{-1}(\mathcal{N}(\epsilon, T, d)) + \phi^{-1}(1) \right) d\epsilon \\ &\leq 2K \int_0^{\text{diam}(T,d)} \phi^{-1}(\mathcal{N}(\epsilon, T, d)) d\epsilon. \end{aligned}$$

En effet, $\phi^{-1}(\mathcal{N}(\cdot, T, d))$ est décroissante. \square

Corollaire 1.2.1.2 *Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus d -séparable vérifiant*

$$\int_0^{\infty} \phi^{-1}(\mathcal{N}(\epsilon, T, d)) d\epsilon < \infty,$$

et vérifiant, pour tous $s, t \in T$,

$$\|X_t - X_s\|_{\phi} \leq Cd(s, t).$$

Alors $(X(t))_{t \in T}$ admet presque sûrement des trajectoires uniformément continues sur (T, d) .

Preuve : En minimisant en η puis en δ l'expression (1.2.2.1), on montre aisément qu'il existe une fonction $\tilde{A}(\delta)$ de limite nulle en 0 et telle que,

pour tout $\delta > 0$ on ait

$$\left\| \sup_{d(s,t) \leq \delta} |X_t - X_s| \right\|_{\phi} \leq \tilde{A}(\delta).$$

Soit $\epsilon > 0$ fixé, et soit $n \geq 1$ un entier fixé. Nous appliquons l'inégalité de Markov pour les ϕ -normes (propriété 1.2.1) pour obtenir l'existence de $\delta_n(\epsilon) > 0$ vérifiant

$$\mathbb{P}\left(\sup_{d(s,t) \leq \delta_n(\epsilon)} |X_t - X_s| \geq \epsilon \right) \leq 2^{-n}.$$

Ainsi, pour $\epsilon > 0$ fixé, on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\sup_{d(s,t) \leq \delta_n(\epsilon)} |X_t - X_s| \geq \epsilon \right) < \infty.$$

En appliquant successivement le lemme de Borel-Cantelli à une suite ϵ_k tendant vers 0, on obtient le résultat voulu. \square

Corollaire 1.2.1.3 *Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien centré, de semimétrie intrinsèque ρ_X , tel que*

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\log(\mathcal{N}(\epsilon, T, \rho_X))} d\epsilon < \infty. \quad (1.2.2.2)$$

Alors $(X(t))_{t \in T}$ admet une modification dont les trajectoires sont p.s uniformément continues sur T (pour la semimétrie ρ_X), et

$$\left\| \sup_{s,t \in T^2} |X_t - X_s| \right\|_{\phi_2} \leq K \int_0^{\text{diam}(T,d)} \sqrt{\log(\mathcal{N}(\epsilon, T, \rho_X))} d\epsilon,$$

où K est une constante universelle.

Preuve : Si l'intégrale de Dudley (1.2.2.2) est finie, alors T est bien sûr précompact pour ρ_X , donc séparable. $(X_t)_{t \in T}$ admet donc une version

séparable d'après la proposition 1.2.1. De plus, un calcul direct montre que, pour tous $s, t \in T$,

$$\| X_t - X_s \|_{\phi_2} = \sqrt{\frac{8}{3}} \rho_X(s, t).$$

Puis on applique les deux corollaires précédents. \square

1.2.3 Mesure gaussienne engendrée par un processus gaussien régulier

Nous donnons ici notre définition de "processus gaussien régulier".

Définition 1.2.9 (Processus régulier) *Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien de semimétrique intrinsèque ρ_X . On dit que $(X_t)_{t \in T}$ est régulier s'il est séparable et si*

$$\int_0^\infty \sqrt{\log(\mathcal{N}(\epsilon, T, \rho_X))} d\epsilon < \infty.$$

D'après le corollaire 1.2.1.3, nous savons qu'un processus gaussien régulier $(X_t)_{t \in T}$ a des trajectoires presque sûrement à valeur dans l'espace $\mathcal{UC}(T, \rho_X)$, espace de Banach des fonctions uniformément ρ_X -continues sur T , muni de la norme sup usuelle

$$\| z \|_T := \sup_{t \in T} | z(t) |.$$

Nous allons montrer que $(X_t)_{t \in T}$ induit une mesure gaussienne de Radon sur les boréliens de $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \| \cdot \|_T)$.

Propriété 1.2.2 *Dans $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \| \cdot \|_T)$, la tribu des boréliens est engendrée par la famille d'applications $\{ \Pi_t, t \in T \}$, où, pour tout $t \in T$ on a posé*

$$\begin{aligned} \Pi_t : (\mathcal{UC}(T, \rho_X), \| \cdot \|_T) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Psi &\rightarrow \Psi(t). \end{aligned}$$

Preuve : Soit T_0 un sous ensemble dénombrable dense dans le précompact (T, ρ_X) . Soit $\Psi_1 \in \mathcal{UC}(T, \rho_X)$ et $\epsilon \geq 0$. Par continuité des trajectoires, il y a égalité des sous-ensembles suivants de $\mathcal{UC}(T, \rho_X)$.

$$\begin{aligned} \left\{ \|\Psi - \Psi_1\|_T \leq \epsilon \right\} &= \bigcap_{t \in T_0} \left\{ |\Psi(t) - \Psi_1(t)| \leq \epsilon \right\} \\ &= \bigcap_{t \in T_0} \left\{ \Pi_t(\Psi) \in [\Pi_t(\Psi_1) - \epsilon, \Pi_t(\Psi_1) + \epsilon] \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, la tribu engendrée par les boules fermées est incluse dans la tribu engendrée par les Π_t , $t \in T$. Comme $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\cdot\|_T)$ est séparable, la tribu des boréliens est engendrée par les boules. On conclut alors aisément la preuve de la propriété 1.2.2. \square

La propriété précédente nous assure donc qu'un processus régulier $(X(t))_{t \in T}$ induit une mesure de probabilité μ_X sur les boréliens de $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\cdot\|_T)$.

Propriété 1.2.3 *Soit $X(\cdot) := (X(t))_{t \in T}$ un processus régulier, et soit L une forme linéaire continue sur $\mathcal{UC}(T, \rho_X)$. Alors $L(X(\cdot))$ suit une loi gaussienne.*

Preuve : Toute forme linéaire continue sur $E = \mathcal{UC}(T, \rho_X)$ s'écrit sous la forme

$$L = L_\nu : \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X) \rightarrow \int_{\mathcal{F}} \Psi(f) d\nu(f),$$

où ν est une mesure de Radon sur (T, ρ_X) . Pour tout entier $n \geq 1$ fixé, construisons une partition de (\mathcal{F}, ρ_X) d'ensembles disjoints $(A_{i,n})_{i=1 \dots p_n}$ dont les ρ_X -diamètres sont tous inférieurs à $1/n$. Dans chaque $A_{i,n}$, nous choisissons un élément noté $f_{i,n}$. On définit alors l'application.

$$\begin{aligned} L_n : \mathcal{UC}(T, \rho_X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Psi &\rightarrow \sum_{i=1}^{p_n} \Psi(f_{i,n}) \nu(A_{i,n}). \end{aligned}$$

Comme $X(\cdot) := (X(t))_{t \in T}$ est un processus gaussien, $L_n(X(\cdot))$ suit une loi gaussienne. De plus, pour tout $\Psi \in \mathcal{UC}(T, \rho_X)$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\Psi) = L(\Psi).$$

Ainsi, $L(X(\cdot))$ suit une loi gaussienne en tant que limite presque sûre de variables aléatoires gaussiennes. \square

Lemme 1.2.1 *Soit $(X(t))_{t \in T}$ un processus gaussien régulier. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact de $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\cdot\|_T)$ vérifiant*

$$\mathbb{P}(X(\cdot) \in K) \geq 1 - \epsilon.$$

Par conséquent, $(X(t))_{t \in T}$ induit une mesure tendue sur les boréliens de $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\cdot\|_T)$.

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ fixé. En appliquant l'inégalité de Markov pour les ϕ -normes (voir la propriété 1.2.1) conjointement au théorème 1.2.1, on peut, pour tout entier $k \geq 1$, choisir un $\delta_k > 0$ suffisamment petit pour avoir

$$\mathbb{P}\left(\sup_{\rho_X(s,t) \leq \delta_k} |X_t - X_s| > \frac{1}{k}\right) \leq \epsilon 2^{-k}.$$

Notons

$$K = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ \sup_{\rho_X(s,t) \leq \delta_k} |X_t - X_s| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

En appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli, K a pour adhérence un compact, et

$$\mathbb{P}(X(\cdot) \notin K) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon 2^{-k} = \epsilon,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Lemme 1.2.2 *Un processus $(X(t))_{t \in T}$ régulier induit une mesure régulière sur les boréliens de $(\mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\cdot\|_T)$.*

Preuve : Un raisonnement classique montre que la sous collection des boréliens suivante est une tribu :

$$\left\{ B, \forall \epsilon > 0, \exists O \text{ ouvert, } F \text{ fermé, } O \subset B \subset F, \mathbb{P}\left(X(\cdot) \in F - O\right) \leq \epsilon \right\}.$$

Il suffit donc de montrer, d'après la propriété 1.2.2, que toute boule fermée est dans cette tribu, ce qui est une conséquence directe du fait que $(X(t))_{t \in T}$ induit une mesure tendue et que, pour tout $\Psi_1 \in \mathcal{UC}(T, \rho_X)$ et tout $\epsilon \geq 0$ on a

$$\left\{ \Psi \in \mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\Psi - \Psi_1\|_T \leq \epsilon \right\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ \Psi \in \mathcal{UC}(T, \rho_X), \|\Psi - \Psi_1\|_T < \epsilon + \frac{1}{n} \right\}.$$

□

Définition 1.2.10 *Pour une processus régulier $(X(t))_{t \in T}$, nous noterons μ_X la mesure gaussienne de Radon induite par $(X(t))_{t \in T}$.*

Définition 1.2.11 (Processus gaussien indexé par une classe de fonctions)

Soit (E, \mathcal{B}, m) un espace mesuré, et \mathcal{F} une classe de fonctions réelles définies sur E , et de carrés m -intégrables. On définit alors (à une version près) le processus gaussien indexé par \mathcal{F} noté $(X(f))_{f \in \mathcal{F}}$ comme le processus centré ayant pour fonction de covariance

$$\text{Cov}(X_f, X_g) = \int fg dm, \quad f, g \in \mathcal{F}.$$

Nous donnons quelques exemples de processus gaussiens indexés par des classes de fonctions.

Exemples :

1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Une construction du mouvement brownien sur $[0, 1]$ est faite en considérant comme espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$ et comme classe de fonctions

$$\mathcal{F} := \left\{ 1_{[0, t]}, t \in [0, 1] \right\}.$$

Ainsi

$$W(t) := X(1_{[0, t]}), \quad t \in [0, 1].$$

2. Le pont brownien peut être construit de la même manière en considérant

$$\mathcal{F} := \left\{ 1_{[0,t]} - t1_{[0,1]}, t \in [0, 1] \right\},$$

classe de fonctions définies sur l'espace mesuré $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$.

Ainsi on peut définir

$$B(t) := X(1_{[0,t]} - t1_{[0,1]}), t \in [0, 1].$$

3. Soit $(H, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et \mathcal{F} une classe de fonctions de carrés \mathbb{P} -intégrables sur H . On définit le \mathbb{P} -pont brownien sur \mathcal{F} en considérant la classe de fonctions

$$\mathcal{F}' := \left\{ f - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f) \right\}.$$

On définit alors

$$B_{\mathbb{P}}(f) := X(f - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(f)), f \in \mathcal{F}.$$

1.2.4 Noyau associé à un processus régulier

Un processus régulier $(X(t))_{t \in T}$ induit une mesure gaussienne de Radon μ_X . Nous allons donner une expression plus aisée à manier de l'énergie gaussienne J_{μ_X} de l'espace autoreproduisant H_{μ_X} et du noyau \mathbb{K}_{μ_X} , notions définies dans le §1.1.2.

Théorème 1.2.2 *Soit μ une mesure gaussienne de Radon centrée sur un espace de Banach séparable $(E, \|\cdot\|)$. Soit $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ un espace de Hilbert, \tilde{I} un opérateur linéaire de $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ dans $(E, \|\cdot\|)$ et \tilde{I}^* son opérateur adjoint. Supposons que l'on ait, pour tout couple (L_1, L_2) de formes linéaires continues sur $(E, \|\cdot\|)$,*

$$L_1\left(\tilde{I}\tilde{I}^*(L_2)\right) = \text{Cov}_{\mu}(L_1, L_2).$$

Alors

$$H_{\mu} = \tilde{I}(L).$$

De plus

$$\forall h \in H_\mu, J_\mu(h) = \inf_{u \in \tilde{I}^{-1}(h)} \|u\|_L^2.$$

Corollaire 1.2.2.1 Soit (H, \mathcal{B}, m) un espace mesuré, et soit, $\mathcal{F} \subset L = L^2(H, \mathcal{B}, m)$ une classe de fonctions. Soit $(X(\cdot))$ un processus gaussien centré indexé par \mathcal{F} , basé sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ayant pour fonction de covariance

$$\text{Cov}(X(f), X(g)) := \int_H fg dm.$$

Supposons que $(X(\cdot))$ est régulier. Soit μ_X la mesure de Radon gaussienne induite par $(X(\cdot))$ sur $\mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X)$. Alors on a

$$H_{\mu_X} = \left\{ \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), \exists l \in L^2(H, \mathcal{B}, m), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H fldm \right\},$$

et

$$J_{\mu_X}(\Psi) := \inf \left\{ \int_H l^2 dm, l \in L^2(H, \mathcal{B}, m), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H lfdm \right\}, \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X) \quad (1.2.4.1)$$

avec, par convention, $\inf \emptyset = \infty$.

Preuve : Posons

$$L := L^2(H, \mathcal{B}, m)$$

muni de son produit scalaire canonique que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$. Posons aussi

$$(E, \|\cdot\|) := (\mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), \|\cdot\|_{\mathcal{F}}).$$

Soit maintenant L une forme linéaire continue sur $(E, \|\cdot\|)$, nécessairement de la forme

$$L_\mu : \Psi \rightarrow \int_T \Psi(f) d\nu(f),$$

où ν est une mesure de Radon sur (\mathcal{F}, ρ_X) . Remarquons que, pour toute mesure de Radon sur (\mathcal{F}, ρ_X) , on a

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(X(f)^2 \right) d\nu(f) = \int_{\mathcal{F}} \|f\|_{L^2(H,m)}^2 d\nu(f) < \infty. \quad (1.2.4.2)$$

En effet, comme, $X(\cdot)$ est régulier, il s'ensuit que (\mathcal{F}, ρ_X) est précompact. Comme ν est finie, et que, pour tous $f, g \in \mathcal{F}$,

$$\rho_X^2(f, g) := \text{Var} \left(X(f) - X(g) \right) = \|f - g\|_{L^2(H,m)}^2,$$

on en déduit (1.2.4.2). Pour L_{ν_1}, L_{ν_2} deux formes linéaires continues, remarquons que, par application du théorème de Fubini (grâce à (1.2.4.2)),

$$\begin{aligned} \text{Cov}_{\mu_X} \left(L_{\nu_1}, L_{\nu_2} \right) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(L_{\nu_1} (X(\cdot)) L_{\nu_2} (X(\cdot)) \right) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\int_{\mathcal{F}} X(f) d\nu_1(f) \int_{\mathcal{F}} X(f) d\nu_2(f) \right) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(X(f) X(f') \right) d\nu_1(f) d\nu_2(f') \\ &= \int_{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} \left(\int f f' dm \right) d\nu_1(f) d\nu_2(f'). \end{aligned} \quad (1.2.4.3)$$

En vue d'appliquer le théorème précédent, posons

$$\begin{aligned} \tilde{I} : L &\rightarrow E \\ l &\rightarrow \Psi : \Psi(f) = \langle l, f \rangle_L = \int l f dm, \quad f \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, \tilde{I} est bien une application continue de $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ vers $(E, \|\cdot\|)$. Posons maintenant

$$\tilde{I}^*(L_{\nu}) := \int_{\mathcal{F}} f d\nu(f) \in L.$$

Ici, l'intégrale est prise au sens de Bochner dans l'espace $L^2(m)$ muni de sa norme canonique et de sa tribu de boréliens. Cette intégrale est bien

définie d'après (1.2.4.2). On constate ensuite que \tilde{I}^* est bien l'adjoint de \tilde{I} pour $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ et $(E, \|\cdot\|)$. En effet, pour toute forme linéaire continue L_ν sur $\mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X)$ et $l \in L$ on a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}^*(L_\nu), l \rangle_L &= \int_H \left(\int_{\mathcal{F}} f d\nu(f) \right) (u) l(u) dm(u) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \langle f, l \rangle_L d\nu(f) \\ &= L_\nu(\tilde{I}(l)). \end{aligned} \tag{1.2.4.4}$$

La permutation d'intégrales dans (1.2.4.4) est licite en conséquence de (1.2.4.2). On a alors, d'après (1.2.4.4),

$$\begin{aligned} \tilde{I}\tilde{I}^*(L_{\mu_1}) : f &\rightarrow \langle \tilde{I}^*(L_{\nu_1}), f \rangle_L \\ &= \int_{\mathcal{F}} d\nu_1(f') \end{aligned} \tag{1.2.4.5}$$

Puis, d'après (1.2.4.3),

$$\begin{aligned} L_{\nu_1}(\tilde{I}\tilde{I}^*(L_{\nu_2})) &= \int_{\mathcal{F}} \int_{\mathcal{F}} \langle f, f' \rangle_L d\nu_1(f') d\nu_2(f) \\ &= L_{\nu_1}(K(L_{\nu_2})). \end{aligned}$$

\tilde{I} vérifie donc bien les hypothèses du théorème 1.2.2. Ainsi, en notant μ_X la mesure gaussienne de Radon induite par $(X(t))_{t \in T}$, on a

$$H_{\mu_X} = \left\{ \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), \exists l \in L^2(H, \mathcal{B}, m), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H f l dm, \right\},$$

et l'énergie gaussienne associée à μ_X est définie par

$$J_{\mu_X}(\Psi) := \inf \left\{ \int_H l^2 dm, l \in L^2(H, \mathcal{B}, m), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H l f dm \right\}, \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X) \tag{1.2.4.6}$$

avec, par convention, $\inf \emptyset = \infty$. \square

Remarque 1.2.1 Si l'on note $L^*(\mathcal{F})$ le sous-espace de Hilbert de $L^2(H, \mathcal{B}, m)$ engendré par \mathcal{F} , l'expression précédente peut être réduite à

$$J(\Psi) := \inf \left\{ \int_H l^2 dm, l \in L^*(\mathcal{F}), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H l f dm \right\}, \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), \quad (1.2.4.7)$$

où l'ensemble apparaissant dans (1.2.4.7) est soit un singleton, soit l'ensemble vide. De cette expression de l'énergie gaussienne, nous déduisons aussi que le noyau associé à μ_X est

$$\mathbb{K}_{\mu_X} = \left\{ \Psi := \exists l \in L^*(\mathcal{F}), \int_H l^2 dm \leq 1, \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H l f m \right\}. \quad (1.2.4.8)$$

Exemples

1. L'espace autoreproduisant associé au mouvement brownien sur $[0, 1]$ est (λ désignant la mesure de Lebesgue)

$$H_{\mu_W} = \left\{ f : t \rightarrow \int_0^t f' d\lambda, f' \in L^2([0, 1], \lambda) \right\},$$

dont la boule unité (que nous appelons "noyau" dans cette thèse) s'écrit de la façon suivante.

$$\mathbb{K}_{\mu_W} =: \mathcal{S}_1 = \left\{ f \in H_W : \int_0^1 f'^2 d\lambda \leq 1 \right\}.$$

2. L'espace autoreproduisant associé au pont brownien est

$$\begin{aligned} H_{\mu_B} &= \left\{ f : t \rightarrow \int_0^t f' d\lambda - t \int_{[0,1]} f' d\lambda, f' \in L^2([0, 1], \lambda) \right\} \\ &= \left\{ f \in H_{\mu_W} : f(1) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

1.3 Inégalités de petites boules pour le processus de Wiener

Dans cette annexe, nous donnons des détails sur la boule de Strassen \mathcal{S}_1 définie par

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ f : f(t) = \int_0^t f'(u) du, t \in [0, 1], \int_0^1 f'^2(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Pour tout $f \in \mathbb{R}\mathcal{S}_1$, posons

$$J(f) := \int_0^1 f'^2(t) dt.$$

Il s'agit de l'énergie gaussienne associée au processus de Wiener sur $[0,1]$. Posons aussi, pour une fonction f réelle bornée sur $[0, 1]$,

$$\| f \| := \sup_{t \in [0,1]} | f(t) |.$$

Nous donnons également des égalités exponentielles qui décrivent l'effort que doit produire un mouvement brownien pour approcher les éléments de l'ensemble de Strassen \mathcal{S}_1 . Ces outils sont le fruit des travaux de Csáki [16], Grill [55], Gorn et Lifshits [54], Berthet et Lifshits [9], De Acosta [2] et Lucas [74], et seront utilisés pour obtenir les lois de type Chung-Mogulskii (§2.3.1).

1.3.1 Intérieur la boule de Strassen

Les fonctions dont l'énergie est strictement inférieure à 1 sont traitées en premier lieu ici.

Définition 1.3.1 (Intérieur de \mathcal{S}_1) *On pose*

$$\mathcal{S}_1^- := \left\{ f \in \mathcal{S}_1 : \int_0^1 f'^2(t) dt < 1 \right\}.$$

Dans [2], De Acosta a établi les bornes exponentielles suivantes.

Proposition 1.3.1 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}\mathcal{S}_1$, noyau associé au processus de Wiener W . Pour tout $r \geq 0$, on a, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{P}\left(\|W - \sqrt{2}\lambda f\| \leq \frac{\sqrt{2}r}{\lambda}\right) = \exp\left(-\left(\frac{\pi^2}{16r^2} + J(f)\right)\lambda^2(1 + o(1))\right)$$

Preuve : Voir [2], théorème 3.3. \square

Le résultat précédent ne peut constituer un outil complet pour l'établissement de limites inférieures exactes que si l'argument de l'exponentielle peut prendre les valeurs $(1 + \delta)\lambda^2$ et $(1 - \delta)\lambda^2$ en faisant varier $r > 0$. Ceci n'est possible que lorsque $J(f) < 1$, et la vitesse d'approche d'une telle fonction f par $(2T \log_2(T))^{-1/2}W(T)$ est alors de l'ordre de $\log_2(T)^{-1}$ lorsque $T \rightarrow 0$.

1.3.2 Bordure de la boule de Strassen

Le critère qui détermine la fréquence des visites de $W(\cdot)$ dans une petite boule autour d'une fonction f est le comportement de la perte d'énergie globale autour de f .

Définition 1.3.2 (Perte d'énergie globale) *Nous posons, pour $f \in \mathcal{S}_1$ et $\epsilon > 0$:*

$$\phi_f(\epsilon) := 1 - \inf_{\|g-f\| \leq \epsilon} J(g)$$

Si la perte d'énergie à rayon $\epsilon > 0$ autour d'une fonction f est grande, alors le processus de Wiener aura peu de difficulté à approcher f . Ainsi, pour établir des inégalités de petites boules, le comportement de ϕ_f en zéro semble jouer un rôle crucial. Dans [55], Grill a donné un premier contrôle de la vitesse d'approximation d'une fonction par un processus de Wiener en fonction du comportement de ϕ_f en 0. Ceci est décrit dans le théorème suivant.

Définition 1.3.3 (Fonction de Grill) *Pour tout $T > 0$ fixé, on définit $\Gamma_f(T)$ comme l'unique solution de l'équation en Γ suivante*

$$\Gamma^{-2}\phi_f(\Gamma^{-1}) = \frac{\pi^2}{16T^2}. \quad (1.3.2.1)$$

Théorème 1.3.1 *(Grill, 1991) Soit $f \in \mathcal{S}_1$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\gamma > 0$ tel que, lorsque $T \rightarrow \infty$ on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Gamma_f(T) \left\| \frac{W}{\sqrt{2T}} - f \right\| \leq (1 - \delta)\right) &\leq \exp\left(-T - \gamma \frac{\Gamma_f(T)}{2T}\right), \\ \mathbb{P}\left(\Gamma_f(T) \left\| \frac{W}{\sqrt{2T}} - f \right\| \leq (2 + \delta)\right) &\geq \exp\left(-T + \gamma \frac{\Gamma_f(T)}{2T}\right). \end{aligned}$$

Preuve : Voir [55].□

On peut aisément vérifier que $\Gamma_f(T) \rightarrow 0$ si $T \rightarrow \infty$. Remarquons que $\Gamma_f(T)$ vérifie, en conséquence de sa définition :

$$\Gamma_f(T)^3 \frac{\phi_f(\Gamma_f(T))}{\Gamma_f(T)} = \frac{\pi^2}{16T^2} \quad (1.3.2.2)$$

Or nous allons maintenant voir que la limite de $\frac{\phi_f(D)}{D}$ lorsque $D \rightarrow 0$ est toujours non nulle. Nous noterons $\mathcal{V}(f)$ la variation totale d'une fonction réelle sur $[0, 1]$.

Proposition 1.3.2 *(Talagrand) Une fonction f de \mathcal{S}_1 telle que $J(f) = 1$ peut s'écrire $f = I(z)$, z étant une forme linéaire **continue**, si et seulement si f' admet une Lebesgue version à variation finie. Une telle version est alors unique, et continue sur $[0, 1]$. De plus, on a*

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{\phi_f(D)}{D} = 2(|f'(1)| + \mathcal{V}(f')) \geq 2.$$

Enfin, si f s'écrit $f = I(z)$ avec z non continue et si $J(f) = 1$, alors on a

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{\phi_f(D)}{D} = \infty.$$

Preuve : Pour les résultats sur le comportement de ϕ_f en 0, nous renvoyons à [69]. \square

Le théorème précédent, en conjonction avec (1.3.2.2), nous permet déjà d'établir la propriété suivante

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-2/3} \Gamma_f(T) < \infty.$$

De plus, (1.3.2.1) nous assure que, pour une fonction de la bordure de \mathcal{S}_1 , on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \Gamma_f(T) = 0.$$

Définition 1.3.4 *Nous notons \mathcal{S}_1^{bv} l'ensemble des fonctions de \mathcal{S}_1 d'énergie 1, dont la dérivée admet une Lebesgue-version à variation bornée sur $[0, 1]$.*

Les travaux de Gorn et Lifshits ont permis d'affiner les bornes exponentielles du théorème 1.3.1 lorsque $f \in \mathcal{S}_1^{bv}$. D'après la proposition 1.3.2, les fonctions de \mathcal{S}_1^{bv} sont les seules à vérifier la condition suivante

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-2/3} \Gamma_f(T) =: \chi_f > 0. \quad (1.3.2.3)$$

On posera, pour $f \in \mathcal{S}_1^{bv}$,

$$\nabla_f(T) := T^{2/3}, \quad T > 0. \quad (1.3.2.4)$$

Dans [54], Gorn et Lifshits ont donné une expression de χ_f , et ont établi l'inégalité exponentielle plus précise que celle du théorème 1.3.1. Ainsi, si $f \in \mathcal{S}_1^{bv}$, alors f' est identifiable à une fonction de répartition de mesure signée à variation finie sur $[0, 1]$, que nous notons ν_f . On note ν_f^{ac} , ν_f^e la décomposition de Lebesgue de ν_f en la somme d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ (notée ν_f^{ac}) et d'une mesure étrangère à λ (notée ν_f^e). D'après les travaux de Gorn et Lifshits [54], la constante χ_f est l'unique solution de l'équation en χ

$$A\chi^3(f'(1) + \mathcal{V}(\nu_f^e)) - \int_0^1 \nu_f \left(4\chi^3 \frac{d\nu_f^{ac}}{d\lambda}(u) \right) du.$$

Ici, $\mu(\cdot)$ est la fonction de Csáki (voir par exemple [54]). [9] ont ensuite amélioré de la même façon l'inégalité du théorème 1.3.1 lorsque f admet une dérivée à variation localement infinie.

Définition 1.3.5 On appelle \mathcal{S}_1^{liv} l'ensemble des fonctions f de \mathcal{S}_1 telles que $\int_0^1 f'^2(t)dt = 1$ et telles que f' admette un version ayant la propriété suivante : il existe $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$ tels que, pour tout $\epsilon > 0$ on ait

$$\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^k f'1_{\{[0,1]-[x_i-\epsilon, x_i+\epsilon]\}}\right) < \mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^k f'1_{\{[x_i-\epsilon, x_i+\epsilon]\}}\right) = \infty.$$

On posera, lorsque $f \in \mathcal{S}_1^{liv}$,

$$\nabla_f(T) := \Gamma_f(T), \quad T > 0, \quad \chi_f(T) := 1. \quad (1.3.2.5)$$

Définition 1.3.6 On appelle \mathcal{S}_1^* l'ensemble

$$\mathcal{S}_1^* := \mathcal{S}_1^{liv} \cup \mathcal{S}_1^{bv}. \quad (1.3.2.6)$$

Inégalité 1.3.1 (Inégalités de petites boules) Soient $f \in \mathcal{S}_1^*$ et $\delta > 0$. Il existe $\gamma^+ = \gamma^+(\delta, f) > 0$ et $\gamma^- = \gamma^-(\delta, f) > 0$ tels que, pour tout $T > 0$ suffisamment grand, on ait

$$\mathbb{P}\left(\nabla_f\left(\frac{T^2}{2}\right) \left\| \frac{W}{T} - f \right\| \leq (1 + \delta)\chi_f\right) \geq \exp\left(-\frac{T^2}{2} + \gamma^+ \frac{\nabla_f^2(T^2/2)}{T^2}\right), \quad (1.3.2.7)$$

$$\mathbb{P}\left(\nabla_f\left(\frac{T^2}{2}\right) \left\| \frac{W}{T} - f \right\| \leq (1 - \delta)\chi_f\right) \leq \exp\left(-\frac{T^2}{2} - \gamma^- \frac{\nabla_f^2(T^2/2)}{T^2}\right) \quad (1.3.2.8)$$

Preuve : Ce résultat est une synthèse des travaux de Grill [55], Gorn et Lifshits [54] et Berthet et Lifshits [9]. Cette synthèse est faite dans [8]. \square

Chapitre 2

Le processus empirique uniforme sur $[0,1]$

Nous considérerons dans tout ce chapitre une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$, que nous noterons $(U_i)_{i \geq 1}$. Nous définissons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires suivantes.

$$\begin{aligned} F_n(t) &:= n^{-1} \#\{1 \leq i \leq n, U_i \leq t\}, \quad n \geq 1, t \in [0, 1], & (2.0.2.1) \\ F_0(t) &:= 0, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

$$F_n^{-1}(t) := \inf\{u \in [0, 1], F_n(u) \geq t\}, \quad t \in [0, 1], \quad (2.0.2.2)$$

$$\alpha_n(t) := n^{1/2}(F_n(t) - t), \quad n \in \mathbb{N}, t \in [0, 1], \quad (2.0.2.3)$$

$$\beta_n(t) := n^{1/2}(F_n^{-1}(t) - t), \quad n \geq 1, t \in [0, 1]. \quad (2.0.2.4)$$

Dans cette partie nous récapitulons un ensemble de résultats utiles concernant le comportement asymptotique presque sûr de $\alpha_n(\cdot)$ et $\beta_n(\cdot)$, ainsi que de leurs accroissements. Bien entendu, nous ne pouvons prétendre à l'exhaustivité, et nous ne mentionnerons que les lois limites fonctionnelles les plus classiques. Nous présentons ensuite de nouveaux résultats concernant les vitesses exactes de convergence dans certaines lois du logarithme itéré.

2.1 Lois fonctionnelles du logarithme itéré

2.1.1 Relative compacité

La notion "relativement compacte" prend deux sens bien distincts dans cette thèse. La première concerne les suites d'un espace métrique.

Définition 2.1.1 *Soit (E, d) un espace métrique et K un compact de (E, d) . On dit qu'une suite de points $(x_n)_{n \geq 1}$ est relativement compacte, d'ensemble d'adhérence K , ce que l'on notera $x_n \rightsquigarrow K$, lorsque les deux conditions suivantes sont remplies.*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, K) &= 0, \\ \forall x \in K, \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) &= 0. \end{aligned}$$

Nous définissons maintenant la notion de relative compacité pour une suite d'ensembles

Définition 2.1.2 *Une suite d'ensembles $(\Theta_n)_{n \geq 1}$ d'un espace métrique (E, d) est dite relativement compacte vers un ensemble K lorsque les conditions suivantes sont remplies.*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Theta_n} d(x, K) &= 0, \\ \sup_{x \in K} \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, \Theta_n) &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1 *L'introduction de ces notions en théorie du processus empirique a été réalisée par Deheuvels (voir en particulier [33]). Dans ce chapitre, les termes " \rightsquigarrow " sont implicitement associés à la topologie uniforme sur $B[0, 1]$, espace des fonctions CADLAG sur $[0, 1]$, que l'on a muni de la norme sup usuelle*

$$\|f\| := \sup \{ |f(t)|, t \in [0, 1] \}. \quad (2.1.1.1)$$

On rappelle qu'une fonction est dite CADLAG sur $[0, 1]$ lorsqu'elle est continue à droite sur $[0, 1[$ et qu'elle admet une limite à gauche en tout point de $]0, 1]$.

2.1.2 Lois fonctionnelles standard du logarithme itéré pour le processus empirique uniforme : quelques résultats fonctionnels déjà connus

La loi fonctionnelle du logarithme itéré (LFLI) obtenue par Finkelstein [49] concerne le processus empirique uniforme sur $[0, 1]$. Rappelons que l'ensemble de Strassen \mathcal{S}_1 est la boule unité du noyau associé au mouvement brownien sur $[0, 1]$ (pour plus de détails, voir le §1.2.4)

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ f : f(0) = 0, \frac{df}{d\lambda} = f' \text{ existe, et } \int_{[0,1]} f'^2(t)dt \leq 1 \right\}, \quad (2.1.2.1)$$

tandis que l'ensemble de Finkelstein (boule unité du noyau associé au pont brownien) est défini par

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ f \in \mathcal{S}_1, f(1) = 0 \right\}. \quad (2.1.2.2)$$

Définition 2.1.3 (Norme hilbertienne) *Pour $f \in \mathbb{R}\mathcal{S}_1$, on notera $\| f \|_H^2 := \int_{[0,1]} f'^2(t)dt$.*

La LFLI de Finkelstein s'énonce comme suit.

Théorème 2.1.1 [*LFLI pour le processus empirique, Finkelstein, 1971*] *Avec probabilité 1, on a*

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{2 \log_2 n}} \rightsquigarrow \mathcal{S}_2.$$

Preuve : Voir [49].□

Ce résultat est d'un grand intérêt statistique, puisqu'il permet d'obtenir sans effort des lois du logarithme itéré pour toutes les statistiques qui s'expriment comme une fonction continue (pour la norme $\| \cdot \|$) du processus α_n . On peut donc obtenir ainsi des intervalles de confiance presque-sûrs pour de telles statistiques. L'étude de l'estimation de la

densité fait naturellement intervenir la notion d'accroissements du processus empirique. Nous citons à cet effet un important résultat de Deheuvels et Mason ([33]) qui décrit le comportement des accroissements du processus empirique sur un intervalle d'intérieur non vide.

Théorème 2.1.2 (Deheuvels, Mason, 1992) *Soit $I=[a,b]$ un intervalle de $[0,1]$ d'intérieur non vide. Soit a_n une suite décroissante vers 0 satisfaisant les hypothèses suivantes (appelées conditions de Csörgő-Révész-Stute).*

$$\begin{aligned} (CRS1) \quad & 0 < a_n \leq 1, \quad a_n \downarrow 0, \quad na_n \uparrow \infty, \\ (CRS2) \quad & na_n / \log n \rightarrow \infty, \\ (CRS3) \quad & \log(1/a_n) / \log_2 n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Posons

$$\Theta_n := \left\{ \frac{\alpha_n(t + a_n \cdot) - \alpha_n(t)}{2a_n \log(1/a_n)}, \quad t \in [a, b - a_n] \right\}.$$

Alors on a, avec probabilité 1, $\Theta_n \rightsquigarrow \mathcal{S}_1$.

Preuve : Voir [33] .□

Remarque 2.1.2 *Le théorème précédent établit qu'une suite d'ensembles de fonctions aléatoires est relativement compacte. De tels résultats sont appelés lois fonctionnelles uniformes du logarithme itéré (LFULI).*

Application : intervalles de confiance uniformes pour l'estimateur à noyau de la densité

Le théorème précédent a permis d'établir la loi du logarithme itéré suivante qui améliore le résultat similaire obtenu par Stute en 1982.

Corollaire 2.1.2.1 *Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d de v.a.r admettant une densité strictement positive et uniformément continue sur un intervalle*

$I=[a,b]$ d'intérieur non vide. Soit K un noyau de Parzen-Rosenblatt à support compact et à variation finie. Notons

$$f_n(x) = \frac{1}{na_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{a_n}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{X_i - x}{a_n}\right)\right).$$

Sous les hypothèses CRS1-CRS3, on a presque sûrement :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{na_n} \sup_{x \in I} f_n(x) / \sqrt{f(x)}}{\sqrt{2 \log(1/a_n)}} &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}} K^2 d\lambda}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{na_n} \inf_{x \in I} f_n(x) / \sqrt{f(x)}}{\sqrt{2 \log(1/a_n)}} &= -\sqrt{\int_{\mathbb{R}} K^2 d\lambda}. \end{aligned} \tag{2.1.2.3}$$

Preuve : Voir [33]. □

Enfin, Mason a obtenu une loi du logarithme itéré concernant un seul accroissement du processus empirique uniforme

Théorème 2.1.3 [LLI pour le processus empirique local, Mason, 1988]
Soit a_n une suite de réels positifs décroissante vers 0 vérifiant :

$$na_n \nearrow \infty,$$

$$na_n / \log_2 n \rightarrow \infty.$$

Alors avec probabilité 1, on a

$$\frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} \rightsquigarrow \mathcal{S}_1.$$

Preuve : Voir [76]. □

2.1.3 Représentation de Bahadur-Kiefer et conséquences sur le processus des quantiles

La représentation de Bahadur-Kiefer permet d'exprimer le processus des quantiles β_n en fonction de α_n . En effet, on a presque sûrement

$$\sup_{t \in [0,1]} | F_n(F_n^{-1}(t)) - t | = \frac{1}{n},$$

ce qui conduit à

$$\sup_{t \in [0,1]} \left| \alpha_n \left(t + \frac{\beta_n(t)}{n^{1/2}} \right) + \beta_n(t) \right| = \frac{1}{n^{1/2}}. \quad (2.1.3.1)$$

Or on peut voir graphiquement que $\| \beta_n \| = \| \alpha_n \|$ presque sûrement, ce qui conduit, en appliquant une version étendue du théorème 2.1.1, au résultat suivant :

Théorème 2.1.4 (Kiefer, 1969) *On a presque sûrement :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{1/4} (\log n)^{-1/2} (\log_2 n)^{-1/4} \| \alpha_n + \beta_n \| = 2^{-1/4}.$$

Preuve : Voir [65].□

En conséquence, la loi du logarithme itéré suit immédiatement pour β_n , ce qui est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.5 (LFLI pour le processus des quantiles) *On a presque sûrement :*

$$\frac{\beta_n}{\sqrt{2 \log_2 n}} \rightsquigarrow \mathcal{S}_2$$

En ce qui concerne le processus des quantiles local, Mason et Einmahl [43] ont établi un théorème du même genre que celui de Kiefer. Pour $0 < a_n < 1$, on définit

$$R_n := \sup_{t \in [0, a_n]} | \alpha_n(t) + \beta_n(t) |,$$

ainsi que

$$r_n := (n/a_n)^{-1/4} (\log_2 n)^{1/4} (\log(na_n) + 2 \log_2 n)^{1/2}.$$

Théorème 2.1.6 (Représentation de Bahadur-Kiefer locale, Einmahl, Mas)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes vérifiant $na_n \nearrow \infty$, $a_n \searrow \gamma \in [0, 1]$ et $na_n / \log_2 n \rightarrow \infty$.

1. Si $\gamma = 0$, alors on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} R_n \leq 2^{1/4}.$$

2. Si de plus on a $\log(na_n) / \log_2 n \rightarrow \infty$ alors la majoration précédente est une égalité.

3. Si $0 < \gamma \leq 1/2$, alors on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} R_n = 2^{1/4} (1 - \gamma)^{1/4}.$$

4. Si $1/2 \leq \gamma \leq 1$ alors on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} R_n = 2^{-1/4} \gamma^{-1/4}.$$

Preuve : Voir [43] . \square

On retiendra du théorème 2.1.6 que, sous les hypothèses du théorème 2.1.3, on a $r_n (2a_n \log_2 n)^{-1/2} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et donc presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n (2a_n \log_2 n)^{-1/2} = 0.$$

Ainsi le théorème 2.1.3 combiné avec le théorème 2.1.6 implique le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.6.1 *Sous les hypothèses du théorème 2.1.3, on a presque sûrement*

$$\frac{\beta_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} \rightsquigarrow \mathcal{S}_2.$$

2.1.4 Applications des LFLI en statistiques

L'intérêt statistique des LFLI est montré dans la proposition suivante

Proposition 2.1.1 *Si $(x_n)_{n \geq 1}$ est une suite de points de (E, d) relativement compacte vers un ensemble K , et si ϕ est une fonction continue de (E, d) vers un espace métrique (E', d') , et si $(\phi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions convergeant uniformément vers ϕ sur un voisinage de K , alors $\phi_n(x_n) \rightsquigarrow \phi(K)$ dans (E', d') .*

Preuve : Il s'agit là de topologie élémentaire \square .

On peut alors établir les lois du logarithme itéré pour toutes les statistiques $T_n := \phi_n(\alpha_n)$ ou $T_n := \phi_n(\beta_n)$ par exemple. Ainsi des résultats ont été obtenus pour la statistique de Kolmogorov-Smirnov, la statistique de Cramér-Von Mises, les tests d'ajustement ([84]), le bootstrap ([90], ([58])), l'estimateur à noyau de la densité (processus empirique local), l'estimateur de la densité basé sur les k points les plus proches ([11], [89], [33]), certaines L-statistiques (voir [5]), ou les tests de rang ([56]).

2.2 Vitesses de recouvrement dans les LFLI standard

Notons ici, pour deux ensembles A et B de $B([0, 1])$,

$$\| A, B \| := \inf \{ \| f - g \|, f \in A, g \in B \}. \quad (2.2.0.1)$$

Il s'agit là d'un abus de notation, car la notation (2.2.0.1) ne définit pas une norme.

Définition 2.2.1 *On notera B_0 la boule unité de $(B[0, 1], \| \cdot \|)$.*

Le théorème 2.1.2 nous assure que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Theta_n, \mathcal{S}_1\| = 0.$$

Berthet [7] a trouvé une borne supérieure de vitesse pour $\|\Theta_n, \mathcal{S}_1\|$. Ainsi, il a établi le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *Soit a_n une suite vérifiant, en plus des conditions du théorème 2.1.2, la condition*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{(\log n)^{7/3}} = \infty$$

Alors existe une constante universelle $\epsilon_1 > 0$ telle que :

$$\forall \epsilon > \epsilon_1, \mathbb{P}(\Theta_n \subset \mathcal{S}_1 + \epsilon \log(1/a_n)^{-2/3} B_0 \text{ a.c.r}) = 1$$

Où a.c.r signifie "à partir d'un certain rang".

Ce type de résultat rentre dans la catégorie de l'étude des "vitesses de recouvrement". Dans ce paragraphe, nous poursuivons le travail commencé par Berthet en établissant des vitesses de recouvrement pour d'autres lois du logarithme itéré déjà connues en topologie uniforme. L'outil fondamental de toutes les preuves est une inégalité de recouvrement pour les processus de Wiener et le pont brownien (propositions 2.2.2 et 2.2.1). Les outils "classiques" seront utilisés : approximation forte par des processus gaussiens, Poissonisation, et lemmes d'association par blocs. Nous commençons par établir des vitesses de recouvrement pour la LLI de Finkelstein.

2.2.1 Vitesses de recouvrement dans le théorème de Finkelstein

Nous établissons ici des vitesses de recouvrement dans le théorème 2.1.1.

Théorème 2.2.2 *Il existe une constante universelle $L_0 > 0$ telle que, pour tout choix de $\epsilon > L_0$, on ait avec probabilité 1*

$$\frac{\alpha_n}{\sqrt{2 \log_2 n}} \in \mathcal{S}_2 + \epsilon (\log_2 n)^{-2/3} B_0 \text{ a.c.r.}$$

Preuve : Posons

$$b_n := (2 \log_2 n)^{1/2},$$

fixons $\epsilon > 0$ quelconque, et considérons la suite

$$\epsilon_n := \epsilon (\log_2 n)^{-2/3}.$$

La preuve sera divisée en plusieurs sous-parties.

Construction "KMT"

En se basant sur les travaux de Komlós, Major et Tusnády (voir [66]), nous pouvons supposer que les U_i sont basés sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sur lequel est basée une suite de ponts browniens B_n vérifiant, pour trois constantes universelles C_1, C_2, C_3 strictement positives, et pour tous $n \geq 1$ et $z \geq 0$, l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}\left(\| \alpha_n - B_n \| \geq C_1 \frac{\log n + z}{n^{1/2}} \right) \leq C_2 \exp(-C_3 z). \quad (2.2.1.1)$$

Grâce à cette inégalité, nous pourrions ramener l'étude des vitesses de recouvrement concernant α_n à celle de B_n .

Une suite sous-géométrique

Si les démonstrations de LLI classiques mettent à profit les propriétés de suites géométriques, l'étude des vitesses de recouvrement nécessite l'usage de suites sous-géométriques, dont les propriétés sont plus intéressantes, comme nous allons le voir plus loin.

Définition 2.2.2 (Une sous-suite) On définit la suite en k suivante

$$n_k := \left[\exp \left(k \exp \left(- (\log k)^{1/6} \right) \right) \right], \quad k \geq 1, \quad n_0 := 0. \quad (2.2.1.2)$$

Rappelons ici que $[u]$ est la partie entière de u , c'est à dire $[u] \leq u < [u] + 1$.

Ce type de suite possède les propriétés intéressantes des suites géométriques ($\log_2 n_k$ se comporte comme un $\log k$), mais ses termes sont moins espacés, ce qui accroît suffisamment la précision dans les lemmes d'association par blocs pour considérer une suite décroissante de ϵ_n au lieu d'un ϵ fixé.

Propriété 2.2.1 La suite n_k a les propriétés suivantes, lorsque $k \rightarrow \infty$

1.

$$1 - \frac{n_k}{n_{k+1}} = \exp \left(- (\log k)^{1/6} (1 + o(1)) \right)$$

2.

$$\log_2 n_k = \log k - (\log k)^{1/6} + o(1)$$

3. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est telle que $na_n \nearrow$ et $a_n \searrow$, alors on a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$1 \leq \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}} \leq \frac{n_{k+1}}{n_k} = \exp \left(\exp \left(- (\log k)^{1/6} (1 + o(1)) \right) \right).$$

Preuve : Les points 1 et 2 découlent d'analyse de routine. Le point 3 est une conséquence des points 1 et 2, de la croissance de na_n et de la décroissance de a_n . \square

Lemmes d'association par blocs

Pour $k \geq 1$, on définit

$$N_k := \left\{ n_k + 1, \dots, n_{k+1} \right\} \quad (2.2.1.3)$$

lorsque $n_k + 1 \leq n_{k+1}$, et $N_k := \emptyset$ sinon. Remarquons que, par croissance de n_k , les $N_k, k \in \mathbb{N}$ sont disjoints deux à deux, et

$$\bigcup_{k \geq 0} N_k = \mathbb{N}.$$

Remarquons également que, pour tout k suffisamment grand, $N_k \neq \emptyset$. Nous pouvons donc, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, définir $k(n)$ comme étant l'unique entier k tel que $n \in N_k$. Nous allons dans un premier temps étudier la suite de fonctions suivante :

$$g_n := \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} H_n, \quad k = k(n),$$

avec

$$H_n(t) := n(F_n(t) - t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2.2.1.4)$$

Les lemmes suivants mettent à profit les propriétés stochastiques du processus empirique pour se ramener à l'étude d'une sous suite.

Lemme 2.2.1 *Soient $p_1 > 1$ et $q_1 > 1$ deux réels conjugués, c'est à dire vérifiant $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$. Notons, lorsque $N_k \neq \emptyset$,*

$$m_{p_1, k} := \min_{n \in N_k} \mathbb{P} \left(\frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \| H_{n_{k+1}} - H_n \| \leq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} H_n \notin \mathcal{S}_2 + \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right\} \right) \\ & \leq \frac{1}{m_{p_1, k}} \mathbb{P} \left(\frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} H_{n_{k+1}} \notin \mathcal{S}_2 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right). \end{aligned}$$

Preuve : Soit k un entier assez grand pour avoir $N_k \neq \emptyset$. Notons, pour $n \in N_k$,

$$A_n := \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} H_n \notin \mathcal{S}_2 + \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right\}, \quad n \in N_k,$$

et

$$B_n := A_n - \bigcup_{n_{k+1} \leq i < n} A_i.$$

On a

$$\begin{aligned} & m_{p_1, k} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} H_n \notin \mathcal{S}_2 + \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right\} \right) \\ &= m_{p_1, k} \sum_{n \in N_k} \mathbb{P}(B_n) \\ &\leq \sum_{n \in N_k} \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P} \left(\frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \| H_{n_{k+1}} - H_n \| \leq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{n \in N_k} \mathbb{P} \left(B_n \cap \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \| H_{n_{k+1}} - H_n \| \leq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \right\} \right). \quad (2.2.1.5) \end{aligned}$$

La ligne (2.2.1.5) découle du fait que, pour $n \geq 1$, $p \geq 0$, $H_{n+p} - H_n$ est indépendant des H_i , $i \leq n$. On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} & B_n \cap \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \| H_{n_{k+1}} - H_n \| \leq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \right\} \\ &\subset B_n \cap \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} H_{n_{k+1}} \notin \mathcal{S}_2 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right\}. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du lemme. \square

Il reste à contrôler $m_{p_1, k}$, ce qui est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *Pour tout choix de $p_1 > 1$ et $q_1 > 1$ conjugués, on a, pour k suffisamment grand,*

$$m_{p_1, k} \geq 1/2.$$

Preuve : Soit k un entier tel que $N_k \neq \emptyset$, et soit $n \in N_k$ quelconque. Si $n = n_{k+1}$, alors trivialement $m_{p_1, k} = 1$. Si $n < n_{k+1}$, alors, comme

$$H_{n_{k+1}} - H_n =_{loi} H_{n_{k+1}-n},$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\frac{1}{n_{k+1}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \| H_{n_{k+1}} - H_n \| \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\| \alpha_{n_{k+1}-n} \| \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \sqrt{\frac{n_{k+1}}{n_{k+1}-n}} b_{n_{k+1}}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\| \alpha_{n_{k+1}-n} \| \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{n_k}{n_{k+1}}}} b_{n_{k+1}}\right) \tag{2.2.1.6}
\end{aligned}$$

$$\leq 2 \exp\left(-\frac{2\epsilon_{n_{k+1}}^2}{p_1^2} b_{n_{k+1}}^2 \left(\frac{1}{1 - n_k/n_{k+1}}\right)\right), \tag{2.2.1.7}$$

L'inégalité (2.2.1.7) vient de l'inégalité de Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz (proposition 5.5.1). Enfin, en se rappelant $\epsilon_n := \epsilon(\log_2 n)^{-2/3}$, les propriétés de n_k (propriété 2.2.1) nous assurent que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{2\epsilon_{n_{k+1}}^2}{p_1^2} b_{n_{k+1}}^2 \left(\frac{1}{1 - n_k/n_{k+1}}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{4\epsilon^2}{p_1^2} \left((\log k)^{-1/3} \exp((\log k)^{1/6}) ((1 + o(1)))\right)\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$\exp((\log k)^{1/6})(\log k)^{-1/3} \rightarrow \infty$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, on en déduit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - m_{p_1, k} = 0.$$

Ceci qui conclut la démonstration du lemme \square

Utilisation de l'approximation KMT et des inégalités de recouvrement pour le pont brownien

Au vu des lemmes 2.2.1 et 2.2.2, nous nous intéressons maintenant à la suite de probabilités suivante

$$\left(\mathbb{P}\left(\frac{\alpha_{n_{k+1}}}{b_{n_{k+1}}} \notin \mathcal{S}_2 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0\right)\right)_{k \geq 1}$$

Nous allons montrer que cette suite est sommable, afin d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Soient $p_2 > 1, q_2 > 1$ deux réels conjugués. On peut décomposer les probabilités précédentes en

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{\alpha_{n_{k+1}}}{b_{n_{k+1}}} \notin \mathcal{S}_2 + \frac{1}{q_1}\epsilon_{n_{k+1}}B_0\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\|\alpha_{n_{k+1}} - B_{n_{k+1}}\| \geq \frac{1}{p_2q_1}\epsilon_{n_{k+1}}b_{n_{k+1}}\right) + \mathbb{P}\left(B_{n_{k+1}} \notin b_{n_{k+1}}\mathcal{S}_2 + \frac{1}{q_2q_1}\epsilon_{n_{k+1}}B_0\right) \\ & =: \mathbb{P}_k^{KMT}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) + \mathbb{P}_k^{Tal}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2). \end{aligned} \quad (2.2.1.8)$$

Les deux lemmes 2.2.3 et 2.2.4 qui vont suivre montrent que les deux termes de (2.2.1.8) sont sommables en k .

Lemme 2.2.3 *Pour tout choix de $p_1 > 1, q_1 > 1$ conjugués et de $p_2 > 1, q_2 > 1$ conjugués, on a*

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_k^{KMT}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) < \infty.$$

Preuve : Rappelons que $b_n := (2 \log_2 n)^{1/2}$. Comme

$$\frac{\log n}{n^{1/2}} = o(\epsilon_n b_n)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, et en appliquant l'inégalité (2.2.1.1), nous avons, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^{KMT}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) &= \mathbb{P}\left(\|\alpha_{n_{k+1}} - B_{n_{k+1}}\| \geq \frac{1}{p_2q_1}\epsilon_{n_{k+1}}b_{n_{k+1}}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\|\alpha_{n_{k+1}} - B_{n_{k+1}}\| \geq C_1 \frac{\log(n_{k+1}) + n_{k+1}^{1/2} \frac{1}{2p_2q_1}\epsilon_{n_{k+1}}b_{n_{k+1}}}{n_{k+1}^{1/2}}\right) \\ &\leq C_2 \exp\left(-C_3 \frac{n_{k+1}^{1/2}\epsilon_{n_{k+1}}b_{n_{k+1}}}{2p_1q_1}\right). \end{aligned}$$

Puis les propriétés asymptotiques en k de n_{k+1} (propriété 2.2.1) nous assurent que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$C_2 \exp\left(-C_3 \frac{n_{k+1}^{1/2}\epsilon_{n_{k+1}}b_{n_{k+1}}}{2p_1q_1}\right) = C_2 \exp\left(-C_3 n_{k+1}^{1/2} \frac{1}{2p_2q_1} \epsilon (\log k)^{-1/6} (1 + o(1))\right).$$

Nous concluons alors la preuve du lemme 2.2.3 en remarquant que $n_k \geq \exp(k/2)$ à partir d'un certain rang. \square

Pour la preuve du lemme suivant, nous aurons besoin d'une inégalité de recouvrement due à Talagrand.

Proposition 2.2.1 [*Inégalité de recouvrement pour le pont brownien*] Soit $B(\cdot)$ un pont brownien. Il existe deux constantes universelles K et L ainsi que $\epsilon_0 > 0$ telles que, pour tous $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et $c > 0$, on ait

$$\mathbb{P}\left(B \notin c\mathcal{S}_2 + \epsilon B_0\right) \leq K \exp\left(\frac{L}{\epsilon^2} - \frac{c\epsilon}{2} - \frac{c^2}{2}\right)$$

Preuve : Il s'agit là d'une conséquence directe des résultats de Talagrand dans [95], en supprimant la première coordonnée dans la décomposition dyadique de $B(\cdot)$ Pour plus de détails, voir [1], annexe F. \square

La constante L apparaissant dans la proposition 2.2.1 apparaît dans le lemme suivant.

Lemme 2.2.4 *Supposons que $\epsilon > (2L)^{1/3}$. Alors on peut choisir $p_1 > 1, q_1 > 1$ conjugués, ainsi que $p_2 > 1, q_2 > 1$ conjugués tels que*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k^{Tal}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) < \infty.$$

Preuve : En appliquant la proposition 2.2.1, nous avons, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k^{Tal} &= \mathbb{P}\left(B_{n_{k+1}} \notin b_{n_{k+1}}\mathcal{S}_2 + \frac{1}{q_1 q_2} \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} B_0\right) \\ &\leq K \exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{q_1 q_2} - \frac{L(q_1 q_2)^2}{2\epsilon^2}\right)(\log_2 n_{k+1})^{1/3} - \log_2 n_{k+1}\right). \end{aligned}$$

Si $\epsilon > (L/2)^{1/3}$, alors on peut choisir $q_1 > 1$ et $q_2 > 1$ suffisamment petits de telle sorte que

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{2}q_1 q_2} - \frac{L(q_1 q_2)^2}{\epsilon^2} =: \gamma > 0.$$

Ainsi, grâce aux propriétés de la suite $(n_k)_{k \geq 1}$ (propriété 2.2.1), on a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}_k^{Tal} = O\left(\exp\left(-\gamma(\log k)^{1/3}(1+o(1)) - \log k + (\log k)^{1/6} + o(1)\right)\right).$$

Comme, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\frac{\gamma}{2}(\log k)^{1/3} - (\log k)^{1/6}}{2 \log_2(k)} \rightarrow \infty,$$

on en conclut que la suite \mathbb{P}_k^{Tal} est sommable. \square

Première conclusion. En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que pour $\epsilon > L/2)^{1/3}$, la suite de fonctions définie par

$$(g_n)_{n \geq 1} := \left(\frac{\alpha_n}{b_{n_{k+1}}}, k = k(n)\right)_{n \geq 1},$$

vérifie, avec probabilité 1,

$$g_n \in \mathcal{S}_2 + \epsilon_n B_0 \text{ a.c.r.}$$

Il reste à contrôler la distance entre g_n et $b_n^{-1}\alpha_n$, en montrant que celle ci est négligeable devant $(\log_2 n)^{-2/3}$. Ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.2.5 *Avec probabilité 1, lorsque $n \rightarrow \infty$ on a*

$$\|g_n - \frac{\alpha_n}{b_n}\| = o((\log_2 n)^{-2/3}).$$

Preuve : On a

$$\|g_n - \frac{\alpha_n}{b_n}\| = \left(\frac{b_n}{b_{n_{k+1}}} - 1\right) \left\|\frac{\alpha_n}{b_n}\right\|.$$

Une application du théorème de Finkelstein (théorème 2.1.1) montre que le second terme de la relation ci dessus tend est borné par 2 lorsque

$n \rightarrow \infty$. On constate ensuite que, lorsque $k \rightarrow \infty$, uniformément en $n \in N_k$, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_n}{b_{n_{k+1}}} - 1 \right) &\leq \left(\frac{\log_2 n_{k+1}}{\log_2 n_k} \right)^{1/2} - 1 \\ &\sim \frac{1}{2} \left(\frac{\log_2 n_{k+1}}{\log_2 n_k} - 1 \right) \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{\frac{n_{k+1}}{n_k} - 1}{\log n_k \log_2 n_k}. \end{aligned}$$

Au vu du point 1 de la propriété 2.2.1, ce terme est clairement un $o((\log_2 n_k)^{-2/3})$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

Grâce au lemme précédent, on complète aisément la preuve du théorème 2.2.2. \square

La représentation de Bahadur-Kiefer (théorème 2.1.4) nous permet d'établir un théorème similaire au théorème 2.2.2, concernant cette fois ci le processus des quantiles β_n défini par (2.0.2.4)

Corollaire 2.2.2.1 [*Vitesses de recouvrement pour le processus des quantiles*] La constante L_0 définie dans le théorème 2.2.2 est telle que pour tout choix de $\epsilon > L_0$, on a presque sûrement,

$$\frac{\beta_n}{\sqrt{2 \log_2 n}} \in \mathcal{S}_2 + \epsilon (\log_2 n)^{-2/3} B_0 \text{ a.c.r.}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer l'approximation de Bahadur-Kiefer (théorème 2.1.4). Ainsi nous avons presque sûrement, pour tout $\epsilon > 0$ fixé,

$$\left\| \frac{\beta_n}{\sqrt{2 \log_2 n}} + \frac{\alpha_n}{\sqrt{2 \log_2 n}} \right\| \leq \frac{(1 + \epsilon)(\log n)^{1/2}}{2^{3/4} n^{1/4} (\log_2 n)^{1/4}}, \text{ a.c.r.}$$

Or, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{(1 + \epsilon)(\log n)^{1/2}}{2^{3/4} n^{1/4} (\log_2 n)^{1/4}} = o((\log_2 n)^{-2/3}).$$

On en déduit aisément le résultat annoncé. \square

2.2.2 Vitesses de recouvrement dans la LFLI pour le processus empirique local

Dans ce sous-chapitre nous établissons des vitesses recouvrement pour le processus empirique local $\alpha_n(a_n \cdot)$. Rappelons que \mathcal{S}_1 est défini par

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ f : f(0) = 0, \frac{df}{d\lambda} = f' \text{ existe, et } \int_{[0,1]} f'^2(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Notre résultat s'énonce comme suit.

Théorème 2.2.3 [*Vitesses de recouvrement du processus empirique local*] Soit a_n une suite de constantes réelles positives vérifiant les conditions suivantes.

$$na_n \nearrow \infty, \quad \frac{na_n}{(\log_2 n)^{7/3}} \rightarrow \infty, \quad a_n \searrow 0.$$

Alors il existe une constante universelle $L_1 > 0$ telle que , pour tout choix de $\epsilon > L_1$, on a, avec probabilité 1,

$$\frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} \in \mathcal{S}_1 + \epsilon (\log_2 n)^{-2/3} B_0 \text{ a.c.r.}$$

Remarque 2.2.1 L'hypothèse $na_n(\log_2 n)^{-7/3} \rightarrow \infty$ est plus restrictive que celle du théorème 2.1.3, c'est à dire $na_n/\log_2 n \rightarrow \infty$. Nous sommes "obligés" ici de faire cette hypothèse, afin de pouvoir appliquer l'approximation KMT et se ramener ainsi à un raisonnement sur un processus de Wiener. Le comportement asymptotique presque sûr de $(2a_n \log_2 n)^{-1/2} \alpha_n(a_n \cdot)$ lorsque $na_n(\log_2 n)^{-1} \rightarrow \infty$ et $na_n(\log_2 n)^{-7/3} \not\rightarrow \infty$ n'est pas couvert par nos résultats et demeure un problème ouvert.

Preuve : Nous posons encore une fois

$$b_n := \sqrt{2 \log_2 n},$$

et pour $\epsilon > 0$ fixé,

$$\epsilon_n := \epsilon (\log_2 n)^{-2/3}.$$

La preuve du théorème sera divisée en plusieurs parties.

Arguments de sous-suites, association par blocs

Nous considérons la sous suite n_k définie par (2.2.1.2), ainsi que les "blocs" correspondants N_k définis par : $N_k := \{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}$ lorsque $n_k + 1 \leq n_{k+1}$, et $N_k := \emptyset$ sinon.

Nous établissons deux lemmes d'association par blocs similaires aux lemmes 2.2.1 et 2.2.2. Nous rappelons que $H_n(\cdot)$ est défini par $H_n(t) = n(F_n(t) - t)$, $t \in [0, 1]$.

Lemme 2.2.6 *Soient $p_1 > 1, q_1 > 1$ deux réels conjugués. Soit k un entier tel que $N_k \neq \emptyset$, et soit $n \in N_k$. Notons*

$$m_{k,p_1} := \min_{n \in N_k} \mathbb{P} \left(\frac{1}{\sqrt{n_{k+1} a_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}}}} \left\| H_n(a_{n_{k+1}} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot) \right\| \leq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \left\{ \frac{H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{n_{k+1} a_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}}}} \notin \mathcal{S}_1 + \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right\} \right) \\ & \leq \frac{1}{m_{k,p_1}} \mathbb{P} \left(\frac{H_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{n_{k+1} a_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}}}} \notin \mathcal{S}_1 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0 \right). \end{aligned}$$

Preuve : La preuve est similaire à celle du lemme 2.2.1, en remplaçant, pour $n \in N_k$, $H_n(\cdot)$ par $a_{n_{k+1}}^{-1/2} H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)$. \square

Lemme 2.2.7 *Soit $p_1 > 1$ un réel. Sous les hypothèses du théorème (2.2.3), il existe un rang $k \geq 1$ à partir duquel $m_{k,p_1} \geq 1/2$.*

Preuve : Soit $k \geq 1$ un entier suffisamment grand pour avoir $N_k \neq \emptyset$.
On a (en remarquant que la cas $n = n_{k+1}$ est dégénéré)

$$\begin{aligned}
& 1 - m_{k,p_1} \\
&= \sup_{n \in N_k, n \neq n_{k+1}} \mathbb{P} \left(\frac{\| H_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot) - H_n(a_{n_{k+1}} \cdot) \|}{(n_{k+1} - n)^{1/2}} \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} \left(\frac{n_{k+1} a_{n_{k+1}}}{n_{k+1} - n} \right)^{1/2} \right) \\
&\leq \sup_{n \in N_k, n \neq n_{k+1}} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, a_{n_{k+1}}]} |\alpha_{n_{k+1}-n}(t)| \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} \left(\frac{n_{k+1} a_{n_{k+1}}}{n_{k+1} - n_k} \right)^{1/2} \right) \\
&\leq \sup_{n \in N_k, n \neq n_{k+1}} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, a_{n_{k+1}}]} \frac{|\alpha_{n_{k+1}-n}(t)|}{1-t} \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} \left(\frac{n_{k+1} a_{n_{k+1}}}{n_{k+1} - n_k} \right)^{1/2} \right).
\end{aligned} \tag{2.2.2.1}$$

Or, comme le soulignent Shorack et Wellner (voir [91], p.133, proposition 1), $(1-t)^{-1} \alpha_n(t)$ est une martingale en $t \in [0, 1]$ pour tout entier n fixé. Rappelons ici l'inégalité de Doob-Kolmogorov pour une sous-martingale positive $M(\cdot)$ presque sûrement "CADLAG" sur un intervalle $[0, c]$ (voir la remarque 2.1.1). Pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, c]} M(t) \geq \epsilon \right) \leq \frac{\mathbb{E}(M(c)^2)}{\epsilon^2}. \tag{2.2.2.2}$$

Pour $n \in N_k$, $n \neq n_{k+1}$ fixé, nous appliquons l'inégalité précédente à la sous-martingale positive $(1-t)^{-1} |\alpha_n(t)|$, $t \in [0, 1]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, a_{n_{k+1}}]} \frac{|\alpha_{n_{k+1}-n}(t)|}{1-t} \geq \frac{1}{p_1} \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} \left(\frac{n_{k+1} a_{n_{k+1}}}{n_{k+1} - n_k} \right)^{1/2} \right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E} \left(\left(\frac{\alpha_{n_{k+1}-n}(a_{n_{k+1}})}{1-a_{n_{k+1}}} \right)^2 \right) p_1^2}{2\epsilon^2 (\log_2 n_{k+1})^{-1/3} \frac{n_{k+1}}{n_{k+1}-n_k} a_{n_{k+1}}} \\
&= \frac{p_1^2 \left(1 - \frac{n_k}{n_{k+1}}\right) (\log_2 n_{k+1})^{1/3}}{2\epsilon^2 (1 - a_{n_{k+1}})^2}.
\end{aligned} \tag{2.2.2.3}$$

Au vu de la propriété 2.2.1 (points 1 et 2), ce terme tend vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi, en combinant (2.2.2.1) et (2.2.2.3), il vient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - m_{p_1, k} = 0,$$

ce qui implique le résultat souhaité. \square

"Poissonisation" et approximation KMT

Considérons le processus empirique "Poissonisé"

$$\tilde{\Pi}_n(t) := n^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\eta_n} 1_{[0,t]}(U_i) - t \right), \quad (2.2.2.4)$$

où η_n est une v.a. indépendante de l'échantillon $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et suivant une loi de Poisson d'espérance n . Par convention nous posons $\sum_{\emptyset} = 0$. On définit aussi $\tilde{\Pi}$ comme un processus de Poisson standard centré, c'est-à-dire

$$\tilde{\Pi}(t) := \#\{i \geq 1, \sum_{j=1}^i \nu_j \leq t\} - t, \quad t > 0 \quad (2.2.2.5)$$

où les $\nu_i, i \geq 1$ constituent une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle d'espérance 1. Nous allons utiliser le lemme de "Poissonisation" suivant. Nous appelons ici \mathcal{T}_0 la tribu engendrée par les boules de $(B([0,1]), \|\cdot\|)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.8 *Soit $0 < \gamma < 1/2$. Pour tout ensemble $A \in \mathcal{T}_0$, on a*

$$\mathbb{P}(\alpha_n(\gamma \cdot) \in A) \leq 2\mathbb{P}(\tilde{\Pi}_n(\gamma \cdot) \in A).$$

Preuve : Ce lemme est une simple conséquence d'un lemme de Poissonisation bien connu (voir par exemple [33]), que nous avons mis en annexe (lemme 5.5.1) \square .

Dans le but d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli, nous nous intéresserons aux probabilités de type

$$\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{\Pi}_n(a_n \cdot)}{a_n^{1/2} b_n} \notin \mathcal{S}_1 + \epsilon_n B_0\right), \quad k \geq 1. \quad (2.2.2.6)$$

Par "construction KMT", nous faisons référence aux travaux de Komlós, Major et Tusnády [66], et de Deheuvels et Mason [31]. Ces travaux nous permettent de supposer que le processus $\tilde{\Pi}$ défini par (2.2.2.5) est basé sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sur lequel est basé un processus de Wiener $W(\cdot)$ tel que, pour trois constantes universelles strictement positives C_1, C_2, C_3 , on a, pour tous $T > 0$, $z \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\| \tilde{\Pi}(T\cdot) - W(T\cdot) \| \geq C_1 \log T + z\right) \leq C_2 \exp(-C_3 z). \quad (2.2.2.7)$$

Remarquons aussi que

$$\left(\tilde{\Pi}_n(t)\right)_{t \in [0,1]} =_{loi} \left(n^{-1/2} \tilde{\Pi}(nt)\right)_{t \in [0,1]}. \quad (2.2.2.8)$$

L'inégalité (2.2.2.7) va nous permettre de ramener l'étude du comportement des suites de probabilités définies par (2.2.2.6) à celle du processus de Wiener. Pour ce faire, nous effectuons la décomposition suivante : soient $p_1 > 1, q_1 > 1$ et $p_2 > 1, q_2 > 1$ deux couples de réels conjugués deux à deux ($1/p_l + 1/q_l = 1$, $l = 1, 2$). Nous avons, à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\frac{\alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}}\cdot)}{a_{n_{k+1}}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \notin \mathcal{S}_1 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0\right) \\ & \leq 2\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{\Pi}_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}}\cdot)}{a_{n_{k+1}}^{1/2} b_{n_{k+1}}} \notin \mathcal{S}_1 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0\right) \\ & = 2\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{\Pi}(n_{k+1} a_{n_{k+1}}\cdot)}{(2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} \notin \mathcal{S}_1 + \frac{1}{q_1} \epsilon_{n_{k+1}} B_0\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\| W(n_{k+1} a_{n_{k+1}}\cdot) - \tilde{\Pi}(n_{k+1} a_{n_{k+1}}\cdot) \| \geq \frac{1}{q_1 p_2} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} b_{n_{k+1}} \epsilon_{n_{k+1}}\right) \\ & \quad + \mathbb{P}\left(\frac{W(n_{k+1} a_{n_{k+1}}\cdot)}{(n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} b_{n_{k+1}}} \notin \mathcal{S}_1 + \frac{1}{q_1 q_2} \epsilon_{n_{k+1}}\right) \\ & =: \mathcal{P}_k^{KMT}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) + \mathcal{P}_k^{Tal}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2). \end{aligned} \quad (2.2.2.9)$$

Les deux lemmes suivants vont montrer que les deux suites définies en (2.2.2.9) sont sommables.

Lemme 2.2.9 Soient $p_1 > 1, q_1 > 1$ et $p_2 > 1, q_2 > 1$ deux couples de réels conjugués deux à deux ($1/p_l + 1/q_l = 1, l = 1, 2$), et soit $\epsilon > 0$. Sous les hypothèses du théorème 2.2.3 on

$$\sum_{k \geq 1} \mathcal{P}_k^{KMT} < \infty.$$

Preuve : Remarquons que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n_{k+1}a_{n_{k+1}}}b_{n_{k+1}}\epsilon_{n_{k+1}}}{\log(n_{k+1}a_{n_{k+1}})} &= \left(\frac{\sqrt{2\epsilon n_{k+1}a_{n_{k+1}}}}{\log_2 n_{k+1}} \right)^{1/6} \frac{(n_{k+1}a_{n_{k+1}})^{1/3}}{\log(n_{k+1}a_{n_{k+1}})} (1 + o(1)) \\ &\rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.2.2.10}$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_k^{KMT}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\| W(n_{k+1}a_{n_{k+1}} \cdot) - \tilde{\Pi}(n_{k+1}a_{n_{k+1}} \cdot) \| \geq \frac{\sqrt{n_{k+1}a_{n_{k+1}}}b_{n_{k+1}}\epsilon_{n_{k+1}}}{2p_2q_1} + C_1 \log(n_{k+1}a_{n_{k+1}}) \right) \\ &\leq C_2 \exp\left(- \frac{\sqrt{2}\epsilon C_3}{2q_1p_2} \sqrt{n_{k+1}a_{n_{k+1}}} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6} \right). \end{aligned}$$

Comme il a été supposé que $na_n/(\log_2 n)^{7/3} \rightarrow \infty$, on voit que le terme précédent peut être majoré asymptotiquement par $\exp(-2 \log_2(n_k))$. \square

La preuve du lemme suivant se base sur une inégalité de recouvrement établie par Talagrand [95].

Proposition 2.2.2 [Inégalité de recouvrement pour une mesure de Wiener (Talagrand)] Il existe des constantes universelles strictement positives \mathcal{L}, α_0 et c_0 telles que, pour tous $0 < \alpha < \alpha_0$ et $0 < c < c_0$ on a :

$$\mathbb{P}\left(W \notin c\mathcal{S}_1 + \alpha B_0 \right) \leq \exp\left(\frac{\mathcal{L}}{\alpha^2} - \frac{c\alpha}{2} - \frac{c^2}{2} \right)$$

La constante \mathcal{L} apparaissant dans la proposition précédente va intervenir dans le lemme suivant.

Lemme 2.2.10 *Pour tout choix de $\epsilon > L_1 = (\mathcal{L}/2)^{1/3}$, il existe $q_1 > 1$ et $q_2 > 1$ suffisamment petit pour avoir, sous les hypothèses du théorème 2.2.3,*

$$\sum_{k \geq 1} \mathcal{P}_k^{Tal}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) < \infty.$$

Preuve : Rappelons la propriété d'homogénéité suivante :

$$\lambda^{-1/2} W(\lambda \cdot) =_{loi} W(\cdot). \quad (2.2.2.11)$$

On déduit de cette propriété que pour tout entier k suffisamment grand,

$$\mathcal{P}_k^{Tal}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) = \mathbb{P}\left(W \notin b_{n_{k+1}} \mathcal{S}_1 + \frac{1}{q_1 q_2} \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} B_0\right).$$

Nous appliquons la proposition 2.2.2, pour k u entier suffisamment grand, $c := b_{n_{k+1}} = (2 \log_2 n_{k+1})^{1/2}$ et $\alpha := \epsilon_{n_{k+1}} b_{n_{k+1}} / q_1 q_2 = (\sqrt{2} \epsilon / q_1 q_2) (\log_2 n_{k+1})^{-1/2}$.

Il vient alors

$$\mathcal{P}_k^{Tal}(\epsilon, p_1, q_1, p_2, q_2) \leq K \exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{q_1 q_2} - \frac{\mathcal{L}(q_1 q_2)^2}{2\epsilon^2}\right) (\log_2 n_{k+1})^{1/3} - \log_2 n_{k+1}\right).$$

Les propriétés asymptotiques de n_k (propriété 2.2.1) nous assurent ensuite que cette dernière suite est sommable. \square

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on voit que, pour tout $\epsilon > L_1 := (\mathcal{L}/2)^{1/3}$, on a presque sûrement

$$\frac{H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}}} \in \mathcal{S}_1 + B_0 \epsilon_{n_{k+1}} \quad a.c.r. \quad (2.2.2.12)$$

Pour achever la preuve , il nous reste à contrôler les termes entre les n_k .

Lemme 2.2.11 *[Contrôle entre les n_k] Sous les hypothèses du théorème 2.2.3, on a presque sûrement*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \left\| \frac{H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} - \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2n a_n \log_2 n)^{1/2}} \right\| = 0.$$

Remarque : Nous avons fait ici la convention

$$\max \emptyset = -\infty.$$

Si l'on démontre le lemme 2.2.11, alors la preuve du théorème 2.2.3 s'achève en combinant ce dernier avec (2.2.2.12).

Preuve : Notons, pour $k \geq 1$ tel que $N_k \neq \emptyset$ et pour $n \in N_k$

$$\Gamma_n := 1 - \left(\frac{na_n \log_2 n}{n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2}.$$

Nous décomposons la différence en appliquant l'inégalité triangulaire. Ainsi

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} - \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2na_n \log_2 n)^{1/2}} \right\| \\ & \leq \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} \Gamma_n \right\| + \left\| \frac{n^{1/2} \alpha_n(a_n \cdot) - n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} \right\| \\ & \quad + \left\| \frac{\alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot) - \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} \right\| \\ & =: A_n + B_n + C_n. \end{aligned}$$

Contrôle de A_n

Clairement, on a

$$\begin{aligned} \max_{n \in N_k} \log_2 n_{k+1} \Gamma_n & \leq \left(1 - \left(\frac{n_k a_{n_k} \log_2 n_k}{n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2} \right) (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \\ & \leq (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \left(1 - \left(\frac{n_k \log_2 n_k}{n_{k+1} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Quelques calculs classiques d'analyse et la propriété 2.2.1 montrent que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{n_k \log_2 n_k}{n_{k+1} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2} \right) (\log_2 n_{k+1})^{2/3} = 0. \quad (2.2.2.13)$$

Puis, en combinant le théorème 2.1.3 avec (2.2.2.13), il vient

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \max_{n \in N_k} A_n = 0 \text{ p.s.}$$

Contrôle de B_n

Soit $\epsilon > 0$ fixé. En remarquant que $a_n \leq a_{n_k}$, $n \in N_k$, nous déduisons qu'il nous suffit de contrôler la probabilité suivante, lorsque $N_k \neq \emptyset$.

$$\mathbb{P} \left(\max_{n \in N_k} \left\| n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - n^{1/2} \alpha_n(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \epsilon \frac{(n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}}{(\log_2 n_{k+1})^{2/3}} \right).$$

Remarquons que, pour tout $n \in N_k$,

$$n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - n^{1/2} \alpha_n(a_{n_k} \cdot) = H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - H_n(a_{n_k} \cdot). \quad (2.2.2.14)$$

Nous allons utiliser l'inégalité maximale suivante, due à Montgomery-Smith et Latala.

Proposition 2.2.3 [*Inégalité de Montgomery-Smith-Latala*] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Il existe une constante \tilde{c} telle que, pour toute suite X_1, \dots, X_n de variables aléatoires i.i.d. dans E , mesurables pour la tribu engendrée par les boules ouvertes de $(E, \|\cdot\|)$, et pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P} \left(\max_{i=1 \dots n} \left\| \sum_{j=1}^i X_j \right\| \geq \lambda \right) \leq \tilde{c} \mathbb{P} \left(\left\| \sum_{j=1}^n X_j \right\| \geq \lambda / \tilde{c} \right).$$

Preuve : Voir [82] ou [71]. \square

Nous appliquons la proposition précédente à l'espace de Banach $(B([0, 1]), \|\cdot\|)$, défini dans la remarque 2.1.1, aux variables aléatoires $X_i(\cdot) := 1_{[0, a_{n_k}]}(U_i)$, $i \in N_k$ lorsque $N_k \neq \emptyset$, et $\lambda := \epsilon (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log n_{k+1})^{-1/6}$. Il existe donc une constante \tilde{c} telle que, pour tout entier k suffisamment

grand (en se rappelant l'égalité (2.2.2.14) et que $a_n \downarrow$)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k} (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \left\| n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_n \cdot) - n^{1/2} \alpha_n(a_n \cdot) \right\| \geq \epsilon (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k, n \neq n_{k+1}} \left\| H_n(a_{n_k} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \epsilon (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& = \mathbb{P}\left(\max_{n_k+1 \leq n < n_{k+1}} \left\| \sum_{j=n}^{n_{k+1}} X_j \right\| \geq \epsilon (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& \leq \tilde{c} \mathbb{P}\left(\left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} X_j \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& = \tilde{c} \mathbb{P}\left(\left\| H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right).
\end{aligned} \tag{2.2.2.15}$$

Posons $v_k := n_{k+1} - n_k$. Rappelons que $\tilde{\Pi}(\cdot)$ a été défini par (2.2.2.5) et rappelons l'égalité en loi (2.2.2.8). Nous appliquons l'inégalité de Poissonisation du lemme 2.2.8 et l'approximation forte (2.2.2.7). Ainsi, il existe un processus de Wiener $W(\cdot)$ tel que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\| H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& = \mathbb{P}\left(\left\| H_{v_k}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& \leq 2\mathbb{P}\left(\left\| v_k^{1/2} \tilde{\Pi}_{v_k} \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& = 2\mathbb{P}\left(\left\| \tilde{\Pi}(v_k a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& \leq 2\mathbb{P}\left(\left\| \tilde{\Pi}(v_k a_{n_k} \cdot) - W(v_k a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\
& \quad + 2\mathbb{P}\left(\left\| W(v_k a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{c}} (n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right).
\end{aligned} \tag{2.2.2.16}$$

En faisant un raisonnement similaire à celui de la preuve du lemme 2.2.9, on montre aisément que le premier terme de l'inégalité précédente est asymptotiquement majoré par $\exp(-2 \log_2 n_{k+1})$ et est donc

sommable en k . Pour contrôler le second terme de l'inégalité précédente, nous utilisons maintenant une inégalité bien connue. Pour tous $T > 0$ et $\lambda > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(\|W(T\cdot)\| \geq \lambda\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2T}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\|W(v_k a_{n_k})\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{c}}(n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right) \\ & \leq 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{16\tilde{c}^2 v_k a_{n_k}} n_{k+1} a_{n_{k+1}} (\log_2 n_{k+1})^{-1/3}\right). \end{aligned} \quad (2.2.2.17)$$

Or la propriété 2.2.1 nous assure que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{n_{k+1} a_{n_{k+1}}}{v_k a_{n_k}} (\log_2 n_{k+1})^{-1/3} = \exp\left((\log k)^{1/6} \left(\frac{2}{3} + o(1)\right)\right) (\log k)^{-1/3} (1 + o(1)).$$

On en déduit alors aisément que la suite

$$\mathbb{P}\left(\|W(v_k a_{n_k})\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{c}}(n_{k+1} a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6}\right), \quad k \geq 1$$

est sommable. En se rappelant (2.2.2.16) et (2.2.2.15), on en déduit que la suite de probabilités

$$\mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k} \|n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - n^{1/2} \alpha_n(a_{n_k} \cdot)\| \geq \epsilon \frac{(n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}}{(\log_2 n_{k+1})^{2/3}}\right)$$

est sommable. Ainsi, en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, il vient que, presque sûrement,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n \leq \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ a été choisi arbitrairement, il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0.$$

Contrôle de C_n

Posons $\rho_k := \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}$. On a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k} (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \left\| \frac{\alpha_{n_{k+1}}(a_n \cdot) - \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}}} \right\| \geq \epsilon\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\sup_{\rho \leq \rho_k} (\log_2 n_{k+1})^{2/3} \left\| \frac{\alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \rho \cdot) - \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}}} \right\| \geq \epsilon\right) \\
& \leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{\rho \leq \rho_k} \left\| \tilde{\Pi}(n_{k+1} a_{n_{k+1}} \rho \cdot) - \tilde{\Pi}(n_{k+1} a_{n_{k+1}} \cdot) \right\| \geq \epsilon \frac{\sqrt{2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}}}{(\log_2 n_{k+1})^{2/3}}\right) \\
& \leq 2\mathbb{P}\left(\left\| \tilde{\Pi}(n_{k+1} a_{n_k} \cdot) - W(n_{k+1} a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{8} \frac{\sqrt{2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}}}{(\log_2 n_{k+1})^{2/3}}\right) \\
& \quad + 2\mathbb{P}\left(\left\| \frac{W(\rho_k \cdot) - W(\cdot)}{\sqrt{2 \log_2 n_{k+1}}} \right\| \geq \frac{\epsilon}{4(\log_2 n_{k+1})^{2/3}}\right) \tag{2.2.2.18}
\end{aligned}$$

Grâce à (2.2.2.7) on montre que le premier terme de (2.2.2.18) est sommable, en faisant un raisonnement similaire à celui de la preuve du lemme 2.2.9. Pour contrôler le second terme dans (2.2.2.18), nous utilisons l'inégalité suivante pour les accroissements du processus de Wiener, que l'on retrouve par exemple dans [91], p.536.

Inégalité 2.2.1 *Soit $0 < a < 1$ et $0 < u < 1$. On a, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \leq 1, h \leq a} |W(t+h) - W(t)| \geq \lambda \sqrt{a}\right) \leq \frac{64}{au^2 \lambda} \exp\left(- (1-u)^2 \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

Preuve : Voir [91], p536. \square .

Nous appliquons cette inégalité avec $a := \rho_k - 1$, $\lambda := (\rho_k - 1)^{-1/2} (\log_2 n_{k+1})^{-1/6} \epsilon / 4$ et $u = 1/2$ pour obtenir, pour k suffisamment

grand,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\| \frac{W(\rho_k \cdot) - W(\cdot)}{\sqrt{2 \log_2 n_{k+1}}} \right\| \geq \frac{\epsilon}{4(\log_2 n_{k+1})^{2/3}} \sqrt{\frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}}} \right) \\
& \leq \frac{1024}{\epsilon} (\rho_k - 1)^{-1/2} (\log_2 n_{k+1})^{1/6} \exp\left(- \frac{\epsilon^2}{128(\rho_k - 1)(\log_2 n_{k+1})^{1/3}} \right) \\
& \leq \frac{1024}{\epsilon} \exp\left(- \frac{\epsilon^2}{256(\rho_k - 1)(\log_2 n_{k+1})^{1/3}} \right) \tag{2.2.2.19}
\end{aligned}$$

Dans (2.2.2.19), nous avons utilisé le fait que $(\log_2 n_{k+1})^{1/3}(\rho_k - 1) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Un raisonnement d'analyse élémentaire montre que (2.2.2.19) est le terme général d'une suite convergente.

Nous avons donc montré que, presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n + B_n + C_n) = 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme 2.2.11. \square

Grâce à la représentation de Bahadur-Kiefer locale (théorème 2.1.6), nous sommes en mesure d'établir un théorème similaire au théorème 2.2.3, mais concernant cette fois-ci $\beta_n(a_n \cdot)$ au lieu de $\alpha_n(a_n \cdot)$. Rappelons que β_n a été défini par (2.0.2.4). Dans le corollaire suivant, la constante L_1 est celle donnée par le théorème 2.2.3.

Corollaire 2.2.3.1 *[Vitesses de recouvrement pour le processus des quantiles local] Si a_n satisfait, en plus des hypothèses du théorème 2.2.3, la condition*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(na_n)}{(\log_2 n)^{11/3}} = \infty, \tag{2.2.2.20}$$

alors pour tout $\epsilon > L_1$ on a presque sûrement

$$\frac{\beta_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2 \log_2 n}} \in \mathcal{S}_1 + \epsilon (\log_2 n)^{2/3} B_0 \text{ a.c.r.}$$

Preuve : En appliquant le représentation de Bahadur-Kiefer locale (théorème 2.1.6), on remarque qu'il suffit de démontrer que, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\left(\frac{\log_2 n}{na_n}\right)^{1/4} \left(\frac{\log(na_n) + 2 \log_2 n}{2 \log_2 n}\right)^{1/2} = O((\log_2 n)^{-2/3}).$$

En faisant le rapport des deux termes, on voit que le seul terme "posant problème" est le terme $\log(na_n)$ dans le deuxième facteur, terme qui pourrait l'emporter relativement à $\log_2 n$ au point de faire tendre le deuxième facteur vers ∞ . Cependant, $\log(na_n)$ est vraiment plus grand devant $\log_2 n$ seulement si a_n n'est pas trop petit, et dans ce cas le premier facteur va tendre plus vite vers 0.

Formalisons cette idée : si $na_n \leq (\log n)^3$ et $n \geq 4$, alors

$$\begin{aligned} u_n &:= \frac{(\log_2 n)^{1/4+2/3}}{(na_n)^{1/4}} \left(\frac{\log(na_n) + 2 \log_2 n}{2 \log_2 n}\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{(\log_2 n)^{11/12}}{(na_n)^{1/4}} \left(\frac{5 \log_2 n}{2 \log_2 n}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{(\log_2 n)^{11/3}}{na_n}\right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Le terme de droite tend bien vers 0 grâce à l'hypothèse (2.2.2.20). Maintenant, si $na_n \geq (\log n)^3$, et $n \geq 4$, alors, comme $\log(na_n) \leq \log n$ on a

$$\begin{aligned} u_n &\leq \frac{(\log_2 n)^{11/12}}{(\log n)^{3/4}} \left(\frac{\log n + 2 \log_2 n}{2 \log_2 n}\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{(\log_2 n)^{11/12}}{(\log n)^{3/4}} \Gamma(\log n)^{1/2}, \end{aligned}$$

où ici

$$\Gamma := \sup_{n \geq 4} \frac{\log n + 2 \log_2 n}{2 \log_2 n \log n}.$$

On a donc majoré u_n par une suite qui tend vers 0, ce qui conclut la preuve du corollaire 2.2.3.1. \square

2.2.3 Applications des vitesses de recouvrement en statistiques

Les résultats obtenus dans le paragraphe précédent peuvent être utilisés pour obtenir des lois limites du même type pour certains estimateurs. Dans un premier temps, nous allons voir que les théorèmes 2.2.2 et 2.2.3 "se conservent" par composition à gauche avec une application continue. Dans un second temps nous donnerons quelques exemples d'applications possibles en statistiques.

Transport des vitesses de recouvrement par une application continue

Nous allons voir comment les résultats de vitesses de recouvrement peuvent aboutir à des résultats du second ordre pour les lois du logarithme itéré d'estimateurs. Voici une proposition autour de laquelle s'articulent toutes les applications de vitesses de recouvrement pour les statistiques.

Proposition 2.2.4 [*Transport des vitesses de recouvrement*] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact de $(E, \|\cdot\|)$ et ϕ une fonction continue de $(E, \|\cdot\|)$ vers un espace vectoriel métrique $(E', \|\cdot\|')$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de points de E et ϵ_n une suite positive telle que

$$f_n \in K + \epsilon_n B_0 \text{ a.c.r.},$$

où B_0 est la boule unité de $(E, \|\cdot\|)$. Alors

1. Il existe une fonction $A(\cdot) = A_{\phi, K}(\cdot)$ continue en 0, et telle que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A(\epsilon) = 0,$$

$$\sup_{x \in K, y \in E, \|x-y\| \leq \epsilon} \|\phi(x) - \phi(y)\| \leq A(\epsilon).$$

2. On a de plus

$$\phi(f_n) \in \phi(K) + A(\epsilon_n) B'_0 \text{ a.c.r.},$$

où B'_0 est la boule unité de $(E', \|\cdot\|')$.

Preuve : Il s'agit là de topologie élémentaire. \square

Remarque 2.2.2 *Nous savons que ϵ_n est de l'ordre de $L_0(\log_2 n)^{-2/3}$ (ou $L_1(\log_2 n)^{-2/3}$ selon le théorème impliqué). Trouver une borne supérieure pour ces deux constantes paraît indispensable pour réellement parler d'application statistiques. Cela reste encore un problème ouvert.*

Intervalle de confiance presque sûrs

Voici plusieurs exemples d'intervalles de confiance asymptotiques presque sûrs pour des statistiques dans un cadre non paramétrique. On considère dans ce sous-paragraphe un échantillon i.i.d $(X_i)_{n \geq 1}$ de loi F sur \mathbb{R}

La statistique de Kolmogorov-Smirnov

En appliquant directement le théorème 2.2.2, il vient que pour tout $\theta > 0$ on a presque sûrement à partir d'un certain rang

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq \left(\frac{2 \log_2 n}{n}\right)^{1/2} + \frac{2^{1/2} L_0(1 + \theta)}{n^{1/2} (\log_2 n)^{1/6}}.$$

Une classe de L-statistiques

En reprenant les travaux de Bhaskara Rao et Tomkins [5], nous pouvons établir des vitesses de recouvrement pour certaine L -statistiques.

Proposition 2.2.5 (Vitesse de recouvrement pour certaines L -statistiques)

Soit $(X_{i,n})_{1 \leq i \leq n}$ la statistique d'ordre basée sur un échantillon i.i.d. de loi F . Soit J une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$ et H une fonction réelle telle que la fonction $K(\cdot) := H(F^{-1}(\cdot))$ vérifie, pour une certaine fonction η de limite nulle en 0

$$\forall t \in [0, 1], \forall h \in [0, 1 - t], |K(t + h) - K(t) - hK'(t)| \leq h\eta(h). \tag{2.2.3.1}$$

Soient μ et σ^2 l'espérance et la variance de la v.a. $J(U)K(U)$, où U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, et soit

$$\gamma := \int_0^1 |K'(t)J(t)| dt. \quad (2.2.3.2)$$

Supposons qu'il existe $\delta > 2/3$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h)(\log(1/h))^\delta = 0. \quad (2.2.3.3)$$

Alors la suite de statistiques

$$L_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J\left(\frac{i}{n}\right) H(X_{i,n}), \quad n \geq 1$$

satisfait presque sûrement, pour tout $\theta > 0$,

$$|L_n - \mu| \leq \sigma^2 \left(\frac{2 \log_2 n}{n}\right)^{1/2} + \frac{2^{1/2} \gamma L_0 (1 + \theta)}{n^{1/2} (\log_2 n)^{1/6}} \text{a.c.r.}$$

Preuve : En appliquant la transformation des quantiles, nous savons qu'il existe une suite i.i.d $(U_i)_{i \geq 1}$ de loi uniforme sur $[0,1]$ telle que l'on ait pour tout $i \geq 1$,

$$X_i = F^{-1}(U_i).$$

Soit $(U_{i,n})_{i \leq n}$ l'échantillon ordonné basé sur (U_1, \dots, U_n) . On a alors

$$X_{i,n} = F^{-1}(U_{i,n}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} L_n - \mu &= \sum_{i=1}^n \left(J\left(\frac{i}{n}\right) - n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} J(t) dt \right) \frac{1}{n} K(U_{i,n}) + \int_0^1 J(t) \left(K(F_n^{-1}(t)) - K(t) \right) dt \\ &=: A_n + B_n. \end{aligned}$$

Contrôlons d'abord A_n . Comme J est lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq \frac{\|J\|_{Lip}}{n^2} \sum_{i=1}^n |K(X_{i,n})| \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |K(X_i)|. \end{aligned}$$

En appliquant la loi forte des grands nombres, il vient que, presque sûrement, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$|A_n| = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.2.3.4)$$

Puis, en mettant à profit l'hypothèse (2.2.3.1), on a

$$\begin{aligned} \left| B_n - \int_0^1 J(t)K'(t)n^{-1/2}\beta_n(t)dt \right| &\leq \left| \int_0^1 n^{-1/2}\beta_n(t)\eta(n^{-1/2}\beta_n(t))dt \right| \\ &=: C_n. \end{aligned} \quad (2.2.3.5)$$

En appliquant le corollaire 2.2.2.1, et au vu de(2.2.3.3), il vient que presque sûrement, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$C_n = o\left(\left(\frac{2 \log_2 n}{n}\right)^{1/2} (\log_2 n)^{-2/3}\right). \quad (2.2.3.6)$$

Enfin, la fonctionnelle

$$\Psi(f) := \int_0^1 f(t)J(t)K'(t)dt, \quad f \in B([0, 1]),$$

est γ -lipschitzienne sur $(B(0, 1), \|\cdot\|)$ (γ est défini par (2.2.3.2)). On applique alors le corollaire 2.2.2.1 pour en déduire que, pour tout $\theta > 0$,

$$\psi\left(\frac{\beta_n}{\sqrt{n \log_2 n}}\right) \in \Psi(\mathcal{S}_2) + [-\gamma L_0(1+\theta)(\log_2 n)^{-2/3}, \gamma L_0(1+\theta)(\log_2 n)^{-2/3}] a.c.r. \quad (2.2.3.7)$$

Nous renvoyons à l'article de Rao et Tomkins [5] pour la preuve du fait que $\Psi(\mathcal{S}_2) = [-\sigma, \sigma]$. Ainsi la preuve s'achève en combinant (2.2.3.4), (2.2.3.6) et (2.2.3.7). \square

2.3 Lois fonctionnelles de type Chung-Mogulskii

Une autre classe de problèmes concernant les lois fonctionnelles du logarithme itéré est la suivante. Supposons qu'une suite f_n satisfasse $f_n \rightsquigarrow K$ dans un espace métrique (E, d) . Cela implique que pour tout point $f \in K$ on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0.$$

On cherche alors à trouver la vitesse de convergence dans cette limite. Autrement dit, on cherche une suite $v_n \rightarrow \infty$ et un réel $\chi > 0$ vérifiant.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} v_n d(f_n, f) = \chi.$$

De tels résultats constituent des raffinements dans les LFLI, et sont souvent appelés lois limites de type Chung-Mogulskii, ces deux chercheurs ayant chacun établi des résultats pionniers dans ce domaine (voir [14]). Pour ce genre de travaux, l'outil fondamental est le contrôle précis des probabilités de "petites boules", c'est à dire, pour $f \in \mathcal{S}_1$ fixée, les probabilités

$$\mathbb{P}\left(\left\|\frac{W}{T_n} - f\right\| \leq v_n^{-1}\right),$$

avec $T_n \rightarrow \infty$ et $v_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Le choix pertinent de v_n dépend de la fonction f choisie au préalable, c'est pourquoi **nous invitons le lecteur à prendre connaissance préalablement à la lecture de ce paragraphe des notations et des résultats détaillés dans le §1.3**. Dans [8], Berthet a obtenu les vitesses exactes de convergence de l'ensemble Θ_n défini dans le théorème 2.1.2 vers sa limite. Ces résultats ont été établis dans un cadre plus général, car

l'intervalle ouvert dans lequel varie t est ici remplacé par une suite monotone d'intervalles T_n . Pour $f \in \mathcal{S}_1$, on définit

$$\omega_n^f := \inf_{t \in T_n} \left\| \frac{\Delta \alpha_n(a_n, t)}{\sqrt{2(\log(1/a_n) + \log_2 n)}} - f \right\|,$$

où

$$\Delta \alpha_n(a_n, t) := \alpha_n(t + a_n \cdot) - \alpha_n(t).$$

Nous donnons ici la restriction du résultat de Berthet au "domaine d'invariance" classique. Rappelons que \mathcal{S}_1^* est défini dans le §1 (définition 1.3.6).

Théorème 2.3.1 *Soit $f \in \mathcal{S}_1^*$. Supposons que, en plus des hypothèses du théorème 2.1.2, la suite a_n satisfait les conditions suivantes*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/\lambda(T_n))}{\log(1/a_n)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{\log n \nabla_f(\log(1/a_n))} = \infty,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(na_n)}{\log_2 n} > 3 \text{ ou } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(na_n)}{\log_2 n} < \infty.$$

Si, de plus, $f \in \mathcal{S}_1^{bv} \cup \mathcal{S}_1^{liv}$, supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nabla_f(\log(1/a_n))}{\log(1/a_n) \log_2 n} = \infty.$$

Alors, avec probabilité 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log(1/a_n)) \omega_n^f = \chi_f.$$

Preuve : Voir [8]□.

2.3.1 Lois fonctionnelles de type Chung-Mogulskii pour le processus empirique local

Dans [26], Deheuvels a établi des lois fonctionnelles de type Chung-Mogulskii pour le processus empirique local $\alpha_n(a_n \cdot)$ lorsque $f \in \mathcal{S}_1^-$, c'est à dire lorsque $\int_0^1 f'^2(t)dt < 1$ (voir annexe2), avec une condition sur a_n un peu plus contraignante que celle imposée dans le théorème 2.1.3.

Théorème 2.3.2 [Deheuvels, 2000] *Soit a_n une suite de constantes strictement positives vérifiant, en plus des hypothèses du théorème 2.1.3 la condition suivante*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{(\log_2 n)^3} = \infty. \quad (2.3.1.1)$$

Soit $f \in \mathcal{S}_1^-$. On a, avec probabilité 1,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (\log_2 n) \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} - f \right\| = \frac{\pi}{4\sqrt{1 - J(f)}}$$

Preuve : Voir [26].□

Nous présentons ici une extension du résultat ci dessus, concernant cette fois ci les fonctions de \mathcal{S}_1^* (voir (1.3.2.6) dans le §1.3). Les fonctions ∇_f et les constantes χ_f utilisées dans le théorème ci dessous sont définies dans le §1.3 (voir aussi, par exemple, [8]). Les conditions sur a_n dépendent de f , mais sont toutes au moins aussi faibles que celles du théorème précédent. Dans [8], ces hypothèses ont déjà été conjecturées.

Théorème 2.3.3 [Lois de type Chung-Mogulskii généralisées pour le processus empirique local] *Soit $f \in \mathcal{S}_1^*$, et a_n une suite de réels vérifiant, en plus des hypothèses du théorème 2.1.3, les conditions suivantes.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{\log_2 n \nabla_f^2(\log_2 n)} = \infty, \quad (2.3.1.2)$$

et

$$\lim a_n \log_2 n = 0. \quad (2.3.1.3)$$

Alors on a , avec probabilité 1,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} - f \right\| = \chi_f.$$

Remarque 2.3.1 On sait (voir §1.3) que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_1^{BV}$ on a, lorsque $L \rightarrow \infty$,

$$\nabla_f(L)/L^{2/3} \rightarrow \infty,$$

et que pour $f \in \mathcal{S}_1^{BV}$ on a

$$\nabla_f(L)/L^{2/3} \rightarrow \chi > 0.$$

Ainsi, la vitesse de recouvrement du théorème 2.2.3 apparaît comme vraisemblablement optimale, puisque c'est la vitesse la plus lente que l'on puisse avoir dans le théorème 2.3.3, lorsque $f \in \mathcal{S}_1^{BV}$. Le problème du calcul exact de la constante L_1 dans le théorème 2.2.3 n'est pas encore résolu.

Remarque 2.3.2 La condition (2.3.1.2) est nécessaire pour utiliser l'approximation forte (voir [66]), ce qui laisse le problème suivant ouvert. Si a_n est une suite de réels telle que

$$na_n/\log_2 n \rightarrow \infty, \quad na_n/(\log_2 n)\nabla_f^2(\log_2 n) \not\rightarrow \infty,$$

alors le théorème 2.1.3 est valide, tandis que les lois de Chung-Mogulskii associées au théorème 2.1.3 demeurent inconnues à notre connaissance.

Remarque 2.3.3 Il semble impossible de se passer de l'hypothèse (2.3.1.3), car nous ne pouvons nous en passer pour ramener l'étude de $\alpha_n(a_n \cdot)$ à l'étude de sa version "Poissonisée". Nous ne pouvons dire si cela est juste un problème technique, ou si d'autres phénomènes s'observent lorsque (2.3.1.3) n'est pas vérifiée. Cela reste un problème ouvert.

Preuve. Rappelons tout d'abord deux propriétés asymptotiques de ∇_f (voir §1.3).

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-1} \nabla_f(L) \leq 1, \quad (2.3.1.4)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{-2/3} \nabla_f(L) \geq 1. \quad (2.3.1.5)$$

Le principal outil utilisé dans cette preuve est l'inégalité suivante.

Inégalité 2.3.1 [*Probabilité de petites boules autour d'une fonction cible*] Soient $f \in \mathcal{S}_1^*$ et $\delta > 0$. Il existe $\gamma^+ = \gamma^+(\delta, f) > 0$ et $\gamma^- = \gamma^-(\delta, f) > 0$ tels que, pour tout $T > 0$ suffisamment grand, on ait

$$\mathbb{P}\left(\nabla_f\left(\frac{T^2}{2}\right) \parallel \frac{W}{T} - f \parallel \leq (1 + \delta)\chi_f\right) \geq \exp\left(-\frac{T^2}{2} + \gamma^+ \frac{\nabla_f^2(T^2/2)}{T^2}\right), \quad (2.3.1.6)$$

$$\mathbb{P}\left(\nabla_f\left(\frac{T^2}{2}\right) \parallel \frac{W}{T} - f \parallel \leq (1 - \delta)\chi_f\right) \leq \exp\left(-\frac{T^2}{2} - \gamma^- \frac{\nabla_f^2(T^2/2)}{T^2}\right) \quad (2.3.1.7)$$

Preuve : Ce résultat est une synthèse des travaux de Grill [55], Gorn et Lifshits [54] et Berthet et Lifshits [9]. Cette synthèse est faite dans [8]. \square

Nous divisons la preuve en deux parties distinctes.

2.3.2 Preuve de la borne inférieure dans le théorème 2.3.3

Soit $f \in \mathcal{S}_1^*$. Nous allons montrer dans ce sous-chapitre qu'on a presque sûrement :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) \parallel \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} - f \parallel \geq \chi_f. \quad (2.3.2.1)$$

Fixons $\epsilon > 0$.

Étape 1 : Poissonisation et approximation forte

Soit $\tilde{\Pi}$ défini par la relation (2.2.2.5), et soit $W(\cdot)$ un processus de Wiener construit pour vérifier les inégalités de (2.2.2.7). Pour tout n suffisamment grand, nous appliquons l'inégalité de Poissonisation du lemme 2.2.8. Ainsi, en se rappelant la définition de $\tilde{\Pi}_n$ dans (2.2.2.4) et l'égalité en loi (2.2.2.8), on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left|\nabla_f(\log_2 n)\right|\left|\frac{\alpha_n(a_{n\cdot})}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} - f\right|\leq \chi_f(1-2\epsilon)\right) \\
& \leq 2\mathbb{P}\left(\left|\nabla_f(\log_2 n)\right|\left|\frac{\tilde{\Pi}_n(a_{n\cdot})}{\sqrt{2a_n \log_2 n}} - f\right|\leq \chi_f(1-2\epsilon)\right) \\
& = 2\mathbb{P}\left(\left|\nabla_f(\log_2 n)\right|\left|\frac{\tilde{\Pi}(na_{n\cdot})}{\sqrt{2na_n \log_2 n}} - f\right|\leq \chi_f(1-2\epsilon)\right) \\
& \leq 2\mathbb{P}\left(\left|\nabla_f(\log_2 n)\right|\left|\frac{W(na_{n\cdot})}{\sqrt{2na_n \log_2 n}} - f\right|\leq \chi_f(1-\epsilon)\right) \\
& \quad + 2\mathbb{P}\left(\left|\left|W(na_{n\cdot}) - \tilde{\Pi}(na_{n\cdot})\right|\right|\geq \frac{\epsilon\sqrt{2na_n \log_2 n}}{\nabla_f(\log_2 n)}\right) \\
& =: 2\mathcal{P}_{1,n} + 2\mathcal{P}_{2,n}. \tag{2.3.2.2}
\end{aligned}$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{na_n \log_2 n}}{\nabla_f(\log_2 n) \log_2 n} = \infty,$$

et, d'après (2.3.1.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{na_n \log_2 n}}{\nabla_f(\log_2 n) \log(na_n)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{na_n}{\log_2 n \log(na_n)}}.$$

Or d'après (2.3.1.5) et (2.3.1.2), on voit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{(\log_2 n)^{7/3}} = \infty.$$

Ceci assure donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{2} \frac{\sqrt{2na_n \log_2 n}}{\nabla_f(\log_2 n) \log(na_n)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{2na_n}{\log_2 n \log(na_n)}} = \infty. \quad (2.3.2.3)$$

Ainsi, en appliquant (2.3.2.3) avec l'approximation KMT, c'est à dire l'inégalité (2.2.2.7) avec $T := na_n$, il vient qu'à partir d'un certain rang on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2,n} &\leq \mathbb{P}\left(\|W(na_n \cdot) - \tilde{\Pi}(na_n \cdot)\| \geq \left(\log(na_n) + \frac{\epsilon}{2} \frac{\sqrt{2na_n}}{\nabla_f(\log_2 n)} \right) \right) \\ &\leq C_2 \exp\left(-\frac{C_3 \epsilon \sqrt{2na_n}}{2 \nabla_f(\log_2 n)} \right) \\ &\leq \exp(-2 \log_2 n). \end{aligned} \quad (2.3.2.4)$$

La dernière inégalité a lieu pour n suffisamment grand, en vertu de l'hypothèse (2.3.1.2). Pour contrôler asymptotiquement $\mathcal{P}_{1,n}$, nous appliquons l'inégalité 2.3.1 en conjonction avec (2.2.2.11). Ainsi, lorsque $n \rightarrow \infty$ on a

$$\mathcal{P}_{1,n} = \mathbb{P}\left(\nabla_f(\log_2 n) \left\| \frac{W}{2 \log_2 n} - f \right\| \leq \chi_f(1 - \epsilon) \right) \quad (2.3.2.5)$$

$$= O\left(\exp\left(-\log_2 n - \gamma^-(\epsilon, f) \frac{\nabla_f^2(\log_2 n)}{2 \log_2 n} \right) \right). \quad (2.3.2.6)$$

Nous allons maintenant utiliser des techniques d'association par blocs. Considérons une fois de plus la sous-suite n_k définie par (2.2.1.2). En appliquant des lemmes d'association par blocs similaires aux lemmes 2.2.6 et 2.2.7, il vient que, pour k suffisamment grand, (voir (2.2.1.4) pour la définition de H_n),

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in N_k} \left\| \frac{H_n(a_{n_k} \cdot)}{(2n_k a_{n_k} \log_2 n_k)^{1/2}} - f \right\|_{\infty} \geq \chi_f(1 - 3\epsilon) \right) \\ &\leq 2\mathbb{P}\left(\left\| \frac{H_{n_k}(a_{n_k} \cdot)}{(2n_k a_{n_k} \log_2 n_k)^{1/2}} - f \right\|_{\infty} \geq \chi_f(1 - 2\epsilon) \right) \\ &\leq 4\mathcal{P}_{1,n_k} + 4\mathcal{P}_{2,n_k}. \end{aligned} \quad (2.3.2.7)$$

Ici, l'inégalité (2.3.2.7) est due à l'inégalité (2.3.2.2). En tirant profit des propriétés de n_k (propriété 2.2.1), et grâce aux majorations (2.3.2.4) et (2.3.2.6), il vient que, lorsque $k \rightarrow \infty$

$$\mathcal{P}_{1,n_k} + \mathcal{P}_{2,n_k} = O\left(\exp(-\log k - 2 \log_2 k)\right).$$

Nous appliquons alors le lemme de Borel-Cantelli, et en déduisons que, pour tout $\epsilon > 0$, presque sûrement,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n_k) \left\| \frac{H_n(a_{n_k} \cdot)}{\sqrt{2n_k a_{n_k} \log_2 n_k}} - f \right\| \geq \chi_f(1 - 3\epsilon). \quad (2.3.2.8)$$

Étape 2 : Contrôle des oscillations entre les n_k .

Nous rappelons que $H_n(t) = n(F_n(t) - t)$, $t \in [0, 1]$, et que $N_k = \{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}$. Il nous reste à contrôler, pour $n_k < n \leq n_{k+1}$ la distance

$$\left\| \frac{H_n(a_{n_k} \cdot)}{(2n_k a_{n_k} \log_2 n)^{1/2}} - \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} \right\|.$$

Pour cela, nous allons établir un lemme similaire au lemme 2.2.11.

Lemme 2.3.1 *Sous l'hypothèse $na_n/(\log_2 n) \nabla_f^2(\log_2 n) \rightarrow \infty$, on a presque sûrement*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n_{k+1}) \max_{n \in N_k} \left\| \frac{H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} - \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} \right\| = 0. \quad (2.3.2.9)$$

Preuve La preuve suit un schéma très similaire à celle du lemme 2.2.11.

Notons, pour $k \geq 1$ tel que $N_k \neq \emptyset$ et pour $n \in N_k$

$$\Gamma_n := 1 - \left(\frac{na_n \log_2 n}{n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2}.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, nous avons presque sûrement

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{H_n(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} - \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2na_n \log_2 n)^{1/2}} \right\| \\
& \leq \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} \Gamma_n \right\| + \left\| \frac{n^{1/2} \alpha_n(a_n \cdot) - n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_n \cdot)}{(2n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} \right\| \\
& \quad + \left\| \frac{\alpha_{n_{k+1}}(a_n \cdot) - \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}} \cdot)}{(2a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}} \right\| \\
& =: A_n + B_n + C_n.
\end{aligned}$$

Contrôle de A_n

Clairement, on a

$$\begin{aligned}
\max_{n \in N_k} (\log_2 n_{k+1}) \Gamma_n & \leq (\log_2 n_{k+1}) \left(1 - \left(\frac{n_k a_{n_k} \log_2 n_k}{n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2} \right) \\
& \leq (\log_2 n_{k+1}) \left(1 - \left(\frac{n_k \log_2 n_k}{n_{k+1} \log_2 n_{k+1}} \right)^{1/2} \right).
\end{aligned}$$

Ce terme tend presque sûrement vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$ d'après la propriété 2.2.1. En appliquant ensuite le théorème 2.1.3, il vient que, presque sûrement, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\log_2 n_{k+1}) \max_{n \in N_k} A_n = 0.$$

Contrôle de B_n

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Nous cherchons à contrôler la probabilité suivante, lorsque $N_k \neq \emptyset$ (rappel : $a_n \leq a_{n_k}$ lorsque $n \in N_k$).

$$\mathbb{P} \left(\max_{n \in N_k} \left\| n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_n \cdot) - n^{1/2} \alpha_n(a_n \cdot) \right\| \geq \epsilon \frac{(n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}}{\nabla_f(\log_2 n_{k+1})} \right).$$

En appliquant l'inégalité de Montgomery-Smith-Latala (voir la preuve du lemme 2.2.11) il existe donc une constante \tilde{c} (indépendante de ϵ)

telle que, pour tout entier k suffisamment grand (en se rappellent que $a_n \downarrow$)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k} \nabla_f(\log_2 n_{k+1}) \left\| n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_{k+1}}) - n^{1/2} \alpha_n(a_n) \right\| \geq \epsilon(2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k, n \neq n_{k+1}} \left\| H_n(a_{n_k} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \epsilon(2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{1/2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{n_k+1 \leq n < n_{k+1}} \left\| \sum_{j=n}^{n_{k+1}} X_j \right\| \geq \epsilon(2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\
&\leq \tilde{c} \mathbb{P}\left(\left\| H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{2.3.2.10}$$

Posons $v_k := n_{k+1} - n_k$. Rappelons que $\tilde{\Pi}(\cdot)$ a été défini par (2.2.2.5) et rappelons l'égalité en loi (2.2.2.8). Nous appliquons l'inégalité de Poissonisation du lemme 2.2.8 et l'approximation forte (2.2.2.7). Ainsi, il existe un processus de Wiener $W(\cdot)$ tel que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\| H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - H_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\| H_{v_k}(a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\left\| v_k^{1/2} \tilde{\Pi}_{v_k} \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\
&= 2\mathbb{P}\left(\left\| \tilde{\Pi}(v_k a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\
&\leq 2\mathbb{P}\left(\left\| \tilde{\Pi}(v_k a_{n_k} \cdot) - W(v_k a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\
&\quad + 2\mathbb{P}\left(\left\| W(v_k a_{n_k} \cdot) \right\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{c}} (2n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{2.3.2.11}$$

En appliquant l'hypothèse (2.3.1.2), il vient que $\exp(-2 \log_2 n_{k+1})$ est en k (pour plus de détails, voir (2.3.3.9), (2.3.3.10) et (2.3.3.11), où un raisonnement similaire est effectué). Pour contrôler le second terme

de l'inégalité précédente, nous appliquons l'inégalité

$$\mathbb{P}\left(\|W(T\cdot)\| \geq \lambda\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2T}\right), \quad T > 0, \lambda > 0.$$

Ainsi, d'après (2.3.1.4), nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\|W(v_k a_{n_k})\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{C}}(2n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\nabla_f(\log n_{k+1}))^{-1}\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\|W(v_k a_{n_k})\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{C}}(2n_{k+1}a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2} (\log n_{k+1}) - 1\right) \\ & \leq 2 \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{16\tilde{C}^2 v_k a_{n_k}} n_{k+1} a_{n_{k+1}} (\log n_{k+1})^{-1}\right). \end{aligned} \quad (2.3.2.12)$$

Or la propriété 2.2.1 nous assure que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{n_{k+1} a_{n_{k+1}}}{v_k a_{n_k}} (\log n_{k+1})^{-1} = \exp\left((\log k)^{1/6} (1+o(1))\right) (\log k)^{-1} (1+o(1)).$$

On en déduit alors aisément que la suite

$$\mathbb{P}\left(\|W(v_k a_{n_k})\| \geq \frac{\epsilon}{4\tilde{C}}(n_{k+1}a_{n_{k+1}})^{1/2} (\log n_{k+1})^{-1/6}\right), \quad k \geq 1$$

est sommable. En se rappelant (2.3.2.11) et (2.3.2.10), on en déduit que la suite de probabilités

$$\mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k} \|n_{k+1}^{1/2} \alpha_{n_{k+1}}(a_{n_k} \cdot) - n^{1/2} \alpha_n(a_{n_k} \cdot)\| \geq \epsilon \frac{(n_{k+1} a_{n_{k+1}} \log_2 n_{k+1})^{1/2}}{\nabla_f(\log_2 n_{k+1})}\right)$$

est sommable. Ainsi, en appliquant le lemme de Borel-Cantelli, il vient que, presque sûrement,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) B_n \leq \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ a été choisi arbitrairement, il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) B_n = 0.$$

Contrôle de C_n

Posons $\rho_k := \frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}$. Le contrôle de C_n suite le même schéma que dans la

preuve du lemme 2.2.11. Ainsi, nous majorons la probabilité suivante

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left\|\frac{W(\rho_k \cdot) - W(\cdot)}{\sqrt{2 \log_2 n_{k+1}}}\right\| \geq \frac{\epsilon}{4 \nabla_f(\log_2 n_{k+1})} \sqrt{\frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}}}\right) \\
& \leq \frac{1024}{\epsilon} (\rho_k - 1)^{-1/2} (\log_2 n_{k+1})^{1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{128(\rho_k - 1)(\log_2 n_{k+1})}\right) \\
& \leq \frac{1024}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{256(\rho_k - 1)(\log_2 n_{k+1})}\right) \tag{2.3.2.13}
\end{aligned}$$

Dans (2.3.2.13), nous avons utilisé le fait que $(\log_2 n_{k+1})(\rho_k - 1) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Un raisonnement d'analyse élémentaire montre que cette suite est le terme général d'une suite convergente.

Ainsi, nous avons donc montré que, presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) (A_n + B_n + C_n) = 0,$$

ce qui achève la preuve du lemme annoncé. \square

Remarquons que $\nabla_f(\log_2 n) \leq \nabla_f(\log_2(n_{k+1}))$ pour $n \in N_k$, car ∇_f est croissante (voir §1.3). Ainsi, en combinant (2.3.2.8) et (2.3.2.9), il vient que, presque sûrement,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{\sqrt{2n a_n \log_2 n}} - f \right\| \geq \chi_f(1 - 3\epsilon).$$

La preuve de (2.3.2.1) s'achève en faisant tendre $\epsilon > 0$ dénombrablement vers 0.

2.3.3 Preuve de la borne supérieure dans le théorème 2.3.3

Nous allons maintenant montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 n) \left\| \frac{\alpha_n(a_n \cdot)}{(2a_n \log_2 n)^{1/2}} - f \right\| \leq \chi_f. \tag{2.3.3.1}$$

Nous posons pour tout entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{n}_k &:= k^{2k} \\ v_k &:= \tilde{n}_{k+1} - \tilde{n}_k \\ g_k &:= \frac{\tilde{n}_{k+1}^{1/2} \alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) - \tilde{n}_k^{1/2} \alpha_{\tilde{n}_k}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{(2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1})^{1/2}}\end{aligned}\quad (2.3.3.2)$$

Notons, pour un usage ultérieur, les propriétés suivantes de $(\tilde{n}_k)_{k \geq 1}$ qui nous seront utiles. Lorsque $k \rightarrow \infty$ on a

$$\frac{\tilde{n}_k}{\tilde{n}_{k+1}} \sim \frac{1}{e^2 k^2},$$

$$\log_2 \tilde{n}_k = \log k + \log_2(k) + \log(2) + o(1).$$

Étape 1 : Étude de g_k

Remarquons que les g_k , $k \geq 1$ sont mutuellement indépendants, et que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$g_k \stackrel{loi}{=} \frac{v_k^{1/2} \alpha_{v_k}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}.$$

Notons \mathcal{T}_0 la tribu engendrée par les boules de $(B([0, 1]), \|\cdot\|)$. Nous ramenons l'étude asymptotique de g_k à celle d'un processus de Poisson $\tilde{\Pi}(t) := \#\{i \geq 1, \sum_{j=1}^i \nu_j \leq t\} - t$, $t > 0$ (voir (2.2.2.5)) grâce au lemme suivant :

Lemme 2.3.2 [Poissonisation inverse]

Supposons que les hypothèses du théorème 2.3.3 sont vérifiées, c'est à dire, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}a_n &\downarrow 0, \quad na_n \uparrow \infty, \\ \frac{na_n}{\log_2(n) \nabla_f(\log_2 n)^2} &\rightarrow \infty, \\ a_n \log_2 n &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Alors il existe deux suites de constantes positives $(b_k)_{k \geq 1}$, $(b'_k)_{k \geq 1}$ vérifiant

$$\sum_{k \geq 1} b_k + b'_k < \infty,$$

ainsi qu'un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, on a, quel que soit $A \in \mathcal{T}_0$

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\Pi}(v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) \in A\right) - b_k - b'_k \leq 2\mathbb{P}\left(v_k^{1/2} \alpha_{v_k}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) \in A\right).$$

Remarque 2.3.4 L'hypothèse $a_n \log_2 n \rightarrow \infty$ joue un rôle important dans la preuve de ce lemme. Or, si on regarde les hypothèses du théorème 2.1.3, on voit que l'on rajoute une hypothèse contraignante par rapport à ce dernier. Ainsi on se demande naturellement si cette hypothèse doit être imposée pour une raison fondamentale, ou juste pour des raisons techniques. Le problème reste ouvert à ce niveau de notre étude.

Preuve : Posons

$$u_k := \sqrt{\frac{4 \log_2 v_k}{\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}}}.$$

Sous l'hypothèse (2.3.1.2), on sait que $u_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

Notons également

$$\Pi(t) := \tilde{\Pi}(t) + t, \quad t > 0,$$

$$R_{1,k} := \Pi(v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}), \quad R_{2,k} := \Pi(v_k) - \Pi(v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}).$$

Pour k fixé, ces deux variables sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}$ et $v_k(1 - a_{\tilde{n}_{k+1}})$. Soit $A \in \mathcal{T}_0$ fixé. Notons :

$$E_k := \left\{ \tilde{\Pi}(v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) \in A \right\}.$$

Pour tout $k \geq 1$ entier, posons

$$\begin{aligned} b_k &:= \mathbb{P}\left(R_{1,k} < (1 - u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}\right) \\ b'_k &:= \mathbb{P}\left(R_{1,k} > (1 + u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}\right) \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbb{P}(E_k) \leq \mathbb{P}\left(E_k \cap \left\{R_{1,k} \in [(1 - u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}, (1 + u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}]\right\}\right) + a_k + b_k$$

Nous allons montrer que b_k et b'_k sont sommables en k . Pour cela, nous rappelons tout d'abord l'inégalité de Chernoff pour une variable aléatoire de Poisson X , d'espérance $N > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\mathbb{P}\left(X \geq N(1 + \epsilon)\right) \leq \exp\left(-N((1 + \epsilon)\log(1 + \epsilon) - \epsilon)\right), \quad (2.3.3.3)$$

et pour tout $0 < \epsilon < 1$ on a

$$\mathbb{P}\left(X \leq N(1 - \epsilon)\right) \leq \exp\left(-N((1 - \epsilon)\log(1 - \epsilon) + \epsilon)\right). \quad (2.3.3.4)$$

Nous appliquons l'inégalité (2.3.3.3) avec $X := R_{1,k}$, $N := v_k a_{n_{k+1}}$ et $\epsilon := u_k$, pour $k \geq 1$. Ainsi

$$a_k \leq \exp\left(-v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}\left((1 + u_k)\log(1 + u_k) - u_k\right)\right).$$

Comme $(1 + u)\log(1 + u) - u \sim \frac{u^2}{2}$ lorsque $u \rightarrow 0$ et $u_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$, il s'ensuit que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\exp\left(-v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}\left((1 + u_k)\log(1 + u_k) - u_k\right)\right) = \exp\left(-v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} \frac{u_k^2}{2}(1 + o(1))\right) \quad (2.3.3.5)$$

$$= \exp\left(-2 \log_2 \tilde{n}_k(1 + o(1))\right). \quad (2.3.3.6)$$

Ceci montre bien que b_k est sommable. De la même manière, on montre que b'_k est sommable en appliquant l'inégalité (2.3.3.4) à $X := R_{1,k}$, $N := v_k a_{n_{k+1}}$ et $\epsilon := u_k$.

D'après la remarque de Shorack et Wellner (voir par exemple [91], p. 339), il nous reste à montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left\{E_k \cap R_{1,k} \in [(1-u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}, (1+u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}]\right\}\right) \leq 2\mathbb{P}(E_k \mid \Pi(v_k) = v_k),$$

à partir d'un rang k_0 **indépendant de** $A \in \mathcal{T}_0$. Posons (j désignant un entier)

$$K_k := \inf \left\{ \frac{\mathbb{P}(R_{2,k} = v_k - j)}{\mathbb{P}(\Pi(v_k) = v_k)}, j \in [(1-u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}, (1+u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}] \right\}. \quad (2.3.3.7)$$

On a, par l'indépendance de $R_{1,k}$ et $R_{2,k}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(E_k \cap \left\{R_{1,k} \in [(1-u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}, (1+u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}]\right\}\right) \\ & \leq \sum_{j=[(1-u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}]^{+(1+u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}+1}} \mathbb{P}(E_k \cap \{R_{1,k} = j\}) \\ & \leq K_k^{-1} \sum_{j=[(1-u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}]^{+(1+u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}+1}} \mathbb{P}(E_k \cap \{R_{1,k} = j\}) \frac{\mathbb{P}(R_{2,k} = v_k - j)}{\mathbb{P}(\Pi(v_k) = v_k)} \\ & = K_k^{-1} \sum_{j=[(1-u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}]^{+(1+u_k)v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}+1}} \frac{\mathbb{P}(E_k \cap \{R_{1,k} = j\} \cap \{R_{2,k} = v_k - j\})}{\mathbb{P}(\Pi(v_k) = v_k)} \\ & \leq K_k^{-1} \mathbb{P}(E_k \mid \Pi(v_k) = v_k). \end{aligned}$$

Il est donc suffisant de montrer que $K_k \rightarrow 1$ lorsque $k \rightarrow \infty$. En posant $l = v_k - j$ dans (2.3.3.7), nous avons

$$K_k = \inf \left\{ \frac{\mathbb{P}(R_{2,k} = l)}{\mathbb{P}(\Pi(v_k) = v_k)}, l \in [v_k(1-a_{\tilde{n}_{k+1}}) - v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k, v_k(1-a_{\tilde{n}_{k+1}}) + v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k] \right\}.$$

Par souci de notation, posons $v'_k := v_k(1 - a_{\tilde{n}_{k+1}})$, en se souvenant que $R_{2,k}$ suit une loi de Poisson d'espérance v'_k . Par application de la formule de Stirling, on sait que

$$\mathbb{P}(\Pi(v_k) = v_k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi v_k}}.$$

Puis, une étude de variations de la suite

$$\left(\mathbb{P}(R_{2,k}) = l\right)_{l \in \left\{v_k(1-a_{\tilde{n}_{k+1}}) - v_k a_k u_k, \dots, v_k(1-a_{\tilde{n}_{k+1}}) + v_k a_k u_k\right\}}$$

montre que

$$\mathbb{P}(\Pi(v_k) = v_k) K_k = \min(P_{1,k}, P_{2,k}),$$

où

$$P_{1,k} := \mathbb{P}(R_{2,k} = \lfloor v'_k - v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k \rfloor),$$

et

$$P_{2,k} := \mathbb{P}(R_{2,k} = \lfloor v'_k + v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k \rfloor + 1).$$

Puis, en appliquant la formule de Stirling, et en posant $u'_k := a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k v_k / v'_k$, on a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} P_{1,k} &= \frac{v'_k \lfloor v'_k - v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k \rfloor!}{[v'_k - v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} u_k]!} \exp(-v'_k) \\ &\sim \left(\frac{v'_k}{v'_k(1-u'_k)} \right)^{v'_k(1-u'_k)} \frac{\exp(-v'_k)}{\exp(-v'_k + v'_k u'_k)} (2\pi v'_k)^{-1/2} \\ &\sim (2\pi v'_k)^{-1/2} (1-u'_k)^{-v'_k(1-u'_k)} \exp(-v'_k u'_k) \\ &= (2\pi v'_k)^{-1/2} \exp\left(-v'_k((1-u'_k) \log(1-u'_k) + u'_k)\right). \end{aligned}$$

Comme $(1-\epsilon) \log(1-\epsilon) + \epsilon \sim \frac{\epsilon^2}{2}$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, et en se rappelant la définition de u_k , on en déduit que lorsque $k \rightarrow \infty$

$$P_{1,k} = (2\pi v'_k)^{-1/2} \exp\left(-2a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1} (1 + o(1))\right).$$

Ainsi, en se rappelant l'hypothèse (2.3.1.3) on a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$P_{1,k} \sim (2\pi v'_k)^{-1/2}.$$

De la même façon, on montre que $P_{2,k} \sim (2\pi v'_k)^{-1/2}$ lorsque $k \rightarrow \infty$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.3.2. \square

Nous appliquons le lemme 2.3.2 en conjonction avec l'approximation KMT. Rappelons que $\tilde{\Pi}_{v_k}$ est défini en (2.2.2.4) par

$$\tilde{\Pi}_n(t) := n^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\eta_n} 1_{[0,t]}(U_i) - t \right)$$

et rappelons l'égalité en loi (2.2.2.8). Soit $W(\cdot)$ un processus de Wiener construit pour vérifier les inégalités (2.2.2.7). Soit $\delta > 0$ fixé. On a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel g_k - f \parallel \leq (1 + 2\delta) \chi_f \right) \\ & \geq \frac{1}{2} \mathbb{P} \left(\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel \frac{v_k^{1/2} \tilde{\Pi}_{v_k}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} - f \parallel \leq (1 + 2\delta) \chi_f \right) - \frac{1}{2} b_k - \frac{1}{2} b'_k \\ & \geq -\frac{1}{2} \mathbb{P} \left(\left\| \tilde{\Pi}(v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) - W(v_k a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) \right\| \geq \frac{\delta \chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})} \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \mathbb{P} \left(\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel \frac{W \sqrt{v_k}}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} - f \parallel \leq \chi_f (1 + \delta) \right) - \frac{1}{2} b_k - \frac{1}{2} b'_k \\ & =: -\frac{1}{2} \tilde{P}_{1,k} + \frac{1}{2} \tilde{P}_{2,k} - \frac{1}{2} b_k - \frac{1}{2} b'_k \end{aligned} \tag{2.3.3.8}$$

Nous allons dans un premier temps montrer que $\tilde{P}_{1,k}$ est sommable. D'après, (2.3.1.5) nous avons, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}}{\nabla_f^2(\log_2 v_k) \log_2 \tilde{n}_{k+1}} & \sim \frac{\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}}{\nabla_f^2(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \log_2 \tilde{n}_{k+1}} \\ & \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}}{(\log_2 \tilde{n}_{k+1})^{7/3}} \right) \\ & \sim \frac{v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}}{(\log_2 v_k)^{7/3}}, \end{aligned}$$

et ainsi, lorsque $k \rightarrow \infty$, nous avons, d'après l'hypothèse (2.3.1.2),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}}{(\log_2 v_k)^{7/3}} = \infty. \tag{2.3.3.9}$$

De plus, d'après (2.3.1.4), nous avons, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \frac{(\log v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}) \nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} (\log_2 \tilde{n}_{k+1})}} &\leq 2 \frac{(\log v_k a_{\tilde{n}_{k+1}}) \log_2 \tilde{n}_{k+1}}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} (\log_2 \tilde{n}_{k+1})}} \\ &= 2 \frac{(\log v_k a_{\tilde{n}_{k+1}})}{(\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}})^{3/14}} \sqrt{\frac{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}}{(\log_2 \tilde{n}_{k+1})^{7/3}}}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, d'après (2.3.3.9) que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\log(\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}) = o\left(\frac{\delta\chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}\right). \quad (2.3.3.10)$$

Il vient que, pour tout entier k suffisamment grand (rappelons que C_1 est définie dans (2.2.2.7)),

$$\left(C_1 \log(\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}) + \frac{\delta\chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{2\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}\right) \leq \left(\frac{\delta\chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}\right),$$

ce qui implique que (C_2 et C_3 sont les constantes strictement positives apparaissant dans (2.2.2.7))

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{1,k} &\leq \mathbb{P}\left(\left\|\tilde{\Pi}(\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot) - W(\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)\right\| \geq C_1 \log(na_n) + \frac{\delta\chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{2\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}\right) \\ &\leq C_2 \exp\left(-C_3 \frac{\delta\chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{2\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}\right). \end{aligned} \quad (2.3.3.11)$$

La dernière inégalité est une application de (2.2.2.7) avec

$$z := \frac{\delta\chi_f \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{2\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1})}.$$

Puis, (2.3.1.2) nous assure que, pour tout entier k suffisamment grand on a

$$\tilde{P}_{1,k} \leq \exp\left(-2 \log_2 \tilde{n}_{k+1}\right).$$

Or

$$\log_2 \tilde{n}_{k+1} = \log(k+1) + \log_2(k+1) + o(k^{-2}(\log k)^{-1}). \quad (2.3.3.12)$$

Ainsi, la suite $(\tilde{P}_{1,k})_{k \geq 1}$ est sommable.

Nous allons maintenant montrer que la suite $(\tilde{P}_{2,k})_{k \geq 1}$ est non sommable, ce qui nous permettra de déduire que, par (2.3.3.8),

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel g_k - f \parallel \leq (1 + 2\delta)\chi_f\right) = \infty. \quad (2.3.3.13)$$

Comme $v_k \sim \tilde{n}_{k+1}$ lorsque $k \rightarrow \infty$, il vient que, pour tout k suffisamment grand on a

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2,k} &= \mathbb{P}\left(\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel \frac{W\sqrt{v_k}}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1}\log_2 \tilde{n}_{k+1}}} - f \parallel \leq \chi_f(1 + \delta)\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel \frac{W}{\sqrt{2\log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \parallel \leq \chi_f\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.3.3.14)$$

Pour un entier k suffisamment grand, nous appliquons l'inégalité 2.3.1, et ainsi

$$\tilde{P}_{2,k} \geq \exp(-\log_2 \tilde{n}_{k+1}).$$

Ceci nous assure, d'après (2.3.3.12), que $\tilde{P}_{2,k}$ n'est pas sommable, et donc (2.3.3.13) est vraie. Comme les g_k , $k \geq 1$ sont mutuellement indépendants, nous pouvons appliquer la deuxième partie du lemme de Borel-Cantelli. On en déduit que, presque sûrement,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \parallel g_k - f \parallel \leq \chi_f. \quad (2.3.3.15)$$

Nous rappelons que g_k est défini par (2.3.3.2).

Étape 2 : Quasi-indépendance

Cette étape a pour but de contrôler la suite suivante.

$$\left\| g_k - \frac{\alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \right\|.$$

Ceci montrera que $(2\tilde{n}_{k+1}a_{\tilde{n}_{k+1}})^{-1/2}\alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)$ a un comportement asymptotique presque sûr très similaire à celui des g_k . Nous appelons

ce phénomène "quasi-indépendance", car les g_k sont mutuellement indépendants.

Lemme 2.3.3 [*Quasi-indépendance*] Nous avons presque sûrement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \left\| g_k - \frac{\alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \right\| = 0. \quad (2.3.3.16)$$

Preuve : Remarquons d'abord que, presque sûrement

$$\left\| g_k - \frac{\alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \right\| = \left\| \frac{\sqrt{\tilde{n}_k} \alpha_{\tilde{n}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \right\|.$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$ quelconque. Nous appliquons l'inégalité de Doob-Kolmogorov (2.2.2.2) à la sous martingale $(1-t)^{-1} |\alpha_n(t)|$, $t \in [0, 1]$.

Ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\log_2 \tilde{n}_{k+1} \left\| \frac{\sqrt{\tilde{n}_k} \alpha_{\tilde{n}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \right\| \geq \epsilon \right) \\ & \leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq a_{\tilde{n}_{k+1}}} \left| \frac{\alpha_{\tilde{n}}(t)}{1-t} \right| \geq \frac{\epsilon \sqrt{2\tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}}{\sqrt{\tilde{n}_k} \log_2 \tilde{n}_{k+1}} \right) \\ & \leq \frac{\tilde{n}_k \log_2 \tilde{n}_{k+1}}{2\epsilon^2 \tilde{n}_{k+1} a_{\tilde{n}_{k+1}}} \mathbb{E} \left(\left(\frac{\alpha_{\tilde{n}}(a_{\tilde{n}_{k+1}})}{1 - a_{\tilde{n}_{k+1}}} \right)^2 \right) \\ & = \frac{\tilde{n}_k \log_2 \tilde{n}_{k+1}}{2\tilde{n}_{k+1} \epsilon^2 (1 - a_{\tilde{n}_{k+1}})}. \end{aligned}$$

Comme, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{\tilde{n}_k}{\tilde{n}_{k+1}} \sim \frac{1}{e^2 k^2}, \quad \text{et } \log_2 \tilde{n}_{k+1} \sim \log k,$$

nous pouvons donc appliquer le lemme de Borel-Cantelli, et en déduire le résultat souhaité. \square

Fin de la preuve de la borne supérieure dans le théorème 2.3.3

En se rappelant (2.3.1.4) on voit que (2.3.3.16) implique que, presque sûrement,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \left\| g_k - \frac{\alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{\sqrt{2a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1}}} \right\| = 0.$$

En combinant ce dernier résultat à (2.3.3.15), il s'ensuit que, presque sûrement,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \nabla_f(\log_2 \tilde{n}_{k+1}) \left\| \frac{\alpha_{\tilde{n}_{k+1}}(a_{\tilde{n}_{k+1}} \cdot)}{(2a_{\tilde{n}_{k+1}} \log_2 \tilde{n}_{k+1})^{1/2}} - f \right\| \leq \chi_f.$$

Ceci conclut la preuve du théorème 2.3.3. \square

Chapitre 3

Principes de grandes déviations uniformes

Ce chapitre traite des principes de grandes déviations pour des suites de variables aléatoires. En effet, il s'agit là de l'outil principal dont nous nous servons dans les preuves des différents résultats présentés dans la suite de cette thèse. L'objectif de ce chapitre est double. En premier lieu, nous donnerons quelques rappels concernant certains résultats de grandes déviations déjà connus et, par la même occasion, le lecteur pourra se familiariser avec ces notions. En second lieu, nous présentons la notion de principe de grandes déviations uniforme (GDU). Cet outil est du même type que les principes de grandes déviations, à la différence près qu'il permet de contrôler uniformément les probabilités de grandes déviations de tableaux triangulaires de variables aléatoires.

Conventions. Dans tout ce chapitre, nous faisons, par souci de simplicité de calculs, les conventions suivantes

$$\sup \emptyset = \max \emptyset = -\infty, \quad (3.0.3.1)$$

$$\inf \emptyset = \min \emptyset = \infty. \quad (3.0.3.2)$$

3.1 Définition du principe de grandes déviations

Le premier résultat que l'on peut qualifier de principe de grandes déviations est le théorème de Cramér-Chernoff.

Soit X_1 une variable aléatoire réelle. On définit la fonction de Laplace (pouvant prendre des valeurs infinies) de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_{X_1}(t) := \mathbb{E}\left(\exp(tX_1)\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1.0.3)$$

et pour $t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction de Cramér-Chernoff de la façon suivante :

$$J_{X_1}(t) := \sup_{u \in \mathbb{R}, \mathcal{L}_{X_1}(u) < \infty} tu - \log(\mathcal{L}_{X_1}(u)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1.0.4)$$

Enfin, pour un ensemble A quelconque et pour une fonction réelle J sur A , on définit

$$J(A) := \inf \{ J(x), x \in A \}. \quad (3.1.0.5)$$

Théorème 3.1.1 (Principe des grandes déviations de Cramér-Chernoff)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a.r i.i.d dont la loi admet une fonction de Laplace \mathcal{L}_{X_1} finie sur un voisinage de 0. On a, pour tout F fermé de \mathbb{R} ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\mathbb{P}(\bar{X}_n \in F) \right) \leq -J_{X_1}(F),$$

et, pour tout O ouvert de \mathbb{R} ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\mathbb{P}(\bar{X}_n \in O) \right) \geq -J_{X_1}(O).$$

Preuve : Voir [15] et [13].

Remarquons que J_{X_1} est convexe, positive ou nulle, et que $J(F) > 0$ pour tout fermé F séparé de la moyenne théorique des X_i . Ainsi, la probabilité que \bar{X}_n appartienne à cet ensemble décroît de façon quasi exponentielle. $J(F)$ mesure asymptotiquement cette vitesse. Ainsi, J peut s'interpréter comme un "coût stochastique" : plus un ensemble F

est coûteux, plus la probabilité que \bar{X}_n visite F décroît rapidement. Depuis, de nombreux résultats ont été établis pour des variables non i.i.d dans \mathbb{R}^d (Ellis [47]), et également pour les processus stochastiques à accroissements indépendants (Varadhan [99], Lynch et Sethuraman [75]). Commençons par définir de façon plus générale le principe des grandes déviations pour une suite de variables aléatoires.

Définition 3.1.1 (Fonction de coût) *Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. On dit qu'une fonction réelle J sur E est une fonction de coût lorsque, pour tout $M > 0$, l'ensemble*

$$\{z \in E, J(z) \leq M\},$$

est un compact de (E, \mathcal{O}) .

Définition 3.1.2 (Principe de grandes déviations) *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace topologique (E, \mathcal{O}) , muni de sa tribu Borélienne. Nous supposons que les $(X_n)_{n \geq 1}$ sont mesurables pour une sous-tribu \mathcal{T} de la tribu Borélienne. Soit J une fonction de coût de (E, \mathcal{O}) , et soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes strictement positives qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et J relativement à \mathcal{T} si les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. *Pour tout F fermé de (E, \mathcal{O}) appartenant à \mathcal{T} , on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}(X_n \in F) \right) \leq -J(F). \quad (3.1.0.6)$$

2. *Pour tout O ouvert de (E, \mathcal{O}) appartenant à \mathcal{T} , on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}(X_n \in O) \right) \geq -J(O). \quad (3.1.0.7)$$

Cette définition peut convenir aux suites de processus stochastiques indexés par un ensemble T , dont les trajectoires sont bornées. Ces derniers peuvent être vus comme des variables aléatoires à valeurs dans

$L_\infty(T)$, ensemble des fonctions réelles bornées sur T , muni de la norme sup classique, c'est à dire

$$\| \Psi \|_T := \sup_{t \in T} | \Psi(t) | . \quad (3.1.0.8)$$

Remarque 3.1.1 *Par commodité, si \mathcal{T} n'est pas précisée dans l'énoncé d'un principe de grandes déviations (GD), il sera sous entendu qu'il s'agit de la tribu des Boréliens de l'espace topologique (E, \mathcal{O}) dans lequel on s'est préalablement placé.*

Une propriété clé des principes de grandes déviations (GD) est le principe de contraction énoncé dans le théorème suivant. Ce théorème montre que les principes des grandes déviations sont conservés par les applications continues.

Définition 3.1.3 (Tribu engendré par les boules) *Dans un espace métrique (E, d) , on définit \mathcal{T}_d comme la tribu engendrée par les boules ouvertes de (E, d) .*

Théorème 3.1.2 (Principe de contraction, Donsker, Varadhan, 1966)

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a mesurables pour une sous-tribu \mathcal{T} des Boréliens de E , contenant \mathcal{T}_d . Supposons que $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour une suite $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et une fonction de coût J , relativement à \mathcal{T} . Soit f une fonction continue de (E, d) dans (E', d') mesurable de \mathcal{T} vers une sous-tribu \mathcal{T}' des Boréliens de (E', d') contenant \mathcal{T}'_d . Alors la suite

$$(Y_n)_{n \geq 1} = (f(X_n))_{n \geq 1}$$

satisfait le principe de GD relativement à \mathcal{T}' , pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût suivante.

$$J_f(y) = \inf \left\{ J(x), f(x) = y \right\}.$$

Preuve : Voir [39]. \square

3.2 Variables aléatoires de dimension finie

Ce sous-chapitre traitera exclusivement des principes de grandes déviations pour des suites de variables aléatoires dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Pour tout entier $d \geq 1$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i, \quad (3.2.0.9)$$

$$\|x\|_{\mathbb{R}^d} := \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2.0.10)$$

3.2.1 Fonction de Laplace et grandes déviations

Un théorème utilisé très fréquemment dans cette thèse est dû à Ellis. Il donne une condition suffisante pratique à vérifier pour qu'une suite de variables aléatoires satisfasse un principe de grandes déviations (GD).

Théorème 3.2.1 (Ellis 1984) *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a à valeurs dans \mathbb{R}^d . Soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement positive tendant vers 0. Supposons que*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{E} \left(\exp(\epsilon_n^{-1} \langle t, X_n \rangle) \right) \right) =: l(t),$$

(la limite peut être infinie).

2. *Le vecteur nul appartient à l'intérieur de l'ensemble de définition de l .*

$$D(l) := \left\{ t \in \mathbb{R}^d : l(t) < \infty \right\}.$$

3. *l est une fonction semi-continue inférieurement et convexe sur \mathbb{R}^d .*
4. *l est différentiable sur l'intérieur de $D(l)$.*

5. Pour toute suite t_n dans l'intérieur de $D(l)$ convergeant vers un point frontière de $D(l)$, on a

$$\|\nabla l(t_n)\|_{\mathbb{R}^d} \rightarrow \infty.$$

où ∇ désigne le gradient.

Alors $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût

$$J(\alpha) := \sup_{t \in \mathbb{R}^d} \langle \alpha, t \rangle - l(t).$$

Preuve : Voir [47]. \square

Les suites de variables aléatoires gaussiennes sont simples à étudier du point de vue des grandes déviations : il suffit d'étudier la suite des variances et des espérances.

Théorème 3.2.2 (Principe de GD pour les vecteurs gaussiens)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs gaussiens à valeurs dans \mathbb{R}^d , d'espérances et variances μ_n et Σ_n . Soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite positive qui tend vers 0. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe $\mu \in \mathbb{R}^d$ et Σ matrice $d \times d$ tels que, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\mu_n \rightarrow \mu, \quad \epsilon_n \Sigma_n \rightarrow \Sigma.$$

2. $(X_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et la fonction de coût

$$J(t) := \inf \left\{ (u - \mu)' \Sigma (u - \mu), 2\Sigma(u) = t \right\}.$$

Preuve : Il s'agit là d'une conséquence du théorème 3.2.1. Pour plus de détails, voir [3]. \square

3.2.2 Principe de grandes déviations uniforme pour les v.a. gaussiennes

Afin d'établir des lois uniformes du logarithme itéré, nous aurons, dans la suite de cette thèse, à travailler simultanément sur plusieurs

variables aléatoires et contrôler uniformément leurs probabilités de déviations par rapport à un ensemble limite. Dans ce paragraphe, nous développons une théorie des grandes déviations uniformes pour les variables aléatoires de dimension finie, et ce dans le but d'avoir les outils nécessaires pour les besoins de cette thèse. Les résultats présentés ici se basent sur les résultats de Lynch et Sethuraman [75].

Définition 3.2.1 (Tableau triangulaire de vitesses) *On appelle tableau triangulaire de vitesses tout tableau triangulaire de réels strictement positifs $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifiant*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} = 0.$$

Définition 3.2.2 (Principe de GDU) *Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de v.a. à valeurs dans un espace topologique (E, \mathcal{O}) , mesurables pour une sous-tribu \mathcal{T} des Boréliens de (E, \mathcal{O}) , et soit $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses. On dit que le tableau triangulaire $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de grandes déviations uniforme (GDU) pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et une fonction de coût J , relativement à \mathcal{T} lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. *Pour tout fermé $F \in \mathcal{T}$, on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \in F) \right) \leq -J(F). \quad (3.2.2.1)$$

2. *Pour tout ouvert $O \in \mathcal{T}$, on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \in O) \right) \geq -J(O). \quad (3.2.2.2)$$

Remarque 3.2.1 *Dans le cas où \mathcal{T} n'est pas spécifiée, nous considérons alors implicitement la tribu des Boréliens de (E, \mathcal{O}) .*

Le premier résultat présenté ici concerne les espaces mesurés produit, c'est à dire la façon dont les principes de grandes déviations uniformes (GDU) sont conservés en faisant le produit tensoriel de mesures. Pour

cela nous introduisons les notions de "principe de GDU faible", et "principe de GD-tension uniforme". Ces notions sont inspirées des notions introduites par Lynch et Sethuraman [75].

Définition 3.2.3 (Principe de GD-tension uniforme) *On dit qu'un tableau triangulaire $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d vérifie le principe de GD-tension uniforme pour le tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ lorsque, pour tout $M > 0$, il existe un compact K tel que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \notin K) \right) \leq -M.$$

Définition 3.2.4 [Voisinage d'un ensemble] *Soit (E, d) un espace métrique. Pour $z \in E$, on note*

$$z^\epsilon := \{z' \in E, d(z, z') < \epsilon\},$$

et pour tout $A \subset E$, on note

$$A^\epsilon := \bigcup_{z \in A} z^\epsilon.$$

Propriété 3.2.1 *Si $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GD uniforme pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et une fonction de coût J , alors, $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$.*

Preuve : Soit $M > 0$ fixé, et soit $(r_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une énumération d'un ensemble dense dans \mathbb{R}^d . Comme J est une fonction de coût, les ensembles

$$\Gamma_k := \{J \leq 2kM\}, \quad k \geq 1$$

sont des compacts de \mathbb{R}^d . Soit $k \geq 1$ un entier. On peut recouvrir Γ_k d'un nombre fini de boules de rayon $1/k$ et dont le centre est un r_l , $l \in \mathbb{N}$ (en effet, $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} r_l^{1/k} = \mathbb{R}^d$). Il existe donc un ensemble fini $I_k \subset \mathbb{N}$ tel que

$$\Gamma_k \subset A(k) := \bigcup_{l \in I_k} r_l^{1/k}.$$

Ainsi, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \notin A(k)) \right) \leq -J(\mathbb{R}^d - A(k)) \leq -2kM,$$

et donc, pour tout entier n suffisamment grand on a, pour tout $i \leq p_n$,

$$\mathbb{P}(X_{n,i} \notin A(k)) \leq \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} kM \right).$$

On peut donc trouver un recouvrement plus grand

$$\Gamma_k \subset B(k) := \bigcup_{l \in J_k} r_l^{1/k}, \quad I_k \subset J_k,$$

tel que **pour tout** $n \geq 1$ **entier** et pour tout $i \leq p_n$ on ait

$$\mathbb{P}(X_{n,i} \notin B(k)) \leq \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} kM \right). \quad (3.2.2.3)$$

L'ensemble

$$K := \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(k)}$$

est un fermé précompact, donc un compact de \mathbb{R}^d . De plus, pour n entier et $i \leq p_n$, on a, d'après (3.2.2.3),

$$\mathbb{P}(X_{n,i} \notin K) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n,i} \notin B(k)) \leq \frac{e^{-\epsilon_{n,i}^{-1} M}}{1 - e^{-M}}.$$

La preuve se conclut alors aisément. \square

La notion de GD-tension uniforme sera utilisée en conjonction avec la notion de GDU faible (explicitée ci après).

Définition 3.2.5 [*Principe de GDU faible*] *Un tableau triangulaire $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d satisfait le principe de GDU faible pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction de coût J lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :*

1. *Pour tout compact K de \mathbb{R}^d on a*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \in K) \right) \leq -J(K). \quad (3.2.2.4)$$

2. Pour tout ouvert O de \mathbb{R}^d on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \in O) \right) \geq -J(O). \quad (3.2.2.5)$$

Les deux notions introduites précédemment se combinent dans la propriété suivante.

Propriété 3.2.2 *Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de v.a. vérifiant à la fois le principe de GD-tension uniforme et le principe de GDU faible pour une fonction de coût J et un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. Alors $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et J .*

Preuve : Soient F un fermé tel que $J(F) < \infty$, $l < J(F)$ et $M > l$ fixés. Choisissons K un compact tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \notin K) \right) \leq -M. \quad (3.2.2.6)$$

Nous appliquons alors le principe de GDU faible vérifié par $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ au compact $F \cap K$. Ainsi, comme $l < J(F) \leq J(F \cap K)$, et grâce à (3.2.2.6), on a, pour tout entier $n \geq 1$ suffisamment grand, et pour tout $i \leq p_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n,i} \in F) &\leq \mathbb{P}(X_{n,i} \in F \cap K) + \mathbb{P}(X_{n,i} \notin K) \\ &\leq \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} l \right) + \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} M \right). \end{aligned}$$

Comme $M > l$, il vient aisément que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \in F) \right) \leq -l.$$

La preuve est achevée pour, car $l < J(F)$ est arbitraire. \square

Nous allons maintenant montrer que ces deux notions s'étendent facilement au produit tensoriel de deux mesures.

Propriété 3.2.3 Soient $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ (à valeurs dans \mathbb{R}^d) et $(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'}$) deux tableaux triangulaires de v.a. satisfaisant chacun le principe de GDU faible pour un même tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et les fonctions de coût respectives J_1 et J_2 . Supposons de plus que

$$\forall n \geq 1, i \leq p_n, X_{n,i} \perp Y_{n,i},$$

\perp désignant l'indépendance stochastique.

Alors le tableau triangulaire $\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GDU faible pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et la fonction de coût suivante

$$J(z_1, z_2) := J_1(z_1) + J_2(z_2), \quad z_1 \in \mathbb{R}^d, \quad z_2 \in \mathbb{R}^{d'}.$$

Preuve : Il est aisé de vérifier que J est bien une fonction de coût. Soit maintenant O un ouvert de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}$, $\delta > 0$ et $(z_1, z_2) \in O$ tel que

$$J(O) \leq J(z_1, z_2) \leq J(O) + \delta.$$

Il existe un ouvert produit $O_1 \times O_2$ contenant (z_1, z_2) et inclus dans O . Ainsi, par indépendance,

$$\mathbb{P}\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \in O \right) \geq \mathbb{P}(X_{n,i} \in O_1) \mathbb{P}(Y_{n,i} \in O_2).$$

Remarquons que

$$J(O_1 \times O_2) = J(O_1) + J(O_2).$$

Nous appliquons le point (3.2.2.5) du principe de GD faible uniforme de $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ à l'ouvert O_1 , et nous appliquons le point (3.2.2.5) du principe de GD faible uniforme de $(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ à l'ouvert O_2 . On a alors, à partir d'un certain rang n , et uniformément en $i \leq p_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \in O \right) &\geq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}(J_1(O_1) + J_2(O_2) + \delta) \right) \\ &= \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}(J(O_1 \times O_2) + \delta) \right) \\ &\geq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}(J(z_1, z_2) + \delta) \right) \\ &\geq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}(J(O) + 2\delta) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \in O \right) \right) \geq -J(O) - 2\delta.$$

Comme O et $\delta > 0$ sont arbitraires, on en déduit que le point (3.2.2.5) du principe de GDU faible de $((X_{n,i}, Y_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ est vrai.

Soit maintenant K un compact, et $l < J(K)$. Pour $p \geq 1$ entier, et pour $A \subset \mathbb{R}^p$, notons \bar{A} l'adhérence de A dans \mathbb{R}^p . Pour tous $(z_1, z_2) \in K$, on a $J_1(z_1) + J_2(z_2) = J(z_1, z_2) > l$. Ainsi, par semi-continuité inférieure de J_1 et J_2 , on peut trouver deux ouverts $O_{(z_1, z_2)}^1$ et $O_{(z_1, z_2)}^2$ contenant respectivement z_1 et z_2 , et tels que

$$J_1(O_{(z_1, z_2)}^1) + J_2(O_{(z_1, z_2)}^2) > l. \quad (3.2.2.7)$$

Choisissons ensuite un ouvert produit $N_{(z_1, z_2)}^1 \times N_{(z_1, z_2)}^2$ tel que

$$\overline{N_{(z_1, z_2)}^1} \subset O_{(z_1, z_2)}^1, \quad \overline{N_{(z_1, z_2)}^2} \subset O_{(z_1, z_2)}^2. \quad (3.2.2.8)$$

Ainsi, en notant $N_{(z_1, z_2)} = N_{(z_1, z_2)}^1 \times N_{(z_1, z_2)}^2$, on a le recouvrement suivant

$$K \subset \bigcup_{(z_1, z_2) \in K} N_{(z_1, z_2)}.$$

On extrait du recouvrement ainsi obtenu un recouvrement fini, que l'on notera

$$\begin{aligned} K &\subset \bigcup_{j=1}^N N_{(z_1^j, z_2^j)} \\ &\subset \bigcup_{j=1}^N \overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^1} \times \overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$ on a, par indépendance entre X_n et Y_n ,

$$\mathbb{P} \left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \in K \right) \leq \sum_{j=1}^N \mathbb{P} \left(X_{n,i} \in \overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^1} \right) \mathbb{P} \left(Y_{n,i} \in \overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^2} \right).$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Pour $1 \leq j \leq N$ fixé, nous appliquons le point (3.2.2.4) du principe de GDU faible pour $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour le compact $\overline{N_{z_1^j, z_2^j}^1}$. Ainsi, pour tout n suffisamment grand, et pour tout $i \leq p_n$ on a

$$\mathbb{P}\left(X_{n,i} \in \overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^1}\right) \leq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}\left(J_1\left(\overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^1}\right) - \epsilon\right)\right). \quad (3.2.2.9)$$

De la même façon, nous obtenons, pour tout n suffisamment grand et pour tout $i \leq p_n$,

$$\mathbb{P}\left(Y_{n,i} \in \overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^2}\right) \leq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}\left(J_2\left(\overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^2}\right) - \epsilon\right)\right). \quad (3.2.2.10)$$

En combinant (3.2.2.9) et (3.2.2.10), il vient que, pour n assez grand, uniformément en $i \leq p_n$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \in K\right) \leq N \max_{j=1, \dots, N} \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1}\left(J_1\left(\overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^1}\right) + J_2\left(\overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^2}\right) - 2\epsilon\right)\right). \quad (3.2.2.11)$$

Or d'après (3.2.2.7) on a, pour tout $j = 1 \dots N$,

$$J_1\left(\overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^1}\right) + J_2\left(\overline{N_{(z_1^j, z_2^j)}^2}\right) - 2\epsilon > l - 2\epsilon,$$

et ainsi, d'après (3.2.2.11) on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log\left(\mathbb{P}\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \in K\right)\right) \leq -(l - 2\epsilon).$$

La preuve se conclut en remarquant que $l \leq J(K)$ et $\epsilon > 0$ sont arbitraires. \square

De la proposition précédente, nous pouvons conclure que le principe de GDU faible est conservé en faisant le produit tensoriel de mesures. Or le principe de GD-tension uniforme se conserve lui aussi par produit tensoriel de mesures, comme nous allons le voir plus loin. Nous pouvons alors en déduire la proposition suivante.

Proposition 3.2.1 Soient $(X_{n,i})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq p_n}$ et $(Y_{n,i})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq p_n}$ deux tableaux triangulaires de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^d et $\mathbb{R}^{d'}$ respectivement, et tels que

$$\forall n \geq 1, i \leq p_n, X_{n,i} \perp Y_{n,i}.$$

Supposons de plus que ces deux tableaux triangulaires vérifient le principe de GD uniforme pour le même tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$, et pour les fonctions de coût respectives J_1 et J_2 . Alors le tableau triangulaire $\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GD uniforme pour $(\epsilon_{i,n})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et la fonction de coût :

$$J(z_1, z_2) := J_1(z_1) + J_2(z_2), \quad z_1 \in \mathbb{R}^d, \quad z_2 \in \mathbb{R}^{d'}.$$

Preuve : On remarque d'abord que le tableau triangulaire $\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{i,n})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. En effet, soit $M > 0$ quelconque, et K_1, K_2 , compacts de \mathbb{R}^d et $\mathbb{R}^{d'}$ respectivement, tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \notin K_1 \right) \right) \leq -2M,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \log \left(\mathbb{P} \left(Y_{n,i} \notin K_2 \right) \right) \leq -2M.$$

Le compact $K_1 \times K_2$ vérifie donc, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $i \leq p_n$,

$$\mathbb{P} \left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \notin K_1 \times K_2 \right) \leq 2 \exp \left(\epsilon_{n,i}^{-1} M \right).$$

Ainsi, $\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{i,n})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. On applique ensuite les deux propositions précédentes. \square

Corollaire 3.2.2.1 Soit X une variable aléatoire gaussienne sur \mathbb{R}^d , centrée réduite. Soit $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses. Posons, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $i \leq p_n$,

$$X_{n,i} := \epsilon_{n,i}^{1/2} X.$$

Alors le tableau $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour le tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût suivante

$$J(x_1, \dots, x_d) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d x_j^2, \quad (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Afin de généraliser le principe de GDU à des suites de v.a gaussiennes, nous établissons les propositions suivantes. Rappelons que \mathcal{T}_d est définie dans la définition 3.1.3.

Proposition 3.2.2 (Principe de contraction) *Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de v.a mesurables pour une sous-tribu \mathcal{T} des Boréliens de E contenant \mathcal{T}_d . On suppose que $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction de coût J . Soit f une fonction continue de (E, d) dans (E', d') mesurable de \mathcal{T} vers une tribu \mathcal{T}' contenant $\mathcal{T}_{d'}$. Alors le tableau triangulaire*

$$(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n} = (f(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$$

satisfait le principe de GDU relativement à \mathcal{T}' , pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût suivante.

$$J_f(y) = \inf \left\{ J(x), f(x) = y \right\}.$$

Preuve : La preuve suit les mêmes principes que dans [39] \square .

Nous établissons un principe de contraction étendu qui nous sera utile par la suite. Rappelons que, pour tout entier $p \geq 1$, $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ est la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^p . Rappelons également que $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ est définie dans la définition 3.1.3.

Proposition 3.2.3 (Principe de contraction étendu) *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $(\phi_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire*

d'applications lipschitziennes de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans \mathbb{R}^p et ϕ une application de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans \mathbb{R}^p , telles que

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{i \leq p_n} \sup_{x, y, x \neq y} \frac{\|\phi_{n,i}(x) - \phi_{n,i}(y)\|_{\mathbb{R}^p}}{\|x - y\|_E} = C < \infty, \quad (3.2.2.12)$$

et

$$\forall x \in E, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \leq p_n} \|\phi_{n,i}(x) - \phi(x)\|_{\mathbb{R}^p} = 0. \quad (3.2.2.13)$$

Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de v.a à valeurs dans E , satisfaisant le principe de GD uniforme pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et une fonction de coût J , relativement à une tribu \mathcal{T} contenant la tribu engendrée par les boules $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Alors $(\phi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour le tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût

$$J_\phi(y) := \inf_{x \in \phi^{-1}(y)} J(x).$$

Preuve : Notre preuve se décompose comme suit : nous montrons d'abord que $(\phi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU faible pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût J_ϕ (voir la définition 3.2.5). Ensuite, nous montrons que $(\phi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût J_ϕ . Ainsi, la proposition sera démontrée en appliquant la propriété 3.2.2. Soit O un ouvert de \mathbb{R}^p tel que $J_\phi(O) < \infty$, et soient $\delta > 0$ et y_0 tels que

$$J_\phi(O) \leq J_\phi(y_0) \leq J_\phi(O) + \delta. \quad (3.2.2.14)$$

Comme $J_\phi(y_0) < \infty$, on en déduit y_0 a au moins un antécédent par ϕ . Par définition de J_ϕ , nous pouvons donc choisir $x_0 \in E$ vérifiant $\phi(x_0) = y_0$, et vérifiant

$$J_\phi(y_0) \leq J(x_0) < J_\phi(y_0) + \delta. \quad (3.2.2.15)$$

Soit $\gamma_0 > 0$ tel que $y_0^{\gamma_0} \subset O$. Rappelons que $y_0^{\gamma_0}$ est défini dans la définition 3.2.4, en considérant la norme euclidienne $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$. Par hypothèse (3.2.2.12) on a

$$\|x - x_0\|_E < \frac{\gamma_0}{2C} \Rightarrow \|\phi_{n,i}(x) - \phi_{n,i}(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\gamma_0}{2},$$

et, pour n suffisamment grand, on a, d'après l'hypothèse (3.2.2.13),

$$\max_{i \leq p_n} \|\phi_{n,i}(x_0) - \phi(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\gamma_0}{2}.$$

Ainsi, par transitivité on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $i \leq p_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\phi_{n,i}(X_{n,i}) \in O\right) &\geq \mathbb{P}\left(\phi_{n,i}(X_{n,i}) \in y_0^{\gamma_0}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\|\phi_{n,i}(X_{n,i}) - \phi(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \gamma_0\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\|\phi_{n,i}(X_{n,i}) - \phi_{n,i}(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \frac{\gamma_0}{2}\right) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\|X_{n,i} - x_0\|_E < \frac{\gamma_0}{2C}\right). \end{aligned}$$

Soit $x_0^{\gamma_0/2C}$ la boule ouverte de $(E, \|\cdot\|_E)$ de rayon $\gamma_0/2C$. Nous appliquons le point (3.2.2.2) du principe de GDU que vérifie $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$, à l'ouvert $x_0^{\gamma_0/2C}$. Ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}\left(\phi_{n,i}(X_{n,i}) \in O\right) \right) \geq -J(x_0^{\gamma_0/2C}).$$

Puis, d'après (3.2.2.14) et (3.2.2.15) on a

$$J(x_0^{\gamma_0/2C}) \leq J(x_0) \leq J_\phi(y_0) + \delta \leq J_\phi(O) + 2\delta,$$

ce qui permet de conclure le point (3.2.2.2) du principe de GDU à démontrer dans cette proposition.

Nous allons maintenant montrer que pour tout compact K de \mathbb{R}^p on a (rappelons que \overline{A} désigne l'adhérence de A)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_\phi(\overline{K^\delta}) = J(K). \quad (3.2.2.16)$$

Soit K un compact, et $l < J_\phi(K)$. La compacité de K et la semi-continuité inférieure de J_ϕ permettent d'obtenir le recouvrement fini suivant :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N y_i^{\delta_i},$$

avec, pour tout $i = 1 \dots N$,

$$J_\phi(y_i^{2\delta_i}) > l.$$

Ainsi, en choisissant $\delta := \min_{i=1 \dots N} \delta_i$, il vient que

$$\overline{K^\delta} \subset \bigcup_{i=1}^N y_i^{2\delta_i},$$

et donc

$$J_\phi(\overline{K^\delta}) \geq \min \{ J_\phi(y_i^{2\delta_i}), i = 1 \dots M \} > l.$$

Ainsi (3.2.2.16) est démontrée.

Soit maintenant K un compact de \mathbb{R}^p . Soit $M > J(K)$. D'après la propriété 3.2.1, $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ (voir la définition 3.2.3). Nous pouvons donc choisir K' un compact de $(E, \|\cdot\|_E)$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i} \notin K') \right) \leq -2M. \quad (3.2.2.17)$$

Un raisonnement d'analyse montre que, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\phi_{n,i}(x) \rightarrow \phi(x)$ uniformément en $x \in K'$ et en $i \leq p_n$. Ainsi, pour tout $\delta > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in K', \forall i \leq p_n, \phi_{n,i}(x) \in K \Rightarrow \phi(x) \in \overline{K^\delta}.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$, et pour tout $i \leq p_n$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\phi_{n,i}(X_{n,i}) \in K) &\leq \mathbb{P}(\{\phi_{n,i}(X_{n,i}) \in K\} \cap \{X_{n,i} \in K'\}) + \mathbb{P}(X_{n,i} \notin K') \\ &\leq \mathbb{P}(\phi(X_{n,i}) \in \overline{K^\delta}) + \mathbb{P}(X_{n,i} \notin K'). \end{aligned} \quad (3.2.2.18)$$

En appliquant le principe de contraction de la proposition 3.2.2, il vient que, pour tout entier n suffisamment grand on a, uniformément en $i \leq p_n$,

$$\mathbb{P}\left(\phi(X_{n,i}) \in \overline{K^\delta}\right) \leq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1} J_\phi(\overline{K^\delta})\right). \quad (3.2.2.19)$$

Comme $M > J(\overline{K^\delta})$ et en se rappelant (3.2.2.17), on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $i \leq p_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_{n,i} \notin K'\right) &\leq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1} M\right) \\ &\leq \exp\left(-\epsilon_{n,i}^{-1} J_\phi(\overline{K^\delta})\right). \end{aligned} \quad (3.2.2.20)$$

En combinant (3.2.2.19) et (3.2.2.20) dans (3.2.2.18), il vient que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log\left(\mathbb{P}(\phi_{n,i}(X_{n,i}) \in K)\right) \leq -J_\phi(\overline{K^\delta}).$$

En appliquant (3.2.2.16) et en faisant tendre δ vers 0, nous pouvons conclure que $(\phi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU faible. Il reste à montrer que $(\phi_{n,i}(\overline{X}_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. Soit $M > 0$ quelconque. D'après la propriété 3.2.1, $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GD-tension uniforme pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. Il existe donc un compact K de $(E, \|\cdot\|_E)$ vérifiant

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log\left(\mathbb{P}\left(X_{n,i} \notin K\right)\right) \leq -M. \quad (3.2.2.21)$$

K est borné en norme par un réel L . On conclut que $\phi_{n,i}(K)$ est borné par $2CL$. Ainsi

$$\mathbb{P}\left(\|\phi_{n,i}(X_{n,i})\|_{\mathbb{R}^p} > 2CL\right) \leq \mathbb{P}\left(X_{n,i} \notin K\right).$$

Ainsi, grâce à (3.2.2.21), le compact de \mathbb{R}^p

$$\tilde{K} := \left\{x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_{\mathbb{R}^p} \leq 2CL\right\}$$

vérifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(\Phi_{n,i}(X_{n,i}) \notin \tilde{K} \right) \right) \leq -M.$$

Ceci permet de conclure à la GD-tension uniforme de $(\phi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$, et de conclure ainsi la preuve. \square

Nous allons maintenant établir un principe de GDU pour un tableau triangulaire de v.a. gaussiennes sur \mathbb{R}^d .

Proposition 3.2.4 *Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de v.a. gaussiennes centrées sur \mathbb{R}^d , dont les matrices de variance sont $(\Sigma_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. Soit $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \left\| \epsilon_{n,i}^{-1} \Sigma_{n,i} - \Sigma \right\|_{\mathbb{R}^{d^2}} = 0,$$

où Σ est une matrice de variance-covariance sur \mathbb{R}^d strictement positive. Alors $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût suivante

$$J(z) := \frac{1}{2} z' \Sigma^{-1} z, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Preuve : Posons, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $i \leq p_n$,

$$W_{n,i} := \Sigma_{n,i}^{-1/2} X_{n,i},$$

de façon à voir la relation

$$\begin{aligned} X_{n,i} &= \epsilon_{n,i}^{-1/2} \Sigma_{n,i}^{1/2} \epsilon_{n,i}^{1/2} W_{n,i} \\ &=: \phi_{n,i} \left(\epsilon_{n,i}^{1/2} W_{n,i} \right). \end{aligned}$$

Or les $\phi_{n,i}$ vérifient les hypothèses de la propriété 3.2.3, avec pour limite $\phi := \Sigma^{1/2}$. Il suffit donc de montrer que $((\epsilon_{n,i})^{1/2} W_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût suivante.

$$J(z_1, \dots, z_d) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d z_i^2.$$

Ceci est vrai grâce au corollaire de la propriété 3.2.1 en remarquant que les $W_{n,i}$ sont gaussiens centrés réduits. Ils induisent donc une mesure gaussienne qui est le produit tensoriel de loi normales centrées réduites. \square

3.2.3 Fonction de Laplace et principe de grandes déviations uniforme

Nous établissons maintenant un outil qui nous sera utile dans la démonstration du théorème 5.2.1, dans le chapitre 5.

Proposition 3.2.5 *Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de v.a. réelles et $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses satisfaisant, pour une fonction de coût J strictement convexe, positive, et s'annulant en une valeur μ ,*

$$\forall a > \mu, \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \left| \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \geq a \right) \right) - J(a) \right| = 0, \quad (3.2.3.1)$$

$$\forall a < \mu, \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \left| \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \leq a \right) \right) - J(a) \right| = 0. \quad (3.2.3.2)$$

alors $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût J .

Preuve : Soit F un fermé strictement séparé de μ (cas non trivial). Notons $t_0 := \inf(F \cap [\mu, \infty])$ et $t_1 := \sup(F \cap [-\infty, \mu])$. Alors, par convexité de J , $J(F) = \min \left(J(t_0), J(t_1) \right)$.

Nous appliquons (3.2.3.1) à $a := t_0 > \mu$ et nous appliquons (3.2.3.2) à $a := t_1 < \mu$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$ fixé, à partir d'un certain rang n , on a, uniformément en $i \leq p_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(X_{n,i} \in F \right) &\leq \mathbb{P} \left(X_{n,i} \in [t_0, \infty] \right) + \mathbb{P} \left(X_{n,i} \in [-\infty, t_1] \right) \\ &\leq \exp \left(- \epsilon_{n,i}^{-1} (J(t_0) - \epsilon) \right) + \exp \left(- \epsilon_{n,i}^{-1} (J(t_1) - \epsilon) \right) \\ &\leq 2 \exp \left(- \epsilon_{n,i}^{-1} (J(F) - \epsilon) \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in F \right) \right) \leq -J(F) + \epsilon,$$

ce qui permet de conclure le point (3.2.2.1) du principe de GDU à démontrer pour $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$. Pour prouver le point (3.2.2.2), remarquons qu'il suffit de montrer que pour tout intervalle $]a, b[$ on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in]a, b[\right) \right) \geq -J(]a, b[). \quad (3.2.3.3)$$

En effet, soit O un ouvert de \mathbb{R} tel que $J(O) < \infty$. Pour $\delta > 0$ arbitraire, il existe $x \in]a, b[\subset O$ tels que $J(x) \leq J(O) + \delta$. Alors, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $i \leq p_n$ on a

$$\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in O \right) \geq \mathbb{P} \left(X_{n,i} \in]a, b[\right).$$

Ainsi, en appliquant (3.2.3.3) on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in O \right) \right) \geq -J(]a, b[).$$

On peut alors conclure au point (3.2.2.2) en remarquant que $J(]a, b[) \leq J(x) \leq J(O) + \delta$, $\delta > 0$ étant arbitraire.

Nous allons donc montrer (3.2.3.3). Soient $a < b$ quelconques.

Si $\mu < a$, alors par stricte convexité et par continuité de J on a $J(]a, b[) = J(a)$. Puis, pour $\delta > 0$ fixé, en appliquant (3.2.3.1) et (3.2.3.2) on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \min_{i \leq p_n} \mathbb{P} \left(X_{n,i} \in]a, b[\right) &\geq \min_{i \leq p_n} \mathbb{P} \left(X_{n,i} > a \right) - \max_{i \leq p_n} \mathbb{P} \left(X_{n,i} \geq b \right) \\ &\geq \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} (J(a) + \delta) \right) - \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} (J(b) - \delta) \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \exp \left(-\epsilon_{n,i}^{-1} (J(a) + \delta) \right). \end{aligned} \quad (3.2.3.4)$$

La dernière inégalité a lieu si $\delta > 0$ est suffisamment petit pour avoir $J(a) < J(b) - 2\delta$, ce qui est possible car $J(a) < J(b)$ par stricte

convexité de J , fonction atteignant son minimum en $\mu < a < b$. Ainsi (3.2.3.3) est vérifiée. Le cas $b < \mu$ se traite de façon similaire.

Il nous reste donc à traiter le cas où $\mu \in]a, b[$. Remarquons que, pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a $]\mu + \epsilon, b[\subset]a, b[$. En appliquant (3.2.3.4), il vient que

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon n, i \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in]a, b[\right) \right) \\ & \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon n, i \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \in]\mu + \epsilon, b[\right) \right) \\ & \geq -J(\mu + \epsilon). \end{aligned} \tag{3.2.3.5}$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitrairement petit, que J est continue en μ et que $J(\mu) = 0 = J(]a, b[)$, le point (3.2.2.2) du principe de GDU pour $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ est bien vérifié. Ceci conclut la preuve de la proposition \square

3.2.4 Un principe d'invariance pour les lois de dimensions finies

Le contrôle fin de la distance entre deux suites de mesures est un outil très utile pour l'étude des grandes déviations. Ainsi, si deux suites de v.a.r ont des lois suffisamment proches et si l'une d'elles satisfait un principe de GDU, alors l'autre suite satisfait aussi le même principe de GDU. Définissons d'abord la distance de Lévy-Prokhorov. Rappelons que A^ϵ est défini dans la définition 3.2.4.

Définition 3.2.6 (Distance de Lévy-Prokhorov) *Soient F et G deux distributions sur \mathbb{R}^k , muni de la distance euclidienne usuelle. On note*

$$\pi(F, G, \epsilon) = \sup_{A \text{ borélien}} \max \left\{ |F(A) - G(A^\epsilon)|, |G(A) - F(A^\epsilon)| \right\}. \tag{3.2.4.1}$$

On notera aussi (distance de Lévy-Prokhorov)

$$\pi(F, G) = \inf \left\{ \epsilon, \pi(F, G, \epsilon) \leq \epsilon \right\}.$$

Proposition 3.2.6 Soient $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et $(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ deux tableaux triangulaires de variables aléatoires sur \mathbb{R}^k , dont les lois sont respectivement $(P_{n,i})$ et $(Q_{n,i})$. Faisons les hypothèses suivantes :

1. $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour un tableau de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction de coût J .
2. Pour tout $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\pi \left(P_{n,i}, Q_{n,i}, \epsilon \right) \right) = -\infty.$$

Alors $(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et la fonction de coût J .

Preuve : Soit O un ouvert de \mathbb{R}^k . Soit $M > J(O)$, et $x \in O$ tel que $J(x) < M$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $x^{2\epsilon} \subset O$. Par hypothèse, pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\forall i \leq p_n, a_{n,i} := \pi(P_{n,i}, Q_{n,i}, \epsilon) \leq \exp(-2M\epsilon_{n,i}^{-1}). \quad (3.2.4.2)$$

Posons, pour $n \geq 1$ et $i \leq p_n$,

$$b_{n,i} := P_{n,i}(x^\epsilon),$$

où x^ϵ est définie dans la définition 3.2.4 (nous munissons ici \mathbb{R}^k de sa norme euclidienne usuelle). On a, pour tout n suffisamment grand, et pour tout $i \leq p_n$,

$$Q_{n,i}(O) \geq Q_{n,i}(x^{2\epsilon}) \geq b_{n,i} - a_{n,i} \geq \frac{1}{2}b_{n,i}.$$

La dernière inégalité a lieu à partir d'un certain rang, et découle du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} a_{n,i}/b_{n,i} = 0. \quad (3.2.4.3)$$

En effet, en appliquant le principe de GD uniforme pour $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour l'ouvert x^ϵ , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(P_{n,i}(x^\epsilon) \right) \geq -J(x^\epsilon) \geq -M,$$

ce qui, en conjonction avec (3.2.4.2), nous assure que (3.2.4.3) est vraie. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log(Q_{n,i}(O)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log b_{n,i} \\ &\geq -J(x^\epsilon) \geq -J(x) \geq -M. \end{aligned}$$

Comme $M > J(O)$ est arbitraire, le point (3.2.2.2) du principe de GDU pour $(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ est démontré. La preuve du point (3.2.2.1) dans le principe de GDU pour $(Y_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ se fait de façon similaire, en utilisant de plus le fait que, pour F fermé,

$$F = \bigcap_{\epsilon > 0} F^\epsilon. \square$$

Les travaux de Zaitsev sur la fonction génératrice des moments ont permis le contrôle de la distance de Lévy-Prokhorov entre une mesure \mathbb{P} sur \mathbb{R}^k et son analogue gaussienne, c'est à dire la mesure gaussienne sur \mathbb{R}^k ayant les mêmes moments d'ordre 1 et 2 que \mathbb{P} . Rappelons que $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ont été définis respectivement par (3.2.0.10) et (3.2.0.9).

Définition 3.2.7 *Soit $k \geq 1$ un entier. On définit $\mathcal{A}_k(\tau)$ comme l'ensemble des mesures de probabilité \mathbb{P} sur \mathbb{R}^k vérifiant les conditions suivantes :*

1. *La fonction en z*

$$\phi_{\mathbb{P}}(z) := \log \int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle z, x \rangle} d\mathbb{P}(x)$$

est finie et analytique sur l'ensemble

$$D := \left\{ z \in \mathbb{R}^k : \|z\|_{\mathbb{R}^k} \tau < 1 \right\}.$$

2. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}^k$ et pour tout $z \in D$ on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi_P(z) \right| \leq \|u\|_{\mathbb{R}^k} \tau \langle \Sigma v, v \rangle,$$

où Σ est l'opérateur de covariance de \mathbb{P} , et

$$\frac{\partial}{\partial u} \phi_{\mathbb{P}}(z) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\phi_P(z + \alpha u) - \phi_P(z)}{\alpha}, \quad u \in \mathbb{R}^k, \quad z \in D.$$

On notera aussi $\mathcal{B}_k(\tau)$ l'ensemble des mesures sur \mathbb{R}^k dont la fonction caractéristique H s'exprime sous la forme suivante : pour tout $t \in \mathbb{R}^k$,

$$H(t) := \exp \left(i \langle \alpha, t \rangle - \frac{1}{2} Q(t) + \int_{0 < \|x\| \leq \tau} \left(e^{i \langle x, t \rangle} - 1 - \frac{i \langle x, t \rangle}{1 + \|x\|^2} \right) \frac{1 + \|x\|^2}{\|x\|^2} dG(x) \right)$$

où G est une mesure finie concentrée sur $\{\|x\| \leq \tau\} \setminus \{0\}$.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2.3 (Zaitsev, 1987) Soit $\tau > 0$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{A}_k(\tau)$. Soit $\Phi(\mathbb{P})$ la mesure gaussienne ayant mêmes moments d'ordre 1 et 2 que F . On a

$$\pi(\mathbb{P}, \Phi(\mathbb{P})) \leq c_1(k) \tau (|\log(\tau)| + 1),$$

et, pour tout $\epsilon > 0$

$$\pi(\mathbb{P}, \Phi(\mathbb{P}), \epsilon) \leq c_2(k) \exp \left(- \frac{\epsilon}{c_3(k) \tau} \right),$$

où $c_m(k)$, $m = 1, 2, 3$ ne sont fonction que de k .

L'énoncé du théorème reste vrai si on suppose que $\mathbb{P} \in \mathcal{B}_k(\tau)$ au lieu de $\mathcal{A}_k(\tau)$.

Preuve : Voir [101] et [102].□

Corollaire 3.2.3.1 Soit $(\mathbb{P}_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de mesures de probabilités sur \mathbb{R}^k tel que $(\Phi(\mathbb{P}_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et

une fonction de coût J . Supposons qu'il existe un tableau triangulaire de vitesses $(\tau_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \frac{\tau_{n,i}}{\epsilon_{n,i}} = 0,$$

et tel que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $i \leq p_n$, on ait

$$\mathbb{P}_{n,i} \in \mathcal{A}_k(\tau_{n,i}).$$

Alors $(\mathbb{P}_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût J .

Preuve : Il suffit de combiner le théorème précédent avec la proposition 3.2.6. \square

3.3 Principe de grandes déviations uniforme pour les processus stochastiques

Le sujet de ce paragraphe est de rappeler la notion de principe de grandes déviations pour les processus stochastiques bornés, puis d'énoncer un critère caractérisant ce type de principe de GD. Ensuite, nous établirons des théorèmes de grandes déviations uniformes pour les tableaux triangulaires de processus stochastiques, outils qui seront utilisés dans les preuves de la plupart des résultats de cette thèse.

3.3.1 Principe de grandes déviations pour les processus stochastiques bornés

Rappelons que pour toute fonction z bornée sur un ensemble T , on note

$$\|z\|_T := \sup_{t \in T} |z|.$$

Nous notons $L_\infty(T)$ l'ensemble des fonctions réelles définies et bornées sur T .

Hypothèse : A partir de maintenant, nous appellerons $\mathcal{B}(T)$ un ensemble fermé de $(L_\infty(T), \|\cdot\|_T)$, muni de la distance issue de $\|\cdot\|_T$. Pour $t \in T$, on définit l'application projection coordonnée en t de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_t : \mathcal{B}(T) &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\rightarrow z(t). \end{aligned}$$

Nous appellerons \mathcal{T}_0 la tribu de $\mathcal{B}(T)$ engendré par la famille $\{\Pi_t, t \in T\}$, et $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_T}$ la tribu engendrée par les boules ouvertes de $(\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$. **Nous supposons dans tout le reste de ce chapitre que**

$$\mathcal{T}_{\|\cdot\|_T} \subset \mathcal{T}_0.$$

Définition 3.3.1 (Processus stochastique) *Nous appellerons ici processus stochastique toute application basée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathcal{B}(T)$, et mesurable pour \mathcal{A} et \mathcal{T}_0 .*

Définition 3.3.2 (Probabilité extérieure) *Soit $X(\cdot)$ un processus stochastique indexé par un ensemble T , et basé sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout ensemble $A \subset L^\infty(T)$ on note*

$$\mathbb{P}^*(X \in A) := \inf \{ \mathbb{P}(X \in B), B \in \mathcal{T}_0, A \subset B \}.$$

Remarque 3.3.1 *Bien sûr, si $A \in \mathcal{T}_0$, alors $\mathbb{P}^*(X \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$. Ce sera toujours le cas dans les preuves des résultats présentés dans cette thèse.*

Dans toute cette thèse, les principes de grandes déviations que nous énonçons pour des suites de processus sont implicitement associés à la tribu \mathcal{T}_0 . Ainsi, nous reformulons la définition de principe de GD pour les processus stochastiques de la façon suivante :

Définition 3.3.3 (Principe de GD pour les processus stochastiques)

Soit

$(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ une suite de processus stochastiques à trajectoires bornées indexés par un même ensemble T . Soit J une fonction de coût sur $(\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$, et soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes strictement positives convergeant vers 0. On dit que $(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût J lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

– Pour tout fermé $F \in \mathcal{T}_0$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}(X_n(\cdot) \in F) \right) \leq -J(F). \quad (3.3.1.1)$$

– Pour tout ouvert $O \in \mathcal{T}_0$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}(X_n(\cdot) \in O) \right) \geq -J(O). \quad (3.3.1.2)$$

Ici les termes "ouvert" et "fermé" font référence à l'espace métrique $(\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$.

Arcones [3] a récemment décomposé le principe des grandes déviations pour ces processus en deux conditions : un principe de grandes déviations pour les lois marginales de dimension finie, et une condition d'équicontinuité asymptotique. Ainsi, l'étude des grandes déviations peut suivre une démarche similaire à celle de l'étude de la convergence en loi de suites de processus.

Théorème 3.3.1 (Arcones, 2000) Soit $(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ une suite de processus stochastiques indexés par un ensemble T , basée sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. Faisons les trois hypothèses suivantes :

1. Il existe une semi-métrique ρ sur T qui rend T précompact.
2. (**GD pour les coordonnées**) Pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ la suite de variables aléatoires $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_p))_{n \geq 1}$

satisfait le principe des GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour une fonction de coût

$$J_{t_1, \dots, t_p} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}.$$

3. (**Equicontinuité asymptotique**) Pour tous $\tau > 0$ et $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}^* \left(\sup_{t, s: \rho(t, s) \leq \eta} |X_n(t) - X_n(s)| > \tau \right) \right) \leq -M.$$

Alors $(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût

$$J(z) := \sup_{p \in \mathbb{N}, (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p} J_{t_1, \dots, t_p}(z(t_1), \dots, z(t_p)), \quad z \in \mathcal{B}(T).$$

Réciproquement, supposons que $(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour une fonction de coût J . Alors les trois assertions suivantes sont vraies.

4. Pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ la suite de variables aléatoires $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_p))_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût

$$J_{t_1, \dots, t_p}(u_1, \dots, u_p) = \inf \left\{ J(z), (z(t_1), \dots, z(t_p)) = (u_1, \dots, u_p), z \in \mathcal{B}(T) \right\}.$$

5. On peut trouver une semi-métrique ρ sur T qui rend T précompact. Plus précisément, on peut choisir ρ de la façon suivante.

$$\rho(s, t) := \sum_{k \geq 1} k^{-2} \rho_k(s, t),$$

où, pour $k \geq 1$ on a posé

$$\rho_k(s, t) := \sup \left\{ |u_1 - u_2|, J_{s, t}(u_1, u_2) \leq k \right\}.$$

6. Pour tous $\tau > 0$ et $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}^* \left(\sup_{t, s: \rho(t, s) \leq \eta} |X_n(t) - X_n(s)| > \tau \right) \right) \leq -M.$$

Preuve : Voir [3] .□

Remarque 3.3.2 *Montrer le principe de GD pour une suite de processus revient donc à étudier d'abord les marginales de dimension finie de ces processus. Puis, si ces marginales satisfont le principe de GD, alors il reste à prouver le critère d'équicontinuité asymptotique.*

Nous donnons ici un théorème d'extension pour les suites de couples de processus indépendants.

Théorème 3.3.2 (Principe de GD pour les couples de processus indépendants)

Soient $(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ et $(Y_n(\cdot))_{n \geq 1}$ deux suites de processus indexés respectivement par T et T' , et définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement positive tendant vers 0. Supposons que

1. $(X_n(\cdot))_{n \geq 1}$ *satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et une fonction de coût J_1 .*
2. $(Y_n(\cdot))_{n \geq 1}$ *satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et une fonction de coût J_2 .*
3. *Pour tout $n \geq 1$ on a $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$.*

Alors, en posant $\|\cdot\| := \max(\|\cdot\|_T, \|\cdot\|_{T'})$, la fonction

$$(f, g) \rightarrow J(f, g) := J_1(f) + J_2(g)$$

est une fonction de coût de $(\mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(T'), \|\cdot\|)$. Dans cet espace métrique, la suite $\left((X_n(\cdot), Y_n(\cdot))\right)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour ϵ_n et J , relativement à la tribu engendrée par les projections coordonnées.

Preuve : On vérifie aisément que J est une fonction de coût. Pour prouver le point (3.3.1.2) de ce principe de GD, il suffit de reprendre mot pour mot la preuve de la proposition 3.2.1. Nous allons maintenant montrer le point (3.3.1.1) du principe de grandes déviations

pour $(X_n(\cdot), Y_n(\cdot))_{n \geq 1}$. Soit F un fermé de $(\mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(T'), \|\cdot\|)$ tel que $J(F) > 0$ (cas non trivial). Soit $0 < a < J(F)$. Le compact $K := \{(f, g) : J(f, g) \leq a\}$ est disjoint de F . Il existe donc $\tau > 0$ tel que

$$\inf_{(f,g) \in F, (f',g') \in K} \|(f - f', g - g')\| \geq 3\tau. \quad (3.3.1.3)$$

Rappelons que \mathbb{P}^* a été défini dans la définition 3.3.2. En appliquant le théorème 3.3.1, nous savons qu'il existe deux semimétriques ρ et ρ' sur T et T' telles que

$$\forall \tau > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}^* \left(\sup_{\rho(s,t) \leq \delta} |X_n(s) - X_n(t)| \geq \tau \right) \right) = -\infty,$$

$$\forall \tau > 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log \left(\mathbb{P}^* \left(\sup_{\rho'(s,t) \leq \delta} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geq \tau \right) \right) = -\infty,$$

et telles que (T, ρ) et (T', ρ') soient précompacts. Soit donc $\delta > 0$ et n_0 tels que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\mathbb{P}^* \left(\sup_{\rho(s,t) \leq \delta} |X_n(s) - X_n(t)| \geq \tau \right) \leq \exp(-2a\epsilon_n^{-1}), \quad (3.3.1.4)$$

$$\mathbb{P}^* \left(\sup_{\rho'(s,t) \leq \delta} |Y_n(s) - Y_n(t)| \geq \tau \right) \leq \exp(-2a\epsilon_n^{-1}). \quad (3.3.1.5)$$

Or $T \times T'$ est précompact pour la semi-distance $d := \max(\rho, \rho')$. On recouvre donc cet ensemble d'une réunion finie de d -boules de rayon δ et de centres $(t_1, s_1), \dots, (t_p, s_p)$. Pour chaque $(t, t') \in T \times T'$ on choisit et on définit $\Pi(t, t') = (\Pi_1(t, t'), \Pi_2(t, t'))$ comme égal à l'un des $(t_i, s_i), i = 1 \dots p$, tel que $d((s, t), (t_i, s_i)) < \delta$. Considérons alors l'application suivante :

$$\Psi : (f, g) \rightarrow \left(\Psi_1(f, g), \Psi_2(f, g) \right) := \left((f(t_1), \dots, f(t_p)), (g(s_1), \dots, g(s_p)) \right).$$

Rappelons que K^τ est défini par

$$K^\tau := \left\{ (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(T'), \inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in K} \|\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2\| < \tau \right\}.$$

D'après (3.3.1.3) on a, pour tout entier n suffisamment grand, par sous-additivité de \mathbb{P}^* ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\left(X_n(\cdot), Y_n(\cdot)\right) \in F\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\left(X_n(\cdot), Y_n(\cdot)\right) \notin K^{2\tau}\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\Psi\left(\left(X_n, Y_n\right)\right) \notin \Psi\left(K^\tau\right)\right) \\
& \quad + \mathbb{P}^*\left(\sup_{(t,t') \in T \times T'} \max\left(\left|X_n(t) - X_n(\Pi_1(t, t'))\right|, \left|Y_n(t) - Y_n(\Pi_2(t, t'))\right|\right) > \tau\right).
\end{aligned} \tag{3.3.1.6}$$

Or, d'après (3.3.1.4) et (3.3.1.5), on a, par sous-additivité de \mathbb{P}^* ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^*\left(\sup_{(t,t') \in T \times T'} \max\left(\left|X_n(t) - X_n(\Pi_1(t, t'))\right|, \left|Y_n(t) - Y_n(\Pi_2(t, t'))\right|\right) > \tau\right) \\
& \leq \mathbb{P}^*\left(\sup_{\rho(s,t) \leq \delta} \left|X_n(s) - X_n(t)\right| \geq \tau\right) + \mathbb{P}^*\left(\sup_{\rho'(s,t) \leq \delta} \left|Y_n(s) - Y_n(t)\right| \geq \tau\right) \\
& \leq 2 \exp\left(-2a\epsilon_n^{-1}\right)
\end{aligned} \tag{3.3.1.7}$$

Nous savons, d'après le théorème 3.3.1 combiné avec la proposition 3.2.1 que la suite $\left(\Psi\left(X_n(\cdot), Y_n(\cdot)\right)\right)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD dans \mathbb{R}^{2p} pour $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût suivante :

$$\begin{aligned}
& J_{t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \\
& = \inf\{J_1(z), z \in \mathcal{B}(T), \forall i \leq p \ z(t_i) = x_i\} + \inf\{J_2(z'), z' \in \mathcal{B}(T'), \forall i \leq p \ z'(s_i) = y_i\} \\
& = \inf\{J_1(z) + J_2(z'), z \in \mathcal{B}(T), z' \in \mathcal{B}(T'), \forall i \leq p, (z(t_i), z'(s_i)) = (x_i, y_i)\}.
\end{aligned}$$

Remarquons que si l'on munit \mathbb{R}^{2p} de la norme $\|x\| := \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq 2p\}$, alors on a $\Psi(K^\tau) = \Psi(K)^\tau$ (voir la définition 3.2.4).

Remarquons aussi que, par définition de J et de $J_{t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p}$, on a

$$\Psi(K) = \left\{u \in \mathbb{R}^{2p}, J_{t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p}(u) \leq a\right\}.$$

Par semicontinuité inférieure de $J_{t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p}$, on sait que

$$J_{t_1, \dots, t_p, s_1, \dots, s_p}(\mathbb{R}^{2p} - \Psi(K)^\tau) > a.$$

Ainsi, en appliquant le principe de GD vérifié par $\left(\Psi(X_n(\cdot), Y_n(\cdot))\right)_{n \geq 1}$ au fermé $\mathbb{R}^{2p} - \Psi(K)^\tau$ on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\mathbb{P}\left(\Psi\left((X_n, Y_n)\right) \notin \Psi(K^\tau)\right) \leq \exp\left(-\epsilon_n^{-1}a\right). \quad (3.3.1.8)$$

En combinant (3.3.1.6), (3.3.1.7) et (3.3.1.8), on déduit qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\mathbb{P}\left((X_n(\cdot), Y_n(\cdot)) \in F\right) \leq 4 \exp\left(\epsilon_n^{-1}a\right).$$

Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \log\left(\mathbb{P}\left((X_n(\cdot), Y_n(\cdot)) \in F\right)\right) \leq -a.$$

La preuve est achevée car $a > J(F)$ est arbitraire. \square

3.3.2 Grandes déviations uniformes pour les tableaux triangulaires de processus

Pour les travaux de cette thèse, nous avons établi un principe de grandes déviations uniforme (GDU) pour les tableaux triangulaires de processus stochastiques. Rappelons que la notion de tableau triangulaire de vitesse est définie dans la définition 3.2.1. **Nous faisons les mêmes hypothèses que dans le début du §3.3.1.**

Définition 3.3.4 (Principe de GDU pour les processus stochastiques)

Soit $\left(X_{n,i}(\cdot)\right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de processus stochastiques à trajectoires bornées indexés par un même ensemble T , et définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit J une fonction de coût sur $(\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$. On dit que $\left(X_{n,i}(\cdot)\right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût J lorsque les conditions suivantes sont vérifiées.

– Pour tout fermé $F \in \mathcal{T}_0$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log\left(\mathbb{P}(X_{n,i}(\cdot) \in F)\right) \leq -J(F).$$

– Pour tout ouvert $O \in \mathcal{T}_0$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}(X_{n,i}(\cdot) \in O) \right) \geq -J(O).$$

Ici, "ouvert" et "fermé" font référence à l'espace métrique $(\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$.

En regardant de près la démonstration du théorème 3.3.1, on peut remarquer que cette preuve peut être reprise entièrement dans un contexte de grandes déviations uniformes. Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.3.3 Soit $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau de processus stochastiques indexés par un même ensemble T , basé sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses. Faisons les hypothèses suivantes :

1. Il existe une semi-métrique ρ sur T qui rend T précompact.
2. (**GD pour les marginales de dimension finie**) Pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$, le tableau triangulaire de variables aléatoires

$$\left(X_{n,i}(t_1), \dots, X_{n,i}(t_p) \right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$$

satisfait le principe de GDU pour le tableau de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et une fonction de coût

$$J_{t_1, \dots, t_p} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}.$$

3. (**Equicontinuité asymptotique**) Pour tous $\tau > 0$ et $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}^* \left(\sup_{t,s: \rho(t,s) \leq \eta} |X_{n,i}(t) - X_{n,i}(s)| > \tau \right) \right) \leq -M.$$

Alors $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût suivante :

$$J(z) := \sup_{p \geq 1, (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p} \left\{ J_{t_1, \dots, t_p}(z(t_1), \dots, z(t_p)) \right\}, \quad z \in \mathcal{B}(T).$$

Réciproquement, supposons que $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction de coût J . Alors :

4. Pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $(t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$, la suite de variables aléatoires $(X_{n,i}(t_1), \dots, X_{n,i}(t_p))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour le tableau de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et la fonction de coût

$$J_{t_1, \dots, t_p}(u_1, \dots, u_p) := \inf \left\{ J(z), z \in \mathcal{B}(T), (z(t_1), \dots, z(t_p)) = (u_1, \dots, u_p) \right\}.$$

5. On peut trouver une semi-métrique ρ sur T qui rend T précompact. Plus précisément, on peut choisir ρ de la façon suivante.

$$\rho(s, t) := \sum_{k \geq 1} k^{-2} \rho_k(s, t),$$

où

$$\rho_k(s, t) := \sup \left\{ |u_1 - u_2|, J_{s,t}(u_1, u_2) \leq k \right\}.$$

6. Pour tous $\tau > 0$ et $M > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}^* \left(\sup_{t,s: \rho(t,s) \leq \eta} |X_{n,i}(t) - X_{n,i}(s)| > \tau \right) \right) \leq -M.$$

Preuve : Il suffit de reprendre mot pour mot les arguments d'Arcones dans la preuve du théorème 3.3.1, et remplaçant les bornes de probabilités, pour n fixé, par des bornes de probabilités uniformes en $i \leq p_n$.

□

Une autre formulation du théorème 3.3.3

Nous nous intéressons aux points 1, 2 et 3 du théorème 3.3.3. Il s'agit

là du critère dont nous nous servons dans plusieurs preuves des résultats de cette thèse. Les conditions 2 et 3 peuvent s'interpréter de la façon suivante : on contrôle les probabilités de grandes déviations des processus discrétisés sur une grille (t_1, \dots, t_p) (condition 2), que l'on choisit suffisamment fine pour que le terme d'oscillations entre les t_i soit négligeable (condition 3). Ainsi, on peut légitimement s'attendre à pouvoir relâcher les conditions 1, 2 et 3 en trois conditions faisant intervenir une suite de grilles denses dans T . Nous énonçons ces trois conditions.

Proposition 3.3.1 (Un autre écriture du théorème 3.3.3) *Soit $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de processus stochastiques indexés par T , basés sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses. Supposons que $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et T vérifient les trois conditions suivantes :*

1. *Il existe une semi-métrique ρ rendant T précompact.*
2. *Il existe une suite de grilles emboîtées $(T_p)_{n \geq 1}$, sous-ensembles finis de T tels que $\bigcup_{p \geq 1} T_p$ est dense dans T pour la semi-métrique ρ . De plus, pour tout $p \geq 1$, en notant $T_p := \{t_{1,p}, \dots, t_{k_p,p}\}$, le tableau triangulaire*

$$(X_{n,i}(t_{1,p}), \dots, X_{n,i}(t_{k_p,p}))$$

satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction de coût J_p sur \mathbb{R}^{k_p} .

3. *Pour tous $\tau > 0$ et $M > 0$, et pour tout entier n suffisamment grand, il existe une partition*

$$T = \bigcup_{i=1}^{k_p} A_i$$

telle que pour tout $i \leq k_p$ il existe un unique élément de T_p noté

$t(A_i)$, appartenant à A_i , et telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P}^* \left(\max_{i \leq k_p} \sup_{T \in A_i} |X_{n,i}(t) - X_{n,i}(t(A_i))| \geq \tau \right) \right) \leq -M.$$

Alors $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût

$$J(z) := \sup_{p \geq 1} J_p \left(z(t_{1,p}), \dots, z(t_{k_p,p}) \right).$$

Preuve : La preuve suit les mêmes principes que celle du théorème 3.3.1.

Nous donnons également un théorème d'extension d'un principe de GDU à un tableau triangulaire de couples de processus indépendants, outil utilisé dans les preuves des théorèmes du §4.

Théorème 3.3.4 (Principe de GDU pour les couples de processus indépendants)

Soient $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et $(Y_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ deux tableaux triangulaires de processus indexés par T et T' respectivement, et définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de vitesses. Supposons que

1. $(X_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et une fonction de coût J_1 .
2. $(Y_{n,i}(\cdot))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et une fonction de coût J_2 .
3. Pour tout $n \geq 1$, $i \leq p_n$, on a $X_{n,i} \perp\!\!\!\perp Y_{n,i}$.

Alors, en notant $\|\cdot\| := \max(\|\cdot\|_T, \|\cdot\|_{T'})$, la fonction

$$(f, g) \rightarrow J(f, g) := J_1(f) + J_2(g)$$

est une fonction de coût de $(\mathcal{B}(T) \times \mathcal{B}(T'), \|\cdot\|)$. Dans ce même espace, le tableau triangulaire $\left((X_{n,i}, Y_{n,i}) \right)_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et J relativement à la tribu engendrée par les projections coordonnées.

Preuve : Il suffit de reprendre la preuve du théorème 3.3.2. \square

Nous donnons maintenant un principe de contraction légèrement étendu. Il s'agit de l'analogie de la proposition 3.2.3 pour les processus stochastiques.

Proposition 3.3.2 *Soit $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ un tableau triangulaire de processus stochastiques indexés par T . Soit $(\Psi_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ une suite d'applications de $(\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$ vers $(\mathcal{B}(T'), \|\cdot\|_{T'})$ (avec T' précompact pour une semi-distance ρ) satisfaisant, pour une fonction lipschitzienne Ψ ,*

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{i \leq p_n} \sup_{x, y, x \neq y} \frac{\|\Psi_{n,i}(x) - \Psi_{n,i}(y)\|_{T'}}{\|x - y\|_T} = c < \infty, \quad (3.3.2.1)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \|\Psi_{n,i}(x) - \Psi(x)\|_{T'} = 0. \quad (3.3.2.2)$$

On suppose que $(X_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour un tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour une fonction de coût J . Supposons aussi que les $\Psi_{n,i}$ sont mesurables par rapport à \mathcal{T}_0 et \mathcal{T}'_0 , tribus engendrées par les projections coordonnées de $\mathcal{B}(T)$ et $\mathcal{B}(T')$ respectivement (voir le début du §3.3.1). Alors $(\Psi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU, relativement à \mathcal{T}'_0 , pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût

$$J_\Psi(z) := \inf \{ J(z'), z' \in \mathcal{B}(T), \Psi(z') = z \}.$$

Preuve : Pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $(t'_1, \dots, t'_p) \in T'^p$, considérons l'application projection suivante :

$$\Pi = \Pi_{t'_1, \dots, t'_p} : X \in \mathcal{B}(T') \rightarrow (X(t'_1), \dots, X(t'_p)).$$

On voit aisément que le tableau triangulaire $(\Pi \circ \Psi_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.2.3, avec $(E, \|\cdot\|) := (\mathcal{B}(T), \|\cdot\|_T)$. Ainsi, en appliquant la proposition 3.2.3, il vient que le tableau

triangulaire $(\Pi(\Psi_{n,i}(X_{n,i})))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ vérifie le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût suivante

$$J_{\Pi \circ \Psi}(u_1, \dots, u_p) := \inf \{ J(z), z \in \mathcal{B}(T), \Pi(\Psi(z)) = (u_1, \dots, u_p) \}.$$

Ainsi le point 2 du théorème 3.3.3 est démontré. Il nous reste à montrer l'équicontinuité asymptotique c'est à dire le point 3 dans le théorème 3.3.3. Soit $M > 0$ quelconque, et soit K le compact de $(E, \|\cdot\|_E)$ défini par

$$K := \left\{ f \in \mathcal{B}(T) : J(f) \leq M \right\}.$$

Remarquons que par semicontinuité inférieure de J , on a, pour $\tau > 0$ quelconque (voir la définition 3.2.4 pour la définition de K^τ , pour la norme $\|\cdot\|_T$),

$$J(\mathcal{B}(T) - K^\tau) > M.$$

Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(X_{n,i} \notin K^\tau \right) \right) \leq -M. \quad (3.3.2.3)$$

Un raisonnement d'analyse montre que, sous l'hypothèse (3.3.2.2), on a, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\Psi_{n,i}(x) \rightarrow \Psi(x)$ uniformément en $x \in K$ et en $i \leq p_n$. Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand, et pour tout $i \leq p_n$ on a

$$y \in K \Rightarrow \Psi_{n,i}(y) \in \Psi(K)^\tau. \quad (3.3.2.4)$$

Puis l'hypothèse (3.3.2.1) combinée avec (3.3.2.4) nous assure que, pour tout entier n suffisamment grand, et pour tout $i \leq p_n$, on a

$$x \in K^\tau \Rightarrow \Psi_{n,i}(x) \in \Psi(K)^{(1+c)\tau}. \quad (3.3.2.5)$$

Or $\Psi(K)$ est un compact de $(\mathcal{B}(T'), \|\cdot\|_{T'})$, et T' est précompact pour une semi-distance ρ par hypothèse. D'après le théorème d'Arzela-Ascoli appliqué à $\Psi(K)$ dans l'espace $(\mathcal{B}(T'), \|\cdot\|_{T'})$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sup_{f \in \Psi(K), t_1, t_2 \in T', \rho(t_1, t_2) \leq \eta} |f(t_1) - f(t_2)| \leq \tau.$$

Ainsi, par contraposées successives on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\sup_{t_1, t_2 \in T', \rho(t, t') \leq \eta} \|(\Psi_{n,i}(X_{n,i}))(t_1) - (\Psi_{n,i}(X_{n,i}))(t_2)\|_{T'} \geq (3 + 2c)\tau\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(\Psi_{n,i}(X_{n,i}) \notin \Psi(K)^{(1+c)\tau}\right) \\
& \leq \mathbb{P}\left(X_{n,i} \notin K^\tau\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (3.3.2.3),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{i \leq p_n} \log \left(\mathbb{P}\left(\sup_{t_1, t_2 \in T', \rho(t, t') \leq \eta} |(\Psi_{n,i}(X_{n,i}))(t_1) - (\Psi_{n,i}(X_{n,i}))(t_2)| \geq (4+c)\tau\right) \right) \leq$$

Le point 3 dans le théorème 3.3.3 est donc démontré. En appliquant alors le théorème 3.3.3, nous pouvons conclure que $(\Psi_{n,i}(X_{n,i}))_{n \geq 1, i \leq p_n}$ satisfait le principe de GDU pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq p_n}$ et pour la fonction de coût

$$J'(z) := \sup_{p \geq 1, (t'_1, \dots, t'_p) \in T^p} J_{\Pi_{t'_1, \dots, t'_p} \circ \Psi}(z(t'_1), \dots, z(t'_p)).$$

Remarquons que cette fonction de coût ne dépend pas des $\Psi_{n,i}$, mais uniquement de leur limite Ψ . Ainsi, la suite $(\Psi(X_{n,1}))_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_{n,1})_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût J' relativement à la tribu \mathcal{T}'_0 . Or, d'après le principe de contraction (théorème 3.1.2), nous savons que la suite $(\Psi(X_{n,1}))_{n \geq 1}$ satisfait le principe de GD pour $(\epsilon_{n,1})_{n \geq 1}$ et pour la fonction de coût J relativement à la tribu \mathcal{T}'_0 . Par unicité de la fonction de coût dans un principe de grandes déviations (voir [3]), on en déduit que $J = J'$, ce qui conclut la preuve de la proposition 3.3.2. \square

3.4 De la dimension finie à la dimension infinie : forme explicite de la fonction de coût

Dans l'étude des grandes déviations d'une suite de processus, la démarche préconisée par le théorème 3.3.1 est la suivante : on étudie

d'abord les lois de dimensions finies des processus, puis on vérifie la condition d'équicontinuité asymptotique. La fonction de coût pour la suite de processus est alors entièrement définie par

$$J(z) := \sup_{p \geq 1, (t_1, \dots, t_p) \in T^p} J_{t_1, \dots, t_p}(z(t_1), \dots, z(t_p)), \quad z \in \mathcal{B}(T).$$

Cette définition de J n'étant pas très explicite, il serait intéressant d'en trouver une forme plus commode pour les calculs. Or, dans certains cas, on peut exprimer J_{t_1, \dots, t_p} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & J_{t_1, \dots, t_p}(u_1, \dots, u_p) \\ := & \inf \left\{ \int_H \Psi(\gamma(x)) dm(x) : \forall j \leq p, \int_H f_{t_j}(x) \gamma(x) dm(x) = u_j \right\}, \end{aligned} \tag{3.4.0.6}$$

où (H, \mathcal{B}, m) est un espace mesuré, m est mesure positive, Ψ une fonction convexe, et $(f_t)_{t \in T}$ est une collection de fonctions mesurables pour (H, \mathcal{B}) . L'infimum précédent est donc pris en faisant varier γ dans l'ensemble des fonctions mesurables pour (H, \mathcal{B}) , et par convention $\inf \emptyset = \infty$. La proposition suivante donne une forme explicite de $\sup_{p \geq 1, t_p, \dots, t_p \in T} J_{t_1, \dots, t_p}$.

Proposition 3.4.1 (Forme explicite de J) *Supposons que J_{t_1, \dots, t_p} s'exprime comme en (3.4.0.6), et que Ψ est la fonction conjuguée d'une fonction Φ satisfaisant*

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \Phi(x) = \infty.$$

Supposons de plus que

1. *Pour tout $a < \infty$*

$$\sup \left\{ \int_H \Psi(|\gamma(x)|) dm(x) : \int_H \Psi(\gamma(x)) dm(x) \leq a \right\} < \infty.$$

2. Pour tous $t \in T$ et $\lambda > 0$,

$$\int_H \Phi(\lambda | f_t(x) |) dm(x) < \infty.$$

3. (T, d) est précompact, où

$$d(s, t) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \min(d_k(s, t), 1),$$

et

$$d_k(s, t) := \sup \left\{ \left| \int_H (f_t - f_s)(x) \gamma(x) dm(x) \right| : \int_H \Psi(\gamma(x)) dm(x) \leq k, \gamma \text{ borélienn} \right.$$

Alors on a, pour tout $z \in \mathcal{B}(T)$,

$$\begin{aligned} & \sup_{p \geq 1, t_1, \dots, t_p} J_{t_1, \dots, t_p}(z(t_1), \dots, z(t_p)) \\ =: J(z) = & \inf \left\{ \int_H \Psi(\gamma) d\mu : \forall t \in T \left| \int_H f_t(x) \gamma(x) dm(x) \right| < \infty, \text{ et } \int_H f_t(x) \gamma(x) dm(x) \right. \end{aligned}$$

Preuve : Voir [3] .□

Exemple 1 : l'énergie gaussienne d'un processus gaussien régulier

Nous invitons le lecteur à prendre connaissance des définitions du §1.2 préalablement à la lecture de la suite de ce paragraphe.

Soit (H, \mathcal{B}, m) un espace mesuré, et soit $\mathcal{F} \subset L := L^2(H, \mathcal{B}, m)$ une classe de fonctions. Soit $(X(\cdot))$ un processus gaussien centré indexé par \mathcal{F} , basé sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ayant pour fonction de covariance

$$\text{Cov}(X(f), X(g)) := \int_H fg dm.$$

Notons ρ_X la semi-métrique intrinsèque associée à $(X(\cdot))$. Supposons que $(X(\cdot))$ est régulier.

Soit μ_X la mesure de Radon gaussienne induite par $(X(\cdot))$ sur $(\mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$. D'après le corollaire 1.2.2.1, nous savons que

$$J_{\mu_X}(\Psi) := \inf \left\{ \int_H l^2 dm, l \in L^2(H, \mathcal{B}, m), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H l f dm \right\}, \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X) \quad (3.4.0.7)$$

avec, par convention $\inf \emptyset = \infty$. Soit $p \geq 1$ un entier, et soient $(K_1, \dots, K_p) \in \mathcal{F}^p$ quelconques. L'application

$$\begin{aligned} \Pi : (\mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), \|\cdot\|_{\mathcal{F}}) &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \Psi &\rightarrow (\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_p)) \end{aligned}$$

est continue et linéaire. Ainsi, en appliquant la proposition 1.1.2, nous savons que l'énergie gaussienne associée au vecteur gaussien $(X(K_1), \dots, X(K_p))$, que nous notons J_{K_1, \dots, K_p} , est donnée par

$$\begin{aligned} &J_{K_1, \dots, K_p}(u_1, \dots, u_p) \\ &= \inf \left\{ J_{\mu_X}(\Psi), \Psi \in \mathcal{UC}(\mathcal{F}, \rho_X), (\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_p)) = (u_1, \dots, u_p) \right\}, \\ &(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (3.4.0.8)$$

En combinant (3.4.0.7) et (3.4.0.8), il vient que, pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$J_{K_1, \dots, K_p}(u_1, \dots, u_p) = \inf \left\{ \int_H g^2 dm, \forall i \leq p, \int_H g f_i dm = u_i \right\}.$$

On retrouve bien l'expression de (3.4.0.6). Puis on voit facilement que les hypothèses de la proposition 3.4.1 sont vérifiées et ainsi, pour tout $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, on a

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ J_{K_1, \dots, K_p}(\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_p)), p \geq 1, (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{F}^p \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_H \gamma^2(x) dm(x), \forall f \in \mathcal{F}, \Psi(f) = \int_H f(x) \gamma dm(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4.0.9)$$

Exemple 2 : la fonction de coût associée au processus de Poisson standard Notons

$$h(x) := x \log x - x + 1, \quad x > 0. \quad (3.4.0.10)$$

Soit $d \geq 1$ un entier. On notera $\mathcal{M}([0, 1]^d)$ l'ensemble des fonctions de répartitions de mesures positives finies sur $[0, 1]^d$. Soit $f \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$. Pour une fonction $f \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$, on notera, pour tout Borélien de $[0, 1]^d$,

$$f(A) := \int_A df. \quad (3.4.0.11)$$

Si $f \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$ admet une dérivée f' par rapport à la mesure de Lebesgue λ , alors on pose

$$I(f) := \int_{[0, 1]^d} h(f') d\lambda. \quad (3.4.0.12)$$

Si f n'est pas absolument continue par rapport à λ , alors on pose

$$I(f) := \infty.$$

Pour $p \geq 1$ entier et pour $\vec{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \{1, \dots, 2^p\}^d$ on pose

$$A_{\vec{i}}^p := [2^{-p}(i_1 - 1), 2^{-p}i_1[\times \dots \times [2^{-p}(i_d - 1), 2^{-p}i_d[.$$

On définit également la fonction I_p sur $\mathbb{R}^{2^{pd}}$ de la façon suivante. Pour tout $x = (x_{1,1,\dots,1}, \dots, x_{2^p,1,\dots,1}, \dots, x_{2^p,\dots,2^p,1}, \dots, x_{2^p,\dots,2^p})$ on pose

$$I_p(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p} 2^{-pd} h(2^{pd} x_{i_1, \dots, i_d}).$$

Proposition 3.4.2 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$, on a*

$$I(f) = \sup_{p \geq 1} I_p \left(f(A_{1,1,\dots,1}^p), \dots, f(A_{2^p,1,\dots,1}^p), \dots, f(A_{2^p,\dots,2^p,1}^p), \dots, f(A_{2^p,\dots,2^p}^p) \right).$$

Preuve : Remarquons d'abord que, lorsque $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$ admet une dérivée de Radon-Nikodym g' par rapport à la mesure de Lebesgue λ , on a pour tout entier $p \geq 1$, par application de l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}
I_p(g) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p} 2^{-pd} h \left(2^{pd} \int_{A_i^p} g' d\lambda \right) \\
&\leq \sum_{1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p} \int_{A_i^p} h(g') d\lambda \\
&= I(g). \tag{3.4.0.13}
\end{aligned}$$

Nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 3.4.1 (Approximation d'une dérivée de Radon Nikodym)

Soient P et Q deux mesures positives finies sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$. Soit $(\mathcal{T}_p)_{p \geq 1}$ une suite de sous tribus de \mathcal{T} , croissante, de limite \mathcal{T} . Pour tout entier $p \geq 1$, notons respectivement P_p et Q_p les traces de P et Q sur \mathcal{T}_p . Supposons que, pour tout entier $p \geq 1$, Q_p est absolument continue par rapport à P_p , de dérivée de Radon-Nikodym notée f_p . Alors, f_p converge $Q + P$ presque partout vers une fonction f , éventuellement infinie, lorsque $p \rightarrow \infty$. De plus le couple de mesures

$$Q(\cdot \cap \{L < \infty\}), \quad Q(\cdot \cap \{L = \infty\})$$

est la décomposition de Lebesgue de Q en la somme d'une mesure absolument continue par rapport à P (à gauche) et d'une mesure étrangère à P (à droite).

Preuve Voir [18], page 63.□

Suite de la preuve

Soit $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$. Notons Q la mesure associée à g , et Considérons P comme égale à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$ dans le théorème précédent. Pour $p \geq 1$, notons \mathcal{T}_p la tribu de $[0, 1]^d$ engendrée par la

partition

$$\left\{ A_{\vec{i}}^p, \vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d \right\}.$$

Clairement, la tribu engendrée par $\bigcup_{p \geq 1} \mathcal{T}_p$ est la tribu des Boréliens de $[0, 1]^d$. De plus, pour tout entier $p \geq 1$, Q_p est absolument continue par rapport à P_p , dont la dérivée de Radon-Nikodym est (voir 3.4.0.11)

$$\begin{aligned} f_p &:= \frac{dQ_p}{dP_p}(x) \\ &= \sum_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} 1_{A_{\vec{i}}^p}(x) Q_p(A_{\vec{i}}^p) \\ &= \sum_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} 1_{A_{\vec{i}}^p}(x) g(A_{\vec{i}}^p). \end{aligned} \quad (3.4.0.14)$$

D'après le théorème 3.4.1, nous savons que f_p converge $Q + \lambda$ -presque partout vers une fonction f . Remarquons que, pour tout $p \geq 1$ on a

$$\int_{[0, 1]^d} h(f_p) d\lambda = I_p(g). \quad (3.4.0.15)$$

Premier cas

Supposons que g est absolument continue par rapport à λ , et que $I(g) > 0$ (cas non trivial). D'après le théorème 3.4.1, on sait alors que f est $\lambda + Q$ -presque partout finie et qu'il s'agit de la dérivée de g par rapport à λ . Soit $l < I(g)$ quelconque. Il existe $0 < \epsilon < 1$ tel que

$$\int_{\epsilon < f < 1/\epsilon} h(f) d\lambda > l.$$

Par continuité de h , sur $[\epsilon, 1/\epsilon]$, et comme $f_p \rightarrow f$ $\lambda + Q$ -presque partout lorsque $p \rightarrow \infty$, il vient que

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\epsilon < f_p < 1/\epsilon} h(f_p) d\lambda \geq \int_{\epsilon < f < 1/\epsilon} h(f) d\lambda$$

$\lambda + Q$ -presque partout lorsque $p \rightarrow \infty$. En appliquant le lemme de Fatou, il vient que

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\epsilon < f < 1/\epsilon} h(f_p) d\lambda \geq \liminf_{p \rightarrow \infty} \int_{\epsilon < f < 1/\epsilon} h(f_p) d\lambda = \int_{\epsilon < f < 1/\epsilon} h(f) d\lambda > l.$$

On en déduit d'après (3.4.0.15) que $I_p(f) > l$ pour tout entier p suffisamment grand. Comme $l < I_p$, et en se rappelant (3.4.0.13), on en déduit que

$$\sup_{p \rightarrow \infty} I_p(g) = I(g).$$

Deuxième cas

Supposons maintenant que g n'est pas absolument continue par rapport à λ . D'après le théorème 3.4.1, on sait que, lorsque $p \rightarrow \infty$, f_p converge $\lambda + Q$ -presque partout vers une limite f telle que $Q(f = \infty) =: \tau > 0$. Soit $l(\cdot)$ la fonction définie par

$$l(x) := x^{-1}h(x) = \log(x) - 1 + x^{-1}, \quad x > 0.$$

Clairement, $\lim_{x \rightarrow \infty} l(x) = \infty$. Soit $l > 0$ quelconque, et soit $A > 0$ tel que

$$\inf_{x > A} l(x) > \frac{2l}{\tau}.$$

Comme f_p converge $\lambda + Q$ -presque partout vers f lorsque $p \rightarrow \infty$, il s'ensuit que, pour tout entier p suffisamment grand, on a

$$Q(f_p > A) > \tau/2.$$

Ainsi, comme f_p est la densité de Q_p par rapport à λ , on a

$$\begin{aligned}
 I_p(h) &= \int_{]0, \infty[} h(f_p) d\lambda \\
 &= \int_{f_p \in]0, \infty[} \ell(f_p) f_p d\lambda_p \\
 &\geq \int_{f_p \in]0, \infty[} \ell(f_p) dQ_p \\
 &\geq \int_{f_p \in]A, \infty[} \ell(f_p) dQ \\
 &\geq \frac{2l}{\tau} Q(f_p > A) \\
 &> l.
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $l > 0$ est arbitraire, il vient que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_p(f) = +\infty.$$

La preuve de la proposition 3.4.2 est donc achevée. \square

Chapitre 4

Une étude des accroissements du processus empirique généralisé

4.1 Introduction

4.1.1 Objet étudié

Dans cette partie, nous considérons toujours un échantillon i.i.d $(Z_i)_{i \geq 1}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d . On définit, pour $z \in \mathbb{R}^d, h > 0$ et K une fonction réelle Borélienne sur \mathbb{R}^d ,

$$G_n(K, h, z) := \sum_{i=1}^n K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right)\right). \quad (4.1.1.1)$$

Il s'agit là de l'estimateur à noyau de la densité, à un terme multiplicatif près. U. Einmahl et Mason [45] ont eu récemment l'idée de faire varier K dans une classe de fonctions \mathcal{G} , pour faire de $G_n(\cdot, h, z)$ un processus empirique indexé par une classe de fonctions. Nous étudions ici exclusivement ces processus, que nous appelons **accroissements du processus empirique généralisé**.

Remarque 4.1.1 *En choisissant*

$$\mathcal{G}_1 := \left\{ 1_{[0,t]}, 0 \leq t \leq 1 \right\}, \quad (4.1.1.2)$$

et en considérant les Z_i comme des v.a. uniformes sur $[0, 1]$, le processus $G_n(\cdot, h, z)$ s'identifie clairement à $n^{1/2}(\alpha_n(z + h \cdot) - \alpha_n(z))$. On

reconnait ici les accroissements fonctionnels du processus empirique uniforme.

Le problème principal dans l'étude du comportement asymptotique des $G_n(\cdot, z, h)$ est qu'il n'existe pas de construction de type K.M.T (voir (2.2.2.7) et (2.2.1.1)) pour le processus empirique indexé par une classe de fonctions. Cependant, les recherches sur le processus empirique de ces deux dernières décennies (citons les travaux de Talagrand [97], Mason [76], U.Einmahl et Mason [45, 43], et Arcones [3]) ont permis la mise au point d'un nombre suffisant d'outils pour établir un principe de grandes déviations pour les processus $G_n(\cdot, h_n, z)$ lorsque $(h_n)_{n \geq 1}$ satisfait les conditions de Csörgő-Révész-Stute, c'est à dire

$$(HV1) \quad 0 < h_n \leq 1, \quad h_n \downarrow 0, \quad nh_n \uparrow \infty,$$

$$(HV2) \quad nh_n / \log n \rightarrow \infty,$$

$$(HV3) \quad \log(1/h_n) / \log_2 n \rightarrow \infty.$$

Définition 4.1.1 Soit \mathcal{F} une classe de fonctions sur \mathbb{R}^d . Pour une mesure de probabilité Q sur \mathbb{R}^d , et pour une fonction réelle f sur \mathbb{R}^d on pose

$$Q(f) := \int_{\mathbb{R}^d} f(z) dQ(z),$$

et pour $\epsilon > 0$ on pose

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}, Q) := \min \left\{ p \geq 1, \exists (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{F}^p, \forall f \in \mathcal{F}, \exists 1 \leq k \leq p, \right. \\ \left. Q(|f - f_k|^2) \leq \epsilon^2 \right\}.$$

Ainsi, $\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}, Q)$ est le nombre minimal de boules de $L^2(Q)$ -rayon ϵ nécessaire pour recouvrir \mathcal{F} . Enfin, pour $\epsilon > 0$ on définit

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) := \sup \left\{ \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}, Q), Q \text{ probabilité} \right\}.$$

Les résultats présentés dans cette partie se basent tous sur les hypothèses suivantes concernant la classe \mathcal{G} . Posons

$$I^d := [0, 1]^d, \quad (4.1.1.3)$$

ainsi que

$$\mathcal{F} := \left\{ K(\lambda(\cdot - z)), z \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0, K \in \mathcal{G} \right\}. \quad (4.1.1.4)$$

Notons ici $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Nous faisons les hypothèses suivantes.

$$\begin{aligned} (HK1) \quad & \lim_{\|u\|_{\mathbb{R}^d} \rightarrow 0} \sup_{K \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^d} (K(x) - K(x+u))^2 dx = 0, \\ & \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sup_{K \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^d} (K(\lambda x) - K(x))^2 dx = 0, \\ (HK2) \quad & \forall K \in \mathcal{G}, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |K(x)| \leq 1, \\ (HK3) \quad & \forall K \in \mathcal{G}, \forall x \notin I^d, K(x) = 0, \\ (HK4) \quad & \exists C > 0, v > 0, \forall 0 < \epsilon < 2, \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) \leq C_0 \epsilon^{-v_0}. \end{aligned}$$

Pour palier le problème de mesurabilité, nous faisons également l'hypothèse usuelle

$$(HK5) \quad \mathcal{G} \text{ est séparable point par point.}$$

Par "séparable point par point" nous entendons qu'il existe un sous-ensemble dénombrable \mathcal{G}_0 de \mathcal{G} tel que pour tout $K \in \mathcal{G}$ il existe une suite de \mathcal{G}_0 qui converge point par point vers K .

Remarque 4.1.2 *La classe*

$$\mathcal{G}_2 := \left\{ 1_{\{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_p]\}}, (t_1, \dots, t_p) \in [0, 1]^d \right\}$$

vérifie les hypothèses (HK1)-(HK5). En particulier, \mathcal{G}_2 vérifie (HK5) car la classe

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2 & := \left\{ K\left(\frac{\cdot - z}{\lambda}\right), \lambda > 0, z \in \mathbb{R}^d \right\} \\ & = \left\{ 1_{\{[0, t_1] \times \dots \times [0, t_p]\}}, (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^d \right\} \end{aligned}$$

est identifiable à une classe de Vlapnik-Červonenkis (voir [98], chapitre 2.6).

Remarque 4.1.3 Si K est une fonction réelle sur \mathbb{R}^d à variation bornée, bornée par 1, et telle que

$$\forall x \notin I^d, K(x) = 0,$$

alors la classe de fonctions $\{K\}$ vérifie les hypothèses (HK1)–(HK5). En particulier, $\mathcal{G}_3 := \{K\}$ vérifie (HK5) car la classe de fonctions

$$\mathcal{F}_3 := \left\{ K\left(\frac{\cdot - z}{\lambda}\right), z \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0 \right\}$$

est reliée à deux classes de fonctions dont les sous-graphes forment une classe de Vlapnik-Červonenkis. Pour plus de détail concernant cet argument, nous renvoyons à [87], chapitre 2.

4.1.2 Processus gaussien associé aux $G_n(\cdot, h, z)$

Pour une classe de fonctions \mathcal{F} quelconque, et pour Ψ une fonction réelle bornée sur \mathcal{F} , on notera

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}} := \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Psi(f)|. \quad (4.1.2.1)$$

Les résultats que nous allons présenter plus loin montrent que, sous certaines conditions, les processus $G_n(\cdot, h, z)$ convenablement normalisés se comportent comme le processus gaussien que nous définissons comme suit. Nous invitons le lecteur à prendre connaissance du §1.2, et nous noterons $L_\infty(\mathcal{G})$ l'espace des fonctions réelles bornées sur \mathcal{G} .

Définition 4.1.2 (Processus $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$) Nous appelons $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ le processus gaussien indexé par \mathcal{G} , centré, et dont la fonction de covariance est

$$\text{Cov}(W_{\mathcal{G}}(K), W_{\mathcal{G}}(K')) = \int_{\mathbb{R}^d} K(t)K'(t)dt, \quad K, K' \in \mathcal{G}.$$

Si \mathcal{G} vérifie (HK4), alors $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ est un processus régulier (cf définition 1.2.9). Nous notons $J := J_{\mathcal{G}}$ l'énergie gaussienne associée à la mesure induite par $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$. Nous appelons $\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\mathcal{G}}$ le noyau associé à $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$, c'est à dire l'ensemble

$$\mathbb{K} := \left\{ \Psi \in L^{\infty}(\mathcal{G}), J(\Psi) \leq 1 \right\}.$$

Nous soulignons les deux propriétés suivantes de J . La notion de fonction de coût est donnée dans la définition 3.1.1.

Propriété 4.1.1 (Propriétés de J) Soit $L^*(\mathcal{G})$ l'espace de Hilbert engendré par \mathcal{G} , pour le produit scalaire suivant :

$$\langle g, g' \rangle_0 := \sigma(g, g') = \int_{\mathbb{R}^d} g(z)g'(z)dz.$$

Alors on a, pour tout $\Psi \in L^{\infty}(\mathcal{G})$,

$$J(\Psi) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f^2(z)dz, f \in L^*(\mathcal{G}), \forall g \in \mathcal{G}, \Psi(g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(z)dz \right\}. \quad (4.1.2.2)$$

En conséquence, le noyau $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathcal{G}}$ est l'ensemble des fonctions (voir §1.2.4)

$$\begin{aligned} \Psi_f : \mathcal{G} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(t)dt, \end{aligned} \quad (4.1.2.3)$$

pour f variant dans $L^*(\mathcal{G})$, et vérifiant

$$\int_{I^d} f^2(t)dt \leq 1.$$

Enfin, J est une fonction de coût sur l'espace de Banach $(L^{\infty}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$.

Preuve : Le point (4.1.2.2) est une conséquence de la remarque 1.2.1, en choisissant $H := \mathbb{R}^d$, muni de ses Boréliens, et en choisissant m

comme la mesure de Lebesgue. Le fait que J soit une fonction de coût vient du fait que, comme $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ est régulier on a (voir §3.4)

$$J(\Psi) := \sup_{p \geq 1, (K_1, \dots, K_p) \in \mathcal{G}^p} J_{K_1, \dots, K_p}(\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_p)).$$

Ainsi, J est semi-continue inférieurement sur $(L_{\infty}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ en tant qu'enveloppe supérieure de fonctions semi-continues inférieures sur $(L_{\infty}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$. Soit $a \geq 0$ quelconque. Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $\langle g, g' \rangle_0$, on déduit que l'ensemble

$$\left\{ \Psi \in L^{\infty}, J(\Psi) \leq a \right\}$$

est uniformément équicontinu sur l'espace métrique précompact $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_0)$, $\|\cdot\|_0$ étant la norme issue de $\langle g, g' \rangle_0$. \square

4.1.3 Processus empiriques et mesurabilité

Si les $G_n(\cdot, h, z)$, $h > 0$, $z \in \mathbb{R}^d$ sont indexés par une classe de fonctions \mathcal{G} vérifiant (HK2), ces processus ont des trajectoires presque sûrement bornées sur \mathcal{G} . Nous pouvons donc les considérer comme des variables aléatoires à valeurs presque sûrement dans $L_{\infty}(\mathcal{G})$. Le problème est que nous voudrions considérer des événements du type

$$\left\{ \| G_n(\cdot, h, z) - \Psi \|_{\mathcal{G}} \leq \epsilon \right\}, \quad (4.1.3.1)$$

où $\epsilon > 0$ et où Ψ appartient à l'ensemble $\mathbb{K}_{\mathcal{G}}$. Ainsi, il faut s'assurer que les boules ouvertes apparaissant dans l'expression (4.1.3.1) sont bien mesurables pour les $G_n(\cdot, h, z)$. C'est ici que l'hypothèse (HK5) joue un rôle. En effet, pour $\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}}$, il est aisé de constater via le théorème de convergence dominée que, si une suite $(K_m)_{m \geq 1} \in \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ converge point par point vers $K \in \mathcal{G}$, alors, pour tout entier $n \geq 1$ et

pour tous $h > 0$, $z \in H$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi(K_m) &\rightarrow \Psi(K) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} G_n(K_m, h, z) &= G_n(K, h, z). \end{aligned}$$

Ainsi, grâce à l'hypothèse (HK5), on a pour tous $h > 0$, $\epsilon > 0$ et $z \in H$ et $n \geq 1$ entier,

$$\left\{ \| G_n(\cdot, h, z) - \Psi \|_{\mathcal{G}} \leq \epsilon \right\} = \bigcap_{K \in \mathcal{G}_0} \left\{ | G_n(K, h, z) - \Psi(K) | \leq \epsilon \right\} \quad (4.1.3.2)$$

Définition 4.1.3 (Définition de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$) On appelle $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ l'ensemble des fonctions Ψ réelles bornées sur \mathcal{G} , telles que si $(K_n)_{n \geq 1} \rightarrow K$ point par point lorsque $n \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(K_n) = \Psi(K).$$

Remarque 4.1.4 Notons, pour $f \in \mathcal{G}$, l'application projection coordonnée

$$\Pi_f(\Psi) := \Psi(f), \quad \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}),$$

et notons \mathcal{T}_0 la tribu engendrée par les applications projections coordonnées $\{\Pi_f, f \in \mathcal{G}\}$. Nous pouvons considérer les $G_n(\cdot, h, z)$ comme des variables aléatoires dont l'espace d'arrivée est $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \mathcal{T}_0)$. Grâce à l'hypothèse (HK5) et à l'égalité (4.1.3.2), les boules ouvertes de la forme

$$\Psi^\epsilon := \left\{ \Psi' \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \| \Psi - \Psi' \|_{\mathcal{G}} < \epsilon \right\}, \quad \epsilon > 0, \quad \Psi \in \mathbb{K}, \quad (4.1.3.3)$$

ainsi que les ensembles de la forme

$$A^\epsilon := \bigcup_{\Psi \in A} \Psi^\epsilon, \quad A \subset \mathbb{K}, \quad \epsilon > 0, \quad (4.1.3.4)$$

appartiennent à la tribu \mathcal{T}_0 .

Remarque 4.1.5 *L'espace $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est sous-espace vectoriel fermé de $(L^\infty(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$, ensemble des fonctions réelles bornées sur \mathcal{G} , muni de sa norme sup usuelle. D'après l'hypothèse (HK5) et l'égalité (4.1.3.2), nous déduisons que la tribu $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_{\mathcal{G}}}$ de $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ engendrée par les boules est bien incluse dans \mathcal{T}_0 . Ainsi, l'hypothèse faite au début du §3.3.1 est bien vérifiée, et nous pourrions donc appliquer les théorèmes du §3.3.*

4.2 Comparaison de deux tailles de fenêtre significativement différentes

Nous citons ici un résultat établi par Mason. Soit H un compact de \mathbb{R}^d . Nous notons ici

$$\Theta_{n,h} := \left\{ \frac{G(\cdot, h, z)}{(2nh \log(1/h))^{1/2}}, z \in H \right\}.$$

rappelons que l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est spécifié dans la définition 4.1.3, et que la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ est définie dans (4.1.2.1). Enfin, \mathbb{K} est défini au début du §4.1.3, et le symbole " \rightsquigarrow ", signifiant "relativement compact avec ensemble d'adhérence...", est défini dans le §2.1.1.

Théorème 4.2.1 [*LFULI pour les accroissement du processus empirique généralisé, Mason, 2002*] *Soient H un compact de \mathbb{R}^d d'intérieur non vide, $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes strictement positives satisfaisant les hypothèses (HV1)-(HV3) (voir §4.1.1), et \mathcal{G} une classe de fonctions vérifiant (HK1)-(HK5) (voir §4.1.1). Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue), telle que f est continue et strictement positive sur H . Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f est uniformément continue sur l'ensemble suivant*

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (4.2.0.5)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Alors avec probabilité 1 on a

$$\Theta_{n,h_n} \rightsquigarrow \mathbb{K}$$

dans $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$.

Preuve : Voir [77]. \square

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude simultanée des accroissements généralisés du processus empirique pris en un même point z , mais avec deux tailles de fenêtre $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ significativement différentes (voir (HV4) plus loin), et vérifiant toutes deux les hypothèses de Csörgő-Révész-Stute (HV1)-(HV3). Par exemple, il peut s'agir de deux fonctions puissances d'indices différents. Nous étudierons l'objet suivant :

$$\Theta_n := \left\{ \left(\frac{G_{n,1}(\cdot, z)}{b_{n,1}f(z)^{1/2}}, \frac{G_{n,2}(\cdot, z)}{b_{n,2}f(z)^{1/2}} \right), z \in H \right\}, \quad (4.2.0.6)$$

avec

$$b_{n,\ell} := (2nh_{n,\ell} \log(1/h_{n,\ell}))^{1/2}, \quad \ell = 1, 2,$$

et

$$\begin{aligned} G_{n,\ell}(K, z) &:= G_n(K, h_{n,\ell}, z) \\ &= \sum_{i=1}^n K\left(\frac{Z_i - z}{h_{n,\ell}^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h_{n,\ell}^{1/d}}\right)\right), \quad \ell = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.2.0.7)$$

4.2.1 Hypothèses sur les tailles de fenêtre, ensemble limite de Θ_n

Nous supposons que $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ vérifient (HV1)-(HV3) (voir §4.1.1), et nous faisons l'hypothèse que $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ ont des vitesses significativement différentes dans les sens suivant.

$$(HV4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(h_{n,1}) / \log(h_{n,2}) = d_1, \quad 0 < d_1 < 1.$$

Rappelons que \mathcal{S}_1 est la boule de Strassen définie par (2.1.2.1), que

$$\| f \| := \sup_{t \in [0,1]} | f(t) |$$

et que, pour $f \in \mathcal{S}_1$,

$$\| f \|_H^2 := \int_0^1 f'^2(t) dt.$$

Deheuvels [27] a établi le comportement presque sûr de Θ_n dans le cas réel, c'est à dire lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$ (voir (4.1.1.2)). Ainsi, il a établi la LUFLI suivante. Pour des raisons d'identification (voir (4.1.1.2)), nous posons, pour $(f_1, f_2) \in T_n$ les fonctions

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\ell &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow f_\ell([0, t]), \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Théorème 4.2.2 (Deheuvels, 2000) *Supposons $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1$, que les (Z_i) sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$, et que $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ vérifient (HV1)-(HV4). Posons*

$$\mathcal{S}' := \left\{ (f_1, f_2) \in \mathcal{S}_1^2, d_1 \| f_1 \|_H^2 + \| f_2 \|_H^2 \leq 1 \right\}.$$

On a presque sûrement

$$\begin{aligned} (i) \quad & \forall (g_1, g_2) \in \mathcal{S}', \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{(f_1, f_2) \in \Theta_n} \max \left\{ \| \tilde{f}_1 - g_1 \|; \| \tilde{f}_2 - g_2 \| \right\} = 0, \\ (ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(g_1, g_2) \in \Theta_n} \inf_{(f_1, f_2) \in \mathcal{S}'} \max \left\{ \| \tilde{f}_1 - g_1 \|; \| \tilde{f}_2 - g_2 \| \right\} = 0. \end{aligned}$$

Preuve : Voir [27].□

Notre but est ici d'étendre le théorème 4.2.2 à une classe de fonctions \mathcal{G} satisfaisant (HK1)-(HK5), et reprenant les outils utilisés par Mason dans la preuve de son théorème 4.2.1. Pour cela, il nous faut d'abord avoir une idée de l'ensemble limite de Θ_n , qui doit être une

généralisation de l'ensemble \mathcal{S}' lorsque \mathcal{G} est quelconque (au lieu de \mathcal{G}_1 définie par (4.1.1.2)). La norme hilbertienne $\|f\|_H^2$ peut s'interpréter comme l'énergie gaussienne associée au mouvement brownien W sur $[0,1]$ (voir le §1.2.4), et cette énergie détermine les propriétés grandes déviations de W . De plus, \mathbb{K} est le noyau associé au processus gaussien $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$, dont l'énergie gaussienne est J (voir la définition 4.1.2). Ainsi, comme J détermine les propriétés de grandes déviations de $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$, il paraît naturel de définir l'ensemble limite de Θ_n de la façon suivante

$$\mathbb{K}' := \left\{ (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}^2, d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2) \leq 1 \right\}.$$

4.2.2 Énoncé du résultat

Nous énonçons maintenant une loi fonctionnelle uniforme du logarithme itéré pour Θ_n . Pour $(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2$, on pose

$$||| (\Psi_1, \Psi_2) ||| := \max \left\{ \|\Psi_1\|_{\mathcal{G}}, \|\Psi_2\|_{\mathcal{G}} \right\}. \quad (4.2.2.1)$$

Théorème 4.2.3 *Soient H un compact de \mathbb{R}^d d'intérieur non vide, $(h_{n,1})_{n \geq 1}$ et $(h_{n,2})_{n \geq 1}$ deux suites de constantes strictement positives satisfaisant les hypothèses (HV1)-(HV4) (voir §4.1.1), et \mathcal{G} une classe de fonctions vérifiant (HK1)-(HK5) (voir §4.1.1). Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue). Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f est continue et strictement positive sur l'ensemble*

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\},$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Alors on a presque sûrement

$$(i) \forall (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}', \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \Theta_n} \max \left\{ \|\Psi_1 - \Psi'_1\|_{\mathcal{G}}; \|\Psi_2 - \Psi'_2\|_{\mathcal{G}} \right\} = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\Psi_1, \Psi_2) \in \Theta_n} \inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'} \max \left\{ \|\Psi_1 - \Psi'_1\|_{\mathcal{G}}; \|\Psi_2 - \Psi'_2\|_{\mathcal{G}} \right\} = 0.$$

En d'autres termes, Θ_n est presque sûrement relativement compacte (voir §2.1.1) d'ensemble limite \mathbb{K}' dans l'espace métrique $(\mathcal{B}(\mathcal{G})^2, \|\cdot\|)$.

Avant de prouver le théorème 4.2.3, nous faisons quelques remarques concernant les hypothèses (HK2) et (HK3).

4.2.3 Une remarque sur les hypothèses du théorème 4.2.3

Les hypothèses (HK2)-(HK3) peuvent être rendues moins restrictives, moyennant quelques efforts supplémentaires. Cependant, nous avons choisi de les renforcer, et cela dans un souci de clarté uniquement. Ainsi, par des arguments de translation et d'homogénéité, on constate que les théorèmes 4.2.3, 4.2.1 et 4.3.2 (voir plus loin) restent vrais si les hypothèses (HK2) et (HK3) sont remplacées par les deux hypothèses plus générales suivantes :

$$\begin{aligned} (HK2') \quad & \exists M > 0, \forall K \in \mathcal{G}, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |K(x)| \leq M, \\ (HK3') \quad & \exists M > 0, \forall K \in \mathcal{G}, \forall x \notin [-M, M]^d, K(x) = 0. \end{aligned}$$

A titre d'exemple, nous montrons que le théorème 4.2.1 reste vrai sous ces deux hypothèses.

Soit \mathcal{G} une classe de fonctions vérifiant (HK1), (HK2'), (HK3'), (HK4) et (HK5). Il existe donc $M > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & \forall K \in \mathcal{G}, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |K(x)| \leq M, \\ & \forall K \in \mathcal{G}, \forall x \notin [-M, M]^d, K(x) = 0. \end{aligned}$$

Notons $\vec{M} := (M, \dots, M) \in \mathbb{R}^d$. Pour toute fonction réelle g sur \mathbb{R}^d , on notera \bar{g} la fonction suivante

$$\bar{g}(z) := \frac{1}{M} g\left(\frac{z + \vec{M}}{2M}\right), z \in \mathbb{R}^d.$$

Alors, la classe de fonctions

$$\mathcal{G}' := \left\{ \bar{g}, g \in \mathcal{G} \right\}$$

vérifie les cinq hypothèses (HK1)-(HK5) du théorème 4.2.1. Soit maintenant $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires, dont la loi commune sur \mathbb{R}^d admet une densité f continue et strictement positive sur un ensemble H^α , avec H un compact d'intérieur non vide, et $\alpha > 0$. Soit également $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes strictement positives vérifiant les hypothèses (HV1)-(HV3). Clairement on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$H - h_n^{1/d} \vec{M} \subset H^{\alpha/2}. \quad (4.2.3.1)$$

Un raisonnement d'analyse montre que l'ensemble $\mathbb{K}_{\mathcal{G}'}$ peut s'exprimer en fonction de $\mathbb{K}_{\mathcal{G}}$ de la façon suivante.

$$\mathbb{K}_{\mathcal{G}'} := \left\{ \Psi_1 \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}'}, \exists \Psi_2 \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}}, \forall g \in \mathcal{G}, \Psi_1(\bar{g}) = (2M)^{d/2} M^{-1} \Psi_2(g) \right\}. \quad (4.2.3.2)$$

Remarquons enfin que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $h > 0$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ on a, presque sûrement pour tout $g \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} G_n(\bar{g}, h, z) &= \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^n g\left(\frac{Z_i - z + h^{1/d} \vec{M}}{2Mh^{1/d}}\right) - \mathbb{E} \left(g\left(\frac{Z_i - z + h^{1/d} \vec{M}}{2Mh^{1/d}}\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{M} G_n\left(g, (2M)^d h, z - h^{1/d} \vec{M}\right). \end{aligned} \quad (4.2.3.3)$$

Considérons maintenant la suite $(\bar{h}_n)_{n \geq 1} := \left((2M)^d h_n \right)_{n \geq 1}$. Cette suite vérifie les hypothèses (HV1)-(HV3) à partir d'un certain rang. D'après (4.2.3.1), (4.2.3.2) et (4.2.3.3) nous savons que, pour tout entier n suf-

fisamment grand, on a presque sûrement

$$\begin{aligned}
& \sup_{z \in H} \inf_{\Psi_2 \in \mathbb{K}_G} \left\| \frac{G_n(g, h_n, z)}{\sqrt{2f(z)nh_n \log(1/h_n)}} - \Psi_2 \right\|_G \\
&= \sup_{z \in H} \inf_{\Psi_2 \in \mathbb{K}_G} \sup_{g \in \mathcal{G}'} \left| \frac{G_n(\bar{g}, h_n, z)}{\sqrt{2f(z)nh_n \log(1/h_n)}} - \Psi_2(\bar{g}) \right| \\
&= \sup_{z \in H} \inf_{\Psi_1 \in \mathbb{K}_{G'}} \sup_{g \in \mathcal{G}'} \left| \frac{(2M)^{d/2}}{M} \frac{G_n\left(g, \bar{h}_n, z - h_n^{1/d} \vec{M}\right)}{\sqrt{2f(z)n\bar{h}_n \log\left((2M)^{d/2}/\bar{h}_n\right)}} - \frac{(2M)^{d/2}}{M} \Psi_1(g) \right| \\
&\leq \sup_{z \in H^{\alpha/2}} \inf_{\Psi_1 \in \mathbb{K}_{G'}} \frac{(2M)^{d/2}}{M} \left\| \frac{G_n(\cdot, \bar{h}_n, z)}{\sqrt{2nf(z + h_n^{1/d} \vec{M})\bar{h}_n \log\left((2M)^{d/2}/\bar{h}_n\right)}} - \Psi_1 \right\|_{G'}.
\end{aligned} \tag{4.2.3.4}$$

Nous appliquons le théorème 4.2.1 à la suite $(\bar{h}_n)_{n \geq 1}$, la classe de fonctions \mathcal{G}' et le compact d'intérieur non vide $H^{\alpha/2}$. Comme f est continue et strictement positive sur H^α , on en déduit aisément que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H^{\alpha/2}} \inf_{\Psi_1 \in \mathbb{K}_{G'}} \left\| \frac{G_n(\cdot, \bar{h}_n, z)}{\sqrt{2nf(z + h_n^{1/d} \vec{M})\bar{h}_n \log\left((2M)^{d/2}/\bar{h}_n\right)}} - \Psi_1 \right\|_{G'} = 0.$$

Enfin, d'après (4.2.3.4) nous déduisons que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf_{\Psi_2 \in \mathbb{K}_G} \left\| \frac{G_n(g, h_n, z)}{(2nh_n \log(1/h_n))^{1/2}} - \Psi_2 \right\|_G = 0. \tag{4.2.3.5}$$

Posons maintenant, pour tout entier $n \geq 1$, $\tilde{h}_n := (2M)^{-d}h_n$. La suite $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ vérifie les hypothèses (HV1)-(HV3) pour tout entier n suffisamment grand. Soit maintenant $\bar{H} \subset H$ un hypercube non vide vérifiant, pour un réel $\gamma > 0$, $\bar{H}^\gamma \subset H$. Un tel ensemble \bar{H} existe car H est supposé d'intérieur non vide. Clairement on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\bar{H} \subset H + \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}. \tag{4.2.3.6}$$

Soit maintenant $\Psi_2 \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}}$. D'après (4.2.3.2), nous savons que l'application réelle Ψ_1 définie sur \mathcal{G}' par la relation

$$\Psi_1(\bar{g}) = (2M)^{d/2} M^{-1} \Psi_2(g), \quad g \in \mathcal{G} \quad (4.2.3.7)$$

est un élément de $\mathbb{K}_{\mathcal{G}'}$. D'après (4.2.3.7), (4.2.3.6), et (4.2.3.3), on a, presque sûrement à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} & \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h_n, z)}{\sqrt{2nh_n \log(1/h_n)}} - \Psi_2 \right\|_{\mathcal{G}} \\ &= \inf_{z \in H + \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}} \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{G_n(g, h_n, z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M})}{\sqrt{2nf(z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}) h_n \log(1/h_n)}} - \Psi_2(g) \right| \\ &= \frac{M}{(2M)^{d/2}} \inf_{z \in H + \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}} \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{G_n\left(g, (2M)^d \tilde{h}_n, z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}\right)}{M \sqrt{2f(z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}) n \tilde{h}_n \log(1/(2M)^d \tilde{h}_n)}} - \frac{(2M)^{d/2}}{M} \Psi_2(g) \right| \\ &\leq \frac{M}{(2M)^{d/2}} \inf_{z \in \bar{H}} \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{G_n(g, (2M)^d \tilde{h}_n, z)}{M \sqrt{2nf(z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}) \tilde{h}_n \log(1/(2M)^d \tilde{h}_n)}} - \frac{(2M)^{d/2}}{M} \Psi_2(g) \right| \\ &= \frac{M}{(2M)^{d/2}} \inf_{z \in \bar{H}} \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{G_n(\bar{g}, \tilde{h}_n, z)}{M \sqrt{2nf(z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}) \tilde{h}_n \log(1/(2M)^d \tilde{h}_n)}} - \Psi_1(\bar{g}) \right| \\ &= \frac{M}{(2M)^{d/2}} \inf_{z \in \bar{H}} \left\| \frac{G_n(\cdot, \tilde{h}_n, z)}{M \sqrt{2nf(z - \tilde{h}_n^{1/d} \vec{M}) \tilde{h}_n \log(1/(2M)^d \tilde{h}_n)}} - \Psi_1 \right\|_{\mathcal{G}'}. \end{aligned} \quad (4.2.3.8)$$

En appliquant le théorème 4.2.1 à la classe \mathcal{G}' à la suite $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ et au compact de \mathbb{R}^d d'intérieur non vide \bar{H} , et en se servant de la régularité de f sur H^α , nous concluons que le majorant dans (4.2.3.8) converge presque sûrement vers 0. Ainsi, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h_n, z)}{(2nh_n \log(1/h_n))^{1/2}} - \Psi_2 \right\|_{\mathcal{G}}. \quad (4.2.3.9)$$

En combinant (4.2.3.5) et (4.2.3.9), nous concluons que le théorème 4.2.1 est vrai lorsque \mathcal{G} vérifie (HK1), (HK2'), (HK3'), (HK4), (HK5).

Pour démontrer le théorème 4.2.3, nous allons prouver séparément la partie (i) et la partie (ii) du résultat énoncé.

4.2.4 Preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3

La preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3 sera divisée en plusieurs étapes.

Étape 1 : Subdivision de H .

Dans le but d'appliquer un lemme de "Poissonisation" (voir, plus loin, le lemme 4.2.1), nous choisissons un sous-hypercube ouvert non vide H' de H tel que :

$$P(Z_1 \in H') \leq 1/2.$$

Un tel choix est possible car H a été supposé d'intérieur non vide. Soient (a_1, \dots, a_d) les dimensions de H' . Fixons

$$0 < \delta < \min_{k=1\dots p} a_k, \tag{4.2.4.1}$$

et $0 < \epsilon < 1$.

Définition 4.2.1 (Une relation d'ordre partiel) *Pour deux vecteurs $\vec{i} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{R}^d$ et $\vec{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{R}^d$, on notera $\vec{i} \prec \vec{j}$ lorsque, pour tout $l = 1, \dots, p$ on a $i_l \leq j_l$.*

Dans tout ce chapitre, \vec{i} et \vec{j} désigneront des éléments de $(\mathbb{N} - \{0\})^d$. Par un argument de translation, nous pouvons supposer que le vecteur nul $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ est le "coin inférieur gauche" de H' , c'est à dire

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &\in H' \\ \forall z \in H', (0, \dots, 0) &\prec z. \end{aligned}$$

Posons

$$\vec{1}_d := (1, 1, \dots, 1) \text{ (d - fois).}$$

Nous divisons ensuite H' (de façon incomplète) en sous-hypercubes disjoints, notés

$$z_{\vec{i}} + h_{n,1}^{1/d} I^d, \quad \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n \quad (4.2.4.2)$$

où

$$z_{\vec{i}} := \delta \vec{1}_d + h_{n,1}^{1/d} (1 + \delta) \vec{i}, \quad \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \quad (4.2.4.3)$$

et

$$\vec{M}_n = (M_{n,1}, \dots, M_{n,d}) := \left(\left[\frac{a_1 - \delta}{(1 + \delta) h_{n,1}^{1/d}} \right], \dots, \left[\frac{a_d - \delta}{(1 + \delta) h_{n,1}^{1/d}} \right] \right). \quad (4.2.4.4)$$

Remarquons que, comme $h_{n,1} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et en vertu de (4.2.4.1), la subdivision précédente comporte au moins un élément pour tout entier n suffisamment grand, c'est à dire $\vec{1}_d \prec \vec{M}_n$. Puis chaque hypercube $z_{\vec{i}} + h_{n,1}^{1/d} I^d$ est lui même divisé en sous-hypercubes disjoints, notés

$$z_{\vec{i},\vec{j}} + h_{n,2}^{1/d} I^d,$$

avec

$$z_{\vec{i},\vec{j}} := z_{\vec{i}} - \frac{\delta}{d} h_{n,2}^{1/d} \vec{j}, \quad \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n, \quad (4.2.4.5)$$

avec

$$\vec{m}_n = (m_{n,1}, \dots, m_{n,d}) := \left[\left(\frac{d h_{n,1}}{h_{n,2}} \right)^{1/d} \right] \vec{1}_d. \quad (4.2.4.6)$$

D'après l'hypothèse (HV4), on sait que, pour tout entier n suffisamment grand, les subdivisions décrites précédemment comportent au moins un élément, c'est à dire $\vec{1}_d \prec \vec{m}_n$. Remarquons que, lorsque $n \rightarrow \infty$, les

quantités suivantes vérifient

$$M_n := \prod_{k=1}^d M_{n,k} = h_{n,1}^{(-1+o(1))} = h_{n,2}^{-d_1+o(1)}, \quad (4.2.4.7)$$

$$m_n := \prod_{k=1}^d m_{n,k} = h_{n,2}^{d_1-1+o(1)}. \quad (4.2.4.8)$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la subdivision de H' vérifie la propriété suivante.

$$(\vec{i}, \vec{j}) \neq (\vec{i}', \vec{j}') \Rightarrow \{z_{\vec{i}, \vec{j}} + h_{n,2}^{1/d} I^d\} \cap \{z_{\vec{i}', \vec{j}'} + h_{n,2}^{1/d} I^d\} = \emptyset, \quad (4.2.4.9)$$

$$\vec{i} \neq \vec{i}' \Rightarrow \{z_{\vec{i}} + h_{n,1}^{1/d} I^d\} \cap \{z_{\vec{i}'} + h_{n,1}^{1/d} I^d\} = \emptyset. \quad (4.2.4.10)$$

Enfin, pour tout $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n$, $\vec{1}_d \prec \vec{i}' \prec \vec{M}_n$, $\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n$ on a

$$\{z_{\vec{i}, \vec{j}} + h_{n,2}^{1/d} I^d\} \cap \{z_{\vec{i}'} + h_{n,1}^{1/d} I^d\} = \emptyset. \quad (4.2.4.11)$$

Choisissons maintenant $(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}'$ quelconque. Posons, pour $n \geq 1$ entier, pour $h > 0$ et $z \in H$,

$$L_{n,\ell}(\cdot, z) := \frac{G_{n,\ell}(\cdot, z)}{b_{n,\ell} f(z)^{1/2}} = \frac{1}{b_{n,\ell} f(z)^{1/2}} \sum_{k=1}^n K\left(\frac{Z_k - z}{h_{n,\ell}^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_k - z}{h_{n,\ell}^{1/d}}\right)\right). \quad (4.2.4.12)$$

Rappelons que Ψ_1^ϵ et Ψ_2^ϵ sont les boules de $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$ -rayon ϵ et de centres respectifs Ψ_1 et Ψ_2 (voir (4.1.3.3)). On définit ensuite les événements suivants.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n,\vec{i}} &= \tilde{E}_{n,\vec{i}}(\Psi_1, \Psi_2, \epsilon, \delta) \\ &:= \left\{ L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) \in \Psi_1^\epsilon \right\} \cap \bigcup_{\vec{j}=1}^{\vec{m}_n} \left\{ L_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}}) \in \Psi_2^\epsilon \right\}, \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \end{aligned} \quad (4.2.4.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n &= \tilde{E}_n(\Psi_1, \Psi_2, \epsilon, \delta) \\ &:= \bigcup_{\vec{i}=1}^{\vec{M}_n} \tilde{E}_{n,\vec{i}}. \end{aligned} \quad (4.2.4.14)$$

Étape 2 : Contrôle de $\mathbb{P}(E_n)$ par "Poissonisation"

Pour n fixé, soit η_n une variable de Poisson d'espérance n , indépendante de la suite $(Z_i)_{i \geq 1}$. On considère alors la version "Poissonisée" du processus empirique

$$\Pi_{n,\ell}(K, z) := \sum_{i=1}^{\eta_n} K\left(\frac{Z_i - z}{h_{n,\ell}^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h_{n,\ell}^{1/d}}\right)\right), \quad K \in \mathcal{G}, \quad z \in H, \quad (4.2.4.15)$$

et plus généralement on définit

$$\Pi_n(g) := \sum_{i=1}^{\eta_n} g(Z_i) - \mathbb{E}(g(Z_i)), \quad g \in \mathcal{G}, \quad (4.2.4.16)$$

avec par convention

$$\sum_{\emptyset} := 0.$$

Définissons maintenant les événements suivants.

$$\begin{aligned} E_{n,\vec{i}} &= E_{n,\vec{i}}(\Psi_1, \Psi_2, \delta, \epsilon) \\ &:= \left\{ \frac{\Pi_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{f(z_{\vec{i}})^{1/2} b_{n,1}} \in \Psi_1^\epsilon \right\} \cap \bigcup_{\vec{j}=1}^{\vec{m}_n} \left\{ \frac{\Pi_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}})}{f(z_{\vec{i},\vec{j}})^{1/2} b_{n,2}} \in \Psi_2^\epsilon \right\}, \quad \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \end{aligned} \quad (4.2.4.17)$$

$$\begin{aligned} E_n &= E_n(\Psi_1, \Psi_2, \delta, \epsilon) \\ &:= \bigcup_{\vec{i}=1}^{\vec{M}_n} E_{n,\vec{i}}. \end{aligned} \quad (4.2.4.18)$$

Nous allons nous servir du lemme de Poissonisation suivant.

Lemme 4.2.1 (Poissonisation) *Soient $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$ des classes de fonctions de \mathbb{R}^d et soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un Borélien tel que*

$$\forall 1 \leq i \leq p, \quad \forall f \in \mathcal{F}_i, \quad \forall x \notin A, \quad f(x) = 0,$$

$$\mathbb{P}(Z_1 \in A) \leq 1/2.$$

Soit B un événement mesurable pour le p -uplet de processus suivant :

$$\left((\Pi_n(g_1))_{g_1 \in \mathcal{F}_1}, \dots, (\Pi_n(g_p))_{g_p \in \mathcal{F}_p} \right).$$

Alors on a

$$\mathbb{P}(B \mid \eta_n = n) \leq 2\mathbb{P}(B).$$

Preuve : Notons

$$\eta'_n = \sum_{i=1}^{\eta_n} 1_A(Z_i), \quad \eta''_n = \sum_{i=1}^{\eta_n} (1 - 1_A(Z_i)).$$

Ces deux variables suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs np et $n(1-p)$, où $p := P(Z_1 \in A)$. De plus, presque sûrement, $\eta'_n + \eta''_n = \eta_n$. On a alors

$$\mathbb{P}(B \mid \eta_n = n) = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}((B \cap \{\eta'_n = n - k\}) \cap \{\eta''_n = k\})}{\mathbb{P}(\eta_n = n)}$$

Par indépendance (voir le lemme 4.2.3 plus loin), il vient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \mid \eta_n) &= \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap \{\eta'_n = n - k\})\mathbb{P}(\eta''_n = k)}{\mathbb{P}(\eta_n = n)} \\ &\leq \frac{\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap \{\eta'_n = n - k\}) \right) \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(\eta''_n = k)}{\mathbb{P}(\eta_n = n)}. \end{aligned}$$

Une étude de suite appliquée conjointement à la formule de Stirling montre que

$$\max_{k \leq n} \mathbb{P}(\eta''_n = k) / \mathbb{P}(\eta_n = n) \leq 2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B \mid \eta_n = n) &\leq 2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap \eta'_n = n - k) \\ &\leq 2\mathbb{P}(B). \end{aligned}$$

Nous avons prouvé le lemme 4.2.1. \square

Remarquons maintenant que, d'après l'hypothèse (HK3), on a, pour tout $K \in \mathcal{G}$, pour tout entier $n \geq 1$, et pour tous $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n$, $\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n$,

$$\begin{aligned} \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}}}{h_{n,1}^{1/d}}\right)\right) &\subset z_{\vec{i}} + h_{n,1}^{1/d} I^d, \\ \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i},\vec{j}}}{h_{n,2}^{1/d}}\right)\right) &\subset z_{\vec{i},\vec{j}} + h_{n,2}^{1/d} I^d. \end{aligned}$$

Ici $\text{supp}(f) := \{f \neq 0\}$ et $I^d := [0, 1]^d$. De plus

$$\bigcup_{\vec{i}=1}^{\vec{M}_n} \left(\left\{ z_{\vec{i}} + h_{n,1}^{1/d} I^d \right\} \cup \bigcup_{\vec{j}=1}^{\vec{m}_n} \left\{ z_{\vec{i},\vec{j}} + h_{n,2}^{1/d} I^d \right\} \right) \subset H',$$

et $\mathbb{P}(H') \leq 1/2$. Nous pouvons donc appliquer le lemme de Poissonisation 4.2.1 et obtenir la majoration suivante

$$\mathbb{P}(\widetilde{E}_n^c) \leq 2\mathbb{P}(E_n^c), \quad n \geq 1. \quad (4.2.4.19)$$

Ici, pour un événement A , on note A^c l'événement complémentaire de A .

Étape 3 : Un principe de grandes déviations

Pour contrôler \widetilde{E}_n , nous allons utiliser un principe de grandes déviations uniforme dû à Mason. La fonctionnelle J apparaissant dans la proposition suivante est l'énergie gaussienne associée au processus $W_{\mathcal{G}}$. Pour plus de détails sur J , nous renvoyons à la définition 4.1.2. Rappelons que \mathcal{T}_0 est défini dans la remarque 4.1.4.

Proposition 4.2.1 (*Mason, 2003*) *Considérons le tableau triangulaire*

$$\left(\frac{\Pi_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n,1} f(z_{\vec{i}})^{1/2}} \right)_{n \geq 1, \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n}.$$

Considérons la topologie induite par la norme uniforme sur $\mathcal{B}(\mathcal{G})$. Sous les hypothèses du théorème 4.2.3, on a

$$\forall O \in \mathcal{T}_0 \text{ ouvert} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \frac{1}{\log(1/h_{n,1})} \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{\Pi_n(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n,1} f(z_i)^{1/2}} \in O \right) \right) \geq -J(O),$$

$$\forall F \in \mathcal{T}_0 \text{ fermé} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \frac{1}{\log(1/h_{n,1})} \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{\Pi_n(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n,1} f(z_i)^{1/2}} \in F \right) \right) \leq -J(F).$$

Ce principe de grandes déviations uniforme est vrai pour le tableau triangulaire

$$\left(b_{n,2}^{-1} f(z_{\vec{i},\vec{j}})^{-1/2} \Pi_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}) \right)_{n \geq 1, \vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n},$$

en remplaçant $\log(1/h_{n,1})$ par $\log(1/h_{n,2})$.

Preuve : Voir [77]. \square

Un résultat analytique sur \mathbb{K}

Rappelons que \mathbb{K} est caractérisé par (4.1.2.3). Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.2 *Supposons que \mathcal{G} vérifie (HK2). Soit $\Psi = \Psi_{f_1} \in \mathbb{K}$ telle que*

$$J(\Psi) = \int_{\mathbb{R}^d} f_1^2(z) dz \leq 1,$$

et soit $0 < \epsilon < 1$. Alors

$$J(\Psi^\epsilon) \leq (1 - \epsilon)^2 J(\Psi). \quad (4.2.4.20)$$

Preuve : En remarquant que $f_2 := f_1(1 - \epsilon)$ vérifie $J(\Psi_{f_2}) = (1 - \epsilon)^2 J(\Psi_{f_1})$, il suffit de montrer que $\|\psi_{f_1} - \psi_{f_2}\|_{\mathcal{G}} < \epsilon$. Cela vient du fait que, sous (HK2), pour toute fonction $K \in \mathcal{G}$ on a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \int_{I^d} (f_1(t) - f_2(t)) K d\lambda \right| < 1 \times \epsilon.$$

Étape 4 : Preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3

Nous allons utiliser une propriété du processus de Poisson défini par (4.2.4.16). Cette propriété est une généralisation de la propriété d'indépendance des accroissements d'un processus de Poisson standard. Rappelons que, pour une fonction réelle f définie sur \mathbb{R}^d , $\text{supp}(f)$ désigne l'ensemble $\{f \neq 0\}$.

Lemme 4.2.3 [Indépendance] Soit $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$ une collection finie de classes de fonctions réelles sur \mathbb{R}^d telles que

$$\forall i \neq j, \forall (f, g) \in \mathcal{F}_i \times \mathcal{F}_j, \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset. \quad (4.2.4.21)$$

Posons $1 \leq q \leq N$, et pour un entier $n \geq 1$

$$(\Pi_q(f))_{f \in \mathcal{F}_q} := \sum_{i=1}^{\eta_n} f(Z_i) - \mathbb{E}(f(Z_i)).$$

Alors les $(\Pi_q)_{q=1..N}$ sont mutuellement indépendants dans le sens suivant. Pour $q \leq N$, soit \mathcal{T}_q la tribu de $\mathcal{B}(\mathcal{F}_q)$ engendrée par les coordonnées de Π_q . Alors pour tous $A_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, A_q \in \mathcal{T}_q$ on a

$$\mathbb{P}\left(\Pi_1(\cdot) \in A_1, \dots, \Pi_q(\cdot) \in A_q\right) = \mathbb{P}\left(\Pi_1(\cdot) \in A_1\right) \times \dots \times \mathbb{P}\left(\Pi_q(\cdot) \in A_q\right).$$

Preuve : Il suffit de montrer l'indépendance des projections coordonnées. Choisissons arbitrairement un jeu de fonctions $f_{i,q}$, $q = 1 \dots N$, $i = 1 \dots n_q$ telle que $\forall 1 \leq q \leq N$, $f_{i,q} \in \mathcal{F}_q$. Nous devons montrer que

$$\left\{ (\Pi_1(f_{i,1}))_{i \leq n_1}; \dots; (\Pi_N(f_{i,N}))_{i \leq n_N} \right\}$$

forme N "blocs" mutuellement indépendants. Notons ϕ la fonction caractéristique de ce vecteur aléatoire, et, pour $1 \leq q \leq N$ fixé, notons ϕ_q la fonction caractéristique du vecteur aléatoire $(\Pi_q(f_{i,q}))_{i \leq n_q}$. Il nous suffit donc de montrer que, pour tous $(t_{1,1}, \dots, t_{n_1,1}, \dots, t_{1,N}, \dots, t_{n_N,N}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_N}$ on a

$$\phi(t_{1,1}, \dots, t_{n_1,1}, \dots, t_{1,N}, \dots, t_{n_N,N}) = \prod_{q=1}^N \phi_q(t_{1,q}, \dots, t_{n_q,q}). \quad (4.2.4.22)$$

Soit $k \geq 1$ un entier. Comme les $(Z_i)_{i \geq 1}$ sont indépendants de η_n , il vient que, conditionnellement à $\eta_n = k$, le vecteur aléatoire

$$\left(\prod_1(f_{i,q}) \right)_{q \leq N, i \leq n_q}$$

suit la loi d'une somme de k vecteurs aléatoires i.i.d de loi commune celle de

$$(f_{i,q}(Z_1))_{q \leq N, i \leq n_q}.$$

Notons ψ la fonction caractéristique de ce vecteur aléatoire, et pour $1 \leq q \leq N$, notons ψ_q la fonction caractéristique du vecteur $(f_{i,q}(Z_1))_{i \leq n_q}$. Il vient, après application de la Formule de Bayes, en conditionnant par rapport aux valeurs de η_n ,

$$\phi(\cdot) = \exp(n(\psi(\cdot) - 1)),$$

$$\forall 1 \leq q \leq N, \phi_q = \exp(n(\psi_q - 1)).$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$\forall \vec{t} = (t_{1,1}, \dots, t_{n_N, N}), \psi(\vec{t}) - 1 = \sum_{q=1}^N (\psi_q(\vec{t}_q) - 1),$$

où $\vec{t}_q = (t_{1,q}, \dots, t_{n_q, q})$, $q = 1, \dots, N$. Notons, pour $1 \leq q \leq N$ fixé,

$$\tilde{A}_q = \bigcup_{i=1}^{n_q} \text{supp}(f_{i,q}),$$

$$\tilde{A}_{N+1} = \mathbb{R}^d - \left(\bigcup_{q=1}^N \tilde{A}_q \right).$$

Posons aussi $p_q = \mathbb{P}(Z_1 \in A_q)$, $1 \leq q \leq N + 1$. Pour tout $1 \leq q \leq N$ on a donc

$$\psi_q(\vec{t}_q) = \mathbb{E}(e^{i \langle \vec{f}_q(Z_1), \vec{t}_q \rangle} \mid \{Z_1 \in \tilde{A}_q\}) p_q + (1 - p_q).$$

En effet $\vec{f}_q(Z_1) := (f_{1,q}(Z_1), \dots, f_{n_q,q}(Z_1)) = (0, \dots, 0)$ si $Z_1 \notin \tilde{A}_q$. De la même façon, en notant $\vec{f} = (f_{1,1}, \dots, f_{n_N,N})$ on calcule :

$$\psi(\vec{t}) = \sum_{q=1}^N \mathbb{E}(e^{i\langle \vec{f}(Z_1), \vec{t} \rangle} \mid Z_1 \in A_q) p_q + \mathbb{P}(Z_1 \in \tilde{A}_{N+1}).$$

Si $Z_1 \in A_q$ on a $\langle \vec{f}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{f}_q, \vec{t}_q \rangle$ par définition des A_q . De plus, par hypothèse (voir (4.2.4.21)), on a $\mathbb{P}(Z_1 \in A_{N+1}) = 1 - \sum_{q=1}^N p_q$. On a donc

$$\begin{aligned} \psi(\vec{t}) &= \sum_{q=1}^N \mathbb{E}(e^{i\langle \vec{f}_q(Z_1), \vec{t}_q \rangle} \mid Z_1 \in A_q) p_q + \left(1 - \sum_{q=1}^N p_q\right) \\ &= 1 + \sum_{q=1}^N (\psi_q(\vec{t}_q) - 1). \end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat souhaité, \vec{t} étant arbitraire. \square

Notons de façon générale A^c comme le complémentaire de l'événement A . Rappelons que $E_n(\Psi_1, \Psi_2, \delta, \epsilon)$ est définie par (4.2.4.18) et que $\tilde{E}_n(\Psi_1, \Psi_2, \delta, \epsilon)$ est défini par (4.2.4.14). Les trois étapes précédentes nous permettent d'établir le lemme suivant.

Lemme 4.2.4 *Sous les hypothèses du théorème 4.2.3, pour tout choix de $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ et $(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}'$ on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} \tilde{E}_n^c(\Psi_1, \Psi_2, \delta, \epsilon)\right) = 0. \quad (4.2.4.23)$$

Preuve : En partant de la majoration (4.2.4.19), on a

$$\mathbb{P}(\tilde{E}_n^c) \leq 2\mathbb{P}(E_n^c), \quad n \geq 1.$$

Or, en se rappelant (4.2.4.17), on sait que

$$\mathbb{P}(E_n^c) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\vec{I}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} E_{n,\vec{i}}^c\right).$$

Remarquons que, d'après (4.2.4.9), (4.2.4.10), et (4.2.4.11), pour tout $K \in \mathcal{G}$ et pour tous $\vec{1}_d \prec \vec{i}, \vec{i}' \prec \vec{M}_n$, $\vec{1}_d \prec \vec{j}, \vec{j}' \prec \vec{m}_n$, on a

$$(\vec{i}, \vec{j}) \neq (\vec{i}', \vec{j}') \Rightarrow \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}, \vec{j}}}{h_{n,2}^{1/d}}\right)\right) \cap \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}', \vec{j}'}}{h_{n,2}^{1/d}}\right)\right) = \emptyset, \quad (4.2.4.24)$$

$$\vec{i} \neq \vec{i}' \Rightarrow \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}}}{h_{n,1}^{1/d}}\right)\right) \cap \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}'}}{h_{n,1}^{1/d}}\right)\right) = \emptyset, \quad (4.2.4.25)$$

et

$$\forall \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n, \vec{i}, \vec{i}' \prec \vec{M}_n, \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}, \vec{j}}}{h_{n,2}^{1/d}}\right)\right) \cap \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}'}}{h_{n,1}^{1/d}}\right)\right) = \emptyset. \quad (4.2.4.26)$$

Ces propriétés sont des conséquences du fait que pour tout $K \in \mathcal{G}$ on a $\text{supp}(K) \subset [0, 1]^d$, d'après (HK3). Ainsi, (4.2.4.25) combiné au lemme 4.2.3 nous assure que les événements $E_{n, \vec{i}}$, $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n$ sont mutuellement indépendants. Il s'ensuit que, comme $1 - u \leq \exp(-u)$, $u > 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} E_{n, \vec{i}}^c\right) &= \prod_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \left(1 - \mathbb{P}(E_{n, \vec{i}})\right) \\ &\leq \exp\left(-\sum_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n, \vec{i}})\right) \\ &\leq \exp\left(-M_n \min_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n, \vec{i}})\right). \end{aligned} \quad (4.2.4.27)$$

De plus, (4.2.4.26) combiné avec le lemme 4.2.3 nous assure que

$$\mathbb{P}(E_{n, \vec{i}}) = \mathbb{P}(E_{n, \vec{i}, 1}) \times \mathbb{P}(E_{n, \vec{i}, 2}),$$

où ici

$$\begin{aligned} E_{n, \vec{i}, 1} &:= \left\{ f(z_{\vec{i}})^{-1/2} b_{n,1}^{-1} \Pi_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) \in \Psi_1^\epsilon \right\}, \\ E_{n, \vec{i}, 2} &:= \bigcup_{\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \left\{ f(z_{\vec{i}, \vec{j}})^{-1/2} b_{n,2}^{-1} \Pi_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}}) \in \Psi_2^\epsilon \right\}. \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$E_{n,\vec{i},\vec{j}} := \left\{ f(z_{\vec{i},\vec{j}})^{-1/2} b_{n,2}^{-1} \Pi_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}) \in \Psi_2^\epsilon \right\}. \quad (4.2.4.28)$$

Rappelons ici que $b_{n,\ell} := (2nh_{n,\ell} \log(1/h_{n,\ell}))^{1/2}$, $\ell = 1, 2$. D'après (4.2.4.24) combinée avec le lemme 4.2.3, nous savons que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},2}) &= 1 - \prod_{\vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} (1 - \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},\vec{j}})) \\ &\geq 1 - \exp\left(- \sum_{\vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},\vec{j}})\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \min\left(1, m_n \times \min_{\vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},\vec{j}})\right). \end{aligned}$$

L'inégalité précédente se déduit de l'inégalité classique $1 - \exp(-a) \geq 1/2 \min(1, a)$ pour tout $a \geq 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} M_n \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i}}) &\geq M_n \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},1}) \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},2}) \\ &\geq M_n \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},1}) \times \frac{1}{2} \min\left\{1, m_n \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \min_{\vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},\vec{j}})\right\} \\ &=: \frac{1}{2} \min\left\{M_n a_n, M_n m_n a_n a'_n\right\}, \quad (4.2.4.29) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &:= \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},1}), \\ a'_n &:= \min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \min_{\vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i},\vec{j}}). \end{aligned}$$

Comme $J(\Psi_1) \leq 1$ et $d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2) \leq 1$ (voir la définition de \mathbb{K}' dans le §4.2.1), il existe $\epsilon' > 0$ suffisamment petit pour avoir

$$\max\left\{d_1 \left((1-\epsilon)^2 J(\Psi_1) + 2\epsilon' - 1\right); (1-\epsilon)^2 \left(d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2)\right) + 2\epsilon' - 1\right\} < -\epsilon'. \quad (4.2.4.30)$$

Nous appliquons ensuite les deux principes de grandes déviations de la proposition 4.2.1 aux boules ouvertes respectives Ψ_1^ϵ et Ψ_2^ϵ (rappelons

que ces deux ensembles sont définis par (4.1.3.3)). Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand on a

$$a_n \geq \exp \left(- (J(\Psi_1^\epsilon) + \epsilon') \log(1/h_{n,1}) \right),$$

$$a'_n \geq \exp \left(- (J(\Psi_2^\epsilon) + \epsilon') \log(1/h_{n,2}) \right).$$

De plus, au vu du lemme 4.2.2 et de (4.2.4.29), il vient que, pour tout n suffisamment grand,

$$M_n \min_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i}}) \geq \frac{1}{2} \min \left\{ M_n h_{n,1}^{(1-\epsilon)^2 J(\Psi_1) + \epsilon'}; M_n m_n h_{n,1}^{(1-\epsilon)^2 J(\Psi_1) + \epsilon'} h_{n,2}^{(1-\epsilon)^2 J(\Psi_2) + \epsilon'} \right\}.$$

De plus, en se rappelant (4.2.4.7) et (4.2.4.8) il vient que, pour tout entier n suffisamment grand,

$$M_n \min_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i}}) \geq \frac{1}{2} \min \left\{ h_{n,2}^{d_1 \left((1-\epsilon)^2 J(\Psi_1) + 2\epsilon' - 1 \right)}; h_{n,2}^{(1-\epsilon)^2 \left(d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2) \right) + 2\epsilon' - 1} \right\}.$$

On a ainsi, grâce au choix de $\epsilon' > 0$ par (4.2.4.30), pour tout n suffisamment grand

$$M_n \min_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i}}) \geq \frac{1}{2} h_{n,2}^{-\epsilon'}.$$

En revenant au début du calcul (4.2.4.27), il vient que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n^c) &\leq \exp \left(- M_n \min_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n} \mathbb{P}(E_{n,\vec{i}}) \right) \\ &\leq \exp \left(- h_{n,2}^{-\epsilon'} \right). \end{aligned}$$

En se rappelant (HV3) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,2}^{-\epsilon'} / \log n = \infty.$$

Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(E_n^c))_{n \geq 1}$ est sommable, et donc $(\mathbb{P}(\tilde{E}_n^c))_{n \geq 1}$ est aussi sommable, d'après (4.2.4.19). La preuve du lemme 4.2.4 se conclut en appliquant le lemme de Borel -Cantelli. \square

Pour conclure la preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3, il nous reste à contrôler la distance entre $L_{n,1}(\cdot, z_i^*)$ et $L_{n,1}(\cdot, z_{i,j}^*)$, uniformément en $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n$, $\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n$. La proposition suivante jouera un rôle fondamental dans cette démonstration, ainsi que dans de nombreuses démonstrations qui suivront. Pour une fonction réelle g sur \mathbb{R}^d , on pose

$$T_n(g) = \sum_{i=1}^n g(Z_i) - \mathbb{E}(g(Z_i)), \quad g \in \mathcal{F}. \quad (4.2.4.31)$$

Rappelons que $\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F})$ est défini dans la définition 4.1.1.

Proposition 4.2.2 *Soit \mathcal{F} une classe de fonctions réelles boréliennes sur \mathbb{R}^d telle que*

$$\sup_{g \in \mathcal{F}} \text{Var}(g(Z_1)) \leq \tau^2 h,$$

avec $\tau > 0$, et telle qu'il existe trois constantes strictement positives M, C et v vérifiant

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) \leq C\epsilon^{-v},$$

$$\sup_{g \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |g(z)| \leq M.$$

Soit $\rho > 0$ quelconque. Il existe une constante universelle $A_2 > 0$ et un paramètre $D_1(v) > 0$ ne dépendant que de v tels que, pour tout $n \geq 1$ entier et pour tout $h > 0$ vérifiant les deux conditions

$$K_1 := \max \left\{ \frac{4M\sqrt{v+1}}{\tau}, \frac{M\rho}{\tau^2} \right\} \leq \left(\frac{nh}{\log(1/h)} \right)^{1/2}, \quad (4.2.4.32)$$

$$K_2 := \min \left\{ \frac{1}{\tau^2 M}, \tau^2 \right\} \geq h, \quad (4.2.4.33)$$

on a

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq m \leq n} \|T_m(\cdot)\|_{\mathcal{F}} \geq (\tau + \rho) D_1(nh \log(1/h))^{1/2} \right) \leq 4 \exp \left(-A_2 \left(\frac{\rho}{\tau} \right)^2 \log(1/h) \right).$$

Preuve : La preuve de cette proposition s'inspire grandement des travaux de U.Einmahl et Mason, et est basée sur deux résultats, l'un obtenu par Talagrand [97] et l'autre obtenu par U.Einmahl et Mason [45]. Par la suite, $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$ désigne échantillon (de Rademacher) suivant une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, indépendant des $(Z_i)_{i \geq 1}$.

Théorème 4.2.4 (Talagrand, 1994) *Soit \mathcal{F} une classe de fonctions réelles boréliennes sur \mathbb{R}^d telle que, pour un certain $M > 0$, on a*

$$\sup_{g \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |g(z)| \leq M.$$

Alors il existe des constantes universelles strictement positives A_1 et A_2 telles que, en supposant que tous les ensembles apparaissant ci dessus sont mesurables,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq m \leq n} \|T_m\|_{\mathcal{F}} \geq A_1 \left(t + \mathbb{E} \left(\sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(Z_i) \right| \right) \right) \right) \\ & \leq 2 \left(\exp(-A_2 t^2 / n \sigma_{\mathcal{F}}^2) + \exp(-A_2 t / M) \right), \end{aligned}$$

où

$$\sigma_{\mathcal{F}}^2 := \sup_{g \in \mathcal{F}} \text{Var } g(Z_1).$$

Théorème 4.2.5 (Einmahl, Mason) *Soit \mathcal{F} une classe de fonctions réelles boréliennes sur \mathbb{R}^d , et soit G une enveloppe mesurable de \mathcal{F} , c'est à dire une fonction vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(z)| \leq G(z).$$

On suppose que les conditions suivante sont vérifiées pour certaines

constantes $\beta, v, C > 1, \sigma \leq 1/(8C)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(G^2(Z_1)\right) &\leq \beta^2, \\ \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) &\leq C\epsilon^{-v}, \quad 0 < \epsilon < 1, \\ \sigma_{\mathcal{F}}^2 := \sup_{g \in \mathcal{F}} \mathbb{E}\left(g^2(Z_1)\right) &\leq \sigma^2, \\ \sup_{g \in \mathcal{F}} \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |g(z)| &\leq \frac{1}{2\sqrt{v+1}} (n\sigma^2 / \log(\beta \vee 1/\sigma))^{1/2}.\end{aligned}$$

Alors il existe une constante universelle $A_3 > 0$ telle que, si

$$\sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(Z_i) \right|$$

est une variable aléatoire Borélienne, alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(Z_i) \right| \right) \leq A_3 (vn\sigma^2 \log(\beta \vee 1/\sigma))^{1/2}.$$

Dans la preuve de la proposition 4.2.2, nous utiliserons les notations introduites dans les deux théorèmes précédents. Remarquons que si $\left(\frac{nh}{\log(1/h)}\right)^{1/2} > K_1$, $h \leq K_2 \leq 1/M\tau^2$, et $h \leq K_2 \leq \tau^2$, alors les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\log(M \vee 1/\tau^2 h) = \log(1/\tau^2 h) \leq 2 \log(1/h), \quad (4.2.4.34)$$

$$2M \leq \frac{1}{2\sqrt{v+1}} \left(\frac{n\tau^2 h}{\log(1/h)}\right)^{1/2}. \quad (4.2.4.35)$$

En combinant (4.2.4.34) et (4.2.4.35), il vient que

$$2M \leq \sqrt{\frac{1}{2(v+1)}} \left(\frac{n\tau^2 h}{\log(M \vee 1/\tau^2 h)}\right)^{1/2}.$$

Ainsi, en choisissant $\beta = M$ et $\sigma = \tau^2 h$ dans le théorème 4.2.5, on a

$$M \leq \frac{1}{\sqrt{2v+1}} \sqrt{\frac{n\sigma^2}{\log(\beta \vee 1/\sigma)}}.$$

Ainsi, en appliquant le théorème 4.2.5, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(Z_i) \right| \right) &\leq A_3 \tau (vnh \log(M \vee 1/\tau^2 h))^{1/2} \\ &= A_3 v \tau (nh \log(1/\tau^2 h))^{1/2}. \end{aligned}$$

Le dernière égalité vient de l'hypothèse (4.2.4.34). En appliquant le théorème 4.2.4 et en choisissant

$$D_1 := \max(A_1, A_1 A_3 \sqrt{v}),$$

on a pour tout $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq m \leq n} \|T_m(\cdot)\|_{\mathcal{F}} \geq (\tau + \rho) D_1 (nh \log(1/h))^{1/2}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq m \leq n} \|T_m(\cdot)\|_{\mathcal{F}} \geq A_1 \left(A_3 \tau (vnh \log(M \vee 1/(\tau^2 h)))^{1/2} + \rho (nh \log(1/h))^{1/2}\right)\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq m \leq n} \|T_m(\cdot)\|_{\mathcal{F}} \geq A_1 \left(\mathbb{E}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(Z_i) \right| \right) + \rho (nh \log(1/h))^{1/2}\right)\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-A_2 \frac{\rho^2 nh \log(1/h)}{nh \tau^2}\right) + 2 \exp\left(-A_2 \frac{\rho (nh \log(1/h))^{1/2}}{M}\right) \end{aligned} \tag{4.2.4.36}$$

Or, en supposant que $M\rho/\tau^2 \leq K_1 \leq (nh/\log(1/h))^{1/2}$, alors le deuxième terme de l'expression (4.2.4.36) est inférieur au premier terme, et ainsi

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq m \leq n} \|T_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}} \geq (\tau + \rho) A_1 (nh \log(1/h))^{1/2}\right) \leq 4 \exp\left(-A_2 \frac{\rho^2 \log(1/h)}{\tau^2}\right),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 4.2.2. \square

Étape 5 : Contrôle d'oscillations

D'après l'hypothèse (HK1), nous savons qu'il existe un "module de continuité" $A(\delta)$, $\delta > 0$, croissant en δ , et vérifiant ($\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ désignant

la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^d)

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = 0, \\ & \sup_{K \in \mathcal{G}, \|u\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \int_{\mathbb{R}^d} (K(z+u) - K(z))^2 dz \leq A(\delta)^2, \quad \delta > 0 \\ & \sup_{1/(1+\delta) \leq \lambda \leq (1+\delta)} \sup_{K \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^d} (K(\lambda z) - K(z))^2 dz \leq A(\delta)^2, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (4.2.4.37)$$

Rappelons que $L_{n,1}$ est défini par (4.2.4.12), que $D_1(\cdot)$ est un paramètre apparaissant dans la proposition (4.2.2), et que $H^{\alpha/2}$ est la couronne autour de H de rayon $\alpha/2$ pour la distance euclidienne (voir (4.2.2.2)).

Proposition 4.2.3 *Sous les hypothèses du théorème 4.2.3 on a presque sûrement*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H^{\alpha/2}, \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \|L_{n,1}(\cdot, z) - L_{n,1}(\cdot, z + sh_{n,1}^{1/d})\|_{\mathcal{G}} \leq 8D_1(2v)A(\delta).$$

Preuve : Nous appliquons la proposition 4.2.2. Posons $\tilde{n}_k = 2^k$ et

$$\tilde{N}_k := \{n_k + 1, \dots, n_{k+1}\}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$ posons

$$\mathcal{F}_k = \left\{ \frac{1}{f(z)^{1/2}} \left(g\left(\frac{\cdot - z}{h_{n,1}^{1/d}}\right) - g\left(\frac{\cdot - (z + sh_{n,1})}{h_{n,1}^{1/d}}\right) \right), \quad g \in \mathcal{G}, \quad z \in H^{\alpha/2}, \quad \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta, \quad n \in \tilde{N}_k \right\}.$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de f sur $H^{\alpha/2}$. Un raisonnement simple montre que d'après l'hypothèse (HK4), pour $0 < \epsilon < 1$, on a (voir la définition 4.1.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}_k) & \leq \left(\mathcal{N}\left(\frac{\epsilon\beta}{2}, \mathcal{F}\right) \right)^2 \\ & \leq (C^2 2^{2v} \beta^{-2v}) \epsilon^{-2v} \\ & = : C' \epsilon^{-v'}. \end{aligned} \quad (4.2.4.38)$$

Soit maintenant $g \in \mathcal{G}$, $z \in H$, $s \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta$, et $n \in \tilde{N}_k$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}
\sigma_n(g, z, s) &:= \frac{1}{f(z)} \text{Var} \left(g \left(\frac{Z_1 - z}{h_{n,1}^{1/d}} \right) - g \left(\frac{Z_1 - (z + sh_{n,1}^{1/d})}{h_{n,1}^{1/d}} \right) \right) \\
&\leq \frac{1}{f(z)} \mathbb{E} \left(\left(g \left(\frac{Z_1 - z}{h_{n,1}^{1/d}} \right) - g \left(\frac{Z_1 - (z + sh_{n,1}^{1/d})}{h_{n,1}^{1/d}} \right) \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{f(z)} \int_{\mathbb{R}} \left(g \left(\frac{y - z}{h_{n,1}^{1/d}} \right) - g \left(\frac{y - (z + sh_{n,1}^{1/d})}{h_{n,1}^{1/d}} \right) \right)^2 f(y) dy \\
&= \frac{h_{n,1}}{f(z)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(g(u) - g(u + s) \right)^2 f(z + h_{n,1}^{1/d} u) du.
\end{aligned}$$

Dans l'égalité précédente, nous avons effectué le changement de variable $u = h_{n,1}^{-1/d}(y - z)$. Supposons sans perte de généralité que $\delta \leq 1$. Comme $\text{supp}(g) \subset [0, 1]^d$ (hypothèse (HK3)), on a

$$\begin{aligned}
\sigma_n(g, z, s) &\leq A(\delta)^2 \sup_{u \in [0, 1]^d} \left| \frac{f(z + uh_{n,1}^{1/d})}{f(z)} \right| h_{n,1} \\
&\leq A(\delta)^2 \sup_{u \in [0, 1]^d} \left| \frac{f(z + uh_{n,1}^{1/d})}{f(z)} \right| 2h_{\tilde{n}_{k+1}, 1}.
\end{aligned}$$

L'inégalité précédente est due au fait que d'après (HV1), pour $k \geq 1$ entier et pour $n \in \tilde{N}_k$,

$$h_{n,1} = \frac{nh_{n,1}}{n} \leq \frac{\tilde{n}_{k+1}h_{\tilde{n}_{k+1}, 1}}{n} \leq \frac{\tilde{n}_{k+1}h_{\tilde{n}_{k+1}, 1}}{\tilde{n}_k} = 2h_{\tilde{n}_{k+1}, 1}.$$

Par régularité de f sur H^α , on a, pour tout entier n suffisamment grand

$$\sup_{u \in I^d} \left| \frac{f(z + uh_{n,1}^{1/d})}{f(z)} \right| \leq 2. \quad (4.2.4.39)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{F}_k} \text{Var}(f(Z_1)) &= \sup_{n \in \tilde{N}_k, z \in H^{\alpha/2}, g \in \mathcal{G}, \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \sigma_n(g, z, s) \\ &\leq 4A(\delta)^2 h_{\tilde{n}_{k+1},1}. \end{aligned}$$

Nous appliquons alors la proposition 4.2.2 avec $\rho = \tau = 2A(\delta)$, en se rappelant que, d'après (HV1) on a, pour tout $n \in \tilde{N}_k$,

$$2b_{n,1} \geq b_{\tilde{n}_{k+1}},$$

avec $b_{n,\ell} := (2nh_{n,\ell} \log(1/h_{n,\ell}))^{1/2}$, $\ell = 1, 2$, $n \geq 1$. Rappelons que, pour toute fonction réelle Borélienne g sur \mathbb{R}^d , on a posé

$$T_n(g) := \sum_{i=1}^n g(Z_i) - \mathbb{E}(g(Z_i)).$$

D'après les hypothèses (HV1)-(HV3) on déduit aisément que $h := h_{n,1}$ satisfait asymptotiquement les conditions (4.2.4.32) et (4.2.4.33) de la proposition 4.2.2, avec $\rho = \tau = 2A(\delta)$, $n := \tilde{n}_{k+1}$, $M := 1/\beta$, et C', v' définis par (4.2.4.38). Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{k,\delta} \\ &:= \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \tilde{N}_k} \sup_{z \in H^{\alpha/2}, s \in \mathbb{R}^d, \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \|L_{n,1}(\cdot, z) - L_{n,1}(\cdot, (z + sh_{n,1}))\|_{\mathcal{G}} \geq 8D_1(v')A(\delta)b_{n,1} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in \tilde{N}_k} \sup_{z \in H^{\alpha/2}, s \in \mathbb{R}^d, \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \|L_{n,1}(\cdot, z) - L_{n,1}(\cdot, (z + sh_{n,1}))\|_{\mathcal{G}} \geq D_1(v')(\rho + \tau)2b_{n,1} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{n \in \tilde{N}_k} \sup_{z \in H^{\alpha/2}, s \in \mathbb{R}^d, \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \|L_{n,1}(\cdot, z) - L_{n,1}(\cdot, (z + sh_{n,1}))\|_{\mathcal{G}} \geq D_1(v')(\rho + \tau)b_{\tilde{n}_{k+1}} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq n \leq \tilde{n}_{k+1}} \|T_n\|_{\mathcal{F}_k} \geq D_1(v')(\rho + \tau)(\tilde{n}_{k+1} h_{\tilde{n}_{k+1}} \log(1/h_{\tilde{n}_{k+1}}))^{1/2} \right) \\ &\leq 4 \exp \left(-A_2 \log(1/h_{n_{k+1},1}) \right). \end{aligned}$$

L'hypothèse (HV3) nous assure que $\log(1/h_{\tilde{n}_k,1})/\log k \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Nous concluons la preuve de la proposition 4.2.3 en appliquant lemme de Borel-Cantelli à la suite sommable $(\mathbb{P}_{k,\delta})_{k \geq 1}$, et en se rappelant que $v' := 2v$. \square

Fin de la preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3 : Nous rappelons que

$$\|\| \Psi_1, \Psi_2 \|\| := \max\{\|\| \Psi_1 \|\|_{\mathcal{G}}, \|\| \Psi_2 \|\|_{\mathcal{G}}\}, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{G}).$$

Tout d'abord, remarquons que l'ensemble limite \mathbb{K}' est un compact de $\mathcal{B}(\mathcal{G})^2$ muni de la norme uniforme produit $\|\| \cdot \|\|$ définie par (4.2.2.1). Soit maintenant $0 < \epsilon < 1$ arbitraire. On choisit ensuite $\delta > 0$ suffisamment petit pour avoir $8D_1(2v)A(\delta^{1/d}) < \epsilon$, où $D_1(\cdot)$ est le paramètre "universel" apparaissant dans la proposition (4.2.2). On inclut ensuite \mathbb{K}' dans une réunion finie de boules de rayon $\epsilon > 0$ pour la norme $\|\| \cdot \|\|$, que nous écrivons

$$\mathbb{K}' \subset \bigcup_{k=1}^p \widetilde{B}_\epsilon((\Psi_{1,k}, \Psi_{2,k})), \quad (4.2.4.40)$$

avec ici

$$\widetilde{B}_\epsilon((\Psi_1, \Psi_2)) := \left\{ (\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2, \|\| \Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2 \|\| < \epsilon \right\}.$$

Nous divisons ensuite l'hypercube H' de la façon décrite dans l'étape 1 (§4.2.4). Pour $1 \leq k \leq p$ fixé, nous appliquons le lemme 4.2.4 au couple de fonctions $(\Psi_{1,k}, \Psi_{2,k})$ pour en déduire que, presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\min_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \vec{j}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \max \left\{ \|\| L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) - \Psi_{1,k} \|\|_{\mathcal{G}}, \|\| L_{n,2}(\cdot, z_{\vec{j}, \vec{j}}) - \Psi_{2,k} \|\|_{\mathcal{G}} \right\} < \epsilon. \quad (4.2.4.41)$$

Ensuite, remarquons que l'on a découpé H' suffisamment finement (voir (4.2.4.5)) de façon à ce que, pour tout entier n suffisamment grand, et

pour tous $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n$, $\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n$, la relation suivante soit vérifiée

$$\exists s, \|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta^{1/d}, L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}}) = L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}} + sh_{n,1}^{1/d}).$$

Au vu de la proposition 4.2.3 nous concluons que presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\max_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \|L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) - L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}})\|_{\mathcal{G}} < 8D_1(2v)A(\delta^{1/d}) \leq \epsilon. \quad (4.2.4.42)$$

Ainsi, en combinant (4.2.4.41) et (4.2.4.42), on a presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\min_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_n, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_n} \max \left\{ \|L_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}}) - \Psi_{1,k}\|_{\mathcal{G}}, \|L_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}}) - \Psi_{2,k}\|_{\mathcal{G}} \right\} < 2\epsilon. \quad (4.2.4.43)$$

Soit maintenant $(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathbb{K}'$ quelconque. D'après (4.2.4.40), il existe $1 \leq k \leq p$ tel que

$$(\Psi_1, \Psi_2) \in \tilde{B}_\epsilon(\Psi_{1,k}, \Psi_{2,k}), \quad 1 \leq k \leq p.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité triangulaire dans (4.2.4.43), on a presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\min_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \Theta_n} \max \left\{ \|\Psi'_1 - \Psi_1\|_{\mathcal{G}}, \|\Psi'_2 - \Psi_2\|_{\mathcal{G}} \right\} < 3\epsilon. \quad (4.2.4.44)$$

La preuve de la partie (i) du théorème 4.2.3 se conclut en répétant (4.2.4.44) successivement à une suite $(\epsilon_m)_{m \geq 1}$ tendant vers 0 lorsque $m \rightarrow \infty$. \square .

4.2.5 Preuve de la partie (ii) du théorème 4.2.3

Nous fixons d'abord $\epsilon > 0$ une fois pour toutes.

Étape 1 : Discrétisation de H

Rappelons que, par hypothèse, f est strictement positive et continue sur un voisinage de H noté H^α (voir (4.2.2.2)). Soit $0 < \delta < \alpha/4$ un

paramètre que nous ajusterons en fonction de ϵ . Notons (a_1, \dots, a_d) les dimensions de H . Par commodité de notations seulement, nous supposons que H est un hypercube. Il s'agit en fait du pire des cas, car le nombre de subdivisions sera le plus important. Rappelons que la relation d'ordre \prec est définie dans la définition 4.2.1. Par un argument de translation, nous pouvons supposer que le vecteur nul $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ est le coin "inférieur gauche" de H , c'est à dire

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &\in H \\ \forall z \in H, (0, \dots, 0) &\prec z. \end{aligned}$$

Pour $\gamma > 0$ fixé on pose

$$n_k^\gamma := [(1 + \gamma)^k], \quad (4.2.5.1)$$

et

$$\begin{aligned} N_k &:= \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\} \text{ si } n_{k-1} < n_k \\ N_k &:= \emptyset \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (4.2.5.2)$$

Nous soulignons que, pour tout $\gamma > 0$, l'ensemble N_k est non vide pour tout entier k suffisamment grand. Posons ensuite ($[u]$ désignant la partie entière de u)

$$\vec{M}_k = (M_{k,1}, \dots, M_{k,d}) := \left(\left[\frac{da_1}{\delta h_{n_k,1}^{1/d}} \right] + 1, \dots, \left[\frac{da_d}{\delta h_{n_k,1}^{1/d}} \right] + 1 \right), \quad (4.2.5.3)$$

$$\vec{m}_k = (m_{k,1}, \dots, m_{k,d}) := \left(\left[\frac{h_{n_k,1}^{1/d}}{h_{n_k,2}^{1/d}} \right] + 1, \dots, \left[\frac{h_{n_k,1}^{1/d}}{h_{n_k,2}^{1/d}} \right] + 1 \right) \text{ (d - fois)}. \quad (4.2.5.4)$$

Nous rappelons que dans tout ce chapitre, \vec{i} et \vec{j} désignent des éléments de $(\mathbb{N} - \{0\})^d$, et que $\vec{1}_d := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$. Pour $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k$ on pose

$$z_{\vec{i}} = \frac{\delta}{d} h_{n_k,1}^{1/d} \vec{i}.$$

Remarquons que, d'après (HV1), pour $\gamma > 0$ fixé, et pour tout entier k suffisamment grand, on a (avec $I^d := [0, 1]^d$)

$$H \subset \bigcup_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k} z_{\vec{i}} + \delta h_{n_k,1}^{1/d} I^d \subset H^{\alpha/2}. \quad (4.2.5.5)$$

Pour $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k$ et pour $1 \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k$, on pose

$$z_{\vec{i},\vec{j}} = z_{\vec{i}} - \frac{\delta}{d} h_{n_k,2}^{1/d} \vec{j}.$$

Ainsi, pour tout $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k$, on a

$$z_{\vec{i}} + \frac{\delta}{d} h_{n_k,1}^{1/d} I^d \subset \bigcup_{\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} z_{\vec{i},\vec{j}} + \frac{\delta}{d} h_{n_k,2}^{1/d} I^d.$$

Remarquons que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$M_k := \prod_{i=1}^d M_{k,i} = h_{n_k,1}^{-1+o(1)} = h_{n_k,2}^{-d_1+o(1)}, \quad (4.2.5.6)$$

$$m_k := \prod_{i=1}^d m_{k,i} = h_{n_k,2}^{d_1-1+o(1)}. \quad (4.2.5.7)$$

Remarque 4.2.1 *A partir de maintenant, tous les résultats seront vrais pour tout choix de $\delta > 0$ dans la construction des $z_{\vec{i}}$, $\vec{1}_d \prec i \prec \vec{M}_k$, $z_{\vec{i},\vec{j}}$, $\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k$. $\delta > 0$ sera choisi en fonction de $\epsilon > 0$ à la fin de la preuve.*

On introduit ensuite une suite auxiliaire d'ensembles discrets, qui sera très proche de $(\Theta_n)_{n \geq 1}$ (au sens de $\|\cdot\|_{\mathcal{G}}$), dès lors que $\gamma > 0$ a été choisi suffisamment petit. Pour tout entier k suffisamment grand pour avoir $N_k \neq \emptyset$, pour tout entier $n \in N_k$, pour tout $K \in \mathcal{G}$, $z \in H$ et pour $\ell = 1, 2$ on pose

$$H_{n,\ell}(K, z) := \frac{1}{f(z)^{1/2}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{Z_i - z}{h_{n_k,\ell}^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h_{n_k,\ell}^{1/d}}\right)\right). \quad (4.2.5.8)$$

Remarquons que, si l'on pose, pour $n \in N_k$,

$$\rho_{n,\ell} := \frac{h_{n_k,\ell}}{h_{n,\ell}}, \quad (4.2.5.9)$$

et

$$K_\theta(\cdot) := K(\cdot/\theta^{1/d}), \quad \theta > 0, \quad K \in \mathcal{G}, \quad (4.2.5.10)$$

alors on a l'égalité suivante pour tous $K \in \mathcal{G}, z \in H, \ell = 1, 2$:

$$\begin{aligned} H_{n,\ell}(K, z) &:= f(z)^{-1/2} G_{n,\ell}(K_{\rho_{n,\ell}}, h_{n,\ell}, z) \\ &= b_{n,\ell} L_{n,\ell}(K_{\rho_{n,\ell}}, z). \end{aligned}$$

On pose ensuite, lorsque $N_k \neq \emptyset$, et pour tout entier $n \in N_k$,

$$\Theta'_n := \left\{ \left(\frac{H_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k,1}}, \frac{H_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}})}{b_{n_k,2}} \right), n \in N_k, \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k \right\},$$

où nous rappelons que

$$b_{n,\ell} := (2nh_{n,\ell} \log(1/h_{n,\ell}))^{1/2}, \quad \ell = 1, 2.$$

Lorsque k est tel que $N_k = \emptyset$, on pose $\Theta'_n := \emptyset$.

Étape 2 : Contrôle de la distance entre Θ_n et Θ'_n

Rappelons que Θ_n est défini par (4.2.0.6) et que $L_{n,\ell}, \ell = 1, 2$ est défini par (4.2.4.12). Rappelons aussi que $D(v) > 0$ est un paramètre "universel", c'est à dire ne dépendant que de v .

Lemme 4.2.5 *On a, pour tout choix de $\gamma > 0$, avec probabilité 1,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{1/(1+\gamma) \leq \theta \leq 1, z \in H^{\alpha/2}, K \in \mathcal{G}} |L_{n,\ell}(K_\theta, z) - L_{n,\ell}(K, z)| \leq 2D_1(v)A(\gamma), \quad (4.2.5.11)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H^{\alpha/2}} \|L_{n,\ell}(\cdot, z)\|_{\mathcal{G}} < 8D_1(v), \quad \ell = 1, 2. \quad (4.2.5.12)$$

Par conséquent, pour $\ell = 1, 2$ et $0 < \gamma < 1$ on a

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{(\Psi_1, \Psi_2) \in \Theta_n, (\Psi'_1, \Psi'_2) \in \Theta'_n} \left\| \Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2 \right\| \\ & \leq 16D_1(v) \left(A(2\gamma) + A(\delta) \right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (4.2.5.13)$$

Preuve.

La preuve de l'assertion (4.2.5.11) est très similaire à la preuve de la proposition 4.2.3, en considérant cette fois ci, pour $k \geq 1$ entier, les classes de fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,1} & := \left\{ f(z)^{-1/2} \left(K \left(\frac{\cdot - z}{h_{n,1}^{1/d}} \right) - K \left(\rho \frac{\cdot - z}{h_{n,1}^{1/d}} \right) \right), \right. \\ & \quad \left. 2^k < n \leq 2^{k+1}, (1 + \gamma)^{-1} \leq \rho \leq 1, K \in \mathcal{G}, z \in H^{\alpha/2} \right\}, \\ \mathcal{F}_{k,2} & := \left\{ f(z)^{-1/2} \left(K \left(\frac{\cdot - z}{h_{n,2}^{1/d}} \right) - K \left(\rho \frac{\cdot - z}{h_{n,2}^{1/d}} \right) \right), \right. \\ & \quad \left. 2^k < n \leq 2^{k+1}, (1 + \gamma)^{-1} \leq \rho \leq 1, K \in \mathcal{G}, z \in H^{\alpha/2} \right\}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver l'assertion (4.2.5.12). Posons pour tout entier $k \geq 2$, $\tilde{n}_k := 2^k$, et considérons la classe de fonctions

$$\tilde{\mathcal{F}}_{k,1} := \left\{ f(z)^{-1/2} K \left(\frac{\cdot - z}{h_{n,1}^{1/d}} \right), K \in \mathcal{G}, z \in H^{\alpha/2}, \tilde{n}_k < n \leq \tilde{n}_{k+1} \right\}.$$

En utilisant des arguments similaires à ceux de la preuve de la proposition 4.2.3, il vient que, pour tout entier k suffisamment grand on a

$$\sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}_{k,1}} \text{Var}(f(Z_1)) \leq 4h_{\tilde{n}_{k+1}}. \quad (4.2.5.14)$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de f sur $H^{\alpha/2}$. Un raisonnement simple montre que d'après l'hypothèse (HK4), pour tout $0 < \epsilon < 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}_k) &\leq \left(\mathcal{N}\left(\frac{\epsilon\beta}{2}, \mathcal{F}\right) \right)^2 \\ &\leq (C^2 2^{2v} \beta^{-2v}) \epsilon^{-2v} \\ &=: C' \epsilon^{-v'}. \end{aligned} \tag{4.2.5.15}$$

Nous rappelons que $\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F})$ est défini dans la définition 4.1.1. D'après (HV1) et (HV2), et d'après (4.2.5.14), $\tilde{\mathcal{F}}_{k,1}$ vérifie les hypothèses de la proposition 4.2.2, avec $M := 1/\beta$, $h := h_{n_k,1}$, $\tau := 2$, $\rho := 2$, pour tout entier k suffisamment grand. Nous appliquons alors la proposition 4.2.2 pour avoir, dès que k est suffisamment grand, (T_n est défini par (4.2.4.31), $G_{n,1}$ est défini par (4.2.0.7) et $L_{n,1}$ par (4.2.4.12)),

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k,\gamma} &:= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\tilde{n}_k < n \leq \tilde{n}_{k+1}} \sup_{z \in H} \|L_{n,1}\|_g \geq 8D_1(v) \right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\tilde{n}_k < n \leq \tilde{n}_{k+1}} \sup_{z \in H} \|f(z)^{-1/2} G_{n,1}(K, z)\|_g \geq 4D_1(v) \times 2b_{n,1} \right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq n \leq \tilde{n}_{k+1}} \|T_n(g)\|_{\tilde{\mathcal{F}}_{k,1}} \geq D_1(v)(\rho + \tau)b_{\tilde{n}_{k+1},1} \right) \\ &\leq 4 \exp\left(-A_2 \log(1/h_{\tilde{n}_{k+1}})\right). \end{aligned} \tag{4.2.5.16}$$

D'après (HV3), $\log(1/h_{\tilde{n}_{k+1}})/\log_2(\tilde{n}_{k+1}) \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. On en conclut aisément que $\tilde{P}_{k,\gamma}$ est sommable en k . En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, (4.2.5.12) est démontrée lorsque $\ell = 1$. La preuve pour $\ell = 2$ est identique.

Nous prouvons maintenant (4.2.5.13). Soit k un entier tel que $N_k \neq \emptyset$, soit $n \in N_k$ et soit $z \in H$. D'après la construction des z_i et des $z_{i,j}^{\vec{i}, \vec{j}}$ (voir §4.2.5), il existe $\vec{1}_d \prec \vec{i} = \vec{i}(z) \prec \vec{M}_k$ et $\vec{1}_d \prec \vec{j} = \vec{j}(z) \prec \vec{m}_k$ tels

que

$$\| z - z_{\vec{i}(z)}^{\vec{i}(z)} \|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta h_{n_k,1}^{1/d} \leq \delta h_{n,1}^{1/d}, \quad z_{\vec{i}(z)}^{\vec{i}(z)} \in H^{\alpha/2}, \quad (4.2.5.17)$$

$$\| z - z_{\vec{i}(z), \vec{j}(z)}^{\vec{i}(z), \vec{j}(z)} \|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta h_{n_k,2}^{1/d} \leq \delta h_{n,2}^{1/d}, \quad z_{\vec{i}(z), \vec{j}(z)}^{\vec{i}(z), \vec{j}(z)} \in H^{\alpha/2}. \quad (4.2.5.18)$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, nous avons, pour tout $K \in \mathcal{G}$, en se rappelant que $\rho_{n,1} := h_{n_k,1}/h_{n,1}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{H_{n,1}(K, z_{\vec{i}}^{\vec{i}})}{b_{n_{k+1},1}} - \frac{G_{n,1}(K, z)}{f(z)^{1/2} b_{n,1}} \right| &\leq \frac{b_{n,1}}{b_{n_{k+1},1}} | L_{n,1}(K_{\rho_{n,1}}, z_{\vec{i}}^{\vec{i}}) - L_{n,1}(K, z_{\vec{i}}^{\vec{i}}) | \\ &\quad + \left(1 - \frac{b_{n,1}}{b_{n_{k+1},1}} \right) | L_{n,1}(K, z_{\vec{i}}^{\vec{i}}) | \\ &\quad + | L_{n,1}(K, z_{\vec{i}}^{\vec{i}}) - L_{n,1}(K, z) |, \quad \vec{i} = \vec{i}(z) \\ &=: A_n(K, z) + B_n(K, z) + C_n(K, z). \end{aligned}$$

Nous contrôlons d'abord $A_n(K, z)$. Remarquons que, dès lors que k est suffisamment grand, on a, d'après (HV1), $(1 + 2\gamma)^{-1} \leq \rho_{n,1} \leq 1$ pour tout $n \in N_k$. Ainsi, par croissance de $b_{n,1}$ et d'après (4.2.5.11), on a, pour tout entier k suffisamment grand et pour tout $n \in N_k$,

$$\sup_{K \in \mathcal{G}, z \in H} A_n(K, z) \leq \sup_{K \in \mathcal{G}, z \in H, (1+2\gamma)^{-1} \leq \rho \leq 1} | L_{n,1}(K_\rho, z) - L_{n,1}(K, z) |. \quad (4.2.5.19)$$

Ainsi, en appliquant (4.2.5.11), il vient que, presque sûrement,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} \sup_{K \in \mathcal{G}, z \in H} | A_n(K, z) | \leq 8D_1(v)A(2\gamma). \quad (4.2.5.20)$$

Pour contrôler $B_n(K, z)$, remarquons que, pour tout k suffisamment grand et pour tout $n \in N_k$, on a

$$\left(1 - \frac{b_{n_{k-1},1}}{b_{n_k,1}} \right) \leq \left(1 - \frac{b_{n,1}}{b_{n_k,1}} \right) \leq 1. \quad (4.2.5.21)$$

De plus, en se rappelant que $n_k := \lceil (1 + \gamma)^k \rceil$, $k \geq 1$, et d'après (HV1), on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{n_{k-1},1}}{b_{n_k,1}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma}}. \quad (4.2.5.22)$$

En combinant (4.2.5.21) et (4.2.5.22), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tout $n \in N_k$, on a presque sûrement

$$\sup_{K \in \mathcal{G}, z \in H} |B_n(K, z)| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}}\right) \sup_{z \in H} \|L_{n,1}(\cdot, z)\|_{\mathcal{G}}.$$

En appliquant (4.2.5.12), il vient que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} \sup_{K \in \mathcal{G}, z \in H} |B_n(K, z)| \leq 8D_1(v) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}}\right). \quad (4.2.5.23)$$

Nous contrôlons maintenant $C_n(K, z)$. Pour cela nous rappelons la relation (4.2.5.17), et nous appliquons la proposition 4.2.3 pour en déduire que, presque sûrement,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} \sup_{K \in \mathcal{G}, z \in H} |C_n(K, z)| \leq 8D_1(v)A(\delta). \quad (4.2.5.24)$$

Puis en combinant (4.2.5.20), (4.2.5.24) et (4.2.5.23), on en déduit que presque sûrement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} \sup_{z \in H} \left\| \frac{H_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}(z)})}{b_{n_k,1}} - \frac{G_{n,1}(\cdot, z)}{f(z)^{1/2}b_{n,1}} \right\| \leq 8D_1(v) \left(A(\delta) + A(2\gamma) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}}\right) \right). \quad (4.2.5.25)$$

Par un raisonnement similaire, on montre que, presque sûrement,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} \sup_{z \in H} \left\| \frac{H_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i}(z), \vec{j}(z)})}{b_{n_k,2}} - \frac{G_{n,2}(\cdot, z)}{f(z)^{1/2}b_{n,2}} \right\| \\ \leq 8D_1(v) \left(A(\delta) + A(2\gamma) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}}\right) \right). \end{aligned} \quad (4.2.5.26)$$

En combinant (4.2.5.25) et (4.2.5.26), on voit que (4.2.5.13) est démontré. \square

Étape 3 : Étude de Θ'_n

Nous définissons le sous-ensemble suivant de $\mathcal{B}(\mathcal{G})^2$.

$$\mathcal{K} := \left\{ (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2, d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2) \leq 1 \right\}.$$

Rappelons que l'on a défini la norme suivante

$$||| \Psi_1, \Psi_2 ||| := \max \left\{ || \Psi_1 ||_{\mathcal{G}}, || \Psi_2 ||_{\mathcal{G}} \right\}, \quad \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2.$$

Nous définissons le voisinage de \mathcal{K} pour la norme $||| \cdot |||$ de la façon suivante :

$$\mathcal{K}^\epsilon := \left\{ (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2, \inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathcal{K}} ||| \Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2 ||| < \epsilon \right\}.$$

Rappelons que $D_1(v)$ est un paramètre ne dépendant que de v (v est défini dans (HK4)), dont l'existence est assurée par la proposition 4.2.3. Nous allons montrer dans un premier temps que, pour tout choix de $\gamma > 0$ suffisamment petit et pour tout choix de $\delta > 0$, on a, presque sûrement à partir d'un certain rang,

$$\Theta'_n \subset \mathcal{K}^{4D_1(v)\epsilon}.$$

Nous utilisons les notations de la proposition 4.2.3. Définissons les événements suivants, pour $k \geq 1$ tel que $N_k \neq \emptyset$, et pour $n \in N_k$.

$$\bar{E}_{n, \vec{i}, \vec{j}} := \bar{E}_{n, i, \epsilon} := \left\{ \left(\frac{H_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k,1}}, \frac{H_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}})}{b_{n_k,2}} \right) \notin \mathcal{K}^{4D_1(v)\epsilon} \right\}, \quad (4.2.5.27)$$

$$\bar{E}_n = \bar{E}_{n, \epsilon} := \bigcup_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k} \bigcup_{\vec{i}_d \vec{j} \prec \vec{m}_k} \bar{E}_{n, \vec{i}, \vec{j}}, \quad (4.2.5.28)$$

$$\bar{E}'_k = \bar{E}'_{k, \epsilon} := \bigcup_{n \in N_k} \bar{E}_n. \quad (4.2.5.29)$$

Pour tout entier k tel que $N_k \neq \emptyset$ et pour tout $n \in N_k$, on définit

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n, \epsilon} \\ &:= \left\{ \max_{\vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{i}_d \vec{j} \prec \vec{m}_k} \left\| \left| \frac{H_{n_{k+1},1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k,1}} - \frac{H_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k,1}}, \frac{H_{n_{k+1},2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}})}{b_{n_k,2}} - \frac{H_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}})}{b_{n_k,2}} \right| \right\| \right. \\ &\quad \left. \leq 2D_1(v)\epsilon \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.5.30)$$

Nous commençons par établir le lemme préparatoire suivant. Rappelons que $n_k := \lceil (1 + \gamma)^k \rceil$, $k \geq 1$.

Lemme 4.2.6 Soit $\epsilon > 0$ fixé. Sous les hypothèses du théorème 4.2.3, il existe $\gamma_0(\epsilon) > 0$ tel que, pour tout choix de $0 < \gamma \leq \gamma_0(\epsilon)$, il existe un rang $k_{0,\gamma}$ tel que

$$\forall k \geq k_{0,\gamma}, \forall n \in N_k, \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) \geq 1/2.$$

Preuve : Soit k un entier tel que $N_k \neq \emptyset$, et soit $n \in N_k$ quelconque. Notons A^c le complémentaire d'un événement A . Rappelons que M_k et m_k sont définis respectivement par (4.2.5.6) et (4.2.5.7). On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n^c) &\leq M_k \max_{\vec{I}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k} \mathbb{P}\left(|H_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) - H_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})| > 2D_1(v)\epsilon b_{n_k,1} \right) \\ &\quad + m_k \max_{\vec{I}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{I}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} \mathbb{P}\left(|H_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}) - H_{n,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}})| > 2D_1(v)\epsilon b_{n_k,2} \right) \\ &=: M_k a_n + m_k c_n. \end{aligned} \tag{4.2.5.31}$$

Nous allons montrer que, si l'on choisit $\gamma > 0$ suffisamment petit, alors cette quantité tend vers 0 uniformément en $n \in N_k$, lorsque $k \rightarrow \infty$. Pour cela, considérons la classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{F}'_k = \left\{ f(z)^{-1/2} K\left(\frac{\cdot - z}{h_{n_k,1}}\right), K \in \mathcal{G}, z \in H^{\alpha/2} \right\}.$$

Soient $K \in \mathcal{G}$ et $z \in H$. En effectuant le changement de variable $u := h_{n_k,1}^{-1/d}(y - z)$, il vient que

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(f(z)^{-1/2} K\left(\frac{Z_1 - z}{h_{n_k,1}^{1/d}}\right)\right) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(K\left(\frac{y - z}{h_{n_k,1}^{1/d}}\right)\right)^2 \frac{f(y)}{f(z)} dy \\ &= h_{n_k,1} \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) \frac{f(z + h_{n_k,1}^{1/d}u)}{f(z)} du. \end{aligned}$$

Comme f est continue et strictement positive sur H^α , et d'après (4.2.4.39), (HV1), (HK2) et (HK3), on a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\sup_{g \in \mathcal{F}'_k} \text{Var}(g(Z_1)) \leq 2h_{n_k,1}. \tag{4.2.5.32}$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de $f^{1/2}$ sur $H^{\alpha/2}$. Remarquons que \mathcal{F}'_k vérifie, pour tout $0 < \epsilon < 1$, la condition (d'après (HK4))

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}'_k) \leq \mathcal{N}(\epsilon\beta, \mathcal{F}) \leq C\beta^{-v}\epsilon^{-v} := \tilde{C}\epsilon^{-v}. \quad (4.2.5.33)$$

De plus, pour tout entier k suffisamment grand, et pour tout $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k$, comme $z_{\vec{i}} \in H^{\alpha/2}$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left\|H_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) - H_{n,1}(\cdot, z_{\vec{i}})\right\|_{\mathcal{G}} > 2D_1(v)\epsilon b_{n_k,1}\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}'_k} \left| \sum_{k=n+1}^{n_k} g(Z_k) \right| \geq 2D_1(v)\epsilon b_{n_k,1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (4.2.5.31) on a, pour tout entier k suffisamment grand, uniformément en $n \in N_k$

$$a_n \leq \mathbb{P}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}'_k} \left| \sum_{k=n+1}^{n_k} g(Z_k) \right| \geq 2D_1\epsilon b_{n_k,1}\right).$$

Rappelons que

$$T_n(g) := \sum_{i=1}^n g(Z_i) - \mathbb{E}\left(g(Z_i)\right), \quad g \in \mathcal{G}.$$

Choisissons $0 < \gamma \leq \epsilon^2$ pour avoir $\epsilon(1 + \gamma)^{1/2}\gamma^{-1/2} \geq 1$. On a alors, pour tout entier k suffisamment grand, uniformément en $n \in N_k$,

$$\begin{aligned} a_n & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}'_k} \left| \sum_{k=n+1}^{n_k} g(Z_k) \right| \geq \frac{2D_1(v)\epsilon(1 + \gamma)^{1/2}}{\gamma^{1/2}} \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}\right)^{1/2} b_{n_k,1}\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{g \in \mathcal{F}'_k} \left| \sum_{k=n+1}^{n_k} g(Z_k) \right| \geq \left(\frac{\epsilon(1 + \gamma)^{1/2}}{\gamma^{1/2}} + 1\right) D_1(v) \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}\right)^{1/2} b_{n_k,1}\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\|T_{n_k-n}\|_{\mathcal{F}'_k} \geq \left(\frac{\epsilon(1 + \gamma)^{1/2}}{\gamma^{1/2}} + 1\right) D_1(v) \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma}\right)^{1/2} b_{n_k,1}\right). \end{aligned}$$

Dans l'inégalité précédente, nous avons utilisé l'égalité en loi suivante.

$$\left(\sum_{i=n+1}^{n_k} g(Z_i) \right)_{g \in \mathcal{F}'_k} \stackrel{loi}{=} \left(T_{n_k-n}(g) \right)_{g \in \mathcal{F}'_k}.$$

Remarquons ensuite que, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$n_k - n_{k-1} \sim \gamma n_k, \quad (4.2.5.34)$$

$$\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{1/2} b_{n_k,1} \sim \left((n_k - n_{k-1}) h_{n_k,1} \log(1/h_{n_k,1}) \right)^{1/2}. \quad (4.2.5.35)$$

D'après (HV1)-(HV3), et d'après (4.2.5.34), il existe un rang $k_{1,\gamma}$ tel que, pour tout entier $k \geq k_{1,\gamma}$, $h := h_{n_k,1}$ vérifie les hypothèses (4.2.4.32) et (4.2.4.33) de la proposition 4.2.2, avec $M := 1/\beta$, $n := n_k - n_{k-1}$, $\rho := 2\epsilon(1+\gamma)^{1/2}\gamma^{-1/2}$, $\tau := 2$ et \tilde{C}, v définis par (4.2.5.33), ainsi que l'inégalité suivante (d'après (4.2.5.35)) :

$$\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{1/2} b_{n_k,1} \leq 2 \left((n_k - n_{k-1}) h_{n_k,1} \log(1/h_{n_k,1}) \right)^{1/2}. \quad (4.2.5.36)$$

Il vient que, pour tout entier $k \geq k_{1,\gamma}$ on a, uniformément en $n \in N_k$,

$$\begin{aligned} a_n &\leq \mathbb{P} \left(\| T_{n_k-n} \|_{\mathcal{F}'_k} \geq \left(\frac{\epsilon(1+\gamma)^{1/2}}{\gamma^{1/2}} + 1 \right) D_1(v) \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \right)^{1/2} b_{n_k,1} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\| T_{n_k-n} \|_{\mathcal{F}'_k} \geq \left(\frac{2\epsilon(1+\gamma)^{1/2}}{\gamma^{1/2}} + 2 \right) D_1(v) \left((n_k - n_{k-1}) h_{n_k,1} \log(1/h_{n_k,1}) \right)^{1/2} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\max_{m=1, \dots, n_k - n_{k-1}} \| T_m \|_{\mathcal{F}'_k} \geq (\rho + \tau) D_1(v) \left((n_k - n_{k-1}) h_{n_k,1} \log(1/h_{n_k,1}) \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

Nous appliquons ensuite la proposition 4.2.2. On obtient ainsi, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \max_{n \in N_k} a_n &\leq 4 \exp \left(- A_2 \left(\frac{\rho}{\tau} \right)^2 \log(1/h_{n_k,1}) \right) \\ &\leq 4 \exp \left(- A_2 \frac{\epsilon^2(1+\gamma)}{\gamma} \log(1/h_{n_k,1}) \right). \end{aligned}$$

Si $0 < \gamma < 2\epsilon^2/A_2$, alors lorsque $k \rightarrow \infty$ on a

$$\max_{n \in N_k} a_n = o(h_{n_k,1}^2),$$

et donc, d'après (4.2.5.6),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} M_k a_n = 0. \quad (4.2.5.37)$$

Remarquons ensuite que les mêmes arguments peuvent s'appliquer en remplaçant $h_{n_k,1}, b_{n_k,1}$ par $h_{n_k,2}, b_{n_k,2}$, ce qui permet de déduire, par une méthode similaire, que, si $\gamma > 0$ est suffisamment petit, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} m_k c_n = 0. \quad (4.2.5.38)$$

La preuve du lemme se conclut en combinant (4.2.5.37) et (4.2.5.38). \square

Le lemme précédent a été établi dans le but d'appliquer une inégalité maximale classique de type Ottaviani. Nous rappelons que les événements $\overline{E}_{n,\epsilon}$, $\overline{E}'_{k,\epsilon}$ et A_n sont définis respectivement par (4.2.5.28), (4.2.5.29) et (4.2.5.30).

Lemme 4.2.7 *Sous les hypothèses du théorème 4.2.3, pour tout choix de $0 < \gamma \leq \gamma_0(\epsilon)$, il existe k_γ tel que*

$$\forall k \geq k_\gamma, \mathbb{P}(\overline{E}'_k) \leq 2\mathbb{P}(\overline{E}_{n_k, \epsilon/2}).$$

Fixons $0 < \gamma \leq \gamma_0(\epsilon)$. Grâce au lemme 4.2.6, on choisit $k_0(\gamma)$ tel que, pour tout entier $k \geq k_0(\gamma)$, on ait

$$\forall n \in N_k, \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}) \geq 1/2. \quad (4.2.5.39)$$

Posons

$$B_n := \overline{E}_{n,\epsilon} - \bigcup_{n_k+1 \leq l \leq n-1} \overline{E}_l.$$

En vertu de (4.2.5.39) on a, pour tout entier $k \geq k_0(\gamma)$,

$$\frac{1}{2} \mathbb{P}(\overline{E}'_{k,\epsilon}) = \frac{1}{2} \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \mathbb{P}(B_n) \leq \sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}(A_{n,\epsilon}).$$

Puis remarquons que A_n et B_n sont indépendants, et que

$$A_n \cap B_n \subset \overline{E}_{n_{k+1}, \epsilon} \cap B_n.$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(\overline{E}'_k) \leq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\overline{E}_{n_{k+1},\epsilon} \cap \bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} B_n\right) \leq \mathbb{P}(\overline{E}_{n_k,\epsilon/2}). \square$$

Nous allons maintenant établir un principe de grandes déviations uniforme (voir la définition 3.2.2 dans le §3.2.2) pour un tableau triangulaire de couples de processus empiriques "Poissonisés". Considérons les versions "Poissonisées"

$(\Pi_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}}), \Pi_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}))$ de $(G_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}}), G_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}))$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \Pi_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) &= \sum_{i=1}^{\eta_{n_k}} K\left(\frac{Z_i - z_{\vec{i}}}{h_{n_k,1}^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z_{\vec{i}}}{h_{n_k,1}^{1/d}}\right)\right), \\ \Pi_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}) &= \sum_{i=1}^{\eta_{n_k}} K\left(\frac{Z_i - z_{\vec{i},\vec{j}}}{h_{n_k,2}^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z_{\vec{i},\vec{j}}}{h_{n_k,2}^{1/d}}\right)\right). \end{aligned}$$

Nous soulignons que, d'après la construction des $z_{\vec{i}}, z_{\vec{i},\vec{j}}, \vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k$, et d'après (HK3), on a , pour tout entier k suffisamment grand, pour tous $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k$, et pour tout $K \in \mathcal{G}$,

$$\text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i}}}{h_{n_k,1}^{1/d}}\right)\right) \cap \text{supp}\left(K\left(\frac{\cdot - z_{\vec{i},\vec{j}}}{h_{n_k,2}^{1/d}}\right)\right) = \emptyset.$$

En en déduit d'après le lemme 4.2.3 que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tous $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k$,

$$\Pi_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}}) \perp \Pi_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}}). \quad (4.2.5.40)$$

Pour $(\Psi_1, \Psi_2) \in (\mathcal{B}(\mathcal{G}))^2$, rappelons que

$$\| \Psi_1, \Psi_2 \| := \max \{ \| \Psi_1 \|_{\mathcal{G}}, \| \Psi_2 \|_{\mathcal{G}} \}.$$

Rappelons aussi que la fonction de coût J est définie dans la définition 4.1.2. La proposition suivante est vraie quel que soit le choix de $\gamma > 0$,

et quel que soit le choix de $0 < \delta < \alpha/4$ pour construire la subdivision de H (voir §4.2.5).

Proposition 4.2.4 *Dans l'espace $(\mathcal{B}(\mathcal{G})^2, ||| \cdot |||)$, le tableau triangulaire*

$$\left(\left(\frac{\Pi_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k,1} f(z_{\vec{i}})^{1/2}}, \frac{\Pi_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}})}{b_{n_k,2} f(z_{\vec{i},\vec{j}})^{1/2}} \right)_{n \geq 1, \vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} \right)$$

satisfait le principe de grandes déviations uniformes pour le tableau triangulaire de vitesses $\left(\frac{1}{\log(1/h_{n_k,2})} \right)_{n \geq 1, \vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k}$, la fonction de coût

$$J'(\Psi_1, \Psi_2) := d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2),$$

et pour la tribu engendrée par les projections coordonnées de $(\mathcal{B}(\mathcal{G})^2, ||| \cdot |||)$ (voir remarque 4.1.4).

Preuve : En appliquant la proposition 4.2.1, et en se rappelant que, par l'hypothèse (HV4), lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\log(1/h_{n_k,1}) = (1 + o(1))d_1 \log(1/h_{n_k,2}),$$

il vient immédiatement que les tableaux triangulaires

$$\left(\frac{\Pi_{n_k,1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k,1} f(z_{\vec{i}})^{1/2}} \right)_{n \geq 1, \vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k}$$

et

$$\left(\frac{\Pi_{n_k,2}(\cdot, z_{\vec{i},\vec{j}})}{b_{n_k,2} f(z_{\vec{i},\vec{j}})^{1/2}} \right)_{n \geq 1, \vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k}$$

satisfont le principe de grandes déviations uniforme (GDU) pour le tableau triangulaire de vitesses (voir la définition 3.2.1) $\left(\log(1/h_{n_k,2}) \right)_{n \geq 1, \vec{i}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{i}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k}$ et pour les fonctions de coût respective J et $d_1 J$. Puis nous appliquons le théorème 3.3.4, ce qui est possible d'après (4.2.5.40). \square

Comme J est semi-continue inférieurement sur $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$, on en déduit que J' est semi-continue inférieurement sur $(\mathcal{B}(\mathcal{G})^2, \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$. Ainsi pour $\epsilon > 0$ fixé il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$J'(\mathcal{B}(\mathcal{G})^2 - \mathcal{K}^{2D_1(v)\epsilon}) \geq 1 + 2\alpha_1. \quad (4.2.5.41)$$

Posons $\mathcal{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}}$ et \mathcal{E}_{n_k} comme les analogues de $\overline{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}}$ et \overline{E}_{n_k} (voir (4.2.5.27) et (4.2.5.28)), en remplaçant les processus empiriques par leur versions Poissonisées, c'est à dire

$$\mathcal{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}} := \mathcal{E}_{n_k, i, \epsilon} := \left\{ \left(\frac{\Pi_{n_k, 1}(\cdot, z_{\vec{i}})}{b_{n_k, 1}}, \frac{\Pi_{n_k, 2}(\cdot, z_{\vec{i}, \vec{j}})}{b_{n_k, 2}} \right) \notin \mathcal{K}^{4D_1\epsilon} \right\}, \quad (4.2.5.42)$$

$$\mathcal{E}_{n_k} = \mathcal{E}_{n_k, \epsilon} := \bigcup_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k} \bigcup_{\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} \mathcal{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}}, \quad (4.2.5.43)$$

$$(4.2.5.44)$$

Nous appliquons le lemme 4.2.7, il vient que, pour tout choix de $0 < \gamma \leq \gamma_{0, \epsilon}$, et pour tout entier k suffisamment grand, (\vec{M}_k et \vec{m}_k sont définis par (4.2.5.6) et (4.2.5.7))

$$\mathbb{P}(E'_{k, \epsilon}) \leq 2\mathbb{P}(\overline{E}_{n_k, \epsilon/2}) \quad (4.2.5.45)$$

$$\leq 2M_k m_k \max_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} \mathbb{P}(\overline{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}, \epsilon/2}). \quad (4.2.5.46)$$

En appliquant le lemme de "Poissonisation" 4.2.1 à chaque $\overline{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}, \epsilon/2}$, $\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k$, $\vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k$, il vient que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(E'_k(\epsilon)) \leq 4M_k m_k \max_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} \mathbb{P}(\mathcal{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}, \epsilon/2}).$$

D'après la proposition 4.2.4 et d'après (4.2.5.41) on a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$4M_k m_k \max_{\vec{1}_d \prec \vec{i} \prec \vec{M}_k, \vec{1}_d \prec \vec{j} \prec \vec{m}_k} \mathbb{P}(\mathcal{E}_{n_k, \vec{i}, \vec{j}, \epsilon/2}) \leq 4M_k m_k h_{n_k, 2}^{(1+\alpha_1)}.$$

Or $M_k m_k = h_{n_k, 2}^{-1+o(1)}$ lorsque $k \rightarrow \infty$ (voir (4.2.5.6) et (4.2.5.7)). D'après (HV3) on déduit que, pour k suffisamment grand

$$\mathbb{P}\left(E'_k(\epsilon)\right) \leq \frac{4}{h_{n_k, 1}^{\alpha_1}}.$$

D'après (HV3), nous savons que, pour tout entier k suffisamment grand, on a

$$\mathbb{P}\left(E'_k(\epsilon)\right) \leq \frac{4}{h_{n_k, 1}^{\alpha_1}} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Nous rappelons la définition des trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &:= \left\{ \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), J(\Psi) \leq 1 \right\}, \\ \mathcal{K} &:= \left\{ (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2, d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2) \leq 1 \right\}, \\ \mathbb{K}' &:= \left\{ (\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2, J(\Psi_1) \leq 1, d_1 J(\Psi_1) + J(\Psi_2) \leq 1 \right\} \\ &= \left(\mathbb{K} \times \mathcal{B}(\mathcal{G}) \right) \cap \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Nous soulignons que \mathbb{K} est un compact de $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ et que \mathcal{K} et \mathbb{K}' sont des compacts de $(\mathcal{B}(\mathcal{G})^2, \|\cdot\|)$, d'après la propriété 5.1.1. En appliquant le lemme de Borel-Cantelli à la suite sommable $(\mathbb{P}(E'_{k,\epsilon})_{k \geq 1})$, on conclut que, pour $\epsilon > 0$ fixé, si $0 < \gamma < \gamma_{0,\epsilon}$, alors on a presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\Theta'_n \subset \mathcal{K}^{4D_1(v)\epsilon}.$$

En appliquant le point (4.2.5.13) de la proposition 4.2.5, nous déduisons, via l'inégalité triangulaire, que l'on peut choisir $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ suffisamment petits pour avoir presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\Theta'_n \subset \mathcal{K}^{8D_1(v)\epsilon}.$$

Autrement dit, on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\Psi_1, \Psi_2) \in \Theta'_n} \inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathcal{K}} \|\| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) \|\| \leq 8D_1(v)\epsilon. \quad (4.2.5.47)$$

D'autre part, en appliquant le théorème 4.2.1, nous savons que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_{n,1}(\cdot, z)}{b_{n,1}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0. \quad (4.2.5.48)$$

Nous allons montrer qu'en combinant (4.2.5.47) et (4.2.5.48), on peut conclure la preuve de la partie (ii) du théorème 4.2.3.

Soit $(\Psi_1, \Psi_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2$ quelconque vérifiant à la fois

$$\inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathcal{K}} \left| \left| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) \right| \right| \leq 8D_1(v)\epsilon \quad (4.2.5.49)$$

et

$$\inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \Psi_1 - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} < 8D_1(v)\epsilon. \quad (4.2.5.50)$$

Par définition et par compacité de \mathcal{K} , et d'après (4.2.5.49), il existe $(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})^2$ vérifiant $d_1 J(\Psi'_1) + J(\Psi'_2) \leq 1$ et tels que

$$\left| \left| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) \right| \right| < 8D_1(v)\epsilon.$$

Si $J(\Psi'_1) \leq 1$, alors on a automatiquement $(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'$, et donc

$$\inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'} \left| \left| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) \right| \right| \leq 8D_1(v)\epsilon.$$

Si $J(\Psi'_1) > 1$, alors, d'après (4.2.5.50), et par compacité de \mathbb{K} , il existe $\tilde{\Psi}_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ vérifiant

$$\left\| \Psi_1 - \tilde{\Psi}_1 \right\|_{\mathcal{G}} < 8D_1(v)\epsilon.$$

Or, comme $0 \leq J(\tilde{\Psi}_1) < 1J(\Psi_1)$, il vient que $(\tilde{\Psi}_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'$ et, d'après (4.2.5.49) et (4.2.5.50), on conclut que

$$\left| \left| (\Psi_1 - \tilde{\Psi}_1, \Psi_2 - \Psi'_2) \right| \right| < 8D_1(v)\epsilon,$$

ce qui implique que

$$\inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'} \left| \left| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) \right| \right| \leq 8D_1(v)\epsilon.$$

On a donc montré que, si (Ψ_1, Ψ_2) vérifie à la fois (4.2.5.49) et (4.2.5.50), alors

$$\inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'} ||| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) ||| \leq 8D_1(v)\epsilon.$$

On en déduit donc, en combinant (4.2.5.47) et (4.2.5.48), que l'on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\Psi_1, \Psi_2) \in \Theta_n} \inf_{(\Psi'_1, \Psi'_2) \in \mathbb{K}'} ||| (\Psi_1 - \Psi'_1, \Psi_2 - \Psi'_2) ||| \leq 8D_1(v)\epsilon. \quad (4.2.5.51)$$

La preuve se conclut en remarquant que $\epsilon > 0$ est arbitraire, et que $D_1(v)$ ne dépend aucunement de $\epsilon > 0$ (voir (HK4) ainsi que la proposition 4.2.2 pour plus de détails). \square

4.3 Uniformité en la taille de fenêtre

4.3.1 Présentation du problème

Dans ce sous-chapitre, nous continuons l'étude de $G_n(\cdot, h, z)$, objet défini dans le §4.1.1. Nous invitons le lecteur à prendre connaissance des définitions et notations que nous avons introduites dans les §4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3. En pratique, la taille de fenêtre n'est pas choisie a priori, mais plutôt en fonction des données, dans le but le plus souvent d'améliorer le biais de l'estimateur à noyau de la densité. Ainsi, la taille de fenêtre devient une variable aléatoire dont on ne connaît pas a priori le comportement. C'est pourquoi il paraît intéressant d'étudier la consistance uniforme et la vitesse de convergence de l'estimateur à noyau de la densité centré, en s'autorisant de faire varier la largeur de bande h dans un intervalle $[h_n, \tilde{h}_n] \subset]0, 1]$ le plus large possible. U. Einmahl et Mason [46] ont établi un résultat pionnier dans cet axe de recherche en établissant le résultat de consistance suivant pour une classe d'estimateurs construits selon la méthode du noyau. Rappelons que $\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F})$ est défini dans la définition 4.1.1.

Théorème 4.3.1 [Einmahl, Mason, 2000] Soit $\left((X_i, Y_i)\right)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^{d+r} telle que X_0 admette une densité bornée. Soit K une fonction réelle sur \mathbb{R}^{d+r} . Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $h > 0$, posons

$$g_{n,h}(x) := \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h^{1/d}}, Y_i\right). \quad (4.3.1.1)$$

On suppose de plus que la classe

$$\mathcal{F} := \left\{ K(z - \lambda \cdot, \cdot), z \in \mathbb{R}^d, \lambda > 0 \right\}$$

satisfait

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}) \leq C\epsilon^{-v}, 0 < \epsilon < 1,$$

pour deux constantes $C > 0$ et $v > 0$. Alors pour tout choix de $c > 0$, il existe une constante $G(c) > 0$ telle que, presque sûrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\frac{c \log n}{n} \leq h \leq 1, x \in \mathbb{R}^d} \frac{\sqrt{nh} |g_{n,h}(x) - \mathbb{E}(g_{n,h}(x))|}{\sqrt{\log(1/h) + \log_2 n}} = G =: G(c).$$

Preuve.

Voir [46]. \square

Nous nous intéressons au cas de l'estimation de la densité, c'est à dire au cas où K est constant par rapport à son second argument. On sait, d'après le théorème 4.2.3, que lorsque l'on ne considère qu'une suite de tailles de fenêtre $(h_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les conditions de Csörgő-Révész-Stute (HV1)-(HV3) (voir §4.1.1), on a presque sûrement, sous les conditions du théorème 4.2.3,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \frac{\|G_n(\cdot, h_n, z)\|_{\mathcal{G}}}{\sqrt{2f(z)nh_n \log(1/h_n)}} = \sup_{\Psi \in \mathbb{K}} \|\Psi\|_{\mathcal{G}}. \quad (4.3.1.2)$$

Ainsi, lorsque les $G(\cdot, h_n, z)$ sont indexés par la classe $\{K\}$, où K est une fonction réelle à support compact et à variation bornée, alors (4.3.1.2) devient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \frac{|G_n(K, h_n, z)|}{\sqrt{2f(z)nh_n \log(1/h_n)}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz} =: \tilde{G}. \quad (4.3.1.3)$$

Cette constante \tilde{G} ne dépend pas de la vitesse h_n , sous les conditions (HV1)-(HV3). Nous allons montrer que (4.3.1.3) reste vraie uniformément en $h_n \leq h \leq \tilde{h}_n$, où $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ sont deux suites vérifiant (HV1)-(HV3) (voir §4.1.1). Autrement dit, sous les hypothèses du théorème, on a presque sûrement 4.2.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n, z \in H} \frac{\|G_n(\cdot, h, z)\|_{\mathcal{G}}}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz} = \tilde{G}. \quad (4.3.1.4)$$

Le résultat que nous présentons est un résultat fonctionnel, dont (4.3.1.4) sera une conséquence. Nous rappelons que, pour une classe de fonctions \mathcal{G} vérifiant (HK4), l'ensemble $\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\mathcal{G}}$ est décrit dans le §4.1.3, et qu'il s'agit de la boule unité de l'espace autoreproduisant associé au processus gaussien centré dont la fonction de covariance est

$$\text{Cov}(W_{\mathcal{G}}(K), W_{\mathcal{G}}(K')) := \int_{\mathbb{R}^d} K(z)K'(z)dz, K, K' \in \mathcal{G}.$$

Pour plus de détails, nous renvoyons à la définition 4.1.2. Rappelons également que, pour toute une fonction réelle Ψ définie sur une classe de fonctions \mathcal{F} , on a posé

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}} := \sup_{f \in \mathcal{F}} |\Psi(f)|. \quad (4.3.1.5)$$

Théorème 4.3.2 *Soient $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ deux suites de réels vérifiant (HV1)-(HV3), et soit \mathcal{G} une classe de fonctions réelles sur \mathbb{R}^d vérifiant (HK1)-(HK5). Soit H un compact de \mathbb{R}^d d'intérieur non vide, et soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue). Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f est continue et strictement positive sur l'ensemble*

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (4.3.1.6)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Alors on a presque sûrement

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n, z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0,$$

$$(ii) \forall \Psi \in \mathbb{K}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} = 0.$$

Preuve.

La preuve est naturellement divisée en deux parties. Dans le §4.3.2

nous démontrons le point (i) du théorème 4.3.2. Dans le §4.3.3 nous démontrons le point (ii) du théorème 4.3.2.

4.3.2 Preuve de la partie (i) du théorème 4.3.2

Nous éviterons de donner trop de détails dans les parties de démonstration similaires à celles du théorème 4.2.3. Fixons $\epsilon > 0$ une fois pour toutes. Nous allons montrer que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n, z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} \leq 4\epsilon. \quad (4.3.2.1)$$

Étape 1 : Subdivision

Nous introduisons les paramètres suivants, que nous ajusterons ensuite en fonction de $\epsilon > 0$ pour obtenir le résultat voulu. Soient $\gamma > 0$, $0 < \delta < \alpha/4$ (voir (4.3.1.6)) et $1 < \lambda \leq 2$ des paramètres que nous ajusterons en fonction de $\epsilon > 0$. Posons, pour tout entier $k \geq 0$,

$$n_k := [(1 + \gamma)^k]. \quad (4.3.2.2)$$

Pour tout entier $k \geq 1$, nous considérons la discrétisation suivante de l'intervalle $[h_{n_k}, \tilde{h}_{n_{k-1}}] \supset [h_n, \tilde{h}_n]$.

$$\begin{aligned} h_{n_k}^{(R_k)} &:= \tilde{h}_{n_{k-1}} \\ h_{n_k}^{(l)} &:= \lambda^l h_{n_k}, \quad l = 0 \dots R_k - 1, \end{aligned} \quad (4.3.2.3)$$

où R_k vérifie la condition

$$\lambda^{R_k-1} h_{n_k} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}} \leq \lambda^{R_k} h_{n_k}, \quad (4.3.2.4)$$

c'est à dire, $[u]$ désignant la partie entière de u ,

$$R_k := \left[\frac{\log(\tilde{h}_{n_{k-1}}/h_{n_k})}{\log(\lambda)} \right] + 1. \quad (4.3.2.5)$$

Pour $0 \leq l \leq R_k$, on inclut H dans une réunion de cubes **disjoints**, d'arrête $d^{-1}(\delta h_{n_k}^{(l)})^{1/d}$, notés

$$\Gamma_{k,l,j} := \{z_{k,l,j} + d^{-1}(\delta h_{n_k}^{(l)})^{1/d}]0, 1]^d\} \quad 1 \leq j \leq J_l, \quad (4.3.2.6)$$

de façon à avoir les inclusions suivantes pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout entier $l = 0 \dots R_k$ (rappelons que $0 < \delta < \alpha/4$ et que $h_n < 1, n \geq 1$).

$$H \subset \bigcup_{j=1}^{J_l} \Gamma_{k,l,j} \subset H^{\alpha/2}. \quad (4.3.2.7)$$

Remarquons que, comme la construction (4.3.2.6) impose que les $\Gamma_{k,l,j}$, $1 \leq j \leq J_l$ soient disjoints pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout $0 \leq l \leq R_k$, on a toujours

$$J_l \leq \frac{C}{h_{n_k}^{(l)}}, \quad k \geq 1, \quad 0 \leq l \leq R_k, \quad (4.3.2.8)$$

où $C := C(\delta)$ dépend uniquement de $\delta > 0$ et des dimensions de H . Pour tout entier $k \geq 1$, posons

$$N_k := \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}, \quad (4.3.2.9)$$

lorsque $n_{k-1} < n_k$, et $N_k := \emptyset$ sinon. Nous soulignons que, quel que soit le choix de $\gamma > 0$, l'ensemble N_k est non vide pour tout entier k suffisamment grand. Pour $\epsilon > 0$ et $A \subset \mathcal{B}(\mathcal{G})$, nous rappelons que

$$A^\epsilon := \left\{ \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \inf_{\Psi' \in A} \|\Psi - \Psi'\|_{\mathcal{G}} < \epsilon \right\}.$$

Notre preuve commence par la décomposition suivante, pour $k \geq 1$ fixé, suffisamment grand pour vérifier $N_k \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k &:= \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k, h \in [h_n, \tilde{h}_n], z \in H} \left\{ \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} > 4\epsilon \right\} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{h \in [h_{n_k}, \tilde{h}_{n_{k-1}}], z \in H, n \in N_k} \left\{ \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{4\epsilon} \right\} \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l, n \in N_k} \left\{ \frac{G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{2\epsilon} \right\} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} \left(\max_{n \in N_k, 0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} \sup_{h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq h_{n_k}^{(l+1)}, z \in \Gamma_{k,l,j}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > 2\epsilon \right) \\
&=: \mathbb{P}_{1,k} + \mathbb{P}_{2,k}. \tag{4.3.2.10}
\end{aligned}$$

Notre but est de montrer que la suite $(\mathbb{P}_k)_{k \geq 1}$ est sommable, pour ensuite appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Pour cela, nous procéderons en deux temps. Nous allons d'abord montrer que, pour tout choix de $\gamma > 0$ suffisamment petit dans l'expression des n_k , $k \geq 1$, et pour tout choix de $\lambda > 1$, $0 < \delta < \alpha/4$, la suite $(\mathbb{P}_{1,k})_{k \geq 1}$ est sommable. Ensuite, nous montrons que, pour un choix judicieux de $\gamma > 0$, $\lambda > 1$, $\delta > 0$ suffisamment petits, la suite $(\mathbb{P}_{2,k})_{k \geq 1}$ est sommable.

Étape 2 : Contrôle de $\mathbb{P}_{1,k}$ par Poissonisation

Nous contrôlons ici $\mathbb{P}_{1,k}$ en appliquant des techniques d'association par blocs et des techniques de Poissonisation. Le lemme suivant nous permettra d'appliquer un raisonnement de contrôle par blocs similaire à l'inégalité d'Ottaviani (voir proposition 5.6.1).

Lemme 4.3.1 *Sous les hypothèses du théorème 4.3.2, pour tout choix de $\epsilon > 0, \delta > 0, \lambda > 1$, il existe $\gamma_{0,\epsilon} > 0$ tel que, pour tout choix*

de $0 < \gamma < \gamma_{0,\epsilon}$, il existe un entier $k_{0,\epsilon,\gamma}$ vérifiant, pour tout entier $k \geq k_{0,\epsilon,\gamma}$,

$$\max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l, 1 \leq m \leq n_k - n_{k-1}} \mathbb{P} \left(\left\| \frac{G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \leq 1/2.$$

Preuve. Il suffit de montrer que, pour tout choix de $\epsilon > 0, \delta > 0, \lambda > 1$, il existe $\gamma_{0,\epsilon} > 0$ tel que, pour tout choix de $0 < \gamma < \gamma_{0,\epsilon}$, il existe un entier $k_{0,\epsilon,\gamma}$ vérifiant, pour tout entier $k \geq k_{0,\epsilon,\gamma}$,

$$\max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq m \leq n_k - n_{k-1}} \left\| \frac{G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \leq 1/2.$$

Pour tout entier $k \geq 1$ et pour tous $0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l$, posons

$$\mathcal{F}_{k,l,j} := \left\{ f(z_{k,l,j})^{-1/2} K \left(\frac{\cdot - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}} \right), K \in \mathcal{G}, z \in H \right\}.$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de $f^{1/2}$ sur $H^{\alpha/2}$. Un raisonnement de comptage de boules montre que, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tous $0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l$, on a

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}_{k,l,j}) \leq \mathcal{N}(\epsilon\beta, \mathcal{F}) \leq (C\beta^{-v})\epsilon^{-v} =: \tilde{C}\epsilon^{-v}, \quad 0 < \epsilon < 1. \quad (4.3.2.11)$$

Nous renvoyons à l'hypothèse (HK4) et à la définition 4.1.1 dans le §4.1.1 pour plus de détails. Posons

$$v_k := \sup_{z \in H, u \in [0,1]^d} \left| \frac{f\left(z + \tilde{h}_{n_{k-1}}^{1/d} u\right)}{f(z)} \right|.$$

Les propriétés de régularité de f sur H^α nous assurent que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 1.$$

Soient maintenant $k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l$ et $K \in \mathcal{G}$ quelconques. Un changement de variables classique $u = h_{n_k}^{(l)-1/d}(u - z_{k,l,j})$

montre que, sous (HK3),

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(f(z_{k,l,j})^{-1/2}K\left(\frac{Z_1 - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}}\right)\right) &\leq h_{n_k}^{(l)} \int_{[0,1]^d} K^2(u) \frac{f(z_{k,l,j} + uh_{n_k}^{(l)1/d})}{f(z_{k,l,j})} du \\ &\leq h_{n_k}^{(l)} v_k. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de la définition de v_k , de (HK2), ainsi que du fait que, d'après la construction (4.3.2.3) on a $h_{n_k}^{(l)} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}$. Reprenons maintenant les notations de la proposition 4.2.2, avec $\tau := 2$ et $\rho := 2$, $M := 1/\beta$ et \tilde{C}, v définis par (4.3.2.11). Quel que soit le choix de $0 < \gamma$ dans la définition de n_k nous savons, d'après (HV1) et (HV2), que, pour tout entier k suffisamment grand, on a

$$\left(\frac{(n_k - n_{k-1})h_{n_k}}{\log(1/h_{n_k})}\right)^{1/2} \geq K_1, \quad \tilde{h}_{n_{k-1}} \leq K_2,$$

où K_1 et K_2 sont deux paramètres apparaissant dans la proposition 4.2.2. On a donc, pour tout $0 \leq l \leq R_k$,

$$\left(\frac{(n_k - n_{k-1})h_{n_k}^{(l)}}{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}\right)^{1/2} \geq K_1, \quad h_{n_k}^{(l)} \leq K_2.$$

Ainsi, d'après la construction (4.3.2.3), pour tout entier $k \geq 1$ suffisamment grand, et pour tout choix de $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, la classe de fonctions $\mathcal{F}_{k,l,j}$ vérifie les hypothèses (4.2.4.32) et (4.2.4.33) de la proposition 4.2.2, avec $h := h_{n_k}^{(l)}$ et $n := n_k - n_{k-1}$. De plus, en choisissant $\gamma > 0$ suffisamment petit, on a, à partir d'un certain rang $k(\gamma)$,

$$4D_1(v)\sqrt{n_k - n_{k-1}} \leq \epsilon \sqrt{\inf_{z \in H} f(z)n_k}.$$

Nous rappelons que $D_1(v)$ est un paramètre ne dépendant que de $v > 0$ (voir la proposition 4.2.2), et que $v > 0$ apparaît dans (4.3.2.11) et dans l'hypothèse (HK4). Ainsi pour tout entier $k \geq k(\gamma)$ on a, pour tout

choix de $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_k &:= \mathbb{P} \left(\max_{m \leq n_k - n_{k-1}} \| G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}) \|_{\mathcal{G}} \geq \epsilon (2f(z_{k,l,j}) n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{m \leq n_k - n_{k-1}} \| G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}) \|_{\mathcal{G}} \geq 4D_1(v) (2(n_k - n_{k-1}) h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Rappelons que, pour toute fonction réelle Borélienne g définie sur \mathbb{R}^d , on a posé

$$T_n(g) := \sum_{i=1}^n g(Z_i) - \mathbb{E}(g(Z_i)).$$

Nous appliquons la proposition 4.2.2 à la classe $\mathcal{F}_{k,l,j}$, avec $\tau := \rho = 2$, $n := n_k - n_{k-1}$, $h := h_{n_k}^{(l)}$, $M := 1/\beta$, et \tilde{C}, v définis par (4.3.2.11). Ainsi, pour tout $k \geq k(\gamma)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_k &\leq \mathbb{P} \left(\max_{m \leq n_k - n_{k-1}} \| T_m \|_{\mathcal{G}} \geq (\rho + \tau) D_1(v) ((n_k - n_{k-1}) h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2} \right) \\ &\leq 4 \exp \left(- A_2 \left(\frac{\rho}{\tau} \right)^2 \log(1/h_{n_k}^{(l)}) \right) \\ &\leq 4 \exp \left(- A_2 \log(1/\tilde{h}_{n_{k-1}}) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, après avoir fixé $\gamma > 0$ suffisamment petit, il existe un rang $k(\gamma)$ à partir duquel on a

$$\max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P} \left(\max_{m \leq n_k - n_{k-1}} \left\| \frac{G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \leq 1/2,$$

ce qui conclut la preuve du lemme 4.3.1. \square

En appliquant la proposition 5.6.1, nous concluons que, lorsque $N_k \neq \emptyset$, pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, si la condition

$$\max_{1 \leq m \leq n_k - n_{k-1}} \mathbb{P} \left(\left\| \frac{G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \leq 1/2$$

est vérifiée, alors on a

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \left\{ \frac{G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j}) n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{2\epsilon} \right\} \right)$$

$$\leq 2\mathbb{P}\left(\frac{G_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^\epsilon\right). \quad (4.3.2.12)$$

Nous appliquons alors le lemme 4.3.1. Ainsi, pour tout choix de $\epsilon > 0, \delta > 0, 1 < \lambda < 2$, il existe $\gamma_{0,\epsilon} > 0$ tel que, pour tout choix de $0 < \gamma \leq \gamma_{0,\epsilon}$, on peut appliquer asymptotiquement en k l'inégalité (4.3.2.12) pour tous les $0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l$, et obtenir ainsi ($\mathbb{P}_{1,k}$ est défini par (4.3.2.10))

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1,k} &\leq \sum_{l=0}^{R_k} \sum_{j=1}^{J_l} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in N_k} \left\{ \frac{G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^{2\epsilon} \right\}\right) \\ &\leq 2 \sum_{l=0}^{R_k} \sum_{j=1}^{J_l} \mathbb{P}\left(\frac{G_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^\epsilon\right) \\ &\leq 2 \sum_{l=0}^{R_k} \frac{C}{h_{n_k}^{(l)}} \max_{1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}\left(\frac{G_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^\epsilon\right) \\ & \quad (4.3.2.13) \\ &=: 2 \sum_{l=0}^{R_k} \frac{C}{h_{n_k}^{(l)}} \max_{1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}_{k,l,j}. \end{aligned}$$

La ligne (4.3.2.13) découle de (4.3.2.8).

Posons, pour $K \in \mathcal{G}, n \geq 1$ entier, $h > 0$ et $z \in H$,

$$\tilde{G}_n(K, h, z) := \sum_{i=1}^{\eta_n} K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right), \quad (4.3.2.14)$$

η_n étant une variable de Poisson d'espérance n indépendante de l'échantillon $(Z_i)_{i \geq 1}$, avec par convention $\sum_{\emptyset} = 0$. Comme f est bornée sur $H^{\alpha/2}$, et comme $\tilde{h}_n \rightarrow 0$ on a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}\left(\frac{Z_1 - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}} \in [0, 1]^d\right) \leq 1/2.$$

Nous pouvons donc appliquer le lemme de Poissonisation 4.2.1 à chaque $\mathbb{P}_{k,l,j}$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$. Ainsi, en posant

$$\mathbb{P}'_{k,l,j} := \mathbb{P}\left(\frac{\tilde{G}_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \notin \mathbb{K}^\epsilon\right), \quad (4.3.2.15)$$

on a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\mathbb{P}_{1,k} \leq 2 \sum_{l=0}^{R_k} \frac{C}{h_{n_k}^{(l)}} \max_{1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}_{k,l,j} \leq 4 \sum_{l=0}^{R_k} \frac{C}{h_{n_k}^{(l)}} \max_{1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}'_{k,l,j}. \quad (4.3.2.16)$$

Afin de contrôler uniformément les $\mathbb{P}'_{k,l,j}$, nous allons établir un principe de grandes déviations uniforme (voir la définition 3.3.4 dans le §3.3.2).

Étape 3 : Un principe de grandes déviations uniforme

Rappelons que \mathcal{T}_0 est la tribu de l'espace de Banach $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ engendrée par les projections coordonnées (pour plus de détails, voir la remarque 4.1.4 et la définition 4.1.3). Nous rappelons également que J est l'énergie gaussienne associée au processus gaussien centré $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ (voir la définition 4.1.2), et que

$$\mathbb{K} = \left\{ \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), J(\Psi) \leq 1 \right\}.$$

Nous allons établir le principe de grandes déviations uniforme suivant :

Proposition 4.3.1 (Un principe uniforme de grandes déviations)

Considérons un tableau triangulaire d'éléments de H , noté $(z_{k,l,j})_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$. Sous les hypothèses du théorème 4.3.2, les deux assertions suivantes sont vraies :

1. Pour tout fermé F appartenant à \mathcal{T}_0 , on a

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \frac{1}{\log(1/h_{n_k}^{(l)})} \times \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{\tilde{G}_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \in F \right) \right) \leq -J(F). \quad (4.3.2.17)$$

2. Pour tout ouvert O appartenant à \mathcal{T}_0 , on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \min_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \frac{1}{\log(1/h_{n_k}^{(l)})} \times \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{\tilde{G}_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \in O \right) \right) \geq -J(O).$$

Ici les termes "ouvert" et "fermé" renvoient à l'espace de Banach $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$.

Preuve.

Cette proposition est en fait le principe de grandes déviations uniforme (GDU) pour le tableau triangulaire

$$\left(\frac{\tilde{G}_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right)_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l},$$

pour la fonction de coût J , et pour le tableau triangulaire de vitesses

$$\epsilon_{k,l,j} := \frac{1}{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}, \quad k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l. \quad (4.3.2.18)$$

Pour plus de détails sur ces notions, nous renvoyons au §3.3.2 où sont données les définitions adéquates. Nous allons appliquer le critère suffisant donné dans le théorème 3.3.3 (voir §3.3.2). Il nous faut donc vérifier les points 1, 2 et 3 de ce théorème 3.3.3.

Grandes déviations uniformes pour les coordonnées Nous allons montrer que le point 2 du théorème 3.3.3 est bien vérifié. Soit (K_1, \dots, K_p) une collection finie quelconque de fonctions de \mathcal{G} , que nous supposons sans perte de généralité non liées par une relation linéaire. Notons, pour tout $k \geq 1$ entier, et pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$Y_{k,l,j} := \frac{1}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \times \left(\tilde{G}_{n_k}(K_1, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}), \dots, \tilde{G}_{n_k}(K_p, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}) \right). \quad (4.3.2.19)$$

Pour tous $k \geq 1$, $0 \leq j \leq R_k$, $1 \leq l \leq J_l$ on définit $W_{k,l,j}$ comme l'analogue gaussien de $Y_{k,l,j}$, c'est à dire la variable gaussienne ayant les mêmes moments d'ordre 1 et 2 que $Y_{k,l,j}$. Ce vecteur aléatoire est centré, de matrice de variance-covariance

$$\Sigma_{k,l,j}(r, r') := \frac{\text{Cov}\left(\tilde{G}_{n_k}(K_r, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}), \tilde{G}_{n_k}(K_{r'}, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})\right)}{2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)}(\log(1/h_{n_k}^{(l)}))}, \quad (r, r') \in \{1 \dots d\}^2.$$

Or, un conditionnement par η_{n_k} conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} & \text{Cov}\left(\tilde{G}_{n_k}(K_r, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}), \tilde{G}_{n_k}(K_{r'}, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\text{Cov}\left(\tilde{G}_{n_k}(K_r, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}), \tilde{G}_{n_k}(K_{r'}, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})\right) \middle| \eta_{n_k}\right) + \text{Cov}\left(\mathbb{E}\left(\tilde{G}_{n_k}(K_r, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})\right), \mathbb{E}\left(\tilde{G}_{n_k}(K_{r'}, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})\right)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\eta_{n_k} \text{Cov}(G_1(K_r), G_1(K_{r'}))\right) + \text{Cov}\left(\eta_{n_k} G_1(K_r), \eta_{n_k} G_1(K_{r'})\right) \\ &= n_k \text{Cov}(G_1(K_r), G_1(K_{r'})). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Sigma_{k,l,j}(r, r') = \frac{\text{Cov}\left(G_1(K_r, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}), G_1(K_{r'}, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})\right)}{2f(z_{k,l,j})h_{n_k}^{(l)}(\log(1/h_{n_k}^{(l)}))}, \quad (r, r') \in \{1 \dots d\}^2.$$

Après un changement de variable $u = h_{n_k}^{(l)-1/d}(y - z)$, on a, sous (HK3),

$$\begin{aligned} \Sigma_{k,l,j}(r, r') &= \left(2f(z_{k,l,j})\log(1/h_{n_k}^{(l)})\right)^{-1} \\ & \times \left(\int_{[0,1]^d} K_r(u)K_{r'}(u)f\left(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d}u\right)du \right. \\ & \left. - h_{n_k}^{(l)} \int_{[0,1]^d} K_r(u)f\left(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d}u\right)du \times \int_{[0,1]^d} K_{r'}(v)f\left(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d}v\right)dv \right) \end{aligned} \tag{4.3.2.20}$$

Posons maintenant

$$\Sigma(r, r') := \frac{1}{2} \int_{[0,1]^d} K_r(z)K_{r'}(z)dz, \quad (r, r') \in \{1 \dots d\}^2,$$

et rappelons que $\epsilon_{k,l,j}$ est défini par (4.3.2.18). Clairement on a, d'après (4.3.2.20), pour tous $(r, r') \in \{1 \dots p\}^2$,

$$\begin{aligned}
& | \epsilon_{k,l,j}^{-1} \Sigma_{k,l,j}(r, r') - \Sigma(r, r') | \\
& \leq \int_{[0,1]^d} K_r(u) K_{r'}(u) \left(\frac{f(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} u)}{f(z_{k,l,j})} - 1 \right) du \\
& \quad + \frac{h_{n_k}^{(l)}}{f(z_{k,j,l})} \int_{[0,1]^d} K_r(u) f(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} u) du \times \int_{[0,1]^d} K_{r'}(v) f(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} v) dv \\
& =: \tilde{\epsilon}_{k,l,j}. \tag{4.3.2.21}
\end{aligned}$$

Soit L un majorant de f sur $H^{\alpha/2}$ et soit $\beta > 0$ un minorant de f sur $H^{\alpha/2}$. D'après (4.3.2.21), (4.3.2.7) et (HK2) on a, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$\begin{aligned}
| \tilde{\epsilon}_{k,l,j} | & \leq \sup_{u \in [0,1]^d} \left| \frac{f(z_{k,j,l} + u h_{n_k}^{(l)1/d})}{f(z_{k,l,j})} - 1 \right| + \frac{L^2}{\beta} h_{n_k}^{(l)} \\
& \leq \sup_{z \in H, u \in [0,1]^d} \left| \frac{f(z + u \tilde{h}_{n_{k-1}}^{1/d})}{f(z)} - 1 \right| + \frac{L^2}{\beta} \tilde{h}_{n_{k-1}} \tag{4.3.2.22} \\
& =: \tilde{v}_k.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence du fait que, d'après la construction (4.3.2.3), on a toujours $h_{n_k}^{(l)} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}$, $0 \leq l \leq R_k$. Comme f est strictement positive et continue sur H^α , il vient que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{v}_k = 0.$$

On en déduit alors que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \| \epsilon_{k,l,j}^{-1} \Sigma_{k,l,j} - \Sigma \|_{\mathbb{R}^{p^2}} = 0.$$

Ainsi, en appliquant la propriété 3.2.4, on déduit que $(W_{k,l,j})_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$ satisfait le principe de grandes déviations uniforme pour $(\epsilon_{k,l,j})_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$

et pour la fonction de coût

$$\begin{aligned}
J_{K_1, \dots, K_p}(x_1, \dots, x_p) &:= (x_1, \dots, x_p)' \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (x_1, \dots, x_p) \\
&= \inf \left\{ y' \Sigma y, \Sigma y = (x_1, \dots, x_p), y \in \mathbb{R}^p \right\}, \\
&= \inf \left\{ y' y, y \in \mathbb{R}^p, (2\Sigma)^{1/2} y = x \right\},, (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p.
\end{aligned}
\tag{4.3.2.23}$$

Ici, y' désigne le vecteur transposé de y . Dans l'expression (4.3.2.23), on reconnaît l'énergie gaussienne associée au vecteur gaussien dont la matrice variance-covariance est 2Σ (voir §1.1.3). C'est donc l'énergie gaussienne associée au vecteur gaussien $(W_G(K_1), \dots, W_G(K_p))$ (voir la définition 4.1.2). Nous allons maintenant appliquer le corollaire du théorème 3.2.3, en montrant que $Y_{k,l,j}$ et $W_{k,l,j}$ ont des lois suffisamment proches pour la distance π (voir (3.2.4.1) pour la définition de π). Nous invitons le lecteur à prendre connaissance de la définition 3.2.7 dans le §3.2.4, préalablement à la lecture de la suite de cette preuve.

Nous allons montrer que, pour tous $k \geq 1$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, on a (voir la définition 3.2.7)

$$\text{Loi}(Y_{k,l,j}) \in \mathcal{A}_p(\tau_{k,l,j}),$$

avec

$$\tau_{k,l,j} := B(2n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{-1/2},$$

B étant une constante qui ne dépend que de f . Définissons, pour $k \geq 1$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, le vecteur aléatoire de \mathbb{R}^p suivant :

$$X_{k,l,j} := (2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{-1/2} \left(K_m \left(\frac{Z_1 - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}} \right) - \mathbb{E} \left(K_m \left(\frac{Z_1 - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}} \right) \right) \right)$$

$$\mathcal{L}_{k,l,j}(t) := \mathbb{E} \left(\exp (\langle t, X_{k,l,j} \rangle) \right) t \in \mathbb{R}^p,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^p . Un calcul direct en conditionnant par rapport à η_n (voir (4.3.2.14)) montre que, pour

tous $k \geq 1$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$ et pour tous $t \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned}\phi_{k,l,j}(t) &:= \log \left(\mathbb{E} \left(\exp (\langle Y_{k,l,j}, t \rangle) \right) \right) \\ &= n_k \left(\mathcal{L}_{k,l,j}(t) - 1 \right),\end{aligned}\tag{4.3.2.24}$$

où l'on a posé par convention $\log(\infty) := \infty$. D'après (HK2) et le fait que f a un minorant strictement positif sur H , les fonctions $\phi_{k,l,j}$ et $\mathcal{L}_{k,l,j}$ sont finies et analytiques sur \mathbb{R}^p . De plus, en appliquant le théorème de convergence dominée, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{(\partial v)^2} \phi_{k,l,j}(t) &= n_k \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{(\partial v)^2} \mathcal{L}_{k,l,j}(t) \\ &= n_k \mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{(\partial v)^2} \left(\exp (\langle t, X_{k,l,j} \rangle) \right) \right) \\ &= n_k \mathbb{E} \left(\langle v, X_{k,j,l} \rangle^2 \langle u, X_{k,l,j} \rangle \exp (3 \langle t, X_{k,l,j} \rangle) \right).\end{aligned}\tag{4.3.2.25}$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de $f^{1/2}$ sur H . D'après l'hypothèse (HK2), et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}^p$,

$$|\langle t, X_{k,l,j} \rangle| \leq \| t \|_{\mathbb{R}^p} \frac{1}{\beta (2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}}.\tag{4.3.2.26}$$

En utilisant (4.3.2.26) dans (4.3.2.25), il vient que, pour tout $t \in \mathbb{R}^p$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{(\partial v)^2} \phi_{k,l,j}(t) \right| \leq \frac{\| u \|_{\mathbb{R}^p}}{\beta (2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} v' \Sigma_{k,l,j} v \exp \left(3 \frac{\| t \|_{\mathbb{R}^p}}{\beta (2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right).\tag{4.3.2.27}$$

Ici, v' désigne la transposée de v . D'après (HV1) et (HV2), nous savons que, pour tout k suffisamment grand on a, uniformément en $0 \leq l \leq R_k$,

$$\frac{3}{\beta (2n_k (\log(1/h_{n_k}^{(l)})))^{1/2}} \leq \frac{3}{\beta (2n_k (\log(1/\tilde{h}_{n_{k-1}})))^{1/2}} \leq 1\tag{4.3.2.28}$$

Ainsi en utilisant (4.3.2.28) dans (4.3.2.27), on voit que, pour tout entier k suffisamment grand, pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|t\|_{\mathbb{R}^p} < \beta(2n_k \log(1/h_{n_k}))^{1/2}$, on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2}{(\partial v)^2} \phi_{k,l,j}(t) \right| \leq \frac{e^3 \|u\|_{\mathbb{R}^p}}{\beta(2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} v' \Sigma_{k,l,j} v.$$

Ainsi, en posant $\tau_{k,l,j} := e^3 \beta^{-1} (2n_k (\log(1/h_{n_k}^{(l)})))^{-1/2}$, il vient que, pour tout k suffisamment grand, et pour tout $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, on a (voir la définition 3.2.7)

$$Y_{k,l,j} \in \mathcal{A}_p(\tau_{k,l,j}).$$

Puis remarquons que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{k,l,j}}{\epsilon_{k,l,j}} &= \frac{e^3}{\beta} \sqrt{\frac{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}{2n_k h_{n_k}^{(l)}}} \\ &= \frac{e^3 \log(1/h_{n_k}^{(l)})}{\beta \sqrt{2n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)})}} \\ &\leq \frac{e^3}{\beta} \sqrt{\frac{\log(1/h_{n_k})}{2n_k h_{n_k}}}. \end{aligned}$$

Or, d'après (HV2), on sait que ce majorant tend vers 0 lorsque k tend vers ∞ . On peut donc appliquer le corollaire du théorème 3.2.3 dans le §3.2.4, et en déduire que $(Y_{k,l,j})_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$ satisfait le principe de grandes déviations uniforme pour le tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{k,l,j})_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$ et pour la fonction de coût J_{K_1, \dots, K_p} (voir (4.3.2.23)), et ceci quel que soit $p \geq 1$ entier et $(K_1, \dots, K_p) \in \mathcal{G}^p$.

Equicontinuité asymptotique Nous allons montrer simultanément que les points 1 et 3 du théorème 3.3.3 (voir §3.3.2) sont vérifiés. Nous

choisissons la semi-métrie suivante :

$$d(K, K')^2 := \int_{[0,1]^d} (K - K')^2.$$

Remarquons que d est la distance L^2 issue de la loi de probabilité uniforme sur $[0, 1]^d$. Ainsi, d'après (HK4), nous déduisons que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont précompactes pour d , et le point 1 du théorème 3.3.3 est vérifié pour d . Il suffit maintenant de montrer que pour tous $M > 0$, $\alpha > 0$, il existe $\tilde{\delta} > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \epsilon_{k,l,j} \\ & \times \log \left(\mathbb{P} \left(\sup_{K, K' \in \mathcal{G}, d(K, K') \leq \tilde{\delta}} \left| \frac{\tilde{G}_{n_k}(K, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}) - \tilde{G}_{n_k}(K', h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{\sqrt{2f(z_{k,l,j})h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)})}} \right| \geq \alpha \right) \right) \\ & \leq -M. \end{aligned}$$

Rappelons ici que $\epsilon_{k,l,j}$ est défini dans (4.3.2.18). Fixons $M > 0$ et $\alpha > 0$. Pour $k \geq 1$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, et pour $\tilde{\delta} > 0$, on définit la classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{F}_{k,j,l,\tilde{\delta}} := \left\{ f(z_{k,l,j})^{-1/2} (K - K') \left(\frac{\cdot - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}} \right), d(K, K') \leq \tilde{\delta} \right\}.$$

Soit $D_1(2v)$ le paramètre "universel" apparaissant dans la proposition 4.2.2, et $v > 0$ la constante apparaissant dans (HK4). Nous avons, pour

tous $k \geq 1$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j} &:= \mathbb{P} \left(\sup_{K, K' \in \mathcal{G}, d(K, K') \leq \tilde{\delta}} \left| \frac{\tilde{G}_{n_k}(K, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j}) - \tilde{G}_{n_k}(K', h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{\sqrt{2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)})}} \right| \geq 2D_1(2v)\alpha \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\left\| \frac{\tilde{G}_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{F_{k,l,j,\tilde{\delta}}} \geq 2D_1(2v)\alpha \right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta_{n_k} = m) \mathbb{P} \left(\left\| \frac{G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{F_{k,l,j,\tilde{\delta}}} \geq 2D_1(2v)\alpha \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\max_{m=1, \dots, 2n_k} \left\| \frac{G_m(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{F_{k,l,j,\tilde{\delta}}} \geq 2D_1(2v)\alpha \right) + \mathbb{P}(\eta_{n_k} > 2n_k) \\
&=: \tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j,1} + \tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j,2}. \tag{4.3.2.29}
\end{aligned}$$

Pour $k \geq 1$ entier fixé, nous appliquons l'inégalité de Chernoff (voir (2.3.3.3) et (2.3.3.4) dans le §2.3.3) à la variable de Poisson η_{n_k} . Ainsi, pour tout entier $k \geq 1$ on a

$$\tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j,2} \leq \exp(- (2 \log 2 - 1)n_k), \quad 0 \leq l \leq R_k, \quad 1 \leq j \leq J_l. \tag{4.3.2.30}$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de $f^{1/2}$ sur H . Un raisonnement de comptage de boules montre que, d'après (HK4) (voir la définition 4.1.1 pour plus de détails),

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{F}_{k,j,l,\tilde{\delta}}) \leq (\mathcal{N}(\epsilon\beta/2, \mathcal{F}))^2 \leq 2^{2v} \beta^{-2v} C^2 \epsilon^{-2v} =: C' \epsilon^{-v'}, \quad 0 < \epsilon < 1. \tag{4.3.2.31}$$

Rappelons que, d'après (HK1), il existe une fonction réelle positive croissante, notée $A(\cdot)$, telle que

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \rightarrow 0} A(\delta) = 0, \\
&\sup_{K \in \mathcal{G}, \|u\|_{\mathbb{R}^d} \leq \delta} \int_{\mathbb{R}^d} (K(z+u) - K(z))^2 dz \leq A(\delta)^2, \quad \delta > 0 \\
&\sup_{1/(1+\delta) \leq \lambda \leq (1+\delta)} \sup_{K \in \mathcal{G}} \int_{\mathbb{R}^d} (K(\lambda z) - K(z))^2 dz \leq A(\delta)^2, \quad \delta > 0. \tag{4.3.2.32}
\end{aligned}$$

Soient maintenant $k \geq 1$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$ des entiers quelconques et soient $K, K' \in \mathcal{G}$ quelconque tels que $d(K, K') \leq \tilde{\delta}$. Un changement de variables $u = h_{n_k}^{(l)-1/d}(y - z_{k,l,j})$ montre que, sous (HK3),

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\left(K - K' \right) \left(\frac{Z_1 - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}} \right) \right) &\leq h_{n_k}^{(l)} \int_{[0,1]^d} \left(K(u) - K'(u) \right)^2 \frac{f \left(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} u h_{n_k}^{(l)1/d} \right)}{f(z_{k,l,j})} du \\ &\leq A(\tilde{\delta})^2 h_{n_k}^{(l)} \sup_{u \in [0,1]^d} \left| \frac{f \left(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} u \right)}{f(z_{k,l,j})} \right| \\ &\leq A(\tilde{\delta})^2 h_{n_k}^{(l)} \sup_{z \in H, u \in [0,1]^d} \left| \frac{f \left(z + \tilde{h}_{n_{k-1}}^{1/d} u \right)}{f(z)} \right|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que $h_{n_k}^{(l)} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}$ par construction. La régularité de $f > 0$ sur H^α montre qu'il existe un rang k à partir duquel on a, uniformément en $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$\sup_{g \in \mathcal{F}_{k,j,l,\tilde{\delta}}} \text{Var} \left(g(Z_1) \right) \leq 4A(\tilde{\delta})^2 h_{n_k}^{(l)}. \quad (4.3.2.33)$$

Supposons sans perte de généralité que $\tilde{\delta} > 0$ est suffisamment petit pour vérifier $2A(\tilde{\delta}) \leq \alpha$. Reprenons maintenant les notations de la proposition 4.2.2, avec $\rho := \alpha$, $\tau := 2A(\tilde{\delta})$, $M := 1/\beta$, $n := 2n_k$ et C', v' définis par (4.3.2.31). D'après (HV1) et (HV2), nous savons que, pour tout entier k suffisamment grand, on a

$$K_1 \leq \sqrt{\frac{2n_k h_{n_k}}{\log(1/h_{n_k})}}, \quad \tilde{h}_{n_{k-1}} \leq K_2,$$

où K_1 et K_2 sont deux paramètres apparaissant dans la proposition 4.2.2. Ainsi, lorsque k est suffisamment grand, on a, pour tout $l =$

$0, \dots, R_k$ (en vertu du fait que $h_{n_k} \leq h_{n_k}^{(l)} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}$),

$$K_1 \leq \sqrt{\frac{2n_k h_{n_k}^{(l)}}{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}}, \quad h_{n_k}^{(l)} \leq K_2.$$

Ainsi, toutes les classes $\mathcal{F}_{k,l,j,\tilde{\delta}}$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$ vérifient les hypothèses (4.2.4.32) et (4.2.4.33) de la propriété 4.2.2 avec $n := 2n_k$, $h := h_{n_k}^{(l)}$, $\tau := 2A(\tilde{\delta})$, $\rho := \alpha$, $M := 1/\beta$, et C', v' définis par (4.3.2.31) (en particulier, $v' := 2v$). Rappelons que, pour toute fonction réelle Borélienne g définie sur \mathbb{R}^d , on a posé

$$T_n(g) := \sum_{i=1}^n g(Z_i) - \mathbb{E}(g(Z_i)).$$

En appliquant la proposition 4.2.2, il vient que, pour tout entier k suffisamment grand, et pour tous $0 \leq l \leq R_k$ et $1 \leq j \leq J_l$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j,1} &\leq \mathbb{P}\left(\max_{m=1 \dots 2n_k} \|T_m\|_{\mathcal{F}_{k,l,j,\tilde{\delta}}} \geq D_1(v')(\alpha + 2A(\tilde{\delta}))\sqrt{2n_k f(z_{k,l,j}) h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)})}\right) \\ &\leq 4 \exp\left(-A_2 \frac{\alpha^2}{2A(\tilde{\delta})^2} \log(1/h_{n_k}^{(l)})\right). \end{aligned} \quad (4.3.2.34)$$

Ici, $A_2 > 0$ est la constante universelle apparaissant dans la proposition 4.2.2. Nous soulignons que (4.3.2.34) est vraie pour tout $\tilde{\delta} > 0$ vérifiant $2A(\tilde{\delta}) \leq \alpha$. En choisissant $\tilde{\delta} > 0$ suffisamment petit, on a

$$\frac{A_2 \alpha^2}{2A(\tilde{\delta})} > M.$$

Ainsi en combinant (4.3.2.30) et (4.3.2.34), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j} \leq 4 \exp(-M \log(1/h_{n_k}^{(l)})) + \exp(-(2 \log 2 - 1)n_k).$$

Puis, comme, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$\max_{l=0 \dots R_k} \frac{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}{n_k} = \frac{\log(1/h_{n_k})}{n_k} \rightarrow 0,$$

il vient que, pour tout entier k suffisamment grand, et pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq J_l$, on a

$$\exp\left(- (2 \log 2 - 1)n_k\right) \leq \exp\left(- M \log(1/h_{n_k}^{(l)})\right),$$

ce qui entraîne

$$\tilde{\mathbb{P}}_{k,l,j} \leq 5 \exp\left(- M \log(1/h_{n_k}^{(l)})\right).$$

Ceci permet aisément de conclure que le point 3 du théorème 3.3.3 est vérifié.

Fin de la preuve de la proposition 4.3.1 En appliquant le théorème 3.3.3, nous déduisons des deux paragraphes précédents que le tableau triangulaire

$$\left(\frac{G_{n_k}(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right)_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme pour la fonction de coût

$$I(\Psi) := \sup_{p \geq 1, (K_1, \dots, K_p) \in \mathcal{G}^p} J_{K_1, \dots, K_p}(\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_p)), \quad \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$$

et pour le tableau triangulaire de vitesses

$$\left((\log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{-1} \right)_{k \geq 1, 0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l}$$

Or, pour tout $p \geq 1$ et pour tous $(K_1, \dots, K_p) \in \mathcal{G}^p$, la fonction de coût J_{K_1, \dots, K_p} définie par (4.3.2.20) et (4.3.2.23) est l'énergie gaussienne associée à $(W_{\mathcal{G}}(K_1), \dots, W_{\mathcal{G}}(K_p))$, où $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ est le processus gaussien centré et régulier défini dans la définition 4.1.2. Nous renvoyons au §3.4 pour la preuve du fait que, pour tout $\Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, on a

$$\sup_{p \geq 1, (K_1, \dots, K_p) \in \mathcal{G}^p} J_{K_1, \dots, K_p}(\Psi(K_1), \dots, \Psi(K_p)) = J(\Psi).$$

La preuve de la proposition 4.3.1 est donc achevée. \square

Étape 4 : Sommabilité de $(\mathbb{P}_{k,1})_{k \geq 1}$

Toujours pour $\epsilon > 0, \delta > 0, \lambda > 1$ fixés, et $0 < \gamma \leq \gamma_0$, nous appliquons le principe de grandes déviations uniforme de la proposition 4.3.1 à l'ensemble suivant, fermé de $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$:

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}) - (\mathbb{K}^\epsilon) := \left\{ \Psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \inf_{\Psi' \in \mathbb{K}} \|\Psi - \Psi'\|_{\mathcal{G}} \geq \epsilon \right\}.$$

Par semicontinuité inférieure de J (voir la propriété 4.1.1), il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$J(\mathcal{B}(\mathcal{G}) - (\mathbb{K}^\epsilon)) = 1 + 2\alpha_1.$$

Ainsi l'inégalité (4.3.2.16) devient, pour tout entier k suffisamment grand, (rappelons la construction (4.3.2.3))

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{1,k} &\leq 4 \sum_{l=0}^{R_k} \frac{C}{h_{n_k}^{(l)}} \exp \left(- \left(J(\mathcal{B}(\mathcal{G}) - (\mathbb{K}^\epsilon)) - \alpha_1 \right) \log(1/h_{n_k}^{(l)}) \right) \\ &\leq 4C \sum_{l=0}^{R_k} h_{n_k}^{(l)\alpha_1} \\ &\leq 4C h_{n_k}^{\alpha_1} \sum_{l=0}^{R_k} \lambda^{\alpha_1 l} \\ &\leq \frac{4C}{\lambda^{\alpha_1} - 1} h_{n_k}^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_1(R_k+1)}. \end{aligned}$$

Nous rappelons que $C > 0$ est ici un paramètre ne dépendant que de $\delta > 0$ et des dimensions de H . En se rappelant que $R_k \leq \log(\tilde{h}_{n_{k-1}}/h_{n_k})/\log(\lambda) + 1$ par définition, il vient que

$$\mathbb{P}_{1,k} \leq \frac{4C\lambda^{2\alpha_1}}{\lambda^{\alpha_1} - 1} \tilde{h}_{n_{k-1}}^{\alpha_1}.$$

Or d'après (HV3), on a $\tilde{h}_{n_{k-1}}^{\alpha_1} \leq \log(n_{k-1})^{-2}$ pour tout entier k suffisamment grand. En se rappelant que $n_k := \lceil (1 + \gamma)^k \rceil$, $k \geq 1$, nous en déduisons que la suite $(\mathbb{P}_{k,1})_{k \geq 1}$ est sommable, et ceci, quel que soit le choix de $\gamma > 0$, de $\delta > 0$ et de $\lambda > 1$.

Conclusion 1 La conclusion des étapes 1 à 4 est la suivante : quel que soit le choix de $\epsilon > 0, \delta > 0, 1 < \lambda < 2$, il existe $\gamma_0 = \gamma_{0,\epsilon}$ (voir le lemme 4.3.1) tel que, pour tout choix de $0 < \gamma < \gamma_0$, la suite $(\mathbb{P}_{1,k})_{k \geq 1}$ soit sommable.

Contrôle de $\mathbb{P}_{2,k}$

Nous rappelons que $\mathbb{P}_{2,k}$ est défini dans (4.3.2.10). Dans ce sous-chapitre, nous allons montrer que, pour $\epsilon > 0$ fixé, on peut choisir $\delta > 0, \lambda > 1$ et $\gamma > 0$ suffisamment petits pour que la suite $(\mathbb{P}_{2,k})_{k \geq 1}$ soit sommable. Nous rappelons que $N_k, h_{n_k}^{(l)}$ et $\Gamma_{k,l,j}$ sont définis respectivement par (4.3.2.9), (4.3.2.3) et (4.3.2.6). En appliquant l'inégalité triangulaire, nous avons, pour tout entier $k \geq 1$ vérifiant $N_k \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_{2,k} \\
& := \mathbb{P} \left(\sup_{n \in N_k, 0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} \sup_{h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq h_{n_k}^{(l+1)}, z \in \Gamma_{k,l,j}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > 2\epsilon \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(\sup_{n \in N_k, 0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} \sup_{h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq h_{n_k}^{(l+1)}, z \in \Gamma_{k,l,j}} \right. \\
& \quad \left. \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z) - G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \\
& + \mathbb{P} \left(\sup_{n \in N_k, 0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} \sup_{h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq h_{n_k}^{(l+1)}, z \in \Gamma_{k,l,j}} B_{k,n,h,z} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \\
& =: \mathbb{P}_{2,1,k} + \mathbb{P}_{2,2,k},
\end{aligned}$$

où l'on a défini, pour $k \geq 1$ suffisamment grand, pour $n \in N_k, 0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l, z \in \Gamma_{k,l,j}, h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}$,

$$B_{k,n,h,z} := \left| \sqrt{\frac{2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)})}{2f(z)nh \log(1/h)}} - 1 \right|. \quad (4.3.2.35)$$

Contrôle de $\mathbb{P}_{2,1,k}$ Nous voudrions que $\mathbb{P}_{2,1,k}$ soit le terme général d'une série convergente en k , pour peu que $\delta > 0$ et $\lambda > 1$ aient été choisis suffisamment petits pour construire les subdivisions de $[h_{n_k}, \tilde{h}_{n_{k-1}}]$ et de H (voir (4.3.2.3) et (4.3.2.6)). Pour démontrer cela, décomposons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{2,1,k} &\leq \sum_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P} \left(\max_{n \in N_k} \sup_{z \in \Gamma_{k,l,j}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z) - G_n(\cdot, h_{n_k}^{(l)}, z_{k,l,j})}{(2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \\ &=: \sum_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}_{2,1,k,j,l} \end{aligned} \quad (4.3.2.36)$$

Considérons, pour tout entier $k \geq 1$ suffisamment grand pour avoir $N_k \neq \emptyset$, et pour tous $0 \leq l \leq R_k - 1$ et $1 \leq j \leq J_l$ la classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{F}'_{k,j,l} := \left\{ f(z_{k,l,j})^{-1/2} \left(K\left(\frac{\cdot - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}}\right) - K\left(\frac{\cdot - z}{h^{1/d}}\right) \right), z \in \Gamma_{k,l,j}, h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}, K \in \mathcal{G} \right\}$$

Remarquons que, par construction des $\Gamma_{k,l,j}$ (voir (4.3.2.6)), on a, pour tout $z \in \Gamma_{k,l,j}$,

$$\|z - z_{k,l,j}\|_{\mathbb{R}^d} \leq h_{n_k}^{(l)1/d} \delta^{1/d}, \quad (4.3.2.37)$$

$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ désignant la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^d . Un changement de variable $u = h_{n_k}^{(l)-1/d}(y - z_{k,l,j})$ montre que, pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$ et $K \in \mathcal{G}$, on a

$$\begin{aligned} &\text{Var} \left(f(z_{k,l,j})^{-1/2} \left(K\left(\frac{Z_1 - z_{k,l,j}}{h_{n_k}^{(l)1/d}}\right) - K\left(\frac{Z_1 - z}{h^{1/d}}\right) \right) \right) \\ &\leq h_{n_k}^{(l)} \int_{[0,1]^d} \left(K(u) - K\left(\frac{h_{n_k}^{(l)1/d}}{h} u + \frac{z_{k,l,j} - z}{h^{1/d}}\right) \right)^2 \frac{f(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} u)}{f(z_{k,l,j})} du. \end{aligned} \quad (4.3.2.38)$$

Or d'après l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on a, pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, $z \in \Gamma_{k,l,j}$, $h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}$, en se rappelant (4.3.2.37)

et le fait que $\lambda \leq 2$,

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,1]^d} \left(K(u) - K\left(\left(\frac{h_{n_k}^{(l)}}{h}\right)^{1/d} u + \frac{z_{k,l,j} - z}{h^{1/d}}\right) \right)^2 du \\
& \leq 2 \int_{[0,1]^d} \left(K(u) - K\left(\left(\frac{h_{n_k}^{(l)}}{h}\right)^{1/d} u\right) \right)^2 du \\
& \quad + 2 \int_{[0,1]^d} \left(K\left(\left(\frac{h_{n_k}^{(l)}}{h}\right)^{1/d} u\right) - K\left(\left(\frac{h_{n_k}^{(l)}}{h}\right)^{1/d} u + \frac{z_{k,l,j} - z}{h^{1/d}}\right) \right)^2 du \\
& \leq \sup_{\lambda^{-1/d} \leq \rho \leq 1} \int_{\mathbb{R}^d} \left(K(u) - K(\rho u) \right)^2 du + \sup_{\|s\|_{\mathbb{R}^d} \leq (h_{n_k}^{(l)} \delta / h)^{1/d}} \frac{h}{h_{n_k}^{(l)}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(K(u) - K(u+s) \right)^2 du \\
& \leq 2A^2(\lambda^{1/d} - 1) + 2 \frac{h}{h_{n_k}^{(l)}} A^2 \left((h/h_{n_k}^{(l)})^{1/d} \delta^{1/d} \right) \\
& \leq 2A^2(\lambda^{1/d} - 1) + 4A^2(2\delta^{1/d}). \tag{4.3.2.39}
\end{aligned}$$

Nous rappelons ici que $A(\delta)$, $\delta > 0$ est croissante en δ et est définie par (4.3.2.32). De plus, comme par construction on a $h_{n_k}^{(l)} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}$, il vient que

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in I^d} \left| \frac{f\left(z_{k,l,j} + h_{n_k}^{(l)1/d} u\right)}{f(z_{k,l,j})} \right| & \leq \sup_{u \in [0,1]^d, z \in H} \left| \frac{f(z + \tilde{h}_{n_{k-1}}^{1/d} u)}{f(z)} \right| \\
& =: v_k. \tag{4.3.2.40}
\end{aligned}$$

La régularité de f sur H^α nous assure que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 1.$$

Ainsi, en combinant (4.3.2.39), (4.3.2.40) et (4.3.2.38), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand, on a, pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$\sup_{g \in \mathcal{F}_{k,l,j}^I} \text{Var}(f(Z_1)) \leq 5(A^2(\lambda^{1/d} - 1) + A^2(2\delta^{1/d})). \tag{4.3.2.41}$$

En se rappelant le raisonnement appliqué pour obtenir (4.3.2.34), on voit que le même raisonnement peut être appliqué aux $\mathcal{F}'_{k,l,j}$. Ainsi, choisissant $\delta > 0$ et $\lambda > 1$ suffisamment petits ($0 < \delta < \delta_\epsilon$, $1 < \lambda < \lambda_\epsilon$), on a, pour tout entier k suffisamment grand, et pour tous $0 \leq l \leq R_k$ et $1 \leq j \leq J_l$,

$$\mathbb{P}_{2,1,k,l,j} \leq 4 \exp \left(- 2 \log(1/h_{n_k}^{(l)}) \right). \quad (4.3.2.42)$$

Nous ne donnons pas ici les détails du raisonnement pour aboutir à (4.3.2.42), car celui ci est très similaire au raisonnement utilisé pour aboutir à (4.3.2.34). En se servant de (4.3.2.42) dans (4.3.2.36), il vient que pour tout entier k suffisamment grand, on a (rappelons la construction (4.3.2.3))

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{2,1,k} &\leq 4 \sum_{0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} h_{n_k}^{(l)2} \\ &\leq 4 \sum_{0 \leq l \leq R_k - 1} C h_{n_k}^{(l)} \\ &\leq h_{n_k} \times 4C \sum_{0 \leq l \leq R_k - 1} \lambda^l \\ &= h_{n_k} \times 4C \frac{\lambda^{R_k} - 1}{\lambda - 1} \\ &\leq \frac{4C \lambda}{\lambda - 1} \tilde{h}_{n_{k-1}}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente est une conséquence du fait que, par construction,

$$R_k \leq \frac{\log(\tilde{h}_{n_{k-1}}/h_{n_k})}{\log(\rho)} + 1.$$

Rappelons également que C est un paramètre ne dépendant que de $\delta > 0$ et des dimensions de H . D'après l'hypothèse (HV3), il vient que

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_{2,1,k} < \infty. \quad (4.3.2.43)$$

Contrôle de $\mathbb{P}_{2,2,k}$ Rappelons que, pour tout entier k suffisamment grand, on a posé

$$\mathbb{P}_{2,2,k} := \mathbb{P} \left(\sup_{n \in N_k, 0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} \sup_{\substack{h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq h_{n_k}^{(l+1)} \\ z \in \Gamma_{k,l,j}}} B_{k,n,h,z} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right),$$

où $B_{k,n,h,z}$ est défini par (4.3.2.35). Décomposons tout d'abord, pour tout entier k vérifiant $n_{k-1} < n_k$,

$$\mathbb{P}_{2,2,k} \leq \sum_{0 \leq l \leq R_k - 1, 1 \leq j \leq J_l} \mathbb{P}_{2,2,k,l,j},$$

où ici

$$\mathbb{P}_{2,2,k,l,j} := \mathbb{P} \left(\max_{n \in N_k} \sup_{z \in \Gamma_{k,l,j}, h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}} B_{k,n,h,z} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)n_k h \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} \geq \epsilon \right).$$

Soit k un entier suffisamment grand pour avoir $N_k \neq \emptyset$, et soient $0 \leq l \leq R_k$ et $1 \leq j \leq J_l$, $h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}$, $z \in \Gamma_{k,l,j}$ et $K \in \mathcal{G}$ quelconques. On a, en utilisant la relation $ab - 1 = (a - 1)b + (b - 1)$

$$\begin{aligned} B_{k,n,h,z} &= \left| \sqrt{\frac{2f(z_{k,l,j})n_k h_{n_k}^{(l)} \log(1/h_{n_k}^{(l)})}{2f(z)nh \log(1/h)}} - 1 \right| \\ &\leq \left| \left(\sqrt{\frac{2f(z_{k,l,j}) \log(1/h_{n_k}^{(l)})}{2f(z) \log(1/\lambda h_{n_k}^{(l)})}} - 1 \right) \sqrt{\frac{n_k h_{n_k}^{(l)}}{nh}} + \left| \sqrt{\frac{n_k h_{n_k}^{(l)}}{nh}} - 1 \right| \right| \\ &\leq \left| \left(\sqrt{\frac{2f(z_{k,l,j}) \log(1/h_{n_k}^{(l)})}{2f(z) \log(1/\lambda h_{n_k}^{(l)})}} - 1 \right) \sqrt{\frac{\lambda n_k}{n_{k-1}}} + \left| \sqrt{\frac{\lambda n_k}{n_{k-1}}} - 1 \right| \right|. \end{aligned} \tag{4.3.2.44}$$

Or on sait que, lorsque $k \rightarrow \infty$, on a $n_k/n_{k-1} \rightarrow (1 + \gamma)$. De plus, on peut supposer sans perte de généralité que $1 < \lambda < 2$. Ainsi, pour tout

entier k suffisamment grand et pour tout $0 \leq l \leq R_k$, on a

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sqrt{\frac{\lambda n_k}{n_{k-1}}} \\ &\leq 2(1 + 2\gamma)^{1/2} \\ &\leq 2(1 + 2\gamma) \end{aligned} \tag{4.3.2.45}$$

De plus, f est strictement positive et continue sur H^α et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{l=0 \dots R_k} h_{n_k}^{(l)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{h}_{n_{k-1}} = 0.$$

Ainsi, par construction des $\Gamma_{k,l,j}$ (voir (4.3.2.6)), on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq l \leq R_k, 1 \leq j \leq J_l} \sup_{z \in \Gamma_{k,l,j}} \left| \frac{f(z_{k,l,j})}{f(z)} - 1 \right| = 0. \tag{4.3.2.46}$$

Enfin, pour tout entier $k \geq 1$ entier fixé et pour tout $0 \leq l \leq R_k$ on a

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}{\log(1/\lambda h_{n_k}^{(l)})} \\ &= 1 + \frac{\log(\lambda)}{\log(1/\lambda h_{n_k}^{(l)})} \\ &\leq 1 + \frac{\log(\lambda)}{\log(1/\lambda \tilde{h}_{n_{k-1}})}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons, d'après (HV1), que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{0 \leq l \leq R_k} \left| \frac{\log(1/h_{n_k}^{(l)})}{\log(1/\lambda h_{n_k}^{(l)})} - 1 \right| = 0. \tag{4.3.2.47}$$

En se servant de (4.3.2.45), (4.3.2.46) et (4.3.2.47) dans (4.3.2.44), nous déduisons que lorsque k est suffisamment grand, on a, pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$,

$$B_{k,n,h,z} \leq 2\gamma(1 + 2\gamma) + 2\gamma. \tag{4.3.2.48}$$

Ainsi, il existe $\gamma_{1,\epsilon} > 0$ tel que, pour tout $0 < \gamma < \gamma_{1,\epsilon}$, on ait

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \in N_k, z \in H, h_{n_k} \leq h \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}} \epsilon B_{k,n,h,z}^{-1} \geq 2(1 + 2^{-1/2} 1_2 D_1(v)), \quad (4.3.2.49)$$

où A_2 et $D_1(v)$ sont définis par la proposition 4.2.2, et où $v > 0$ est donné dans l'hypothèse (HK4). Considérons, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tous $0 \leq l \leq R_k$ et $1 \leq j \leq J_l$, la classe de fonctions suivante :

$$\overline{\mathcal{F}}_{k,l,j} := \left\{ f(z)^{-1/2} K\left(\frac{\cdot - z}{h^{1/d}}\right), z \in \Gamma_{k,l,j}, h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)} \right\}.$$

Soit k un entier suffisamment grand pour avoir $N_k \neq \emptyset$, et soient $0 \leq l \leq R_k$ et $1 \leq j \leq J_l$, $h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}$, $z \in \Gamma_{k,l,j}$, $K \in \mathcal{G}$ quelconques. Un changement de variables $u := h^{-1/d}(y - z)$ montre que, d'après (HK2) et (HK3),

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(K\left(\frac{Z_1 - z}{h^{1/d}}\right)\right) &\leq h \int_{[0,1]^d} K(u) \frac{f(z + h^{1/d}u)}{f(z)} du \\ &\leq \lambda h_{n_k}^{(l)} \sup_{z \in H, u \in [0,1]^d, h_{n_k}^{(l)} \leq h \leq \lambda h_{n_k}^{(l)}} \left| \frac{f(z + h^{1/d}u)}{f(z)} \right| \\ &\leq 2h_{n_k}^{(l)} \sup_{z \in H, u \in [0,1]^d} \left| \frac{f(z + \tilde{h}_{n_{k-1}}^{1/d}u)}{f(z)} \right|. \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que $\lambda \leq 2$ et que $h_{n_k}^{(l)} \leq \tilde{h}_{n_{k-1}}$ par construction. Ainsi, par régularité de f sur H^α , et d'après (HV1), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tous $0 \leq l \leq R_k$ et $1 \leq j \leq J_l$, on a

$$\sup_{g \in \overline{\mathcal{F}}_{k,l,j}} \text{Var}\left(f(Z_1)\right) \leq 4h_{n_k}^{(l)}. \quad (4.3.2.50)$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de $f^{1/2}$ sur H . Un raisonnement similaire à celui de la preuve du lemme 4.3.1 dans le §4.3.2 montre que, pour tout entier k assez grand, toutes les classes $\overline{\mathcal{F}}_{k,l,j}$, $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$

vérifient les hypothèses (4.2.4.32) et (4.2.4.33) dans la proposition 4.2.2, avec $\tau := 2$, $\rho := 2^{1/2}A_2^{-1/2}$, $M := 1/\beta$, $n := n_k$, $h := h_{n_k}^{(l)}$ et \tilde{C} , v définis par (4.3.2.11). Supposons que $0 < \gamma < \gamma_{1,\epsilon}$, de façon à vérifier (4.3.2.49) Il vient alors que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tous $0 \leq l \leq R_k$, $1 \leq j \leq J_l$, en appliquant la proposition 4.2.2,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{2,2,k,l,j} &\leq \mathbb{P}\left(\| T_n \|_{\overline{\mathcal{F}}_{k,l,j}} \geq 4D_1(v)(2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2} \right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\| T_n \|_{\overline{\mathcal{F}}_{k,l,j}} \geq D_1(v)(\tau + \rho)(2n_k \log(1/h_{n_k}^{(l)}))^{1/2} \right) \\ &\leq 4 \exp\left(-A_2 \frac{\rho^2}{\tau^2} \log(1/h_{n_k}^{(l)}) \right) \\ &= 4h_{n_k}^{(l)2}. \end{aligned}$$

En poursuivant le calcul de la même façon que pour le contrôle de $\mathbb{P}_{2,1,k}$, on conclut que, si $0 < \gamma < \gamma_{1,\epsilon}$, alors

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_{2,2,k} < \infty. \quad (4.3.2.51)$$

Conclusion 2 En combinant (4.3.2.43) et (4.3.2.51), nous concluons que pour tout choix de $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon, \lambda_\epsilon, \gamma_{1,\epsilon}$ tels que pour tous choix de $0 < \delta \leq \delta_\epsilon$, $0 < \gamma \leq \gamma_{1,\epsilon}$, $1 < \lambda \leq \lambda_\epsilon$, on ait

$$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_{2,k} < \infty. \quad (4.3.2.52)$$

Étape 6 : Fin de la preuve de la partie (i) du théorème 4.3.2

En combinant les conclusions 1 et 2, on voit que pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\delta_\epsilon > 0$, $\gamma_{3,\epsilon} > 0$, $\lambda_\epsilon > 1$ tels que, pour tout choix de $0 < \gamma \leq \gamma_{3,\epsilon}$, $0 > \delta \leq \delta_\epsilon$, $1 < \lambda \leq \lambda_\epsilon$, on ait

$$\sum_{k \geq 1} \left(\mathbb{P}_{1,k} + \mathbb{P}_{2,k} \right) < \infty.$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, dans (4.3.2.10), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n, z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} \leq 4\epsilon. \quad (4.3.2.53)$$

La preuve de la partie (i) 4.3.2 du théorème est alors achevée car $\epsilon > 0$ est arbitraire. \square

Remarque 4.3.1 *Un coup d'oeil attentif à la preuve de la partie (i) du théorème 4.3.2 montre que l'hypothèse (HK3) peut être remplacée par l'hypothèse plus générale suivante*

$$(HK3') \quad \exists M > 0, \forall K \in \mathcal{G}, \forall x \notin [-M, M]^d, K(x) = 0.$$

4.3.3 Preuve de la partie (ii) du théorème 4.3.2

Comme \mathbb{K} est un compact de $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ (voir la propriété 4.1.1), cet ensemble peut donc être recouvert d'un nombre fini de boules de rayon ϵ , pour $\epsilon > 0$ arbitraire. La preuve de la partie (ii) se ramène donc à montrer que, pour tous $\Psi \in \mathbb{K}$ et $\epsilon > 0$, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h \in [h_n, \tilde{h}_n]} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{\sqrt{2f(z)nh \log(1/h)}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} \leq 4\epsilon.$$

Nous fixons donc $\Psi \in \mathbb{K}$ et $\epsilon > 0$ une fois pour toutes.

Étape 1 : Subdivision

Considérons un cube d'intérieur non vide

$$H' = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset H,$$

tel que $\mathbb{P}(Z_1 \in H') \leq 1/2$. Un tel choix est possible car H est supposé d'intérieur non vide. Soit $\lambda > 1$ un paramètre que nous fixerons plus

tard. Pour tout entier $n \geq 1$, nous construisons le maillage suivant de l'intervalle $[h_n, \tilde{h}_n]$.

$$\begin{aligned} h_n^{(l)} &:= \lambda^l h_n, \quad l = 0 \dots \bar{R}_n - 1, \\ h_n^{(\bar{R}_n)} &:= \tilde{h}_n, \end{aligned} \quad (4.3.3.1)$$

avec (ici $[u]$ désigne la partie entière de u)

$$\bar{R}_n := [\log(\tilde{h}_n/h_n)/\log(\lambda)] + 1,$$

de façon à avoir

$$\lambda^{\bar{R}_n-1} h_n \leq \tilde{h}_n < \lambda^{\bar{R}_n} h_n.$$

Pour tout n suffisamment grand pour vérifier $\tilde{h}_n^{-1} \prod_{p=1}^d (b_p - a_p) > 2$, posons, pour tout $0 \leq l \leq \bar{R}_n$,

$$\bar{J}_l := \left[\frac{1}{h_n^{(l)}} \prod_{p=1}^d (b_p - a_p) \right] - 1 \geq 1. \quad (4.3.3.2)$$

Pour $0 \leq l \leq \bar{R}_n$ fixé, on divise H' en sous-hypercubes disjoints inclus dans H' (ici $I^d := [0, 1]^d$)

$$\Gamma_{n,l,j} := z_{n,l,j} + h_n^{(l)1/d} I^d, \quad 1 \leq j \leq \bar{J}_l. \quad (4.3.3.3)$$

Étape 2 : Un résultat intermédiaire

Nous allons montrer que, quel que soit le choix de $\lambda > 1$, on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq l \leq \bar{R}_n} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z)}{\sqrt{2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} < \epsilon. \quad (4.3.3.4)$$

Nous avons, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_n &:= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq l \leq \bar{R}_n} \inf_{z \in H} \left\| \frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z)}{\sqrt{2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} \geq \epsilon \right) \\ &\leq \sum_{l=0}^{\bar{R}_n} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^{\bar{J}_l} \left\| \frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{\sqrt{2f(z_{n,l,j})nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} \geq \epsilon \right). \end{aligned} \quad (4.3.3.5)$$

Rappelons que $\tilde{G}_n(\cdot, h, z)$, défini par (4.3.2.14), est la version "Poissonisée" de $G_n(\cdot, h, z)$. Pour tout entier $n \geq 1$, et pour tous $0 \leq l \leq \bar{R}_n$, $1 \leq j \leq \bar{J}_l$, nous définissons l'événement suivant.

$$E_{n,l,j} = E_{n,l,j,\Psi,\epsilon} = \left\{ \left\| \frac{\tilde{G}_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{\sqrt{2f(z_{n,l,j})nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} < \epsilon \right\}. \quad (4.3.3.6)$$

Nous appliquons le lemme de Poissonisation 4.2.1 à chaque terme de (4.3.3.5). Ainsi, dès lors que n est suffisamment grand on a, A^c désignant le complémentaire d'un événement A ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_n &\leq 2 \sum_{l=0}^{\bar{R}_n} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^{\bar{J}_l} \left\| \frac{\tilde{G}_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{\sqrt{2f(z_{n,l,j})nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} \geq \epsilon \right) \\ &=: 2 \sum_{l=0}^{\bar{R}_n} \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^{\bar{J}_l} E_{n,l,j}^c \right). \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 4.2.3, et comme les $\Gamma_{n,l,j}$, $1 \leq j \leq \bar{J}_l$ sont disjoints deux à deux pour n suffisamment grand et $0 \leq l \leq \bar{R}_n$ fixés, nous déduisons que les événements $E_{n,l,j}$, $1 \leq j \leq \bar{J}_l$ sont mutuellement indépendants. Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout

$0 \leq l \leq \bar{R}_n$ on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^{\bar{J}_l} \left\| \frac{\tilde{G}_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{\sqrt{2f(z_{n,l,j})nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} - \Psi \right\|_{\mathcal{G}} > \epsilon \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{j=1}^{\bar{J}_l} E_{n,l,j}^c \right) \\
&= \prod_{j=1}^{\bar{J}_l} \left(1 - \mathbb{P}(E_{n,l,j}) \right) \\
&\leq \exp \left(- \sum_{j=1}^{\bar{J}_l} \mathbb{P}(E_{n,l,j}) \right) \tag{4.3.3.7} \\
&\leq \exp \left(- \bar{J}_l \min_{1 \leq j \leq \bar{J}_l} \mathbb{P}(E_{n,l,j}) \right).
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.3.3.7) est une conséquence de l'inégalité $1-u \leq \exp(-u)$, $u \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\mathbb{P}(E_{n,l,j}) = \mathbb{P} \left(\frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{\sqrt{2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}} \in \Psi^\epsilon \right),$$

avec

$$\Psi^\epsilon := \left\{ \Psi' \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\Psi' - \Psi\|_{\mathcal{G}} < \epsilon \right\}. \tag{4.3.3.8}$$

Rappelons que la fonction J est l'énergie gaussienne associée au processus gaussien $W_{\mathcal{G}}(\cdot)$ (voir la définition 4.1.2). La semicontinuité inférieure de J (voir la propriété 4.1.1) nous assure qu'il existe $\alpha_2 > 0$ vérifiant

$$J(\Psi^\epsilon) = 1 - 2\alpha_2. \tag{4.3.3.9}$$

Nous allons maintenant appliquer un principe de grandes déviations uniforme similaire à celui décrit dans la proposition 4.3.1. Rappelons que \mathcal{T}_0 est la tribu de $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), \|\cdot\|_{\mathcal{G}})$ engendrée par les projections coordonnées (pour plus de détails, voir la remarque 4.1.4).

Proposition 4.3.2 (Principe de grandes déviations uniforme)

Sous les hypothèses du théorème 4.3.2, les deux assertions suivantes sont vraies.

1. Pour tout fermé F appartenant à \mathcal{T}_0 , on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{l \leq \bar{R}_n, 1 \leq j \leq \bar{J}_l} \frac{1}{\log(1/h_n^{(l)})} \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{\tilde{G}_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{(2f(z_{n,l,j})nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \in F \right) \right) \leq -J(F).$$

2. Pour tout ouvert O appartenant à \mathcal{T}_0 , on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{l \leq \bar{R}_n, 1 \leq j \leq \bar{J}_l} \frac{1}{\log(1/h_n^{(l)})} \log \left(\mathbb{P} \left(\frac{\tilde{G}_n(\cdot, h_n^{(l)}, z_{n,l,j})}{(2f(z_{n,l,j})nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \in O \right) \right) \geq -J(O).$$

Ici les termes "ouvert" et "fermé" renvoient à la topologie engendrée par $\|\cdot\|_g$.

Preuve : La preuve est très similaire à celle de la proposition 4.3.1, nous n'en donnerons donc pas les détails. \square

Nous appliquons la proposition précédente à la boule ouverte $O := \Psi^\epsilon$ définie par (4.3.3.8). Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand on a, d'après (4.3.3.9),

$$\min_{0 \leq l \leq \bar{R}_n, 1 \leq j \leq \bar{J}_l} \mathbb{P}(E_{k,l,j}) \geq h_n^{(l)1-\alpha_2}.$$

Rappelons que

$$\bar{J}_l := \left[\frac{1}{h_n^{(l)}} \prod_{p=1}^d (b_p - a_p) \right] - 1.$$

Il s'ensuit alors que, pour tout entier n suffisamment grand, en notant

$$C := \prod_{p=1}^d (b_p - a_p) \quad (\text{voir 4.3.3.2}),$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_n &\leq \sum_{l=0}^{\bar{R}_n} \exp\left(-\bar{J}_l h_n^{(l)1-\alpha_2}\right) \\ &\leq \sum_{l=0}^{\bar{R}_n} \exp\left(-\left(\frac{C}{h_n^{(l)}} - 2\right)h_n^{(l)1-\alpha_2}\right) \\ &\leq (\bar{R}_n + 1) \exp\left(-\frac{C}{2} \tilde{h}_n^{-\alpha_2}\right) \\ &\leq \left(2 + \frac{\log(\tilde{h}_n/h_n)}{\log(\lambda)}\right) \exp\left(-\frac{C}{2} \tilde{h}_n^{-\alpha_2}\right). \end{aligned}$$

D'après (HV2), $\log(1/h_n) = O(\log n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et, d'après (HV3), pour tout n suffisamment grand, on a $\frac{C}{2} \tilde{h}_n^{-\alpha_2} \geq (\log n)^2 \gg 2 \log n$. On en déduit que

$$\sum_{n \geq 1} \bar{\mathbb{P}}_n < \infty,$$

ce qui prouve (4.3.3.4), par application du lemme de Borel-Cantelli.

Étape 3 : Contrôle des oscillations

Il reste donc à montrer, pour $\epsilon > 0$ fixé que, pour $\lambda > 1$ suffisamment petit, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq l \leq \bar{R}_n} \sup_{z \in H, h_n^{(l)} \leq h \leq \lambda h_n^{(l)}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z)}{(2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} \leq 3\epsilon. \quad (4.3.3.10)$$

Pour $\rho > 1$ fixé et pour $K \in \mathcal{G}$, posons

$$K_\rho(\cdot) := K\left(\frac{\cdot}{\rho^{1/d}}\right).$$

Pour $n \geq 1$ entier fixé et pour $h \in [h_n^{(l)}, \lambda h_n^{(l)}]$, posons

$$\begin{aligned} 1 &\leq \lambda' = \lambda'(h, n) := h/h_n^{(l)} \leq \lambda, \\ 0 &\leq u' = u'(h, n) := 1/\log(1/h). \end{aligned}$$

On a alors, presque sûrement, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tous $h \in [h_n^{(l)}, \lambda h_n^{(l)}]$, $z \in H$, $K \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} &= \left(\frac{h_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)})}{h \log(1/h)} \right)^{1/2} \frac{G_n(K_{\lambda'}, h_n^{(l)}, z)}{(2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \\ &= \left(\lambda'^{-1} (1 + u' \log(\lambda')) \right)^{1/2} \frac{G_n(K_{\lambda'}, h_n^{(l)}, z)}{(2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \\ &=: \alpha(\lambda', u') \frac{G_n(K_{\lambda'}, h_n^{(l)}, z)}{(2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}}. \end{aligned} \tag{4.3.3.11}$$

Remarquons que

$$\lim_{\lambda' \rightarrow 1, u' \rightarrow 0} \alpha(\lambda', u') = 1. \tag{4.3.3.12}$$

Notons, pour plus de commodité,

$$\Psi_n(K, h, z) := \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}}.$$

Supposons que $1 \leq \lambda \leq 2$, et considérons la classe de fonctions

$$\mathcal{G}' := \left\{ K_\rho, K \in \mathcal{G}, 1 \leq \rho \leq 2 \right\}.$$

Rappelons que l'hypothèse (HK3') est formulée dans la remarque 4.3.1. Clairement, \mathcal{G}' vérifie les hypothèses (HK1), (HK2), (HK3'), (HK4) et (HK5). On peut donc appliquer la partie (ii) du théorème 4.3.2. Ainsi, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n, z \in H} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}'}} \left\| \Psi_n(\cdot, h, z) - \Psi \right\|_{\mathcal{G}'} = 0, \tag{4.3.3.13}$$

où $\mathbb{K}_{\mathcal{G}'}$ est le noyau associé au processus gaussien $W_{\mathcal{G}'}(\cdot)$, centré, indexé par \mathcal{G}' , et dont la fonction de covariance est

$$\text{Cov}(W_{\mathcal{G}'}(K), W_{\mathcal{G}'}(K')) := \int_{\mathbb{R}^d} K(z)K'(z)dz, \quad K, K' \in \mathcal{G}'.$$

Pour plus de détails sur la construction de $\mathbb{K}_{\mathcal{G}'}$, nous renvoyons à la définition 4.1.2 et à la propriété 4.1.1. Soit $\alpha > 0$ et $1 \leq \lambda' \leq 2$, et soit $\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}'}$. Par définition de $\mathbb{K}_{\mathcal{G}'}$ (voir le §4.1.3), il existe $\tilde{f} \in L^*(\mathcal{G}')$, sous espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^d, m)$ engendré par \mathcal{G}' (m désignant la mesure de Lebesgue), telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}^2(z)dz \leq 1, \quad (4.3.3.14)$$

et telle que, pour tout $g \in \mathcal{G}'$ on ait

$$\Psi(g) = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z)g(z)dz.$$

Ainsi, pour tout $K \in \mathcal{G}$ on a

$$\begin{aligned} \left| \alpha \Psi(K_{\lambda'}) - \Psi(K) \right| &\leq \left| (\alpha - 1) \Psi(K_{\lambda'}) \right| + \left| \Psi(K_{\lambda'}) - \Psi(K) \right| \\ &= (\alpha - 1) \left| \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z)K_{\lambda'}(z)dz \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z)(K_{\lambda'}(z) - K(z))dz \right|. \end{aligned} \quad (4.3.3.15)$$

Remarquons que, comme \mathcal{G} vérifie (HK2) et (HK3), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} K_{\lambda'}^2(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^d} K^2\left(\frac{z}{\lambda'^{1/d}}\right) dz \\
&= \lambda' \int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz \\
&= \lambda' \int_{[0,1]^d} K^2(z) dz \\
&\leq \lambda' \\
&\leq 2.
\end{aligned} \tag{4.3.3.16}$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (4.3.3.15). Ainsi, en se servant de (4.3.3.16) et de (4.3.3.14), il vient que

$$\begin{aligned}
&|\alpha - 1| \left| \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) K_{\lambda'}(z) dz \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(z) (K_{\lambda'}(z) - K(z)) dz \right| \\
&\leq 2 |\alpha - 1| + \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(K\left(\frac{z}{\lambda'^{1/d}}\right) - K(z) \right)^2 dz \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.3.3.17}$$

En se rappelant que \mathcal{G} vérifie (HK1), on en conclut que

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 1, \lambda' \rightarrow 1} \sup_{K \in \mathcal{G}} \left| \alpha' \Psi(K_{\lambda'}) - \Psi(K) \right| = 0. \tag{4.3.3.18}$$

Ainsi, en se rappelant (4.3.3.12), nous pouvons choisir $\lambda > 1$ et $u > 0$ suffisamment petits pour avoir

$$\sup_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}'}} \sup_{1 \leq \lambda' \leq \lambda, 0 \leq u' \leq u} \sup_{K \in \mathcal{G}} \left| \alpha(\lambda', u') \Psi(K_{\lambda'}) - \Psi(K) \right| \leq \epsilon. \tag{4.3.3.19}$$

De plus, pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\forall h \in [h_n, \tilde{h}_n], 0 \leq u'(h) = \log(1/h)^{-1} \leq \log(1/\tilde{h}_n)^{-1} \leq u.$$

Ainsi, pour un choix convenable de $\lambda > 1$, on a, presque sûrement (d'après (4.3.3.11)) à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq l \leq \bar{R}_n} \sup_{z \in H, h_n^{(l)} \leq h \leq \lambda h_n^{(l)}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z)}{(2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}} \\ & \leq \sup_{1 \leq \lambda' \leq \lambda, 0 \leq u' \leq u} \sup_{h \in [h_n, \tilde{h}_n], z \in H} \sup_{K \in \mathcal{G}} | \alpha(\lambda', u') \Psi_n(K_{\lambda'}, h, z) - \Psi_n(K, h, z) | \end{aligned}$$

En appliquant (4.3.3.19), l'inégalité triangulaire pour la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{G}'}$ conduit à la majoration suivante, presque sûrement (d'après (4.3.3.11)) à partir d'un certain rang.

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq \bar{R}_n} \sup_{z \in H, h_n^{(l)} \leq h \leq \lambda h_n^{(l)}} \left\| \frac{G_n(\cdot, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \frac{G_n(\cdot, h_n^{(l)}, z)}{(2f(z)nh_n^{(l)} \log(1/h_n^{(l)}))^{1/2}} \right\|_{\mathcal{G}'} \\ & \leq 2\epsilon + \sup_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}'}} \sup_{1 \leq \lambda' \leq \lambda, 0 \leq u' \leq u} \sup_{K \in \mathcal{G}} | \alpha(\lambda', u') \Psi(K_{\lambda'}) - \Psi(K) | \\ & \leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve (4.3.3.10). La preuve de la partie (ii) du théorème 4.3.2 est alors conclue en combinant (4.3.3.10) et (4.3.3.4). \square

4.4 Applications du théorème 4.3.2

Dans ce sous-chapitre, nous donnons deux applications du théorème 4.3.2 pour connaître le comportement asymptotique presque sûr d'estimateurs à noyau. Dans le §4.4.1, nous appliquons le théorème 4.3.2 pour connaître le comportement asymptotique presque sûr de l'estimateur à noyau de la densité, lorsque la largeur de bande est aléatoire, mais dont on connaît "à peu près" le comportement presque sûr. Dans le §4.4.2, nous donnons une méthode pour estimer la densité de copule d'une loi jointe par la méthode du noyau, puis nous établissons un résultat de consistance uniforme presque sûre de cet estimateur.

4.4.1 Une application à l'estimation de la densité sur \mathbb{R}^d

Nous donnons maintenant une application possible du théorème 4.3.2 à l'estimation de la densité, lorsque la suite de largeurs de bande $(h_n^*)_{n \geq 1}$ est aléatoire. Nous nous restreignons au cas où la classe \mathcal{G} apparaissant dans le théorème 4.3.2 est un singleton $\{K\}$, où K est un noyau borné, à support compact, et à variation finie sur \mathbb{R}^d . D'après la remarque 4.1.3 et d'après le §4.2.3, les théorèmes 4.2.1 et 4.3.2 sont applicables à la classe $\{K\}$. Notre idée est la suivante : soient $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ deux suites de constantes vérifiant (HV1)-(HV3). Sous les hypothèses du théorème 4.3.2, nous savons que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n} \left| \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} \right| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}. \quad (4.4.1.1)$$

Si $(h_n^*)_{n \geq 1}$ est une suite aléatoire vérifiant, presque sûrement à partir d'un certain rang $h_n \leq h_n^* \leq \tilde{h}_n$, alors on pourrait se servir de (4.4.1.1) pour avoir une borne supérieure pour la quantité

$$\left| \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nh_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} \right|. \quad (4.4.1.2)$$

Il est cependant nécessaire de lever une ambiguïté qui apparaît dans l'expression (4.4.1.2). En effet, dans le §4.1.1, nous avons défini $G_n(K, h, z)$ pour toute constante $h > 0$ de la façon suivante :

$$G_n(K, h, z) := \sum_{i=1}^n K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right)\right) \quad (4.4.1.3)$$

$$= \sum_{i=1}^n K\left(\frac{Z_i - z}{h^{1/d}}\right) - \int_{\mathbb{R}^d} K(u) f(z + h^{1/d}u) du. \quad (4.4.1.4)$$

Bien entendu, si h_n^* dépend stochastiquement des $(Z_i)_{i \geq 1}$, alors les expressions (4.4.1.3) et (4.4.1.4) prennent un sens différent, et l'expression

(4.4.1.4) fait apparaître un "paramètre de centrage aléatoire", à savoir

$$E_0(K, h_n^*, z) := \int_{\mathbb{R}^d} K(u) f(z + h_n^{*1/d} u) du \neq \mathbb{E} \left(K \left(\frac{Z_i - z}{h_n^{*1/d}} \right) \right).$$

Pour appliquer le théorème 4.3.2 à l'estimation de la densité pour une largeur de bande aléatoire h_n^* , nous devons prendre l'expression (4.4.1.4) pour définition des $G_n(K, h, z)$, $n \geq 1$, $h > 0$, $z \in \mathbb{R}^d$, ce qui revient à centrer l'estimateur à noyau de la densité autour du paramètre (aléatoire) $E_0(K, h_n^*, z)$. Nous énonçons un premier résultat.

Proposition 4.4.1 (Un résultat de consistance uniforme) *Soient $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ deux suites de réels vérifiant (HV1)-(HV3), et K une fonction réelle sur \mathbb{R}^d , bornée, à support compact et à variation finie. Soit H un hypercube fermé d'intérieur non vide, et soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue). Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f est continue et strictement positive sur l'ensemble suivant :*

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (4.4.1.5)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Soit $(h_n^*)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires vérifiant, presque sûrement à partir d'un certain rang,

$$h_n \leq h_n^* \leq \tilde{h}_n.$$

Alors on a presque sûrement, selon la définition (4.4.1.4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2n f(z) h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}, \quad (4.4.1.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2n f(z) h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} = - \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}. \quad (4.4.1.7)$$

Preuve.

Notons

$$\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz.$$

Nous appliquons d'abord le théorème 4.3.2 aux suites $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n)_{n \geq 1}$ et à la classe de fonctions $\mathcal{G} := \{K\}$. L'ensemble $\mathbb{K}_{\mathcal{G}}$ est alors un ensemble de fonctions définies sur la classe $\{K\}$, qui peuvent donc simplement être identifiées à des réels. Cet ensemble $\mathbb{K}_{\mathcal{G}}$ peut être identifié de la façon suivante :

$$\mathbb{K}_{\mathcal{G}} := \left\{ \lambda \sigma^2, \lambda^2 \sigma^2 \leq 1 \right\}.$$

Ainsi, en appliquant le théorème 4.3.2, on a presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n} \sup_{z \in H} \inf_{\lambda^2 \sigma^2 \leq 1} \left| \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0, \quad (4.4.1.8)$$

$$\forall \lambda \in [-\sigma^{-1}, \sigma^{-1}], \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n \leq h \leq \tilde{h}_n} \inf_{z \in H} \left| \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0. \quad (4.4.1.9)$$

Soit A un événement de probabilité 1 sur lequel se réalisent (4.4.1.8), (4.4.1.9) ainsi que, pour tout entier n suffisamment grand,

$$h_n \leq h_n^* \leq \tilde{h}_n. \quad (4.4.1.10)$$

Alors, lorsque l'événement A est réalisé, on a, en combinant (4.4.1.8), (4.4.1.9) et (4.4.1.10),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf_{\lambda^2 \sigma^2 \leq 1} \left| \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2f(z)nh_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0, \quad (4.4.1.11)$$

$$\forall \lambda \in [-\sigma^{-1}, \sigma^{-1}], \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \left| \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2f(z)nh_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0. \quad (4.4.1.12)$$

En combinant (4.4.1.11) et (4.4.1.12), avec $\lambda = + - \sigma^{-1}$, il vient alors que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nf(z)h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} = \sigma,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nf(z)h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} = -\sigma.$$

La preuve de la proposition 4.4.1 se conclut alors. \square

Nous savons que les suites de tailles de fenêtre de la forme $h_n := n^{-\alpha}$, $n \geq 1$, avec $\alpha \in]0, 1[$, vérifient les conditions (HV1)-(HV3), de même que toute les suites déterministes $(h_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les conditions

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/h_n)}{\log n} < 1,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/h_n)}{\log n} > 0.$$

La proposition suivante montre que les deux conditions précédentes constituent un critère suffisant pour qu'une suite aléatoire $(h_n^*)_{n \geq 1}$ vérifie presque sûrement (4.4.1.6) et (4.4.1.7).

Proposition 4.4.2 *K une fonction réelle sur \mathbb{R}^d , bornée, à support compact et à variation finie. Soit H un hypercube fermé d'intérieur non vide, et soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f (par rapport à la mesure de Lebesgue). Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit continue et strictement positive sur l'ensemble suivant :*

$$H^\alpha := \left\{ z \in \mathbb{R}^d, \inf_{z' \in H} \|z - z'\|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (4.4.1.13)$$

où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^d . Soit $(h_n^*)_{n \geq 1}$ une

suite de variables aléatoires vérifiant, presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/h_n^*)}{\log n} < 1, \quad (4.4.1.14)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/h_n^*)}{\log n} > 0. \quad (4.4.1.15)$$

Alors on a presque sûrement, selon la définition (4.4.1.4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nf(z)h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}, \quad (4.4.1.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nf(z)h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} = - \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}. \quad (4.4.1.17)$$

Preuve. Rappelons que

$$\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz.$$

Pour $k \geq 1$ fixé, posons

$$h_n^{(k)} := n^{-(1-\frac{1}{2k})}, \quad \tilde{h}_n^{(k)} := n^{-\frac{1}{2k}}, \quad n \geq 1.$$

Clairement, les suites $(h_n^{(k)})_{n \geq 1}$ et $(\tilde{h}_n^{(k)})_{n \geq 1}$ vérifient (HV1)-(HV3). Ainsi d'après (4.4.1.8) et (4.4.1.9), les événements suivants ont une probabilité de 1 :

$$A_k := \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n^{(k)} \leq h \leq \tilde{h}_n^{(k)}} \sup_{z \in H} \inf_{\lambda^2 \sigma^2 \leq 1} \left| \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0 \right\},$$

$$B_k := \left\{ \forall \lambda \in [-\sigma^{-1}, \sigma^{-1}], \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{h_n^{(k)} \leq h \leq \tilde{h}_n^{(k)}} \inf_{z \in H} \left| \frac{G_n(K, h, z)}{(2f(z)nh \log(1/h))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0 \right\}.$$

Enfin, si une suite $(\bar{h}_n)_{n \geq 1}$ vérifie

$$\frac{1}{k} < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/\bar{h}_n)}{\log n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/\bar{h}_n)}{\log n} < 1 - \frac{1}{k},$$

alors on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$h_n^{(k)} \leq \bar{h}_n \leq \tilde{h}_n^{(k)}. \quad (4.4.1.18)$$

Pour tout entier $k \geq 1$, posons

$$C_k := \left\{ \frac{1}{k} < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/h_n^*)}{\log n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/h_n^*)}{\log n} < 1 - \frac{1}{k} \right\}.$$

D'après les hypothèses (4.4.1.14) et (4.4.1.15), on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} C_k\right) = 1.$$

Posons enfin

$$\tilde{C} := \bigcup_{k \geq 1} C_k \cap \bigcap_{k \geq 1} A_k \cap \bigcap_{k \geq 1} B_k.$$

D'après les remarques précédentes, on a $\mathbb{P}(\tilde{C}) = 1$. Soit maintenant $\omega \in \tilde{C}$ quelconque. Il existe donc $k \geq 1$ entier tel que $\omega \in A_k \cap B_k \cap C_k$. D'après (4.4.1.18) et d'après les définitions de A_k et de B_k , il vient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf_{\lambda^2 \sigma^2 \leq 1} \left| \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2f(z)nh_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0, \quad (4.4.1.19)$$

$$\forall \lambda \in [-\sigma^{-1}, \sigma^{-1}], \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \left| \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2f(z)nh_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}} - \lambda \sigma^2 \right| = 0. \quad (4.4.1.20)$$

En combinant (4.4.1.19) et (4.4.1.20), avec $\lambda = + - \sigma^{-1}$, il vient alors que,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nf(z)h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}}(\omega) &= \sigma, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in H} \frac{G_n(K, h_n^*, z)}{(2nf(z)h_n^* \log(1/h_n^*))^{1/2}}(\omega) &= -\sigma, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé. \square

4.4.2 Application à l'estimation de la densité de copule : construction et étude d'un estimateur à noyau

Dans ce sous-chapitre, nous nous intéressons à l'estimation de l'objet suivant :

Définition 4.4.1 (Fonction de copule, densité de copule) *Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de loi jointe donnée par une fonction de répartition H , et notons F et G leurs fonctions de répartition marginales respectives.*

On appelle fonction de copule la fonction de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$ définie par

$$C(u, v) := H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)).$$

Cette fonction donne une mesure de la dépendance. En effet, si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors on a

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, C(x, y) = xy .$$

On suppose que H admet une densité strictement positive $f_{X,Y}$ sur un carré $[a, b] \times [c, d]$. Notons f_X et f_Y les densités des marginales F et G . Alors C est dérivable sur $]F(a), F(b)[\times]G(a), G(b)[$. On appelle densité de copule de H sur $]F(a), F(b)[\times]G(a), G(b)[$ la fonction

$$c(u, v) := \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v), \quad (u, v) \in]F(a), F(b)[\times]G(a), G(b)[.$$

Remarque 4.4.1 *Remarquons que, pour tout $(u, v) \in]F(a), F(b)[\times]G(a), G(b)[$, on a*

$$c(u, v) = \frac{f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v))}{f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v))}.$$

On reconnaît alors le rapport entre la densité du couple (X, Y) et le produit des densités, avec une échelle modifiée par F^{-1} et G^{-1} .

L'intérêt de la densité de copule c est que cette fonction permet de mesurer la dépendance locale entre deux variables. En effet, de nombreux phénomènes ne sont stochastiquement liés entre eux que s'il prennent

des valeurs extrêmes, ou alors seulement quand il prennent des valeurs moyennes. Une valeur élevée de c signifie qu'il y a une forte dépendance locale entre X et Y , tandis qu'une valeur faible de c signifie une faible dépendance locale.

Construction d'un estimateur de c

De la même façon que pour l'estimation d'une densité de probabilité, l'idée naturelle pour construire un estimateur d'une telle densité de copule est d'étudier l'estimateur de la fonction de copule sur une fenêtre dont les dimensions convergent vers 0. Dans cette partie, pour une fonction réelle c sur \mathbb{R}^2 , on notera

$$c[u, u', v, v'] = (c(u', v') - c(u, v)) - (c(u, v') - c(u, v)) - (c(u', v) - c(u, v)).$$

Nous rappelons que

$$\begin{aligned} F_n(t) &:= \#\{1 \leq i \leq n, X_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \\ G_n(t) &:= \#\{1 \leq i \leq n, Y_i \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \\ F_n^{-1}(t) &:= \inf \{u \in \mathbb{R}, F_n(u) \geq t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \\ G_n^{-1}(t) &:= \inf \{u \in \mathbb{R}, G_n(u) \geq t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Deheuvels (voir par exemple [19, 20]) a proposé l'estimateur empirique suivant pour la fonction de copule

$$C_n(u, v) := H_n(F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v)).$$

Le premier estimateur naturel de c , en se basant sur C_n , est construit en considérant les accroissements de ce dernier, c'est à dire

$$c_n(u, v) := C_n[u, u + h_n, v, v + h_n],$$

où $(h_n)_{n \geq 1}$ est une suite de largeurs de bande convergent vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Puis, comme pour l'estimation à noyau de la densité, l'idée vient de

"convoler" cet accroissement de H_n par un noyau plus régulier que l'indicatrice de $[0, 1]^2$. On obtient ainsi la classe d'estimateurs suivante : pour tout "noyau" K , on pose

$$c_n(K, u, v) := \frac{1}{nh_n^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - F^{-1}(u)}{h_{n,1}(u)}, \frac{Y_i - G^{-1}(v)}{h_{n,2}(v)}\right)$$

où

$$h_{n,1} := F_n^{-1}(u + h_n) - F_n^{-1}(u) = X_n^{([nu+nh_n])} - X_n^{([nu])}, \quad u \in [0, 1]$$

et

$$h_{n,2} := G_n^{-1}(v + h_n) - G_n^{-1}(v) = Y_n^{([nv+nh_n])} - Y_n^{([nv])}, \quad v \in [0, 1],$$

sont des variables aléatoires dépendant de u et v . Rappelons que $X_n^{(i)}$ désigne la i -ième observation de l'échantillon $(X_i)_{i=1\dots n}$, classé dans l'ordre croissant en valeurs.

LULI pour c_n autour d'un paramètre de centrage.

Notons bien que $h_{n,1}(\cdot), h_{n,2}(\cdot)$ sont des largeurs de bande dépendant du point d'estimation (u, v) , et que ce sont des variables aléatoires dépendant des $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$. Ainsi, le biais de l'estimateur c_n est très délicat à étudier. Nous avons décidé de changer le paramètre de centrage en rendant d'une certaine manière les $h_{n,1}(\cdot), h_{n,2}(\cdot)$ "indépendants" des $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$. Nous posons, pour tout $(u, v) \in]0, 1[^2$,

$$\tilde{\mathbb{E}}_n(K, u, v) := \int_{\mathbb{R}^2} K\left(\frac{F^{-1}(u) - u'}{h_{n,1}(u)}, \frac{G^{-1}(v) - v'}{h_{n,2}(v)}\right) f_{X,Y}(u', v') du' dv'$$

et

$$c'_n(K, u, v) := c_n(K, u, v) - \tilde{\mathbb{E}}_n(K, u, v).$$

La proposition suivante est une application des lois fonctionnelles uniformes du logarithme itéré pour les accroissements du processus des

quantiles, obtenues par Deheuvels et Mason [33]. On obtient ainsi le comportement presque sûr de $(h_{n,1}(u), h_{n,2}(v))$, asymptotiquement en n et uniformément en (u, v) .

Proposition 4.4.3 *Supposons que $(h_n^2)_{n \geq 1}$ satisfait (HV1) – (HV3). Supposons que f_X et f_Y sont uniformément continues et strictement positives sur des intervalles respectifs $[a-\gamma, b+\gamma]$ et $[c-\gamma, d+\gamma] \subset [0, 1]$ avec $\gamma > 0$. Alors F et G sont des bijections de $[a, b]$ vers $[F(a), F(b)]$ et de $[c, d]$ vers $[F(c), F(d)]$ respectivement. De plus on a presque sûrement*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [F(a), F(b)]} \left| \frac{h_n}{h_{n,1}(u) f_X(F^{-1}(u))} - 1 \right| = 0, \quad (4.4.2.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{v \in [G(c), G(d)]} \left| \frac{h_n}{h_{n,2}(v) f_Y(G^{-1}(v))} - 1 \right| = 0. \quad (4.4.2.2)$$

Preuve.

En utilisant la représentation des quantiles, nous pouvons supposer qu'il existe une suite i.i.d $(U_i)_{i \geq 1}$ uniformément distribuée sur $[0, 1]$, basée sur le même espace probabilisé que les $(X_i)_{i \geq 1}$, et vérifiant, pour tout entier $i \geq 1$,

$$X_i = F^{-1}(U_i).$$

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(t) &:= \#\{1 \leq i \leq n, U_i \leq t\}, \quad n \geq 1, t \in [0, 1], \\ \tilde{F}_n^{-1}(t) &:= \inf \{u \geq 0, \tilde{F}_n(u) \geq t\}, \quad n \geq 1, t \in [0, 1], \\ \beta_n(t) &:= n^{1/2} \left(\tilde{F}_n^{-1}(t) - t \right). \end{aligned}$$

On a, pour tout $u \in [F(a), F(b)]$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned} F_n^{-1}(u + h_n) - F_n^{-1}(u) &= F^{-1}\left(\tilde{F}_n^{-1}(u + h_n)\right) - F^{-1}\left(\tilde{F}_n^{-1}(u)\right) \\ &= \frac{1}{f_X(F^{-1}(u_n))} \left(\tilde{F}_n^{-1}(u + h_n) - \tilde{F}_n^{-1}(u)\right) \\ &= \frac{1}{f_X(F^{-1}(u_n))} \left(h_n + \frac{1}{n^{1/2}}(\beta_n(u + h_n) - \beta_n(u))\right), \end{aligned}$$

avec $u_n = u_n(u) \in [u, u + h_n]$. En appliquant la LFULI pour les accroissements de β_n (voir [33]), il vient que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [F(a), F(b)]} \left| \frac{h_n + n^{-1/2}(\beta_n(u + h_n) - \beta_n(u))}{h_n} - 1 \right| = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [F(a), F(b)]} |u_n - u| = 0.$$

Comme f_X est uniformément continue sur $[a - \gamma, b + \gamma]$, il vient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [F(a), F(b)]} \left| \frac{h_n}{h_{n,1}(u)f_X(F^{-1}(u))} - 1 \right| = 0.$$

Ainsi, (4.4.2.1) est prouvée. La preuve de (4.4.2.2) est similaire. \square

La proposition précédente nous permet d'établir le résultat suivant.

Proposition 4.4.4 *Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes telle que la suite $(h_n^2)_{n \geq 1}$ satisfait (HV1) – (HV3), et soit K une fonction réelle Borélienne sur \mathbb{R}^d , à support compact et à variation bornée. Soit $\left((X_i, Y_i)\right)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la loi jointe admet une densité uniformément continue et strictement positive sur un rectangle*

$]a - \gamma, b + \gamma[\times]c - \gamma, d + \gamma[$ où $\gamma > 0$. Alors on a presque sûrement

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in [F(a), F(b)], v \in [G(c), G(d)]} \frac{\sqrt{nh_n^2 f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v))} c'_n(K, u, v)}{\sqrt{2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2)}} \\ & \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}, \end{aligned} \quad (4.4.2.3)$$

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in [F(a), F(b)], v \in [G(c), G(d)]} \frac{\sqrt{nh_n^2 f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v))} c'_n(K, u, v)}{\sqrt{2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2)}} \\ & \geq - \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(z) dz}. \end{aligned} \quad (4.4.2.4)$$

Preuve.

Comme $f_{X,Y}$ est continue et strictement positive sur $]a - \gamma, b + \gamma[\times]c - \gamma, d + \gamma[$, on en déduit qu'il existe $\gamma' > 0$ tel que $f_X(F^{-1}(\cdot))$ soit continue et strictement positive sur $]F(a) - \gamma', F(b) + \gamma'[$, tel que $f_Y(G^{-1}(\cdot))$ soit continue et strictement positive sur $]G(c) - \gamma', G(d) + \gamma'[$, et tel que $f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$ soit continue en (u, v) et strictement positive sur $]F(a) - \gamma', F(b) + \gamma'[\times]G(c) - \gamma', G(d) + \gamma'[$. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Pour tout $(u, v) \in [F(a), F(b)] \times [G(c), G(d)]$, il existe un cube fermé

d'intérieur non vide $\Gamma_{u,v} = \Gamma_{u,v}^1 \times \Gamma_{u,v}^2$ vérifiant les conditions suivantes

$$\Gamma_{u,v} \subset]F(a) - \frac{\gamma'}{2}, F(b) + \frac{\gamma'}{2}[\times]G(c) - \frac{\gamma'}{2}, G(d) + \frac{\gamma'}{2}[, \quad (4.4.2.5)$$

$$\sup_{u_1, u_2 \in \Gamma_{u,v}^1} \left| \frac{f_X(F^{-1}(u_1))}{f_X(F^{-1}(u_2))} - 1 \right| < \epsilon/2, \quad (4.4.2.6)$$

$$\sup_{v_1, v_2 \in \Gamma_{u,v}^2} \left| \frac{f_Y(G^{-1}(v_1))}{f_Y(G^{-1}(v_2))} - 1 \right| < \epsilon/2, \quad (4.4.2.7)$$

$$\sup_{(u_1, v_1) \in \Gamma_{u,v}, (u_2, v_2) \in \Gamma_{u,v}} \left| \frac{f_{X,Y}(F^{-1}(u_1), G^{-1}(v_1))}{f_{X,Y}(F^{-1}(u_2), G^{-1}(v_2))} - 1 \right| < \epsilon/2. \quad (4.4.2.8)$$

On a donc le recouvrement suivant :

$$\begin{aligned} [F(a), F(b)] \times [G(c), G(d)] &\subset \bigcup_{(u,v) \in [F(a), F(b)] \times [G(c), G(d)]} \Gamma_{u,v} \\ &\subset]F(a) - \frac{\gamma'}{2}, F(b) + \frac{\gamma'}{2}[\times]G(c) - \frac{\gamma'}{2}, G(d) + \frac{\gamma'}{2}[. \end{aligned} \quad (4.4.2.9)$$

Comme $[F(a), F(b)] \times [G(c), G(d)]$ est compact, on extrait de (4.4.2.9) un recouvrement fini, que l'on note

$$\begin{aligned} [F(a), F(b)] \times [G(c), G(d)] &\subset \bigcup_{p=1}^P \Gamma_{u_p, v_p} \\ &\subset]F(a) - \frac{\gamma'}{2}, F(b) + \frac{\gamma'}{2}[\times]G(c) - \frac{\gamma'}{2}, G(d) + \frac{\gamma'}{2}[. \end{aligned} \quad (4.4.2.10)$$

Pour tous $\rho_1, \rho_2 > 0$, nous notons

$$K_{\rho_1, \rho_2}(u, v) := K\left(\frac{u}{\rho_1}, \frac{v}{\rho_2}\right), (u, v) \in]0, 1[^2.$$

Pour $1 \leq p \leq P$ fixé, considérons la classe de fonctions suivante :

$$\mathcal{G}_{p,\epsilon} := \left\{ K_{\rho_1, \rho_2}, \frac{\rho_1}{f_X(F^{-1}(u_p))} \in [1-\epsilon, 1+\epsilon], \frac{\rho_2}{f_Y(G^{-1}(v_p))} \in [1-\epsilon, 1+\epsilon] \right\}. \quad (4.4.2.11)$$

Notons

$$\sigma^2 := \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u, v) dudv.$$

Remarquons que, pour tout $\rho_1, \rho_2 > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} K^2\left(\frac{u}{\rho_1}, \frac{v}{\rho_2}\right) dudv = \rho_1 \rho_2 \sigma^2.$$

On en déduit que

$$\sup_{K' \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \int_{\mathbb{R}^2} K'^2(u, v) dudv = \sigma^2 (1 + \epsilon)^2 f_X(F^{-1}(u_p)) f_Y(G^{-1}(v_p)).$$

Rappelons que $\mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}$ est défini dans la définition 4.1.2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz combinée avec la définition de $\mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}$ nous assure que

$$\begin{aligned} \sup_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}} \sup_{g \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \Psi(g) &= \sup_{K' \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} K'^2(u, v) dudv} \\ &= \sigma (1 + \epsilon) \sqrt{f_X(F^{-1}(u_p)) f_Y(G^{-1}(v_p))} \quad (4.4.2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}} \inf_{g \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \Psi(g) &= - \sup_{K' \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} K'^2(u, v) dudv} \\ &= - \sigma (1 + \epsilon) \sqrt{f_X(F^{-1}(u_p)) f_Y(G^{-1}(v_p))}. \quad (4.4.2.13) \end{aligned}$$

Clairement, la classe de fonctions $\mathcal{G}_{p,\epsilon}$ vérifie les hypothèses (HK1)-(HK'2)-(HK'3)-(HK4)-(HK5) (voir le §4.2.3). Nous appliquons le théo-

rème 4.2.1 à $\mathcal{G}_{p,\epsilon}$ et à la suite $(h_n^2)_{n \geq 1}$. On a donc, presque sûrement,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(u,v) \in \Gamma_{(u_p, v_p)}} \inf_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}} \\ & \sup_{g \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \left| \frac{G_n \left(g, (F^{-1}(u), G^{-1}(v)), h_n^2 \right)}{\left(2nh_n^2 f_{X,Y} \left(F^{-1}(u), G^{-1}(v) \right) \log(1/h_n^2) \right)^{1/2}} - \Psi(g) \right| = 0. \end{aligned} \quad (4.4.2.14)$$

On en déduit alors, en utilisant (4.4.2.12) et (4.4.2.13), que

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(u,v) \in \Gamma_{(u_p, v_p)}} \sup_{\rho_1 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon], \rho_2 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]} \\ & \frac{G_n \left(K_{\rho_1, \rho_2}, (F^{-1}(u), G^{-1}(v)), h_n^2 \right)}{\left(2nh_n^2 f_{X,Y} \left(F^{-1}(u), G^{-1}(v) \right) \log(1/h_n^2) \right)^{1/2}} \\ & = \sup_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}, g \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \\ & = \sigma(1 + \epsilon), \end{aligned} \quad (4.4.2.15)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{(u,v) \in \Gamma_{(u_p, v_p)}} \inf_{\rho_1 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon], \rho_2 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]} \\ & \frac{G_n \left(K_{\rho_1, \rho_2}, (F^{-1}(u), G^{-1}(v)), h_n^2 \right)}{\left(2nh_n^2 f_{X,Y} \left(F^{-1}(u), G^{-1}(v) \right) \log(1/h_n^2) \right)^{1/2}} \\ & = \inf_{\Psi \in \mathbb{K}_{\mathcal{G}_{p,\epsilon}}, g \in \mathcal{G}_{p,\epsilon}} \\ & = -\sigma(1 + \epsilon). \end{aligned} \quad (4.4.2.16)$$

Soit maintenant $A_{p,\epsilon}$ un ensemble de probabilité 1 sur lequel se réalisent (4.4.2.1), (4.4.2.2), (4.4.2.15) et (4.4.2.16). Soit $\omega \in A_{p,\epsilon}$ quelconque. On a donc, d'après (4.4.2.1), pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $(u, v) \in \Gamma_{u_p, v_p}$,

$$\frac{h_{n,1}(u)(\omega)}{f_X(F^{-1}(u))h_n} \in [1 - \epsilon/2, 1 + \epsilon/2].$$

Ainsi, d'après (4.4.2.6), on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\frac{h_{n,1}(u)(\omega)}{f_X(F^{-1}(u_p))h_n} \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]. \quad (4.4.2.17)$$

De la même façon, en combinant (4.4.2.2) et (4.4.2.7), on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\frac{h_{n,2}(u)(\omega)}{f_Y(G^{-1}(v_p))h_n} \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]. \quad (4.4.2.18)$$

En combinant (4.4.2.17) et (4.4.2.18), on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $(u, v) \in \Gamma_{u_p, v_p}$,

$$c'_n(K, u, v) \in \left\{ G_n \left(K_{\rho_1, \rho_2}, (F^{-1}(u), G^{-1}(v)), h_n^2 \right), \right. \\ \left. f_X(F^{-1}(u_p))^{-1} \rho_1 \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon], f_Y(G^{-1}(v_p))^{-1} \rho_2 \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \right\}$$

Ainsi, d'après (4.4.2.15) et (4.4.2.16), on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $(u, v) \in \Gamma_{u_p, v_p}$,

$$\begin{aligned} & \frac{c'_n(K, u, v)}{(2nh_n^2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2))^{1/2}}(\omega) \\ & \leq \sup_{\substack{f_X(F^{-1}(u_p))^{-1} \rho_1 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon], \\ f_Y(G^{-1}(v_p))^{-1} \rho_2 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon]}} \\ & \quad \frac{G_n \left(K_{\rho_1, \rho_2}, (F^{-1}(u), G^{-1}(v)), h_n^2 \right)}{(2nh_n^2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2))^{1/2}} \\ & \leq \sigma(1 + \epsilon) \sqrt{f_X(F^{-1}(u_p)) f_Y(G^{-1}(v_p))} \quad (4.4.2.19) \end{aligned}$$

$$\leq \sigma(1 + \epsilon)^2 \sqrt{f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v))}. \quad (4.4.2.20)$$

La ligne (4.4.2.19) est une conséquence de (4.4.2.12) et (4.4.2.12), et la dernière ligne est une conséquence de (4.4.2.6) et (4.4.2.7). Comme $1 \leq p \leq P$ est arbitraire, il vient que, presque sûrement, pour tout

entier n suffisamment grand, on a

$$\sup_{(u,v) \in \Gamma_{u_p, v_p}} \frac{\sqrt{f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v)) c'_n(K, u, v)}}{\sqrt{2nh_n^2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2)}} \leq \sigma(1 + \epsilon)^2.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, il vient que, presque sûrement,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{(u,v) \in \Gamma_{u_p, v_p}} \frac{\sqrt{f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v)) c'_n(K, u, v)}}{\sqrt{2nh_n^2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2)}} \leq \sigma.$$

De la même façon, on montre que, presque sûrement,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{(u,v) \in \Gamma_{u_p, v_p}} \frac{\sqrt{f_X(F^{-1}(u)) f_Y(G^{-1}(v)) c'_n(K, u, v)}}{\sqrt{2nh_n^2 f_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \log(1/h_n^2)}} \geq -\sigma.$$

La preuve de la proposition 4.4.4 est alors achevée. \square

Chapitre 5

Domaine de non invariance pour les accroissements du processus empirique multivarié

5.1 Introduction et notations

Dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement limite des accroissements du processus empirique multivarié sur \mathbb{R}^d , dans le cas où la suite de tailles de fenêtre $(h_n)_{n \geq 1}$ est dans le "domaine de non invariance", ou "domaine d'Erdős-Rényi". Nous entendons qu'une suite de réels $(h_n)_{n \geq 1}$ est dans le domaine de non invariance lorsqu'elle vérifie, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$(HVE1) \quad 0 < h_n < 1, \quad h_n \downarrow 0, \quad nh_n \uparrow \infty,$$

$$(HVE2) \quad nh_n / \log n \rightarrow c > 0.$$

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. à valeurs dans \mathbb{R}^d , dont la loi commune admet une densité f . Pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(z) > 0$ et pour tout $s = (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d$, on définit

$$\Delta_n(z, h_n, s) := \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_i - z}{h_n^{1/d}} \right)}{cf(z) \log n}. \quad (5.1.0.1)$$

Remarquons que, pour z et n fixés, $\Delta_n(z, h_n, \cdot)$ est presque sûrement la fonction de répartition d'une mesure positive finie sur $[0, 1]^d$. Pour tout Borélien $A \subset [0, 1]^d$, on notera la mesure de A associée à $\Delta_n(z, h_n, \cdot)$ de la façon suivante.

$$\Delta_n(z, h_n, A) := \int_{[0, 1]^d} 1_A(s) d\Delta_n(z, h_n, s).$$

Nous notons $\mathcal{B}([0, 1]^d)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles bornées sur $[0, 1]^d$, et pour tout $f \in \mathcal{B}([0, 1]^d)$, nous notons

$$\|f\| := \sup_{z \in [0, 1]^d} |f(z)|. \quad (5.1.0.2)$$

Il nous sera plus pratique de considérer les processus $\Delta_n(z, h_n, \cdot)$, $n \geq 1$, $z \in \mathbb{R}^d$, $f(z) > 0$ comme des fonctions de répartition aléatoires, plutôt que comme des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{B}([0, 1]^d)$.

Définition 5.1.1 *On définit $\mathcal{M}([0, 1]^d)$ comme le cône des fonctions de répartition de mesures positives finies sur $[0, 1]^d$. Pour $A \subset [0, 1]^d$ et $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$, on notera*

$$g(A) := \int_A dg. \quad (5.1.0.3)$$

$\mathcal{M}([0, 1]^d)$ est un fermé de $(\mathcal{B}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$.

Remarque 5.1.1 *A partir de maintenant, nous considérons les $\Delta_n(\cdot, h_n, z)$ comme des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}([0, 1]^d)$, muni de la tribu engendrée par les projections coordonnées.*

Le comportement asymptotique en n des $\Delta_n(z, h_n, \cdot)$ lorsque $(h_n)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions (HVE1) et (HVE2), est déterminé par les propriétés de déviations modérées d'un processus de Poisson homogène sur $[0, 1]^d$. Ces déviations modérées sont décrites par la fonction de coût suivante (voir la définition 3.1.1 pour plus de détails).

Définition 5.1.2 (Fonction de coût I) Soit $c > 0$. Pour une fonction réelle $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$ admettant une densité g' par rapport à la mesure de Lebesgue λ , on pose

$$I(g) := \int_{[0, 1]^d} h(g') d\lambda, \quad (5.1.0.4)$$

où

$$\begin{aligned} h(x) &:= x \log x - x + 1, \quad x \in]0, \infty[, \\ h(0) &= \infty. \end{aligned} \quad (5.1.0.5)$$

Pour toute autre fonction $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$, on pose

$$I(g) := \infty.$$

On définit ensuite pour tout $c > 0$,

$$\Gamma_c := \left\{ g \in \mathcal{M}([0, 1]^d), I(g) \leq 1/c \right\}. \quad (5.1.0.6)$$

La propriété suivante montre que I est bien une fonction de coût sur $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$.

Propriété 5.1.1 (Propriétés de I) I est une fonction de coût sur $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$. Autrement dit, pour tout $c > 0$, Γ_c est un compact de $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$.

Preuve. Pour $p \geq 1$ entier et pour $\vec{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \{1, \dots, 2^p\}^d$ on pose

$$A_{\vec{i}}^p := [2^{-p}(i_1 - 1), 2^{-p}i_1[\times \dots \times [2^{-p}(i_d - 1), 2^{-p}i_d[.$$

On définit également la fonction I_p sur $[0, \infty[^{2^{pd}}$ de la façon suivante : Pour tout $x = (x_{1,1,\dots,1}, \dots, x_{2^p,1,\dots,1}, \dots, x_{2^p,\dots,2^p,1}, \dots, x_{2^p,\dots,2^p}) \in [0, \infty[^{2^{pd}}$, on pose

$$I_p(x) := \sum_{1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_p \leq 2^p} 2^{-pd} h(2^{pd} x_{i_1, \dots, i_d}).$$

En appliquant la proposition 3.4.2, nous savons que, pour toute fonction $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$, on a (voir la notation 5.1.0.3)

$$I(g) = \sup_{p \geq 1} I_p \left(g(A_{1,1,\dots,1}^p), \dots, g(A_{2^p,1,\dots,1}^p), \dots, f g A_{2^p,\dots,2^p,1}^p), \dots, g(A_{2^p,\dots,2^p}^p) \right).$$

En conséquence, I est une fonction semi-continue inférieurement sur $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ en tant que limite croissante de fonctions semi-continues inférieurement sur $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$. Comme $\mathcal{M}([0, 1]^d)$ est un fermé de $(\mathcal{B}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ et que I est semi-continue inférieurement sur $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$, nous en déduisons qu'il nous suffit de montrer que, pour tout $a > 0$, l'ensemble Γ_a est relativement compact dans $(\mathcal{B}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$. Pour cela, nous allons appliquer le théorème d'Arzela-Ascoli. Nous munissons $[0, 1]^d$ de la norme suivante.

$$\|s\|_\infty := \max_{i=1,\dots,d} |s_i|, \quad s := (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d. \quad (5.1.0.7)$$

Rappelons que λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$. Clairement on a (h est défini par (5.1.0.5))

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \infty. \quad (5.1.0.8)$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque et soit $A > 0$ tel que

$$\inf_{x > A} \frac{h(x)}{x} > \frac{1}{a\epsilon}. \quad (5.1.0.9)$$

Clairement on a, pour tout $g \in \Gamma_a$,

$$\begin{aligned} \int_{\{g' \geq A\}} \frac{g'}{a\epsilon} d\lambda &\leq \int_{\{g' \geq A\}} \frac{h(g')}{g'} g' d\lambda \\ &\leq \int_{[0,1]^d} h(g') d\lambda \\ &\leq \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{g' \geq A} g' d\lambda \leq \epsilon. \quad (5.1.0.10)$$

Posons $\eta := A^{-1}d^{-1}\epsilon$. Soient $s, s' \in [0, 1]^d$ tels que $\|s - s'\|_\infty \leq \eta$ (voir (5.1.0.7)), et soit $g \in \Gamma_a$ quelconques. On a, en notant $s = (s_1, \dots, s_d)$ et $s' = (s'_1, \dots, s'_d)$,

$$\begin{aligned} |g(s') - g(s)| &= \left| \int_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} g' d\lambda - \int_{[0, s'_1] \times \dots \times [0, s'_d]} g' d\lambda \right| \\ &\leq \int_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d] \Delta [0, s'_1] \times \dots \times [0, s'_d]} g' d\lambda, \end{aligned} \quad (5.1.0.11)$$

Ici, Δ désigne la différence symétrique, c'est à dire $A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$ pour deux ensembles A et B . Or, comme $\|s - s'\|_\infty \leq \eta$, il vient que

$$\lambda\left([0, s_1] \times \dots \times [0, s_d] \Delta [0, s'_1] \times \dots \times [0, s'_d]\right) \leq d\eta \leq \frac{\epsilon}{A}.$$

Ainsi, en combinant (5.1.0.11) et (5.1.0.10), nous avons

$$\begin{aligned} |g(s') - g(s)| &= \int_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d] \Delta [0, s'_1] \times \dots \times [0, s'_d]} (g' 1_{g' \leq A} + g' 1_{g' \geq A}) d\lambda \\ &\leq A\lambda\left([0, s_1] \times \dots \times [0, s_d] \Delta [0, s'_1] \times \dots \times [0, s'_d]\right) + \epsilon \\ &= 2\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, Γ_a est un ensemble uniformément $\|\cdot\|_\infty$ -équicontinu, et donc relativement compact dans $(\mathcal{B}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ ce qui conclut la preuve de la propriété 5.1.1. \square

En s'inspirant des travaux d'Erdős et Rényi [48], Deheuvels et Mason ont établi une loi fonctionnelle uniforme du logarithme itéré **non standard** pour le processus empirique uniforme c'est à dire dans le cas

où $d = 1$ et où les Z_i suivent une loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous rappelons que, pour toute fonction f définie et bornée sur $[0, 1]^d$, nous avons défini la norme

$$\| f \| := \sup_{t \in [0, 1]^d} | f(t) | .$$

Théorème 5.1.1 (LFULI non standard, Deheuvels Mason, 1992)

Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ une suite i.i.d. uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Soit (h_n) suite une suite de constantes vérifiant (HVE1) et (HVE2), avec $d = 1$. Alors on a presque sûrement, pour $d = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in [0, 1 - h_n]} \inf_{f \in \Gamma_c} \| \Delta_n(z, h_n, \cdot) - f \| = 0,$$

$$\forall f \in \Gamma_c, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{z \in [0, 1 - h_n]} \| \Delta_n(z, h_n, \cdot) - f \| = 0.$$

Preuve.

Voir [33]. \square

En nous inspirant de leurs travaux, nous établissons un théorème similaire dans le cas multivarié.

5.2 Énoncé du résultat

Voici l'énoncé de notre résultat.

Théorème 5.2.1 (LFULI non standard) *Soit $(Z_i)_{i \geq 1}$ un échantillon i.i.d dont la loi sur \mathbb{R}^d admet une densité f . Soit H un compact d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d , et soit $\alpha > 0$. Supposons que f est continue et strictement positive sur l'ensemble suivant.*

$$H^\alpha := \left\{ z' \in \mathbb{R}^d, \inf_{z \in H} \| z' - z \|_{\mathbb{R}^d} < \alpha \right\}, \quad (5.2.0.12)$$

où $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^d}$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Soit $(h_n)_{n \geq 1}$ une suite de constantes vérifiant (HVE1) et (HVE2). Alors on a presque

sûrement

$$(i) \forall z \in H, \forall g \in \Gamma_{cf(z)}, \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \|\Delta_n(z', h_n, \cdot) - g\|, z' \in H \right\} = 0, \quad (5.2.0.13)$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \inf \left\{ \|\Delta_n(z, h_n, \cdot) - g\|, g \in \Gamma_{cf(z)} \right\} = 0. \quad (5.2.0.14)$$

Remarque 5.2.1 *L'expression de (ii) et (i) est moins claire que dans le théorème 5.1.1 du fait que le processus empirique multivarié n'est pas homogène : le nombre de points capturés dans une fenêtre de taille $h_n^{1/d}$ autour d'un point z est en moyenne de $nh_n f(z) \sim cf(z) \log n$. Cette moyenne varie avec $z \in H$, ce qui n'est pas le cas dans le théorème 5.1.1, où les $(Z_i)_{n \geq 1}$ suivent une loi uniforme, et où f est donc constante.*

La preuve du théorème 5.2.1 sera naturellement divisée en deux parties, consacrées la première à la preuve de la partie (i) du théorème 5.2.1 et la seconde à la preuve de la partie (ii) du théorème 5.2.1.

5.3 Preuve de la partie (i) du théorème 5.2.1

5.3.1 Subdivision de H

Soit $z \in H$, $g \in \Gamma_{cf(z)}$, et $\epsilon > 0$ fixés. Rappelons que

$$g^\epsilon := \left\{ g' \in \mathcal{M}([0, 1]^d), \|g' - g\| < \epsilon \right\}. \quad (5.3.1.1)$$

Par semicontinuité inférieure de I dans $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ (voir la propriété 5.1.1), on sait qu'il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$I(g^\epsilon) = \frac{1 - 3\alpha_1}{cf(z)}. \quad (5.3.1.2)$$

Considérons un hypercube d'intérieur non vide $H' := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$ tel que $\mathbb{P}(Z_1 \in H') \leq 1/2$, et tel que

$$\inf_{z' \in H'} \frac{f(z')}{f(z)} > \frac{1 - 2\alpha_1}{1 - \alpha_1}. \quad (5.3.1.3)$$

Nous divisons ensuite H' en cubes disjoints $z_{i,n} +]0, h_n^{1/d}]^d$, $1 \leq i \leq m_n$, où m_n est le nombre maximal de cubes disjoints que l'on peut construire tout en vérifiant

$$\bigcup_{i=1}^{m_n} \left\{ z_i +]0, h_n^{1/d}]^d \right\} \subset H'. \quad (5.3.1.4)$$

Remarquons que, lorsque $n \rightarrow \infty$, on a

$$m_n = h_n^{-1+o(1)}. \quad (5.3.1.5)$$

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\Delta\Pi_n$ la version "Poissonisée" de Δ_n , c'est à dire, pour $s := (s_1, \dots, s_p) \in [0, 2]^d$,

$$\Delta\Pi_n(z, h_n, s) := \frac{\sum_{i=1}^{\eta_n} \mathbf{1}_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_i - z}{h_n^{1/d}} \right)}{cf(z) \log n}, \quad (5.3.1.6)$$

où η_n est une variable aléatoire de Poisson d'espérance n , indépendante de l'échantillon $(Z_i)_{i \geq 1}$. En appliquant une technique de Poissonisation (voir par exemple [77]), il vient que, pour tout entier $n \geq 1$ suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{z' \in H} \left\{ \Delta_n(z', h_n, \cdot) \notin g^\epsilon \right\} \right) &\leq \mathbb{P} \left(\bigcap_{z' \in H'} \left\{ \Delta_n(z', h_n, \cdot) \notin g^\epsilon \right\} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq i \leq m_n} \left\{ \Delta_n(z_{i,n}, h_n, \cdot) \notin g^\epsilon \right\} \right) \\ &\leq 2\mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq i \leq m_n} \left\{ \Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, \cdot) \notin g^\epsilon \right\} \right) \\ &=: 2\mathbb{P} \left(\bigcap_{1 \leq i \leq m_n} E_{n,i} \right). \end{aligned} \quad (5.3.1.7)$$

Notons pour une fonction f sur $[0, 1]^d$, $\text{supp}(f) := \{f \neq 0\}$. Remarquons que, pour tout entier n suffisamment grand, et pour tous $1 \leq i \neq i' \leq m_n$ et pour tout $s = (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d$, on a

$$\text{supp} \left(\mathbf{1}_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{\cdot - z_{i,n}}{h_n^{1/d}} \right) \right) \cap \text{supp} \left(\mathbf{1}_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{\cdot - z_{i',n}}{h_n^{1/d}} \right) \right) = \emptyset. \quad (5.3.1.8)$$

Ainsi, d'après une propriété élémentaire des processus de Poisson composés, nous déduisons que, pour tout entier $n \geq 1$, les événements $E_{n,i}$, $1 \leq i \leq m_n$ sont mutuellement indépendants. Ainsi, d'après (5.3.1.7), nous avons, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{z' \in H} \left\{ \Delta_n(z', h_n, \cdot) \notin g^\epsilon \right\}\right) &\leq 2 \prod_{1 \leq i \leq m_n} \mathbb{P}(E_{n,i}) \\ &\leq 2 \prod_{1 \leq i \leq m_n} \left(1 - \mathbb{P}\left(\Delta \Pi_n(z_i, h_n, \cdot) \in g^\epsilon\right)\right) \\ &\leq 2 \exp\left(-m_n \min_{1 \leq i \leq m_n} \mathbb{P}\left(\Delta \Pi_n(z_i, h_n, \cdot) \in g^\epsilon\right)\right) \end{aligned} \quad (5.3.1.9)$$

Pour aboutir à l'inégalité (5.3.1.9), nous avons utilisé la relation $1 - u \leq \exp(-u)$, $u \geq 0$. Dans le but de contrôler le majorant dans (5.3.1.9) nous allons établir le principe de grandes déviations uniforme suivant.

5.3.2 Principe de grandes déviations

La proposition suivante fournit l'outil principal de la preuve du théorème 5.2.1. Nous renvoyons aux définitions 3.3.4 et 3.2.1 pour les définitions des notions qui apparaissent dans la proposition suivante.

Proposition 5.3.1 (Principe uniforme de grandes déviations)

Soit $(z_{i,n})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$ un tableau triangulaire quelconque de points de H . Sous les hypothèses du théorème 5.2.1, le tableau triangulaire

$$\left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, \cdot)\right)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme dans $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ pour le tableau triangulaire de vitesses

$$\epsilon_{n,i} := \frac{1}{cf(z_{i,n}) \log n}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m_n, \quad (5.3.2.1)$$

et pour la fonction de coût I .

Remarque 5.3.1 *Nous soulignons que la proposition 5.3.1 est valable quelle que soit la valeur de $c > 0$ dans l'hypothèse (HVE1).*

Preuve.

Nous allons appliquer la proposition 3.3.1. Pour cela nous devons montrer les hypothèses 1, 2 et 3 de cette proposition sont vérifiées. Nous munissons $[0, 1]^d$ de la norme euclidienne usuelle. Pour tout entier $p \geq 1$, on divise le cube $[0, 1]^d$ en petits cubes disjoints d'arrête 2^{-p} , notés

$$[0, 1]^d := \bigcup_{1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p} C_{\vec{i}, p},$$

où, en notant $\vec{i} = (i_1, \dots, i_d)$, on a posé

$$C_{\vec{i}, p} := \left(\frac{i_1 - 1}{2^p}, \dots, \frac{i_d - 1}{2^p} \right) + [0, 2^{-p}]^d. \quad (5.3.2.2)$$

Clairement, la réunion d'ensembles

$$\bigcup_{p \geq 1} \left\{ \left(\frac{i_1}{2^p}, \dots, \frac{i_d}{2^p} \right), 1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p \right\}$$

est dense dans $[0, 1]^d$.

Un lemme préliminaire

Rappelons que h est définie par

$$h(x) := x \log x - x + 1, \quad x > 0, \quad h(0) := \infty,$$

et rappelons aussi que, pour tout $g \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$, et pour tout Borélien $A \subset [0, 1]^d$, on a posé

$$g(A) := \int_{[0, 1]^d} 1_A dg. \quad (5.3.2.3)$$

Lemme 5.3.1 *Supposons que les hypothèses du théorème 5.2.1 sont vérifiées. Alors, pour tout $p \geq 1$ et pour tout $\vec{i}_0 \in \{1, \dots, 2^p\}^d$, le tableau triangulaire de v.a. réelles*

$$\left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0, p}^\vec{i}) \right)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme sur $[0, \infty[$ pour le tableau triangulaire de vitesses

$$(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq m_n} := \left(\frac{1}{cf(z_{i,n}) \log n} \right)_{n \geq 1, i \leq m_n}$$

et pour la fonction de coût

$$\tilde{I}_p(x) := 2^{-pd} h \left(\frac{x}{2^{-pd}} \right), \quad x \geq 0. \quad (5.3.2.4)$$

Preuve : Soit $p \geq 1$, et soit $\vec{i}_0 \in \{1, \dots, 2^p\}^d$. Nous allons appliquer la proposition 3.2.5. Nous montrons (3.2.3.1), puis la preuve de (3.2.3.2) suivra un schéma identique. Pour un entier n fixé, et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, définissons la variable aléatoire suivante (voir (5.3.2.3)).

$$V_{i,n,\vec{i}_0} := cf(z_{i,n}) (\log n) \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0, p}^\vec{i}).$$

Posons aussi

$$p_{i,n,\vec{i}_0} := \mathbb{P}(Z_1 \in z_{i,n} + h_n^{1/d} C_{\vec{i}_0, p}^\vec{i}). \quad (5.3.2.5)$$

Clairement, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, la variable aléatoire V_{i,n,\vec{i}_0} suit une loi de Poisson d'espérance np_{i,n,\vec{i}_0} . Comme f est uniformément continue et strictement positive sur H^α (voir 5.2.0.12), et comme $\lambda(C_{\vec{i}_0, p}^\vec{i}) = 2^{-pd}$, il vient que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_n} \left| \frac{p_{i,n,\vec{i}_0}}{f(z_{i,n}) 2^{-pd} h_n} - 1 \right| = 0. \quad (5.3.2.6)$$

Ainsi, pour tout $a > 2^{-pd}$ et pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\min_{1 \leq i \leq m_n} \frac{acf(z_{i,n}) \log n}{np_{i,n,\vec{i}_0}} > 1. \quad (5.3.2.7)$$

Nous appliquons ensuite l'inégalité de Chernoff pour une variable de Poisson de paramètre np_{i,n,\vec{i}_0} . Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand pour vérifier (5.3.2.7), on a, pour tout $1 \leq i \leq m_n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}^\vec{i}) \geq a\right) &= \mathbb{P}\left(V_{i,n,\vec{i}_0} \geq acf(z_{i,n}) \log n\right) \\ &\leq \exp\left(-np_{i,n,\vec{i}_0} h\left(\frac{acf(z_{i,n}) \log n}{np_{i,n,\vec{i}_0}}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.3.2.8)$$

Or d'après (HVE2) et (5.3.2.6), on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_n} \frac{p_{i,n,\vec{i}_0}}{f(z_{i,n})h_n} h\left(\frac{acf(z_{i,n}) \log n}{np_{i,n,\vec{i}_0}}\right) \leq 2^{-pd} h\left(\frac{a}{2^{-pd}}\right). \quad (5.3.2.9)$$

En combinant (5.3.2.8) et (5.3.2.9), et en se rappelant la définition de \tilde{I}_p dans (5.3.2.4), il vient que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_n} \frac{1}{cf(z_{i,n}) \log n} \log\left(\mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}^\vec{i}) \geq a\right)\right) \leq -\tilde{I}_p(a). \quad (5.3.2.10)$$

Soit maintenant $y > a$ quelconque. Si on montre que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \frac{1}{cf(z_{i,n}) \log n} \log\left(\mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}^\vec{i}) \geq a\right)\right) \geq -h(y),$$

alors comme $y > a$ est arbitraire, et par croissance de \tilde{I} sur $[a, \infty[$, on aura bien

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \frac{1}{cf(z_{i,n}) \log n} \log\left(\mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}^\vec{i}) \geq a\right)\right) \geq -h(a).$$

Notons ϕ la fonction de Laplace d'une variable de Poisson standard, c'est à dire

$$\phi(t) := \exp(\exp(t) - 1), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.3.2.11)$$

Notons que h est la fonction conjuguée de $\log \phi$, c'est à dire, pour tout $z > 0$,

$$h(z) = \sup_{u \in \mathbb{R}} zu - \log(\phi(u)), \quad (5.3.2.12)$$

où le sup est atteint quelque soit $z > 0$. Soit donc u_0 l'unique réel vérifiant

$$\begin{aligned} h(2^{pd}y) &= \sup_{u \in \mathbb{R}} 2^{pd}yu - \log(\phi(u)) \\ &= 2^{pd}yu_0 - \log(\phi(u_0)), \end{aligned} \quad (5.3.2.13)$$

c'est à dire, après calcul, $e^{u_0} = 2^{pd}y$. Soit F la loi d'une variable de Poisson standard, et F_0 la mesure définie par la densité suivante

$$dF_0(x) := \phi(u_0)^{-1} \exp(u_0x) dF(x). \quad (5.3.2.14)$$

Notons "*" l'opérateur de puissance convolution pour les mesures infiniment divisibles, c'est à dire, pour tout $L > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF^{*L}(x) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dF(x) \right)^L.$$

Remarquons que, pour tout $L > 0$, on a

$$dF_0^{*L}(x) = \phi(u_0)^{-L} \exp(u_0x) dF^{*L}(x). \quad (5.3.2.15)$$

Remarquons aussi que, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x dF_0(x) &= \phi(u_0)^{-1} \int_{\mathbb{R}} x \exp(u_0x) dF(x) \\ &= \phi(u_0)^{-1} \exp(\exp(u_0) - 1 + u_0) \\ &= e^{u_0} \\ &= 2^{pd}y. \end{aligned} \quad (5.3.2.16)$$

La dernière égalité vient de la définition de u_0 (voir (5.3.2.13)). Soit $\delta > 0$ arbitraire tel que $[y - \delta, y + \delta] \subset [a, \infty[$. Pour tout entier $n \geq 1$ suffisamment grand, et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, on sait que

$cf(z_{i,n})(\log n) \Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{i_0,p}^{\vec{i}_0})$ a pour loi $F^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}$, où p_{i,n,\vec{i}_0} est défini par (5.3.2.5). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{i_0,p}^{\vec{i}_0}) \geq a\right) \\
& \geq \mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{i_0,p}^{\vec{i}_0}) \in [y - \delta, y + \delta]\right) \\
& = \int_{\frac{x}{cf(z_{i,n}) \log n} \in [y - \delta, y + \delta]} dF^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}(x) \\
& \geq \exp\left(-u_0(y + \delta)cf(z_{i,n}) \log n\right) \times \int_{\frac{x}{cf(z_{i,n}) \log n} \in [y - \delta, y + \delta]} \exp(u_0x) dF^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}(x) \\
& \geq \exp\left(-cf(z_{i,n})(\log n)u_0(y + \delta) + np_{i,n,\vec{i}_0} \log(\phi(u_0))\right) \\
& \quad \times \int_{\frac{x}{cf(z_{i,n}) \log n} \in [y - \delta, y + \delta]} dF_0^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}(x) \\
& := a_{i,n,\vec{i}_0,\delta} \times b_{i,n,\vec{i}_0,\delta}. \tag{5.3.2.17}
\end{aligned}$$

La ligne (5.3.2.17) est une conséquence de (5.3.2.15), avec $L := np_{i,n,\vec{i}_0}$. Soit $n \geq 1$ un entier suffisamment grand (d'après 5.3.2.6) pour vérifier

$$\max_{1 \leq i \leq m_n} \left| \frac{np_{i,n,\vec{i}_0}}{2^{-pd}cf(z_{i,n}) \log n} - 1 \right| \leq u_0 \log(\phi(u_0))^{-1} \delta. \tag{5.3.2.18}$$

Soit $1 \leq i \leq m_n$ quelconque. On a

$$\begin{aligned}
& cf(z_{i,n})(\log n)u_0(y + \delta) - np_{i,n,\vec{i}_0} \log(\phi(u_0)) \\
& \leq 2^{-pd}cf(z_{i,n}) \log n \left(u_0 2^{pd}(y + \delta) - \log(\phi(u_0)) + u_0\delta\right) \\
& \leq 2^{-pd}cf(z_{i,n}) \log n \left(h(2^{pd}y) + u_0(2^{pd} + 1)\delta\right) \\
& = cf(z_{i,n}) \left(\tilde{I}_p(y) + 2^{-pd}(2^{pd} + 1)u_0\delta\right) \\
& \leq cf(z_{i,n}) \left(\tilde{I}_p(y) + 2\delta u_0\right). \tag{5.3.2.19}
\end{aligned}$$

Ainsi, quelque soit $\delta > 0$, on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$,

$$a_{i,n,\vec{i}_0,\delta} \geq \exp \left(-cf(z_{i,n}) \log n (\tilde{I}_p(y) + 2u_0\delta) \right), \quad (5.3.2.20)$$

où u_0 ne dépend que de $y > a$. Nous allons maintenant montrer que, quel que soit le choix de $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} b_{i,n,\vec{i}_0,\delta} = 1. \quad (5.3.2.21)$$

Soit $\delta > 0$ quelconque. Soit n un entier suffisamment grand pour vérifier, d'après (5.3.2.6),

$$\frac{y - \delta}{y + 2^{-pd}\delta} < \min_{1 \leq i \leq m_n} \frac{np_{i,n,\vec{i}_0}}{2^{-pd}cf(z_{i,n} \log n)} \leq \max_{1 \leq i \leq m_n} \frac{np_{i,n,\vec{i}_0}}{2^{-pd}cf(z_{i,n} \log n)} < \frac{y + \delta}{y - 2^{-pd}\delta}. \quad (5.3.2.22)$$

On a alors, pour tout $1 \leq i \leq m_n$,

$$\frac{np_{i,n,\vec{i}_0}}{2^{-pd}cf(z_{i,n}) \log n} \times [y - 2^{-pd}\delta, y + 2^{-pd}\delta] \subset]y - \delta, y + \delta[. \quad (5.3.2.23)$$

Ainsi, pour tout entier n suffisamment grand, et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, on a

$$\begin{aligned} b_{i,n,\vec{i}_0,\delta} &= \int_{\frac{x}{cf(z_{i,n}) \log n} \in]y - \delta, y + \delta[} dF_0^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}(x) \\ &\geq \int_{\frac{x}{np_{i,n,\vec{i}_0} 2^{pd}} \in [y - \delta 2^{-pd}, y + \delta 2^{-pd}]} dF_0^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}(x) \\ &= \int_{\frac{x}{np_{i,n,\vec{i}_0}} \in [2^{pd}y - \delta, 2^{pd}y + \delta]} dF_0^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}(x). \end{aligned}$$

Or d'après, (5.3.2.16), nous savons que $y2^{pd}$ est l'espérance de la loi F_0 , et donc, par convolution, $a2^{pd}y$ est l'espérance de F_0^{*a} pour tout $a > 0$. De plus, F_0 admet un moment d'ordre deux, car F a tous ses

moments exponentiels finis. En notant, v_0 la variance de la loi F_0 , nous en déduisons que, pour tout $a > 0$, la variance de la loi F_0^{*a} est av_0 , par convolution. Pour n suffisamment grand, et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, nous appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la loi $F_0^{*np_{i,n,\vec{i}_0}}$. Ainsi

$$1 - b_{i,n,\vec{i}_0,\delta} \leq \frac{v_0}{\delta np_{i,n,\vec{i}_0}}. \quad (5.3.2.24)$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de f sur H . Rappelons que λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$. Pour tout entier n et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, on a

$$\begin{aligned} p_{i,n,\vec{i}_0} &= \int_{z_{i,n} + h_n^{1/d} C_{\vec{i}_0,p}} f d\lambda \\ &\geq \beta h_n \lambda(C_{\vec{i}_0,p}) \\ &= \beta h_n 2^{-pd}. \end{aligned} \quad (5.3.2.25)$$

En combinant (5.3.2.24) et (5.3.2.25), il vient que (5.3.2.21) est démontré. En combinant (5.3.2.17), (5.3.2.20) et (5.3.2.21), nous concluons que, pour tout choix de $\delta > 0$ vérifiant $[y - \delta, y + \delta] \subset [a, \infty]$, on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$,

$$\mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}) \geq a\right) \geq \frac{1}{2} \exp\left(-cf(z_{i,n}) \log n (\tilde{I}_p(y) + 2u_0\delta)\right). \quad (5.3.2.26)$$

Ainsi en se rappelant que

$$\epsilon_{n,i} = \frac{1}{cf(z_{i,n}) \log n}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m_n,$$

on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \epsilon_{n,i} \log\left(\mathbb{P}\left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}) \geq a\right)\right) \geq -\tilde{I}_p(y) - 2u_0\delta. \quad (5.3.2.27)$$

La preuve du point (3.2.3.1) de la proposition 3.2.5 se termine comme suit. Pour $l > \tilde{I}_p(a)$ on choisit d'abord $y > a$ tel que $\tilde{I}_p(a) < \tilde{I}_p(y) <$

l (rappelons que \tilde{I}_p est continue et strictement croissante sur $[a, \infty[$. Notons que u_0 ne dépend que de $y > a$. On choisit ensuite $\delta > 0$ suffisamment petit pour avoir $\tilde{I}_p(y) + 2u_0\delta \leq l$ et $[y - \delta, y + \delta] \subset [a, \infty[$. On alors, d'après (5.3.2.27),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0, p}^{\vec{z}}) \geq a \right) \right) \geq -l.$$

Comme $l > \tilde{I}_p(a)$ est arbitraire il s'ensuit que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n} \epsilon_{n,i} \log \left(\mathbb{P} \left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0, p}^{\vec{z}}) \geq a \right) \right) \geq -\tilde{I}_p(a). \quad (5.3.2.28)$$

En combinant (5.3.2.10) et (5.3.2.28), on en déduit que le point (3.2.3.1) de la proposition 3.2.5 est vérifié. Par une méthode similaire, on montre que le point (3.2.3.2) de la proposition 3.2.5 est vérifié. Nous appliquons alors la proposition 3.2.5 pour en conclure que le tableau triangulaire

$$\left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0, p}^{\vec{z}}) \right)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme pour le tableau triangulaire de vitesses $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, i \leq m_n}$ et pour la fonction de coût \tilde{I}_p . Le lemme 5.3.1 est donc démontré. \square

Principe de grandes déviations uniforme pour les marginales

Nous rappelons que $\Delta \Pi_n(\cdot, h_n, z)$ est la version "Poissonisée" de $\Delta_n(\cdot, h_n, z)$, définie en (5.3.1.6). En appliquant le lemme 5.3.1, nous savons que, pour tout $\vec{i}_0 = (i_1, \dots, i_d)$, $1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p$, le tableau triangulaire

$$\left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0, p}^{\vec{z}}) \right)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme (voir la définition 3.2.2) pour $(\epsilon_{n,i})_{i \leq i \leq m_n}$ et pour la fonction de coût \tilde{I}_p . Or, pour tous $n \geq 1$, $\vec{i}_0 \neq \vec{i}_1 \in \{1, \dots, 2^p\}^d$, on a

$$C_{\vec{i}_0, p}^{\vec{z}} \cap C_{\vec{i}_1, p}^{\vec{z}} = \emptyset.$$

Nous en concluons, d'après les propriétés élémentaires d'un processus de Poisson composé, que les variables aléatoires

$$\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}^z), \vec{i}_0 \in \{1, \dots, 2^p\}^d$$

sont mutuellement indépendants. Pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, définissons le vecteur aléatoire à valeurs dans $[0, \infty[^{2^{pd}}$ suivant :

$$\begin{aligned} X_{i,n} &:= \left(X_{\vec{i}_0}^z \right)_{\vec{i}_0 \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \\ &:= \left(\Delta\Pi_n(z_{i,n}, h_n, C_{\vec{i}_0,p}^z) \right)_{\vec{i}_0 \in \{1, \dots, 2^p\}^d}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m_n. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons appliquer la proposition 3.2.1, et déduire que le tableau triangulaire $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq m_n}$ satisfait le principe de grandes déviations uniforme sur $[0, \infty[^{2^{pd}}$ pour $(\epsilon_{i,n})_{1 \leq i \leq m_n}$, et pour la fonction de coût suivante :

$$J_p(x) := \sum_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} 2^{-pd} h\left(\frac{x_{\vec{i}}^z}{2^{-pd}}\right), \quad x \in [0, \infty[^{2^{pd}}. \quad (5.3.2.29)$$

Dans l'expression précédente, on a noté $x := (x_{\vec{i}}^z)_{i_1 \leq 2^p, \dots, i_d \leq 2^p}$. Rappelons que les $C_{\vec{i},p}^z$, $p \geq 1$, $\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d$ sont définis par (5.3.2.2). Nous définissons maintenant la fonction suivante :

$$\begin{aligned} R_p : [0, \infty[^{2^{pd}} &\rightarrow \left(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\| \right) \\ x &\rightarrow R_p(x)(s_1, \dots, s_d) := \sum_{C_{\vec{i},p}^z \subset [0, s_1] \times \dots \times [0, s_p]} x_{\vec{i}}^z, \quad (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d. \end{aligned}$$

Il est à noter que pour $n \geq 1$, $1 \leq i \leq m_n$ le processus $R_p(X_{i,n})$ sur $[0, 1]^d$ vérifie presque sûrement

$$R_p(X_{i,n})(s_1, \dots, s_d) = \Delta\Pi_n\left(z_{i,n}, h_n, \frac{[2^p s_1]}{2^p}, \dots, \frac{[2^p s_d]}{2^p}\right).$$

De plus, les R_p sont des applications continues, ce qui nous permet d'appliquer le principe de contraction de (voir par exemple [39]). Ainsi,

on en conclut que le tableau triangulaire

$$\left(\Delta \Pi_n \left(z_{i,n}, h_n, \frac{[2^p s_1]}{2^p}, \dots, \frac{[2^p s_d]}{2^p} \right) \right)_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$$

satisfait le principe de grandes déviations sur $[0, \infty[^{2^{pd}}$ pour $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 1, 1 \leq i \leq m_n}$ et pour la fonction de coût suivante :

$$I_p(f) := \inf \left\{ J_p(x), x \in [0, \infty[^{2^{pd}}, R_p(x) = f \right\}, \quad (5.3.2.30)$$

avec par convention $\inf \emptyset = \infty$. Ainsi, lorsqu'une fonction f s'identifie à une mesure positive purement atomique dont les atomes sont dans l'ensemble

$$\left\{ \left(\frac{i_1}{2^p}, \dots, \frac{i_d}{2^p} \right), 1 \leq i_1 \leq 2^p, \dots, 1 \leq i_d \leq 2^p \right\},$$

alors f admet un antécédent unique par R_p , et au vu de (5.3.2.29) on a (voir (5.3.2.3) pour plus de détails)

$$I_p(f) = \sum_{i_1 \leq 2^p, \dots, i_d \leq 2^p} 2^{-pd} h \left(\frac{f(C_{\vec{i},p})}{2^{-pd}} \right).$$

Dans les autres cas, f n'admet pas d'antécédent par R_p , et donc

$$I_p(f) = \infty.$$

Nous renvoyons au §3.4 pour la preuve du fait que, pour tout $f \in \mathcal{M}([0, 1]^d)$ on a

$$\sup_{p \geq 1} I_p(f) = I(f). \quad (5.3.2.31)$$

Equicontinuité asymptotique

Nous allons maintenant montrer le point 3 de la proposition 3.3.1. Pour $p \geq 1$, nous considérons la partition suivante.

$$[0, 1]^d = \bigcup_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} C_{\vec{i},p},$$

où

$$C_{\vec{i},p} := \left(\frac{i_1 - 1}{2^p}, \dots, \frac{i_d - 1}{2^p} \right) + [0, 2^{-p}]^d.$$

Notons, pour tout $\vec{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{R}^d$

$$\vec{i} - 1 := (i_1 - 1, \dots, i_d - 1).$$

Pour prouver le point 3 de la proposition 3.3.1, il nous suffit de montrer que, pour tous $\tau > 0$ et $M > 0$, il existe un entier $p \geq 1$ tel que

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_n} \epsilon_{n,i} \\ & \log \left(\mathbb{P} \left(\max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \sup_{s \in C_{\vec{i},p}} | \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1)) | \geq \tau \right) \right) \\ & \leq -M. \end{aligned} \tag{5.3.2.32}$$

Or, pour tous entiers strictement positifs n et p , et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \sup_{s \in C_{\vec{i},p}} | \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1)) | \geq \tau \right) \\ & \leq 2^{pd} \max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in C_{\vec{i},p}} | \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1)) | \geq \tau \right). \end{aligned} \tag{5.3.2.33}$$

Comme $\Delta \Pi_n(z, h, s)$ est presque sûrement croissante en s_1, \dots, s_d , il vient que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $1 \leq i \leq m_n$, pour tout entier $p \geq 1$ et pour tout $\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\sup_{s \in C_{\vec{i},p}} | \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1)) | \geq \tau \right) \\ & = \mathbb{P} \left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}\vec{i}) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1)) \geq \tau \right) \end{aligned} \tag{5.3.2.34}$$

$$=: \mathbb{P}_{i,n,\vec{i},p}. \tag{5.3.2.35}$$

Notons $\vec{i} = (i_1, \dots, i_d)$, et posons

$$\mu_{i,n,\vec{i},p} := \mathbb{P} \left(\frac{Z_1 - z_{i,n}}{h_n^{1/d}} \in \left(\left[0, \frac{i_1}{2^p} \right[\times \dots \times \left[0, \frac{i_d}{2^p} \right[- \left[0, \frac{i_1 - 1}{2^p} \right[\times \dots \times \left[0, \frac{i_d - 1}{2^p} \right[\right) \right), \quad (5.3.2.36)$$

et

$$\nu_{\vec{i},p} := \lambda \left(\left[0, \frac{i_1}{2^p} \right[\times \dots \times \left[0, \frac{i_d}{2^p} \right[- \left[0, \frac{i_1 - 1}{2^p} \right[\times \dots \times \left[0, \frac{i_d - 1}{2^p} \right[\right).$$

Clairement $cf(z_{i,n})(\log n) \left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p\vec{i}}) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p(\vec{i} - 1)} \right)$ suit une loi de Poisson d'espérance $n\mu_{i,n,\vec{i},p}$. De plus, comme f est continue et strictement positive sur H^α , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq i \leq m_n, \vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \frac{cf(z_{i,n})(\log n) \nu_{\vec{i},p}}{n\mu_{i,n,\vec{i},p}} = 1. \quad (5.3.2.37)$$

Enfin, on a, pour tout entier $p \geq 1$,

$$\max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \nu_{\vec{i},p} \leq d2^{-p}. \quad (5.3.2.38)$$

Soit p un entier suffisamment grand pour vérifier

$$d2^{-p} < \frac{\tau}{2}. \quad (5.3.2.39)$$

En combinant (5.3.2.37), (5.3.2.38) et (5.3.2.39), il vient que, pour tout entier n suffisamment grand, pour tout $1 \leq i \leq m_n$ et pour tout $\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d$, on a

$$\frac{cf(z_{i,n})\tau \log n}{n\mu_{i,n,\vec{i},p}} \geq \frac{\tau}{2\nu_{\vec{i},p}} > 1. \quad (5.3.2.40)$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Chernoff à la variable aléatoire de Poisson $cf(z_{i,n}) \log n \left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p\vec{i}}) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p(\vec{i} - 1)} \right)$.

Il vient alors que, pour tout entier n suffisamment grand, pour tout $1 \leq i \leq m_n$ et pour tout $\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{i,n,\vec{i},p} \\ &= \mathbb{P} \left(cf(z_{i,n})(\log n) \left(\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p\vec{i}}) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p(\vec{i}-1)}) \right) \geq \tau cf(z_{i,n}) \log n \right) \\ &\leq \exp \left(- n \mu_{i,n,\vec{i},p} h \left(\frac{cf(z_{i,n}) \tau \log n}{n \mu_{i,n,\vec{i},p}} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.3.2.41)$$

Ainsi, si p vérifie $d2^{-p} < \frac{\tau}{2}$, alors, d'après (5.3.2.37) et (5.3.2.40), pour tout n suffisamment grand, et pour tous $\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d$, on a

$$\mathbb{P}_{i,n,\vec{i},p} \leq \exp \left(- \frac{1}{2} cf(z_{i,n}) \nu_{i,p}^{\vec{i}} (\log n) h \left(\frac{\tau}{2\nu_{i,p}^{\vec{i}}} \right) \right).$$

Il vient, d'après (5.3.2.33) et (5.3.2.35)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \sup_{s \in C_{\vec{i},p}^{\vec{i}}} | \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p(\vec{i}-1)}) | \geq \tau \right) \\ &\leq 2^{pd} \max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \exp \left(- \frac{1}{2} \nu_{i,p}^{\vec{i}} cf(z_{i,n}) (\log n) h \left(\frac{\tau}{2\nu_{i,p}^{\vec{i}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.3.2.42)$$

Or, lorsque $x \rightarrow \infty$, on a $h(x) \sim x \log x$. Il existe donc $A_{M,\tau} > 0$ tel que

$$\inf_{x \geq A_{M,\tau}} \frac{h(x)}{x} > \frac{8M}{\tau}. \quad (5.3.2.43)$$

D'après (5.3.2.38), nous pouvons choisir p suffisamment grand pour avoir

$$\min_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \frac{\tau}{2\nu_{i,p}^{\vec{i}}} > A_{\tau,M}. \quad (5.3.2.44)$$

Il vient alors que, pour tout entier n suffisamment grand, pour tout $1 \leq i \leq m_n$, et pour tout $\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d$ on a

$$\mathbb{P}_{i,n,\vec{i},p} \leq \exp \left(- cf(z_{i,n}) 2M \log n \right). \quad (5.3.2.45)$$

En combinant, (5.3.2.45) avec (5.3.2.33) et (5.3.2.35), on a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \sup_{s \in C_{\vec{i}, p}} |\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1))| \geq \tau\right) \\ & \leq \exp\left(-2Mcf(z_{i,n}) \log n + \log(2^{pd})\right). \end{aligned}$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de f sur H . On a, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$,

$$\begin{aligned} \frac{2Mcf(z_{i,n}) \log n - \log(2^{pd})}{Mcf(z_{i,n}) \log n} &= 2 - \frac{\log(2^{pd})}{M\beta c \log n} \\ &> 1. \end{aligned} \tag{5.3.2.46}$$

On en déduit alors que, pour tout entier n suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_n$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\max_{\vec{i} \in \{1, \dots, 2^p\}^d} \sup_{s \in C_{\vec{i}, p}} |\Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, s) - \Delta \Pi_n(z_{i,n}, h_n, 2^{-p}(\vec{i} - 1))| \geq \tau\right) \\ & \leq \exp\left(-Mcf(z_{i,n}) \log n\right). \end{aligned}$$

Ceci montre que (5.3.2.32) est vraie. La preuve de la proposition 5.3.1 est alors achevée, en appliquant la proposition 3.3.1 avec (5.3.2.31) \square

5.3.3 Fin de la preuve de la partie (i) du théorème 5.2.1

Rappelons que

$$g^\epsilon := \{f \in \mathcal{M}([0, 1]^d), \|f - g\| < \epsilon\}.$$

En revenant à (5.3.1.9), nous appliquons le principe de grandes déviations uniforme de la proposition 5.3.1 à l'ouvert g^ϵ . Ainsi, d'après (5.3.1.9) et (5.3.1.2), il vient que pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{z' \in H} \left\{\Delta_n(z', h_n, \cdot) \notin g^\epsilon\right\}\right) \leq 2 \exp\left(-m_n \min_{1 \leq i \leq m_n} n^{-\frac{f(z_{i,n})}{f(z)}(1-2\alpha_1)}\right).$$

En se rappelant (5.3.1.3) et (5.3.1.5), il vient que, pour n assez grand,

$$\exp\left(-m_n \min_{1 \leq i \leq m_n} n^{-\frac{f(z_{i,n})}{f(z)}(1-2\alpha_1)}\right) \leq \exp(n^{\alpha_1}).$$

Il s'agit là du terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le lemme de Borel-Cantelli pour la suite de probabilités

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{z' \in H} \left\{ \Delta_n(z', h_n, \cdot) \notin g^\epsilon \right\}\right), \quad n \geq 1$$

et en déduire que, presque sûrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left\{ \|\Delta_n(z', h_n, \cdot) - g\|, z' \in H \right\} \leq \epsilon.$$

La preuve de la partie (i) du théorème 5.2.1 se conclut alors aisément, car $z \in H$, $g \in \Gamma_{cf(z)}$ et $\epsilon > 0$ sont arbitraires.

5.4 Preuve de la partie (ii) du théorème 5.2.1

Fixons $\epsilon > 0$ et posons, pour tout entier $k \geq 1$,

$$n_k := \lceil (1 + \gamma)^k \rceil. \quad (5.4.0.1)$$

Posons aussi, pour tout entier $k \geq 1$,

$$N_k := \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}, \quad (5.4.0.2)$$

lorsque $n_{k-1} < n_k$, et $N_k = \emptyset$ sinon. Nous soulignons que, quel que soit le choix de $\gamma > 0$, l'ensemble N_k est non vide pour tout entier k suffisamment grand. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.4.1 *Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $L > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $L' \in [(1 + \eta)^{-1}L, L]$, on ait*

$$\Gamma_{L'} \subset \Gamma_L^\epsilon. \quad (5.4.0.3)$$

Preuve : Soit $0 < \epsilon < 1$ et $L > 0$ fixés. Une étude des variations de $h(\cdot)$ (voir (5.1.0.5)) montre que $h(\cdot)$ est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, \infty[$. De plus, $h(\cdot)$ est une bijection de $[1, \infty[$ vers $[0, \infty[$, dont la bijection réciproque $h_1(\cdot)$ est lipschitzienne sur $[h(1 + \epsilon), \infty[$. Il existe donc $A_{1,\epsilon} > 0$ vérifiant

$$1 + \epsilon \leq x \leq y, \quad h(y) - h(x) \leq A_{1,\epsilon}(y - x) \quad (5.4.0.4)$$

De la même façon, $h(\cdot)$ est une bijection strictement décroissante de $]0, 1]$ vers $[0, \infty[$, dont la bijection réciproque $h_2(\cdot)$ est lipschitzienne sur $[h(1 - \epsilon), \infty[$. Il existe donc $A_{2,\epsilon} > 0$ vérifiant

$$0 < y \leq x \leq 1 - \epsilon, \quad h(y) - h(x) \leq A_{1,\epsilon}(x - y). \quad (5.4.0.5)$$

Posons

$$\eta := \min \left\{ \frac{1}{2} \epsilon L \min \{ A_{1,\epsilon}^{-1}, A_{2,\epsilon}^{-1} \}, 1 \right\}.$$

Soit $L' \in [(1 + \eta)^{-1}L, L]$ quelconque, et soit $g \in \Gamma_{L'}$ quelconque. Rappelons que λ désigne la mesure de Lebesgue. Posons

$$g'_1 := h_1 \left(\frac{h(g')}{1 + \eta} \right) 1_{\{g' \geq 1\}} + h_2 \left(\frac{h(g')}{1 + \eta} \right) 1_{\{0 < g' < 1\}}, \quad (5.4.0.6)$$

$$g_1(s) := \int_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} g'_1 d\lambda, \quad s = (s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d. \quad (5.4.0.7)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
I(g_1) &= \int_{[0,1]^d} h(g'_1) d\lambda \\
&= \int_{g' \geq 1} h\left(h_1\left(\frac{h(g')}{1+\eta}\right)\right) d\lambda + \int_{0 < g' < 1} h\left(h_2\left(\frac{h(g')}{1+\eta}\right)\right) d\lambda \\
&= \int_{[0,1]^d} \frac{h(g')}{1+\eta} d\lambda \\
&\leq \frac{1}{L'(1+\eta)} \\
&\leq \frac{1}{L}.
\end{aligned}$$

Rappelons que $\|g\| := \sup_{z \in [0,1]^d} |g(z)|$, $g \in \mathcal{M}([0,1]^d)$. Il reste donc à prouver que $\|g_1 - g\| \leq 2\epsilon$, et le lemme sera démontré, car $\epsilon > 0$ est arbitraire. D'après (5.4.0.4) et (5.4.0.5), nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{g' \geq 1+\epsilon} |g'_1 - g'| d\lambda &= \int_{g' \geq 1+\epsilon} g' - g'_1 d\lambda \\
&\leq A_{1,\epsilon} \int_{g' \geq 1+\epsilon} h(g') - h(g'_1) d\lambda \\
&= A_{1,\epsilon} \int_{g' \geq 1+\epsilon} h(g') \left(1 - \frac{1}{1+\eta}\right) d\lambda, \quad \text{et (5.4.0.8)} \\
\int_{0 < g' \leq 1-\epsilon} |g'_1 - g'| d\lambda &= \int_{0 < g' \leq 1-\epsilon} g'_1 - g' d\lambda \\
&\leq A_{2,\epsilon} \int_{0 < g' \leq 1-\epsilon} h(g') - h(g'_1) d\lambda \\
&= A_{2,\epsilon} \int_{0 < g' \leq 1-\epsilon} h(g') \left(1 - \frac{1}{1+\eta}\right) d\lambda. \quad (5.4.0.9)
\end{aligned}$$

Enfin, lorsque $1 \leq g' \leq 1 + \epsilon$ on a, par construction, $1 \leq g'_1 \leq g' \leq (1 + \epsilon)$. De même, lorsque $1 - \epsilon \leq g' \leq 1$, on a $1 - \epsilon \leq g' \leq g'_1 \leq 1$. On en déduit avec (5.4.0.8) et (5.4.0.9) que

$$\begin{aligned}
\|g_1 - g\| &\leq \int_{[0,1]^d} |g'_1 - g'| d\lambda \\
&\leq \int_{[0,1]^d} \max\{A_{1,\epsilon}, A_{2,\epsilon}\} h(g') \left(1 - \frac{1}{1 + \eta}\right) d\lambda + \epsilon \quad (5.4.0.10) \\
&\leq \epsilon + \frac{\max\{A_{1,\epsilon}, A_{2,\epsilon}\}}{L'} \eta (1 + \eta)^{-1} \\
&\leq \epsilon + \frac{\max\{A_{1,\epsilon}, A_{2,\epsilon}\}}{L} \eta \\
&\leq 2\epsilon.
\end{aligned}$$

La dernière ligne découle du choix de $\min\{\frac{1}{2}\epsilon L \min\{A_{1,\epsilon}^{-1}, A_{2,\epsilon}^{-1}\}, 1\}$ au début de la preuve. La preuve du lemme 5.4.1 est donc terminée. \square

5.4.1 Découpage de H

Rappelons que $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ est le cône des fonctions de répartition de mesures positives finies sur $[0, 1]^d$. Rappelons également que, pour tout $A \subset \mathcal{M}([0, 1]^d)$ et pour tout $\epsilon > 0$, on a défini

$$A^\epsilon := \left\{g \in \mathcal{M}([0, 1]^d), \inf_{g' \in A} \|g - g'\| < \epsilon\right\}. \quad (5.4.1.1)$$

Rappelons enfin que I est semicontinue inférieurement dans $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ (voir la propriété 5.1.1). Ainsi, pour tout $z \in H$, il existe $\alpha_z > 0$ tel que

$$I\left(\mathcal{M}([0, 1]^d) - \Gamma_{cf(z)}^\epsilon\right) = \frac{1 + 3\alpha_z}{cf(z)}. \quad (5.4.1.2)$$

comme f est continue et strictement positive sur H^α , et grâce au lemme 5.4.1, on peut trouver un cube ouvert H_z non vide contenant z , et vérifiant

$$H_z \subset H^{\alpha/4}, \quad (5.4.1.3)$$

$$\inf_{z_1, z_2 \in H_z} \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \geq \frac{1 + \alpha_z}{1 + 2\alpha_z}, \quad (5.4.1.4)$$

$$\bigcup_{z' \in H_z} \Gamma_{f(z')} \subset \Gamma_{cf(z)}^\epsilon, \quad (5.4.1.5)$$

$$\mathbb{P}\left(Z_1 \in \bigcup_{z \in H_z} \{z + h_{n_k}^{1/d}[0, 1[{}^d]\}\right) \leq 1/2. \quad (5.4.1.6)$$

Ainsi, on a le recouvrement suivant :

$$H \subset \bigcup_{z \in H} H_{z_l} \subset H^{\alpha/4}.$$

Comme H est un compact de \mathbb{R}^d , on peut en extraire un recouvrement fini, que nous notons

$$H \subset \bigcup_{l=1}^L H_{z_l} \subset H^{\alpha/4}, \quad (5.4.1.7)$$

où tous les H_{z_l} vérifient (5.4.1.3), (5.4.1.2), (5.4.1.4) et (5.4.1.5), avec $z := z_l$. Notre problème est donc réduit à montrer que, pour tout $l = 1 \dots, L$, on a, par exemple

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in H_{z_l}} \inf_{g \in \Gamma_{cf(z_l)}} \|\Delta_n(z, h_n, \cdot) - g\| \leq 10\epsilon \text{ p.s. .} \quad (5.4.1.8)$$

Fixons $1 \leq l \leq L$, et renommons H_{z_l} en H_l pour moins de lourdeur de notations. Nous allons maintenant découper H_l .

5.4.2 Découpage de H_l

Notons

$$H_l := H_{z_l} =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_d, b_d[.$$

Soit $0 < \delta < \alpha/4$ un paramètre que nous fixerons plus tard en fonction de ϵ . Pour tout entier $n \geq 1$, nous construisons un recouvrement de H_l par des pavés disjoints deux à deux

$$H_l \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \left\{ z_{i, n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d}[0, 1[{}^d \right\} \subset H^{\alpha/2}, \quad (5.4.2.1)$$

avec

$$m_{n_k} := \prod_{p=1}^d \left[\frac{b_p - a_p}{(\delta h_{n_k})^{1/d}} \right] + 1, \quad (5.4.2.2)$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u . Remarquons que m_{n_k} est le nombre minimal de cubes nécessaires pour parvenir à (5.4.2.1).

5.4.3 Associations par blocs

Rappelons que $N_k := \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ si $n_{k-1} < n_k$ et $N_k = \emptyset$ sinon. Nous posons maintenant, pour tout entier k tel que $n_{k-1} < n_k$, et pour tous $n \in N_k$, $z \in H$, $s \in [0, 2]^d$,

$$\mathcal{H}_n(z, s) := \frac{1}{cf(z) \log n_k} \sum_{i=1}^n 1_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_i - z}{h_{n_k}^{1/d}} \right). \quad (5.4.3.1)$$

Nous allons d'abord montrer que, quel que soit les choix de $\delta > 0$ et $\gamma > 0$, on a presque sûrement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \inf_{g \in \Gamma_{cf(z_i)}} \|\mathcal{H}_n(z_{i, n_k}, \cdot) - g\| \leq 2\epsilon. \quad (5.4.3.2)$$

Pour cela, considérons les probabilités suivantes, pour tout entier k suffisamment grand :

$$\mathbb{P}_k := \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \bigcup_{n \in N_k} \mathcal{H}_n(z_{i, n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^{2\epsilon} \right).$$

On a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\mathbb{P}_k \leq m_k \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \mathcal{H}_n(z_{i, n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^\epsilon \right). \quad (5.4.3.3)$$

Nous allons maintenant appliquer une technique d'association par blocs classique basée sur l'inégalité d'Ottaviani. Pour cela, nous établissons le lemme suivant.

Lemme 5.4.2 *Pour tout choix de $0 < \gamma < \epsilon/8$ dans la définition des n_k , on a, sous les hypothèses du théorème 5.2.1, pour tout entier k suffisamment grand,*

$$\sup_{z \in H} \max_{n \in N_k} \mathbb{P} \left(\|\mathcal{H}_{n_k}(z, \cdot) - \mathcal{H}_n(z, \cdot)\| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Preuve Soit $0 < \gamma < \epsilon/4$. Pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout $z \in H$, posons

$$p_{n_k, z} := \mathbb{P} \left(\frac{Z_1 - z}{h_{n_k}^{1/d}} \in [0, 1]^d \right).$$

Comme f est continue et strictement positive sur H^α , et d'après (HVE1), on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{z \in H} \left| \frac{n_k p_{n_k, z}}{cf(z) \log n_k} - 1 \right| = 0.$$

Ainsi, pour tout k suffisamment grand, on a

$$\sup_{z \in H} \frac{n_k p_{n_k, z}}{cf(z) \log n_k} \leq 2. \quad (5.4.3.4)$$

De plus, comme $n_k = \lceil (1 + \gamma)^k \rceil$, $k \geq 1$, on a, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\frac{n_k - n_{k-1}}{n_k} \leq 2\gamma. \quad (5.4.3.5)$$

Soit $k \geq 1$ un entier tel que $N_k \neq \emptyset$, soit $n \in N_k$ vérifiant $n \neq n_k$ (cas non trivial) et soit $z \in H$ quelconques. On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\|\mathcal{H}_{n_k}(z, \cdot) - \mathcal{H}_n(z, \cdot)\| \geq \epsilon \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\sup_{(s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d} \sum_{i=n+1}^{n_k} \mathbf{1}_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_i - z}{h_{n_k}^{1/d}} \right) \geq \epsilon cf(z) \log n_k \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\sum_{i=n+1}^{n_k} \mathbf{1}_{[0, 1]^d} \left(\frac{Z_i - z}{h_{n_k}^{1/d}} \right) \geq \epsilon cf(z) \log n_k \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Markov, et en se rappelant (5.4.3.4) et (5.4.3.5), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=n+1}^{n_k} 1_{[0,1]^d}\left(\frac{Z_i - z}{h_{n_k}^{1/d}}\right) \geq \epsilon cf(z) \log n_k\right) &\leq \frac{(n_k - n)p_{n_k, z}}{\epsilon cf(z) \log n_k} \\
&\leq \frac{n_k - n_{k-1}}{n_k} \frac{n_k p_{n_k, z}}{\epsilon cf(z) \log n_k} \\
&\leq \frac{4\gamma}{\epsilon} \\
&\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{5.4.3.6}$$

La ligne (5.4.3.6) est une conséquence de (5.4.3.4) et (5.4.3.5). Le lemme 5.4.2 est donc démontré. \square

En appliquant le lemme 5.4.2 et en appliquant une inégalité maximale issue de l'inégalité d'Ottaviani (voir par exemple [33]), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in N_k} \mathcal{H}_n(z_{i, n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^{2\epsilon}\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\mathcal{H}_{n_k}(z_{i, n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^\epsilon\right). \tag{5.4.3.7}$$

Nous rappelons que, pour tout entier $n \geq 1$, $\Delta\Pi_n(z, h_n, \cdot)$ est la version "Poissonisée" de $\Delta_n(z, h_n, \cdot)$ (voir (5.3.1.6)). En se servant de (5.4.3.7) dans (5.4.3.3), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_k &\leq 2m_k \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \mathbb{P}\left(\mathcal{H}_{n_k}(z_{i, n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^\epsilon\right) \\
&= 2m_{n_k} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \mathbb{P}\left(\Delta_{n_k}(z_{i, n_k}, h_{n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^\epsilon\right) \\
&\leq 4m_{n_k} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \mathbb{P}\left(\Delta\Pi_{n_k}(z_{i, n_k}, h_{n_k}, \cdot) \notin \Gamma_{cf(z_i)}^\epsilon\right)
\end{aligned} \tag{5.4.3.8}$$

La dernière ligne est obtenue en utilisant une technique de Poissonisation (voir par exemple [76]). Nous appliquons ensuite la proposition 5.3.1 au fermé de $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ suivant :

$$\mathcal{M}([0, 1]^d) - \Gamma_{cf(z_i)}^\epsilon.$$

Ainsi, pour tout entier k suffisamment grand, on a (en se rappelant 5.4.1.2)

$$\mathbb{P}_k \leq 4m_{n_k} \max_{1 \leq m_k} \exp \left(- \frac{f(z_{i,n_k})}{f(z_l)} (1 + 2\alpha_{z_l}) \log n_k \right).$$

De plus, d'après (5.4.1.4), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\mathbb{P}_k \leq 4m_{n_k} \exp \left(- (1 + \alpha_{z_l}) \log n_k \right).$$

Or, lorsque $k \rightarrow \infty$ on a, d'après (5.4.2.2),

$$m_{n_k} = h_{n_k}^{-1+o(1)} = n_k^{1+o(1)},$$

et ainsi, \mathbb{P}_k est le terme général d'une série convergente. On applique ensuite le lemme de Borel-Cantelli, ce qui prouve que (5.4.3.2) est vraie presque sûrement, et ceci, quel que soit le choix de $\gamma > 0$ dans l'expression des n_k , et quel que soit le choix de $\delta > 0$ dans le découpage de H_l (voir (5.4.2.1)).

5.4.4 Contrôle des oscillations entre n_{k-1} et n_k

Rappelons que $n_k := [(1 + \gamma)^k]$, $k \geq 1$ et que $N_k := \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ pour tout entier k suffisamment grand. Notre but est maintenant de montrer que, presque sûrement,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{z \in H_l} \min_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \max_{n \in N_k} \|\mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \Delta_n(z, h_n, \cdot)\| \leq 7\epsilon, \quad (5.4.4.1)$$

par un choix judicieux de $\delta > 0$ dans le découpage de H_l (voir (5.4.2.1)), et par un choix judicieux de $\gamma > 0$ dans l'expression des n_k , $k \geq 1$. Nous aboutirons à ce résultat en établissant deux lemmes.

Lemme 5.4.3 *Il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que, quel que soit le choix de $0 < \delta < \delta_\epsilon$ dans la discrétisation de H (voir 5.4.2.1), et quel que soit le choix de $\gamma > 0$ dans la définition des n_k , $k \geq 1$, on ait presque sûrement*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{n \in N_k} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0, 1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| \leq \epsilon.$$

Preuve : Pour tout entier k tel que $N_k \neq \emptyset$, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\max_{n \in N_k} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcup_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \bigcup_{n \in N_k} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon \right) \\
&\leq m_{n_k} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon \right)
\end{aligned} \tag{5.4.4.2}$$

Soit $k \geq 1$ un entier, soit $1 \leq i \leq m_{n_k}$ et soit $z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0, 1]^d$ quelconques. Notons $z_{i,n_k} := (z_{i,n_k}^1, \dots, z_{i,n_k}^d)$, $z := (z^1, \dots, z^d)$ et $Z_j := (Z_j^1, \dots, Z_j^d)$, $j \geq 1$. Remarquons que, pour tout $p = 1 \dots d$, on a $z_{i,n_k}^p \leq z^p \leq z_{i,n_k}^p + (\delta h_{n_k})^{1/d}$. Ainsi, pour tout entier j , on a presque sûrement,

pour tout $(s_1, \dots, s_d) \in [0, 1]^d$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| 1_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_j - z}{h_{n_k}^{1/d}} \right) - 1_{[0, s_1] \times \dots \times [0, s_d]} \left(\frac{Z_j - z_{i, n_k}}{h_{n_k}^{1/d}} \right) \right| \\
&= \left| 1_{z + [0, h_{n_k}^{1/d} s_1] \times \dots \times [0, h_{n_k}^{1/d} s_d]}(Z_j) - 1_{z_{i, n_k} + [0, h_{n_k}^{1/d} s_1] \times \dots \times [0, h_{n_k}^{1/d} s_d]}(Z_j) \right| \\
&= 1 \left\{ \left\{ z + [0, h_{n_k}^{1/d} s_1] \times \dots \times [0, h_{n_k}^{1/d} s_d] \right\} - \left\{ z_{i, n_k} + [0, h_{n_k}^{1/d} s_1] \times \dots \times [0, h_{n_k}^{1/d} s_d] \right\} \right\} (Z_j) \\
&\quad + 1 \left\{ \left\{ z_{i, n_k} + [0, h_{n_k}^{1/d} s_1] \times \dots \times [0, h_{n_k}^{1/d} s_d] \right\} - \left\{ z + [0, h_{n_k}^{1/d} s_1] \times \dots \times [0, h_{n_k}^{1/d} s_d] \right\} \right\} (Z_j)
\end{aligned} \tag{5.4.4.3}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=1}^d 1 \left\{ \left[z^l, z^l + s_l h_{n_k}^{1/d} \right] - \left[z_{i, n_k}^l, z_{i, n_k}^l + h_{n_k}^{1/d} s_l \right] \right\} (Z_j^l) \prod_{1 \leq p \neq l \leq d} 1_{[z^p, z^p + h_{n_k}^{1/d} s_p]}(Z_j^p) \\
&\quad + \sum_{l=1}^d 1 \left\{ \left[z_{i, n_k}^l, z_{i, n_k}^l + h_{n_k}^{1/d} s_l \right] - \left[z^l, z^l + h_{n_k}^{1/d} s_l \right] \right\} (Z_j^l) \prod_{1 \leq p \neq l \leq d} 1_{[z_{i, n_k}^p, z_{i, n_k}^p + h_{n_k}^{1/d} s_p]}(Z_j^p) \\
&\leq \sum_{l=1}^d 1_{[z_{i, n_k}^l + s_l h_{n_k}^{1/d}, z_{i, n_k}^l + h_{n_k}^{1/d} (s_l + \delta^{1/d})]}(Z_j^l) \prod_{1 \leq p \neq l \leq d} 1_{[0, z_{i, n_k}^p + h_{n_k}^{1/d} (s_p + \delta^{1/d})]}(Z_j^p)
\end{aligned} \tag{5.4.4.4}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \sum_{l=1}^d 1_{[z_{i, n_k}^l, z_{i, n_k}^l + \delta^{1/d} h_{n_k}^{1/d}]}(Z_j^l) \prod_{1 \leq p \neq l \leq d} 1_{[0, z_{i, n_k}^p + h_{n_k}^{1/d} s_p]}(Z_j^p) \\
&= : X_{j, k, i, \delta}(s).
\end{aligned} \tag{5.4.4.5}$$

Pour aboutir à la ligne (5.4.4.3), nous avons utilisé le fait que $|1_A - 1_B| = 1_{A-B} + 1_{B-A}$. Pour aboutir à (5.4.4.4), nous avons appliqué la relation $z_{i, n_k}^l \leq z^l \leq z_{i, n_k}^l + \delta^{1/d} h_{n_k}^{1/d}$, $l = 1 \dots d$.

D'après (5.4.4.5), et comme les $X_{j, k, i, \delta}(\cdot)$ sont positifs, il vient que, pour

tout entier k suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \sup_{s \in [0,1]^d} \sum_{j=1}^n \left| \mathbf{1}_{[0,s_1] \times \dots \times [0,s_d]} \left(\frac{Z_j - z}{h_{n_k}^{1/d}} \right) - \mathbf{1}_{[0,s_1] \times \dots \times [0,s_d]} \left(\frac{Z_j - z_{i,n_k}}{h_{n_k}^{1/d}} \right) \right| \geq \epsilon c f(z_{i,n_k}) \log n_k \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \sup_{s \in [0,1]^d} \sum_{j=1}^n X_{j,k,i,\delta}(s) \geq \epsilon c f(z_{i,n_k}) \log n_k \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{n_k} \sup_{s \in [0,1]^d} \sum_{j=1}^n X_{j,k,i,\delta}(\cdot) \geq \epsilon c f(z_{i,n_k}) \log n_k \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(\left\| \sum_{j=1}^{n_k} X_{j,k,i,\delta}(\cdot) \right\| \geq \epsilon c f(z_{i,n_k}) \log n_k \right). \tag{5.4.4.6}
\end{aligned}$$

Rappelons que $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,d} |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $s = (s_1, \dots, s_d) \in [0,1]^d$ et pour tout $l = 1, \dots, d$, notons

$$\begin{aligned}
s^{(l)} & := (s_1, \dots, s_{l-1}, 0, s_{l+1}, \dots, s_d), \\
\vec{\delta} & := (\delta^{1/d}, \dots, \delta^{1/d}) \in \mathbb{R}^d \\
\vec{\delta}_l & := (1_{\{l=1\}} \delta^{1/d}, \dots, 1_{\{l=d\}} \delta^{1/d}).
\end{aligned}$$

Remarquons que, pour tout entier k suffisamment grand pour avoir $m_{n_k} > 1$ (voir (5.4.2.2) et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$, on a presque

sûrement, pour tout $s \in [0, 1]^d$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{j=1}^{n_k} X_{j,k,i,\delta}(s) \\
&= cf(z_{i,n_k})(\log n_k) \left(\sum_{l=1}^d \left(\Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s + \vec{\delta}) - \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s + \vec{\delta} - \vec{\delta}_l) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s^{(l)} + \vec{\delta}_l) - \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s^{(l)}) \right) \right) \\
&\leq 2dcf(z_{i,n_k})(\log n_k) \sup_{s,s' \in [0,2]^d, \|s'-s\|_\infty < \delta^{1/d}} \left| \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s') - \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s) \right|.
\end{aligned} \tag{5.4.4.7}$$

Nous rappelons que, pour tout entier $n \geq 1$, $\Delta \Pi_n(z, h_n, \cdot)$ est la version "Poissonisée" de $\Delta_n(z, h_n, \cdot)$ (voir (5.3.1.6)). En combinant (5.4.4.7) et (5.4.4.6), il vient que, pour tout entier k suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \in N_k} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sup_{s,s' \in [0,2]^d, \|s'-s\|_\infty < \delta^{1/d}} \left| \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s') - \Delta_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s) \right| > \epsilon(2d)^{-1} \right) \\
&\leq 2\mathbb{P} \left(\sup_{s,s' \in [0,2]^d, \|s'-s\|_\infty < \delta^{1/d}} \left| \Delta \Pi_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s') - \Delta \Pi_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, s) \right| > \epsilon(2d)^{-1} \right).
\end{aligned} \tag{5.4.4.8}$$

Pour aboutir à la ligne (5.4.4.8), nous avons utilisé une technique de Poissonisation (voir par exemple [77]), (5.3.1.6), ainsi que (5.4.1.6) pour plus de détails). Remarquons maintenant que, pour tout $k \geq 1$ et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$, on a presque sûrement, pour tout $s \in [0, 1]^d$,

$$\Delta \Pi_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, 2s) = \Delta \Pi_{n_k}(z_{i,n_k}, 2^d h_{n_k}, s). \tag{5.4.4.9}$$

Posons $\tilde{h}_n := 2^d h_n$. Nous invitons le lecteur à prendre connaissance de la notion de principe de grandes déviations uniforme (voir définitions

3.3.4 et 3.2.1). Clairement, \tilde{h}_n vérifie les hypothèses (HVE1) et (HVE2), avec $\tilde{c} := 2^{-d}c$. Nous pouvons donc appliquer la proposition 5.3.1, et en déduire que le tableau triangulaire

$$\left(2^d \Delta \Pi_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, 2\cdot)\right)_{k \geq 1, 1 \leq i \leq m_{n_k}}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme dans $(\mathcal{M}([0, 1]^d), \|\cdot\|)$ pour la fonction de coût I et pour le tableau triangulaire de vitesses

$$\left((c2^{-d}f(z_{i,n_k}) \log n_k)^{-1}\right)_{k \geq 1, 1 \leq i \leq m_{n_k}}.$$

Notons $(\mathcal{M}([0, 2]^d), \|\cdot\|_{[0,2]^d})$ l'ensemble de fonctions de répartitions de mesures positives finies sur $[0, 2]^d$, munie de la norme sup usuelle sur $[0, 2]^d$. En appliquant le principe de contraction (voir par exemple [39]), nous en déduisons que le tableau triangulaire

$$\left(2^d \Delta \Pi_{n_k}(z_{i,n_k}, h_{n_k}, \cdot)\right)_{k \geq 1, 1 \leq i \leq m_{n_k}}$$

satisfait le principe de grandes déviations uniforme dans $(\mathcal{M}([0, 2]^d), \|\cdot\|_2)$ pour le tableau triangulaire de vitesses

$$\left((c2^{-d}f(z_{i,n_k}) \log n_k)^{-1}\right)_{k \geq 1, 1 \leq i \leq m_{n_k}},$$

et pour la fonction de coût suivante.

$$\begin{aligned} \bar{I}(g) &:= \inf \{I(f), f \in \mathcal{M}([0, 1]^d), f(2\cdot) = g(\cdot)\} \\ &= I\left(g\left(\frac{1}{2}\cdot\right)\right). \end{aligned}$$

Soit $\beta > 0$ un minorant de f sur H . Comme \bar{I} est une fonction de coût sur $(\mathcal{M}([0, 2]^d), \|\cdot\|_2)$, l'ensemble

$$\Gamma := \left\{g \in \mathcal{M}([0, 2]^d), \bar{I}(g) \leq \frac{4}{2^{-d}\beta}\right\}$$

est un compact de $(\mathcal{M}([0, 2], \|\cdot\|_2))$. En appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli, il existe $\delta_\epsilon > 0$ tel que

$$\sup_{g \in 2^{-d}\Gamma} \sup_{s, s' \in [0, 2^d], \|s' - s\|_\infty \leq \delta_\epsilon} |g(s') - g(s)| < (4d)^{-1}\epsilon. \quad (5.4.4.10)$$

Choisissons $0 < \delta < \delta_\epsilon$ quelconque dans la construction des z_{i, n_k} , $k \geq 1$, $1 \leq i \leq m_{n_k}$ voir (5.4.2.1). Pour tout $A \subset \mathcal{M}([0, 2^d])$ et pour tout $\epsilon > 0$, posons

$$A^\epsilon := \left\{ g \in \mathcal{M}([0, 2^d]), \inf_{g' \in A} \|g - g'\|_2 < \epsilon \right\}.$$

Par semicontinuité inférieure de \bar{I} , nous savons que le fermé

$$F := \mathcal{M}([0, 2^d] - \Gamma^{\frac{2^d\epsilon}{8d}}$$

vérifie

$$\bar{I}(F) > \frac{4}{2^{-d}\beta}.$$

Ainsi, en combinant (5.4.4.8) et (5.4.4.10), pour tout entier k suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in N_k} \sup_{z \in z_{i, n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0, 1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i, n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i, n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon\right) \\ & \leq 2\mathbb{P}\left(\sup_{s, s' \in [0, 2^d], \|s' - s\|_\infty < \delta^{1/d}} \left| \Delta \Pi_{n_k}(z_{i, n_k}, h_{n_k}, s') - \Delta \Pi_{n_k}(z_{i, n_k}, h_{n_k}, s) \right| > \epsilon(2d)^{-1}\right) \\ & \leq 2\mathbb{P}\left(\Delta \Pi_{n_k}(z_{i, n_k}, h_{n_k}, \cdot) \notin (2^{-d}\Gamma)^{\frac{\epsilon}{8d}}\right) \\ & = 2\mathbb{P}\left(2^d \Delta \Pi_{n_k}(z_{i, n_k}, h_{n_k}, \cdot) \in F\right) \\ & \leq 2 \exp\left(-\frac{3}{4} \bar{I}(F) c 2^{-d} f(z_{i, n_k}) \log n_k\right) \\ & \leq 2 \exp\left(-3 \times \frac{c 2^{-d} f(z_{i, n_k})}{\beta c 2^{-d}} \log n_k\right) \\ & \leq 2 \exp(-3 \log n_k). \end{aligned} \quad (5.4.4.11)$$

En combinant (5.4.4.11) et (5.4.4.2), nous obtenons que, pour tout entier k suffisamment grand,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n \in N_k} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \left\| \mathcal{H}_n(z_{i,n_k}, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| > \epsilon\right) \leq 2m_{n_k} n_k^{-3}. \quad (5.4.4.12)$$

Or, quel que soit les choix de $\delta > 0$ et $\gamma > 0$, on a, lorsque $k \rightarrow \infty$,

$$m_{n_k} = h_{n_k}^{-1+o(1)} = n_k^{1+o(1)}.$$

La preuve du lemme 5.4.3 se conclut alors en appliquant le lemme de Borel-Cantelli à la suite sommable en k dans (5.4.4.12). \square

Lemme 5.4.4 *Sous les hypothèses du théorème 5.2.1, il existe $\gamma_{1,\epsilon} > 0$ tel que, pour tout choix de $0 < \gamma < \gamma_{1,\epsilon}$ dans l'expression des n_k , $k \geq 1$, et pour tout choix de $\delta > 0$ dans la construction des z_{i,n_k} , $k \geq 1$, $1 \leq i \leq m_{n_k}$ (voir (5.4.2.1)), on ait presque sûrement*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d} \max_{n \in N_k} \left\| \Delta_n(z, h_n, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| \leq 6\epsilon.$$

Preuve : Soit $\gamma > 0$ fixé. Pour tout entier k suffisamment grand, pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$, pour tout $z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d} [0,1]^d$, pour tout $n \in N_k$ et pour tout $s \in [0,1]^d$, on a presque sûrement

$$\Delta_n(z, h_n, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) = \frac{\log n_k}{\log n} \mathcal{H}_n\left(z, \left(\frac{h_{n_k}}{h_n}\right)^{1/d} s\right) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, s). \quad (5.4.4.13)$$

L'ensemble $\Gamma_{cf(z_i)}$ est un compact de $(\mathcal{M}([0,1]^d), \|\cdot\|)$ (voir la propriété 5.1.1). On en déduit que

$$\lim_{T \rightarrow 1, \rho \rightarrow 1} \sup_{g \in \Gamma_{cf(z_i)}} \|Tg(\rho^{1/d} \cdot) - g(\cdot)\| = 0. \quad (5.4.4.14)$$

D'après (5.4.3.2) et d'après le lemme 5.4.3, nous savons que, presque sûrement, pour tout entier k suffisamment grand, pour tout $1 \leq i \leq$

m_{n_k} , pour tout $z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d}[0, 1]^d$, et pour tout $n \in N_k$, on a

$$\inf_{g \in \Gamma_{cf(z_i)}} \left\| \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) - g \right\| < 3\epsilon.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité triangulaire, et d'après (5.4.4.13), on a presque sûrement, pour tout entier k suffisamment et pour tout $n \in N_k$,

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_n(z, h_n, \cdot) - \frac{f(z)}{f(z_{i,n_k})} \mathcal{H}_n(z, \cdot) \right\| \\ & \leq 5\epsilon + \sup_{g \in \Gamma_{cf(z_i)}} \sup_{1 \leq T \leq \frac{f(z_{i,n_k}) \log n_k}{f(z) \log n}, \frac{h_{n_k}}{h_n} \leq \rho \leq 1} \| Tg(\rho^{1/d} \cdot) - g(\cdot) \| \\ & \leq 5\epsilon + \sup_{g \in \Gamma_{cf(z_i)}, 1 \leq T \leq \frac{f(z_{i,n_k}) \log n_k}{f(z) \log n_{k-1}}, \frac{h_{n_k}}{h_{n_{k-1}}} \leq \rho \leq 1} \| Tg(\rho^{1/d} \cdot) - g(\cdot) \|. \end{aligned} \quad (5.4.4.15)$$

La dernière ligne est une conséquence de la décroissance de $(h_n)_{n \geq 1}$. D'après (HVE1), on sait que, pour tout entier $k \geq 1$ on a $\frac{n_{k-1}}{n_k} \leq \frac{h_{n_k}}{h_{n_{k-1}}} \leq 1$. De plus, on a, par régularité de f sur H^α et par définition des n_k ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m_{n_k}} \sup_{z \in z_{i,n_k} + (\delta h_{n_k})^{1/d}[0, 1]^d} \frac{f(z_{i,n_k}) \log n_k}{f(z) \log n_{k-1}} = 1, \quad (5.4.4.16)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{k-1}}{n_k} = (1 + \gamma)^{-1}. \quad (5.4.4.17)$$

Ainsi, en choisissant $\gamma > 0$ suffisamment petit, le terme dans (5.4.4.15) devient inférieur à 6ϵ , pour tout entier k suffisamment grand et pour tout $1 \leq i \leq m_{n_k}$. Le lemme 5.4.4 est démontré. \square

Fin de la preuve de la partie (ii) du théorème 5.2.1

En combinant les lemmes 5.4.4 et 5.4.3, nous concluons qu'il existe $\delta > 0$ et $\gamma > 0$ suffisamment petits pour que (5.4.4.1) soit vérifiée presque sûrement. Nous combinons ensuite (5.4.4.1) avec (5.4.3.2), pour

obtenir que, presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\sup_{z \in H_l} \inf_{g \in \Gamma_{cf}(z_l)} \|\Delta_n(z, h_n, \cdot) - g\| \leq 9\epsilon.$$

D'après (5.4.1.5), nous en concluons que presque sûrement on a, pour tout entier n suffisamment grand,

$$\sup_{z \in H_l} \inf_{g \in \Gamma_{cf}(z)} \|\Delta_n(z, h_n, \cdot) - g\| \leq 10\epsilon.$$

Nous répétons cet argument pour tout $l = 1 \dots L$ (voir (5.4.1.7)). Ainsi, presque sûrement, pour tout entier n suffisamment grand, on a

$$\sup_{z \in H} \inf_{g \in \Gamma_{cf}(z)} \|\Delta_n(z, h_n, \cdot) - g\| \leq 10\epsilon.$$

La preuve de la partie (ii) du théorème 5.2.1 est donc achevée car $\epsilon > 0$ est arbitraire. \square

Annexe : Inégalités concernant le processus empirique

Dans cette partie, nous citons des inégalités concernant le processus empirique, que nous utilisons dans l'établissement des LFLI de cette thèse.

5.5 Inégalités concernant le processus empirique réel

La première inégalité, due à Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz, montre que la norme uniforme du processus empirique a une distribution "sous-Gaussienne".

Proposition 5.5.1 (Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz) *Il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que, pour tout $t > 0$, on ait*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{u \in [0,1]} |\alpha_n(u)| \geq t\right) \leq \mathcal{C} \exp\left(-2t^2\right).$$

Preuve.

Voir [41]. Massart a montré que l'on peut choisir $\mathcal{C} = 2$. \square

Une technique très souvent utilisée dans la manipulation du processus empirique est la Poissonisation. En effet, il est remarquable que nF_n (voir (2.0.2.1)) soit distribué comme un processus de Poisson sur $[0,1]$ (noté $\Pi_n(\cdot)$) d'intensité n , conditionné par $\Pi_n(1) = n$. Ainsi, si on s'intéresse au processus empirique partout sauf autour de 1, on peut se ramener à l'étude d'un processus de Poisson qui a la propriété agréable

d'avoir ses accroissements indépendants. Rappelons que $B([0, 1])$ désigne l'espace des fonctions continues à droite sur $[0, 1[$, et admettant une limite à gauche en tout point de $]0, 1]$.

Lemme 5.5.1 (Poissonisation de α_n) *Soit $0 < a < 1$. Il existe une constante C_a telle que, pour tout ensemble $A \subset B[0, 1]$ qui rend F_n mesurable, on a*

$$\mathbb{P}(nF_n \in A) \leq C_a \mathbb{P}(\Pi_n \in A).$$

Preuve.

Voir par exemple [33]. \square

5.6 Inégalités concernant le processus empirique indexé par une classe de fonctions

Rappelons que $(L^\infty(T), \|\cdot\|_T)$ est l'espace de Banach des fonctions réelles bornées, définies sur T , muni de la norme sup usuelle

$$\|z\|_T := \sup_{t \in T} |z(t)|.$$

L'inégalité maximale suivante, due à Ottaviani, constitue un outil important dans l'établissement de lois du logarithme itéré.

Inégalité 5.6.1 (Inégalité d'Ottaviani) *Soient X_1, \dots, X_n des processus stochastiques indépendants, indexés par le même ensemble T . Alors pour tous $\lambda, \mu > 0$ on a*

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} \left\| \sum_{i=1}^k X_i \right\|_T > \lambda + \mu\right) \leq \frac{\mathbb{P}\left(\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|_T > \lambda\right)}{\min_{k \leq n} \mathbb{P}\left(\left\| \sum_{i=k}^n X_i \right\|_T \leq \mu\right)},$$

dés lors que toutes ces probabilités sont définies.

Preuve.

Voir par exemple [98], A.2.11.□.

L'inégalité suivante sera énormément utilisée dans les diverses preuves de cette thèse. Elle constitue l'outil de base des lemmes d'association par blocs.

Proposition 5.6.1 (Inégalité de type Ottaviani) *Soit $(X_n(\cdot))_{n=1,\dots,N}$ des processus stochastiques à valeur dans $L^\infty(T)$, vérifiant, pour tout $n = 1, \dots, N$, et pour tout $1 \leq i \leq n - 1$,*

$$(X_N - X_n) \perp\!\!\!\perp X_i \quad (5.6.0.18)$$

Soit $A \subset L^\infty(T)$ et $\epsilon > 0$ quelconques. Supposons que

$$\min_{n=1,\dots,N} \mathbb{P}(\|X_N - X_n\|_T \leq \epsilon) \geq \frac{1}{2}. \quad (5.6.0.19)$$

Alors on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N \inf_{g \in A} \|X_n - g\|_T \geq 2\epsilon\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\inf_{g \in A} \|X_N - g\|_T \geq \epsilon\right).$$

Preuve Voir, par exemple [27].□

Bibliographie

- [1] Technical report.
- [2] Acosta (De), A. Small deviations in the functional central limit theorem with applications to the functional laws of the iterated logarithm. *Ann.Prob.*, 11(2) :78–101, 1983.
- [3] M.A. Arcones. The large deviation principle of stochastic processes, Part 1 . *Theory.Prob.Appl.*, 47(4) :567–583, 2003.
- [4] M.A. Arcones. The large deviation principle of stochastic processes, Part 2. *Teor.Veroyatnost. i Primenen*, 48(1) :122–150, 2003.
- [5] M. Bashkara Rao and R.J. Tomkins. The law of the iterated logarithm and central limit theorem for L-statistics. *Journ.Multiv.Anal.*, 78(2) :191–217, 2001.
- [6] G. Bennett. Probability inequalities for the sum of independent random variables. *J.Amer.Stat.Assoc.*, 57 :33–45, 1962.
- [7] P. Berthet. On the rate of clustering to the Strassen set for increments of the empirical process. *Journ. Theoretic. Probab.*, 10(3) :557–579, 1997.
- [8] P. Berthet. Inner rates of coverage of Strassen type sets by increments of the uniform empirical and quantile processes. *Preprint*, 2002.
- [9] P. Berthet and M. Lifshits. Some exact rates in the functional law of the iterated logarithm. *Ann. I.H.P. B*, 38 :811–824, 2002.

- [10] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley, New York, 1968.
- [11] D. Bosq and J.P. Lecoutre. *Théorie de l'estimation fonctionnelle*. Economica, Paris, 1987.
- [12] J. Bretagnolle and P. Massart. Hungarian constructions from the nonasymptotic viewpoint. *Ann.Prob.*, 17 :239–256, 1989.
- [13] H. Chernoff. A measure of asymptotic efficiency for tests of hypothesis based on the sum of observations. *Ann.Math.Stat.*, 23 :493–507, 1952.
- [14] K.L. Chung. On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *Trans.Amer.Math.Soc*, 64 :205–233, 1948.
- [15] H. Cramér. Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités. In *Colloquium on theory of probability*, 1937.
- [16] E. Csàki. A relation between Chung's and Strassen's laws of the iterated logarithm. *Coll.Math.Soc. Janios Bolyai*, 57 :83–93, 1980.
- [17] M. Csörgő and P. Révész. *Strong Approximation in Probability and Statistics*. Acedemic Press, New York, 1981.
- [18] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probabilités et statistiques II : problèmes à temps mobile*. Masson, 1993.
- [19] P. Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés, un test non paramétrique d'indépendance. *Bull.Acad.Royale.Belg., Classe Sciences*, pages 274–292, 1979.
- [20] P. Deheuvels. Nonparametric tests of independence. In J.P. Raoult, editor, *Statistique Non Paramétrique Asymptotique*, Lecture Notes in Mathematics, pages 95–107, 1980.
- [21] P. Deheuvels. Some applications of dependence functions : nonparametric estimates of extreme values distributions and a Kiefer-type bound for the uniform test of dependence. In *Nonparametric*

- Statistical Inference, Coll.Math.Soc. János Bolyai*, volume 32, pages 193–201, 1980.
- [22] P. Deheuvels. A non-parametric test for independence. *Publ.Instit. Stat. Univ.Paris.*, 26 :29–50, 1981.
- [23] P. Deheuvels. Functional Erdős-Rényi laws. *Studia.Scent.Math.Hung.*, 26 :261–295, 1991.
- [24] P. Deheuvels. Laws of the iterated logarithm for density estimators. In G.Roussas, editor, *Nonparametric Functional estimators and Related Topics*, NATO adv.Sci.Ins. C, pages 19–29. Kluwer Academic, 1991.
- [25] P. Deheuvels. Strong laws for local quantile processes. *Ann.Prob.*, 25 :2007–20054, 1997.
- [26] P. Deheuvels. Chung type functional laws of the iterated logarithm for tail empirical processes. *Ann.I.H.P. B*, 36 :583–616, 2000.
- [27] P. Deheuvels. Strong approximation of quantile process by iterated Kiefer processes. *Ann. Prob.*, 28(2) :909–945, 2000.
- [28] P. Deheuvels and M. Lifshits. Strassen type functional laws for strong topologies. *Prob.Theor.Rel. Fields*, 97 :151–167, 1993.
- [29] P. Deheuvels and M. Lifshits. Necessary and sufficient condition for Strassen law of the iterated logarithm in nonuniform topologies. *Ann.Prob.*, 22 :1838–1856, 1994.
- [30] P. Deheuvels and M. Lifshits. Probabilities of hitting of shifted small balls by centered Poisson processes. *J.Math.Sci*, 118(6) :5541–5554, 2003.
- [31] P. Deheuvels and D.M. Mason. Nonstandard functional laws of the iterated logarithm for tail empirical and quantile processes. *Ann. Prob.*, 18 :1693–1722, 1990.

- [32] P. Deheuvels and D.M. Mason. A tail empirical process approach to some nonstandard laws of the iterated logarithm. *J. Theor. Prob.*, 4 :53–85, 1991.
- [33] P. Deheuvels and D.M. Mason. Functional laws of the iterated logarithm for the increments of empirical and quantile processes. *Ann. Prob.*, 20 :1248–1287, 1992.
- [34] P. Deheuvels and D.M. Mason. Functional laws of the iterated logarithm for local empirical processes indexed by sets. *Ann. Prob.*, 22 :1619–1661, 1994.
- [35] P. Deheuvels and D.M. Mason. Nonstandard local empirical processes indexed by sets. *J. Statist. Plann. Inf.*, 45 :91–112, 1995.
- [36] P. Deheuvels and D.M. Mason. General confidence bounds for nonparametric functional estimators. *PREPRINT*, 2002.
- [37] P. Deheuvels, D.M. Mason, and E. Haeusler. Almost sure convergence of the Hill estimator. *Mat. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 104 :371, 1988.
- [38] M. Donsker. An invariance principle for certain probability theorems. *Mem. Amer. Math. soc.*, 6, 1951.
- [39] M.D. Donsker and Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Markov processes expectation for large time III. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 29 :389–461, 1976.
- [40] R.M. Dudley. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. *J. Function. Anal.*, 1 :190–330, 1967.
- [41] A. Dvoretzky, J. Kiefer, and J. Wofowitz. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *Ann. Math. Stat.*, 27 :642–669, 1956.
- [42] U. Einmahl. Extensions of results of Komlós, Major and Tusnády to the multivariate case. *J. Multiv. Anal.*, 28 :20–68, 1989.

- [43] U Einmahl and D.M. Mason. Strong limit theorems for weighted quantile processes. *Ann. Prob.*, 16(4) :1626, 1988.
- [44] U. Einmahl and D.M. Mason. Gaussian approximation of local empirical processes indexed by functions. *Probab.Theory Relat.Fields*, 107(3) :283–311, 1997.
- [45] U Einmahl and D.M. Mason. An empirical process approach to the uniform consistency of kernel type estimators. *Journ. Theoretic. Probab.*, 13 :1–13, 2000.
- [46] U. Einmahl and D.M. Mason. Uniform in bandwidth consistency of variable bandwidth kernel estimators. *Preprint*, 2003.
- [47] R.S. Ellis. Large deviations for a general class of random vectors. *Ann. Prob.*, 12 :1–12, 1984.
- [48] P. Erdős and A. Rényi. On a new law of large numbers. *J.Anal.Math.*, 23 :103–111, 1970.
- [49] H. Finkelstein. The law of iterated logarithm for empirical distributions. *Ann. Math. Stat.*, 42 :607–625, 1971.
- [50] D.Kh. Fuck and S.V. Nagaev. Probability inequalities for sums of independent random variables. *Theoror. Probab.Appl.*, 16 :643–660, 1971.
- [51] E. Giné and A. Guillou. Rates of strong uniform consistency for multivariate kernel estimators. *Ann.I.H.P. B*, 38 :907–921, 2002.
- [52] E Giné, D.M. Mason, and A. Zaitsev. The L_1 -norm density estimator process. *Ann.Probab*, 31 :719–768, 2003.
- [53] E. Giné and J. Zinn. Some limit theorems for empirical processes. *Ann.Prob.*, 12 :929–989, 1984.
- [54] N. Gorn and M. Lifshits. Chung’s law and the Csàki function. *Journ. Theoret. Probab.*, 12 :399–420, 1999.
- [55] K. Grill. A lim inf result in Strassen’s law of the iterated logarithm. *Probab.Th.Rel.Fields*, 89 :149–157, 1991.

- [56] J. Hajek, Z. Sidak, and P. Sen. *Theory of Rank Tests*. Academic Press, San Diego, California, 1998.
- [57] P. Hall. Laws of the iterated logarithm for nonparametric density estimators. *Z. Warsch. Verwand. Gebiete*, 54 :47–61, 1981.
- [58] P. Hall. *The Bootstrap an Edgeworth Expansion*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [59] W. Hoeffding. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J.Amer.Stat.Assoc.*, 58 :13–30, 1963.
- [60] J. Hoffman-Jorgensen. Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia.Math.*, (52) :159–186, 1974.
- [61] W. Härdle. A law of the iterated logarithm for nonparametric regression function estimators. *Ann.Stat.*, 12 :624–635, 1984.
- [62] W. Härdle, Janssen, and R. Serfling. Strong uniform consistency rates of estimators of conditional functionals. *Ann.Stat.*, 16 :1428–1449, 1988.
- [63] W. Härdle and Luckhaus S. Uniform consistency of a class of regression function estimators. *Ann.Stat.*, 12 :612–623, 1984.
- [64] N.C Jain and M.B. Marcus. Integrability of infinite sums of independent vector-valued random variables. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 212 :1–36, 1975.
- [65] J. Kiefer. On Bahadur’s representation of sample quantiles. *Ann.Math.Stat.*, 38(5) :1323–1342, 1967.
- [66] J. Komlós, P. Major, and G. Tusnády. An approximation of partial sums of independent r.v.’s and the sample d.f.I. *Wahrsch. Verw. Gebiete*, 32 :111–131, 1975.
- [67] J. Komlós, P. Major, and G Tusnády. An approximation of partial sums of independent r.v.’s and the sample d.f.II. *Wahrsch. Verw. Gebiete*, 34 :33–58, 1977.

- [68] V. Konakov. On the convergence rate of maximal deviation distribution for kernel regression estimates. *J.Mult.Anal.*, 15 :279–294, 1984.
- [69] J. Kuelbs, W.V. Li, and M. Talagrand. Liminf results for Gaussian samples and Chung’s functional LIL. *Ann.Prob.*, 22 :1879–1903, 1994.
- [70] T.L. Lai. Reproducing kernel Hilbert space and the law of the iterated logarithm for Gaussian processes. *Z. Wahrschein. Verw. Gebiete*, 29 :7–19, 1974.
- [71] R. Latała. On a maximal inequality for sums of independent identically distributed random variables. *Warsaw University Print*, 1993.
- [72] M. Ledoux and M. Talagrand. Some applications of isoperimetric methods to strong limit theorem for sums of independent random variables. *Ann.Prob.*, 18 :754–789, 1990.
- [73] M.A. Lifshits. *Gaussian random functions*. Kluwer Academic Publisher, 1995.
- [74] A. Lucas. Fractales aléatoires de type Chung pour les accroissements du processus de Wiener. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, 326(9) :1123–1126, 1998.
- [75] J. Lynch and J. Sethuraman. Large deviations for processes with independent increments. *Ann.Prob.*, 15(2) :610–627, 1987.
- [76] D.M. Mason. A strong invariance principle for the tail empirical process. *Ann. I.H.P. B*, 24 :491–506, 1988.
- [77] D.M. Mason. A uniform functional law of the iterated logarithm for the local empirical process. *Ann.Prob.*, 32(2) :1391–1418, 2004.
- [78] D.M. Mason and W.R. van Zwet. A refinement of the KMT inequality for the uniform empirical process. *Ann.Prob.*, 15 :871–884, 1987.

- [79] P. Massart. Strong approximations for multivariate empirical and related processes. *Ann.Prob.*, 17 :266–291, 1989.
- [80] A.A. Mogulskii. Small deviations in the space of trajectories. *Theor.Probab.Appl.*, 19 :726–736, 1974.
- [81] A.A. Mogulskii. On the law of the iterated logarithm in Chung’s form for functional spaces. *Theor.Probab.Appl.*, 24 :405–413, 1979.
- [82] Montgomery-Smith, J.S. Comparison of sums of identically distributed random vectors. *Probab.Math.Stat*, 14 :281–285, 1993.
- [83] E.A. Nadaraya. On estimating regression. *Theor.Prob.Appl.*, 9 :141–142, 1964.
- [84] Y. Nikitin. *Asymptotic efficiency of nonparametric estimators*. Cambridge Univeristy Press, 1995.
- [85] E. Parzen. On estimation of probability density function and mode. *Ann.Math.Stat.*, 33 :1065–1076, 1962.
- [86] V. Petrov. *Limit theorems of probability theory*. Carendon Press, 1995.
- [87] D. Pollard. *Convergence of stochastic processes*. Springer-Verlag, N.Y., 1984.
- [88] M. Rosenblatt. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann.Math.Stat.*, 27 :832–837, 1956.
- [89] D.W. Scott. *Multivariate Density Estimation : Theory, Practice and Visualization*. Wiley, New York, 1992.
- [90] J. Shao and D. Tu. *The Jackknife and Bootstrap*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [91] Shorack and J.A. Wellner. *Empirical Processes and applications to statistics*. Springer, 1986.
- [92] Strassen. An invariance principle for the law of the iterated logarithm. *Z.Wahrsch.Gebiete*, 3 :221–226, 1964.

- [93] W. Stute. The oscillation behavior of empirical processes. *Ann. Prob.*, 10 :86–107, 1982.
- [94] M. Talagrand. Donsker classes of sets. *Prob.Theo.Rel.Fields*, 78 :169191, 1988.
- [95] M. Talagrand. On the rate of clustering in the law of the iterated logarithm for Brownian motion. *Prob.Banach Spaces*, 1992.
- [96] M. Talagrand. New Gaussian estimates for enlarged balls. *G.A.F.A*, 3(5) :503–525, 1993.
- [97] M. Talagrand. Sharper bounds for Gaussian and empirical processes. *Ann. Prob.*, 22 :28–76, 1994.
- [98] A.W. van der Vaart and J.A. Wellner. *Weak convergence and empirical processes*. Springer, 1996.
- [99] Varadhan. Asymptotic probabilities and differential equations. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 19 :261–286, 1966.
- [100] D. Varron. An empirical process approach to the comparison of two different bandwidths in kernel density estimation. *Preprint*, 2003.
- [101] A.Yu. Zaitsev. Estimates of the Levy-Prokhorov distance in the multidimensional central limit theorem for random variables with finite exponential moment. *Theo.Prob.Appl.*, 31(2) :203–220, 1987.
- [102] A.Yu. Zaitsev. On the Gaussian approximation of convolutions under multidimensional analogues of S.N. Bernstein’s inequality. *Probab.Theor.Rel. Fields*, 74(4) :535–566, 1987.