



**HAL**  
open science

# Écoulements dans les Fractures Ouvertes

Yves Méheust

► **To cite this version:**

Yves Méheust. Écoulements dans les Fractures Ouvertes. Hydrologie. Université Paris Sud - Paris XI, 2002. Français. NNT: . tel-00008477v3

**HAL Id: tel-00008477**

**<https://theses.hal.science/tel-00008477v3>**

Submitted on 16 Feb 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Écoulements dans les Fractures Ouvertes

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 avril 2002

pour l'obtention du

**Doctorat de l'université Paris-Sud (XI)**  
(spécialité Sciences de la Terre)

par

Yves MÉHEUST

### Composition du jury

*Président :* Hermann ZEYEN

*Rapporteurs :* François-Henri CORNET  
Jean-Pierre HULIN

*Examineurs :* Yves GUÉGUEN (directeur de thèse)  
Knut-Jørgen MÅLØY  
Stéphane ROUX

*Invité :* Jean SCHMITTBUHL (co-directeur de thèse)



# Écoulements dans les Fractures Ouvertes

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 avril 2002

pour l'obtention du

**Doctorat de l'université Paris-Sud (XI)**  
(spécialité Sciences de la Terre)

par

Yves MÉHEUST

### Composition du jury

*Président* : Hermann ZEYEN

*Rapporteurs* : François-Henri CORNET  
Jean-Pierre HULIN

*Examineurs* : Yves GUÉGUEN (directeur de thèse)  
Knut-Jørgen MÅLØY  
Stéphane ROUX

*Invité* : Jean SCHMITTBUHL (co-directeur de thèse)



## Remerciements

Le doctorat dont cette thèse est l'aboutissement aborde des sujets qui ont trait à la fois à la Physique (physique de la matière condensée et hydrodynamique), qui a constitué l'essentiel de ma formation jusqu'à mon stage de DEA, et aux Sciences de la Terre (physique des roches et géophysique). Jean Schmittbuhl, mon principal encadrant pendant les 4 années de mon DEA et de ma thèse, a été le trait d'union entre ces deux disciplines. Je souhaite rendre hommage à son ouverture d'esprit et à sa passion pour la Science, au-delà des barrières conventionnellement tracées entre les communautés. À son contact, j'ai tout à la fois découvert les Sciences de la Terre et appris un métier. Je lui suis reconnaissant de la rapidité et de l'efficacité avec laquelle il a toujours réagi à mes sollicitations, des conditions de travail excellentes dont j'ai bénéficié, et de la grande liberté qu'il m'a accordée dans l'organisation de mon temps. J'ai aussi apprécié à sa juste valeur la confiance qu'il m'a témoignée en m'envoyant renforcer une collaboration déjà bien établie avec l'Institut de Physique d'Oslo. J'ajouterai que ses relectures ont beaucoup contribué à la qualité de la présente thèse.

Yves Guéguen a bien voulu m'accueillir dans son équipe, et je l'en remercie. Je lui sais gré de l'intérêt qu'il a porté à mon travail, lequel s'est largement enrichi de ses remarques et commentaires. Ses conseils m'ont également été précieux pour gérer le déroulement de mon doctorat, et le restent au moment de choisir l'orientation à donner à la suite de mon parcours. Grâce aux visiteurs de renommée scientifique internationale que j'ai pu cotoyer dans son groupe, et aux nombreuses conférences ou écoles d'été auxquelles j'ai pu participer, j'ai bénéficié d'un environnement scientifique exceptionnel.

François-Henri Cornet a accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je l'en remercie vivement. Ses remarques quant à l'applicabilité de notre modèle de fractures aux fractures naturelles, déjà exprimées à l'occasion de la correction de mon premier article, ont contribué à améliorer ma compréhension des milieux fracturés de la croûte superficielle, et ont motivé des développements ultérieurs du modèle. J'ai été touché par l'intérêt manifesté pour mon travail par Jean-Pierre Hulin et Stéphane Roux, tout au long de mon doctorat. Les travaux menés par Jean-Pierre et ses collaborateurs, notamment dans l'étude de la rugosité des surfaces de fracture, ont constitué une référence pour moi. Jean-Pierre, qui a suivi la progression de mes travaux, a bien voulu rapporter le manuscrit. Je lui en suis très reconnaissant, ainsi que du soutien qu'il m'a apporté à l'occasion de diverses candidatures. Certains développements de mon travail ont été directement motivés par des suggestions de Stéphane. Il a de plus accepté de faire partie du jury, en dépit de son emploi du temps très chargé. Pour tout cela, je le remercie chaleureusement. Hermann Zeyen a quant à lui accepté de représenter le département de Sciences de la Terre d'Orsay en présidant le jury. Ses compliments m'ont été droit au cœur, merci. En outre, ses remarques sur le manuscrit m'ont été bien utiles à l'heure des corrections finales.

La période de travail intense et fructueux qu'a constitué mon séjour de deux mois à l'Institut de Physique d'Oslo, au printemps 2000, a initié un travail en commun de deux ans. Knut-Jørgen Måløy m'a accueilli dans son groupe à cette occasion, et m'a fait découvrir la physique des écoulements diphasiques en milieu poreux. Il a témoigné d'un grand intérêt pour mon travail de thèse dans son ensemble, et a fait le trajet de Norvège pour participer à mon jury de thèse. Je l'en remercie chaleureusement. Merci aussi à Grunde Løvoll, avec qui j'ai travaillé dans le cadre de cette collaboration. Il a été plaisant de partager les difficultés et les moments d'enthousiasme avec lui. Je crois que nous faisons une bonne équipe, et je forme des vœux concernant notre travail en cours. Outre Knut-Jørgen et Grunde, maintes personnes ont contribué à faire de mes séjours à Oslo un bon moment, au premier rang desquels Arnaud Le Breton et Magali, Frédéric Courivaud, Dag Dysthe, François Renard, Lina Uri, Eyvind Aker, Renaud Toussaint. Qu'ils soient tous ici

chaudemment remerciés.

Parallèlement à mon activité de recherche, l'enseignement a occupé une part importante de mon temps, au département de Sciences de la Terre de Paris XI, pendant trois ans (sous la tutelle de Hermann Zeyen déjà cité plus haut) puis au département Terre-Atmosphère-Océan de l'ENS. J'ai beaucoup apprécié la confiance que m'a accordée l'équipe d'Orsay (Jean-Pierre Keller, Jean Bébien, Hermann), alors que j'étais jeune agrégé frais émoulu. J'ai eu plaisir à travailler avec Jean-Philippe Devaux puis Albane Saintenoy, à Orsay, ainsi que Laurent Molez et Marie-Pierre Doin, à L'ENS. Je remercie particulièrement Marie-Pierre ; la préparation de ses TDs de géodynamique m'a beaucoup appris.

C'est par Raúl Madariaga que je suis venu aux Sciences de la Terre, après que je l'eus contacté pour mon stage de DEA et qu'il m'eut mis en contact avec Jean Schmittbuhl. Je l'en remercie, ainsi que pour ses conseils à l'occasion de mes candidatures aux bourses de postdoc. L'aventure s'est poursuivie au sein de l'équipe de physique des roches, pendant mon doctorat. Je garderai un excellent souvenir de la cohabitation avec mes voisins de bureau successifs. Parmi eux, je souhaite remercier particulièrement Guy Simpson, qui m'a considérablement aidé pour la rédaction en anglais de mes premiers papiers, et Pierre Bésuelle, avec lequel j'ai souvent eu l'occasion de parler de mon travail, et, de manière plus générale, des contingences liées à l'activité de recherche. J'ai eu également grand plaisir à cotoyer « le Schu » (Alexandre Schubnel), et, plus récemment, Jérôme Fortin et Matthieu Dejean. Je suis redevable à de nombreuses personnes dans le laboratoire, pour leur assistance dans de multiples domaines. Guy Marolleau a réalisé le montage d'écoulement dans une demi-fracture, le bâti du rugosimètre et le support de son capteur mécanique. Françoise Larincq m'a rendu moult services (trop nombreux pour être détaillés) et m'a sorti de plus d'un traquenard administratif. Lina Dumont a dû gérer mes missions et leur cortège de complications. Isabelle Lavaleix s'est occupé des commandes et des missions. Je les en remercie du fond du cœur. Merci aussi à Mireille Dellac et Marie-Pierre Serot-Almeras pour leur gentillesse. Les moules de surfaces rugueuses en silicone ont pu être réalisés grâce au dessiccateur prêté par Nicole Catel (que je remercie également pour les places d'opéra). Les lames minces de la figure 3.13 ont été photographiées à l'aide du microscope de Bruno Goffé, et interprétées grâce au précieux concours d'Olivier Beyssac, Catherine Leyx et François Négro. Merci à eux. Merci aussi aux organisateurs du séminaire interne (Francesco Pacchiani, Pierre Henry, Anne Socquet), et aux intervenants du dit séminaire (Jean-Paul Callot, Guillaume Cairanne) initialement prévu le jour de ma soutenance, qui ont bien voulu le déplacer. Merci aux gourous de l'informatique (Patrick Chassevent, François Farcy, Denise N'diaye, David Tsang Hin Sung) qui m'ont aidé plus d'une fois. Jean-François Simon m'a dépanné à plusieurs reprises pour des bricolages dans mon bureau ; merci. Les discussions avec mes collègues thésards m'ont été bien souvent profitables (Fabien Trotet, Olivier Beyssac, Nicolas Gland, Guillaume Chambon, et bien d'autres) ; merci à eux. Merci à tous ceux qui m'ont adressé des encouragements pendant la période difficile de la rédaction (acharnée), ainsi qu'à ceux qui ont gentiment contribué à l'organisation et au bon déroulement du pot.

Pour clore le chapitre des remerciements professionnels, je souhaite remercier pêle-mêle un certain nombre de personnes dont les encouragements m'ont apporté un surcroît de motivation, ou qui m'ont simplement fait profiter de leur expérience : Ian Main, Matthias Holschneider, Brian Berkowitz, André Revil, Pierre Vergely, Yves Leroy, Harold Auradou, Jim Rice, Teng-Fong Wong, Jean-François Thovert, Didier Loggia, Jean-Pierre Gratier, John Rudnicki, Chris Spiers, Florian Lehner, Alexandre Stegner, Laurence Jouniaux, Claude Froidevaux. J'ai également été touché par la confiance que m'ont témoigné Marie-Louise Saboungi et Roland Pellenq à l'occasion de ma première candidature CNRS. Je leur suis très reconnaissant pour le soutien qu'ils m'ont apporté ; merci également à Joël Puibasset, Freddy Delville, Pierre Levitz et Jean-Noël Rouzaud,

qui m'ont aussi aidé dans cette préparation.

Ces années de doctorat ont été marquées par des moments de grand enthousiasme, mais aussi par des périodes de doute, pendant lesquelles le soutien de mes amis m'a été précieux : merci à Alexandra et Christophe, Anita-Massilia, Doudou, Franck et Céline, François, Mika, Nathalie, Régis, Seb' C., Seb' D., Seb' M., Patrick, Yoël et Fabienne, entre autres. J'ai également pu compter sur le soutien indéfectible de ma famille, au premier rang de laquelle mes parents Hélène et Michel, et ma grand-mère Yvonne, qui est mon supporter le plus enthousiaste et le moins objectif. Un grand merci aussi à mon oncle Gérard et ma tante Isabelle, qui ont fait le trajet depuis Grenoble pour venir à ma soutenance, à mon cousin Jacques et à sa fille qui sont venus eux aussi, à mon oncle Raymond et ma tante Louise pour leurs félicitations, à la joyeuse communauté (ou *comunità*?) de l'avenue Jules Gravereaux (Anita, Florita, Marinette) pour leurs encouragements, et aux cousins (Fred, François, Nico), qui commençaient à se demander si mes études finiraient un jour. Je suis particulièrement reconnaissant à mon père d'avoir traqué les fautes de typographie dans le manuscrit avec la rigueur qui lui est coutumière.

Enfin, la dernière dans cette liste de remerciements, mais non pas la dernière dans mes pensées, je tiens à remercier Agathe. La jolie citation de la dédicace (page v) est bien la moindre des choses qu'elle m'a apportées.

*Son teint est pâle et chaud ; la brune enchanteresse,  
A dans le cou des airs noblement maniérés ;  
Grande et svelte en marchant comme une chasseresse  
Son sourire est tranquille et ses yeux assurés.*

*Baudelaire (1857)*



*« Die Reife des Mannes : das heißt den Ernst wiedergefunden zu haben, den man als Kind hatte, beim Spiel. »*

*« La maturité de l'homme, c'est d'avoir retrouvé le sérieux que l'on avait au jeu, étant enfant. »*

*Nietzsche (1861)*

Je dédie cette thèse à mon père, qui aurait parfois voulu que je fusse plus sérieux.



## Résumé

La 1<sup>re</sup> partie de cette thèse présente une étude de la géométrie de surfaces rugueuses obtenues en laboratoire par fracturation de blocs de granite et de grès. Ces surfaces sont enregistrées à l'aide d'un rugosimètre à mesure mécanique et optique, développé pour cet usage. Les enregistrements sont bien décrits par un modèle auto-affine isotrope. La persistance des corrélations spatiales est sensiblement moins importante pour le grès que pour le granite.

Dans un 2<sup>e</sup> partie, on étudie comment l'écoulement à travers une fracture ouverte est influencé par la rugosité de ses parois, lorsque les effets inertiels peuvent être négligés. Une étude expérimentale met en évidence une sensibilité importante de la perméabilité de la fracture vis-à-vis de l'orientation du gradient de pression effectif. Un modèle numérique confirme ces observations, et permet d'interpréter cette « anisotropie » hydraulique en termes de chenalisation de l'écoulement. La chenalisation est contrôlée par les hétérogénéités de grande échelle du champ des ouvertures, dont l'importance dépend grandement de l'ajustement entre les deux surfaces aux grandes échelles.

Dans une 3<sup>e</sup> partie, une fracture remplie de gouge est modélisée comme un milieu poreux bidimensionnel composé d'une mono-couche de billes de verre. On étudie expérimentalement le déplacement d'un fluide mouillant par de l'air, de haut en bas, dans ce milieu. En ajustant la vitesse de filtration, c.-à-d. l'intensité des forces visqueuses, on étudie systématiquement la transition d'un régime d'écoulement stabilisé par la gravité, vers un régime d'écoulement où la rugosité de l'interface entre les deux fluides croît indéfiniment. Les effets capillaires, inhomogènes dans le milieu poreux, pilotent la dynamique locale du déplacement. En utilisant la théorie de la percolation, on prédit le seuil de l'instabilité et une loi d'échelle pour la largeur du front en déplacement stable. Ces prédictions sont vérifiées expérimentalement.

**Mots-clés:** fracture, rugosité, invariance d'échelle, auto-affinité, écoulement de Stokes, perméabilité, anisotropie, chenalisation, milieu poreux, drainage, instabilité visqueuse, tension de surface



## Abstract

The first part of this thesis addresses a study of the geometry of rough fractures that have been obtained through controlled fracturing of granite and sandstone blocks. The surfaces are recorded using a specially devised profiler, which allows mechanical and optical measurement. The recordings are well described by an isotropic self-affine model. The persistence of the correlations is significantly smaller for sandstone than it is for granite.

In a second part, we study how the flow through a rough fracture is influenced by the roughness of the fracture walls, when inertial effects can be neglected. An experimental setup allows to observe a significant dependence of the fracture permeability on the orientation of the effective pressure gradient. A numerical model confirms these observations, and allows to interpret this “hydraulic anisotropy” in terms of flow channeling. Channeling is controlled by large scale heterogeneities in the aperture field; the importance of these heterogeneities is greatly dependent on the matching of the two walls at large scales.

In a third part, a fracture filled with a gouge is modelled as a 2-dimensional porous medium made out of a single layer of glass beads. The downward displacement of a wetting fluid by air is studied experimentally in such a medium. By adjusting the Darcy velocity, we tune the intensity of the viscous forces and systematically study the transition between a regime where the displacement of the interface between the two fluids is stabilized by gravity, to a regime where the roughness of the interface increases infinitely. Capillary effects, which are inhomogeneous in the porous medium, drive the local dynamics of the displacement. Using the percolation theory, we predict the instability and a scaling law for the front width under stable displacement. These predictions are verified experimentally.

**Keywords:** fracture, roughness, scale invariance, self-affinity, Stokes flow, permeability, anisotropy, channeling, porous medium, drainage, viscous instability, surface tension



# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Écoulements dans la croûte superficielle – Motivations . . . . .	1
Présentation du mémoire . . . . .	1
Remarques liminaires . . . . .	2

---

---

## Partie I Rugosité des surfaces de fracture

---

---

<b>Chapitre 1 Surfaces de fracture et invariances d'échelles</b>	<b>7</b>
Introduction . . . . .	9
1.1 Description auto-affine des profils d'une surface de fracture . . . . .	9
1.1.1 Le concept d'objet fractal – autosimilarité . . . . .	10
1.1.2 Description auto-affine en deux dimensions . . . . .	12
1.1.3 Quelques propriétés des profils auto-affines . . . . .	14
1.2 Isotropie – description auto-affine en trois dimensions . . . . .	18
1.2.1 Croissance de la rugosité – Influence de la taille de l'échantillon . . . . .	18
1.2.2 Isotropie de la description auto-affine au-delà de la zone de croissance – un modèle de surface auto-affine isotrope . . . . .	20
1.2.3 Obtention de surfaces numériques . . . . .	21
1.3 Analyse de l'auto-affinité d'une surface de fracture . . . . .	22
1.3.1 Exposant de Hurst et dimension fractale . . . . .	24
1.3.2 Méthode de la fenêtre à largeur variable . . . . .	25
1.3.3 Méthode de la probabilité de premier retour . . . . .	26
1.3.4 Méthode du spectre de puissance . . . . .	26
1.3.5 Méthode du coefficient d'ondelette moyenné . . . . .	26
1.3.6 Conclusion sur les méthodes d'analyse . . . . .	29
1.4 Discussion – La description auto-affine est-elle la plus appropriée? . . . . .	29
Conclusion . . . . .	31

---

**Chapitre 2 Développement d'un rugosimètre à mesure optique et mécanique 33**

Introduction . . . . .	35
2.1 Anatomie du rugosimètre . . . . .	36
2.1.1 Présentation globale du fonctionnement du dispositif . . . . .	36
2.1.2 Système de positionnement . . . . .	36
2.1.3 Système de mesure . . . . .	37
2.1.4 Système d'acquisition – pilotage des instruments . . . . .	43
2.2 Validation de la rugosimétrie mécanique . . . . .	43
2.2.1 Calibration du capteur de déplacement LVDT . . . . .	43
2.2.2 Description de la grille — précautions liées à la fragilité de la pointe .	44
2.2.3 Estimation des incertitudes . . . . .	46
2.2.4 Comparaison de deux enregistrements de la même surface réalisés avec deux machines différentes . . . . .	48
2.3 Validation de la rugosimétrie optique statique . . . . .	51
2.3.1 Calibration du capteur optique . . . . .	51
2.3.2 Utilisation de la table en $z$ . . . . .	51
2.3.3 Changement de nœud – cinématique du positionnement précis . . . . .	52
2.3.4 Prise en considération des points aberrants . . . . .	53
2.3.5 Reproductibilité de la mesure optique . . . . .	56
2.4 Validation de la rugosimétrie optique dynamique . . . . .	57
2.4.1 Tests de la cinématique du déplacement . . . . .	57
2.4.2 Définition de la vitesse de déplacement – ajustement de l'intervalle entre deux mesures . . . . .	61
2.4.3 Positionnement des profils dans la direction $x$ . . . . .	61
2.4.4 Confrontation d'un enregistrement à un enregistrement réalisé avec la technique pas à pas . . . . .	66
2.5 Technique de répliques en silicone . . . . .	66
Conclusion . . . . .	68
<b>Annexes</b> . . . . .	69
A Présentation du programme de rugosimétrie mécanique . . . . .	70
B Présentation du programme de rugosimétrie optique pas à pas . . . . .	74
C Présentation du programme de rugosimétrie optique par balayage . . . . .	76

**Chapitre 3 Étude expérimentale de surfaces de fracture de grès et de granite 77**

Introduction . . . . .	79
3.1 Filtrage des surfaces auto-affines . . . . .	79
3.1.1 Interpolation bilinéaire . . . . .	79
3.1.2 Intégration spatiale . . . . .	83

---

3.1.3	Filtrage en ondelettes . . . . .	83
3.2	Étude expérimentale des surfaces de granite . . . . .	83
3.2.1	Étude de l'auto-affinité des profils . . . . .	86
3.2.2	Analyse en deux dimensions . . . . .	87
3.3	Étude expérimentale du grès . . . . .	91
3.3.1	Etude de l'auto-affinité des profils . . . . .	91
3.3.2	Y a-t-il universalité du coefficient de rugosité? . . . . .	98
3.3.3	Isotropie de l'auto-affinité dans le grès . . . . .	100
	Conclusion . . . . .	103

---



---

## Partie II Écoulement de Stokes dans une fracture rugueuse

---



---

<b>Chapitre 4</b>	<b>Transport de matière dans une fracture</b>	<b>107</b>
	Introduction . . . . .	109
4.1	Géométrie des ouvertures locales de la fracture . . . . .	109
4.1.1	Modélisation de la géométrie de la fracture . . . . .	109
4.1.2	Propriétés des surfaces . . . . .	112
4.1.3	Propriétés du champ des ouvertures de la fracture . . . . .	112
4.2	Description des propriétés hydrauliques d'une fracture ouverte . . . . .	115
4.2.1	Description mathématique de l'écoulement . . . . .	115
4.2.2	Fracture sans rugosité – Loi cubique . . . . .	116
4.2.3	Écoulement de Stokes – Loi de Darcy . . . . .	117
4.2.4	Équation de Reynolds . . . . .	118
4.3	Influence de la rugosité sur l'écoulement : plusieurs approches . . . . .	120
4.3.1	Approches expérimentales . . . . .	121
4.3.2	Approches analytiques . . . . .	121
4.3.3	Approches fondées sur l'équation de Reynolds . . . . .	122
4.3.4	Autres types d'études numériques . . . . .	124
4.3.5	Cadre de l'étude présentée dans les chapitres suivants . . . . .	124
	Conclusion . . . . .	126

<b>Chapitre 5 Étude expérimentale d'une fracture modèle</b>	<b>127</b>
Introduction . . . . .	129
5.1 Une expérience d'écoulement dans une demi-fracture . . . . .	129
5.1.1 Modèle expérimental . . . . .	129
5.1.2 Le fluide . . . . .	129
5.1.3 Protocole expérimental de mesure de la pression . . . . .	129
5.2 Étude du comportement hydraulique de la fracture . . . . .	130
5.2.1 Validité de la loi de Darcy . . . . .	130
5.2.2 Écoulement de Stokes et réversibilité . . . . .	131
5.2.3 Ouverture hydraulique . . . . .	132
5.2.4 Transmissivité de la fracture seule– Perte de charge aux niveau des canaux d'admission et de sortie . . . . .	132
5.3 Résultats – Influence de la rugosité sur l'écoulement . . . . .	135
5.3.1 Incertitude des mesures . . . . .	135
5.3.2 Reproductibilité . . . . .	135
5.3.3 Écart à la loi cubique . . . . .	135
5.3.4 Sensibilité à l'orientation du gradient de pression . . . . .	136
Conclusion . . . . .	136
Annexe : Flow enhancement of a rough fracture . . . . .	138
 <b>Chapitre 6 Anisotropie hydraulique et chenalisation</b>	 <b>149</b>
Introduction . . . . .	151
6.1 Un modèle numérique fondé sur l'équation de Reynolds . . . . .	151
6.1.1 Principe de la simulation numérique . . . . .	151
6.1.2 Schémas numériques . . . . .	154
6.2 Anisotropie du comportement hydraulique d'une fracture rugueuse . . . . .	157
6.2.1 Simulation de l'écoulement à travers la fracture expérimentale . . . . .	157
6.2.2 Comportement hydraulique d'une fracture numérique . . . . .	158
6.2.3 Rotation continue du gradient de pression – rôle des corrélations . . . . .	160
6.2.4 Corrélations du champ de flux local . . . . .	162
6.3 Comportement statistique d'un grand nombre de fractures . . . . .	163
6.3.1 Lois de décroissance de l'ouverture hydraulique avec l'ouverture moyenne	163
6.3.2 Étude statistique sur 500 fractures indépendantes . . . . .	163
6.4 Discussion . . . . .	164
6.4.1 Description statistique isotrope de la géométrie et comportement hy- draulique anisotrope? . . . . .	164
6.4.2 Quel paramètre simple pour décrire une telle fracture rugueuse du point de vue hydraulique? . . . . .	165
Conclusion . . . . .	166
Annexe : Geometrical heterogeneities and hydraulic anisotropy of rough fractures	168

---

<b>Chapitre 7 Fractures dont les parois sont ajustées aux grandes longueurs d'onde</b>	<b>201</b>
Introduction . . . . .	203
7.1 Surfaces corrélées aux grandes longueurs d'onde . . . . .	203
7.1.1 Implémentation numérique . . . . .	203
7.1.2 Conséquence sur les ouvertures locales . . . . .	204
7.1.3 Ajustement des surfaces et approximation de lubrification . . . . .	204
7.2 Influence de l'ajustement des surfaces sur l'ouverture hydraulique des fractures	204
7.2.1 Étude de deux familles de fractures particulières . . . . .	205
7.2.2 Étude statistique sur un grand nombre de fractures . . . . .	207
7.2.3 Influence sur le comportement d'une fracture quand on fait varier l'orientation du gradient de pression effectif . . . . .	207
Conclusion et discussion . . . . .	207
Annexe : Scale effects related to flow in rough fractures . . . . .	210

---



---

### Partie III Drainage dans une fracture contenant une gouge

---



---

<b>Modélisation d'un fracture remplie de gouge</b>	<b>245</b>
<b>Chapitre 8 Approche physique du drainage dans un milieu poreux bidimensionnel</b>	<b>249</b>
Introduction . . . . .	251
8.1 Écoulement diphasique dans une cellule de Hele-Shaw . . . . .	251
8.1.1 Description mathématique du déplacement des deux fluides en conditions de Stokes . . . . .	252
8.1.2 Analyse de stabilité linéaire . . . . .	253
8.1.3 Observations expérimentales de l'instabilité de Saffman-Taylor . . . . .	256
8.2 Écoulements diphasiques en milieu poreux . . . . .	257
8.2.1 Définitions . . . . .	257
8.2.2 Forces capillaires à l'échelle des pores . . . . .	258
8.2.3 Description du déplacement des deux fluides en conditions de Stokes . . . . .	259
8.2.4 Effet des forces visqueuses et de la gravité . . . . .	260
8.3 Drainage en milieu poreux bidimensionnel quand $\rho_{nm}$ et $\eta_{nm}$ peuvent être négligés . . . . .	261

8.3.1	Dynamique locale du déplacement . . . . .	261
8.3.2	Drainage en l'absence de gravité . . . . .	262
8.3.3	Drainage capillaire en présence de gravité . . . . .	266
8.3.4	Digitation visqueuse en gravité non nulle . . . . .	269
	Conclusion . . . . .	270
<b>Chapitre 9 Instabilité visqueuse pendant le drainage</b>		<b>271</b>
	Introduction . . . . .	273
9.1	Présentation du dispositif expérimental . . . . .	273
9.1.1	Un modèle expérimental de milieu poreux bidimensionnel . . . . .	273
9.1.2	Fluides utilisés . . . . .	275
9.1.3	Enregistrements . . . . .	275
9.1.4	Déroulement d'une expérience . . . . .	276
9.2	Méthodes d'analyse de la géométrie du front de drainage . . . . .	277
9.2.1	Traitement des images . . . . .	278
9.2.2	Méthodes d'analyse du front . . . . .	284
9.3	Observation de l'instabilité visqueuse . . . . .	284
9.3.1	Digitation capillaire en présence de gravité . . . . .	285
9.3.2	Digitation visqueuse . . . . .	285
9.3.3	Observation des structures de déplacement pour différentes valeurs de $C_a$ et $B_o$ . . . . .	285
9.3.4	Caractérisation de l'instabilité . . . . .	290
9.4	Confirmation théorique des observations expérimentales . . . . .	290
9.4.1	Étude d'une configuration stable . . . . .	290
9.4.2	Critère d'instabilité . . . . .	292
9.5	Dynamique de l'instabilité . . . . .	292
9.5.1	Dynamique du déplacement stable . . . . .	292
9.5.2	Discussion – quel lien avec l'instabilité de Saffman-Taylor? . . . . .	293
	Conclusion . . . . .	294
	Annexe : Competition between gravity and viscous effects during drainage . . . . .	295
<b>Conclusion générale</b>		<b>321</b>
	Perspectives . . . . .	323
<b>Bibliographie</b>		<b>325</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>333</b>
<b>Table des figures</b>		<b>335</b>

# Introduction générale

## Écoulements dans la croûte superficielle – Motivations

La plupart des formations géologiques de la croûte terrestre superficielle sont hautement fracturées, à des échelles allant du cm à plusieurs km. Les fractures correspondent à des surfaces où les contraintes au sein de la roche ont causé une perte de cohésion du matériau. Les types de contraintes qui ont présidé à la fracturation sont multiples [Singhal et Gupta, 1999] : contraintes tectoniques, contraintes résiduelles d'événements ayant eu lieu bien avant la fracturation, contraction du matériau due à une diminution de volume lors du refroidissement d'un magma, mouvements de surface tels que des glissements de terrain ou l'avancement d'un glacier, désenfouissement d'une roche dû à l'érosion. Les fractures *ouvertes* sont celles qui n'ont pas été refermées mécaniquement par les contraintes auxquelles elles ont été soumises depuis la fracturation, et qui n'ont pas été recimentées par cristallisation minérale dans l'espace entre les parois. Elles jouent un rôle fondamental dans le transport des fluides au sein de la croûte terrestre.

En effet, si les discontinuités que sont les failles peuvent agir comme des barrières vis-à-vis d'un écoulement de direction transverse, la majeure partie des mouvements et du stockage des fluides géophysiques (eau, pétrole, laves) dans la croûte terrestre se fait dans ou le long de réseaux de fractures inter-connectés [Singhal et Gupta, 1999]. Les grandeurs caractéristiques de l'écoulement des fluides dans ces réseaux (porosité et perméabilité) sont mal connues du point de vue quantitatif. Leur perméabilité est contrôlée à grande échelle par la connectivité des fractures et par la distribution spatiale de leurs perméabilités individuelles au sein du réseau. Les études de la perméabilité d'un réseau de fracture en rapport avec sa description topologique (longueurs et orientations des fractures, densité de fractures, connectivité du réseau) constituent un vaste domaine de recherche [Adler et Thovert, 1999; Bour et Davy, 1997]. Nous n'aborderons pas le comportement hydraulique "collectif" des fractures dans ce mémoire. Le comportement hydraulique de l'objet constitutif élémentaire du réseau, la fracture rugueuse, est lui-même loin d'être entièrement compris. Les travaux présentés dans cette thèse concernent la caractérisation de certains aspects du transport de matière dans une fracture géologique unique.

## Présentation du mémoire

Les parois des fractures rugueuses sont des surfaces issues de la fracturation du matériau et ayant subi des altérations mécaniques (suite au rejeu de la faille, par exemple) ou chimiques. La première partie du travail présenté dans ce mémoire a consisté à caractériser de façon précise la géométrie de surfaces de fracture de granite et de grès. Cette étude fait l'objet de la partie I du mémoire. Elle comporte trois chapitres. Le chapitre 1 présente les outils nécessaires à la caractérisation géométrique des surfaces, et une synthèse bibliographique des travaux antérieurs menés sur le sujet. Le chapitre 2 expose le développement d'une machine utilisée pour enregistrer

les topographies des surfaces de fracture rocheuses. Le principe de fonctionnement de la machine, son développement, ses performances et les tests réalisés pour la fiabiliser sont présentés en détail dans ce chapitre. Le chapitre 3 concerne l'étude expérimentale proprement dite de la rugosité des surfaces.

La deuxième partie du travail a consisté à comprendre comment la rugosité des parois d'une fracture ouverte influence l'écoulement à travers cette fracture, lorsque les effets inertiels peuvent être négligés (écoulement de Stokes). La partie II du mémoire est dévolue à cette étude. Le chapitre 4 présente les outils qui seront utilisés pour quantifier l'influence de la rugosité des surfaces de fracture sur l'écoulement ; nous y définissons notre approche du problème et la replaçons dans le contexte des travaux antérieurs. Un dispositif expérimental d'écoulement dans une demi-fracture rugueuse a permis des observations intéressantes. Il est présenté au chapitre 5 ; les résultats expérimentaux y sont également exposés et commentés. Le chapitre suivant présente une étude numérique destinée à confirmer les résultats expérimentaux et à les expliquer en faisant le lien entre la description locale de l'écoulement dans la fracture et les propriétés hydrauliques à l'échelle de la fracture. Nous présentons ensuite une étude numérique qui élargit l'applicabilité de notre modèle de fracture à un domaine plus vaste de fractures géologiques ; cette étude est présentée au chapitre 7.

Dans la partie III du mémoire, nous nous intéressons au drainage dans un milieu poreux bidimensionnel, une configuration que nous considérons comme une description en première approximation d'une fracture contenant une gouge. La gouge a été modélisée sous la forme d'un milieu granulaire désordonné, de sorte que la fracture peut être considérée comme un milieu poreux de grande porosité (c.-à-d., plusieurs dizaines de %). Nous nous intéressons plus particulièrement au déplacement de l'interface entre les deux fluides. Le chapitre 8 est une introduction au problème complexe de la description, à l'échelle du pore, des écoulements diphasiques dans les milieux poreux. Le cadre de l'étude y est défini. Le dernier chapitre du mémoire, enfin, présente une étude expérimentale et théorique du drainage dans un milieu poreux bidimensionnel lorsque la vitesse de filtration est suffisamment grande pour que les effets visqueux ne soit pas négligeables vis-à-vis des effets capillaires. On examine plus particulièrement comment la compétition entre gravité et forces de dissipation visqueuse contrôle la dynamique de l'interface entre les deux fluides.

## **Remarques liminaires**

Certains des travaux présentés ici ont fait l'objet de publications. Les publications ont été incluses en annexe des chapitres auxquels leur contenu les rattache le plus logiquement. On retrouvera dans le corps de la thèse, en français, la plupart du contenu des articles en anglais. En particulier, les figures incluses dans les articles et présentant des résultats importants ont été rediscutées dans le corps de la thèse. Mais elles n'ont en général pas été reproduites. Elles sont référencées par leur numéro dans l'article et par le numéro de la page de la thèse où elles apparaissent.

Cependant, les chapitres qui contiennent un article en annexe ne consistent pas en une simple traduction de l'article en question. On a essayé d'insister sur les liens entre les différents chapitres, et d'amener les résultats selon une démarche la plus progressive possible. Ainsi, certains résultats publiés dans tel article pourront être exposés dans un chapitre autre que celui en annexe duquel est placé l'article. Par ailleurs, les chapitres en français présentent de façon plus exhaustive que les articles certains détails techniques des dispositifs expérimentaux ou concernant l'analyse des données expérimentales. Quand on l'a pu, on s'est aussi efforcé de compléter les résultats

---

présentés dans les articles par des figures et des analyses supplémentaires.

En fin de compte, le lecteur devrait pouvoir lire ce mémoire sans avoir à lire en détail les articles en anglais placés en annexe de certains chapitres.



Première partie

Rugosité des surfaces de fracture



# Chapitre 1

## Surfaces de fracture et invariances d'échelles

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1.1 Description auto-affine des profils d'une surface de fracture</b> . .	<b>9</b>
1.1.1 Le concept d'objet fractal – autosimilarité . . . . .	10
Fractal géométrique . . . . .	10
Fractal aléatoire . . . . .	12
1.1.2 Description auto-affine en deux dimensions . . . . .	12
1.1.3 Quelques propriétés des profils auto-affines . . . . .	14
Loi d'échelle pour les moments de la fonction $h(x)$ . . . . .	15
Fonction de corrélation . . . . .	16
Spectre de puissance . . . . .	17
<b>1.2 Isotropie – description auto-affine en trois dimensions</b> . . . . .	<b>18</b>
1.2.1 Croissance de la rugosité – Influence de la taille de l'échantillon . .	18
1.2.2 Isotropie de la description auto-affine au-delà de la zone de crois- sance – un modèle de surface auto-affine isotrope . . . . .	20
1.2.3 Obtention de surfaces numériques . . . . .	21
<b>1.3 Analyse de l'auto-affinité d'une surface de fracture</b> . . . . .	<b>22</b>
1.3.1 Exposant de Hurst et dimension fractale . . . . .	24
1.3.2 Méthode de la fenêtre à largeur variable . . . . .	25
1.3.3 Méthode de la probabilité de premier retour . . . . .	26
1.3.4 Méthode du spectre de puissance . . . . .	26
1.3.5 Méthode du coefficient d'ondelette moyenné . . . . .	26
1.3.6 Conclusion sur les méthodes d'analyse . . . . .	29
<b>1.4 Discussion – La description auto-affine est-elle la plus appropriée ?</b>	<b>29</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>31</b>

---



## Introduction

On présente dans ce chapitre une description géométrique des surfaces de fracture faisant appel à la notion d'invariance d'échelle pour rendre compte de la complexité de ces surfaces de manière statistique. La description en question, dite *auto-affine*, s'est révélée bien adaptée à la description de surfaces obtenues par divers modes de fracturation, dans différents matériaux (céramique, métaux, roches), et pour différents modes de fracturation. En particulier, il convient bien à la description des surfaces de fracture rocheuses, qu'elles soient naturelles ou produites artificiellement en laboratoire. Il permet de concevoir des surfaces de fracture numériques qui reproduisent les surfaces de fracture rocheuses de manière réaliste.

Les enjeux liés à une description adéquate des surfaces de fracture rugueuses concernent à la fois la physique de la fracturation, et la physique des milieux fracturés. La surface rugueuse est la trace laissée derrière lui par le front de propagation de la fracture. Une bonne description de la rugosité doit permettre de contraindre la physique de la fracturation, d'infirmer ou confirmer certaines hypothèses sur la nature du processus [Bouchaud, 1997], et même de prendre en compte sa dynamique, qui fournit des indices précieux quant à sa nature [Morel, Schmittbuhl, López et Valentin, 1998]. Par ailleurs, les surface de fracture constituent les conditions-limites naturelles pour nombreux phénomènes physiques intervenant dans des milieux ayant été soumis préalablement à une fracturation. Le transport en milieu fracturé, qui est l'objet de la 2<sup>e</sup> partie de ce manuscrit, en est une application, à la fois en ce qui concerne le transport de matière et la conductivité électrique [Brown, 1987; Thompson, 1991; Plouraboué, Hulin, Roux et Koplik, 1998]. Le comportement mécanique d'une roche qui a été fracturée, après un éventuel glissement de l'un des deux blocs par rapport à l'autre, en est un autre exemple [Roux, Schmittbuhl, Vilotte et Hansen, 1993; Power et Durham, 1997].

On s'intéresse à des fractures obtenues par un processus de fracturation dynamique mais à vitesse modérée. Bien que présentant une rugosité complexe, elles peuvent être décrites par une correspondance univaluée de la position dans le plan moyen de fracturation avec l'altitude dans la direction normale à ce plan. Lorsque la fracturation se produit au-delà d'une certaine vitesse de propagation, elle fait apparaître des branchements et la rugosité résultante ne peut plus être décrite aussi simplement [Bouchaud, Bouchaud, Lapasset et Planès, 1993].

La première partie du chapitre est une introduction aux notions d'objet fractal et d'invariance d'échelle. On y définit la notion d'auto-affinité et on explique comment elle s'applique à la description statistique de profils échantillonnés sur des surfaces de fracture ; des propriétés remarquables des profils auto-affines sont ensuite présentées. La deuxième partie pose le problème de la généralisation à trois dimensions de la description auto-affine, pour l'étude d'une topographie complète ; un modèle numérique de génération de telles surfaces est présenté. La troisième partie est dévolue aux méthodes d'analyse de l'auto-affinité des surfaces. Enfin on conclut par une discussion sur la validité de la description auto-affine.

### 1.1 Description auto-affine des profils d'une surface de fracture

Mandelbrot (1982) fut le premier à introduire le concept d'objet fractal dans la description des surfaces de fracture métalliques. Il observa que la topographie des surfaces de fracture présentait des propriétés d'invariance d'échelle, sur une large gamme de longueurs d'onde. En sciences de la terre, l'auto-similarité des failles à grande échelle et des fractures à l'échelle du laboratoire a été montrée par Brown et Scholz (1985) et Poon, Sayles et Jones (1992), entre autres. Cependant, la description auto-similaire considérait toutes les directions de l'espace comme équivalentes, ce

qui convient mal à la description d'une topographie où la dimension normale au plan moyen de la propagation de la fracture est a priori non-équivalente aux dimensions qui définissent le plan de propagation. Mandelbrot (1985) introduisit ensuite la notion d'*auto-affinité*, une description qui se révéla bien décrire l'invariance d'échelle observée dans de nombreux systèmes désordonnés [Voss, 1985] et plus généralement dans de nombreux problèmes physiques [Mandelbrot, 1986]. Cette description est en particulier utile pour décrire la rugosité des failles [Schmittbuhl, Gentier et Roux, 1993] et fractures naturelles [Power et Durham, 1997] et celle des surfaces de fracture élaborées en laboratoire [Poon et al., 1992; Schmittbuhl, Vilotte et Roux, 1994].

### 1.1.1 Le concept d'objet fractal – autosimilarité

On peut définir le concept d'objet fractal de façon intuitive par la propriété suivante : les parties de l'objet, aussi petites soient-elles, ressemblent au tout ; les sous-parties d'une partie ressemblent à cette partie, et ainsi de suite. La "ressemblance" est définie en termes d'observables qui sont conservées par changement d'échelle. L'examen des caractéristiques de l'objet à une échelle donnée ne permet pas de déterminer l'échelle en question. Selon que l'invariance d'échelle concerne des motifs géométriques ou bien des observables statistiques, on parle d'objet fractal géométrique ou d'objet fractal aléatoire.

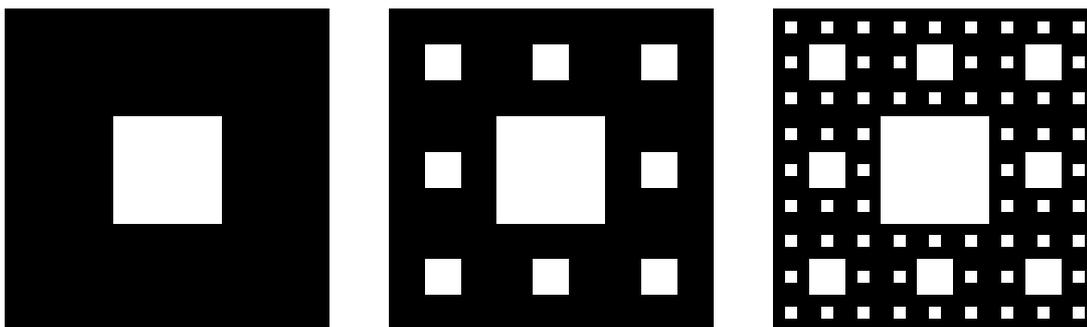
#### Fractal géométrique

La Fig. 1.1 présente deux exemples de construction géométrique permettant de construire un objet fractal. La figure géométrique composée par l'ensemble des points noirs obtenus après une infinité d'itérations de la construction présentée à la Fig. 1.1(a) peut être subdivisée en neuf parties. Huit d'entre elles sont des répliques de l'objet à l'échelle  $1/3$ . Elles peuvent elles-mêmes être subdivisées en neuf, dont huit sont leur réplique à l'échelle  $1/3$ . Ainsi, des agrandissements successifs de rapport 3 laissent la figure inchangée. On parle d'*auto-similarité*. La figure obtenue après une infinité d'itérations est extrêmement lacunaire : la figure, bien que construite à partir de motifs de dimension deux (des carrés noirs et blancs), est réduite à un ensemble de lignes dont le périmètre total est infini ; toute "surface" noire a disparu. Pour quantifier la densité de ce remplissage d'une surface par des lignes, on introduit la notion de *dimension de similarité*  $D_s$ , telle que le rapport d'échelle  $r(N)$  à choisir pour reproduire la figure de dimension  $L$  à partir de  $N$  motifs de dimension  $L/r(N)$  s'exprime comme [Feder, 1988]

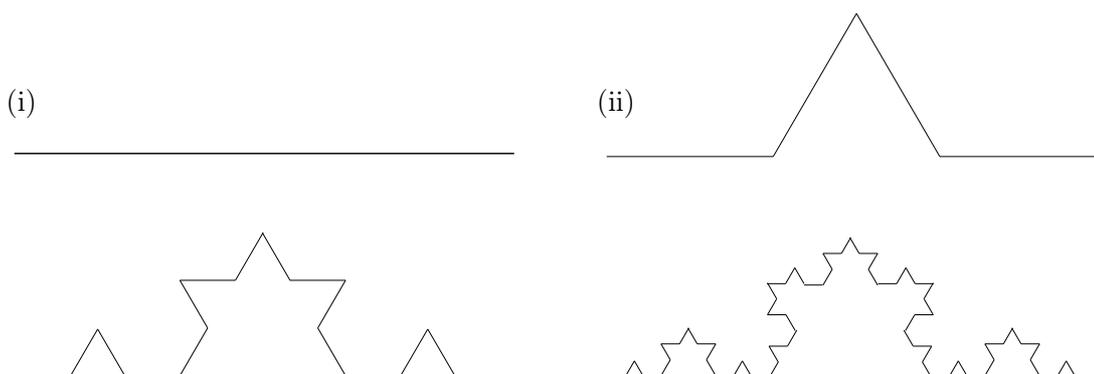
$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D_s}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{D_s = -\frac{\ln N}{\ln [r(N)]}}. \quad (1.1)$$

Dans le cas de la construction exposée à la Fig. 1.1(a), on reproduit la figure géométrique à l'aide de 8 motifs d'échelle  $1/3$ . L'échelle d'auto-similarité vaut  $\ln 8 / \ln 3 = 1.89$ . Elle est dans l'intervalle  $]1; 2[$ , ce qui semble indiquer que la figure est en quelque sorte intermédiaire entre une ligne et une surface.

Dans le cas de la construction dite "triadique de Koch" (Fig. 1.1(b)), on reproduit la figure obtenue après une infinité d'itérations à l'aide de 4 motifs d'échelle  $1/3$ . La dimension d'auto-affinité est  $-\ln 4 / \ln(1/3) = \ln 4 / \ln 3$  [Feder, 1988]. On constate qu'elle est plus proche de 1 que dans le cas précédent, ce qui signifie que la figure remplit de façon moins dense la portion de plan qu'elle occupe.



(a) Le “tapis de Sierpinsky”. On montre ici les trois premières itérations de la construction. Si l’on itère le procédé un grand nombre de fois, on obtient un objet qui contient 8 sous-objets qui lui sont parfaitement identiques, mais à l’échelle  $1/3$ . Lesquels peuvent être subdivisés de la même façon, etc. La dimension de similarité est  $\ln 8 / \ln 3 \simeq 1.89$ .



(b) L’ensemble triadique de Koch. La courbe d’initiation est une droite (notée (i)), mais ce pourrait être n’importe quel polygone. Le motif de génération est noté (ii). A chaque itération, on remplace chaque segment de la figure par le motif (ii) mis à l’échelle du segment. La dimension de similarité est  $\ln 4 / \ln 3 \simeq 1.26$ .

FIG. 1.1 – Deux exemples célèbres de constructions géométriques fractales.

## Fractal aléatoire

Les fractals tels qu'on les rencontre dans l'analyse des phénomènes naturels sont des fractals aléatoires : un agrandissement sur une sous-partie de l'échantillon fournit un sous-échantillon qui n'est pas identique à l'objet tout entier, mais dont certaines propriétés statistiques sont identiques à celles de l'échantillon de départ, ce qui se traduit visuellement par un aspect similaire.

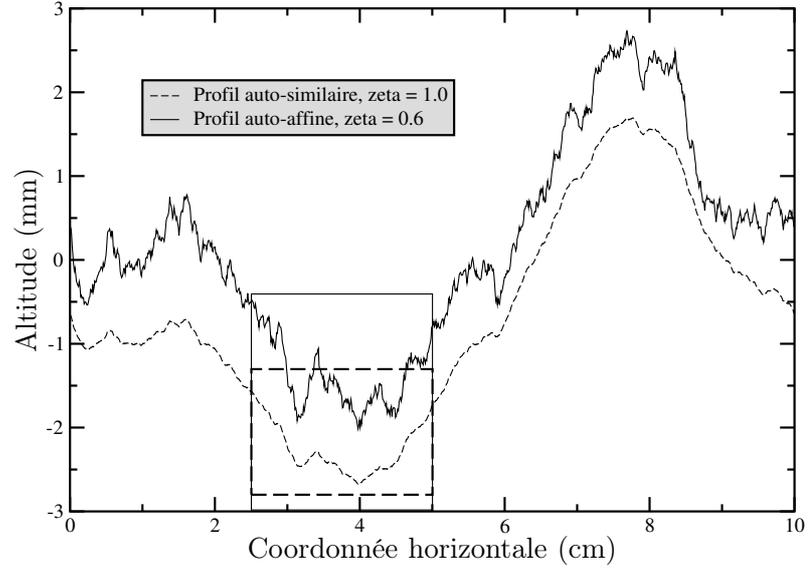
Le profil auto-similaire présenté à la Fig. 1.2 illustre cette invariance d'échelle. En (a), le profil est présenté en entier. En (b), on a zoomé d'un facteur  $1/4$ , et on a ajusté les échelles en conséquence :  $\times 4$  dans les directions horizontale et verticale. On peut comparer un tel profil à une figure telle que la Fig. 1.1(b). Notre profil est défini par la correspondance univaluee entre la position horizontale  $x$  et l'altitude  $z$  ; il n'y a qu'une seule valeur en  $z$  pour chaque position horizontale. Par ailleurs, on ne retrouve pas de motif exactement identique à différentes échelles. Mais, dans les deux situations (figure de Koch et profil aléatoire), l'observation de l'objet indépendamment de la connaissance de l'échelle d'observation ne permet pas de déterminer cette dernière.

**Dimension fractale** La *dimension fractale* d'un objet fractal aléatoire auto-similaire est une généralisation de la dimension de similarité présentée plus haut. Elle caractérise la tendance de l'objet à remplir de façon plus ou moins dense une partie du plan, si c'est une courbe, ou d'une partie de l'espace s'il s'agit d'une surface. Les objets géométriques classiques ont une dimension 1, 2 ou 3. Les objets fractals ont une dimension fractale réelle. Le concept de dimension fractale est défini mathématiquement par la théorie de la mesure de Hausdorff [Falconer, 1990], difficile à utiliser dans la pratique. On emploie en général un certain nombre de méthodes qui fournissent une dimension que l'on sait coïncider dans certains cas avec la dimension de Hausdorff. Pratiquement, si plusieurs de ces techniques fournissent pour la dimension deux valeurs proches sur une gamme d'échelle suffisante, l'objet peut être considéré comme fractal sur cette gamme d'échelle, avec pour dimension fractale la dimension ainsi calculée.

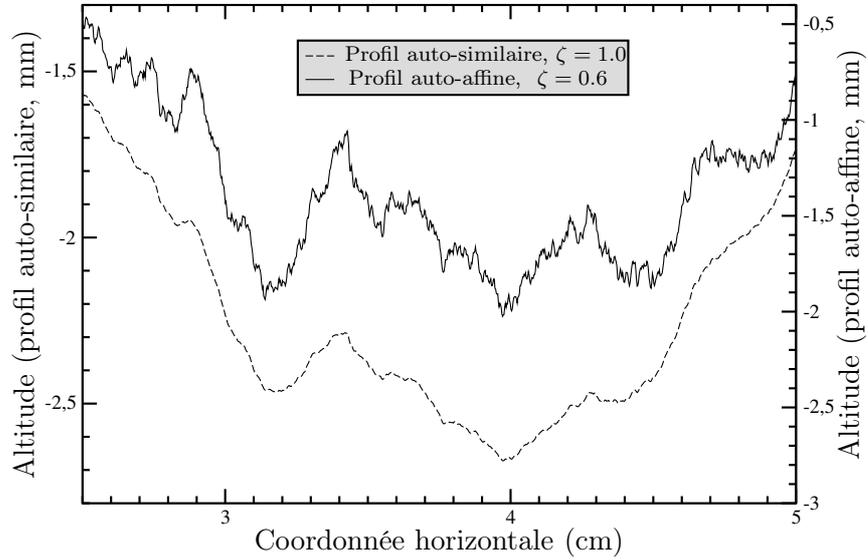
On peut citer par exemple la méthode de dénombrement de boîtes (*box-counting*), qui consiste dans sa version la plus simple à paver l'espace à l'aide de boîtes de taille donnée et à compter le nombre de boîtes nécessaires au recouvrement de l'objet auto-similaire dans son intégralité. Il existe alors une gamme d'échelles où le nombre de boîtes est une loi de puissance de la taille des boîtes. L'exposant de la loi de puissance est l'opposé de la dimension fractale  $D$  de l'objet. La méthode du diviseur ("divider method") consiste à mesurer la longueur de la courbe en l'approximant par une ligne brisée formée de segments dont les sommets appartiennent à la courbe et qui ont tous même extension horizontale. Plus cette dernière est petite, plus la mesure prend en compte le détail des diverses circonvolutions de la courbe, de sorte que la longueur calculée dépend de l'extension horizontale des segments comme une loi de puissance d'exposant  $1 - D$  [Brown, 1995a].

### 1.1.2 Description auto-affine en deux dimensions

Si l'on échantillonne la distribution des hauteurs le long d'un profil extrait d'une surface de fracture de rugueuse (cf. Chapitre 3), on constate que l'invariance d'échelle au sens statistique telle que la définit la description auto-similaire ne tient pas : si l'on diminue la taille de la fenêtre d'observation sans modifier son rapport d'aspect, on constate que le profil n'a plus la même allure ; il semble s'être dilaté verticalement. Par contre, il existe un rapport d'aspect pour l'agrandissement qui laisse le profil statistiquement inchangé par agrandissement. Plus



(a) Deux profils fractals engendrés numériquement. L'un est auto-similaire, l'autre auto-affine avec un exposant de rugosité 0.6. Les deux profils ont même écart-type. Leurs moyennes sont décalées de 0.5 pour clarifier la figure. Les cadres en traits pointillés et continus correspondent aux fenêtres sur lesquelles ont été effectués les agrandissements des profils auto-similaire et auto-affine, respectivement, présentés à la Fig. 1.2(b).



(b) Vue rapprochée des profils présentés à la Fig. 1.2(a), limitée aux cadres dessinés sur cette figure. Les échelles horizontales ont été multipliées par 4, et les échelles verticales par 4 et  $4^{0.6} \simeq 2.61$  pour le profil auto-similaire et pour le profil auto-affine, respectivement.

FIG. 1.2 – Comparaison de profils auto-similaires et auto-affines. Un zoom isotrope sur le profil auto-similaire lui conserve son aspect. Un zoom anisotrope, où les facteurs d'échelle en  $x$  et  $z$  sont respectivement  $s < 1$  et  $s^{-\zeta}$ , a le même effet sur le profil auto-affine. Sur les deux graphes, les amplitudes apparentes des deux profils sont identiques.

exactement, il existe un paramètre  $\zeta$  tel que la transformation

$$\begin{cases} x \mapsto s x \\ z \mapsto s^\zeta z \end{cases} \quad (1.2)$$

laisse le profil statistiquement inchangé pour tout rapport d'échelle  $s$ . Ainsi, la direction  $z$  n'est plus équivalente à la direction  $x$ . Le paramètre  $\zeta$  est généralement dénommé *exposant de Hurst* ou *exposant de rugosité*. L'auto-similarité apparaît comme un cas particulier d'auto-affinité ( $\zeta = 1$ ). Pour un grand nombre de matériaux et de modes de fracturations, la description auto-affine s'est révélée bien appropriée avec des valeurs de l'exposant de rugosité comprises entre 0.5 et 0.9. On reviendra plus en détail sur ces valeurs au paragraphe 1.1.3 .

Le profil auto-affine présenté à la Fig. 1.2 illustre l'invariance d'échelle auto-affine. On présente à la Fig. 1.2(b) une vue rapprochée où la fenêtre d'observation a été divisée pas  $1/s = 4$  horizontalement. On a ajusté l'échelle verticale d'un facteur  $s^\zeta$  pour le profil auto-affine. On constate visuellement que ce nouveau rapport d'aspect lui conserve un aspect similaire.

### 1.1.3 Quelques propriétés des profils auto-affines

Comment décrire mathématiquement l'invariance d'échelle statistique liée à la transformation auto-affine (1.2) ? On peut décrire le profil d'un point de vue statistique à partir de la fonction de densité de probabilité  $\mathcal{P}(h, l)$  pour la différence d'altitude  $h$  de deux points du profil dont les projections sur l'axe  $x$  sont distantes de  $l$ . La fonction  $\mathcal{P}$  est définie de la façon suivante : la différence d'altitude entre les deux points a une probabilité  $\mathcal{P}(h, l)dh$  d'être comprise entre les valeurs  $h$  et  $h + dh$ . La loi d'échelle envisagée impose pour  $\mathcal{P}$  une expression faisant intervenir une *fonction d'échelle*  $\Phi$  et deux exposants caractéristiques  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\mathcal{P}(h, l) = l^\alpha \Phi \left( h l^\beta \right) \quad , \quad (1.3)$$

à laquelle il faut associer la normalisation :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(h, l) dh = 1 \quad . \quad (1.4)$$

La relation de normalisation impose pour toute valeur de  $l$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l^\alpha \Phi \left( h l^\beta \right) dh = 1 \quad , \quad \text{soit} \quad l^{\alpha-\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tilde{h}) d\tilde{h} = 1 \quad , \quad (1.5)$$

ce qui impose l'égalité des exposants  $\alpha$  et  $\beta$ . Par suite,  $\mathcal{P}(h, l)$  vérifie la propriété d'échelle suivante :

$$\mathcal{P}(h, \lambda l) = \lambda^\alpha \mathcal{P}(h \lambda^\alpha, l) \quad . \quad (1.6)$$

L'hypothèse d'auto-affinité s'exprime mathématiquement par la relation

$$\boxed{\forall \lambda \quad \langle h(\lambda l) \rangle = \lambda^\zeta \langle h(l) \rangle} \quad , \quad (1.7)$$

où  $\langle \rangle$  désigne une moyenne sur toutes les réalisations. L'expression (1.7) se réécrit simplement sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h \mathcal{P}(h, \lambda l) dh = \lambda^\zeta \int_{-\infty}^{\infty} h \mathcal{P}(h, l) dh \\ \text{soit, d'après (1.6),} & \quad \lambda^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} h \mathcal{P}(h \lambda^\alpha, l) dh = \lambda^\zeta \int_{-\infty}^{\infty} h \mathcal{P}(h, l) dh \\ \text{qui s'écrit aussi} & \quad \lambda^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h} \mathcal{P}(\tilde{h}, l) d\tilde{h} = \lambda^\zeta \int_{-\infty}^{\infty} h \mathcal{P}(h, l) dh \quad . \end{aligned}$$

Finalement, les deux exposants  $\alpha$  et  $\beta$  valent  $\alpha = \beta = -\zeta$ . La fonction de densité de probabilité pour la différence d'altitude  $h$  entre deux points de projections horizontales distantes de  $l$  s'écrit [Schmittbuhl, Schmitt et Scholz, 1995] :

$$\boxed{\mathcal{P}(h, l) = \frac{1}{l^\zeta} \Phi\left(\frac{h}{l^\zeta}\right)} \quad . \quad (1.8)$$

La connaissance de cette distribution va nous permettre de calculer un certain nombre de caractéristiques remarquables de tels profils auto-affines, et de mieux comprendre le rôle de l'exposant  $\zeta$ .

Les calculs précédents montrent que la fonction d'échelle  $\Phi$  doit être normalisée à 1 (d'après (1.5)) et décroître suffisamment vite à l'infini pour que la définition de son moment d'ordre 1 au moins ait un sens. L'analyse de profils enregistrés sur des surfaces naturelles montre qu'elle est proche d'une loi normale (cf. chapitre 3). Ainsi tous ses moments ont un sens.

### Loi d'échelle pour les moments de la fonction $h(x)$

On considère un profil de longueur  $L$ , et on note  $\mathcal{M}_p(\Delta)$  la moyenne sur toutes les réalisations du  $p^e$  moment de la fonction  $h(x)$  calculé sur un intervalle de longueur  $\Delta < L$ , par exemple l'intervalle  $[0; \Delta]$  :

$$\mathcal{M}_p(\Delta) = \left\langle \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta [h(x) - \bar{h}]^p dx \right\rangle \quad , \quad (1.9)$$

où  $\bar{h}$  est la moyenne de  $h$  sur l'intervalle considéré :

$$\bar{h} = \int_0^\Delta h(x) dx \quad . \quad (1.10)$$

On peut calculer la quantité  $\mathcal{M}_p(\Delta)$  en développant la relation (1.9) selon

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p(\Delta) &= \left\langle \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \left[ \sum_{k=0}^p C_p^k h(x)^k (-\bar{h})^{p-k} \right] dx \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^p \frac{C_p^k}{\Delta^{p+1-k}} \left[ \int_0^\Delta h(x)^k dx \right] (-\bar{h})^{p-k} dx \right\rangle \\ \mathcal{M}_p(\Delta) &= \sum_{k=0}^p \frac{C_p^k}{\Delta^{p+1-k}} \langle \overline{h^k} [-\bar{h}]^{p-k} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (1.11)$$

En supposant que les quantités  $\bar{h}$  et  $[-\bar{h}]^{p-k}$  peuvent être statistiquement découplées et que la moyenne statistique  $\langle \rangle$  et la fonction puissance  $^{p-k}$  sont permutables, c'est-à-dire que  $\langle \overline{h^k} \bar{h} \rangle = \langle \overline{h^k} \rangle \langle \bar{h} \rangle$ , la relation (1.11) devient

$$\mathcal{M}_p(\Delta) = - \sum_{k=0}^p \frac{C_p^k}{\Delta^{p+1-k}} M_k (-M_1)^{p-k} \quad . \quad (1.12)$$

La quantité  $M_q$  ( $q = 1$  ou  $k$ ) peut être calculée à partir de la fonction de densité de probabilité introduite précédemment :

$$\begin{aligned} M_q &= \left\langle \int_0^\Delta h^q(x) dx \right\rangle = \int_0^\Delta \langle h^q(x) \rangle dx \\ M_q &= \int_0^\Delta \left( \int h^q \mathcal{P}(h, x) dh \right) dx \quad . \end{aligned} \quad (1.13)$$

L'intégrale en  $h$  s'exprime simplement à l'aide de la fonction d'échelle  $\Phi$  introduite en (1.8) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^q \mathcal{P}(h, x) dh = x^{q\zeta} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u^q \Phi(u) du}_{A_q} , \quad (1.14)$$

où  $A_q$  est simplement le  $q^e$  moment de la fonction d'échelle. L'expression (1.11) se réduit alors à [Schmittbuhl, Schmitt et Scholz, 1995]

$$\mathcal{M}_p(\Delta) = \sum_{k=0}^p \frac{C_p^k}{\Delta^{p+1-k}} \left( A_k \int_0^\Delta x^{k\zeta} dx \right) \left( -A_1 \int_0^\Delta x^\zeta dx \right)^{p-k} ,$$

soit  $\boxed{\mathcal{M}_p(\Delta) = \Delta^{p\zeta} \left( \sum_{k=0}^p C_p^k \frac{A_k (-A_1)^{p-k}}{(1+k\zeta)(1+\zeta)^{p-k}} \right)}$  . (1.15)

La relation (1.15) stipule que la quantité  $\sqrt[p]{\mathcal{M}_p(\Delta)}$  est une fonction puissance de la taille de la fenêtre, d'exposant  $\zeta$ , tandis que le préfacteur dépend du degré du moment en question. Ainsi, l'écart-type de la distribution pour une fenêtre de dimension  $\Delta$  est une loi de puissance de la taille de la fenêtre d'exposant  $\zeta$ . Il en va de même pour la limite de  $\sqrt[p]{\mathcal{M}_p(\Delta)}$  quand  $p$  tend vers l'infini, qui n'est autre que l'extension verticale  $\Delta h$  de la topographie. Cette propriété est illustrée par la Fig. 1.2(a), sur laquelle sont représentés deux profils, l'un auto-similaire ( $\zeta = 1$ ), l'autre auto-affine avec  $\zeta = 0.6$ . Les deux profils ont été générés numériquement à l'aide d'un algorithme qui est exposé au paragraphe 1.2.3. On a fourni au générateur aléatoire de nombre la même semence dans les deux cas, ce qui explique qu'ils présentent les mêmes fluctuations de grande longueur d'onde. Ils ont ensuite été normalisés de la même façon, avec un écart-type unité. On présente à la Fig. 1.2(b) une vue rapprochée où la fenêtre d'observation a été divisée par  $1/s = 4$  horizontalement. On a ajusté l'échelle verticale d'un facteur  $s$  et  $s^{-\zeta}$ , respectivement, pour les deux profils. On constate que les profils mis à la nouvelle échelle ont gardé une extension verticale apparente identique, en vertu de la relation (1.15).

Le rapport entre l'extension verticale d'un profil dans une fenêtre et la taille  $\Delta$  de la fenêtre est  $r(\Delta) = \mathcal{M}_q(\Delta)/\Delta \propto \Delta^{\zeta-1}$ . Puisque l'exposant de rugosité est inférieur à 1, le rapport  $r$  tend vers 0 quand la taille de la fenêtre s'accroît. C'est-à-dire que le profil est vu à grand échelle comme une droite. La régression linéaire du profil  $h$  a une signification géométrique comme limite asymptotique et approximation d'ordre 0 de la topographie. Cette propriété est extensible à une topographie à trois dimensions, si elle est décrite par un modèle auto-affine avec  $\zeta < 1$  (voir paragraphe 1.2). L'étude de l'influence de la rugosité sur l'écoulement à travers une fracture rugueuse présentée à la partie II du présent mémoire repose sur cette propriété.

Au contraire, la pente locale de la topographie, évaluée à l'échelle  $l$  comme  $r(l)$ , diverge quand l'échelle décroît, ce qui reflète la non-régularité du modèle auto-affine. En réalité, il existe une échelle limite inférieure à l'auto-affinité d'une surface de fracture. On montrera au chapitre 3, dans le cas des surfaces de fracture rocheuses, que cette échelle est inférieure à la résolution des instruments utilisés pour échantillonner la topographie.

### Fonction de corrélation

La fonction d'auto-corrélation à deux points le long d'un profil s'écrit :

$$C(\delta) = \left\langle (h(x+\delta) - \bar{h})(h(x) - \bar{h}) \right\rangle_{x \in [0; L-\delta]} , \quad (1.16)$$

où  $\bar{h}$  est la moyenne des altitudes le long du profil, et où  $\langle \rangle$  désigne une moyenne sur toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles l'expression a un sens. La valeur de  $\delta = 0$  de la fonction s'écrit indistinctement

$$\langle (h(x) - \bar{h})^2 \rangle_{x \in [0; L]} \quad \text{ou} \quad \langle (h(x + \delta) - \bar{h})^2 \rangle_{x \in [-\delta; L - \delta]} .$$

Si l'on suppose que les deux moyennes sont équivalentes à une moyenne sur toutes les réalisations, la quantité  $2[C(0) - C(\delta)]$  vaut donc

$$\langle (h(x) - \bar{h})^2 + (h(x + \delta) - \bar{h})^2 - 2(h(x + \delta) - \bar{h})(h(x) - \bar{h}) \rangle = \langle (h(x + \delta) - h(x))^2 \rangle . \quad (1.17)$$

La loi d'échelle obtenue plus haut pour les moments de la fonction  $h$  entraîne

$$\forall \lambda \quad \langle (h(x + \lambda\delta) - h(x))^2 \rangle = \lambda^{2\zeta} \langle (h(x + \delta) - h(x))^2 \rangle .$$

En particulier, pour  $\lambda = L/\delta$  :  $\langle (h(x + \delta) - h(x))^2 \rangle = \left(\frac{\delta}{L}\right)^{2\zeta} \langle (h(x + L) - h(x))^2 \rangle$  , (1.18)

Soit  $C(0) - C(\delta) \propto \left(\frac{\delta}{L}\right)^{2\zeta}$  . (1.19)

L'écart au maximum de la fonction d'auto-corrélation décroît comme une loi de puissance en  $2\zeta$  : il n'y a pas de longueur d'onde de coupure en ce qui concerne les corrélations des altitudes des points le long du profil. L'exposant de Hurst quantifie la décroissance de la fonction de corrélation, c'est-à-dire la persistance des corrélations. Deux points le long d'un profil auto-affine ont des altitudes d'autant mieux corrélées que l'exposant de Hurst est plus élevé (car  $\delta/L < 1$ ). Cela se traduit par un aspect des profils d'autant plus régulier, en particulier aux petites échelles, que l'exposant de rugosité est élevé (voir Fig. 1.2).

### Spectre de puissance

D'après le théorème de Wiener-Khintchine [Press, Teukolsky, Vetterling et Flannery, 1992], le *spectre de puissance*  $S(k)$  du profil, défini comme le module au carré de la transformée de Fourier du profil, est également la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation :

$$S(k) = |\tilde{h}(k)|^2 = \tilde{C}(k) , \quad (1.20)$$

où le  $\tilde{\phantom{h}}$  désigne la transformée de Fourier. Donc

$$S(k) \propto \int_0^\infty \delta^{2\zeta} \cos(k\delta) d\delta = k^{-2\zeta-1} \int_{-\infty}^\infty u^{2\zeta} \cos u du$$

Soit  $S(k) \propto k^{-2\zeta-1}$  . (1.21)

En termes de modes de Fourier, l'exposant de rugosité quantifie donc l'importance des modes de petite longueur d'onde par rapport aux modes de grande longueur d'onde. C'est parfaitement visible sur la Fig. 1.2, où, à écarts-type identiques, le profil auto-similaire apparaît plus lissé que le profil auto-affine à  $\zeta = 0.6$  : l'amplitude relative des modes de petite échelle vis-à-vis des modes de grande échelle y est plus importante.

## 1.2 Isotropie – description auto-affine en trois dimensions

La description auto-affine à deux dimensions est appropriée pour décrire la distribution des altitudes le long d'un profil extrait de la topographie d'une surface de fracture. Le problème se pose de savoir si cette description est extrapolable à trois dimensions sous la forme d'un modèle de topographie  $h(x, y)$  auto-affine dont tous les profils extraits de la topographie ont même invariance d'échelle. Le passage de deux à trois dimensions pose deux questions : la première concerne la similarité statistique de deux profils parallèles ; la deuxième concerne la similarité statistique de deux profils qui ont des orientations différentes, c'est-à-dire l'isotropie de la propriété d'auto-affinité.

### 1.2.1 Croissance de la rugosité – Influence de la taille de l'échantillon

Les surfaces de fracture dont nous disposons (cf. chapitre 3) sont obtenues par fracturation en laboratoire, et initiées par une entaille linéaire, ce qui implique une croissance de la rugosité de la fracture à partir de l'entaille initiale, au cours du processus de fracturation. En conséquence, deux profils parallèles situés à des distances différentes de l'entaille pourraient présenter des différences en termes d'invariance d'échelle.

Considérons un échantillon de roche de largeur  $L$  dans la direction  $x$ , fracturé dans la direction  $y$  à partir d'une entaille d'initiation parallèle à  $x$ , et placée à  $y = 0$ . On s'intéresse à la croissance de la rugosité à partir de l'entaille, où elle est supposée nulle. La fracturation est effectuée à vitesse quasi-constante, mais de façon non-isostatique. On enregistre la topographie d'une des deux surfaces de fracture résultante selon des profils parallèles à  $x$  et repérés par la position  $y$ . Pour chacun de ces profils, on observe le comportement de l'écart-type moyen de la distribution des hauteurs calculé sur une fenêtre de largeur  $\Delta$  :

$$\sigma(y, \Delta)^2 = \left\langle \frac{1}{\Delta} \sum_{i=p}^{p+\Delta} z(x_i, y)^2 - \left( \frac{1}{\Delta} \sum_{i=p}^{p+\Delta} z(x_i, y) \right)^2 \right\rangle_p . \quad (1.22)$$

Une telle étude expérimentale a été menée sur une surface de granite de Lanhélin par Schmittbuhl, Roux et Berthaud (1994). Elle montre qu'en première approximation, la relation décrivant l'invariance d'échelle au sein du profil s'écrit

$$\sigma(y, \Delta) = \Delta^\zeta \varphi \left( \frac{y}{\Delta^\alpha} \right), \quad (1.23)$$

où la fonction d'échelle  $\varphi$  s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi(u) \sim u^{\frac{\zeta}{\alpha}} & \text{si } u \ll 1 \\ \varphi(u) \sim \text{Const.} & \text{si } u \gg 1 \end{cases} . \quad (1.24)$$

Cette loi de croissance correspond au modèle dynamique de croissance fractale proposé par Family et Vicsek (1991) et qui s'applique classiquement aux phénomènes de croissance de formes [Vicsek, 1992]. On peut réécrire la relation (1.23) de façon plus synthétique sous la forme :

$$\begin{cases} \sigma(y, \Delta) \sim y^{\frac{\zeta}{\alpha}} & \text{si } y \leq A \Delta^\alpha \\ \sigma(y, \Delta) \sim \Delta^\zeta & \text{si } y \geq A \Delta^\alpha \end{cases}, \quad (1.25)$$

où  $A$  est un préfacteur constant. L'exposant dynamique  $\alpha$  quantifie le taux d'accroissement de la rugosité jusqu'à la saturation, qui intervient pour  $y \geq y_t(\Delta) A \Delta^\alpha$  et fixe l'amplitude de saturation

à  $\sigma_{\text{sat}}(\Delta) \propto \Delta^\zeta$ . La longueur caractéristique de transition d'un régime à l'autre,  $y_t$ , aussi bien que l'amplitude à saturation  $\sigma_{\text{sat}}$  sont indépendants de la taille du système.

Il est intéressant de considérer cette loi d'échelle "en restant sur un profil", c'est-à-dire d'examiner sa dépendance vis-à-vis de la largeur de la fenêtre, pour une distance à l'entaille d'initiation  $y$  donnée :

1. Si  $y \leq \xi^{-1}(L)$  :

$$\begin{cases} \sigma(y, \Delta) \sim \Delta^\zeta & \text{si } \Delta \leq \xi(y) \\ \sigma(y, \Delta) \sim y^{\frac{\zeta}{\alpha}} & \text{si } \Delta \geq \xi(y) \end{cases}, \text{ avec } \xi(y) = \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (1.26)$$

2. Si  $y \geq \xi^{-1}(L)$  :

$$\sigma(y, \Delta) \sim \Delta^\zeta. \quad (1.27)$$

La taille  $\Delta$  de la fenêtre ne peut excéder la largeur  $L$  de l'échantillon. Pour les profils qui sont à une distance de l'entaille d'initiation supérieure à  $y_{\text{sat}}(L) = \xi^{-1}(L)$ , l'invariance d'échelle pour la quantité  $\sigma(y, \Delta)$  est cohérente avec la relation (1.15). Le paramètre  $\zeta$  coïncide avec l'exposant de rugosité auquel cette notation a été assignée plus haut (pour le granite,  $\zeta \simeq 0.8$ ). Pour les profils qui sont plus proches de l'entaille, la relation (1.15) concerne uniquement les échelles  $\Delta$  inférieures à la longueur de corrélation  $\xi(y)$  : la rugosité a atteint sa saturation pour les fluctuations d'échelles inférieures à  $\xi(y)$ , mais les fluctuations d'échelles supérieures à  $\xi(y)$  sont saturées à une valeur qui dépend de  $y$ . La description auto-affine pour toutes les échelles est donc valable pour les profils situés suffisamment loin de l'entaille d'initiation. Pratiquement, le préfacteur  $A$  joue un rôle très important : s'il s'avère que la saturation de la rugosité se fait à une distance de l'entaille qui est non négligeable par rapport à la taille de l'échantillon, et l'on ne peut pas parler d'invariance de la description par translation dans la direction  $y$ .

Une étude expérimentale plus récente [López et Schmittbuhl, 1998] a montré que la croissance de la rugosité est mieux décrite par une autre loi d'échelle que par la loi de Family-Vicsek. Il s'agit également d'une loi introduite pour l'étude de modèles de croissance de formes, et qui a été désignée comme *anormale* (anomalous scaling) :

$$\begin{cases} \sigma(y, \Delta) \sim y^{\frac{\zeta}{\alpha}} & \text{si } y \leq A \Delta^\alpha \\ \sigma(y, \Delta) \sim y^{\frac{\zeta - \zeta_{\text{loc}}}{\alpha}} \Delta^{\zeta_{\text{loc}}} & \text{si } A \Delta^\alpha \leq y \leq A L^\alpha \\ \sigma(y, \Delta) \sim L^{\zeta - \zeta_{\text{loc}}} \Delta^{\zeta_{\text{loc}}} & \text{si } y \geq A L^\alpha \end{cases}, \quad (1.28)$$

où  $\zeta_{\text{loc}}$  et  $\zeta$  sont respectivement les exposants dynamiques local et global. Dans ce cas, la croissance se fait en deux temps : croissance normale, du type Family-Vicsek (1.26) jusqu'à  $y_t(\Delta)$ , puis croissance plus lente, avec l'exposant dynamique *anormal*,  $\beta = (\zeta - \zeta_{\text{loc}})/\alpha$ , jusqu'à  $y_{\text{sat}} = A L^\alpha$ . La distance à partir de laquelle la rugosité sature,  $y_{\text{sat}}$ , dépend de la taille de l'échantillon, et il en va de même pour l'amplitude à saturation,  $y_{\text{sat}} = A L^{\frac{\beta}{\alpha}} \Delta^{\zeta_{\text{loc}}}$ . Dans la mesure où la saturation de la rugosité est vraisemblablement due à la taille finie de l'échantillon et à la réflexion des ondes élastiques sur les interfaces limites au cours de la propagation de la fracture, une telle loi de croissance est logique. La loi de Family-Vicsek (1.25) apparaît comme un cas particulier de la relation (1.28) où les exposants dynamiques local  $\zeta_{\text{loc}}$  et global  $\zeta$  sont égaux, ce qui fait disparaître la dépendance vis-à-vis de la taille du système.

Si l'on considère cette loi de croissance du point de vue d'un profil situé à la distance  $y$  de l'entaille, on obtient :

1. Si  $y \leq \xi^{-1}(L)$  :

$$\begin{cases} \sigma(y, \Delta) \sim y^\beta \Delta^{\zeta_{\text{loc}}} & \text{si } \Delta \leq \xi(y) \\ \sigma(y, \Delta) \sim y^{\frac{\zeta}{\alpha}} & \text{si } \Delta \geq \xi(y) \end{cases} \quad (1.29)$$

2. Si  $y \geq \xi^{-1}(L)$  :

$$\sigma(y, \Delta) \sim L^{\zeta - \zeta_{\text{loc}}} \Delta^{\zeta_{\text{loc}}} \quad . \quad (1.30)$$

Dans cette loi, c'est l'exposant de rugosité locale qui correspond à l'exposant de Hurst tel qu'on l'a défini au paragraphe 1.1.2. Les différences entre la loi de croissance anormale et la loi de Family Vicsek sont les suivantes. D'une part, le préfacteur de la loi d'échelle relative aux petites échelles pour des profils situés à moins de  $y_{\text{sat}}$  de l'entaille dépend de  $y$ , comme une fonction de puissance d'exposant  $\beta$ . D'autre part, le préfacteur de l'amplitude  $\sigma_{\text{sat}}(\Delta)$  à saturation dépend de la taille de l'échantillon,  $L$ . Lôpez et Schmittbuhl (1998) ont estimé  $\zeta_{\text{loc}} \simeq 0.79$ , et  $\zeta = 1.2$ , pour une surface de fracture granitique. Pour pouvoir parler d'invariance de la description auto-affine par translation dans la direction  $y$ , il faut considérer des profils situés à plus de  $y_{\text{sat}}(L)$  de l'entaille. Là encore, la valeur du préfacteur  $A$  est prépondérante.

**Conclusion** Les deux modèles de croissance montrent que l'on peut considérer les profils parallèles à  $x$  comme statistiquement équivalents s'ils sont situés à plus de  $y_{\text{sat}}(L) = \xi^{-1}(L)$  de l'entaille d'initiation. On observe expérimentalement que le préfacteur  $A$  est petit, c'est-à-dire que la rugosité sature rapidement. Pour des échantillons de taille inférieure à 20 cm,  $y_{\text{sat}}$  est de l'ordre de quelques mm. En-dehors de cette zone de croissance de quelques mm, on peut considérer que la quantité  $\sigma(y, \Delta)$  satisfait à la relation (1.30).

### 1.2.2 Isotropie de la description auto-affine au-delà de la zone de croissance – un modèle de surface auto-affine isotrope

On examine ici une surface de fracture en-dehors de la zone de croissance de rugosité discutée au paragraphe précédent. De manière générale, la surface de fracture est la trace que laisse derrière lui le front de propagation de la fracture. La fracturation est un phénomène propagatif, directionnel, dont on peut penser qu'il laisse sur la surface de fracture une "trace" de sa directivité sous la forme d'une anisotropie. Une telle anisotropie pourrait concerner la description auto-affine. Lorsqu'on considère une topographie échantillonnée à deux dimensions, construite par exemple par juxtaposition de profils parallèles à l'entaille d'initiation, des profils de direction quelconque extraits de cette topographie exhibent-ils la même invariance d'échelle que les profils parallèles qui ont servi à échantillonner la topographie? On pourrait imaginer un exposant de rugosité dépendant de l'orientation du profil.

On montrera au chapitre 3 que dans la limite de notre précision expérimentale, une telle anisotropie n'est pas décelable sur les données expérimentales. Si une anisotropie existe dans la description des corrélations le long de la surface, elle est un effet de second ordre, cachée derrière l'auto-affinité. La fonction de densité de probabilité associée à la différence d'altitude  $h$  de deux points dont les projections horizontales sont reliées par le vecteur  $(l_x, l_y)$  est alors, par généralisation de (1.8) :

$$\mathcal{P}(l_x, l_y, h) = \frac{1}{(l_x^2 + l_y^2)^{\frac{\zeta}{2}}} \Phi \left( \frac{h}{(l_x^2 + l_y^2)^{\frac{\zeta}{2}}} \right) \quad . \quad (1.31)$$

Le spectre de Fourier à deux dimensions d'une fonction  $h(x, y)$  qui admet une telle description statistique (avec  $\zeta \in [0.5; 1.0]$ ) est une loi de puissance en  $-2\zeta - 2$ . Ses restrictions à une dimension

ont toutes les propriétés des profils décrits précédemment, notamment un spectre de Fourier qui est une loi de puissance en  $-2\zeta - 1$ .

Une surface de fracture correspondant à ce modèle est ainsi caractérisée par quatre paramètres :

1. Son extension spatiale horizontale  $L$ , qui fixe l'échelle horizontale.
2. Son extension spatiale verticale, par exemple l'écart-type  $\sigma$  de la rugosité, qui fixe les échelles verticales.
3. La fonction d'échelle  $\Phi$ , qui détermine la forme de la distribution des hauteurs sur la surface.
4. L'exposant de rugosité  $\zeta$ , qui quantifie les amplitudes relatives des modes de petites et de grandes longueurs d'onde.

Pour une loi  $\Phi$  donnée (par exemple, une loi normale), le nombre de paramètres de la description est réduit à trois :  $(L, \sigma, \zeta)$ . La famille de surfaces ainsi définie se caractérise par une même fonction de densité de probabilité des hauteurs  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire par des propriétés de changement d'échelle identiques. Les surfaces d'une même famille se distinguent par des réalisations différentes de la loi  $\mathcal{P}$ . En termes spectraux, cela signifie qu'elles ont des spectres de puissance identiques, mais des spectres de phase différents : les termes spectraux correspondant au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  ont même amplitude, fixée par la seule valeur de  $k = |\mathbf{k}|$ , mais leurs phases ne sont pas forcément identiques. Si le spectre de phase est un bruit blanc non corrélé spatialement, cette description statistique est la seule description d'une telle surface que l'on puisse faire à l'aide d'un nombre restreint de paramètres descriptifs. Toute description plus poussée est soit redondante avec celle-ci, soit elle contient l'information sur le spectre de phase, c'est-à-dire qu'elle nécessite la connaissance exacte de toute la topographie.

### 1.2.3 Obtention de surfaces numériques

La description du modèle dans l'espace de Fourier peut être appliquée à la génération numérique de surfaces présentant les "bonnes" propriétés, i. e., correspondant à une statistique décrite par la relation (1.31). De telles topographies numériques ont été utilisées pour tester les procédures d'analyse présentées au paragraphe 1.3. Elles ont aussi permis de tester la robustesse de l'auto-affinité vis-à-vis de différents filtrages, en espace et/ou en fréquences spatiales. Elle sont également utilisées dans la partie II comme condition aux limites dans des simulations d'écoulement à travers une fracture rugueuse.

Le spectre de Fourier  $S(\mathbf{k})$  de la surface doit présenter une symétrie de révolution :

$$S(\mathbf{k}) = S(k) \quad \text{où} \quad k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad . \quad (1.32)$$

Par ailleurs,  $S(k)$  doit être une fonction puissance d'exposant  $-2(1 + \zeta)$ . On contraire, le spectre de phase de  $h$  doit être un bruit blanc. La génération d'une topographie possédant les "bonnes" propriétés se fait de la manière suivante :

1. Génération d'un bruit blanc gaussien  $h_{i,j}$  sur une grille  $2^p \times 2^p$ . La taille en puissance de 2 se justifie par l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (TFR ou, en anglais, FFT). Le choix d'une grille carrée est arbitraire, mais mieux adapté à une description isotrope.
2. Transformée de Fourier de la distribution  $h$  : on passe dans le monde de Fourier.
3. Multiplication de tous les coefficients de Fourier par la loi de puissance appropriée (intégration fractionnaire) :

$$\tilde{h}(\mathbf{k}) \mapsto |\mathbf{k}|^{-1-\zeta} \tilde{h}(\mathbf{k}) \quad . \quad (1.33)$$

Le module des coefficients est modifié, ce qui introduit les corrélations spatiales dans le spectre. Les phases des coefficients sont inchangées.

4. Retour dans l'espace réel.

5. Normalisation de la distribution  $h_{i,j}$ , de façon à lui imposer le bon écart-type  $\sigma$ .

La dimension horizontale  $L$  n'est pas contenue dans l'algorithme, elle est liée à la maille physique choisie pour la grille, et doit être réintroduite lorsqu'on utilise la surface numérique (simulation d'écoulement ou autre). Un exemple de surface ainsi obtenue est présenté à la Fig. 1.3(a) ( $\zeta = 0.8$ ). Noter la ressemblance avec un enregistrement d'une vraie surface de fracture qui est correctement décrite par ce modèle (figure 1, page 141, par exemple). Le spectre de puissance est présenté sous la forme d'une surface à la Fig. 1.3(c). On a choisi pour coordonnées horizontales selon  $x$  et  $y$  les variables  $k_x(\ln k/k)$  et  $k_y(\ln k/k)$ , et pour coordonnée verticale le logarithme de  $S(k)$ . La transformation

$$\begin{cases} k_x \mapsto k_x \frac{\ln k}{k} \\ k_y \mapsto k_y \frac{\ln k}{k} \end{cases} \quad (1.34)$$

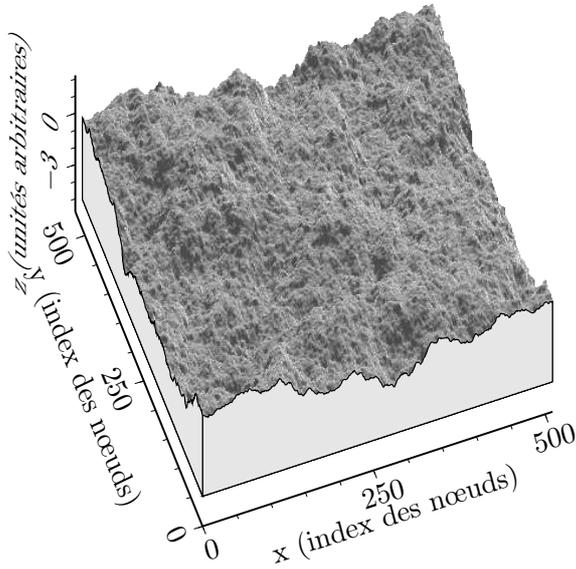
respecte la symétrie cylindrique de la représentation initiale,  $(k_x, k_y, S(k))$ , et transforme la loi de puissance  $S(k) \propto k^{-2(\zeta+1)}$  en relation linéaire  $\ln[S(k)] = -2(\zeta+1)k + \text{Cte}$ . On constate que la surface se présente effectivement comme un cône. On a représenté à la Fig. 1.3(d) la génératrice moyenne du cône, c'est-à-dire la droite obtenue par moyennage angulaire du cône. Il présente la pente attendue :  $-2(\zeta+1) = -3.6$ .

**Filtrage des modes de Fourier** On peut limiter les fluctuations de la surface aux petites échelles en annulant simplement les modes correspondant à des nombres d'onde supérieurs à un nombre d'onde de coupure  $k_c$  donné. Les modes de grande échelle ne sont pas modifiés, la surface apparaît plus lisse localement. Ainsi, la surface présentée à la Fig. 1.3(b) a été obtenue à partir de celle présentée à la Fig. 1.3(a) en supprimant les modes de nombres d'onde supérieurs à  $\pi/(4L)$ .

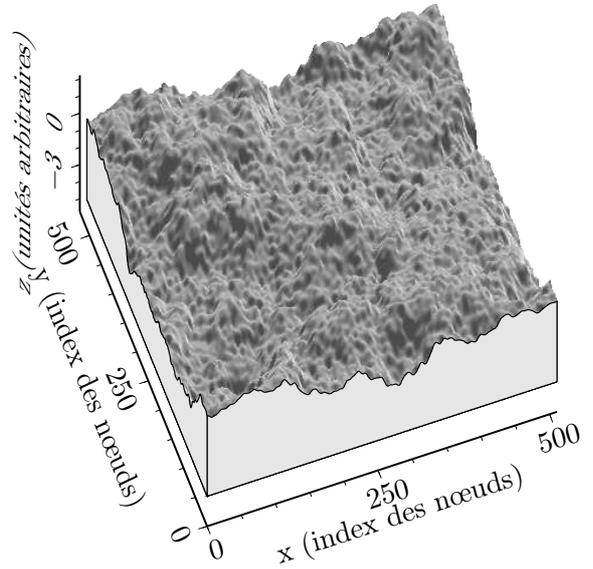
Inversement, on peut vouloir conserver toute l'information que l'on possède sur les modes de Fourier tout en interpolant la surface sur une grille plus fine. Pour ce faire, on complète le spectre de puissance de la surface initiale pour prendre en compte les modes de Fourier correspondant aux longueurs d'onde inférieures à la maille de la grille initiale. Ces modes sont définis nuls. Pour des raisons évidentes d'utilisation de la FFT, les grilles initiale et finale doivent avoir des tailles qui sont des puissances de 2. Par exemple on rajoutera 1 nœud entre chaque nœud de la grille initiale, ou 3, ou 7. Cette technique a été utilisée pour régulariser aux petites échelles les surfaces utilisées comme conditions aux limites des simulations d'écoulement présentées au chapitre 6.

### 1.3 Analyse de l'auto-affinité d'une surface de fracture

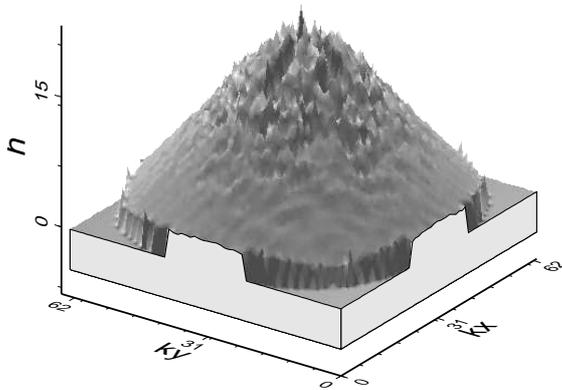
La façon dont on procède pour caractériser l'auto-affinité d'une surface de fracture dépend du type de données dont on dispose. Si l'on possède un enregistrement de la topographie qui permette d'en reconstituer une carte en trois dimensions, il peut être intéressant de calculer le spectre de Fourier à deux dimensions  $S(k_x, k_y)$  de la fonction  $h(x, y)$ . Si les lignes de niveau de la surface représentative de la fonction  $S(k_x, k_y)$  ne sont pas des cercles, les corrélations des altitudes le long de la surface ne sont pas isotropes. Si, aux fluctuations de la statistique près, ce sont des cercles, on peut moyennner le spectre sur toutes les directions du plan  $(k_x, k_y)$  pour



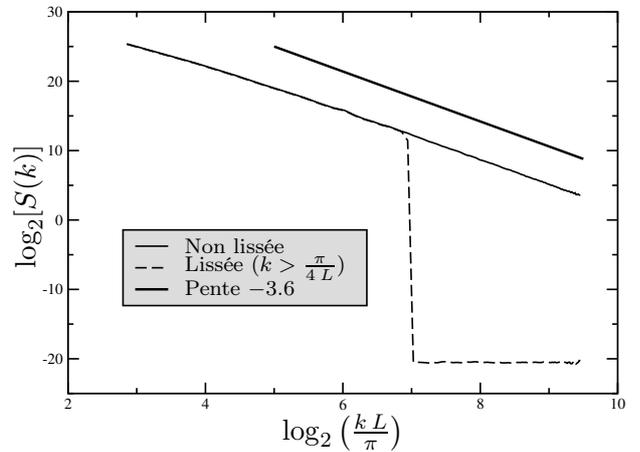
(a) Une surface auto-affine isotrope générée numériquement par méthode spectrale, sur une grille  $512 \times 512$ . L'exposant de rugosité est  $\zeta = 0.8$ .



(b) La surface présentée en (a) après qu'elle a été lissée par suppression de tous les modes de Fourier supérieurs à  $\pi/(4L)$ .



(c) Spectre de puissance de la surface présentée en (a). Les coordonnées radiale,  $k$ , et verticale,  $S(k)$ , sont représentées en échelle logarithmique. La symétrie de révolution du spectre est ainsi conservée. Il apparaît comme un cône dont les génératrices ont une pente  $-2(\zeta + 1) = -3.6$ .



(d) Spectre de puissance de la surface présentée en (a) (trait fin continu) et de celle présentée en (b). Les spectres sont moyennés sur toutes les orientations possibles pour le vecteur d'onde. Ainsi le spectre en trait fin continu est la moyenne angulaire de la topographie représentée en (c). Le trait continu épais indique la pente correspondant à l'invariance d'échelle théorique.

FIG. 1.3 – Génération de surfaces auto-affines isotropes par méthode spectrale. Les deux surfaces ont même spectre de phase (non représenté).

obtenir le spectre  $S(k)$ , qui doit être de la forme

$$\boxed{S(k) \propto k^{-2(1+\zeta)}} \quad , \quad (1.35)$$

grâce à laquelle on obtient une estimation de l'exposant de Hurst,  $\zeta$ . Dans ce cas, l'analyse de profils extraits de la topographie, quelle que soit leur direction dans le plan  $(x, y)$ , permet également d'estimer l'exposant de rugosité.

Dans le cas d'une surface dont on sait qu'elle présente une rugosité isotrope, il est plus intéressant d'enregistrer un nombre limité de profils parallèles (10 ou 20), finement échantillonnés, et de procéder à l'analyse sur ces données. Une telle mesure est beaucoup moins coûteuse en temps que l'enregistrement de la topographie sur une grille complète, même avec un échantillonnage plus fin sur les profils. D'autre part, les analyses de profils sont plus faciles à mettre en œuvre. En particulier, le problème de la périodisation des profils est aisément résolu par soustraction de la régression linéaire ; pour des distributions à deux dimensions, la périodisation nécessite l'application d'une fenêtre qui réduit la topographie à 0 au niveau des bords de la grille. On améliore la précision de l'estimation en effectuant les analyses sur chaque profil, puis en moyennant ces résultats. Une telle procédure peut également être menée sur une rugosité dont l'isotropie est mal connue. En enregistrant plusieurs séries de profils orientées différemment, on pourra tester la dépendance vis-à-vis de l'orientation des profils de l'exposant de Hurst estimé à partir d'eux.

On présente ci-après différentes méthodes d'analyse de profils auto-affines. Elles peuvent être divisées en deux catégories : les méthodes définies au départ pour trouver la dimension fractale d'un objet auto-similaire, et qui, utilisées de manière appropriée, permettent de trouver l'exposant de Hurst d'un profil auto-affine ; et les méthodes qui tirent partie des propriétés spécifiques à la géométrie auto-affine.

### 1.3.1 Exposant de Hurst et dimension fractale

Deux méthodes très utilisées pour déterminer la dimension fractale d'un objet auto-similaire sont le dénombrement de boîtes et la méthode du diviseur.

Schmittbuhl, Vilotte et Roux (1995) ont analysé les dimensions fractales obtenues lorsqu'on applique la méthode du dénombrement de boîtes à un profil auto-affine. Essayons de recouvrir un profil auto-affine de longueur  $L$  et d'amplitude  $\alpha L^\zeta$  à l'aide de boîtes de largeur  $a$ , de hauteur  $\mu a$ . Notons  $n(a)$  le nombre de boîtes nécessaires à cette opération. L'amplitude typique du profil sur un intervalle  $[x; x + a]$  est  $\alpha a^\zeta$ . Si  $\alpha a^\zeta \leq \mu a$ , une seule boîte est nécessaire pour recouvrir le profil sur chaque intervalle de la forme  $[x; x + a]$ . Donc le nombre de boîtes nécessaires au recouvrement du profil tout entier vaut  $n(a) = La^{-1}$ . Inversement, si  $\alpha a^\zeta \gg \mu a$ , le nombre de boîtes nécessaires au recouvrement du profil sur cet intervalle est  $(\alpha/\mu)a^{\zeta-1}$ , de sorte qu'on recouvre le profil entier à l'aide de  $n(a) = (\alpha/\mu)L a^{\zeta-2}$  boîtes. Finalement,

$$\boxed{n(a) = \begin{cases} \frac{\alpha L}{\mu} a^{\zeta-2} & \text{pour } a \ll \left(\frac{\alpha L}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\zeta}} \\ La^{-1} & \text{pour } a \geq \left(\frac{\alpha L}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\zeta}} \end{cases}} \quad . \quad (1.36)$$

Si l'on utilise des boîtes de rapport d'aspect trop grand, le profil est vu comme une ligne, et la dimension fractale estimée vaut 1. Par contre, si l'on utilise des boîtes dont le rapport d'aspect est suffisamment petit, les fluctuations locales de la topographie sont prises en compte par le dénombrement : le nombre de boîtes  $n(a)$  est une fonction puissance d'exposant  $\zeta - 2$ , ce qui

permet d'estimer l'exposant de rugosité. On s'aperçoit au passage que l'exposant de rugosité et la dimension fractale de l'échantillon sont reliés par la relation :  $\zeta + D = 2$ . Brown (1995a) a introduit un procédé systématique pour être certain d'obtenir la valeur de l'exposant de rugosité à l'aide de cette méthode. Il consiste à choisir pour les boîtes un rapport d'aspect  $\mu$  identique au "rapport d'aspect" du profil :  $\mu = \alpha L^{\zeta-1}$ . Dans ce cas, le raisonnement précédent fournit :

$$\boxed{n(a) = \left(\frac{a}{L}\right)^{\zeta-2}} \quad . \quad (1.37)$$

La méthode du diviseur fait apparaître un artefact du même type lorsqu'on l'applique à un profil auto-affine [Brown, 1995a]. Supposons que l'on mesure la longueur du profil en l'approximant par une ligne brisée qui relie les points du profil d'abscisse  $pl$ , où  $p$  est un entier. L'extension verticale de chacun de ces segments peut être estimée en moyenne comme l'amplitude de la rugosité sur le segment en question, c'est-à-dire comme  $\Delta h(l/L)^\zeta$ , où  $\Delta h$  est l'amplitude de la rugosité sur le profil entier. La longueur moyenne d'un segment s'en déduit immédiatement, et la longueur totale  $\mathcal{L}(l)$  de la ligne brisée est obtenue comme

$$\mathcal{L}(l) = \frac{L}{l} \left[ \Delta h^2 \left(\frac{l}{L}\right)^{2\zeta} + l^2 \right]^{\frac{1}{2}} = L \left[ 1 + \left(\frac{\Delta h}{L}\right)^2 \left(\frac{l}{L}\right)^{2(\zeta-1)} \right] \quad . \quad (1.38)$$

On peut réécrire cette relation en utilisant l'échelle caractéristique  $b$  introduite par Sayles et Thomas (1978), par la relation  $\sigma(L = b) = b$ , soit

$$b = \Delta h(b) = \Delta h(L) \left(\frac{b}{L}\right)^\zeta \quad \text{ou} \quad b = \left(\Delta h(L)/L^\zeta\right)^{\frac{1}{1-\zeta}} \quad . \quad (1.39)$$

La longueur mesurée est alors

$$\boxed{\mathcal{L}(l) = L \left[ 1 + \left(\frac{b}{l}\right)^{2(1-\zeta)} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad . \quad (1.40)$$

Dans la limite où  $l \ll b$ , la longueur ainsi mesurée est une loi de puissance de  $l$ , d'exposant  $\zeta - 1$ . Cet exposant vaut aussi  $1 - D$ , de sorte que  $\zeta + D = 2$ . Dans la limite opposée où  $l \gg b$ , le profil est vu comme une droite :  $\mathcal{L}(l) \simeq L$ .

On constate que les méthodes développées pour déterminer la dimension fractale des objets auto-similaires peuvent être employées pour déterminer l'exposant de rugosité d'un profil auto-affine, mais avec précaution. Lorsqu'elles sont utilisées correctement, elles mettent en évidence une relation entre l'exposant de rugosité et une dimension fractale pour le profil :

$$\boxed{D + \zeta = 2} \quad . \quad (1.41)$$

En pratique, on préférera employer des techniques spécifiquement adaptées à la géométrie auto-affine.

### 1.3.2 Méthode de la fenêtre à largeur variable

Elle est fondée sur l'invariance d'échelle des moments de la distribution. On utilise par exemple le deuxième moment. On divise le profil en fenêtres de largeur  $\Delta$  donnée, et on moyenne les écart-types  $\sigma = \sqrt{\mathcal{M}_2(\Delta)}$  calculés sur chacune des fenêtres. La valeur moyenne est une fonction puissance d'exposant  $\Delta$ . L'inconvénient de cette méthode réside dans la raréfaction de la statistique pour les grandes largeurs de fenêtre ( $> L/2$ ), qui accroissent sensiblement les barres d'erreur pour ces échelles [Schmittbuhl, Schmitt et Scholz, 1995].

### 1.3.3 Méthode de la probabilité de premier retour

Pour chaque point du profil, on cherche le point d'altitude identique (à une incertitude près) le plus proche le long du profil. On note  $d$  la distance de leurs projections sur l'axe horizontal. Puis on trace l'histogramme des valeurs trouvées pour  $d$ . Il correspond à la *distribution de premier retour*  $p_1(d)$ , qui est une loi de puissance de  $d$  d'exposant  $\zeta - 2$ . La méthode a l'inconvénient d'être relativement sensible au bruit sur les données, pour les grandes valeurs de  $d$ . En particulier, il convient de soustraire au profil sa régression linéaire avant d'appliquer la méthode.

On peut également utiliser une méthode dite *de multi-retour*, où l'on considère la probabilité  $p_\infty(d)$  de retrouver une altitude identique le long du profil pour une distance entre les deux points projetée sur l'horizontale supérieure à  $d$ . Elle suit une loi d'échelle d'exposant  $-\zeta$  [Bouchaud, Lapasset et Planès, 1990].

### 1.3.4 Méthode du spectre de puissance

Elle consiste à calculer le spectre de puissance du profil, et d'en mesurer la pente, qui doit être égale à  $-2\zeta - 1$ . Elle permet d'estimer l'exposant de rugosité avec une bonne précision lorsque les données sont peu bruitées. Par contre elle est assez sensible à un bruit localisé dans l'espace réel. L'utilisation de la FFT la rend extrêmement rapide. Il convient de soustraire la régression linéaire de chaque profil avant d'appliquer l'analyse ; si les profils sont fortement non-périodiques et qu'on ne les périodise pas, on observe le spectre d'une fonction Heavyside (fonction marche), qui est une fonction puissance d'exposant  $1/2$ . Dans le cas où on observe un exposant proche de  $1/2$ , il faut être prudent et vérifier que d'autres méthodes d'analyse fournissent la même estimation.

### 1.3.5 Méthode du coefficient d'ondelette moyenné

Cette méthode a été proposée par Simonsen, Hansen et Magnar Nes (1998) et baptisée par eux *Averaged Wavelet Coefficient*. Elle est fondée sur la transformée en ondelette, dont nous allons rappeler ici le principe. On définit une famille d'ondelettes  $\psi_{a,b}(x)$ , paramétrée par les paramètres d'échelle  $a$  et de translation  $b$ , comme l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\psi_{a,b} = \psi \left( \frac{x - b}{a} \right) \quad . \quad (1.42)$$

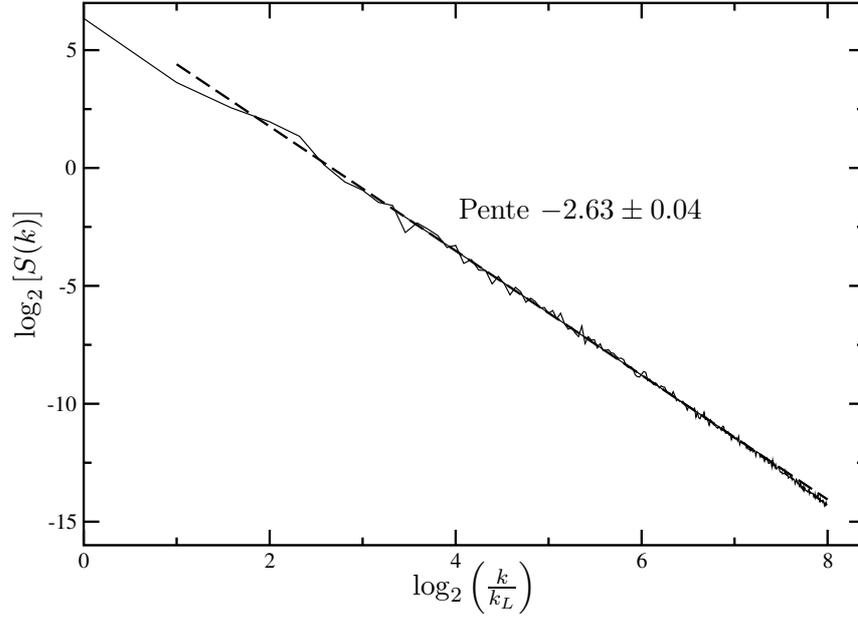
La fonction  $\psi$  est appelée *ondelette-mère*. Elle doit être définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, et posséder des moments nuls jusqu'à un ordre  $n$  supérieur à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx \quad , \quad 0 \leq m \leq n \quad . \quad (1.43)$$

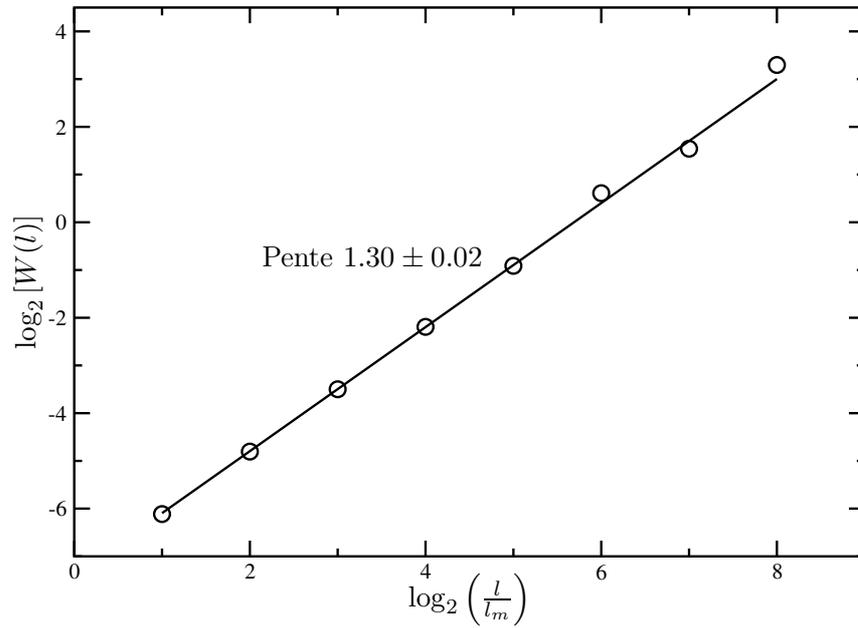
L'ordre  $n$  est appelé *ordre de l'ondelette*.

Tous les éléments de la famille sont des reproductions de l'ondelette-mère transformées par homothétie et/ou translation horizontale. Ils sont localisés à la fois en position et en longueur d'onde. On définit la transformée en ondelette de la fonction  $h(x)$  comme la fonction  $\mathcal{W}[h]$  des deux variables  $a$  et  $b$  qui associe à  $h$  son produit scalaire par l'ondelette  $\psi_{a,b}$ . On choisit par exemple le produit scalaire

$$\mathcal{W}[h](a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a,b}^* h(x) dx \quad , \quad (1.44)$$



(a) Spectre de puissance des profils parallèles  $x$ , extraits de la surface dessinée à la Fig. 1.3(a). Le spectre est moyenné sur tous les profils. Le nombre d'onde  $k_L = \pi/L$  est le plus petit nombre d'onde décrit par l'échantillonnage. La pente de la régression linéaire est  $-2.63 \pm 0.04$ , ce qui permet d'estimer l'exposant de Hurst comme  $\zeta = 0.81 \pm 0.02$ .



(b) Coefficient d'ondelette moyenné sur le paramètre de translation, en fonction de l'échelle, pour tous les profils parallèles  $x$ , extraits de la surface dessinée à la Fig. 1.3(a).  $l_m$  désigne l'échelle de la maille. La pente de la régression linéaire est  $1.30 \pm 0.02$ , ce qui permet d'estimer l'exposant de Hurst comme  $0.80 \pm 0.02$ .

FIG. 1.4 – Analyses par spectre de Fourier et coefficient d'ondelette moyenné de la surface présentée à la Fig. 1.3(a), qui a été générée numériquement avec  $\zeta = 0.8$ . La confrontation des résultats des deux analyses permet d'estimer :  $\zeta = 0.805 \pm 0.015$ .

où le signe  $*$  désigne la conjugaison complexe. Il s'agit ainsi de décomposer la fonction sur une base d'ondelettes, de la même façon que la transformée de Fourier consiste à décomposer la fonction sur une base de l'espace de Fourier composée de fonctions  $\exp(ikx)$ . Le coefficient d'ondelette  $\mathcal{W}[h]$  est la projection de la fonction  $h$  sur le sous-espace engendré par l'ondelette  $\psi_{a,b}$ . Cette dernière est caractérisée à la fois par une extension spatiale caractéristique, paramétrée par  $a$ , et par une position, paramétrée par  $b$ . Le coefficient d'ondelette  $\mathcal{W}[h]$  correspond à une mesure de la proportion de détails d'échelles  $a$  à la position  $b$  au sein du profil. On s'étendra plus avant sur les applications possibles de cette signification de l'ondelette dans la suite de ce manuscrit.

L'invariance d'échelle de la fonction  $h$ , selon laquelle  $h(x) = \lambda^\zeta h(x/\lambda)$ , entraîne

$$\mathcal{W}[h](a, b) = \lambda^\zeta \mathcal{W}[\hat{h}](a, b) \quad , \quad (1.45)$$

où  $\hat{h}(x) = h(x/\lambda)$ . Soit

$$\mathcal{W}[h](a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{-\zeta} \psi^* \left( \frac{x-b}{a} \right) h \left( \frac{x}{\lambda} \right) dx \quad (1.46)$$

$$= \lambda^{-\frac{1}{2}-\zeta} \frac{1}{\sqrt{\lambda a}} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \psi^* \left( \frac{x-\lambda b}{\lambda a} \right) du \quad (1.47)$$

$$\mathcal{W}[h](a, b) = \lambda^{-\frac{1}{2}-\zeta} \mathcal{W}[h](\lambda a, \lambda b) \quad (1.48)$$

On obtient finalement l'invariance d'échelle suivante :

$$\boxed{\mathcal{W}[h](\lambda a, \lambda b) = \lambda^{\zeta+\frac{1}{2}} \mathcal{W}[h](a, b)} \quad , \quad (1.49)$$

dont l'exposant dépend fortement de la normalisation que l'on a choisie pour la transformée (relation (1.44)). On dispose de deux variables libres,  $a$  et  $b$ . Si l'on moyenne sur le paramètre de translation, on obtient le coefficient d'ondelette moyen pour l'échelle  $a$ , qui correspond en quelque sorte à la proportion de détails d'échelle  $a$  dans le signal. La fonction  $W[h](a) = \langle \mathcal{W}[h](a, b) \rangle_b$  est une loi de puissance d'exposant  $\zeta + \frac{1}{2}$ , en vertu de la relation obtenue en appliquant l'opération  $\langle \rangle_b$  sur la relation (1.49) :

$$\boxed{W[h](\lambda a) = \lambda^{\zeta+\frac{1}{2}} W[h](a)} \quad . \quad (1.50)$$

On a utilisé les familles d'ondelettes de Daubechies, d'ordre 12 et 20. Elle ont l'avantage de constituer une base orthogonale et d'être à support compact [Hubbard, 1995]. Elles permettent l'utilisation d'un algorithme rapide développé par Stéphane Mallat et dénommé par lui Transformée en Ondelettes Rapide (Fast Wavelet Transform) [Press et al., 1992], par analogie avec la FFT.

La puissance de l'analyse en ondelettes tient essentiellement à deux qualités : ses propriétés de moyennage intrinsèques, et sa robustesse vis-à-vis d'une éventuelle altération du signal.

Indépendamment de la moyenne sur plusieurs réalisations, l'analyse d'un seul profil donne lieu à un moyennage sur les paramètres de position, plus précisément sur  $2^{n-p}$  valeurs pour le  $p^e$  coefficient. Par exemple, le calcul du coefficient correspondant à l'échelle  $l_c * 2^6$  d'un profil comportant  $2^9 = 512$  points se fera par moyennage de  $2^3 = 8$  coefficients d'ondelette. Ainsi, l'analyse sur un seul profil est aussi efficace du point de vue statistique qu'une analyse sur 8 profils par une autre méthode.

Étant à la fois locale en espace et en longueurs d'onde, l'analyse par ondelette se révèle extrêmement robuste vis-à-vis des altérations qu'aura subies le signal, au cours de la mesure ou à cause des manipulations effectuées sur les données au cours du traitement. Ainsi, l'ajout d'une

dérive linéaire ne change pas l'analyse en ondelette. L'ajout d'une dérive quadratique modifie l'analyse, mais permet de retrouver aux petites échelles l'exposant de rugosité "correct", avec une transition très nette vers un comportement en  $\lambda^{1.3}$  aux grandes échelles [Simonsen et al., 1998]. De manière analogue, l'ajout d'un bruit, dont les composantes d'ondelettes aux grandes échelles sont très petites, détruit l'information auto-affine aux petits coefficients d'ondelette, mais laisse les grands coefficients inchangés, ce qui permet de retrouver l'exposant de rugosité. En comparaison, l'analyse par spectre de Fourier, par exemple, est très sensible au bruit sur les données. Le paragraphe 3.1 fournit un échantillon de quelques transformations subies par le signal et de la façon dont elles sont "vues" par les analyses de Fourier et en ondelettes.

### 1.3.6 Conclusion sur les méthodes d'analyse

Les méthodes initialement développées pour l'analyse des objets auto-similaires permettent de faire le lien entre l'exposant de rugosité et la dimension fractale du profil, mais elles sont peu indiquées pour l'analyse proprement dite, car elles peuvent introduire des biais dans l'analyse. Parmi les méthodes qui tirent parti de la spécificité de la géométrie auto-affine, on peut écarter les méthodes de premier et multi retour et la méthode de fenêtre à largeur variable, qui ne fournissent pas la même précision sur toutes les échelles, et sont difficiles à appliquer pratiquement. On retiendra l'analyse de Fourier, qui a le mérite d'être rapide et précise sur un signal peut bruité. La méthode du coefficient d'ondelette moyenné possède également ces avantages, et est de plus très robuste vis-à-vis d'éventuelles dégradations du signal, quelles que soient les échelles touchées par ces dégradations. Au contraire, un bruit localisé spatialement peut polluer l'intégralité du spectre de Fourier, du fait de la non-localité de l'analyse spectrale.

En toute rigueur, il est souhaitable d'utiliser conjointement plusieurs techniques de calcul et de confronter les résultats [Schmittbuhl, Vilotte et Roux, 1995; Mehrabi, Rassamdana et Sahimi, 1997] obtenus par les différentes techniques. Cela permet de réduire l'intervalle d'incertitude, en considérant l'intersection des intervalles d'incertitude obtenus par chacune des méthodes. On utilisera systématiquement les analyses de Fourier et en ondelettes, en parallèle. La Fig. 1.4 fournit un exemple d'analyse par ces deux méthodes. Elles ont été réalisées sur la surface présentée à la Fig. 1.3(a). Les deux analyses sont cohérentes ; le spectre de Fourier permet d'estimer l'exposant de rugosité comme  $\zeta = 0.81 \pm 0.02$ . L'analyse en ondelettes fournit :  $\zeta = 0.80 \pm 0.02$ . Les incertitudes découlent des incertitudes sur la gamme d'échelles choisie pour effectuer la régression. Finalement, on estime, à 5/100 près,  $\zeta = 0.805 \pm 0.015$ .

## 1.4 Discussion – La description auto-affine est-elle la plus appropriée ?

L'absence d'échelle caractéristique sur plusieurs décades, caractéristique de l'auto-affinité, laisse supposer l'existence d'un phénomène critique sous-jacent à la fracturation du matériau [Charmet, Roux et Guyon, 1990; Herrmann et Roux, 1990]. Ceci nous amène à une forme plus générale de géométrie liée aux phénomènes critiques : la multi-affinité. Même si de nombreuses études on conclu à une bonne adéquation du modèle auto-affine avec les propriétés observées, il est intéressant d'examiner si elle constitue une bonne approximation d'une description plus précise, multi-fractale.

Dans la description mono-fractale, les moments de la distribution vérifient tous la même loi d'échelle (1.15). En réalité, il existe une légère différence d'exposant entre les fonctions puissance qui décrivent le comportement des différents moments d'une topographie enregistrée sur le granite

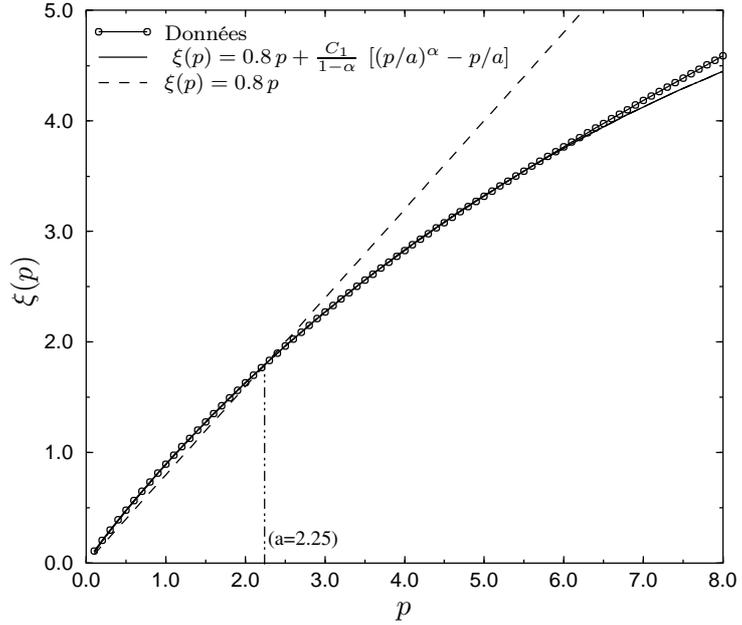


FIG. 1.5 – Comportement des fonctions de structure d’une surface de granite, en fonction du degré  $p$  de la fonction (d’après [Schmittbuhl, Schmitt et Scholz, 1995]).

[Schmittbuhl, Schmitt et Scholz, 1995]. Plus précisément, on peut écrire

$$\mathcal{M}_p(\Delta) \propto l^{\xi(p)} \quad . \quad (1.51)$$

Le modèle auto-affine est un cas particulier où  $\xi(p) = \zeta p$ . On peut définir la correction au modèle mono-fractal à l’aide la fonction  $K$  définie selon la relation

$$K\left(\frac{q}{a}\right) = \zeta p - \xi(p) \quad , \quad (1.52)$$

où l’exposant  $a$  est celui où les représentations mono- et multi- fractales coïncident :

$$\xi(a) = \zeta a \quad . \quad (1.53)$$

Les champs multi-fractals sont obtenus par exemple par des processus de cascade multiplicative [Schertzer et Lovejoy, 1987; Schertzer et Lovejoy, 1989], qui imposent à la fonction  $K$  d’être convexe, c’est-à-dire que son graphe tourne sa concavité vers le bas. Dans la limite continue des processus de cascade multiplicative discrète, la forme de  $K$  est contrainte de façon beaucoup plus précise :

$$K(p) = \frac{C_1}{\alpha - 1} (p^\alpha - p) \quad , \quad (1.54)$$

où  $\alpha \in [0; 2]$  est l’index de Lévy du générateur du champ multi-fractal, et  $C_1$  caractérise l’inhomogénéité moyenne.

Schmittbuhl, Schmitt et Scholz (1995) ont procédé à l’étude de la multi-affinité d’une surface de granite de granite rose de Westerley. La dépendance qu’ils observent pour  $\xi$  en fonction du degré  $p$  du moment est représentée à la Fig. 1.5. Ils obtiennent  $a = 2.25 \pm 0.25$ ,  $C_1 = 0.30 \pm 0.05$  et  $\alpha = 0.5 \pm 0.1$ . La linéarité de la fonction  $K$  obtenue expérimentalement pour les exposants supérieurs à 6 est expliquée théoriquement par un artefact de l’analyse lié à l’échantillonnage [Schertzer et Lovejoy, 1987].

Le modèle auto-affine semble être une bonne approximation pour les moments d’ordre inférieur à 5. Il présente l’intérêt de “résumer” les propriétés d’invariance d’échelle des surfaces

---

de fracture rugueuse par un nombre caractéristique unique,  $\zeta$ . C'est pourquoi nous nous bornerons à cette représentation. Le moment entier dont le comportement est le plus proche du comportement auto-affine "moyen" est le moment d'ordre 2, c'est-à-dire la variance. Une technique d'analyse fondée sur l'analyse de ce moment, telle que la méthode de la fenêtre à largeur variable, ou bien la méthode du spectre de Fourier, est mieux indiquée pour trouver la meilleure approximation auto-affine au comportement multi-fractal.

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un outil bien adapté à la description statistique de profils enregistrés sur des surfaces de fracture : la description auto-affine. Cette description met en évidence une invariance d'échelle anisotrope des profils ; le profil reste statistiquement identique à lui-même lorsque le rapport d'aspect de la fenêtre évolue comme une loi de puissance de la largeur de la fenêtre, d'exposant  $\zeta - 1$ . Le coefficient de rugosité  $\zeta$  est caractéristique de l'invariance d'échelle. Il caractérise la persistance des corrélations d'altitude le long du profil, ou, de manière équivalente, l'importance des détails de petite échelle relativement aux détails de grande échelle. Un certain nombre de quantités calculées à partir de la distribution des hauteurs du profil, telles que la fonction d'auto-corrélation, le spectre de Fourier ou la transformée en ondelettes, dépendent de l'échelle en suivant une loi de puissance dont l'exposant est relié linéairement à  $\zeta$ .

Le passage d'une description à deux dimensions à une description complète de la topographie à trois dimensions pose un certain nombre de questions. Le problème de la croissance de la rugosité à partir de la zone d'initiation de la fracturation a déjà été étudié. La sensibilité de la valeur de l'exposant de rugosité à la direction des profils est moins bien connue. Pour des topographies où l'on peut considérer que  $\zeta$  ne dépend pas de l'orientation des profils, la surface est bien décrite par un modèle auto-affine isotrope. Nous avons développé un modèle numérique permettant d'engendrer de telles topographies. La description de ces surfaces est fondée sur trois paramètres : l'extension horizontale de la surface, l'amplitude verticale de la rugosité, et l'exposant de rugosité.

Les méthodes d'analyse de l'auto-affinité d'une topographie en trois dimensions sont en général menées sur des profils parallèles, et moyennées sur ces profils. Nous avons donné un aperçu des différentes méthodes utilisables. Les méthodes d'analyse par transformée (Fourier et ondelettes) nous ont paru les plus performantes ; en outre, elles se sont révélées les plus rapides. On veillera à les employer toujours conjointement, et à confronter leurs résultats.

L'applicabilité du modèle auto-affine isotrope aux topographies de surfaces de fracture en trois dimensions n'est pas prouvée. Cette question est l'objet de l'étude expérimentale de surfaces de fractures de granite et de grès présentée au chapitre 3. Les analyses de l'auto-affinité des surfaces seront menées à l'aide des méthodes d'analyse par transformée (Fourier et ondelettes), qui ont été décrites dans le présent chapitre. Les enregistrements de topographies de surfaces utilisés pour faire les analyses ont été réalisés à l'aide d'un dispositif qui est décrit dans le chapitre 2.



## Chapitre 2

# Développement d'un rugosimètre à mesure optique et mécanique

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>2.1 Anatomie du rugosimètre</b> . . . . .	<b>36</b>
2.1.1 Présentation globale du fonctionnement du dispositif . . . . .	36
2.1.2 Système de positionnement . . . . .	36
2.1.3 Système de mesure . . . . .	37
2.1.4 Système d'acquisition – pilotage des instruments . . . . .	43
<b>2.2 Validation de la rugosimétrie mécanique</b> . . . . .	<b>43</b>
2.2.1 Calibration du capteur de déplacement LVDT . . . . .	43
2.2.2 Description de la grille — précautions liées à la fragilité de la pointe . . . . .	44
2.2.3 Estimation des incertitudes . . . . .	46
2.2.4 Comparaison de deux enregistrements de la même surface réalisés avec deux machines différentes . . . . .	48
<b>2.3 Validation de la rugosimétrie optique statique</b> . . . . .	<b>51</b>
2.3.1 Calibration du capteur optique . . . . .	51
2.3.2 Utilisation de la table en $z$ . . . . .	51
2.3.3 Changement de nœud – cinématique du positionnement précis . . . . .	52
2.3.4 Prise en considération des points aberrants . . . . .	53
2.3.5 Reproductibilité de la mesure optique . . . . .	56
<b>2.4 Validation de la rugosimétrie optique dynamique</b> . . . . .	<b>57</b>
2.4.1 Tests de la cinématique du déplacement . . . . .	57
2.4.2 Définition de la vitesse de déplacement – ajustement de l'intervalle entre deux mesures . . . . .	61
2.4.3 Positionnement des profils dans la direction $x$ . . . . .	61
2.4.4 Confrontation d'un enregistrement à un enregistrement réalisé avec la technique pas à pas . . . . .	66
<b>2.5 Technique de répliques en silicone</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>A Présentation du programme de rugosimétrie mécanique</b> . . . . .	<b>70</b>
<b>B Présentation du programme de rugosimétrie optique pas à pas</b> . . . . .	<b>74</b>
<b>C Présentation du programme de rugosimétrie optique par balayage</b> . . . . .	<b>76</b>

---



## Introduction

L'étude de la topographie des surfaces rugueuses peut être menée en suivant deux types de procédures. Si l'on a une connaissance a priori concernant la nature de la rugosité, on peut effectuer des mesures qui permettent de remonter aux paramètres du modèle supposé pour la géométrie. Dans le cas des surfaces de fracture, on suppose une description auto-affine et on recherche la valeur de l'exposant d'auto-affinité. Différentes grandeurs physiques peuvent être utilisées pour obtenir cette information. Ainsi, Fang, Adame, Yang, Wang et Lu (1995) ont mesuré le facteur de réflexion d'une surface de fracture en fonction de l'angle de réflexion. Simonsen, Vandembroucq et Roux (2000) ont développé une méthode d'analyse analogue, utilisant le coefficient de réflexion différentiel. Le dispositif utilisé pour mettre en œuvre ces deux techniques mesure des intensités lumineuses. Boffa, Allain et Hulin (1998) ont développé une méthode qui consiste à photographier la surface en éclairage rasant et à analyser la distribution des zones d'ombre dans les photos. Une méthode largement utilisée pour les surfaces de fracture métalliques consiste à réaliser des sections planes de la surface, dont on peut ensuite analyser la géométrie. Par exemple, on détermine le coefficient de rugosité d'une surface auto-affine à partir de la dimension fractale des îlots contenus dans les sections planes parallèles au plan de fracturation. Dans ce cas, ainsi que dans la méthode d'ombrage de Boffa et al. (1998), l'appareil de mesure est un microscope optique ou un microscope électronique à balayage (*Scanning Electron Microscope*) [Bouchaud, 1997; Hull, 1999], selon la gamme d'échelles considérée.

Une autre approche consiste à effectuer un enregistrement en 3 dimensions de la topographie. La topographie "numérique" obtenue doit reproduire la surface expérimentale le mieux possible. Elle peut être analysée a posteriori de diverses manières, sans forcément avoir de connaissance a priori sur la géométrie de la surface. C'est cette solution que nous avons choisie, car nous cherchons à caractériser la géométrie aussi finement que possible, à valider le modèle auto-affine isotrope, mais également à rechercher une description d'ordre supérieur. Des dispositifs permettant d'enregistrer la topographie d'une surface le long de profils linéaires existent [Brown et Scholz, 1985], mais la reconstruction d'une topographie en trois dimensions par juxtaposition de profils parallèles enregistrés sur la même surface avec ces dispositifs est malaisée. Une méthode stéréographique permettant de reconstruire la topographie à partir de deux photos de la surface légèrement décalées a été développée et utilisée par Jessel, Cox, Schwarze et Power (1995); cette technique ne permet pas d'obtenir une précision sur les hauteurs meilleure que 100 microns. Nous avons développé un dispositif permettant de réaliser de vrais enregistrements en trois dimensions, en essayant de combiner deux propriétés antagonistes : une précision micrométrique dans les trois directions de l'espace et la possibilité de mesurer des échantillons de dimensions allant jusqu'à  $20 \times 20 \text{ cm}^2$ . Le dispositif permet deux types de mesure de la rugosité : à l'aide d'un palpeur mécanique qui vient en contact avec la surface, et avec un capteur optique, sans contact. Trois modes de fonctionnement sont implémentés. Pour chacun d'entre eux, on a développé un programme informatique qui dialogue avec les différents appareils constituant le rugosimètre et les pilotes pour réaliser la mesure de topographie. On dispose ainsi de trois appareillages pouvant être utilisés en alternance. Les mesures de rugosimétrie étant souvent coûteuses en temps, un effort important a été consacré à l'optimisation de la vitesse de mesure.

Les caractéristiques de ces appareillages et leurs qualités et inconvénients respectifs sont présentés en détail dans le présent chapitre, avec les différentes mesures qui ont servi à les tester et à les valider. La première partie est dévolue à une présentation globale du principe de fonctionnement et des caractéristiques du rugosimètre. Les trois parties suivantes décrivent les spécificités des trois modes de fonctionnement, et les expériences de validation qui ont été réalisées. La dernière partie présente une technique de moulage des surfaces.

## 2.1 Anatomie du rugosimètre

### 2.1.1 Présentation globale du fonctionnement du dispositif

On dispose d'une surface rugueuse asymptotiquement plane, dont le plan moyen est positionné horizontalement. S'il s'agit d'une surface de fracture, le plan moyen en question correspond au plan moyen de fracturation. Comment décrire la topographie de la surface ? Si l'on définit un plan de référence horizontal, qui fixe le zéro des mesures d'altitude (coordonnée  $z$ ), chaque point  $M$  de la surface peut être repéré par sa projection orthogonale  $m$  sur ce plan de référence horizontal, et par son altitude, qui n'est autre que son éloignement au plan de référence,  $z = mM$ . La correspondance entre les points de la surface et leurs projections orthogonales sur le plan de référence est supposée univaluée, afin de pouvoir décrire la topographie à l'aide de la fonction  $h$  qui à tout point  $m$  associe l'altitude  $h(m)$  du point  $M$  correspondant. Si l'on repère la position du point  $m$  dans le plan de référence par les coordonnées  $x$  et  $y$ , on rejoint la description de la topographie utilisée dans le chapitre 1.

Une procédure de rugosimétrie consiste en l'échantillonnage de la fonction  $h$ , c'est-à-dire l'enregistrement successif de l'altitude  $h(m)$  pour différentes positions horizontales  $m$ . Les positions  $m$  en question sont placées aux nœuds d'une grille de mesure rectangulaire  $n_x \times n_y$ , de maille  $\Delta x \times \Delta y$ . L'origine du repère  $(x, y, z)$ , les dimensions de la maille et le nombre de points de la grille de mesure dans chacune des dimensions horizontales sont paramétrables par l'utilisateur. La rugosimétrie s'effectue par positionnements successifs aux différents points de la grille de mesure, suivis d'une mesure d'altitude. La grille est décrite le long de profils parallèles à l'axe  $x$ . Le dispositif de mesure peut être divisé en trois composantes fonctionnelles : un système de positionnement qui assure le positionnement horizontal aux nœuds de la grille de mesure, un système de mesure qui effectue les mesures d'altitude, et un système de communication/acquisition qui déclenche et coordonne positionnements et mesures, enregistre les valeurs mesurées, et gère l'interaction avec l'utilisateur.

La mesure d'altitude peut être effectuée de deux manières : par "palpation" mécanique de la surface, ou à l'aide d'un capteur optique. La mesure mécanique nécessite l'arrêt du système de positionnement pendant la mesure d'altitude, mais la mesure optique, qui se fait sans contact entre le capteur et la surface, permet de lire l'altitude sans arrêter le système de positionnement. Le rugosimètre admet ainsi trois modes de fonctionnement, que l'on désignera comme la *rugosimétrie mécanique*, la *rugosimétrie optique statique* et la *rugosimétrie optique dynamique*. Dans les deux premières, le système de positionnement est à l'arrêt pendant la mesure d'altitude. Dans la troisième, la mesure se fait au cours du déplacement uniforme de la table le long d'un profil parallèle à l'axe  $x$ . Les particularités de chacune des trois procédures et les expériences qui ont servi à les valider sont l'objet des paragraphes 2.2, 2.3, 2.4, respectivement.

### 2.1.2 Système de positionnement

Il est constitué de deux tables à déplacements OWIS disposées horizontalement et perpendiculairement l'une à l'autre, et pilotées par un contrôleur "OWIS Motor Controller DC 500". La disposition des tables est présentée sur la Fig. 2.1. La table  $x$  est posée sur un marbre, sur lequel est également fixé le bâti en aluminium qui soutient la table  $y$ . Les tables  $x$  et  $y$  ont une amplitude de déplacement de 20 cm. Elles sont équipées d'un encodeur optique gravé au 1/2 micron. Le contrôleur permet de paramétrer le déplacement des tables (définition des paramètres dynamiques du déplacement, réinitialisation de la position sur un encodeur), d'interroger l'encodeur de chaque table (ainsi tout déplacement est rétro-activé), de requérir une nouvelle position des tables, de déclencher le positionnement ou de l'interrompre.

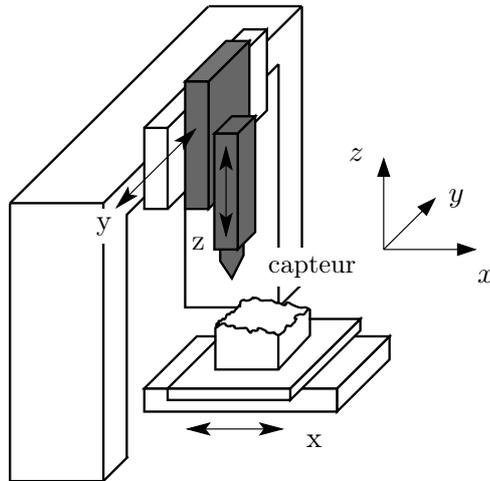


FIG. 2.1 – Schéma du dispositif de rugosimétrie. Le système de mesure est représenté en gris clair, le système de positionnement en blanc. Le système d'acquisition n'est pas représenté.

Le déplacement des tables s'effectue selon une courbe de vitesse trapézoïdale, c'est-à-dire qu'il se compose d'une phase d'accélération constante suivie d'une phase de mouvement uniforme, et enfin d'une phase de décélération uniforme (voir Fig. 2.16(a)). Les phases non uniformes initiale et finale ont même accélération (en valeur absolue), qui est modifiable à l'aide du contrôleur. La hauteur du plateau de vitesse est également paramétrable.

### 2.1.3 Système de mesure

Deux capteurs peuvent être utilisés pour mesurer l'altitude. L'un est un capteur de déplacement inductif, l'autre est un capteur optique. L'utilisation de ces capteurs nécessite un dispositif de translation verticale du capteur (cf. ci-dessous). On utilise pour ce faire une table à déplacement aux caractéristiques identiques à celles des tables horizontales, mais d'amplitude 5 cm, sur laquelle on fixe le capteur. Cette table définit l'axe  $z$  du repère orthonormé  $(x, y, z)$  qui sert de référence pour l'échantillonnage de la topographie. Elle est elle-même montée sur le plateau mobile de la table  $y$  (cf. Fig. 2.1). Le système de mesure est ainsi constitué du capteur de mesure, de son support, de son alimentation, et de la table à déplacement en  $z$ .

L'altitude  $h$  du point de la surface repéré par la position horizontale  $(x, y)$  est mesurée par rapport à un plan de référence défini par la position de la table  $z$  avant le début de la procédure de rugosimétrie. En d'autres termes, l'altitude  $h_t$  de cette table est définie comme nulle au début de la mesure. Pratiquement, on choisit le plan de référence quelques cm au-dessus du point le plus haut de la topographie, de sorte que  $h_t$  est toujours négative.

#### Principe de la mesure utilisant le capteur inductif

Le capteur de déplacement LVDT (Linear Variable Differential Transformer) "Sensorex SX 8mm" est un transformateur dont le circuit primaire est alimenté par une tension alternative fixée  $V_e$ . Un noyau ferromagnétique mobile peut se déplacer à l'intérieur du bobinage primaire et de deux bobinages secondaires, situés de part et d'autre du bobinage primaire. Le noyau ferromagnétique canalise le flux magnétique créé par le circuit primaire, et génère des tensions  $V_1$  et  $V_2$  dans les deux bobinages secondaires. Ceux-ci sont connectés en série et en opposition de phase, de sorte que la tension  $V_s = V_1 - V_2$  aux bornes du circuit secondaire est nulle lorsque le noyau ferromagnétique est placé de façon symétrique par rapport aux deux bobinages secondaires. Cette *position neutre* définit le zéro du capteur. La tension de sortie alternative  $V_s$



(a) Système de mesure mécanique. Un support en aluminium est fixé sur la table à déplacement  $z$ . Il contient le capteur LVDT, dont l'équipage mobile muni d'une pointe dépasse en-dessous, à la verticale du point dont on cherche à déterminer l'altitude.



(b) Système de mesure optique. Le capteur optique lit la distance qui le sépare du point de la surface situé en-dessous de lui, à sa verticale. Il est solidaire de la table à déplacement  $z$ .

FIG. 2.2 – Vues rapprochées des systèmes de mesure mécanique et optique.

a une amplitude qui dépend linéairement de la distance du noyau à cette position neutre ; le signe du déphasage de  $V_s$  par rapport au signal d'entrée  $V_e$  fournit le sens du déplacement par rapport à la position neutre. La tension  $V_1 - V_2$  est ensuite redressée, pour fournir un signal de sortie continu proportionnel à l'enfoncement du noyau ferromagnétique par rapport au corps du capteur. Le noyau est monté sur un équipement mobile sur lequel on peut fixer différents types de palpeurs, afin que le mouvement du noyau soit assujéti à celui du système dont on veut mesurer la position.

Les qualités d'un tel dispositif sont multiples. La mesure sans contact permet d'induire un minimum de contraintes mécaniques sur les constituants du capteur au cours de la mesure ; elle garantit également au capteur une grande longévité. Par ailleurs, ce type de capteur inductif a une résolution infinie, c'est-à-dire limitée par celle de l'électronique de traitement, et admet une excellente reproductibilité, en particulier une grande stabilité de la position neutre. Le constructeur annonce une gamme de mesure linéaire de 1 mm, et une erreur de linéarité maximale inférieure à 2 microns. Ces valeurs ont été vérifiées (cf. courbe de calibration de la Fig. 2.6(a)). La *course mécanique* du capteur, i. e, l'enfoncement maximal de l'équipage mobile dans le corps du capteur avant son endommagement, est de 21 mm.

Dans notre dispositif, le capteur LVDT est utilisé de la manière suivante. Le corps du capteur est monté dans un support en aluminium, qui est lui-même solidaire du plateau mobile de la table à déplacement en  $z$ . L'équipage mobile supportant le noyau ferromagnétique est placé dirigé vers le bas, avec son axe de déplacement vertical. On fixe dessus une pointe en saphir de rayon 25 microns. L'ensemble du système de mesure est présenté sur la Fig. 2.2(a). Avant chaque mesure, la pointe est en l'air, c'est-à-dire que l'équipage mobile du capteur n'est pas enfoncé. Pour mesurer l'altitude du point de la topographie situé à la verticale du capteur, on déclenche un déplacement de la table vers le bas, par pas de 500 microns. Entre chaque pas, l'enfoncement  $e$  (positif) de l'équipage mobile du capteur est interrogé. S'il est négligeable (c'est-à-dire inférieur à 20 microns), un autre pas est déclenché. Sinon, le contact avec la surface est détecté, ce qui met fin au déplacement de la table. L'altitude  $h$  du point de la surface en contact avec la pointe, repérée par rapport au plan de référence, est alors égale à

$$\boxed{h = h_t + e} \quad , \quad (2.1)$$

où  $h_t$  est l'altitude (négative, en général) de la table à déplacement par rapport au plan de référence (voir Fig. 2.3). La valeur de  $h(x, y)$  correspond bien à la topographie de la surface, décrite par rapport au repère  $(x, y, z)$ . Le capteur mesure toujours dans sa gamme de réponse linéaire, puisque l'amplitude des pas de déplacement de la table (500 microns) est inférieure à la gamme d'enfoncements mesurables avec le capteur.

### Principe de la mesure optique

Le capteur optique utilisé est le "Laser Twin Sensor" de la société LMI. Il fournit une tension de sortie continue qui dépend linéairement de la distance qui le sépare de la surface à analyser. La gamme de distances ainsi mesurable est théoriquement de 1 cm.

Le principe de fonctionnement du capteur est illustré sur la Fig. 2.4. Une diode laser produit un faisceau de diamètre 30  $\mu\text{m}$ , perpendiculaire à la base du capteur, c'est-à-dire vertical, qui se réfléchit sur la surface. Si la réflexion est suffisamment diffuse, c'est-à-dire si elle ne se fait pas de façon complètement spéculaire, une partie de l'énergie lumineuse réfléchie est récupérée à travers deux systèmes optiques disposés obliquement. Deux tâches lumineuses viennent alors illuminer chacun des deux détecteurs photo-sensitifs (D.P.S) symétriques, notés DPS1 et DPS2 sur la Fig. 2.4(a)). La position d'une tâche lumineuse sur chaque D.P.S dépend de l'angle d'entrée de

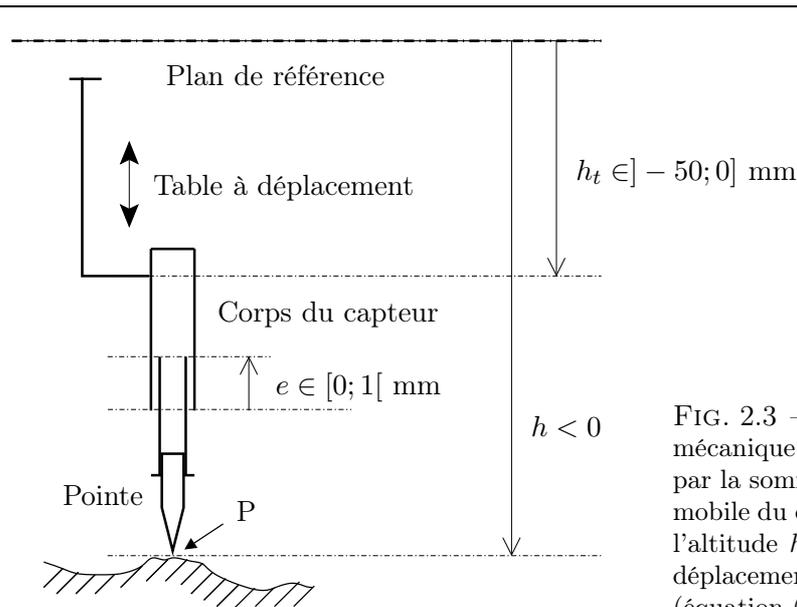


FIG. 2.3 – Schéma de principe de la mesure mécanique. L’altitude du point P est définie par la somme de l’enfoncement  $e$  de l’équipage mobile du capteur (compté positivement) et de l’altitude  $h_t$  (toujours négative) de la table à déplacement par rapport au plan de référence (équation (2.1)).

la lumière dans le système optique associé. Cet angle est lui-même directement relié à la distance entre la surface et le capteur (voir Fig. 2.4(b)). Ainsi, la mesure de la position de la tâche sur le détecteur fournit une mesure de la distance  $D$  (toujours positive) du capteur à la surface. La position de la tâche lumineuse sur le D.P.S est mesurée par comparaison des courants mesurés aux deux extrémités du D.P.S [Pastorius, 2001]. L’altitude du point de la surface lu est estimée comme

$$\boxed{h = -D + h_t} \quad , \quad (2.2)$$

où  $h_t$  est l’altitude de la table à déplacement par rapport au plan de référence.

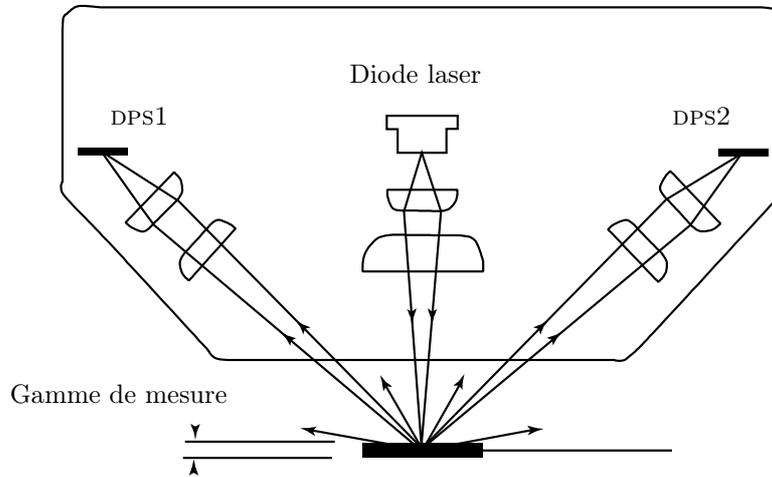
Le capteur est prévu pour pallier un certain nombre d’artefacts possibles de la méthode :

- Un changement d’intensité lumineuse du faisceau réfléchi, lié à un changement de la réflectivité de la surface, peut survenir quand on passe d’un point de la topographie étudiée à un autre, en raison d’un changement de couleur ou de rugosité de petite échelle (submicrométrique) de la surface. Dans ce cas, une rétro-action sur l’intensité du faisceau incident permet d’ajuster l’intensité des faisceaux réfléchis et de les maintenir à une valeur constante.
- Si la topographie de la surface est très chaotique, l’un des faisceaux réfléchis peut ne pas atteindre le détecteur. Un seul détecteur suffit alors à effectuer la mesure [Pastorius, 2001]. Cette propriété est très importante lorsqu’on s’intéresse à des surfaces aux topographies “tourmentées”.

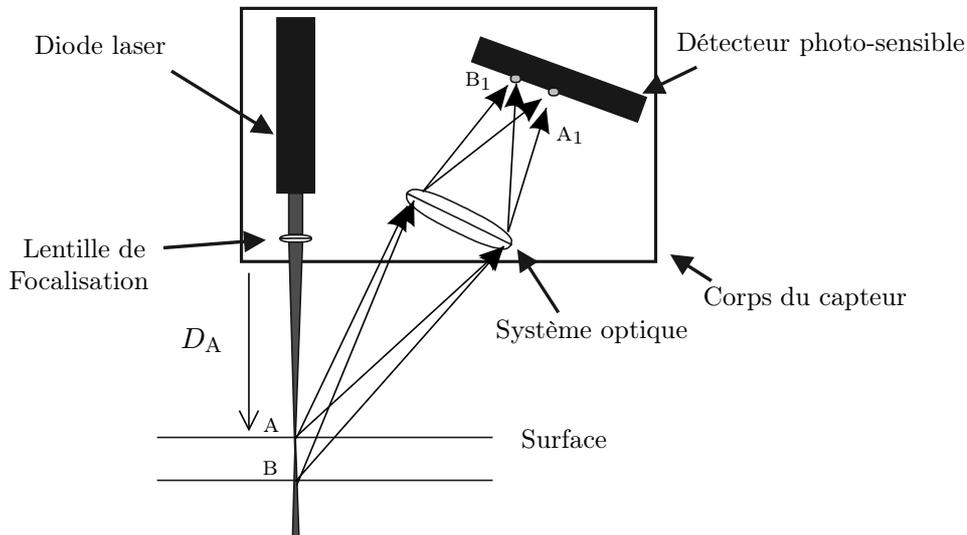
Par contre, le principe de fonctionnement du capteur induit deux limitations importantes. D’une part, on ne peut pas mesurer la topographie de la surface d’un matériau dont l’indice optique est trop proche de celui de l’air (par exemple un matériau transparent). D’autre part, la surface doit être suffisamment diffuse. Une surface trop lisse fournit une mesure aberrante, qui se traduit par un signal de sortie du capteur *qui est en-dehors de la gamme de mesure*. Ainsi, on sait en général quand on a fait une mesure aberrante.

### Incertitude liée à la dilatation thermique

Quand le dispositif est à l’arrêt, la distance entre le système de mesure et la surface à enregistrer dépend de la température ambiante. Cette sensibilité à la température est liée à la dilatation thermique du bâti en aluminium sur lequel sont fixés l’ensemble (table en  $y$ +table en  $z$ +capteur).



(a) Le faisceau émis par le laser est diffusé par la surface. Une partie de la lumière réfléchie vient former une tache sur chacun des deux détecteurs photo-sensibles, placés symétriquement.



(b) Détail du schéma optique du capteur. Un seul détecteur est représenté. La position de la tache lumineuse sur le détecteur  $A_1$  (respectivement  $B_1$ ) est fonction de l'éloignement  $D_A$  (respectivement,  $D_B$ ) du capteur à la surface en A (respectivement, B).

FIG. 2.4 – Schémas optiques du capteur laser. Ces schémas sont dérivés de ceux qui apparaissent dans les notices du constructeur, LMI [*LTS, Laser Twin Sensor*, n.d.; Pastorius, 2001].

La hauteur du bâti est d'à peu près 20 cm. Le coefficient de dilatation thermique de l'aluminium constituant le bâti vaut  $24 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . La dilatation du bâti par tranches de  $1^\circ\text{C}$  est de l'ordre de 4.8 microns. Durant un enregistrement (qui peut durer plusieurs jours), la température dans la salle d'expériences peut fluctuer de  $\pm 1/2^\circ\text{C}$ , ce qui correspond à une incertitude de  $2 \sim 3$  microns sur la mesure d'altitude.

On pourrait réduire considérablement cette incertitude en enregistrant continuellement la température pendant l'expérience, et en utilisant l'enregistrement de température pour corriger les mesures a posteriori. Une telle correction en température n'est pas implémentée dans le dispositif, pour le moment.

### 2.1.4 Système d'acquisition – pilotage des instruments

Le pilotage des tables et l'acquisition des données les concernant sont réalisés à partir d'un ordinateur, qui envoie des commandes au contrôleur des tables à travers une liaison série RS232. L'ensemble des fonctionnalités du contrôleur est ainsi accessible informatiquement. Une séquence typique de commandes pour imposer un déplacement est par exemple :

1. Définition d'une nouvelle position pour les tables à déplacement.
2. Déclenchement du positionnement vers cette nouvelle position.
3. Réception de l'annonce par le contrôleur de la fin du positionnement.
4. Interrogation des nouvelles valeurs des encodeurs des tables.
5. Réception de ces valeurs.

Pour chaque échange d'une commande, la communication entre l'ordinateur et le contrôleur nécessite entre 20 et 50 ms. Ce délai est un facteur limitant important du dispositif de rugosimétrie.

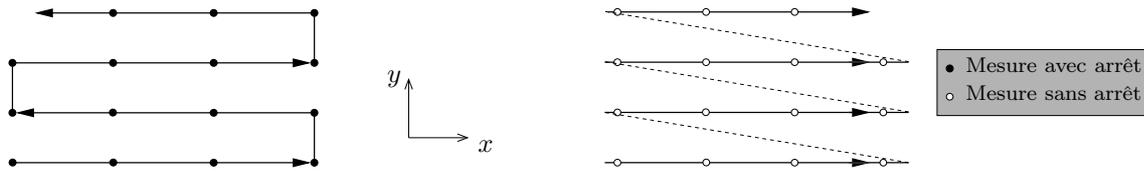
Le même ordinateur lit les tensions de sortie des capteurs, via une carte-convertisseur analogique-numérique, qui convertit les valeurs lues sur 16 bits. La fréquence de lecture de la carte est 100 kHz. Chaque mesure consiste en fait en une moyenne de  $n$  lectures successives ( $n \leq 512$ ). Le temps de mesure correspondant est de l'ordre de  $n/100$  ms. Il est petit par rapport aux délais induits par la communication avec le contrôleur des tables. Dans le cas des procédures de rugosimétrie où la mesure d'altitude est statique, c'est-à-dire quand les tables sont arrêtées (procédures qui sont l'objet des paragraphes 2.2 et 2.3), on fixe  $n$  à sa valeur maximale de 512 mesures. Dans le cas de la procédure de rugosimétrie optique dynamique, où les mesures sont effectuées pendant que la table  $x$  se déplace à vitesse constante, on fixe :  $n = 50$ .

Chacune des 3 procédures de rugosimétrie est programmée en C. Les programmes disposent d'une interface graphique conviviale, qui a été programmée à l'aide de la librairie graphique XForms (sous Linux). L'ergonomie de ces programmes est présentée succinctement sous forme d'appendices, à la fin de ce chapitre.

## 2.2 Validation de la rugosimétrie mécanique

### 2.2.1 Calibration du capteur de déplacement LVDT

On a calibré le capteur pour vérifier son domaine de linéarité et sa fonction de transfert. La calibration est effectuée de la manière suivante. La table à déplacement verticale est translaturée jusqu'à ce que la pointe solidaire de l'équipage mobile du capteur soit en contact avec une surface fixe placée en-dessous, et que l'enfoncement du capteur corresponde à une tension de sortie saturée à  $U = 10 \text{ V}$ , c'est-à-dire soit supérieur à l'enfoncement mesurable maximal. Puis on translate la table à déplacement vers le haut, par pas de 20 microns. Ainsi, l'équipage mobile



(a) Schéma de parcours de la grille de rugosimétrie en configuration pas à pas (rugosimétrie mécanique ou optique pas à pas). Des profils successifs parallèles à  $x$  sont décrits alternativement dans un sens et dans l'autre. Les tables horizontales sont arrêtées pour chaque mesure.

(b) Schéma de parcours de la grille de rugosimétrie en mesure optique par balayage. Les mesures sont effectuées au fur et à mesure du déplacement continu du capteur le long de l'axe  $x$ . Les profils successifs sont décrits dans le même sens.

FIG. 2.5 – Schémas de parcours de la grille de rugosimétrie, selon que la mesure se fait avec un positionnement pas à pas aux nœuds de la grille (a), ou en mode balayage (b). Les disques noirs correspondent à des mesures effectuées alors que le système de positionnement est à l'arrêt ; les cercles noirs à centres blancs à des mesures effectuées au cours du déplacement horizontal du capteur par rapport à la surface.

repose sur la surface, et c'est le corps du capteur qui remonte par rapport à lui. Pour limiter les phénomènes possibles de glissement saccadé, à l'intérieur du capteur ou sur la surface (si sa pente locale est importante), on utilise une lame de verre, du type de celles utilisées en microscopie. La courbe de calibration ainsi obtenue est représentée sur la Fig. 2.6(a). Aux grands enfoncements, la sortie du capteur est saturée :  $U = 10$  V. Pour une gamme d'enfoncements large de 700 microns, l'enfoncement  $e$  dépend linéairement de la tension  $U$  (en V) recueillie à la sortie du capteur, selon la relation

$$e = 35.1 (U - U_0) \quad \text{microns} \quad . \quad (2.3)$$

La tension  $U_0$  est la tension de sortie du capteur quand la pointe est en l'air. Elle est remesurée avant chaque rugosimétrie. Dans la gamme de mesure linéaire, l'écart au comportement linéaire est de l'ordre de 0.01 microns (cf. figure 2.6(b)).

## 2.2.2 Description de la grille — précautions liées à la fragilité de la pointe

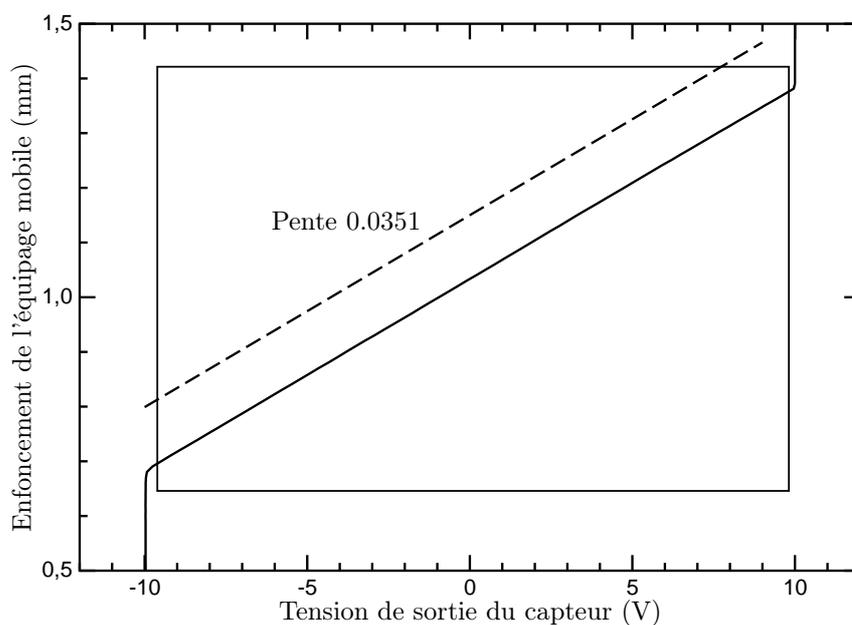
La grille est décrite par profils en  $x$  successifs, qui sont parcourus alternativement dans un sens et dans l'autre (cf. Fig. 2.5(a)), de façon à optimiser le temps de parcours total. Chaque profil est décrit pas à pas, c'est-à-dire avec un arrêt à chaque nœud, puis une mesure.

La précision de la mesure est liée en grande partie à la finesse de la pointe (25 microns de rayon). Pour ne pas endommager celle-ci, le déplacement latéral doit se faire après que la pointe a été relevée d'une distance suffisante, afin qu'elle n'entre pas en contact avec la surface au cours du déplacement horizontal. La remontée nécessite une descente équivalente pour effectuer la mesure au nœud suivant. Ce mouvement vertical aller-et-retour est le principal facteur limitant la vitesse du dispositif. La remontée du système de mesure après chaque contact doit donc être la plus réduite possible.

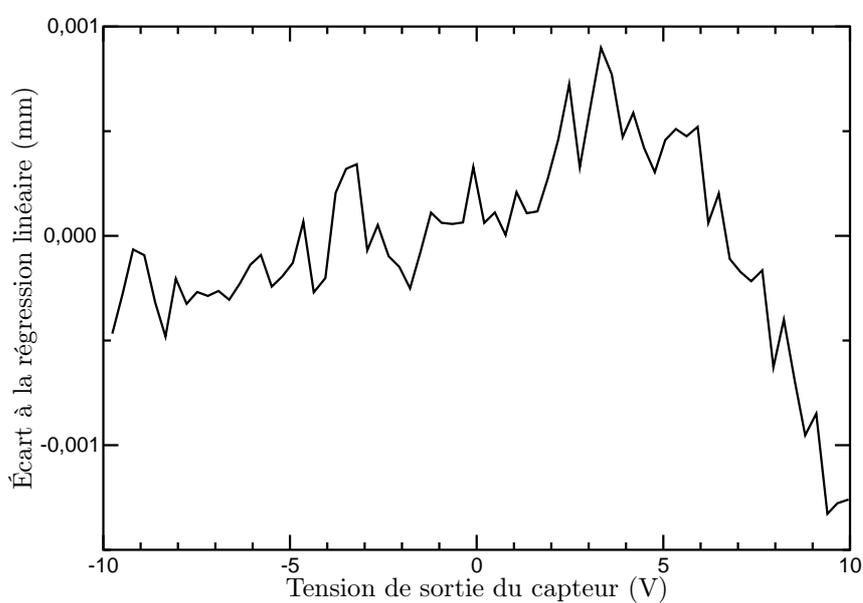
On choisit une distance de remontée  $\Delta z$  proportionnelle au déplacement latéral  $\Delta x$  (ou  $\Delta y$ ) effectué lors du changement de nœud. Le coefficient de proportionnalité est défini par un angle de remontée  $\phi$ , tel que :

$$\Delta z = \Delta x \tan \phi \quad . \quad (2.4)$$

La valeur de cet angle est fixée par l'utilisateur au début de la procédure de rugosimétrie. Elle doit être la plus petite possible (pour limiter l'amplitude du déplacement de la table verticale)



(a) Fonction de transfert du capteur. Les déplacements imposés successivement au capteur par rapport à une surface fixe sont reportés verticalement, les tensions de sortie mesurées sont reportées horizontalement. La fonction de transfert du capteur est linéaire dans une gamme de tensions de sortie comprises entre  $-10$  et  $10$  V, ce qui correspond à une gamme de mesure de  $700$  microns.



(b) Écart au comportement linéaire, dans la gamme de mesure déterminée en (a).

FIG. 2.6 – Courbe de calibration du capteur LVDT. La gamme de mesure fait  $700$  microns. L'écart au comportement linéaire dans cette gamme est inférieur à  $\pm 2/100$  e de micron.

tout en assurant l'intégrité de la pointe. Au cours de la rugosimétrie, la pente locale entre deux points successivement mesurés est calculée continûment, et l'angle  $\psi$  correspondant à la pente maximale mesurée depuis le début de la rugosimétrie est affiché en permanence. Si sa valeur est supérieure à l'angle de remontée que l'on impose, il y a des risques sérieux d'endommagement de la pointe. Pratiquement, on choisit une valeur de l'angle  $\phi$  très proche de  $90^\circ$ , ( $88^\circ$ , par exemple), puis on lance une mesure sur une grille réduite. Puis on ajuste la valeur de  $\phi$  à une valeur légèrement supérieure à la valeur maximale de  $\psi$  mesurée, et on relance la mesure sur la grille complète.

En raison de l'auto-affinité des surfaces étudiées (cf. paragraphe 1.1.3), la pente du segment reliant deux points de la topographie est d'autant plus grande que les positions horizontales de ces points sont proches. Les valeurs de l'angle de remontée choisies dépendent donc du pas de la grille. Plus le pas est petit, plus l'angle de remontée doit être choisi élevé. L'importance de cette dépendance au pas de la grille est également liée à la valeur de l'exposant de Hurst. Pour les surfaces de granite que l'on a étudiées, les valeurs choisies pour  $\phi$  sont par exemple de  $70^\circ$  pour des pas de 700 microns et  $85^\circ$  pour des pas de 40 microns.

### 2.2.3 Estimation des incertitudes

#### Incertitude de la mesure d'altitude

L'incertitude sur la mesure provient des incertitudes sur le positionnement de la table et sur la mesure d'enfoncement du capteur. La position de la table est connue à 0.5 microns près. L'incertitude sur la mesure du LVDT peut provenir de plusieurs causes : bruit électrique, dérive électrique à l'échelle de plusieurs heures, discrétisation du signal analogique par le convertisseur analogique-numérique, etc. Le capteur est alimenté par une alimentation continue  $\pm 12$  V. La sortie de l'alimentation est visualisée en permanence par un multimètre (modèle Keithley 2000). Les fluctuations observées de la tension continue d'alimentation n'ont jamais dépassé 0.05 V, sur parfois plusieurs jours de mesure. Une telle variation de la tension d'alimentation du capteur entraîne une variation de la tension à sa sortie correspondant à quelques  $10^e$  de microns. Un enregistrement sur 10 heures de l'enfoncement mesuré, pointe enfoncée et capteur fonctionnant en régime linéaire, permet d'estimer l'incertitude électrique. Le bruit correspond à quelques  $10^e$  de microns, la dérive est inférieure à 2 microns en valeur absolue. La gamme de tensions de sortie du capteur est de  $\pm 10$  V. La gamme de tensions d'entrée du convertisseur est choisie égale à  $\pm 10$  V, également, ce qui correspond à 700 microns d'enfoncement. Échantillonnée sur 16 bits, c'est-à-dire 65536 valeurs différentes, la limitation de la précision sur l'enfoncement liée à l'échantillonnage est ainsi de 0.01 microns. Ce n'est en aucun cas un facteur limitant la précision du dispositif. On peut finalement estimer que l'incertitude sur la mesure d'altitude est inférieure à 2.5 microns.

La reproductibilité des mesures a été testée en venant lire 2000 fois le même point à la surface d'une lame de verre, avec le capteur mécanique. La mesure a duré 50 min. L'histogramme des valeurs mesurées est présenté sur la Fig. 2.7. Son écart-type est inférieur à 1 micron, et les valeurs extrêmes sont à moins de 2 microns de la valeur moyenne, considérée comme la "bonne" mesure. Ces mesures sont cohérentes avec l'incertitude estimée ci-avant.

#### Incertitude liée au "gondolement" des tables

Parallèlement à la précision de chaque mesure d'altitude, la translation horizontale du système de mesure par rapport au bloc fracturé introduit une source d'incertitude supplémentaire sur les altitudes relatives de différents points d'une même topographie. Ainsi, deux points de

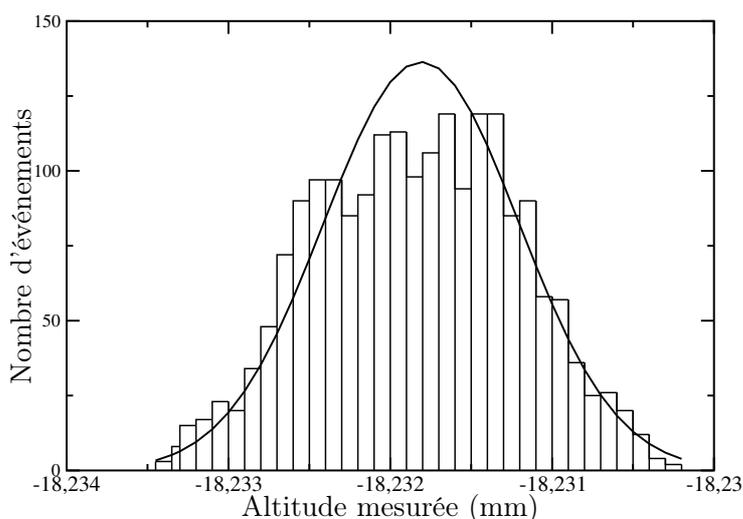


FIG. 2.7 – Histogramme de 2000 valeurs mesurées successivement au même point d’une lame de verre. Les valeurs mesurées extrêmes sont à moins de 2 microns de la valeur moyenne ( $-18.2318$  mm). L’écart-type de l’histogramme vaut 0.6 microns.

même altitude peuvent se trouver mesurés à des altitudes différentes si la translation des tables horizontales a modifié la distance entre le système de mesure et le bloc. C’est le cas par exemple si la trajectoire de la translation du plateau de la table  $x$  n’est pas une droite horizontale. Si c’est une droite non horizontale, on va introduire dans la topographie échantillonnée un pendage qui pourra être calculé et retiré a posteriori. Un défaut de rectitude est plus ennuyeux.

Pour majorer l’incertitude liée à ce “gondollement” des tables, on a enregistré la surface d’une lame de verre, disposée aussi horizontalement que possible. Une telle lame de verre, d’une longueur de 8 cm, a une rugosité d’amplitude submicrométrique (inférieure au  $10^e$  de micron) aux échelles inférieures au  $10^e$  de mm. Des fluctuations micrométriques de la rugosité à ces échelles devraient donc refléter les limitations du dispositif. La topographie de la lame a été échantillonnée avec une maille de  $400 \times 400 \mu\text{m}^2$ . En calculant la régression plane de l’enregistrement, on mesure  $\alpha = 8.8'$ ; la projection de la ligne de plus grand pente sur le plan  $(x, y)$  fait un angle de  $61^\circ$  avec l’axe  $x$ . Si l’on “met à plat” la surface enregistrée en lui soustrayant sa régression plane, on obtient une surface dont le plan moyen est horizontal et d’altitude nulle, et dont les points extrêmes sont situés respectivement à  $-3.0$  et  $2.0$  microns. Cet écart n’est pas représentatif de la rugosité de la lame de verre, mais d’une légère flexion de la lame, qui est visible lorsqu’on trace des profils de la surface dans la direction  $x$  (non montrés ici). Au contraire, la distribution du plus grand écart d’altitude local aux quatre plus proches voisins, représentée à la Fig. 2.8, donne une indication de l’amplitude de la rugosité à une échelle horizontale de 0.4 mm. L’histogramme de cette distribution montre que moins de 0.1 % des valeurs sont supérieures à 1 micron, et plus de 85 % sont inférieures ou égales à 1/2 micron, qui est la précision du dispositif. Par conséquent cette expérience ne permet pas de faire apparaître d’incertitude significative liée à un éventuel gondollement des tables à déplacement.

On en déduit que la somme des incertitudes liées à la mesure d’altitude et à l’éventuel gondollement des tables reste inférieure à 1 micron.

### Performances du dispositif

En faisant la synthèse des tests réalisés sur le dispositif de rugosimétrie mécanique, on peut estimer les limitations de la précision du dispositif. La précision sur le positionnement horizontal est liée à celle de l’encodeur des tables, et peut être considérée submicrométrique. La précision sur la mesure d’altitude verticale est liée à plusieurs facteurs : déformation thermique du bâti

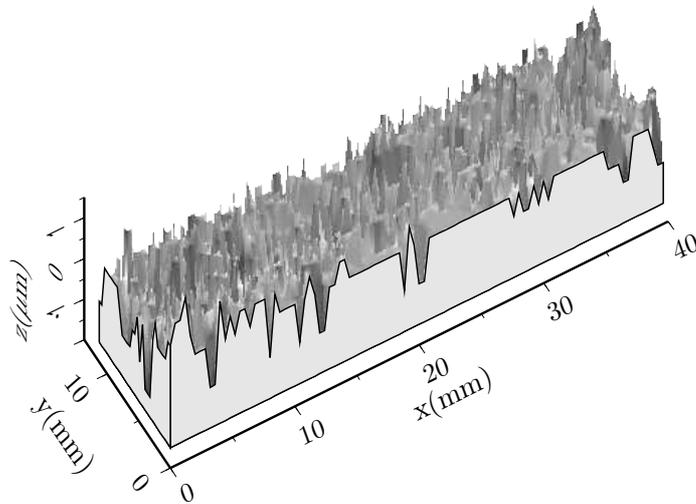


FIG. 2.8 – Distribution des plus grands écarts d'altitude aux 4 plus proches voisins, obtenue à partir de l'enregistrement d'une lame de verre sur une grille  $100 \times 30 \text{ mm}^2$ . La distance entre plus proches voisins est 400 microns.

en aluminium, incertitude sur la mesure du LVDT, gondolement des tables. En toute rigueur, on peut estimer l'incertitude sur les altitudes relatives des différents points d'une topographie à 3 ou 4 microns. Un meilleur contrôle de la température (en plaçant le dispositif dans une salle climatisée), ou l'enregistrement systématique de l'évolution de la température pendant l'expérience, permettraient d'obtenir une résolution micrométrique.

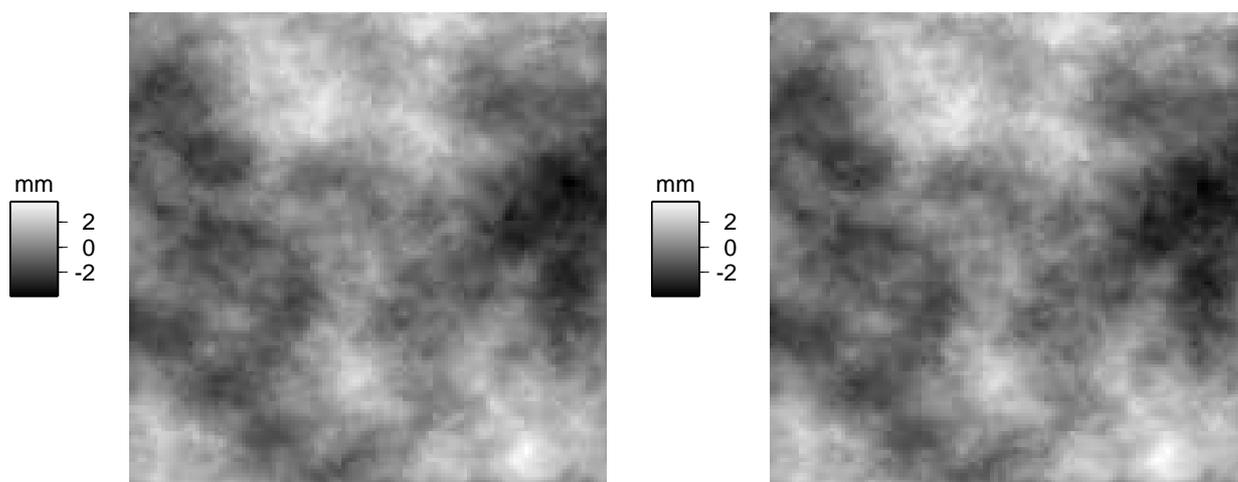
La mesure par palpation de la surface fait du déplacement de la table verticale le facteur limitant le plus la vitesse du dispositif. Le temps de déplacement horizontal entre deux nœuds consécutifs est d'autant plus court que la maille de la grille choisie est petite, mais cette tendance est largement contrebalancée par le fait que le nombre de points à mesurer pour une même surface de grille est proportionnelle à  $n_x \times n_y$ . Les tables horizontales se déplacent à une vitesse-plateau de 19.5312 mm/s. Les phases d'accélération et de décélération s'étalent sur 205 microns. Ces valeurs sont les plus grandes que l'on a pu choisir, étant donnée l'inertie des objets soutenus par les plateaux mobiles des tables. La table verticale se déplace à 11.7187 mm/s, mais ses phases de mouvement non uniforme s'étalent sur moins de 10 microns. La vitesse maximale du système dépend de la maille de la grille, mais, pour des pas de déplacement d'un nœud au suivant inférieurs à 100 microns, c'est le temps nécessaire à la recherche du contact qui prédomine. La vitesse de mesure est alors proche de 1 mesure par s. On présente à la première ligne de la table 2.1 les temps de mesure nécessaires à l'enregistrement de trois grilles "typiques" : une grille de 10 profils parallèles espacés de 4 mm et comprenant 2050 points espacés de 44 microns, une grille carrée de  $130 \times 130$  points et de maille 700 microns, et une grille carrée de  $515 \times 515$  points et de maille 180 microns.

#### 2.2.4 Comparaison de deux enregistrements de la même surface réalisés avec deux machines différentes

On compare ici deux enregistrements de la même surface réalisés à deux ans et demi d'intervalle. Le premier, désigné par la lettre A (**a**ncien rugosimètre), a été effectué avec un rugosimètre à palpeur mécanique plus ancien, monté en 1995, qui fonctionnait selon le même principe, mais utilisait des moteurs pas à pas pour le positionnement, sans encodeur pour vérifier la position atteinte. Le second, désigné par la lettre N(**n**ouveau dispositif), a été effectué avec le dispositif

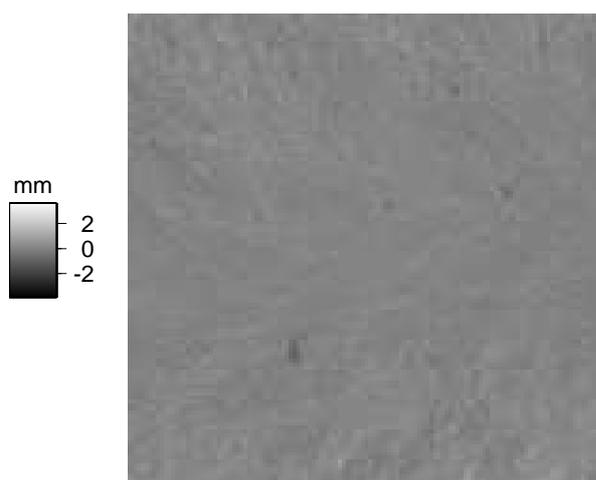
	2050 × 10	130 × 130	515 × 515
Mécanique	7 h	12 h	≥ 9 j
Optique statique	3 h	2 h 50 min	1 j 20 h
Optique dynamique	≤ 10 min	1 h 50 min	7 h

TAB. 2.1 – Temps de mesure sur trois types de grilles différents, pour les trois modes de rugosimétrie. La 1<sup>re</sup> grille est composée de 10 profils de 2050 points, échantillonnés avec  $\Delta x = 44$  microns, et espacés de 4 mm. La 2<sup>e</sup> comporte 130 × 130 points, avec  $\Delta x = \Delta y = 700$  microns. La 3<sup>e</sup> comporte 515 × 515 points, avec  $\Delta x = \Delta y = 180$  microns.



(a) Carte en niveaux de gris de l'enregistrement réalisé avec l'ancien rugosimètre.

(b) Carte en niveaux de gris de l'enregistrement réalisé avec le nouveau rugosimètre mécanique.



(c) Différence des deux cartes précédentes.

FIG. 2.9 – Comparaison de deux enregistrements mécaniques réalisés avec deux machines différentes. On a utilisé une même échelle de niveaux de gris pour les trois cartes.

dont il est question ici. La surface enregistrée est une surface de fracture synthétique obtenue à partir de la fracturation par flexion-quatre points d'un bloc de granit de Lanhélin (Bretagne) de  $10 \times 10 \times 20$  cm.

L'enregistrement N a été réalisé sur une grille de maille carrée de 700 microns, comportant 134 points dans la direction  $x$ , et 130 dans la direction  $y$ . L'enregistrement A a été enregistré sur une grille carrée  $130 \times 130$ , de maille carrée de  $692.5 \mu\text{m}$  de côté. Des cartes des enregistrements de même extension horizontale sont présentées aux figures Fig. 2.9(b) et (a), respectivement. Elles ont été obtenues en recalant les enregistrements sur des grilles aussi proches que possible l'une de l'autre, de la manière suivante :

1. On a d'abord supprimé les plans moyens des topographies, c'est-à-dire leurs interpolations linéaires à deux dimensions. Ceci permet de s'affranchir de la légère différence possible entre les positionnements relatifs de la surface vis-à-vis du rugosimètre dans chacun des dispositifs.
2. L'enregistrement A a été interpolé sur une grille identique à celle utilisé pour l'autre enregistrement.
3. On a calculé la fonction de corrélation croisée  $C(X, Y)$  à deux dimensions des deux surfaces, définie par la relation

$$C(X, Y) = \langle h_N(x + X, y + Y) \cdot h_A(x, y) \rangle_{(x,y)} \quad . \quad (2.5)$$

Si les surfaces ont des topographies similaires, la fonction admet un maximum global très net pour une valeur du couple  $(X, Y)$  correspondant aux coordonnées du vecteur dont il faut translater horizontalement la topographie A par rapport à l'autre pour qu'elles se superposent au mieux. On s'est aperçu que les deux topographies étaient décalées de trois mailles dans la direction  $x$ , soit 2.08 mm, et de 2 mailles dans la direction  $y$  (1.38 mm).

4. Les deux topographies ont ainsi été recalées l'une sur l'autre. On leur a finalement soustrait leur régression plane.

La topographie **s** obtenue en soustrayant les deux topographies résultantes est représentée sur la Fig. 2.9(c), avec la même échelle de gris que pour les cartes des topographies **a** et **n**. L'amplitude de sa rugosité, évaluée comme l'écart-type de ses fluctuations, est 153 microns, alors que les topographies **n** et **a** ont des amplitudes respectives de 1332 et 1288 microns.

Si l'on avait considéré deux enregistrements réalisés avec le même appareil après démontage et remontage du bloc de granite, on observerait également une différence non identiquement nulle des topographies. En effet, la technique de recalage des grilles utilisée ici ne prend pas en compte une éventuelle rotation (légère) entre les deux grilles. D'autre part, le recalage d'une grille par rapport à l'autre se fait au mieux à une maille près. On ne peut ainsi prétendre obtenir un ajustement des points des deux grilles à un même nœud à mieux que l'incertitude moyenne sur les altitudes relatives de deux points de la surface du bloc distants d'un tiers de mm. Cette incertitude est typiquement de l'ordre de la distance horizontale entre les deux points. Compte tenu de ces limitations, la carte **s** indique une adéquation satisfaisante entre les deux enregistrements. La différence d'écart-type observée pourrait être liée à une moins bonne précision de l'ancien rugosimètre, qui ne disposait pas d'encodeurs pour mesurer la position des tables. On imposait un déplacement à l'aide d'un moteur pas à pas. La ressemblance visuelle entre les cartes (a) et (b) est corroborée par l'observation des spectres de Fourier 1D des topographies **a**, **n** et **s** (voir Fig. 2.10). Les modes de grandes longueurs d'onde des deux enregistrements sont identiques. Ils ne deviennent sensiblement différents qu'à des échelles proches de celle de la maille.

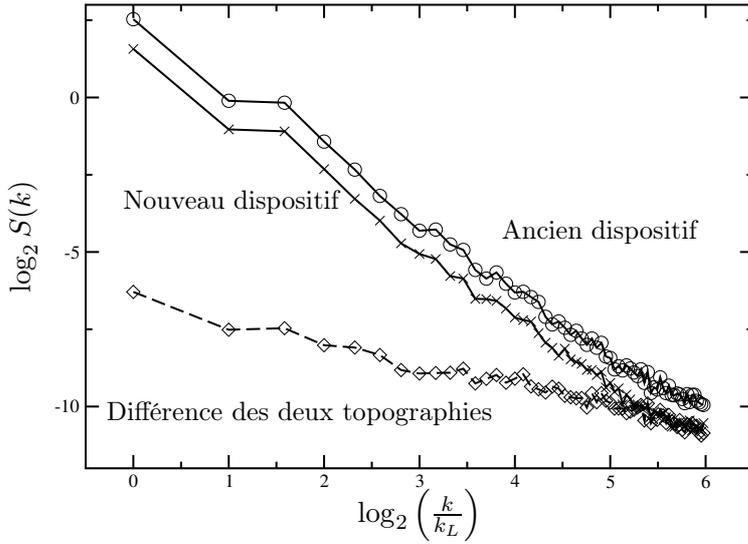


FIG. 2.10 – Spectre de Fourier des cartes présentées à la figure Fig. 2.9(c), et de leur différence. Le spectre de la surface **a** a été translaté de 1 unité vers le haut pour clarifier la figure.

## 2.3 Validation de la rugosimétrie optique statique

Dans la procédure de rugosimétrie statique, chaque mesure d'altitude est réalisée à l'aide du capteur optique alors que le système de mesure est immobile au nœud considéré. Il faut tenir compte d'éventuelles mesures aberrantes liées à la réflectivité locale de la surface.

### 2.3.1 Calibration du capteur optique

Le capteur est alimenté par la même alimentation que le LVDT, mais on la règle pour qu'elle délivre une tension  $\pm 15$  V. La notice du constructeur [*LTS, Laser Twin Sensor*, n.d.] indique pour le capteur un gain de 1 V/mm, une gamme de mesure de 10 mm, et un écart à la linéarité de 1 micron. On a calibré le capteur pour valider ces données. Le dispositif utilisé ressemble à celui qui a permis la calibration du capteur mécanique. Mais la lame de verre a été recouverte de papier calque coloré en noir. Ainsi on dispose d'une surface diffuse mais lisse à l'échelle du micron. Le capteur est éloigné de la surface par pas successifs de 20 microns. La Fig. 2.11 donne un exemple de courbe de calibration. La gamme de linéarité du capteur qui apparaît ici est de l'ordre de 11 mm. La fonction de calibration à appliquer aux valeurs de tension  $U$  (en V) recueillies en sortie du capteur pour disposer d'une mesure en mm de la distance  $D$  entre le capteur et la surface est de la forme

$$D = -0.9994(U - U_0) \quad . \quad (2.6)$$

$U_0$  est une constante arbitraire qui est choisie en pratique de façon à centrer la gamme de distances  $D$  mesurées en régime linéaire autour de la valeur 0 mm. Le facteur de proportionnalité est en bon accord avec le rapport 1 mm pour 1V fourni par le constructeur.

### 2.3.2 Utilisation de la table en $z$

Une limitation importante du capteur optique est sa gamme de linéarité de 11 mm. Les points situés dans la bonne gamme de distances par rapport au capteur sont mesurés correctement, sinon ils sont lus en sortie saturée et peuvent être détectés comme des mesures erronées. L'utilisation de la table en  $z$  permet de recalibrer le capteur dans sa gamme de mesure linéaire au fur et à mesure de la rugosimétrie, dans le cas où l'amplitude totale de la topographie enregistrée serait

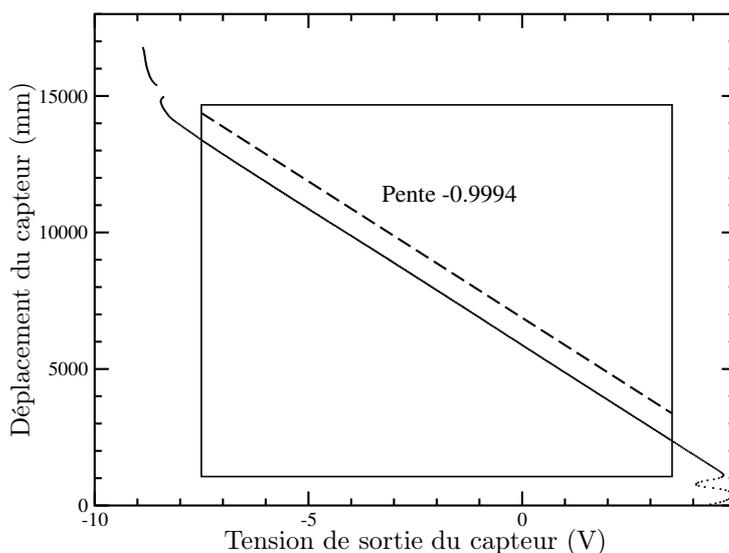


FIG. 2.11 – Courbe de calibration du capteur optique. Les déplacements imposés successivement au capteur par rapport à une surface fixe sont reportés verticalement, les tensions de sortie du capteur sont reportées horizontalement. La fonction de transfert du capteur est linéaire dans une gamme de tensions de sortie comprises entre  $-7.5$  et  $3.5$  V.

plus importante que celle de la gamme de mesure. Il arrive également qu'une distance comprise dans la gamme de mesure linéaire soit mal lue du fait d'un problème local de diffusivité de la surface. Dans ce cas la mesure est reconnue par le capteur comme erronée. Une telle mesure est également placée au nombre des mesures aberrantes.

Avant le début de la rugosimétrie, la table est positionnée verticalement de façon à ce que la première mesure soit au milieu de sa gamme de lecture linéaire. L'altitude de la table à déplacement verticale est alors définie comme altitude de référence :  $h_t = 0$ . La gamme de réponse linéaire est divisée en trois segments : une gamme de mesure de 9 mm, qui correspond à la gamme de mesure, et deux gammes "tampons" de part et d'autre, de 1 mm. Tant que la valeur mesurée est dans la gamme de mesure, la position de la table à déplacement verticale ne change pas. Si la valeur mesurée est hors de la gamme de mesure linéaire, la mesure est notée aberrante, et l'on passe au nœud suivant. Si la valeur mesurée est dans une des deux gammes tampons, la mesure est correcte, mais on recadre le capteur au milieu de sa gamme en translatant la table verticale de 4.5 mm dans la bonne direction. On relit alors l'altitude. Si la valeur mesurée est différente de la précédente de plus de 20 microns, on revient à la position de départ ; la mesure est déclarée aberrante. Sinon, la mesure est acceptée : le recadrage de la gamme de mesure est significatif. Il peut en résulter un décalage systématique du reste de l'enregistrement de 10 à 20 microns. Les coordonnées des nœuds où se produit la translation verticale du capteur sont enregistrées, ainsi que le décalage éventuel qui en résulte pour les mesures. Lequel peut ainsi être corrigé a posteriori.

Un tel recalage vertical du capteur est théoriquement nécessaire pour l'enregistrement d'une topographie dont l'amplitude est supérieure à 9 mm. Pour les blocs que l'on a étudiés, dont l'extension verticale ne dépassait pas 7 mm, un positionnement méticuleux du capteur par rapport à la surface avant l'enregistrement a permis d'éviter la translation du capteur au cours de la mesure.

### 2.3.3 Changement de nœud – cinématique du positionnement précis

On s'est aperçu que si l'on interroge la position horizontale des tables directement après que le contrôle des tables a renvoyé l'indication de fin de positionnement, la position lue ne correspond pas exactement à la position définie dans la grille "théorique" qui a été requise. En

mesurant la topographie d'une surface avec une grille dont la maille est inférieure à 50 microns, on constate une erreur de positionnement pouvant aller jusqu'à 10 microns. Cette erreur est significative, et la non-régularité de la grille de mesure est préjudiciable aux analyses que l'on pourra faire en approximant cette grille à la grille requise.

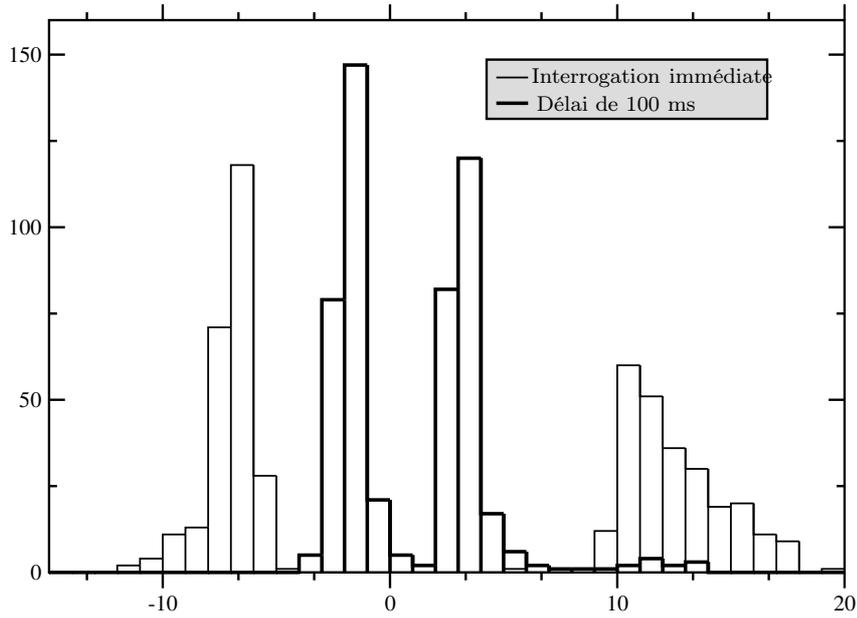
On a réalisé des tests pour connaître l'origine de cette erreur de positionnement. Il apparaît que si l'on interroge la position de la table 1/2 s après que le contrôleur des tables à déplacement a annoncé la fin du positionnement, on mesure une position qui est bien celle qu'on avait demandée. Donc le contrôleur annonce la fin du positionnement avant qu'il soit vraiment réalisé. Il se produit en fait des oscillations amorties du système autour de la position à atteindre, de faible amplitude, avant l'arrêt définitif à la bonne position. Pour pallier ce défaut de l'appareillage et être sûr d'effectuer la mesure optique d'altitude après l'arrêt total de la table à la bonne position, on peut soit imposer un délai entre l'annonce par le contrôleur des tables de la fin du positionnement et la lecture de la position, soit relancer immédiatement un positionnement vers la même position-cible, et ce autant de fois qu'il le faut pour mesurer la bonne position.

On a cherché à savoir comment l'erreur sur le positionnement dépendait du délai imposé (Fig. 2.12). On a effectué 500 positionnements successifs dans les deux directions, par pas variant entre 40 et 200 microns. L'écart entre la position mesurée et la position demandée a été mesuré pour différents délais entre l'annonce par le contrôleur de l'arrêt de la table et la lecture de la position. La valeur moyenne et (surtout) l'écart-type de ces histogrammes sont très sensibles à l'amplitude du déplacement imposé, avec une majoration de la dispersion des erreurs pour des pas de déplacements proches de 40 microns. La Fig. 2.12(a) montrent qu'un délai de 100 ms ramène l'erreur de positionnement à moins de 5 microns.

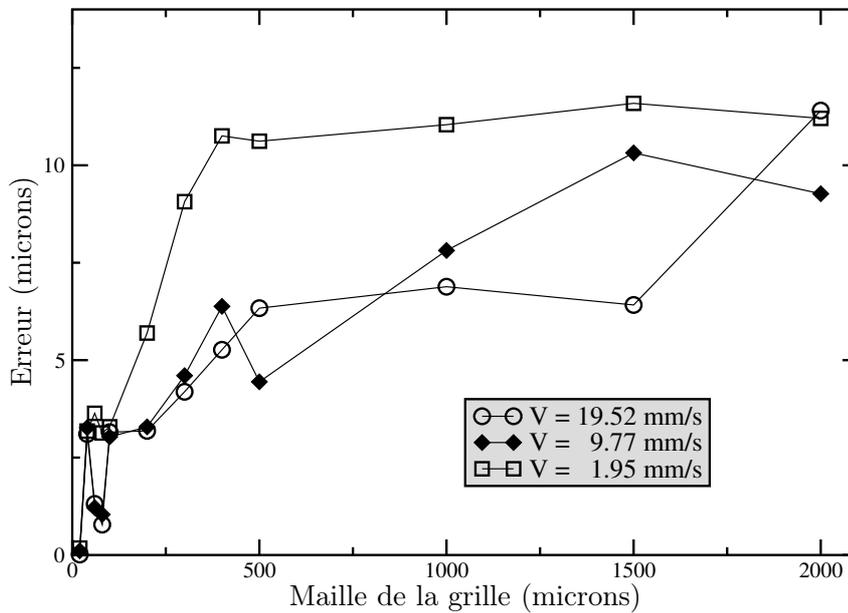
La précision requise sur le positionnement horizontal dépend de la maille de la grille d'enregistrement. Pour des pas inférieurs à 50 microns par exemple, on peut désirer une précision micrométrique sur le positionnement horizontal. Dans ce cas, effectuer autant de repositionnements successifs (deux ou trois en général) que nécessaire pour obtenir la précision désirée est plus rapide que d'attendre 500 ms après l'annonce de fin de premier positionnement. Si par contre la maille choisie est de l'ordre de quelques  $10^e$  de mm, un positionnement horizontal à 5 microns près sera suffisant. Le programme de rugosimétrie optique pas à pas permet de choisir, en fonction de la maille choisie et de la précision requise sur le positionnement horizontal, l'une de ces deux options : un seul positionnement suivi d'un délai de 200 ms avant la mesure, ou bien autant de repositionnements successifs qu'il faut pour obtenir une précision donnée. Si la deuxième option est choisie en imposant une précision supérieure à 5 microns, elle est en générale équivalente à la première. En conséquence, la vitesse du dispositif varie entre une et trois mesures par seconde, pour des mailles de grille entre 40 et 200 microns. La 2<sup>e</sup> ligne de la table 2.1 présente les durées de mesure observées en rugosimétrie optique statique pour trois grilles "typiques". Par rapport à la rugosimétrie mécanique, le gain de temps est considérable ; la rugosimétrie optique statique est de 2 à 5 fois plus rapide que la rugosimétrie mécanique, pour une même grille.

### 2.3.4 Prise en considération des points aberrants

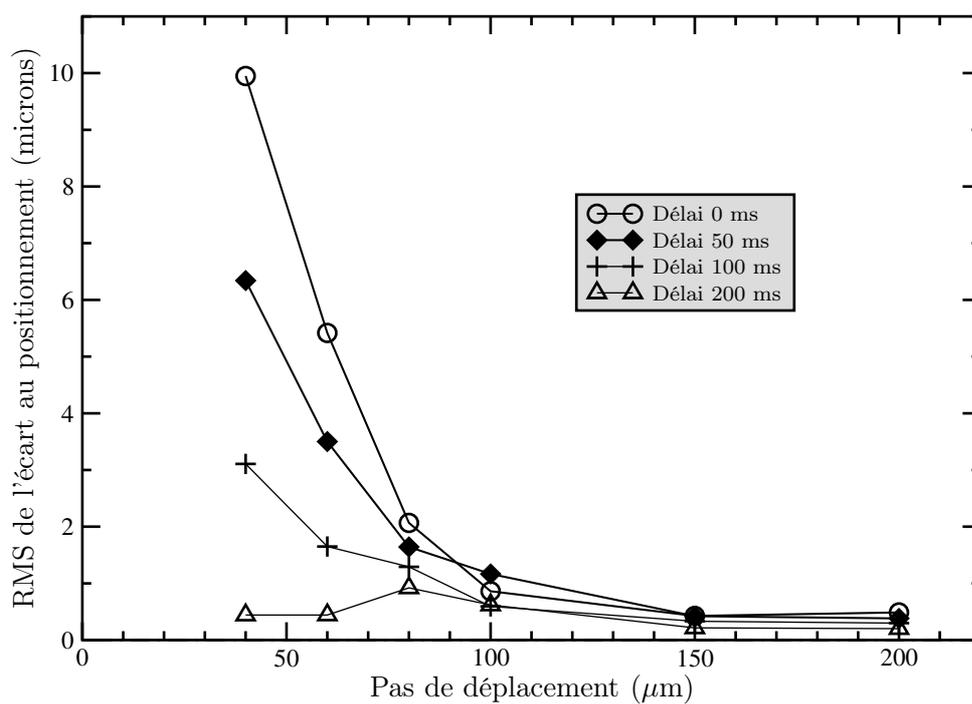
On obtient en fin de procédure une carte où les hauteurs à un petit nombre de nœuds connus, d'ordre de quelques %, sont inconnues (les mesures aberrantes). La mesure optique présente ainsi l'inconvénient d'être une mesure "à trous". Les valeurs inconnues sont réinterpolées bilinéairement à partir des mesures voisines. L'interpolation ne change pas les propriétés statistiques de la surface, pourvu qu'elle concerne un petit nombre de points, disposés de façon suffisamment clairsemée au sein de la grille. Cependant, les points aberrants peuvent poser des problèmes s'ils sont regroupés en amas de taille trop importante. L'interpolation linéaire revient alors à



(a) L'histogramme en traits fins est l'écart entre la position mesurée après que le contrôleur a annoncé la fin du positionnement et la position requise (trait fin). Si l'on mesure cet écart en imposant un délai de 100 ms avant de lire la position, on obtient l'histogramme en traits épais. Pour chacun des histogrammes, on a effectué 500 repositionnements successifs.



(b) Valeur moyenne de l'erreur au positionnement lu, en fonction du pas de déplacement, pour différents délais entre l'annonce par le contrôleur de l'arrêt de la table et la lecture de la position. La ligne horizontale correspond à un écart au positionnement nul.



(c) Dispersion de l'écart au positionnement lu, en fonction du pas de déplacement, pour différents délais entre l'annonce par le contrôleur de l'arrêt de la table et la lecture de la position.

FIG. 2.12 – L'erreur de positionnement est très sensible à l'amplitude du déplacement requis. Un délai de 200 ms suffit à obtenir une précision à 5 microns près, quelle que soit la maille de la grille. Pour des pas de moins de 80 microns, si l'on veut un positionnement au micron près, il faut requérir un 2<sup>e</sup> positionnement consécutif.

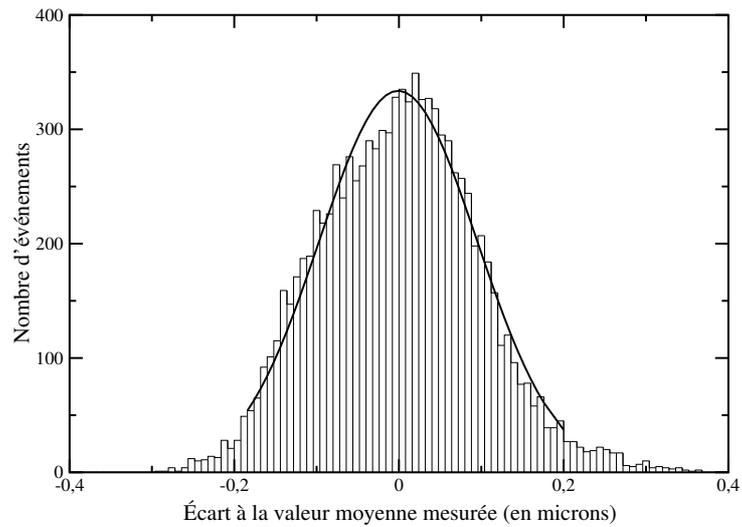


FIG. 2.13 – Histogramme de 10000 mesures effectuées avec le capteur optique sur le même point d'un moule en silicone de surface de granite. L'écart-type est inférieur à 0.1 microns.

reconstruire artificiellement à certains endroits de la topographie des portions de surface qui ne sont pas auto-affines et peuvent fausser les analyses auto-affines effectuées sur l'ensemble de la topographie. Les mesures aberrantes sont liées en général à une trop faible diffusivité des surfaces. Comme on l'a exposé au paragraphe 2.1.3, une surface localement trop lisse renverra le faisceau laser de manière purement spéculaire, et ne permettra pas au capteur de fonctionner correctement. Les lames de mica que l'on trouve sur les surfaces de fracture granitiques fraîches en sont un bon exemple. Elles se fracturent par clivage, de sorte que la surface correspondant à la lame est lisse jusqu'à l'échelle nanométrique. La réflexion de la lumière y est parfaitement spéculaire, comme sur un miroir. Ainsi, chaque lame de mica fait apparaître un amas de mesures aberrantes. La partie 2.5 présente une technique de moulage en résine silicone qui permet de s'affranchir de ce problème.

### 2.3.5 Reproductibilité de la mesure optique

En raison de sa dépendance aux propriétés optiques des surfaces, la mesure optique est sujette à caution. On a d'abord testé la reproductibilité de la mesure statique, en effectuant 10000 mesures consécutives de l'altitude du même point d'une surface en silicone. L'histogramme, présenté à la figure 2.13, montre une dispersion très inférieure au micron. On a ensuite testé la reproductibilité de la mesure sur une grille entière en enregistrant deux fois de suite la même topographie, sur la même grille, et sans démonter la surface étudiée entre les deux essais. A priori, les deux topographies mesurées devraient être identiques. En pratique, les enregistrements ont été réalisés avec un positionnement simple lors du changement de nœud, de sorte qu'une incertitude de 5 microns existe sur la position horizontale du point relevé. L'influence de cette incertitude sur la reproductibilité de la mesure devrait être sensible aux très petites longueurs d'onde uniquement. La surface enregistrée est un moule silicone de la surface dont les enregistrements sont étudiés à la Fig. 2.9. Les cartes des deux topographies et leur différence sont présentées aux Fig. 2.14(a) et (b), leur différence à la Fig. 2.14(c). La distribution des différences de hauteurs est inférieure à 10 microns pour 97 % des points mesurés. La statistique de cette surface de non-reproductibilité apparaît gaussienne (Fig. 2.14(d)), avec un écart-type de 6 microns, ce qui est qualitativement et quantitativement cohérent avec l'hypothèse de distribution aléatoire des écarts à la position horizontale. L'étude des spectres de Fourier montre que les modes de Fourier de la différence des deux topographies sont négligeables par rapport à ceux des deux enregistrements, même aux

plus petites longueurs d'onde.

En toute rigueur, en ce qui concerne l'enregistrement d'un moule de surface, qui ne donne lieu à aucune mesure "aberrante", on peut prétendre à une reproductibilité de la mesure à moins de 10 microns près.

## 2.4 Validation de la rugosimétrie optique dynamique

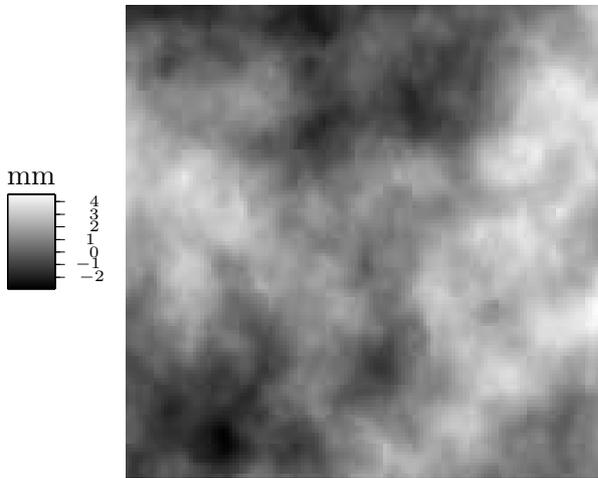
Cette procédure consiste en l'enregistrement successif de profils parallèles à  $x$ , qui sont parcourus continûment, sans arrêt des tables horizontales, à la vitesse 4 mm/s. Les mesures d'altitude sont réalisées pendant le déplacement de la table en  $x$ , à l'aide du même capteur laser que dans la procédure de rugosimétrie optique pas à pas. L'intérêt d'une telle méthode réside dans un gain de vitesse substantiel par rapport à la procédure où la table s'arrête pour permettre la mesure. L'incertitude de mesure liée aux effets thermiques ou de dérive électrique des capteurs en est réduite d'autant.

### 2.4.1 Tests de la cinématique du déplacement

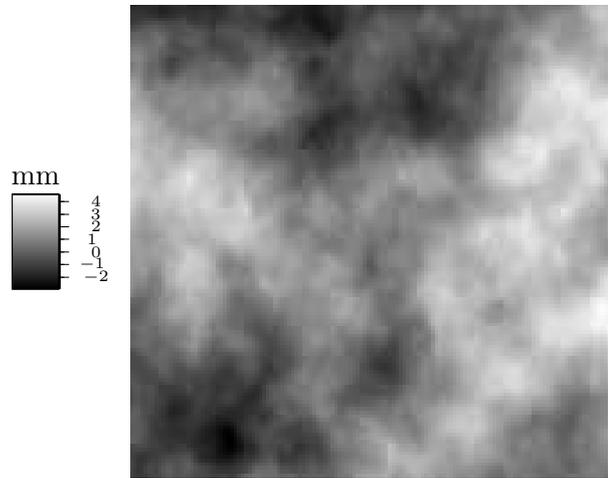
La difficulté de la procédure tient dans la synchronisation des mesures d'altitude pour les faire coïncider avec la grille définie. La délai d'interrogation de la table est trop long pour que l'encodeur puisse être utilisé pour suivre la progression de la table. Il faut déclencher "en aveugle", en se fondant sur une base de temps dont le lien avec la position de la table le long de l'axe  $x$  est bien connu.

On a cherché en premier lieu à calibrer la base de temps, en vérifiant qu'elle est conforme à ce qui est indiqué dans la notice du contrôleur des tables à déplacements. Pour ce faire, on utilise le dispositif représenté sur la Fig. 2.15. Le capteur optique est monté sur la table horizontale. Il éclaire une surface d'aluminium qui lui est approximativement perpendiculaire. La table effectue un parcours de 500 microns par pas de 20 microns, pour calibrer la distance du capteur à la surface en fonction du déplacement de la table. Ceci permet de prendre en compte la rugosité de la surface d'aluminium. Puis le déplacement est effectué d'un seul trait. La distance mesurée par le capteur est enregistrée continûment pendant ce balayage en même temps que les temps de mesure, et convertie à l'aide de la courbe de calibration 2.11 en position de la table. On obtient ainsi un échantillonnage de la position de la table en fonction du temps.

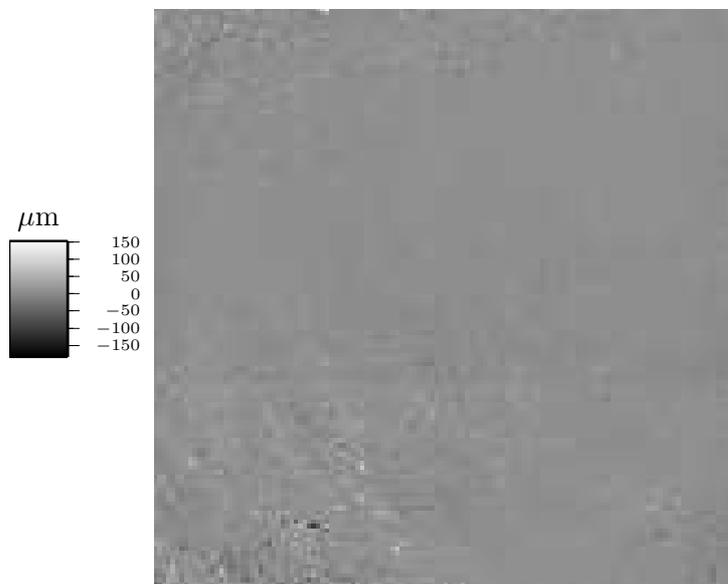
La Fig. 2.16 présente les résultats obtenus pour une vitesse de déplacement de 10 mm/s. De l'échantillonnage de la trajectoire de la table, on extrait l'évolution de la vitesse de la table en fonction du temps. On compare cette courbe au profil théorique des vitesses (Fig. 2.16(a)). On constate que la fin de la rampe montante de vitesse donne lieu à des oscillations autour de la valeur du plateau qui s'atténuent ensuite. La vitesse est bien stabilisée 100 ms après le début du positionnement. Le profil théorique peut-être intégré pour obtenir la position théorique de la table en fonction du temps. L'écart entre la position mesurée et ce profil théorique est présenté à la Fig. 2.16(b). Après que la table s'est stabilisée en vitesse, l'écart à la position théorique reste inférieur à 3 microns, et ce jusqu'à l'initiation de la rampe de vitesse descendante. On en conclut qu'il est possible d'enregistrer des points équidistants le long du profil, à condition de déclencher l'enregistrement au moins 200 ms après le démarrage de la table, et de le terminer avant le début de la phase de freinage.



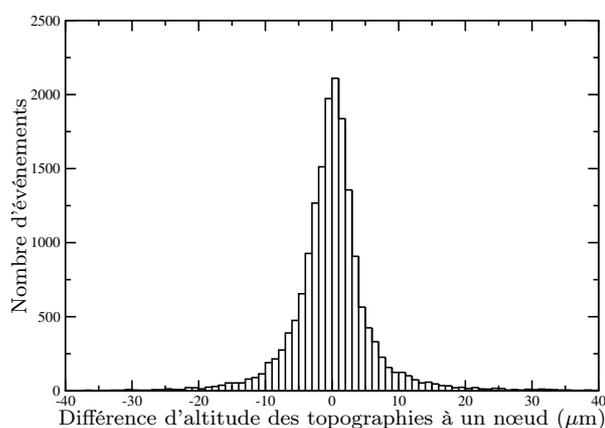
(a) Carte en niveaux de gris d'un enregistrement d'une surface de granite, réalisé par rugosimétrie optique pas à pas. La surface étudiée est un moulage en silicone de la surface présentée à la Fig. 2.14(b).



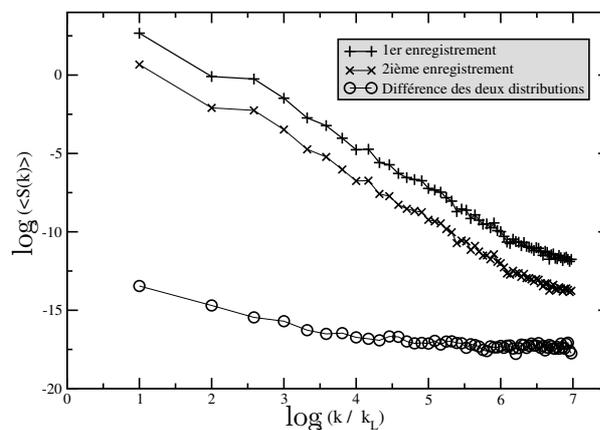
(b) Carte en niveaux de gris d'un deuxième enregistrement de la même surface qu'au (a), réalisé deux jours plus tard.



(c) Carte de la différence nœud à nœud des distributions présentées en (a) et (b).



(d) Histogramme de la distribution présentée au (c). Plus de 97 % des valeurs sont inférieures à 10  $\mu\text{m}$  en valeur absolue.



(e) Moyenne des spectres de Fourier des profils selon  $x$  des surfaces représentées en (a), (b) et (c) ( respectivement). Le spectre du second enregistrement a été translaté verticalement de 2 unités, pour clarifier la figure.

FIG. 2.14 – Comparaison de deux enregistrements de la même surface, réalisés consécutivement en rugosimétrie optique pas à pas.

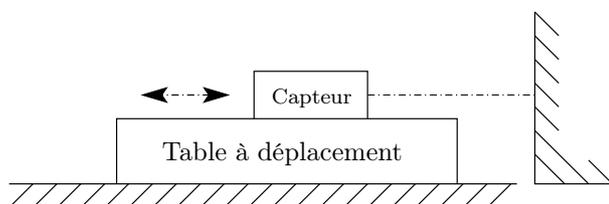
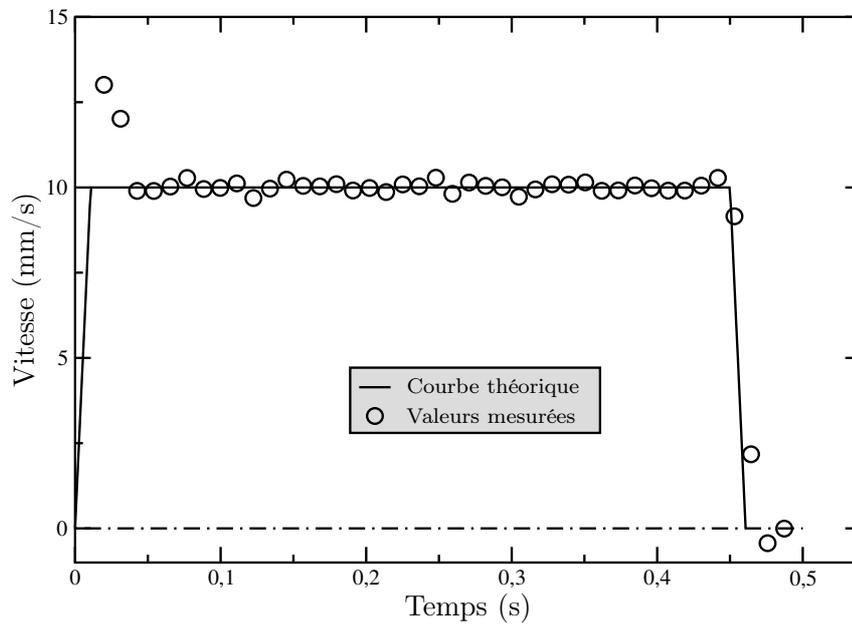
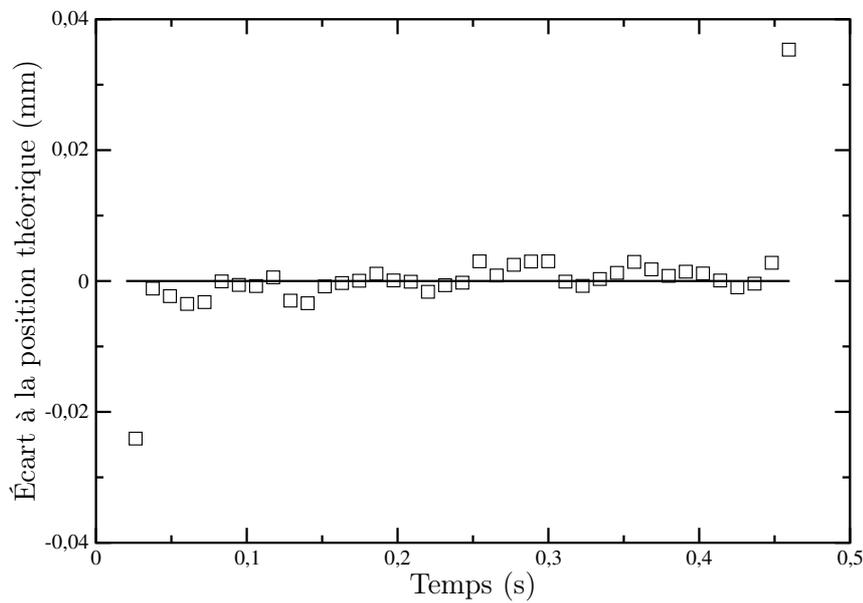


FIG. 2.15 – Schéma du dispositif de test de la cinématique des tables à déplacement. Le capteur optique est en position horizontale, solidaire d'une table. La mesure de la distance du capteur au support en aluminium fournit la position de la table au cours du temps.



(a) La courbe d'évolution des vitesses enregistrée diffère peu de la courbe théorique, sauf juste après les phases d'accélération et de décélération



(b) L'écart à la position théorique reste inférieur à 3 microns pendant la phase de déplacement uniforme, mais il faut attendre 100 ms pour que la vitesse se stabilise.

FIG. 2.16 – Comparaison du mouvement de la table et du mouvement théorique présenté par le constructeur.

### 2.4.2 Définition de la vitesse de déplacement – ajustement de l’intervalle entre deux mesures

Chaque mesure est la moyenne des hauteurs des points balayés pendant le temps de mesure. Cette moyenne se fait sur au plus 512 lectures de la tension de sortie du capteur, à 100000 Hz, le temps de mesure est toujours inférieur à 5.12 ms. Il faut lui rajouter le temps d’échange des valeurs entre la carte et l’ordinateur, qui effectue la moyenne et en déduit une unique valeur pour la mesure. Le temps de transfert des données est de l’ordre de 8 ms. En moyennant sur 50 valeurs, le temps nécessaire à une mesure de hauteur et à l’échange des lectures correspondantes est  $\delta t_{\text{mes}} \simeq 13$  ms.

Le choix de la vitesse du balayage est conditionné par deux critères :

- L’intervalle de temps  $\delta t$  est incompressible, donc la distance horizontale minimale entre deux points enregistrés est limitée par la vitesse de déplacement de la table.
- Il importe que la distance balayée pendant une mesure soit petite par rapport à la largeur du faisceau (30 microns).

On voudrait pouvoir enregistrer des grilles de maille aussi petite que 40 microns. Le premier critère impose une vitesse de déplacement inférieure à 4 mm/s. C’est la valeur que l’on a retenue. La distance balayée par le faisceau pendant une mesure est alors inférieure à 20 microns, ce que l’on a jugé acceptable.

L’enregistrement d’un profil se fait de la manière suivante. Le capteur est initialement positionné à la verticale du point que l’on a choisi comme origine de la grille. Le profil à enregistrer a une projection horizontale de longueur égale à  $l_{\text{prof}} = (n_x - 1) \Delta x$ . Cette distance doit être parcourue à vitesse constante. On déplace le capteur de 1 mm dans le sens négatif, et on déclenche un positionnement dans le sens positif, d’une longueur  $1 \text{ mm} + l_{\text{prof}} + 2 \text{ mm}$ . Ainsi, la vitesse du capteur est stabilisée lorsqu’il parvient à la verticale du premier point à enregistrer, et le reste pendant tout l’enregistrement. On calibre le délai entre le début du positionnement et la première lecture du capteur de façon à effectuer la première mesure aussi près que possible de l’origine “théorique” de la grille. On impose un intervalle de temps  $\Delta t = \Delta x/v$  entre deux mesures, de façon à imposer la bonne longueur  $\Delta x$  entre deux points de la grille enregistrée. Plus précisément, le déclenchement des mesures se fait à chaque fois que le temps écoulé depuis la première mesure devient supérieur à  $p \Delta t$ , où  $p$  est un entier qui est incrémenté de 1 après chaque mesure. Ainsi, l’incertitude sur chaque déclenchement, qui est liée à la rapidité d’interrogation de la base de temps de l’ordinateur, n’est pas cumulée.

La vitesse d’enregistrement d’un profil ne dépend pas du nombre de points échantillonnés sur le profil en question. Le temps d’enregistrement d’une grille donnée est ainsi proportionnel au nombre de points dans la direction  $y$ . Le gain de temps par rapport à la rugosimétrie statique est conséquent lorsqu’il s’agit d’enregistrer des profils finement enregistrés ou un nombre important de profils. L’enregistrement sur une grille carrée fine d’une carte en trois dimensions de la topographie réunit ces deux conditions ; c’est donc sur ce type d’enregistrement que le gain de temps sera le plus substantiel. La 3<sup>e</sup> ligne de la table 2.1 présente les durées des mesures pour trois grilles typiques.

### 2.4.3 Positionnement des profils dans la direction $x$

Il existe une incertitude irréductible sur l’alignement du premier point enregistré le long d’un profil. Elle est liée aux fluctuations du temps entre l’envoi par l’ordinateur de la commande de déclenchement du balayage et le passage à la position théorique du premier point de mesure. L’incertitude est de l’ordre de 10 ms, ce qui correspond à 40 microns. Ainsi, pour une maille

suffisamment petite, les profils peuvent être décalés d'au moins une maille complète.

### Une technique de recalage de deux profils

On peut comparer deux enregistrements  $h_1$  et  $h_2$  effectués le long d'un même profil en utilisant la fonction de corrélation des deux profils. On cherche à retrouver le décalage des deux grilles d'enregistrements pour les recaler l'un par rapport à l'autre et pouvoir les comparer noëud à noëud. Ce recalage est global, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une translation en bloc de l'enregistrement, sans tenir compte des variations du pas d'enregistrement, liées aux variations de vitesse de la taille. On ne peut pas s'affranchir de ces variations du pas, mais on a vu qu'elles sont inférieures à 3 microns.

La technique de calcul du décalage des grilles consiste en premier lieu à déterminer la partie entière (en unité de maille) du décalage (étapes 1, 2, 3 et 4 ci-dessous), puis sa partie fractionnaire (étapes 5 et 6) :

1. On calcule les transformées de Fourier  $\tilde{h}_1$  et  $\tilde{h}_2$  des deux profils. Le calcul est effectué sur le plus grand échantillon de  $2^p$  points que l'on peut obtenir à partir des données. On utilise la transformée de Fourier rapide. On soustrait préalablement à chaque profil la droite reliant ses deux extrémités, de façon à le périodiser.
2. On calcule la fonction de corrélation des deux profils,  $C(d)$ , en inversant sa transformée de Fourier, qui est définie par la relation

$$\tilde{C}(k) = \tilde{h}_1^*(k) \tilde{h}(k) \quad , \quad (2.7)$$

où le symbole \* désigne la conjugaison complexe. La courbe  $C(d)$  admet un maximum très net pour une valeur de la variable  $d$  correspondant à la distance dont il faut translater le profil numéro 2 pour le superposer au profil numéro 1.

3. On dispose d'un échantillon de la fonction  $C(d)$  aux points  $d_k$ . Notons  $k_{\max}$  l'indice du point où l'échantillon de la fonction  $C(d)$  est maximal. On interpole la fonction  $C$  au voisinage de  $d_{k_{\max}}$  par la parabole (unique) passant par les points  $d_{k_{\max}-1}$ ,  $d_{k_{\max}}$  et  $d_{k_{\max}+1}$ . L'abscisse du maximum de la fonction  $C(d)$  est estimée en première approximation comme l'abscisse  $d_{\max}$  du maximum de la parabole.
4. La partie entière du décalage entre les deux enregistrements est la partie entière  $D$  de  $d_{\max}$ . On extrait de la distribution initiale  $h_1$  un sous-échantillon de même point milieu et de longueur moitié. On extrait de même de la distribution  $h_2$  un sous-échantillon de longueur moitié et de centre décalé de  $D$ . Les deux distributions  $h_1^{(0)}$  et  $h_2^{(0)}$  ainsi obtenues sont décalées l'une par rapport à l'autre de moins d'une maille.
5. On détermine la partie fractionnaire du décalage entre les enregistrements  $h_1$  et  $h_2$  comme le décalage entre les profils sous-échantillonnés  $h_1^{(0)}$  et  $h_2^{(0)}$ . Lequel décalage est calculé par le processus itératif dont la  $k^{\text{e}}$  itération se compose des opérations suivantes :
  - (a) Les distributions  $h_1^{(k-1)}$  et  $h_2^{(k-1)}$  sont soumises aux opérations 1, 2 et 3 exposées plus haut. On obtient une valeur  $d_{\max}^{(k-1)}$  pour le décalage.
  - (b) Le profil  $h_2^{(k-1)}$  est recalé horizontalement de  $-d_{\max}^{(k-1)}$ , dans l'espace de Fourier. Le profil recalé,  $h_2^{(k)}$ , servira à l'itération suivante.
  - (c) Si la valeur de  $d_{\max}^{(k-1)}$  est supérieure à  $10^{-4}$  unités de maille, on itère le procédé (retour en (a)).

6. Le processus converge si la suite  $d_{\max}^{(k)}$  tend vers 0. Lorsqu'il est efficace, le nombre d'itérations nécessaires ne dépasse pas 4 ou 5. L'estimation du décalage entre les profils sous-échantillonnés  $h_1^{(0)}$  et  $h_2^{(0)}$  est alors la somme de la série  $\sum_j x_{\max}^{(j)}$ . Elle doit être inférieure à 1, sans quoi la détermination préalable de la partie entière du décalage n'a pas de sens. Le décalage total entre les enregistrements  $h_1$  et  $h_2$  vaut alors

$$d = D + \sum_j d_{\max}^{(j)} \quad . \quad (2.8)$$

7. On recale la distribution initiale  $h_2$  par rapport à  $h_1$  en Fourier de la distance  $d$ .

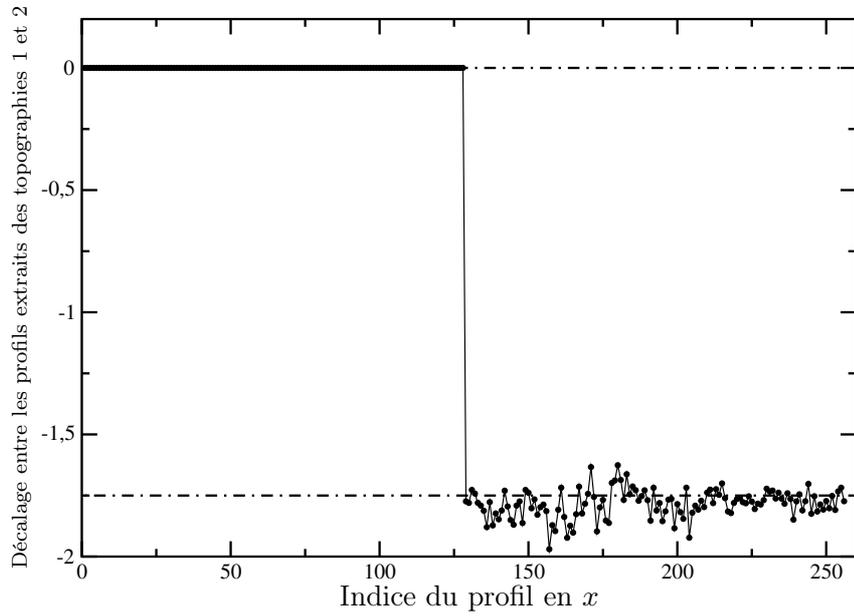
La technique a été testée à partir d'une topographie générée numériquement sur une grille  $2048 \times 2048$ , avec un exposant de rugosité de 0.7. On a simulé l'enregistrement de deux échantillons de la topographie sur des grilles  $256 \times 256$ . Le premier, noté 1, est obtenu à partir d'une sous-grille carrée correspondant aux nœuds  $(1+4i; 513+4j)$  pour  $(i; j) \in \{0; \dots 255\} \times \{0; \dots 255\}$ . Le second enregistrement est obtenu à partir d'une sous-grille carrée correspondant aux indices  $(1 + 4i; 513 + 4j)$  pour  $(i; j) \in \{0; \dots 255\} \times \{0; \dots 127\}$  et  $(8 + 4i; 513 + 4j)$  pour  $(i; j) \in \{0; \dots 255\} \times \{128; \dots 255\}$ . L'échantillon correspondant est noté 2. Les topographies correspondant aux échantillons 1 et 2 sont identiques en ce qui concerne les profils selon  $x$  d'indices inférieurs à 128. Leurs profils d'indices supérieurs sont décalés de  $7/4 = 1.75$  unités de maille. Sur ces profils, aucun point de mesure n'est commun aux deux distributions. La méthode de recalage va-t-elle permettre de retrouver le décalage, à une précision inférieure à la maille d'enregistrement? Les 128 premiers profils servent de référence. La méthode devrait trouver un décalage parfaitement nul sur ces profils. Les résultats du test sont présentés à la Fig. 2.17. Le décalage nul est estimé correctement. Le décalage  $-1.75$  est estimé avec une précision de  $1/10$  de maille, un résultat qui nous a paru satisfaisant.

### Comparaison de deux profils enregistrés de manière statique et de manière mécanique

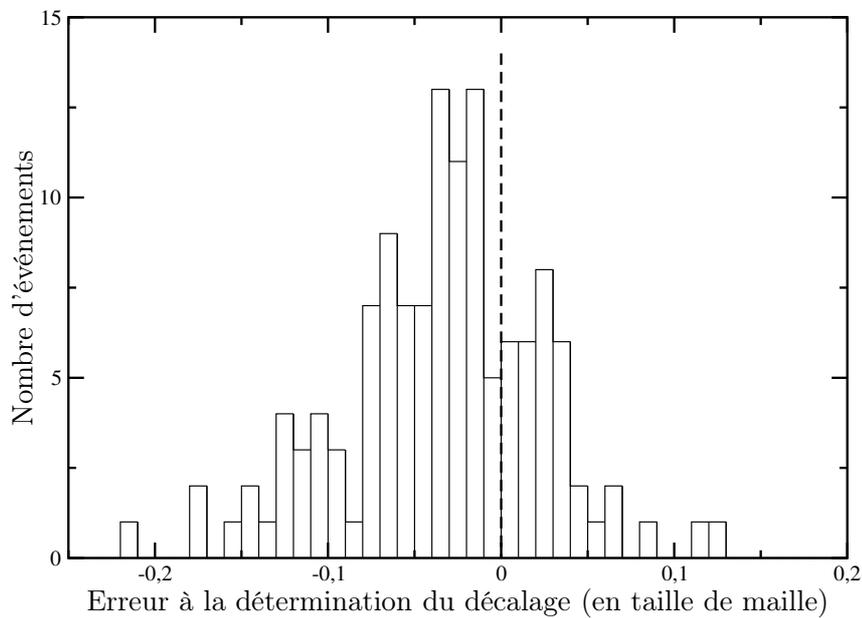
Grâce à la technique de recalage des profils, on a pu comparer deux enregistrements d'un même profil, l'un réalisé en rugosimétrie optique statique, l'autre en rugosimétrie optique dynamique. Le bloc est laissé monté entre les deux enregistrements, de sorte que les positionnements relatifs de la surface et du dispositif de mesure sont identiques. Les deux profils de 512 points, recalés horizontalement l'un par rapport à l'autre, sont représentés sur la figure Fig. 2.18(a). Ils ont été enregistrés sur une surface de granite grossièrement rectifiée, faisant un angle d'à peu près  $5^\circ$  avec l'horizontale. L'espacement entre les nœuds est 60 microns. Les profils recalés, leur différence, ainsi que les profils lissés et leur différence, sont présentés à la Fig. 2.18(a). La différence de topographie est contenue dans les modes de toute petite échelle, comme le montre la dispersion beaucoup plus faible de la distribution obtenue comme la différence des profils lissés. L'écart-type de cette distribution est inférieur à 10 microns (voir Fig. 2.18(b)). Sa dispersion est due à la légère incertitude sur le positionnement pendant la procédure de rugosimétrie dynamique.

### Recalage des profils d'une même surface les uns par rapport aux autres

La technique de recalage du profil dans la direction  $x$  peut-elle être étendue au recalage les uns par rapport aux autres des différents profils parallèles enregistrés par rugosimétrie dynamique? On utilise la fonction de corrélation de deux profils successifs, d'indices respectifs  $j$  et  $j + 1$ , pour recalculer au mieux le deuxième par rapport au premier. De proche en proche, tous les profils sont recalés par rapport au premier. Il ne s'agit pas ici de recalculer deux enregistrements effectués

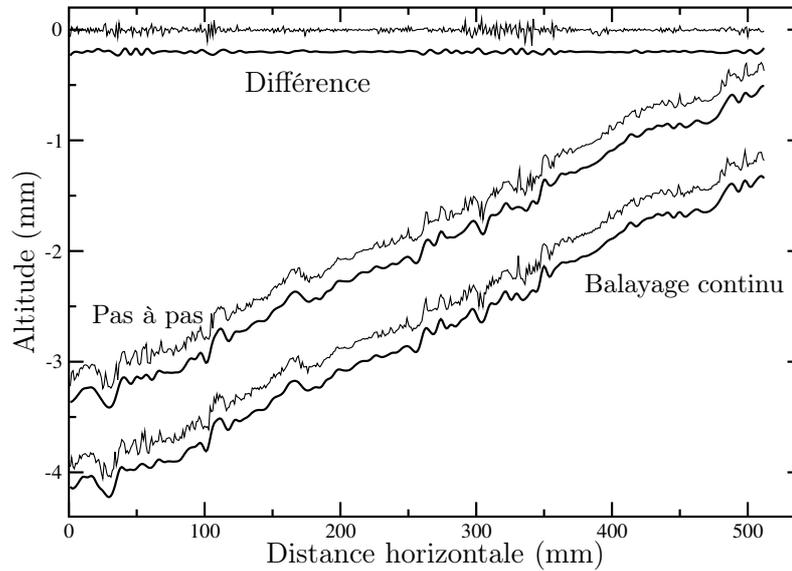


(a) Comparaison des décalages de profils imposés dans une topographie-test et des décalages obtenus en analysant la topographie-test par une méthode utilisant la fonction de corrélation.

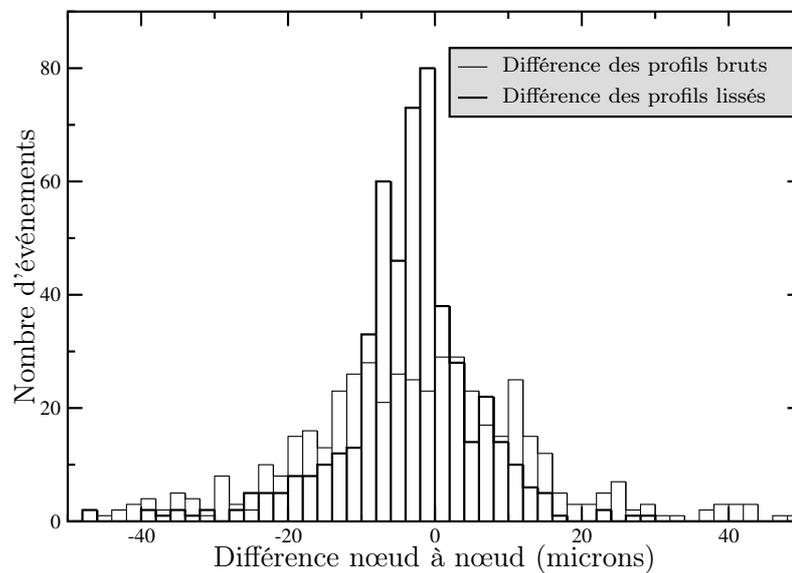


(b) L'erreur peut être estimée comme  $-0.034 \pm 0.057$ . On en déduit qu'on détecte correctement le décalage à moins d'un  $10^e$  de maille près.

FIG. 2.17 – Tests de recalage horizontal de deux profils qui ont été enregistrés sur des grilles décalées. La méthode permet de retrouver des décalages à un  $20^e$  de maille près.



(a) Le profil enregistré continûment a été translaté pour se superposer au mieux au profil de référence. La différence des deux profils est également présentée. Si l'on lisse les profils en utilisant la transformée en ondelettes et en supprimant tous les détails d'extension spatiale supérieure à deux longueurs de maille, on obtient deux profils (en gras) pratiquement identiques.



(b) Histogramme de la différence des profils lissés représentés au (a). L'écart-type est de l'ordre de 5 microns.

FIG. 2.18 – Comparaison de profils enregistrés par rugosimétrie optique pas à pas et par balayage.

sur un même profil, mais de recalcr deux échantillons obtenus sur des profils voisins. On utilise la ressemblance des deux profils l'un avec l'autre, liée aux corrélations spatiales le long de la surface, pour recalcr les deux enregistrements, mais on ne peut prétendre à la même précision qu'au paragraphe précédent. L'application de la procédure à un enregistrement-test montre que la détermination d'un éventuel décalage à une échelle inférieure à la maille est impossible. Les incertitudes sur la détermination du décalage entre un profil et le suivant, bien qu'inférieures à la maille, sont plus élevées que dans le cas précédent, et se cumulent, de sorte que, pour un profil très éloigné du premier profil, le décalage obtenu par rapport au premier profil est aberrant. Il suffit d'un seul décalage aberrant pour décaler tous les profils suivants. On en conclut que cette procédure manque de robustesse et ne doit pas être utilisée.

#### 2.4.4 Confrontation d'un enregistrement à un enregistrement réalisé avec la technique pas à pas

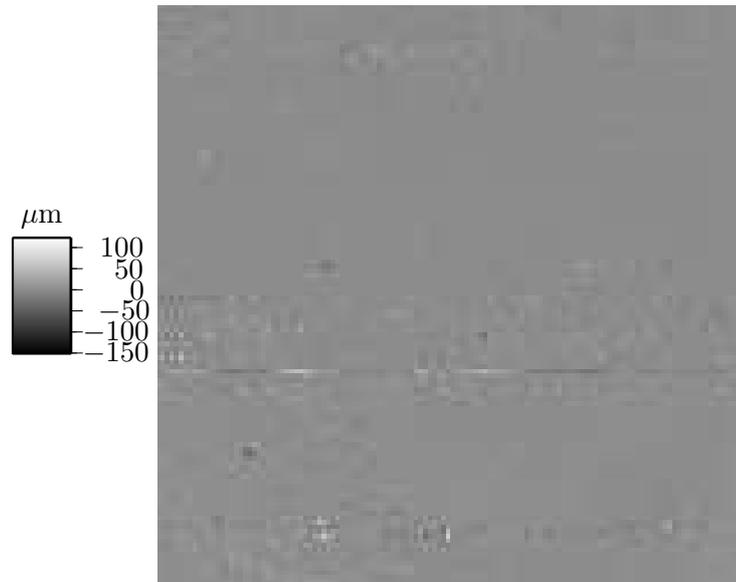
Pour valider la technique de rugosimétrie dynamique, on a réalisé deux enregistrements successifs d'une carte complète, avec un montage identique de la surface à lire, en rugosimétrie statique d'abord, en rugosimétrie dynamique ensuite. Les profils échantillonnés dans les deux procédures sont les mêmes. On a recalcr l'enregistrement dynamique sur l'enregistrement statique, profil par profil. Les valeurs de décalage (en unités de maille) calculées sur les profils sont toutes dans l'intervalle  $[0.95; 1.05]$ , ce qui signifie que les fluctuations sur la position en  $x$  du premier point de chaque profil pendant la rugosimétrie dynamique n'a pas excédé  $\pm 0.05 \times 700 = 35$  microns. Cette valeur est cohérente avec ce qui a été dit au début du paragraphe 2.4.3. La Fig. 2.19(a) montre en (a) la carte en niveaux de gris de la différence des deux topographies (recalées), et en (b) l'histogramme correspondant. Les différences observées entre les deux topographies sont liées à la partie fractionnaire (en unités de mailles) du décalage horizontal des profils de l'enregistrement dynamique, qui signifie que les mesures n'ont pas été réalisées exactement aux mêmes points. L'écart-type de la distribution des différences vaut 5 microns. On en conclut que pour une même grille de mesure imposée a priori, et malgré l'incertitude sur le décalage horizontal des profils enregistrés dynamiquement, la cohérence entre l'enregistrement optique statique et l'enregistrement optique dynamique est excellente.

## 2.5 Technique de répliques en silicone

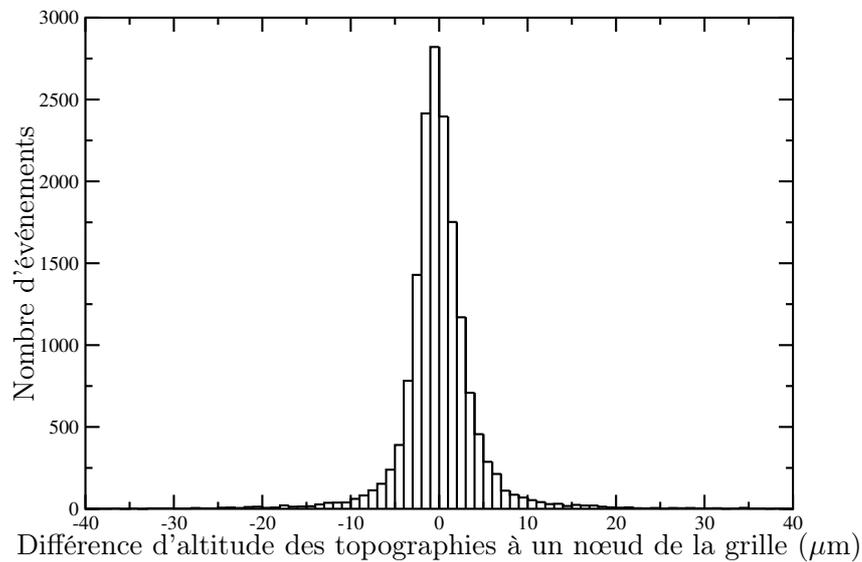
Pour réduire les amas de mesures aberrantes dans les enregistrements optiques, on réalise des moules des surfaces en résine silicone bleue, qui ont l'avantage de présenter une surface avec une diffusivité beaucoup plus uniforme. Ainsi, pour la surface de granite de Lanhélin dont l'enregistrement optique est présenté au paragraphe suivant (2.3.5), l'utilisation d'un moule a permis de supprimer toute mesure aberrante.

Le moulage est effectué avec une résine élastomère Rhodorsyl RTV 1597 bleue. Ce produit se présente sous la forme d'un liquide visqueux qui commence à polymériser une heure après l'adjonction d'un catalyseur (mélange 90%/10%). La polymérisation dure 24 heures. Le produit a l'avantage de présenter un retrait nul à la polymérisation. La surface obtenue peut être déformée élastiquement par pression manuelle. Elle ne peut pas être enregistrée par rugosimétrie mécanique, la pointe y pénétrerait.

Le moulage est réalisé à l'aide d'un coffrage en PVC qui peut être ajusté autour du bloc fracturé, à l'aide de vis. On verse dans le coffrage une quantité suffisante de mélange d'élastomère liquide et de son catalyseur (90 %/ 10 % en masse). Puis on introduit l'ensemble (bloc + coffrage + mélange fluide) dans un dessiccateur relié à une pompe à vide. La pompe est actionnée pendant



(a) Carte en niveaux de gris de la différence des deux enregistrements. L'enregistrement effectué en technique dynamique a préalablement été recalé sur l'autre, profil par profil. Les maxima et minima de la distribution des différences d'altitude sont obtenus en des points isolés où une légère différence de positionnement horizontal a pu résulter en une différence d'altitude importante. Des maxima et minima locaux apparaissent le long de profils qui sont probablement mal recalés.



(b) Histogramme de la distribution des altitudes présentée en (a). L'écart-type de la distribution est 5 microns.

FIG. 2.19 – Comparaison entre deux enregistrements d'une même surface, l'un réalisé avec la technique pas à pas, l'autre avec la technique par balayage.

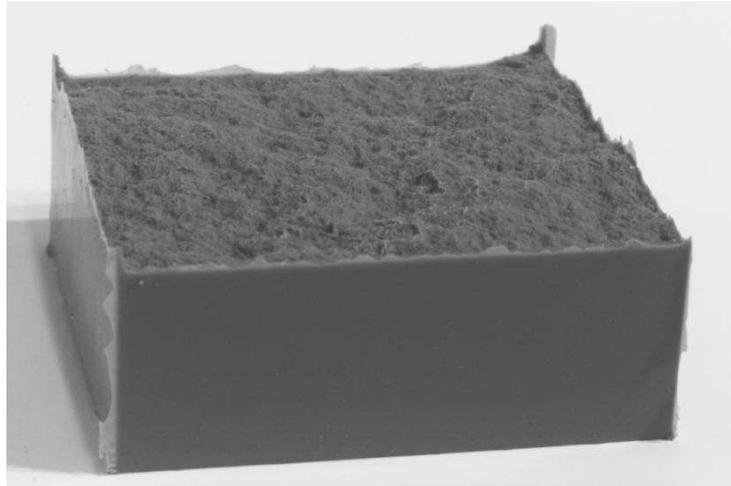


FIG. 2.20 – Réplique en silicone d'une surface de fracture obtenue par flexion 4 points d'un bloc de granite de Lanhélin  $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$ .

50 min. On élimine ainsi les bulles qui se sont formées pendant le mélange. L'élimination des bulles répond à deux impératifs :

- Aucune bulle ne doit rester à l'interface entre l'élastomère et la surface, sous peine de créer des imperfections dans le moulage de la surface rugueuse.
- L'élimination complète des bulles de la masse du moulage lui garantit un comportement mécanique homogène, représentatif de l'élastomère dont il est constitué. Un tel moulage pourra être utilisé dans une expérience de poinçonnement de deux surfaces rugueuses, auquel cas une connaissance précise de son comportement mécanique sera nécessaire.

La comparaison visuelle (à l'œil et à la loupe binoculaire) de la surface complémentaire d'une surface de granite et du moule en silicone de la surface est satisfaisante. Par ailleurs, on mesure le même écart-type et le même exposant de rugosité pour la surface-mère et pour le moule. On suppose que la topographie du moule est une bonne réplique de celle de la surface, et peut être analysée à sa place. La validité de cette hypothèse en termes de corrélations le long de la topographie sera discutée de manière plus détaillée au chapitre 3.

## Conclusion

Le rugosimètre présenté dans ce chapitre permet l'enregistrement d'une topographie de deux manières : à l'aide d'un palpeur mécanique et par mesure optique. La mesure optique peut se faire avec arrêt du dispositif de positionnement à chaque nœud de la grille d'échantillonnage, ou bien par le balayage en continu de profils parallèles. Les précisions du dispositif et la vitesse de la mesure dépendent du type de procédure utilisé pour l'enregistrement : mesure mécanique, mesure optique statique, et mesure optique dynamique.

La précision sur le positionnement horizontal est de  $1/2$  micron lorsque la grille est décrite pas-a-pas, pourvu qu'on laisse au dispositif le temps de finir son positionnement à chaque nœud. L'enregistrement de profils par balayage continu de la surface (rugosimétrie optique dynamique) introduit une incertitude de  $\pm 3$  microns sur le positionnement horizontal des points enregistrés. Pour ce mode de fonctionnement du dispositif, un décalage éventuel des profils les uns par rapport aux autres peut intervenir, qui peut être corrigé à une maille près. Ce décalage possible constitue un inconvénient de la procédure lorsqu'on désire joindre les profils pour créer une carte de la topographie.

La précision de la mesure de hauteurs à l'aide du palpeur mécanique est inférieure à 4 microns,

---

si l'on tient compte de tous les facteurs d'incertitude (y compris le gondolement des tables horizontales). La précision de la mesure optique est difficile à quantifier, du fait de sa dépendance vis-à-vis des propriétés optiques de la surface. En utilisant des moules en silicone des topographies étudiées, on réduit sensiblement le nombre de mesures aberrantes. L'étude de la reproductibilité de la mesure permet d'estimer une précision sur l'altitude mesurée proche de 10 microns. En fin de compte, la principale incertitude du dispositif, lorsque l'enregistrement dure plusieurs heures, est liée à la dilatation thermique.

L'effet de taille finie du capteur (pointe de palpation mécanique ou faisceau laser) influence à la fois la résolution horizontale de l'appareil et la précision de la mesure. La pointe de palpation a un diamètre de 50 microns, tandis que le faisceau laser du capteur optique est large de 30 microns. Les effets de taille du capteur seront abordés au chapitre 3. On peut d'ores et déjà considérer que la résolution horizontale du système est limitée à 80 microns par la taille du capteur. Pour une surface auto-affine dont la rugosité a une amplitude maximale de 8 mm pour une extension horizontale de 10 cm, la différence d'altitude typique entre deux points distants de 80 microns est inférieure à 30 microns. Une précision de 5 microns sur la mesure d'altitude est satisfaisante.

En ce qui concerne la vitesse du dispositif, on peut considérer schématiquement que la mesure mécanique est deux à cinq fois plus lente que la mesure optique pas à pas, qui peut elle-même être jusqu'à six fois plus lente que la mesure par balayage optique, pour des profils comportant un grand nombre de points (voir table 2.1).

La mesure optique est non intrusive, et particulièrement adaptée à l'enregistrement de la topographie de matériaux "mous", susceptibles d'être endommagés par la pointe du capteur mécanique. On utilisera la procédure mécanique pour étudier des surfaces dont le moulage est impossible ou difficile. La rugosimétrie optique dynamique pourra être utilisée pour l'enregistrement de profils échantillonnés très finement. La procédure de rugosimétrie optique pas à pas sera utilisée pour l'enregistrement de topographie complète, seule ou en complément de la procédure dynamique : dans ce cas, un enregistrement pas à pas sur une grille de maille plus large permettra de recalculer les profils enregistrés dynamiquement sur la grille la plus fine.

## Annexe A Présentation du programme de rugosimétrie mécanique

Le programme *mecaprof* est écrit en C, avec une interface programmée à l'aide de la librairie XForms, sous Linux. Il sert à piloter la procédure de rugosimétrie avec mesure mécanique des altitudes de la topographie, ainsi que toutes les opérations préliminaires à la rugosimétrie elle-même. On expose ici brièvement les fonctionnalités du programme.

Le formulaire principal se présente sous la forme d'un fenêtre avec 4 menus déroulants (voir Fig. 2.21(a)) :

- Le menu RUGOSIMÉTRIE sert à lancer une mesure. Il faut d'abord saisir la grille de parcours, c'est-à-dire le nombre de points en  $x$ ,  $y$ , et les pas de la grille dans les deux directions, ainsi que l'angle  $\phi$  qui définit la hauteur de remontée en fonction de l'amplitude du déplacement entre deux nœuds (champ GRILLE, voir la Fig. 2.21(b)). Le champ LANCEMENT appelle le formulaire de lancement de la rugosimétrie (voir Fig. 2.21(d)). Celui-ci permet de lancer la mesure, et de contrôler en temps réel l'évolution d'un certain nombre de paramètres : temps écoulé, durée totale prévue de l'enregistrement, temps restant avant la fin de l'enregistrement, tension de sortie du capteur et enfoncement correspondant en microns, angle de pente locale maximale mesurée,  $\psi$ . Il permet également d'appeler un formulaire où les points enregistrés sont affichés, et où est tenu le compte des points placés dans le tampon d'affichage et d'enregistrement, c'est-à-dire lus mais pas encore affichés ou enregistrés. (voir Fig. 2.21(e)). Le champ QUITTER sert à quitter le programme.
- Le menu CONTRÔLEUR permet de piloter manuellement le contrôleur des tables à déplacement : ré-initialisation du contrôleur (champ INITIALISATION), recentrage automatique des tables (champ RECENTRAGE), visualisation des paramètres dynamiques des tables (champ PARAMÈTRES DYNAMIQUES) et positionnement des tables (champ POSITIONNEMENT. Comme le montre la Fig. 2.21(f), le formulaire de positionnement permet de déplacer chacune des tables en visualisant la position de la table par rapport à son support, sa position au demi-micron près. Les déplacements se font par pas réglables continûment entre 200 microns et 3 cm. Il est possible d'enregistrer une position de référence, et de réaliser un positionnement automatique à la dernière position de référence enregistrée. Cette fonctionnalité est particulièrement utile pour se repositionner à la position du début de la rugosimétrie précédente, puisque le premier point de la grille est systématiquement enregistré comme nouvelle position de référence.
- Le menu CAPTEUR permet de déterminer l'offset du capteur (DÉTERMINATION DE L'OFFSET), opération préalable à toute mesure, et de visualiser la tension de sortie du capteur et l'enfoncement de l'équipage mobile du capteur associé (SORTIE DU CAPTEUR. Voir le formulaire associé à la Fig. 2.21(c)).
- Le menu UTILISATEUR permet de choisir l'utilisateur à qui le programme enverra un e-mail s'il se met en suspens par suite du blocage de la pointe en position haute.

FIG. 2.21 – Pages suivantes : formulaires principaux du programme de rugosimétrie mécanique.

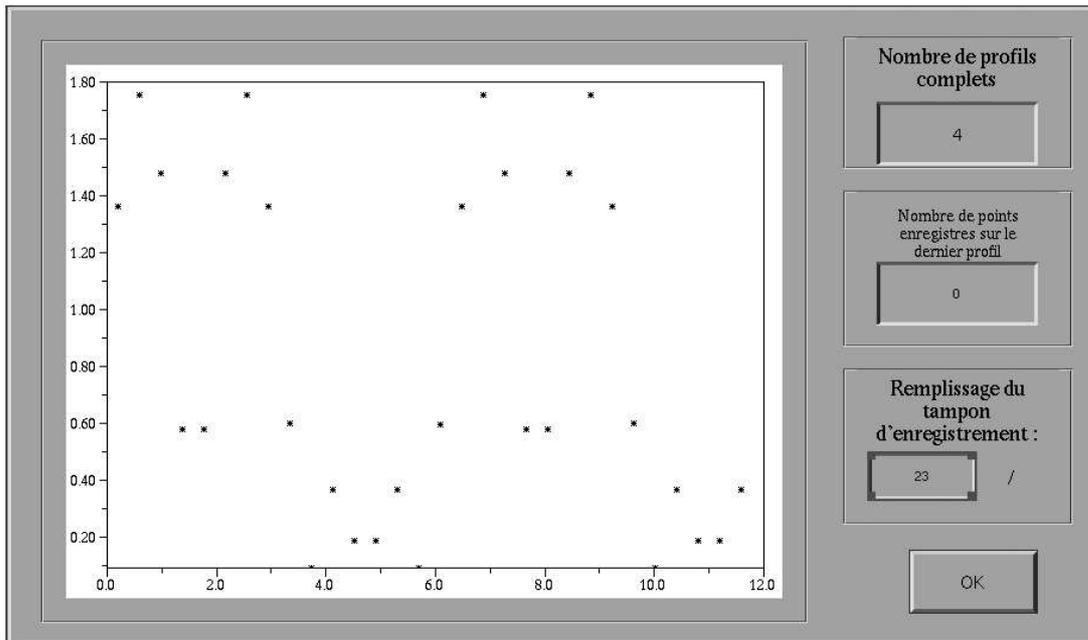


(a) Formulaire principal du programme de rugosimétrie mécanique. Les quatre menus déroulants permettent d'accéder aux divers formulaires présentés ci-après.

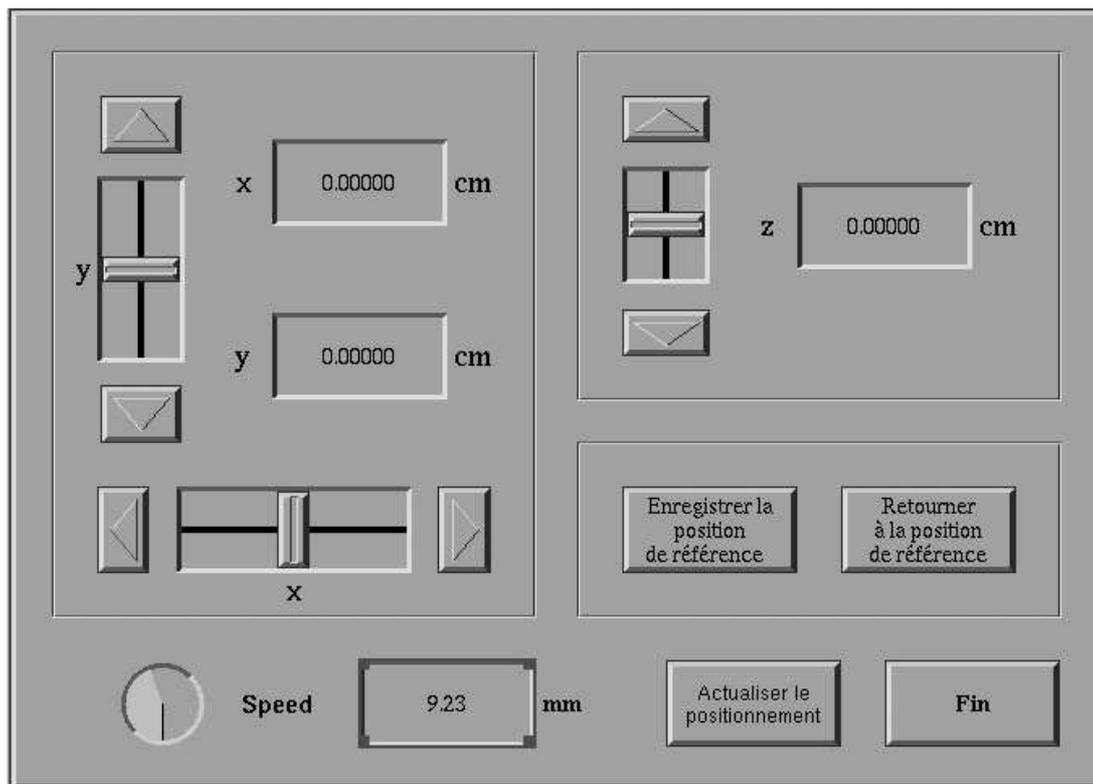
(b) Formulaire de saisie de la grille. On saisit le nombre de points dans la direction  $x$  et le pas de déplacement dans cette direction. La longueur de grille correspondante est calculée. De même pour la direction  $y$ . On saisit également l'angle limite  $\phi$  qui définit la distance de remontée à chaque changement de nœud.

(c) Formulaire de visualisation de la sortie du capteur. La tension de sortie est indiquée en temps réel, ainsi que l'enfoncement correspondant. Une diode est rouge si le capteur est enfoncé, verte sinon

(d) Formulaire de lancement de la rugosimétrie. Un champ de saisie permet de choisir le nom du fichier où stocker les mesures. Les autres champs sont mis à jour continûment au fur et à mesure du développement de la rugosimétrie.



72 (e) Formulaire de visualisation des profils parallèles à  $x$  en cours de rugosimétrie. Le formulaire indique le nombre de points mesurés et pas encore visualisés (remplissage du tampon d'enregistrement et de visualisation).



(f) Formulaire de positionnement manuel. Chaque clic sur une des flèches directionnelles provoque le déplacement de la table en question d'une longueur définie par le cadran "speed". Cette distance peut être réglée entre 200 microns et 2 cm. Les positions des curseurs sont ajustées en conséquence, et la position des tables par rapport à l'origine est affichée. Un bouton permet d'enregistrer une position de référence, un autre de revenir automatiquement à la dernière position enregistrée.

## Annexe B Présentation du programme de rugosimétrie optique pas à pas

Le programme *optiprof* est fondé sur le même noyau que le programme *mecaprof*. Certains formulaires sont quelque peu différents :

- Le formulaire de visualisation de la sortie du capteur ne comporte plus de témoin de saturation en sortie (voir Fig. 2.21(b)). Il est remplacé par un témoin de sortie de gamme linéaire, qui se présente de la même façon (témoin vert/rouge).
- Le menu RUGOSIMÉTRIE comprend un champ supplémentaire, qui permet de choisir le type de précision recherchée lors du positionnement : un seul positionnement, deux d'affilée, ou autant de positionnements successifs qu'il en faut pour mesurer une position conforme à la position désirée, à une précision fixée, qui est paramétrable. Cette dernière option est utile lorsque la maille de la grille est petite ( $< 50$  microns).
- Dans le formulaire de lancement de la rugosimétrie, la mesure de la pente locale maximale mesurée est remplacée par celle de la position de la table verticale par rapport à sa position de référence (voir Fig. 2.21(a)).

FIG. 2.21 – Formulaires du programme de rugosimétrie optique (pages suivantes).

Numero du profil en cours : 5/130

Point numéro : 23/130

Montrer les profils déjà enregistrés

Durée provisoire de l'enregistrement : 1 h 23 min 46 s

Temp d'enregistrement restant : 0 h 07 min 38 s

Temps d'enregistrement total : 1 h 31 min 24 s

Nom du fichier où stoquer les mesures : tmp.dat

Tension de sortie du capteur : 3.8 V

Distance associée : 3797.7 microns

Deplacement vertical du capteur : 4492 microns

Go !

Stop !

Fin

(a) Formulaire de lancement de la rugosimétrie. Il est similaire au formulaire de lancement de la rugosimétrie mécanique, mais les champs liés à la remontée de la pointe sont remplacés par un champ indiquant la position verticale de la table  $z$  par rapport au plan de référence.

Sortie 3.28 V

Sortie saturée

Distance 3.278 mm

Fin

(b) Formulaire de visualisation de la sortie du capteur optique. Le témoin de sortie saturée est vert quand le capteur est dans sa gamme linéaire, rouge autrement.

## Annexe C Présentation du programme de rugosimétrie optique par balayage :

L'interface graphique du programme *scanprof* est proche de celle du programme *optiprof*. Un certain nombre de champs du formulaire de lancement de la rugosimétrie ont été supprimés (voir Fig. 2.21) :

- Indice du point du profil en cours de mesure. Les mesures sont affichées et enregistrées à la fin de chaque profil.
- Tension de sortie du capteur et distance à la surface correspondante.

Numero du profil en cours : 4/130

Montrer les profils déjà enregistrés

Durée provisoire de l'enregistrement :

Temp d'enregistrement restant :

Temps d'enregistrement total :

Nom du fichier où stoquer les mesures : tmp.dat

Tension de sortie du capteur : 3.8 V

Distance associee : 3.7977 microns

Go !

Stop !

Fin

FIG. 2.21 – Formulaire de lancement de la rugosimétrie optique par balayage.

## Chapitre 3

# Étude expérimentale de surfaces de fracture de grès et de granite

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>79</b>
<b>3.1 Filtrage des surfaces auto-affines</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1.1 Interpolation bilinéaire . . . . .	79
3.1.2 Intégration spatiale . . . . .	83
3.1.3 Filtrage en ondelettes . . . . .	83
<b>3.2 Étude expérimentale des surfaces de granite</b> . . . . .	<b>83</b>
3.2.1 Étude de l'auto-affinité des profils . . . . .	86
Analyse d'enregistrements "mécaniques" . . . . .	86
Analyse d'enregistrements "optiques" . . . . .	87
3.2.2 Analyse en deux dimensions . . . . .	87
Spectre à deux dimensions d'une carte . . . . .	87
L'auto-affinité est-elle isotrope? . . . . .	91
<b>3.3 Étude expérimentale du grès</b> . . . . .	<b>91</b>
3.3.1 Etude de l'auto-affinité des profils . . . . .	91
Analyse d'un enregistrement mécanique . . . . .	91
Analyse d'un enregistrement optique . . . . .	94
Discussion – Quelle différence entre le granite et le grès? . . . . .	94
3.3.2 Y a-t-il universalité du coefficient de rugosité? . . . . .	98
3.3.3 Isotropie de l'auto-affinité dans le grès . . . . .	100
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>103</b>

---



## Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une étude expérimentale de la rugosité de surfaces de fracture de grès et de granite. L'étude consiste en une analyse d'enregistrements de surfaces réalisés à l'aide du rugosimètre qui a fait l'objet du chapitre 2. Les méthodes d'analyse utilisées conjointement sont la méthode du spectre de Fourier à une et deux dimensions et la méthode du coefficient d'ondelettes moyenné.

Dans la première partie, on s'est attaché à tester numériquement l'influence sur l'auto-affinité des surfaces d'un certain nombre de filtrages qui peuvent être appliqués au signal par le dispositif de mesure ou par l'expérimentateur, lors de l'analyse. Il sera fait allusion aux résultats de cette étude dans les parties suivantes. On présente dans une deuxième partie l'étude des surfaces de granite. L'auto-affinité de profils linéaires est d'abord étudiée, puis on examine si cette description peut être étendue à deux dimensions. L'étude du grès fait l'objet d'une troisième partie. La démarche utilisée est la même que pour le granite, et l'on s'attache à interpréter les différences relevées entre les analyses des surfaces des deux matériaux.

### 3.1 Filtrage des surfaces auto-affines

Lorsqu'on essaie d'analyser une surface de fracture, on ne dispose pas d'une information parfaite sur la topographie. La technique de mesure de la topographie elle-même peut avoir introduit un filtrage des données, du fait des limitations de l'appareil de mesure. Par ailleurs, le traitement peut nécessiter l'application d'un filtre numérique, avant l'analyse. Comment ces filtrages modifient-ils les propriétés d'invariance d'échelle d'une surface auto-affine? Le filtrage détruit-il l'auto-affinité de la surface? Les deux méthodes d'analyse que l'on utilise permettent-elles de montrer si la surface étudiée est auto-affine, et si c'est le cas, d'obtenir une estimation raisonnable de l'exposant de rugosité?

#### 3.1.1 Interpolation bilinéaire

Lorsqu'on dispose de données échantillonnées sur une grille fixée, et qu'on veut les recaler sur une grille différente, soit translatée par rapport à la première, soit d'axes orientés selon un angle différent, soit plus fine que la grille initiale, ou bien tout cela en même temps, on est amené à estimer l'altitude de la surface en des points où l'on ne dispose pas de mesure d'altitude, mais qui sont entourés par des points de mesure. La façon la plus simple d'obtenir une valeur d'altitude au point considéré est de l'estimer comme une combinaison bilinéaire des altitudes aux quatre points de la grille initiale qui l'entourent. Supposons que les indices de la grille initiale correspondant à ces points sont  $i$  et  $i + 1$  selon  $x$ ,  $j$  et  $j + 1$  selon  $y$ , et que la position du point où l'on veut estimer l'altitude peut être repérée par rapport à la grille de départ par les indices réels  $I = i + \delta i$  (selon  $x$ ) et  $J = j + \delta j$  (selon  $y$ ), avec  $0 \leq \delta i < 1$  et  $0 \leq \delta j < 1$  (voir Fig. 3.1). Alors l'altitude  $h_{I,J}$  au point  $(I, J)$  est estimée comme

$$h_{I,J} = (1 - \delta i)(1 - \delta j) h_{i,j} + \delta i(1 - \delta j) h_{i+1,j} + (1 - \delta i)\delta j h_{i,j+1} + \delta i\delta j h_{i+1,j+1} \quad . \quad (3.1)$$

Ce type de moyenne pondérée bilinéairement fournit une valeur comprise entre les valeurs extrêmes parmi les hauteurs  $h_{i,j}$ ,  $h_{i+1,j}$ ,  $h_{i,j+1}$ ,  $h_{i+1,j+1}$ . Par ailleurs, quand  $\delta i$  et  $\delta j$  tendent vers 0 ou 1, l'altitude estimée tend vers la valeur mesurée  $h_{i,j}$  correspondante. Pour une surface suffisamment régulière, ce type d'interpolation est naturel. Pour une surface auto-affine, dont

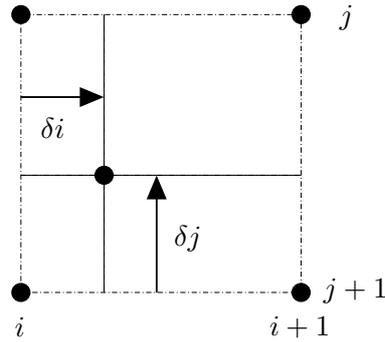
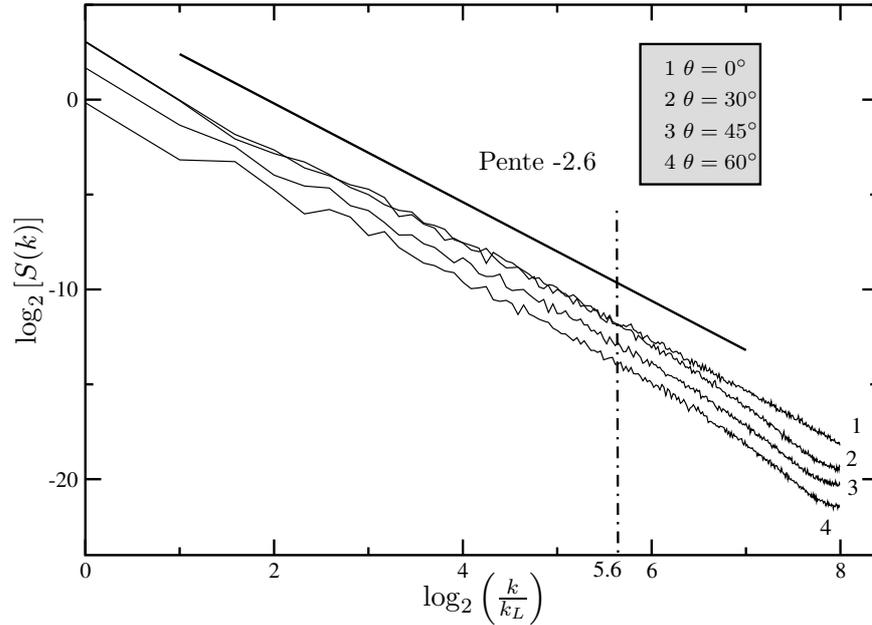


FIG. 3.1 – Schéma d’interpolation bilinéaire. Le point dont on veut estimer l’altitude est repéré par rapport aux quatre points de la grille de mesure les plus proches par les indices réels  $\delta i < 1$  et  $\delta j < 1$ .

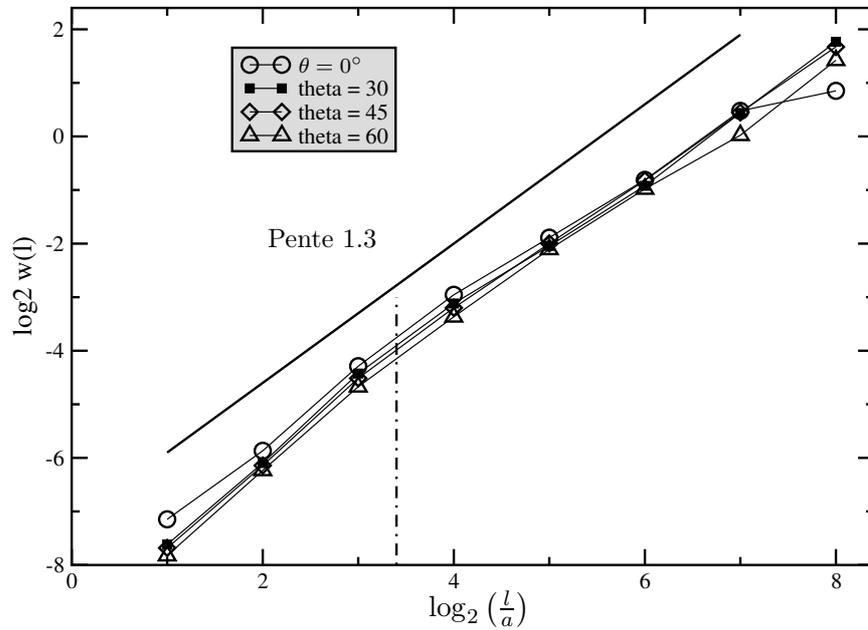
les pentes locales sont d’autant plus abruptes que l’échelle à laquelle on les évalue est petite, il n’est pas évident que l’interpolation d’une topographie entière sur une grille différente de la grille initiale ne va pas modifier l’invariance d’échelle de la surface, du moins aux petites échelles. Afin de tester cette propriété, on est parti d’une surface auto-affine générée numériquement sur une grille  $1024 \times 1024$ , avec un exposant de Hurst 0.8.

On s’est d’abord intéressé à la rotation de la grille d’échantillonnage. On a interpolé la surface sur trois grilles  $512 \times 512$  de même maille, centrées sur le centre de la grille initiale, et faisant un angle de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $60^\circ$  respectivement, avec celle-ci. La première grille (angle  $0^\circ$ ) est une grille extraite de la grille initiale. Elle constitue la référence. On compare les résultats des analyses en spectre de puissance et en coefficients d’ondelettes moyennés réalisées sur la distribution de référence avec les résultats des analyses sur les distributions obtenues par réinterpolation bilinéaire sur les autres grilles (voir Fig. 3.2). On constate que le spectre de Fourier des surfaces interpolées diffère de celui de la surface de référence pour des longueurs d’onde jusqu’à 5 ou 6 fois supérieures à l’échelle de la maille. Cet ordre de grandeur de la coupure est déterminé visuellement, à partir des spectres de puissance. L’analyse en ondelettes fournit des résultats cohérents avec ceux de l’analyse en Fourier. Ces deux analyses permettent d’estimer l’exposant de rugosité avec une précision satisfaisante pour toutes les grilles, en considérant la bonne gamme d’échelles. Une application de cette étude concerne la détermination de l’auto-affinité d’une surface dans une direction qui ne coïncide pas avec une des directions de la grille de l’enregistrement dont on dispose pour faire les analyses. Dans cette situation, on est tenté de réinterpoler l’enregistrement sur une grille qui est orientée comme il convient. Par cette méthode, on parviendra à estimer l’exposant de rugosité dans la direction en question, mais on ne pourra en aucun cas quantifier la gamme d’échelles entière sur laquelle l’auto-affinité de la surface est valide, pour cette direction.

Dans un deuxième temps, on s’est intéressé à l’interpolation de la surface sur des grilles contenant tous les points de la grille initiale, mais de maille plus fine que cette dernière (voir Fig. 3.3). Les altitudes de la distribution “fine” aux nœuds de la grille fine qui coïncident avec ceux de la grille initiale sont connues ; on interpole bilinéairement les valeurs de l’altitude aux nœuds de la grille “fine” où elles ne sont pas connues. Les surfaces interpolées apparaissent auto-affines aux échelles supérieures à  $5l_c$ , où  $l_c$  est la maille de la grille initiale. L’auto-affinité est donc polluée aux échelles comprises entre  $l_c$  et  $5l_c$  : on a dégradé l’information sur les échelles supérieures. Pour cette raison, il vaut mieux raffiner la grille en rajoutant des modes de Fourier nuls aux échelles inférieures à  $l_c$ , comme on l’a expliqué au paragraphe 1.2.3 ; ce type d’interpolation ne pollue pas l’invariance d’échelle aux échelles supérieures à  $l_c$ .

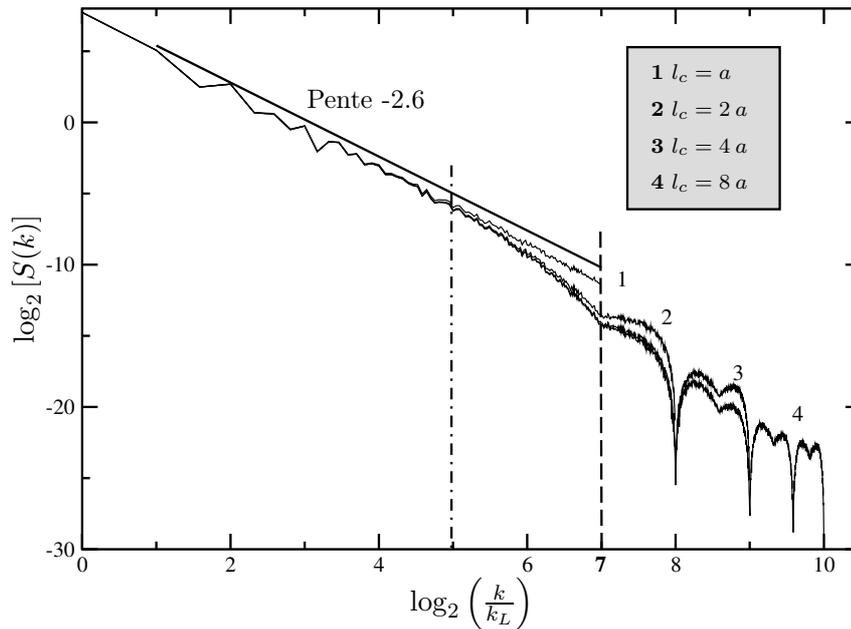


(a) Spectres de Fourier de 4 grilles  $512 \times 512$  extraites d'une topographie générée numériquement avec  $\zeta = 0.8$ . Les grilles ont même centre, et leurs axes font un angle  $\theta = 0, 30, 45$  et  $60$ , respectivement, avec les axes de la grille originelle. Le spectre de la grille dénotée 1 est donc le spectre de référence. Les spectres dénotés 3 et 4 sont presque identiques au spectre 2. Ils ont été décalés de 1 et 2 unités vers le bas, respectivement, pour clarifier la figure. On constate que le spectre des topographies interpolées sur les grilles obliques est modifié sensiblement aux grands nombres d'onde. La ligne pointillée verticale indique la longueur de coupure au-dessus de laquelle les spectres restent inchangés, pour  $k \simeq 5k_L$ .

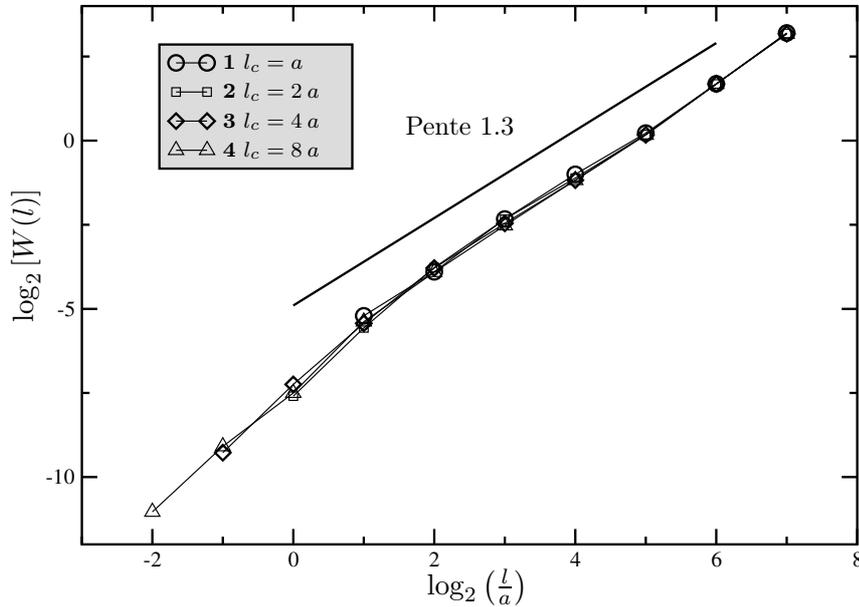


(b) Analyse en ondelettes des mêmes topographies interpolées qu'en (a).

FIG. 3.2 – Rotation de grille par interpolation bilinéaire. Les analyses de Fourier et en ondelettes témoignent d'une dégradation de l'auto-affinité jusqu'à des échelles 5 fois supérieures à l'échelle de la maille initiale.



(a) Spectres de Fourier de surfaces obtenues par interpolation bilinéaire d'une topographie connue sur des grilles plus fines. Les spectres sont identiques aux nombres d'onde inférieurs à la valeur critique marquée par la ligne vertical mixte.



(b) Analyse en ondelettes des mêmes topographies interpolées qu'en (a).

FIG. 3.3 – Interpolation bilinéaire sur des grilles plus fines. Les surfaces interpolées ne sont pas auto-affines aux échelles inférieures à la maille de la grille initiales, mais l'auto-affinité n'est pas détruite aux plus grandes échelles. Les spectres de Fourier et en ondelettes sont inchangés aux échelles supérieures à 5 fois la maille de la grille initiale.

### 3.1.2 Intégration spatiale

L'intégration spatiale locale rentre en ligne de compte, par exemple lors de la mesure de la topographie, le système de mesure (palpeur mécanique ou faisceau laser, voir chapitre 2) ayant une taille finie. On modélise ici l'intégration spatiale par une simple moyenne glissante à deux dimensions sur une fenêtre centrée de taille  $p \times p$ , avec des conditions limites non-périodiques, c'est-à-dire que le nombre de points sur lesquels on moyenne se réduit au voisinage des bords de la grille. Une telle modélisation pourrait convenir à la description de l'intégration spatiale sur la section du faisceau laser ; elle est probablement trop rustique pour prétendre rendre compte pleinement du filtrage introduit par la taille de la pointe de palpation, qui voit bien les "collines" de la topographie mais a plus de mal à voir le fond des "vallées", si elles sont très encaissées.

La surface filtrée est une surface auto-affine isotrope générée numériquement sur une grille  $1024 \times 1024$ . On s'intéresse à l'auto-affinité de la surface filtrée pour différentes valeurs de  $p = 2^q$ . Pour ce faire, on trace le spectre de Fourier des profils dans la direction  $x$  (voir Fig. 3.4(a)) et la transformée en ondelettes moyennée sur le paramètre de translation (voir Fig. 3.4(b)). Avant analyse, on soustrait à la surface filtrée sa régression linéaire à deux dimensions. On constate que l'opération de moyennage, locale du point de vue spatial, modifie le spectre sur une large gamme de longueurs d'onde. L'analyse en ondelettes, au contraire, "voit" toujours la description auto-affine aux échelles supérieures à deux fois la taille de la fenêtre de moyenne glissante.

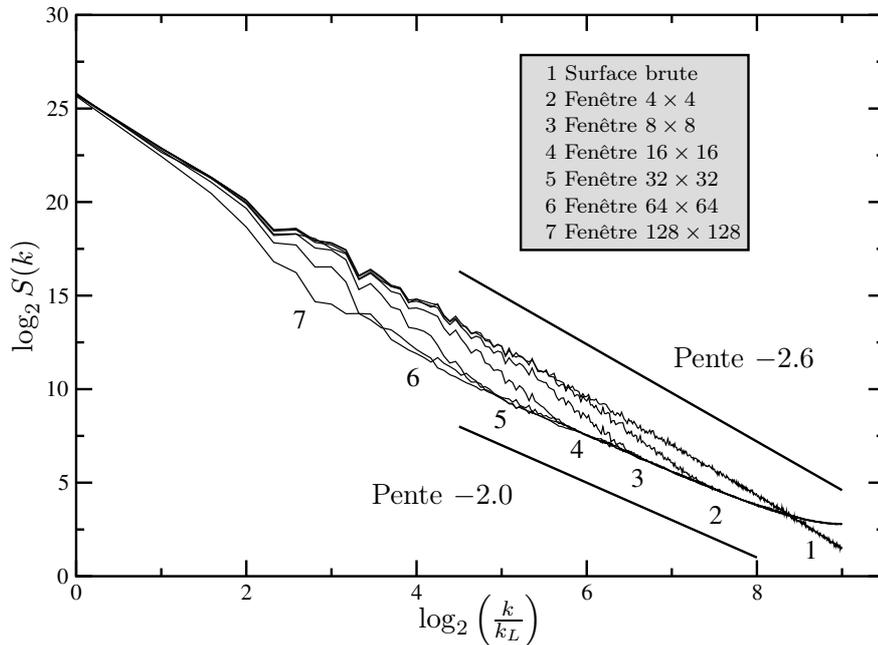
### 3.1.3 Filtrage en ondelettes

Sur une surface d'exposant de Hurst 0.5, on effectue un filtrage des détails de petite échelle en utilisant la transformée en ondelettes à deux dimensions : les coefficients d'ondelettes ayant des paramètres d'échelle plus petits que  $p$  sont annulés. Une analyse par coefficient d'ondelette moyenné des profils extraits de la topographie fait apparaître la coupure de façon naturelle (voir Fig. 3.5(b)). Le filtrage procède à la fois en espace et en fréquences spatiales, de sorte que les termes spectraux correspondant aux échelles supérieures à deux fois l'échelle de coupure  $l_c$  ne sont pas non plus modifiés (cf. Fig. 3.5(a)).

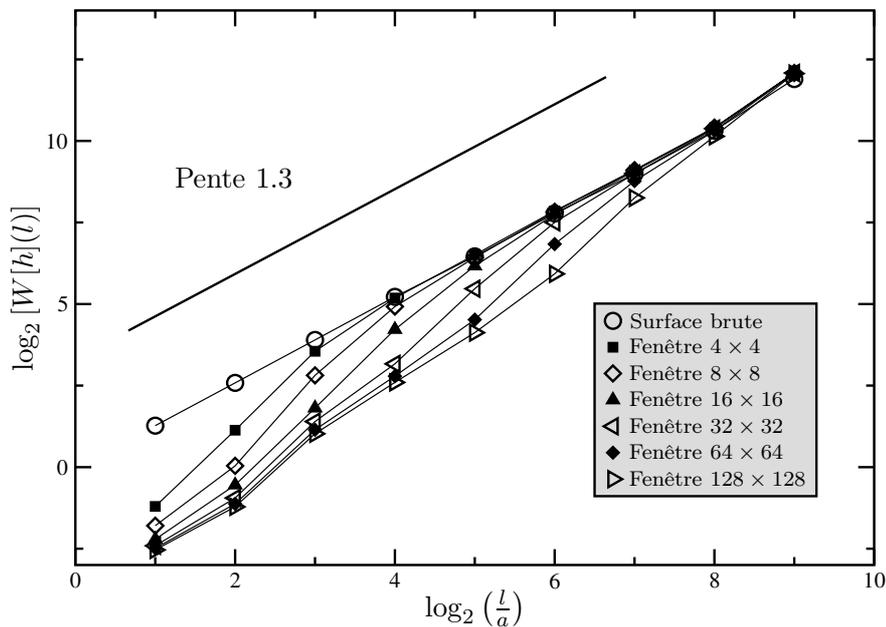
**Interpolation par transformée en ondelettes** Il est intéressant de noter que l'on peut également utiliser la transformée en ondelettes pour interpoler une surface sur une grille plus fine. Il suffit, comme pour l'interpolation par transformée de Fourier, de conserver les mêmes coefficients d'ondelettes que la distribution initiale aux échelles qu'elle décrit, et de rajouter des coefficients nuls aux petites échelles. L'effet d'une telle interpolation sur le spectre de Fourier devra être étudié en détail ; on subodore qu'elle ne modifiera pas le spectre aux échelles présentes dans la distribution avant interpolation.

## 3.2 Étude expérimentale des surfaces de granite

On présente dans cette partie l'analyse de surfaces de granite obtenues par fracturation de blocs parallélépipédiques de dimensions  $20 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$ . Les blocs ont été fracturés par flexion 4 points, au cours d'essais contrôlés en déplacement : on pilote le déplacement du piston de la presse par incréments constants, jusqu'à la rupture de l'échantillon. La fracturation a été initiée à l'aide d'une rainure pratiquée sur un des grands côtés du parallélépipède (cf. figure 3.6), ce qui garantit une propagation de la fracture selon un plan moyen à peu près parallèle aux petits côtés du bloc. Les surfaces obtenues ont une extension horizontale  $10 \times 10 \text{ cm}^2$ .

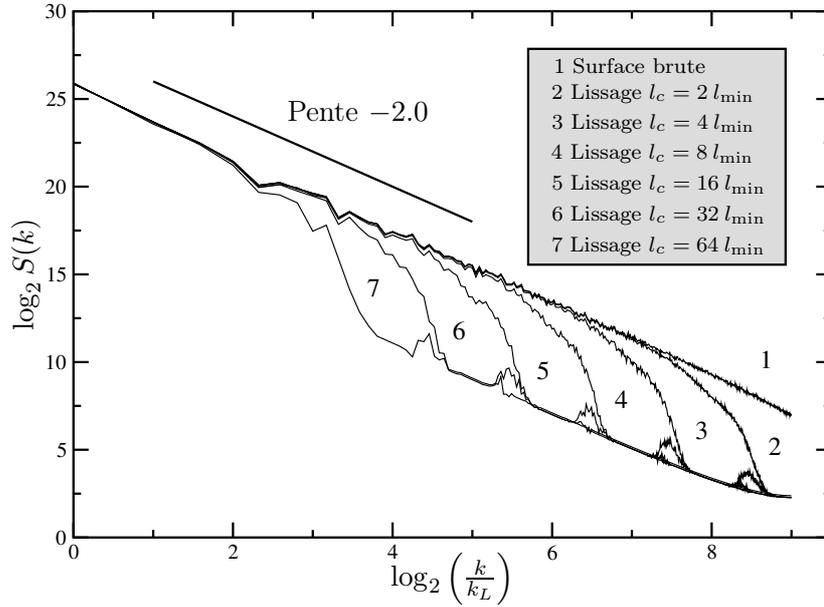


(a) Spectre 1D des profils d'une même surface après qu'elle a été filtrée par application d'une moyenne locale sur une fenêtre  $2^q \times 2^q$ , pour  $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ . La taille de grille est  $2^{10}$ . On désigne par  $k_L = \pi/L$  le plus petit nombre d'onde accessible avec cet échantillonnage.

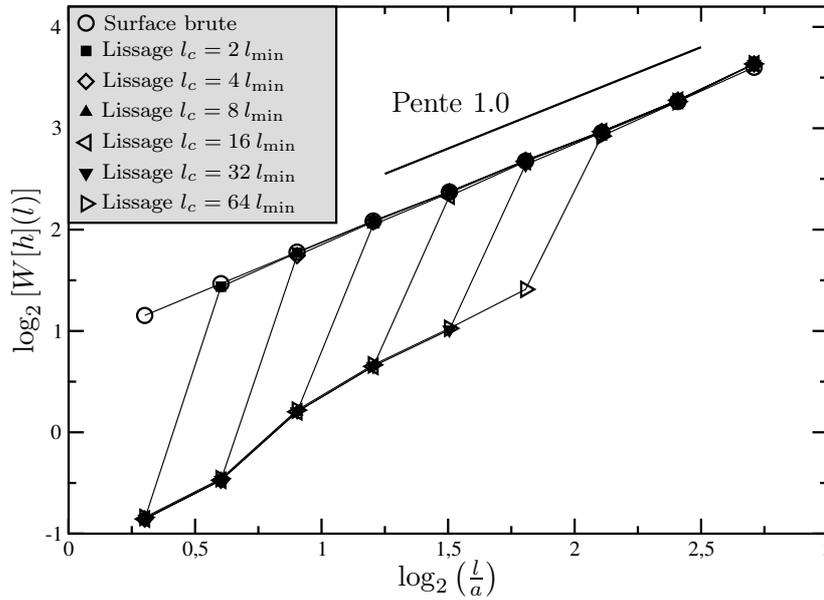


(b) Transformée en ondelettes 1D des profils d'une même surface après qu'elle a été filtrée par application d'une moyenne locale sur une fenêtre  $2^q \times 2^q$ , pour  $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .  $a$  est la maille de la grille.

FIG. 3.4 – Influence d'un moyennage local sur une surface auto-affine isotrope. L'analyse en ondelettes conserve la description auto-affine pour les échelles supérieures à 2 fois la taille de la fenêtre de moyennage, tandis que le spectre de puissance est modifié à toutes les longueurs d'onde.



(a) Analyse en spectre de puissance d'une surface où on a annulé les coefficients de la transformée en ondelettes à deux dimensions correspondant à des paramètres d'échelle  $a$  inférieurs à une échelle de coupure,  $l_c$ . Le spectre est inchangé aux échelles supérieures à  $2l_c$ .



(b) Analyse en ondelettes d'une surface où on a annulé les coefficients de la transformée en ondelette à deux dimensions correspondant à des paramètres d'échelle  $a$  inférieurs à une échelle de coupure,  $l_c$ . L'analyse en ondelettes est ici la description naturelle pour représenter cette coupure. Les propriétés d'invariance d'échelle sont inchangées pour  $l \geq 2l_c$ .

FIG. 3.5 – Influence d'un filtrage des coefficients d'ondelettes de petites échelles sur une surface auto-affine isotrope. Les analyses en spectre de puissance et en coefficient d'ondelettes moyenné font apparaître une conservation de l'auto-affinité aux échelles supérieures à deux fois le paramètre d'échelle choisi pour la coupure.

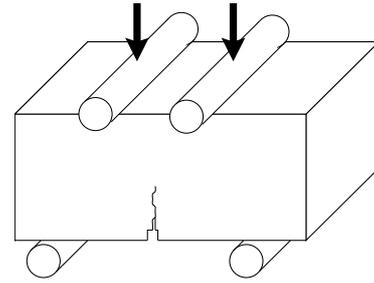


FIG. 3.6 – Flexion 4-points d’un bloc parallélépipédique. La rainure d’initiation permet d’obtenir une fracture planaire.

### 3.2.1 Étude de l’auto-affinité des profils

L’auto-affinité des profils de granite est bien connue. Elle a été mesurée par Schmittbuhl, Schmitt et Scholz (1995) et Boffa et al. (1998) à  $\zeta \simeq 0.8$ . Dans toute la suite de l’exposé, la direction  $x$  désigne la direction des profils, la direction  $y$  désigne la direction perpendiculaire.

#### Analyse d’enregistrements “mécaniques”

On présente à la figure 3.7 l’analyse d’un enregistrement de 10 profils de 2050 points, échantillonnés parallèlement à l’entaille d’initiation avec un pas  $\Delta x = 44$  microns, et espacés de 4 mm. Les profils sont positionnés sur l’axe  $y$  de façon à être suffisamment loin de l’entaille d’initiation. Les points enregistrés sont ainsi situés en-dehors de la zone de croissance de la rugosité. Dans la direction  $x$ , les échelles considérées vont de 44 microns à 9 cm, c’est-à-dire toutes les échelles accessibles sur une telle surface avec le dispositif de mesure dont nous disposons.

On a analysé les profils en utilisant la méthode du spectre de Fourier et la méthode du maximum d’ondelette moyenné. Les résultats de l’analyse sont présentés à la figure 3.7. Ils ont été systématiquement moyennés sur les 10 profils pour réduire les fluctuations de la statistique. Le spectre de phase (figure 3.7(b)) est un bruit blanc, ce qui confirme que les seules corrélations spatiales attendues concernent l’amplitude des modes de Fourier. Le spectre de Fourier a été réinterpolé sur un maillage linéaire; on effectue la régression linéaire sur le spectre interpolé, de façon à ne pas donner plus de poids dans la régression aux modes de petites échelles. Le spectre réinterpolé est représenté en trait épais, le spectre brut en trait fin, à la figure 3.7(a). On constate que le spectre s’aplatit aux échelles proches de la dimension horizontale de la surface, ce qui est probablement lié à la façon dont le bloc a été fracturé. D’une part, la fracturation a été initiée par une entaille, d’autre part, le front de fracturation interagit forcément avec les bords du bloc; ces deux effets ont pour effet d’aplatir la surface aux grandes échelles. La coupure aux petites échelles pourrait être due à l’effet de taille finie de la pointe (de diamètre 50 microns), car l’effet est similaire à l’effet d’intégration spatiale que nous avons étudié systématiquement au paragraphe 3.1.2. Il faudrait faire une étude systématique avec diverses tailles de pointes pour en être sûr. On pourra aussi se reporter à [Schmittbuhl, Vilotte et Roux, 1995] pour une étude détaillée des artefacts de mesure. Aux échelles intermédiaires, le spectre apparaît linéaire, et l’on peut estimer sa pente à  $-2.61 \pm 0.04$ . L’incertitude est estimée en faisant varier la fenêtre utilisée pour la régression dans une gamme raisonnable, et en regardant comment le choix de la fenêtre influence la pente obtenue pour la régression. L’exposant de rugosité ainsi estimé vaut  $\zeta = 0.81 \pm 0.02$ .

L’analyse en ondelettes confirme l’aplatissement des modes de grandes échelles, et le probable effet de taille finie de la pointe de mesure aux petites échelles. Dans la gamme d’échelles intermédiaires, on estime la pente de la régression à  $1.33 \pm 0.02$ . L’exposant de rugosité correspondant vaut  $\zeta = 0.83 \pm 0.02$ . Les deux estimations de cet exposant obtenues par le spectre de Fourier

et par le spectre d'ondelettes sont cohérentes, et leur confrontation conduit à estimer finalement l'exposant d'auto-affinité de la surface à

$$\boxed{\zeta = 0.82 \pm 0.01} \quad , \quad (3.2)$$

en bon accord avec les mesures antérieures. La gamme d'échelles pour laquelle cette auto-affinité a été mesurée est comprise entre 100 microns et 4 mm.

### Analyse d'enregistrements “optiques”

Sur des surfaces à la topographie aussi complexe que les surfaces de fracture rocheuses que nous étudions, la mesure optique pose quelques problèmes d'interprétation. Nous avons testé la validité de la mesure optique en enregistrant 10 profils de 2050 points espacés de 4 mm sur la même surface de granite avec le rugosimètre mécanique et avec le rugosimètre optique. Puis nous avons enregistré un moule en silicone de la surface de granite avec une grille identique. Les analyses des trois enregistrements sont présentées à la figure 3.8. On constate que les analyses des enregistrements optiques ne ressemblent pas aux analyses des mesures mécaniques.

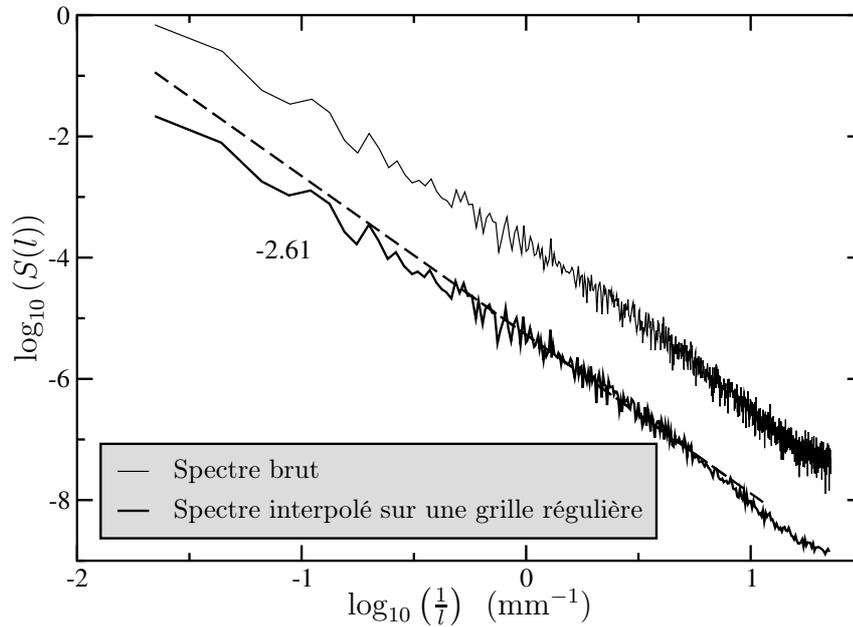
L'analyse de l'enregistrement optique réalisé sur la surface de granite fait apparaître un changement de pente net autour de 800 microns. Les deux spectres se superposent aux échelles supérieures à cette transition. On a pris soin de n'analyser que des profils (huit) qui ne contiennent pas de mesure aberrante. Néanmoins, on soupçonne qu'à une altitude donnée, une mesure non-aberrante dépend des propriétés de réflectivité locales de la surface. Il est probable que la nature très composite de la surface introduit un bruit de mesure conséquent, qui explique le comportement observé. En tous cas, la mesure optique directe sur une surface de granite semble devoir être évitée. Le comportement en échelles de l'enregistrement réalisé sur le moule est plus proche de ce qu'on a mesuré mécaniquement. Il y a cependant une différence sensible aux échelles intermédiaires (entre 150 microns et 2 mm). Des études complémentaires sont nécessaires pour déterminer si cet écart est lié à la mesure optique ou s'il est lié au moulage. Il est possible que les deux effets soient sensibles : problème lié au moulage aux grandes échelles, problème lié à la mesure aux petites échelles. Une modélisation numérique des problèmes de réflectivité locale pourraient être utile pour discriminer les effets.

### 3.2.2 Analyse en deux dimensions

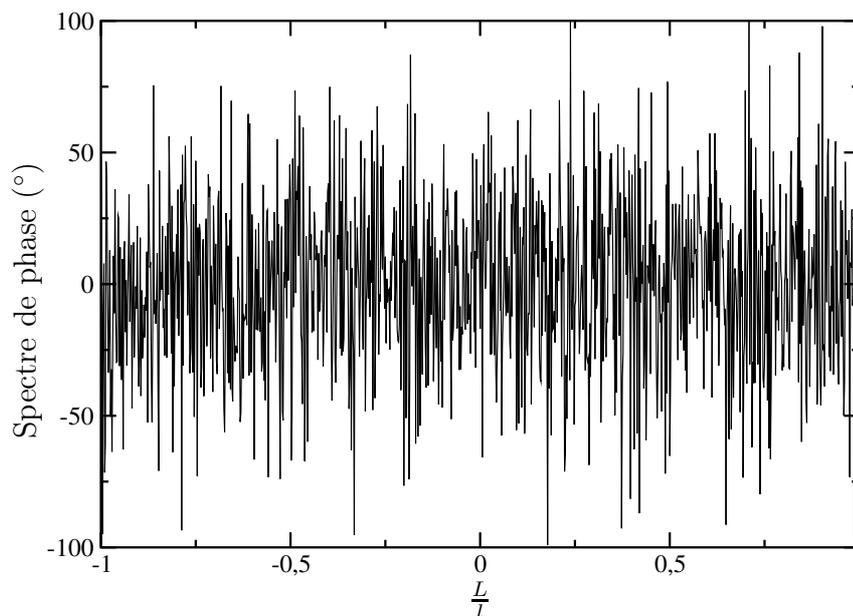
#### Spectre à deux dimensions d'une carte

La figure 3.9(a) est une carte en niveaux de gris du spectre de puissance de l'enregistrement dont la carte est représentée à la figure 2.9(b). Il s'agit d'un enregistrement sur une grille carrée de  $130 \times 130$  points, de maille 0.7 mm. L'échelle des niveaux de gris est logarithmique de façon à élargir la tache claire au centre du spectre, qui correspond aux modes de plus grande amplitude. Le spectre apparaît statistiquement isotrope. La figure 3.9 est une vue en 3 dimensions du même spectre. On a utilisé la transformation (1.34) qui permet de présenter le spectre avec la coordonnée radiale en échelle logarithmique. Le spectre lui-même est représenté en échelle logarithmique. On conserve ainsi la symétrie de révolution du spectre, mais les coordonnées cylindriques  $r$  et  $z$  sont toutes deux en échelles logarithmiques. Le spectre apparaît comme un cône de révolution, ce qui atteste de l'isotropie des corrélations des hauteurs de la topographie. Si de plus la surface est auto-affine, les génératrices du cône doivent être des droites.

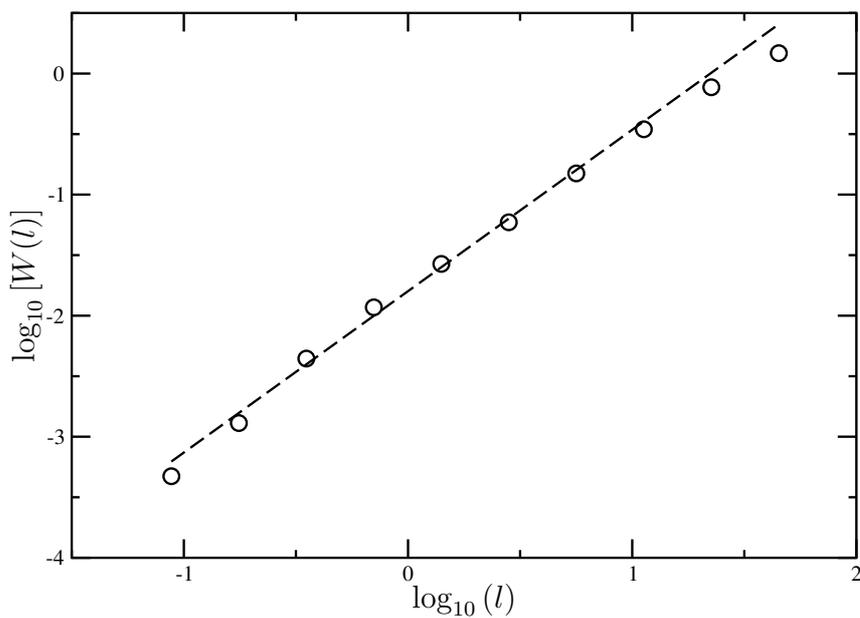
Malheureusement, cet enregistrement ne couvre qu'une petite partie de la gamme pour laquelle la surface en question est auto-affine (cf. figure 3.7), puisque l'échelle considérée la plus



(a) Spectre de puissance brut et spectre réinterpolé sur une grille linéaire. Les deux spectres sont décalés verticalement l'un par rapport à l'autre pour faciliter la lecture. Le spectre s'aplatit aux grandes échelles à cause de la façon dont l'échantillon a été fracturé. Aux petites échelles ( $l \leq 100 \mu\text{m}$ ), on constate l'effet de la taille finie de la pointe. On peut comparer l'allure du spectre aux petites échelles aux courbes de la figure 3.4. Dans la gamme d'échelles intermédiaires ( $0.100 \leq l \leq 4.000 \text{ mm}$ ), le spectre est bien approximé par une droite d'exposant  $-2.61 \pm 0.04$ .

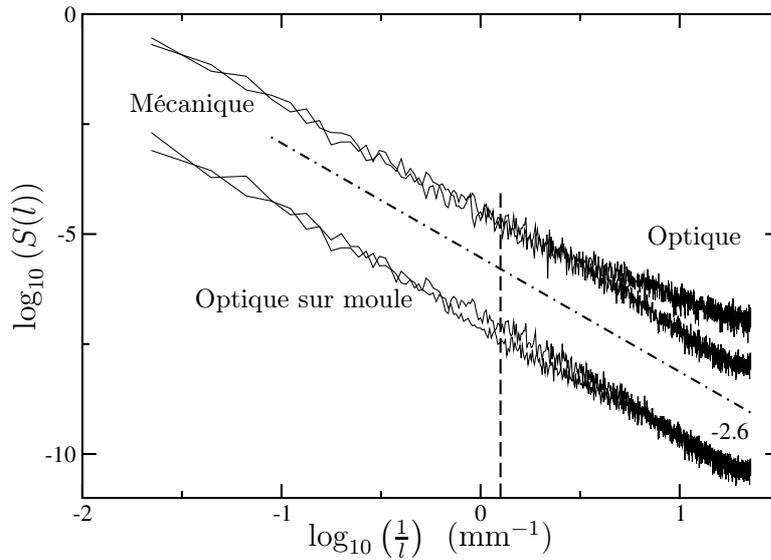


(b) Le spectre de phase, moyenné sur les différents profils, est un bruit blanc.

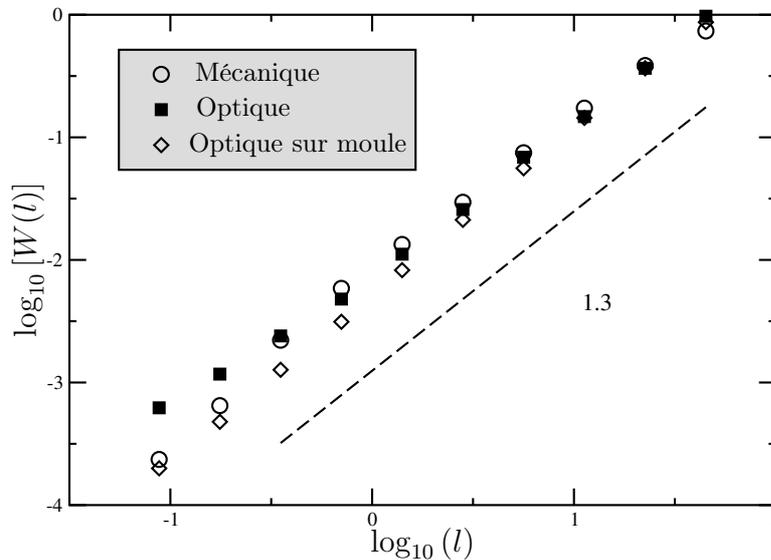


(c) Le spectre d'ondelettes confirme les observations faites à partir du spectre de puissance. Aux petites échelles, la pente du spectre est plus grande. Aux échelles proches de la taille de l'échantillon, le spectre s'aplatit. La régression aux échelles intermédiaires (les mêmes que pour le spectre de puissance) a une pente  $1.33 \pm 0.02$

FIG. 3.7 – Analyse de 10 profils de 2050 points enregistrés sur une surface de granite, avec un pas de 44 microns. La confrontation des analyses en spectre de Fourier et en ondelettes permet d'estimer le coefficient de rugosité de la surface comme  $0.82 \pm 0.01$ .



(a) Spectres bruts de 10 profils de granite enregistrés mécaniquement, de 8 profils de granite enregistrés optiquement, et de 10 profils enregistrés sur un moule en silicone de la surface de granite. Le spectre de l'enregistrement "mécanique" est reproduit deux fois. En haut de la figure, il est superposé au spectre de l'enregistrement "optique". En bas, il est superposé au spectre de l'enregistrement "optique sur moule". Ces spectres sont décalés verticalement pour permettre ces superpositions. La droite correspond à l'auto-affinité de la surface dans la gamme d'échelles intermédiaires.



(b) Analyse en ondelettes des profils dont les spectres de puissance sont présentés en (a). Il n'y a pas de décalage vertical des courbes, ici.

FIG. 3.8 – Comparaison des corrélations le long de profils enregistrés mécaniquement sur une surface de granite, optiquement sur la même surface, et optiquement sur un moule de la surface. L'enregistrement mécanique est la référence. L'enregistrement optique effectué directement sur la surface a un comportement en échelles qui s'écarte énormément du spectre "mécanique" aux moyennes et petites échelles. Le comportement en échelles de l'enregistrement optique du moule est plus proche de celui de l'enregistrement mécanique.

petite est la maille  $a = 700$  microns. Par ailleurs, l'étude réalisée au paragraphe 3.1.1 nous a montré qu'il vaut mieux analyser l'auto-affinité dans une direction donnée à partir d'un enregistrement de profils parallèles à la direction en question. On a donc testé l'isotropie de l'auto-affinité en analysant des profils finement échantillonnés, et orientés différemment sur la surface.

### L'auto-affinité est-elle isotrope ?

On présente à la figure 3.10 l'analyse de quatre séries de profils parallèles enregistrés à l'aide du rugosimètre mécanique sur la même surface de granite que celle considérée au paragraphe précédent. Chaque série de profils correspond à une valeur différente de l'angle  $\beta$  entre la direction des profils et la rainure d'initiation de la fracturation (ces deux directions sont dans un plan horizontal), et comporte 10 profils espacés de 4 mm ; les valeurs de  $\beta$  considérées sont  $\beta = 0^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$  et  $\beta = 90^\circ$ . Les profils de 1030 points ont été enregistrés avec un pas  $\Delta x = 55$  microns. La longueur d'un profil est ainsi de 5.7 cm. On a pris soin de faire les enregistrements dans la zone centrale de l'échantillon, de façon à être en-dehors de la zone de croissance de la rugosité, et également à plus de 2 cm des autres bords de l'échantillon. On espère ainsi pouvoir s'affranchir des effets de bord.

Les profils ont été analysés par la méthode du spectre de Fourier et par transformée en ondelettes. Les analyses ont été moyennées sur tous les profils d'une même série. On cherche à voir si l'on peut détecter une sensibilité des courbes d'analyse à l'orientation des profils. Les résultats de l'analyse en Fourier sont présentés à la figure 3.10(a), ceux de l'analyse en ondelettes à la figure 3.10(b). Les deux analyses sont cohérentes, et font apparaître les mêmes effets de bord aux grandes échelles, et de taille finie de la pointe aux petites échelles, que l'analyse présentée à la figure 3.7. On conclut à une valeur de l'exposant de rugosité de  $\zeta = 0.8 \pm 0.02$ , quelle que soit la direction des profils. Dans la limite de l'incertitude de mesure, on peut considérer qu'une description auto-affine isotrope de la surface avec un exposant  $\zeta \simeq 0.8$  est cohérente.

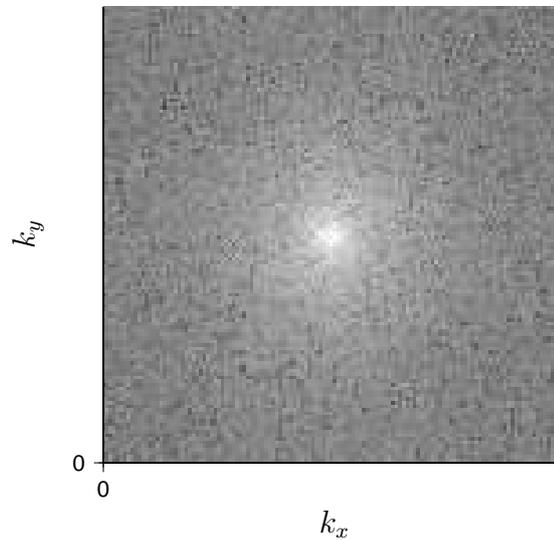
## 3.3 Étude expérimentale du grès

On s'intéresse dans cette partie à des surfaces de fracture de grès de Fontainebleau. Les surfaces de fracture ont été obtenues de la même manière que les surfaces de granite. Elles sont analysées de manière identique. Les figures qui suivent sont donc analogues à certaines figures présentées dans la partie 3.2. L'auto-affinité de profils de grès de Béréa a été mesurée par Boffa et al. (1998) à  $\zeta \simeq 0.5$ , une valeur qui s'écarte sensiblement de la valeur 0.8 généralement mesurée sur une grande diversité de matériaux fracturés de différentes manières [Bouchaud et al., 1990].

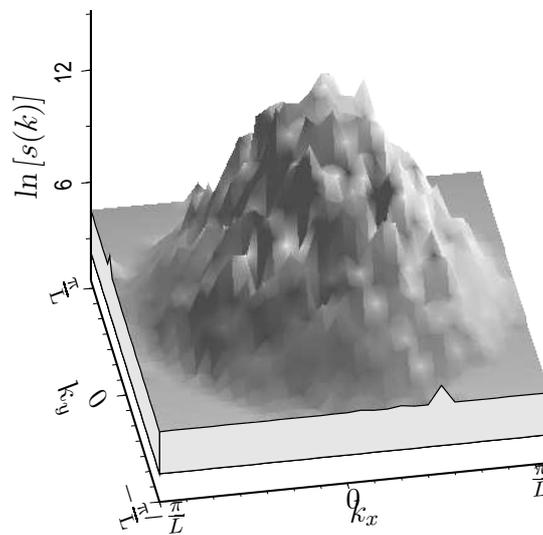
### 3.3.1 Étude de l'auto-affinité des profils

#### Analyse d'un enregistrement mécanique

La figure 3.11, analogue à la figure 3.7, présente les résultats de l'analyse de 10 profils de 1030 points enregistrés parallèlement à l'entaille d'initiation et suffisamment loin d'elle, avec un pas de 44 microns. Les analyses par les méthodes du spectre de Fourier et du coefficient d'ondelette moyenné sont cohérentes, et elles montrent une transition dans le spectre au niveau de la gamme d'échelles qui correspond à la taille des grains dans le grès : 220 à 300 microns. Aux échelles plus grandes que la taille des grains et inférieures à 5 mm, la surface apparaît auto-affine avec un exposant apparent  $\zeta_{\text{app}} = 0.5 \pm 0.03$ . Cette valeur est cohérente avec les mesures de Boffa et al. (1998), qui avaient obtenu 0.47 sur une gamme d'échelles comparable ( $300 \leq 4000$  microns).

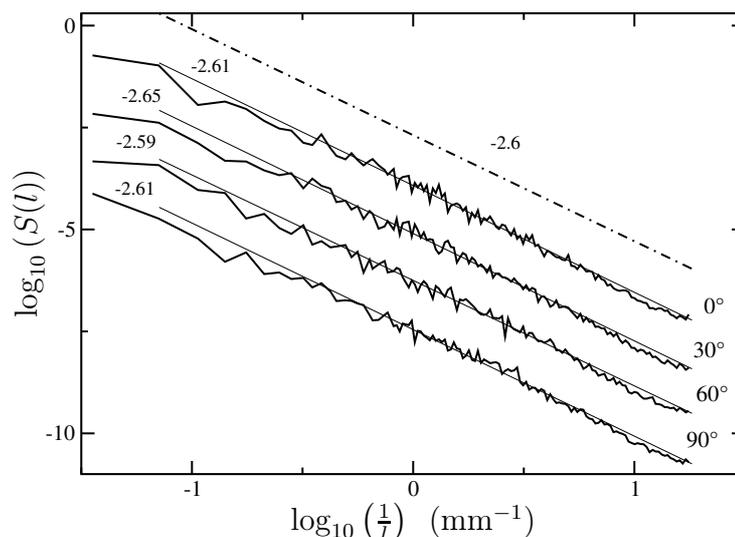


(a) Carte en niveaux de gris du logarithme du spectre de puissance de l'enregistrement dont la carte est présentée à la figure 2.9(b). Le spectre a l'air statistiquement isotrope.

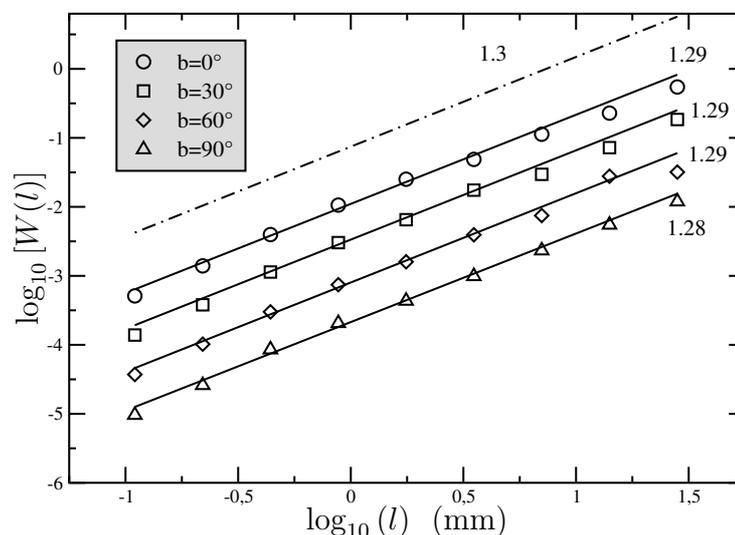


(b) Représentation en deux dimensions du spectre dont la carte est présentée en (a). Les coordonnées radiale,  $k$ , et verticale,  $S(k)$ , sont représentées en échelle logarithmique. Dans ce système de coordonnées, la surface d'un spectre auto-affine isotrope est un cône.

FIG. 3.9 – Représentations du spectre de Fourier à deux dimensions d'un enregistrement d'une surface de granite réalisé avec le rugosimètre mécanique, sur une grille carrée de  $130 \times 130$  points ( $\Delta x = \Delta y = 700$  microns).



(a) Spectres de Fourier moyennés sur 10 profils, pour différentes orientations des profils, repérées par la valeur de l'angle  $\beta$  entre la direction des profils et l'entaille d'initiation. Les spectres se superposent ; ici, ils ont été décalés verticalement de façon à être séparés de 4 unités, pour faciliter la lecture. Les pentes des régressions linéaires calculées sur même fenêtre pour tous les spectres sont indiquées à gauche des courbes. Les pentes ne sont pas déterminées à mieux de 0.04 près. Dans la limite de cette incertitude, on ne détecte pas de sensibilité de l'auto-affinité à l'orientation des profils. L'exposant de Hurst est estimé pour tous les profils à  $0.8 \pm 0.02$ .



(b) Analyse en ondelettes des mêmes séries de profils qu'en (a). On a introduit le même décalage vertical entre les profils qu'en (a). Les résultats sont cohérents avec l'analyse en Fourier. Les pentes des régressions sont mesurées à  $1.3 \pm 0.02$ .

FIG. 3.10 – Analyse de l'auto-affinité de profils de granite en fonction de l'orientation des profils. Dans la limite de l'incertitude sur la mesure de  $\zeta$  ( $\pm 0.04$ ), on peut conclure à une isotropie de la description auto-affine.

Boffa et al. (1998) ont vérifié que la position de la coupure dans le spectre est réellement liée à la taille des grains, et non pas à quelque artefact de la mesure, par exemple un effet de taille finie de la pointe. Ils ont effectué plusieurs enregistrements avec des pas d'échantillonnage différents, et la coupure s'est révélée être placée à la même échelle pour les différents enregistrements. Ici, les autres mesures que nous présentons dans la partie (3.3.3) ont été menées avec une taille de grille différente (55 microns), et la coupure se trouve positionnée au même endroit. Par conséquent, nous sommes assez confiants dans nos observations et dans leur cohérence avec les mesures antérieures. En outre, si l'effet de taille finie de la pointe concerne une gamme d'échelles identique à ce qu'on a observé pour cet effet avec le granite, ces échelles sont au moins 3 fois inférieures à la coupure que nous observons ici dans les analyses du grès.

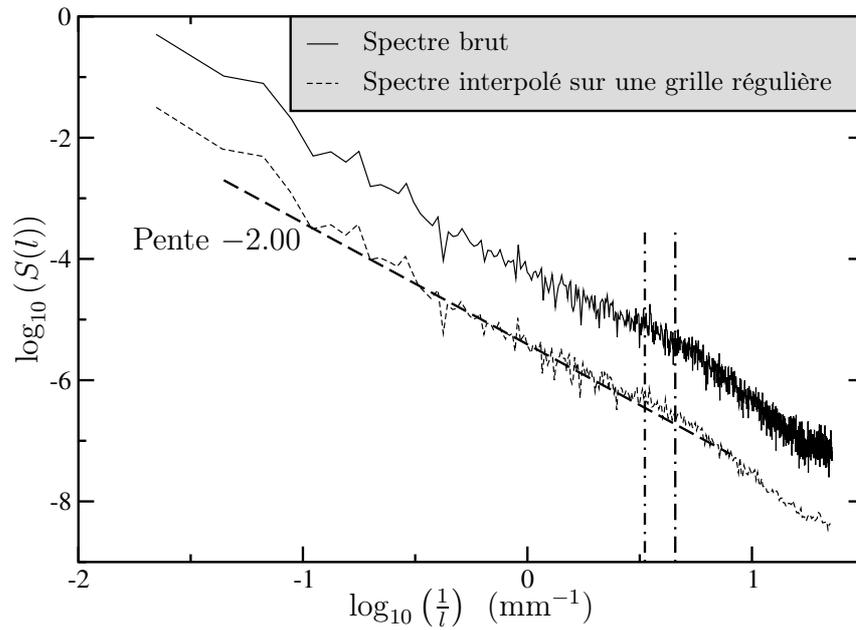
### Analyse d'un enregistrement optique

Le moulage des surfaces de grès est difficile, une partie importante des grains de surface restant solidaires du moule. On a cependant essayé de réaliser des mesures optiques, directement sur les surfaces de grès. On s'attend à priori à avoir moins de problèmes qu'avec le granite, étant donnée l'homogénéité de la surface : tous les grains sont constitués de quartz et sont de la même couleur. La figure 3.12 montre une comparaison entre les analyses réalisés sur des profils enregistrés mécaniquement et optiquement, sur des grilles identiques. Les résultats des analyses des profils enregistrés en rugosimétrie optique sont très différents des résultats obtenus à partir des profils enregistrés en rugosimétrie mécanique. Une comparaison avec la figure 3.8 permet de remarquer une similitude dans la transition entre les grandes échelles, où les deux spectres sont cohérents l'un avec l'autre, et les échelles plus petites où ils divergent. Dans les deux figures, la transition correspond à  $800 \sim 900$  microns, que ce soit pour l'enregistrement optique sur le granite, l'enregistrement optique sur le moule en silicone, ou l'enregistrement sur le grès. On peut donc supposer que ce phénomène est lié au dispositif de mesure, et pas à la nature de la surface.

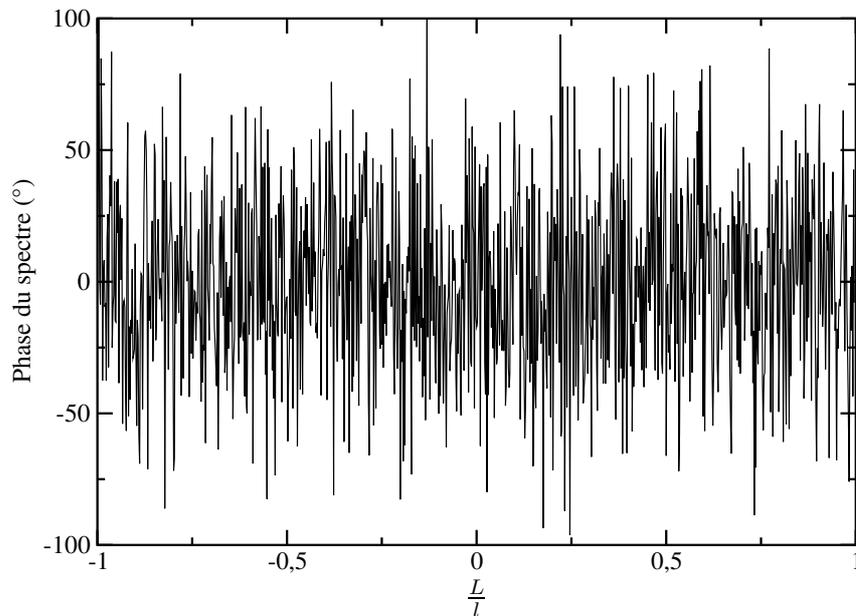
Du fait qu'elle passe aux joints de grains, la surface de fracture dans le grès comporte des "trous" (voir figure 3.13(b)). Il est probable que le capteur optique et la pointe ne "voient" pas ces trous de la même manière : le faisceau laser peut aller explorer le fond d'un trou de 50 microns d'extension horizontale ; au contraire, seule l'extrémité de la pointe de palpation mécanique va être assez fine pour descendre dans le trou, de sorte que l'altitude du fond du trou ne pourra pas être mesurée mécaniquement. La présence d'un trou dans l'enregistrement correspond à une pente locale très forte, qui peut perturber l'analyse en Fourier. Il est peut-être possible de repérer les trous dans l'enregistrement en analysant les pentes locales. Des analyses complémentaires sont ici nécessaires.

### Discussion – Quelle différence entre le granite et le grès ?

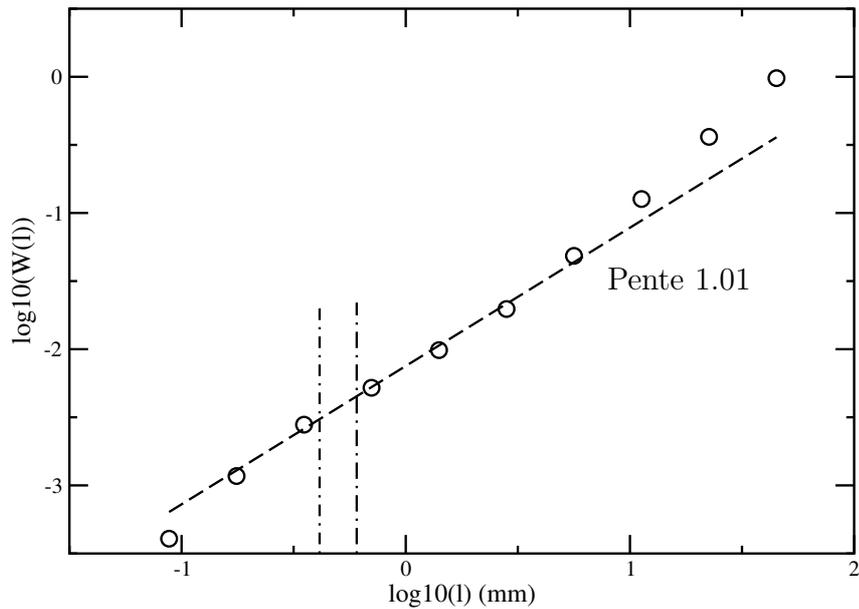
Boffa et al. (1998) attribuent la différence des valeurs mesurées pour les exposants de rugosité du granite et du grès à un mode de fracturation différent. La fracturation du grès se produit par désolidarisation des grains, et la surface de fracture passe par les joints de grain. Dans le granite, en revanche, la fracturation est intra-granulaire. Nous présentons à la figure 3.13 des photos de lames minces de nos éprouvettes, qui confirment le caractère inter-granulaire de la fracturation dans le grès, et le caractère intra-granulaire de la fracturation dans le granite. Les lames minces sont une section de l'échantillon perpendiculairement au plan moyen de la surface de fracture. L'interface entre le granite et la colle d'induration est un profil de la surface de fracture dont on suppose qu'il n'a pas été trop modifié par le litho-lamellage. Le profil de fracture observé sur la lame mince de granite passe à travers les grains, tandis que le profil de fracture observé sur



(a) Spectre de puissance brut et spectre réinterpolé sur une grille linéaire. Les deux spectres sont décalés verticalement l'un par rapport à l'autre pour faciliter la lecture. Aux petites échelles ( $l \leq 300 \mu\text{m}$ ), on constate une coupure qui coïncide avec la taille des grains de quartz. Dans la gamme d'échelles intermédiaires ( $0.300 \leq l \leq 4.000 \text{ mm}$ ), le spectre est bien approximé par une droite d'exposant  $-2.00 \pm 0.06$ . Les deux traits verticaux marquent les échelles correspondant aux tailles minimale et maximale des grains dans le matériau (voir figure 3.13(b)).

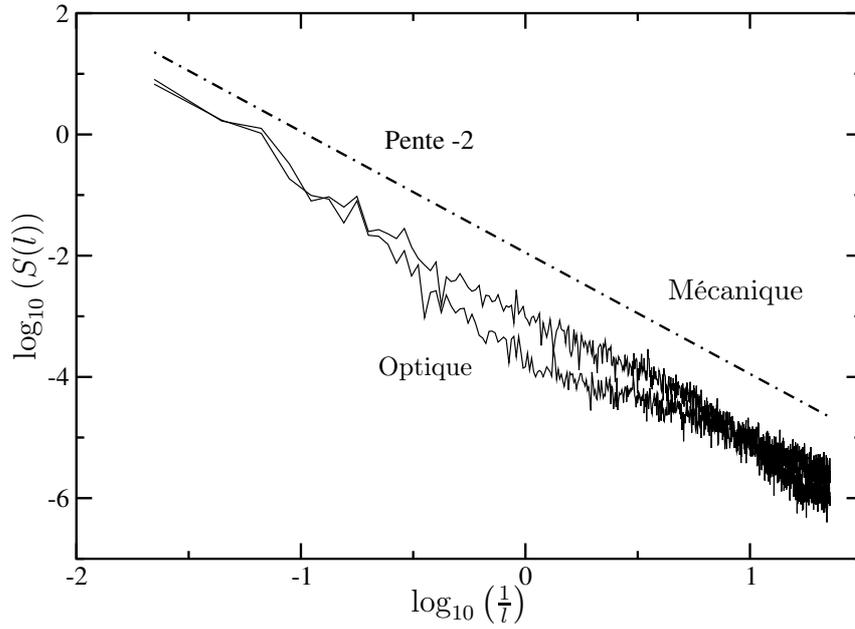


(b) Spectre de phase des profils de grès. On s'attend à voir la signature de la taille des grains dans le spectre. Ce n'est pas clair ici.

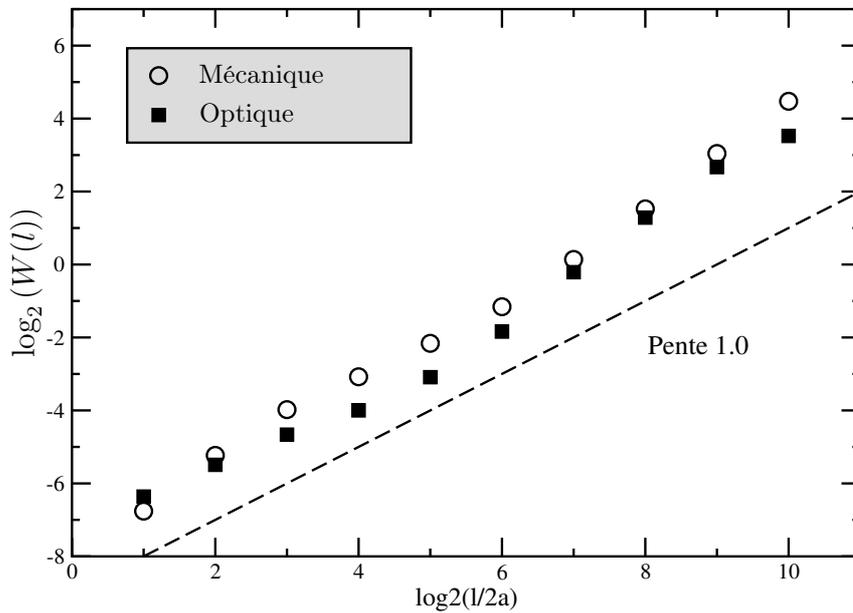


(c) Le spectre d'ondelettes confirme les observations faites à partir du spectre de puissance. Les traits verticaux ont la même signification qu'en (a). Aux échelles inférieures à la taille typique des grains, le spectre chute. Aux échelles proches de la taille de l'échantillon, le spectre remonte, indiquant des corrélations plus importantes. La régression aux échelles intermédiaires (les mêmes que pour le spectre de puissance) a une pente  $1.01 \pm 0.03$

FIG. 3.11 – Analyse de 10 profils de 2050 points enregistrés sur une surface de grès, avec un pas de 44 microns. La confrontation des analyses en spectre de Fourier et en ondelettes permet d'estimer le coefficient de rugosité de la surface comme  $0.50 \pm 0.01$ .



(a) Spectres bruts de 10 profils de grès enregistrés mécaniquement, de 10 profils de grès enregistrés optiquement. La droite correspond à l'auto-affinité de la surface dans la gamme d'échelles intermédiaires.



(b) Analyse en ondelettes des profils dont les spectres de puissance sont présentés en (a).

FIG. 3.12 – Comparaison des corrélations le long de profils enregistrés mécaniquement et optiquement sur une surface de granite. L'enregistrement mécanique est la référence. L'enregistrement optique effectué directement sur la surface a un comportement en échelles qui s'écarte sensiblement du spectre "mécanique" aux moyennes et petites échelles.

la lame de grès est une succession de joints de grains. La dimension horizontale des photos est 7 cm, ce qui a permis d'estimer les dimensions des grains de grès entre 220 et 300 microns.

Puisque dans le grès, la surface de fracturation suit les joints de grains, il est concevable que des profils enregistrés le long de surfaces de fracture de grès seront plus “chahutés” aux petites échelles que les profils enregistrés sur le granite. La différence dans les coefficients d'auto-affinité mesurés sur le spectre de Fourier pourrait être un artefact géométrique, c.-à-d., l'effet du motif d'un grain qui, se répétant le long du profil, viendrait modifier le spectre de Fourier à toutes les échelles. L'analyse en ondelettes (figure 3.11(c)) prouve qu'il n'en est rien : la même auto-affinité est observée dans le spectre en ondelettes, qui est une analyse à la fois locale en espace et locale en nombre d'onde. De manière équivalente, on peut filtrer tous les coefficients d'ondelettes du profil correspondant à des échelles inférieures à une échelle de coupure et regarder comment le spectre de Fourier du profil est modifié. D'après l'étude réalisée au paragraphe 3.1.3, un profil réellement auto-affine reste auto-affine aux échelles supérieures à l'échelle de coupure du filtrage. La figure 3.14 montre que c'est bien ce qu'on observe pour un profil enregistré sur le grès : on a éteint les coefficients d'ondelettes correspondant à des échelles inférieures à des échelles de coupure  $l_c = 8a$  et  $l_c = 16a$ , et dans les deux cas on ne change pas le spectre aux échelles supérieures à  $l_c$ . Boffa et al. (1998) étaient arrivés à la même conclusion en simulant dans des profils synthétiques le motif des grains par des facettes linéaires à une certaine échelle, en montrant que l'introduction de ces facettes ne modifiait pas le spectre de Fourier aux échelles supérieures à l'échelle des facettes.

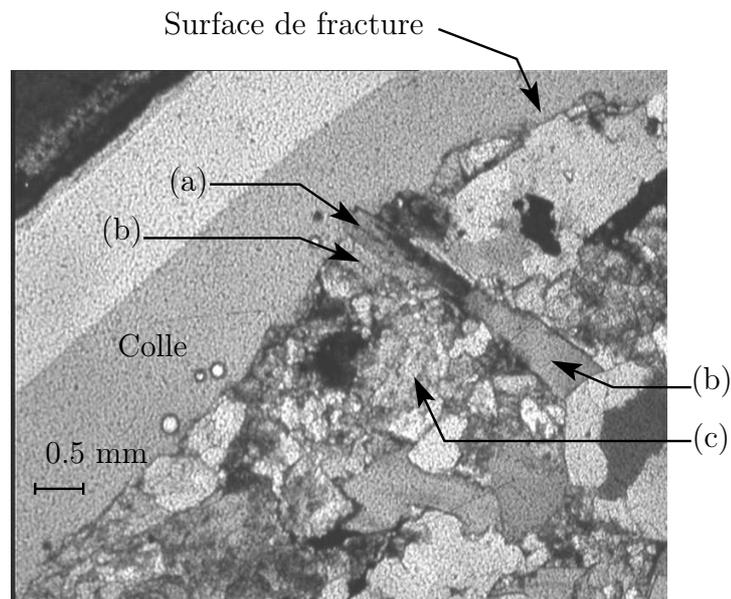
En définitive, la différence d'exposant mesurée est bien une différence dans la persistance des corrélations le long de la surface. Une topographie de grès présente des détails de petite échelle plus importants qu'une topographie de granite de même écart-type. Les deux profils présentés à la figure 3.15 en sont un exemple frappant.

### 3.3.2 Y a-t-il universalité du coefficient de rugosité ?

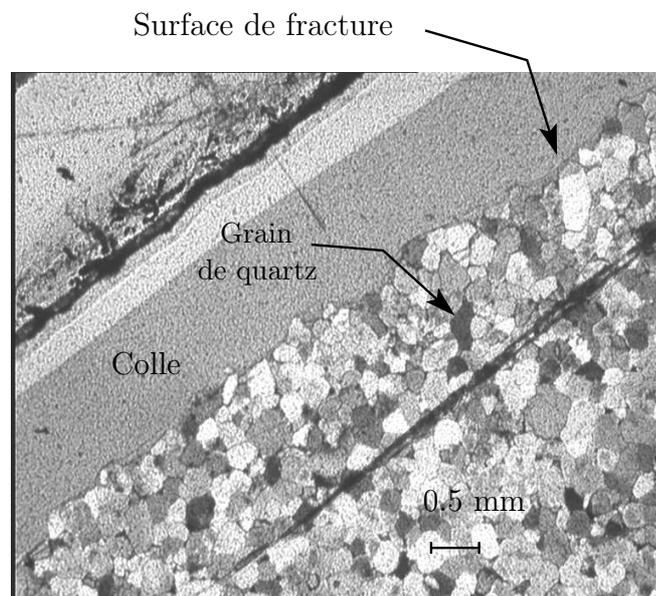
Bien que les premières études de l'auto-affinité des surfaces de fracture aient laissé supposer une corrélation entre l'exposant de rugosité et le facteur d'intensité critique de mode I du matériau,  $K_{Ic}$  [Mandelbrot, Passoja et Paullay, 1984], un certain nombre d'autres études [Bouchaud et al., 1990; Måløy, Hansen, Hinrichsen et Roux, 1992; Schmittbuhl et al., 1993] ont montré qu'il existait un domaine d'échelles où l'on retrouve un exposant de rugosité proche de 0.8. Le domaine d'échelles concerné dépend fortement du matériau, mais la constance de l'exposant a suggéré qu'il s'agissait peut-être là d'un *paramètre universel* [Meakin, 1993], et a motivé un nombre considérable de travaux dans le but de l'expliquer d'un point de vue théorique.

L'hypothèse d'universalité doit cependant être nuancée [Bouchaud, 1997]. En premier lieu, cet exposant est généralement rencontré dans le domaine micrométrique-millimétrique, tandis que Milman, Blumenfeld, Stelmashenko et Ball (1993) ont mis en évidence un régime différent à l'échelle submicrométrique, en utilisant un microscope à effet tunnel (Scanning Tunneling Microscope, STM) sur différents matériaux. En second lieu, McAnulty, Meisel et Coste (1992) ont montré que l'histoire de la fracturation pouvait influencer la valeur de l'exposant de Hurst. Ils ont effectué des mesures de fractométrie sur des échantillons d'acier fracturés de deux manières. Les échantillons fracturés par poinçonnement d'une rainure d'initiation présentaient un exposant de Hurst proche de 0.8, tandis que des échantillons fracturés après endommagement du matériau par des cycles de charge-décharge préalables à la fracture présentaient une topographie beaucoup moins corrélée, avec un exposant proche de 0.6.

Une explication possible de ces mesures, cohérente avec l'hypothèse d'universalité, est peut-être fournie par les modèles de propagation de ligne de fracture [Ertaş et Kardar, 1992; Ertaş et Kardar, 1994; Schmittbuhl, Roux, Vilotte et Måløy, 1995; Ramanathan, Ertaş et Fisher, 1997] où



(a) Lame mince de granite de Lanhélin, photographiée en lumière polarisée. On distingue au microscope les différents minéraux constitutifs de la roche : biotite (a), muscovite (b) et feldspathopotassium (c). La ligne de fracturation passe à travers les grains.



(b) Lame mince de grès de Fontainebleau, photographiée en lumière polarisée, ce qui explique les différentes teintes des grains de quartz. La rainure noire dans la roche est une rayure de la lame. On distingue au voisinage de l'interface la ligne de colle d'induration, qu'il ne faut pas confondre avec l'interface elle-même. L'interface entre le grès et la colle d'induration passe très clairement aux joints des grains situés à l'interface. Les grains de sont pas fracturés. Les tailles de grain varient entre 220 microns et 300 microns.

FIG. 3.13 – Comparaison des lignes de fracturation sur des lames minces de grès et de granite. La fracture dans le granite est intra-granulaire, elle est inter-granulaire dans le grès. La dimension horizontale des échantillons est 7 mm en taille réelle.

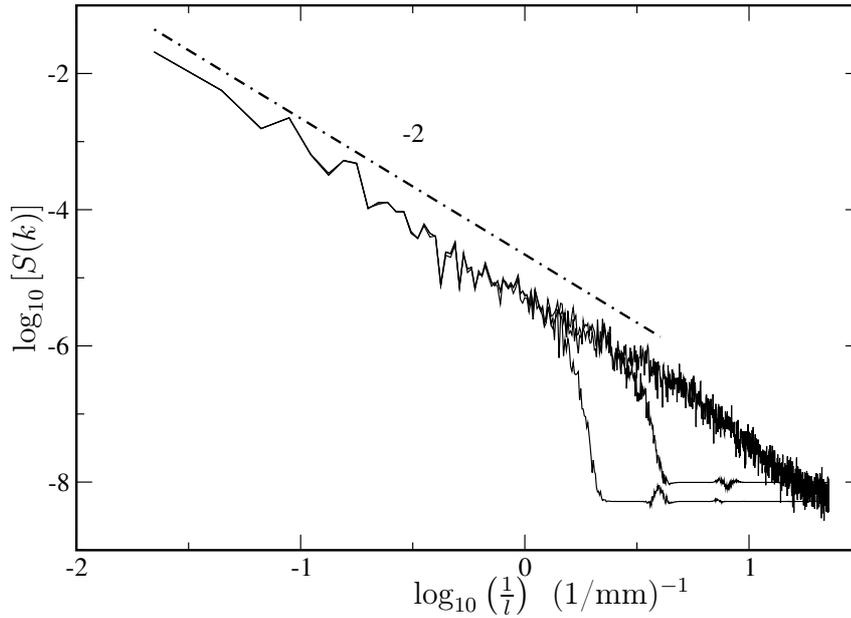


FIG. 3.14 – Filtrage des coefficients d’ondelettes de profils d’une surface de grès. Les coefficients d’ondelettes correspondant à des échelles inférieures à une échelle de coupure donnée sont annulés. Le spectre de Fourier du profil ainsi filtré n’est pas modifié aux échelles supérieures à l’échelle de coupure.

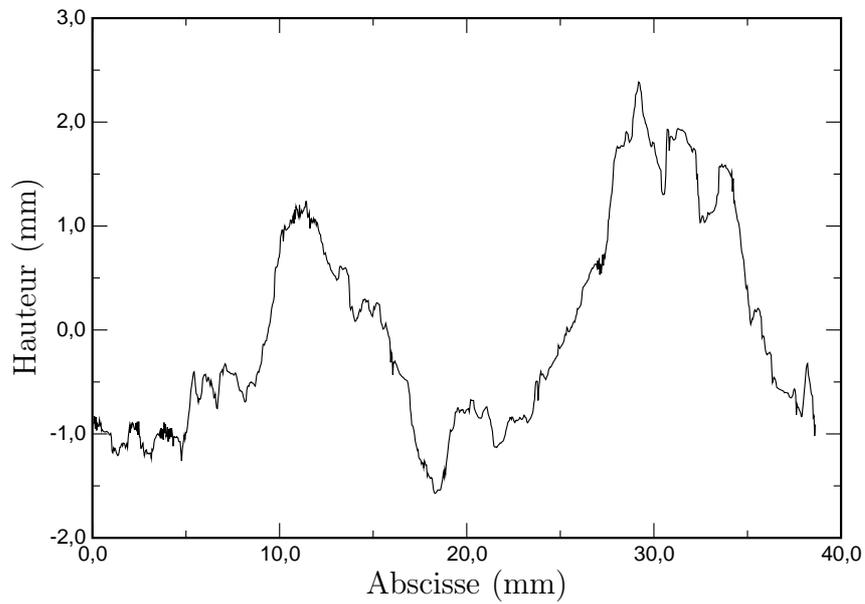
la ligne avance dans un milieu comportant des impuretés distribuées aléatoirement [Bouchaud et al., 1993]. La progression de la ligne est contrôlée localement par son interaction avec les obstacles microscopiques, de sorte qu’un régime auto-affine lié à eux apparaît aux petites échelles, tandis que les grandes échelles correspondent à un régime d’exposant plus élevé, qui rejoint l’universalité évoquée plus haut [Bouchaud et al., 1990]. La transition entre les deux régimes se produit à une échelle qui est une fonction puissance de la vitesse de propagation macroscopique de la fracture. En particulier, le régime “universel” n’existe pas lors d’une fracturation quasi-statique, un processus dont se rapproche la fracture après cycles d’endommagement.

Des modélisations par un réseau de points reliés par des ressorts ont également été réalisées. Parisi et Caldarelli (2000) obtiennent un exposant de rugosité de 0.5, en bon accord avec la description à petite échelle des modèles d’accrochage-arrachement (*pinning-depinning*) de ligne.

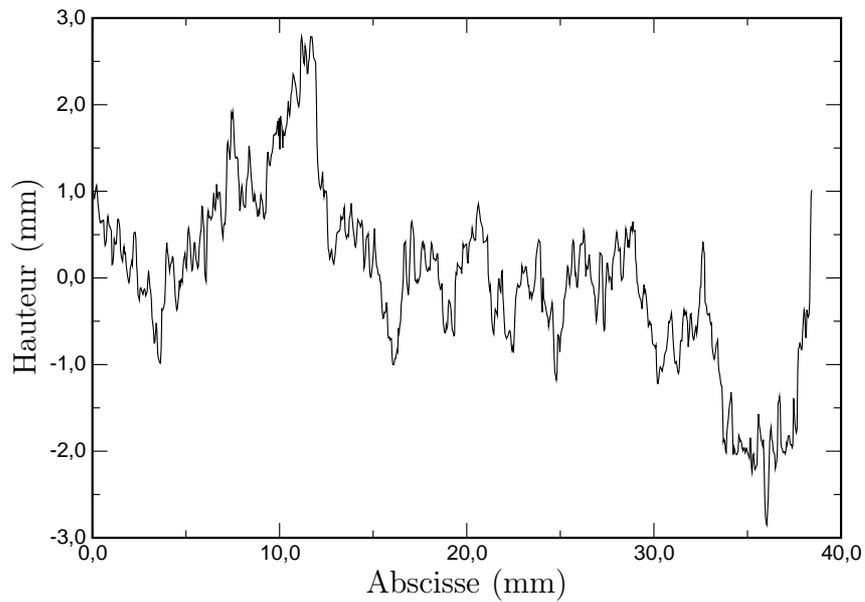
Les mesures sur le grès que nous avons présentées dans ce chapitre confirment la valeur de 0.47 obtenue antérieurement pour l’exposant de rugosité du grès par Boffa et al. (1998), qui avaient travaillé avec des échantillons de grès de Berea fracturés en mode I à vitesse constante pour éviter l’embranchement des fractures, mais de manière non-quasistatique et sans endommagement préalable du matériau. Ces deux mesures sont en désaccord avec l’hypothèse d’universalité.

### 3.3.3 Isotropie de l’auto-affinité dans le grès

On a effectué sur le grès des mesures identiques aux mesures présentées au paragraphe 3.2.2. On aboutit à des conclusions similaires : on ne détecte pas de sensibilité de l’auto-affinité des profils à leur orientation. Cependant, la gamme d’échelles où l’on pu faire la régression est plus réduite que sur le granite, et par conséquent, l’incertitude sur la détermination de l’exposant de rugosité est plus importante. En toute rigueur, on peut estimer  $\zeta = 0.52 \pm 0.04$ , pour toutes les orientations (voir figure 3.16).

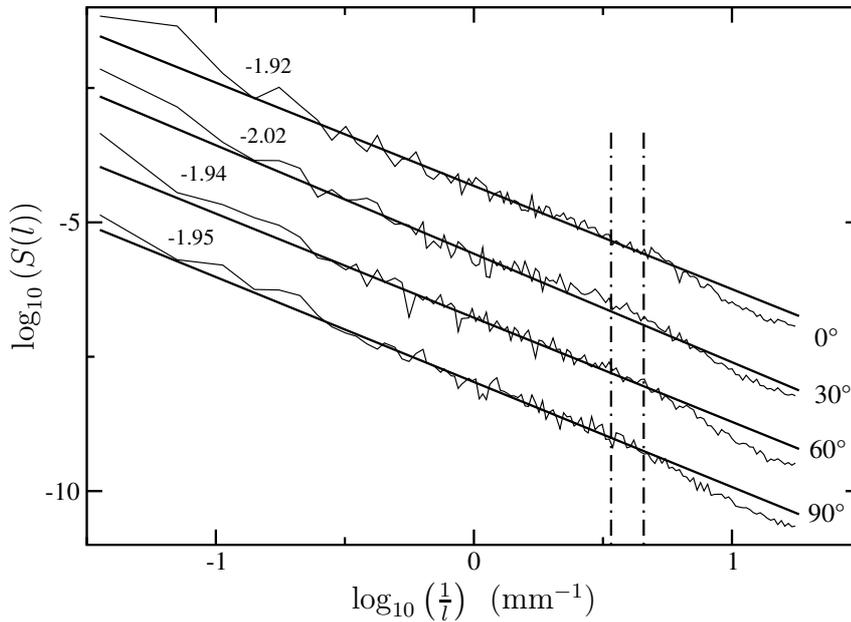


(a) Profil issu de l'enregistrement d'une surface de granite.

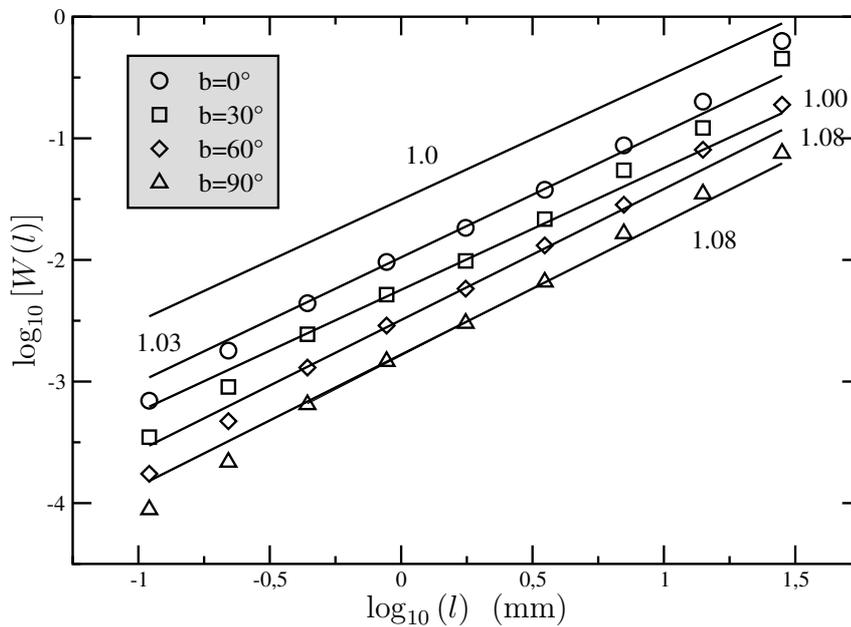


(b) Profil issu de l'enregistrement d'une surface de grès. Le profil apparaît beaucoup plus "chaotique" que le profil de granite. Dans le grès, les détails de petite échelle sont plus importants que dans le grès, relativement aux détails de grande échelle. C'est ce que traduit l'écart des exposants d'auto-affinité.

FIG. 3.15 – Comparaison de deux profils extraits d'enregistrement, l'un de granite, et l'autre de grès. Les deux profils ont été normalisés de la même manière. Les détails de petites échelles sont beaucoup plus importants dans le grès.



(a) L'analyse en Fourier fournit  $\zeta = 0.49 \pm 0.04$  pour toutes les directions de mesure. Les spectres ont été positionnés à égale distance les uns des autres, pour clarifier la figure; normalement ils se superposeraient.



(b) L'analyse par la méthode du maximum d'ondelette moyenné fournit  $\zeta = 0.54 \pm 0.04$ . On a introduit le même décalage vertical des courbes qu'en (a).

FIG. 3.16 – Analyse de 4 séries de 10 profils enregistrés sur le grès avec des orientations différentes par rapport à la rainure d'initiation. Dans la limite de l'incertitude de mesure, on ne peut pas détecter de sensibilité de l'exposant de Hurst à la direction des profils.

## Conclusion

L'étude de la rugosité des surfaces de granite et de grès a permis de tirer quelques conclusions et d'ouvrir un vaste champ d'interrogations. En premier lieu, il semble que hors de la zone de croissance de la rugosité, les surfaces de granite puissent être considérées avec une bonne approximation comme des surfaces auto-affines isotropes, de coefficient de Hurst  $\zeta \simeq 0.8$ . La recherche d'une éventuelle anisotropie "cachée" derrière le comportement auto-affine est en cours. Elle nécessite des enregistrements à deux dimensions sur des grilles plus fines que celles dont on dispose actuellement. Le développement du rugosimètre optique avait pour but de réduire sensiblement les temps de mesure pour obtenir de telles cartes dans un délai raisonnable (moins d'une semaine de mesure). Or les différences observées dans les enregistrements réalisés avec le dispositif mécanique et avec le dispositif optique ne sont pas encore pleinement comprises. Les mesures optiques sur moules en silicone semblent permettre la détermination de l'exposant d'auto-affinité, mais les résultats des analyses sur ces enregistrements ne sont pas complètement identiques aux analyses réalisées sur les enregistrements mécanique. La mesure optique est moins bien contrôlée que la mesure mécanique, mais le filtrage introduit par la largeur du faisceau semble plus simple à prendre en compte étant donné qu'il ne privilégie pas les collines par rapport aux vallées, comme le fait la pointe de palpement mécanique. Une étude complémentaire est nécessaire pour déterminer si l'on peut utiliser les cartes enregistrées optiquement sur les moules pour rechercher une description anisotrope au second ordre de la surface.

En second lieu, les résultats de Boffa et al. (1998) sur l'auto-affinité des profils de grès ont été confirmés. Le grès semble manifester un comportement auto-affine d'exposant  $\zeta \simeq 0.5$  aux échelles supérieures à la taille de ses grains (c'est-à-dire 300 microns). Cette valeur rarement mesurée de l'exposant de Hurst semble être liée au mécanisme de la fracturation, qui est inter-granulaire, alors qu'elle est intra-granulaire dans le granite. La valeur mesurée n'est pas uniquement un effet géométrique lié au fait que la surface de fracture suit les joints de grains, mais consiste vraiment en une différence de persistance des corrélations spatiales le long de la topographie, différence liée au type de fracturation du matériau. Une telle mesure met en danger l'hypothèse d'universalité de l'exposant de rugosité des surfaces de fracture avancée par une partie de la communauté. Nous avons par ailleurs vérifié, dans la limite de l'incertitude de mesure, qu'une description auto-affine isotrope était raisonnable, comme pour le granite, mais avec un exposant différent. Le rôle des trous de la surface de fracture dans le grès n'est pas encore bien compris. Il est probable que le dispositif de rugosimétrie mécanique ne voit pas réellement ces trous, alors que le dispositif de rugosimétrie optique en détecte un certain nombre. Une modélisation numérique de l'effet des trous sur les mesures mécanique et optique est envisagée.

En ce qui concerne le sujet de cette thèse, la principale conclusion de l'étude expérimentale de la rugosité des surfaces de fracture est que la modélisation des surfaces de fracture réelles par une géométrie auto-affine isotrope est une bonne description au premier ordre. Nous emploierons cette description dans nos simulations numériques d'écoulements dans une fracture rugueuse (chapitres 6 et 7).

Les développements à venir de l'étude des surfaces concernent la description au second ordre des surfaces, et la recherche d'une anisotropie, qui serait une trace du processus anisotrope ayant provoqué la fracturation. Une meilleure compréhension de la différence entre les enregistrements mécaniques et optiques, à la fois pour le grès et pour le granite, serait à développer conjointement. La réalisation de moules optiquement homogènes rigides est envisagée, de façon à pouvoir comparer directement enregistrements mécanique et optique.



Deuxième partie

Écoulement de Stokes dans une fracture  
rugueuse



## Chapitre 4

# Transport de matière dans une fracture

### Sommaire

---

<b>Introduction</b>	<b>109</b>
<b>4.1 Géométrie des ouvertures locales de la fracture</b>	<b>109</b>
4.1.1 Modélisation de la géométrie de la fracture	109
4.1.2 Propriétés des surfaces	112
4.1.3 Propriétés du champ des ouvertures de la fracture	112
Conclusion	114
<b>4.2 Description des propriétés hydrauliques d'une fracture ouverte</b>	<b>115</b>
4.2.1 Description mathématique de l'écoulement	115
4.2.2 Fracture sans rugosité – Loi cubique	116
4.2.3 Écoulement de Stokes – Loi de Darcy	117
Loi de Darcy	117
Ouverture mécanique et ouverture hydraulique	118
4.2.4 Équation de Reynolds	118
Approximation de lubrification	118
Conservation du champ $\mathbf{q}$	120
Estimation du nombre de Reynolds $\nabla d \ll 1$	120
<b>4.3 Influence de la rugosité sur l'écoulement : plusieurs approches</b>	<b>120</b>
4.3.1 Approches expérimentales	121
4.3.2 Approches analytiques	121
Traitement analytique de l'équation de Stokes	121
Généralisation de l'équation de Reynolds	122
4.3.3 Approches fondées sur l'équation de Reynolds	122
Traitement théorique de l'équation de Reynolds	122
Résolution numérique de l'équation de Reynolds	123
4.3.4 Autres types d'études numériques	124
Études numériques avec couplage hydro-mécanique	124
Étude numérique de l'écoulement à haut Reynolds	124
4.3.5 Cadre de l'étude présentée dans les chapitres suivants	124
Conditions d'écoulement considérées – Applicabilité	124
Gamme d'ouvertures considérée	125
Un modèle de demi-fracture équivalent	125
<b>Conclusion</b>	<b>126</b>

---



## Introduction

La partie II de ce mémoire concerne l'étude de l'influence de la rugosité des parois d'une fracture rugueuse sur l'écoulement dans la fracture. Lorsque l'ouverture de la fracture est grande par rapport à l'amplitude de la rugosité, celle-ci a une influence négligeable sur l'écoulement. On peut alors approximer l'écoulement dans la fracture comme l'écoulement entre deux plan parallèles, une configuration (dite de Poiseuille plan) dont la solution théorique est bien connue. Lorsque l'ouverture moyenne de la fracture et l'amplitude de la rugosité sont du même ordre de grandeur, cette approximation n'est plus valable, et l'on cherche à savoir comment le comportement hydraulique de la fracture s'écarte de celui d'un modèle de Poiseuille plan.

Dans ce chapitre, nous présentons le cadre de l'étude et les outils dont nous nous servons dans les chapitres suivants. Dans une première partie, nous définissons le modèle de fracture que nous considérons dans notre étude, et quels sont les paramètres descriptifs de la géométrie de la fracture. Dans une deuxième partie, nous présentons le modèle de Poiseuille plan, qui servira de référent pour quantifier l'effet de la rugosité. Nous expliquons comment l'écart à ce modèle sera estimé, et nous présentons une approximation qui est au fondement de nos études expérimentale et numériques. Dans une troisième partie, nous exposons un panorama des travaux menés antérieurement sur le sujet. Enfin nous présentons notre approche en définissant précisément les conditions hydrauliques de l'étude qui va être menée aux chapitres suivants, et en la positionnant vis-à-vis des travaux antérieurs.

### 4.1 Géométrie des ouvertures locales de la fracture

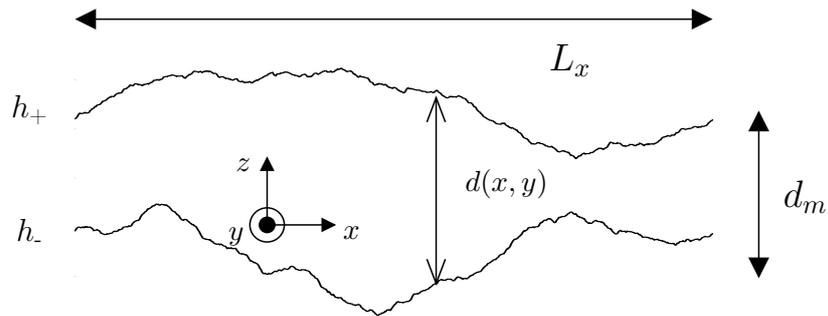
#### 4.1.1 Modélisation de la géométrie de la fracture

Le modèle de fracture rugueuse que nous considérons est le suivant : deux surfaces rugueuses sont placées en regard, avec leurs plans moyens parallèles l'un à l'autre (cf. figure 4.1(a)) et séparés par une distance  $d_m$ , couramment appelée *ouverture mécanique*. La rugosité de la surface de fracture supérieure (respectivement, inférieure) est définie par la distribution  $h_+$  (respectivement,  $h_-$ ) qui associe à une position horizontale  $(x, y)$  sur le plan moyen de la surface la distance  $h_+(x, y)$  (respectivement,  $h_-(x, y)$ ) entre le point de la surface situé à cette position horizontale et le plan moyen. Les distributions  $h_+$  et  $h_-$  ont même écart-type  $\sigma$ . La projection de chacune des surfaces sur son plan moyen est un rectangle de côtés  $L_x$  et  $L_y$  ( $L_y$  n'est pas représenté sur la figure 4.1(a)). Ce type de fracture planeaire correspond à ce que certains hydro-géologues nomment fractures *systématiques* [Singhal et Gupta, 1999]. Les figures 4.2(a) [Ameen, 1995a] et 4.2(b) [Roberts, 1995] présentent des photos de la trace laissée sur des surfaces de stratification par des fractures naturelles, dans le grès et le calcaire, respectivement ; les traces des fractures apparaissent linéaires, et suggèrent une géométrie planeaire des fractures.

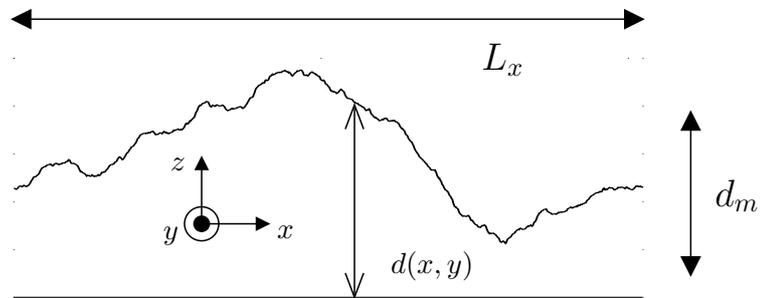
Nous nous intéressons à des fractures ouvertes, c'est-à-dire que les deux parois ne sont pas en contact. Les configurations où les deux surfaces rugueuses sont poinçonnées l'une dans l'autre sont écartées de l'étude. Dans ces conditions, le champ des ouvertures de la fracture est défini comme

$$\boxed{d(x, y) = h_+(x, y) - h_-(x, y) + d_m} \quad , \quad (4.1)$$

et puisque les distributions  $h_+$  et  $h_-$  sont de moyenne nulle, l'ouverture mécanique  $d_m$  est la valeur moyenne du champ des ouvertures locales,  $d : \langle d \rangle = d_m$ . Comme il n'y a pas de poinçonnement des surfaces, une modification de l'ouverture moyenne de la surface ne modifie jamais la distribution spatiale de ses ouvertures locales autour de la valeur moyenne : la distribution  $d$  est simplement

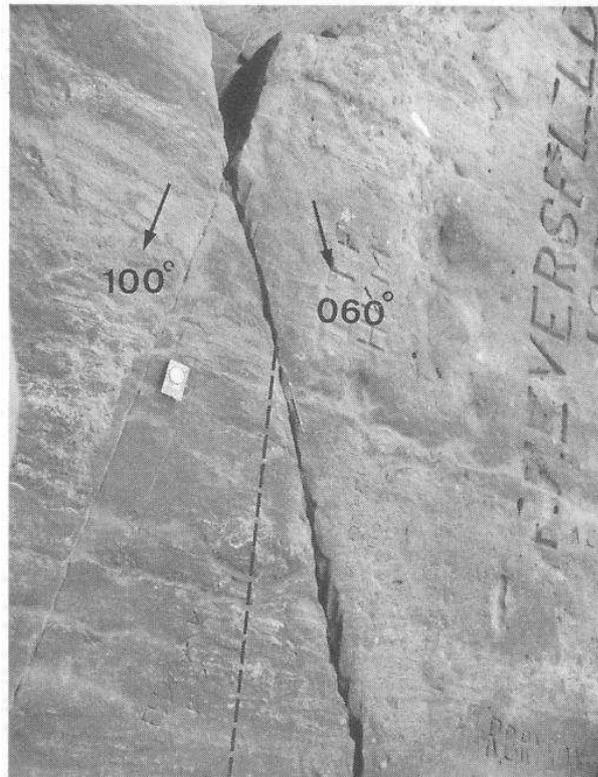


(a) Géométrie du modèle de fracture rugueuse. Les paramètres descriptifs de la fracture sont son ouverture mécanique  $d_m$ , l'écart-type  $\sigma$  des distributions  $h_+$  et  $h_-$ , l'exposant de rugosité  $\zeta$  des surfaces, et l'extension horizontale  $L_x$  de la fracture. Le champ des ouvertures locales est défini à partir des distributions  $h_+$  et  $h_-$  et de l'ouverture moyenne  $d_m$  par la relation (4.1).

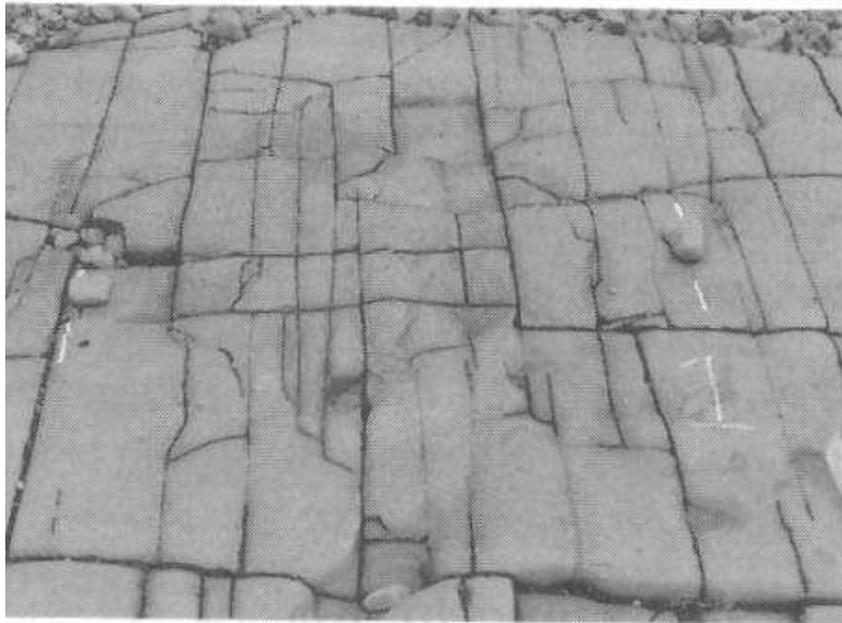


(b) Demi-fracture dont le champ des ouvertures  $d$  est le même que celui de la fracture présentée en (a). L'écart-type  $\Gamma$  de la topographie rugueuse correspond à l'écart-type du champ des ouvertures de la figure 4.1(a).

FIG. 4.1 – Les deux fractures ci-dessus ont même champ des ouvertures. Si l'approximation de lubrification est valide, cela signifie également qu'elles ont même perméabilité.



(a) Photographie de la trace d'une fracture sur une surface de stratification, dans le grès. La boussole fait 10 cm de long.



(b) Traces de joints dans le calcaire. Les traces sont distantes de 1 m.

translatée. L'article présenté en annexe au chapitre 7 fait exception à cette règle : dans certain cas, on a autorisé un poinçonnement modéré des deux parois l'une dans l'autre ; on a alors considéré une fermeture infiniment plastique, où les zones de recouvrement entre les deux parois disparaissent purement et simplement.

### 4.1.2 Propriétés des surfaces

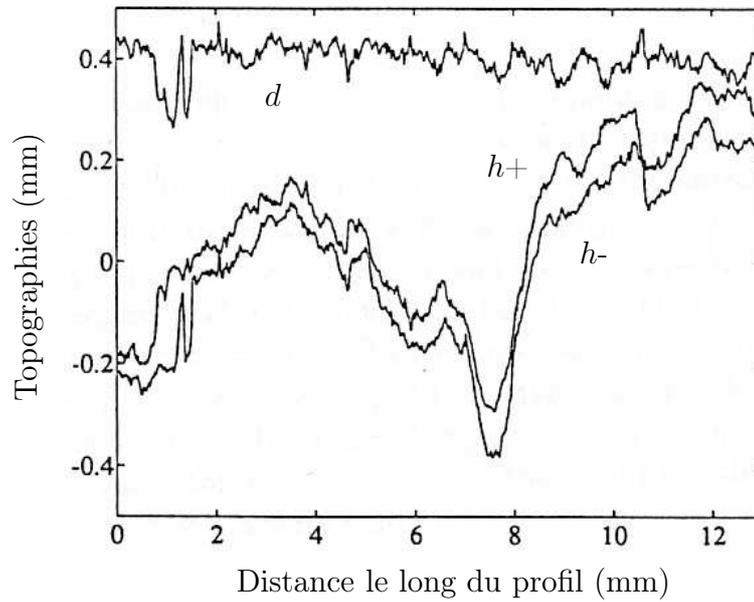
On suppose que les parois de la fracture ont les mêmes propriétés que les surfaces de fracture obtenues en laboratoire et étudiées au chapitre 3. L'auto-affinité des profils de surface de fractures naturelles [Power et Durham, 1997] et de failles [Schmittbuhl et al., 1993] a été constatée dans des travaux antérieurs. Nous supposons que l'isotropie de la description auto-affine, que nous avons constatée pour nos fractures obtenues en laboratoire, est une description valide. Les surfaces sont ainsi assimilées à des topographies auto-affines isotropes. L'algorithme présenté au paragraphe 1.2.3 permet d'engendrer numériquement de telles topographies. L'exposant de rugosité est choisi dans une gamme de valeurs comprises entre la valeur mesurée pour le grès (0.5) et celle mesurée pour le granite (0.8, cf. chapitre 3). Par suite, les surfaces sont asymptotiquement planes (cf. paragraphe 1.1.3), et la notion de plan moyen a une signification en tant que limite asymptotique des surfaces aux grandes échelles. Une telle description des surfaces est cohérente avec la géométrie définie pour la fracture au paragraphe 4.1.1. L'exposant de rugosité est supposé être le même pour les deux surfaces.

### 4.1.3 Propriétés du champ des ouvertures de la fracture

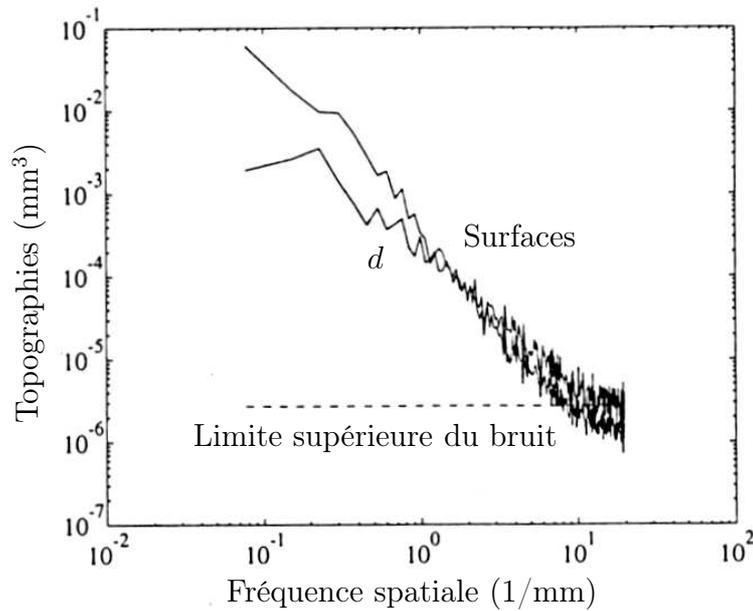
Des mesures effectuées sur des surfaces de fracture naturelles [Brown, 1986; Glover, Matsuki, Hikima et Hayashi, 1998b] ont montré que les deux parois d'une même fracture sont *ajustées* aux grandes échelles, c'est-à-dire que les fluctuations de grande longueur d'onde de leurs topographies sont identiques. Cette propriété est attendue, puisque les deux surfaces de fracture en regard créées par le processus de fracturation sont identiques. En revanche, les observations ont montré que les fluctuations de petite longueur d'onde des topographies sont indépendantes. La figure 4.3(a), empruntée à Brown (1995b), montre deux profils en regard extraits d'une fracture naturelle et le champ des ouvertures correspondantes. Les deux profils se ressemblent aux grandes échelles, mais leurs détails de petite échelle sont différents. En d'autres termes, les distributions  $h_+$  et  $h_-$  sont corrélées aux grandes longueurs d'onde, décorrélées aux petites longueurs d'onde. Le champ des ouvertures résultant n'a pas de variations de grande échelle. La comparaison des spectres des profils et du champ des ouvertures (figure 4.3(b)) montre que les distributions  $h_+$  et  $h_-$  sont auto-affines à toutes les échelles, avec le même exposant de rugosité, tandis que le spectre du champ des ouvertures  $d$  est une loi de puissance de même exposant aux petites longueurs d'onde, et s'aplatit aux grandes longueurs d'onde. La *longueur de corrélation*  $L_c$  de la fracture marque la transition entre la gamme des échelles où le champ des ouvertures est auto-affine, et la gamme des échelles où il est plat.

L'auto-affinité du spectre de  $d$  aux échelles où les distributions  $h_+$  et  $h_-$  sont décorrélées découle de la linéarité de la transformée de Fourier. Si les deux surfaces rugueuses en regard sont auto-affines (avec le même  $\zeta$ ) et ne sont pas corrélées l'une avec l'autre, le champ  $d$  est également auto-affine, de même exposant de rugosité  $\zeta$ . Une démonstration de cette propriété est fournie page 237 (dans l'appendice A de l'article placé en annexe du chapitre 7). Dans cette configuration, le champ des ouvertures a les mêmes propriétés statistiques que les topographies des surfaces.

L'indépendance des deux surfaces aux petites longueurs d'onde peut être liée à plusieurs



(a) Deux profils en regard d'une fracture naturelle (dyke rhyolithique près de Madrid), et le champ des ouvertures associé.



(b) Spectres de puissance de deux profils et du champ des ouvertures associé. Les profils sont auto-affines sur toute la gamme d'échelles. La limite supérieure de l'auto-affinité du champ des ouvertures correspond à la longueur de corrélation  $L_c$  entre les deux surfaces. Aux fréquences spatiales plus grandes que  $L_c$ , les deux topographies sont ajustées ; en réalité, la transition entre les échelles où les surfaces sont ajustées et celles où elles sont indépendantes est progressive.

FIG. 4.3 – Ajustement des parois d'une fracture naturelle aux grandes échelles. Figures tirées de [Brown, 1995b] .

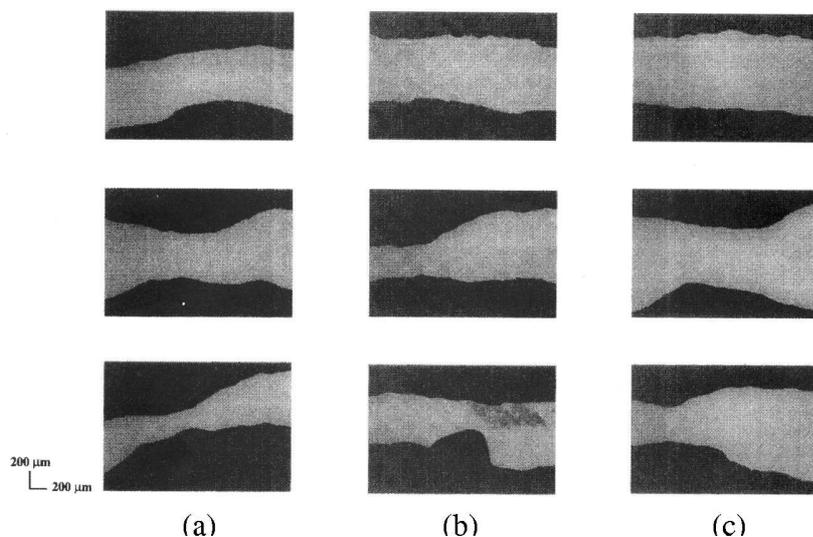


FIG. 4.4 – Gros plans de coupes de la réplique d’une fracture naturelle de grès [Yeo et al., 1998]. Les colonnes (a), (b) et (c) correspondent à des décalages horizontaux de l’une des surfaces par rapport à l’autre de 0, 1 et 2 mm, respectivement. Les profils inférieur et supérieur se ressemblent d’autant moins que le décalage horizontal est grand.

phénomènes. Les processus d’altération mécanique liés à la friction entre les deux parois ou à la création d’une gouge dans l’espace de la fracture sont une cause possible de la destruction des corrélations entre les deux parois aux petites échelles. L’altération chimique des parois est une autre cause possible. Un paramètre-clé pour caractériser la longueur de corrélation du champ des ouvertures locales est la distance de glissement des deux parois l’une par rapport à l’autre le long de leur plan moyen. En effet, décaler deux parois auto-affines identiques à toutes les échelles parallèlement au plan moyen de la fracture détruit les corrélations entre les parois aux échelles inférieures à la distance de déplacement [Plouraboué, Kurowski, Hulin, Roux et Schmittbuhl, 1995]. La figure 4.4 présente des coupes effectuées par Yeo, Freitas et Zimmerman (1998) dans une réplique moulée d’une fracture rugueuse naturelle de grès, pour différents décalages horizontaux de l’une des parois par rapport à l’autre. La pleine échelle horizontale des photos correspond à 2 mm en échelle réelle. La colonne libellée (a) correspond à un décalage horizontal nul entre les deux parois, les parois libellées (b) et (c) correspondent à des décalages de 1 et 2 mm, respectivement. Les profils supérieur et inférieur de chaque image sont mieux corrélés sur les images de gauche (a). Lorsque les parois ont subi un déplacement relatif important (failles, par exemple), il apparaît que les parois peuvent être décorréélées jusqu’à des échelles de l’ordre du mètre.

## Conclusion

Les deux parois d’une fracture naturelle *considérée à une échelle suffisamment petite* sont décorréélées. Cette propriété des ouvertures locales de fractures naturelles a été constatée expérimentalement aux petites échelles [Plouraboué et al., 1995; Brown, 1995b; Glover, Matsuki, Hikima et Hayashi, 1998a; Durham et Bonner, 1995]. Le modèle expérimental présenté au chapitre 5 correspond à cette description, de même que l’étude numérique qui fait l’objet du chapitre 6. Dans le chapitre 7, en revanche, on a considéré l’ajustement des parois de la fracture aux grandes longueurs d’onde, en introduisant une longueur de corrélation des deux parois,  $L_c$ , plus petite

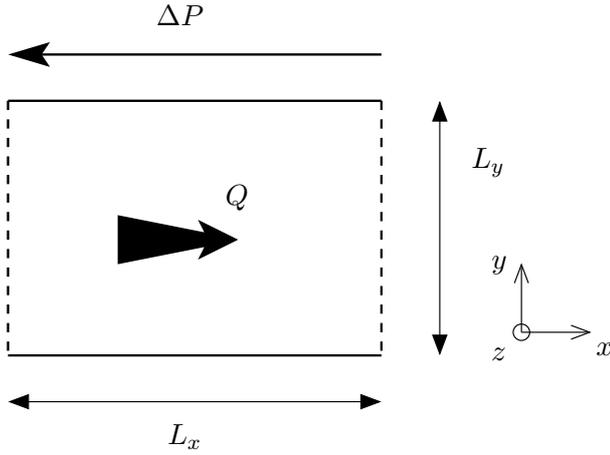


FIG. 4.5 – Vue de dessus d'une fracture de longueur  $L_x$  et de largeur  $L_y$ . La différence de pression entre l'entrée et la sortie de la fracture est  $\Delta P$ . Le débit volumique qui en résulte est  $Q$ .

que la dimension  $L$  de la fracture.

## 4.2 Description des propriétés hydrauliques d'une fracture ouverte

On s'intéresse ici à l'écoulement incompressible d'un fluide newtonien de viscosité  $\eta$  à travers une fracture ouverte lorsqu'on impose une différence de pression  $\Delta P$  entre deux extrémités de la fracture (voir Fig. 4.5). Comment le débit volumique  $Q$  est-il relié au *gradient de pression effectif*,  $\overline{\nabla P} = \Delta P/L_x$ ? Comment cette relation dépend-elle de propriétés géométriques telles que l'ouverture moyenne ou l'amplitude de la rugosité de la fracture? Plus généralement, quels sont les paramètres pertinents pour la description du comportement hydraulique de la fracture?

### 4.2.1 Description mathématique de l'écoulement

L'écoulement stationnaire incompressible d'un fluide newtonien de viscosité  $\eta$ , de densité  $\rho$ , est décrit par le champ de vitesse eulérien  $\mathbf{v}$  et par le champ de pression effective  $P = p + \rho g \zeta$ , où  $p$  est la pression au sein du fluide et  $\zeta$  la coordonnée verticale ascendante. Les champs  $\mathbf{v}$  et  $P$  sont déterminés par le système d'équations [Zimmerman et Bodvarsson, 1996]

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & (4.2a) \\ \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{v} & (4.2b) \end{cases} .$$

L'équation de continuité (4.2a) traduit l'incompressibilité de l'écoulement, tandis que l'équation vectorielle (4.2b) (équation de Navier-Stokes) impose la conservation de la quantité de mouvement au sein du fluide. Dans cette équation, le terme de gauche est l'accélération advective, qui caractérise les effets inertiels. La connaissance complète de l'écoulement implique la résolution du système (4.2) de quatre équations scalaires pour obtenir les champs de vitesse (3 composantes) et de pression associés à l'écoulement.

On supposera dans tout ce qui suit que l'écoulement est laminaire, c'est-à-dire qu'il ne donne lieu à aucun phénomène turbulent, y compris au voisinage des parois. Les conditions aux limites réalistes sont des conditions de contact sur les parois latérales (parallèles à  $\hat{\mathbf{x}}$ ), et sur les parois rugueuses inférieure et supérieure : la vitesse eulérienne s'annule au voisinage de ces parois. On prendra en compte ces conditions de contact sur les parois rugueuses. Par contre, on supposera

que la largeur de la fracture est suffisamment grande par rapport à son ouverture moyenne  $d_m$  pour que les conditions de contact sur les parois latérales n'influencent pas les propriétés hydrauliques de la fracture.

### 4.2.2 Fracture sans rugosité – Loi cubique

Dans cette configuration, dite de *Poiseuille plane*, les parois inférieure et supérieure de la fracture sont des plans parallèles. L'invariance de la fracture par translation selon  $\hat{\mathbf{y}}$  laisse supposer une solution où les lignes de courant sont rectilignes, parallèles à  $\hat{\mathbf{x}}$ , et où le champ de vitesse est lui-même invariant par translation selon  $\hat{\mathbf{y}}$  :  $\mathbf{v} = v(x, z)\hat{\mathbf{x}}$ . La conservation de la masse (4.2a) entraîne alors  $\partial_x v_x = 0$ , soit

$$\mathbf{v} = v(z)\hat{\mathbf{x}} \quad . \quad (4.3)$$

Par suite, le terme d'advection de l'équation de Navier-Stokes est identiquement nul :  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (v \underbrace{\partial_x v}_0)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , et l'équation (4.2b) se réduit à

$$\boxed{\nabla P = \eta \nabla^2 \mathbf{v}} \quad , \quad (4.4)$$

ou, par projection sur les trois axes du repère :

$$\begin{cases} \partial_x P = \eta \frac{d^2 v}{dz^2} & (4.5a) \\ \partial_y P = \partial_z P = 0 & (4.5b) \end{cases} \quad .$$

La relation (4.5a) indique que le champ de pression est fonction de la coordonnée  $x$  uniquement :  $P = P(x)$ , de sorte que (4.5b) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{dP}{dx} = \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \quad .$$

Dans cette équation, le terme de gauche est une fonction de  $x$ , celui de droite une fonction de  $z$ . Elles coïncident donc nécessairement avec une même fonction constante.  $P$  est ainsi une fonction linéaire de  $x$ , et s'écrit

$$\boxed{P(x) = P_e - \frac{\Delta P}{L_x} x} \quad , \quad (4.6)$$

où  $P_e$  est la pression à l'entrée de la fracture. On obtient le profil de vitesse vertical  $v(z)$  en intégrant la relation  $d^2 v/dz^2 = -\Delta P/(\eta L)$ , avec les conditions limites

$$v\left(\frac{d_m}{2}\right) = v\left(-\frac{d_m}{2}\right) = 0 \quad .$$

Le profil de vitesses obtenu le long d'une ligne parallèle à  $\hat{\mathbf{z}}$  est parabolique :

$$\boxed{v(z) = \frac{\overline{\nabla P}}{2\eta} \left[ z - \left(\frac{d_m}{2}\right)^2 \right]} \quad . \quad (4.7)$$

Le débit volumique de fluide à travers la fracture est obtenu comme le flux de  $\mathbf{v}$  à travers une section de la fracture normale à l'écoulement, c'est-à-dire une section orientée par  $(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ . Ainsi

$$\mathbf{Q} = \int_0^{L_y} \int_{-\frac{d_m}{2}}^{\frac{d_m}{2}} \mathbf{v}(z) dz dz = \hat{\mathbf{x}} L_y \int_{-\frac{d_m}{2}}^{\frac{d_m}{2}} v(z) dz \quad ,$$

soit finalement

$$\boxed{Q = -L_y \frac{d_m^3}{12\eta} \overline{\nabla P}} \quad . \quad (4.8)$$

Cette relation linéaire entre la cause (gradient de pression effectif) et l'effet (débit) est la conséquence directe de la linéarité de l'équation (4.4), qui décrit la dynamique locale de l'écoulement. Le coefficient de proportionnalité qui apparaît dans la relation (4.8) varie comme le cube de l'ouverture  $d_m$  de la fracture. C'est pourquoi on parle souvent de *loi cubique*.

### 4.2.3 Écoulement de Stokes – Loi de Darcy

Dans la configuration présentée dans la partie 4.2.2, les termes non-linéaires de l'équation de Navier-Stokes,  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ , s'annulaient géométriquement, car les lignes de champ étaient rectilignes. Dans le cas d'une rugosité non négligeable des deux surfaces en regard, les lignes de champ ont peu de chances d'être rectilignes. Dans ce cas, le problème exact devient très difficile à traiter exactement du fait des termes non-linéaires. En outre, il n'y a aucune raison pour que le débit dans la fracture dépende linéairement du gradient de pression effectif.

Cependant, dans le cas d'écoulements laminaires suffisamment lents de fluides suffisamment visqueux, les termes non-linéaires, sans être identiquement nuls, sont négligeables par rapport aux effets des forces de viscosité, et ce *quelle que soit la géométrie de l'écoulement*. Dans ces conditions, le terme d'accélération d'advection peut-être négligé dans (4.2b). L'équation décrivant l'écoulement est *l'équation de Stokes* (4.4). Cette équation est invariante par renversement de l'axe du temps, de sorte que des écoulement convenablement décrits par elle sont réversibles. Le rapport des ordres de grandeur des effets inertiels et des effets visqueux est généralement décrit par le *nombre de Reynolds*,

$$\boxed{Re = \frac{[\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]}{[\eta \nabla^2 \mathbf{v}]}} \quad , \quad (4.9)$$

où les crochets signifient "ordre de grandeur de". L'équation de Stokes est considérée comme une description adéquate de l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds est petit :  $Re \ll 1$ .

#### Loi de Darcy

La *loi de Darcy* est présentée classiquement comme la relation liant le flux apparent de l'écoulement (appelée aussi *vitesse de Darcy*)  $V_d$  au gradient de pression effectif, dans un milieu poreux [Mavko, Mukerji et Dvorkin, 1998] :

$$\boxed{V_d = -\frac{\kappa}{\eta} \overline{\nabla P}} \quad . \quad (4.10)$$

Cette relation fait intervenir la perméabilité  $\kappa$  du milieu ; c'est une section efficace d'écoulement [Guéguen et Palciauskas, 1992], qui quantifie la propension du milieu à laisser passer plus ou moins facilement les fluides qui le traversent.

La notion de vitesse de Darcy sera présentée plus en détail dans le chapitre 8. Dans le cas de notre fracture, la vitesse de Darcy est simplement la vitesse moyenne du fluide dans la fracture, et la loi de Darcy peut être réécrite en termes de débit volumique :

$$Q = V_d L_y d_m = -L_y \frac{\kappa d_m}{\eta} \overline{\nabla P} \quad . \quad (4.11)$$

En définissant la transmissivité  $K$  de la fracture comme

$$\boxed{K = \kappa d_m} \quad , \quad (4.12)$$

on réécrit la loi de Darcy pour la fracture rugueuse en

$$\boxed{\mathbf{Q} = -L_y \frac{K}{\eta} \nabla P} \quad . \quad (4.13)$$

Dans la suite de cette étude, on a choisi de raisonner en termes de transmissivité de la fracture plutôt qu'en termes de perméabilité, bien que la perméabilité soit plus souvent employée dans la littérature. La transmissivité nous a paru être un paramètre plus concret, dans la mesure où elle peut être mesurée pour n'importe quelle fracture sans connaissance a priori de son ouverture moyenne.

### Ouverture mécanique et ouverture hydraulique

En comparant la relation (4.13) avec le résultat exact (4.8) obtenu dans la configuration de Poiseuille plan, on peut réinterpréter la loi cubique en termes de transmissivité de la fracture. Une fracture sans rugosité a une transmissivité proportionnelle au cube de l'ouverture moyenne :

$$K_{\text{Poiseuille}} = \frac{d_m^3}{12} \quad . \quad (4.14)$$

La transmissivité d'une fracture rugueuse d'ouverture moyenne  $d_m$ , qu'elle soit mesurée expérimentalement ou calculée grâce à une simulation numérique, pourra être comparée à cette valeur théorique (4.14) du modèle de Poiseuille plan pour quantifier l'effet de la rugosité sur la perméabilité de la fracture. Alternativement, on pourra comparer à l'ouverture moyenne de la fracture son *ouverture hydraulique*  $d_h$ , qui est définie à partir de la transmissivité mesurée ou calculée  $K$  par inversion de la relation (4.14) :

$$\boxed{d_h = \sqrt[3]{12K}} \quad . \quad (4.15)$$

## 4.2.4 Équation de Reynolds

### Approximation de lubrification

L'approximation *de lubrification*, d'abord utilisée par les ingénieurs hydrodynamiciens [Pinkus et Sternlicht, 1961], permet de simplifier grandement la description mathématique de l'écoulement. Nous la détaillons ici car elle permet de dériver une équation qui est au fondement à la fois de notre modèle expérimental de fracture (présenté au chapitre 5) et des études numériques présentées aux chapitres 6 et 7. Elle consiste à supposer que le champ  $d$  des ouvertures locales de la fracture varie lentement, soit

$$\|\nabla d\| \ll 1 \quad . \quad (4.16)$$

Notons  $l_h$  l'échelle caractéristique de variation horizontale pour les champs de pression et de vitesse, et  $l_z$  leur échelle caractéristique de variation verticale. Puisque, dans un tel écoulement quasi-2D, les variations de vitesse du fluide sont étroitement liées aux variations d'altitude des parois rugueuses, qui servent de conditions-limites à l'écoulement, on peut considérer que le

rapport de  $l_z$  et  $l_h$  correspond à la pente typique du champ des ouvertures, soit, à l'aide de (4.16),

$$\frac{l_z}{l_h} \sim \|\nabla d\| \ll 1 \quad . \quad (4.17)$$

Notons  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  les valeurs typiques des trois composantes de la vitesse. L'incompressibilité (4.2a) entraîne

$$V_z \sim (V_x + V_y) \frac{l_z}{l_h} \quad , \quad (4.18)$$

d'où l'on déduit que la composante verticale de la vitesse est négligeable par rapport à ses composantes horizontales. En négligeant la composante verticale, la projection de l'équation de Stokes sur la verticale conduit à

$$\partial_z P = 0 \quad , \quad \text{soit} \quad \boxed{P = P(x, y)} \quad . \quad (4.19)$$

Ainsi, dans cette approximation, la pression est une fonction des coordonnées horizontales seulement. Les deux autres composantes de l'équation de Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_x P = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \partial_y P = \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad . \quad (4.20)$$

On constate que

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{V_x}{l_h^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{V_x}{l_h^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \sim \frac{V_x}{l_z^2} \quad ,$$

et de même pour les dérivées de  $v_y$  (avec  $V_y$  au lieu de  $V_x$ ), de sorte que les dérivées secondes en  $z$  sont prédominantes. En ne conservant que les termes dominants, l'équation de Stokes est transformée en

$$\begin{cases} \partial_x P = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \partial_y P = \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \end{cases} \quad , \quad \text{ou} \quad \boxed{\nabla P = \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}} \quad . \quad (4.21)$$

C'est une relation identique à (4.5), mais ici la vitesse locale est parallèle au gradient de pression local, qui a des composantes en  $x$  et en  $y$ . On peut intégrer (4.21) de la même façon, et on obtient un profil parabolique identique à (4.7), mais dirigé parallèlement à  $\nabla P$  [Zimmerman et Bodvarsson, 1996] :

$$\boxed{\mathbf{v}(x, y, z) = -\frac{1}{2\eta} (z - h_+)(z - h_-) \nabla P(x, y)} \quad . \quad (4.22)$$

On définit ici un *flux local* (qui a en fait la dimension d'un flux par unité de longueur transverse) comme l'intégrale de la composante horizontale  $v_h$  de la vitesse sur l'ouverture locale à la position horizontale considérée :

$$\mathbf{q}(x, y) = \int_{h^-(x, y)}^{h^+(x, y)} v_h(x, y, z) dz \quad . \quad (4.23)$$

Le flux local ainsi défini peut être relié au gradient de pression grâce à la loi de profil parabolique locale (4.22), ce qui conduit à une *loi cubique locale*, analogue à la loi cubique (4.8) :

$$\boxed{\mathbf{q} = -\frac{d(x, y)^3}{12\eta} \nabla P} \quad . \quad (4.24)$$

### Conservation du champ $\mathbf{q}$

La divergence du flux local  $\mathbf{q}$  s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot \left[ \int_{h^-(x,y)}^{h^+(x,y)} \mathbf{v}(x, y, z) dz \right] , \quad (4.25)$$

que l'on peut développer sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} = & \int_{h^-(x,y)}^{h^+(x,y)} \underbrace{\left[ \partial_x v_x(x, y, z) + \partial_y v_y(x, y, z) \right]}_{\nabla \cdot \mathbf{v}=0} dz + \partial_x h^+(x, y) \underbrace{v_x(x, y, h^+(x, y))}_0 \\ & + \partial_y h^+(x, y) \underbrace{v_y(x, y, h^+(x, y))}_0 - \partial_x h^-(x, y) \underbrace{v_x(x, y, h^-(x, y))}_0 - \partial_y h^-(x, y) \underbrace{v_y(x, y, h^-(x, y))}_0 \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{q} = 0} . \quad (4.26)$$

Le flux local est donc une quantité conservative. En combinant la loi de conservation et la loi cubique locale (4.24) obtenue plus haut, on obtient *l'équation de Reynolds* :

$$\boxed{\nabla \cdot \left[ \frac{d(x, y)^3}{12 \eta} \nabla P \right] = 0} . \quad (4.27)$$

L'inversion de l'équation de Reynolds permet d'obtenir le champ de pression, et, grâce à (4.24), le champ de flux local  $\mathbf{q}$ , à partir de la géométrie de la fracture. Quand cette géométrie est complexe, l'inversion numérique de (4.27) est beaucoup plus aisée que la résolution numérique de l'équation de Stokes en 3 dimensions. D'autre part, cette inversion fournit une description de l'écoulement dans la fracture aisément visualisable, sous la forme d'un écoulement à deux dimensions équivalent, incompressible, où le flux local  $\mathbf{q}$  joue le rôle de vitesse à deux dimensions.

### Estimation du nombre de Reynolds $\nabla d \ll 1$

En vertu des comparaisons effectuées plus haut sur les ordres de grandeur des différents termes de l'équation de Navier-Stokes, l'ordre de grandeur typique du terme inertiel de l'équation de Navier-Stokes s'écrit  $\rho V_x^2/l_h$ , tandis que les forces de viscosité sont d'ordre  $\eta V_x/l_z^2$ . Le nombre de Reynolds (4.9) est estimé pour l'écoulement dans la fracture comme [Méheust et Schmittbuhl, 2001a]

$$\boxed{\mathcal{R}e \sim V_x \frac{l_z^2}{\nu l_h}} , \quad (4.28)$$

où  $\nu = \eta/\rho$  désigne la viscosité dynamique du fluide.

## 4.3 Influence de la rugosité sur l'écoulement : plusieurs approches

On conçoit aisément que les rétrécissements locaux de l'espace entre les deux parois, liés à leur rugosité, peuvent constituer un obstacle à l'écoulement du fluide, et ce d'autant plus que ces rétrécissements sont importants comparativement à l'ouverture moyenne de la fracture. Aux très grandes ouvertures, on s'attend à ce que la rugosité ait un effet négligeable sur l'écoulement. Dans ce cas, la fracture rugueuse aura le même comportement hydraulique qu'une fracture sans

rugosité, c'est-à-dire qu'elle satisfera à la loi cubique (4.8). En d'autres termes, on s'attend à ce que l'ouverture hydraulique d'une fracture rugueuse soit égale à son ouverture moyenne lorsque le rapport de l'ouverture moyenne  $d_m$  sur l'écart-type de la rugosité  $\sigma$  est grand. Lorsque les quantités  $d_m$  et  $\sigma$  sont du même ordre de grandeur, on s'attend à ce que l'ouverture hydraulique s'écarte de l'ouverture mécanique. De multiples approches ont été utilisées pour quantifier cette déviation, qui mesure l'influence de la rugosité sur la perméabilité de la fracture. Nous présentons ici succinctement certaines de ces approches, afin de positionner notre travail vis-à-vis des travaux antérieurs.

### 4.3.1 Approches expérimentales

Les premières études expérimentales de l'influence de la rugosité sur l'écoulement dans des fractures ouvertes ont été menées par Lomize (1951), sur des plaques de verre [Cook, 1992]. Il proposa une relation empirique pour décrire l'écart entre l'ouverture hydraulique et l'ouverture mécanique :

$$K = \frac{d_m^3}{12 \left[ 1 + C \left( \frac{\sigma}{d_m} \right)^{1.5} \right]} . \quad (4.29)$$

L'utilité de cette formule fut confirmée sur une autre série de données par Louis (1969). Mais les régressions de Lomize (1951) et Louis (1969) diffèrent par la valeur de la constante  $C$  (6 pour Lomize et 5 pour Louis).

Un certain nombre d'études expérimentales réalistes, sur des fractures extraites de forages profonds [Durham, 1997] étudiées en conditions de pression importante (de 10 à 100 MPa) renseignent sur la modification de la perméabilité de la fracture avec la contrainte normale à son plan moyen. Des études du même type où l'on peut de plus imposer un déplacement latéral d'une des parois par rapport à l'autre [Yeo et al., 1998; Chen, Narayan, Yang et Rahman, 2000] fournissent une quantité importante de données reliant la pression de confinement, l'ouverture mécanique, la perméabilité, la distance de déplacement en cisaillement. En général, il est difficile de tirer de telles études expérimentales des conclusions claires et des résultats susceptibles d'être confrontés aux modèles théoriques ou numériques [Adler et Thovert, 1999]. Une étude récente par Nicholl, Rajaram, Glass et Detwiler (1999), assortie d'une simulation de la fracture expérimentale fondée sur l'équation de Reynolds, a permis de quantifier l'inadéquation de cette dernière pour une fracture fermée dont les parois sont bien ajustées.

Récemment, des expériences d'écoulement avec visualisation des lignes de courant ont été réalisés par [Hakami et Larsson, 1996] et Brown, Caprihan et Hardy (1998). Brown et al. (1998) ont observé des fluctuations de plusieurs ordres de grandeur dans le champ de vitesse de l'écoulement.

Il faut noter aussi que des expériences d'écoulement avec injection radiale ont également été menées [Plouraboué, Kurowski, Boffa, Hulin et Roux, 2000]. La comparaison de ces expériences avec le modèle d'écoulement parallèle que nous considérons ici est difficile.

### 4.3.2 Approches analytiques

#### Traitement analytique de l'équation de Stokes

La résolution analytique de l'équation de Stokes est possible seulement pour des géométries particulières simples. Ainsi, Hasegawa et Izuchi (1983) ont étudié une configuration où le champ des ouvertures varie sinuïdalement dans la direction de l'écoulement macroscopique. Ils ont utilisé une approche perturbative, les paramètres utilisés pour développer l'ouverture hydraulique

étant le nombre de Reynolds et le rapport  $\varepsilon = \delta/\lambda$ , où  $\delta$  est l'amplitude des fluctuations du champ des ouvertures, et  $\lambda$  est leur longueur d'onde. La solution à l'ordre 0 en  $\varepsilon$  correspond à la solution obtenue pour une fracture unidimensionnelle :  $h^3 = \langle h^{-3} \rangle^{-1}$ . La solution d'ordre 1 en  $\varepsilon$  et 0 en  $Re$  permet d'obtenir une estimation de l'écart à la loi cubique lié à la rugosité. Mais la validité de la généralisation d'un tel résultat à des géométries plus complexes est loin d'être claire.

### Généralisation de l'équation de Reynolds

Ge (1997) a proposé une généralisation de l'équation de Reynolds à des fractures où les plans moyens des surfaces en regard ne sont pas parallèles. Son modèle est fondé sur la loi cubique locale (4.24), ce qui n'élargit pas son applicabilité vis-à-vis de l'équation de Reynolds. En revanche, la direction le long de laquelle il définit ses ouvertures locales est elle-même définie localement, ce qui lui permet de considérer la tortuosité de l'écoulement dans la troisième dimension ; il inclut par ailleurs des corrections locales à l'équation de Reynolds, liées à la tortuosité de l'écoulement. Le modèle est résolu analytiquement pour des configurations géométriques simples et peu réalistes, mais dont certaines ne peuvent être traitées correctement par l'équation de Reynolds. Ainsi, un modèle numérique fondé sur l'équation de Reynolds considèrera une fracture sinusoïdale d'ouverture constante comme un modèle de Poiseuille plan.

### 4.3.3 Approches fondées sur l'équation de Reynolds

#### Traitement théorique de l'équation de Reynolds

La résolution de l'équation de Reynolds revient à considérer la fracture comme un milieu hétérogène à deux dimensions, une configuration que l'on retrouve dans de nombreux problèmes : conduction de la chaleur ou du courant électrique dans une plaque inhomogène, ou perméabilité d'un aquifer d'épaisseur variable, par exemple. La valeur de la transmissivité dépend non seulement de la distribution des valeurs pour la quantité locale (ouverture de la fracture, conductivité électrique ou thermique de la plaque, épaisseur de l'aquifer), mais aussi de la façon dont ces valeurs sont distribuées spatialement. Dans le cas de nos fractures rugueuses, les corrélations dans le champ des ouvertures vont jouer un rôle fondamental.

En ne connaissant que la distribution des conductivités, et sans aucune hypothèse sur les corrélations spatiales de la distribution, il est possible d'établir des limites inférieure et supérieure à la conductivité du réseau [Adler et Thovert, 1999]. En revenant à la description en termes d'ouverture hydraulique, l'encadrement de l'ouverture hydraulique de la fracture par ces limites s'écrit

$$\langle d^{-3} \rangle^{-1} \leq d_h^3 \leq \langle d^3 \rangle \quad , \quad (4.30)$$

où le signe  $\langle \rangle$  désigne une moyenne sur la quantité locale placée entre les crochets. La limite inférieure est la conductivité du réseau dans le cas où l'ouverture locale ne varie pas dans la direction transverse au gradient de pression effectif [Zimmerman et Bodvarsson, 1996]. La limite supérieure est la conductivité du réseau lorsque l'ouverture locale ne varie pas dans la direction du gradient de pression effectif. Il est intéressant de noter que la borne inférieure est forcément plus petite que l'ouverture moyenne  $d_m$ , tandis que la borne supérieure est forcément plus grande ; ainsi, ces limites établies théoriquement ne contraignent pas le signe d'un éventuel écart à la loi cubique. Ce type d'encadrement apparaît classiquement dans de nombreux problèmes faisant intervenir une approximation de milieu effectif : module élastique, conductivités thermique et électrique d'un solide composite, par exemple [Guéguen et Palciauskas, 1992](page 54).

Dans le cas où le champ  $Y(x, y) = \ln(k)$  (où  $k(x, y) = d^3(x, y)/12$ ) admet une distribution gaussienne (distribution "lognormale"), la théorie du milieu effectif, associée à une approximation

auto-cohérente, permet d'obtenir la transmissivité  $\overline{K}$  moyennée sur toutes les configurations spatiales d'une telle distribution, comme

$$\overline{K} = \frac{d_m^3}{12} \left[ e^{-\frac{\sigma_Y^2}{2}} + \mathcal{O}(\sigma_Y^6) \right] \quad (4.31)$$

$$\text{ou} \quad \overline{K} = \frac{d_m^3}{12} \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{\sigma^2}{d_m^2} + \dots \right] . \quad (4.32)$$

Malheureusement, la nature log-normale du champ de conductivité locale n'est pas prouvée pour les fractures naturelles.

Utilisant une théorie de milieu effectif permettant de prendre en compte des corrélations spatiales, Walsh, Brown et Durham (1997) ont déterminé numériquement des limites inférieure et supérieure plus restrictives aux valeurs possibles pour l'ouverture hydraulique d'une fracture d'ouverture moyenne fixée.

Une approche différente consiste à utiliser une approche perturbative, en considérant une correction du premier ordre au modèle de Poiseuille plan. Roux, Plouraboué et Hulin (1996) ont ainsi étudié théoriquement la dispersion géométrique dans une fracture dont le champ des ouvertures est auto-affine.

### Résolution numérique de l'équation de Reynolds

La résolution numérique de l'équation de Reynolds a permis de simuler des géométries réalistes, que ce soit par génération directe du champ des ouvertures, ou par obtention de ce champ à partir de deux topographies rugueuses obtenues numériquement [Adler et Thovert, 1999]. Les premières études réalisées par Tsang (1984) considéraient un équivalent électrique sous la forme d'un réseau de conducteurs de distribution gaussienne sans corrélations spatiales. L'étude était focalisée sur la chenalisation de l'écoulement lorsqu'une proportion importante de la surface horizontale de la fracture est fermée. L'étude fut approfondie par Tsang et Tsang (1987) et Moreno, Tsang, Tsang, Hale et Neretnieks (1988), qui introduisirent une longueur de corrélation dans la distribution spatiale des conductivités.

Mais les progrès les plus notables ont été réalisés par Brown (1987), qui a simulé l'écoulement dans une fracture constituée de deux parois auto-affines indépendantes et poinçonnées de façon parfaitement plastique. Ses résultats mettent en évidence l'importance de la chenalisation de l'écoulement en relation avec l'écart à la loi cubique. Le comportement hydraulique des fractures, exprimé par le rapport du débit calculé sur le débit prédit par la loi cubique, a été étudié sur une statistique de 10 fractures distinctes. Le débit moyen a été comparé à diverses estimations géométriques, telles que celles obtenues à partir des moyennes  $\langle d \rangle^3 = d_m^3$ ,  $d_m^3/\tau^2$  (où  $\tau$  est la tortuosité de l'écoulement),  $\langle d^3 \rangle$ ,  $\langle d^3 \rangle^{1/3}/\langle 1/d^2 \rangle$ . Pour des fractures ouvertes,  $d_m/\sigma \geq 3$ , la moyenne arithmétique corrigée par la tortuosité,  $d_m/\tau$ , s'est révélée être une excellente estimation de l'ouverture hydraulique. Cependant, la tortuosité n'est pas vraiment une donnée géométrique a priori de la fracture. De toutes les autres estimations, c'est encore la moyenne arithmétique, c'est-à-dire l'assimilation au modèle de Poiseuille plan, qui s'est révélée la plus adaptée. Dans un travail plus tardif, Brown (1989) a considéré deux surfaces en regard corrélées aux plus grandes longueurs d'onde, de façon à accroître statistiquement le nombre de points de contact. L'effet d'une éventuelle anisotropie des corrélations spatiales le long des topographies rugueuses a été étudié par Thompson et Brown (1991) en suivant une approche similaire.

Plouraboué et al. (1998) ont quant à eux résolu numériquement l'équation de Reynolds en utilisant une méthode perturbative pseudo-spectrale, dans le but d'étudier la dispersion géométrique d'un traceur passif dans un écoulement à travers une fracture rugueuse constituée de deux

parois auto-affines identiques et translatées l'une par rapport à l'autre. Nous avons utilisé leur méthode perturbative pour nos simulations (cf. chapitre 6).

#### 4.3.4 Autres types d'études numériques

##### Études numériques avec couplage hydro-mécanique

L'approche numérique permet de coupler la simulation de l'écoulement à la mécanique du poinçonnement des deux surfaces, dans le cas de fractures fermées. Ainsi, les propriétés mécaniques de la fracture sont influencées par l'écoulement, tandis que la fermeture d'une fraction importante de la surface horizontale de la fracture complexifie grandement l'écoulement. Une étude de ce type a été réalisée par Unger et Mase (1993), qui ont utilisé un modèle de poinçonnement où des aspérités déforment le plan sur lequel elles s'appuient, ce qui crée une interactions entre elles. L'écoulement était simulé par l'équation de Reynolds. Récemment, Mourzenko, Galamay et Thovert (1997) ont simulé l'écoulement en trois dimensions de l'écoulement dans une fracture fermée élastiquement.

##### Étude numérique de l'écoulement à haut Reynolds

Récemment, Skjetne, Hansen et Gudmundsson (1999) ont étudié numériquement l'écoulement à nombre de Reynolds élevé dans une fracture auto-affine bidimensionnelle d'ouverture constante. Une telle étude ne peut rendre compte des phénomènes de chenalisation dans le plan de la fracture mis en évidence par Brown et ses collaborateurs, mais permet de montrer comment, à haut Reynolds, le transport de matière se localise dans un tube de courant étroit, loin des parois, tandis que des zones de recirculation apparaissent au voisinage de la rugosité.

#### 4.3.5 Cadre de l'étude présentée dans les chapitres suivants

L'étude que nous présentons aux chapitres 5, 6, et 7 est une étude à la fois expérimentale et numérique mise en œuvre sur un modèle simple bien contrôlé. L'un des objectifs est d'essayer de comparer simulations et expérience dans un contexte où elles sont effectivement comparables.

##### Conditions d'écoulement considérées – Applicabilité

Tous les écoulements considérés sont des écoulements à bas nombre de Reynolds, qui sont bien décrits par l'équation de Stokes. Nous entendons par là des écoulements qui sont invariants par renversement de l'axe du temps :  $\mathcal{R}e \ll 1$ . Cette hypothèse est valide pour des écoulements très lents ou très visqueux dans la croûte terrestre. Ainsi, pour des fluides très visqueux tels que les magmas, dont la viscosité s'étale entre  $10^{-2}$  et  $10^9$   $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$  [Arhens, 1995; Nataf et Sommeria, 2000], le critère (4.28) est compatible avec des vitesses d'écoulements assez grandes, de l'ordre du  $\text{cm}.\text{s}^{-1}$ . Pour l'eau ( $\nu = 10^{-6}$   $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ ), le critère est encore réaliste pour des vitesses de l'ordre de 1  $\text{mm}.\text{s}^{-1}$ .

Il nous paraît important d'insister sur le fait que ce critère est beaucoup plus restrictif que le critère correspondant à la nécessité d'avoir un écoulement laminaire dans la fracture, c'est-à-dire un écoulement qui ne donne lieu à aucune turbulence. Zimmerman et Bodvarsson (1996) remarquent que la turbulence ne peut se développer dans une fracture de ce type que dans des conditions d'écoulement extrêmement dynamiques. La fracturation hydraulique, où la fracturation est provoquée par les contraintes subies par le matériau de la part de l'écoulement, en est un exemple. La turbulence apparaîtra pour des nombres de Reynolds proches de 1000. Cependant,

il y a entre nos conditions d'écoulement ( $Re \leq 1$ ) et les conditions d'apparition de la turbulence toute une gamme d'écoulements laminaires pour lesquels les termes inertiels ne sauraient être négligés.

La deuxième hypothèse fondatrice de notre étude est l'approximation de lubrification. Brown, Stockman et Reeves (1995) ont étudié sa validité pour des fractures dont les parois ont une rugosité idéale, sinusoïdale. Leur étude conclut à une surestimation de la perméabilité de la fracture par l'équation de Reynolds. Mourzenko, Thovert et Adler (1995) ont utilisé une simulation de l'équation de Stokes en trois dimensions pour étudier l'applicabilité de l'équation de Reynolds dans le cas d'un champ des ouvertures auto-affine. Leurs conclusions vont dans le même sens que celles de Brown et al. (1995) ; cependant, pour des fractures ouvertes ( $d_m/\sigma \gtrsim 4$ ) aux parois non corrélées, ils estiment l'écart entre les résultats obtenus à l'aide de l'équation de Reynolds et ceux obtenus en utilisant une simulation complète en trois dimensions à 2 % en termes d'ouverture hydraulique moyenne d'un grand nombre de fractures.

### Gamme d'ouvertures considérée

La rugosité des parois et la géométrie résultante du champ des ouvertures ont été discutés au paragraphe 4.1. Pour ce type de géométrie, nous nous cantonnons à l'étude de fractures *ouvertes*, c'est-à-dire où les surfaces ne sont pas en contact. Ainsi, aucune déformation mécanique des surfaces par poinçonnement n'est à prendre en compte. On suppose également qu'il n'y a pas d'interaction mécanique entre le fluide et l'encaissant.

Le choix de cette gamme d'ouvertures répond à une seconde motivation : la tortuosité apparaissant dans un écoulement à travers une fracture dont une part importante est fermée se développe autant dans la direction verticale que dans la direction horizontale, et son étude sort des approximations que nous avons considérées [Cook, 1992]. Dans notre étude, la gamme d'ouvertures considérée correspond au domaine d'ouvertures où l'étude de Mourzenko et al. (1995) a montré la validité de l'équation de Reynolds. Cela correspond également aux ouvertures les plus grandes que l'on trouve dans la croûte terrestre superficielle, où les ouvertures varient typiquement entre  $2\sigma$  et  $5\sigma$  [Brown, 1987]. Les ouvertures les plus petites que nous considérerons dans notre étude sont de l'ordre de  $3\sigma$ .

### Un modèle de demi-fracture équivalent

Remarquons ici que :

1. Si les deux parois d'une fracture rugueuse sont auto-affines, de même exposant de rugosité, et décorréelées, alors le champ des ouvertures locales de la fracture est auto-affine, de même exposant de rugosité que les parois (voir paragraphe 4.1.3). Le champ des ouvertures d'une fracture dont une des parois est rugueuse et l'autre parfaitement lisse a donc les mêmes propriétés que le champ des ouvertures défini par deux parois rugueuses.
2. L'équation de Reynolds (4.27) relie le champ de pression dans la fracture à la seule description du champ des ouvertures, ce qui signifie que dans la limite de validité de l'approximation de lubrification, le comportement hydraulique de la fracture dépend uniquement de la distribution des ouvertures locales, et non des deux topographies qui sont responsables de ce champ des ouvertures. La demi-fracture présentée à la figure 4.1(b) est alors équivalente du point de vue hydraulique à la fracture présentée à la figure 4.1(a).

En conséquence, le comportement hydraulique d'une fracture rugueuse  $\mathbf{F}$  dont les parois sont décorréelées peut, dans les conditions où l'équation de Reynolds est valable, être étudié en considérant une demi-fracture  $\mathbf{DF}$  formée d'une surface plane placée en regard d'une surface rugueuse

aux propriétés identiques à celles des parois de  $\mathbf{F}$ , sans perte de généralité. C'est sur ce principe d'équivalence qu'est fondée l'expérience d'écoulement présentée au chapitre 5.

## Conclusion

L'écoulement visqueux ( $Re \ll 1$ ) permanent dans une fracture formée de deux surfaces rugueuses asymptotiquement planes et placées en regard l'une de l'autre, avec leurs plans moyens parallèles, est influencé par les variations de l'ouverture locale de la fracture induites par la rugosité des surfaces. Lorsque l'amplitude de la rugosité des surfaces est négligeable vis-à-vis de l'ouverture moyenne  $d_m$  de la fracture, l'influence de la rugosité est négligeable, et la fracture est convenablement modélisée par deux plans parallèles et distants de  $d_m$ ; cette configuration admet une solution analytique où la transmissivité de la fracture est proportionnelle au cube de l'ouverture. Lorsque l'ouverture moyenne devient du même ordre de grandeur que l'amplitude de la rugosité, la transmissivité s'écarte de cette loi cubique. De nombreuses études, tant expérimentales que numériques, se sont attachées à quantifier l'écart à la loi cubique. À ce jour, ces études ont mis en évidence un lien entre la chenalisation de l'écoulement dans la fracture et l'écart à la loi cubique. Les études expérimentales et numériques ont permis de dégager des lois empiriques pour prévoir cet écart; des prédictions théoriques existent également, qui reposent sur des hypothèses fortes et non assurées sur la distribution des ouvertures locales de la fracture. Ces lois semblent correspondre plus à un effet moyen obtenu sur une statistique de fractures qu'à un effet caractéristique de chacune des fractures rugueuses de la population.

Pour examiner de plus près le lien entre chenalisation de l'écoulement et comportement hydraulique à l'échelle de la fracture, en nous intéressant particulièrement à la variabilité du comportement hydraulique au sein d'une population de fractures, nous considérons une géométrie suffisamment ouverte, et où le champ des ouvertures locales de la fracture varie lentement. Dans ces conditions, le comportement hydraulique de la fracture est uniquement déterminé par la topologie de son champ des ouvertures, et non par les topographies des deux surfaces rugueuses. Sous ces hypothèses, expériences et simulations numériques doivent être comparables et on attend qu'elles fournissent des résultats compatibles. Les deux surfaces sont des fractals auto-affines isotropes. Nous considérerons dans un premier temps (chapitres 5 et 6) qu'elles sont indépendantes l'une de l'autres. Expériences et simulations peuvent alors être menées sans perte de généralité sur une demi-fracture rugueuse, où l'une des parois est rugueuse, et l'autre est un plan. L'étude expérimentale est présentée dans le chapitre 5. Une étude numérique est présentée dans le chapitre 6. Dans un deuxième temps, nous introduirons une corrélation aux grandes longueurs d'onde entre les topographies des deux parois. Le chapitre 7 est consacré à l'influence de cet ajustement des surfaces.

## Chapitre 5

# Étude expérimentale d'une fracture modèle

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>129</b>
<b>5.1 Une expérience d'écoulement dans une demi-fracture</b> . . . . .	<b>129</b>
5.1.1 Modèle expérimental . . . . .	129
5.1.2 Le fluide . . . . .	129
5.1.3 Protocole expérimental de mesure de la pression . . . . .	129
<b>5.2 Étude du comportement hydraulique de la fracture</b> . . . . .	<b>130</b>
5.2.1 Validité de la loi de Darcy . . . . .	130
5.2.2 Écoulement de Stokes et réversibilité . . . . .	131
5.2.3 Ouverture hydraulique . . . . .	132
5.2.4 Transmissivité de la fracture seule– Perte de charge aux niveau des canaux d'admission et de sortie . . . . .	132
<b>5.3 Résultats – Influence de la rugosité sur l'écoulement</b> . . . . .	<b>135</b>
5.3.1 Incertitude des mesures . . . . .	135
5.3.2 Reproductibilité . . . . .	135
5.3.3 Écart à la loi cubique . . . . .	135
5.3.4 Sensibilité à l'orientation du gradient de pression . . . . .	136
<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>136</b>
<b>Annexe : Flow enhancement of a rough fracture</b> . . . . .	<b>138</b>

---



## Introduction

On a développé un dispositif expérimental d'écoulement dans une demi-fracture, pour étudier expérimentalement l'influence de la rugosité des parois d'une fracture sur sa perméabilité. L'expérience est fondée sur le principe d'équivalence hydraulique entre fracture complète et demi-fracture, exposé au paragraphe 4.3.5, page 125 (voir aussi figure 4.1(b)).

Le présent chapitre décrit le dispositif et le protocole expérimentaux, ainsi que la façon dont on traite les mesures pour en tirer l'information relative au comportement hydraulique de la fracture. Puis les résultats obtenus sont commentés de façon succincte, en faisant référence aux figures contenues dans l'annexe au chapitre [Méheust et Schmittbuhl, 2000].

## 5.1 Une expérience d'écoulement dans une demi-fracture

### 5.1.1 Modèle expérimental

Le dispositif expérimental est présenté à la figure 2 de l'annexe, page 141. Il est constitué de deux cuves reliées par un canal horizontal de largeur  $L_y = 10$  cm, dont on peut voir une schématisation à la figure 5.1. Le long du canal, on distingue trois segments distincts et consécutifs (de gauche à droite, sur la figure), placés en série : le canal d'admission, la fracture proprement dite, et le canal de sortie. Les longueurs de ces trois segments valent respectivement  $L_1 = 10$  cm,  $L_x = 10$  cm et  $L_2 = 9$  cm. Les canaux d'admission et de sortie ont même ouverture (constante) :  $h = 7$  cm. L'ouverture de la fracture est limitée inférieurement par un bloc de granite, et supérieurement par une plaque de plexiglas plane, horizontale. Cette dernière peut-être translaturée verticalement pour faire varier l'ouverture moyenne  $d_m$  de la fracture. Des joints en silicone assurent l'étanchéité du dispositif.

La paroi granitique est une surface de fracture présentant toutes les caractéristiques discutées au chapitre 1 et étudiées expérimentalement au chapitre 3. Elle est correctement décrite par un modèle auto-affine isotrope d'exposant de rugosité proche de 0.8. Des cartes de la surface en question ont été présentées à la figure 2.9. L'enregistrement dont la carte est représentée sur la figure 2.9(a) a été réalisé sur une grille de maille 750 microns, comportant  $130 \times 130$  points (voir aussi la représentation en 3 dimensions de la figure 1, page 141). Cet enregistrement a permis de déterminer la trace du plan moyen de la surface sur les côtés du bloc de granite. On a ainsi pu positionner le bloc de façon que le plan moyen se trouve placé aussi horizontalement que possible, c'est-à-dire aussi parallèlement à la paroi plane de la fracture que possible. Le dispositif ainsi préparé est une bonne réalisation expérimentale du modèle de demi-fracture présenté à la figure 4.1(b). La carte en trois dimensions a également permis de calculer l'écart-type de la rugosité :  $\sigma = 1.42$  mm, et son extension verticale maximale, qui est de l'ordre de 7 mm.

### 5.1.2 Le fluide

Le fluide utilisé est un mélange eau/glycérol à 88%/12% en masse. Il a une densité de  $1300 \text{ kg.m}^{-3}$ , et une viscosité  $\eta$  à  $22^\circ\text{C}$  de 140 cP ou  $0.14 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  (i. e., 140 fois celle de l'eau). La dépendance en température de la viscosité a été mesurée (voir Figure 5.2) à  $-7.2 \text{ cP.K}^{-1}$ . Les expériences d'écoulement ont été réalisées à  $22 \pm 0.5^\circ \text{ C}$ .

### 5.1.3 Protocole expérimental de mesure de la pression

La mise en route de l'expérience se fait de la manière suivante. L'ensemble (canaux d'admission et de sortie + fracture) est initialement saturé de fluide, jusqu'à ce que le niveau dans les

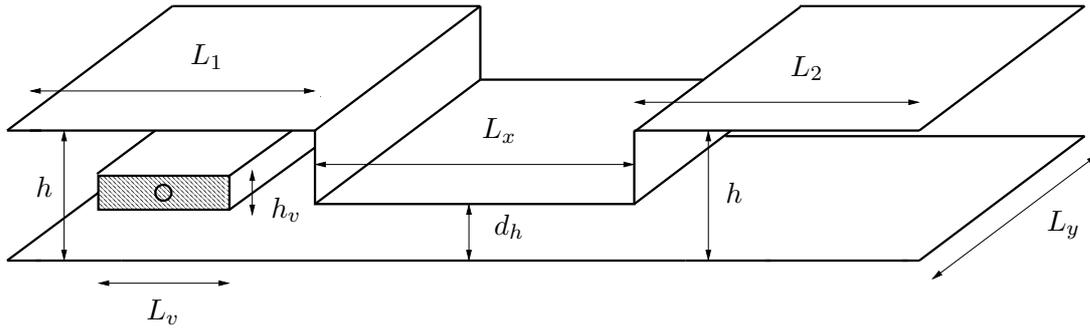


FIG. 5.1 – Description simplifiée du canal reliant les deux cuves. Ce modèle est utilisé pour estimer la transmissivité de la fracture,  $K$ , à partir de la transmissivité du canal entier,  $\tilde{K}$ . Les cotes mesurées sur le montage expérimental valent  $L_x = L_y = L_1 = 100$  mm,  $L_2 = 90$  mm,  $L_v = h = 17$  mm,  $h_v = 5$  mm.

deux cuves se trouve 10 cm au-dessus de la paroi supérieure de la fracture. Puis on engendre un écoulement entre les cuves à l'aide d'une pompe péristaltique. Le fluide est pompé dans une des cuves (en général, celui de gauche) et rejeté dans l'autre. Au bout de quelques secondes, un état stationnaire est établi. Le débit de l'écoulement dans la fracture est celui imposé par la pompe ; il peut être ajusté continuellement à l'aide d'un variateur électronique. La circulation entre les deux cuves induit une différence de pression positive  $\Delta P$  entre la cuve amont et la cuve aval. L'amplitude de cette différence de pression est repérable visuellement par l'amplitude de la différence des niveaux de fluide dans les cuves.

Après que l'écoulement stationnaire a été établi dans la fracture, on mesure les pressions à la base des cuves, à l'aide de capteurs de pression piezzo-électriques Honeywell 24PC, identiques, dont la précision est de proche de 0.2 Pa. Les valeurs sont lues par un multimètre Keithley 2000 équipé d'une carte d'acquisition 2001-Tescan, qui permet de mesurer consécutivement la pression des deux capteurs à 1.0 ms d'intervalle. C'est donc le temps nécessaire à la mesure de la différence  $\Delta P$  entre les pressions mesurées à la base de chacune des deux cuves. La mesure de  $\Delta P$  est réitérée à une fréquence de 10 Hz, pendant 30s. Le signal de mesure correspondant est digitalisé, et traité par un PC de façon à éliminer les fluctuations temporelles liées aux pulsations de la pompe péristaltique. Bruit acoustique et autres vibrations mécaniques sont négligeables. L'incertitude finale sur la valeur de  $\Delta P$  est inférieure à 1 Pa. La gamme de valeurs accessible à la mesure va de 10 Pa à 1000 Pa. La limite supérieure est contrainte par la dénivellation maximale admissible par le dispositif entre les niveaux de fluide dans les deux cuves. Au-delà, la cuve amont déborde, ou la cuve aval descend en-dessous de la paroi supérieure du canal d'admission, provoquant l'arrivée d'air dans la fracture.

## 5.2 Étude du comportement hydraulique de la fracture

### 5.2.1 Validité de la loi de Darcy

Pour un écoulement laminaire stationnaire, la loi de Darcy (4.10) stipule qu'en conditions d'écoulement de Stokes, la différence de pression  $\Delta P$  mesurée entre les deux extrémités du canal reliant les deux cuves et le débit  $Q$  imposé par la pompe sont proportionnels, i. e.,

$$Q = L_y \frac{\tilde{K}}{\eta} \frac{\Delta P}{L_1 + L_x + L_2} \quad , \quad (5.1)$$

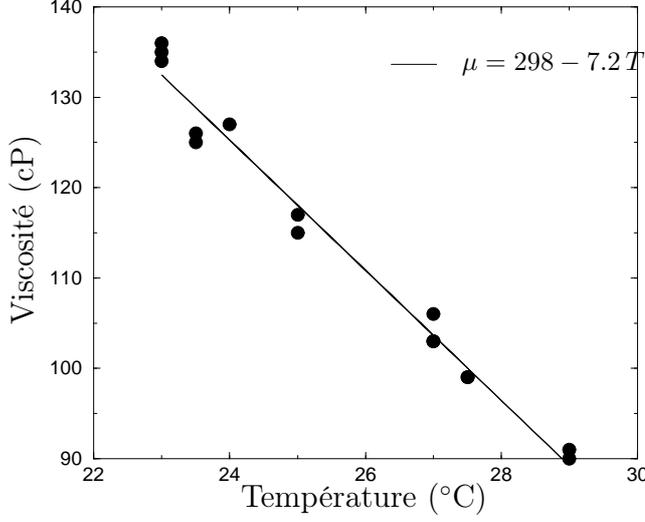


FIG. 5.2 – Dépendance de la viscosité du mélange eau/glycérol avec la température. Les mesures de viscosité ont été réalisées à l'aide d'un viscosimètre à bille.

où l'on noté  $\tilde{K}$  la transmissivité du canal. La fracture ayant des dimensions horizontales identiques, on obtient la transmissivité  $\tilde{K}$  selon

$$\tilde{K} = \eta \frac{Q}{\Delta P} \left( 1 + \frac{L_1 + L_2}{L_y} \right) . \quad (5.2)$$

On a représenté à la figure 5.3 le débit  $Q$  en fonction de  $\Delta P$ . La proportionnalité entre ces deux quantités est bien vérifiée sur toute la gamme de débits imposés (i. e., entre 0.45 et 0.9 l/min). La transmissivité  $\tilde{K}$  est obtenue à partir de la pente  $Q/\Delta P$  des régressions linéaires, à partir de la relation (5.2).

### 5.2.2 Écoulement de Stokes et réversibilité

Le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement quantifie l'ordre de grandeur du rapport des forces inertielles sur les forces visqueuses. Il peut être estimé à l'aide de la relation (4.28), que nous rappelons ici :

$$\mathcal{R}e \sim V_x \frac{l_z^2}{\nu l_h} . \quad (5.3)$$

$V_x$  est la valeur typique de la vitesse horizontale;  $l_h$  et  $l_z$  sont les valeurs typiques des échelles de variation horizontale et verticale de la vitesse;  $\nu = \eta/\rho = 1.4 \text{ m}^2/\text{s}$  est la viscosité dynamique du fluide. La vitesse typique horizontale  $V_x$  peut être estimée comme la vitesse moyenne du fluide,  $Q/(L_y d_m)$ , conduisant à

$$\mathcal{R}e \simeq \frac{Q}{\nu L_y d_m} \frac{l_z^2}{l_h} . \quad (5.4)$$

Le débit maximal imposé est de l'ordre de 0.9 l/min, donc  $Q/(\nu L_y) \ll 1$ . Par ailleurs, l'incompressibilité impose  $l_z/l_h \sim V_z/V_x$ , tandis que la géométrie des conditions-limites de l'écoulement impose  $V_z \ll V_h$ , de sorte que le rapport  $l_z/l_h$  est très petit. Ainsi, on peut majorer le nombre de Reynolds dans la fracture de la façon suivante :

$$\boxed{\mathcal{R}e \leq \frac{l_z}{d_m} \frac{l_z}{l_h} \ll 1} . \quad (5.5)$$

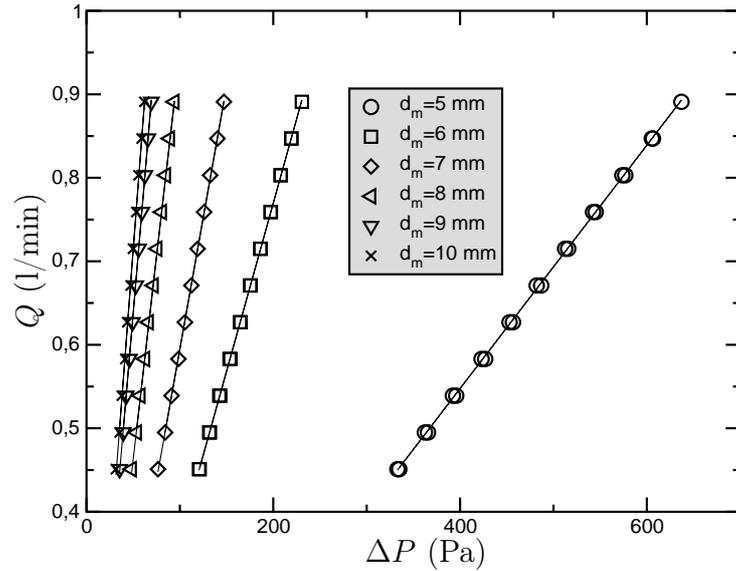


FIG. 5.3 – Dépendance entre le débit imposé par la pompe péristaltique et la différence de pression à la base des cuves, pour différentes ouvertures de la demi-fracture rugueuse. Pour chaque ouverture, la dépendance est linéaire. La pente des droites est reliée à la transmissivité de la fracture proprement dite par la relation (5.11).

On s'attend donc à un écoulement de Stokes, réversible. En particulier, le comportement hydraulique de la fracture doit être indépendant du sens de l'écoulement qui la traverse. La figure 5.4 montre les résultats d'une expérience réalisée pour tester la réversibilité ; les mesures ont été effectuées pour différents débits, et pour les deux sens de rotation de la pompe. La relation linéaire entre  $Q$  et  $\Delta P$  a une pente estimée à  $3.94 \cdot 10^{-3}$  pour l'écoulement de gauche à droite et  $4.02 \cdot 10^{-3} \text{ l.min}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$  pour l'écoulement de droite à gauche. Ces deux valeurs sont compatibles compte tenu de l'incertitude, estimée à  $0.1 \cdot 10^{-3} \text{ l.min}^{-1}.\text{Pa}^{-1}$ .

### 5.2.3 Ouverture hydraulique

On a choisi d'analyser le comportement hydraulique de la fracture en termes d'ouverture hydraulique,  $d_h$ , calculée à partir de  $K$  selon la relation :

$$d_h = (12 K)^{\frac{1}{3}} \quad (5.6)$$

Rappelons que l'ouverture hydraulique ainsi définie est l'ouverture d'un modèle de Poiseuille plan de même transmissivité que la fracture rugueuse. Aux grandes ouvertures, lorsque la rugosité a une amplitude négligeable vis-à-vis de l'ouverture moyenne de la fracture, la valeur de l'ouverture hydraulique doit rejoindre celle de l'ouverture moyenne.

### 5.2.4 Transmissivité de la fracture seule – Perte de charge aux niveau des canaux d'admission et de sortie

Sur la figure 5.3, on a tracé le débit en fonction de la différence de pression pour différentes ouvertures moyennes de la fracture. L'augmentation rapide des pentes des régressions linéaires lorsqu'on diminue l'ouverture moyenne est une conséquence de la diminution de la transmissivité  $K$  de la fracture, qui entraîne une diminution de la transmissivité  $\tilde{K}$  du canal tout entier. Cependant, ces deux quantités ne sont pas nécessairement égales. L'ouverture moyenne de la fracture reste toujours inférieure à l'ouverture  $h$  des canaux d'admission et de sortie (cf. figure 2 de l'annexe, page 141). Cependant, aux plus grandes ouvertures de la fracture, les pertes de charges au niveau des canaux d'entrée et de sortie peuvent n'être pas négligeables par rapport à

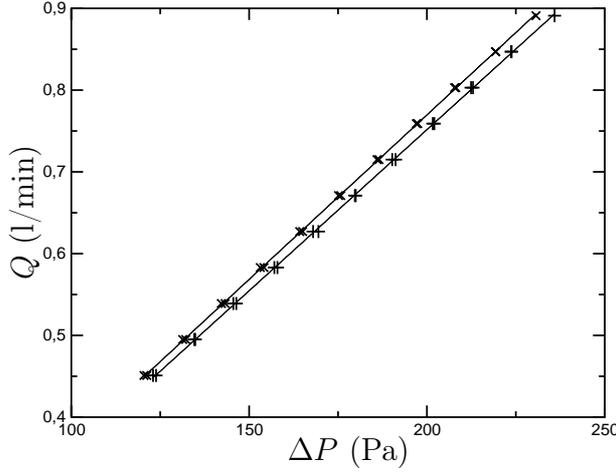


FIG. 5.4 – Test de la réversibilité de l'écoulement. Les deux droites sont les régressions associées à deux expériences réalisées dans la même configuration, en changeant le sens de l'écoulement entre les deux séries de mesure. Les pentes des deux droites sont identiques, à l'incertitude de mesure près.

la perte de charge dans la fracture proprement dite. En d'autres termes, la différence de pression mesurée,  $\Delta P$ , peut ne pas être une mesure correcte de la différence de pression entre les extrémités amont et aval de la fracture.

Afin d'estimer l'importance des pertes de charge dans les canaux d'admission et de sortie, on a fait une série de mesures en configuration lisse, en utilisant comme paroi inférieure de la fracture un bloc de granite rectifié. Dans cette configuration, l'ouverture hydraulique  $d_h$  de la fracture doit coïncider avec son ouverture moyenne. Si l'ouverture hydraulique  $\tilde{d}_h$  calculée à partir de la transmissivité  $\tilde{K}$  en utilisant la relation (5.6) coïncide avec l'ouverture moyenne, c'est que les pertes de charges à l'entrée et à la sortie du canal sont négligeables, et que  $\tilde{d}_h$  est une estimation correcte de l'ouverture hydraulique  $d_h$  de la fracture proprement dite; c'est-à-dire  $K \simeq \tilde{K}$ . Sur la figure 5.5, les cercles blancs représentent les résultats obtenus dans la configuration lisse. On constate qu'ils s'écartent de la droite théorique  $d_h = d_m$ , et ce d'autant plus que l'ouverture moyenne est grande. On ne peut négliger les pertes de charges à l'extérieur de la fracture.

La figure 5.1 représente une vue schématique rapprochée de l'ensemble (canal d'admission + fracture + canal de sortie); la fracture rugueuse a été remplacée par son équivalent sans rugosité, d'ouverture  $d_h$ . Les valeurs des cotes indiquées ont été mesurées sur le dispositif. En vertu des conditions de Stokes imposées à l'écoulement, on a supposé que les zones de transition entre les différents régimes de Poiseuille ont une influence négligeable sur le comportement hydraulique global de l'ensemble. On a donc modélisé le système comme un ensemble d'écoulements de Poiseuille plan placés en parallèle et en série, et ne s'influençant pas les uns les autres. Négligeons tout d'abord la vanne d'admission (les cotes indicées  $v$  sont annulées). La différence de pression  $\Delta P$  peut être estimée comme

$$\Delta P = \underbrace{\Delta P_1}_{\text{Perte de charge à l'admission}} + \underbrace{\Delta P_x}_{\text{Contribution de la fracture}} + \underbrace{\Delta P_2}_{\text{Perte de charge à la sortie}}, \quad (5.7)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} Q = \frac{K_1 L_y}{\eta L_1} \Delta P_1, & K_1 = \frac{h^3}{12} \\ Q = \frac{K_2 L_y}{\eta L_2} \Delta P_2, & K_2 = K_1 \\ Q = \frac{K L_y}{\eta L_x} \Delta P_x, & K \text{ à déterminer.} \end{cases} \quad (5.8)$$

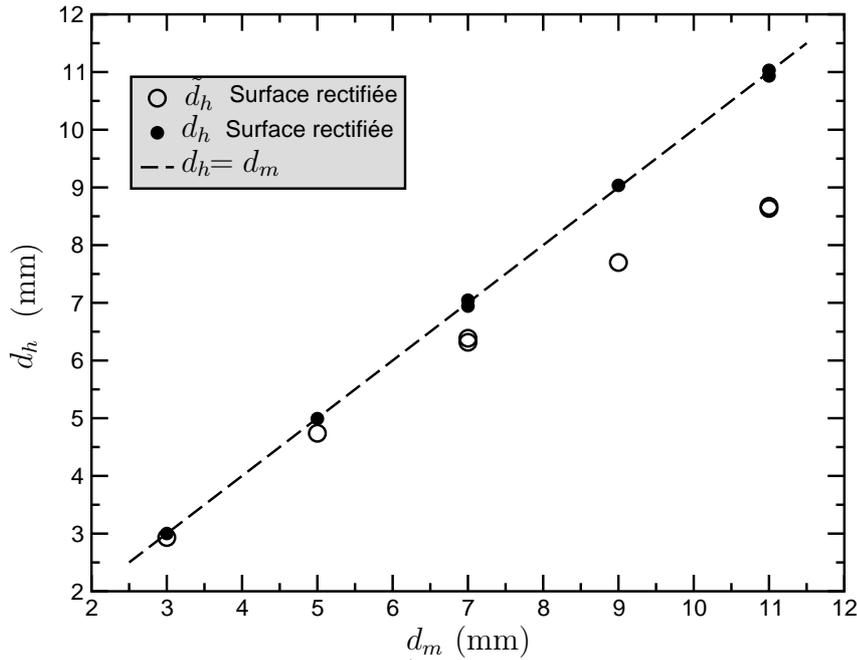


FIG. 5.5 – Correction des mesures brutes de transmissivité pour tenir compte des pertes de charge dans les canaux d'admission et de sortie. Les cercles blancs sont les valeurs d'ouverture hydraulique  $\tilde{d}_h$  obtenues à partir de la mesure de la transmissivité  $\tilde{K}$  de l'ensemble (admission + fracture lisse + sortie). Les disques noirs correspondent aux valeurs de l'ouverture hydraulique  $d_h$  de la fracture proprement dite. Ils ont été obtenus à partir de la relation (5.11), et se superposent correctement à la droite théorique  $d_h = d_m$ .

Soit

$$\Delta P = \frac{\eta Q}{L_y} \left[ \frac{L_1 + L_2}{K_1} + \frac{L_x}{K} \right] , \quad (5.9)$$

ce qui permet, en tenant compte du fait que  $L_x = L_y$ , d'obtenir la transmissivité  $K$  de la fracture comme

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{Q} - \frac{12}{h^3} \frac{L_1 + L_2}{L_x}} . \quad (5.10)$$

Un calcul plus complet faisant intervenir les cotes de la vanne d'admission placée en position ouverte fournit :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\eta} \frac{\Delta P}{Q} - \frac{12}{h^3} \frac{L_1 + L_2}{L_x} - \frac{6}{h_v^3} \frac{L_v}{L_x}} . \quad (5.11)$$

Les disques noirs à la figure 5.5 correspondent aux mêmes mesures que les disques blancs, mais représentent la valeur de  $d_h$  estimée à partir de  $K$ , dont la valeur a été obtenue à l'aide de la relation (5.11). Le comportement linéaire et superposé à la droite  $d_h = d_m$  est convaincant. La relation (5.11) a donc été utilisée pour déterminer l'ouverture hydraulique de la fracture pour les autres expériences, effectuées en configuration rugueuse.

## 5.3 Résultats – Influence de la rugosité sur l’écoulement

Trois expériences ont été réalisées en configuration rugueuse. La direction de l’écoulement par rapport à la surface rugueuse pour la première et la seconde série correspond à la direction indiquée par la flèche portée sur la figure 1 de l’annexe, page 141. Ces deux séries sont notées  $\parallel$ . La troisième série (notée  $\perp$ ) a été effectuée après avoir tourné le bloc de granite de  $90^\circ$  autour d’un axe vertical. Dans chacun des cas, on a tracé l’évolution du rapport de l’ouverture hydraulique sur l’ouverture moyenne, en fonction de l’ouverture moyenne normalisée par l’écart-type de la rugosité,  $\sigma$ . Les résultats obtenus pour les trois séries de mesure sont représentés à la figure 4 de l’annexe, page 144.

### 5.3.1 Incertitude des mesures

Les barres d’erreur de la figure 4, page 144, sont dues essentiellement à l’incertitude  $\delta d_m = 0.25$  mm sur l’ouverture moyenne, qui est bien supérieure à l’incertitude  $\delta d_h$  due à la mesure. En négligeant  $\delta d_h$ , l’incertitude sur  $d_h/d_m$  est de la forme  $(d_h/d_m)(\delta d_m/d_m)$ , et augmente quand on diminue l’ouverture moyenne. Cela explique l’importance des barres d’erreur aux ouvertures les plus petites.

### 5.3.2 Reproductibilité

Entre les deux séries de mesure libellées  $\parallel$ , on a monté puis remonté le bloc de granite. Les deux configurations sont identiques, mais une légère différence de positionnement existe entre les deux expériences, qui se traduit par exemple par une différence dans l’erreur de parallélisme (inférieure à 1 degré) entre le plan moyen de la surface rugueuse et la plaque de plexiglas. La comparaison des résultats obtenus pour les deux expériences permet de tester la sensibilité des mesures à ce parallélisme. On constate que l’écart entre les mesures obtenues dans les deux séries croît avec la diminution d’ouverture moyenne (voir figure 4, page 144). Cet effet est similaire à celui évoqué au paragraphe précédent pour l’incertitude sur  $d_h/d_m$  : une différence de positionnement a d’autant plus d’influence sur la transmissivité qu’elle induit une variation importante de l’ouverture vis-à-vis de l’ouverture moyenne. Cependant, compte tenu des barres d’erreur sur  $d_h/d_m$ , les deux séries de mesures sont cohérentes, et permettent de conclure à une reproductibilité satisfaisante de l’expérience.

### 5.3.3 Écart à la loi cubique

La droite horizontale en pointillé présentée à la figure 4 de l’annexe, page 144 représente le comportement idéal d’un modèle de Poiseuille plan. L’écart à cette droite quantifie l’influence de la rugosité sur le comportement hydraulique de la fracture. Aux grandes ouvertures, et pour toutes les séries de mesure, les points expérimentaux tangentent la droite, en bonne adéquation avec le comportement asymptotique attendu.

On observe une augmentation quasi-monotone de l’écart au modèle sans rugosité lorsqu’on diminue l’ouverture moyenne. Aux plus petites ouvertures explorées (proches du contact), l’écart au modèle de Poiseuille observé pour les expériences libellées  $\parallel$  est de 20 % en termes d’ouverture hydraulique, ce qui correspond à plus de 50 % en termes de débit. Pour ces expériences, l’ouverture hydraulique mesurée est significativement plus faible que l’ouverture moyenne de la fracture : la rugosité a un effet inhibiteur sur l’écoulement.

### 5.3.4 Sensibilité à l'orientation du gradient de pression

Les mesures libellées  $\perp$ , obtenues pour la même fracture que celle utilisée dans les expériences libellées  $\parallel$ , mais avec une orientation perpendiculaire du gradient de pression macroscopique, traduisent un comportement hydraulique complètement différent.

En premier lieu, l'ouverture hydraulique de la fracture est supérieure à son ouverture moyenne, quelle que soit l'ouverture moyenne. En d'autres termes, la rugosité a pour effet de favoriser l'écoulement. Un tel résultat est peu intuitif. Il trouvera son explication dans le chapitre suivant.

En second lieu, le changement de comportement de la fracture lorsqu'on change l'orientation de l'écoulement que l'on impose signifie que l'ouverture moyenne, ou la transmissivité (i.e, la perméabilité), d'une fracture, sont des quantités qui ne peuvent être définies indépendamment d'une connaissance préalable de l'orientation de l'écoulement à l'échelle de la fracture. Dans le cas de notre fracture expérimentale, on peut réellement parler d'anisotropie hydraulique de la fracture.

## Conclusion

En conditions d'écoulement réversible, la rugosité du champ des ouvertures de notre modèle expérimental de surface rugueuse induit un écart significatif au modèle de Poiseuille plan. Cet écart est d'autant plus important que l'amplitude de la rugosité est grande vis-à-vis de l'ouverture moyenne. Aux plus petites ouvertures explorées, l'écart sur les débits peut atteindre 50 %. En outre, l'écart au modèle sans rugosité dépend de l'orientation du gradient de pression macroscopique. En toute rigueur, la perméabilité d'une telle fracture rugueuse, ou de façon équivalente, son ouverture hydraulique, ne sont pas des quantités intrinsèques. Elles sont dépendantes des conditions d'écoulement. La demi-fracture étudiée ici exhibe manifestement une variabilité importante de sa perméabilité en fonction de l'orientation de l'écoulement qui lui est imposé. Cette variabilité est liée à la rugosité de sa paroi granitique, alors même que la description géométrique dont on dispose pour cette paroi est isotrope. Ainsi, la question se pose de savoir si les mesures de perméabilité d'une fracture in situ (dans un puit de forage, par exemple), à petite échelle, peuvent fournir une estimation de sa perméabilité qui corresponde à sa perméabilité vis-à-vis de processus d'écoulement naturels. Les conditions d'écoulement imposées pour la mesure sont-elles les conditions "naturelles" d'écoulement subies par la fracture ? Sont-elles imposées à la bonne échelle et avec la bonne orientation ? Une autre constatation importante est la possibilité pour la fracture rugueuse d'être plus perméable qu'un modèle de Poiseuille de même ouverture moyenne.

Ces résultats sont liés à la complexité qui apparaît dans l'écoulement lorsque l'amplitude de la rugosité devient du même ordre de grandeur que l'ouverture moyenne. Afin de comprendre l'origine de ces propriétés hydrauliques à l'échelle de la fracture, il faut s'intéresser à une description locale de l'écoulement. La simulation numérique est un outil bien adapté, comme on s'appliquera à le montrer dans le chapitre suivant.

Les perspectives de cette étude sont multiples. La première concerne la visualisation de l'écoulement. L'utilisation d'une plaque de plexiglas plane permettrait de photographier sans distorsion les lignes de courant dans la fracture, rendues visibles sous la forme des trajectoires de traceurs injectés dans l'écoulement. Une autre perspective concerne la fermeture élastique de la fracture ; une étude de la transmissivité de la fracture à des ouvertures où les deux surfaces sont poinçonnées élastiquement serait possible à l'aide des moules en silicone présentés au paragraphe 2.5 du chapitre 2. Une troisième perspective est l'étude des écoulements quand les effets inertiels deviennent non négligeables vis-à-vis des forces de dissipation visqueuses ; une telle étude pourrait être réalisée en faisant varier la proportion du mélange eau/glycérol, ce qui permettrait de faire

varier sa viscosité dans une large gamme, et d'explorer ainsi des valeurs plus élevées (proches de 1) du nombre de Reynolds .

## Annexe : Flow enhancement of a rough fracture

Article publié dans *Geophysical Research Letters* : **27** (18), 2989-2992, 2000

## Flow enhancement of a rough fracture

Y. Méheust and J. Schmittbuhl

**Abstract.** *We study experimentally and numerically the permeability of a rough fracture at laboratory scale when viscous forces are dominating (low Reynolds number). The experimental setup includes a granite fracture surface ( $10 \times 10 \text{ cm}^2$ ) opened in mode I. It allows a continuous opening of the fracture parallel to its mean plane. The fracture roughness is measured and characterized in terms of self-affine heterogeneities. Its isotropy is checked. The departure from the cubic law is measured as a function of the aperture opening (for mean separations between 4.0 and 10.3 mm) and the pressure drop orientation by rotating the fracture by 90 degrees. A strongly anisotropic hydraulic behavior is observed and results from the geometrical heterogeneities that exist up to the fracture macro-scale.*

Geological formations with low matrix permeability have a permeability controlled by the fractures. Hydraulic models of these fractures usually assume simple properties of individual fractures, but also a low variability of the hydraulic conductance for a given opening of the fractures [Bear, Tsang and de Marsily 1993, Sahimi 1993, Bour and Davy 1997]. One motivation of this paper is to study the fluctuations of the fracture hydraulic behavior because of the fracture roughness and the pressure drop orientation within the fracture.

Numerous works stimulated by recent analyses of the fracture surface geometry have shown the influence of the geometry on single phase fracture flow [Brown 1989, Sahimi 1993, Tsang and Tsang 1987, Durham and Bonner 1995, Glover, Matsuki, Hikima and Hayashi 1998b]. Theoretical and numerical studies [Tsang and Tsang 1987, Brown 1989, Thompson and Brown 1991, Ge 1997, Zimmerman and Bodvarsson 1996] have proved that a spatially varying aperture  $d(x, y)$  forces the fluid to follow tortuous paths through the fracture i.e. channeling, and that this effect results in significant departures from the cubic law.

Natural fractures [Brown and Scholz 1985, Schmittbuhl, Gentier and Roux 1993, Cox and Wang 1993, Power, Tullis, Brown, Boitnott and Scholz 1987] exhibit the same scaling invariance as fresh artificial mode I fractures [Schmittbuhl, Schmitt and Scholz 1995, Bouchaud 1997]. Both are self-affine with a robust roughness exponent close to 0.8. Fracture opening and fracture surface geometry might be related. For large openings, fracture roughness can be neglected

and a parallel plate model is relevant. For an opening small compared to the fracture roughness, aperture fluctuations are controlled by the height distribution of the fracture topography and the correlations between morphologies of the opposite fracture surfaces. Perfectly mated fracture surfaces (e.g. obtained by hydraulic fracturing with no shear slip) provide a constant aperture all along the fracture at least at large scales [Glover, Matsuki, Hikima and Hayashi 1998a, Hakami and Larsson 1996]. When shear slip exists, a cross-over length emerges in the topography correlations, directly linked to the amount of slip [Plouraboué, Kurowski, Hulin, Roux and Schmittbuhl 1995]. When aperture is considered at length scales smaller than the slip, facing surfaces are independent.

An identical aperture field might result from the void between different pairs of rough surfaces. More specifically, a rough surface can be constructed so that the aperture between it and a flat plane be identical to that between two given rough fractures [Brown 1995, Plouraboué et al. 1995]. In the former case, aperture and fracture surface topography show the same geometrical fluctuations.

The influence of the fracture wall geometry is generally described through its consequence on macroscopic properties of the fracture flow, like permeability measurement [Durham and Bonner 1995, Hakami and Larsson 1996] or dispersion analysis [Tsang, Tsang, Neretnieks and Moreno 1988, Keller, Roberts and Blunt 1999, Roux, Plouraboué and Hulin 1996].

When local apertures are slowly varying along the aperture plane (lubrication approximation), the local flow through the model depends only on local apertures, and not on the geometries of the facing rough surfaces themselves. Thus, under such a condition, which Mourzenko, Thovert and Adler (1995) have shown to be valid for the range of mean apertures considered in the present experimental study, any rough fracture with an aperture topography identical to that studied here will exhibit the same hydraulic behavior. For that reason, our experimental setup truly describes a possible behavior for a natural rough fracture. Moreover, in this range of mean fracture separations, a fracture made of two perfectly mated rough surfaces will be equivalent to a parallel plate configuration with the same separation. See [Méheust and Schmittbuhl 2001] for detailed explanation.

The experimental setup for permeability measurement is shown in Fig. 2. Two tanks are linked by a horizontal channel of width  $L_y = 10$  cm, which can be divided in three parts along its length: the inlet, the fracture itself, and the outlet. The length of the fracture is:  $L_x = 10$  cm. Inlet and outlet have the same constant aperture  $h = 1.7$  cm. The aperture of the fracture itself is limited by a rough granite surface underneath and a horizontal plexiglas plate above. The plate can be translated vertically and continuously with four screws so as to vary the mean aperture of the fracture, i.e. *mechanical aperture*,  $d_m$ , from 3 mm to 1.6 cm. A frame  $(x, y, z)$  is used to describe the aperture (see Fig. 1). Local aperture  $d(x, y)$  can be written as  $d_m + h(x, y)$ , where  $h(x, y)$  is

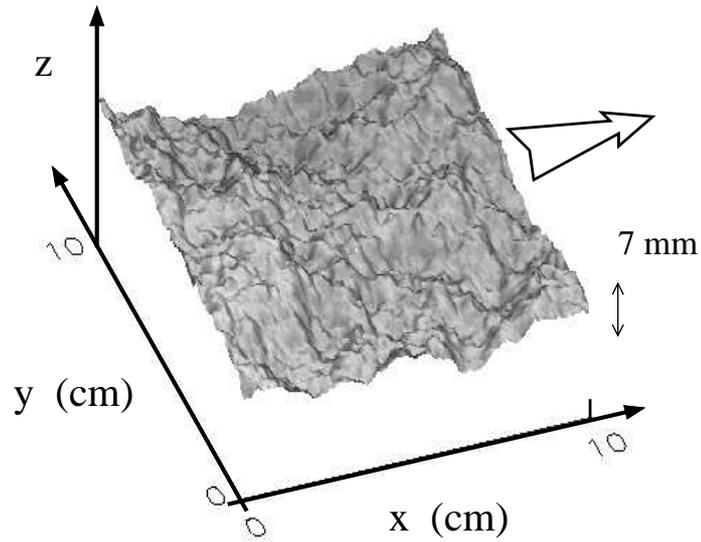


Figure 1: Representation of the experimental surface in the configuration used for the first and second series of measurements. The map is a regular  $130 \times 130$  mesh covering a surface of  $9.8 \times 9.8$  cm. The large arrow denotes the direction of flow in the configuration labeled as || in Fig. 4.

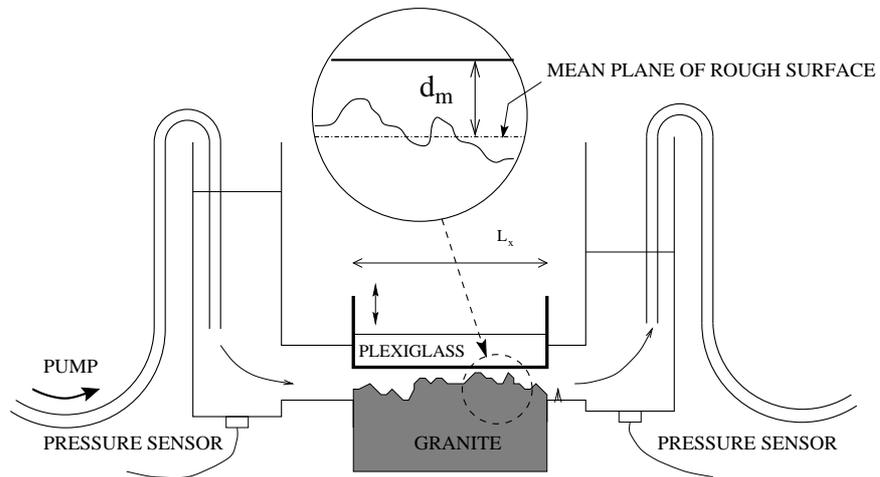


Figure 2: Sketch of the experimental setup. The fracture aperture lies between a rough granite surface and a plexiglas plate facing it above, which can be translated vertically to vary fracture separation  $d_m$ .

the local deviation from mean level ( $\langle h(x, y) \rangle = 0$ ). The rough surface has been obtained by fracturing a  $10 \times 10 \times 20 \text{ cm}^3$  rectified block of granite from Lanhélin (Brittany, France) in mode I (four point bending).

The surface has been sampled with a mechanical profiler [López and Schmittbuhl 1998] with two different sampling meshes. On one hand, a complete 3D map of the surface, shown in Fig. 1, has been obtained from the measurement of a regular grid of  $130 \times 130$  points, with a mesh size of  $750 \mu\text{m}$ . This map has been used to compute the mean value and the root mean square  $\sigma$  of the height distribution. The mean value is used to set the altitude of the horizontal mean plane of the fracture surface. The root mean square  $\sigma$  has been chosen as an estimate of the amplitude of the roughness. For the whole surface, it has been found to be  $\sigma = 1.42 \text{ mm}$ .

On the other hand, two sets of 10 parallel profiles of 2048 points each have been recorded. One of them has been sampled parallel to the fracture initiation notch, while the other half have been sampled along a direction perpendicular (i.e. along the crack propagation direction). These profiles are sampled with a high precision ( $40 \mu\text{m}$  between two adjacent points of a profile). The distance between profiles is 2 mm. They have been used for the self-affine analysis of the surface heights.

The height distribution is well described in terms of self-affinity: it remains statistically unchanged for the transform:  $\Delta x \rightarrow \lambda \Delta x$ ,  $\Delta y \rightarrow \lambda \Delta y$ ,  $\Delta z \rightarrow \lambda^\zeta \Delta z$ , where  $\lambda$  can take any real value. The exponent  $\zeta$  is called roughness exponent. The 1D Fourier spectrum of a profile behaves as a power law with an exponent  $-1 - 2\zeta$  [Schmittbuhl et al. 1995], and provides an estimate of the roughness exponent.

The results of the Fourier analysis carried out on each profile, have been averaged separately over the two groups. The resulting plots, shown in Fig. 3, provide a roughness exponent of  $0.79 \pm 0.01$  for profiles either parallel or normal to the fracture initiation notch. They are consistent with an assumption of roughness isotropy, and in good agreement with previous estimates [Schmittbuhl et al. 1995] for the roughness exponent of granite. Geometrical heterogeneities can be considered as isotropic but exist up to the size of the fracture.

To insure a regime where viscous forces are dominating (low Reynolds number), we used a 90% – 10% mixture of glycerol and water. Its density  $\rho$  is  $\rho = 1300 \text{ kg.m}^{-3}$ . Its viscosity  $\eta$  is  $0.14 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  at  $22^\circ\text{C}$ . A peristaltic pump is used to force a steady volume rate through the channel, which causes a stationary pressure drop difference  $\Delta P$  between both ends of the channel. The pressure at the bottom of each tank is measured with a precision of 0.2 Pa, by use of two identical piezoelectric sensors. A precise measurement of  $\Delta P$  is possible for pressures between 10 Pa and 1000 Pa (i.e. 10 cm of pressure head).

A transmittivity  $K$  for the fracture alone can be defined from the Darcy law:

$$Q = -L_y \frac{K}{\eta} \overline{\nabla P} \quad , \quad (1)$$

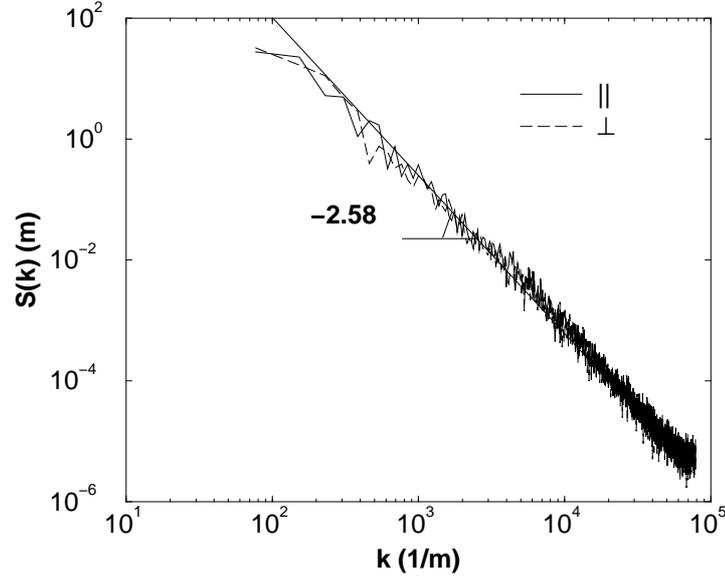


Figure 3: Results of the Fourier analysis for both perpendicular sets of profiles. The roughness exponent is  $0.79 \pm 0.01$  for parallel ( $\parallel$ ) and perpendicular ( $\perp$ ) profiles. These estimations support the roughness isotropy of the fracture.

where  $L_y$  is the width of the system transverse to flow and  $\eta$  is the fluid viscosity.

For a fracture with no roughness i.e. a parallel plate, the aperture is constant and equal to  $d_m$  and the transmittivity  $K$  is  $d_m^3/12$ . For a rough fracture, we define by analogy an hydraulic aperture  $d_h$  that can be obtained from the measured transmittivity  $K$  as

$$d_h = (12 K)^{\frac{1}{3}} \quad . \quad (2)$$

For a given applied volumetric rate  $Q$ , the pressure drop difference  $\Delta P$  is measured for the different mechanical apertures. Linearity between  $Q$  and  $\Delta P$  was observed for the whole range of explored mechanical aperture  $d_m$ . Corrections for finite inlet and outlet were carefully estimated. The validity of the setup was checked by use of two parallel flat surfaces: a plexiglas plate facing a flat granite surface. Laminar flow property was also checked from the reversibility of the hydraulic response. Reproducibility was tested by unmounting and remounting the fracture surface between two series of measurements (see Fig. 4).

The influence of roughness on the hydraulic behavior of the fracture is shown by plotting the ratio  $d_h/d_m$  as a function of the normalized mechanical aperture  $d_m/\sigma$ , where  $\sigma$  is the r.m.s. of the surface roughness (Fig. 4). The normalized aperture has been varied between 2.8 and 7.3, which corresponds to a mean fracture separation in the range of 4.0 to 10.3 mm. For each point of the graphs, the 0.25 mm systematic uncertainty  $\delta d_m$  on the estimation of

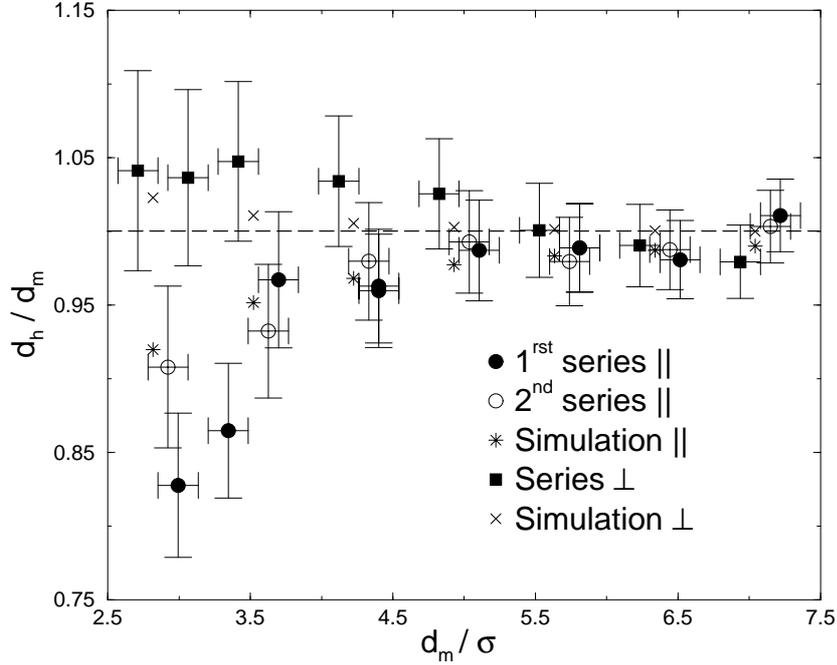


Figure 4: Evolution of the ratio  $d_h/d_m$  with normalized aperture  $d_h/\sigma$  for two series of experiments (1) and (2) oriented parallel to the initiation notch ( $\parallel$ ), and one series of experiments for a perpendicular orientation of the pressure drop ( $\perp$ ). Horizontal and vertical error bars are both due to a 0.25 mm uncertainty in the estimation of the imposed  $d_m$ . The results of a numerical simulation of the experimental fracture with undrained boundary conditions are also shown for comparison.

the imposed  $d_m$  yields both a systematic uncertainty  $\delta d_m/\sigma$  on  $d_m/\sigma$ , and an uncertainty  $d_h \delta d_m/d_m^2$  on  $d_h/d_m$ , which is much bigger than the uncertainty owing to the uncertainty in the measurement of  $d_h$ . Thus,  $\delta d_m$  is responsible for both the horizontal and vertical error bars in Fig. 4. In Fig. 4, we have added for comparison the results of the numerical simulation of the flow that uses the recorded topography map ( $130 \times 130$ ) of the fracture roughness. The numerical simulation solves the Reynold equation using a finite difference scheme [Méheust and Schmittbuhl 2001]. Numerical estimates are very consistent with experimental results and support the flow-inhibiting property of the fracture. At large apertures, mechanical and hydraulic apertures are equal. A significant decrease of the hydraulic aperture is observed at low apertures, going down to 15%. Due to the cubic dependency of the volumetric flow rate  $Q$  with the hydraulic aperture, the deviation for  $Q$  goes up to 45%, since  $\delta Q/Q \simeq 3 \delta d_h/d_h$ .

A third series of measurements was done, after rotating the rough surface by 90 degrees around a vertical axis, so as to exchange the no flow lateral boundaries and the inlet/outlet boundaries of the fracture. The results are shown in Fig. 4. The fracture now appears to be flow-enhancing in comparison with a

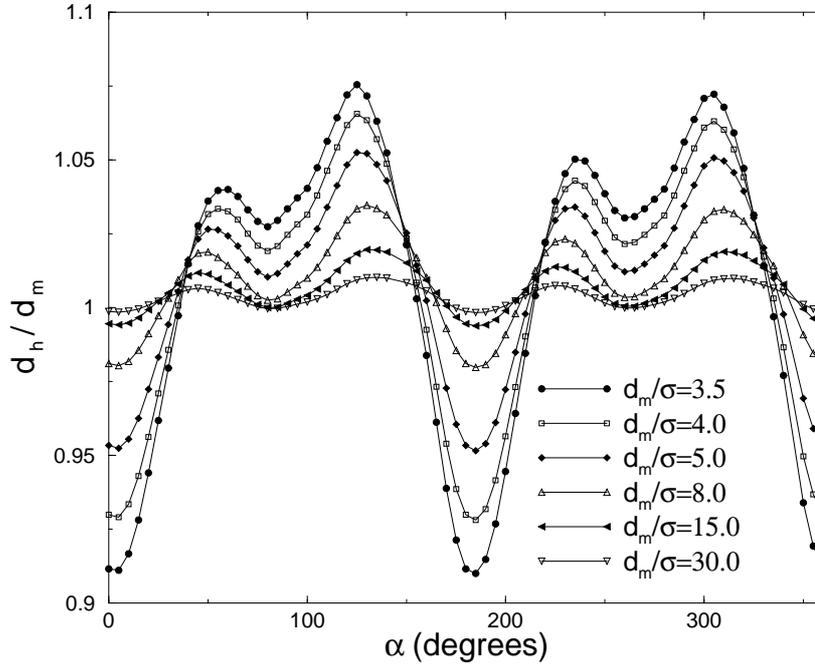


Figure 5: Evolution of the ratio  $d_h/d_m$  when the macroscopic pressure gradient  $\overline{\nabla P}$  is rotated continuously from 0 to 360 degrees, with steps of 5 degrees. The 180 degree periodicity of the curves is a consequence of the reversibility of the flow. The behavior is shown for different apertures  $d_h/\sigma$ . Angle  $\alpha$  is the angle between the direction  $x$  on Fig. 1 and the direction of  $\overline{\nabla P}$ . The configuration labeled as  $\parallel$  in Fig. 4 therefore corresponds to the numerical value  $\alpha = 0$  degree.

parallel plate configuration with an identical mechanical aperture. Estimates from the numerical simulation using the recorded map of the topography rotated by 90 degrees have been added in Fig. 4. The simulation is also in good agreement with experimental measurements and confirms the sensitivity to the pressure drop orientation.

Although only two perpendicular orientations of the pressure drop are experimentally feasible, continuous rotation of the pressure drop is accessible using the numerical simulation. Figure 5 shows the evolution of the ratio  $d_h/d_m$  for a synthetic aperture with properties comparable to the experimental fracture. Details of the simulation using a specific grid rotation technique can be found in [Méheust and Schmittbuhl 2001]. The figure illustrates the continuous change of the hydraulic property from flow-inhibiting to flow-enhancing when the orientation of the pressure head with respect to the fracture is explored for any angle from  $\alpha = 0$  to  $\alpha = 2\pi$ .

The experimental and numerical results presented here show that the hydraulic behavior of a given rough fracture cannot be discussed without taking into consideration the orientation of the applied pressure drop. The exper-

imental fracture is either flow-enhancing or flow-inhibiting depending on the direction of the macroscopic pressure gradient.

The variability in the response of the fracture to a pressure head with a given direction is related to the existence of correlated large aperture channels along the fracture plane. If they are oriented along the macroscopic flow, fluid tends to preferentially flow through them. Such a channel can be seen on Fig. 1, along the  $y$  axis. Because of the  $d(x, y)^3$  dependency of the local flux in the fracture, even a narrow correlated channel with a large aperture oriented along the macroscopic driving force can result in an overall volumetric flow through the fracture larger than that through a parallel plate configuration with identical mean separation. This possible flow-enhancement is studied extensively in [Méheust and Schmittbuhl 2001].

Although geometrical heterogeneities of the aperture are statistically isotropic, the experimental fracture considered here exhibits a strongly anisotropic hydraulic behavior. Heterogeneities exist at macro-scales because of the scale invariance (i.e. self-affinity). A heterogeneity existing at a given scale leads to an anisotropy of the physical response of the fracture at that scale. Because of the self-affine property, the geometrical heterogeneities lead to hydraulic anisotropy at any scale including the fracture scale. No small isotropic elementary volume can be defined for the hydraulic properties.

A direct consequence of this result is the strong influence of the pressure drop orientation on the fracture permeability at any scale. At field scale, the exact link between the measured permeability in a bore hole where the pressure drop is imposed both in magnitude and in orientation, might be very different from the “natural” permeability, since the pressure drop in nature might have a very different orientation and imposed at another scale.

**Acknowledgements.** The authors would like to thank G. Marolleau for technical support. J.P. Vilotte, S. Roux and K.J. Måløy are acknowledged for fruitful discussions. We owe special thanks to Y. Guéguen for improving the manuscript, and G.D.H. Simpson for helping with the manuscript preparation. This work was supported by the “Programme National de Recherche en Hydrologie CNRS-INSU”.

## References

- Bear, J., Tsang, C. F. and de Marsily, G., eds (1993), *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*, Academic, San Diego, Calif.
- Bouchaud, E. (1997), ‘Scaling properties of cracks’, *J. Phys. Condens. Matter* **9**, 4319–4344.
- Bour, O. and Davy, P. (1997), ‘Connectivity of random fault networks following a power law fault distribution’, *Water Resour. Res.* **33**(7), 1567–1583.

- Brown, S. R. (1989), 'Transport of fluid and electric current through a single fracture', *J. Geophys. Res.* **94**(7), 9429–9438.
- Brown, S. R. (1995), 'Simple mathematical model of a rough fracture', *J. Geophys. Res.* **100**(B4), 5941–5952.
- Brown, S. R. and Scholz, C. H. (1985), 'Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces', *J. Geophys. Res.* **90**, 12575–12582.
- Cox, B. L. and Wang, J. S. Y. (1993), 'Fractal surfaces: measurement and application in earth sciences', *Fractals* **1**, 87–115.
- Durham, W. B. and Bonner, B. (1995), Closure and fluid flow in discrete fractures, in L. R. Myer, C. Tsang, N. Cook and R. Goodman, eds, 'Fractured and Jointed Rock Masses', A. A. Balkema, Brookfield, Vt., pp. 441–446.
- Ge, S. (1997), 'A governing equation for fluid flow in rough fractures', *Water Resour. Res.* **33**(1), 53–61.
- Glover, P., Matsuki, K., Hikima, R. and Hayashi, K. (1998a), 'Synthetic rough fractures in rocks', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9609–9620.
- Glover, P. W. J., Matsuki, K., Hikima, R. and Hayashi, K. (1998b), 'Fluid flow in synthetic rough fractures and application to the hachimantai geothermal hot rock test site', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9621–9635.
- Hakami, E. and Larsson, E. (1996), 'Aperture measurements and flow experiments on a single fracture', *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* **33**(4), 395–404.
- Keller, A., Roberts, P. and Blunt, M. (1999), 'Effect of fracture aperture variations on the dispersion of contaminants', *Water Resour. Res.* **35**(1), 55–63.
- López, J. and Schmittbuhl, J. (1998), 'Anomalous scaling of fracture surfaces', *Phys. Rev. E* **57**, 6405–6408.
- Méheust, Y. and Schmittbuhl, J. (2001), 'Geometrical heterogeneities and permeability anisotropy of rough fractures', *J. Geophys. Res.* **106**(B2), 2089–2102.
- Mourzenko, V. V., Thovert, J.-F. and Adler, P. (1995), 'Permeability of a single fracture; validity of the reynolds equation', *J. Phys. II* **5**, 465–482.
- Plouraboué, F., Kurowski, P., Hulin, J. P., Roux, S. and Schmittbuhl, J. (1995), 'Aperture of rough crack', *Phys. Rev. E* **51**, 1675–1685.
- Power, W. L., Tullis, T. E., Brown, S. R., Boitnott, G. N. and Scholz, C. H. (1987), 'Roughness of natural fault surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **14**(1), 29–32.

- Roux, S., Plouraboué, F. and Hulin, J. (1996), 'Tracer dispersion in rough open cracks', *Transp. Porous Media* **32**(1), 97–116.
- Sahimi, M. (1993), 'Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing', *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1393–1534.
- Schmittbuhl, J., Gentier, S. and Roux, S. (1993), 'Field measurements of the roughness of fault surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **20**(8), 639–641.
- Schmittbuhl, J., Schmitt, F. and Scholz, C. H. (1995), 'Scaling invariance of crack surfaces', *J. Geophys. Res.* **100**, 5953–5973.
- Thompson, M. E. and Brown, S. R. (1991), 'The effect of anisotropic surface roughness on flow and transport in fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B13), 21,923–21,932.
- Tsang, Y. W. and Tsang, C. F. (1987), 'Channel model of flow through fractured media', *Water Resources Res.* **23**(3), 467–479.
- Tsang, Y. W., Tsang, C. F., Neretnieks, I. and Moreno, L. (1988), 'Flow and tracer transport in fractured media: a variable aperture channel model and its properties', *Water Resour. Res.* **24**(12), 2049–2060.
- Zimmerman, R. and Bodvarsson, G. (1996), 'Hydraulic conductivity of rock fractures', *Transp. Porous Media* **23**, 1–30.

# Chapitre 6

## Anisotropie hydraulique et chenalisation

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>151</b>
<b>6.1 Un modèle numérique fondé sur l'équation de Reynolds</b> . . . .	<b>151</b>
6.1.1 Principe de la simulation numérique . . . . .	151
Obtention des lignes de courant 2D . . . . .	152
La donnée du problème : le champ des ouvertures locales . . . . .	153
Approximation de lubrification et champ des ouvertures auto-affine	153
6.1.2 Schémas numériques . . . . .	154
Schéma d'inversion par gradient bi-conjugué . . . . .	155
Méthode perturbative pseudo-spectrale . . . . .	156
Comparaison des deux méthodes . . . . .	157
<b>6.2 Anisotropie du comportement hydraulique d'une fracture ru-</b>	
<b>gueuse</b> . . . . .	<b>157</b>
6.2.1 Simulation de l'écoulement à travers la fracture expérimentale . . .	157
6.2.2 Comportement hydraulique d'une fracture numérique . . . . .	158
Chenalisation de l'écoulement . . . . .	158
6.2.3 Rotation continue du gradient de pression – rôle des corrélations .	160
Une technique de rotation de grille . . . . .	160
Variabilité du comportement d'une fracture vis-à-vis de l'orienta-	
tion de $\overline{\nabla P}$ . . . . .	161
Importance des corrélations spatiales du champ des ouvertures . . .	161
Définition d'une ouverture hydraulique indépendamment du choix	
d'une section particulière . . . . .	162
6.2.4 Corrélations du champ de flux local . . . . .	162
<b>6.3 Comportement statistique d'un grand nombre de fractures</b> . . .	<b>163</b>
6.3.1 Lois de décroissance de l'ouverture hydraulique avec l'ouverture	
moyenne . . . . .	163
6.3.2 Étude statistique sur 500 fractures indépendantes . . . . .	163
<b>6.4 Discussion</b> . . . . .	<b>164</b>
6.4.1 Description statistique isotrope de la géométrie et comportement	
hydraulique anisotrope? . . . . .	164
6.4.2 Quel paramètre simple pour décrire une telle fracture rugueuse du	
point de vue hydraulique? . . . . .	165

<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>166</b>
<b>Annexe : Geometrical heterogeneities and hydraulic anisotropy of rough fractures</b> . . . . .	<b>168</b>

---

## Introduction

Nous avons développé une simulation numérique pour confirmer les résultats expérimentaux et accéder à une description locale de l'écoulement dans la fracture expérimentale. La simulation a ensuite été utilisée pour expliquer la sensibilité de la transmissivité des fractures à l'orientation du gradient de pression effectif, un phénomène observé expérimentalement et dont nous présentons une étude détaillée dans ce chapitre. Nous montrons que cette sensibilité est liée à la chenalisation de l'écoulement, et que la variabilité au sein d'une population de fractures statistiquement équivalentes est liée au même phénomène.

La première partie du chapitre est dévolue à une présentation détaillée de la simulation. La 2<sup>e</sup> partie concerne l'étude de l'éventuelle anisotropie hydraulique d'une fracture rugueuse unique, que ce soit la fracture expérimentale ou une fracture numérique. La 3<sup>e</sup> partie concerne l'analyse statistique d'un grand nombre de fractures indépendantes.

## 6.1 Un modèle numérique fondé sur l'équation de Reynolds

### 6.1.1 Principe de la simulation numérique

Le modèle numérique est fondée sur l'approximation de lubrification, selon laquelle le champ des ouvertures locales dans la fracture varie lentement. Comme il a été détaillé au paragraphe 4.2.4, les conséquences de cette approximation sont les suivantes :

- Le champ de pression dans la fracture ne dépend plus que de la position horizontale,  $(x, y)$  (cf. équation (4.19)).
- Le flux local  $\mathbf{q}$ , défini localement comme l'intégrale de la vitesse horizontale sur l'ouverture locale de la fracture (cf. relation (4.23)), est relié au gradient de pression local par une loi cubique (4.24) identique à la loi cubique (4.8) reliant le débit au gradient de pression effectif dans une fracture sans rugosité.
- Le flux local est une quantité conservative, et son équation de conservation, associée à la loi cubique locale, conduit à une équation scalaire (4.27) qui relie le champ de pression  $P$  dans l'écoulement au champ  $d$  des ouvertures locales de la fracture.

Pour faciliter la lecture, nous reproduisons ici la loi cubique locale ainsi que l'équation de Reynolds (4.27) :

$$\text{Loi cubique locale} \quad \mathbf{q} = -\frac{d(x, y)^3}{12 \eta} \nabla P \quad (6.1a)$$

$$\text{Équation de Reynolds} \quad \nabla \cdot \left[ \frac{d(x, y)^3}{12 \eta} \nabla P \right] = 0 \quad (6.1b)$$

La simulation numérique que nous avons développée a essentiellement pour objet d'inverser l'équation (6.1b) pour obtenir le champ de pression associé à l'écoulement à partir de la connaissance de la géométrie de la fracture et du gradient de pression effectif, c'est-à-dire de la différence de pression imposée entre l'entrée et la sortie de la fracture. Une fois le champ de pression obtenu, on obtient le champ de flux local  $\mathbf{q}$  dans la fracture à partir de la loi cubique locale (6.1a). On est ainsi ramené à l'analyse d'un écoulement incompressible à deux dimensions, où le rôle de la vitesse 2D est joué par le flux local.

Un bilan de flux local sur une section de la fracture normale au gradient de pression effectif fournit le débit total dans la fracture, ce qui permet, par comparaison avec l'intensité imposée du gradient de pression effectif, d'obtenir les grandeurs caractéristiques du comportement hydraulique de la fracture : transmissivité, perméabilité, ouverture locale (cf. paragraphe 4.2.3).

### Obtention des lignes de courant 2D

En plus du champ de vitesses 2D, il est intéressant de déterminer les lignes de courant de l'écoulement. D'une part, elles fournissent une description locale complémentaire de celle fournie par les cartes de champ de vitesse. D'autre part, elles sont nécessaires pour effectuer les bilans de débit dans un tube de courant. On reviendra plus en détail sur cette nécessité au paragraphe 6.2.3. L'intégration numérique des lignes de courant à partir du champ de vitesse est peu adaptée. Il est plus approprié de les déterminer à l'aide d'une fonction-courant  $\psi$ ; les lignes de courant sont obtenues comme les intersections de la surface définie par l'équation  $z = \psi(x, y)$  et de plans horizontaux d'altitude donnée :  $\psi(x, y) = \text{Cte}$ .

La fonction-courant est définie à partir du vecteur flux local  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  à l'aide des relations

$$\begin{cases} q_x = & \partial_y \psi \\ q_y = - & \partial_x \psi \end{cases}, \quad (6.2)$$

qui sous-entendent la conservation du vecteur  $\nabla q$ . En introduisant une fonction courant vectorielle [Plouraboué et al., 1998]

$$\mathbf{\Psi}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

conservative ( $\nabla \cdot \mathbf{\Psi} = \partial_z \psi = 0$ ), la définition (6.2) se ramène à l'expression vectorielle

$$\mathbf{q}(x, y) = \nabla \wedge \mathbf{\Psi}(x, y), \quad (6.4)$$

tandis que la loi cubique locale (6.1a) devient

$$\nabla \wedge \mathbf{\Psi} = -\frac{d^3(x, y)}{12\eta} \nabla P. \quad (6.5)$$

Tenant compte de l'égalité  $\nabla \wedge [\nabla \wedge \mathbf{\Psi}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Psi}) - \Delta \mathbf{\Psi}$ , on remarque que

$$\Delta \mathbf{\Psi} = \nabla \wedge \left[ \frac{d^3(x, y)}{12\eta} \nabla P \right], \quad (6.6)$$

dont la projection sur l'axe vertical donne

$$\Delta \psi = \frac{3d^2(x, y)}{12\eta} \nabla P \cdot (\nabla \wedge \mathbf{D}), \quad \text{où} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d(x, y) \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

$$= \frac{3}{d(x, y)} (\nabla \wedge \mathbf{D}) \cdot (\nabla \wedge \mathbf{\Psi}) \quad (6.8)$$

$$\Delta \psi = \frac{3}{d(x, y)} \nabla d \cdot \nabla \psi, \quad (6.9)$$

soit finalement [Plouraboué et al., 1998] :

$$\boxed{\Delta \psi = 3 \frac{\nabla d}{d} \nabla \psi} \quad (6.10)$$

L'équation (6.10) peut être réécrite sous la forme

$$\boxed{\nabla \cdot [d(x, y)^{-3} \nabla \psi] = 0}, \quad (6.11)$$

qui est identique à l'équation de Reynolds (6.1b), au signe de l'exposant de l'ouverture près. Ainsi, on va pouvoir utiliser le même schéma numérique pour déterminer le champ de pression et les lignes de champ.

### La donnée du problème : le champ des ouvertures locales

La simulation est utilisée dans deux situations :

1. Pour simuler l'écoulement dans le dispositif expérimental présenté au chapitre 5. Dans ce cas, la simulation utilise un champ des ouvertures défini à partir d'un enregistrement de la surface de granite utilisée dans l'expérience.
2. Puisqu'on dispose d'une description statistique satisfaisante des surfaces rugueuses, qui nous permet de produire des clones numériques de ces surfaces (cf. paragraphe 1.2.3), on a pu étudier l'écoulement dans des fractures numériques constituées de deux surfaces auto-affines placées en regard, comme indiqué sur le schéma 4.1(a). Dans le présent chapitre, on considère deux surfaces rugueuses non corrélées l'une avec l'autre, une situation où le champ des ouvertures a les mêmes propriétés que les topographies rugueuses des parois. De tels champs des ouvertures auto-affines ont été produits en superposant un champ constant  $d = d_m$  à une topographie de moyenne nulle, générée en suivant la procédure numérique exposée au chapitre 1. La quantité  $\sigma$  désigne ici l'écart-type du champ des ouvertures, une quantité représentée par le caractère  $\Gamma$  à la figure 4.1(b).

### Approximation de lubrification et champ des ouvertures auto-affine

L'applicabilité de l'hypothèse d'auto-affinité est liée aux échelles physiques de la fracture que l'on veut modéliser. En effet, le schéma numérique en différences finies contient l'information sur l'extension verticale  $\Delta h(L)$  de la rugosité du champ des ouvertures, mais pas l'information sur l'extension horizontale  $L$  de la fracture, c.-à-d., sur l'échelle associée à la maille,  $a = L/N$ . C'est l'échelle de la maille,  $a$ , qui permet de donner un ordre de grandeur au gradient du champ des ouvertures, calculé en différences finies à chaque nœud. Notons  $s(l)$  la pente locale estimée à l'échelle  $l$ , et  $l_c$  l'échelle inférieure pour la description auto-affine, qui est un multiple de la maille  $a$ . La façon dont on peut générer une surface auto-affine avec une échelle  $l_c$  multiple de la maille  $a$  a été expliquée page 22.

Supposons dans un premier temps que  $l_c = a$ . En vertu de l'auto-affinité, l'amplitude de la rugosité estimée à l'échelle  $l$  s'écrit

$$\Delta h(l) = \Delta h(a) \left( \frac{l}{a} \right)^\zeta, \quad (6.12)$$

une relation vérifiée en particulier pour  $l = L$ . L'amplitude typique de la rugosité à l'échelle de la maille  $a$  vaut  $\Delta h(a)$ , de sorte qu'une valeur typique de la pente locale à l'échelle de la maille s'obtient comme

$$\boxed{s(a) \sim \frac{\Delta h(a)}{a} = a^{\zeta-1} \left( \frac{\Delta h(L)}{L^\zeta} \right)}. \quad (6.13)$$

On constate que cette quantité diverge lorsqu'on fait tendre la taille de la maille  $a$  vers 0, puisque  $\zeta < 1$ . Cela signifie que l'auto-affinité est une propriété qui est fondamentalement en contradiction avec l'hypothèse de lubrification. Plus l'échelle de coupure inférieure pour l'auto-affinité est petite, plus la validité de l'hypothèse de lubrification risque d'être mise en doute. Le problème se présente de manières différentes selon qu'on veut simuler l'écoulement dans une

fracture numérique, ou bien dans une fracture réelle, à partir d'un enregistrement de son champ des ouvertures.

Lorsqu'on simule l'écoulement dans une fracture numérique, on choisit en général une taille de grille pour faire le calcul. La dimension physique  $L$  de la fracture est, quant à elle, posée a priori par l'utilisateur. La relation (6.13) limite alors inférieurement la dimension physique  $L$  que l'on peut assigner à la fracture.

S'il s'agit de modéliser l'écoulement dans une fracture réelle à partir d'un enregistrement de son champ des ouvertures, le problème est plus épineux. L'échelle  $L$  est fixée à sa valeur réelle. La relation (6.13) limite alors la taille de grille  $N = L/a$  maximale que l'on peut utiliser pour effectuer la simulation, puisque l'échelle de la maille doit vérifier  $s(a) \ll 1$ , soit

$$a \gg \left[ \frac{\Delta h(L)}{L^\zeta} \right]^{\frac{1}{1-\zeta}} . \quad (6.14)$$

Par exemple, la simulation de l'écoulement dans la fracture expérimentale présentée au chapitre 5, effectuée en utilisant un enregistrement de la surface granitique de maille  $a = 750$  microns, pour une extension verticale maximale de la rugosité de 7 mm, satisfait largement la relation 6.14, qui s'écrit dans ce cas :  $a \gg 0.16$  microns.

On a aussi la possibilité de décrire plus finement l'écoulement, c'est-à-dire sur une grille comportant plus de points, en limitant inférieurement l'auto-affinité du champ des ouvertures à une échelle  $l_c$  multiple de  $a$ . On procède, soit par filtrage d'un enregistrement de maille  $a$ , soit en complétant un enregistrement de maille  $l_c$ . Dans le dernier cas, il faut absolument effectuer l'interpolation dans l'espace de Fourier (cf. page 22), et non pas interpoler bilinéairement dans l'espace réel, car on tient à conserver l'auto-affinité du spectre à toutes les échelles plus grandes que  $l_c$  (cf. paragraphe 3.1.1). Lorsque  $l_c > a$ , la valeur typique de  $\|\nabla d\|$  est réduite d'un rapport  $a/l_c$  :

$$s(a) \sim s(l_c) \frac{a}{l_c} \quad \text{soit} \quad s(a) \sim l_c^{\zeta-1} \frac{a}{l_c} \left( \frac{\Delta h(L)}{L^\zeta} \right) . \quad (6.15)$$

Si on a filtré les modes de Fourier de petite échelle du champ des ouvertures, on n'étudie plus exactement la même fracture. Mais on fait l'hypothèse que les modes de petite échelle du champ des ouvertures ont une influence négligeable sur le comportement hydraulique de la fracture, et que, par conséquent, notre étude décrira correctement le comportement de la fracture originelle. Cette hypothèse sera vérifiée dans la suite de l'exposé.

Précisons que le programme de simulation vérifie de toute façon que les pentes locales de la distribution utilisée comme champ des ouvertures restent inférieures à 0.1.

### 6.1.2 Schémas numériques

On a utilisé deux schémas numériques différents pour simuler l'écoulement dans la fracture : une méthode d'inversion par gradient bi-conjugué, et une méthode perturbative pseudo-spectrale. Les deux schémas ont été implémentés en différences finies, avec les mêmes caractéristiques communes suivantes :

- La distribution des ouvertures a été échantillonnée sur une grille  $\mathcal{G}_d$  deux fois plus fine que la grille  $\mathcal{G}_p$  utilisée pour le champ de pression (voir figure 6.1). On a pu ainsi calculer le

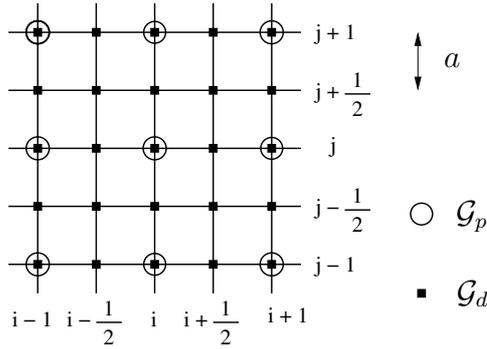


FIG. 6.1 – Schéma des grilles utilisées pour échantillonner les champs d'ouverture et de pression, dans la simulation numérique. La grille des ouvertures locales (de maille  $a$ ) est deux fois plus fine que celle des pressions.

gradient d'ouverture locale de façon symétrique, selon

$$\begin{cases} \partial_x d = \frac{1}{2a} (d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j}) \\ \partial_y d = \frac{1}{2a} (d_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j-\frac{1}{2}}) \end{cases} . \quad (6.16)$$

La taille de grille de référence,  $(N \times N)$ , correspond à la grille des ouvertures.

- Les conditions aux limites pour la simulation peuvent être choisies de deux façons : périodiques, ou bien avec des parois latérales imperméables.

Par conditions aux limites périodiques, on entend que les conditions aux limites sur le champ des ouvertures sont périodiques dans les deux directions, et que le champ de pression dans la fracture est la somme de la solution de Poiseuille (4.6) et d'une contribution périodique dans les deux directions, due aux fluctuations périodiques du champ des ouvertures locales.

Les conditions aux limites avec parois latérales imperméables signifient que l'on impose une différence de pression  $\Delta P$  entre l'entrée et la sortie de la fracture, et que la vitesse sur les parois latérales est dirigée parallèlement aux parois. Il n'est pas possible d'imposer des conditions de contact (vitesse nulle aux parois) dans une simulation de ce type.

- Le débit volumique dans la fracture est calculé comme le débit dans un tube de courant qui s'appuie sur une section normale au gradient de pression effectif et centrée sur le point milieu de la grille. La conservation du débit le long du tube de courant sur lequel s'appuie cette section est une conséquence directe de l'incompressibilité de l'écoulement, et a servi de test de précision pour la simulation. On a ainsi évalué la précision relative sur l'ouverture hydraulique comme  $\delta d_h / \langle d_h \rangle$ , où  $\delta d_h$  et  $\langle d_h \rangle$  sont l'écart-type et la valeur moyenne, respectivement, des valeurs calculées pour le débit sur  $N/2$  sections normales distinctes du tube de courant. La précision relative sur l'ouverture hydraulique est de  $10^{-15}$  pour la méthode d'inversion par gradient conjugué, et  $10^{-6}$  pour la méthode pseudo-spectrale.

### Schéma d'inversion par gradient bi-conjugué

Exprimée en différences finies au nœud  $(i, j)$  de la grille, l'équation de Reynolds s'écrit

$$d_{i+\frac{1}{2},j}^3 (P_{i+1,j} - P_{i,j}) + d_{i-\frac{1}{2},j}^3 (P_{i-1,j} - P_{i,j}) + d_{i,j+\frac{1}{2}}^3 (P_{i,j+1} - P_{i,j}) + d_{i,j-\frac{1}{2}}^3 (P_{i,j-1} - P_{i,j}) = 0 . \quad (6.17)$$

On résout l'ensemble des  $N/2 \times N/2$  lois des nœuds sous la forme d'un système linéaire  $\tilde{A} \tilde{X} = \tilde{B}$ , où le vecteur  $\tilde{X}$  contient les  $N/2 \times N/2$  valeurs de la pression aux nœuds de la grille. La matrice

$\tilde{A}$  exprime la conservation du flux local  $\mathbf{q}$  à chaque nœud ayant quatre plus proches voisins équivalents. Le vecteur au second membre  $\tilde{B}$ , contient l'information sur la conservation de  $\mathbf{q}$  aux nœuds situés aux bords de la grille.

Le système linéaire est inversé à l'aide d'un schéma itératif d'inversion par gradient bi-conjugué [Batrouni et Hansen, 1988; Press et al., 1992]. Ce type d'algorithme est très efficace lorsqu'on manipule de grandes matrices contenant un nombre important de coefficients nuls. On considère que le calcul a convergé lorsque la norme  $\|\tilde{A}\tilde{X} - \tilde{B}\|$  est inférieure à  $10^{-15}$ .

### Méthode perturbative pseudo-spectrale

Cette méthode astucieuse est due à Plouraboué et al. (1998). L'équation de Reynolds (6.1b) s'écrit également

$$\Delta P(x, y) = -3 \nabla (\ln d(x, y)) \cdot \nabla P(x, y) \quad . \quad (6.18)$$

La solution de l'écoulement de Poiseuille plan correspond à  $\nabla (\ln d(\vec{x})) = \vec{0}$ . C'est l'approximation d'ordre 0 à l'écoulement en configuration rugueuse. Elle s'écrit ;

$$P^{(0)} = -\Delta P / L_x \hat{x} \quad . \quad (6.19)$$

Pour un champ des ouvertures non uniforme, on peut rechercher le gradient de pression  $\nabla P$  comme une solution à l'équation (6.18) de la forme

$$\nabla P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla P^{(n)}(x, y) \quad , \quad (6.20)$$

où  $P^{(0)}$  est la solution non perturbée (6.19), et où la perturbation d'ordre  $n$  est obtenue à partir de la perturbation d'ordre  $n - 1$  par résolution de l'équation

$$\boxed{\Delta P^{(n)} = -3 \nabla (\ln d(x, y)) \cdot \nabla P^{(n-1)}} \quad . \quad (6.21)$$

Si l'algorithme converge, la solution vérifie nécessairement l'équation (6.18). Le critère de convergence de l'algorithme est [Plouraboué et al., 1998]

$$\boxed{3 \nabla (\ln d(x, y)) \cdot \frac{\nabla P^{(0)}}{\|\nabla P^{(0)}\|} < 1 \quad , \quad \forall (x, y)} \quad . \quad (6.22)$$

Nous avons considéré que la convergence était atteinte après  $m$  itérations si la norme du terme perturbatif d'ordre  $m$  était inférieure à  $10^{-6}$ .

Pratiquement, l'implémentation de l'algorithme se fait de la manière suivante. À chaque itération, le gradient du champ de pression  $P^{(n)}$  est calculé à chaque nœud de la grille  $\mathcal{G}_p$ , en utilisant les conditions aux limites périodiques. La périodicité est nécessaire à l'utilisation de la transformée de Fourier discrète (FFT), qui rend l'algorithme extrêmement rapide. Le terme de source (terme de droite) de la relation (6.21) est exprimé en différences finies comme

$$\begin{aligned} -3 \left( \frac{\ln(d_{i+1/2,j}) - \ln(d_{i-1/2,j})}{2a} \frac{P_{i+1,j}^{(n)} - P_{i-1,j}^{(n)}}{4a} \right. \\ \left. + \frac{\ln(d_{i,j+1/2}) - \ln(d_{i,j-1/2})}{2a} \frac{P_{i,j+1}^{(n)} - P_{i,j-1}^{(n)}}{4a} \right) \quad . \quad (6.23) \end{aligned}$$

Puis le laplacien du terme de gauche dans la relation (6.21) est inversé en passant dans l'espace de Fourier.

## Comparaison des deux méthodes

L'utilisation des deux schémas permet, quand les conditions aux limites sont périodiques, de confronter les résultats. Ce type de comparaison a permis de valider les deux méthodes. Néanmoins, on les a en général utilisées séparément. La méthode d'inversion par gradient bi-conjugué a été employée pour simuler l'écoulement dans la fracture expérimentale, car elle permet d'utiliser les conditions aux limites avec parois latérales imperméables, plus réalistes. La méthode pseudo-spectrale nécessite l'utilisation de conditions aux limites périodiques, mais l'utilisation de la transformée de Fourier rapide la rend beaucoup plus rapide, à la fois pour le calcul du champ de pression et pour la détermination des lignes de courant. On l'a utilisée pour faire des études statistiques sur un grand nombre de fractures numériques indépendantes.

## 6.2 Anisotropie du comportement hydraulique d'une fracture rugueuse

Un comportement hydraulique anisotrope a été observé pour la fracture expérimentale au chapitre 5 : le comportement hydraulique était très différent pour deux orientations orthogonales du gradient de pression effectif à l'échelle de la fracture. Ce comportement est-il confirmé par une simulation de l'écoulement dans la demi-fracture expérimentale ? Est-il aussi rencontré sur des fractures numériques ? À quoi faut-il l'attribuer ?

### 6.2.1 Simulation de l'écoulement à travers la fracture expérimentale

Les résultats expérimentaux d'une série de mesures dans chacune des configurations expérimentales sont présentés à la figure 4 de l'annexe au chapitre, page 180, sous forme de croix et d'astérisques. On leur a superposé les résultats d'une simulation de l'écoulement dans la fracture expérimentale ; les résultats numériques sont sous la forme de disques et de carrés noirs. On a utilisé ici la simulation numérique par gradient bi-conjugué avec des conditions aux limites à parois latérales imperméables. Le champ des ouvertures a été généré à partir d'un enregistrement de la fracture sur un grille  $128 \times 128$ , correspondant à une maille  $l_c = 750$  microns ; l'enregistrement a été interpolé dans l'espace de Fourier sur une grille  $512 \times 512$ , correspondant à une maille  $a = l_c/4 = 187.5$  microns.

Les résultats numériques sont cohérents avec les résultats expérimentaux, et confirment les deux principales observations expérimentales, à savoir que :

1. La perméabilité de la fracture dépend de l'orientation du gradient de pression effectif.
2. Une fracture rugueuse peut être plus perméable qu'une fracture sans rugosité de même ouverture moyenne.

En outre, on observe numériquement un phénomène que l'on soupçonnait, à savoir une évolution monotone de l'écart au modèle de Poiseuille plan, lorsqu'on diminue l'ouverture moyenne de la fracture.

Les cartes de flux local  $q$  pour une ouverture normalisée  $d_m/\sigma = 2.8$ , présentées à la figure 7, page 186, fournissent un indice quant à la cause de cette anisotropie hydraulique. La carte située en haut correspond à la configuration la moins favorable à l'écoulement, c'est-à-dire aux points de la figure 4, page 180 situés en-dessous de la droite horizontale  $d_h = d_m$  ; la carte présentée dans la partie inférieure de la figure correspond à la configuration la plus perméable. Les zones les plus claires indiquent les flux locaux les plus élevés. Dans le cas le plus favorable, on observe une zone de flux locaux élevés qui constitue un canal privilégié pour l'écoulement, et contribue

majoritairement au débit dans la fracture. Dans la carte du haut, au contraire, le processus de chenalisation est moins favorable, ce qui explique la moindre transmissivité de la fracture pour cette orientation de l'écoulement.

## 6.2.2 Comportement hydraulique d'une fracture numérique

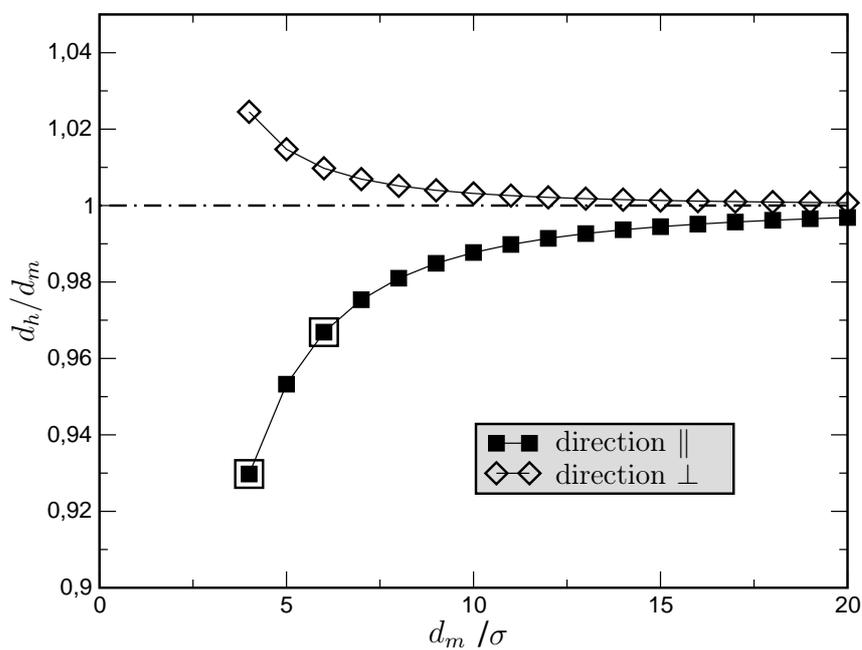
### Chenalisation de l'écoulement

Un comportement hydraulique analogue à celui de la fracture expérimentale, c'est-à-dire fortement anisotrope, et où l'une des configurations exhibe une ouverture hydraulique supérieure à son ouverture moyenne pour l'une des orientations du gradient de pression effectif, peut être observé sur une fracture numérique ayant les mêmes propriétés géométriques ( $\zeta = 0.8$ ) que la surface expérimentale. Comme pour la fracture expérimentale, l'écart au modèle de Poiseuille croît de façon monotone quand l'ouverture moyenne diminue (voir figure 6.2(a)).

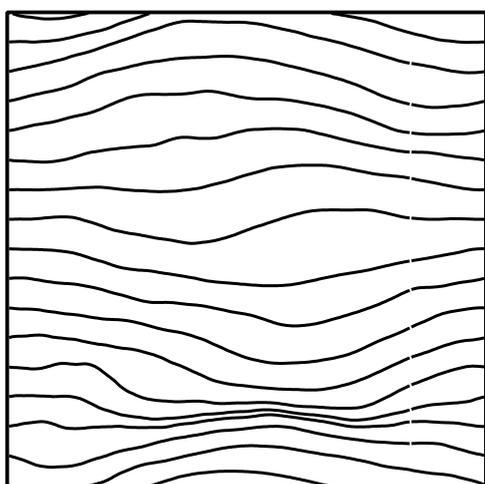
L'augmentation de l'écart au modèle sans rugosité va de pair avec une augmentation de la tortuosité des lignes de courant (cf. figure 6.2(b) et (c)). Lorsque l'amplitude de la rugosité est négligeable par rapport à l'ouverture moyenne, les lignes de courant définies à l'aide de valeurs équidistantes de la fonction courant  $\psi$  sont rectilignes et équidistantes. Au fur et à mesure que l'on diminue l'ouverture, elles deviennent de plus en plus tourmentées ; les zones où elles sont très resserrées indiquent les zones de flux élevé. La tortuosité  $\tau$  est un paramètre défini de manière ad hoc comme le rapport moyen entre la longueur d'une ligne de courant et sa longueur "apparente" [Brown, 1987]. La longueur apparente est définie comme la longueur qu'aurait la ligne de courant si la rugosité n'existait pas ; elle coïncide donc avec la dimension  $L_x$  de la fracture. Nous n'avons pas utilisé la tortuosité dans notre description hydraulique de la fracture.

Les zones d'écoulement privilégié, qui accommodent la majorité de l'écoulement quand elles existent, sont liées à des chenaux de grande ouverture qui traversent la fracture dans son ensemble. La corrélation entre de telles zones de grande ouverture et les zones de flux élevé est bien visible sur la figure 2 de l'annexe au chapitre 7, page 218, où l'on a représenté côte-à-côte les cartes du champ des ouvertures d'une fracture numérique, et les cartes de flux locaux pour les deux orientations orthogonales du gradient de pression effectif, à différentes ouvertures. Les teintes claires représentent les zones d'ouverture ou de flux élevés ; la fracture considérée est une fracture numérique, générée sur une grille de  $512 \times 512$  points. Dans la colonne de gauche, on constate l'existence d'un chenal de grande ouverture, à l'échelle de la fracture, selon la direction  $\Rightarrow$ . Il permet une chenalisation très favorable de l'écoulement (voir colonne du milieu), qui correspond au comportement hydraulique représenté par les cercles blancs sur le graphe 4, page 220. Dans cette configuration, la transmissivité supérieure à celle d'une fracture sans rugosité s'explique par la relation cubique entre conductivités locales et ouvertures locales : un écoulement localisé dans un chenal bien orienté peut se traduire par une transmissivité plus grande qu'un écoulement uniforme. Par contre, les zones de grandes ouvertures de la fracture ne sont pas disposées spatialement de manière à permettre l'existence d'un chenal de grande ouverture à l'échelle de la fracture et orienté dans la direction  $\Uparrow$ . En conséquence, la chenalisation est moins efficace (colonne de droite de la figure 2, page 218) pour cette orientation du gradient de pression effectif, ce qui se traduit par une perméabilité plus faible que celle prévue par la loi cubique (voir disques noirs de la figure 4, page 220).

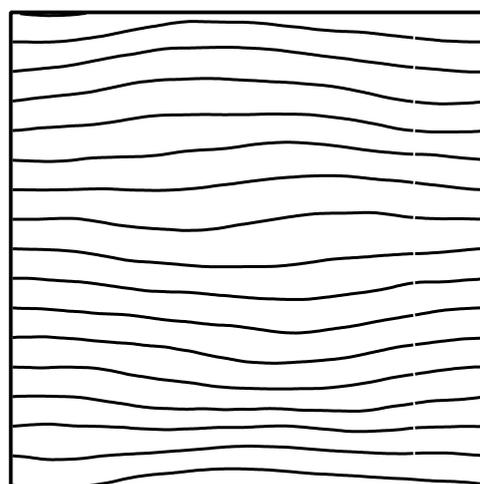
L'existence de chenaux de grande ouverture à l'échelle de la fracture est rendue possible par les corrélations à grande distance du champ des ouvertures. Nous allons voir que ces corrélations jouent un rôle fondamental.



(a) Un exemple de comportement anisotrope d'une fracture numérique. Les deux carrés noirs entourés correspondent aux lignes de champ dessinées en-dessous.



(b) Lignes de champ de l'écoulement dans la configuration libellée  $\parallel$ , pour l'ouverture mécanique normalisée  $d_m/\sigma = 4.0$ .



(c) Lignes de champ de l'écoulement dans la configuration libellée  $\parallel$ , pour l'ouverture mécanique normalisée  $d_m/\sigma = 6.0$ .

FIG. 6.2 – Apparition de la tortuosité dans les lignes de courant quand on diminue l'ouverture moyenne. Le champ des ouvertures de la fracture numérique en question a été généré sur une grille de  $512 \times 512$  points, avec un exposant de rugosité 0.8.

### 6.2.3 Rotation continue du gradient de pression – rôle des corrélations

Les observations d'une anisotropie hydraulique sur une fracture expérimentale et sur une fracture numérique font intervenir jusqu'à présent deux orientations spécifiques du gradient de pression effectif par rapport à la fracture. On peut les définir à l'aide d'un angle  $\alpha$ , qui pour l'une et l'autre prend respectivement les valeurs 0 et 90 degrés. La géométrie carrée de la fracture empêche de réaliser expérimentalement une rotation continue du gradient de pression effectif par rapport à la fracture. Il faudrait pouvoir réaliser plusieurs coupes orientées différemment de différents moules d'une même surface de fracture, et les utiliser dans le montage expérimental, successivement. Mais on n'étudierait pas vraiment la même fracture. Pour que la rotation continue de  $\overline{\nabla P}$  soit possible, il faut pouvoir découpler conditions aux limites imposées sur les pressions et géométrie de la fracture. En particulier, il faut considérer un système sans parois latérales, et ne pas imposer de conditions sur la pression. En revanche, on peut imposer des conditions sur le gradient de pression, en utilisant des conditions aux limites périodiques sur la pression ; par suite, il faut également utiliser des conditions aux limites périodiques pour le champ des ouvertures. Le modèle numérique perturbatif pseudo-spectral est bien adapté à ce type d'étude.

#### Une technique de rotation de grille

On introduit à présent deux repères orthonormés dans le modèle : un repère  $(x, y, z)$ , relatif à l'écoulement, et un repère  $(x', y', z)$ , attaché à la fracture. Les plans vectoriels  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont identiques et définissent l'orientation du plan moyen de la fracture. L'axe  $x$  est parallèle au gradient de pression effectif, et fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x'$ , qui correspond à un des côtés de la fracture (voir figure 6.3). Avec cette notation, les orientations orthogonales étudiées expérimentalement au chapitre 5 et numériquement au paragraphe précédent, correspondent aux valeurs  $0^\circ$  et  $90^\circ$  de l'angle  $\alpha$ . On se propose de calculer l'ouverture hydraulique de la fracture pour toutes les valeurs possible de l'angle  $\alpha$ . On utilise la méthode présentée au paragraphe 6.1.2, mais le gradient de pression effectif  $\overline{\nabla P}$  est décomposé en une composante parallèle à la direction  $x$ ,  $\|\overline{\nabla P}\| \cos \alpha$ , et une direction parallèle à la direction  $y$ ,  $\|\overline{\nabla P}\| \sin \alpha$ .

Il faut noter que pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 90^\circ$ , la définition de l'ouverture hydraulique de la fracture à l'échelle  $L$  est unique. Elle est définie à partir du débit à travers une section d'un tube de courant normale au gradient effectif de pression et de largeur  $L$  ; ce débit ne dépend pas de la section considérée. En effet, si les parois latérales sont imperméables, le seul tube de courant qui convienne s'appuie sur les parois, et il est de section constante. Si les conditions aux limites sont périodiques, un tube de champ dont une des sections est de largeur  $L$  est limité par deux lignes de courant qui sont les reproduction l'une de l'autre par périodicité de période  $L$  ; les sections de ce tube de courant sont donc toutes de largeur  $L$ . En conséquence, tous les tubes de courant de largeur  $L$  transportent le même débit. Pour les deux types de conditions aux limites, le débit peut ainsi être calculé sur n'importe quelle section de la grille orientée orthogonalement au gradient effectif de pression. Cette invariance sert de test pour valider le calcul (cf. paragraphe 6.1.2).

Pour  $\alpha \neq 0^\circ$  et  $\alpha \neq 90^\circ$ , au contraire, la direction normale au gradient de pression effectif ne coïncide pas avec une des directions de périodicité de la grille. Considérons alors la section  $S^{(\alpha)}$  normale à  $\overline{\nabla P}$ , de largeur  $L$  et centrée sur le point-milieu de la grille. Elle correspond à la section d'un tube de champ limité par deux lignes de courant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  qui *ne sont pas identiques par translation*. En conséquence, une autre section  $S$  du tube de courant située plus loin le long de l'axe  $x$  peut ne pas être de largeur  $L$ , bien qu'elle voie passer le même débit que la section  $S^{(\alpha)}$ . Parallèlement, une section  $S^{(\alpha)'}$  obtenue par translation de  $S^{(\alpha)}$  le long de la direction  $x$  ne s'appuie pas sur le même tube de courant, et ne voit pas passer le même débit que  $S^{(\alpha)}$ . Cela

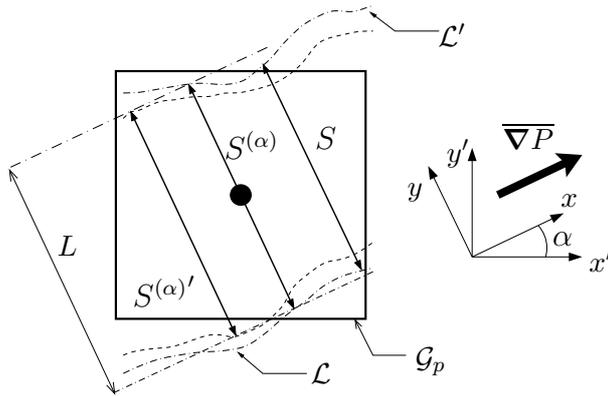


FIG. 6.3 – La section  $S^{(\alpha)}$ , centrée sur le point milieu de la grille  $\mathcal{G}_p$ , normale au gradient de pression effectif  $\overline{\nabla P}$ , et de largeur  $L$ , est choisie pour définir le débit dans la fracture, et consécutivement, sa transmissivité et son ouverture hydraulique. Le choix d'une autre section,  $S^{(\alpha)'}$ , de même largeur et de même orientation, mais positionnée différemment dans l'écoulement, conduirait à une valeur différente de l'ouverture hydraulique.

signifie qu'il faut faire un choix sur la section normale à  $\overline{\nabla P}$  et de largeur  $L$  que l'on choisit pour définir le débit dans la fracture, débit à partir duquel on calculera la transmissivité de la fracture, puis son ouverture hydraulique. La géométrie carrée de la fracture ne permet pas de définir son ouverture hydraulique pour une orientation quelconque de  $\overline{\nabla P}$  indépendamment de la section choisie pour calculer le débit. On peut considérer qu'il s'agit là d'un artefact des conditions aux limites. Nous avons choisi de considérer la section  $S^{(\alpha)}$  définie plus haut (voir aussi figure 6.3) ; lorsqu'on fait tourner la direction du gradient de pression effectif, la section tourne autour de son centre. Le calcul est validé en vérifiant la conservation du débit le long du tube de courant sur lequel s'appuie la section  $S^{(\alpha)}$ , ce qui rend nécessaire la détermination des lignes de courant  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  à l'aide de la méthode exposée au paragraphe 6.1.1.

### Variabilité du comportement d'une fracture vis-à-vis de l'orientation de $\overline{\nabla P}$

La figure 9 de l'annexe, page 189, montre l'évolution du rapport  $d_h/d_m$  d'une fracture numérique quand on fait varier continûment l'angle  $\alpha$ , entre  $0^\circ$  et  $360^\circ$ , par incréments de  $5^\circ$ . Le calcul a été effectué pour différentes ouvertures moyennes. On constate une évolution continue d'un caractère favorable à l'écoulement, c.-à-d., plus perméable qu'une fracture sans rugosité de même ouverture moyenne, à un caractère fortement défavorable à l'écoulement. La configuration la plus favorable est observée pour  $\alpha \simeq 125^\circ$  ; la plus défavorable pour  $\alpha \simeq 5^\circ$ . Les fluctuations de  $d_h/d_m$  liées à cette anisotropie hydraulique deviennent inférieures à 1 % pour  $d_m/\sigma > 30$ . Les fluctuations observées sont liées à l'orientation du gradient de pression effectif vis-à-vis des chenaux de grande ouverture, corrélés à l'échelle de la fracture. Ainsi, dans la configuration  $\alpha = 125^\circ$ , un tel chenal est orienté dans la direction de l'écoulement macroscopique ; dans la configuration  $\alpha = 5^\circ$ , au contraire, une barrière (zone de faible ouverture) à l'échelle de la fracture toute entière est disposée perpendiculairement à l'écoulement.

### Importance des corrélations spatiales du champ des ouvertures

L'existence de tels chenaux de grande ouverture, ou barrières d'ouverture réduite, à l'échelle de la fracture toute entière, est rendue possible par les corrélations à grande distance du champ des ouvertures. Si, pour une ouverture fixée, on diminue la valeur de l'exposant de rugosité  $\zeta$  du champ des ouvertures (voir figure 10, 190), on observe une décroissance de l'amplitude des fluctuations vis-à-vis de  $\alpha$ . Diminuer  $\zeta$  revient à diminuer la persistance des corrélations du champ des ouvertures, et donc l'importance des structures du type chenal ou barrière à l'échelle de la fracture. En particulier, la valeur  $\zeta = -1$  correspond à un champ des ouvertures sans aucune corrélations spatiales (un bruit blanc non corrélé spatialement). Les fluctuations qui persistent

dans ce cas représentent l'effet de l'artefact sur les conditions aux limites, que l'on a discuté à la fin du paragraphe plus haut. Elles sont considérablement plus faibles que les fluctuations observées pour une valeur réaliste de  $\zeta$  (entre 0.5 et 0.8).

### Définition d'une ouverture hydraulique indépendamment du choix d'une section particulière

Il est possible de s'affranchir de l'artefact sur les conditions limites évoqué précédemment pour les configurations d'écoulement où  $\alpha \neq 0 [90]^\circ$ , en définissant l'ouverture hydraulique de la fracture à partir du débit à travers une section parallèle à  $L$  et centrée de la même façon, mais de largeur infinie. Pratiquement, une section de largeur  $p L$ , où  $p \gg N$ , conviendra ; cette procédure est équivalente à moyenniser les résultats obtenus pour l'ouverture hydraulique obtenue à partir d'une infinité de sections distinctes obtenues par translation de  $S^{(\alpha)}$  dans la direction  $x$ .

La variabilité avec l'angle  $\alpha$  de l'ouverture hydraulique ainsi calculée n'est plus liée aux conditions-limites, mais uniquement à la nature de l'écoulement. Les propriétés locales de l'écoulement se retrouvent dans les propriétés intégrées à l'échelle de la fracture, dont  $d_h$ . En particulier, le champ de vitesse observé dans la fracture pour une valeur donnée de  $\alpha$  est une combinaison linéaire de deux champs de vitesse, l'un obtenu pour  $\alpha = 0^\circ$ , l'autre pour  $\alpha = 90^\circ$  [Roux, 1999]. Cette application du théorème de superposition est justifiée par la linéarité de l'équation de Stokes. On peut tirer profit de cette propriété pour montrer que la transmissivité de la fracture, définie en s'affranchissant des conditions aux limites, comme on l'a expliqué plus haut, varie sinusoidalement avec l'angle  $\alpha$ , selon

$$K(\alpha) = \frac{K(0) + K\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{K(0) - K\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \cos(2\alpha) \quad , \quad (6.24)$$

où  $K(0)$  et  $K\left(\frac{\pi}{2}\right)$  représentent les valeurs de la transmissivité de la fracture pour  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 90^\circ$ , respectivement. Une démonstration de l'équation (6.24) est présentée à l'appendice B de l'annexe au chapitre 7, page 237. La figure 13, page 234, montre la variation sinusoidale correspondante, superposée au résultat numérique obtenu en définissant l'ouverture hydraulique à partir de la seule section  $S^{(\alpha)}$ .

#### 6.2.4 Corrélations du champ de flux local

La topographie du champ de flux local  $q$  résulte du couplage entre les conditions aux limites hydrauliques imposées à l'écoulement à l'échelle de la fracture et la géométrie du champ des ouvertures. On s'attend donc à retrouver dans le champ de flux local une trace de la nature auto-affine du champ des ouvertures. On s'est intéressé à l'existence de telles corrélations dans le champ  $\delta q = q - q_{p,p}$ , qui quantifie l'écart entre le champ de flux local dans la fracture, et le champ  $q_{p,p}$  non perturbé (et uniforme) que l'on observe dans une géométrie de Poiseuille plane de même ouverture moyenne. L'étude a été réalisée sur la fracture dont les cartes d'ouvertures locales et de flux locaux sont présentées à la figure 2 de l'annexe au chapitre 7, page 218. La configuration d'écoulement étudiée correspond à la colonne libellée **(b)** de cette figure et à l'ouverture moyenne normalisée libellée  $d_m/\sigma = 4$ . sur la figure. Il faut noter que dans cette figure, le symbole  $\sigma$  correspond à l'écart-type de deux topographies auto-affines indépendantes placées en regard, et non à l'écart-type du champ des ouvertures résultant, et que les deux écart-types sont reliés par un facteur  $\sqrt{2}$ . En utilisant une notation cohérente avec le reste du présent chapitre, la figure en question correspond à  $d_m/\sigma = 2.8$ . Le spectre de Fourier 2D du champ  $\delta q$  est dessiné à la figure 5, page 222. Il ne présente pas la symétrie de révolution caractéristique du champ des ouvertures

correspondant. L'écart à la géométrie cylindrique apparaît comme une zone de coefficients de Fourier faibles dans une région proche de l'axe  $k_x$ , qui signifie que l'écoulement exhibe peu de fluctuations de petite échelle dans la direction de l'écoulement macroscopique. C'est la signature d'un déplacement quasi-uniforme du fluide le long d'un chenal de grande ouverture parallèle à l'axe  $x$ ; ce chenal est visible sur les cartes d'ouverture et d'écoulement de la figure 2, page 218 (deuxième ligne en partant du bas). En-dehors du voisinage de l'axe horizontal, le spectre retrouve une forme sphérique.

En supposant que la région où le spectre n'est pas cylindrique a peu d'influence sur la moyenne angulaire du spectre, on a calculé la moyenne angulaire  $\delta q$  et des composantes de  $\delta \mathbf{q}$  selon  $x$  et  $y$ ,  $\delta q_x$  et  $\delta q_y = q_y$ , respectivement. Les spectres obtenus en fonction du nombre d'onde sont présentés à la figure 6, page 223. Ce sont des lois de puissance, ce qui signifie que les corrélations du champ des ouvertures ont été transmises au champ de flux local. En particulier, la composante du flux local transverse à l'écoulement macroscopique exhibe des corrélations identiques aux corrélations du champ des ouvertures, correspondant à un exposant de Hurst de 0.8.

### 6.3 Comportement statistique d'un grand nombre de fractures

Si la variabilité d'une fracture donnée vis-à-vis de l'orientation du gradient de pression effectif est liée à l'orientation des chenaux de grande ouverture vis-à-vis de  $\nabla P$ , on s'attend à ce que la variabilité dans le comportement de différentes fractures vis-à-vis d'un écoulement macroscopique d'orientation fixée procède du même phénomène : si de tels chenaux existent, ils ne sont pas orientés de la même façon pour toutes les fractures.

#### 6.3.1 Lois de décroissance de l'ouverture hydraulique avec l'ouverture moyenne

On s'est d'abord intéressé à 15 fractures numériques de caractéristiques identiques ( $\zeta = 0.8$ ), définies sur des grilles de  $512 \times 512$  nœuds, et avec  $l_c = 4a$ . Les évolutions de  $d_h/d_m$  avec  $d_m/\sigma$  sont tracées à la figure 5 de l'annexe, page 180. Le comportement monotone observé à la figure 6.2(a) est observé pour toutes les fractures, et peut être fitté par une loi phénoménologique du type

$$\boxed{\frac{d_h}{d_m} = 1 + \gamma \left( \frac{d_m}{\sigma} \right)^\beta} . \quad (6.25)$$

La variabilité du comportement des fractures apparaît dans les différents valeurs pour les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . Le signe de  $\gamma$  détermine le caractère favorable ou défavorable de la rugosité, et sa valeur absolue quantifie l'amplitude de l'écart au modèle de Poiseuille. Le paramètre  $\beta$ , quant à lui, quantifie la rapidité de la variation d'ouverture hydraulique avec l'ouverture mécanique. Les valeurs obtenues pour  $\gamma$  pour les 15 fractures sont distribuées dans l'intervalle  $[0.8; 1.8]$ ; les valeurs obtenues pour  $\beta$  dans l'intervalle  $[-2.6; -1.6]$ .

#### 6.3.2 Étude statistique sur 500 fractures indépendantes

L'étude de 500 fractures de mêmes propriétés statistiques (même amplitude  $\sigma$  de la rugosité, même exposant de rugosité  $\zeta$ ) confirme le lien entre corrélations spatiales du champ des ouvertures et anisotropie hydraulique. La figure 6, page 184, présente en (a) le comportement moyen  $\langle d_h/d_m \rangle$  de 500 fractures générées numériquement ( $N = 512$ ,  $l_c = 4a$ ), et en (b) l'écart-type  $\delta d_h/d_m$  de la statistique. Le calcul a été effectué pour les valeurs  $-1.0$ ,  $0.5$  et  $0.8$  de l'exposant de Hurst.

Le comportement hydraulique moyen correspond à une perméabilité légèrement inférieure à celle d'un modèle de Poiseuille plan de même ouverture. La différence de débit entre les deux configurations, lorsque les deux parois sont en contact, est inférieure à 10 %. Ce comportement moyen ne dépend pas de l'exposant de rugosité, c'est-à-dire qu'il n'est pas lié à l'existence de corrélations spatiales dans le champ des ouvertures. En d'autres termes, le comportement moyen traduit le fait que les hétérogénéités du champ des ouvertures créent des zones de moindre ouverture qui ralentissent l'écoulement. Cette observation montre que l'estimation par Brown (1987) du comportement moyen, effectuée sur une statistique de 10 fractures, surestime l'écart au modèle de Poiseuille plan.

En revanche, les fluctuations de la statistique sont fortement dépendantes de la persistance des corrélations du champ des ouvertures. En particulier, elles sont réduites à zéro pour une distribution des ouvertures sans corrélations spatiales ( $\zeta = -1.0$ ). De plus, leur amplitude est supérieure à l'écart du comportement moyen  $\langle d_h/d_m \rangle$  à la valeur 1, ce qui signifie qu'une fraction non négligeable des fractures considérées sont plus perméables que la configuration lisse correspondante. La fracture expérimentale n'est pas une aberration statistique.

## 6.4 Discussion

### 6.4.1 Description statistique isotrope de la géométrie et comportement hydraulique anisotrope ?

L'anisotropie hydraulique constatée pour les fractures ouvertes dont les deux parois auto-affines sont sans corrélation l'une avec l'autre est d'autant plus surprenante que la description statistique dont on dispose pour la géométrie de la fracture est isotrope. Comment une distribution isotrope des hétérogénéités peut-elle engendrer un comportement hydraulique anisotrope à l'échelle de la fracture ?

La présence de chenaux corrélés de grande ouverture ou de barrières d'ouverture modérée consiste bien en une anisotropie de la géométrie de la fracture. Mais la description de cette anisotropie n'est pas contenue dans les paramètres statistiques qui décrivent nos fractures, à savoir l'écart-type de la rugosité  $\sigma$ , et l'exposant de rugosité  $\zeta$ . Le modèle auto-affine est *statistiquement isotrope*, c'est-à-dire que les hétérogénéités du champ des ouvertures, qui existent à toutes les échelles, en vertu de l'auto-affinité, et en particulier à l'échelle de la fracture, sont distribuées de manière aléatoire et homogène. L'homogénéité en question a un sens si la statistique est suffisante. Les hétérogénéités correspondant aux grandes longueurs d'onde du spectre de Fourier sont peu nombreuses ; on peut difficilement parler d'isotropie pour ces hétérogénéités. Ce sont elles qui contrôlent l'existence des chenaux de grande ouverture à l'échelle de la fracture ; ce sont donc elles qui sont responsables de l'anisotropie hydraulique. Il faut noter cependant que le terme *anisotropie* est ici employé dans un sens plus large que la stricte définition à laquelle se tiennent généralement les géophysiciens, notamment les sismologues, pour qui on parle d'anisotropie lorsque le matériau est homogène à l'échelle d'observation [Winterstein, 1990]. Ici, au contraire, les hétérogénéités à l'échelle de la fracture existent, et sont responsables de la sensibilité à l'orientation du gradient de pression effectif.

Pour s'en persuader, on a étudié l'évolution de  $d_h/d_m$  en fonction de  $d_m/\sigma$  pour une surface générée numériquement sur une grille de  $256 \times 256$  points, et en faisant varier le rapport  $l_c/a$ . Les courbes obtenues sont présentées à la figure 6.4. Elles montrent que le comportement hydraulique est contrôlé par les hétérogénéités de grande échelle. L'erreur relative due au filtrage de tous les modes de Fourier correspondant à des échelles inférieures à  $L/8$  est inférieure à 2 %. Ainsi, la description statistique du champ des ouvertures, qui décrit bien les corrélations spatiales de ce

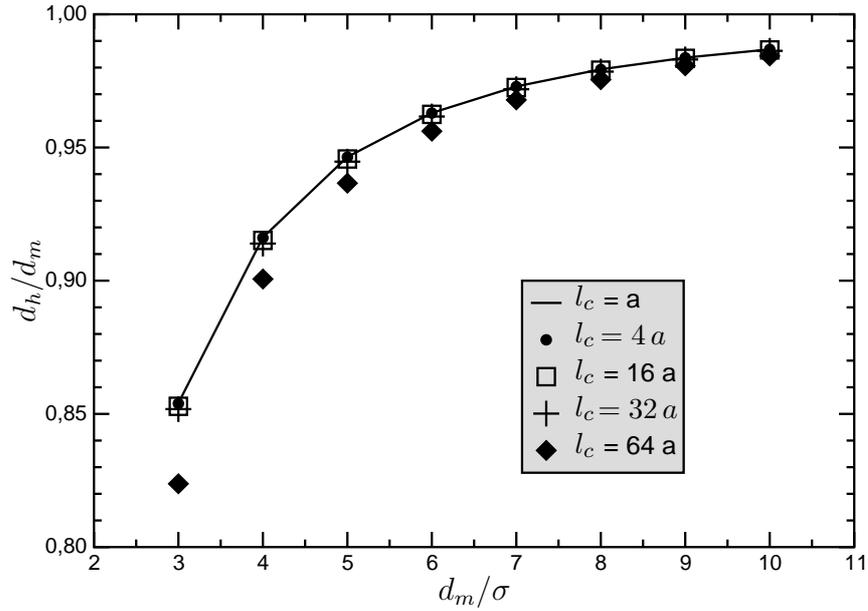


FIG. 6.4 – Évolution du rapport de l’ouverture hydraulique sur l’ouverture moyenne avec l’ouverture moyenne normalisée pour une fracture numérique générée sur une grille  $256 \times 256$ , pour différentes valeurs de l’échelle de coupure inférieure pour l’auto-affinité du champ des ouvertures. On constate que la différence de comportement devient significative seulement si l’on annule tous les modes de Fourier du champ des ouvertures qui correspondent à des longueurs d’onde supérieures à  $L/4$ . C’est la preuve que l’ouverture hydraulique de la fracture est contrôlée par les hétérogénéités de grande longueur d’onde du champ des ouvertures.

champ, est insuffisante pour prédire le comportement hydraulique de la fracture.

#### 6.4.2 Quel paramètre simple pour décrire une telle fracture rugueuse du point de vue hydraulique ?

Puisque l’ouverture moyenne de la fracture ne correspond en général pas à son ouverture hydraulique, il serait intéressant de pouvoir définir une autre estimation a priori de l’ouverture hydraulique, c’est-à-dire un paramètre purement géométrique qui coïnciderait au mieux avec l’ouverture hydraulique. Étant donné que l’ouverture hydraulique n’est pas un paramètre intrinsèque de la fracture, et ne peut être définie indépendamment des conditions d’écoulement, une telle estimation a priori doit refléter cette sensibilité à la direction de l’écoulement. Différents paramètres ont été proposés, dont certains ont été présentés au paragraphe 4.3.3 [Brown, 1987; Zimmerman et Bodvarsson, 1996]. Aucun d’entre eux ne prend en compte l’orientation de l’écoulement à l’échelle de la fracture.

Une telle estimation  $d^*$  a priori de l’ouverture hydraulique doit remplir trois conditions :

1. Le rapport  $d_h/d^*$  moyen observé sur une statistique étendue de fractures doit se situer aussi près que possible de la valeur de correspondance parfaite, 1.
2. Les fluctuations d’une telle statistique doivent être aussi réduites que possible.
3. Le rapport  $d_h/d_m$  doit être aussi indépendant que possible de l’orientation du gradient de pression par rapport à la fracture.

Nous proposons ici un paramètre  $d^*$  très simple qui, sans remplir les critères précédents de façon merveilleuse, constitue un indice plus sûr que l’ouverture moyenne pour estimer a priori

l'ouverture mécanique d'une fracture. Le paramètre en question est construit de la manière suivante. On néglige la tortuosité de l'écoulement, en considérant que toutes les lignes de courant sont rectilignes, parallèles au gradient de pression effectif. La fracture est considérée comme un ensemble de canaux d'ouverture variable, placés en parallèle. La transmissivité de l'ensemble est estimée comme la somme des transmissivités des différents canaux. La transmissivité de chacun de ces canaux est quant à elle calculée comme une série d'éléments d'ouverture constante, placés en série; son inverse s'obtient donc en sommant les inverses des transmissivités des différents éléments qui le constituent. En utilisant les indices de nœuds  $(i, j)$  associés à la grille  $(x, y)$  (voir figure 6.3), on obtient ainsi une estimation  $d^*$  de l'ouverture hydraulique comme

$$d^* = \left[ \sum_j \frac{1}{\sum_i \frac{1}{d_{i,j}^3}} \right]^{\frac{1}{3}} . \quad (6.26)$$

La figure 11, page 192 est un exemple de comparaison des courbes obtenues pour les quantités  $d_h/d_m$  et  $d_h/d^*$  pour une fracture numérique, et pour les orientations  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 90^\circ$ . On constate que les courbes obtenues pour  $d_h/d^*$  pour les deux orientations se superposent presque, ce qui signifie que l'ouverture estimée géométriquement rend compte de la sensibilité de l'ouverture hydraulique de la fracture à l'orientation du gradient de pression macroscopique.

Si l'on reprend l'étude statistique présentée au paragraphe 6.3.2, mais en utilisant  $d^*$  à la place de  $d_h$  pour tracer les courbes de résultats (voir figure 12(b), page 193), on n'améliore pas l'adéquation entre le comportement moyen et la droite de cohérence parfaite. En revanche, on diminue les fluctuations de la statistique d'un facteur 2, ce qui signifie que le paramètre géométrique  $d^*$  est une estimation de  $d_h$  plus appropriée que l'ouverture mécanique  $d_m$ .

## Conclusion

L'ouverture hydraulique d'une fracture rugueuse ouverte, considérée à une échelle inférieure à la longueur de corrélation entre les deux parois, est un paramètre hautement dépendant de l'orientation de l'écoulement imposé à l'échelle de la fracture. Cette dépendance est d'autant plus importante que l'ouverture de la fracture est faible. La variabilité qui en résulte est contrôlée par les corrélations spatiales à longue portée du champ des ouvertures. Ces corrélations sont en effet responsable de la présence d'hétérogénéités du champ des ouvertures à l'échelle de la fracture; ce sont ces hétérogénéités de grande échelle qui contrôlent la chenalisation plus ou moins favorable de l'écoulement dans la fracture, et en conséquence le comportement hydraulique. Elles conduisent dans certains cas à un comportement très inhibiteur de l'écoulement. Dans d'autres cas, la fracture rugueuse apparaît plus perméable qu'une fracture sans rugosité de même ouverture moyenne. Lorsqu'on considère une statistique de fractures équivalentes (même  $\zeta$ , même  $\sigma$ ), on observe de même une grande variabilité qui procède des mêmes causes.

La définition d'un paramètre géométrique simple capable de rendre compte à priori de la transmissivité d'une fracture vis-à-vis d'un écoulement de direction moyenne donnée, sans simuler l'écoulement et sans le mesurer expérimentalement, est un sujet qui n'a pas encore trouvé de réponse claire. Un tel paramètre devra en tous cas tenir compte de l'orientation de l'écoulement imposé à la fracture.

Les conclusions que nous proposons ici s'appliquent à des fractures ouvertes, c.-à-d., dont les parois ont au plus un point de contact, de sorte que nous n'avons pas eu à prendre en compte l'interaction mécanique entre les parois [Unger et Mase, 1993]. Il est probable que les situations où les parois de la surface sont poinçonnées l'une dans l'autre donnent lieu à une

chenalisation de l'écoulement encore plus drastique, et que nos conclusions restent valables dans ces configurations. Cependant, l'auto-affinité du champ des ouvertures jusqu'à l'échelle de la fracture est au fondement du modèle présenté ici. Dans la nature, au-dessus d'une certaine échelle, les deux parois rugueuses d'une fracture sont corrélées. Les conséquences de cet ajustement sur les conclusions de ce chapitre sont examinées au chapitre suivant.

**Annexe : Geometrical heterogeneities and hydraulic anisotropy of rough fractures**

Article publié dans *Journal of Geophysical Research* : **106** (B2), 2089-2102, 2001

## Geometrical heterogeneities and permeability anisotropy of rough fractures

Y. Méheust and J. Schmittbuhl

**Abstract.** *We develop a numerical model for describing a single phase viscous flow in a rough fracture and compare it successfully to previously-published experimental results. The aperture fluctuations are introduced as an isotropic self-affine fractal which includes geometrical heterogeneities, especially at the fracture scale. The model is based on the lubrication approximation and solutions are obtained from two independent numerical schemes. The curves describing the evolution of the hydraulic aperture as a function of the mean fracture separation are shown to be well fitted by power law functions. A grid rotation technique is developed to explore the influence of the pressure drop orientation over a continuous range of orientations. A single fracture is shown to be either flow enhancing or flow inhibiting by comparison to a parallel plate model of identical mean separation, depending on the pressure drop orientation. This anisotropy of the fluid flow results from the geometrical heterogeneities at the fracture scale. Statistical analyses of the results when exploring different apertures distributions with the same measured scale invariance property show a large variability of the permeability, which is due to the same phenomenon. A prediction of the hydraulic transmissivity that takes account of the pressure drop orientation is proposed.*

### 1 Introduction

The permeability of low permeable crustal rocks is generally controlled by the fracture networks they contain [Bear, Tsang and de Marsily 1993, Sahimi 1993]. Two aspects of the network are responsible for the rock permeability. The first important feature is the connectivity between fractures [Berkowitz 1994, Berkowitz and Adler 1998]. Fractured rocks are often described in terms of geometrical network models where individual fractures are reduced to simple geometrical objects: disks or more complex polygons [Sahimi 1993, Koudina, Garcia, Thovert and Adler 1998]. The permeability of such networks is shown to be largely influenced by the fracture density and the fracture size distribution [Bour and Davy 1997]. The second relevant property of the fracture network is the hydraulic behavior of each fracture. The latter is controlled by both the opening of the fracture and the geometry of the facing aperture surfaces.

At the fracture scale, for sufficiently open fractures the hydraulic transmissivity might be described as that of a parallel plate fracture. If the flow is laminar

(i.e., low Reynolds numbers), the cubic law [Iwai 1976, Cook 1992, Zimmerman and Bodvarsson 1996] provides a good estimate of the volumetric flow rate  $Q$  as a function of the macroscopic pressure gradient  $\overline{\nabla P}$ , the latter considered in the flow direction:

$$Q = -L_y \frac{d^3}{12\eta} \nabla P \quad , \quad (1)$$

where  $L_y$  is the width of the fracture perpendicular to flow,  $d$  is the plate separation, and  $\eta$  is the fluid viscosity.

The influence of the fracture wall geometry on the flow is generally described at the fracture scale, analyzing fracture permeability [Durham and Bonner 1994, Durham and Bonner 1995, Hakami and Larsson 1996] or dispersion properties [Tsang, Tsang, Neretnieks and Moreno 1988, Roux, Plouraboué and Hulin 1996, Keller, Roberts and Blunt 1999]. Only recent experimental works provide an in situ description of the flow paths [Brown, Caprihan and Hardy 1998, Dijk, Berkowitz and Bendel 1999].

Different approaches have been proposed to model the flow in a single fracture. In the limit of a lubrication approximation (i.e., viscous flow and locally smooth boundaries) [Zimmerman and Bodvarsson 1996], numerous numerical analyses provide a finite difference solution of the Stokes equation for a fractal aperture topography [Brown 1987, Brown 1989, Thompson and Brown 1991, Thompson 1991, Amedei and Illangasekare 1994, Glover, Matsuki, Hikima and Hayashi 1998*b*]. Recently, Plouraboué, Hulin, Roux and Koplik (1998) proposed an efficient pseudo-spectral technique to solve both the pressure field and flow paths when no contact points exist along the aperture and for periodic boundaries. The relevance of the Stokes equation for modeling the flow through a rough fracture was tested by Brown, Stockman and Reeves (1995) using a lattice-gas technique and Mourzenko, Thovert and Adler (1995) using a finite element technique. Mourzenko et al. (1995) have shown that within the range of apertures investigated in the present paper, a simulation based on the Reynolds equation yields results of reasonable validity. Indeed, a complete three-dimensional simulation of the Stokes equation yields an estimation of the mean hydraulic aperture of a large number of independent fractures that differs by 2% from that obtained from the Reynolds equation. Electric analogs have been proposed by Tsang (1984) and Moreno, Tsang, Tsang, Hale and Neretnieks (1988). A theoretical approach based on effective media theory has been adapted to flow in a single fracture by Walsh, Brown and Durham (1997).

In this paper, we present a numerical study of the hydraulic behavior of a rough fracture when fracture surfaces are not in contact. The aperture is constructed as an isotropic self-affine fractal with a roughness exponent of 0.8, a value that has been observed in many cases [Power, Tullis, Brown, Boitnott and Scholz 1987, Cox and Wang 1993, Schmittbuhl, Gentier and Roux 1993, Schmittbuhl, Schmitt and Scholz 1995, Bouchaud 1997]. We study the departure from

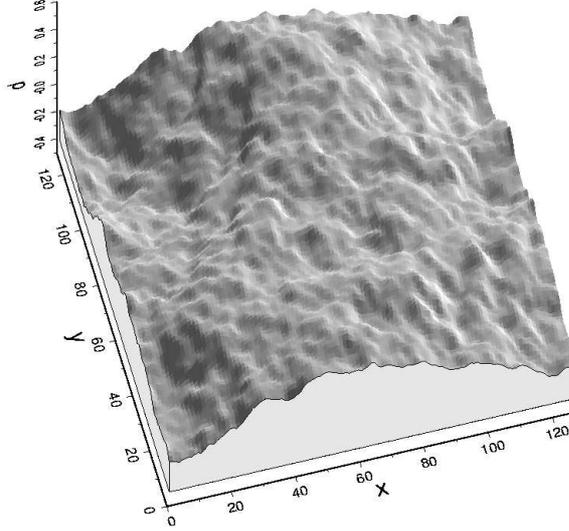


Figure 1: A synthetic aperture is generated on a grid ( $512 \times 512$ ). Scales larger than the lower cutoff scale  $l_c$  are generated as a self-affine fractal. Scales between  $l_c$  and the mesh size  $a$  are introduced for smoothing ( $l_c = 4a$ ). Axes  $x$  and  $y$  are measured in units of  $l_c$ .

the cubic law while decreasing surface separation and compare results to experimental observations. The hydraulic behavior of a large number of synthetic fractures is then studied numerically. The effect of spatial correlations on departures from the mean behavior is analyzed and interpreted in terms of channeling of the flow. We show that the hydraulic transmittivity depends on the orientation of the applied macroscopic pressure gradient and leads to an anisotropic permeability despite statistically isotropic aperture fluctuations. We explain this a priori contradiction by stating that geometrical heterogeneities (i.e., aperture fluctuations) exist at the fracture scale and that a material heterogeneity at a given scale induces a physical anisotropy at the same scale [Winterstein 1990]. The anisotropy is well described by a continuous rotation of the macroscopic pressure gradient. Finally, we present hints for obtaining an a priori estimate of the hydraulic behavior of a given fracture, taking into account the orientation of the pressure drop.

## 2 Aperture Fluctuations

The aperture distribution  $d(x, y)$  of a fracture of side length  $L$  is described by a discrete aperture distribution  $d_{i,j}$  sampled on a  $N \times N$  regular grid (see Figure 1). Mesh size is denoted as  $a = L/N$ . Apertures  $d_{i,j}$  are obtained as  $d_{i,j} = d_m + h_{i,j}$ , where the mechanical aperture  $d_m$  is the mean fracture

separation:

$$d_m = \langle d \rangle = \frac{1}{L^2} \int_L \int_L d(x, y) dx dy, \quad (2)$$

and  $h_{i,j}$  is the local deviation from mean aperture. Subscripts  $i, j$  refer to the position on the grid along the  $x$  and  $y$  axes, respectively.

It is important to note that different fractures (i.e, different pairs of fracture walls) might exhibit the same aperture distribution. Indeed, the local aperture is defined as the distance between facing walls, estimated along the vertical direction. For instance, two facing rough fracture walls can define an aperture distribution that is exactly equal to that between a flat plane and a rough fracture surface [Brown 1995, Plouraboué, Kurowski, Hulin, Roux and Schmittbuhl 1995]. For the latter case, the aperture geometry is directly given by the geometry of the rough fracture surface.

### 2.1 Self-Affine Aperture

As discussed previously, we assume that self-affine surfaces provide a good description of fracture surfaces [Schmittbuhl et al. 1993, Schmittbuhl et al. 1995, Bouchaud 1997]. Self-affinity is defined through the scaling property of the probability density function  $g(\Delta h, \Delta x)$ . The function  $g$  gives the probability to get a height difference  $\Delta h$  between two points along the aperture that are the ends of a segment of horizontal extent  $\Delta x$ . If the distance  $\Delta x$  is scaled by a factor  $\lambda$ :  $\Delta x \rightarrow \lambda \Delta x$ , the probability function scales for self-affine aperture as [Feder 1988, Falconer 1990]

$$\lambda^\zeta g(\lambda^\zeta \Delta h, \lambda \Delta x) = g(\Delta h, \Delta x) \quad , \quad (3)$$

where  $\zeta$  is the roughness exponent.

### 2.2 Synthetic Apertures

To generate numerically a synthetic fracture aperture with a self-affine scaling, a spatially uncorrelated distribution is first generated, by use of a white noise generator [Press, Teukolsky, Vetterling and Flannery 1992]. Spatial correlations are then introduced by multiplying the modulus of the two-dimensional Fourier transform by the modulus of the wave number to the power  $-1 - \zeta$ , where  $\zeta$  is the roughness exponent [Sahimi 1998]:

$$|\tilde{h}(\mathbf{k})| \rightarrow |k|^{-1-\zeta} |\tilde{h}(\mathbf{k})| \quad . \quad (4)$$

There is no preferential orientation since  $|k|^2 = k_x^2 + k_y^2$ . This leads to really isotropic geometrical properties of the surfaces.

The phase of the Fourier transform remains random, while the power density function has an isotropic self-affine behavior [Peitgen and Saupe 1988]. Aperture fluctuations  $h_{i,j}$  are supposed to be self-affine on a sufficiently large range of scales, up to the maximum scale  $L$  and down to a minimum scale  $l_c$ . The

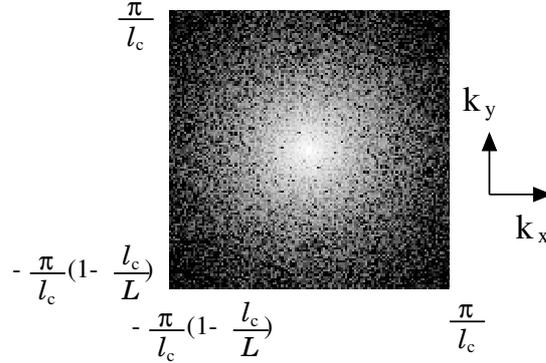


Figure 2: Fourier spectrum of the synthetic aperture distribution. Fourier modes  $k_x$  and  $k_y$  are in linear scales from  $-\pi/l_c + \pi/L$  to  $\pi/l_c$  (here  $L/l_c = 128$ ). The power density spectrum is drawn using a power law gray levels scale. The circular geometry of the figure shows the isotropy of the surface.

fluctuations  $h_{i,j}$  also have to be sufficiently regular at small scales in order to be consistent with the lubrication approximation (see section 3.1). Thus the modulus of the aperture fluctuations Fourier transform  $|\tilde{h}(\mathbf{k})|$  behaves as a power law for every spatial scales above  $l_c$  and has no spectral modes for wave numbers greater than  $\pi/l_c$ :

$$|\tilde{h}(\mathbf{k})| \sim \begin{cases} |\mathbf{k}|^{-1-\zeta} & \text{if } \pi/L < |\mathbf{k}| < \pi/l_c \\ 0 & \text{if } \pi/l_c \leq |\mathbf{k}| \leq \pi/a \end{cases} . \quad (5)$$

A sample of the two-dimensional power spectrum is shown in Figure 2. The power density is drawn using various gray levels. The circular shape of Figure 2 illustrates the isotropic property of the surface. It is important to notice that the power density is maximum for low modes, i.e., macroscales.

The distribution  $h_{i,j}$  is finally obtained by inverse Fourier transform. Figure 1 presents the synthetic surface that is obtained from the Fourier spectrum shown in Figure 2. This method uses fast Fourier transform algorithms, which makes it much faster for large grid sizes than other methods like the recursive subdivision method [Fournier, Fussel and Carpenter 1982, Voss 1985]. The validity of the self-affine behavior of the synthetic surfaces has been verified by use of two methods: the Fourier spectrum and the average wavelet coefficient techniques [Schmittbuhl et al. 1995, Simonsen, Hansen and Magnar Nes 1998]. We checked that two different values of the input roughness exponent were correctly measured during the postprocess analysis. When input exponents are 0.5 and 0.8, measured exponents of synthetic fractures are  $0.50 \pm 0.01$  and  $0.80 \pm 0.01$ , respectively.

### 2.3 Implications for Natural Apertures

Natural fractures show a roughness that is well described by a self-affine scale invariance [Schmittbuhl et al. 1993, Schmittbuhl et al. 1995, Bouchaud 1997, Boffa, Allain and Hulin 1998]. Apertures are also self-affine [Plouraboué et al. 1995] especially when facing surfaces are uncorrelated. Correlations between the topographies of facing fracture surfaces is generally controlled by the shear slip of the fracture. For a hydraulic fracture with no shear slip, facing surfaces might be identical if the fracture is single and fully brittle. In this case, the aperture of the fracture is constant, with no fluctuations, like that between two parallel planes. If gouge particles are created during the crack process, facing surfaces differ increasingly as the fracture zone thickness is larger. Moreover, when a fully brittle fracture is sheared, correlations between surfaces are function of the amount of slip. They appear uncorrelated on scales smaller than the slip and completely correlated for scales larger than the slip [Brown 1995, Plouraboué et al. 1995]. Different studies [Glover, Matsuki, Hikima and Hayashi 1998*a*, Durham and Bonner 1995] show that differences in scaling between fracture walls and aperture exist but are small especially at little scales. They also showed the isotropy of the properties by analyzing perpendicular profiles.

In a recent experimental study [Méheust and Schmittbuhl 2000] we also explored the isotropy of the scale invariance. We measured a complete map of a granite surface (10 cm × 10 cm) using a regular grid (130×130) and perpendicular profiles (10 profiles of 2048 points in each direction). We did not observe any significant difference of the self-affine property when changing the profile orientation.

Because of the scale invariance the roughness of the fracture develops modes at all scales including the fracture scale. Since magnitudes of the roughness power density reach their maximum for low wave numbers, aperture fluctuations are important, especially at the fracture scale (which is the largest scale within the fracture). The fracture roughness can be seen as geometrical heterogeneities that exist especially at the fracture scale. However, these heterogeneities are isotropically distributed along the fracture.

## 3 Flow Modeling

### 3.1 Stokes Flow and Lubrication Approximation

We consider a stationary flow where viscous forces dominate the inertial effects, i.e., with a low Reynolds number:  $Re \ll 1$ , so that the nonlinear terms can be neglected in Navier-Stokes equation. Assuming that gravity can be neglected, since the mean plane of the fracture is horizontal, fluid flow is ruled by the Stokes equation, which relates the pressure field  $P$  to the fluid velocity field  $\mathbf{v}$  according to

$$\nabla P = \eta \Delta \mathbf{v} \quad , \quad (6)$$

where  $\eta$  is the dynamic viscosity of the fluid. For a parallel plate configuration,  $\mathbf{v} = v \hat{x}$  only depends on  $z$ , and  $P$  on  $x$ , so that (6) can be rewritten as

$$dP/dx = \eta d^2v/dz^2 = C \quad , \quad (7)$$

where  $C$  is a constant. The solution of (7) yields the cubic law (see (1)).

Considering now a rough fracture, we assume that the local aperture  $d(x, y)$  varies slowly with horizontal displacement, that is,  $\|\nabla d\| \ll 1$ . This lubrication approximation [Pinkus and Sternlicht 1961] allows us to assume that  $P$  only depends on  $x$  and  $y$ , and to rewrite Stokes equation according to

$$\nabla P(x, y) = \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}(x, y, z) \quad . \quad (8)$$

If we call  $\hat{u}(x, y)$  the local direction of the pressure gradient and  $u$  the local coordinate along this direction, (8) can be written as  $dP/du = \eta d^2v/dz^2$ . This equation, which is the same as (7) with the local coordinate  $u$  replacing  $x$ , yields the same results locally. In particular, a local cubic law holds for the local rate  $\mathbf{q}(x, y) = \int_{z_m}^{z_M} \mathbf{v}(x, y, z) dz$ , where  $z_m$  and  $z_M$  are the lower and upper boundaries, respectively, of the fracture at horizontal position  $(x, y)$ :

$$\mathbf{q}(x, y) = -\frac{d(x, y)^3}{12\eta} \nabla P \quad . \quad (9)$$

By introducing  $\mathbf{q}$ , we restrain the problem to a two-dimensional system. Thus we do not go into the detail of the vertical movement of the fluid particles. Local rate  $\mathbf{q}$  happens to be conservative:  $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$ , which finally yields Reynolds equation:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{d(x, y)^3}{12\eta} \nabla P \right] = 0 \quad . \quad (10)$$

### 3.2 Applicability of the Model

The two assumptions used in this model are the assumption of reversible flow ( $\mathcal{Re} \ll 1$ ) and the lubrication approximation.

#### 3.2.1 Stokes flow in real Fractures.

The Reynolds number  $\mathcal{Re}$  that can be defined from the Navier-Stokes equations is the ratio of the inertial terms to the terms describing the viscous forces. Estimates of the vertical and horizontal velocities of the flow are labeled  $u$  and  $U$ , respectively, while  $l_z$  and  $l_h$  denote estimates of the vertical and horizontal scales of variation of the velocities, and  $\langle d \rangle$  is the mean aperture of the fracture. The geometry of the system imposes that  $u$  be much smaller than  $U$  and  $l_z$  be much smaller than the mean fracture separation  $\langle d \rangle$ . Because

of incompressibility,  $l_z/l_h \sim u/U$ , which is vanishingly small, and  $\mathcal{R}e$  can be evaluated as

$$\mathcal{R}e \simeq U \frac{l_z^2}{\nu l_h} \quad , \quad (11)$$

where  $\nu = \eta/\rho$  is the cinematic viscosity of the fluid.

According to (11), the assumption  $\mathcal{R}e \ll 1$  is valid for slow or very viscous flows in the crust. For very viscous fluids like magma ( $\nu$  from  $10^{-2}$  to  $10^9$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> [Arhens 1995, Nataf and Sommeria 2000]) the criterion allows quite large velocities. For example, for  $U \sim 1$  cm s<sup>-1</sup> and  $l_z \sim l_h \sim 1$  cm the Reynolds number is smaller than 0.01 . For water flows ( $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>), assuming that  $U \sim 1$  mm min<sup>-1</sup>, with  $l_z$  and  $l_h$  of the order of 1 mm, yields  $\mathcal{R}e \sim 0.02$  .

### 3.2.2 Lubrication approximation and self-affine aperture.

The self-affine scaling of fracture roughness is measured over a large range of scales: from meters to micrometers [Power et al. 1987, Schmittbuhl et al. 1993, Schmittbuhl et al. 1995]. Such a scaling implies that the vertical extent of roughness increases with the region size over which it is estimated. If  $l$  denotes the size of a given region and  $l_c$  the inferior cutoff for the self-affine scaling, the maximum vertical extent of the region topography,  $\Delta h$ , scales as

$$\Delta h(l) = \Delta h(l_c) \left( \frac{l}{l_c} \right)^\zeta \quad . \quad (12)$$

The typical slope  $s(l_c)$  at the smallest scale  $l_c$  can be estimated as  $\Delta h(l_c)/l_c$ . Thus (12) at the system scale  $l = L$  yields

$$s(l_c) \approx \Delta h(l_c)/l_c = l_c^{\zeta-1} \left( \frac{\Delta h(L)}{L^\zeta} \right) \quad . \quad (13)$$

It is of interest to note that with the measured roughness exponent ( $\zeta \approx 0.8$ ) the local slope  $s(l_c)$  diverges as the cutoff  $l_c$  decreases. Such a surface with important local slopes is in contradiction with a lubrication assumption where local slopes are supposed to be small:  $s(l_c) \ll 1$ . Subsequently, the lowest scale at which the problem can be explored is not limited by the roughness measurement but by the lubrication approximation:

$$l_c \gg \left[ \frac{\Delta h(L)}{L^\zeta} \right]^{\frac{1}{1-\zeta}} \quad . \quad (14)$$

For instance, in [Méheust and Schmittbuhl 2000], the experimental fracture has a size  $L = 10$  cm, a vertical extent of the rough fracture surface  $\Delta h(l) = 7$  mm and a roughness exponent  $\zeta = 0.8$ . The mesh size of the grid sampling is  $750 \mu\text{m}$ . The complete sampling of the grid can be considered for a numerical computation of the flux along the experimental topography. Indeed, using  $l_c = 750 \mu\text{m}$  fulfills the condition of Eq. (14):  $l_c = 750 \mu\text{m} \gg 0.16 \mu\text{m}$ .

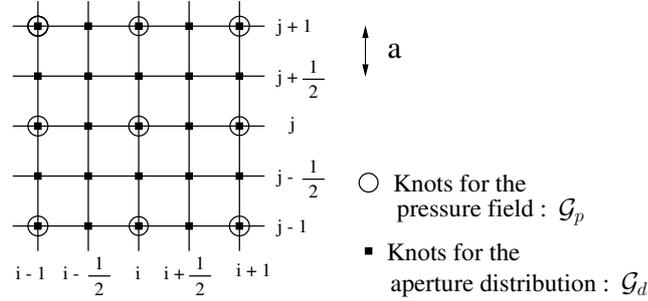


Figure 3: The distribution of apertures is sampled on a grid  $\mathcal{G}_d$  twice finer than the grid  $\mathcal{G}_p$  used for the resolution of the pressure field. The mesh size for the aperture distribution is  $a$ .

### 3.3 Numerical Solvers

Two numerical methods have been used to simulate fluid flow within a rough fracture: a biconjugate gradient method and a pseudospectral method. Both methods have been implemented for finite differences with the following common features.

The distribution of apertures is sampled on a grid  $\mathcal{G}_d$  twice finer than the grid  $\mathcal{G}_p$  that is used to sample the pressure field (see Figure 3). The aperture gradient is computed at every knot  $(i, j)$  of the grid  $\mathcal{G}_p$  as  $\partial d / \partial x = (d_{i+1/2, j} - d_{i-1/2, j}) / 2a$  and  $\partial d / \partial y = (d_{i, j+1/2} - d_{i, j-1/2}) / 2a$ .

The boundary conditions can be set to be either periodic or undrained. By periodic boundary conditions we mean that the aperture distribution is periodic while the pressure field is the sum of the parallel plate solution,  $-\Delta P / L_x \hat{x}$ , and of a periodic perturbation due to periodic roughness. By undrained boundary conditions we mean that the pressure drop difference  $\Delta P$  is imposed between inlet and outlet cross sections of the fracture, while there is no flow through the lateral boundaries.

The volumetric flow rate through transverse cross sections of the fracture is conserved along the  $x$  direction (see section 4), which is used as an accuracy test for the calculation. The relative precision on  $d_h$  is evaluated as  $\delta d_h / \langle d_h \rangle$ , where  $\langle d_h \rangle$  and  $\delta d_h$  are the mean value and the root mean square, respectively, of the statistics for  $d_h$  on the  $N/2$  transverse cross sections. The precision is  $10^{-15}$  for the biconjugate gradient method and  $10^{-6}$  for the pseudospectral method.

### 3.3.1 Biconjugate gradient method.

Equation (10) can be written using finite differences as

$$\begin{aligned} d_{i+\frac{1}{2},j}^3(P_{i+1,j} - P_{i,j}) + d_{i-\frac{1}{2},j}^3(P_{i-1,j} - P_{i,j}) + \\ d_{i,j+\frac{1}{2}}^3(P_{i,j+1} - P_{i,j}) + d_{i,j-\frac{1}{2}}^3(P_{i,j-1} - P_{i,j}) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

which is solved as a linear system  $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{B}$ , where the vector  $\tilde{X}$  contains the  $N/2 \times N/2$  sample values of the pressure field, and the matrix  $\tilde{A}$  expresses the conservation of local rate  $\mathbf{q}$  at every knot in the bulk of the grid, while second term vector  $\tilde{B}$  expresses it at the boundaries and therefore includes the boundary conditions. The inversion of the linear system is made thanks to an iterative biconjugate gradient method [Batrouni and Hansen 1988, Press et al. 1992]. The scheme is considered to have converged when  $\|\tilde{A}\tilde{X} - \tilde{B}\| \ll 10^{-15}$ .

### 3.3.2 Pseudospectral method.

Reynolds equation (10) can be rewritten as [Plouraboué et al. 1998]

$$\Delta P(\mathbf{x}) = -3 \nabla(\ln d(\mathbf{x})) \cdot \nabla P(x) \quad . \quad (16)$$

The solution for  $\nabla(\ln d(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ , corresponding to the parallel plate model, is  $P^{(0)} = -\Delta P/L_x \hat{x}$ . The variation from this solution when aperture is spatially varying can be computed by use of a perturbative approach, looking for a solution of the form  $\nabla P(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \nabla P^{(n)}$ , where  $P^{(0)}$  is the unperturbed field, and every perturbative term is obtained from

$$\Delta P^{(n)} = -3 \nabla(\ln d(\mathbf{x})) \cdot \nabla P^{(n-1)} \quad . \quad (17)$$

Convergence occurs when the following criterion is fulfilled:

$$3 \nabla(\ln d(\mathbf{x})) \frac{\nabla P^{(0)}}{\|\nabla P^{(0)}\|} < 1 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \quad . \quad (18)$$

Convergence is reached after  $m$  iterations, with  $\|P^{(m)}\| \ll 10^{-6}$ . For every iteration the pressure gradient is computed at every knot of  $\mathcal{G}_p$ , using the periodic boundary conditions, and the source (right side) term of (17) is calculated as

$$\begin{aligned} -3 \left( \frac{\ln(d_{i+1/2,j}) - \ln(d_{i-1/2,j})}{2a} \frac{P_{i+1,j}^{(n)} - P_{i-1,j}^{(n)}}{4a} \right. \\ \left. + \frac{\ln(d_{i,j+1/2}) - \ln(d_{i,j-1/2})}{2a} \frac{P_{i,j+1}^{(n)} - P_{i,j-1}^{(n)}}{4a} \right) \quad . \end{aligned} \quad (19)$$

The inversion of the Poisson equation, (17), is made in Fourier space.

### 3.3.3 Comparison of the two methods.

The biconjugate gradient method is used for simulating the experimental fracture, since it allows the use of no-flow lateral boundary conditions. The pseudospectral method allows only periodic boundary conditions, but it is based on FFT algorithms, which makes it much faster than the conjugate gradient algorithm both for the pressure field and the flow path computations. The pseudospectral technique requires  $N$  to be a power of 2. We used it for the study of statistical behaviors for a large number of synthetic fractures. It should be noted that there is no difference in the results obtained by both methods.

## 4 Hydraulic and Mechanical Apertures

For a parallel plate model the hydraulic transmittivity  $K_f$  for laminar flows is defined from the cubic law as  $K_f = d^3/12$ , where  $d$  is the plate separation. The hydraulic aperture for a rough fracture is defined from the observed flux  $Q$  for an imposed pressure drop  $\Delta P$  at both end of the square fracture ( $L \times L$ ) as

$$d_h^3 = \frac{12\eta Q}{\Delta P} \quad . \quad (20)$$

### 4.1 Comparison With Experimental Observations

Méheust and Schmittbuhl (2000) show experimental evidences of the influence of fracture wall roughness on the hydraulic transmittivity of a single fracture. We studied the flow between a rough granite fracture (10 cm×10 cm) and a plexiglas plate. Such a setup exhibits the same aperture fluctuations as that of a fracture limited by two noncorrelated rough fracture surfaces. We use highly viscous fluid, i.e., glycerol, to insure that the Reynolds number is significantly below one, where viscous forces dominate. The setup allows a continuous translation of the plexiglas plate from contact to a sufficiently large opening, for which neglecting the fracture roughness is approximately valid. In this limit the cubic law is shown to correctly describe the hydraulic transmittivity of the fracture. As shown in Figure 4, a significant departure from this cubic law is observed when closing the fracture. Figure 4 presents the evolution of the ratio of the hydraulic aperture  $d_h$  to the mechanical aperture  $d_m$  as a function of the normalized aperture  $d_m/\sigma$ , where  $\sigma$  is the root mean square of the aperture fluctuations over the whole fracture. The fracture appears to be flow inhibiting since its hydraulic aperture is always smaller than its mechanical aperture. The result corresponds to a first orientation of the pressure drop labeled by parallels and plotted with stars. (A second orientation labeled by perpendicular is described in section 5.1). For large normalized apertures  $d_m/\sigma$  the parallel plate model approximation is recovered ( $d_h/d_m \rightarrow 1$ ).

The numerical scheme for undrained boundary conditions (i.e., biconjugate gradient) has been used to simulate the flow through the experimental fracture,

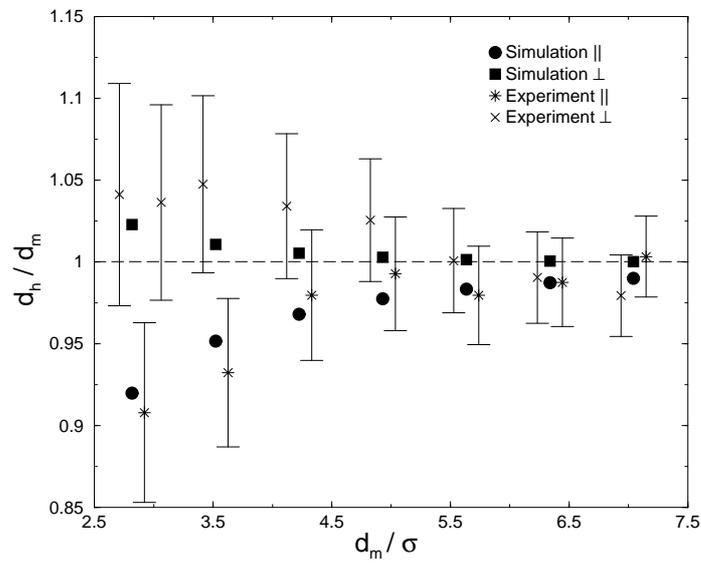


Figure 4: Experimental and numerical estimates of the hydraulic apertures  $d_h$  for different mechanical  $d_m$  apertures of a same fracture ( $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ ) sampled with a mechanical profiler on a grid  $130 \times 130$ . Hydraulic apertures are normalized by the mechanical aperture  $d_m$  and mechanical apertures by the the root mean square of the aperture distribution. Experimental results are shown (asterisks and crosses) with error bars. Solid symbols correspond to numerical estimates for both pressure drop orientations.

with the measured grid aperture ( $130 \times 130$ ) [Méheust and Schmittbuhl 2000]. As discussed previously, the self-affinity cutoff has been defined as  $l_c = 750 \mu\text{m}$ . The mesh size is chosen as  $a = l_c/4$ , leading to a number of points  $N$  along the side equal to 512. Numerical estimates of the hydraulic aperture of the fracture are shown as solid circles in Figure 4 for the same orientation of the pressure drop, labeled by parallels. Experimental and numerical hydraulic apertures are very consistent and have the same trend: inhibiting of the flow in comparison to a parallel plate with the same aperture. The good agreement of the results can be considered also as a validation of the numerical approximations and schemes.

For a fixed mean fracture separation the departure from the cubic law is all the more important as the maximum scale considered, i.e, the side length  $L$  of the fracture, is larger. Indeed, the root mean square (RMS)  $\sigma$  of the aperture field scales as  $L^\zeta$ , while the average aperture is scale-independent. Subsequently, the mean aperture normalized by the RMS  $\sigma$ ,  $d_m/\sigma$ , scales as  $L^{-\zeta}$ , and goes to zero when  $L$  becomes very large. The decrease of the normalized aperture with large scales increases the sensitivity to the roughness.

## 4.2 Transmittivity Variability

Figure 5 shows the evolution of the ratio  $d_h/d_m$  with respect to the normalized aperture  $d_m/\sigma$  for 15 synthetic granite surfaces ( $\zeta = 0.8$ ) sampled on a  $512 \times 512$  point grid, with  $l_c = L/128$  and  $a = L/512$ . The spectral method is used here. The seed for the generation of the aperture distribution is changed to simulate several different aperture distributions with the same statistical properties. Every rough fracture exhibits a regular behavior, with  $d_h/d_m$  either above or underneath one for all normalized apertures. The protruding of roughness into the fluid does not necessarily inhibit fluid flow. Depending on the geometry, roughness can either be flow inhibiting ( $d_h/d_m < 1$ ), i.e, an obstacle to flow, or flow enhancing ( $d_h/d_m > 1$ ), i.e, inducing an easy way through the fracture, although all fractures have the same statistical properties (same roughness exponent  $\zeta$ , same mean aperture  $d_m$ , and same aperture root mean square  $\sigma$ ). At high apertures the effect of roughness on flow becomes negligible, and  $d_h/d_m$  goes to one. The departure from the parallel plate model becomes increasingly apparent as the normalized aperture of the fracture is decreased.

The diamond plots in Figure 5 can be fitted by functions of the form  $1 + \alpha(d_h/d_m)^\beta$ , with  $\alpha$  positive or negative depending on whether the plot is above or below the parallel plate estimate, respectively. For the regression plots shown in Figure 5 (solid lines), the fit parameters  $|\alpha|$  and  $\beta$  vary in the ranges  $[0.8; 1.8]$  and  $[-2.6; -1.6]$ , respectively. This regression of the hydraulic aperture evolution curve can be practically used to extrapolate the hydraulic behavior of a given fracture from a poor sampling of  $d_h/d_m$  as function of  $d_m/\sigma$ . In order to check this, the evolution of  $d_h/d_m$  has been computed for normalized apertures

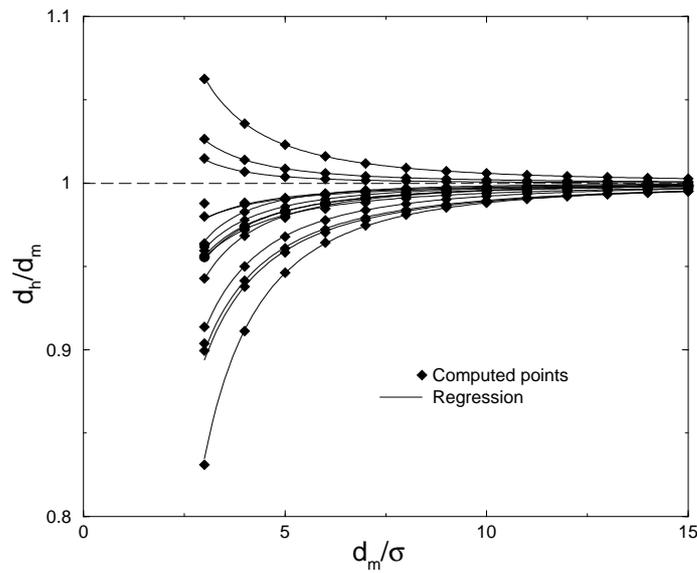


Figure 5: Evolution of the ratio of the hydraulic aperture  $d_h$  to the mechanical aperture  $d_m$  as a function of the normalized mechanical aperture  $d_m/\sigma$  for 15 synthetic granite surfaces ( $\zeta = 0.8$ ) with  $N = 512$  and  $l_c = L/128$  (solid diamonds). The curve for a given fracture is either entirely above or entirely underneath the dashed line corresponding to the parallel plate estimate (cubic law) and goes to it at large apertures. The departure from the cubic law grows as mechanical aperture decreases, which results in a large dispersion of the results at low apertures. Each plot can be fitted in a satisfying way with a function of the form  $1 + \alpha(d_h/d_m)^\beta$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are the fit parameters;  $\alpha$  is positive or negative according to whether the plot is above or below the parallel plate estimate. The corresponding curves are shown on the graph (solid lines).

$d_m/\sigma$  between 3. and 23., with a good sampling (200 points). The maximum deviation between the data and the fit is 0.01% when the regression is computed out the whole data set. If it is computed by using only three points that cover 50% of the data set (say,  $d_h/d_m = 13, 18,$  and  $22$ ), the maximum deviation is still as good as 0.5% for the whole data set. Therefore a trustable measurement of three values allows to estimate the complete curve with a satisfying accuracy.

### 4.3 Influence of Spatial Correlations of The Aperture Fluctuations

Possible behaviors have been investigated by computing the evolution of  $d_h/d_m$  with respect to the normalized mechanical aperture  $d_h/d_m$  for 500 surfaces with identical statistical properties, on a  $512 \times 512$  point grid, with  $l_c = L/128$  and  $a = L/512$ . The mean value  $\langle d_h/d_m \rangle$  and root mean square  $\delta d_h/d_m$  of the statistics for  $d_h/d_m$  are shown as a function of  $d_m/\sigma$  in Figure 6 for three different values of the roughness exponent: 0.8 (largely measured value), 0.5 (rarely measured value), and  $-1.0$ . Spatial correlations grow along the aperture as  $\zeta$  is increased. The higher the roughness exponent is, the more spatially correlated the surface is. Setting the roughness exponent to  $-1.0$  makes the two-dimensional power spectrum of the self-affine distribution flat (see (5)), which means that the distribution is spatially uncorrelated.

In Figure 6 the mean behavior is very close to the parallel plate estimate, even at low apertures, and exhibits a weakly inhibiting tendency toward flow. Moreover, it does not seem to depend much on the roughness exponent [Brown 1987]. On the contrary, fluctuations (i.e., RMS) of the behavior strongly increase when aperture decreases. This effect is highly dependent on the roughness exponent. For a spatially uncorrelated surface ( $\zeta = -1.0$ ) the variability of the behaviors of 500 different fractures is close to zero.

## 5 Influence of Pressure Drop Orientation

### 5.1 Experimental Evidence of Permeability Anisotropy

The experimental study presented by Méheust and Schmittbuhl (2000) has shown that the same fracture can be either flow inhibiting or flow enhancing according to the orientation of the pressure drop (see Figure 4). Measurements for the orientation labeled by parallels are significantly different from those for the orientation labeled by perpendicular, where the pressure drop is rotated by  $\alpha = 90^\circ$ . For an orientation  $\alpha = 0^\circ$  (labeled by parallels), the fracture is flow inhibiting ( $d_h/d_m < 1$ ). For  $\alpha = 90^\circ$  (labeled by perpendicular), it is flow enhancing ( $d_h/d_m > 1$ ).

Figure 4 also shows the simulated behaviors when the aperture field used for the computation is obtained from the measured roughness map. They are in

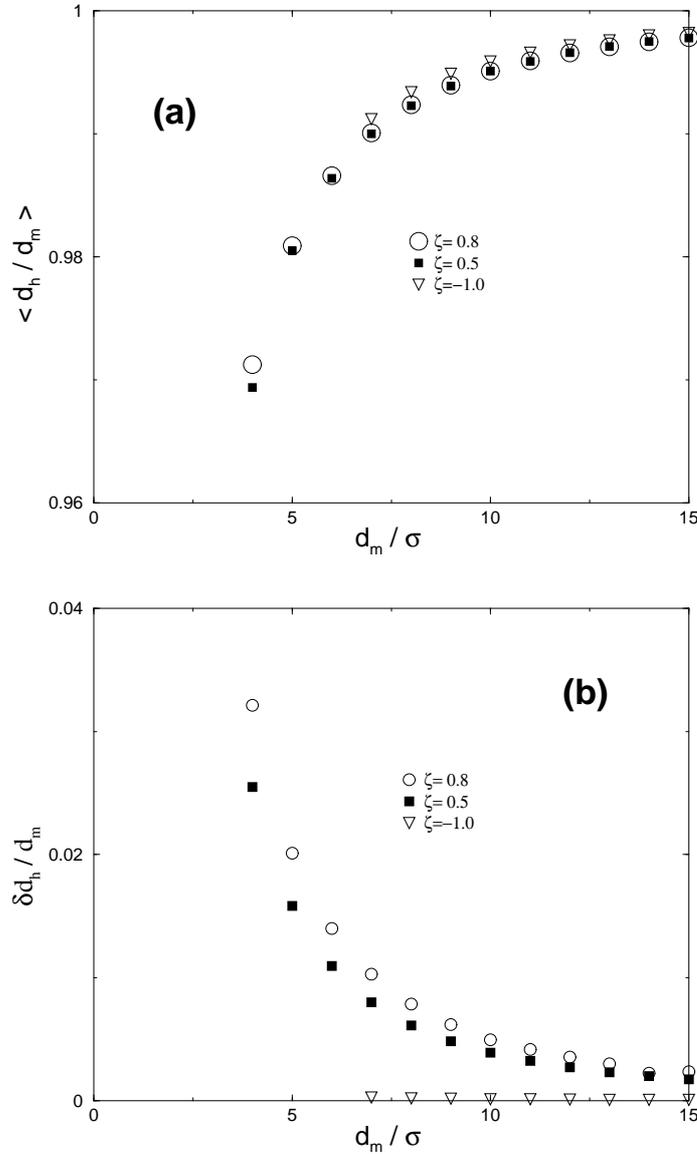


Figure 6: Evolution of (a) the mean value and (b) the root mean square of  $d_h/d_m$  as a function of the normalized mechanical aperture  $d_m/\sigma$  for 500 surfaces similar to those in Figure 5. The computation is made for various roughness exponents:  $\zeta = 0.8, 0.5$  and  $-1.0$  (no spatial correlations). The mean behavior of the 500 fractures is very close to one and appears to be weakly dependent on spatial correlations. On the contrary, the dispersion over the statistics increases with correlations. For a surface with no correlations ( $\zeta = -1.0$ ), all rough fractures behave in the same way.

good agreement with the experimentally observed behaviors and confirm the hydraulic anisotropy of the fracture response to a pressure drop difference.

Maps of the local flux  $\|\mathbf{q}_{i,j}\|$  are drawn in Figure 7 for both orientations of the pressure drop. The local flux  $\|\mathbf{q}\|$  is computed along the pressure grid  $\mathcal{G}_p$  and is represented with a linear gray scale where brighter grays denote larger local fluxes. Fluxes can therefore be compared visually. Figure 7a corresponds to a pressure orientation ( $\alpha = 0^\circ$ ) where the fracture is flow inhibiting. On the contrary, Figure 7b describes the local flux for  $\alpha = 90^\circ$ . A larger channel of the flow is observed in the configuration shown in Figure 7b, which is consistent with the corresponding flow enhancing behavior of the fracture (see Figure 4) when oriented according to the configuration labeled by parallels.

## 5.2 Continuous Rotation of Pressure Gradient

We observed both experimentally and numerically a strong sensitivity of the fracture transmittivity to the orientation of the imposed pressure drop, but only for two specific orientations:  $\alpha = 0^\circ$  and  $\alpha = 90^\circ$ . A key analysis is the study of a continuous rotation of the pressure drop orientation.

### 5.2.1 Experimental limitations.

The main difficulty of an experimental continuous rotation of the pressure drop emerges from the boundary conditions. For instance, using a square fracture would lead to a different and specific cutting of the fracture surface for each required direction of the pressure drop orientation. The use of a large collection of replicas of the granite surface might permit this oriented sampling. However, it would not be the property of the same fracture that would be tested since the oriented cut of the fracture would not cover always the same region. Another approach could be to keep the same surface but rotate the pressure drop. Since pressures are imposed along lines and because of the presence of walls, no simple experimental solution exists.

A study of the influence of the pressure drop orientation requires to decouple the boundary conditions for pressures from the geometry of the fracture. In particular, no conditions on the pressure itself (like lines of pressure) or walls (no flux) can be imposed on the boundaries. Only a condition on the pressure gradient along the fracture can be imposed. Boundary conditions for the pressure field have to be periodic. The latter condition requires that the aperture field of the fracture should also be periodic. Such a configuration can be explored numerically. It is nicely described with the pseudospectral solver. The pressure gradient  $\overline{\nabla P}$  is no longer parallel to one side of the grid but might have an orientation with an angle  $\alpha$  with respect to the fracture topography.

Periodic boundary conditions are different from those used in section 5.1. When boundary conditions of the pressure are periodic, the stream tubes at the fracture scale might have a complex boundary geometry. On the contrary,

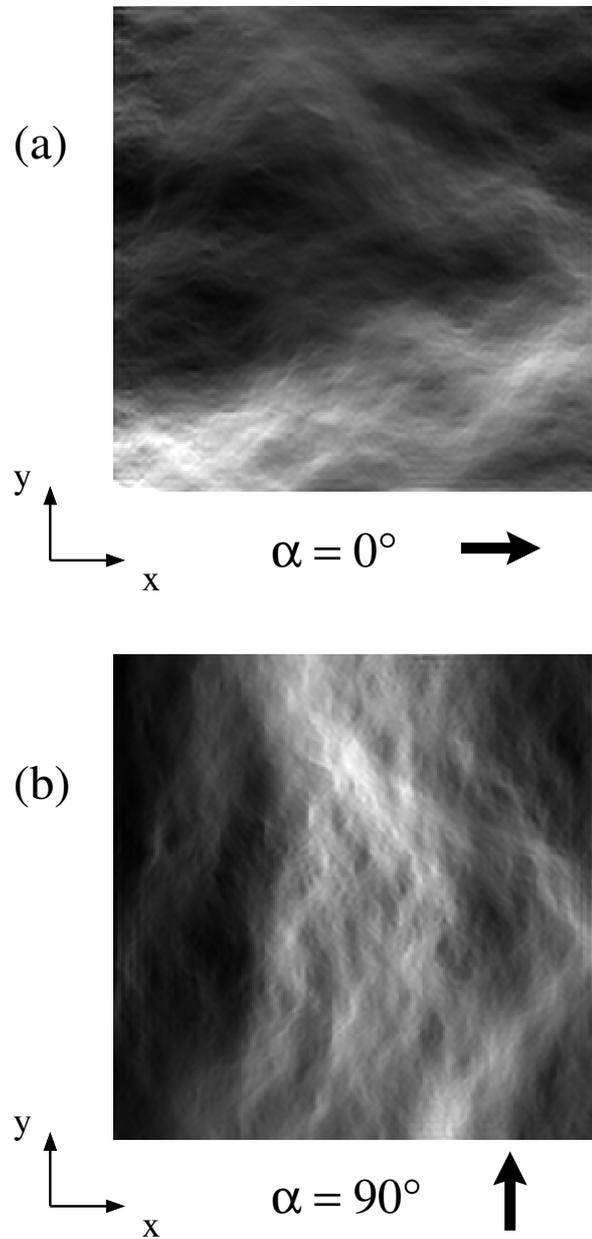


Figure 7: Maps of local flux  $\|\mathbf{q}\|$  for an aperture distribution sampled from the experimental fracture, with  $d_m/\sigma = 2.8$ , and for two perpendicular orientations of the pressure drop: (a)  $\alpha = 0^\circ$  and (b)  $\alpha = 90^\circ$ . The magnitude of the local flux is represented here with the same linear gray scale. Brighter shading indicates larger local fluxes, which enables visualization of the central large aperture channel in Figure 7b as a feature explaining the fracture flow enhancing behavior for  $\alpha = 90^\circ$  (see solid symbols in Figure 4).

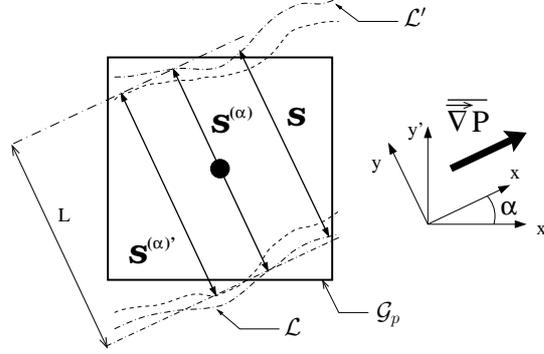


Figure 8: A section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ , normal to flow and of lateral extent  $L$ , is chosen as that used to define the hydraulic aperture  $d_h(\alpha)$  for a given orientation  $\alpha$  of the macroscopic pressure gradient. This particular section has its center coinciding with the center of the pressure grid  $\mathcal{G}_p$ . It defines a stream tube, the boundary flow lines of which,  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}'$ , are shown as dot-dashed lines. Since the flow is not periodic in the direction  $y$ , another cross section  $\mathcal{S}$  of the tube  $\mathcal{T}^{(\alpha)}$  does not necessarily have a lateral extent of  $L$ . However, the mass conservation requires that the volumetric rate through  $\mathcal{S}$  be the same as that through  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ . Choosing for the definition of  $d_h(\alpha)$  the section  $\mathcal{S}^{(\alpha)'}$ , instead of  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ , would define another stream tube (limited by the dashed lines) and, subsequently, change the value of  $d_h(\alpha)$ .

when two opposite walls limit the fracture flow, there exists a stream tube that coincides with the walls.

### 5.2.2 A grid rotation technique.

Two frames are introduced in the model. One is attached to the flow orientation:  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , where  $x$  is the horizontal coordinate in the direction of the applied pressure drop,  $z$  is the ascending vertical coordinate, and  $y$  is the horizontal coordinate transverse to  $x$ , such that  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  is a direct orthogonal system. The second frame  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z})$  is attached to the fracture: the  $x'$  and  $y'$  coordinates are oriented along the sides of the fracture, and  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z})$  forms a direct orthonormal coordinate system. The first frame  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  is obtained by a rotation of the second one around the  $z$  axis. The angle  $\alpha \equiv (\hat{x}', O, \hat{x})$  denotes the orientation of the pressure drop with respect to the fracture. It should be noted that the  $z$  axis is only introduced as an axis for the rotation.

For a pressure gradient  $\overline{\nabla P}$  oriented with an angle  $\alpha$  with respect to the fracture, let us consider a stream tube  $\mathcal{T}^{(\alpha)}$  at the fracture scale (see Figure 8). Let  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$  be a section of the stream tube of lateral extent  $L$  and normal to the macroscopic pressure gradient  $\overline{\nabla P}$  and  $Q^{(\alpha)}$  be the volumetric flow rate through the section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ . The hydraulic aperture  $d_h(\alpha)$  of the fracture is computed as  $(12 \eta Q^{(\alpha)} / \Delta P)^{1/3}$ . Mass conservation is checked by verifying the invariance of the volumetric flow rate through any section of the tube  $\mathcal{T}^{(\alpha)}$  parallel to  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ .

The geometries of the stream tube boundaries ( $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}'$ ) are estimated from

the computation of the geometry of the flow lines by use of a stream function,  $\Psi$ . If the vector  $\mathbf{q}$  is written as  $\mathbf{q} = u\hat{x} + w\hat{y}$ , the stream function  $\Psi$  is defined from the relations  $u = \partial\Psi/\partial y$  and  $w = -\partial\Psi/\partial x$ , so that  $\mathbf{q}$  automatically obeys the mass conservation law. The stream function follows an equation very similar to the Reynolds equation [Plouraboué et al. 1998]:

$$\Delta\Psi = 3 \frac{\nabla d}{d} \cdot \nabla\Psi \quad , \quad (21)$$

which can also be written as  $\nabla \cdot (\nabla\Psi/d^3) = 0$ . Thus the computation of  $\Psi$  can be done by use of the same algorithm as for the pressure  $P$ . Flow lines  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}'$  are obtained as intersections between the surface  $z = \Psi(x, y)$  and two appropriate horizontal planes.

For  $\alpha = 0^\circ$  and  $\alpha = 90^\circ$ , there is no need for the computation of the geometry of the boundaries  $\mathcal{L}$  and  $\mathcal{L}'$ . Combined with the flow periodicity by  $L\hat{y}'$ , mass conservation implies an invariance of the volumetric rate through any transverse section of the grid. It can therefore be checked by use of the linear boundaries of the grid.

The section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$  used to define the hydraulic aperture  $d_h(\alpha)$  is chosen as a particular one: the center of the section is adjusted to the center of the grid  $\mathcal{G}_p$ . For  $\alpha = 0^\circ$  or  $\alpha = 90^\circ$ , owing to periodicity, the definition for  $d_h(\alpha)$  is independent of the choice of the section  $\mathcal{S}$  along the pressure gradient direction.

For  $\alpha \neq 0^\circ$  and  $\alpha \neq 90^\circ$ , there is no periodicity of the pressure field in the direction  $y$  transverse to the macroscopic pressure gradient. Subsequently, the volumetric rate through a section normal to the macroscopic flow and of extent  $L$  is not independent of the section considered. Thus the computation of  $d_h(\alpha)$  is ambiguous since it depends on the choice of the section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ . The requirement that the section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$  of the stream tube should be of lateral extent  $L$  defines the tube. Choosing, for example, a section further in the flow (using a translation along the  $x$  direction) defines another stream tube through which the volumetric rate is different (see Figure 8).

### 5.2.3 Variability of a single fracture.

Figure 9 shows the evolution of the ratio of the hydraulic aperture  $d_h$  to the mechanical aperture  $d_m$  for the aperture shown in Figure 1 ( $\zeta = 0.8$ ), when the macroscopic pressure gradient is rotated continuously from  $0^\circ$  to  $360^\circ$  with steps of  $5^\circ$ . The fracture evolves continuously from a flow inhibiting behavior to a flow enhancing behavior. The most favorable configuration corresponds to  $\alpha$  close to  $125^\circ$ . The computations have been done for various normalized mechanical apertures  $d_m/\sigma$  between 3.5 and 100. The amplitude of the fluctuations for different angles increases when the fracture separation is decreased. The fracture has to be significantly open to get limited effect of the pressure drop orientation. Indeed the choice  $d_m/\sigma = 30$  corresponds to fluctuations of the normalized hydraulic aperture lower than 1% and  $d_m/\sigma = 100$  to fluctuations lower than 0.1%. The sensitivity of the hydraulic aperture  $d_h$  to the

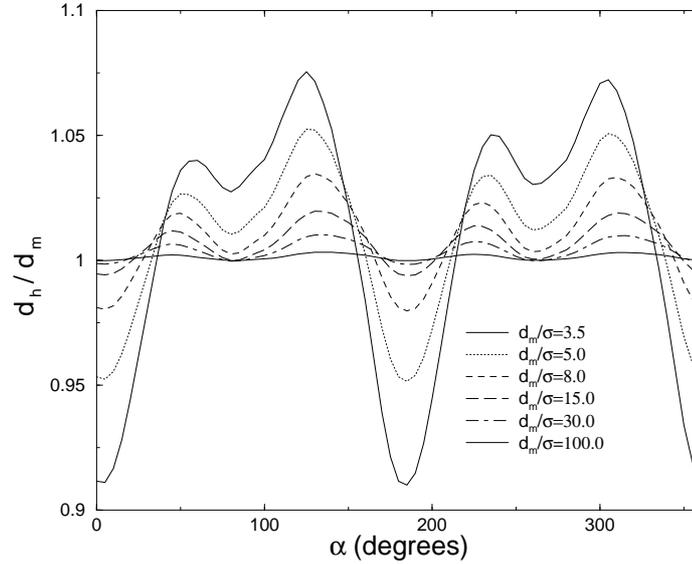


Figure 9: Evolution of the ratio of the hydraulic aperture  $d_h$  to the mechanical aperture  $d_m$  when the macroscopic pressure gradient  $\nabla P$  is rotated continuously from  $0^\circ$  to  $360^\circ$ , with steps of  $5^\circ$ . The aperture is shown in Figure 1. The hydraulic behavior is computed for various normalized mechanical apertures  $d_m/\sigma$ . The  $180^\circ$  periodicity of the curves is a consequence of the reversibility of the flow. Anisotropy increases when the normalized aperture decreases.

pressure drop orientation  $\alpha$  demonstrates the role of channeling in the hydraulic anisotropy of fractures.

In Figure 10, we have investigated how the fluctuations of the hydraulic aperture with  $\alpha$  evolve when the spatial correlations of the aperture are increased at fixed normalized aperture ( $d_m/\sigma=5$ ):  $\zeta = -1.0$  (uncorrelated surface), 0.0, 0.5, and 0.8, for a single synthetic fracture. As observed previously, the amplitude of the fluctuations grows when spatial correlations are increased.

## 6 A Priori Estimate of Hydraulic Aperture

We observed that the permeability of a given rough fracture is an intrinsic quantity that does not have a unique value but depends on the orientation of the macroscopic pressure gradient  $\nabla P$ . An a priori estimate of the hydraulic aperture (from the hydraulic volume rate) would provide an estimate only from the geometrical description of the fracture without describing or computing the fluid flow. The usual estimate is the average fracture separation, as used previously. Different estimates have been proposed [Brown 1987, Zimmerman and Bodvarsson 1996], but all of them are isotropic and fail to represent the hydraulic behavior of the fracture since they do not take into account the angle  $\alpha$  that determines the orientation of  $\nabla P$  with respect to the fracture. Some estimates exhibit a mean behavior closer than others to the observed mean hy-

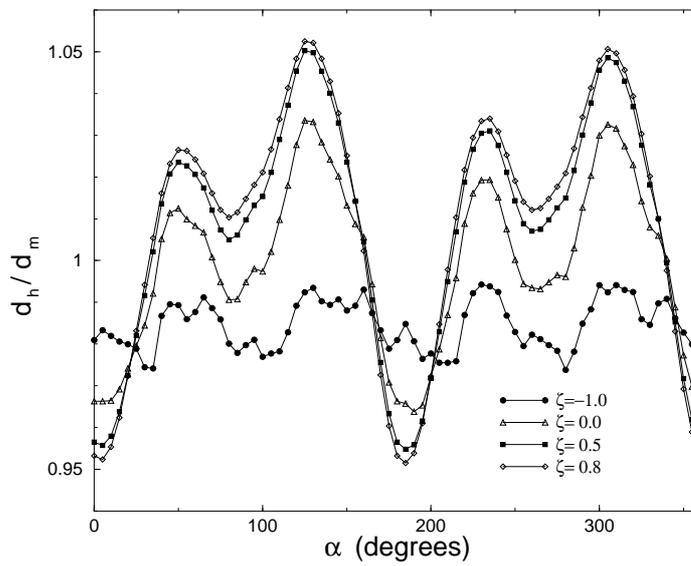


Figure 10: Evolution of the ratio of the hydraulic aperture  $d_h$  to the mechanical aperture  $d_m$  when the macroscopic pressure gradient  $\nabla P$  is rotated continuously from  $0^\circ$  to  $360^\circ$ , with steps of  $5^\circ$ . The  $180^\circ$  periodicity of the curves is a consequence of the reversibility of the flow. The normalized aperture is fixed ( $d_m/\sigma = 5$ ), and the behavior of the single synthetic fracture is shown for different degrees of spatial correlations:  $\zeta = -1.0$  (no spatial correlations),  $\zeta = 0.0$ ,  $\zeta = 0.5$ ,  $\zeta = 0.8$ . Anisotropy increases when spatial correlations grow.

draulic behavior, but none has been shown to be completely satisfying especially for describing the permeability fluctuations.

The issue addressed here consists in defining an a priori estimate  $d^*$  that includes the orientation of the imposed pressure drop. The estimate has to fulfill three conditions. First, the ratio  $d_h/d^*$  must lie on average close to the perfect agreement line:  $d_h/d_m = 1$  as function of the normalized aperture  $d_m/\sigma$ . In addition, the value for the ratio  $d_h/d^*$  for a given fracture must be as independent of the orientation  $\alpha$  as possible. Finally, the satisfying agreement between the a priori estimate and the observed hydraulic behavior must result in a reduced variability of the hydraulic aperture  $d_h/d^*$  over a large statistics of independent fractures.

Below we give a simple example of an anisotropic a priori estimate that is more accurate than the mechanical aperture defined as the average aperture. The proposed estimate neglects tortuosity but includes the pressure drop orientation  $\alpha$ . Flow lines are assumed to be linear in the direction of macroscopic flow. The fracture is considered to be made of parallel straight and independent channels with an aperture that only varies along the direction of the pressure drop. If subscripts  $(i_\alpha, j_\alpha)$  refer to the position of local apertures with respect to the frame  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , attached to  $\nabla P$ , and that makes an angle  $\alpha$  with the frame  $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  attached to the fracture, we propose to define the a priori aperture  $d^*$  as

$$d^{*3} = \sum_{j_\alpha} \frac{1}{\sum_{i_\alpha} \frac{1}{(d_{i_\alpha, j_\alpha})^3}} \quad . \quad (22)$$

Within each tube the hydraulic conductivity is computed as pores in series. On the contrary, tubes are treated as being in parallel and the cube of the estimated effective aperture  $d^*$  is computed by averaging the cubes of the estimated effective apertures for each of the parallel tubes.

In Figure 11 the same synthetic fracture with strong hydraulic anisotropy has been considered as in section 5.2 (shown in Figure 1). The lines (solid and dashed) show the plots of the ratio  $d_h/d_m$  as a function of the normalized aperture  $d_m/\sigma$  for the two orthogonal directions of the macroscopic pressure gradient. The mechanical aperture  $d_m$  underestimates or overestimates the volume rate through the fracture according to pressure drop orientations. Plots displaying the hydraulic aperture normalized by the a priori aperture  $d^*$  lie for both orientations of the pressure drop above the horizontal perfect agreement line and nearly coincide with each other. The a priori estimate  $d^*$  captures the influence of the pressure drop orientation on the transmittivity.

We investigated how the a priori estimate  $d^*$  might decrease the fluctuations of hydraulic behaviors when considering a large number of fractures. The results of the statistical study carried on in section 4.3 for 500 synthetic fractures and a roughness exponent of  $\zeta = 0.8$  have been plotted using  $d^*$  instead of  $d_m$  in Figure 12. We observed that the a priori estimate  $d^*$  reduces the fluctuations

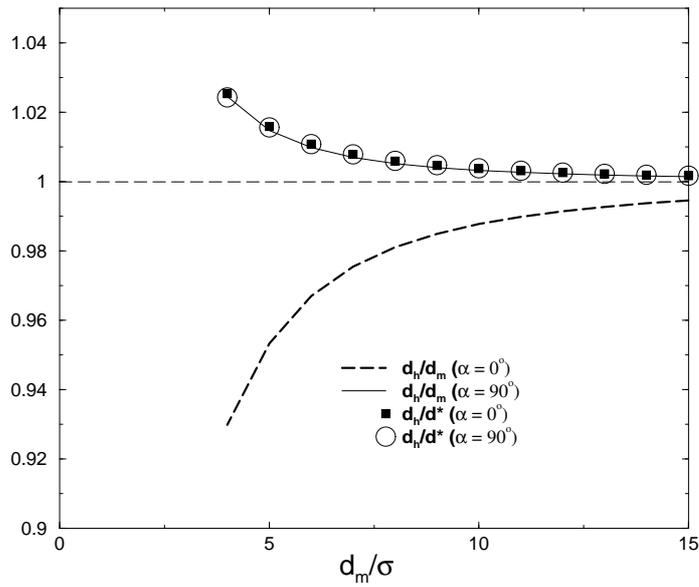


Figure 11: Evolution of the ratios of the computed hydraulic aperture  $d_h$  to the mechanical aperture  $d_m$  (lines) and to the aperture geometric estimate  $d^*$  (symbols), respectively, as a function of the normalized mechanical aperture  $d_m/\sigma$ , for the synthetic aperture distribution shown in Figure 1 and for two orthogonal orientations of the macroscopic pressure gradient. The anisotropic geometric estimate  $d^*$  is obtained under the assumption that the aperture field is made of independent channels parallel to the macroscopic pressure gradient, with a varying aperture. It therefore neglects the tortuosity of the flow, but takes into account either the flow enhancing or the flow inhibiting feature of the fracture, depending on the orientation of the driving pressure drop.

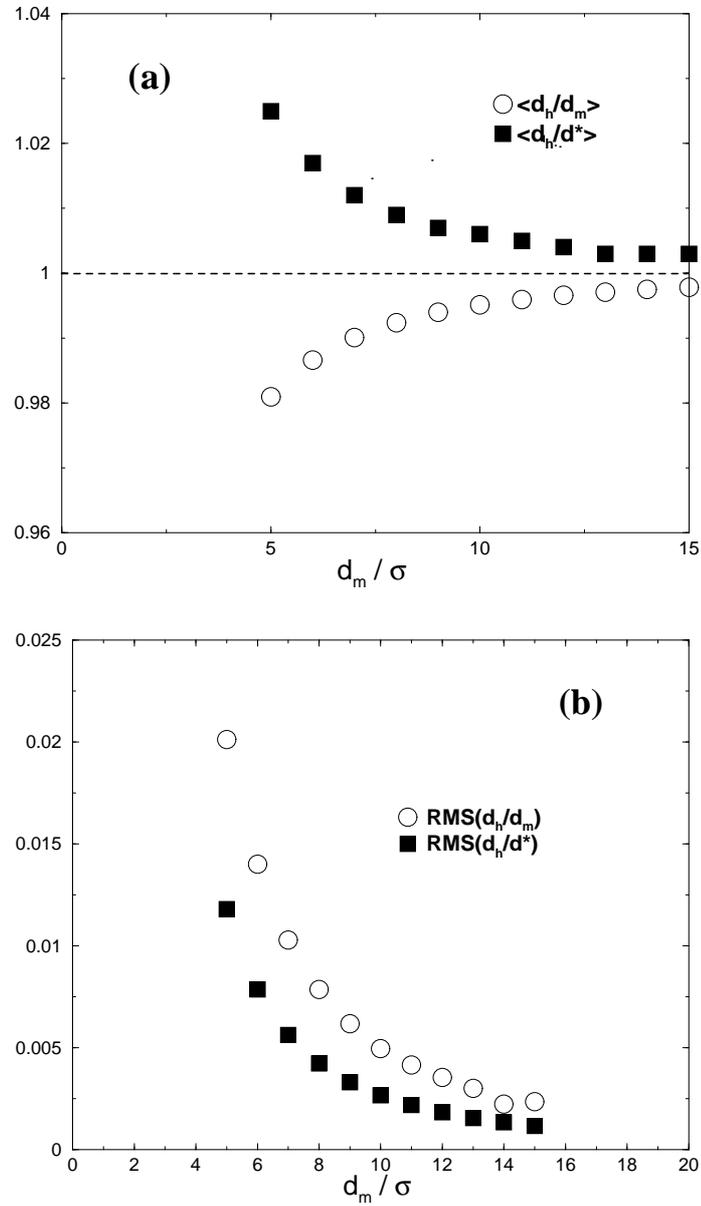


Figure 12: Evolution of (a) the mean value and (b) the root mean square of  $d_h/d_m$  and  $d_h/d^*$  as a function of the normalized mechanical aperture, for 500 synthetic granite fractures ( $\zeta = 0.8$ ). The ratio of the side length of the fracture,  $L$ , to the mesh size  $a$ , is 128. The use of the very simple anisotropic estimate reduces the fluctuations of the statistics by a factor of 2 with respect to the use of the parallel plate estimate  $d_m$ .

(i.e. RMS) by a factor 2 but does not account completely for the variability effect.

## 7 Conclusion

We developed a numerical model of viscous flow in a rough fracture based on the Reynolds equation and on self-affine properties of the aperture fluctuations. Two independent numerical schemes that allow various boundary conditions provide identical results. Numerical estimates of the hydraulic aperture of a fracture are successfully compared to a recent experimental study [Méheust and Schmittbuhl 2000], which validates the numerical model. Three important results have to be emphasized.

First, the hydraulic behavior of a rough fracture is highly variable. The variability significantly increases as the fracture is closed. Even though apertures have the same statistics, some fractures are flow inhibiting, and some others are flow enhancing. Moreover, we showed that the variability is controlled by the spatial correlations of the aperture fluctuations. For spatially uncorrelated apertures, variability is weak. On the contrary, for natural apertures, which are shown to be self-affine on a significant scale range, spatial correlations are important and subsequently variability is significant. The statistical study carried out in this work shows that there is a strong variability of the hydraulic conductance for given mean aperture  $d_m$ , amplitude of the roughness fluctuations  $\sigma$ , and roughness exponent  $\zeta$ . Thus, an important issue is to determine whether the mean hydraulic behavior of the fracture for fixed parameters,  $d_m$ ,  $\sigma$  and  $\zeta$ , is sufficient to be used in a fracture network model.

We also demonstrate that the hydraulic response of a single fracture is anisotropic. It is highly dependent on the pressure head orientation. A given fracture is shown to be either flow inhibiting or flow enhancing depending on the orientation of the pressure head. This anisotropy of the hydraulic transmissivity results from the geometrical heterogeneities (i.e, the fracture roughness). We show that these heterogeneities are isotropically distributed. However, such heterogeneities exist at all scales because of the self-affine invariance and are more important at low wavelengths, especially at the fracture scale. If aperture fluctuations are heterogeneous at the fracture scale, a physical property of the fracture like the hydraulic conductivity, is anisotropic at that scale.

At the microscale we studied the flow path and observed channeling of the flow. When channeling is strong, the fracture appears to be flow enhancing. On the contrary, a weak channeling corresponds to a flow inhibiting fracture. The roughness of the fracture wall controls the channeling of the flow. Depending on the pressure drop orientation with respect to the fracture roughness (i.e., aperture fluctuations), channeling is more or less favorable. Subsequently, the hydraulic conductivity fluctuates significantly with the pressure drop orientation.

We propose an a priori estimation of the effective aperture of a rough fracture that takes into account the direction of the flow. The simple estimate presented here allows to predict the tendency of the fracture (flow enhancing or flow inhibiting) from the knowledge of the aperture distribution and of the orientation toward flow.

We have restrained ourselves to a range of mechanical apertures where both surfaces are not in contact yet. A numerical study of the hydraulic behavior of a fracture with many contact points requires the development of a model for the coupling of hydraulic and mechanical properties [Unger and Mase 1993]. However, the existence of an anisotropy before contact probably involves an even stronger anisotropic behavior after contact because in partially closed fractures, fluid only follows a small number of tortuous and independent channels, which makes the channeling phenomenon more radical.

**Acknowledgements.** The authors acknowledge fruitful discussions with J.-P. Vilotte, S. Roux, K.-J. Måløy and J.-P. Hulin. We wish to thank Y. Guéguen for improving the manuscript and G. D. H. Simpson for continued help with the English throughout the manuscript preparation. We also acknowledge F. Cornet, I. Main, and A. Revil for a very constructive review of the paper. This work was supported by the “Programme National de Recherche en Hydrologie CNRS-INSU.”

## References

- Amedei, B. and Illangasekare, T. (1994), ‘A mathematical model for flow and solute transport in non-homogeneous rock fractures’, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech.* **31**, 719–731.
- Arhens, T. J., ed. (1995), *Mineral Physics and Crystallography—A Handbook of Physical Constants*, Vol. 2 of *Ref. Shelf*, AGU, Washington DC.
- Batrouni, G. and Hansen, A. (1988), ‘Fourier acceleration of iterative process in disordered systems’, *J. Stat. Phys.* **52**(3-4), 747–773.
- Bear, J., Tsang, C. F. and de Marsily, G., eds (1993), *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*, Academic, San Diego, Calif.
- Berkowitz, B. (1994), Modelling flow and contaminant transport in fractured media, in Y. Corapcioglu, ed., ‘Advances in Porous Media’, Elsevier Sci., New York, pp. 397–451.
- Berkowitz, B. and Adler, P. M. (1998), ‘Stereological analysis of fracture network structure in geological formations’, *J. Geophys. Res.* **103**(B7), 15,339–15,360.

- Boffa, J., Allain, C. and Hulin, J. (1998), 'Experimental analysis of fracture rugosity in granular and compact rocks', *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **2**(3), 281–289.
- Bouchaud, E. (1997), 'Scaling properties of cracks', *J. Phys. Condens. Matter* **9**, 4319–4344.
- Bour, O. and Davy, P. (1997), 'Connectivity of random fault networks following a power law fault distribution', *Water Resour. Res.* **33**(7), 1567–1583.
- Brown, S. R. (1987), 'A note on the description of surface roughness using fractal dimension', *Geophys. Res. Lett.* **14**(11), 1095–1098.
- Brown, S. R. (1989), 'Transport of fluid and electric current through a single fracture', *J. Geophys. Res.* **94**(7), 9429–9438.
- Brown, S. R. (1995), 'Simple mathematical model of a rough fracture', *J. Geophys. Res.* **100**(B4), 5941–5952.
- Brown, S. R., Caprihan, A. and Hardy, R. (1998), 'Experimental observation of fluid flow channels in a single fracture', *J. Geophys. Res.* **103**(B3), 5125–5132.
- Brown, S. R., Stockman, H. W. and Reeves, S. J. (1995), 'Applicability of the reynolds equation for modeling fluid flow between rough surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **22**(18), 2537–2540.
- Cook, N. G. W. (1992), 'Natural joints in rock: mechanical, hydraulic and seismic behavior and properties under normal stress', *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* **29**(3), 198–223.
- Cox, B. L. and Wang, J. S. Y. (1993), 'Fractal surfaces: measurement and application in earth sciences', *Fractals* **1**, 87–115.
- Dijk, P. E., Berkowitz, B. and Bendel, P. (1999), 'Investigation of flow in water-saturated rock fractures using nuclear magnetic resonance imaging (nmri)', *Water Resour. Res.* **35**(2), 347–360.
- Durham, W. B. and Bonner, B. (1994), 'Self-propping and fluid flow in slightly offset joints at high effective pressures', *J. Geophys. Res.* **99**(B5), 9391–9399.
- Durham, W. B. and Bonner, B. (1995), Closure and fluid flow in discrete fractures, in L. R. Myer, C. Tsang, N. Cook and R. Goodman, eds, 'Fractured and Jointed Rock Masses', A. A. Balkema, Brookfield, Vt., pp. 441–446.
- Falconer, K. J. (1990), *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley, New York.
- Feder, J. (1988), *Fractals*, Plenum, New York.

- Fournier, A., Fussel, D. and Carpenter, L. (1982), 'Computer rendering of stochastic models', *Commun. ACM* pp. 371–384.
- Glover, P., Matsuki, K., Hikima, R. and Hayashi, K. (1998*a*), 'Synthetic rough fractures in rocks', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9609–9620.
- Glover, P. W. J., Matsuki, K., Hikima, R. and Hayashi, K. (1998*b*), 'Fluid flow in synthetic rough fractures and application to the hachimantai geothermal hot rock test site', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9621–9635.
- Hakami, E. and Larsson, E. (1996), 'Aperture measurements and flow experiments on a single fracture', *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* **33**(4), 395–404.
- Iwai, K. (1976), *Fundamental Studies of Fluid Flow Through a Single Fracture*, PhD thesis, Univ. of Calif., Berkeley.
- Keller, A., Roberts, P. and Blunt, M. (1999), 'Effect of fracture aperture variations on the dispersion of contaminants', *Water Resour. Res.* **35**(1), 55–63.
- Koudina, N., Garcia, R. G., Thovert, J. and Adler, P. (1998), 'Permeability of three-dimensional fracture networks', *Phys. Rev. E* **57**(4), 4466–4479.
- Méheust, Y. and Schmittbuhl, J. (2000), 'Flow enhancement of a rough fracture', *Geophys. Res. Lett.* **27**(18), 2989–2992.
- Moreno, L., Tsang, Y. W., Tsang, C., Hale, F. and Neretnieks, I. (1988), 'Flow and tracer transport in a single fracture: A stochastic model and its relation to some field observations', *Water Resour. Res.* **24**(12), 2033–2048.
- Mourzenko, V. V., Thovert, J.-F. and Adler, P. (1995), 'Permeability of a single fracture; validity of the reynolds equation', *J. Phys. II* **5**, 465–482.
- Nataf, H. C. and Sommeria, J., eds (2000), *La Physique de la Terre*, CNRS, Belin.
- Peitgen, H. and Saupe, D. (1988), *The Science of Fractal Images*, Springer-Verlag, New York.
- Pinkus, O. and Sternlicht, B. (1961), *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill, New York.
- Plouraboué, F., Hulin, J. P., Roux, S. and Koplik, J. (1998), 'Numerical study of geometrical dispersion in self-affine rough fractures', *Phys. Rev. E* **58**(3), 3334–3346.
- Plouraboué, F., Kurowski, P., Hulin, J. P., Roux, S. and Schmittbuhl, J. (1995), 'Aperture of rough crack', *Phys. Rev. E* **51**, 1675–1685.

- Power, W. L., Tullis, T. E., Brown, S. R., Boitnott, G. N. and Scholz, C. H. (1987), 'Roughness of natural fault surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **14**(1), 29–32.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P. (1992), *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press, New York.
- Roux, S., Plouraboué, F. and Hulin, J. (1996), 'Tracer dispersion in rough open cracks', *Transp. Porous Media* **32**(1), 97–116.
- Sahimi, M. (1993), 'Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing', *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1393–1534.
- Sahimi, M. (1998), 'Non-linear and non-local transport process in heterogeneous media: From long-range correlated percolation to fracture and material breakdown', *Phys. Rep.* **306**, 213–395.
- Schmittbuhl, J., Gentier, S. and Roux, S. (1993), 'Field measurements of the roughness of fault surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **20**(8), 639–641.
- Schmittbuhl, J., Schmitt, F. and Scholz, C. H. (1995), 'Scaling invariance of crack surfaces', *J. Geophys. Res.* **100**, 5953–5973.
- Simonsen, I., Hansen, A. and Magnar Nes, O. (1998), 'Using wavelet transforms for Hurst exponent determination', *Phys. Rev. E* **58**, 2779–2787.
- Thompson, M. E. (1991), 'Numerical simulation of solute transport in rough fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B3), 4157–4166.
- Thompson, M. E. and Brown, S. R. (1991), 'The effect of anisotropic surface roughness on flow and transport in fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B13), 21,923–21,932.
- Tsang, Y. W. (1984), 'The effect of tortuosity on fluid flow through a single fracture', *Water Resour. Res.* **20**(9), 1209–1215.
- Tsang, Y. W., Tsang, C. F., Neretnieks, I. and Moreno, L. (1988), 'Flow and tracer transport in fractured media: a variable aperture channel model and its properties', *Water Resour. Res.* **24**(12), 2049–2060.
- Unger, A. J. A. and Mase, C. (1993), 'Numerical study of the hydromechanical behavior of two rough fracture surfaces in contact', *Water Resour. Res.* **29**(7), 2101–2114.
- Voss, R. F. (1985), *Scaling Phenomena in Disorder Systems*, Plenum, New York.

- Walsh, J. B., Brown, R. and Durham, B. (1997), 'Effective media theory with spatial correlations for flow in a fracture', *J. Geophys. Res.* **102**(B10), 22,587–22,594.
- Winterstein, D. F. (1990), 'Velocity anisotropy terminology for geophysicists', *Geophysics* **55**, 1070–1088.
- Zimmerman, R. and Bodvarsson, G. (1996), 'Hydraulic conductivity of rock fractures', *Transp. Porous Media* **23**, 1–30.



## Chapitre 7

# Fractures dont les parois sont ajustées aux grandes longueurs d'onde

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>203</b>
<b>7.1 Surfaces corrélées aux grandes longueurs d'onde</b> . . . . .	<b>203</b>
7.1.1 Implémentation numérique . . . . .	203
7.1.2 Conséquence sur les ouvertures locales . . . . .	204
7.1.3 Ajustement des surfaces et approximation de lubrification . . . . .	204
<b>7.2 Influence de l'ajustement des surfaces sur l'ouverture hydraulique des fractures</b> . . . . .	<b>204</b>
7.2.1 Étude de deux familles de fractures particulières . . . . .	205
7.2.2 Étude statistique sur un grand nombre de fractures . . . . .	207
7.2.3 Influence sur le comportement d'une fracture quand on fait varier l'orientation du gradient de pression effectif . . . . .	207
<b>Conclusion et discussion</b> . . . . .	<b>207</b>
<b>Annexe : Scale effects related to flow in rough fractures</b> . . . . .	<b>210</b>

---



## Introduction

L'étude présentée au chapitre 6 a montré, dans le cas d'une fracture rugueuse dont les parois ne sont pas corrélées l'une avec l'autre, que ce sont les hétérogénéités à l'échelle de la fracture qui contrôlent l'anisotropie du champ des ouvertures, et consécutivement, la chenalisation de l'écoulement dans la fracture. Laquelle chenalisation conduit à une transmissivité différente de celle d'un modèle sans rugosité. Il n'existe donc pas d'échelle caractéristique pour la description à la fois hydraulique et géométrique de la fracture, autre que sa dimension  $L$ . En particulier, il n'existe pas d'échelle d'homogénéisation pour définir un tenseur de perméabilité dans la fracture.

Des études expérimentales récentes [Brown, 1986; Glover et al., 1998b] ont montré que les deux parois des surfaces naturelles sont souvent "ajustées" aux plus grandes échelles, c'est-à-dire que les fluctuations de grande échelle de leur rugosités sont identiques, tandis que les détails de petite échelle des deux topographies sont différents. Une description adéquate introduit une longueur de corrélation  $L_c$ , qui marque la transition entre les échelles où les deux surfaces sont ajustées, et celles où elles peuvent être considérées comme indépendantes. Dans le cadre de cette description, le travail présenté dans les chapitres précédents s'applique bien à la description hydraulique d'une fracture dont la taille est inférieure à la longueur de corrélation.

On a essayé dans le présent chapitre de prendre en compte l'ajustement des surfaces aux grandes échelles, et d'analyser son influence sur le comportement hydraulique des fractures. La première partie du chapitre concerne l'implémentation, dans notre modèle numérique, de l'ajustement des surfaces, et les conséquences de cet ajustement en termes d'approximation de lubrification. La deuxième partie est une étude numérique de l'influence de la longueur de corrélation  $L_c$  sur la perméabilité de la fracture; elle fait référence aux figures contenues dans l'annexe au chapitre.

## 7.1 Surfaces corrélées aux grandes longueurs d'onde

### 7.1.1 Implémentation numérique

Brown (1995b) a proposé le premier modèle numérique pour engendrer des surfaces ajustées aux grandes échelles. Le spectre de Fourier du champ des ouvertures résultant exhibe une transition entre deux régimes : un régime auto-affine aux petites longueurs d'onde, et un régime constant aux grandes longueurs d'onde. Récemment, Glover et al. (1998a) ont proposé un modèle plus élaboré, où la transition entre les deux régimes est graduelle, et correspond mieux aux observations effectuées sur des fractures naturelles.

Pour notre part, nous avons opté pour une description de l'ajustement des surfaces la plus simple possible. Dans notre modèle, les deux topographies en regard ont des spectres de Fourier complètement indépendants aux longueurs d'onde inférieures à  $L_c$ , et des modes de Fourier identiques aux longueurs d'onde supérieures. Le terme de *longueur de corrélation* est souvent employé pour des systèmes où les corrélations existent à toutes les échelles inférieures à la longueur de corrélation; ici, il peut être trompeur, car nous l'employons dans une configuration où la corrélation existe aux échelles supérieures à  $L_c$ . Les deux distributions  $h_+$  et  $h_-$  sont engendrées de la manière suivante. On génère d'abord deux topographies indépendantes et statistiquement équivalentes (même exposant de rugosité, même amplitude). Les modes de Fourier de la distribution  $h_-$  correspondant à des longueurs d'onde supérieures à  $L_c$  sont alors égalés aux modes de Fourier correspondants de  $h_+$ . Deux profils extraits de topographies engendrées de cette manière, avec  $L_c = L/2$ , sont présentés à la figure 7(b) de l'annexe au chapitre, page 225. On pourra les comparer avec les deux profils issus de topographies correspondant à  $L_c \geq L$  (figure 7(a), page

225). Les notations  $h_u$  et  $h_l$  de ces figures correspondent respectivement aux notations  $h_+$  et  $h_-$  du chapitre 4.

### 7.1.2 Conséquence sur les ouvertures locales

Puisque les modes de Fourier de grande échelle des deux surfaces sont identiques, le champ des ouvertures  $d(x, y) = h_+(x, y) - h_-(x, y) + d_m$  est auto-affine jusqu'à l'échelle  $L_c$  seulement. Sur la figure 3, page 219, on a représenté entre autres les spectres de Fourier 1D des deux topographies initiales (avant mélange des spectres), et le spectre du champ des ouvertures correspondant,  $d$ . Sur cette figure, on a noté  $d^*$  le champ des ouvertures obtenu après application de l'ajustement aux grandes longueurs d'onde, pour  $L_c = L/4$ . La limitation de l'auto-affinité du spectre aux échelles inférieures à  $L_c$  est manifeste. Un tel spectre correspond aux spectres des surfaces numériques engendrées à l'aide de l'algorithme proposé par Brown (1995b).

Sur la figure 7, page 225, on a représenté, outre deux profils issus de topographies non ajustées (a) et ajustées à  $L_c = L/2$ , les profils des champs des ouvertures correspondants. Pour une même amplitude  $\sigma$  des topographies rugueuses en regard, l'amplitude  $\Gamma$  du champ des ouvertures locales dépend fortement de l'échelle de corrélation  $L_c$ . Dans le cas (b), qui correspond à un spectre du même type que le spectre libellé  $d^*$  à la figure 3, page 219, le champ des ouvertures a des hétérogénéités d'échelles supérieures à  $L_c$  réduites. Par suite, son amplitude est grandement réduite par rapport à l'amplitude du champ des ouvertures dont un profil est représenté à la figure 7(a), page 225.

### 7.1.3 Ajustement des surfaces et approximation de lubrification

En présence d'un ajustement des topographies aux grandes longueurs d'onde, la relation (6.13) devient

$$s(a) \sim l_c^{\zeta-1} \frac{a}{l_c} \frac{\Delta d(L)}{L_c^\zeta} \quad , \quad (7.1)$$

où  $\Delta d(L)$  est l'extension verticale de la rugosité du champ des ouvertures à l'échelle  $L$ . Par ailleurs, l'écart-type  $\Gamma$  du champ des ouvertures suit une loi d'échelle du type  $L_c^\zeta$ , tandis que l'écart-type de la rugosité des surfaces suit une loi d'échelle de la forme  $L^\zeta$ , de sorte que

$$\Delta d(L) \sim \Delta h(L) \left( \frac{L_c}{L} \right)^\zeta \quad . \quad (7.2)$$

Combinée à l'équation (7.1), la relation (7.2) conduit à la condition (6.13) que l'on avait obtenue dans le cas de deux surfaces non corrélées.

Pour un surface donnée (amplitude de la rugosité fixée, échelles  $L$  et  $L_c$  fixées), l'approximation de lubrification limite supérieurement la taille  $N$  de la grille que l'on peut utiliser pour simuler l'écoulement dans la fracture. La limite supérieure pour  $N$  est indépendante de la longueur de corrélation  $L_c$ . En d'autres termes, l'introduction dans le modèle de la longueur de corrélation  $L_c$  pour quantifier l'ajustement des surfaces aux grandes longueurs d'onde ne modifie pas les conclusions du paragraphe 6.1.1.

## 7.2 Influence de l'ajustement des surfaces sur l'ouverture hydraulique des fractures

Pour étudier l'influence de la longueur de corrélation  $L_c$  sur l'écoulement, nous définissons des *familles de surfaces numériques*, qui correspondent chacune à l'utilisation d'une semence

numérique donnée. Les différentes fractures de chaque famille diffèrent par la valeur du rapport  $L_c/L$ ; chaque valeur de ce rapport correspond à une fracture de la famille. La variabilité dans les ouvertures hydrauliques des fractures d'une même famille exprime l'influence sur l'écoulement de l'ajustement des topographies.

Pour une ouverture moyenne et une amplitude de la rugosité des surfaces fixées, deux effets liés à la longueur de corrélation vont se superposer. En premier lieu, une diminution systématique de l'amplitude  $\Gamma$  des fluctuations du champ des ouvertures va intervenir, en vertu de la relation (7.2), quand la longueur de corrélation diminuera. La rugosité du champ des ouvertures deviendra moins importante vis-à-vis de l'ouverture moyenne de la fracture; c'est ce qu'on observe sur les profils de la figure 7, page 225. À ouverture moyenne normalisée par l'amplitude de la rugosité ( $d_m/\sigma$ ) fixée, cet effet systématique aura toujours tendance à faire tendre le comportement de la fracture vers celui d'un modèle de Poiseuille plan, quand le rapport  $L/L_c$  deviendra grand. En second lieu, la disparition des hétérogénéités à l'échelle de la fracture va rendre difficile l'existence de chenaux privilégiés pour l'écoulement, à travers la fracture toute entière [Méheust et Schmittbuhl, 2001b].

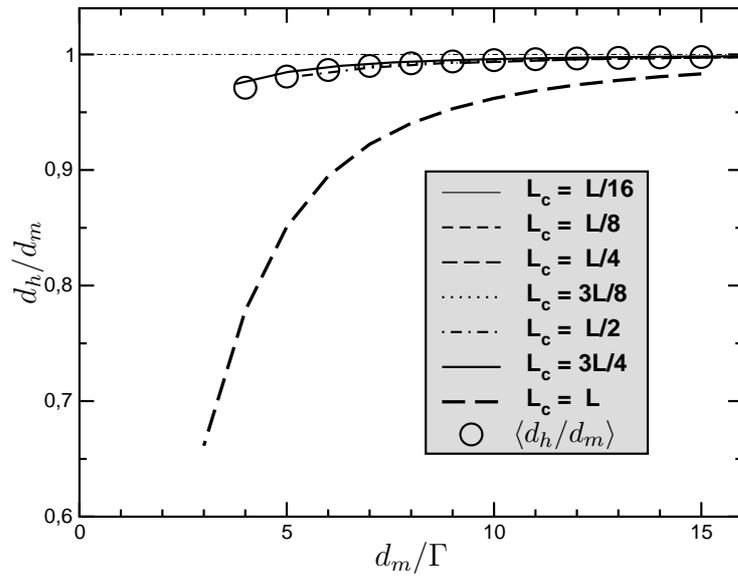
### 7.2.1 Étude de deux familles de fractures particulières

On s'est intéressé à deux familles de fractures générées sur des grilles de  $2048 \times 2048$  points. La première, libellée A, correspond à une fracture très défavorable à l'écoulement pour  $L_c = L$ ; la seconde, libellée B, correspond à une fracture à  $L_c = L$  plus perméable qu'une fracture lisse de même ouverture mécanique.

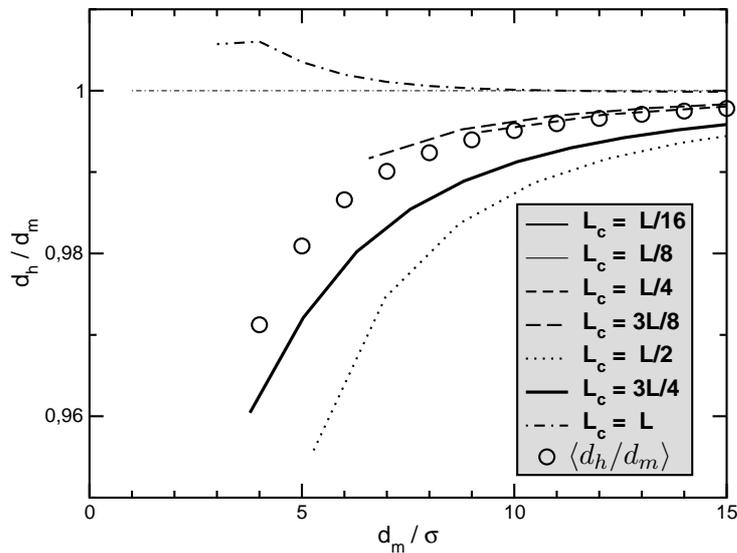
Les ouvertures hydrauliques des fractures de la famille A sont présentées à la figure 8 de l'annexe, page 229. La figure 8(a) montre l'évolution du rapport  $d_h/d_m$  en fonction de l'ouverture moyenne normalisée  $d_m/\sigma$ , pour différentes valeurs du rapport  $L_c/L$  : 1/16, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1. La figure 8(b) présente l'évolution du rapport  $d_h/d_m$  en fonction de  $L_c/L$ , pour différentes valeurs de l'ouverture moyenne entre 3.0 et 9.0, par pas de 1.0. Pour chaque fracture de la famille, l'évolution de l'ouverture mécanique avec l'ouverture moyenne est cohérente avec ce qui a été observé au chapitre précédent. Lorsqu'on regarde l'évolution de l'ouverture hydraulique avec le rapport  $L_c/L$ , pour une ouverture moyenne fixée, on constate que l'écart à la loi cubique (représentée par la ligne horizontale  $d_h/d_m = 1$ ) chute brutalement entre les valeurs  $L_c/L = 1$  et  $L_c/L = 3/4$ . La perte de chenaux d'écoulements privilégiés à l'échelle de la fracture renforce l'effet systématique de diminution de  $\Gamma$  et entraîne cette sensibilité critique à la valeur de  $L_c$ .

Les mêmes types de graphes que ceux de la figure 8, page 229, sont présentés à la figure 9, page 230, pour la famille de fractures libellée B. La fracture correspondant à  $L_c = L$  exhibe une transmissivité supérieure à la prédiction de la loi cubique. Quand on annule les hétérogénéités de grande longueur d'onde de la fracture ( $L_c/L = 3/4$ ), on perd ce caractère favorable de l'écoulement, qui est lié à la présence d'un chenal d'écoulement préférentiel, dans la bonne direction; la transmissivité de la fracture correspondant à  $L_c/L = 3/4$  résulte d'une compétition entre l'effet de réduction systématique de  $\Gamma$ , et l'effet plus subtil de réorganisation des chemins privilégiés d'écoulements dans la fracture.

La figure 7.1(a) correspond à la figure 8(a), page 229, mais où l'ouverture moyenne est normalisée, non pas par l'écart-type  $\sigma$  de la rugosité, mais par l'écart-type  $\Gamma$  du champ des ouvertures. On s'affranchit ainsi de l'effet systématique de réduction de  $\Gamma$ . La chute brutale de l'écart à la loi cubique quand on supprime les hétérogénéités de grande échelle du champ des ouvertures est ici uniquement liée à la redistribution de la chenalisation de l'écoulement dans la fracture. On a rajouté sur la figure, sous la forme de cercles blancs, le comportement moyen d'un grand nombre de fractures statistiquement équivalentes, qui a été calculé au paragraphe



(a) Évolution de l'ouverture hydraulique avec l'ouverture moyenne normalisée par l'écart-type du champ des ouvertures, pour différentes fractures de la famille A. Cette courbe correspond à la figure 8(a), page 229 ; mais l'ouverture moyenne est normalisée différemment.



(b) Figure identique à 7.1(a), mais pour la famille B. Cette courbe correspond à la figure 9(a), page 230 ; mais l'ouverture moyenne est normalisée différemment.

FIG. 7.1 – Évolution de l'ouverture hydraulique avec l'ouverture moyenne normalisée par l'écart-type du champ des ouvertures, pour différentes fractures des famille A et B. Quand on diminue l'échelle de corrélation, les fractures des deux familles tendent vers le comportement moyen calculé au paragraphe 6.3.2, que l'on a représenté par des cercles.

6.3.2. On a vu que ce comportement était indépendant des corrélations spatiales du champ des ouvertures. Ici, les cercles blancs se superposent de façon saisissante avec les courbes relatives aux petites valeurs de  $L_c$ . Cela signifie qu'en corrélant les surfaces aux grandes longueurs d'onde, la chenalisation se trouve contrôlée par des hétérogénéités de petite échelle, plus nombreuses, et qui n'introduisent pas d'anisotropie du champ des ouvertures à l'échelle à laquelle on mesure l'ouverture hydraulique. En conséquence, le comportement observé pour  $L_c/L$  sensiblement plus petit que 1 est le même pour toutes les fractures. Il coïncide avec le comportement moyen d'un grand nombre de fractures telles que  $L_c = L$ , indépendantes. On s'attend donc à ce que la famille de fractures B converge de la même façon vers le comportement moyen, bien que les comportements hydrauliques des fractures A et B à  $L_c = L$  soient antithétiques. C'est bien ce qu'on observe à la figure 7.1(b).

### 7.2.2 Étude statistique sur un grand nombre de fractures

On a calculé les ouvertures hydrauliques de 500 fractures indépendantes, générées sur une grille de  $256 \times 256$  points avec le même rapport  $L_c/L$ . Le comportement moyen des 500 fractures et les fluctuations de la statistique sont présentés en fonction du rapport  $L_c/L$  aux figures 11(a) et (b), page 232, respectivement. Les calculs ont été menés pour différentes valeurs du rapport  $L_c/L$ . Ils mettent en évidence une diminution très sensible des fluctuations de la statistique pour  $L_c/L < 1$ .

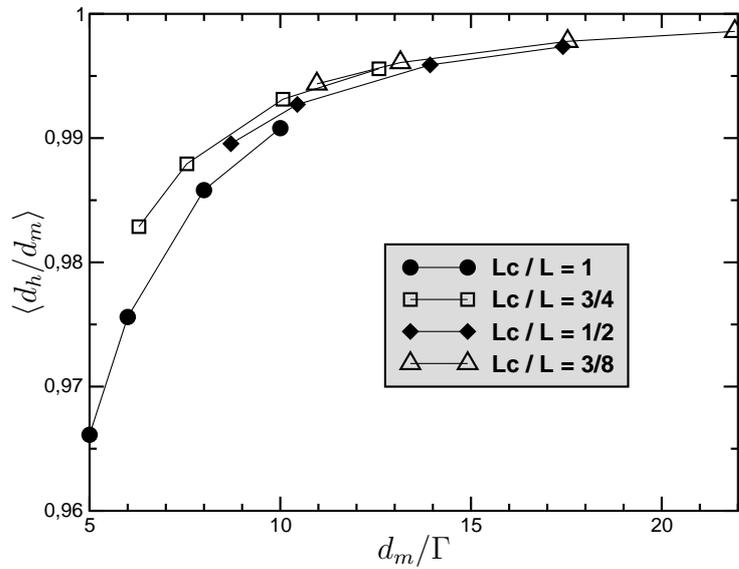
Comme au paragraphe précédent, on a discriminé l'effet systématique sur  $\Gamma$  en traçant les résultats pour les différentes valeurs du rapport  $L_c/L$  en fonction de l'ouverture normalisée par  $\Gamma$  (figure 7.2). La figure 7.2(a) montre que le comportement moyenné sur la statistique ne dépend pas du rapport  $L_c/L$ . Cette observation est cohérente avec ce que l'on a observé pour les familles de fractures A et B, dans la limite où  $L_c/L \ll 1$  : le comportement de ces familles tend alors vers le même comportement moyen, qui est le même pour toutes les familles de fractures, et coïncide en particulier avec le comportement moyen des fractures telles que  $L_c = L$  (cf. figure 7.1). Par ailleurs, on constate sur la figure 7.2(b) que les fluctuations d'ouverture hydraulique au sein de la population de fractures tendent vers 0 quand  $L_c/L$  diminue sensiblement. Cette observation est également cohérente avec ce qui a été dit au paragraphe 7.2.1 : dans la limite où  $L_c/L$  est petit, toutes les familles de fractures se comportent de la même façon.

### 7.2.3 Influence sur le comportement d'une fracture quand on fait varier l'orientation du gradient de pression effectif

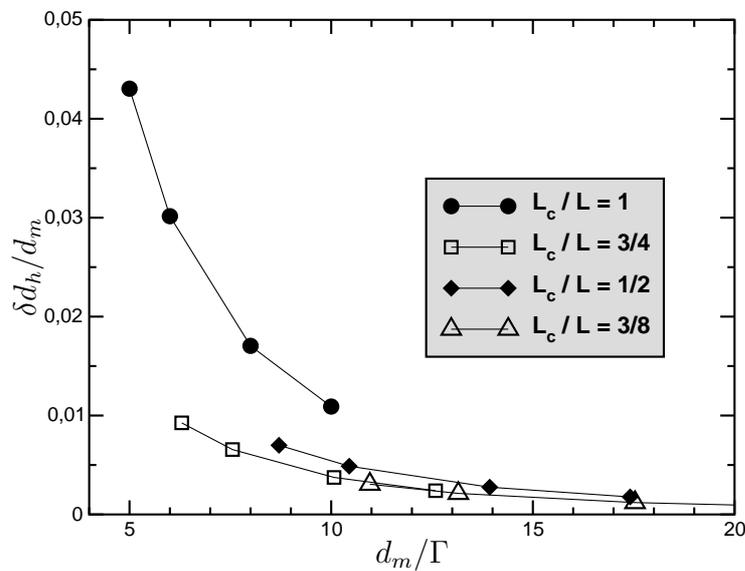
On a étudié au paragraphe 6.2.3 la sensibilité de l'ouverture hydraulique d'une fracture dont les parois sont non corrélées, vis-à-vis de toutes les orientations  $\alpha$  possibles du gradient de pression effectif. On a notamment montré qu'il était possible de définir une ouverture hydraulique  $d_h(\alpha)$  dont la dépendance vis-à-vis de  $\alpha$  est sinusoïdale (voir aussi la figure 13, page 234). On s'est intéressé à la dépendance de l'amplitude des fluctuations sinusoïdales vis-à-vis du rapport  $L_c/L$ . La figure 14, page 235, présente les résultats de cette étude. Pour toutes les raisons déjà évoquées aux deux paragraphes précédents, l'amplitude des fluctuations tombe à moins 5 % de sa valeur maximale dès que  $L_c/L < 1$ . On peut se reporter à la page 235 pour plus de précisions.

## Conclusion et discussion

L'ajustement des topographies rugueuses des deux parois de la fracture aux grande longueurs d'onde a pour effet de réduire la variabilité du comportement hydraulique d'un grand nombre de



(a) Évolution du comportement moyen  $\langle d_h/d_m \rangle$  en fonction de l'ouverture moyenne normalisée par l'écart-type du champ des ouvertures. Ces résultats sont exposés sous une autre forme à la figure 11(a), page 232.



(b) Évolution des fluctuations (écart-type) de la statistique sur  $d_h/d_m$  en fonction de l'ouverture moyenne normalisée par l'écart-type du champ des ouvertures. Ces résultats sont exposés sous une autre forme à la figure 11(b), page 232.

FIG. 7.2 – Étude statistique sur 500 fractures statistiquement équivalentes ; le calcul a été effectué pour différentes valeurs du rapport  $L_c/L$ . Le comportement moyen de la statistique de fracture ne dépend pas de l'ajustement des fractures. En revanche, les fluctuations de la statistiques tendent vers 0 quand la taille de la fracture devient grande par rapport à l'échelle de corrélation des parois rugueuses.

fractures, ou la sensibilité de la perméabilité d'une fracture unique à l'orientation du gradient de pression effectif. Dans la limite où la longueur de corrélation entre les deux parois est sensiblement plus petite que la taille de la fracture, toutes les fractures ont le même comportement, qui ne dépend plus de leur orientation, et qui correspond au comportement moyen étudié au chapitre précédent.

On devrait s'attendre à ce que ce comportement asymptotique corresponde au comportement observé par les expérimentateurs qui ont utilisé des fractures naturelles, aux surfaces bien ajustées. En fait, le comportement asymptotique que nous observons n'est pas correctement ajusté par une loi du même type que (4.29), par exemple. La faute peut en incomber aux incertitudes expérimentales. Mais il faut remarquer que notre comportement asymptotique a été calculé pour des fractures suffisamment ouvertes, pour lesquelles l'approximation de lubrification est valable. Dans le cas d'une fracture aux parois bien ajustées, le contact entre les deux parois ne se fait pas avant une fermeture de la fracture beaucoup plus importante que les ouvertures considérées dans notre étude. Aux très petites ouvertures, l'écoulement donne lieu à une chenalisation qui se développe autant dans la 3<sup>e</sup> dimension que dans le plan de la fracture [Cook, 1992]. Dans ces configurations, l'approximation de lubrification n'est plus valable. Les résultats expérimentaux obtenus par Nicholl et al. (1999) dans une configuration où les parois de la fracture sont bien ajustées confirment ces arguments, en montrant que l'erreur sur la perméabilité de la fracture lorsqu'on simule l'écoulement en utilisant l'équation de Reynold est d'au moins 25 %. L'étude récente de Drazer et Koplik (n.d.) correspond à la limite où  $L_c = 0$ , c'est-à-dire que les deux parois rugueuses en regard sont parfaitement identiques. Une telle configuration traitée par l'équation de Reynolds serait équivalente à une configuration de Poiseuille plane. Au contraire, notre comportement asymptotique correspond à la limite où  $L_c/L$  tend vers 0, mais avec  $L_c/a$  fini. La simulation de gaz sur réseau utilisée par Drazer et Koplik (n.d.) montre que dans la limite des très petites ouvertures, le comportement observé est cohérent avec les résultats fournis par des approches de milieu effectif.

**Annexe : Scale effects for flow through rough fractures**

Article sous presse à *Pure and Applied Geophysics*

## Scale effects related to flow in rough fractures

Y. Méheust and J. Schmittbuhl

**Abstract.** *A numerical fracture flow simulation based on the lubrication approximation is used to investigate the influence of roughness on the flow inside a rough fracture, at low Reynolds number. Facing surfaces are described as self-affine topographies with identical roughness magnitude. Resolution of the Reynolds equation is achieved using two distinct numerical schemes, with consistency. Fracture closure is studied assuming perfect plastic contact between facing surfaces. Long range correlations are shown to exist in the local aperture field due to the fracture geometry and subsequently in the local fluxes inside the fracture. Flow channeling is the result of these correlations in terms of spatial distribution of the flow, and is responsible for either flow-enhancing or flow-inhibiting behavior of the fracture. Matching between the two surfaces at scales larger than a mismatch scale is studied. The mismatch scale is the upper limit scale for the local apertures scale invariance. It appears to control flow channeling and the related dispersion of the possible behaviors over a large statistics of fractures with identical statistical features. Hydraulic anisotropy of a given fracture is investigated: the dependence of the fracture transmittivity on the pressure drop orientation is proved to be sinusoidal, with an amplitude that is controlled by the mismatch scale.*

### 1 Introduction

Flow in crustal rocks with a low permeability is controlled by the hydraulic behavior of the fracture networks they contain [Bear, Tsang and de Marsily 1993, Sahimi 1993]. Two characteristics of the fracture network control the rock permeability: the fracture connectivity [Berkowitz and Adler 1998], and the permeability of individual fractures. The present work is focused on the latter feature.

The permeability of a fracture depends both on the fracture mean opening and the geometry of the facing surfaces. A number of experimental analyses, both on synthetic [Schmittbuhl, Schmitt and Scholz 1995, Bouchaud 1997, Boffa, Allain and Hulin 1998] and natural fractures [Brown and Scholz 1985, Schmittbuhl, Gentier and Roux 1993], show that fracture surface topographies are rough and exhibit scale invariance over a large range of wavelengths. These fluctuations of the geometric boundaries imposed to flow can have a strong influence on the permeability of the fracture. For fracture separations large in comparison to the vertical extent of roughness, the simple model of a parallel

plate with an aperture equal to the fracture mean opening  $d_m$  provides a good estimate for the fracture permeability. The volumetric flow  $\mathbf{Q}$  through the fracture is proportional to the macroscopic pressure gradient,  $\overline{\nabla P}$ , by a factor that is a cubic law of the fracture opening [Iwai 1976, Cook 1992, Zimmerman and Bodvarsson 1996]:

$$\mathbf{Q} = -L_y \frac{d_m^3}{12\eta} \overline{\nabla P} \quad , \quad (1)$$

where  $L_y$  is the dimension of the fracture transverse to flow, and  $\eta$  is the fluid viscosity. For fractures that are close to surface contact, Equation (1) still holds under the condition that the mean aperture  $d_m$  be replaced by another characteristic parameter, the hydraulic aperture  $d_h$ . The latter is the opening of a parallel plate with a permeability equal to that of the rough fracture. The deviation of  $d_h$  from  $d_m$  accounts for the difference between the permeability of the fracture and that of a parallel plate with identical mean opening. Thus it is an estimate of the influence of fracture wall geometry on fracture flow.

The effect of roughness on fracture flow has been studied in terms of fracture permeability in a number of experimental works [Durham and Bonner 1994, Durham 1997, Yeo, Freitas and Zimmerman 1998]. Recent studies also provide an experimental description of the flow paths [Brown, Caprihan and Hardy 1998, Dijk, Berkowitz and Bendel 1999]. The relation between local features of the flow inside the fracture and the permeability at the fracture scale has been studied using numerical finite difference simulations based upon the Reynolds equation (see section 2.3) [Brown 1987, Brown 1989, Thompson 1991, Thompson and Brown 1991, Amedei and Illangasekare 1994]. The validity of this equation has been discussed using a comparison with results from a lattice-gas automaton [Brown, Stockman and Reeves 1995], from a complete 3D simulation of the flow [Mourzenko, Thovert and Adler 1995], and by comparing experimental measurements and numerical results obtained by application of the Reynolds equation to a recording of the experimental geometry [Nicholl, Rajaram, Glass and Detwiler 1999]. Models based on electrical analogs have also been developed [Tsang 1984, Moreno, Tsang, Tsang, Hale and Neretnieks 1988].

In a previous work [Méheust and Schmittbuhl 2000], we had presented an experimental study of the flow through a plane-rough fracture model, which exhibited a strong hydraulic anisotropy. Anisotropy of the smooth-rough fracture behavior toward flow has been explained in terms of channeling in a complementary work [Méheust and Schmittbuhl 2001], and related to the long range correlations in the local apertures at the fracture scale, using a numerical model based on the lubrication approximation. We present here the model of a fracture made of two rough surfaces of identical vertical extent, allowing moderate plastic contact between them, and using the same method for simulating fracture flow as in [Méheust and Schmittbuhl 2001]. We show that in the limit of slow viscous flows, this configuration is equivalent to that studied experimentally in [Méheust and Schmittbuhl 2000]. We demonstrate how long range

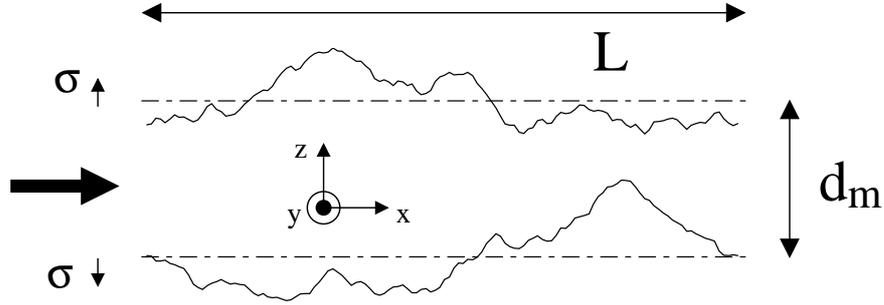


Figure 1: Geometry of the model. The mean fracture separation, or mechanical aperture, is denoted  $d_m$ ;  $h_u$  and  $h_l$  denote the local fluctuations of the rough topographies with respect to their respective mean planes. Distributions  $h_u$  and  $h_l$  have identical root mean square,  $\sigma$ . The horizontal extent of the fracture is  $L \times L$ . The large arrow denotes the direction of the flow.

correlations existing in the local apertures are transmitted to the local fluxes inside the fracture, which results in flow channeling. For facing surfaces that are matched at large scales, we show how the latter phenomenon is controlled by local aperture fluctuations at the mismatch length scale.

## 2 A numerical Model for the flow between two rough walls

### 2.1 Geometry of the model

We consider a fracture made of two rough walls with parallel horizontal mean planes. The latter are separated by the mean fracture separation, or mechanical aperture,  $d_m$ . Local fluctuations of the rough topographies with respect to their respective mean planes are denoted  $h_u(x, y)$  (upper surface) and  $h_l(x, y)$  (lower surface) respectively, where  $(x, y)$  denotes the position on the horizontal grid. We assume that the height distributions  $h_u$  and  $h_l$  have the same root mean square,  $\sigma$ , which accounts for the vertical extent of the rough topographies. The fracture projection on its horizontal mean plane is assumed to be square, of lateral length  $L$ . A steady state flow is forced between two of its parallel sides. A sketch of the model is shown in Figure 1.

#### 2.1.1 Model for the rough wall topographies

In good agreement with a number of measurements on artificial [Schmittbuhl, Schmitt and Scholz 1995, Bouchaud 1997] and natural [Schmittbuhl et al. 1993, Bouchaud 1997] rock fracture surfaces, we describe each rough surface as an isotropic self-affine fractal. The probability for two points of the topography with horizontal positions distant by  $l$  to have altitudes different by a vertical length in the interval  $[h; h + dh]$  is  $\mathcal{P}(h, l) dh$ , where the density probability

function  $\mathcal{P}$  can be written as

$$\mathcal{P}(h, l) = l^{-\zeta} \Phi\left(\frac{h}{l^\zeta}\right) \quad , \quad (2)$$

where  $\Phi$  is an appropriate scaling function [Schmittbuhl, Schmitt and Scholz 1995]. The Hurst exponent  $\zeta$  accounts for the scale invariance of the topography: a sub-part of the surface of lateral size  $L/\alpha$  is statistically identical to the whole surface, provided that the vertical axis be rescaled by  $\alpha^{-\zeta}$ . Exponent  $\zeta$  has been chosen to be 0.8, a value that has been proposed as universal [Bouchaud, Lapasset and Planès 1990].

Such a two dimensional topography exhibits long range spatial correlations. Its 2D Fourier spectrum has an amplitude that scales as a power law of the wave number with an exponent  $-2(1 + \zeta)$  [Schmittbuhl, Schmitt and Scholz 1995]. We assume its phase to be random. We generate suitable topographies  $h_i$  in the Fourier domain: distributions with no spatial correlations are first generated using a gaussian probability density function. Correlations are then introduced by multiplying their Fourier modes by the power law  $(k_x^2 + k_y^2)^{-(1+\zeta)/2}$ , where  $k_x$  and  $k_y$  stand for the components of the two-dimensional wave vector corresponding to the mode in question.

## 2.2 Characteristics of the local apertures

Local apertures inside the fracture are defined as

$$d(x, y) = d_m + h_u(x, y) - h_l(x, y) \quad . \quad (3)$$

Due to the linearity of the Fourier transform, the self-affinity of the rough topographies results in the local apertures field also being an isotropic self-affine fractal (see Appendix A). Its root mean square  $\Gamma$  only depends on the root mean square of the boundary surfaces,  $\sigma$ , and not on the mean aperture  $d_m$ . For example, if the height distributions  $h_i$  are perfect gaussian,  $\Gamma$  is  $\Gamma = \sqrt{2}\sigma$ . Thus,  $\Gamma$  and  $\sigma$  are two parameters that can be used equivalently when comparing the extent of local aperture fluctuations to the mean aperture. In what follows, we use the root mean square of the surfaces,  $\sigma$ .

## 2.3 Stokes flow and lubrication approximation

We consider a steady state flow where viscous forces dominate inertial effects, i. e with a low Reynolds number:  $\mathcal{Re} \ll 1$ . In addition, we assume the lubrication approximation, according to which local apertures are slowly varying within the fracture, that is,  $\|\nabla d\| \ll 1$ . Under these assumptions, the flow through the system can be studied by use of a two-dimensional equivalent system, where the 2D local velocities are the local fluxes inside the fracture:  $\mathbf{q} = \int_{d(x,y)} \mathbf{v} dz$ , and are related to local apertures through a local cubic law identical to (1)

[Zimmerman and Yeo 2000, Méheust and Schmittbuhl 2001].

$$\mathbf{q} = -\frac{d^3(x, y)}{12\eta} \nabla P \quad . \quad (4)$$

The pressure field  $P$  inside the fracture, and subsequently, local fluxes, can be obtained through the Reynolds equation, which is simply the conservation equation for the conservative two-dimensional velocity field  $\mathbf{q}$ :

$$\nabla \cdot (d^3(x, y) \nabla P) = 0 \quad . \quad (5)$$

An important consequence of this approximation is that  $P$  is derived from the only knowledge of the local apertures, whatever may be the rough surfaces responsible for it. Flow lines can also be obtained using a stream function, as explained in [Méheust and Schmittbuhl 2001].

For local apertures that are self-affine up to the fracture scale,  $L$ , the typical local slope along local apertures,  $s$ , estimated using the smallest scale described in the model,  $l_c$ , scales as [Méheust and Schmittbuhl 2001]

$$s(l_c) \sim l_c^{\zeta-1} \frac{\Gamma}{L^\zeta} \quad , \quad (6)$$

where  $\Gamma$  is the root mean square of the local aperture field, or, equivalently,

$$s(l_c) \sim l_c^{\zeta-1} \frac{\sigma}{L^\zeta} \quad , \quad (7)$$

where  $\sigma$  is the root mean square of the rough topographies. Relation (7) diverges with decreasing  $l_c$  (since  $\zeta = 0.8$ ). The lubrication approximation requests that  $s(l_c)$  be much smaller than 1. For a given fracture, i.e, fixed  $\sigma$  and  $L$ , it imposes a lower limit to parameter  $l_c$ , i. e., to the self-affine description. From the numerical point of view, it imposes an upper limit to the size  $N$  of the grid used for sampling local apertures:  $N = L/l_c$ .

## 2.4 Numerical techniques

We use two independent finite difference schemes to solve Equation (5). They are described in details in [Méheust and Schmittbuhl 2001].

The first method is based on the inversion of the linear system that associates the local aperture values at the nodes of the grid to those of the pressure field. The inversion scheme is based on a biconjugate gradient method. This scheme can be used with any kind of boundary conditions (periodic, semi-periodic, no-flow lateral boundaries), and allows values of the local apertures very close to or equal to 0.

The second one is a perturbation method developed by Plouraboué, Hulin, Roux and Koplik (1998). It requires periodic boundary conditions, and allows a continuous rotation of the pressure head with respect to the fracture (see [Méheust and Schmittbuhl 2001]). It uses FFT algorithms, which makes it

much faster than the inversion method. From a theoretical point of view, the perturbation method cannot converge for fractures that are very close to surface contact (see [Méheust and Schmittbuhl 2001] for the convergence criterion).

For configurations where they are both efficient, the two methods provide results that are different by no more than  $10^{-5}$ . In what follows, we have used periodic boundary conditions in order to be able to use one method or the other alternatively. The spectral method was used preferentially. In cases where it was not appropriate, the biconjugate gradient method was used.

We have used various grid sizes in these simulations, ranging from 256 to 2048. When simulating a fracture with a given size,  $L$ , increasing the grid size means diminishing the smallest scale considered in the simulation,  $l_c$ . Large grid sizes allow a more precise description of local flow features. However, as shown in section 2.3, the maximum possible value for the grid size is limited by the lubrication approximation. All grid sizes used throughout the study meet this upper limit requirement. On the other hand, small scale features do not contribute significantly to the fracture permeability as long as the ratio between  $L$  and  $l_c$  is as large as 256, a condition that is always met in our simulations. Within this range of allowed  $N$  values, relatively small grid sizes have been used for the statistical studies, to gain computation time.

### 3 Characterizing correlations along local apertures and fluxes

As mentioned in section 2.1.1, our synthetic rough fracture surfaces display isotropic long range correlations that result in their Fourier power spectrum scaling as a power law of the wave number. As a consequence, the local apertures exhibit similar spectral features (see Appendix A). In order to check this, and also to examine whether local fluxes also display long range correlations, we use three methods.

Computing the 2D Fourier spectrum of a distribution provides a way of determining whether the distribution is isotropic or not. A cylindrical shape of the 3D representation of the spectrum denotes isotropy. If so, the spectrum can be averaged over all directions in the Fourier space to obtain its dependence on the wave number. A self-affine behavior is detected as a power law with an exponent  $-2(1 + \zeta)$  (see Figure 6).

Two methods are carried out on linear profiles extracted from the two dimensional distributions. The results are averaged over many profiles to improve the accuracy. These methods only examine correlations along a given direction. They are used for examining correlations along distributions that are known to be isotropic, for example for determining the Hurst exponents of self-affine fractal distributions. One method consists in computing the 1D Fourier spectrum of the profiles. An isotropic self-affine distribution exhibits a power law with an exponent  $-1 - 2\zeta$  [Schmittbuhl, Vilotte and Roux 1995], as shown in Figure

3. The other method is the average wavelet coefficient method, which consists in computing the wavelet transform of the profiles and averaging it over all possible values for the translation parameter [Simonsen, Hansen and Magnar Nes 1998]. The curve obtained for a self-affine distribution is a power law with an exponent  $\zeta + 1/2$ . The two methods are used in parallel for consistency.

All methods have been tested successfully on numerically generated distributions. They have also been used successfully to analyse recordings of granite fracture surfaces (see [Méheust and Schmittbuhl 2000]).

## 4 Closure of a rough fracture

In this chapter, we consider a fracture with two independent rough topographies generated on a  $512 \times 512$  grid. We vary the ratio  $d_m/\sigma$  and observe how the flow evolves as the vertical extent of roughness increases relative to the fracture separation.

In contrast to a number of works that considered elastic surface contact [Unger and Mase 1993, Mourzenko, Galamay and Thovert 1997, Tsang and Witherspoon 1981], we allow fracture closure to go beyond surface contact by assuming perfect plastic contacts: parts of the rough topographies that overlap each other simply vanish [Brown 1987]. Thus, all local apertures that relation (3) would define as negative are set to zero. The overall area of the contact zones,  $S_c$ , is kept smaller than 10% of the grid surface,  $L^2$ . When contact occurs, some of the fluctuations in the local apertures are lost, which results in a decrease of the root mean square of the local apertures,  $\Gamma$ . This change is always smaller than 5%.

### 4.1 Evolution of the local apertures

In Figure 2.a, maps of the local apertures  $d(x, y)$ , normalized by the mean fracture separation,  $d_m$ , are drawn for different values of  $d_m/\sigma$ : 14.0, 8.0, 6.0, 4.0, and 3.0, from top to bottom. Black shading indicates closed areas ( $d = 0$ ). Brighter shading denotes larger apertures. The same linear gray scale is used for all maps, which allows a visual comparison between them. A uniform gray scale denotes aperture fluctuations that are negligible in comparison to the mean aperture. As the fracture mechanical aperture is decreased (i.e, from top to bottom), the contrast of the maps grows, showing that the local aperture fluctuations increase relative to the mean aperture.

We have checked the self-affinity of the two rough topographies. One dimensional Fourier spectra computed as explained in section 3 are shown in Figure 3. The self-affine properties of the resulting local apertures for the normalized mechanical apertures 10.0, 3.0, and 2.0 are also checked in this figure. All spectra exhibit a slope of  $-2.60 \pm 0.01$ , corresponding to the roughness exponent  $\zeta = 0.8$  that has been imposed when generating the rough surfaces. The result has been

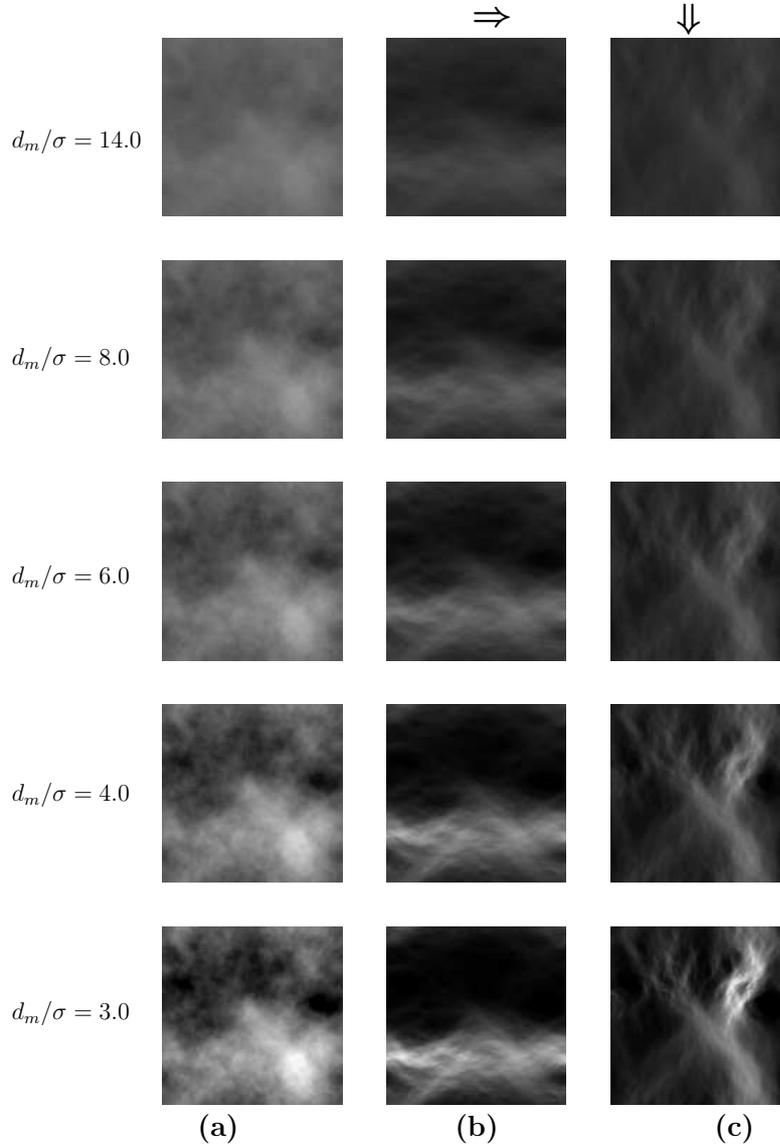


Figure 2: **(a)** Maps of the ratio  $d(x, y)/d_m$ , for  $d_m/\sigma = 14.0, 8.0, 6.0, 4.0,$  and  $3.0$  (from top to bottom). The linear gray scale is the same for all maps. The two maps for  $d_m/\sigma = 4.0$  and  $3.0$  exhibit closed areas, in black. Relative fluctuations of the aperture increase as the fracture separation is decreased. — **(b)** Maps of local fluxes (2D velocities) normalized by the mean local flux; the pressure head is applied on the corresponding aperture distribution in (a) according to the direction of the arrow above the maps; this configuration is labeled  $\Rightarrow$ . **(c)** Same as (b), with a macroscopic flow in the orthogonal direction, and a label  $\Downarrow$  — Linear gray scales are identical in (b) and (c). This makes a visual comparison of channeling in the two cases possible.

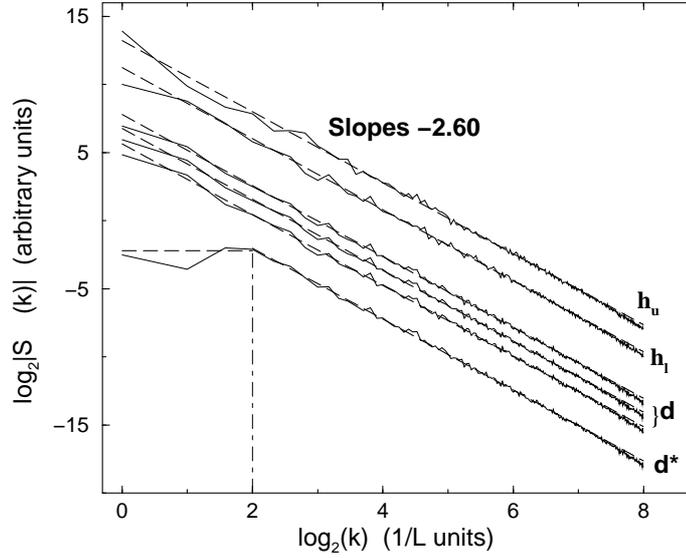


Figure 3: Fourier spectra of the rough topographies: top surface  $h_u$  and bottom surface  $h_l$ , and of the resulting local apertures,  $d$ , for three different fracture separations,  $d_m/\sigma = 10.0, 3.0$  and  $2.0$  (from top to bottom). These values correspond respectively to 0, 0.88 and 6.93% of closed area inside the fracture. The slopes all equal  $-2.60 \pm 0.01$ , thus the aperture distributions are self-affine with a Hurst exponent identical to that of the topographies:  $\zeta = 0.8 \pm 0.01$ . — The Fourier power spectrum  $S(k)$  of the local apertures ( $d^*$ ) in the case of facing surfaces that are matched at length scales larger than  $L/4$  is shown for comparison ( $d_m/\sigma = 10.0$ ). It displays the same self-affine behavior as  $d$  for wave numbers larger than  $1/L_c = 4/L$ , and is constant otherwise.

verified by use of the average wavelet coefficient method (not shown here). It is straightforward for the rough topographies. For the local apertures in an open fracture, it is also expected, as explained in 2.2 (see also Appendix A). It also holds along local apertures when a small part of the fracture is closed: the self-affinity of the surfaces is transmitted to the resulting local apertures. An important consequence is that there is no other characteristic scale available for the geometric description of the fracture than its size  $L$  itself.

## 4.2 Evolution of the hydraulic behavior

We have simulated the flow in the space between the two topographies corresponding to the aperture distributions shown in Figure 2.a for two orthogonal directions of the pressure head with respect to the fracture, labeled  $\Rightarrow$  and  $\Downarrow$ , respectively. The evolution of the ratio of the hydraulic aperture to the mean aperture  $d_h/d_m$  when varying the normalized mechanical aperture,  $d_m/\sigma$ , is shown in Figure 4. The behavior of a parallel plate model corresponds to the horizontal line  $d_h/d_m = 1$ . The hydraulic behavior of the rough fracture deviates monotonously from this ideal model as fracture separation is decreased, as

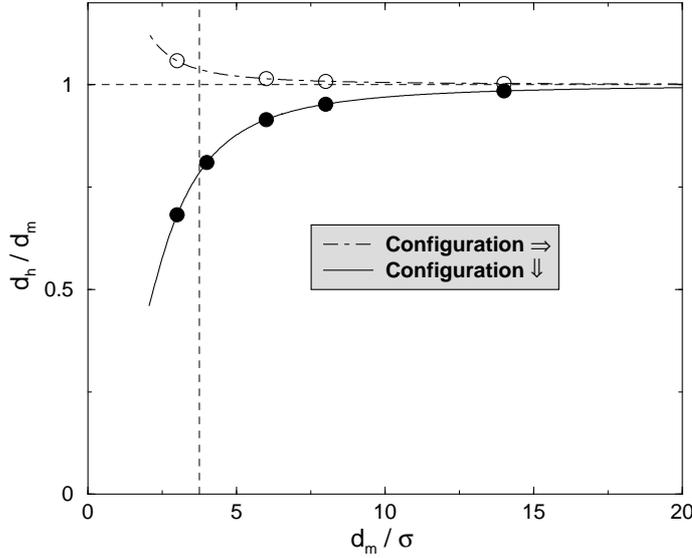


Figure 4: Evolution of the ratio of the hydraulic aperture,  $d_h$ , to the mechanical aperture,  $d_m$ , as a function of the normalized fracture separation, for the two configurations  $\Rightarrow$  and  $\Downarrow$ , corresponding to orthogonal orientations of the imposed pressure head with respect to the fracture described in Figure 2.  $d_h/d_m$  is computed for  $d_m/\sigma$  between 2 and 20, by steps of 0.05. Configuration  $\Rightarrow$  is flow-enhancing, while configuration  $\Downarrow$  is flow-inhibiting. The circles (plain and white) correspond to aperture distributions shown in figure 2.a. Maps of local fluxes corresponding to the white circles are shown in Figure 2.b. Those corresponding to the plain circles in Figure 2.c. Mechanical apertures that are on the left of the vertical dashed line correspond to plastic contact between the two surfaces.

a result of the increase of the roughness magnitude relative to fracture opening. For configuration  $\Rightarrow$ , the deviation from the parallel plate model is positive: the fracture is more conducive to flow than a parallel plate with identical mean separation (flow-enhancing behavior). For configuration  $\Downarrow$ , the deviation is negative (flow-inhibiting behavior). The decrease in the permeability of a fracture due to roughness, as displayed by configuration  $\Rightarrow$ , is a well-known effect. The possible flow-enhancing behavior exhibited by configuration  $\Downarrow$  is less obvious: the fracture can be more conducive toward flow than a smooth fracture, or less, depending on the orientation of the macroscopic pressure gradient. Such a hydraulic anisotropy has been observed experimentally for an equivalent smooth-rough fracture by Méheust and Schmittbuhl (2000).

### 4.3 Evolution of the local fluxes

In a previous work [Méheust and Schmittbuhl 2001], we have explained how this possible hydraulic anisotropy is related to flow channeling: when the protruding of roughness into the void between the rough surfaces becomes significant, flow tends to avoid regions of small local apertures, and find its way through preferential paths along tortuous large aperture channels. The existence of large

aperture channels across the whole fracture results from the long range correlations that exist along local apertures. Flow channeling grows more important as the fracture is closed. This is shown in Figures 2.b and .c, where maps of local fluxes  $q$  are shown for configurations  $\Rightarrow$  and  $\Downarrow$ , respectively. In each configuration, the maps are shown for  $d_m/\sigma = 14.0, 8.0, 6.0, 4.0, 3.0$  (from top to bottom), that is, for fracture separations considered in Figure 2.a. Local fluxes are normalized by the mean local flux, which corresponds to the local flux in the parallel plate model of identical permeability, i. e., of mechanical aperture  $d_m = d_h$ . All maps in Figures 2.b and .c are drawn using the same linear gray scale. This allows to see the increase of channeling as the fracture mean aperture is diminished (from top to bottom), and to compare flow channeling between the two configurations. In Figure 2.b, bottom map, the flow mainly uses a large aperture channel along direction  $\Rightarrow$ , that can be seen across the whole fracture in Figure 2.a (bottom map). This channel is large and oriented parallel to the applied pressure head, which constitutes a configuration much favorable to flow. This is consistent with the flow enhancing behavior observed in Figure 4 (dot-dashed line). In Figure 2.c, flow is forced to use a very narrow pass of intermediate aperture, also visible on the right of the bottom map in Figure 2.a. This is consistent with the flow-inhibiting behavior displayed in Figure 4 (plain line).

Visual inspection of Figure 2 makes clear that local fluxes and local apertures are correlated to each other. Local fluxes are the result of hydraulic boundary conditions at the fracture scale, coupled with long-range spatial correlations in the geometric boundary conditions (i. e., fracture surfaces). Thus, the distribution of local fluxes should exhibit a trace of the correlations found along local apertures. More precisely, we searched for such a trace in the field  $\delta\mathbf{q}(x, y)$  that is the deviation between the local fluxes observed inside the fracture,  $\mathbf{q}(x, y)$ , and those observed inside a parallel plate with equal permeability,  $\mathbf{q}_{pp}$  (uniform vector field). The Fourier power spectrum of the  $\|\delta\mathbf{q}\|$  field is shown in Figure 5, for a normalized aperture  $d_m/\sigma = 4.0$ , that is, very close to surface contact, and in configuration  $\Rightarrow$ . It exhibits an anisotropy that does not exist in the distribution of local apertures. The deviation of the spectrum from a cylindrical shape occurs in a small defect region along the direction of macroscopic flow (direction  $\Rightarrow$ , or along  $x$ ), or equivalently of the pressure head: the Fourier spectrum is small for wave vectors with a large magnitude and a direction close to the  $x$  direction. In other words, the field  $\|\delta\mathbf{q}\|$  exhibits few small scale fluctuations along direction  $\Rightarrow$ . This is the sign of a “close to-uniform” movement along a large aperture pathway in the direction  $\Rightarrow$  (see Figure 2.b). Away from the  $x$  axis, the spectrum goes back to a cylindrical shape. The defect region represents a small part of the whole spectrum. We have computed the average of the spectrum over all directions, assuming that the defect region does not contribute much to it. These computations have also been done for the power spectra of the components  $\delta q_x$  and  $\delta q_y = q_y$ . Corresponding curves are shown

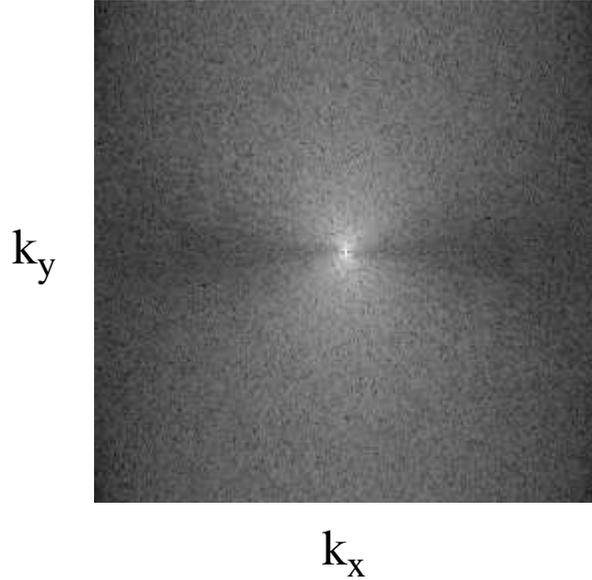


Figure 5: Map of the Fourier spectrum of  $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_{pp}\|$ , where  $\mathbf{q}_{pp}$  is the uniform field of local fluxes in the equivalent parallel plate. The fracture considered here is the same as in Figure 2. In contrast to the local aperture spectrum (not shown here), this spectrum exhibits an anisotropy of the distribution.

in Figure 6. They are power laws, which indicates long range correlations similar to those existing along local apertures. The slopes of the log-log plots are  $-3.60 \pm 0.02$  for the component of the local flux transverse to macroscopic flow,  $\delta q_y$ ,  $-3.41 \pm 0.02$  for that parallel to it,  $\delta q_x$ , and  $-3.42 \pm 0.02$  for  $\|\delta \mathbf{q}\|$ . The corresponding Hurst exponents are  $0.8 \pm 0.01$ ,  $0.70 \pm 0.01$ , and  $0.71 \pm 0.01$  for  $\delta q_y$ ,  $\delta q_x$ , and  $\delta \mathbf{q}$  respectively. This means that the self-affinity of the local aperture field is transmitted to the component of  $\delta \mathbf{q}$  transverse to the pressure head (same exponent  $0.8 \pm 0.01$ ). Long range correlations are also transmitted to the component parallel to macroscopic flow, and subsequently to the amplitude of  $\delta \mathbf{q}$ . But the resulting correlations are weaker. This is due to the contribution of the defect region mentioned above.

#### 4.4 Discussion

We see that the effect of roughness on flow results directly from its self-affinity. The long range correlations existing in the rough topographies at all scales including fracture scale also exist in the local aperture field. A consequence of this is the existence of a network of large aperture correlated paths across the whole fracture. Depending on the orientation of the macroscopic flow with respect to these channels, channeling occurs inside the fracture in a more or less favorable way. Channeling can be understood as the result of the correlations in the geometric boundary conditions imposed to flow being transmitted to

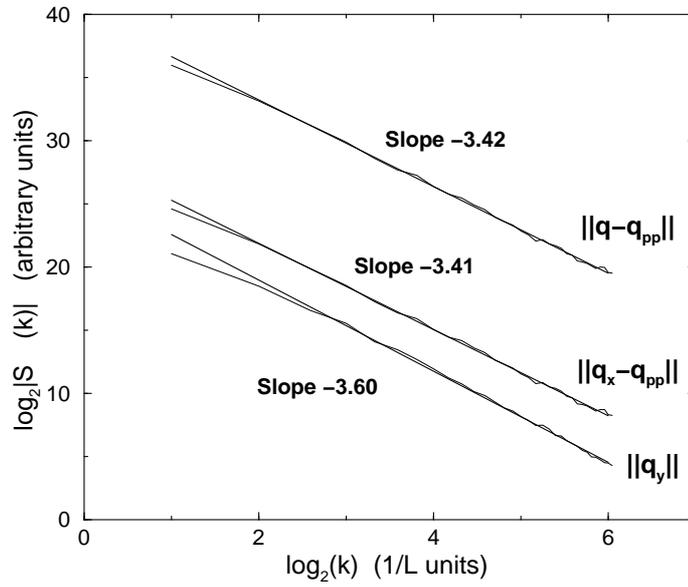


Figure 6: Average over all possible directions of two dimensional Fourier spectra for the magnitudes of vector  $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_{pp}$  and its components along  $x$  and  $y$ . Measured slopes correspond to Hurst exponents of  $0.80 \pm 0.01$ ,  $0.70 \pm 0.01$ , and  $0.71 \pm 0.01$  for  $\|\delta \mathbf{q}_y\|$ ,  $\|\delta \mathbf{q}_x\|$  and  $\|\delta \mathbf{q}\|$ , respectively. The component transverse to flow exhibits long-range correlations identical to those found in the local apertures ( $\zeta = 0.8$ ). The component parallel to flow, and subsequently, the vector  $\delta \mathbf{q}$  itself, are anisotropic. The averaging over all directions provides a power law spectrum that indicates long range correlations. But these correlations are weaker than those found along local apertures.

the flow itself. As there is no horizontal characteristic scale smaller than the fracture size for describing the geometry of the fracture, there is no such scale for describing the flow inside the fracture. An important consequence of this is that there is no homogenization scale suitable for the definition of a permeability tensor inside a rough fracture with self-affine local apertures. The hydraulic behavior is controlled by fluctuations of local apertures at all scales up to the fracture scale. Moreover, large scale fluctuations have the largest contribution to it.

What happens then if the upper limit to the local apertures self-affinity is not the fracture size  $L$ , but a scale smaller than  $L$ ? This situation occurs for real fractures when the two facing topographies are matched at large scale. This is the topic of the next section.

## 5 Influence of surface matching on hydraulic properties

Experimental studies carried out on natural fracture surfaces [Brown 1986, Glover, Matsuki, Hikima and Hayashi 1998*b*] have shown that the two surfaces composing a fracture are often matched at large scales, in the sense that they display identical large scale fluctuations, while their small scales fluctuations are uncorrelated with each other. As a consequence, and although the fracture surfaces display a Fourier spectrum with a power law behavior over the full range of length scales up to the fracture size  $L$ , local apertures have a Fourier spectrum that is a power law (i. e., self-affine) up to a critical length scale,  $L_c < L$ , and that flattens out at large scales. This mismatch scale,  $L_c$ , is the only characteristic scale smaller than  $L$  available to describe the aperture geometry. We expect it to have a strong impact on the flow.

### 5.1 Introducing surface matching into the model

Brown (1995) recently proposed a simple model for describing rough fractures with matched topographies: the Fourier spectrum of the local apertures is self-affine at scales smaller than a mismatch crossover scale,  $L_c$ , and constant at larger scales. Glover, Matsuki, Hikima and Hayashi (1998*a*) proposed a model with a continuous change from unmatched rough topographies at scales smaller than  $L_c/2$  to matched topographies at scales larger than  $L_c$ .

In our model, the topographies  $h_i$  are uncorrelated at wavelengths smaller than  $L_c$ , and display identical fluctuations for wavelengths larger than  $L_c$ . Suitable partly-matched topographies are generated in the following way. Two independent rough surfaces of identical vertical extent,  $h_u$  and  $h_l$ , are first generated (see section 2.1.1). Distribution  $h_u$  is kept unchanged. All Fourier modes of  $h_l$  that correspond to wave lengths larger than  $L_c$  are then equaled to the corresponding modes of  $h_u$ . The resulting local aperture field exhibits a Fourier spectrum similar to that presented by Brown (1995), as shown in Figure 3 for a

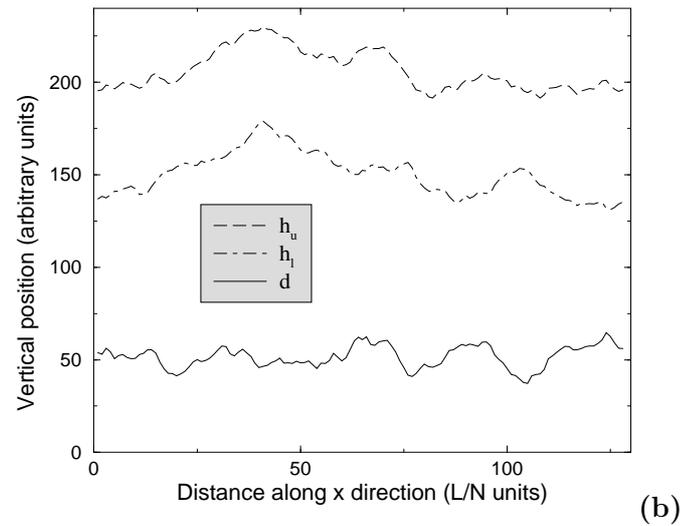
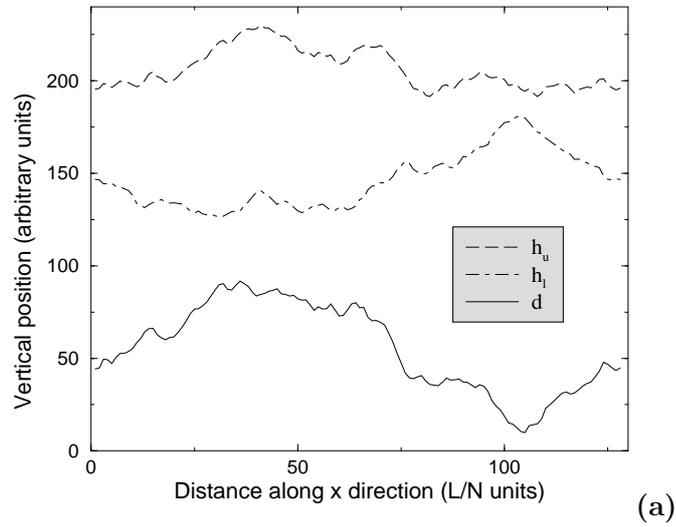


Figure 7: **(a)** Profiles extracted from two unmatched topographies  $h_u$  and  $h_l$  ( $N = 128$ ), and from the resulting local aperture distribution  $d = h_u - h_l$ ; the vertical extent of the latter field is significantly larger than those of  $h_u$  and  $h_l$  — **(b)** The rough surfaces are matched for wave lengths larger than  $L/2$ ; the profiles extracted from them have identical large scale fluctuations. Consequently,  $d$  has little fluctuations at the fracture scale, and its vertical extent is significantly reduced in comparison to **(a)**.

fracture with a mismatch scale  $L_c = L/4$ . In Figure 7, we show an example of two sets of profiles extracted from the distributions  $h_i(x, y)$  and from the corresponding local apertures  $d(x, y)$ . In Figure 7.a, the surfaces are unmatched up to the fracture size,  $L$ , while in Figure 7.b a mismatch scale exists:  $L_c = L/2$ . In the former case, the profiles extracted from the surfaces display fluctuations uncorrelated with each other at all scales. In the latter case, the large scale fluctuations of the profiles are clearly similar.

## 5.2 Surface matching and lubrication approximation

Since the upper limit for the self-affine behavior of the local apertures is  $L_c$ , the typical slope along local apertures computed using the smallest scale in the model,  $l_c$ , scales as

$$s(l_c) \sim l_c^{\zeta-1} \frac{\Gamma}{L_c^\zeta} \quad , \quad (8)$$

where  $\zeta$  is the roughness (Hurst) exponent,  $L_c$  is the mismatch scale, and  $\Gamma$  is the root mean square of the local apertures. Relation (8) is identical to relation (6), with length scale  $L_c$  replacing fracture size  $L$ .

Surface matching also implies that  $\Gamma$  scales as  $\Gamma \sim L_c^\zeta$ . The root mean square of the surface topographies scales as  $\sigma \sim L^\zeta$ . They are related through the scaling relation

$$\Gamma \sim \sigma \left( \frac{L_c}{L} \right)^\zeta \quad . \quad (9)$$

Combining Equations (8) and (9) yields Equation (7). For a given fracture, i.e. fixed  $\sigma$ ,  $L$  and  $L_c$ , the lubrication approximation imposes an upper limit value to the grid size  $N$ . This limit value is independent of possible matching between the facing surfaces.

## 5.3 Influence of surface matching on the hydraulic behavior of a fracture

In this part, we study how surface matching influences the hydraulic behavior of the fracture. For this, we vary the ratio  $L/L_c$ , while keeping the same numerical seed for the generation of the rough topographies, and the same root mean square for their height distributions. We call family of fractures a set of fractures corresponding to the same numerical seed, and that differ from each other only by the value for the mismatch scale,  $L_c$ .

At fixed normalized aperture  $d_m/\sigma$ , as  $L_c$  is lowered, two effects are expected to affect the flow between the rough surfaces. First, a systematic decrease in the amplitude of the local aperture fluctuations,  $\Gamma$ , is expected, following scaling law (9). Thus, the protruding of roughness into the void between the rough topographies is to become less important in comparison to the mean fracture separation. This effect is visible in Figure 7: the vertical extent of the local apertures in Figure 7.b is significantly smaller than what it is in Figure 7.a.

This “T effect” should always tend to bring the fracture back to a parallel plate behavior with decreasing  $L_c$ . Second, the vanishing of spatially correlated fluctuations of the local apertures at large scales is expected to significantly modify the network of preferential channels for the liquid to flow through. We study here the hydraulic behavior of two fracture families generated on a  $2048 \times 2048$  grid, with respectively a strong flow-inhibiting (family A) and a slight flow-enhancing (family B) behavior observed when  $L = L_c$ .

The hydraulic aperture of the fractures in family A is investigated in Figure 8. The evolution of the ratio  $d_h/d_m$  is shown as a function of  $d_m/\sigma$  for various values of the ratio  $L/L_c$  (1/16, 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1), in Figure 8.a, and as a function of  $L/L_c$  for various normalized apertures (from 3.0 up to 9.0 by steps of 1.0) in Figure 8.b. The hydraulic behavior of a given fracture (i. e., at fixed mismatch scale) when varying fracture separation is similar to those shown in Figure 4. At fixed mechanical aperture, the deviation from the cubic law (represented by the horizontal dot-dashed line  $d_h/d_m = 1$ ) decreases monotonously as  $L_c$  is decreased. This drop is dramatic between  $L_c = L$  and  $L_c = 3L/4$ , indicating that the loss of correlated fluctuations of  $d(x, y)$  at the fracture size has significantly diminished the strong flow-inhibiting behavior of the fracture. Here, the modifications of the preferential channels inside the fracture, when decreasing the mismatch scale, goes along the systematic “T effect”, and results in a rapid annihilation of the deviation from the parallel plate behavior.

Plots respectively identical to Figures 8.a and .b are shown in Figure 9.a and .b, for fracture family B. For  $L_c = L$ , the fracture exhibits a flow-enhancing behavior. This type of peculiar configuration that allows the permeability to be larger than that of a parallel plate with identical opening has been observed in Figure 2.b (see also Figure 4). It was observed experimentally by Méheust and Schmittbuhl (2000), and explained in terms of favorable flow channeling in [Méheust and Schmittbuhl 2001]. The latter work demonstrated that it is not the most frequent configuration when considering a statistics of independent fractures with unmatched facing surfaces, but the proportion of such configurations is far from being negligible and grows as fracture separation is decreased. We see here that the flow-enhancing configuration holds no more for  $L_c = 3L/4$ , i.e., when large scale fluctuations of the local apertures are set to 0: the fracture is flow-inhibiting for  $L_c \leq 3L/4$ . Though the “T effect” tends to make  $d_h/d_m$  evolve monotonously to 1 with decreasing mismatch scale, the change in the flow preferential paths when moving from  $L_c = L$  to  $L_c = 3L/4$  makes the deviation from the parallel plate model change sign and increase in absolute value. This fracture family exhibits a competition between the influence of the decreasing  $\Gamma$  and the more subtle effect related to the change in the main flow channels through the fracture as  $L_c$  is decreased.

Families A and B exhibit two very different dependences of their permeability on the mismatch scale. We will now investigate what is the general behavior of

a fracture family from the statistical point of view, considering a large number of independent fracture families.

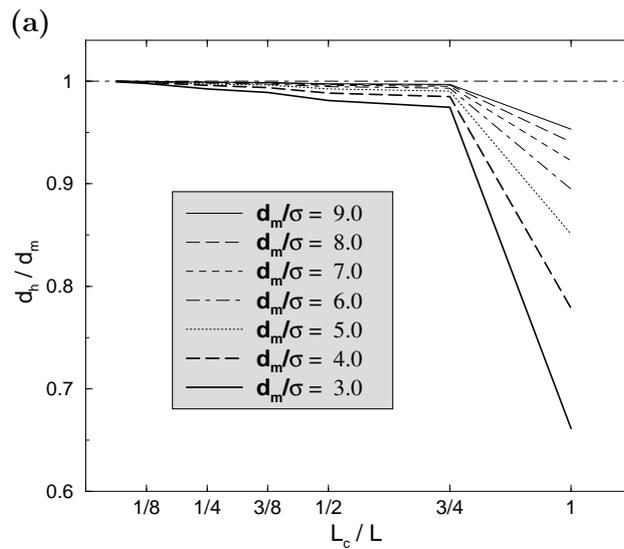
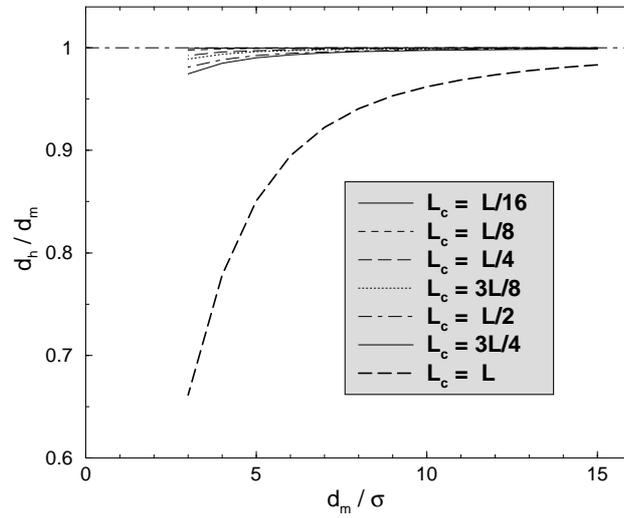
#### 5.4 Influence of surface matching on the statistical hydraulic behavior

We have computed the hydraulic aperture of 500 independent fractures with the same mismatch scale, generated on  $256 \times 256$  grids. This has been done for various normalized fracture separations ( $d_m/\sigma = 4.0, 5.0, 6.0, 8.0, 10.0$ ), and for various values of the ratio  $L_c/L$ :  $1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1$ . Figure 10 shows the histograms of the values for the ratio of the hydraulic aperture to the mechanical aperture,  $d_h/d_m$ , at normalized fracture separation 4.0. Each histogram corresponds to a value for the mismatch scale. The histograms narrow as the mismatch scale is decreased from its maximum value ( $L_c = L$ ) to  $L_c = 3L/8$ . At the same time, their mean value converges to 1 (parallel plate estimate). This is a confirmation of the role played by long range correlations of the fracture apertures in the existence of flow channeling and of the subsequent dispersion of the hydraulic behavior over a large statistics of independent fractures.

For each of the histograms computed at a given value of the fracture separation and for a given mismatch length scale, the mean behavior and the fluctuations of the statistics (i.e the root mean square of the histogram) have been computed. They are shown respectively in Figures 11.a and .b, as functions of the ratio  $L_c/L$  and for different values of the fracture mean aperture.

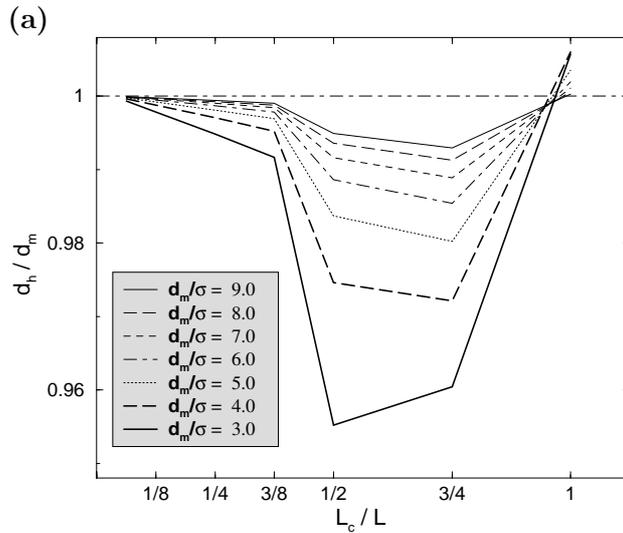
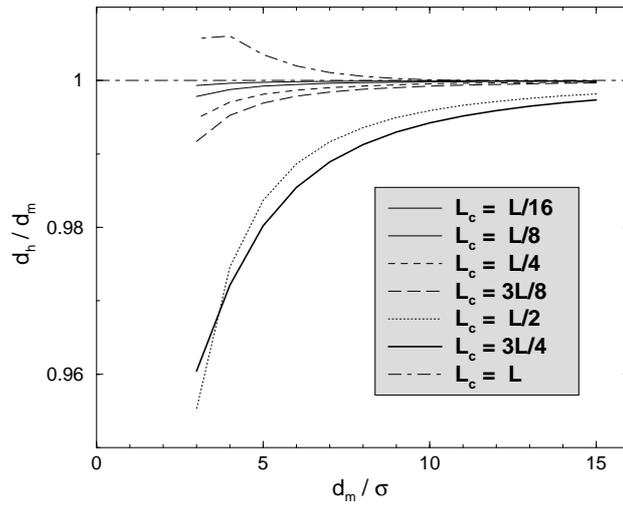
At fixed mechanical aperture, the mean behavior converges to the parallel plate estimate when the mismatch scale is decreased. On average, a rough fracture can exhibit a deviation of its hydraulic aperture from its mechanical aperture as large as 4% at  $d_m/\sigma = 4.0$  (which in terms of volumetric flow means a deviation larger than 10%), if the rough surfaces are unmatched. If the mismatch scale is  $3L/4$ , the deviation drops by a half. At the same time, the fluctuations of the statistics decrease. The drop in the root mean square of the results over the statistics is especially dramatic when  $L_c$  is changed from  $L$  to  $3L/4$ : it represents 80% of the value at  $L_c = L$ . Thus, the impact of correlated fluctuations of the local apertures at the fracture scale is very important. They are responsible for the existence of preferential large aperture channels, or similarly the existence of small aperture barriers, across the whole fracture. They therefore allow a broad variety of hydraulic behaviors over a large population.

For a given mismatch scale, the deviation of the mean behavior from the parallel plate estimate is negative and converges to 1 as fracture separation increases (see Figure 11.a). It means that a majority of rough fractures are flow-inhibiting, and that flow-inhibition vanishes when the roughness amplitude becomes negligible in comparison to the vertical extent of the void between the



(b)

Figure 8: Evolution of the ratio of the hydraulic aperture to the mechanical aperture for fracture family A, (a) as a function of the normalized mechanical aperture  $d_m/\sigma$  and for various values of the mismatch scale,  $L_c$ , and (b) as a function of the ratio  $L_c/L$ , for various fractures separations. The deviation from cubic law drops dramatically when local aperture fluctuations do not exist at the fracture scale. The fracture family exhibits a strong flow-inhibiting behavior for  $L_c = L$ .



(b)

Figure 9: Same as Figure 8, but for a fracture family with a flow-enhancing behavior for  $L_c = L$ . Here, the configuration favorable to flow is destroyed when fluctuations at scale  $L$  disappear from the local aperture distribution. For  $L_c \leq 3L/4$ , the fracture is flow-inhibiting.

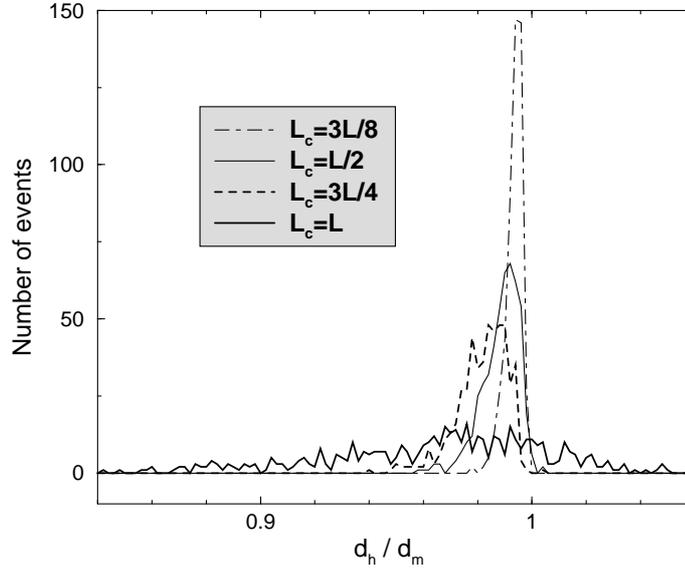


Figure 10: Histograms of the ratio  $d_h/d_m$  obtained for 500 independent fractures generated on  $256 \times 256$  grids. Each histogram corresponds to a different value of the fracture mismatch scale,  $L_c$ . The histograms broaden as  $L_c$  is increased up to the fracture size,  $L$ .

rough surfaces. At the same time, the dispersion of the behaviors observed over the statistics decreases to 0 for decreasing fracture separations. This result was previously observed by Méheust and Schmittbuhl (2000) in the case  $L_c = L$ .

## 5.5 Discussion

The Stokes flow (low Reynolds number) through a fracture with matched surfaces appears to be highly dependent on the mismatch scale,  $L_c$ . Flow channeling inside the fracture is controlled by the large scale spatially correlated fluctuations of the local apertures. As the upper limit scale for the self-affinity, the mismatch scale controls channeling effects and the related hydraulic behavior at the fracture scale. In particular, the fluctuations of the permeabilities observed over a large statistics of independent fractures are controlled by the mismatch scale. An important point lies within the fact that as soon as the mismatch scale is significantly smaller than the fracture size, say,  $L_c < L/8$ , the fracture's hydraulic aperture does not deviate from the mean aperture by more than a few percent, for normalized apertures  $d_m/\sigma$  as small as 4.0. However, surface matching involves that the fracture separation can be decreased all the more before surface contact as the mismatch scale is smaller. By going close to surface contact, significant deviations of the hydraulic behavior from the cubic law are observed, as for fractures with no surface matching. Only, these situations occur for mechanical apertures that are smaller than those required for surface contact when surfaces are not matched. In other words, the relevant

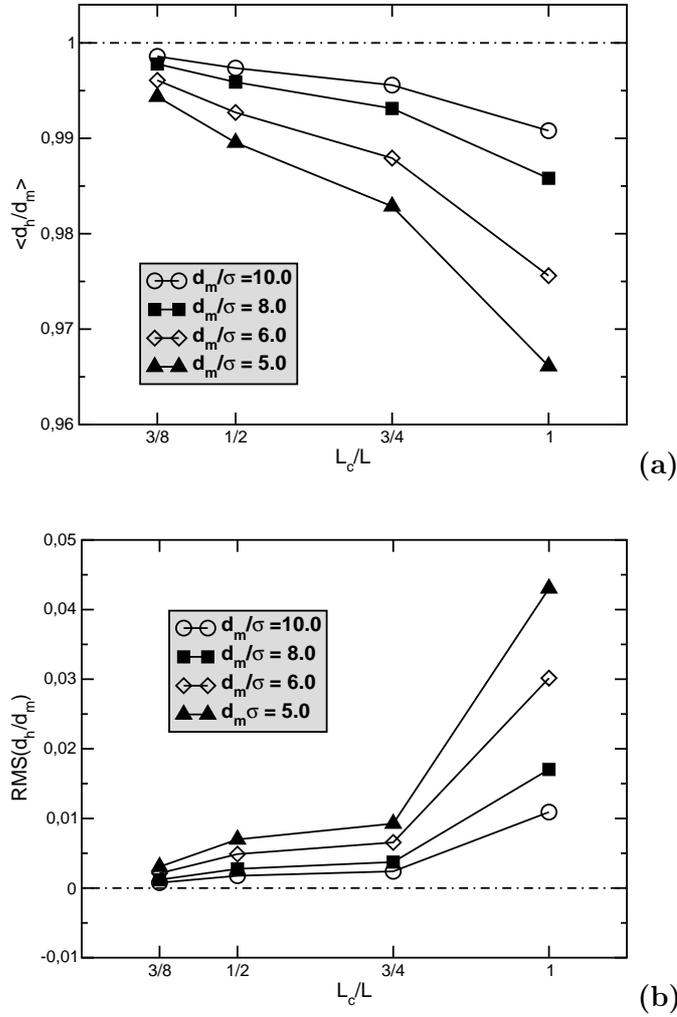


Figure 11: Evolution (a) of the mean ratio of the hydraulic aperture to the mechanical aperture and (b) of the fluctuations of the statistics for 500 independent fractures generated on a grid  $256 \times 256$ , as functions of the ratio of the mismatch scale to the fracture size. The computation has been carried out for different values of the normalized fracture separation:  $d_h/d_m = 10.0, 8.0, 6.0, 5.0$ . The mean behavior converges to the parallel plate estimate (corresponding to the dot-dashed horizontal line in (a)) when  $L_c$  decreases. Fluctuations of the statistics on the scale  $L_c$  drop dramatically for  $L_c < L$ . This is due to the disappearance of large aperture correlated channels at the fracture scale.

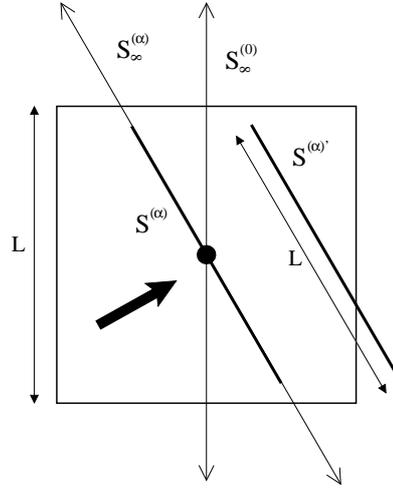


Figure 12: The hydraulic aperture of the fracture in the direction  $\alpha$  can be defined from the flux through a section transverse to macroscopic flow, of horizontal length  $L$ , like  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$  or  $\mathcal{S}^{(\alpha)'}$ , or from that through a section transverse to macroscopic flow and of infinite horizontal length, like  $\mathcal{S}_{\infty}^{(\alpha)}$ . The former definition provides results that are dependent on the section chosen, the latter yields results that are independent of the section. The large arrows denotes the direction of macroscopic flow.

parameter for studying fracture closure and its hydraulic consequences is the vertical extent of the local apertures,  $\Gamma$ , rather than that of the rough topographies, though the latter are easier to determine from an experimental point of view.

## 6 Influence of an arbitrary pressure drop orientation

### 6.1 Introduction to hydraulic anisotropy

In a previous paper [Méheust and Schmittbuhl 2001], we had shown how it is possible to rotate by any angle  $\alpha$  the macroscopic pressure gradient applied to the fracture, considering a fracture with periodic boundary conditions. We computed a hydraulic aperture for the fracture from the volumetric flow through a given section of horizontal length  $L$  and perpendicular to the macroscopic flow. We had chosen a particular section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ , the horizontal trace of which is centered on the center of the grid (see Figure 12). We obtained a value for the hydraulic aperture of the fracture,  $d_h(\alpha)$ , that was dependent on the pressure head orientation, thus displaying an anisotropy of the fracture permeability. An example of such a dependence, borrowed from Méheust and Schmittbuhl (2001) and addressing a fracture with fully-unmatched topographies, is given in Figure 13 (plain line). Due to the periodicity of the model along the directions  $x$  and  $y$ , and not along the direction defined by  $\alpha$  (for  $\alpha \neq 0$  and  $\alpha \neq 90^\circ$ ), the resulting dependence of the hydraulic aperture on the orientation of the pressure head with respect to the fracture was related to the particular section

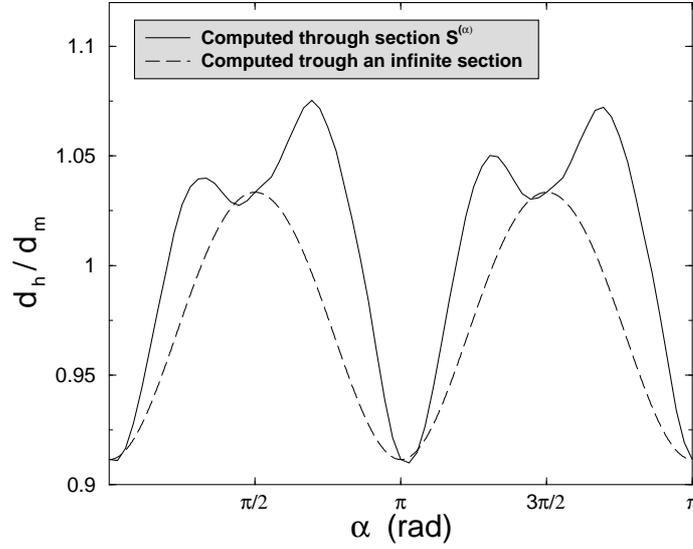


Figure 13: Evolution of the ratio  $d_h/d_m$  for a fracture with unmatched surfaces, and for  $d_m/\sigma = 3.5$ . The plain line curve is issued from [Méheust and Schmittbuhl 2001], and corresponds to a hydraulic aperture computed from the flux through section  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$  (see Figure 12). The long-dashed line is the curve for a hydraulic aperture computed from the volumetric flow through the section of infinite horizontal trace,  $\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}$ , according to Equation (10).

chosen for the calculation. Choosing another section of length  $L$  and transverse to flow, like that denoted  $\mathcal{S}^{(\alpha)'}$  in Figure 12, would have provided a different evolution of  $d_h$  with  $\alpha$  [Méheust and Schmittbuhl 2001].

Defining a hydraulic aperture in the direction  $\alpha$  from the computation of the flow through a section transverse to macroscopic flow and of infinite horizontal length,  $\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}$  (see Figure 12), provides an evolution of  $d_h$  with  $\alpha$  that is independent of the particular section chosen. Furthermore, the fracture transmissivity,  $k = d_h^3/12\eta$ , exhibits a sinusoidal evolution as a function of  $\alpha$ , in the form

$$k(\alpha) = \frac{k(0) + k\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{k(0) - k\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \cos(2\alpha). \quad (10)$$

A mathematical proof of equation (10) can be found in Appendix B. In Figure 13, the evolution of  $d_h/d_m = (12\eta k)^{1/3}/d_m$  as a function of  $\alpha$ , with  $k(\alpha)$  evolving as a function of  $\alpha$  according to (10), is shown in the dashed line. It can be compared to that computed using  $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ , as mentioned above (plain line). The corresponding surface is generated on a grid  $512 \times 512$ , with  $L_c = L$ . The normalized mean aperture is  $d_m/\sigma = 3.5$ . Extreme values of the curve are obtained for  $\alpha = 0$  and  $\alpha = \pi/2$ . Their difference,  $|(d_h/d_m)(0) - (d_h/d_m)(\pi/2)|$ , is a measure of the hydraulic anisotropy of the fracture.

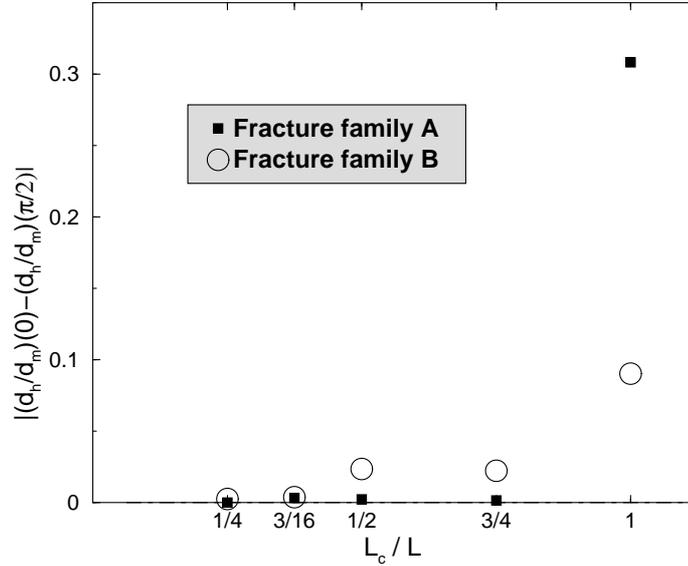


Figure 14: Amplitudes of the theoretical fluctuations of the ratio of the hydraulic aperture to the mechanical aperture when rotating the pressure gradient by  $2\pi$ , for the two fracture families presented in section 5.3, labeled A and B as previously, and for  $d_m/\sigma = 4.0$ . In both cases, the anisotropy is greatly reduced as soon as the mismatch length scale is smaller than the fracture size.

## 6.2 Effect of surface matching

The hydraulic anisotropy of a rough fracture with unmatched topographies results from the correlations in the aperture distribution, as does the dispersion of the hydraulic behavior over a large statistics of independent fractures [Méheust and Schmittbuhl 2001]. For a fracture with partly matched surfaces, we expect the amplitude of the sinusoidal fluctuations in (10) to be strongly dependent on the mismatch scale. Figure 14 shows the evolution of  $|(d_h/d_m)(0) - (d_h/d_m)(\pi/2)|$  with  $L_c/L$ , for the two fracture families presented in section 5.3, at normalized fracture opening  $d_m/\sigma = 4.0$ . The amplitude of the fluctuations with varying  $\alpha$  decreases with decreasing mismatch scale  $L_c$ . They are significantly smaller if fluctuations of the local apertures do not exist at the fracture scale, i.e., as soon as  $L_c < L$ , for both fractures. Since it is related to channeling too, fracture anisotropy is dependent on the mismatch scale in the same way as the root mean square of  $d_h/d_m$  computed over a large number of independent fractures (see section 5.4).

## 6.3 Discussion

The dependence of the permeability of a fracture on the orientation of the applied pressure drop is a consequence of flow channeling. It results from the orientation of the large aperture correlated channels inside the fracture with respect to the imposed macroscopic pressure gradient. Thus, it is controlled by

the upper limit scale for the aperture field self-affinity,  $L_c$ . A fracture with partly matched surfaces and a mismatch scale that is significantly smaller than the fracture size ( $L_c < L/4$ ) displays little anisotropy:  $|(d_h/d_m)(0) - (d_h/d_m)(\pi/2)| < 1$ . This is consistent with the fact that under these conditions, the variety of possible behaviors for a fracture is quite narrow (see section 5).

## 7 Conclusions

In this study, we have simulated the flow through a rough fracture, using the Reynolds equation. The numerical model for the rough fracture consists of two rough isotropic self-affine topographies of identical vertical extent. It allows moderate plastic contact between them and possible surface matching at large scales.

We show that the self-affinity of the rough surfaces results in a self-affine behavior of the local apertures, with an identical roughness exponent, up to the mismatch scale only. The latter length scale is the only characteristic scale other than the fracture size for describing the geometry of the fracture. It also appears to be the only scale that controls the behavior of the flow inside the fracture. Indeed, long range correlations in the local apertures result in long range correlations in the local fluxes. Flow channeling is the consequence of this in terms of spatial distribution of the flow in the fracture plane. It is controlled by the correlated fluctuations of the local aperture field,  $d(x, y)$ , at the largest scale of the self-affine description for  $d$ , that is, at mismatch scale  $L_c$ . The consequences of channeling in terms of hydraulic behavior at the fractures scale, such as the anisotropy of a given fracture toward pressure head orientation, or the dispersion of the behaviors of a large number of independent fractures with identical statistical description (same mismatch scale, same vertical extent for roughness, same roughness exponent), are therefore controlled by the mismatch length scale. When trying to estimate the deviation of the fracture permeability from the parallel plate estimate, the mean opening has to be compared to the vertical extent of roughness at the scale  $L_c$ , and not at the fracture scale. In other words, the vertical extent of the local apertures at the fracture scale is the right parameter to compare to the fracture separation, not the vertical extent of roughness at the fracture scale.

The latter conclusions hold for a slow viscous flow inside the fracture, i. e., a flow that is only dependent on the local apertures. In particular, for such a flow, two rough topographies that are perfectly matched at all scales are perfectly equivalent to a configuration with two flat planes and the same surface separation. This is not true any more for flows at higher Reynolds number. For such flows, the role of the mismatch scale is probably more subtle. Another hypothesis of our model is that moderate contact occurs through pure plasticity. A study with a realistic elastic redistribution of contacts is in preparation.

## A Self-affinity of the local apertures between two self-affine topographies

The fluctuations of the height distributions for the top and bottom surfaces of the fracture around their mean altitude,  $h_u(x, y)$  and  $h_l(x, y)$  respectively, are two self-affine fractals with identical Hurst exponents. They are uncorrelated with each other. This means that the modula of their respective Fourier transforms  $\tilde{h}_u(k_x, k_y)$  and  $\tilde{h}_l(k_x, k_y)$  display the same stochastic power law behavior, while their respective phases,  $\theta_u$  and  $\theta_l$ , are random and mutually uncorrelated:

$$\tilde{h}_u(k_x, k_y) = (k_x^2 + k_y^2)^{-\frac{1+\zeta}{2}} M_u(k_x, k_y) e^{i\theta_u(k_x, k_y)} \quad \text{and} \quad (11)$$

$$\tilde{h}_l(k_x, k_y) = (k_x^2 + k_y^2)^{-\frac{1+\zeta}{2}} M_l(k_x, k_y) e^{i\theta_l(k_x, k_y)}, \quad (12)$$

where  $M_u(k_x, k_y)$  and  $M_l(k_x, k_y)$  are stochastic real functions following the same gaussian distribution of mean 1. In what follows, we omit the dependence of  $M_u$ ,  $M_l$ ,  $\theta_u$ , and  $\theta_l$  on  $k_x$  and  $k_y$ . The local aperture field  $d(x, y)$  is defined by Equation (3). Its mode at  $\mathbf{k} = \mathbf{0}$  is the fracture mean aperture  $d_m$ . Due to the linearity of the Fourier transform, its spectral modes for  $k_x > 0$  and  $k_y > 0$  are

$$\tilde{d}(k_x, k_y) = (k_x^2 + k_y^2)^{-\frac{1+\zeta}{2}} [M_u e^{i\theta_u} - M_l e^{i\theta_l}]. \quad (13)$$

Consequently, the aperture field Fourier spectrum can be written as

$$|\tilde{d}(k_x, k_y)|^2 = (k_x^2 + k_y^2)^{-(1+\zeta)} M(k_x, k_y), \quad (14)$$

where

$$M = M_u^2 + M_l^2 - 2M_u M_l \cos[\theta_u - \theta_l] \quad (15)$$

is a stochastic function of mean 1.

The resulting stochastic behavior of the local apertures spectrum is a power law of  $\|\mathbf{k}\|$  with an exponent  $-2(1 + \zeta)$ , characteristic of a self-affine behavior with the same Hurst exponent  $\zeta$  as that displayed by the height distributions of the surfaces.

## B Sinusoidal dependence of $d_h^3$ on the orientation of $\nabla P$

We call  $\mathbf{q}_\alpha$  the local flux field for an orientation  $\alpha$  of the pressure head, and  $d_h(\alpha)$  the corresponding hydraulic aperture. Hydraulic aperture  $d_h(\alpha)$  is defined from the flux per unit lateral length of  $\mathbf{q}_\alpha$  through an infinite section transverse to macroscopic flow. Due to mass conservation, the latter flux is independent of the particular section chosen. We use the section that contains the center of the grid,  $\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}$  (see Figure 12). We denote  $k(\alpha)$  the fracture transmittivity in the direction  $\alpha$ :  $k(\alpha) = d_h^3(\alpha)/12\eta$ , and  $\Phi_\alpha]_{\mathcal{S}}$  the flux per unit length of local fluxes  $\mathbf{q}_\alpha$  through a given section,  $\mathcal{S}$ . As a consequence of the linearity of Equation (5), the pressure and 2D velocity fields obtained for an orientation  $\alpha$

of  $\overline{\nabla P}$  from the solution of (5) are a linear combination of those obtained for  $\alpha = 0$  and  $\alpha = \pi/2$ :

$$\mathbf{q}_\alpha = \mathbf{q}_0 \cos(\alpha) + \mathbf{q}_{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha) \quad . \quad (16)$$

Mass conservation imposes that the flux of  $\mathbf{q}_0$  through  $\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}$  be the same as that through section  $\mathcal{S}_\infty^{(0)}$  (see Figure 12). Thus

$$\Phi_0]_{\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}} = \Phi_0]_{\mathcal{S}_\infty^{(0)}} \cos \alpha = \|\nabla P\| k(0) \cos \alpha \quad . \quad (17)$$

The volumetric flow of  $\mathbf{q}_{\frac{\pi}{2}}$  per unit length through  $\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}$  can be expressed in the same way as

$$\Phi_{\frac{\pi}{2}}]_{\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}} = \Phi_{\frac{\pi}{2}}]_{\mathcal{S}_\infty^{(\frac{\pi}{2})}} \sin \alpha = \|\nabla P\| k\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha \quad . \quad (18)$$

Following (16), the resulting flux of  $\mathbf{q}_\alpha$  per unit length trough  $\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}$  is

$$\Phi_\alpha]_{\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}} = \Phi_0]_{\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}} \cos \alpha + \Phi_{\frac{\pi}{2}}]_{\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}} \sin \alpha \quad (19)$$

$$= \|\nabla P\| \left( k(0) \cos^2 \alpha + k\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \alpha \right) \quad . \quad (20)$$

Since  $\Phi_\alpha]_{\mathcal{S}_\infty^{(\alpha)}} = \|\nabla P\| k(\alpha)$ , (20) finally yields

$$k(\alpha) = k(0) \cos^2 \alpha + k\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2 \alpha \quad , \quad (21)$$

which is equivalent to (10).

**Acknowledgements.** Yves Méheust acknowledges fruitful discussions with Y. Bernabé, K. Evans, F. Lanaro, S.-D. Lee, O. Stephansson, T.-F. Wong, and R. W. Zimmerman. Yves Guéguen is acknowledged for his advice during manuscript preparation. The authors thank H.-J. Kümpel for organizing the third Euroconference on Rock Physics and Rock Mechanics. G. Zimmermann and the other (anonymous) reviewer are acknowledged for helping improve the manuscript.

## References

- Amedei, B. and Illangasekare, T. (1994), ‘A mathematical model for flow and solute transport in non-homogeneous rock fractures’, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech.* **31**, 719–731.
- Bear, J., Tsang, C. F. and de Marsily, G., eds (1993), *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*, Academic, San Diego, Calif.
- Berkowitz, B. and Adler, P. M. (1998), ‘Stereological analysis of fracture network structure in geological formations’, *J. Geophys. Res.* **103**(B7), 15,339–15,360.

- Boffa, J., Allain, C. and Hulin, J. (1998), 'Experimental analysis of fracture roughness in granular and compact rocks', *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **2**(3), 281–289.
- Bouchaud, E. (1997), 'Scaling properties of cracks', *J. Phys. Condens. Matter* **9**, 4319–4344.
- Bouchaud, E., Lapasset, G. and Planès, J. (1990), 'Fractal dimension of fractured surfaces: a universal value?', *Europhys. Lett.* **13**, 73–79.
- Brown, S. R. (1986), 'Correlation between the surfaces of natural rock joints', *Geophys. Res. Lett.* **13**, 1430–1433.
- Brown, S. R. (1987), 'Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness', *J. Geophys. Res.* **92**, 1337–1347.
- Brown, S. R. (1989), 'Transport of fluid and electric current through a single fracture', *J. Geophys. Res.* **94**(7), 9429–9438.
- Brown, S. R. (1995), 'Simple mathematical model of a rough fracture', *J. Geophys. Res.* **100**(B4), 5941–5952.
- Brown, S. R., Caprihan, A. and Hardy, R. (1998), 'Experimental observation of fluid flow channels in a single fracture', *J. Geophys. Res.* **103**(B3), 5125–5132.
- Brown, S. R. and Scholz, C. H. (1985), 'Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces', *J. Geophys. Res.* **90**, 12575–12582.
- Brown, S. R., Stockman, H. W. and Reeves, S. J. (1995), 'Applicability of the reynolds equation for modeling fluid flow between rough surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **22**(18), 2537–2540.
- Cook, N. G. W. (1992), 'Natural joints in rock: mechanical, hydraulic and seismic behavior and properties under normal stress', *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* **29**(3), 198–223.
- Dijk, P. E., Berkowitz, B. and Bendel, P. (1999), 'Investigation of flow in water-saturated rock fractures using nuclear magnetic resonance imaging (nmri)', *Water Resour. Res.* **35**(2), 347–360.
- Durham, W. B. (1997), 'Laboratory observations of the hydraulic behavior of a permeable fracture from 3800 m depth in the ktb pilot hole', *J. Geophys. Res.* **102**(B8), 18,405–18,416.
- Durham, W. B. and Bonner, B. (1994), 'Self-propping and fluid flow in slightly offset joints at high effective pressures', *J. Geophys. Res.* **99**(B5), 9391–9399.

- Glover, P., Matsuki, K., Hikima, R. and Hayashi, K. (1998*a*), 'Synthetic rough fractures in rocks', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9609–9620.
- Glover, P. W. J., Matsuki, K., Hikima, R. and Hayashi, K. (1998*b*), 'Fluid flow in synthetic rough fractures and application to the hachimantai geothermal hot rock test site', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9621–9635.
- Iwai, K. (1976), *Fundamental Studies of Fluid Flow Through a Single Fracture*, PhD thesis, Univ. of Calif., Berkeley.
- Méheust, Y. and Schmittbuhl, J. (2000), 'Flow enhancement of a rough fracture', *Geophys. Res. Lett.* **27**(18), 2989–2992.
- Méheust, Y. and Schmittbuhl, J. (2001), 'Geometrical heterogeneities and permeability anisotropy of rough fractures', *J. Geophys. Res.* **106**(B2), 2089–2102.
- Moreno, L., Tsang, Y. W., Tsang, C., Hale, F. and Neretnieks, I. (1988), 'Flow and tracer transport in a single fracture: A stochastic model and its relation to some field observations', *Water Resour. Res.* **24**(12), 2033–2048.
- Mourzenko, V. V., Galamay, O. and Thovert, J.-F. (1997), 'Fracture deformation and influence on permeability', *Physical Review E* **56**(3).
- Mourzenko, V. V., Thovert, J.-F. and Adler, P. (1995), 'Permeability of a single fracture; validity of the reynolds equation', *J. Phys. II* **5**, 465–482.
- Nicholl, M. J., Rajaram, H., Glass, R. J. and Detwiler, R. (1999), 'Saturated flow in a single fracture: Evaluation of the reynolds equation in measured aperture fields', *Water Resources Research* **35**(11), 3361–3373.
- Plouraboué, F., Hulin, J. P., Roux, S. and Koplik, J. (1998), 'Numerical study of geometrical dispersion in self-affine rough fractures', *Phys. Rev. E* **58**(3), 3334–3346.
- Sahimi, M. (1993), 'Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing', *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1393–1534.
- Schmittbuhl, J., Gentier, S. and Roux, S. (1993), 'Field measurements of the roughness of fault surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **20**(8), 639–641.
- Schmittbuhl, J., Schmitt, F. and Scholz, C. H. (1995), 'Scaling invariance of crack surfaces', *J. Geophys. Res.* **100**, 5953–5973.
- Schmittbuhl, J., Vilotte, J. P. and Roux, S. (1995), 'Reliability of self-affine measurements', *Phys. Rev. E* **51**, 131–147.
- Simonsen, I., Hansen, A. and Magnar Nes, O. (1998), 'Using wavelet transforms for Hurst exponent determination', *Phys. Rev. E* **58**, 2779–2787.

- Thompson, M. E. (1991), 'Numerical simulation of solute transport in rough fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B3), 4157–4166.
- Thompson, M. E. and Brown, S. R. (1991), 'The effect of anisotropic surface roughness on flow and transport in fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B13), 21,923–21,932.
- Tsang, Y. W. (1984), 'The effect of tortuosity on fluid flow through a single fracture', *Water Resour. Res.* **20**(9), 1209–1215.
- Tsang, Y. W. and Witherspoon, P. A. (1981), 'Hydromechanical behavior of a deformable rock fracture subject to normal stress', *J. Geophys. Res.* **86**(B10), 9287–9298.
- Unger, A. J. A. and Mase, C. (1993), 'Numerical study of the hydromechanical behavior of two rough fracture surfaces in contact', *Water Resour. Res.* **29**(7), 2101–2114.
- Yeo, I., Freitas, M. D. and Zimmerman, R. (1998), 'Effect of shear displacement on the aperture and permeability of a rock fracture', *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **35**(8), 1051–1070.
- Zimmerman, R. and Bodvarsson, G. (1996), 'Hydraulic conductivity of rock fractures', *Transp. Porous Media* **23**, 1–30.
- Zimmerman, R. W. and Yeo, I.-W. (2000), Fluid flow in rock fractures: from the Navier-Stokes equations to the cubic law, *in* 'Dynamics of Fluids in Fractured Rock', American Geophysical Union.



Troisième partie

Drainage dans une fracture contenant  
une gouge



# Modélisation d'une fracture remplie de gouge

Une *gouge* est un milieu granulaire formé de débris qui ont été arrachés aux parois de la fracture. La gouge a pu apparaître au moment de la fracturation du matériau, lorsque celle-ci s'est produite en mode II (cisaillement) ; c'est le mode de fracturation naturelle le plus fréquent dans la croûte superficielle. Ou bien elle peut résulter de la friction entre des parois qui glissent l'une par rapport à l'autre. Sur la figure 8.1, l'observation d'une éprouvette de granite du Sidobre soumise à un essai triaxial met en évidence la présence de tels débris dans la fracture dont on a souligné les parois par des lignes pointillées. Les débris sont de tailles très diverses ; la gouge peut être considérée comme un milieu granulaire très hétérodispersé. La présence d'un tel milieu granulaire influence considérablement les écoulements dans la fracture. L'espace laissé libre aux fluides est limité par les parois de la fracture, mais aussi par le volume des débris. Ainsi, l'espace disponible aux fluides peut être assimilé à un milieu poreux de très grande perméabilité, dont les pores sont de tailles et de formes très diverses, et sont disposés de manière aléatoire. Dans la mesure où l'ouverture de la fracture est beaucoup plus petite que ses dimensions dans les deux directions qui définissent son plan moyen, le milieu poreux ainsi défini peut être considéré comme quasi-bidimensionnel.

La gouge joue un rôle particulièrement important dans le cas d'un écoulement diphasique, par exemple lorsqu'un fluide est déplacé par un autre à travers la fracture. L'interface entre les deux fluides est alors morcelée en de nombreux ménisques dont la taille est proche de celle des pores du volume poreux. Durant le déplacement de l'interface, la tension de surface au niveau de ces ménisques joue un rôle d'autant plus important que l'échelle à laquelle elle agit (c.-à-d., la taille des ménisques) est petite, et proche de l'échelle capillaire des fluides. Dans cette 3<sup>e</sup> partie du mémoire, nous allons nous intéresser au drainage dans une fracture remplie de gouge, c'est-à-dire au déplacement d'un fluide mouillant par un fluide non-mouillant dans un tel milieu poreux (le concept de mouillage sera redéfini précisément dans le chapitre 8). Ce problème trouve son application dans l'extraction du pétrole, qui est en général couplée à une injection d'eau dans le réservoir, afin d'accroître la productivité du site. Dans les réservoirs fracturés, le transport de pétrole se fait essentiellement à travers le réseau de fractures. Notre étude peut correspondre au déplacement du pétrole par l'eau injectée, dans une fracture d'un tel réservoir.

Les différents régimes d'écoulement diphasique (eau-air) dans une fracture rugueuse qui ne contient pas de gouge ont été étudiés par Fourar, Bories, Lenormand et Persoff (1993), qui ont montré qu'ils étaient similaires à ce qui est observé pour l'écoulement diphasique dans un tuyau. Persoff et Pruess (1995) ont mené une étude similaire qui a mis en évidence l'instabilité d'un tel écoulement. Lorsqu'une gouge fait office de milieu poreux entre les parois de la fracture, la géométrie complexe du milieu poreux ne permet pas le développement de tels régimes d'écoulement. Auradou, Måløy, Schmittbuhl, Hansen et Bideau (1999) ont étudié expérimentalement le drai-

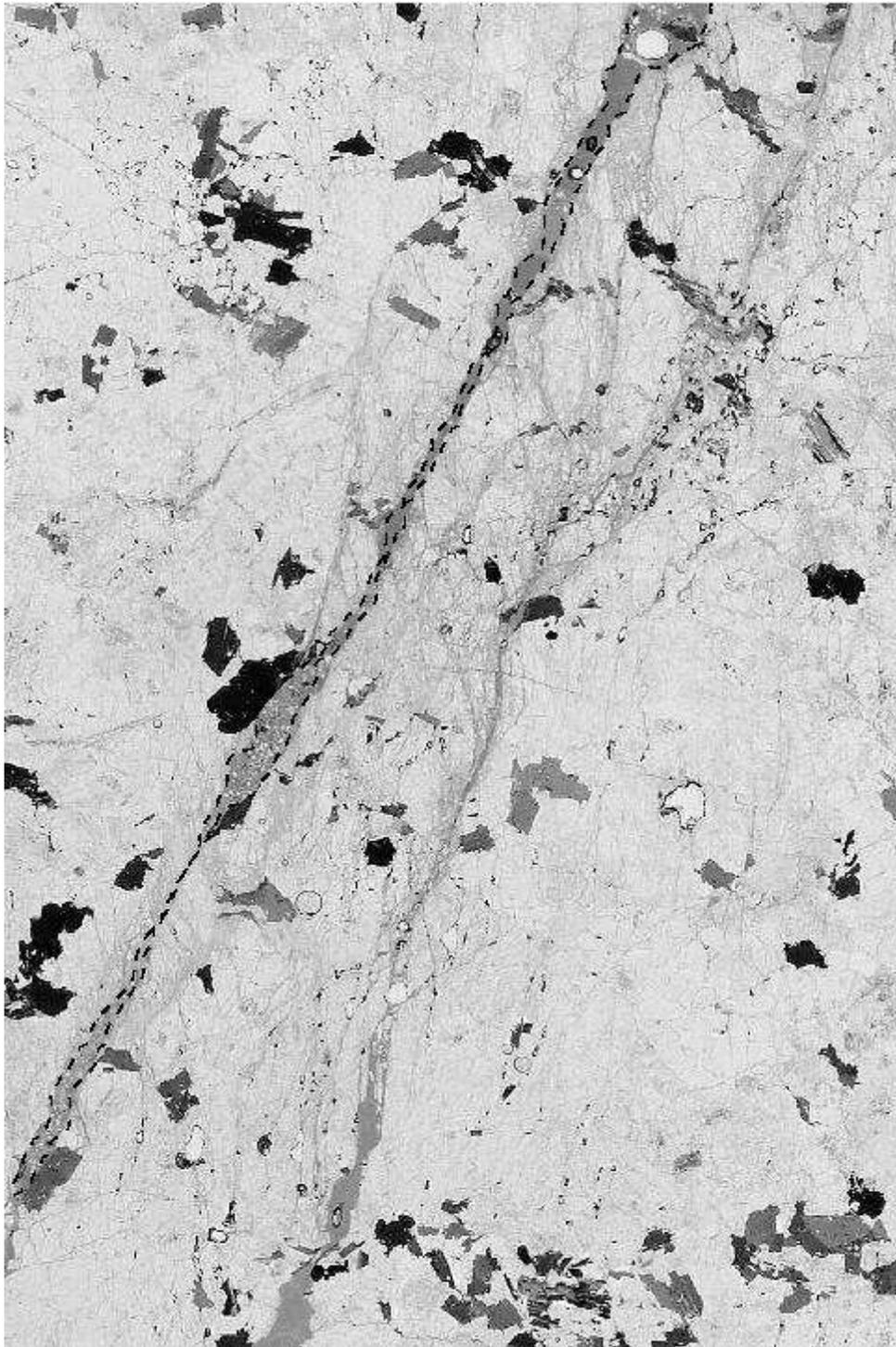


FIG. 8.† – Lame mince d'une éprouvette cylindrique de granite du Sidobre, après que l'éprouvette a été fracturée en essai triaxial [Amitrano et Schmittbuhl, n.d.]. La contrainte principale a été appliquée verticalement, et a conduit à une localisation de la micro-fracturation et à la formation de fractures macroscopiques dans une direction oblique. La fracture matérialisée par les lignes pointillées est ouverte ; on distingue assez bien un milieu granulaire dans l'interstice entre ses parois : une gouge. La granulométrie de cette gouge est manifestement très hétérodisperse.

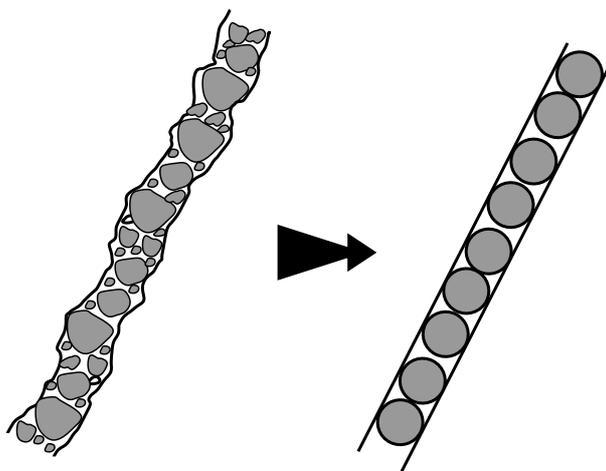


FIG. 8.§ – Une fracture rugueuse remplie d’une gouge est modélisée simplement comme un milieu poreux bidimensionnel constitué d’une monocouche de billes de verre de même rayon, disposées aléatoirement dans le plan de la fracture. On néglige ainsi la rugosité des parois de la fracture, et la dispersion de la granulométrie de la gouge. Mais on conserve un caractère aléatoire au milieu poreux ainsi défini.

nage dans une fracture rugueuse horizontale contenant une monocouche de billes de verres. Dans cette configuration, les effets capillaires, liés à la distribution aléatoire non spatialement corrélée des seuils de pression capillaire des pores du milieu poreux, sont en compétition avec les effets gravitaires relatifs à la topographie des surfaces, qui est, elle, corrélée aux grandes longueurs d’onde. Les configurations-limites où l’un ou l’autre des effets domine exhibent des déplacements de l’interface entre les deux fluides aux propriétés très différentes. Schmittbuhl, Hansen, Auradou et Måløy (2000) ont étudié numériquement un système identique, dans le régime intermédiaire où les effets capillaires et la gravité sont du même ordre de grandeur, en s’intéressant à la géométrie des amas de fluide mouillant piégés par le fluide non-mouillant. Wagner, Amundsen, Oxaal, Meakin, Feder et Jøssang (2000) ont réalisé une simulation numérique d’écoulement diphasique quasi-statique dans une fracture rugueuse, en utilisant un modèle de percolation d’invasion.

Ces études concernent toutes une gamme de vitesses de filtration où les effets liés aux forces visqueuses n’influencent pas la géométrie du déplacement entre les deux fluides. Pour notre part, nous abordons ici des configurations où les vitesses de filtration, plus importantes, rendent les effets visqueux significatifs, et où il existe un champ de gravité moyen dans le plan de la fracture, c.-à-d. où la fracture est inclinée par rapport à l’horizontale. Pour ramener le problème à une configuration plus simple à étudier, on fait trois simplifications importantes, qui sont schématisées sur la figure 8.§ :

1. Nous supposons que les fluctuations spatiales des effets gravitaires liées à la rugosité des parois sont négligeables devant la projection du champ de gravité dans le plan de la fracture. Nous pouvons donc négliger tout caractère aléatoire des effets gravitaires, et ne pas tenir compte de la rugosité des parois de la fracture. Ainsi, dans notre modèle, le milieu granulaire est confiné entre deux plans parallèles.
2. Nous considérons que la gouge est constituée de sphères, et qu’elle est homodisperse : les sphères ont toutes le même diamètre.
3. Nous supposons que le milieu poreux est parfaitement bidimensionnel : les sphères sont réparties sur une seule couche. En revanche, les billes sont disposées de manière aléatoire dans le plan de la fracture, de manière à ce que le milieu poreux résultant conserve un caractère aléatoire.

Nous réduisons ainsi l’étude du drainage dans la fracture à celle du drainage dans un milieu poreux *bidimensionnel* constitué d’une monocouche de billes de verre distribuées de manière aléatoire dans le plan de la fracture.



## Chapitre 8

# Approche physique du drainage dans un milieu poreux bidimensionnel

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>251</b>
<b>8.1 Écoulement diphasique dans une cellule de Hele-Shaw</b> . . . . .	<b>251</b>
8.1.1 Description mathématique du déplacement des deux fluides en conditions de Stokes . . . . .	252
Écoulement monophasique . . . . .	252
Écoulement diphasique . . . . .	252
8.1.2 Analyse de stabilité linéaire . . . . .	253
Taux de croissance d'une instabilité . . . . .	253
Critère de stabilité . . . . .	255
Rôle des différentes forces impliquées dans le déplacement . . . . .	256
8.1.3 Observations expérimentales de l'instabilité de Saffman-Taylor . . . . .	256
<b>8.2 Écoulements diphasiques en milieu poreux</b> . . . . .	<b>257</b>
8.2.1 Définitions . . . . .	257
Fluides mouillant / non-mouillant . . . . .	257
Drainage . . . . .	257
8.2.2 Forces capillaires à l'échelle des pores . . . . .	258
8.2.3 Description du déplacement des deux fluides en conditions de Stokes . . . . .	259
Description à l'échelle du pore . . . . .	259
Milieu effectif . . . . .	259
8.2.4 Effet des forces visqueuses et de la gravité . . . . .	260
Nombres caractéristiques . . . . .	260
<b>8.3 Drainage en milieu poreux bidimensionnel quand <math>\rho_{nm}</math> et <math>\eta_{nm}</math> peuvent être négligés</b> . . . . .	<b>261</b>
8.3.1 Dynamique locale du déplacement . . . . .	261
8.3.2 Drainage en l'absence de gravité . . . . .	262
Diagramme de phase du drainage en l'absence de gravité . . . . .	262
Digitation capillaire lors du drainage . . . . .	263
Digitation visqueuse . . . . .	264
8.3.3 Drainage capillaire en présence de gravité . . . . .	266
Observations . . . . .	266
Loi d'échelle de la largeur du front . . . . .	267

8.3.4	Digitation visqueuse en gravité non nulle . . . . .	269
	Problématique . . . . .	269
	Discussion – Que nous apprend la théorie de Saffman-Taylor? . . .	269
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>270</b>

---

## Introduction

Ce chapitre est une introduction au problème complexe du drainage dans un milieu poreux bidimensionnel. En fonction de la viscosité des fluides, de leur densité, de leur mouillabilité sur les surfaces des pores, de la tension de surface à l'interface entre les fluides, les écoulements diphasiques immiscibles en milieux poreux sont le siège d'une multitude de phénomènes complexes, qu'il est difficile de tous prendre en compte simultanément [Sahimi, 1993].

L'étude de l'extraction à l'échelle d'un réservoir de pétrole et en trois dimensions fait intervenir une modélisation du milieu poreux par un milieu effectif défini à l'échelle d'un élément de volume représentatif beaucoup plus grand que les pores du milieu poreux, et dans lequel le déplacement des fluides est contrôlé par des lois de Darcy modifiées faisant intervenir les perméabilités relatives des deux fluides [Dullien, 1988]. On pourra se référer à [Bear, 1972; Scheidegger, 1974] pour une discussion de ce type de modèles et des prédictions qu'ils permettent d'obtenir. Nous considérons dans cette partie une approche différente, où l'écoulement des fluides est décrit jusqu'à l'échelle du pore, et où l'on s'intéresse particulièrement à la dynamique de l'interface entre les deux fluides. La description en termes de milieu effectif est abordée simplement pour permettre de comprendre qualitativement les effets respectifs des forces de dissipation visqueuse et de la gravité sur l'interface. Nous étudions le drainage d'un fluide mouillant par un fluide non-mouillant *moins visqueux* à travers ce milieu poreux.

Nous présentons dans une première partie un problème bien connu : le déplacement d'un fluide par un autre dans une cellule de Hele-Shaw, une géométrie qui correspond au cas d'une fracture sans rugosité et sans gouge. La deuxième partie présente les concepts fondamentaux de la physique du déplacement dans un milieu poreux bidimensionnel. Dans une troisième partie, nous nous intéressons à une configuration où le fluide déplaçant a une densité et une viscosité négligeables par rapport à celles du fluide déplacé. Deux régimes d'écoulement-limite ont été beaucoup étudiés ; l'un concerne les déplacements quasi-statiques [Chandler, Koplik, Lerman et Willemsen, 1982; Lenormand et Zarcone, 1985; Lenormand et Zarcone, 1989; Måløy, Furuberg, Feder et Jøssang, 1992], l'autre concerne les déplacements très rapides [Måløy, Feder et Jøssang, 1985; Måløy, Boger, Feder, Jøssang et Meakin, 1987; Nittman, 1986; Chen et Wilkinson, 1985; Lenormand, Touboul et Zarcone, 1988*a*; Aker, Måløy, Hansen et Batrouni, 1998]. Dans le premier cas, les effets de la gravité sur le drainage sont bien connus [Birovljev, Furuberg, Feder, Jøssang, Måløy et Aharony, 1991]; dans le second cas, l'influence de la gravité n'a pas été étudiée. Nous introduisons ainsi l'étude qui est exposée au chapitre 9, en établissant un parallèle avec ce qu'on sait de l'écoulement analogue dans une cellule de Hele-Shaw.

### 8.1 Écoulement diphasique dans une cellule de Hele-Shaw

On désigne ici par *cellule de Hele-Shaw* une cellule parallélépipédique formée de deux plaques transparentes séparées par une ouverture  $d$  (voir figure 8.1) ; il n'y a pas de milieu poreux entre les plaques. Si l'écartement des plaques est suffisamment petit, l'écoulement à vitesse modérée d'un fluide entre les plaques est un écoulement de Stokes. D'autre part, les dimensions des plaques sont beaucoup plus grandes que leur écartement, de sorte que l'écoulement monophasique d'un fluide suffisamment visqueux dans une cellule de ce type est une bonne illustration de la configuration de Poiseuille plane (voir chapitre 4).

On considère la configuration où un fluide 1 déplace un fluide 2 *plus visqueux que 1*, situé au-dessous, avec un débit de fluide constant dans la cellule, correspondant à une vitesse de filtration (ou de Darcy)  $V_d = Q/d$ . On ne fait pour le moment aucune hypothèse sur leurs

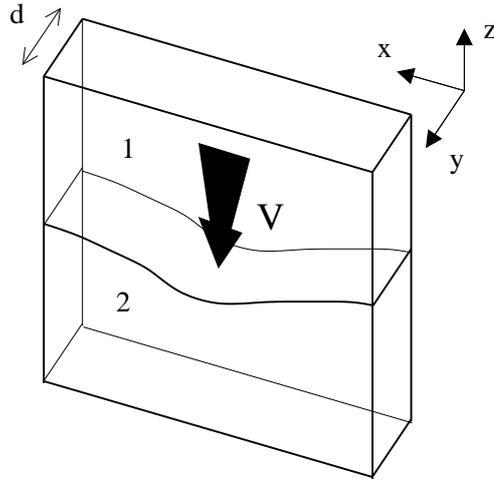


FIG. 8.1 – Schéma de la cellule de Hele-Shaw, avec les deux fluides l'un au-dessus de l'autre. Le fluide 1 déplace le fluide plus visqueux 2, du haut vers le bas.

densités respectives.

### 8.1.1 Description mathématique du déplacement des deux fluides en conditions de Stokes

#### Écoulement monophasique

La dynamique de l'écoulement incompressible d'un fluide en conditions de Stokes est régie par l'équation de continuité  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et par l'équation de Stokes (4.4). Les conditions aux limites associées sont les conditions habituelles de contact au niveau des parois. Dans le cas de la cellule de Hele-Shaw, un écoulement de Stokes monophasique peut être assimilé à l'écoulement dans une configuration de Poiseuille plane, qui a été traité au chapitre 4. Le profil des vitesses locales le long de l'ouverture locale est alors parabolique (cf. relation (4.7)), et la loi (4.8) reliant le débit au gradient de pression effectif peut être réécrite sous forme d'une loi de Darcy (4.10) ; en tenant compte de la pesanteur, elle s'écrit :

$$\mathbf{V}_d = -\frac{\kappa}{\eta} (\nabla \overline{P} - \rho \mathbf{g}) \quad , \quad (8.1)$$

où  $\kappa = d^2/12$ . La vitesse de Darcy  $\mathbf{V}_d$  à l'échelle de la cellule coïncide ici avec la vitesse locale moyennée sur le profil parabolique,  $\mathbf{v}_d(x, y)$ , qui est un champ uniforme dans la cellule. Le gradient de pression est uniforme dans la cellule, et coïncide donc avec le gradient de pression effectif  $\nabla \overline{P}$  calculé à l'échelle de la cellule, de sorte que l'on peut réécrire la loi de Darcy sous forme locale, selon :

$$\mathbf{v}_d = -\frac{\kappa}{\eta} (\nabla P - \rho \mathbf{g}) \quad , \quad (8.2)$$

où la quantité  $P$  est le champ eulérien de pression dans la cellule. La perméabilité  $\kappa$  est à présent une quantité locale, qui se trouve être un champ uniforme, de valeur  $d^2/12$ . En l'absence de mouvement, la loi (8.2) rejoint la définition de la pression hydrostatique. En présence d'un écoulement, la vitesse est proportionnelle à la *pression visqueuse*, qui est la différence de la pression dynamique  $P$  et de la pression hydrostatique,  $\rho g z$ .

#### Écoulement diphasique

Dans le cas d'un écoulement incompressible diphasique où l'un des fluides déplace l'autre, l'équation de continuité et l'équation de Stokes (4.4) décrivent toujours la conservation locale de

la masse et de la quantité de mouvement, respectivement, pour chacun des deux fluides. Mais la description physique de l'écoulement n'est pas complète si l'on n'inclut pas les effets de tension de surface au niveau de l'interface entre les deux fluides. En raison de ces forces capillaires, les pressions dans les deux fluides de chaque côté d'une interface courbe au repos ou se déplaçant de façon uniforme ne sont pas les mêmes. Le saut de pression à travers l'interface, communément appelé *pression capillaire*, satisfait la loi de Young-Laplace :

$$\boxed{P_c = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad , \quad (8.3)$$

où  $\sigma$  est la tension de surface de l'interface, et  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons de courbure principaux de l'interface. La forme locale de l'interface et son déplacement futur sont contrôlés par les champs de pressions dans les fluides, qui dépendent eux-mêmes de la géométrie de l'interface.

### 8.1.2 Analyse de stabilité linéaire

Une solution possible au problème du déplacement d'un fluide par un autre correspond à une situation où, à l'exception d'une zone de très faible épaisseur au voisinage des plaques où le fluide déplacé laisse un film, l'écoulement des fluides dans la cellule est identique à ce qu'il serait si l'écoulement était monophasique. A l'extérieur du voisinage des plaques, l'interface entre les deux fluides reste plane et se déplace à la vitesse de Darcy  $-V_d \hat{z}$ , qui est simplement la vitesse moyenne du fluide. La question est de savoir si un tel mode de déplacement est stable. Si l'on perturbe légèrement l'interface pendant son déplacement, en détruisant localement sa planéité, par exemple, va-t-elle revenir à sa forme initiale, ou bien la perturbation va-t-elle se développer, perturbant l'ensemble de l'écoulement ?

Si l'on considère une perturbation infinitésimale de l'interface, on peut considérer que la description de l'écoulement dans chacun des deux fluides sous forme de loi de Darcy locale (8.2) reste valable. On étudie ainsi un système équivalent d'écoulement bidimensionnel où les champs de vitesse  $\mathbf{v}^{(1)}$  et  $\mathbf{v}^{(2)}$  sont les moyennes des vitesses réelles le long de l'ouverture locale. L'interface est alors une ligne dans le plan  $(O, x, z)$ , qui est initialement une droite parallèle à  $(Ox)$ . Le problème a été étudié théoriquement sous cette forme parallèlement par Saffman et Taylor (1958) et Chuoke, van Meurs et van der Poel (1959).

### Taux de croissance d'une instabilité

Notons  $\mathbf{v}^{(j)}$  les champs de vitesse des deux fluides dans le référentiel fixe  $(0, x, z)$  (voir figure 8.1). Dans ce référentiel, l'interface non perturbée a pour équation :  $z = -V_d t$ . On effectue une analyse linéaire de stabilité en superposant une perturbation élémentaire du type

$$\zeta(x, t) = \epsilon \exp(i q x + \beta t) \quad (8.4)$$

à la position de l'interface. Le paramètre  $q$  est le nombre d'onde de la perturbation ; il est relié à sa longueur d'onde  $\lambda$  par la relation  $q = 2\pi/\lambda$ . Le paramètre  $\beta$  est le taux de croissance de l'instabilité ; son signe va déterminer la stabilité ( $\beta < 0$ ) ou l'instabilité ( $\beta > 0$ ) de l'interface vis-à-vis de la perturbation.

La loi de Darcy locale (8.2) s'écrit pour chacun des deux fluides  $j$  :

$$\mathbf{v}^{(j)} = -\frac{\kappa_j}{\eta_j} \nabla \left( p^{(j)} + \rho_j g z \right) \quad , \quad (8.5)$$

où  $\kappa_j = d^2/12$  est la perméabilité du milieu vis-à-vis du fluide,  $\rho_j$  est la densité du fluide, et  $\eta_j$  sa viscosité. On a conservé des notations différentes pour  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  dans le souci de pouvoir généraliser le résultat à un système où elles seraient différentes. La quantité  $g$  désigne la composante de l'accélération de la pesanteur sur le plan vectoriel défini par les parois de la cellule. Si la cellule est en position verticale (comme sur la figure 8.1), on a simplement  $g = g_0 = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ . On recherche les conditions sur les  $\eta_j$ ,  $\rho_j$  et  $\kappa_j$  pour lesquelles le taux de croissance de l'instabilité  $\beta$  est positif.

La relation (8.5) s'écrit aussi

$$\mathbf{v}^{(j)} = \nabla \phi^{(j)} \quad \text{avec} \quad \phi^{(j)} = -\frac{\kappa_j}{\eta_j} \left( p^{(j)} + \rho_j g z \right) \quad . \quad (8.6)$$

En vertu de l'incompressibilité de l'écoulement, le *potentiel de vitesse*  $\phi^{(j)}$  vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta \phi^{(j)} = 0 \quad . \quad (8.7)$$

Si l'on parvient à exhiber une solution de l'équation de Laplace qui vérifie les conditions aux limites aux grandes valeurs de  $|z|$  et à l'interface, c'est la solution. Les vitesses aux grandes valeurs de  $|z|$  coïncident avec la vitesse non perturbée  $-V_d$ . Si l'on néglige l'épaisseur de l'interface, la vitesse du fluide de chaque côté de l'interface doit évaluer la vitesse de déplacement de l'interface. Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z \rightarrow -\infty} v_z = -V_d \\ \lim_{z \rightarrow \infty} v_z = -V_d \\ v_z(z \sim 0) = -V_d + \partial_t \zeta(x, t) \end{array} \right. , \quad (8.8)$$

c'est-à-dire, puisque  $v_z = \partial_z \phi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{z \rightarrow -\infty} \partial_z \phi^{(2)} = -V_d \\ \lim_{z \rightarrow \infty} \partial_z \phi^{(1)} = -V_d \\ \left( \partial_x \phi^{(1)} \right)_{z \sim 0} = \left( \partial_x \phi^{(2)} \right)_{z \sim 0} = -V_d + \beta \epsilon \exp(i q x + \beta t) \end{array} \right. . \quad (8.9)$$

La solution

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{(1)} = -V_d z + \frac{\beta \epsilon}{q} \exp(i q x - q z + \beta t) \\ \phi^{(2)} = -V_d z + \frac{\beta \epsilon}{q} \exp(i q x + q z + \beta t) \end{array} \right. \quad (8.10)$$

convient avec un paramètre  $q$  positif. La définition du potentiel  $\phi$  fournit directement les pressions dans les deux fluides :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^{(1)} = -\frac{\eta_1}{\kappa_1} \phi^{(1)} + \rho_1 g z \\ p^{(2)} = -\frac{\eta_2}{\kappa_2} \phi^{(2)} + \rho_2 g z \end{array} \right. . \quad (8.11)$$

Au voisinage de l'interface, et dans le cadre d'une petite perturbation des champs de pression et de vitesse, les pressions  $p^{(1)}$  et  $p^{(2)}$  sont reliées par la relation :

$$p^{(1)} - p^{(2)} = \frac{\sigma}{R_x} \quad , \quad (8.12)$$

où le rayon de courbure local de l'interface dans la direction  $x$  peut être approximé comme  $1/R_x \simeq -\partial^2 \zeta / \partial x^2$ . En introduisant dans la relation (8.12) les expressions (8.11), exprimées pour  $z \sim 0$ , et en éliminant le facteur  $\epsilon \exp(\beta t + i q z)$  des deux côtés de l'égalité, on obtient la relation

$$\beta \left( \frac{\eta_1}{\kappa_1} + \frac{\eta_2}{\kappa_2} \right) = \left[ \left( \frac{\eta_2}{\kappa_2} - \frac{\eta_1}{\kappa_1} \right) V_d + (\rho_1 - \rho_2)g \right] q - \sigma q^3 \quad . \quad (8.13)$$

### Critère de stabilité

En introduisant le *contraste de viscosité*  $C$  entre les deux fluides [Tryggvason et Aref, 1983],

$$C = \frac{\frac{\eta_2}{\kappa_2} - \frac{\eta_1}{\kappa_1}}{\frac{\eta_2}{\kappa_2} + \frac{\eta_1}{\kappa_1}} \quad , \quad \text{soit} \quad \boxed{C = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}} > 0 \quad , \quad (8.14)$$

la relation (8.13) devient

$$\beta = C \left[ V_d - \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\frac{\eta_2}{\kappa_2} - \frac{\eta_1}{\kappa_1}} \right] q - \frac{C \sigma q^3}{\frac{\eta_2}{\kappa_2} + \frac{\eta_1}{\kappa_1}} \quad . \quad (8.15)$$

On constate que le taux de croissance est positif pour des valeurs infiniment petites du nombre d'onde  $q$  dès que la vitesse moyenne du fluide est plus élevée qu'une valeur critique

$$\boxed{V_d^c = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\frac{\eta_2}{\kappa_2} - \frac{\eta_1}{\kappa_1}}} \quad . \quad (8.16)$$

En particulier, si le fluide déplacé est le moins dense, le déplacement est instable même pour des vitesses de déplacement infinitésimales, puisque la valeur obtenue pour la vitesse-seuil de l'instabilité  $V_d^c$  est négative. L'introduction du paramètre  $V_d^c$  dans la relation (8.15) permet de la réécrire comme

$$\beta = C q \left( V_d - V_d^c - \frac{\sigma q^2}{\frac{\eta_2}{\kappa_2} - \frac{\eta_1}{\kappa_1}} \right) \quad . \quad (8.17)$$

Pour des vitesses d'extraction supérieures à  $V_d^c$ , la moindre instabilité de l'interface va croître. Les longueurs d'onde déstabilisables ont des longueurs d'onde  $\lambda = 2\pi/q$  plus grandes que la longueur d'onde critique

$$\boxed{\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\left( \frac{\eta_2}{\kappa_2} - \frac{\eta_1}{\kappa_1} \right) (V_d - V_d^c)}}} \quad . \quad (8.18)$$

Finalement, le taux de croissance de l'instabilité s'écrit

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\tau} \left( \frac{\lambda_c}{\lambda} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2 \right]} \quad , \quad (8.19)$$

où l'on a introduit une constante de temps  $\tau$ , caractéristique de la croissance de l'instabilité :

$$\boxed{\tau = \frac{\lambda_c}{2\pi C(V_d - V_c)}} \quad . \quad (8.20)$$

Si les viscosités sont presque égales, le contraste de viscosité vaut  $C = 0$ , et le temps caractéristique de développement de l'instabilité est infini. De même, si la vitesse de Darcy est très légèrement au-dessus de sa valeur-seuil,  $\tau$  est infini.

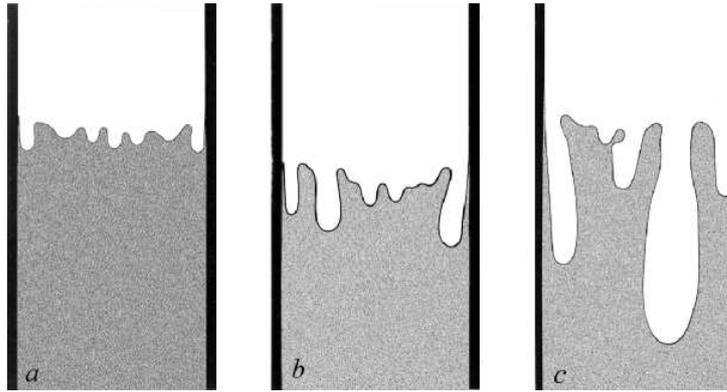


FIG. 8.2 – Photographies d’une expérience de digitation visqueuse dans une cellule de Hele-Shaw, où du glycérol est déplacé par de l’air, du haut vers le bas. La vitesse moyenne du fluide est 0.1 cm/s. La longueur d’onde seuil vaut  $\lambda_c = 1.2$  cm. – (a) Développement initial de l’instabilité ; on observe  $\lambda \simeq 2.2$  cm, une valeur proche de  $\lambda_m \simeq 2.1$  cm. – (b) Stade de développement ultérieur ; les doigts les plus développés progressent au détriment des autres. (c) Stade encore ultérieur ; un petit nombre de grands doigts subsiste.

### Rôle des différentes forces impliquées dans le déplacement

On constate que le déplacement de haut en bas d’un fluide par un fluide moins visqueux dans une cellule de Hele-Shaw est instable dès que le fluide déplaçant est plus dense que le fluide déplacé. Le rôle de la gravité est ici évident : elle a tendance à faire passer le fluide le plus dense en-dessous du fluide le moins dense, et donc à déstabiliser l’interface si le fluide le plus dense est au-dessus de l’autre, au départ.

Si le fluide déplaçant est le moins dense, l’interface est instable dès que la vitesse de filtration dépasse une valeur seuil. Le rôle des forces visqueuses est donc déstabilisant. Elles dominent l’effet gravitaire stabilisant dès que la vitesse de Darcy est suffisamment élevée. Si l’on avait considéré à l’inverse un fluide déplaçant plus visqueux que le fluide déplacé, les forces visqueuses auraient eu un effet stabilisant sur l’interface.

La tension de surface a toujours, quant à elle, un rôle stabilisant, puisqu’elle tend à limiter la courbure de l’interface. Cet effet induit une sélection en fréquence des instabilités [Feder, n.d.]. Les longueurs d’onde qui peuvent être déstabilisées sont plus grandes que la longueur d’onde critique  $\lambda_c$ . En outre, la relation (8.19) montre que le taux de croissance admet une valeur maximale pour une longueur d’onde

$$\lambda_m = \sqrt{3} \lambda_c \quad . \quad (8.21)$$

Les modes d’instabilité correspondant à cette longueur d’onde vont se développer plus vite que les autres. Pendant la phase de croissance initiale, dans laquelle on peut considérer que l’analyse linéaire est valable, cette longueur d’onde caractéristique  $\lambda_m$  devrait être décelable dans la digitation.

#### 8.1.3 Observations expérimentales de l’instabilité de Saffman-Taylor

Saffman et Taylor (1958) et Chuoke et al. (1959) ont publié à la même période l’analyse de stabilité linéaire du déplacement et des observations expérimentales confirmant les prédictions théoriques. La figure 8.2, extraite de [Saffman et Taylor, 1958], montre le développement de l’instabilité lorsqu’on déplace du glycérol par de l’air, dans une cellule verticale, de haut en



FIG. 8.3 – Étatement d’une goutte de fluide mouillant sur une surface solide, dans l’air. Dans le cas d’un fluide non-mouillant (sous-entendu non-mouillant vis-à-vis de l’air ; le mercure, par exemple) :  $\alpha < 90^\circ$  ; dans le cas d’un fluide mouillant :  $\alpha > 90^\circ$  (par exemple, eau vis-à-vis de l’air).

bas. L’analyse présentée au paragraphe 8.1.2 est valable, avec  $\rho_1 \simeq 0$  et  $\eta_1 \simeq 0$ . On constate le développement d’une instabilité initiale de longueur d’onde 2.2 cm, qui est cohérente avec la longueur d’onde  $\lambda_m \simeq 2.1$  cm la plus déstabilisée de la phase de croissance linéaire initiale.

## 8.2 Écoulements diphasiques en milieu poreux

On s’intéresse à présent au déplacement d’un fluide par un autre dans un milieu poreux bidimensionnel. La géométrie correspond à celle d’une cellule de Hele-Shaw (voir figure 8.1) dans laquelle on aurait déposé une monocouche de billes de verre disposées aléatoirement dans le plan de la “fracture”. Dans cette configuration, les effets capillaires vont intervenir à l’échelle des pores du milieu poreux, où ils auront une importance relative sur la dynamique de l’écoulement beaucoup plus importante que dans la cellule de Hele-Shaw. En particulier, le sens de la concavité des ménisques entre les deux fluides dans le milieu va être déterminant.

### 8.2.1 Définitions

#### Fluides mouillant / non-mouillant

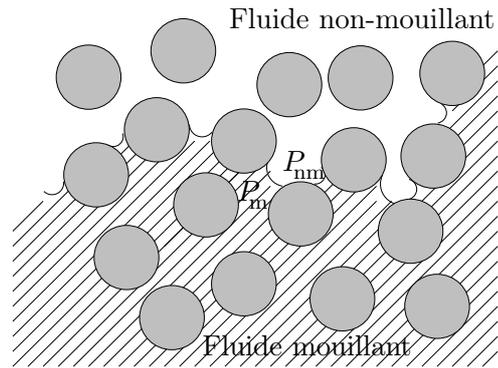
La dénomination *mouillant* / *non mouillant* pour les deux fluides se réfère à l’angle de contact de l’interface entre les deux fluides avec la phase solide . Le fluide dit mouillant est celui qui a tendance à accroître sa surface de contact avec la phase solide aux dépens de l’autre. L’interface entre les deux fluides forme un ménisque au voisinage de la paroi solide, et ce ménisque tourne sa concavité vers le fluide non-mouillant. Par exemple, le mercure est non-mouillant vis-à-vis de l’air, l’eau est mouillante vis-à-vis de l’air (cf. figure 8.3). Un même fluide peut être le fluide mouillant dans une expérience, et le fluide non-mouillant dans une autre. Par exemple, l’eau est mouillante lorsque la 2<sup>e</sup> phase fluide est de l’air ; elle est non-mouillante lorsque la 2<sup>e</sup> phase fluide est de l’huile silicone hexaméthylidisiloxane [Frette, Maløy, Schmittbuhl et Hansen, 1997].

Dans le milieu poreux, l’interface entre les deux fluides est constituée d’un grand nombre de ménisques, dont l’orientation permet de voir lequel est le fluide mouillant. Sur la figure 8.4, les ménisques tournent leur concavité vers le haut, ce qui indique que le fluide non-mouillant est au-dessus du fluide mouillant.

#### Drainage

On appelle *drainage* le déplacement d’un liquide mouillant par un liquide non-mouillant dans un milieu poreux. Une expérience de drainage telle que l’expérience présentée au chapitre 9 débute en général par une situation où le milieu poreux est saturé en fluide mouillant. Puis on instaure un écoulement stationnaire des deux fluides dans le milieu, soit en aspirant le fluide mouillant, soit en injectant le fluide non mouillant. L’*imbibition* est le processus inverse, où un fluide mouillant déplace un fluide non-mouillant.

FIG. 8.4 – Schéma de l’interface entre le fluide mouillant et le fluide non-mouillant, dans le milieu poreux bidimensionnel. En raison de la tension de surface des ménisques, la pression  $P_{nm}$  dans le fluide non-mouillant est supérieure à la pression  $P_m$  dans le fluide mouillant, lorsque les deux fluides sont au repos.



Dans la configuration décrite à la figure 8.4, le drainage consisterait en une extraction des fluides vers le bas. La progression de l’interface entre les deux fluides se fait par l’invasion continue de nouveaux pores et la formation de nouveaux ménisques dans d’autres canaux du milieu poreux. La notion d’interface entre les deux fluides peut être ambiguë, car deux digitations peuvent se rejoindre et coalescer, entraînant la formation d’un amas de fluide mouillant, piégé dans le fluide déplaçant. On appellera *front de drainage* la limite de pénétration du fluide non-mouillant dans le fluide mouillant ; les amas piégés sont laissés en arrière du front, au cours du déplacement.

### 8.2.2 Forces capillaires à l’échelle des pores

Dans le milieu poreux, le volume accessible aux fluides a une géométrie complexe définie par les positions aléatoires des billes. On n’a plus une seule interface entre les deux fluides, mais de nombreux ménisques, établis dans les canaux reliant certains pores du milieu poreux. On peut définir les canaux comme les zones où le chemin ouvert aux fluides est le plus étroit, et les pores comme les zones où les parois solides sont le moins resserrées. La loi de Young-Laplace (8.3) est valable pour chacun de ces ménisques au repos. Lorsque la différence de pression  $P_{nm} - P_m$  entre les deux fluides et à travers l’interface croît, les courbures s’ajustent pour assurer  $P_{nm} - P_m = P_c$ , jusqu’à ce que  $P_c$  atteigne une valeur seuil  $P_c^{(s)}$  pour laquelle le ménisque se déplace et un nouveau pore du milieu poreux est envahi par le fluide déplaçant. Les seuils de pressions capillaires sont caractéristiques de la topologie du milieu poreux, et constituent une distribution aléatoire reliée à la largeur des canaux permettant d’envahir les pores. Les rayons de courbure principaux d’un ménisque situé dans un canal de grande dimension (son diamètre, par exemple, si le canal est considéré comme cylindrique) seront plus grands que celui d’un ménisque situé dans un canal étroit, et en conséquence le seuil de pression capillaire correspondant à celui-ci sera plus élevé que le seuil de pression capillaire associé à celui-là. Cela signifie que les effets de tension de surface privilégient l’invasion des pores auxquels on accède par de larges canaux.

On comprend pourquoi le drainage et l’imbibition sont des processus très différents. Dans le drainage, il faut vaincre la résistance des forces de capillarité au sein du milieu poreux pour y faire pénétrer le fluide non-mouillant. Cette propriété est utilisée par les physiciens des roches pour déterminer expérimentalement la distribution de tailles de pores des roches [Guéguen et Palciauskas, 1992] (page 36). Lors de l’imbibition, au contraire, le fluide mouillant a tendance à être aspiré dans l’échantillon par les forces capillaires au niveau des pores, dont la dimension caractéristique  $a$  peut être du même ordre de grandeur que la *longueur capillaire* du fluide. La longueur capillaire est l’échelle caractéristique pour les phénomènes contrôlés par la tension de surface du liquide.

### 8.2.3 Description du déplacement des deux fluides en conditions de Stokes

#### Description à l'échelle du pore

**Écoulement monophasique** On se place dans des conditions où les effets inertiels sont négligeables vis-à-vis des autres force en présence. La dynamique de l'écoulement incompressible d'un fluide considéré comme un milieu continu à une échelle mésoscopique très inférieure à la taille des pores du milieu poreux, est régi par l'équation de continuité  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et par l'équation de Stokes (4.4), que nous rappelons ici :

$$\nabla P = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad . \quad (8.22)$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont extrêmement complexes, puisqu'elles font intervenir la géométrie complète des pores.

**Écoulement diphasique** Dans le cas d'un écoulement incompressible diphasique où l'un des fluides déplace l'autre, l'équation de continuité et l'équation (8.22) décrivent toujours la conservation locale de la masse et de la quantité de mouvement, respectivement, pour chacun des deux fluides. Mais la description physique de l'écoulement n'est pas complète si l'on n'inclut pas les effets de tension de surface au niveau des ménisques qui constituent l'interface entre les deux fluides. La description d'un ménisque au repos correspond à la loi de Young-Laplace (8.3) discutée plus haut. La description de la dynamique d'un ménisque est plus compliquée encore. On pourra se reporter à [Guyon, Hulin et Petit, 2001] pour quelques exemples d'une telle dynamique, ou à [Aker, 1999] pour une implémentation numérique de l'écoulement décrit à l'échelle des pores.

#### Milieu effectif

**Écoulement monophasique** En considérant une description de l'écoulement sous forme d'un *milieu effectif continu*, homogénéisé à l'échelle d'un *volume élémentaire représentatif* bien plus grand que le pore, on s'affranchit de la complexité des conditions aux limites liées à la description de l'écoulement à l'échelle des pores. Il est possible de généraliser la loi de Darcy locale (8.2) dans ce milieu effectif. Elle prend la forme :

$$\boxed{\mathbf{v}_d = -\frac{\kappa}{\eta} (\nabla P_d - \rho \mathbf{g})} \quad , \quad (8.23)$$

où les champs de vitesse  $v_d$  et de pression  $P_d$  sont définis à l'échelle du volume représentatif en question. La loi de Darcy est purement phénoménologique, et son expression sous forme "locale" (8.23) est soumise à caution [Matheron, 1967] (page 89-90).

À l'équation de Darcy locale, il faut rajouter une équation traduisant la conservation de la masse. La conservation de la masse de fluide dans un volume  $\mathcal{V}$  du milieu poreux s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \phi \rho dV = - \int_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{v}_d \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad (8.24)$$

où  $\phi$  désigne la porosité du milieu poreux. La relation intégrale (8.24) donne, sous forme différentielle

$$\boxed{\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}_d) = 0} \quad . \quad (8.25)$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible permanent dans un milieu poreux de porosité constante, l'équation locale de continuité se ramène à l'équation d'incompressibilité habituelle

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v}_d = 0} \quad . \quad (8.26)$$

**Écoulement diphasique – complexité des conditions aux limites** La validité de la description sous forme de milieu effectif d'un écoulement diphasique dans un milieu poreux est moins simple qu'elle ne l'est pour un écoulement monophasique. Il est difficile de prendre en compte dans une telle description le champ de pression capillaire inhomogène, qui ne peut être décrit qu'à l'échelle des ménisques, c.-à-d., à l'échelle des pores. Il est également impossible de prendre en compte les fluctuations importantes que l'on observe dans la "pression visqueuse" à l'échelle des pores [Homsy, 1987] (page 278). La description de la dynamique de l'interface est difficile à étudier par une telle approche, et l'on est contraint de s'en tenir à une description à l'échelle des pores, aussi complexe soit-elle. Cependant, l'approche du milieu effectif peut nous fournir une interprétation qualitative du rôle joué par les forces de dissipation visqueuse et la gravité.

### 8.2.4 Effet des forces visqueuses et de la gravité

Si les forces capillaires au niveau de l'interface entre les deux fluides jouent un rôle très important dans la dynamique du déplacement du fluide mouillant par le fluide non-mouillant, les effets de densité et de viscosité jouent le même rôle que celui qui a été exposé au paragraphe 8.1. Les équations (8.26) et (8.23) utilisées pour décrire la dynamique de l'écoulement dans le milieu effectif sont formellement identiques aux équations de continuité et de Darcy locale (8.2) utilisées dans la théorie de Saffman et Taylor. Les rôles stabilisant ou déstabilisant de la pesanteur et des forces visqueuses sont les mêmes dans le milieu effectif et dans la cellule de Hele-Shaw.

On peut ainsi prévoir que les forces visqueuses auront tendance à déstabiliser le déplacement d'un fluide plus visqueux par un fluide moins visqueux, et à stabiliser la configuration inverse, dans le milieu poreux comme dans la cellule de Hele-Shaw. Les effets gravitaires auront tendance à déstabiliser le déplacement vers le bas d'un fluide moins dense par un fluide plus dense, et à stabiliser la configuration inverse. De nombreuses études ont abordé les différentes combinaisons sur le sens du déplacement, le signe de la différence de densité, le rapport de viscosité, la vitesse de filtration, et mis en évidence différents régimes d'écoulements [Birovljev et al., 1991; Birovljev, Wagner, Meakin, Feder et Jøssang, 1995; Wagner, Birovljev, Meakin, Feder et Jøssang, 1997; Wagner, Meakin, Feder et Jøssang, 1997; Wagner et al., 2000]. Nous allons nous cantonner à une seule configuration, qui est présentée en détail au paragraphe 8.3.

### Nombres caractéristiques

Pour pouvoir estimer l'importance des effets stabilisants ou déstabilisants de la gravité et des forces visqueuses sur un écoulement diphasique dans un milieu poreux, il faut pouvoir les comparer à l'échelle du pore à l'intensité des forces capillaires. Ceci est particulièrement vrai pour le drainage, où les forces capillaires s'opposent au déplacement.

La pression capillaire typique dans un milieu poreux dont la taille typique de pore est  $a$  vaut  $\sigma/a$ . La chute de pression visqueuse typique à l'échelle d'un pore vaut  $\eta v a/\kappa$ . Le *nombre capillaire* quantifie l'importance relative des forces visqueuses et des forces capillaires sous la forme du rapport de ces deux grandeurs :

$$C_a = \frac{\left[ \frac{\nabla P}{P_c} \right]_{\text{pore}}}{\frac{\eta v a}{\kappa \sigma}} \quad , \quad (8.27)$$

soit

$$\boxed{C_a = \frac{\eta v a^2}{\sigma \kappa}} \quad . \quad (8.28)$$

Dans cette expression,  $\kappa$  est la perméabilité du milieu (que l'on suppose statistiquement homogène). La vitesse utilisée pour estimer le nombre capillaire est souvent la vitesse de Darcy  $V_d$ .

De la même façon, le *nombre de Bond* quantifie les importances relatives des effets gravitaires et des forces capillaires, sous la forme du rapport de la chute de pression hydrostatique typique à l'échelle du pore sur la pression capillaire typique :

$$B_o = \left. \frac{[\overline{\nabla P_h}]}{[P_c]} \right)_{\text{pore}} = \frac{\rho g a}{\frac{\sigma}{a}} \quad , \quad (8.29)$$

soit

$$\boxed{B_o = \frac{\rho g a^2}{\sigma}} \quad . \quad (8.30)$$

### 8.3 Drainage en milieu poreux bidimensionnel quand la densité et la viscosité du fluide non-mouillant peuvent être négligés

En raison des effets soit stabilisants, soit déstabilisants, des forces visqueuses et de la gravité, et des effets capillaires à l'échelle du pore, le drainage dans un milieu poreux donne lieu à une grande variété de comportements différents de l'interface, selon les signes du contraste de viscosité des fluides et de la différence des densités, et selon les vitesses d'extraction [Dullien, 1988]. On se restreint ici à une situation où le fluide non-mouillant déplaçant a une viscosité et une densité négligeables par rapport à celles du fluide mouillant déplacé, ce qui nous permet de supposer que la pression dans le fluide déplaçant est partout égale à la pression au niveau de l'admission du fluide dans le milieu poreux. Si le fluide non-mouillant est de l'air, la pression dans l'air injecté sera partout égale à la pression atmosphérique. Dans ce type de situation, les effets visqueux sont déstabilisants.

#### 8.3.1 Dynamique locale du déplacement

Si l'on considère que la viscosité et la densité du fluide déplaçant sont négligeables vis-à-vis de celles du fluide déplacé, par exemple dans le cas où l'on déplace un liquide visqueux (glycérol, huile silicone) par de l'air, l'association des équations (8.26) et (8.23) dans le milieu effectif conduit à l'équation de Laplace pour la pression  $P_d$  dans le milieu effectif.

$$\Delta P_d = 0 \quad . \quad (8.31)$$

Quand la pression  $P$  a un sens, c'est-à-dire en un point situé dans le fluide et non pas dans la phase solide, la pression  $P_d$  peut être considérée comme la moyenne locale à l'échelle du volume élémentaire représentatif de la pression  $P$ . La résolution de l'équation de Laplace dans le fluide mouillant fournit le champ de pression dans le fluide à l'échelle du volume élémentaire représentatif, pour une géométrie fixée de l'interface. La tentation est grande de ramener le problème à celui du déplacement dans une cellule de Hele-Shaw, une configuration où le champ de pression est lui aussi déterminé par l'équation de Laplace. Ainsi, pour une même géométrie de l'interface, les champs de pression seront les mêmes dans une cellule de Hele-Shaw et dans le milieu poreux bidimensionnel. Cependant, la dynamique locale de l'écoulement reste très différente. Dans la cellule de Hele-Shaw, la progression locale de l'interface dépend uniquement de la géométrie globale de l'interface, qui définit le champ de pression, et par suite, les vitesses locales au sein

du fluide mouillant. Dans le milieu poreux, au contraire, la progression locale du front de drainage ne dépend pas uniquement du champ de pression, et donc pas uniquement de la géométrie globale de l'interface, mais dépend de l'intensité de la pression  $P$  comparativement au seuil de pression capillaire des pores du milieu [Feder, 1988](page 52). Lorsque la différence de pression  $P_{nm} - P_m$  au niveau d'un pore est supérieure au seuil de pression capillaire du pore en question, le pore est envahi, et l'intégralité du champ de pression est redistribuée. La dynamique locale de l'écoulement dépend donc de deux effets : le champ de pression, contrôlé par l'équation de Laplace (comme dans la cellule de Hele-Shaw), et la distribution des seuils de pression capillaire au sein du milieu poreux. La progression locale de l'interface est ainsi "pilotée" par les effets capillaires. Du fait de l'inhomogénéité de la distribution des seuils de pression capillaire dans le milieu, la forme des figures de déplacements obtenues diffèrent énormément de ce qu'on observe dans une cellule de Hele-Shaw.

Nous allons d'abord considérer le drainage en l'absence de gravité. Deux types de déplacement sont bien connus, auxquels on se réfère en général par les termes *digitation capillaire* et *digitation visqueuse*, et qui correspondent respectivement à un drainage quasi-statique et à une extraction à vitesse de filtration importante.

Une situation intéressante apparaît lorsque le fluide déplaçant est au-dessus du fluide déplacé, et qu'il est moins dense. Dans ce cas, la gravité stabilise l'interface et entre en compétition avec les forces visqueuses.

### 8.3.2 Drainage en l'absence de gravité

#### Diagramme de phase du drainage en l'absence de gravité

Lenormand, Touboul et Zarcone (1988b) ont développé une simulation numérique de drainage dans un réseau bidimensionnel de pores reliés par des tuyaux, les volumes des pores et les diamètres des tuyaux étant distribués aléatoirement dans le réseau. Cette simulation leur a permis de considérer toutes les configurations possibles pour le drainage. Ils ont ainsi pu établir un diagramme de phase dans l'espace  $(M, C_a)$ , où  $M$  désigne le rapport des viscosités :

$$\boxed{M = \frac{\eta_m}{\eta_{nm}}} . \quad (8.32)$$

Ils ont également vérifié leurs prédictions numériques par des expériences. Le diagramme de phases est représenté à la figure 8.5. Chaque phase correspond à un régime d'écoulement :

1. Le déplacement *stable*, dans lequel l'interface reste plane et normale à la direction d'extraction. La rugosité de l'interface existe, du fait de l'inhomogénéité du milieu à l'échelle du pore, mais elle n'excède par quelques tailles de pore. Le déplacement est stable quand c'est le fluide le plus visqueux qui déplace l'autre. Cela correspond à la configuration de déplacement stable dans une cellule de Hele-Shaw horizontale. Nous ne considérerons pas ce type de déplacement dans tout ce qui suit.
2. La *digitation capillaire* a lieu aux vitesses d'extraction suffisamment faibles, et ce quel que soit le rapport de viscosité.
3. La *digitation visqueuse* a lieu quand le rapport de viscosité est grand, aux vitesses d'extraction moyennement élevées à élevées.

Le rectangle pointillé, sur la figure, représente le domaine de l'espace des paramètres qui nous intéresse. Nous allons à présent nous étendre plus sur les régimes-limites pour  $M$  grand : la digitation capillaire et la digitation visqueuse.

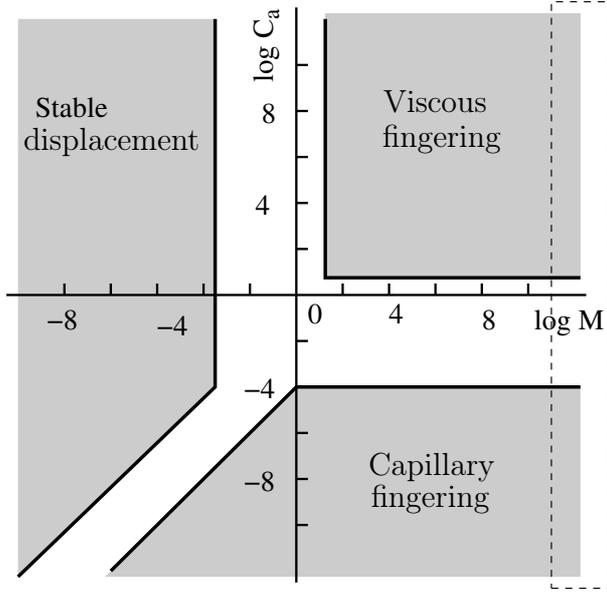


FIG. 8.5 – Diagramme de phase décrivant les différents comportements possibles de l’interface entre deux fluides pour le drainage dans un milieu poreux [Lenormand et al., 1988b]. Le rectangle en pointillés correspond aux configurations que nous considérons dans cette partie : le rapport des viscosités  $M = \eta_m/\eta_{nm}$  est très élevé.

### Digitation capillaire lors du drainage

**Un déplacement quasi-statique** La digitation capillaire concerne le domaine de vitesses d’extraction où les forces visqueuses n’ont aucune influence sur la géométrie de la structure de déplacement [Chandler et al., 1982; Lenormand et Zarcone, 1985; Lenormand et Zarcone, 1989]. Dans cette limite, on peut considérer en première approximation que les champs de pression sont uniformes dans les fluides, et que la différence de pression entre les deux fluides au niveau d’un ménisque constitutif de l’interface entre deux phase est

$$p_{nw} - p_m = \frac{2\sigma \cos \theta}{r}, \quad (8.33)$$

où  $r$  est le rayon du canal menant au pore, et  $\theta$  est l’angle de contact. Ainsi, c’est la distribution des seuils de pression capillaire qui contrôle l’invasion de nouveaux pores. La pression capillaire (uniforme) croît pour tous les pores, jusqu’à ce que l’un des ménisques devienne instable et soit envahi ; il s’agit du pore le plus “faible”, c’est-à-dire dont le canal d’entrée est le plus large. La pression capillaire est alors brutalement relaxée, puis elle recommence à croître et le processus se poursuit cycliquement.

Il faut noter que les forces visqueuses ne sont pas réellement négligeables. Chaque invasion d’un nouveau pore est un processus extrêmement dynamique où la pression capillaire accumulée au niveau du pore dont le ménisque a “cédé” est relaxée brutalement, provoquant localement des vitesses du fluide importantes, et donc une dissipation visqueuse importante [Måløy et al., 1992]. Mais les pressions sont ensuite redistribuées, avant que l’invasion d’un nouveau pore n’ait eu lieu, de sorte que l’invasion suivante est uniquement contrôlée par la pression capillaire.

La figure 8.6 présente un exemple d’expérience de digitation capillaire où de l’air déplace de l’huile de paraffine (de viscosité 20 cP) dans un milieu poreux bidimensionnel synthétique obtenu par moulage dans une résine transparente [Lenormand et Zarcone, 1985]. L’huile de silicone est noire, l’air apparaît blanc. L’air est injecté du côté gauche de la figure. Lorsqu’il atteint le côté droit, à la *percée*, il n’a plus besoin de déplacer l’huile pour parvenir à traverser le modèle, et la figure de déplacement n’évolue plus. L’amas blanc obtenu en fin d’expérience a une dimension fractale  $D \simeq 1.82$ . Måløy, Boger, Feder et Jøssang (1987) ont mené des expériences du même

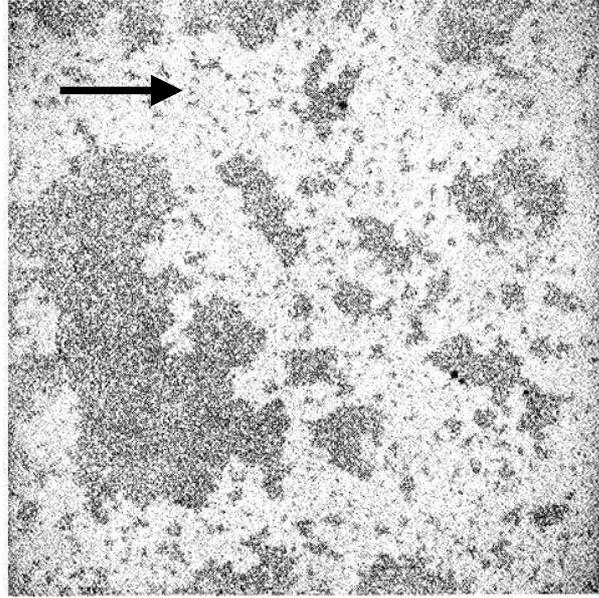


FIG. 8.6 – Expérience de digitation capillaire dans un milieu poreux bidimensionnel [Lenormand et Zarcone, 1985]. Le fluide non-mouillant est de l'air (blanc); le fluide mouillant déplacé est de l'huile de paraffine (noire).

type, dans un milieu poreux bidimensionnel formé d'un mono-couche de billes de verre. Ils ont mesuré une dimension fractale  $D = 1.84 \pm 0.04$ .

**Comparaison avec la percolation d'invasion** [Wilkinson et Willemsen, 1983] ont les premiers proposé un modèle dynamique qui simule correctement la digitation capillaire. Le processus d'invasion correspondant est appelé *percolation d'invasion*. Dans leur modèle, le milieu poreux est représenté comme un ensemble de sites (les pores) situés aux nœuds d'un réseau régulier, et reliés par des liens (les canaux entre les pores). L'inhomogénéité des seuils de pressions capillaires est traduite par l'assignation aléatoire d'un rayon à chaque canal et d'un volume à chaque pore. La simulation consiste à suivre le déplacement de l'interface, étape par étape, chaque étape consistant en l'invasion de celui des pores adjacents à l'interface qui a le canal d'entrée le plus large.

On peut ajouter au mécanisme d'invasion une condition de piégeage des amas, qui stipule que si un pore appartient à un amas de pores remplis de fluide mouillant qui est complètement entouré par le fluide non-mouillant, ce pore ne peut pas être envahi par le fluide déplaçant. Dans ce cas, on reproduit bien les structures de déplacement observées expérimentalement pour la digitation capillaire. En particulier, la dimension fractale de l'interface obtenue par injection à une extrémité du milieu poreux et arrêt du processus quand le fluide non-mouillant atteint le côté opposé du modèle est  $D \simeq 1.82$  [Wilkinson et Willemsen, 1983], ce qui est cohérent avec les valeurs mesurées expérimentalement par Lenormand et Zarcone (1985) et Måløy, Boger, Feder et Jøssang (1987).

### Digitation visqueuse

**Caractérisation des structures de déplacement** Une autre configuration bien connue est celle où le nombre capillaire est modérément élevé à élevé et où l'effet stabilisant de la gravité est réduit. Dans une cellule de Hele-Shaw, cette situation conduirait à l'apparition d'une digitation qui se développe dans la direction du déplacement, jusqu'à la percée. Ce régime d'écoulement a été étudié aussi bien expérimentalement [Måløy et al., 1985; Måløy, Boger, Feder, Jøssang

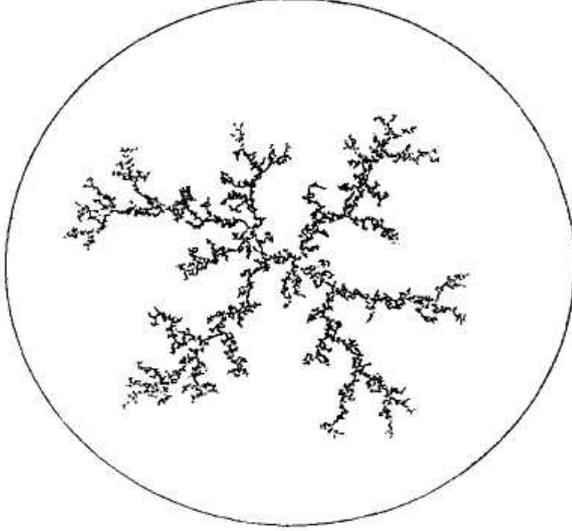


FIG. 8.7 – Figure de digitation visqueuse en milieu poreux bidimensionnel, obtenue par Måløy, Boger, Feder, Jøssang et Meakin (1987) en injection centrale. Le fluide déplaçant est de l’air, le fluide déplacé du glycérol. La pression d’injection vaut 20.2 mm de mercure, et le nombre capillaire est de l’ordre de 0.15. La dimension fractale de la structure de déplacement est  $D = 1.64 \pm 0.04$ .

et Meakin, 1987; Nittman, 1986] que numériquement [Chen et Wilkinson, 1985; Lenormand et al., 1988a; Aker et al., 1998]. La figure 8.7 présente une photographie de digitation visqueuse en milieu poreux bidimensionnel, obtenue par Måløy, Boger, Feder, Jøssang et Meakin (1987), pour une valeur du nombre capillaire  $C_a = 0.04$ . Le milieu poreux est constitué d’une mono-couche de billes de verre collées entre deux plaques de verre. L’air a tendance à pénétrer dans le glycérol en suivant un chemin tortueux et très branché, ce qui témoigne d’un déplacement manifestement instable. La forme de la structure de déplacement résultante suggère une géométrie fractale. Des expériences ont également été réalisées en remplaçant le glycérol par de la colle époxy ; la durée d’une expérience (quelques dizaines de s) est très inférieure au temps de gélification de l’époxy (6 à 10 heures). Måløy, Boger, Feder, Jøssang et Meakin (1987) ont mesuré la dimension fractale en comptant dans l’image le nombre  $N(r)$  de pixels qui correspondent à de l’air et qui sont compris dans un cercle de rayon  $r$  et centré sur le point d’injection. Pour le glycérol comme pour l’époxy, et pour différentes photos d’un même expérience, la fonction  $N(r)$ , normalisée par le nombre total  $N_0$  de pixels qui correspondent à l’air, vérifie la relation d’échelle suivante, en fonction de la distance  $r$  au point d’injection, normalisée par le rayon de giration de la structure de digitation :

$$\boxed{\frac{N(r)}{N_0} = \left(\frac{r}{R_g}\right)^D f\left(\frac{r}{R_g}\right)} \quad . \quad (8.34)$$

Si les rayons  $r_i$  sont les distances des points de la structure de digitation au point d’injection, le rayon de giration est défini comme

$$R_g = \sqrt{\frac{\sum_i r_i^2}{N_0}} \quad . \quad (8.35)$$

La fonction d’échelle  $f(x)$  est constante pour  $x < 1$ , et tend vers  $x^{-D}$  aux grandes valeurs de  $x$ . La structure de déplacement est donc fractale dans le domaine d’échelles  $l < R_g$ , avec une dimension fractale qui a été mesurée par Måløy, Boger, Feder, Jøssang et Meakin (1987) à

$$\boxed{D = 1.64 \pm 0.04} \quad . \quad (8.36)$$

**Comparaison avec la DLA** L'agrégation limitée par la diffusion (*Diffusion-Limited Aggregation*) désigne l'ensemble des problèmes où des particules sont déposées au hasard sur une surface et sont autorisées à s'y déplacer de manière aléatoire, jusqu'à ce qu'elles atteignent un amas de particules (qui est par définition fixe). Lorsqu'une particule atteint un amas, elle s'y agglomère. Si la marche au hasard des particules se fait par pas  $a$  dans une direction aléatoire,  $f$  fois par  $s$ , et si l'on fait tendre cette description vers le continu, la concentration  $C(x, y, t)$  de particules est contrôlée par l'équation de diffusion [Feder, 1988]

$$\partial_t C = \mathcal{D} \Delta C \quad , \quad (8.37)$$

où le coefficient de diffusion est  $\mathcal{D} = f a^2/2$ .

En régime permanent (déposition des particules sur la surface à taux constant), l'équation de diffusion se réduit à une équation de Laplace, tandis que la vitesse de croissance de la frontière d'un amas, perpendiculairement à sa tangente, est donnée par la relation [Witten et Sander, 1983] :

$$V_{\perp} = -\mathcal{D} \mathbf{n} \cdot \nabla C)_s \quad . \quad (8.38)$$

Cette description est analogue à la description du drainage lorsque le fluide non-mouillant a une viscosité négligeable. L'analogie formelle fait correspondre le potentiel de vitesse  $\phi$  (c'est-à-dire, en l'absence de gravité et à une constante près, le champ de pression) du fluide mouillant avec la concentration  $C$  en particules, et la vitesse des interfaces entre les deux fluides avec la vitesse de l'interface des amas de particules en DLA [Paterson, 1984]. Une comparaison entre une simulation de DLA et une expérience de digitation visqueuse en milieu poreux, avec des conditions initiales et aux limites analogues, montre que la DLA décrit correctement la croissance des digitations visqueuses en milieu poreux bidimensionnel [Witten et Sander, 1981; Witten et Sander, 1983; Meakin, 1983; Hinrichsen, Måløy, Feder et Jøssang, 1989], notamment en ce qui concerne la dimension fractale de la structure de déplacement.

### 8.3.3 Drainage capillaire en présence de gravité

On se place ici dans une configuration de filtration lente, où le déplacement en gravité nulle correspond au régime de digitation capillaire (cf. figure 8.5). Que se passe-t-il lorsque la composante de l'accélération de la pesanteur sur le plan du modèle est non nulle ?

#### Observations

La digitation capillaire en présence d'effets gravitaires a été étudiée à la fois en deux et en trois dimensions [Clément, Baudet et Hulin, 1987; Birovljev et al., 1991; Birovljev et al., 1995]. Birovljev et al. (1991) l'ont étudiée pour un milieu bidimensionnel, à la fois expérimentalement et numériquement. Ils ont utilisé un dispositif expérimental qui peut être incliné pour faire varier la composante de la gravité apparente  $g = g_0 \sin \theta$  (où  $\theta$  est l'angle d'inclinaison). Les simulations ont quant à elles été réalisées à l'aide d'un algorithme d'invasion de percolation où les seuils de pressions capillaires sont obtenus comme la somme d'une distribution aléatoire et d'un gradient dans la direction de plus grande pente du réseau de pores. Le gradient est dirigé vers le bas et rend compte des effets gravitaires.

La figure 8.8 présente des photos d'expériences et de simulations réalisées par [Birovljev et al., 1991], pour différentes valeurs de  $g$ . On observe une *stabilisation* du front de drainage par la gravité. Par "stabilisation", on entend que la rugosité de l'interface garde une extension finie dans la direction transverse à l'écoulement. Au début de l'expérience, la rugosité du front est

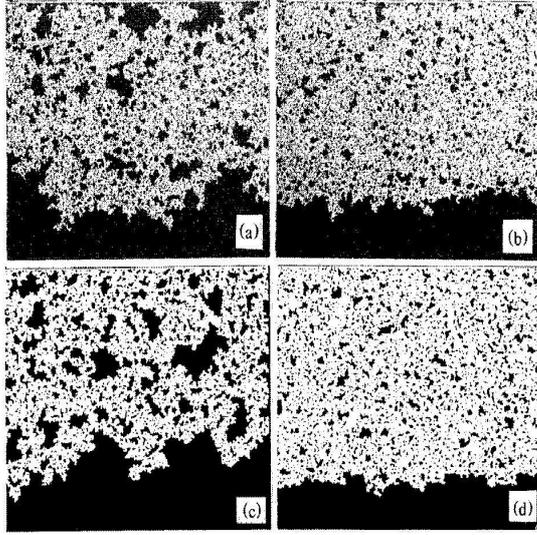


FIG. 8.8 – Figures de digitation capillaire en présence de gravité [Birovljev et al., 1991]. Un mélange d’eau et de glycérol est déplacé par de l’air. Les deux figures du haut sont des photos d’expérience à (a)  $\theta = 3^\circ$  ( $B_o = 0.005$ ) et (b)  $\theta = 11^\circ$  ( $B_o = 0.018$ ). Les deux figures du bas sont issues de simulations numériques par percolation d’invasion avec un gradient dans les seuils de pression capillaire : (c)  $B_o = 0.001$  et (d)  $B_o = 0.01$ .

nulle ; elle se développe, mais finit par atteindre une amplitude finie. La *largeur du front* dans la direction  $z$  (verticale) est définie comme cette valeur de saturation de l’amplitude de la rugosité du front. On constate sur la figure 8.8 que la largeur du front est d’autant plus petite que la gravité est importante. Le terme de “stabilisation” que nous employons ici et dans toute la suite de l’exposé *n’a rien à voir avec ce que Lenormand et al. (1988b) ont appelé “déplacement stable” dans leur diagramme de phase.*

### Loi d’échelle de la largeur du front

La diminution de la largeur du front de drainage quand on augmente la gravité est compréhensible du point de vue qualitatif : la gravité s’oppose à des différences d’avancement trop grandes entre différents points de l’interface, et ce d’autant plus qu’elle est importante. Birovljev et al. (1991) prévoient théoriquement et vérifient expérimentalement une loi d’échelle pour la largeur  $w$  du front en fonction du nombre de Bond, de la forme :

$$w = B_o^{-\frac{\nu}{\nu+1}} \quad , \quad (8.39)$$

où  $\nu$  est l’exposant pour la longueur de corrélation. La théorie de la percolation nous indique qu’en deux dimensions :  $\nu = 4/3$ , de sorte que l’exposant attendu pour la loi (8.39) est  $-4/7 \simeq -0.57$ .

Considérons un pore du front, situé à l’altitude  $z$  par rapport à une altitude référence qui est le niveau zéro des pressions. La pression capillaire au niveau de ce pore est la différence entre les pressions dans les deux fluides. La pression dans le fluide non-mouillant est constante, c’est la pression à l’entrée du système ( $P_e$ ). La pression dans le fluide mouillant vaut  $P_s - \rho g z$ , où  $P_s(t)$  est la pression à la sortie du modèle. La pression capillaire vaut ainsi

$$P_c(z) = P_e - P_s(t) + \rho g z \quad , \quad (8.40)$$

avec  $g = g_0 \sin \alpha$ . En particulier, pour un modèle en position horizontale (équivalent à la percolation d’invasion), la pression capillaire est la même pour tous les pores le long du front. Dans le cas où le modèle n’est pas horizontal, elle dépend de l’avancement du ménisque considéré. À un instant donné, la différence entre les pressions capillaires au niveau de deux ménisques qui ont des avancements différents de  $Z$  dans la direction  $z$  est  $\rho g Z$ . Cette situation est équivalente à un

modèle de percolation où la probabilité d'occupation des sites dépend de l'altitude  $z$  [Birovljev et al., 1991].

Notons  $p(z)$  la probabilité d'occupation d'un pore, et  $p^*$  la probabilité d'occupation critique qui permet d'avoir un amas de percolation à travers tout le réseau lorsque le système est horizontal. À un instant donné, le long du front, il existe un pore dont la probabilité d'être envahi est  $p^*$ . Notons  $z^*$  l'altitude de ce point. Si l'on revient à la description physique de notre système, la probabilité  $p(z)$  est reliée aux pressions capillaires  $P_c$  par la relation [Birovljev et al., 1991]

$$p(z) = p^* + \int_{P_c^*}^{P_c(z)} N(P_c^{(s)}) dP_c^{(s)} \quad , \quad (8.41)$$

où  $P_c^*$  est la pression capillaire minimale qu'il faut appliquer pour que le déplacement du fluide conduise le fluide non-mouillant jusqu'au fluide mouillant, dans un modèle plan. Lorsque  $\Delta P < P_c^*$ , il n'y a pas de chemin percolant pour le fluide déplaçant entre l'entrée et la sortie du modèle plan.  $N(P_c^{(s)})$  est la distribution des seuils de pression capillaire dans le milieu poreux.

La loi (8.39) est fondée sur le fait que les amas piégés derrière le front sont créés lorsque deux digitations coalescent. La largeur du front peut donc être assimilée à la longueur de corrélation  $\xi$  des amas piégés, dont la théorie de la percolation nous dit qu'elle suit une loi d'échelle de la forme [Wilkinson, 1984; Gouyet, Rosso et Sapoval, 1988; Stauffer et Aharony, 1991; Birovljev et al., 1991]

$$\xi = A a (p - p^*)^{-\nu} \quad , \quad (8.42)$$

où  $A$  est une constante sans dimension,  $a$  est la taille de pore typique. La loi (8.42) est valable pour un modèle plan, où la probabilité  $p$  est constante dans le réseau. Dans le cas de notre réseau incliné, il faut considérer  $p(z = z^* + \xi)$  [Sapoval, Rosso et Gouyet, 1985] :

$$\xi = A a [p(z^* + \xi) - p^*]^{-\nu} \quad . \quad (8.43)$$

Si l'on suppose que la distribution  $N$  varie peu autour de  $P_c^*$ , on peut développer  $N(P_c^{(s)})$  selon

$$N(P_c^{(s)}) = N(P_c^*) + N'(P_c^*)(P_c^{(s)} - P_c^*) + \dots \quad ,$$

de sorte que la relation (8.41) devient, au premier ordre en  $P_c$  :

$$\begin{aligned} p(z) - p^* &= N(P_c^*) (P_c(z) - P_c^*) \\ p(z) - p^* &= N(P_c^*) (\rho g (z - z^*)) \quad . \end{aligned} \quad (8.44)$$

Si l'on approxime la distribution  $N$  comme une fonction créneau, la normalisation impose  $N(P_c^*) = 1/W$ , où  $W$  est la largeur de la distribution. On introduit ici le *nombre de fluctuation* [Auradou et al., 1999] :

$$F = \frac{\rho g a}{W} = \frac{\sigma}{a W} B_o \quad . \quad (8.45)$$

qui compare la chute de pression hydrostatique typique au niveau d'un pore à la largeur de la distribution sur les seuils de pression capillaire, c'est-à-dire à la dispersion des pressions capillaires dans le milieu poreux. Alors la relation (8.44) évaluée en  $z = z^* + \xi$  devient

$$p(z^* + \xi) - p^* = \frac{\xi}{a} F \quad . \quad (8.46)$$

En confrontant les relations (8.43) et (8.46), on obtient une estimation de la largeur du front en unités de pore :

$$\boxed{w = \frac{\xi}{a} \sim F^{-\frac{\nu}{1+\nu}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{w = \frac{\xi}{a} \sim B_o^{-\frac{\nu}{1+\nu}}} \quad . \quad (8.47)$$

### 8.3.4 Digitation visqueuse en gravité non nulle

#### Problématique

Lorsqu'on accroît la vitesse d'extraction, on parvient dans un régime où les effets visqueux ont une influence non nulle sur l'écoulement. Si le milieu poreux est horizontal, on observe de la digitation visqueuse. Lorsque la gravité est non nulle, on peut s'attendre à ce qu'elle empêche la digitation de se développer indéfiniment, et astreigne l'interface à conserver une largeur finie dans la direction du déplacement, comme elle le fait pour la digitation capillaire. Dans une cellule de Hele-Shaw, on observe cette stabilisation pour une gravité suffisante, à vitesse d'extraction fixée, ou, de manière équivalente, pour une vitesse d'extraction suffisamment basse, à gravité fixée.

La problématique qui se pose à nous est la suivante. Dans un milieu poreux bidimensionnel, est-t-il possible d'observer la stabilisation par la gravité d'une interface de drainage lorsque la vitesse d'extraction est suffisamment grande pour que les effets visqueux influencent significativement la forme de l'interface, et qu'on ne soit plus dans le régime de la digitation capillaire ? Si l'on observe effectivement une telle stabilisation, quel est le critère de transition entre les déplacements stables et instables ? La réponse à cette question est bien connue dans le cas où il n'y a pas de milieu poreux entre les plaques.

#### Discussion – Que nous apprend la théorie de Saffman-Taylor ?

Saffman et Taylor (1958) ont avancé dans leur article que la cellule de Hele-Shaw pouvait être considérée comme un modèle pertinent pour l'étude de l'instabilité visqueuse dans un milieu poreux. Plus précisément, la théorie de Saffman et Taylor (1958) présentée au paragraphe 8.1 a été développée pour l'étude de l'écoulement diphasique dans un milieu poreux. C'est la raison pour laquelle on a conservé les notations  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$ , bien que les deux perméabilités soient identiques dans le cas de la cellule de Hele-Shaw. Puis les auteurs ont présenté la cellule de Hele-Shaw comme une configuration analogue leur permettant de tester expérimentalement leurs prédictions théoriques, avec un système expérimental plus facile à manipuler. L'analogie développée par Saffman et Taylor (1958) était motivée par l'équivalence formelle entre les équations décrivant l'écoulement diphasique dans la cellule de Hele-Shaw et les équations décrivant l'écoulement dans un milieu effectif défini pour décrire le milieu poreux à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif beaucoup plus grand que le pore (cf. paragraphe 8.2.3).

De nombreux travaux expérimentaux et numériques ont montré l'importance du rôle joué par les effets de tension de surface et de viscosité à l'échelle du pore, et prouvé que la description en termes de milieu effectif n'était pas appropriée à la description de la dynamique du front de drainage. Les digitations capillaire et visqueuse présentées plus haut en sont des exemples. Dans ces conditions, quelle information les résultats obtenus dans la géométrie de Hele-Shaw peuvent-ils nous apporter dans notre étude de l'instabilité visqueuse dans un milieu poreux ? Les forces en présence sont les mêmes, les grandeurs physiques qui contrôlent la dynamique de l'écoulement sont les mêmes : viscosités  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , vitesse de Darcy  $V_d$ , densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , accélération de la pesanteur  $g$ , tension de surface. Une instabilité similaire à l'instabilité de Saffman and Taylor doit être observable dans un milieu poreux. Une telle instabilité n'est pas expliquée par la théorie de Saffman et Taylor, mais cette théorie nous fournit de précieux indices quant aux paramètres de contrôle possibles de l'instabilité. En particulier, on s'attend à ce que la gravité et les forces visqueuses jouent un rôle similaire. La tension de surface, qui n'agit pas à la même échelle dans le milieu poreux, pilote la dynamique locale du déplacement des ménisques. A-t-elle un rôle important de stabilisation de l'instabilité, comme dans la géométrie de Hele-Shaw ?

## **Conclusion**

Le déplacement d'un fluide mouillant par un fluide non-mouillant de densité et de viscosité comparativement négligeables dans un milieu poreux bidimensionnel fait intervenir, outre les forces de dissipation visqueuse et la gravité, les forces capillaires à l'échelle des pores du milieu poreux. Lorsque le déplacement s'effectue du haut vers le bas, les forces visqueuses tendent à déstabiliser le front de drainage contre l'effet stabilisant de la gravité. La théorie de Saffman-Taylor, qui décrit un écoulement similaire dans une cellule de Hele-Shaw, permet de comprendre qualitativement ces effets visqueux et gravitaires. Mais elle ne permet pas de rendre compte de la complexité des figures de déplacement observées dans un milieu poreux, ni des différents régimes d'écoulement observés.

La stabilisation d'une interface de drainage par la gravité dans un milieu poreux a été étudiée à la fois théoriquement et expérimentalement dans des cas où la géométrie de l'interface est contrôlée par la compétition entre les effets capillaires et gravitaires. Des études sur la migration par gravité d'un fluide moins dense dans un fluide plus dense ont également été menées, expérimentalement, théoriquement et par des simulations numériques [Wilkinson, 1984; Clément et al., 1987; Birovljev et al., 1991; Auradou et al., 1999]. Toutes ces études se concentrent sur des conditions où les forces visqueuses n'ont pas d'influence sur la géométrie de la structure de déplacement. Nous nous proposons d'étudier une situation où les forces de dissipation visqueuse, la tension de surface aux interfaces, et la gravité jouent toutes un rôle significatif. C'est l'objet de l'étude présentée au chapitre 9.

# Chapitre 9

## Instabilité visqueuse pendant le drainage

### Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>273</b>
<b>9.1 Présentation du dispositif expérimental</b> . . . . .	<b>273</b>
9.1.1 Un modèle expérimental de milieu poreux bidimensionnel . . . . .	273
9.1.2 Fluides utilisés . . . . .	275
9.1.3 Enregistrements . . . . .	275
Dispositif d'enregistrement des pressions . . . . .	275
Dispositif photographique . . . . .	276
9.1.4 Déroulement d'une expérience . . . . .	276
Comment ajuster la pesanteur ? . . . . .	277
Comment contrôler la vitesse de filtration ? . . . . .	277
<b>9.2 Méthodes d'analyse de la géométrie du front de drainage</b> . . . . .	<b>277</b>
9.2.1 Traitement des images . . . . .	278
Seuillage de l'image brute . . . . .	278
Extraction de la plus grande région noire continue – extraction des amas piégés . . . . .	282
Implémentation numérique . . . . .	283
9.2.2 Méthodes d'analyse du front . . . . .	284
Analyse du front . . . . .	284
<b>9.3 Observation de l'instabilité visqueuse</b> . . . . .	<b>284</b>
9.3.1 Digitation capillaire en présence de gravité . . . . .	285
9.3.2 Digitation visqueuse . . . . .	285
9.3.3 Observation des structures de déplacement pour différentes valeurs de $C_a$ et $B_o$ . . . . .	285
9.3.4 Caractérisation de l'instabilité . . . . .	290
<b>9.4 Confirmation théorique des observations expérimentales</b> . . . . .	<b>290</b>
9.4.1 Étude d'une configuration stable . . . . .	290
Évolution du saut de pression à travers le modèle . . . . .	291
Loi d'échelle pour la largeur du front . . . . .	291
9.4.2 Critère d'instabilité . . . . .	292
<b>9.5 Dynamique de l'instabilité</b> . . . . .	<b>292</b>
9.5.1 Dynamique du déplacement stable . . . . .	292

9.5.2 Discussion – quel lien avec l’instabilité de Saffman-Taylor? . . . . .	293
<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>294</b>
<b>Annexe : Competition between gravity and viscous effects during drainage . . . . .</b>	<b>295</b>

---

## Introduction

Nous nous intéressons dans ce chapitre au déplacement d'un fluide mouillant du haut vers le bas par de l'air, non mouillant et dont la densité et la viscosité peuvent être négligées. Dans cette configuration, les forces visqueuses ont tendance à déstabiliser l'interface, tandis que la gravité tend à annihiler toute différence d'altitude entre deux points du front ; elle a un effet stabilisant. Le déplacement du front de drainage est défini comme stable lorsque l'amplitude de sa rugosité ne croît pas indéfiniment au cours du déplacement, mais atteint au bout d'un certain temps une valeur de saturation autour de laquelle elle fluctue. Les intensités des forces visqueuses et de la gravité sont estimées à l'échelle du pore relativement à celles des effets capillaires grâce aux nombres capillaires et de Bond, respectivement, que l'on a définis au chapitre 8. Ces deux nombres peuvent être modifiés indépendamment l'un de l'autre en faisant varier la vitesse de filtration, et l'inclinaison du milieu poreux sur la verticale, respectivement. Nous présentons ici une expérience où l'on a cherché à observer la transition entre le déplacement stable et le déplacement instable, et à caractériser l'instabilité du point de vue expérimental et théorique. La transition entre le régime dominé par la gravité et celui où les forces visqueuses sont prédominantes n'a jamais été étudiée pour un milieu poreux, sauf à l'échelle d'un réservoir [Fayers, Jouaux et Tchelepi, 1994].

Nous avons adopté dans ce chapitre une approche plus phénoménologique que celle qui est présentée dans l'article placé en annexe [Méheust, Løvoll, Måløy et Schmittbuhl, 2002]. Dans la première partie, nous présentons le dispositif expérimental. Une deuxième partie est consacrée au traitement des données, sur lequel on s'est attardé, car certains points techniques n'apparaissent pas dans l'article. Dans une troisième partie, nous observons l'instabilité et la caractérisons expérimentalement. Des arguments théoriques présentés dans une quatrième partie confirment le seuil d'instabilité observé et permettent de prévoir une loi d'échelle pour la largeur du front, qui est vérifiée expérimentalement. Dans la dernière partie enfin, nous étudions la dynamique du déplacement stable, et la comparons à celle de l'instabilité de Saffman-Taylor.

### 9.1 Présentation du dispositif expérimental

L'expérience de drainage en milieu poreux bidimensionnel a été réalisée à l'Institut de Physique d'Oslo (Norvège).

#### 9.1.1 Un modèle expérimental de milieu poreux bidimensionnel

Le milieu poreux bidimensionnel est préparé selon une procédure bien maîtrisée par l'équipe de physique de la matière condensée de l'Institut de Physique d'Oslo. Des modèles de milieu poreux bidimensionnels similaires ont été utilisés par Måløy et al. (1985), Frette et al. (1997) et Vedvik, Wagner, Oxaal, Feder, Meakin et Jøssang (1998).

Le milieu poreux bidimensionnel est constitué d'une unique couche de billes de verre de diamètre  $d = 1$  mm, que l'on verse sur un papier collant biface jusqu'à ce qu'on ne puisse plus fixer de nouvelles billes sur le papier. Puis on enlève l'excès de billes en balayant les billes qui n'adhèrent pas au papier collant, et on vérifie à l'œil qu'on a bien obtenu une seule couche. Les billes sont ainsi disposées de manière aléatoire dans le modèle, ce qui garantit une distribution aléatoire des tailles de pore et des canaux d'accès aux pores. Le milieu poreux ainsi préparé est découpé selon un carré de taille  $L \times L$ , avec  $L = 350$  mm. Puis il est collé sur une plaque de plexiglas dans laquelle sont gravés deux canaux parallèles, longs de 350 mm, larges de 8 mm, profonds de 5 mm, et distants de 350 mm l'un de l'autre. Ces deux canaux sont les canaux qui distribuent les fluides à leur entrée dans le modèle et les collectent à la sortie. La couche de billes

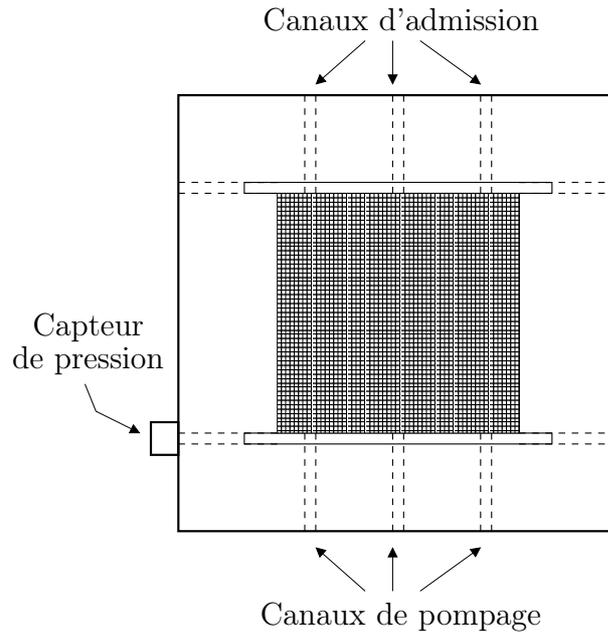


FIG. 9.1 – Détail de la plaque de plexiglas sur laquelle est collée la monocouche de billes de verre (représentée sous forme de quadrillage). Les deux canaux horizontaux servent à distribuer les fluides à l'admission et au pompage. Ils se prolongent dans l'épaisseur de la plaque (cf traits pointillés) jusqu'à ses bords pour permettre la mesure de pression au niveaux des canaux horizontaux.

vient prendre place entre les deux canaux, et deux côtés en regard viennent affleurer chacun un des canaux (voir figure 9.1). La plaque est par ailleurs percée dans son épaisseur de canaux d'admission et de pompage, qui débouchent dans les deux canaux mentionnés précédemment, auxquels ils sont perpendiculaires. Quand le modèle sera prêt, on connectera les canaux de pompage à une pompe, et on installera un capteur de pression à l'extrémité du canal de sortie.

Après que la couche de billes de verre a été fixée sur la plaque de plexiglas, on l'entoure d'un ruban de colle silicone, qui assurera l'étanchéité du milieu poreux. Puis on colle sur le tout une deuxième feuille de papier collant biface (cf. figure 1 de l'annexe, page 299). L'ensemble est ensuite renversé et placé sur une plaque de plexiglas munie d'un coussin rempli d'eau. Le coussin est pris en sandwich entre la couche de billes et la deuxième plaque de plexiglas ; il est relié à un réservoir placé à 2 m du sol, qui assure une pression hydrostatique constante dans le coussin. Grâce au coussin, chaque bille vient se loger dans une sorte de petite cuvette individuelle, d'où elle ne bouge plus, malgré l'écoulement très visqueux à travers le milieu poreux. Le feuilletage composé de la première plaque de plexiglas, de la couche de billes de verre, du coussin d'eau et de la deuxième plaque de plexiglas, est maintenu en position serrée par des serres-joints.

La porosité  $\Phi$  (c.-à-d., la proportion de vide) du modèle a été mesurée pendant son remplissage. On mesure la différence d'altitude des niveaux de fluide mouillant avant et après injection d'un volume connu  $V_i$ . La différence d'altitude entre les deux niveaux permet de déterminer le volume  $V_{app}$  du milieu poreux (billes + pores) qui a été envahi par le fluide durant l'injection. Une fraction  $\Phi$  seulement de ce volume correspond au volume injecté :  $\Phi = V_i/V_{app}$ . On a ainsi mesuré  $\Phi = 0.63$ . Le volume des billes de diamètre  $d = 1$  mm est  $dL(1 - \Phi)$ , ce qui correspond à 89000 billes dans la couche. En considérant qu'il y a autant de pores que de billes dans le milieu poreux, et en approximant les pores comme des sphères, on obtient la dimension typique d'un pore comme

$$a = d \sqrt[3]{\frac{\Phi}{1 - \Phi}} = 1.19 d \sim 1.2 \text{ mm.} \quad (9.1)$$

La perméabilité du milieu poreux a été mesurée en imposant un écoulement monophasique dans le modèle, pour différentes valeurs de la vitesse d'extraction. La pente  $p$  de la courbe reliant la différence de pression mesurée entre la sortie et l'entrée du modèle au débit imposé par la

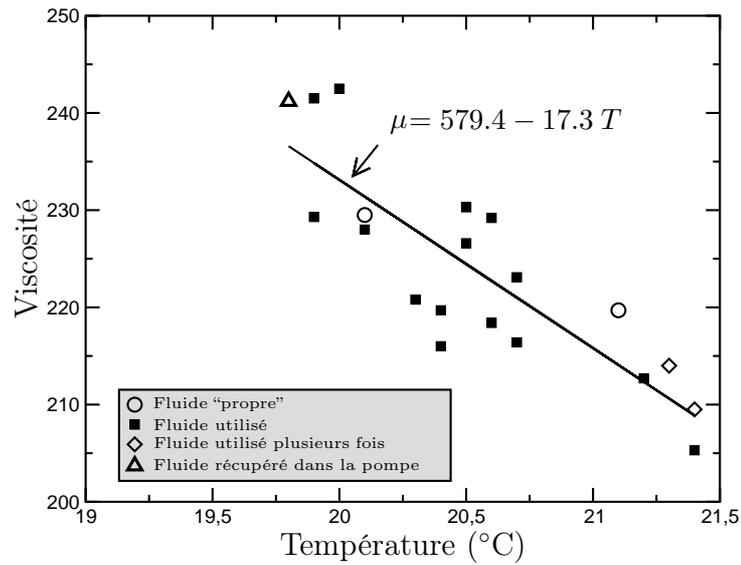


FIG. 9.2 – Dépendance de la viscosité du fluide mouillant vis-à-vis de la température. La viscosité du fluide a été mesurée avant son utilisation et après qu’il a été utilisé de diverses manières.

pompe est reliée à la perméabilité par la relation

$$\kappa = \frac{\eta L}{p d^2} . \quad (9.2)$$

La perméabilité du modèle est  $\kappa = 0.0189 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 = 1948 \text{ darcy}$ .

### 9.1.2 Fluides utilisés

Le fluide mouillant est un mélange à 90%/10% en masse de glycérol et d’eau, teinté en noir à 0.1 % de négrosine. Sa viscosité est  $\eta = 0.2 \text{ Pa.s}$ , sa densité  $\rho = 1235 \text{ kg.m}^{-3}$  à température ambiante. Le fluide non-mouillant est l’air, à température ambiante. Sa viscosité et sa densité valent respectivement  $1.9 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$  et  $116 \text{ kg.m}^{-3}$ , et sont considérées comme négligeables vis-à-vis des viscosité et densité du fluide mouillant, respectivement. La tension de surface entre les deux fluides a été mesurée à  $\sigma = 6.4 \cdot 10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$ .

La dépendance en température de la viscosité du fluide mouillant a été mesurée (voir figure 9.2). La température du fluide est mesurée à la sortie du modèle, plusieurs fois par expérience. On en déduit ainsi sa viscosité. On suppose un écart inférieur à  $1^\circ\text{C}$  entre la température du fluide dans le modèle et sa température à la sortie, ce qui correspond à une incertitude de  $2 \cdot 10^{-2} \text{ Pa.s}$  sur la viscosité estimée.

### 9.1.3 Enregistrements

On effectue deux types d’enregistrements, que l’on analysera pour caractériser la physique du déplacement. En premier lieu, on enregistre la pression au niveau du canal de sortie du modèle expérimental. En second lieu, on prend des photos du modèle à intervalles de temps réguliers.

### Dispositif d’enregistrement des pressions

La pression est mesurée à l’aide d’un capteur piezzo-électrique Honeywell 26PCA “Flow-through”. La résolution du capteur est de 1 Pa. Il se présente comme un cylindre que l’on branche

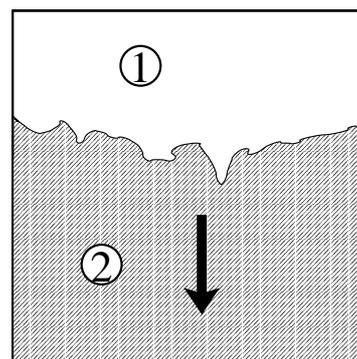


FIG. 9.3 – Le drainage correspond au déplacement par un fluide non mouillant (blanc) d’un fluide mouillant (noir) qui saturait initialement le milieu poreux.

en série du canal de sortie du modèle. On laisse le fluide couler dans le cylindre, puis on ferme l’écoulement en aval du cylindre. La cellule de mesure elle-même est située sur la face interne du cylindre. Un tel dispositif permet d’éviter les micro-bulles d’air au niveau de la cellule de mesure ; avec un capteur classique où la cellule constitue le “cul-de-sac” du tuyau, il est difficile d’éviter la présence de telles bulles, dont l’interface fluctue et cause un bruit qui ramène la résolution de la mesure à 10 Pa.

La mesure de pression est effectuée au niveau du canal de sortie du modèle. Comme la pression dans l’air est toujours égale à la pression atmosphérique, on mesure la perte de charge entre le front et la sortie du modèle. Les valeurs mesurées sont lues par un multimètre Keithley 2000, qui est connecté au port série d’un ordinateur.

### Dispositif photographique

Le modèle expérimental de milieu poreux est placé sur un bâti qui comporte un système d’éclairage permettant d’illuminer le modèle par-dessous (cf. figure 2, page 300). Le bâti supporte également un appareil photo numérique (Kodak DCS 420). La position de l’appareil par rapport au milieu poreux est ainsi fixée une fois pour toutes. Le déclenchement de l’appareil est assuré par un ordinateur, via le port SCSI.

L’appareil photographique a une résolution de 1536 pixels dans la direction horizontale et de 1024 pixels dans la direction verticale. Sur les photos, la taille du modèle correspond à 935 pixels (pour 35 cm en taille réelle), de sorte qu’un pixel correspond à 0.374 mm, et que la taille de pore en unités-pixels est  $a = 2.46$  pixels. Le codage des niveaux de gris se fait sur 8 bits (256 niveaux).

#### 9.1.4 Déroulement d’une expérience

L’expérience de drainage est effectuée à partir d’une situation où le milieu poreux bidimensionnel est saturé en fluide mouillant ; puis on pompe le fluide mouillant par le bas, à débit imposé. On déclenche les mesures dès que l’air pénètre dans le modèle. Un ordinateur PC assure l’enregistrement des mesures de pression fournies par le multimètre et le déclenchement des photographies à intervalles de temps réguliers, simultanément. Définissons dès à présent un repère  $(x, z)$  pour repérer la position d’un point dans le modèle. La coordonnée  $z$  désigne la distance du point au bord supérieur du modèle, la coordonnée  $x$  désigne sa distance au bord gauche du modèle (cf. 9.3).

Un des intérêts du dispositif expérimental mis en place est de pouvoir faire varier l’intensité des forces visqueuses et celle de la pesanteur indépendamment l’une de l’autre.

### Comment ajuster la pesanteur ?

Le bâti qui supporte le modèle est inclinable. On repère son inclinaison par un angle  $\alpha$  qui peut varier entre  $0^\circ$  (modèle horizontal) et  $54.7^\circ$ . On peut ainsi faire varier la pesanteur entre 0 et  $0.82 g_0$ . L'angle  $\alpha$  est repéré par un inclinomètre disposé sur le bâti, dans la direction de plus grande pente du modèle (parallèlement au vecteur  $\hat{z}$ ).

### Comment contrôler la vitesse de filtration ?

En ajustant la vitesse de la pompe, on contrôle l'intensité des effets visqueux. La pompe utilisée initialement était une pompe à seringue (deux seringues en verre et téflon). On s'est aperçu que cette pompe engendrait une oscillation dans le système, que l'on mesurait sous la forme d'oscillations dans les mesures de pression. On a donc remplacé la pompe à seringue par une *pompe par gravité*.

Le principe de la pompe par gravité est le suivant. Une cuve placée à l'étage inférieur (à  $h_t = 4$  m au-dessous) est reliée aux canaux de pompage du modèle par un tube sur lequel on a installé une valve ajustable ; l'ensemble (modèle + tuyauterie) est saturé en fluide mouillant, et la vanne initialement fermée. La circulation du fluide dans le modèle est initiée en ouvrant la vanne et en la réglant de façon à assurer le débit que l'on veut ; le fluide s'écoule du modèle dans la cuve, et la variation de la cuve est mesurée par une balance, ce qui permet de mesurer le débit correspondant (voir figure 9.4). En vertu de la loi de Darcy, le rapport de la perte de charge  $\Delta P_m$  dans le modèle sur la perte de charge  $\Delta P_t$  dans la tuyauterie en aval du modèle s'exprime comme

$$\frac{\Delta P_m}{\Delta P_t} \simeq \underbrace{\frac{L}{h_t}}_{\leq \frac{0.35}{4}} \underbrace{\frac{\kappa_t}{\kappa_m}}_{\ll 1} \ll 1 \quad , \quad (9.3)$$

où  $\kappa_m$  et  $\kappa_t$  sont les perméabilités respectives du modèle et de la tuyauterie. La perte de charge dans le modèle a donc une contribution négligeable dans la perte de charge totale. Par suite,

1. le débit est indépendant du niveau de fluide dans le modèle, c'est-à-dire qu'on a bien un régime permanent pendant toute l'expérience. On mesure le débit pendant toute l'expérience à l'aide de la balance, et on vérifie à posteriori que la vitesse de filtration est constante.
2. le débit est ajusté par la valve indépendamment de l'inclinaison du modèle. La gravité dans le modèle et la vitesse d'extraction sont donc bien des paramètres ajustables indépendamment l'un de l'autre.

## 9.2 Méthodes d'analyse de la géométrie du front de drainage

Les images brutes exhibent une large palette de niveaux de gris. On distingue nettement une région continue blanche ou gris très clair qui correspond à l'air qui a pénétré dans le modèle, et plusieurs régions noires ou gris très foncé qui (cf. figure 9.6) correspondent au fluide mouillant. Les billes de verre apparaissent comme des points gris moyen distribués aléatoirement dans l'image. La plus grande des régions noires se trouve au-delà de la limite de pénétration de l'air dans le glycérol ; les autres correspondent à des amas de fluide mouillant piégés par l'air, lorsque deux digitations se sont rejointes et ont coalescé. Rappelons qu'on appelle *front de drainage* (ou tout simplement, front) la limite de pénétration de l'air dans le fluide mouillant. Le traitement d'image a pour but d'extraire le front et les amas de fluide mouillant piégés, afin d'en extraire une information permettant de caractériser la dynamique du déplacement.

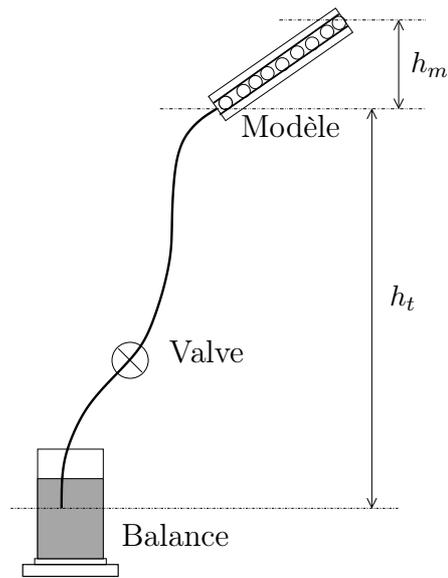


FIG. 9.4 – Principe de la pompe à gravité : la perte de charge au niveau du modèle est négligeable par rapport à la perte de charge dans la tuyauterie en aval.

### 9.2.1 Traitement des images

Les résultats expérimentaux ont été obtenus à partir de données collectées sur 58 expériences ; on a pris en moyenne 150 photos pendant une expérience. Le traitement manuel d’une photo par un opérateur humain prend en moyenne une demi-heure. Il a donc été nécessaire de pouvoir traiter les données de façon automatisée, sous peine d’y passer une année entière.

Le traitement de l’image brute pour en extraire le front et les amas est fait en trois étapes, dont la figure 3, page 301 fournit une illustration :

1. L’image brute (figure 3(a), page 301) est seuillée de façon à obtenir une image en noir et blanc où le noir correspond au glycérol, le blanc correspond à l’air, et les billes de verre ont été assimilées soit à l’air, soit au glycérol (figure 3(b), page 301). Cela signifie que le front obtenu sera correctement défini aux échelles plus grandes que la taille du pore, et que les détails correspondant à moins de 2.46 pixels seront sans signification.
2. La plus grande région continue noire est extraite de l’image noir et blanc. L’image obtenue comprend une unique région blanche et une unique région noire, séparés par une frontière qui correspond au front que l’on cherche à déterminer (figure 3(c), page 301).
3. On calcule localement la norme du gradient de l’image. Cette norme vaut 0, sauf pour les pixels appartenant au front, où elle vaut 1. On enregistre la position des pixels en question. Sur la figure 3(a), le front ainsi obtenu a été superposé à l’image brute, page 301, sous la forme d’une ligne noire. On constate la très bonne cohérence entre l’image et le front extrait.

On notera que l’image de la figure 3(b), page 301, contient à la fois l’information sur le front et sur les amas piégés. Les analyses effectuées sur les amas piégés seront menées sur les images de ce type. L’image de la figure 3(c) ne contient quant à elle que l’information sur le front. Nous allons à présent revenir sur le détail de certaines étapes du traitement de l’image.

#### Seuillage de l’image brute

Le seuillage de l’image brute est une opération où tous les niveaux de gris inférieurs ou égaux à un seuil préalablement défini sont mis à 0 (niveau “noir”), tandis que tous les niveaux de gris

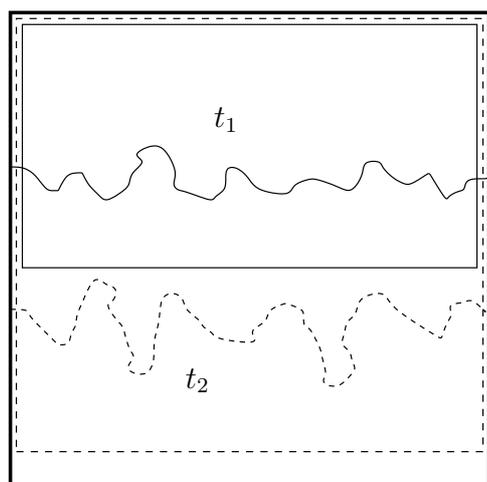


FIG. 9.5 – Évolution de la fenêtre de traitement de l'image en fonction de la position du front. La photo prise à un temps  $t_1$ , dont le front est représenté par une ligne continue, est analysée à partir d'une sous-image correspondant au cadre rectangulaire continu. La photo prise à un temps  $t_2 > t_1$ , dont le front est représenté par une ligne pointillée, est analysée à partir d'une sous-image définie par le cadre rectangulaire en pointillés. Les deux cadres ont même bord supérieur, et même largeur ; ici, on a fait en sorte de ne pas les superposer pour clarifier la figure.

supérieurs sont mis à 255 (niveau "blanc"). Le choix de la valeur du seuil de niveau de gris est ici crucial, si l'on veut conserver tous les détails de la structure de déplacement, qui est extrêmement complexe. La détermination du seuil se fait par l'analyse de l'histogramme des niveaux de gris. Cet histogramme est la somme de trois histogrammes, correspondant respectivement à l'air, au glycérol, et aux billes de verre. On détermine le seuil, non pas comme le minimum de l'histogramme, mais comme l'intersection des deux pics correspondant au fluide mouillant et à l'air. Lorsque ces deux pics sont suffisamment séparés pour ne pas avoir d'intersection, on choisit comme seuil le point milieu du segment qui les sépare. Cette procédure a prouvé sa fiabilité. La difficulté de sa mise en œuvre tient à la non-uniformité de l'éclairage du modèle expérimental, qui oblige à déterminer un seuil qui dépend de la position dans la direction transverse au déplacement (selon  $x$ ). On procède de la manière suivante :

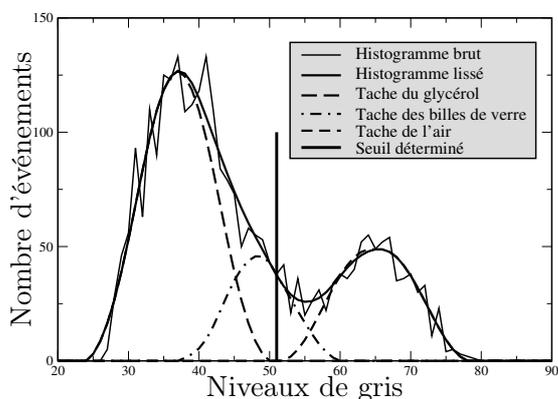
- L'analyse n'est pas effectuée sur la totalité de l'image brute, mais sur une sous-fenêtre de cette image. La largeur de la sous-fenêtre coïncide avec celle du milieu poreux, et sa bordure supérieure coïncide avec le haut du modèle. Sa bordure inférieure est placée suffisamment bas pour que la totalité du front soit dans la sous-fenêtre et pour que l'image puisse être analysée : s'il n'y a pas suffisamment de pixels noirs sous le front, l'image extraite contiendra une grande majorité de pixels blanc, et la reconstruction des trois pics de niveaux de gris à partir d'un histogramme qui n'est pas bimodal sera plus difficile. À l'inverse, plus l'image extraite est petite, moins son traitement est long. On cherche donc un compromis en considérant des sous-images dont la bordure inférieure progresse avec le front, en étant suffisamment distante de lui pour que le traitement d'image soit efficace (voir figure 9.5).
- Si l'on utilise un seuil unique pour seuiller la sous-image, on constate que le front obtenu n'est pas cohérent avec l'image brute. Ainsi, le trait fin présenté à la figure 9.6(d) est le front obtenu en traitant l'image brute présentée en haut de la figure 9.6(c). La partie droite de l'image, qui est plus sombre, a manifestement été mal seuillée. On détermine donc un seuil par section verticale de l'image. La fonction-seuil est déterminée pour chaque section à partir de l'histogramme des niveaux de gris d'une fenêtre de 5 pixels de large centrée sur la section considérée. Un tel histogramme correspond seulement à 3000 pixels seulement, et apparaît très bruité. Il faut d'abord lisser l'histogramme. Une moyenne par fenêtre glissante serait dommageable à la séparation des pics. On utilise plutôt la transformée en ondelettes : les coefficients d'ondelette correspondant à des échelles inférieures à 10 pixels sont annulés.

On obtient un histogramme lissé très régulier, et dont on extrait les trois pics de la façon suivante :

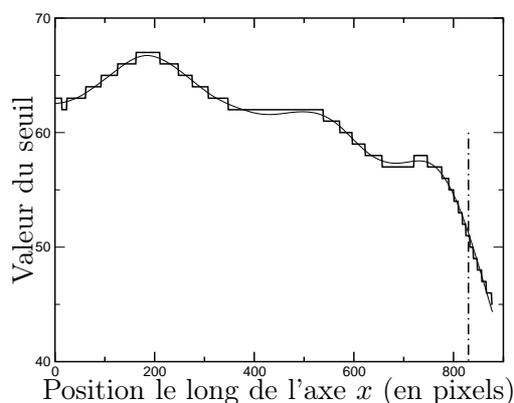
1. On définit tout d'abord le point milieu de l'histogramme comme le milieu de la gamme complète des niveaux de gris rencontrés dans l'image. On détermine ensuite le maximum de l'histogramme, et de quel côté il est du point milieu de l'histogramme. On en déduit si le pic dont l'amplitude est la plus grande est celui du glycérol ou celui de l'air. On suppose dans la suite (comme sur la figure 9.6(a)) que le pic de glycérol est le plus grand. La suite du raisonnement doit être symétrisée si c'est le pic de l'air qui est le plus grand.
2. On considère que la partie de l'histogramme lissé située à gauche du maximum est simplement la moitié gauche du pic de glycérol. On la symétrise, et le pic ainsi obtenu est considéré comme une bonne approximation du pic correspondant au fluide mouillant.
3. On soustrait le pic de glycérol ainsi obtenu de l'histogramme lissé. L'histogramme résultant a un maximum à droite de son point milieu. On considère que la partie de la courbe située à droite du maximum est la moitié droite du pic de l'air. Puis on effectue la même symétrisation que pour le pic du glycérol. On soustrait le pic de l'air ainsi obtenu, et l'histogramme restant correspond au pic des billes de verre. La figure 9.6(a) montre un exemple d'histogramme brut, avec l'histogramme lissé et les trois pics obtenus en fin de compte, superposés à l'histogramme : de gauche à droite, l'histogramme correspondant au glycérol, l'histogramme correspondant aux billes de verre, et l'histogramme correspondant à l'air. Dans cet exemple, les pics du glycérol et de l'air n'ont pas d'intersection. Le seuil est donc choisi comme le point milieu du segment séparant les deux histogrammes.

La procédure de reconstruction des trois pics s'est révélée fiable. On parvient à reconstruire les pics de manière assez satisfaisante, même dans des cas où l'histogramme ne possède pas de minimum local et où une méthode définissant le seuil comme un minimum local de l'histogramme échouerait. Des situations de ce type se présentent pour les dernières images d'une expérience, lorsque la sous-image traitée comporte beaucoup plus de teintes claires que de teintes foncées, et que le pic correspondant à l'air est beaucoup plus grand et large que le pic correspondant au glycérol.

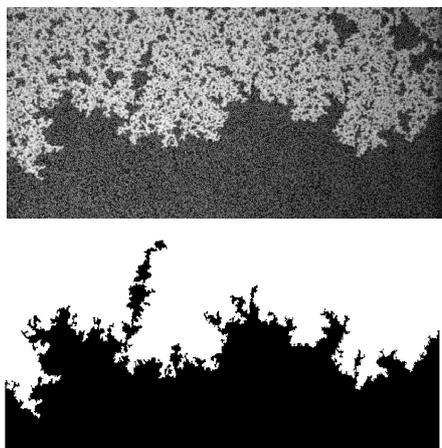
- La détermination des seuils pour toutes les sections verticales de l'image définit une *fonction-seuil* de la variable  $x$ . Il est possible qu'un petit nombre de seuils estimés soient aberrants, ou ne soient simplement pas les plus indiqués. Dans ce cas, le graphe de la fonction-seuil comporte des irrégularités ponctuelles, et le seuillage de la sous-image brute, section verticale par section verticale, à l'aide des valeurs de seuil déterminées pour chaque section, peut conduire à une image noir et blanc comportant des discontinuités verticales dans les teintes, qui créeront des discontinuités verticales artificielles dans le front. Pour éviter ce genre d'artefact, on filtre la fonction-seuil à l'aide de la transformée en ondelettes, comme on l'a fait pour les histogrammes. On élimine tous les coefficients d'ondelette correspondant à des échelles inférieures à 20 pixels. On filtre ainsi les valeurs aberrantes, qui sont "en-dehors" de la courbe, et on obtient une courbe lisse qui garantit une variation régulière du seuillage dans la direction transverse au déplacement du front. La fonction-seuil est ensuite discrétisée (cf. figure 9.6(b)).



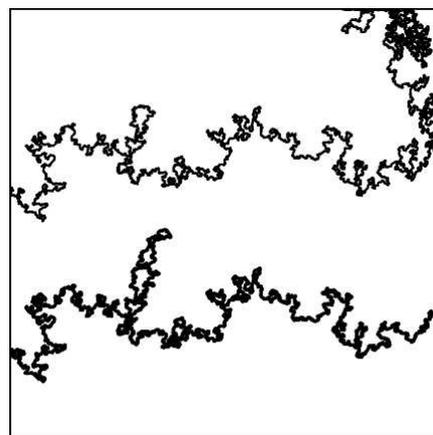
(a) Un exemple d'histogramme des niveaux de gris d'une section verticale de l'image, de largeur 5 pixels. L'histogramme est d'abord lissé en utilisant la transformée en ondelettes (trait continu), puis les trois taches sont extraites de l'histogramme lissé. Le seuil est choisi comme le point milieu du segment séparant les deux pics correspondant au glycérol et à l'air.



(b) Fonction-seuil de la distance le long de l'axe  $x$ . La courbe est la fonction-seuil obtenue après filtrage par transformée en ondelettes. Dans cet exemple, il n'y avait pas de valeur de seuil aberrante, et le filtrage a laissé la fonction-seuil inchangée. La fonction en escalier est la fonction-seuil discrétisée. Le trait vertical indique le numéro de la section dont l'histogramme des niveaux de gris est présenté en (a).



(c) Photo brute (a) – et image obtenue à l'avant-dernière étape du traitement de l'image ; on a utilisé ici la fonction-seuil présentée en (b).



(d) Front obtenu comme les points où le gradient de l'image présentée en (c) est non nul (trait épais) – et front obtenu à partir de la même image en choisissant un seuil unique pour toute l'image, à partir de l'histogramme des niveaux de gris sur toutes les images (trait fin). Le “bon” front a été décalé vers le bas pour rendre la figure plus lisible.

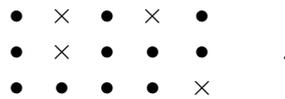
FIG. 9.6 – Seuillage d'une photo enregistrée pendant l'expérience. On seuille chaque colonne de pixels verticale de la photo séparément des autres, en déterminant le seuil sur une fenêtre de 5 pixels de large, centrée sur la colonne. Si on utilise un seuil unique pour l'image entière, la non-uniformité de l'éclairage ne permet pas d'extraire correctement le spectre, en fin de compte.

**Extraction de la plus grande région noire continue – extraction des amas piégés**

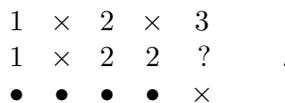
L'information concernant l'image est codée pixel par pixel ; à chaque pixel est associé un nombre entre 0 et 255 qui indique le niveau de gris pour le pixel. Si l'image est en noir et blanc, on peut se contenter d'un nombre 0 ou 1 (blanc). La position du pixel sur l'image est définie par son indice ; on indice par exemple les pixels de l'image de gauche à droite et de haut en bas.

Extraire la plus grande région noire continue dans une image du même type que l'image de la figure 3(b), page 301, pour pouvoir la transformer en une image du même type que l'image représentée à la figure 3(c), revient à déterminer les indices des pixels qui appartiennent à cette région. Si l'on veut déterminer les indices correspondant aux pixels qui appartiennent au plus grand amas noir, il va falloir tester tous les pixels de l'image ; on va donc être obligé de déterminer pour chaque pixel à quel amas il appartient, et en fin de compte on aura obtenu l'information sur les amas piégés aussi bien que sur le plus grand amas que l'on cherche à déterminer.

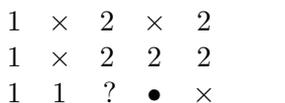
On veut pouvoir assigner à chaque pixel noir de l'image un indice qui définisse l'amas auquel appartient le pixel. L'indice doit donc être le même pour tous les pixels du même amas, et on veut de surcroît que les indices associés à deux pixels qui n'appartiennent pas au même amas soient différents. Examinons pour commencer un exemple simple emprunté à [Stauffer et Aharony, 1991] (page 157). L'image comporte 3 lignes de 5 pixels ; représentée avec des points noirs pour les pixels noirs, et des croix pour les pixels blancs, elle se présente selon



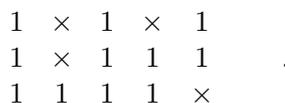
Supposons que l'on décrive l'ensemble des pixels dans l'ordre des indices, de gauche à droite et de bas en haut. On commence donc par le premier point à gauche de la première ligne. Il est libellé 1. Le deuxième label noir n'est pas adjacent au premier pixel noir. On suppose qu'il n'appartient pas au même amas, et il est libellé 2. Le troisième pixel noir est de même libellé 3. Puis on passe à la seconde ligne. Le premier pixel à gauche de la seconde ligne est adjacent au pixel noir situé au-dessus de lui. Il est donc libellé 1. Le deuxième pixel noir est libellé 2, puisqu'il est adjacent à un pixel de la première ligne libellé 2. Le 3<sup>e</sup> pixel de la 2<sup>e</sup> ligne est adjacent au 2<sup>e</sup>, il est libellé 2. On en est à présent à la situation suivante :



Le dernier pixel de la 2<sup>e</sup> ligne est adjacent au 3<sup>e</sup>, il faut donc le libeller 2. Il est également adjacent au dernier pixel de la première ligne, qui est libellé 3. On s'aperçoit ici que l'amas libellé 2 et l'amas libellé 3 ne font qu'un. Il faudrait donc relibeller tous les sites précédemment libellés 3 en 2. En continuant de la même façon on parvient à une nouvelle situation conflictuelle :



où l'on comprend que tous les sites noirs de l'image appartiennent en fait au même cluster ; il faut assigner à tous les sites libellés 2 le label 1, et on obtient en fin de compte :



On a obtenu l'information que l'on cherchait : il y a un seul amas noir dans l'image, et il contient 11 pixels. Une telle façon de procéder permettra d'arriver à la bonne solution sans faillir, quelle que soit l'image, et quelle que soit sa taille. Mais sur l'exemple très simple présenté ici, il a fallu effectuer 6 re-indiciation de site, pour 11 sites en tout. Pour une grande image, le nombre de renumérotation évoluera proportionnellement au carré de la taille du réseau. Une procédure de ce type sera coûteuse en temps si elle est appliquée à nos sous-images, qui comportent environ  $800 \times 700$  pixels.

Hoshen et Kopelman (1976) ont proposé une astuce pour s'affranchir de cette relibellisation répétée. Lorsqu'on parvient à un site où il y a conflit entre les indices de label  $p$  et  $q > p$ , au lieu de relibeller tous les sites libellés  $q$  en  $p$ , on enregistre l'information selon laquelle l'indice  $q$  est subordonné à l'indice  $p$ , c'est-à-dire que leur réunion forme un unique amas. Pratiquement, on définit un vecteur  $N_q$  qui à chaque indice d'amas  $q$  attribue le numéro de l'amas auquel il est subordonné :  $N_q = p$ . On définit les amas *primaires* comme les amas d'indice  $p$  qui ne sont subordonnés à aucun autre, c.-à-d., ne sont subordonnés qu'à eux-mêmes :  $N_p = p$ .

Une fois la totalité de l'image explorée, on se trouve en présence d'un certain nombre d'amas. Certains de ces amas peuvent être réunis pour former un unique amas. Il y a en fait autant d'amas véritables qu'il y a d'amas primaires. Un amas d'indice  $p$  tel que  $N(p) = m \neq p$  (disons, un amas secondaire) doit être réuni à l'amas d'indice  $m$ ; si  $N(m) = j \neq m$ , l'amas d'indice  $m$  est également un amas secondaire et doit lui-même être réuni à l'amas d'indice  $j$ , et ainsi de suite, tant que  $N_j \neq j$ . On voit qu'on peut ici tirer parti de la transitivité de la relation "est subordonné à", et se passer de l'étape  $q$ , en remarquant immédiatement que  $N_p = q$  et  $N_q = j$ , donc  $N_p = j$ ;  $j$  est l'amas primaire auquel sont subordonnés les amas secondaires  $p$  et  $m$ . On peut ainsi déterminer l'amas primaire auquel est subordonné chaque amas secondaire. Puis on relibelle tous les pixels dont l'indice est celui d'un amas secondaire avec l'indice de l'amas primaire correspondant. Cet algorithme a nécessité une excursion complète du vecteur des pixels, puis une redéfinition de la hiérarchie des amas, et enfin un deuxième excursion du vecteur des pixels.

Appliqué à l'exemple précédent, l'algorithme aboutit après la 1<sup>re</sup> étape au réseau

$$\begin{array}{cccc} 1 & \times & 2 & \times & 3 \\ 1 & \times & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \times \end{array} ,$$

avec  $N_1 = 1$ ,  $N_3 = 2$  et  $N_2 = 1$ ; on redéfinit cette hiérarchie selon  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 1$  et  $N_3 = 1$ . Puis on renumérote à 1 tous les sites d'indices 2 ou 3.

### Implémentation numérique

Le programme de traitement est programmé en C, sous Linux. Le programme est organisé sous forme de bibliothèques de fonction qui effectuent les opérations élémentaires sur les images, telles que : inversion, gradient, caractérisation des amas, seuillage, et toutes les opérations d'entrée-sortie, au nombre desquelles la lecture du format tif particulier utilisé par l'appareil de photo Kodak, et l'exportation des images dans différents formats courants (jpeg, gif, postscript, tif); certaines de ces fonctions d'entrée-sortie utilisent les bibliothèques ImageMagick. Il existe un programme convivial, doté d'une interface graphique, qui permet d'appliquer différentes fonctions de la bibliothèque aux images, lorsqu'on veut les traiter manuellement, pour tester une séquence d'opérations, par exemple. Ce programme a été écrit par Jean Schmittbuhl. Il existe un autre programme écrit pas lui, qui fonctionne en ligne de commande et permet le traitement séquentiel des images en appliquant à une série d'images une séquence de tâches.

Dans le cadre de cette thèse, la librairie de fonctions a été étendue. J’y ai rajouté en particulier les procédures de détermination de la fonction-seuil dépendant de la coordonnée  $x$ , la procédure de seuillage correspondante, la détermination de la distribution de largeur des doigts dans la direction  $x$ , et du profil moyen dans la direction  $z$ , ainsi qu’une procédure qui permet de superposer à une image des points dont les coordonnées sont lues dans un fichier. Par ailleurs, des scripts perl ont été écrits pour chaque étape du traitement des images. Ces scripts font appel au programme de traitement séquentiel, et ont permis d’élargir le spectre des traitements séquentiels réalisables, sans devoir pour autant effectuer de modification importante dans le code source du programme séquentiel (hormis l’ajout de nouvelles fonctions, qui a déjà été abordé). Les scripts perl sont organisés en différents niveaux, les scripts de niveau haut faisant appel aux scripts de niveau bas. En haut de la hiérarchie, un script permet, moyennant une demi-heure de préparation, de lancer le traitement des données contenues sur l’ensemble d’un CD-rom, soit les données de trois ou quatre expériences, avec 150 photos par expérience.

### 9.2.2 Méthodes d’analyse du front

#### Analyse du front

Le front est analysé en termes d’extension dans la direction définie par l’axe  $z$  et en termes de propriétés géométriques statistiques, qui sont analysées à l’aide de la fonction d’auto-corrélation à deux points et de la méthode par comptage de boîtes.

Notons  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i \leq n$  les coordonnées des  $n$  points du front. On définit à partir de ces coordonnées l’extension maximale  $\Delta z$  du front dans la direction  $z$ , ainsi que sa *largeur*  $w$ , comme l’écart-type de la distribution  $z_i$  :

$$w = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad , \quad (9.4)$$

où  $\bar{z}$  désigne la moyenne de la distribution  $z_i$  (c’est-à-dire l’avancement moyen du front). La fonction de corrélation à deux points est définie en fonction de l’échelle  $s$  comme

$$C(s) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \Theta(\mathbf{r}_i) \Theta(\mathbf{r}_i + \mathbf{s}) \right\rangle_{\|\mathbf{s}\|=s} \quad , \quad (9.5)$$

où la fonction  $\Theta(\mathbf{r})$  vaut 1 si  $\mathbf{r}$  est la position d’un point du front, 0 sinon ; la moyenne  $\langle \rangle$  désigne une moyenne sur toutes les directions possibles pour le vecteur  $\mathbf{s}$ , dont la norme  $\|\mathbf{s}\|$  est fixée à  $s$ . La fonction de corrélation à deux points est particulièrement utile pour caractériser la dimension fractale  $D$  d’une structure fractale. Si le front est fractal, la fonction de corrélation à deux points est une loi de puissance de l’échelle d’exposant  $D - 2$  [Gouyet et al., 1988].

Pour caractériser une éventuelle auto-affinité du front, on utilise également la méthode de dénombrement de boîtes. Le nombre de boîtes nécessaires au recouvrement du front est une loi de puissance de la taille des boîtes, d’exposant  $-D$  [Mandelbrot, 1982]. On a discuté en détail au paragraphe 1.3.1 les précautions à employer pour appliquer cette méthode à la détermination de la dimension fractale d’un fractal auto-affine.

## 9.3 Observation de l’instabilité visqueuse

Dans un premier temps, on se contente de vérifier les régimes d’écoulement connus, c’est-à-dire les régimes de digitation capillaire et de digitation visqueuse. Puis on parcourera l’espace

des paramètres  $(V_d, \alpha)$  (vitesse de filtration et inclinaison du modèle par rapport à l'horizontale) pour essayer de déterminer la transition de l'instabilité.

### 9.3.1 Digitation capillaire en présence de gravité

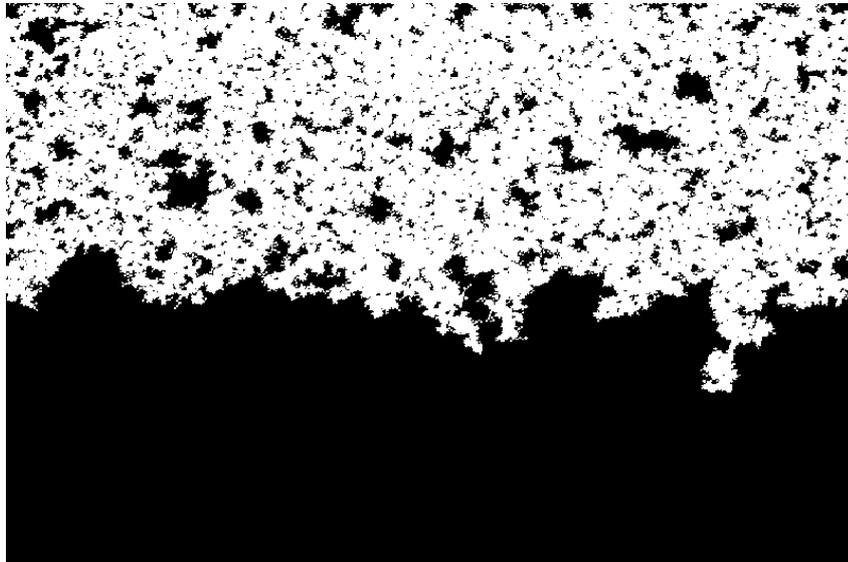
L'image seillée correspondant à une expérience de drainage lent ( $Q = 0.006 \text{ ml}\cdot\text{min}^{-1}$ ) et avec la gravité maximale que l'on peut imposer ( $\alpha = 54.7^\circ$ ) est présentée à la figure 9.7(a). Cette expérience est la plus lente que l'on a réalisée. On a choisi une vitesse suffisamment lente pour que le régime d'écoulement soit bien celui de la digitation capillaire. La fonction d'auto-corrélation du front correspondant est présentée à la figure 9.7(b). Pour les échelles inférieures à la largeur du front, qui est de 10 pores, le front est fractal, avec une dimension fractale 1.32 proche de la valeur théorique correspondant à la percolation d'invasion, qui confirme le régime de digitation capillaire. Une analyse de la dimension fractale du front par la méthode de dénombrement de boîtes fournit des résultats cohérents (voir figure 8, page 313, signes  $\times$ ). En vertu de la relation (8.39), la gamme d'échelles sur lesquelles on peut estimer la dimension fractale est d'autant plus réduite que l'inclinaison du modèle est grande. Malheureusement, on ne dispose pas d'enregistrement d'un déplacement quasi-statique à un angle d'inclinaison modéré.

### 9.3.2 Digitation visqueuse

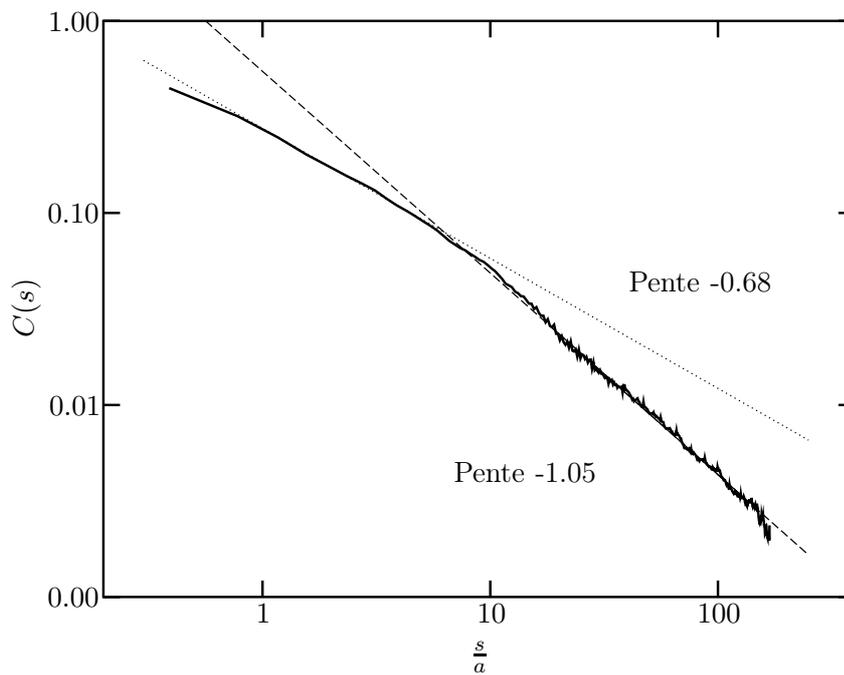
La figure 9.8 est analogue à la figure 9.7, mais ici l'expérience (indiciée 58 dans la table 9.1) a été menée avec un débit  $Q = 1.97 \text{ ml}\cdot\text{min}^{-1}$  et pour une inclinaison presque nulle du modèle ( $\alpha = 0.1^\circ$ ). On observe une digitation branchée caractéristique de la digitation visqueuse. Toutefois, la vitesse de filtration est insuffisante pour que l'on soit en régime d'écoulement "purement visqueux", et la structure n'est pas aussi branchée que celle obtenue en géométrie radiale par Måløy et al. (1985) (cf. figure 8.7), et pour laquelle ils avaient mesuré une dimension fractale  $D = 1.62 \pm 0.02$ . Ici, la dimension fractale est mesurée à une valeur 1.61, mais uniquement aux échelles inférieures à 10 tailles de pore. Nous attribuons cette limitation à la pauvreté de la statistique du branchement aux échelles supérieures à 10 pores. On a vérifié sur des mesures plus récentes que l'on élargit la gamme où la dimension fractale  $D \simeq 1.62$  est constatée en accroissant la vitesse d'extraction.

### 9.3.3 Observation des structures de déplacement pour différentes valeurs de $C_a$ et $B_o$ .

Nous avons effectué de nombreuses expériences, pour décrire de façon aussi large que possible l'espace des paramètres  $(V_d, \alpha)$ . J'ai mené une première campagne d'expériences (février-avril 2000), qui a fourni les premiers enregistrements de pression pour de tels régimes d'écoulement, et a permis de constater les oscillations engendrées par la pompe à seringues. Les séries de photos enregistrées au cours de cette campagne ont permis de relever des améliorations possibles du protocole expérimental, notamment en ce qui concerne l'éclairage du modèle et le réglage de l'appareil photo. Ces séries de photos ont par ailleurs été utilisées pour développer les codes de traitement d'image. Grunde Løvoll a mené une seconde campagne d'expériences (automne 2000), après avoir installé la pompe à gravité. Pour les analyses finales, nous avons retenu 58 expériences de la seconde campagne. Les 58 expériences retenues se répartissent en 4 séries : trois séries à nombre capillaire constant  $C_a \simeq 82 \cdot 10^{-3}$ ,  $130 \cdot 10^{-3}$  et  $190 \cdot 10^{-3}$ , et une série à nombre de Bond constant :  $B_o \simeq 0.55$ . Les paramètres utilisés pour ces expériences et les nombres capillaires  $C_a$  et de Bond  $B_o$  associés sont résumés dans la table 9.1. Cette table est la reproduction, en français

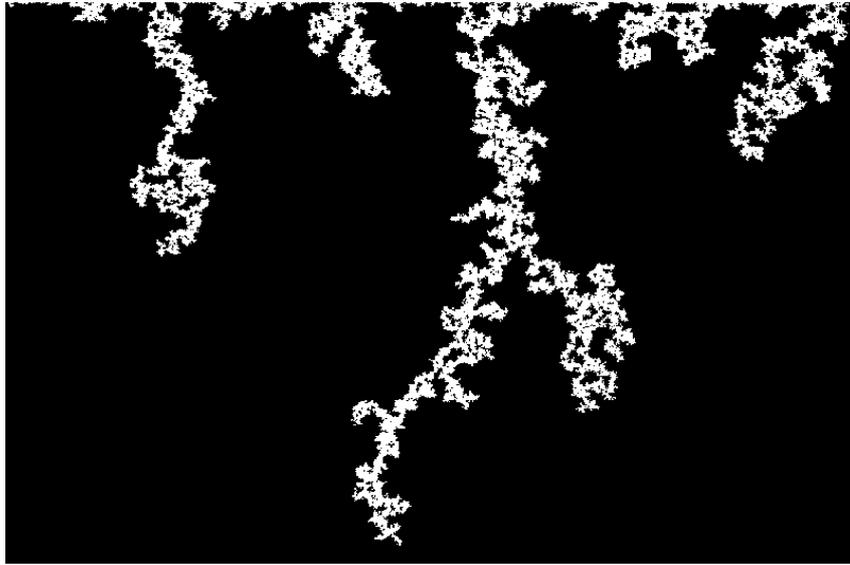


(a) Photo de l'image seuillée obtenue pour une expérience avec  $\alpha = 54.7^\circ$  et  $Q = 0.006 \text{ ml.min}^{-1}$ .

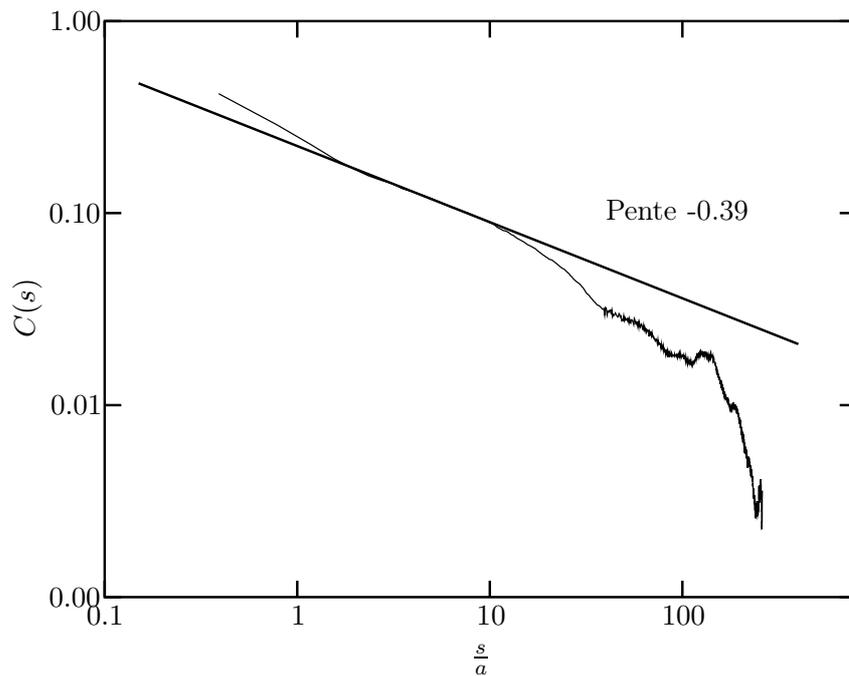


(b) La forme de la fonction d'auto-corrélation de l'image présentée en (a) confirme qu'on est bien dans un régime de digitation capillaire. Aux échelles plus petites que la largeur du front, le front a une dimension fractale  $2 - 0.68 = 1.32$ , proche de la valeur théorique  $4/3$  correspondant à la percolation d'invasion.

FIG. 9.7 – Digitation capillaire en présence de gravité, dans notre milieu poreux expérimental.



(a) Photo de l'image seuillée obtenue pour une expérience avec  $\alpha = 0.1^\circ$  et  $Q = 1.97 \text{ ml.min}^{-1}$ . Ici, le front n'est manifestement pas stabilisé.



(b) La fonction de corrélation à deux points du front de l'image présentée en (a) confirme qu'il s'agit bien là d'un régime de digitation visqueuse. L'exposant de la fonction d'auto-corrélation correspond à une dimension fractale  $2 - 0.39 = 1.61$ , cohérente avec les résultats de travaux antérieurs.

FIG. 9.8 – Digitation visqueuse en présence de gravité, dans notre milieu poreux expérimental. La vitesse d'extraction est modérée, de sorte que la structure est modérément branchée, et la signature de la digitation visqueuse est visible seulement aux petites échelles (entre 1 et 10 tailles de pore).

et à une échelle plus lisible, de la table 1, page 307. On a également défini un *nombre de Bond généralisé*, comme

$$\boxed{B_o^* = B_o - C_a} \quad . \quad (9.6)$$

Le nombre de Bond généralisé est une estimation du rapport entre le gradient de pression déstabilisant effectif dans le milieu (c.-à-d., gradient de pression visqueuse moins gradient de pression hydrostatique) et la pression capillaire typique.

Des photos prises pendant les expériences numérotées 4, 8, 13, 17, 22, 24, 25, 28, 29, 31, 46, 49, 50, 58 dans la table 9.1 sont présentées à la figure 5, page 308 de l'annexe ; les indices correspondant aux photos doivent être lus de haut en bas et de gauche à droite. Chaque colonne de la figure correspond à un même nombre capillaire  $C_a$ , c'est-à-dire à la même vitesse d'extraction. Les vitesses de Darcy en question sont suffisantes pour que les effets visqueux soient non négligeables lorsque le modèle est horizontal. Chaque ligne de la figure correspond à un même nombre de Bond généralisé  $B_o^* = B_o - C_a$ . Les valeurs de nombre de Bond accessibles sont limitées supérieurement par l'angle d'inclinaison maximal que l'on peut imposer au bâti sur lequel le modèle est fixé. Pour une valeur donnée du nombre capillaire (c.-à-d., sur une colonne donnée de la figure), le nombre de Bond généralisé est lui aussi limité supérieurement. Cela explique, pour certaines vitesses d'extraction élevées, que l'on n'ait pas pu remplir complètement les lignes du haut de la figure. Lorsqu'on accroît la gravité pour une vitesse de filtration donnée (c'est-à-dire, en suivant une colonne de la figure, vers le haut), et que le nombre de Bond généralisé peut être augmenté jusqu'à une valeur suffisante, le front de drainage évolue d'une structure de digitation finement branchée à une géométrie presque plane, proche de la digitation capillaire. On observe manifestement une stabilisation par la gravité de l'instabilité visqueuse. La similarité entre les images sur une même ligne suggère que le nombre de Bond généralisé  $B_o^*$  est le paramètre de contrôle permettant d'estimer où se place la transition.

Pour s'en persuader, on a réalisé la figure 6, page 310, où chaque carte en niveau de gris décrit l'ensemble de la dynamique de l'expérience associée. Sur ces cartes, le temps est la coordonnée verticale ; la coordonnée horizontale est la coordonnée d'espace  $x$ , comme sur les photos de la figure 5, page 308. Sur une ligne horizontale donnée, donc pour une image instantanée (au temps  $t$ ) de la structure de déplacement donnée, le niveau de gris d'un pixel à la position horizontale  $x$  est défini comme la différence entre l'ordonnée  $z$  du point le plus avancé du front correspondant à l'image au temps  $t$  et la position  $z_f(t)$  moyenne du front à ce temps. Ainsi, un niveau de gris constant le long d'une "ligne- $t$ " de la carte signifie que sur l'image au temps  $t$ , le front est une droite horizontale. Au contraire, de grandes fluctuations des niveaux de gris le long d'une ligne horizontale  $t$  indiquent que certaines parties du front sont très en avance sur d'autres. La déstabilisation du front apparaît alors comme une augmentation de la rugosité de la topographie quand on se déplace vers le bas de la carte, au fur et à mesure de l'expérience. Les structures claires correspondent au développement des doigts ; elles s'élargissent par suite du branchement de la digitation, aux faibles valeurs de  $B_o^*$ . On a utilisé la même échelle de gris pour toutes les images, de façon à pouvoir comparer les amplitudes du processus de digitation entre les différentes expériences. Les cartes de teinte très homogène, telles que les deux cartes correspondant à des valeurs positives du nombre de Bond généralisé, indiquent un déplacement stable. La carte numéro 8 est reproduite à une échelle plus importante et avec un contraste plus marqué à la figure 9.9. L'intermittence du déplacement stable est bien visible : un doigt croît en avant du reste du front, jusqu'à ce que la gravité l'empêche d'aller plus loin, et qu'il soit rattrapé par le reste du front, puis un autre doigt se développe ailleurs, et ainsi de suite. La transition entre les déplacements stables et les déplacements instables semble se trouver au voisinage de  $B_o^* = 0$ . Lorsque le nombre de Bond généralisé devient négatif, la gravité n'est plus

Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha$ (°)	54.9	54.9	54.9	54.7	54.9	45.0	54.2	35.7	54.9	30.2	54.9	45.0
$Q$ (ml/min)	0.040	0.480	0.710	1.000	1.280	0.990	1.500	0.990	1.750	0.990	1.740	1.460
$B_o$	0.155	0.155	0.155	0.154	0.155	0.134	0.153	0.110	0.155	0.095	0.155	0.134
$C_a$	0.0032	0.0389	0.0581	0.0826	0.0988	0.0787	0.1193	0.0825	0.1351	0.0779	0.1424	0.1341
$B_o^*$	0.1516	0.1159	0.0967	0.0719	0.0560	0.0551	0.0342	0.0279	0.0198	0.0173	0.0125	-0.0003
Indice	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\alpha$ (°)	24.9	39.9	22.6	54.9	39.9	31.1	19.9	33.1	37.1	17.4	34.9	30.0
$Q$ (ml/min)	0.980	1.480	1.000	2.260	1.540	1.480	1.030	1.480	1.530	1.000	1.510	1.450
$B_o$	0.080	0.121	0.073	0.155	0.121	0.098	0.064	0.103	0.114	0.057	0.108	0.095
$C_a$	0.0809	0.1245	0.0787	0.1622	0.1296	0.1142	0.0811	0.1211	0.1358	0.0803	0.1329	0.1231
$B_o^*$	-0.0013	-0.0031	-0.0060	-0.0074	-0.0082	-0.0165	-0.0167	-0.0177	-0.0217	-0.0237	-0.0246	-0.0285
Indice	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\alpha$ (°)	50.2	48.1	15.0	12.5	27.0	28.9	44.9	48.1	26.8	54.7	54.9	54.9
$Q$ (ml/min)	2.020	2.000	1.040	1.000	1.480	1.500	2.020	2.060	1.610	2.070	2.520	2.270
$B_o$	0.145	0.141	0.049	0.041	0.086	0.091	0.134	0.141	0.085	0.154	0.155	0.155
$C_a$	0.1778	0.1745	0.0859	0.0787	0.1257	0.1332	0.1778	0.1860	0.1330	0.2029	0.2042	0.2050
$B_o^*$	-0.0324	-0.0336	-0.0369	-0.0378	-0.0397	-0.0417	-0.0442	-0.0452	-0.0476	-0.0485	-0.0494	-0.0502
Indice	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$\alpha$ (°)	44.9	20.3	10.0	44.9	44.9	43.7	5.0	14.9	10.0	0.0	35.6	28.1
$Q$ (ml/min)	2.050	1.470	1.000	1.960	2.000	2.000	0.990	1.460	1.510	1.020	2.200	2.000
$B_o$	0.134	0.066	0.033	0.134	0.134	0.131	0.016	0.049	0.033	0.000	0.110	0.089
$C_a$	0.1867	0.1191	0.0880	0.1891	0.1961	0.1945	0.0841	0.1262	0.1235	0.0961	0.2072	0.1899
$B_o^*$	-0.0531	-0.0535	-0.0551	-0.0555	-0.0625	-0.0638	-0.0676	-0.0776	-0.0907	-0.0961	-0.0970	-0.1008
Indice	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		
$\alpha$ (°)	5.2	21.1	15.0	0.0	0.0	54.7	15.0	9.3	32.3	0.1		
$Q$ (ml/min)	1.490	1.970	1.950	1.470	1.470	2.800	2.000	1.980	2.600	1.970		
$B_o$	0.017	0.068	0.049	0.000	0.000	0.154	0.049	0.031	0.101	0.000		
$C_a$	0.1208	0.1779	0.1626	0.1169	0.1169	0.2810	0.1992	0.1819	0.2750	0.1886		
$B_o^*$	-0.1036	-0.1098	-0.1136	-0.1169	-0.1169	-0.1265	-0.1502	-0.1513	-0.1739	-0.1882		

TABLE 9.1 – Résumé des 58 expériences retenues, avec les angles d'inclinaison et les débits volumiques correspondants. Les nombres caractéristiques  $C_a$ ,  $B_o$ , et  $B_o^*$  associés sont précisés. L'incertitude sur le nombre capillaire, et par suite, sur le nombre de Bond généralisé, dépend de la vitesse d'extraction, et s'étale entre 0.009 et 0.025.

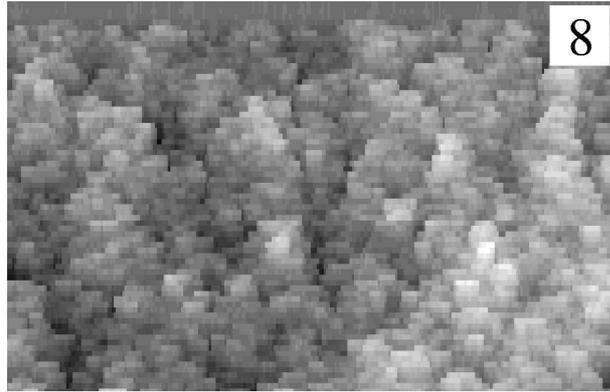


FIG. 9.9 – Gros plan de la carte 8 de la figure 6 de l’annexe; ici, on a imposé un contraste maximum à l’image. Les taches plus claires correspondent à des phases de croissance plus rapide d’une partie du front. Leur distribution uniforme et leur extension verticale finie dénotent l’intermittence de la dynamique du déplacement stable.

suffisante pour empêcher les doigts de se développer indéfiniment.

### 9.3.4 Caractérisation de l’instabilité

Pour caractériser plus finement la transition, on s’est intéressé à l’évolution de l’extension verticale maximale  $\Delta z$  du front en fonction du temps normalisé par le temps à la percée  $t_b$ , qui marque la fin de l’expérience. Les courbes  $\Delta z = f(t/t_b)$  ont été tracées pour des expériences à  $C_a \simeq 0.8$  et pour différentes valeurs de l’angle d’inclinaison. Elles sont présentées à la figure 7.(a), page 312. Pour des valeurs positives suffisamment grandes de  $B_o^*$  ( $B_o^* = 0.028$ ), l’extension verticale du front atteint rapidement une valeur de saturation, autour de laquelle elle fluctue pendant le reste de l’expérience. Lorsqu’on diminue le nombre de Bond, les fluctuations autour du plateau augmentent, et des diminutions soudaines de  $\Delta z$  apparaissent périodiquement dans les courbes  $\Delta z = f(t/t_b)$ ; elles sont caractéristiques de la coalescence de deux digitations, avec formation d’un amas piégé en arrière du front. Lorsque  $B_o^*$  devient négatif, ce type de variations brusques devient plus rares. La courbe a alors une tendance presque linéaire; les doigts sont moins nombreux et plus développés, et ne coalescent plus. La transition entre déplacement stable et digitation visqueuse semble avoir lieu pour des valeurs du nombre de Bond généralisé comprises entre  $-0.006 \pm 0.009$  et  $0.017 \pm 0.013$ .

La courbe d’évolution temporelle de la pression enregistrée à la sortie du modèle, pour les mêmes expériences qu’à la figure 7.(a), page 312, confirme la localisation de la transition autour de  $B_o \simeq 0$  (figure 7.(b), page 312). Pour les valeurs positives de  $B_o^*$ , l’évolution de la pression en fonction du temps est linéaire. Lorsque  $B_o \simeq 0$ , la pente de la courbe est faible, puisque la gravité compense presque exactement les forces visqueuses. Lorsque le gradient de pression moyen devient positif (c’est-à-dire pour les pressions négatives, sur la figure), des effets visqueux locaux significatifs apparaissent, qui résultent en une non-linéarité de la courbe de pression.

## 9.4 Confirmation théorique des observations expérimentales

### 9.4.1 Étude d’une configuration stable

Le paragraphe 9.3 a permis de conclure à l’existence de configurations où les effets visqueux sont sensibles, mais où le front de drainage est stabilisé par la gravité. Dans ces configurations, la rugosité du front se développe, puis la largeur de front atteint une valeur de saturation autour de laquelle elle fluctue. Nous supposons ici une telle configuration, et nous supposons également que nous ne sommes pas trop près de l’instabilité, c’est-à-dire que les fluctuations relatives de la largeur de front sont modérées. Que peut-on prévoir théoriquement concernant un tel déplacement ?

### Évolution du saut de pression à travers le modèle

Dans une telle configuration, une partie du fluide mouillant est piégée, mais le taux de piégeage est constant, ainsi que la vitesse de filtration. La position moyenne  $z_f(t)$  du front dépend linéairement du temps. On peut considérer que le champ de gradient de pression visqueux est la somme d'un champ uniforme  $-\eta V_d/\kappa$  et d'un champ de petites fluctuations dépendantes du temps. La pression à la sortie du modèle fluctue autour d'une valeur moyenne qui est fixée par la valeur moyenne du champ de pression visqueuse, et que l'on peut donc écrire comme

$$\overline{P}_s(t) = P_0 + \left( \rho g - \frac{\eta V_d}{\kappa} \right) z_f(t) \quad . \quad (9.7)$$

Puisque  $z_f$  dépend linéairement du temps, il en va de même pour la pression  $P_s$ . Cette dépendance linéaire est observable sur la figure 7, page 312, pour les nombres de Bond généralisés positifs.

### Loi d'échelle pour la largeur du front

Nous reprenons ici le raisonnement présenté au paragraphe 8.3.3, mais à présent les forces visqueuses doivent être prises en compte. Nous supposons cependant qu'elles ont une intensité qui reste du même ordre de grandeur que celle des forces capillaires, de sorte que les concepts définis dans le cadre de la théorie de la percolation peuvent encore être utilisés pour caractériser le déplacement. En particulier :

1. On suppose que la relation (8.41) qui permet de relier les pressions capillaires dans le milieu poreux aux probabilités d'occupation des pores est toujours valable.
2. On suppose que la longueur de corrélation des amas piégés vérifie toujours la loi (8.43) définie par la théorie de la percolation.

Sous ces hypothèses, le raisonnement du paragraphe 8.3.3 peut être repris, mais la différence des pressions capillaires en deux points du front fait apparaître un terme visqueux :

$$P_c(z) - P_c^* = \rho g (z - z^*) - \frac{\eta V_d}{\kappa} \quad . \quad (9.8)$$

La relation (8.46) devient ainsi

$$p(z^* + \xi) - p^* = N(P_c^*) \left( \rho g \xi - \frac{\eta V_d}{\kappa} \right) \quad , \quad (9.9)$$

et l'on peut introduire un *nombre de fluctuation généralisé*

$$F^* = \frac{\rho g a - \frac{\eta V_d}{\kappa}}{W} \quad . \quad (9.10)$$

La largeur du front suit alors une loi analogue à (8.47), mais où le nombre de fluctuation  $F^*$  remplace le nombre de fluctuation classique :

$$w = \frac{\xi}{a} \sim F^{*-\frac{\nu}{1+\nu}} \quad . \quad (9.11)$$

Pour un milieu poreux non statistiquement homogène, cela peut impliquer que la largeur du front sera modifiée au cours du déplacement. Pour un milieu poreux statistiquement homogène

comme l'est notre modèle expérimental, la loi d'échelle peut être réécrite en fonction du nombre de Bond généralisé  $B_o^*$  :

$$\boxed{w = \frac{\xi}{a} \sim B_o^*^{-\frac{\nu}{1+\nu}}} . \quad (9.12)$$

Cette relation d'échelle a été vérifiée expérimentalement. La figure 10, page 315 présente l'évolution de la largeur du front avec le nombre de Bond généralisé, pour une série d'expériences réalisées à  $B_o = 0.154 \pm 0.01$ . Les expériences en question sont indexées 1, 2, 3, 4, 5, 7 et 9, dans la table 9.1. On a obtenu chaque valeur de la largeur du front en moyennant les valeurs mesurées sur tous les fronts stables de l'expérience correspondante. Les barres d'erreur verticales sont une estimation de l'incertitude introduite par le choix du temps à partir duquel on a estimé que les fronts avaient convergé. Les points expérimentaux sont compatibles avec la relation (9.11), puisque l'on peut tracer une régression d'exposant  $-0.55$ , proche de la valeur  $-\nu/(1+\nu) = -0.57$  prédite par la théorie.

### 9.4.2 Critère d'instabilité

La relation (9.11) diverge lorsque le nombre de Bond tend vers 0 par valeurs positives. Cela suggère que les déplacements stables correspondent à  $B_o^* > 0$ , c'est-à-dire à

$$\boxed{\rho g > \frac{\eta V_d}{\kappa}} . \quad (9.13)$$

Si l'on ignore la tension de surface et que l'on considère  $\eta_1 = 0$ ,  $\rho_1 = 0$ ,  $\eta_2 = \eta$ , et  $\rho_2 = \rho$ , le critère (8.19) obtenu par Saffman et Taylor (1958) pour l'écoulement diphasique dans une cellule de Hele-Shaw s'écrit

$$\frac{\eta}{\kappa} V_d - \rho g < 0 \quad , \quad (9.14)$$

qui est similaire à (9.13). Dans le milieu poreux, les forces capillaires agissent à l'échelle du pore et ne peuvent pas déplacer le seuil de l'instabilité. Dans une cellule de Hele-Shaw, au contraire, les fluctuations des effets capillaires sont contrôlées par l'échelle latérale  $L$ , et la tension de surface peut retarder l'instabilité.

## 9.5 Dynamique de l'instabilité

### 9.5.1 Dynamique du déplacement stable

Les propriétés fractales du front sont bien connues dans les régimes asymptotiques de digitations capillaire et visqueuse. Qu'en est-il dans les régimes intermédiaires? Ici, on s'intéresse à un déplacement stable proche de l'instabilité. Dans une telle configuration, certaines portions du front exhibent une dynamique locale qui est contrôlée par les effets visqueux. Un doigt qui se développe avance plus vite que le reste du front, dont la progression peut, elle, être contrôlée par l'équilibre entre la gravité et les forces de capillarité. Plus on est proche de l'instabilité, plus les effets visqueux devraient être visibles. On a représenté sur la figure 9(a), page 314, six fronts stables et correspondant à des régimes « établis » (le front a atteint sa largeur de saturation), pour des nombres de Bond généralisés positifs différents. Lorsqu'on se rapproche de la transition de l'instabilité, en diminuant  $B_o^*$ , le front s'élargit, et son aspect change. Les fronts les plus larges ont un aspect résolument différent des fronts de digitation capillaire; par exemple, les profondeurs des fjords sont plus grandes que leur largeur, ce qui est le signe d'effets visqueux locaux importants.

Pour chacune de ces expériences, les fonctions de corrélation de tous les fronts établis ont été moyennées de façon à obtenir une fonction de corrélation caractéristique de l'expérience en question. Les six fonctions de corrélation moyennes ainsi obtenues sont représentées à la figure 9.(b), page 314. Les fonctions ont été divisées par une loi de puissance  $s^{-0.67}$ , qui est le comportement attendu pour la digitation capillaire. Aux échelles plus grandes que la largeur du front  $w$ , les fronts sont vus comme des droites, et toutes les fonctions de corrélation se superposent à la signature de cet effet de taille finie (ligne libellée **L**). La fonction de corrélation correspondant à la vitesse de filtration la plus basse (libellée 1) présente une ligne horizontale aux petites échelles, caractéristique de la digitation capillaire (dont le comportement idéal est représenté par la ligne libellée **C**). Aux vitesses d'extraction plus grandes, les fonctions de corrélation présentent une modification de la transition entre le régime capillaire **C** et le régime de taille finie **L**. La modification dans la zone de transition se présente comme un accroissement de la dérivée de la courbe aux échelles intermédiaires. Il en résulte une "bosse" qui rapproche la courbe de la ligne théorique libellée **V** correspondant à la digitation visqueuse. Aux échelles intermédiaires, la pente de la courbe est intermédiaire entre la signature de la digitation capillaire et celle de la digitation visqueuse. C'est le signe que les deux types de dynamique sont présents localement dans les fronts. L'augmentation de l'impact des forces visqueuses sur le front quand la vitesse de Darcy augmente est marquée par un rapprochement de la signature de la digitation visqueuse **V**.

### 9.5.2 Discussion – quel lien avec l'instabilité de Saffman-Taylor ?

L'instabilité visqueuse que nous avons observée et caractérisée pour le déplacement du glycérol par l'air dans un milieu poreux bidimensionnel apparaît lorsque les forces de dissipation visqueuse moyennes et la gravité s'équilibrent exactement. Ce critère de transition se trouve être similaire au critère obtenu par la théorie de Saffman-Taylor, si l'on fait abstraction des effets de tension de surface, dans cette dernière. Pourtant, on sait que la théorie de Saffman-Taylor ne saurait décrire l'instabilité visqueuse dans un milieu poreux. On a présenté ici une autre théorie qui permet de prévoir la transition de l'instabilité visqueuse en milieu poreux. En quoi les deux processus d'instabilité sont-ils différents ?

La première différence frappante procède de la nature des déplacements "stables" dans chacune des configurations. Un front de déplacement stable en cellule de Hele-Shaw n'a aucune rugosité. Si l'on se place dans le référentiel galiléen attaché à sa position moyenne, le front reste inchangé. Dans le milieu poreux, au contraire, une rugosité initiale apparaît dans le front de déplacement, due à l'inhomogénéité des seuils de pression capillaire dans le milieu ; puis elle se développe sous les effets conjugués des forces de dissipation visqueuse et des forces capillaires. La rugosité des fronts établis est significative, elle peut atteindre 50 tailles typiques de pore. Si on l'observe dans le référentiel attaché à sa position moyenne, un front établi se présente comme une structure en perpétuel changement, mais dont la rugosité garde une amplitude constante. Le déplacement *stable* est ici une sorte d'équilibre dynamique entre la gravité et les forces visqueuses. La largeur du front est contrôlée par le nombre de fluctuation généralisé  $F^*$ , qui est le rapport du gradient de pression effectif moyen (gradient de pression visqueux moins gradient de pression hydrostatique) sur les fluctuations de la pression capillaire. Le nombre de Bond généralisé est relié au nombre de fluctuation généralisé selon  $B_o^* = (aW/\sigma) F^*$ . Dans le cas de notre milieu poreux statistiquement homogène, la largeur  $W$  de la distribution des seuils de pression capillaire dans le milieu poreux peut être effectivement définie à l'échelle du milieu poreux, et la relation d'échelle est écrite de façon équivalente en fonction du nombre de Bond généralisé. Dans le cas d'un milieu poreux statistiquement inhomogène, au contraire, la relation (9.11) indique un changement possible dans

la largeur du front durant le processus de drainage.

En second lieu, la dynamique locale de l'écoulement dans le milieu poreux ne change pas radicalement lorsqu'on passe le seuil de l'instabilité, comme c'est le cas pour l'instabilité de Saffman-Taylor. Pour un régime d'écoulement proche du seuil de l'instabilité, il est difficile de savoir si le front va se stabiliser ou si sa rugosité va croître indéfiniment. C'est assez visible à la figure 7, page 312. Est-ce que la courbe qui exhibe de larges fluctuations de l'extension verticale du front correspond à un déplacement stable, ou à un déplacement instable? Est-ce que ces grandes fluctuations vont finir par diverger, ou pas? Dans le cas de l'instabilité visqueuse en cellule de Hele-Shaw, au contraire, l'instabilité est repérée dès qu'on détecte la moindre rugosité du front.

## Conclusion

La digitation visqueuse observée dans un milieu poreux bidimensionnel lorsqu'on déplace du glycérol par de l'air peut être stabilisée par gravité. La transition de l'instabilité correspond à  $B_o^* = B_o - C_a = 0$ . Les configurations où le nombre capillaire est supérieur au nombre de Bond ( $B_o^* < 0$ ) sont instables; les configurations telles que  $B_o^* > 0$  sont stables. Le régime bien connu de la digitation capillaire apparaît comme un cas particulier où le nombre capillaire est négligeable vis-à-vis du nombre de Bond. Le régime de pure digitation visqueuse apparaît comme le régime-limite inverse, où le nombre de Bond est beaucoup plus petit que le nombre capillaire. En configuration de déplacement stable ( $B_o > C_a$ ), l'écoulement exhibe des effets visqueux locaux importants, qui sont insuffisants pour provoquer le développement d'une digitation visqueuse. La largeur du front de drainage a alors une signification physique en termes de fluctuations du front autour d'une valeur moyenne qui progresse linéairement en fonction du temps. Cette largeur de front est beaucoup plus importante que les valeurs observées pour la digitation capillaire stabilisée par gravité. Elle suit une loi d'échelle du nombre de Bond généralisé, du type  $B_o^{*-ν/(1+ν)}$ , que nous avons à la fois prédite théoriquement et constatée expérimentalement.

La complétion de l'étude expérimentale par une étude numérique serait bienvenue. La confrontation des résultats expérimentaux avec des résultats numériques obtenus à l'aide de la simulation développée par Eyvind Aker [Aker, Måløy et Hansen, 2000] est une suite envisageable du projet.

Une autre étude complémentaire est en cours. Elle concerne l'étude de la dynamique du régime instable. Les écoulements diphasiques instables lents ont été étudiés à l'aide de modèles à deux et à trois dimensions dans le cas où la gravité est le facteur déstabilisant [Frette, Feder, Jøssang et Meakin, 1992; Meakin, Birovljev, Frette, Feder et Jøssang, 1992; Birovljev et al., 1995; Xu, Yortsos et Salin, 1998]. Pour ces régimes lents, des structures de digitation se développent, dont la largeur  $w_d$  caractéristique suit une loi d'échelle identique à (8.39) :

$$w_d \sim B_o^{-\frac{\nu}{\nu+1}} .$$

À partir de cette loi d'échelle, on peut conjecturer que la largeur caractéristique  $w_f$  de la digitation en configuration de drainage instable pourrait bien vérifier une loi d'échelle du type :

$$w_f \sim (-B_o^*)^{-\frac{\nu}{\nu+1}} .$$

La vérification ou l'infirmité de cette conjecture est un des objectifs de l'étude en cours.

**Annexe : Competition between gravity and viscous effects during drainage**

Article soumis à *Physical Review E*

## Competition between gravity and viscous effects during drainage

Y. Méheust, G. Løvoll, K.-J. Måløy and J. Schmittbuhl

**Abstract.** *We have investigated experimentally the competition between viscous, capillary and buoyancy forces during gravity driven drainage in a two dimensional synthetic porous medium. The displacement of a mixture of glycerol and water by air at constant withdrawal rate has been studied. The setup can be tilted to tune gravity, and pressure is recorded at the outlet of the model. Viscous forces tend to destabilize the displacement front into narrow fingers against the stabilizing effect of gravity. Subsequently, a viscous instability is observed for sufficiently large withdrawal speeds or sufficiently low gravity components on the model. We predict the scaling of the front width for stable situations and characterize it experimentally through analyses of the invasion front geometry and pressure recordings. De-stabilization is shown, both experimentally and theoretically, to be controlled by a dimensionless number  $F$  that compares the effective fluid pressure (i.e. average hydrostatic pressure minus viscous pressure at the pore scale) and the width of fluctuations in the threshold capillary pressures.*

### 1 Introduction

Multiphase fluid flows in porous media have many important applications in geological engineering, including ground water flow modeling and oil recovery, where an increase in the recovery rate is obtained by injection of another fluid phase. In immiscible two phase flows, strong variations exist in the obtained displacement structures and dynamics, depending on the flow-rates, wetting properties, viscosity ratios and density differences of the involved fluids [Dullien 1988].

If one considers situations in which a non-wetting fluid invades a porous medium saturated with a wetting fluid (drainage) with a higher viscosity, in the absence of buoyancy forces, two regimes can be distinguished. At very low flow rates, the viscous pressure drop across the porous medium is negligible in comparison to the inhomogeneity in the threshold capillary pressures inside the medium. The topology of the random porous medium causes the fluctuations in the pressure needed for the non-wetting phase to invade new pores. The resulting displacement structure is controlled by capillary effects, and is well described by the invasion percolation algorithm. This *capillary fingering regime* has been

studied extensively [Chandler, Koplik, Lerman and Willemsen 1982, Lenormand and Zarcone 1985, Lenormand and Zarcone 1989]. At high flow rates, viscous forces dominate capillary and gravitational effects. The displacement is stable or unstable depending on which phase is the most viscous [Måløy, Feder and Jøssang 1985, Homsy 1987, Frette, Måløy, Schmittbuhl and Hansen 1997, Aker, Måløy and Hansen 2000]. If the defending phase is the most viscous one, the displacement is unstable [Chen and Wilkinson 1985, Nittman 1986, Måløy et al. 1985, Homsy 1987]. This *viscous fingering regime* has strong analogies to diffusion-limited aggregation (DLA) patterns [Witten and Sander 1981, Witten and Sander 1983, Meakin 1983, Paterson 1984, Hinrichsen, Måløy, Feder and Jøssang 1989]. In the opposite case in which the invading fluid is the most viscous one, viscous effects stabilize the front [Dullien 1988, Aker et al. 2000].

However, most real reservoir systems are not flat and horizontal and therefore sensitive to gravity effects. If the two fluids involved have different densities, gravity forces modify the displacement structure dramatically [Birovljev, Furuberg, Feder, Jøssang, Måløy and Aharony 1991, Wilkinson 1984, Birovljev, Wagner, Meakin, Feder and Jøssang 1995, Wagner, Birovljev, Meakin, Feder and Jøssang 1997]. Gravity causes hydrostatic pressure gradients that might stabilize or destabilize fluid motion.

In the capillary fingering regime, stabilization of the fluid interface by gravity has been studied both theoretically and experimentally in two and three dimensional media [Wilkinson 1984, Clément, Baudet and Hulin 1987, Birovljev et al. 1991, Auradou, Måløy, Schmittbuhl, Hansen and Bideau 1999]. Unstable buoyancy driven migration of a lighter fluid into a denser one has also been studied by use of experiments, computer simulations and theoretically [Frette, Feder, Jøssang and Meakin 1992, Meakin, Birovljev, Frette, Feder and Jøssang 1992, Birovljev et al. 1995, Wagner, Birovljev, Meakin, Feder and Jøssang 1997, Wagner, Meakin, Feder and Jøssang 1997]. All these studies of gravitational effects concentrate on situations where the flow rates are so slow that viscous effects can be neglected. Thus, the obtained flow patterns are understood in terms of competition between gravity forces and local non-homogeneous capillary forces. The competition between gravity and viscous forces has been studied for immiscible flows in a Hele-Shaw cell. Saffman and Taylor have studied small perturbations of the displacement front, deriving a criterion for the instability [Saffman and Taylor 1958]; but it is not obvious that the arguments developed for this particular geometry apply to flows in porous media, where the complexity of the flow boundary conditions plays a crucial role. The deformation and breakup of non wetting clusters by a viscous pressure field has also been studied for a system without gravity effects [Vedvik, Wagner, Oxaal, Feder, Meakin and Jøssang 1998], but situations where all three forces are significant have not been studied in pore scale models.

The purpose of this work is to address situations where viscous forces, gravity, and surface tension at the interfaces between the two fluids all play significant

roles. We have studied specifically the stabilization and destabilization of the displacement front obtained by injection of air from above in a two dimensional porous medium saturated with a wetting fluid. This system was studied systematically by tuning gravity and viscous forces: the gravitational component on the model could be varied by tilting the model at different angles, while the magnitude of viscous forces could be changed by varying the injection rate, which was typically high enough for viscous fingering to occur at low inclination angles.

The present article is organized as follows. The experimental setup and the methods used for treating the data are described and discussed in Sec. 2. In Sec. 3, we discuss the competition between gravity forces, viscous forces and capillary forces from a theoretical point of view. The experimental results are presented in Sec. 4, which is followed by a discussion of the results in Sec. 4.5 and some concluding remarks in Sec. 5.

## 2 Experimental method

### 2.1 Experimental setup and procedure

The model used in the study is similar to the one used in [Måløy et al. 1985, Frette et al. 1997] and [Vedvik et al. 1998]. A two dimensional porous media is made by pouring glass beads of diameter  $a = 1$  mm on the sticky side of a  $500 \times 500$  mm<sup>2</sup> contact paper until no more beads stick to the surface. The excess beads are then removed so that the resulting porous matrix is a random mono-layer of beads. The contact paper is glued to a Plexiglas plate with milled in and outlet channels. The channels are parallel and separated by 350 mm. They are 5 mm wide, 8 mm deep and 350 mm long, which makes the size of the porous medium  $L \times L$ , with  $L = 350$  mm. When the model is installed, the outlet channel is connected to a pump and a *Honeywell 26PCA Flow-Through* pressure sensor. The channels are cut open and the edges of the model are sealed and constrained with silicone glue. Then another sheet of contact paper is glued on top of the beads so as to make a “sandwich” (see Fig. 1). The model is then placed (beads down) on top of another Plexiglas plate with a “pressure-cushion” to ensure that the model is kept in position and that it’s always only one bead diameter thick. The porosity  $\phi$  of the model is measured to be 0.63 and the permeability  $\kappa$  is measured to be  $\kappa = 0.0189 \cdot 10^{-3}$  cm<sup>2</sup> = 1948 darcy.

The defending wetting fluid used in all our experiments is a 90% – 10% by weight *glycerol-water* solution dyed with 0.1% Negrosine. *Air* is used as the invading non-wetting fluid. The *wetting* glycerol-water solution has a viscosity of  $\mu_w \approx 0.2$  Pa.s and a density of  $\rho_w = 1235$  kg.m<sup>-3</sup> at room temperature. The corresponding parameters for the *non-wetting* air are  $\mu_{nw} = 1.9 \cdot 10^{-5}$  Pa.s and  $\rho_{nw} = 116$  kg.m<sup>-3</sup>. The surface tension between these two liquids  $\sigma$  is  $6.4 \cdot 10^{-2}$  N.m<sup>-1</sup>. The temperature in the defending fluid is measured at the outlet of

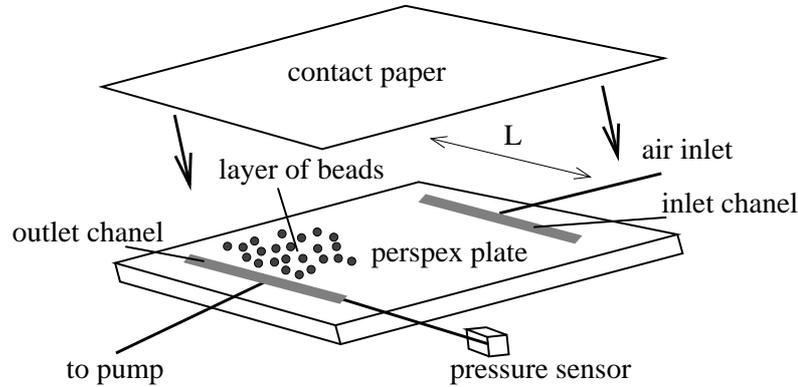


Figure 1: Sketch of the two dimensional porous medium used in the experiments. The beads are 1 mm in diameter and the distance between the channels is  $L = 350$  mm. The model is sealed with silicone glue along the edges. The size of the model is  $L \times L$ .

the model during each experiment to be able to estimate the viscosity. A  $\pm 1^\circ\text{C}$  uncertainty between this measured value and the temperature of the fluid inside the model is assumed, resulting in a  $\pm 2 \cdot 10^{-2}$  Pa.s uncertainty in the estimated viscosity.

To get stable flow out of the model we use gravity to pump the defending fluid out of the model. This is done by leading the fluid out of the model and down to a reservoir on the floor below ( $\sim 4$  m height difference). The flow rate is controlled by a valve and measured during experiments with an electronic scale. Flow rate variations during an experiment are always smaller than 3 % of  $Q$ .

The *Honeywell 26PCA Flow-Through* pressure sensor measures the pressure in the outlet channel during experiments. By using the pressure in the outlet channel at breakthrough as a reference, we measure the pressure difference between the invasion front and the outlet channel during the experiment.

The model is clamped to a light box that can be tilted to various inclination angles to vary the component of gravity on the porous medium. The component of gravity along the model  $g$  is given by:  $g = g_0 \sin(\alpha)$  where  $g_0$  is the acceleration of gravity and  $\alpha$  is the inclination angle (see Fig. 2). The pressure drop between the outlet of the model and the reservoir is much larger than that between the inlet and the outlet of the model. The flow rate is therefore controlled by the former pressure drop, and its dependence on the tilting of the experimental setup or on the volume of wetting fluid inside the model is very weak. Thus, gravity can be considered to be tuned independently of the flow rate.

The displacement structure is visualized by illuminating the model with the light box and taking pictures with an attached *Kodak DCS 420 CCD* camera, which is controlled by a computer over a SCSI connection. Pictures are taken at regular time intervals during fluid displacement. They have a resolution of

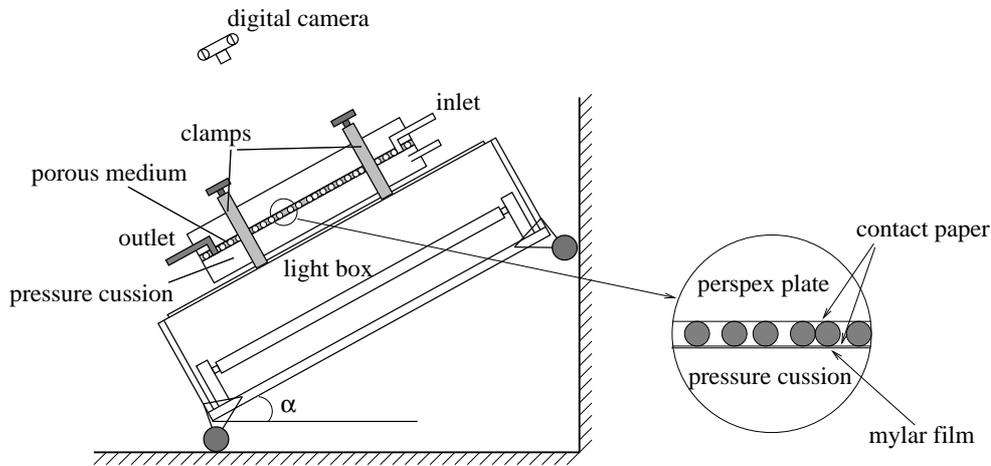


Figure 2: Sketch of the experimental setup. The gravity component on the porous medium is varied by changing the tilt-angle of the setup.

1536  $\times$  1024 pixels, with 8 bits gray levels, which provides a spatial resolution of 0.37 mm per pixel or  $\sim 2.56$  pixels per pore.

## 2.2 Image treatment

### 2.2.1 Front extraction

The raw images display a variety of gray scales. A region with very light gray shadings corresponding to air and others with dark shadings corresponding to dyed glycerol (see Fig. 3.a) can be distinguished. Glass beads appear as medium gray spots randomly distributed in the picture. In order to extract the part of the model that is filled with air, all gray levels below a given threshold are set to black, while the others are set to white. The threshold chosen varies along the direction normal to the direction of drainage, to account for the enlightenment non-uniformity. During this thresholding process, glass beads are arbitrarily determined to be part of the white or of the black region. This does not affect the accuracy of the following analyses, since only scales larger than the typical pore size,  $a$ , are considered as significant. Geometrical information about the drainage process contained in the raw picture is passed to the resulting black and white picture (see Fig. 3.b.). We call the white region in this picture *displacement structure*. Apart from included glass beads, it corresponds to the part of the model filled with air.

The black islands inside the white area in the black and white picture are *clusters* of wetting fluid that have been trapped in air during drainage, as two neighboring fingers of the fronts advancing ahead of the rest of the front have merged. Removal of the trapped clusters is achieved by painting white all black islands in the picture except the largest one, leaving only one continuous white area and one continuous black area (see Fig. 3.c.). The latter is then separated

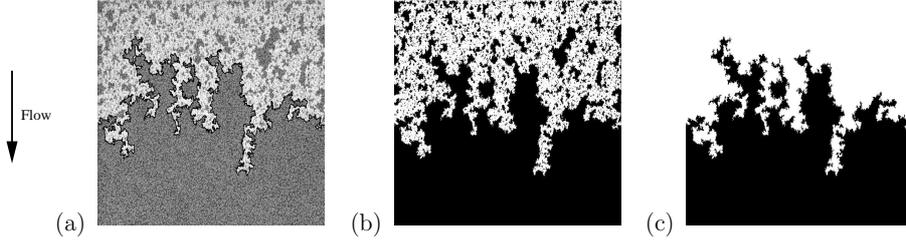


Figure 3: **a)** Comparison between the original picture of the flow structure and the extracted invasion front. The whole model ( $35 \times 35 \text{ cm}^2$ ) is represented. The withdrawal rate is  $1.5 \text{ ml.min}^{-1}$ . The inclination angle is  $20.3^\circ$  (experiment #38). This situation corresponds to an intermediate regime in which a significant viscosity-related fingering exists at some places in the displacement structure, while others parts of it exhibit a dynamics closer to capillary fingering. Anisotropic shapes of the interface and the trapped clusters are the signature of this cross-over regime. — **b)** Corresponding extracted black and white picture. The displacement structure appears white. Its aspect is related to the physical phenomena occurring during drainage — **c)** Black and white picture after removal of the trapped clusters. The front plotted in (a) on top of the raw image has been obtained as the line separating the white from the black area in (c).

from the former by a continuous line, the *displacement front*, which is the limit for the penetration of air inside glycerol. In what follows, we often simply call it *the front*. In Figure 3.a, the front is shown in black on top of the raw image. Visual inspection shows a very good consistency between the raw image and the extracted front.

The spatial resolution in our setup allows to observe geometrical features for all scales down to pore scale,  $a$ .

### 2.2.2 Front analysis

The front is analysed in terms of vertical extension, and statistical geometrical properties (using the two-point correlation function and the box counting method).

The descending coordinate along the maximum slope of the model is denoted  $z$ , the horizontal direction normal to  $z$  is called  $x$ . The frame  $(x, z)$  defines positions inside the model. Some of these positions, denoted  $\mathbf{r}_i = (x_i, z_i)$ , correspond to points that belong to the front. From the knowledge of these points, we define the following characteristic quantities for the front: its maximal extension along  $z$ ,  $\Delta z$ , its width,  $w$ , defined as the root mean square of the  $z_i$  distribution, and the two-point correlation function  $C(s)$ ,  $s$  being the scale of observation:

$$C(s) = \langle \langle \Theta(\mathbf{r}_0) \Theta(\mathbf{r}_0 + \mathbf{s}) \rangle \rangle_{|\mathbf{s}|=s} \quad , \quad (1)$$

where  $\mathbf{r}_0$  is a point on the front and  $\mathbf{s}$  is a vector from this point.  $\Theta(\mathbf{r})$  is 1 for points on the front and 0 otherwise. The double average denotes an average over all  $\mathbf{r}_0$  on the front and all possible directions of  $\mathbf{s}$ . For a fractal front with a fractal dimension  $D$ , it has been shown [Gouyet, Rosso and Sapoval 1988] that  $C(s)$  is a power law of the scale  $s$  with an exponent  $2 - D$ . We also define the

number  $N_s$  of square boxes of side length  $s$  that are required for entirely covering the front. For a fractal front with a fractal dimension  $D$ , this box-counting method provides a power law with an exponent  $-D$  [Mandelbrot 1982].

### 3 Competition between gravity and viscous forces

When one fluid invades another fluid with a different density, buoyancy forces tend to either stabilize or de-stabilize fluid displacement, depending on the density differences and flow directions [Birovljev et al. 1991, Birovljev et al. 1995, Wagner, Birovljev, Meakin, Feder and Jøssang 1997, Wagner, Meakin, Feder and Jøssang 1997, Wagner, Amundsen, Oxaal, Feder and Jøssang 2000]. We focus here on a situation where a less dense and less viscous fluid displaces a denser and more viscous fluid from above. In this case, the hydrostatic pressure gradient tends to annihilate any height difference between two points along the front, while local viscous effects tend to promote any part of the front that is progressing faster than the rest of it. The influence of gravity on the displacement structure depends both upon the gravity component on the model and upon the relative magnitudes of capillary and viscous forces.

The latter relative magnitudes are usually quantified by use of the capillary number  $C_a$ , which denominates the ratio of viscous forces to capillary forces at pore level:

$$C_a = \frac{\mu v a^2}{\gamma \kappa} \quad , \quad (2)$$

where  $\mu$  is the viscosity of the fluid,  $v$  is the filtering or Darcy velocity in the medium,  $a$  is the typical pore size,  $\gamma$  is the surface tension between the two fluids and  $\kappa$  is the permeability of the porous medium. Various values for the capillary number give rise to different displacement structures. The limit cases i.e. capillary fingering for  $C_a \ll 1$  and viscous fingering for  $C_a \gg 1$ , are well known.

For displacements sufficiently slow for viscous forces to be negligible with respect to the fluctuations in threshold capillary pressures, the width of the invasion front is controlled by the latter fluctuations along the front. The dimensionless *Bond number*  $B_o$  [Wilkinson 1984, Birovljev et al. 1991, Birovljev et al. 1995], quantifies the competition between capillary and buoyancy forces at pore scale:

$$B_o = \frac{\Delta\rho g a^2}{\gamma} \quad , \quad (3)$$

where  $\Delta\rho$  is the difference in the two liquids' densities,  $g$  is the component of gravity along the direction of displacement. The front width  $w$  for these slow displacements was found to scale with the *Bond number* as  $w \sim B_o^{-\frac{\nu}{1+\nu}}$  [Wilkinson 1984, Birovljev et al. 1991, Birovljev et al. 1995], where  $\nu$  is the percolation correlation length exponent [Stauffer and Aharony 1991], which for 2D systems is  $\nu = 4/3$ .

In another limit case in which a less viscous fluid invades a more viscous liquid at high capillary number, the displacement structure is controlled by viscous forces, which destabilize the invasion front. This viscous fingering regime has been studied both in terms of experiments [Måløy et al. 1985, Måløy, Boger, Feder, Jøssang and Meakin 1987, Nittman 1986] and numerical simulations [Chen and Wilkinson 1985, Lenormand, Touboul and Zarcone 1988, Aker, Måløy, Hansen and Batrouni 1998].

The effect of buoyancy forces has been studied for sufficiently low capillary numbers in both two and three dimensions [Birovljev et al. 1991, Birovljev et al. 1995, Clément et al. 1987], but what happens in the crossover regime where both buoyancy and viscous forces are significant has with the exception of reservoir scale simulations [Fayers, Jouaux and Tchelepi 1994] not been studied or fully understood. This crossover regime is what we are addressing in the following discussion.

### 3.1 Study of a stable configuration

#### 3.1.1 Evolution of the pressure

We consider the situation where the front width reaches a limit value after a certain time, and only exhibits small fluctuations around this value afterward (*i.e.* stable fronts). For constant flow rate the mean position of the front along the  $z$  direction,  $z_f$  ( $z = 0$  at the outlet), would depend linearly on time, with a rate that is imposed by the withdrawal rate and the rate of cluster trapping. We assume that the viscous pressure gradient inside the model can be considered as the sum of an average uniform gradient and of local time-varying fluctuations, where the former term is given by the Darcy law:  $|\overline{\nabla P}| = \mu v/\kappa$ . As a result, the pressure at the outlet of the model fluctuates around a value given by the relation

$$\overline{P} = P_0 + (\rho g - \mu v/\kappa) z_f(t) \quad , \quad (4)$$

where  $P_0$  is the pressure in the non-wetting fluid (air),  $\rho$  is the density of the defending fluid,  $\mu$  is the viscosity of the defending fluid,  $v$  is the Darcy velocity and  $\kappa$  is the model permeability. Therefore, under these assumptions the pressure  $P$  recorded at the model outlet as function of time fluctuates around a linear trend, the slope of which is negative and proportional to  $\rho g - \mu v/\kappa$ . Note that such a linear dependence of the outlet pressure is only expected for stable fronts. The conditions, in which these conditions are met, are explicated in section 3.3.

#### 3.1.2 Scaling of the front width

The following arguments follow the lines of [Birovljev et al. 1991, Auradou et al. 1999]. Consider two different pores along the invasion front, labeled  $A$  and  $B$  and separated by a distance  $\xi$  along the  $z$  direction (see Fig. 4). If the

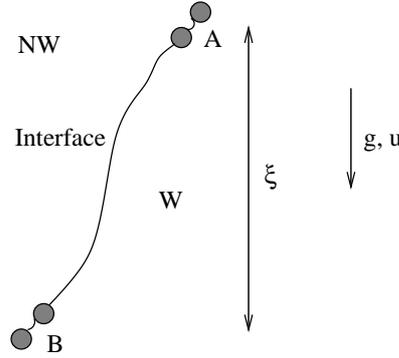


Figure 4: Sketch of a section of the front including two pores separated by a vertical distance  $\xi$ . The capillary pressure over the pore labeled  $A$  is assumed to be the critical percolation threshold pressure  $P_c$ . Assuming stable displacement, we can calculate the pressure at pore  $B$ .

density and viscosity of the invading non-wetting fluid (air) are negligible, the pressure in the invading non-wetting fluid is constant and in the following we use this as our reference pressure  $P_{NW} = 0$ . The capillary pressure over pore  $A$  is denoted  $P_A$ . If we further assume that the viscous field in the defending wetting fluid along the front can be described by Darcy's law, the capillary pressure over pore  $B$ ,  $P_B$ , can be written as the sum of hydrostatic and viscous pressure differences:

$$P_B = P_A + \rho g \xi - \frac{v \mu}{\kappa} \xi \quad . \quad (5)$$

The pore throats in the porous medium have widths that are spatially uncorrelated. Each pore throat exhibits a capillary threshold pressure  $P_t$  which is the minimum capillary pressure needed for the interface to penetrate the pore throat. For a throat with a meniscus at capillary pressure  $P_c$ , the criterion for invasion is  $P_c > P_t$ . The randomness of the porous medium gives a distribution  $N(P_t)$  for the capillary threshold pressure.

Let us now consider an arbitrary throat in the medium and assume it has a meniscus with capillary pressure  $P_c$ . The probability  $p$  that this throat will be invaded is

$$p = p^* + \int_{P^*}^{P_c} N(P_t) dP_t \quad , \quad (6)$$

where  $p^*$  is the occupation probability at the percolation capillary pressure  $P^*$  for a flat model.  $P^*$  would then be the lowest capillary pressure needed to produce a percolating cluster of invading fluid. Taylor-expanding  $N(P_t)$  around  $P^*$  we get

$$N(P_t) = N(P^*) + N'(P^*)(P_t - P^*) + \dots$$

and to the lowest order in  $(P_t - P^*)$  equation (6) becomes

$$p - p^* = N(P^*)(P_t - P^*) \quad . \quad (7)$$

If we now let the capillary pressure over pore  $A$  in equation (5) be the percolation threshold capillary pressure  $P^*$ , we can use equation (5) to rewrite (7)

as

$$p - p^* = N(P^*) \left( \rho g \xi - \frac{v \mu}{\kappa} \xi \right) . \quad (8)$$

Assuming that  $N(P_t)$  varies slowly around  $P^*$ , we can estimate  $N(P^*) = 1/W_t$  [Auradou et al. 1999], where  $W_t$  is the width of the normalized capillary threshold pressure distribution  $N(P_t)$ . With this assumption, equation (8) can be rewritten as

$$p - p^* = \frac{\xi}{a} F , \quad (9)$$

where the dimensionless *generalized fluctuation number*  $F$  [Auradou et al. 1999] has been introduced:

$$F = \frac{\rho g a - \frac{v \mu a}{\kappa}}{W_t} . \quad (10)$$

The generalized fluctuation number  $F$  quantifies the ratio between the average pressure drop over pores and the fluctuations in capillary threshold pressures in the porous medium. It can be further related to the previously defined Bond and Capillary numbers according to

$$B_o - C_a = \frac{a}{\gamma} W_t F . \quad (11)$$

For convenience we define a generalized bond number  $B_o^*$  as

$$B_o^* = B_o - C_a . \quad (12)$$

The length  $\xi$  is assumed now to be the correlation length of percolation clusters. Since the linear size of the largest trapped clusters of wetting fluid is limited by the front width  $w$  [Wilkinson 1984, Gouyet et al. 1988, Birovljev et al. 1991, Sapoval, Rosso and Gouyet 1985], the correlation length is related to the front width in our problem as:  $w = \xi/a$ . From percolation theory we know [Stauffer and Aharony 1991] that

$$A \frac{\xi}{a} = (p - p^*)^{-\nu} , \quad (13)$$

where  $\nu$  is the correlation length exponent and  $A$  is a constant of order unity [Stauffer 1979]. This scaling relation combined to equation (9) yields

$$A w = A \frac{\xi}{a} = \left( \frac{\xi}{a} \right)^{-\nu} F^{-\nu} , \quad (14)$$

which leads to the following scaling relation for the front width  $w$

$$w \sim F^{-\frac{\nu}{1+\nu}} = \left( \frac{\gamma}{W_t a} B_o^* \right)^{-\frac{\nu}{1+\nu}} . \quad (15)$$

This relation is similar to the one obtained in capillary fingering under gravity [Birovljev et al. 1991, Auradou et al. 1999], but in our case the generalized fluctuation number  $F$  replaces the ordinary Bond number  $B_o$  in the scaling relation (15). It is important to note that  $F$  depends on the width of the

capillary threshold distribution  $W_t$  and that an increase in this width therefore gives an increase in the front width. In the experiments described in this paper,  $W_t$  is kept constant. The range of validity of Eq. (15) does not extend to situations where both viscous- and gravitational-forces exceeds the capillary forces on pore scale.

### 3.2 Limit of stability

The front width  $w$  in the scaling relation in equation (15) diverges when the generalized Bond number goes to zero (gravity forces balance viscous forces). This suggests a criterion for finite front widths and thus stable displacement when

$$\rho g - \frac{v \mu}{\kappa} > 0 \quad . \quad (16)$$

This is the same stability criterion as derived by Saffman and Taylor [Saffman and Taylor 1958] for the Hele-Shaw cell, though capillary forces in a Hele-Shaw configuration act at the scale of the system width  $L$  (see Fig. 1), while in our porous medium they act at the pore scale  $a$ , which is much smaller than  $L$ . Section 4.5 addresses in more details the differences between the mechanisms of the instability in our model and in a Hele-Shaw cell.

### 3.3 Unstable displacement

Slow buoyancy driven unstable displacement has been studied in both two and three dimensions [Frette et al. 1992, Meakin et al. 1992, Birovljev et al. 1995, Xu, Yortsos and Salin 1998]. In this slow regime, string (finger) like structures develop. Their characteristic width  $w_f$  was found to scale with the Bond number in a similar fashion as the width of stable fronts:

$$w_f \sim B_o^{-\frac{\nu}{1+\nu}} \quad . \quad (17)$$

From these results on buoyancy driven unstable systems we might conjecture that the above equation can be extended in the unstable case to include viscous effect, by replacing in (17)  $B_o$  with  $-B_o^*$ :

$$w_f \sim (-B_o^*)^{-\frac{\nu}{1+\nu}} \quad . \quad (18)$$

An experimental verification of this conjecture is the purpose of ongoing work.

## 4 Results

With the setup described in part 2.1, four main series of experiments were performed, corresponding to a total of 58 experiments: three series at constant capillary number  $C_a \simeq 82 \cdot 10^{-3}$ ,  $130 \cdot 10^{-3}$  and  $190 \cdot 10^{-3}$ , and one series at constant Bond number  $B_o \simeq 0.155$ . Table 1 summarizes the experimental conditions for all experiments: inclination angle  $\alpha$  and withdrawal rate  $Q$ , and

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha$ ( $^\circ$ )	54.9	54.9	54.9	54.7	54.9	45.0	54.2	35.7	54.9	30.2	54.9	45.0
$Q$ (ml/min)	0.040	0.480	0.710	1.000	1.280	0.990	1.500	0.990	1.750	0.990	1.740	1.460
$B_o$	0.155	0.155	0.155	0.154	0.155	0.134	0.153	0.110	0.155	0.095	0.155	0.134
$C_a$	0.0032	0.0389	0.0581	0.0826	0.0988	0.0787	0.1193	0.0825	0.1351	0.0779	0.1424	0.1341
$B_o^*$	0.1516	0.1159	0.0967	0.0719	0.0560	0.0551	0.0342	0.0279	0.0198	0.0173	0.0125	-0.0003
Index	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\alpha$ ( $^\circ$ )	24.9	39.9	22.6	54.9	39.9	31.1	19.9	33.1	37.1	17.4	34.9	30.0
$Q$ (ml/min)	0.980	1.480	1.000	2.260	1.540	1.480	1.030	1.480	1.530	1.000	1.510	1.450
$B_o$	0.080	0.121	0.073	0.155	0.121	0.098	0.064	0.103	0.114	0.057	0.108	0.095
$C_a$	0.0809	0.1245	0.0787	0.1622	0.1296	0.1142	0.0811	0.1211	0.1358	0.0803	0.1329	0.1231
$B_o^*$	-0.0013	-0.0031	-0.0060	-0.0074	-0.0082	-0.0165	-0.0167	-0.0177	-0.0217	-0.0237	-0.0246	-0.0285
Index	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\alpha$ ( $^\circ$ )	50.2	48.1	15.0	12.5	27.0	28.9	44.9	48.1	26.8	54.7	54.9	54.9
$Q$ (ml/min)	2.020	2.000	1.040	1.000	1.480	1.500	2.020	2.060	1.610	2.070	2.520	2.270
$B_o$	0.145	0.141	0.049	0.041	0.086	0.091	0.134	0.141	0.085	0.154	0.155	0.155
$C_a$	0.1778	0.1745	0.0859	0.0787	0.1257	0.1332	0.1778	0.1860	0.1330	0.2029	0.2042	0.2050
$B_o^*$	-0.0324	-0.0336	-0.0369	-0.0378	-0.0397	-0.0417	-0.0442	-0.0452	-0.0476	-0.0485	-0.0494	-0.0502
Index	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
$\alpha$ ( $^\circ$ )	44.9	20.3	10.0	44.9	44.9	43.7	5.0	14.9	10.0	0.0	35.6	28.1
$Q$ (ml/min)	2.050	1.470	1.000	1.960	2.000	2.000	0.990	1.460	1.510	1.020	2.200	2.000
$B_o$	0.134	0.066	0.033	0.134	0.134	0.131	0.016	0.049	0.033	0.000	0.110	0.089
$C_a$	0.1867	0.1191	0.0880	0.1891	0.1961	0.1945	0.0841	0.1262	0.1235	0.0961	0.2072	0.1899
$B_o^*$	-0.0531	-0.0535	-0.0551	-0.0555	-0.0625	-0.0638	-0.0676	-0.0776	-0.0907	-0.0961	-0.0970	-0.1008
Index	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58		
$\alpha$ ( $^\circ$ )	5.2	21.1	15.0	0.0	0.0	54.7	15.0	9.3	32.3	0.1		
$Q$ (ml/min)	1.490	1.970	1.950	1.470	1.470	2.800	2.000	1.980	2.600	1.970		
$B_o$	0.017	0.068	0.049	0.000	0.000	0.154	0.049	0.031	0.101	0.000		
$C_a$	0.1208	0.1779	0.1626	0.1169	0.1169	0.2810	0.1992	0.1819	0.2750	0.1886		
$B_o^*$	-0.1036	-0.1098	-0.1136	-0.1169	-0.1169	-0.1265	-0.1502	-0.1513	-0.1739	-0.1882		

Table 1: Summary of the inclination angles and withdrawal rates used for each of the 58 experiments. The corresponding characteristic numbers  $C_a$ ,  $B_o$ , and  $B_o^*$  are also given. Depending on the withdrawal rate, the uncertainty on  $C_a$  and, consequently, on  $B_o^*$ , not shown in this table, ranges between 0.009 and 0.025.

the corresponding capillary number  $C_a$ , Bond number  $B_o$ , and generalized Bond number  $B_o^*$ . The experiments are numbered by decreasing  $B_o^*$ .

#### 4.1 Observations of the displacement structure when varying $B_o^*$

Fig. 5 shows the pictures of experiments for various capillary numbers and Bond numbers. The pictures shown here correspond to experiments labeled 4, 8, 13, 17, 22, 24, 25, 28, 29, 31, 46, 49, 50, 58 in table 1, from top to bottom and from left to right, respectively. Each column of the figure corresponds to the same capillary number  $C_a$ , that is, to the same withdrawal speed applied during the experiment. The withdrawal rates in question are all large enough for the system to exhibit viscous fingering at zero inclination angle. Each line of the figure corresponds to the same generalized Bond number  $B_o^* = B_o - C_a$ . The maximum accessible Bond number is related to the maximum inclination angle possible with the setup (around  $55^\circ$ ). As a consequence, the maximum accessible  $B_o^*$  for a given capillary number decreases with  $C_a$ , which explains why the highest values of  $B_o^*$  investigated here could not be reached for all values of  $C_a$ .

When increasing gravity for a given withdrawal speed (thus, following a column in Fig. 5 from bottom to top), the displacement front is observed to evolve from narrow branched fingers to a nearly flat geometry, if the generalized Bond number  $B_o^*$  can be increased enough. Thus, viscous effects are responsible for a fingering of the displacement structure that can be stabilized by gravity.

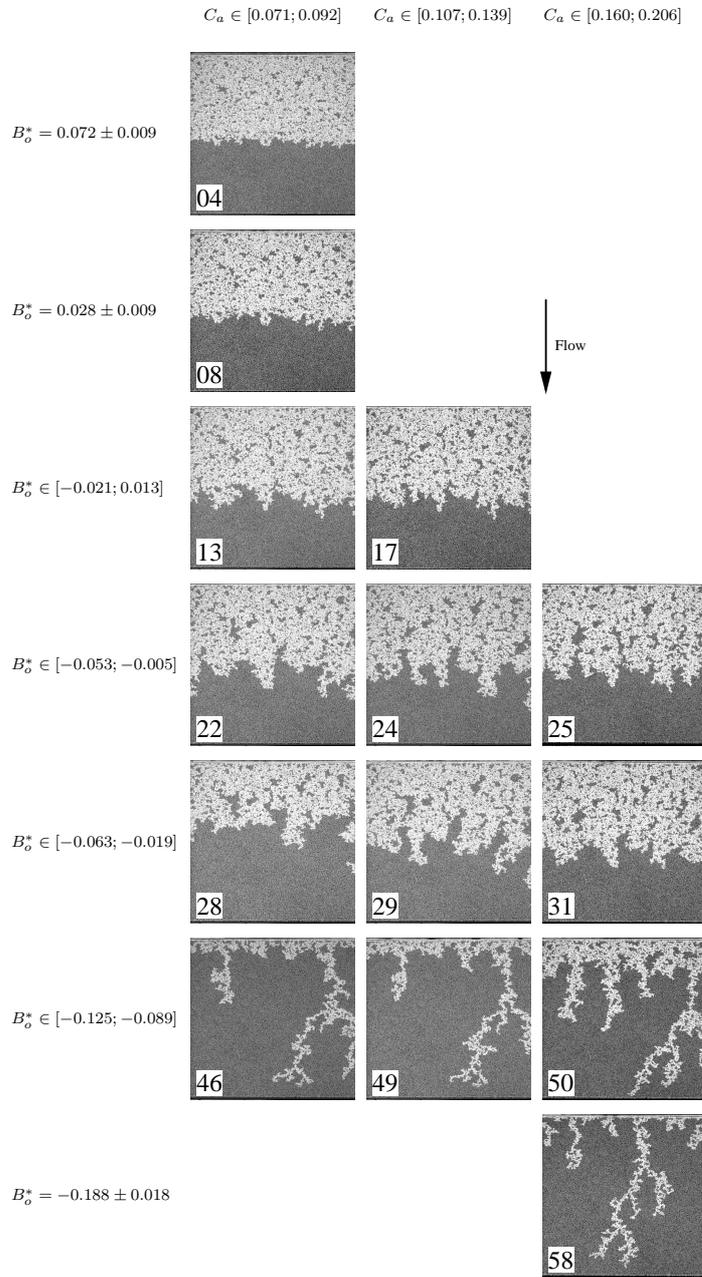


Figure 5: Pictures of the displacement structure for three series of experiments at capillary number  $C_a \simeq 0.081$ ,  $0.123$  and  $0.183$  respectively. The provided ranges include the uncertainty on  $C_a$  (and subsequently, on  $B_o^*$ ) due to that on the viscosity measurements. The pictures represent the whole model ( $35 \times 35 \text{ cm}^2$ ). They have been rescaled vertically for convenience. For each series, the displacement structure for an experiment with a generalized Bond number  $B_o^*$  around  $0.072$ ,  $0.028$ ,  $-0.002$ ,  $-0.028$ ,  $-0.041$ ,  $-0.107$  and  $-0.189$  (measured values) is shown. Stabilization of the front is observed for all series when sufficiently increasing  $B_o^*$  (bottom to top); the crossover value of  $B_o^*$  for stabilization appears to be close to  $0$ . The numbers inserted in the pictures refer to the index in table 1.

The similarity between all pictures on a given line of Fig. 5 suggests that the generalized Bond number is the controlling parameter for the process. This is consistent with relation (15), which will be discussed further in section 4.4.

Front de-stabilization at large withdrawal speed and low gravity appears more clearly in Fig. 6, which looks alike Fig. 5, except that each picture represents the whole dynamics of an experiment. Indeed, a gray level map displays the evolution of the displacement front with time. Time is the vertical descending coordinate, and each horizontal line on a map is a representation of the front at a given time. The coordinate along the  $t$ -line is the horizontal coordinate,  $x$ . The gray level at a given  $x$  along a given  $t$ -line corresponds to the difference between the position along  $z$  of the most advanced front point at horizontal position  $x$  and the mean front advancement along  $z$ . A constant gray level along a horizontal line means that the front is flat. Large variations of the gray levels along the line mean that some parts of the front (corresponding to dark shadings) are left far behind others (corresponding to light shadings). Thus, front de-stabilization appears as an increase of the roughness of the gray level map from the top to the bottom of the figure. Light shaded structures correspond to fingers development. These structures can widen as a result of the branching of the fingers, at low  $B_o^*$ . The same gray scale has been used trough all pictures, which allows to compare the importance of the fingering process in the various experiments. Pictures with homogeneous and small amplitude roughness correspond to experiments with a stabilized front. The two experiments with  $B_o^* > 0$  fulfill this criterion. The intermittency of the dynamics for stable displacement is visible: a finger stops growing after a while, because its length has reached a value that causes gravity to stabilizes it; then another finger grows, or the slow part of the front catches back fingers. As  $B_o^*$  is decreased below 0, gravity is not sufficient to prevent the fingers from growing for ever, and, subsequently, to keep the front total vertical extent around a fixed value. This fingering becomes more important as  $B_o^*$  is further decreased. Thus, the crossover for the viscous instability in the presence of gravity seems to occur around  $B_o^* = 0$ , in good consistency with the theory exposed in section 3.

## 4.2 Transition from stable to unstable drainage

The de-stabilization of the front for negative values of  $B_o^*$  clearly appears in Fig. 7.a, where the maximal extension of the front along the direction of displacement ( $z$ ),  $\Delta z$ , is plotted as a function of time normalized by the time at breakthrough, for experiments at  $C_a$  around 0.8. The *maximal extension* of the front is defined as the maximal vertical distance between two points on the front. At large positive generalized Bond numbers, the front extension rapidly grows to reach a constant plateau. Fluctuations of  $\Delta z$  occur around this average front extension due to the randomness of the medium. As the Bond number is decreased, these fluctuations grow. Viscous fingering features appear:  $\Delta z$  exhibits

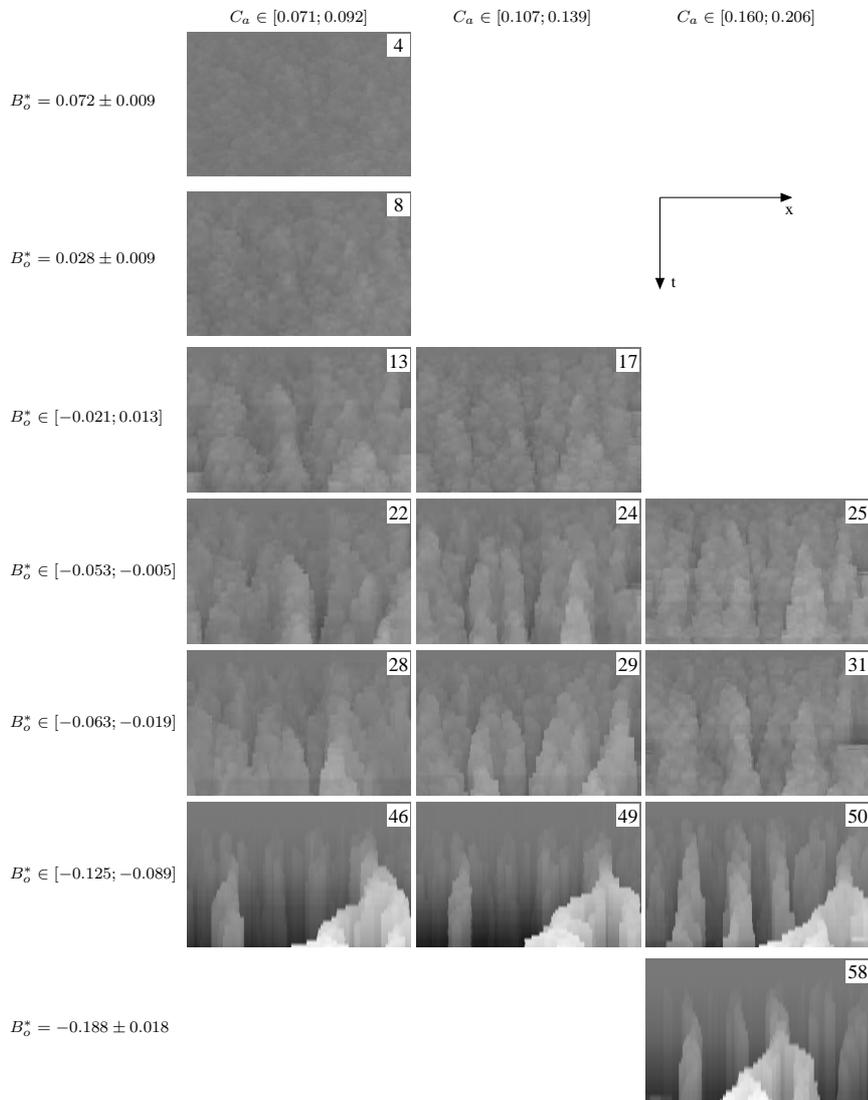


Figure 6: Evolution of the dynamics of the displacement when varying capillary number  $C_a$  and generalized Bond number  $B_o^*$ . The values for these numbers are the same as in Fig. 5. Each picture displays the evolution of the displacement front with time. Axes for time and horizontal direction  $x$  are shown in the figure. The horizontal size of a picture corresponds to the model width (35 cm). The vertical size corresponds to the time at breakthrough, which depends on the values for  $C_a$  and  $B_o$ . The gray level is proportional to the advancement of the front point in question with respect to the front mean position. Only the two top pictures, that exhibit a homogeneous roughness of small amplitude, correspond to experiments where the viscous instability is overcome by gravity. The numbers inserted in the pictures refer to the index in table 1.

sudden drops that are characteristic of the merging of two nearby fingers. For negative values of  $B_o^*$  in intermediate regime, the front extension has a growing trend with no saturation and important sudden drops due to finger merging. For large negative values of  $B_o^*$  (no shown in Fig. 7), these drops disappear, as a small number of very thin fingers exist, that never merge. The crossover between stable displacement and unbounded fingering appears to occur for a value of the generalized Bond number between  $-0.006 \pm 0.009$  and  $0.017 \pm 0.013$ , in good consistency with the predicted value for the generalized Bond number at the crossover:  $B_o^* = 0$ .

Also consistent with the predicted crossover is the evolution of the pressure drop across the model. Fig. 7.b shows the evolution of the pressure drop between the front (atmospheric pressure) and the outlet channel of the model during the same experiments as in 7.a. For stabilized experiments ( $B_o^* > 0$ ), it has been predicted to be linearly dependent on time. This can be seen in Fig. 7.b for the four experiments with stable displacement. For  $B_o^*$  close to 0, the pressure drop shows little variations during drainage: gravity exactly balances the mean viscous pressure gradient. When the average total pressure gradient turns positive, local effects in the viscous pressure gradient become significant, and non-linearity appears in the pressure curves, while the trend of the pressure evolution changes from a decreasing to an increasing behavior.

### 4.3 Geometrical properties of the front

The influence on drainage dynamics of the various physical effects involved appears when considering the evolution of the front fractal dimension during an experiment. Indeed, the limit cases in terms of displacement rate are well known. For very slow displacements, viscous effects have little influence on the interface. The displacement front for this capillary fingering regime is analogous to what is observed in inversion percolation. It is fractal, with a fractal dimension 1.33 [Lenormand and Zarcone 1989]. In contrast, viscous fingering occurs for very fast displacements, and leads to thin branched fingers that exhibit a fractal structure with a dimension that has been measured to  $1.62 \pm 0.04$  [Måløy et al. 1985].

The fractal dimensions measured in our experiments are consistent with these well-known values. Two families of fronts with behaviors close to gravity stabilized capillary fingering and viscous fingering, respectively, have been analyzed using both the two-point correlation function and the box-counting algorithm, with consistency. The results of the box-counting method are shown in Fig. 8. The box-counting function for family A (capillary fingering), shown in Fig. 8, has been obtained by averaging over all stabilized fronts in the corresponding experiment. The box-counting function for family B (viscous fingering) is the box-counting function for a sole front because of the unstable growth. At scales smaller than a cross-over scale  $s < s_c \simeq 20$  pore sizes, fronts A exhibit a regime

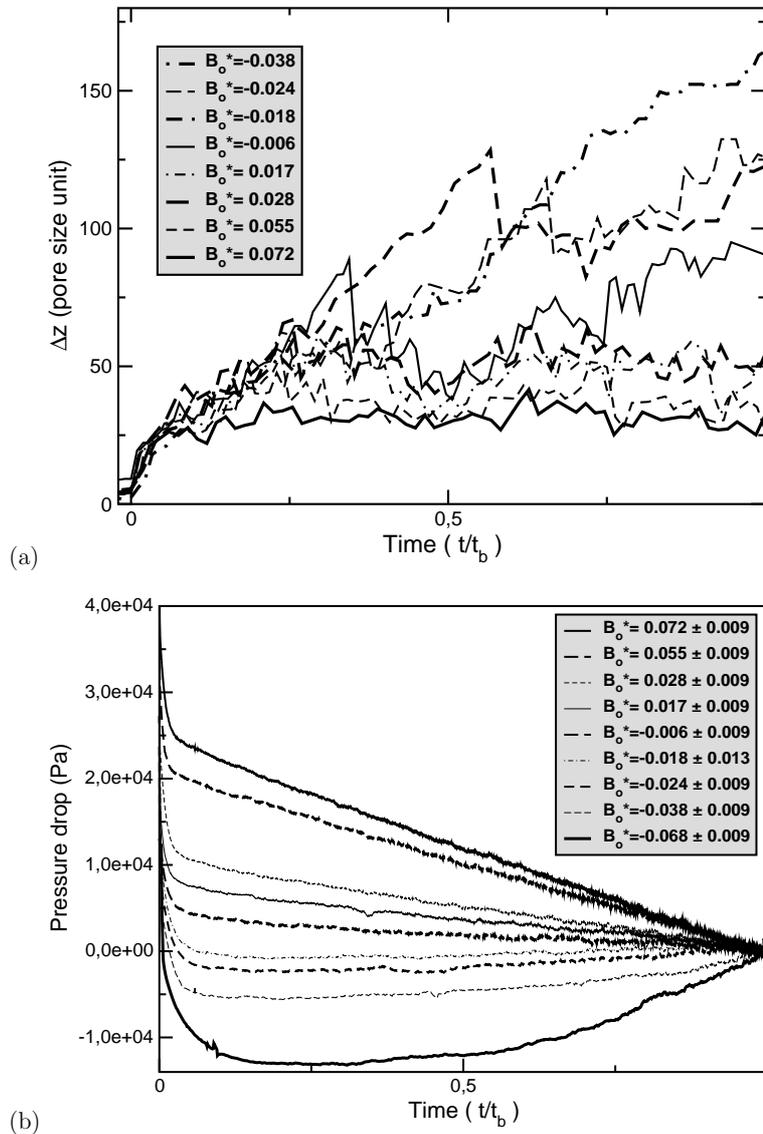


Figure 7: (a) Evolution of the extension of the front along the direction of displacement ( $z$ ),  $\Delta z$ , as a function of time normalized by the time at breakthrough. — (b) Evolution of the pressure drop between the front and the model outlet channel, as a function of normalized time also. The uncertainties on  $B_o^*$  are shown only in (b). Both plots are consistent with the theoretical prediction of a crossover at  $B_o^* = 0$ .

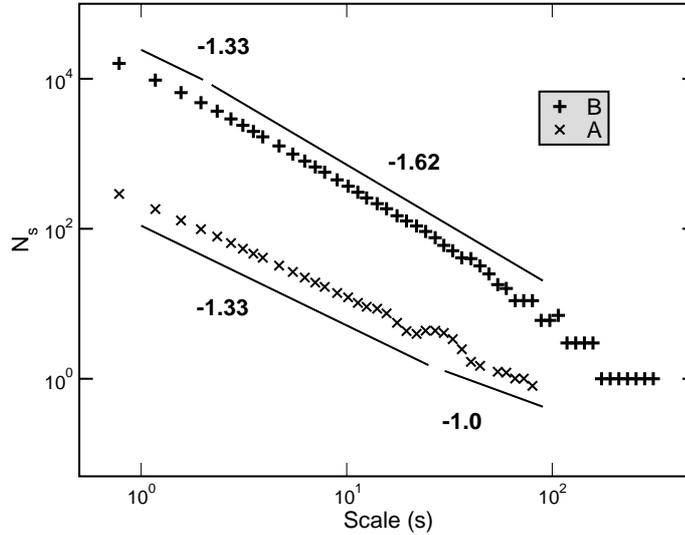


Figure 8: Characterization of two fronts corresponding respectively to capillary (A) and viscous (B) fingering, using the box-counting method. The front labeled A corresponds to an experiment with a very slow withdrawal rate (0.006 ml/min). Front B corresponds to an experiment with no gravity and a withdrawal rate of 5 ml/min. These two experiments are not referenced in table 1.  $N_s$  is the number of boxes of side length  $s$  required for entirely covering the front. The observed trends for A and B are consistent with those expected for pure capillary (slope  $-1.33$ ) and viscous fingering (slope  $-1.62$ ), respectively.

consistent with that observed for invasion percolation, with a fractal dimension close to 1.3. The crossover scale,  $s_c$ , is consistent with the observed front width. At scales larger than  $s_c$ , the front is seen as line. Front B displays a fractal structure with a fractal dimension close to 1.6, for scales larger than 2 pore scales and smaller than 80 pore scales. Front B also exhibits some broadening of the fingers at small scales, related to capillary effects. By “small scales”, we mean scales smaller than the size of the clusters trapped inside the branched fingers.

For the intermediate regimes in which viscous forces and gravity are of the same order of magnitude, parts of the front display fingers controlled by viscous effects. The finger tips progress faster than other parts of the front, which are controlled by the balance between capillary forces and gravity (see Fig. 3). The evolution of the correlation function on the whole range of scales during an experiment gives hints on the dynamics of the displacement process. In Fig. 9.b, density-density correlation functions for a series of experiments in stable regime and corresponding to various values of the generalized Bond number,  $B_o^*$ , have been plotted as a function of the scale normalized by the mean front width,  $w$ . One front from each of these experiments is shown in Fig. 9.a. They come from seven different experiments in the stable regime with  $B_o = 0.154$  but with different injection rates. By increasing the injection rate, the pressure gradients in the fluid decrease, which yields a lower  $B_o^*$  and therefore a wider front. At

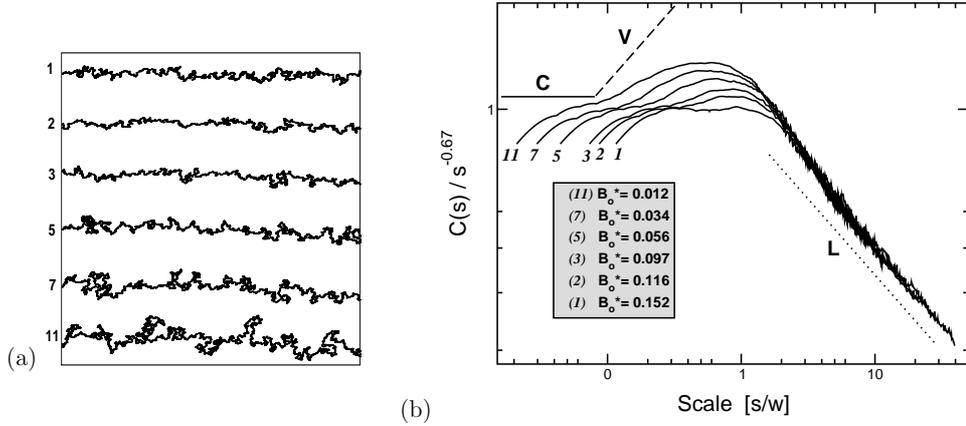


Figure 9: (a) Fronts taken from experiments at  $B_o \simeq 0.154$  and for 6 different displacement rates, all corresponding to positive generalized Bond numbers  $B_o^*$  (stable displacement). — (b) Corresponding correlation functions for these experiments. Each function has been obtained by averaging over all stable fronts. The scale is normalized by the measured front width,  $w$ , which, according to relation (15), is expected to scale as  $B_o^{*-4/7}$  (see Fig 10 for a confirmation of this prediction). The horizontal line C corresponds to the capillary fingering behavior, the long-dashed line V to the pure viscous fingering behavior, and the dotted line L to linear shape of the front. Experiment 1 is close to pure capillary fingering (as exposed in Fig. 8 (Case A)). Due to viscous effects, the dynamics of the displacement is not that of invasion percolation for regimes close to the instability threshold.

the largest speeds the fronts look visually somewhat different from the fronts observed for pure capillary stabilized fingering. The depth of the fjords are typically larger than their width.

The correlation functions in Fig. 9.b were obtained by averaging over all stable fronts from the experiments in question. The correlation function is divided by  $s^{-0.67}$ , which is the expected scaling in capillary fingering regime. The correlation function corresponding to the slowest withdrawal rate (experiment 1) exhibits at small scales a clear horizontal line characteristic for capillary fingering. The horizontal line C is a guidance to the eye. At higher injection rates the correlation function displays a crossover which becomes more significant as the injection rate is increased. This crossover is the Hallmark of significant viscous effects and is seen as an increase in the effective slope on length scales larger than the initial capillary regime (the part on small length scales with a slope close to zero), but smaller than the front width. It is important to note that all these fronts are in the stable regime. As a guidance to the eye we have also plotted the slope 0.3 (see long-dashed line V), which is the expected slope for unstable viscous fingers. As seen in the figure, the effective slope observed in the viscous cross-over regime is larger than the slope characteristic of pure capillary fingering, but smaller than that characteristic of pure viscous fingering. At scales larger than the width of the fronts, the fronts become effectively linear with a slope corresponding the dotted line L, which is the expected result for a linear front.

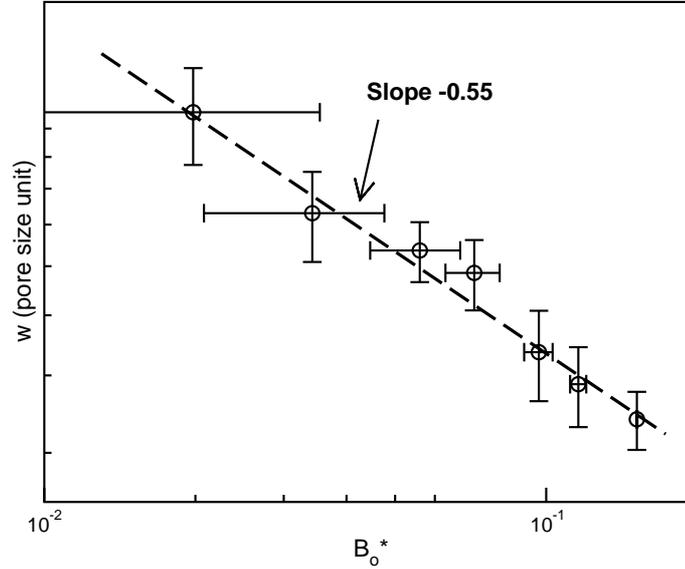


Figure 10: Scaling of the front width as a function of the generalized Bond number  $B_o^*$  for a series of experiments in stable configuration at  $B_o \simeq 0.154$ . The regression is consistent with a power law with an exponent  $-0.55$ , in good agreement with the theoretically predicted relation (15). Vertical error bars represent the uncertainty on the determination of the mean front width for a given experiment. Horizontal error bars are related to the uncertainty in the viscosity measurements.

#### 4.4 Scaling of the front width for stable displacements

In the case of stable displacement, equation (15) predicts a scaling of the front width as a power law of the generalized Bond number,  $B_o^* = B_o - C_a$ , with an exponent  $-\nu/(1 + \nu) = -4/7 (\approx -0.57)$ . Fig. 10 shows the evolution of the front width,  $w$ , as a function of  $B_o^*$ , for a series of experiments at Bond number  $B_o = 0.154 \pm 0.01$ . The experiments in question are indexed 1, 2, 3, 4, 5, 7, and 9 in table 1. The values for the front width have been obtained by averaging over all stabilized fronts from the corresponding experiment. The error bars account for the sensitivity of the time-averaging on the choice of the time after which the fronts are supposed to be stabilized. The dependence of  $w$  on  $B_o^*$  is consistent with a power law with an exponent  $-0.55$ , in good agreement with the theoretical predictions.

#### 4.5 Discussion

The viscous instability observed in the present article appears for a magnitude of the buoyancy forces identical to that of the viscous forces. Such a crossover was also observed by Saffman and Taylor in a Hele-Shaw cell with no porous medium under the same conditions. However, though the forces responsible for the stability or instability of the interface are of identical nature, the resulting displacement processes are significantly different in the two geometries.

The first striking difference lies in the natures of stable displacement in the two configurations. A stable displacement in the Hele-Shaw cell configuration means that the front exhibits no roughness. Observed in the uniformly moving referential attached to its mean position, the front is simply static. In our porous model, in contrast, an initial front roughness appears due to capillary fluctuations; during later stages of the drainage process, this roughness develops due to both local viscous effects and inhomogeneous capillary forces. The resulting displacement front has a significant roughness in the direction of displacement. Observed in the moving frame attached to its mean position, the front is ever changing, but with an amplitude that saturates after a certain time to a value that can be as high as 50 pores scale units. Thus, *stable displacement* consists here in an ongoing competition process where departing viscous fingers are prevented by buoyancy forces from developing too much ahead of the front mean position on behalf of other fingers or slowly moving portions of the front. The front width is controlled by the ratio of the mean effective pressure gradient inside the model (i.e, hydrostatic pressure gradient minus viscous pressure gradient) to the inhomogeneous capillary forces. The mean effective pressure gradient is denoted by the generalized Bond number  $B_o^* = B_o - C_a$ . The inhomogeneous capillary threshold pressures result from the randomness in the porous media. This inhomogeneity could be quantified by the width  $W_t$  of the capillary threshold pressure distribution  $N(P_t)$ . In our case, it is measured to be  $W_t \approx \gamma/(4a)$ . The ratio between the effective pressure gradient and the fluctuations in capillary threshold pressure distribution is quantified by the dimensionless fluctuation number  $F$  defined in Eq. (10). Due to the homogeneity of our porous model,  $W_t$  happens to be constant in space. For a medium with a varying pore scale, Eq. (15) indicates possible significant changes in the front width during the displacement process for constant flow rate and gravity component on the model. In the framework of this study, the extensively studied capillary and viscous fingering appear as limit cases where the capillary number,  $C_a$ , or Bond number,  $B_o$ , respectively, are negligible. The scaling relation obtained for the front width in stable displacement as a function of  $F$ , and thus, of  $B_o^*$ , is therefore a generalization of that previously obtained for capillary fingering. Indeed, Bond number and generalized Bond number are identical when the Capillary number is negligible.

Second, the transition from stable to unstable displacement in our system does not consist in a radical change in the local dynamics of the interface, as for viscous instability observed in a Hele-Shaw cell. For a configuration close to the instability threshold, it is difficult to know, by looking at the local dynamics of the displacement in our experimental model, whether the front amplitude is going to reach a saturation value or whether it is going to grow forever. This is also visible from the large fluctuations in the front width evolution for configurations close to the instability threshold, in Fig. 7: do these large fluctuations diverge or do they oscillate around a constant value? In the case of

the Hele-Shaw cell configuration, in contrast, the instability can be inferred as soon as a significant roughness appears in the front. In a sense, the complexity of the porous medium translates into a complexity in the viscous instability.

## 5 Conclusion

We have studied experimentally the displacement of a mixture of glycerol and water by air at constant volumetric flow rate in a synthetic random two-dimensional medium. The experimental setup allowed the tuning of gravity by tilting the setup and of viscous effects by changing the withdrawal rate. The aim of the study was to investigate the crossover regime from capillary fingering to viscous fingering during drainage with gravity. To account for the relative importance of buoyancy- and gravitational effects during drainage, we have introduced a generalized Bond number,  $B_o^*$  as the difference between the Bond number and the capillary number. We observe a crossover at  $B_o^* = 0$  between a configuration where the displacement front keeps a finite extension along the direction of flow ( $B_o^* > 0$ ) and a situation where fingers grow ahead of other parts of the front, forever ( $B_o^* < 0$ ). Gravity stabilized capillary fingering and pure viscous fingering appear as limit cases where viscous effects or gravity effects, respectively, have little influence on the displacement structure.

In intermediate regimes ( $B_o^*$  close to 0), the dynamics of the displacement seems to hold features characteristics of invasion percolation (for short length scales of the front) as well as features characteristic of viscosity-controlled fingering. The crossover is smooth and might lead to an apparent mis-leading dimension of the front in a mid-range between capillary regime and viscous fingering dimension. The drainage process is both inhomogeneous in time and space. For positive values of the generalized Bond number, the front width has a physical meaning in terms of fluctuations of the front around a mean position that progresses at constant speed. This front width is controlled by viscous effects and scales as a power law of the generalized Bond number with an exponent  $-4/7$  (see equation (15)), a scaling law that we predict theoretically and that is nicely confirmed by the experiments.

For negative values of the the generalized Bond number, characteristic length scales are difficult to find in the problem. The width of the developing fingers might be a suitable characteristic scale, with a scaling relation identical to (15) as a function of the generalized Bond number's absolute value.

## 6 Acknowledgments

The work was supported by NFR, the Norwegian Research Council, VISTA, the Norwegian academy of science and letters' research program with Statoil and the french/norwegian collaboration PICS.

## References

- Aker, E., Måløy, K. J. and Hansen, A. (2000), ‘Viscous stabilization of 2d drainage displacements with trapping’, *Physical Review Letters* **84**(20), 4589–4592.
- Aker, E., Måløy, K. J., Hansen, A. and Batrouni, G. G. (1998), ‘A two-dimensional network simulator for two-phase flow in porous media’, *Transport in Porous Media* **32**, 163–186.
- Auradou, A., Måløy, K. J., Schmittbuhl, J., Hansen, A. and Bideau, D. (1999), ‘Competition between correlated buoyancy and uncorrelated capillary effects during drainage’, *Physical Review E* **60**(6), 7224–7234.
- Birovljev, A., Furuberg, L., Feder, J., Jøssang, T., Måløy, K. J. and Aharony, A. (1991), ‘Gravity invasion percolation in 2 dimensions - experiment and simulation’, *Physical Review Letters* **67**(5), 584–587.
- Birovljev, A., Wagner, G., Meakin, P., Feder, J. and Jøssang, T. (1995), ‘Migration and fragmentation of invasion percolation clusters in 2-dimensional porous-media’, *Physical Review E* **51**(6), 5911–5915.
- Chandler, R., Koplik, J., Lerman, K. and Willemsen, J. F. (1982), ‘Capillary displacement and percolation in porous media’, *Journal Fluid Mechanics* **119**, 249–267.
- Chen, J.-D. and Wilkinson, D. (1985), ‘Pore-scale viscous fingering in porous media’, *Physical Review. Letters* **55**, 1892–1895.
- Clément, E., Baudet, C. and Hulin, J. P. (1987), ‘Invasion front structure in a 3d model porous medium under a hydrostatic pressure gradient’, *Journal of Physics D* **20**, 608–615.
- Dullien, F. A. L. (1988), ‘Two-phase flow in porous media’, *Chem. Eng. Technol.* **11**, 407–424.
- Fayers, F. J., Jouaux, J. and Tchelepi, H. A. (1994), ‘An improved macroscopic model for viscous fingering and its validation for 2d and 3d flows ii. flows influenced by gravity’, *In situ: oil, coal, shale, minerals* **18**, 79–105.
- Frette, O. I., Måløy, K. J., Schmittbuhl, J. and Hansen, A. (1997), ‘Immiscible displacement of viscosity-matched fluids in two-dimensional porous media’, *Physical Review E* **55**(3), 2969–2975.
- Frette, V., Feder, J., Jøssang, T. and Meakin, P. (1992), ‘Buoyancy-driven fluid migration in porous media’, *Physical Review Letters* **68**(21), 3164–3167.
- Gouyet, J. F., Rosso, M. and Sapoval, B. (1988), ‘Fractal structure of diffusion and invasion fronts in three-dimensional lattices through the gradient percolation approach’, *Physical review B* **37**(4), 1832–1838.

- Hinrichsen, E. L., Måløy, K. J., Feder, J. and Jøssang, T. (1989), ‘Self-similarity and structure of dfa and viscous fingering clusters’, *J. Phys. A* **22**, L271–L277.
- Homsy, G. M. (1987), ‘Viscous fingering in porous media’, *Annual review of fluid mechanics* **19**, 271–311.
- Lenormand, R., Touboul, E. and Zarcone, C. (1988), ‘Numerical models and experiments on immiscible displacement in porous media’, *Journal of Fluid Mechanics* **189**, 165–187.
- Lenormand, R. and Zarcone, C. (1985), ‘Invasion percolation in an etched network: measurement of a fractal dimension’, *Physical Review Letters* **54**(20), 2226–2229.
- Lenormand, R. and Zarcone, C. (1989), ‘Capillary fingering: Percolation and fractal dimension’, *Transport in Porous Media* **4**, 599–612.
- Måløy, K. J., Boger, F., Feder, J., Jøssang, T. and Meakin, P. (1987), ‘Dynamics of viscous-fingering fractals in porous-media’, *Physical Review A* **36**, 318–324.
- Måløy, K. J., Feder, J. and Jøssang, T. (1985), ‘Viscous fingering fractals in porous media’, *Physical Review Letters* **55**, 2688–2691.
- Mandelbrot, B. B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York.
- Meakin, P. (1983), ‘Diffusion-controlled cluster formation in 2–6-dimensional space’, *Phys. Rev. A* **27**, 1495–1507.
- Meakin, P., Birovljev, A., Frette, V., Feder, J. and Jøssang, T. (1992), ‘Gradient stabilized and destabilized invasion percolation’, *Physica A* **191**, 227–239.
- Nittman, J. (1986), ‘Fractal viscous fingering: Experiments and models’, *Physica* **140A**, 124–133.
- Paterson, L. (1984), ‘Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacements in porous media’, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1621–1624.
- Saffman, P. G. and Taylor, G. (1958), ‘The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid’, *Proc. Soc. London Ser. A* **245**, 312–329.
- Sapoval, B., Rosso, M. and Gouyet, J. F. (1985), ‘The fractal nature of a diffusion front and the relation to percolation’, *Journal de Physique, Letters* **46**, L149–L156.
- Stauffer, D. (1979), *Phys. Rev.* **54**.

- Stauffer, D. and Aharony, A. (1991), *Introduction to Percolation Theory*, 2 edn, Taylor & Francis.
- Vedvik, A., Wagner, G., Oxaal, U., Feder, J., Meakin, P. and Jøssang, T. (1998), ‘Fragmentation transition for invasion percolation in hydraulic gradients’, *Physical Review Letters* **80**(14), 3065–3068.
- Wagner, G., Amundsen, H., Oxaal, U., Feder, J. and Jøssang, T. (2000), ‘Slow two-phase flow in single fractures: Fragmentation, migration, and fractal patterns simulated using invasion percolation models’, *Pure and Applied Geophysics* **157**, 621–635.
- Wagner, G., Birovljev, A., Meakin, P., Feder, J. and Jøssang, T. (1997), ‘Fragmentation and migration of invasion percolation clusters: Experiments and simulations’, *Physical Review E* **55**(6), 7015–7029.
- Wagner, G., Meakin, P., Feder, J. and Jøssang, T. (1997), ‘Buoyancy-driven invasion percolation with migration and fragmentation’, *Physica A* **245**, 217–230.
- Wilkinson, D. (1984), ‘Percolation model of immiscible displacement in the presence of buoyancy forces’, *Physical Review A* **34**(1), 520–531.
- Witten, T. A. J. and Sander, L. M. (1981), ‘Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon’, *Physical Review Letters* **47**, 1400–1403.
- Witten, T. A. J. and Sander, L. M. (1983), ‘Diffusion-limited aggregation’, *Physical Review B* **27**, 5686–5697.
- Xu, B., Yortsos, Y. C. and Salin, D. (1998), ‘Invasion percolation with viscous forces’, *Physical Review E* **57**(1), 739–751.

# Conclusion générale

Le travail qui a été présenté dans cette thèse est articulé autour de trois thématiques, qui ont fait l'objet des trois parties du mémoire :

1. la caractérisation de la rugosité de surfaces de fracture obtenues par fracturation de blocs de granite et de grès,
2. la quantification de l'influence de la rugosité des parois d'une fracture sur sa perméabilité,
3. la stabilisation par la pesanteur du front de déplacement d'un fluide mouillant par de l'air dans une fracture sans rugosité, remplie de gouge.

L'étude de la rugosité des surfaces de fracture (point 1), préliminaire à l'étude présentée dans la seconde partie (point 2), a débouché sur deux conclusions importantes. La première est que la rugosité d'une surface de fracture est bien décrite, en-dehors de sa zone de croissance, par une géométrie auto-affine isotrope. Dans la limite de l'incertitude de mesure, nous n'avons pas pu détecter d'anisotropie dans la description auto-affine. Cette conclusion est au fondement de la modélisation des fractures rugueuses numériques que l'on a considérées dans une partie de l'étude présentée à la partie II. La seconde conclusion est que les corrélations de hauteur le long des surfaces de fracture de grès sont sensiblement moins persistantes que celles que l'on a mesurées sur le granite ; l'exposant de rugosité mesuré pour le grès est proche de 0.5, alors que l'exposant de rugosité du granite vaut 0.8, une valeur qui a été observée antérieurement pour de nombreux matériaux, fracturés de diverses manières. Cette constatation confirme les mesures effectuées par Boffa, Allain, Chertcoff, Hulin, Plouraboué et Roux (1999). La singularité du grès pourrait être due au mode de fracturation inter-granulaire, caractéristique de cette roche sédimentaire.

L'étude de l'écoulement monophasique lent d'un fluide visqueux dans une fracture rugueuse a permis de caractériser l'influence de la rugosité sur l'écoulement en termes du rapport de l'ouverture hydraulique  $d_h$  de la fracture sur son ouverture moyenne  $d_m$ . L'évolution du comportement hydraulique de la fracture lorsqu'on fait varier son ouverture moyenne est bien décrite par la dépendance du rapport  $d_h/d_m$  vis-à-vis de l'ouverture moyenne  $d_m$  normalisée par l'amplitude de la rugosité  $\Gamma$  *du champ des ouvertures*. Au fur et à mesure que l'on diminue l'ouverture normalisée, le rapport de l'ouverture hydraulique sur l'ouverture moyenne s'écarte de plus en plus de la valeur 1 (caractéristique du comportement d'une fracture sans rugosité). L'étude a mis en évidence une sensibilité importante du comportement hydraulique de la fracture à l'orientation du gradient de pression macroscopique, pour une ouverture normalisée donnée. Les simulations numériques ont montré que cette anisotropie hydraulique est liée à la chenalisation de l'écoulement dans la fracture ; la chenalisation est contrôlée par les hétérogénéités de grande échelle du champ des ouvertures de la fracture. Pour une ouverture moyenne donnée, elle est donc d'autant plus forte que la longueur de corrélation  $L_c$  entre les deux parois auto-affines est grande. Lorsque la longueur de corrélation égale la dimension de la fracture (les deux parois sont alors

complètement indépendantes), l'anisotropie hydraulique est maximale, et la fracture peut se révéler plus perméable qu'une fracture sans rugosité de même ouverture moyenne, pour certaines orientations du gradient de pression effectif. Une telle configuration favorable à l'écoulement a été observée expérimentalement. Lorsque la corrélation entre les deux parois existe à des échelles supérieures ou égales au quart de la dimension de la fracture (c'est-à-dire quand  $L_c \leq L/4$ ), l'anisotropie hydraulique est grandement réduite. L'étude d'une population de fractures statistiquement équivalentes (même exposant de rugosité  $\zeta$ , même longueur de corrélation  $L_c$ ) a montré que la variabilité observée dans les perméabilités de la population de fractures procède des mêmes causes, et est également grandement réduite lorsque les parois des fractures sont ajustées aux grandes longueurs d'onde. On a aussi constaté que le comportement moyen de la statistique ne dépend pas de la longueur de corrélation pour la population considérée. Ainsi, des fractures statistiquement équivalentes, de coefficient de rugosité  $\zeta$ , et dont la longueur de corrélation est sensiblement plus petite que leur dimension, ont même ouverture hydraulique, pour une ouverture normalisée  $d_m/\Gamma$  fixée ; cette ouverture hydraulique, qui est l'ouverture hydraulique moyenne de la population, coïncide avec l'ouverture hydraulique moyenne pour n'importe quelle population de fractures statistiquement équivalentes et d'exposant de rugosité  $\zeta$ . Ce comportement peut être considéré comme le comportement d'une fracture rugueuse à une ouverture mécanique normalisée donnée, dès que les surfaces de la fracture sont suffisamment ajustées. Il est très proche de la loi cubique (moins de 10 % de différence en débit volumique), pour une fracture ouverte. Des lois empiriques décrivant l'écart à la loi cubique ont été obtenues expérimentalement ou numériquement dans des travaux antérieurs. Notre comportement moyen s'écarte moins de la loi cubique que les lois établies antérieurement. Cette différence peut s'expliquer de diverses manières, qui ont été discutées au chapitre 7.

L'étude du drainage dans un milieu poreux bidimensionnel, du haut vers le bas, d'un fluide mouillant par l'air, a mis en évidence le rôle déstabilisant des forces visqueuses et le rôle stabilisant de la gravité. En l'absence de gravité, et pour des vitesses de filtration suffisamment élevées, les forces visqueuses déstabilisent le front de drainage, conduisant à la pénétration de l'air dans le fluide mouillant sous la forme d'une structure de digitation fractale, fine et branchée (régime de *digitation visqueuse*). En présence de gravité, et pour des vitesses de filtration petites, le déplacement du front est contrôlé par la gravité et par les forces capillaires qui s'opposent à l'invasion des pores du milieu poreux ; le front est "stable", c'est-à-dire que l'interface entre les deux fluides est vue à grande échelle comme une droite perpendiculaire au déplacement : la rugosité du front dans la direction du déplacement conserve une amplitude finie (régime de *digitation capillaire*). Une augmentation suffisante de la vitesse de filtration accroît suffisamment les effets visqueux, déstabilisants, pour provoquer la transition du régime d'écoulement stable à un régime d'écoulement où la rugosité du front croît indéfiniment. Nous avons mené la première étude systématique de la transition entre ces deux régimes d'écoulements. Cette transition constitue une instabilité visqueuse analogue à l'instabilité observée par Saffman-Taylor dans une cellule de Hele-Shaw. Au voisinage du seuil de l'instabilité, pour les déplacements stables comme pour les déplacements instables, gravité et effets visqueux sont tous deux significatifs. L'instabilité est contrôlée par la compétition entre ces deux effets, mais la dynamique locale du déplacement du front est pilotée par les effets capillaires, inhomogènes dans le milieu poreux. En conséquence, la théorie de Saffman-Taylor n'est pas adaptée à l'analyse de l'instabilité en milieu poreux. Nous avons prédit, par des arguments théoriques différents, que le seuil de l'instabilité est identique à celui de l'instabilité de Saffman-Taylor ; la caractérisation expérimentale du seuil a permis de confirmer cette prédiction. La caractérisation expérimentale de la dynamique locale du front a permis de préciser les différences entre l'instabilité visqueuse dans le milieu poreux et l'instabilité

---

de Saffman-Taylor. L'étude expérimentale du déplacement stable a également permis de mettre en évidence une loi d'échelle pour la largeur du front, en fonction d'un nombre de Bond généralisé, introduit comme la différence entre le nombre de Bond et le nombre capillaire. Cette loi d'échelle a été expliquée théoriquement.

Dans les deux études d'écoulements, des hétérogénéités complexes existent dans les conditions aux limites associées à l'écoulement. Bien que statistiquement homogènes, ces hétérogénéités sont responsables de la complexité de l'écoulement, qui se traduit dans un cas par la chenalisation de l'écoulement dans la fracture rugueuse, et dans l'autre cas par la complexité de la dynamique du front de drainage.

## Perspectives

Les perspectives ouvertes par les différents travaux présentés dans ce mémoire sont multiples. Certaines constituent une continuation naturelle des études exposées ici, dont elles permettraient de préciser les conclusions :

- (a) Les différences entre les analyses d'enregistrements mécaniques et les analyses d'enregistrements optiques sont encore mal comprises. En particulier, les "trous" dans les surfaces de grès sont probablement interprétés de façon sensiblement différente par les capteurs mécanique et optique. D'autre part, les différences entre la topographie des surfaces et celle des moules en silicone ne sont pas suffisamment bien quantifiées.
- (b) La mise en place d'un dispositif de visualisation des lignes de champ dans l'expérience d'écoulement dans une demi-fracture rugueuse permettrait de comparer directement les lignes de courant expérimentales et les lignes de courant numériques.
- (c) Les expériences de drainage réalisées à l'Institut de Physique d'Oslo peuvent être simulées de manière réaliste en utilisant le code développé par Eyvind Aker [Aker et al., 1998]. Une comparaison entre simulations et expériences permettrait de confirmer et préciser les résultats expérimentaux, notamment quant au domaine de validité de la loi d'échelle sur la largeur du front de drainage en régime de déplacement stable.

D'autres perspectives de ce travail concernent des développements conduisant à des études connexes et probablement riches d'enseignement :

- (i) La recherche d'une description au second ordre de la rugosité des surfaces de fracture est en cours. Une telle description devrait mettre en évidence une anisotropie dans la topographie des surfaces de fracture, qui témoignerait de la directivité du processus de fracturation. Nous pensons qu'une telle anisotropie doit être visible aux petites échelles ; l'obtention de cartes en 3 dimensions sur des grilles finement échantillonnées est nécessaire. On dispose déjà de cartes laser de ce type, mais effectuées sur des moules. La compréhension du point (a) précédent est donc un prérequis à cette étude.
- (ii) En ce qui concerne l'écoulement à travers une fracture rugueuse, deux perspectives peuvent être dégagées ; elles concernent à la fois l'étude expérimentale et les simulations numériques. La première est relative au poinçonnement des surfaces : on pourrait s'intéresser à des fractures moins ouvertes, en étendant la gamme des ouvertures moyennes considérées à des configurations où les surfaces sont poinçonnées élastiquement. Le poinçonnement élastique de deux surfaces auto-affines est réalisable numériquement, et pourrait être couplé aux codes d'écoulement. Il peut également être pris en compte dans notre modèle expérimental de demi-fracture rugueuse, grâce à l'utilisation d'un moule en silicone à la place du

bloc de granite. La seconde perspective concerne l'étude de l'écoulement lorsque les effets inertiels ne sont plus négligeables : en faisant varier la proportion d'eau dans le mélange eau/glycérol, il est possible de modifier la viscosité du fluide de deux ordres de grandeur, et d'explorer ainsi des nombres de Reynolds compris entre 0.05 (écoulement de Stokes) et 5 (écoulement laminaire non réversible).

- (iii) L'étude du drainage dans un milieu poreux bidimensionnel a surtout été axée sur la caractérisation du seuil de l'instabilité et sur celle du déplacement stable. Une étude plus détaillée de la dynamique du régime instable est envisagée. Un des enjeux d'une telle étude serait de déterminer une largeur caractéristique de la digitation et une loi d'échelle pour cette largeur caractéristique, en fonction du nombre de Bond généralisé.

# Bibliographie

- Adler, P. M. et Thovert, J.-F. (1999), *Fractures and Fracture Networks*, Kluwer Academic Publishers.
- Aker, E. (1999), A numerical study of capillary and viscous drainage in porous media, PhD thesis, NTNU Trondheim.
- Aker, E., Måløy, K. J. et Hansen, A. (2000), 'Viscous stabilization of 2D drainage displacements with trapping', *Physical Review Letters* **84**(20), 4589–4592.
- Aker, E., Måløy, K. J., Hansen, A. et Batrouni, G. G. (1998), 'A two-dimensional network simulator for two-phase flow in porous media', *Transport in Porous Media* **32**, 163–186.
- Ameen, M. S. (1995a), Fractography and fracture characterization in the Permo-Triassic sandstones and the Lower Palaeozoic Basement, West Cumbria, uk, in M. S. Ameen, ed., 'Fractography : fracture topography as a tool in fracture mechanics and stress analysis', The Geological Society, London.
- Ameen, M. S., ed. (1995b), *Fractography : fracture topography as a tool in fracture mechanics and stress analysis*, The Geological Society.
- Amitrano, D. et Schmittbuhl, J. (n.d.), Fracture roughness and gouge distribution of a granite shear band. Submitted.
- Arhens, T. J., ed. (1995), *Mineral Physics and Crystallography—A Handbook of Physical Constants*, Vol. 2 of *Ref. Shelf*, AGU, Washington DC.
- Auradou, A., Måløy, K. J., Schmittbuhl, J., Hansen, A. et Bideau, D. (1999), 'Competition between correlated buoyancy and uncorrelated capillary effects during drainage', *Physical Review E* **60**(6), 7224–7234.
- Batrouni, G. et Hansen, A. (1988), 'Fourier acceleration of iterative process in disordered systems', *J. Stat. Phys.* **52**(3-4), 747–773.
- Baudelaire, C. (1857), *À une Dame Créole (Les Fleurs du Mal)*, Bibliothèque de la Pléiade.
- Bear, J. (1972), *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier, New York.
- Birovljev, A., Furuberg, L., Feder, J., Jøssang, T., Måløy, K. J. et Aharony, A. (1991), 'Gravity invasion percolation in 2 dimensions - Experiment and simulation', *Physical Review Letters* **67**(5), 584–587.
- Birovljev, A., Wagner, G., Meakin, P., Feder, J. et Jøssang, T. (1995), 'Migration and fragmentation of invasion percolation clusters in 2-dimensional porous-media', *Physical Review E* **51**(6), 5911–5915.
- Boffa, J., Allain, C., Chertcoff, R., Hulin, J., Plouraboué, F. et Roux, S. (1999), 'Roughness of sandstone fracture surfaces : Profilometry and shadow length investigations', *European Phys. J. B* **7**(2), 179–182.

- Boffa, J., Allain, C. et Hulin, J. (1998), 'Experimental analysis of fracture rugosity in granular and compact rocks', *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **2**(3), 281–289.
- Bouchaud, E. (1997), 'Scaling properties of cracks', *J. Phys. Condens. Matter* **9**, 4319–4344.
- Bouchaud, E., Lapasset, G. et Planès, J. (1990), 'Fractal dimension of fractured surfaces : a universal value?', *Europhys. Lett.* **13**, 73–79.
- Bouchaud, J. P., Bouchaud, E., Lapasset, G. et Planès, J. (1993), 'Models of fractal cracks', *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2240.
- Bour, O. et Davy, P. (1997), 'Connectivity of random fault networks following a power law fault distribution', *Water Resour. Res.* **33**(7), 1567–1583.
- Brown, S. R. (1986), 'Correlation between the surfaces of natural rock joints', *Geophys. Res. Lett.* **13**, 1430–1433.
- Brown, S. R. (1987), 'Fluid flow through rock joints : the effect of surface roughness', *J. Geophys. Res.* **92**, 1337–1347.
- Brown, S. R. (1989), 'Transport of fluid and electric current through a single fracture', *J. Geophys. Res.* **94**(7), 9429–9438.
- Brown, S. R. (1995a), 'Measuring the dimension of self-affine fractals : Example of rough surfaces', in C. C. Barton et P. R. La Pointe, eds, 'Fractals in the earth sciences', Plenum Publishing Corporation.
- Brown, S. R. (1995b), 'Simple mathematical model of a rough fracture', *J. Geophys. Res.* **100**(B4), 5941–5952.
- Brown, S. R., Caprihan, A. et Hardy, R. (1998), 'Experimental observation of fluid flow channels in a single fracture', *J. Geophys. Res.* **103**(B3), 5125–5132.
- Brown, S. R. et Scholz, C. H. (1985), 'Broad bandwidth study of the topography of natural rock surfaces', *J. Geophys. Res.* **90**, 12575–12582.
- Brown, S. R., Stockman, H. W. et Reeves, S. J. (1995), 'Applicability of the Reynolds equation for modeling fluid flow between rough surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **22**(18), 2537–2540.
- Chandler, R., Koplik, J., Lerman, K. et Willemsen, J. F. (1982), 'Capillary displacement and percolation in porous media', *Journal Fluid Mechanics* **119**, 249–267.
- Charmet, J. C., Roux, S. et Guyon, E. (1990), *Disorder and Fracture*, Plenum, New York.
- Chen, J.-D. et Wilkinson, D. (1985), 'Pore-scale viscous fingering in porous media', *Physical Review Letters* **55**, 1892–1895.
- Chen, Z., Narayan, S. P., Yang, Z. et Rahman, S. S. (2000), 'An experimental investigation of hydraulic behaviour of fractures and joints in granitic rock', *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **37**, 1061–1071.
- Chuoke, R. L., van Meurs, P. et van der Poel, C. (1959), 'The instability of slow, immiscible, viscous liquid-liquid displacements in permeable media', *Trans. Metall. Soc. of AIME* **216**(188–194).
- Clément, E., Baudet, C. et Hulin, J. P. (1987), 'Invasion front structure in a 3D model porous medium under a hydrostatic pressure gradient', *Journal of Physics D* **20**, 608–615.
- Cook, N. G. W. (1992), 'Natural joints in rock : mechanical, hydraulic and seismic behavior and properties under normal stress', *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* **29**(3), 198–223.
- Drazer, G. et Koplik, J. (n.d.), Transport in rough self-affine fractures. Unpublished.

- 
- Dullien, F. A. L. (1988), 'Two-phase flow in porous media', *Chem. Eng. Technol.* **11**, 407–424.
- Durham, W. B. (1997), 'Laboratory observations of the hydraulic behavior of a permeable fracture from 3800 m depth in the ktb pilot hole', *J. Geophys. Res.* **102**(B8), 18,405–18,416.
- Durham, W. B. et Bonner, B. (1995), Closure and fluid flow in discrete fractures, *in* L. R. Myer, C. Tsang, N. Cook et R. Goodman, eds, 'Fractured and Jointed Rock Masses', A. A. Balkema, Brookfield, Vt., pp. 441–446.
- Ertas, D. et Kardar, M. (1992), 'Dynamic roughening of directed lines', *Phys. Rev. Lett.* **69**, 929–932.
- Ertas, D. et Kardar, M. (1994), Critical dynamics of contact line depinning. Preprint.
- Falconer, K. J. (1990), *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley, New York.
- Family, F. et Vicsek, T. (1991), *Dynamic of fractal surfaces*, World Sci. Pub., Singapore.
- Fang, K., Adame, R., Yang, H.-N., Wang, G.-C. et Lu, T.-M. (1995), 'Measurement of roughness exponent for scale invariant rough surfaces using angle resolved light scattering', *Appl. Phys. Lett.* **66**(16), 2077–2079.
- Fayers, F. J., Jouaux, J. et Tchelepi, H. A. (1994), 'An improved macroscopic model for viscous fingering and its validation for 2D and 3D flows II. Flows influenced by gravity', *In situ : oil, coal, shale, minerals* **18**, 79–105.
- Feder, J. (1988), *Fractals*, Plenum, New York.
- Feder, J. (n.d.), 'Flow in porous media'. Série de séminaires donnés à l'Institut de Physique de l'Université d'Oslo.
- Fourar, M., Bories, S., Lenormand, R. et Persoff, P. (1993), 'Two-phase flow in smooth and rough fractures : Measurement and correlation by porous-medium and pipe flow models', *Water Resour. Res.* **29**(11), 3699–3708.
- Frette, O. I., Maløy, K. J., Schmittbuhl, J. et Hansen, A. (1997), 'Immiscible displacement of viscosity-matched fluids in two-dimensional porous media', *Physical Review E* **55**(3), 2969–2975.
- Frette, V., Feder, J., Jøssang, T. et Meakin, P. (1992), 'Boyancy-driven fluid migration in porous media', *Physical Review Letters* **68**(21), 3164–3167.
- Ge, S. (1997), 'A governing equation for fluid flow in rough fractures', *Water Resour. Res.* **33**(1), 53–61.
- Glover, P., Matsuki, K., Hikima, R. et Hayashi, K. (1998a), 'Synthetic rough fractures in rocks', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9609–9620.
- Glover, P. W. J., Matsuki, K., Hikima, R. et Hayashi, K. (1998b), 'Fluid flow in synthetic rough fractures and application to the Hachimantai geothermal hot rock test site', *J. Geophys. Res.* **103**(B5), 9621–9635.
- Gouyet, J. F., Rosso, M. et Sapoval, B. (1988), 'Fractal structure of diffusion and invasion fronts in three-dimensional lattices through the gradient percolation approach', *Physical review B* **37**(4), 1832–1838.
- Guéguen, Y. et Palciauskas, V. (1992), *Introduction à la physique des roches*, Hermann, Paris.
- Guyon, É., Hulin, J.-P. et Petit, L. (2001), *Hydrodynamique Physique*, seconde édition edn, CNRS Éditions.

- Hakami, E. et Larsson, E. (1996), 'Aperture measurements and flow experiments on a single fracture', *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech. Abstr.* **33**(4), 395–404.
- Hasegawa, E. et Izuchi, H. (1983), 'On steady flow through a channel consisting of an uneven wall and a plane wall, part 1 : Case of no relative motion in two walls', *Bull. Jap. Soc. Mec. Eng.* **26**, 514–520.
- Herrmann, H. J. et Roux, S. (1990), *Statistical Models for Fracture of Disordered Media*, North-Holland, Amsterdam.
- Hinrichsen, E. L., Måløy, K. J., Feder, J. et Jøssang, T. (1989), 'Self-similarity and structure of dla and viscous fingering clusters', *J. Phys. A* **22**, L271–L277.
- Homsy, G. M. (1987), 'Viscous fingering in porous media', *Annual review of fluid mechanics* **19**, 271–311.
- Hoshen, J. et Kopelman, R. (1976), 'Percolation and cluster distribution. I. cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm', *Phys. Rev. B* **14**, 3428.
- Hubbard, B. B. (1995), *Ondes et Ondelettes – La Saga d'un Outil mathématique*, Pour la Science.
- Hull, D. (1999), *Fractography – Observing, Measuring and Interpreting Fracture Surface Topography*, Cambridge University Press.
- Jessel, M. W., Cox, S. J. D., Schwarze, P. et Power, W. L. (1995), The anisotropy of surface roughness measured using a digital photogrammetric technique, in M. S. Ameen, ed., 'Fractography : fracture topography as a tool in fracture mechanics and stress analysis', The Geological Society, London.
- Lenormand, R., Touboul, E. et Zarcone, C. (1988a), 'Numerical models and experiments on immiscible displacement in porous media', *Journal of Fluid Mechanics* **189**, 165–187.
- Lenormand, R., Touboul, E. et Zarcone, C. (1988b), 'Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media', *J. Fluid Mechanics* **189**, 165–187.
- Lenormand, R. et Zarcone, C. (1985), 'Invasion percolation in an etched network : measurement of a fractal dimension', *Physical Review Letters* **54**(20), 2226–2229.
- Lenormand, R. et Zarcone, C. (1989), 'Capillary fingering : Percolation and fractal dimension', *Transport in Porous Media* **4**, 599–612.
- Lomize, G. M. (1951), *Flow in Fractured Rocks*, Gozenergoizdat, Moscow. In Russian.
- López, J. et Schmittbuhl, J. (1998), 'Anomalous scaling of fracture surfaces', *Phys. Rev. E* **57**, 6405–6408.
- Louis, C. (1969), 'A study of groundwater flow in jointed rock and its influence on the stability of rock masses', *Rock Mech. Res. Rep.* **10**.
- LTS, *Laser Twin Sensor* (n.d.).  
\*<http://www.lmint.com/>
- Måløy, K. J., Hansen, A., Hinrichsen, E. L. et Roux, S. (1992), 'Experimental measurements of the roughness of brittle cracks', *Phys. Rev. Lett.* **68**, 213–215.
- Måløy, K.-J., Boger, F., Feder, J. et Jøssang, T. (1987), *Time-Dependent Effects in Disordered Materials*, Plenum Press, New York, chapter Dynamics and structure of viscous fingers in porous media.
- Måløy, K. J., Boger, F., Feder, J., Jøssang, T. et Meakin, P. (1987), 'Dynamics of viscous-fingering fractals in porous-media', *Physical Review A* **36**, 318–324.

- 
- Måløy, K. J., Feder, J. et Jøssang, T. (1985), ‘Viscous fingering fractals in porous media’, *Physical Review Letters* **55**, 2688–2691.
- Måløy, K. J., Furuberg, L., Feder, J. et Jøssang, T. (1992), ‘Dynamics of slow drainage in porous-media’, *Physical Review Letters* **68**(14), 2161–2164.
- Mandelbrot, B. B. (1982), *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York.
- Mandelbrot, B. B. (1985), ‘Self-affine fractals and fractal dimension’, *Phys. Scripta* **32**, 257–260.
- Mandelbrot, B. B. (1986), *Fractals in Physics*, Elsevier, Amsterdam.
- Mandelbrot, B. B., Passoja, D. E. et Paullay, A. J. (1984), ‘Fractal character of fracture surfaces of metals’, *Nature* **308**, 721–722.
- Matheron, G. (1967), *Éléments pour une Théorie des Milieux Poreux*, Masson et Cie.
- Mavko, G., Mukerji, T. et Dvorkin, J. (1998), *The Rock Physics Handbook*, Cambridge University Press.
- McAnulty, P., Meisel, L. V. et Coste, P. J. (1992), ‘Hyperbolic distributions and fractal character of fracture surfaces’, *Phys. Rev A* **46**(6), 3523–3526.
- Meakin, P. (1983), ‘Diffusion-controlled cluster formation in 2–6-dimensional space’, *Phys. Rev. A* **27**, 1495–1507.
- Meakin, P. (1993), ‘The growth of rough surfaces and interfaces’, *Phys. Rep.* **235**, 189–289.
- Meakin, P., Birovljev, A., Frette, V., Feder, J. et Jøssang, T. (1992), ‘Gradient stabilized and destabilized invasion percolation’, *Physica A* **191**, 227–239.
- Méheust, Y. et Schmittbuhl, J. (2000), ‘Flow enhancement of a rough fracture’, *Geophys. Res. Lett.* **27**(18), 2989–2992.
- Mehrabi, A., Rassamdana, H. et Sahimi, M. (1997), ‘Characterization of long-range correlations in complex distributions and profiles’, *Phys. Rev. E* **56**(1), 712–722.
- Méheust, Y., Løvoll, G., Måløy, K.-J. et Schmittbuhl, J. (2002), ‘Competition between gravity and viscous effects during drainage’, *Phys. Rev. E*. In press.
- Méheust, Y. et Schmittbuhl, J. (2001a), ‘Geometrical heterogeneities and permeability anisotropy of rough fractures’, *J. Geophys. Res.* **106**(B2), 2089–2102.
- Méheust, Y. et Schmittbuhl, J. (2001b), Scale effects related to flow in rough fractures. *Pure and Applied Geophysics* (in press).
- Milman, V. Y., Blumenfeld, R., Stelmashenko, N. A. et Ball, R. C. (1993), ‘Comment on “experimental measurements of the roughness of brittle cracks”’, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 204.
- Morel, S., Schmittbuhl, J., López, J. et Valentin, G. (1998), ‘Anomalous roughening of wood fractured surfaces’, *Phys. Rev. E* **58**, 1–7.
- Moreno, L., Tsang, Y. W., Tsang, C., Hale, F. et Neretnieks, I. (1988), ‘Flow and tracer transport in a single fracture : A stochastic model and its relation to some field observations’, *Water Resour. Res.* **24**(12), 2033–2048.
- Mourzenko, V. V., Galamay, O. et Thovert, J.-F. (1997), ‘Fracture deformation and influence on permeability’, *Physical Review E* **56**(3).
- Mourzenko, V. V., Thovert, J.-F. et Adler, P. (1995), ‘Permeability of a single fracture ; validity of the Reynolds equation’, *J. Phys. II* **5**, 465–482.
- Nataf, H. C. et Sommeria, J., eds (2000), *La Physique de la Terre*, CNRS, Belin.

- Nicholl, M. J., Rajaram, H., Glass, R. J. et Detwiler, R. (1999), 'Saturated flow in a single fracture : Evaluation of the Reynolds equation in measured aperture fields', *Water Resources Research* **35**(11), 3361–3373.
- Nietzsche, F. (1861), *Jenseits von Gut und Böse – Par-delà le Bien et le Mal*.
- Nittman, J. (1986), 'Fractal viscous fingering : Experiments and models', *Physica A* **140**, 124–133.
- Parisi, A. et Caldearelli, G. (2000), 'Self-affine properties of fractures in brittle materials', *Physica A* **280**, 161–65.
- Pastorius, D. (2001), Triangulation sensors : an overview, Technical report, LMI Technologies Inc. Documentation en ligne.  
\*<http://www.lmint.com/>
- Paterson, L. (1984), 'Diffusion-limited aggregation and two-fluid displacements in porous media', *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1621–1624.
- Persoff, P. et Pruess, K. (1995), 'Two-phase flow visualization and relative permeability measurement in natural rough-walled rock fractures', *Water Resources Res.* .
- Pinkus, O. et Sternlicht, B. (1961), *Theory of Hydrodynamic Lubrication*, McGraw-Hill, New York.
- Plouraboué, F., Kurowski, P., Boffa, J.-M., Hulin, J.-P. et Roux, S. (2000), 'Experimental study of the transport properties of rough self-affine fractures', *J. of Contaminant Hydrology* **46**, 295–318.
- Plouraboué, F., Hulin, J. P., Roux, S. et Koplik, J. (1998), 'Numerical study of geometrical dispersion in self-affine rough fractures', *Phys. Rev. E* **58**(3), 3334–3346.
- Plouraboué, F., Kurowski, P., Hulin, J. P., Roux, S. et Schmittbuhl, J. (1995), 'Aperture of rough crack', *Phys. Rev. E* **51**, 1675–1685.
- Poon, C. Y., Sayles, R. S. et Jones, T. A. (1992), 'Surface measurement and fractal characterization of naturally fractured rocks', *J. Phys. D : Appl. Phys.* **25**, 1269–1275.
- Power, W. L. et Durham, W. B. (1997), 'Topography of natural and artificial fractures in granitic rocks : implications for studies of rock friction and fluid migration', *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.* **34**(6), 979–989.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. et Flannery, B. P. (1992), *Numerical Recipes*, Cambridge Univ. Press, New York.
- Ramanathan, S., Ertas, D. et Fisher, D. S. (1997), 'Quasi-static crack propagation in heterogeneous media', *Phys. Rev. Lett.* **79**, 873–876.
- Roberts, J. C. (1995), Fracture surface markings, in M. S. Ameen, ed., 'Fractography : fracture topography as a tool in fracture mechanics and stress analysis', The Geological Society, London.
- Roux, S. (1999), Entretien.
- Roux, S., Plouraboué, F. et Hulin, J. (1996), 'Tracer dispersion in rough open cracks', *Transp. Porous Media* **32**(1), 97–116.
- Roux, S., Schmittbuhl, J., Vilotte, J. P. et Hansen, A. (1993), 'Some physical properties of self-affine rough surfaces', *Europhys. Lett.* **23**, 277–282.
- Saffman, P. G. et Taylor, G. (1958), 'The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid', *Proc. Soc. London Ser. A* **245**, 312–329.

- 
- Sahimi, M. (1993), 'Flow phenomena in rocks : From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing', *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1393–1534.
- Sapoval, B., Rosso, M. et Gouyet, J. F. (1985), 'The fractal nature of a diffusion front and the relation to percolation', *Journal de Physique, Letters* **46**, L149–L156.
- Sayles, R. S. et Thomas, T. R. (1978), 'Surface topography as a nonstationary random process', *Nature* **271**, 431–434.
- Scheidegger, A. E. (1974), *The Physics of Flow Through Porous Media*, 3rd edition edn, University of Toronto Press, Toronto, Canada.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S. (1987), 'Physical modeling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes', *J. Geophys. Res.* **92**, 9693–9714.
- Schertzer, D. et Lovejoy, S. (1989), Nonlinear variability in geophysics : Multifractal simulations and analysis, in L. Pietronero, ed., 'Fractals : Physical Origin and Consequences', Plenum, New York, p. 49.
- Schmittbuhl, J., Gentier, S. et Roux, S. (1993), 'Field measurements of the roughness of fault surfaces', *Geophys. Res. Lett.* **20**(8), 639–641.
- Schmittbuhl, J., Hansen, A., Auradou, H. et Måløy, K. J. (2000), 'Geometry and dynamics of invasion percolation with correlated buoyancy', *Physical Review E* **61**(4), 3985–3995.
- Schmittbuhl, J., Roux, S. et Berthaud, Y. (1994), 'Development of roughness in crack propagation', *Europhys. Lett.* **28**, 585–590.
- Schmittbuhl, J., Roux, S., Vilotte, J. P. et Måløy, K. J. (1995), 'Interfacial crack pinning : effect of non local interactions', *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1787–1790.
- Schmittbuhl, J., Schmitt, F. et Scholz, C. H. (1995), 'Scaling invariance of crack surfaces', *J. Geophys. Res.* **100**, 5953–5973.
- Schmittbuhl, J., Vilotte, J. P. et Roux, S. (1994), 'Dynamic friction of self-affine surfaces', *J. Phys. II Fr.* **4**, 225–237.
- Schmittbuhl, J., Vilotte, J. P. et Roux, S. (1995), 'Reliability of self-affine measurements', *Phys. Rev. E* **51**, 131–147.
- Simonsen, I., Hansen, A. et Magnar Nes, O. (1998), 'Using wavelet transforms for Hurst exponent determination', *Phys. Rev. E* **58**, 2779–2787.
- Simonsen, I., Vandembroucq, D. et Roux, S. (2000), 'Wave scattering from self-affine surfaces', *Phys. Rev. E* **61**.
- Singhal, B. B. S. et Gupta, R. P. (1999), *Applied Hydrogeology of Fractured Rocks*, Kluwer Academic Publishers.
- Skjetne, E., Hansen, A. et Gudmundsson, J. S. (1999), 'High-velocity flow in a rough fracture', *J. Fluid. Mech.* **383**, 1–28.
- Stauffer, D. et Aharony, A. (1991), *Introduction to Percolation Theory*, 2 edn, Taylor & Francis.
- Thompson, M. E. (1991), 'Numerical simulation of solute transport in rough fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B3), 4157–4166.
- Thompson, M. E. et Brown, S. R. (1991), 'The effect of anisotropic surface roughness on flow and transport in fractures', *J. Geophys. Res.* **96**(B13), 21,923–21,932.
- Tryggvason, G. et Aref, H. (1983), 'Numerical experiments on Hele-Shaw flow with a sharp interface', *J. Fluid Mech.* **136**(1-30).

- Tsang, Y. W. (1984), 'The effect of tortuosity on fluid flow through a single fracture', *Water Resour. Res.* **20**(9), 1209–1215.
- Tsang, Y. W. et Tsang, C. F. (1987), 'Channel model of flow through fractured media', *Water Resources Res.* **23**(3), 467–479.
- Unger, A. J. A. et Mase, C. (1993), 'Numerical study of the hydromechanical behavior of two rough fracture surfaces in contact', *Water Resour. Res.* **29**(7), 2101–2114.
- Vedvik, A., Wagner, G., Oxaal, U., Feder, J., Meakin, P. et Jøssang, T. (1998), 'Fragmentation transition for invasion percolation in hydraulic gradients', *Physical Review Letters* **80**(14), 3065–3068.
- Vicsek, T. (1992), *Fractal Growth Phenomena*, 2 edn, World Sci. Pub., Singapore.
- Voss, R. F. (1985), *Scaling Phenomena in Disorder Systems*, Plenum, New York.
- Wagner, G., Amundsen, H., Oxaal, U., Meakin, P., Feder, J. et Jøssang, T. (2000), 'Slow two-phase flow in single fractures : fragmentation, migration, and fractal patterns simulated using invasion percolation models', *Pure Appl. Geophys.* **157**, 621–635.
- Wagner, G., Birovljev, A., Meakin, P., Feder, J. et Jøssang, T. (1997), 'Fragmentation and migration of invasion percolation clusters : Experiments and simulations', *Physical Review E* **55**(6), 7015–7029.
- Wagner, G., Meakin, P., Feder, J. et Jøssang, T. (1997), 'Buoyancy-driven invasion percolation with migration and fragmentation', *Physica A* **245**, 217–230.
- Walsh, J. B., Brown, R. et Durham, B. (1997), 'Effective media theory with spatial correlations for flow in a fracture', *J. Geophys. Res.* **102**(B10), 22,587–22,594.
- Wilkinson, D. (1984), 'Percolation model of immiscible displacement in the presence of buoyancy forces', *Physical Review A* **34**(1), 520–531.
- Wilkinson, D. et Willemsen, J. (1983), 'Invasion percolation : A new form of percolation theory', *J. Phys. A* **16**, 3365–3376.
- Winterstein, D. F. (1990), 'Velocity anisotropy terminology for geophysicists', *Geophysics* **55**, 1070–1088.
- Witten, T. A. J. et Sander, L. M. (1981), 'Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon', *Physical Review Letters* **47**, 1400–1403.
- Witten, T. A. J. et Sander, L. M. (1983), 'Diffusion-limited aggregation', *Physical Review B* **27**, 5686–5697.
- Xu, B., Yortsos, Y. C. et Salin, D. (1998), 'Invasion percolation with viscous forces', *Physical Review E* **57**(1), 739–751.
- Yeo, I., Freitas, M. D. et Zimmerman, R. (1998), 'Effect of shear displacement on the aperture and permeability of a rock fracture', *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* **35**(8), 1051–1070.
- Zimmerman, R. et Bodvarsson, G. (1996), 'Hydraulic conductivity of rock fractures', *Transp. Porous Media* **23**, 1–30.

# Liste des tableaux

2.1	Temps de mesure sur trois types de grilles différents, pour les trois modes de rugosimétrie . . . . .	49
9.1	Résumé des 58 expériences retenues, avec les angles d'inclinaison et les débits volumiques correspondants. Les nombres caractéristiques $C_a$ , $B_o$ , et $B_o^*$ associés sont précisés . . . . .	289



# Table des figures

1.1	Deux exemples célèbres de constructions géométriques fractales . . . . .	11
1.2	Comparaison de profils auto-similaires et auto-affines . . . . .	13
1.3	Génération de surfaces auto-affines isotropes par méthode spectrale . . . . .	23
1.4	Analyses par spectre de Fourier et coefficient d'ondelette moyenné de la surface présentée à la Fig. 1.3(a) . . . . .	27
1.5	Comportement des fonctions de structure d'une surface de granite . . . . .	30
2.1	Schéma du dispositif de rugosimétrie . . . . .	37
2.2	Vues rapprochées des systèmes de mesure mécanique et optique . . . . .	39
2.3	Schéma de principe de la mesure mécanique. . . . .	41
2.4	Schémas optiques du capteur laser. . . . .	42
2.5	Schémas de parcours de la grille de rugosimétrie, en mode pas à pas et balayage. . . . .	44
2.6	Courbe de calibration du capteur transformateur différentiel linéaire. . . . .	45
2.7	Histogramme de 2000 mesures successives d'un même point. . . . .	47
2.8	Rugosité d'une lame de verre . . . . .	48
2.9	Comparaison de deux enregistrements mécaniques réalisés avec deux machines différentes . . . . .	49
2.10	Spectre de Fourier des cartes présentées à la figure Fig. 2.9(c) . . . . .	51
2.11	Courbe de calibration du capteur optique. . . . .	52
2.12	Tests de la cinématique de fin de positionnement. . . . .	55
2.13	Histogramme de 10000 mesures effectuées avec le capteur optique sur le même point d'un moule en silicone de surface de granite. . . . .	56
2.14	Comparaison de deux enregistrements optiques de la même surface (rugosimétrie optique pas à pas). . . . .	59
2.15	Schéma du dispositif de test de la cinématique des tables à déplacements. . . . .	59
2.16	Comparaison du mouvement de la table et du mouvement théorique . . . . .	60
2.17	Tests de recalage horizontal de deux profil . . . . .	64
2.18	Comparaison de profils enregistrés par rugosimétrie optique pas à pas et par balayage. . . . .	65
2.19	Comparaison entre deux enregistrements d'une même surface, l'un pas à pas, l'autre par balayage. . . . .	67
2.20	Réplique en silicone d'une surface de fracture de granite . . . . .	68
2.21	Formulaires principaux du programme de rugosimétrie mécanique . . . . .	70
2.21	Formulaires du programme de rugosimétrie optique. . . . .	74
2.21	Formulaire de lancement de la rugosimétrie optique par balayage. . . . .	76
3.1	Schéma d'interpolation bilinéaire . . . . .	80

3.2	Rotation de grille par interpolation bilinéaire . . . . .	81
3.3	Interpolation bilinéaire sur des grilles plus fines . . . . .	82
3.4	Influence d'un moyennage local sur une surface auto-affine isotrope. . . . .	84
3.5	Influence d'un filtrage des coefficients d'ondelettes de petites échelles sur une surface auto-affine isotrope . . . . .	85
3.6	Flexion 4-points d'un bloc parallélépipédique . . . . .	86
3.7	Analyse de 10 profils de 2050 points enregistrés sur une surface de granite . . . . .	89
3.8	Comparaison des corrélations le long de profils enregistrés mécaniquement sur une surface de granite, optiquement sur la même surface, et optiquement sur un moule de la surface . . . . .	90
3.9	Représentations du spectre de Fourier à deux dimensions d'un enregistrement d'une surface de granite . . . . .	92
3.10	Analyse de l'auto-affinité de profils de grès en fonction de l'orientation des profil .	93
3.11	Analyse de 10 profils de 2050 points enregistrés sur une surface de grès . . . . .	96
3.12	Comparaison des corrélations le long de profils enregistrés mécaniquement et optiquement sur une surface de granite. . . . .	97
3.13	Comparaison des lignes de fracturation sur des lames minces de grès et de granite	99
3.14	Filtrage des coefficients d'ondelettes de profils d'une surface de grès . . . . .	100
3.15	Comparaison de deux profils extraits d'enregistrement, l'un de granite, et l'autre de grès. . . . .	101
3.16	Analyse de 4 séries de 10 profils enregistrés sur le grès avec des orientations différentes par rapport à la rainure d'initiation . . . . .	102
4.1	Les deux fractures ci-dessus ont même champ des ouvertures . . . . .	110
4.2	Photos de traces de fractures . . . . .	111
4.3	Ajustement des parois d'une fracture naturelle aux grandes échelles. . . . .	113
4.4	Gros plans de coupes de la réplique d'une fracture naturelle de grès . . . . .	114
4.5	Vue de dessus d'une fracture de longueur $L_x$ et de largeur $L_y$ . . . . .	115
5.1	Description simplifiée du canal reliant les deux cuves. . . . .	130
5.2	Dépendance de la viscosité du mélange eau/glycérol avec la température. . . . .	131
5.3	Dépendance entre le débit imposé par la pompe péristaltique et la différence de pression à la base des cuves . . . . .	132
5.4	Test de la réversibilité de l'écoulement . . . . .	133
5.5	Correction des mesures brutes de transmissivité pour tenir compte des pertes de charge dans les canaux d'admission et de sortie . . . . .	134
6.1	Schéma des grilles utilisées pour échantillonner les champs d'ouverture locale et de pressions . . . . .	155
6.2	Apparition de la tortuosité dans les lignes de courant . . . . .	159
6.3	Schéma relatif aux tubes de courant dans la fracture pour une orientation quelconque du gradient de pression effectif . . . . .	161
6.4	Influence de la coupure inférieure de l'auto-affinité sur le comportement hydraulique calculé . . . . .	165
7.1	Évolution de l'ouverture hydraulique avec l'ouverture moyenne normalisée par l'écart-type du champ des ouvertures, pour différentes fractures des la famille A et B . . . . .	206
7.2	Étude statistique sur 500 fractures statistiquement équivalentes . . . . .	208

---

8.‡	Lame mince d'une éprouvette cylindrique de granite du Sidobre, fracturée en essai triaxal . . . . .	246
8.§	Schéma du principe de la modélisation d'une fracture remplie d'une gouge . . . . .	247
8.1	Schéma de la cellule de Hele-Shaw . . . . .	252
8.2	Photographies d'une expérience de digitation visqueuse dans une cellule de Hele-Shaw, où du glycérol est déplacé par de l'eau, de bas en eau . . . . .	256
8.3	Étalement d'une goutte sur une surface solide dans le cas d'un fluide non mouillant et d'un fluide mouillant . . . . .	257
8.4	Schéma de l'interface entre le fluide mouillant et le fluide non-mouillant, dans le milieu poreux bidimensionnel . . . . .	258
8.5	Diagramme de phase décrivant les différents comportements possibles de l'interface entre deux fluides pour le drainage dans un milieu poreux . . . . .	263
8.6	Digitation capillaire dans un milieu poreux bidimensionnel . . . . .	264
8.7	Figure de digitation visqueuse en milieu poreux bidimensionnel . . . . .	265
8.8	Figures de digitation capillaire en présence de gravité . . . . .	267
9.1	Détail de la plaque de plexiglas sur laquelle est collée la monocouche de billes de verre . . . . .	274
9.2	Dépendance de la viscosité du fluide mouillant vis-à-vis de la température. . . . .	275
9.3	Drainage dans un milieu poreux . . . . .	276
9.4	Principe de la pompe à gravité . . . . .	278
9.5	Évolution de la fenêtre de traitement de l'image en fonction de la position du front	279
9.6	Seuillage d'une photo enregistrée pendant l'expérience . . . . .	281
9.7	Digitation capillaire en présence de gravité, dans notre milieu poreux expérimental	286
9.8	Digitation visqueuse en présence de gravité, dans notre milieu poreux expérimental	287
9.9	Gros plan de la carte 8 de la figure 6 de l'annexe . . . . .	290





## Résumé

La 1<sup>re</sup> partie de cette thèse présente une étude de la géométrie de surfaces rugueuses obtenues en laboratoire par fracturation de blocs de granite et de grès. Ces surfaces sont enregistrées à l'aide d'un rugosimètre à mesure mécanique et optique, développé pour cet usage. Les enregistrements sont bien décrits par un modèle auto-affine isotrope. La persistance des corrélations spatiales est sensiblement moins importante pour le grès que pour le granite.

Dans un 2<sup>e</sup> partie, on étudie comment l'écoulement à travers une fracture ouverte est influencé par la rugosité de ses parois, lorsque les effets inertiels peuvent être négligés. Une étude expérimentale met en évidence une sensibilité importante de la perméabilité de la fracture vis-à-vis de l'orientation du gradient de pression effectif. Un modèle numérique confirme ces observations, et permet d'interpréter cette « anisotropie » hydraulique en termes de chenalisation de l'écoulement. La chenalisation est contrôlée par les hétérogénéités de grande échelle du champ des ouvertures, dont l'importance dépend grandement de l'ajustement entre les deux surfaces aux grandes échelles.

Dans une 3<sup>e</sup> partie, une fracture remplie de gouge est modélisée comme un milieu poreux bidimensionnel composé d'une mono-couche de billes de verre. On étudie expérimentalement le déplacement d'un fluide mouillant par de l'air, de haut en bas, dans ce milieu. En ajustant la vitesse de filtration, c.-à-d. l'intensité des forces visqueuses, on étudie systématiquement la transition d'un régime d'écoulement stabilisé par la gravité, vers un régime d'écoulement où la rugosité de l'interface entre les deux fluides croît indéfiniment. Les effets capillaires, inhomogènes dans le milieu poreux, pilotent la dynamique locale du déplacement. En utilisant la théorie de la percolation, on prédit le seuil de l'instabilité et une loi d'échelle pour la largeur du front en déplacement stable. Ces prédictions sont vérifiées expérimentalement.

**Mots-clés:** fracture, rugosité, invariance d'échelle, auto-affinité, écoulement de Stokes, perméabilité, anisotropie, chenalisation, milieu poreux, drainage, instabilité visqueuse, tension de surface

---

## Abstract

The first part of this thesis addresses a study of the geometry of rough fractures that have been obtained through controlled fracturing of granite and sandstone blocks. The surfaces are recorded using a specially devised profiler, which allows mechanical and optical measurement. The recordings are well described by an isotropic self-affine model. The persistence of the correlations is significantly smaller for sandstone than it is for granite.

In a second part, we study how the flow through a rough fracture is influenced by the roughness of the fracture walls, when inertial effects can be neglected. An experimental setup allows to observe a significant dependence of the fracture permeability on the orientation of the effective pressure gradient. A numerical model confirms these observations, and allows to interpret this “hydraulic anisotropy” in terms of flow channeling. Channeling is controlled by large scale heterogeneities in the aperture field; the importance of these heterogeneities is greatly dependent on the matching of the two walls at large scales.

In a third part, a fracture filled with a gouge is modelled as a 2-dimensional porous medium made out of a single layer of glass beads. The downward displacement of a wetting fluid by air is studied experimentally in such a medium. By adjusting the Darcy velocity, we tune the intensity of the viscous forces and systematically study the transition between a regime where the displacement of the interface between the two fluids is stabilized by gravity, to a regime where the roughness of the interface increases infinitely. Capillary effects, which are inhomogeneous in the porous medium, drive the local dynamics of the displacement. Using the percolation theory, we predict the instability and a scaling law for the front width under stable displacement. These predictions are verified experimentally.

**Keywords:** fracture, roughness, scale invariance, self-affinity, Stokes flow, permeability, anisotropy, channeling, porous medium, drainage, viscous instability, surface tension