HAL
open science

Désordre et cohérence dans les structures du milieu interstellaire: analyse statistique, filtrage interférométrique et transfert radiatif

François Levrier

▶ **To cite this version:**

François Levrier. Désordre et cohérence dans les structures du milieu interstellaire: analyse statistique, filtrage interférométrique et transfert radiatif. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2004. Français. NNT : . tel-00008481

HAL Id: tel-00008481

https://theses.hal.science/tel-00008481v1

Submitted on 14 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR 936

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : Astrophysique et techniques spatiales

présentée par

FRANÇOIS LEVRIER

pour l'obtention du titre de Docteur de l'Université Paris 7

Désordre et cohérence dans les structures du milieu interstellaire : analyse statistique, filtrage interférométrique et transfert radiatif

Soutenue le vendredi 10 décembre 2004 devant le jury composé de :

M.	James Bartlett	Président
M.	Stéphane Guilloteau	Rapporteur
M.	André Lannes	Rapporteur
M.	Jürgen Stutzki	Examinateur
Mme	Édith Falgarone	Directrice de thèse
M.	François Viallefond	Co-directeur

Laboratoire de Radioastronomie
École Normale Supérieure & LERMA, Observatoire de Paris, CNRS UMR 8112
24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Édith Falgarone et François Viallefond, qui m'ont proposé un stage de DEA il y a déjà près de six ans, et qui ont été suffisamment satisfaits de mon travail pour me proposer d'encadrer cette thèse, après un hiatus d'un an passé à préparer l'agrégation.
J'espère avoir su, tout au long de ce travail, faire fructifier les idées riches et nombreuses qu'ils m'ont soumises, tant du point de vue de la physique du milieu interstellaire que de celui des observations interférométriques, et j'espère avec orgueil avoir su dépasser leurs attentes, en profitant de la liberté qu'ils m'ont laissée d'explorer d'autres voies de recherche, au gré de mes inclinations. Je ne peux que souhaiter poursuivre ce travail avec eux.

Je voudrais également exprimer ma gratitude envers le jury qui a eu la lourde tâche d'évaluer mon travail, et en particulier envers mes deux rapporteurs, Stéphane Guilloteau et André Lannes, dont les questions et les remarques m'ont permis de prendre un recul inestimable vis-à-vis des problèmes soulevés dans cette thèse. Je voudrais également remercier Jürgen Stutzki, dont les travaux et les méthodes ont été pour moi des sources d'inspiration sans égales. Enfin, je tiens à remercier vivement James Bartlett d'avoir accepté de présider mon jury. Son domaine de recherche, la cosmologie, étant l'une des raisons qui m'ont poussé vers l'astrophysique. Je souhaite enfin remercier Marc Lachièze-Rey, qui aurait dû être rapporteur de mon manuscript, et qui je l'espère ne me tiendra pas rigueur de l'obstacle administratif qui s'est dressé sur notre route.

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans collaborations, et je tiens à remercier ici les personnes qui m'ont ainsi permis de mettre le pied à l'étrier, au premier rang desquelles je citerai Marc-Antoine Miville-Deschênes, dont la curiosité scientifique, les encouragements et l'enthousiasme ont été pour moi essentiels à un moment clé de cette thèse, celui de mon premier article. Merci à Alex Lazarian pour les discussions que nous avons eues lors de son séjour au laboratoire, qui ont guidé la rédaction de mon second article. Je voudrais également remercier Michael Hegmann pour son accueil chaleureux à l'université de Berlin et pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail sur le transfert radiatif stochastique, en espérant que celui-ci portera ses fruits dans un avenir proche. Enfin, je voudrais adresser mes très sincères remerciements à Trinh Xuan Thuan et John Hibbard, qui m'ont fait l'an passé la surprise de publier, en nos trois noms, les résultats du travail effectué à Charlottesville lors de mon stage de maîtrise.

Je voudrais également remercier les enseignants avec qui j'ai eu le plaisir de travailler pendant trois ans de monitorat, et depuis 2003 en tant qu'agrégé préparateur. Merci donc à l'équipe de Philippe Desmond et à celle de Danielle Lederer, à Paris 7, qui m'ont fait découvrir ce qu'était l'enseignement à l'université. Merci aussi à l'ensemble des enseignants, responsables, techniciens et administratifs du centre de préparation à l'agrégation de Montrouge, où j'espère avoir le plaisir de continuer à exercer dans les années qui viennent.

Ces remerciements ne sauraient être complets sans mentionner ceux et celles avec qui j'ai eu le plaisir de partager le quotidien du laboratoire, et je tiens pour cela à remercier Yves Viala et Jean-Michel Lamarre qui m'ont accueilli au sein du DEMIRM, devenu depuis LERMA. C'est donc avec joie que je remercie ici les "seniors" du laboratoire de radioastronomie de l'École normale supérieure, Steven Balbus, Patrick Boissé, Marie-Françoise Ducos, Maryvonne Gérin, Christophe Dupraz, Michel Pérault, Jean-François Panis et Jean-François Rabasse, pour leurs conseils et les discussions variées et parfois passionnées qui animaient les pauses déjeuner. Merci également à Alain Coulais et Michel Caillat, de l'Observatoire de Paris, pour leur soutien constant et leur disponibilité de tous les instants. Un grand merci aussi à tous les "juniors" qui ont rendu les moments difficiles moins difficiles et les bons moments très bons. Que soient notamment remerciés les anciens thésards du labo, Jérôme Pety, Patrick Hennebelle, David Fossé et David Teyssier. Enfin, je ne saurais trop remercier Pierre Hily-Blant, mon demi-frère de thèse en quelque sorte, avec qui j'ai parcouru les diverses étapes incontournables du "jeu de la thèse", jusqu'à ce fameux été 2004 passé à taper du TEX.

Je souhaite également remercier comme ils le méritent les amis qui m'ont soutenu pendant toutes ces années. Un gros bisou donc à Yann et Patou, Anne et Olivier, Raphaële et Thomas, Amanda, Jean, Vincent, François et Séverine, Karine et Xavier, l'ex-kolkhoze Anne, Paul, Yves, Roland et Delphine, ainsi que tous les habitués du nouilles-belote... Et bienvenue aux petits qui arrivent en rafale, mon filleul Axel, Maxime, Lorenz, Aurore, Camille, et maintenant Noah.

Enfin, je ne pourrais pas écrire ces remerciements sans embrasser ma famille, mes parents Claude et Philippe, dont l'amour est pour beaucoup dans ce travail, qui ont toujours cru en moi et qui se sont mis en quatre pour préparer un pot de thèse pantagruélique ; mon frère Julien, qui a choisi la musique comme j'ai choisi la physique, par passion, et à qui je souhaite tout le bonheur et toute la réussite qu'il mérite amplement ; mes grands-parents, Simone et Roger Levrier, Yvonne et Pierre Touchet, qui m'ont toujours donné envie de les rendre fiers de leur petit-fils ; mes oncles, tantes et cousins, dont certains ont poussé la gentillesse jusqu'à venir assister à ma soutenance. Un merci tout particulier, donc, à Jean-Pierre, Florent, Liliane et Sylvain. Merci également à Chantal, Sylvie, Fanny et Nicolas d'être venus me soutenir dans mon face-à-face avec le jury.

Pour terminer, c'est à Pascale que vont mes derniers remerciements. En surgissant dans ma vie au printemps 2003, elle m'a libéré d'un fardeau dont elle sait le poids, et elle a illuminé la fin de ce travail. Bien plus que sa relecture attentive des chapitres que je lui soumettais, c'est son amour qui m'a aidé à achever la rédaction.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Table des matières

Introduction **14**

I Structuration du milieu interstellaire **17**

I Le milieu interstellaire **19**
- **I.1** Introduction . . . **19**
- **I.2** La machinerie galactique . . . **19**
  - **I.2.a** Un système complexe et hiérarchisé . . . **19**
  - **I.2.b** Le rôle du milieu interstellaire . . . **20**
- **I.3** Le gaz interstellaire . . . **20**
  - **I.3.a** Un milieu à la physique inhabituelle . . . **20**
  - **I.3.b** Composition chimique . . . **20**
  - **I.3.c** Les différentes phases du gaz interstellaire . . . **21**
  - **I.3.d** Les moyens d'observation . . . **21**
  - **I.3.e** Distribution spatiale du gaz . . . **23**
- **I.4** Les poussières . . . **24**
  - **I.4.a** Mise en évidence observationnelle . . . **24**
  - **I.4.b** Formation et évolution . . . **24**
  - **I.4.c** Le rôle des poussières . . . **24**
  - **I.4.d** Distribution des tailles et composition . . . **25**
  - **I.4.e** Distribution spatiale . . . **25**
- **I.5** Le champ magnétique du MIS . . . **25**
  - **I.5.a** Mise en évidence observationnelle . . . **25**
  - **I.5.b** Organisation du champ magnétique à l'échelle galactique . . . **26**

II La structure des nuages moléculaires **27**
- **II.1** Introduction . . . **27**
- **II.2** Un état des lieux des nuages moléculaires diffus . . . **27**
  - **II.2.a** Des structures probablement éphémères . . . **27**
  - **II.2.b** D'importantes fluctuations de pression . . . **28**
  - **II.2.c** Des échelles caractéristiques . . . **28**
  - **II.2.d** Des structures denses au sein d'une composante diffuse . . . **28**
- **II.3** La hiérarchie des nuages moléculaires . . . **29**
  - **II.3.a** Mise en évidence de lois d'échelle . . . **29**
  - **II.3.b** Autosimilarité et hiérarchie des nuages moléculaires . . . **31**
- **II.4** Support non-thermique des nuages moléculaires . . . **33**
  - **II.4.a** Champ de vitesse turbulent . . . **33**
  - **II.4.b** La diffusion ambipolaire . . . **33**
  - **II.4.c** Outils statistiques d'analyse . . . **34**
- **II.5** Quelques idées sur la structure à petite échelle des nuages moléculaires . . . **34**
  - **II.5.a** Solutions HDLT et LDHT . . . **34**
  - **II.5.b** La structure à l'échelle du milliparsec vue en $^{12}CO(1 \rightarrow 0)$ . . . **35**
  - **II.5.c** Origine cinématique des structures à petite échelle . . . **35**

III Mécanique des fluides et turbulence 37
III.1 Du laminaire au turbulent . . . 37
III.2 Rappels élémentaires de mécanique des fluides . . . 38
III.2.a Approches lagrangienne et eulérienne . . . 38
III.2.b Forces exercées sur une particule fluide . . . 38
III.2.c Le nombre de Reynolds . . . 39
III.2.d Instabilités et transition vers la turbulence . . . 39
III.3 La théorie de Kolmogorov (1941) . . . 40
III.3.a La cascade turbulente . . . 40
III.3.b Les hypothèses de Kolmogorov . . . 41
III.3.c Les lois d'échelle . . . 41
III.3.d Reformulation des hypothèses de Kolmogorov . . . 42
III.4 Description statistique de la turbulence . . . 42
III.4.a Présentation rapide de la méthode . . . 42
III.4.b Quelques résultats . . . 44
III.4.c Les limites de la théorie de Kolmogorov . . . 45
III.5 La turbulence magnétohydrodynamique incompressible . . . 46
III.5.a Les équations de la magnétohydrodynamique incompressible idéale . . . 46
III.5.b Quelques propriétés . . . 47
III.6 La turbulence compressible . . . 48
III.7 La turbulence dans le milieu interstellaire . . . 49
III.7.a Un bref historique . . . 49
III.7.b Observations de la turbulence interstellaire . . . 49
III.7.c Quelle turbulence ? . . . 49

II Éléments mathématiques et outils d'analyse 51

IV Éléments de théorie des probabilités 53
IV.1 Qu'est-ce qu'une probabilité ? . . . 53
IV.2 Axiomatique de la théorie des probabilités . . . 53
IV.2.a Introduction . . . 53
IV.2.b La notion de tribu de l'ensemble des possibles . . . 54
IV.2.c La notion d'espace probabilisé . . . 54
IV.2.d Quelques propriétés simples . . . 54
IV.2.e Probabilités conditionnelles . . . 54
IV.2.f Utilisation de la théorie des probabilités . . . 55
IV.3 Variables aléatoires : généralités . . . 55
IV.3.a Introduction et définition . . . 55
IV.3.b Fonction de répartition . . . 56
IV.3.c Densité de probabilité . . . 57
IV.3.d Variables aléatoires à plusieurs dimensions . . . 57
IV.4 Changement de variable aléatoire . . . 58
IV.5 Nombres et fonctions caractéristiques . . . 59
IV.5.a L'espérance mathématique . . . 59
IV.5.b Les moments . . . 60
IV.5.c La fonction caractéristique . . . 61

V Champs stochastiques et outils d'analyse 63
V.1 Processus stochastiques et modélisation . . . 63
V.2 Statistique des processus stochastiques . . . 64
V.2.a Fonctions de répartition et densités de probabilité . . . 64
V.2.b Moyenne et autocorrélation . . . 64
V.2.c Champs stationnaires . . . 64
V.2.d L'hypothèse ergodique . . . 65

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

V.3 Moyenne locale et moyenne globale . . . 65
V.3.a Définition de la moyenne locale . . . 65
V.3.b Définition et unicité de la moyenne globale . . . 66
V.4 Fonction d'autocorrélation . . . 67
V.4.a Définition . . . 67
V.4.b Propriétés . . . 67
V.5 Spectre de puissance . . . 68
V.5.a Problèmes de définition . . . 68
V.5.b Propriétés . . . 69
V.5.c Calcul pratique . . . 69
V.6 Les fonctions de structure . . . 69
V.6.a Définition et relation avec la fonction d'autocorrélation . . . 69
V.6.b Calcul pratique . . . 70
V.7 La Δ-variance . . . 70
V.7.a Introduction : la variance d'Allan . . . 70
V.7.b Cas des signaux unidimensionnels . . . 71
V.7.c Cas des dimensions supérieures . . . 71
V.7.d Mise en pratique . . . 72

VI Géométrie fractale 75
VI.1 Introduction . . . 75
VI.2 Mesure et dimension de Hausdorff . . . 76
VI.2.a Mesure de Hausdorff . . . 76
VI.2.b Dimension de Hausdorff . . . 77
VI.3 Dimension de boîte . . . 78
VI.3.a Définitions alternatives d'une dimension fractale . . . 78
VI.3.b Dimension de boîte . . . 78
VI.4 Techniques analytiques de calcul des dimensions fractales . . . 79
VI.4.a Estimation directe . . . 79
VI.4.b Méthodes potentielles . . . 79
VI.5 Projection d'ensembles fractals . . . 79
VI.6 Fractals autosimilaires et autoaffines . . . 80
VI.6.a Méthode de construction . . . 80
VI.6.b Dimension des fractals autosimilaires . . . 81
VI.6.c Ensembles autoaffines . . . 81
VI.6.d Notions d'autosimilarité et d'autoaffinité statistiques . . . 82
VI.7 Graphes de fonctions . . . 82
VI.7.a Dimensions des graphes . . . 82
VI.7.b Dimension fractale, fonction de structure et spectre de puissance . . . 83
VI.8 Relation périmètre-surface . . . 83

VII Les mouvements browniens fractionnaires 85
VII.1 Les mouvements browniens . . . 85
VII.1.a Introduction . . . 85
VII.1.b Modélisation mathématique . . . 85
VII.1.c Propriétés . . . 87
VII.2 Les mouvements browniens fractionnaires . . . 88
VII.2.a De la nécessité d'aller plus loin . . . 88
VII.2.b Définition . . . 88
VII.2.c Propriétés . . . 88
VII.3 Browniens fractionnaires en dimension supérieure . . . 90
VII.3.a Définition . . . 90
VII.3.b Propriétés . . . 90
VII.3.c Intervalle de définition de l'exposant de Hurst . . . 91
VII.4 Simulations de champs browniens fractionnaires . . . 92

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

VII.4.a Méthodes diverses de construction . . . 92
VII.4.b Construction dans l'espace de Fourier . . . 93
VII.4.c Exemples et propriétés . . . 95

VIII Équation de Fokker-Planck 101
VIII.1 Introduction . . . 101
VIII.2 Exemple : Modélisation de la vitesse d'une particule brownienne . . . 101
VIII.2.a Équation déterministe du mouvement . . . 101
VIII.2.b Équation stochastique du mouvement . . . 102
VIII.2.c Propriétés de la force de Langevin . . . 102
VIII.2.d Équation d'évolution de la densité de probabilité de la vitesse . . . 103
VIII.2.e Solution de l'équation de Langevin . . . 103
VIII.2.f Distribution des vitesses dans l'état stationnaire . . . 104
VIII.3 Développement de Kramers-Moyal . . . 104
VIII.3.a Le cas unidimensionnel . . . 104
VIII.3.b Théorème de Pawula et équation de Fokker-Planck . . . 105
VIII.3.c Le cas multidimensionnel . . . 105
VIII.4 Équations de Langevin . . . 106
VIII.4.a Forme générale . . . 106
VIII.4.b Coefficients de Kramers-Moyal . . . 106
VIII.4.c Les processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . 108

III Statistique des centroïdes de vitesse 111

IX Observations de spectro-imagerie 113
IX.1 Introduction . . . 113
IX.2 Notations et hypothèses . . . 113
IX.3 Expression des observables . . . 114
IX.3.a Température de brillance . . . 114
IX.3.b Cartes des moments de la température de brillance . . . 115
IX.4 Détermination pratique de l'intensité et du centroïde . . . 116
IX.4.a Mise en place du problème . . . 116
IX.4.b Le cas de l'intensité intégrée . . . 117
IX.4.c Le cas du centroïde de vitesse . . . 117

X Étude analytique des centroïdes de vitesse 121
X.1 Introduction . . . 121
X.1.a Du bidimensionnel au tridimensionnel . . . 121
X.1.b Les objectifs . . . 121
X.2 Le modèle de couche turbulente infinie transversalement . . . 122
X.2.a Aspects géométriques . . . 122
X.2.b Propriétés de la densité . . . 122
X.2.c Propriétés de l'écoulement . . . 122
X.3 Statistiques des cartes d'intensité et de centroïde . . . 123
X.3.a Utilisation de la fonction d'autocorrélation . . . 123
X.3.b Écriture de I, C et C_0 en termes de fluctuations intégrées . . . 124
X.3.c Hypothèse des petites fluctuations de densité . . . 124
X.4 Fonction d'autocorrélation de l'intensité . . . 125
X.4.a Expression générale et remarque sur les moyennes . . . 125
X.4.b Calcul des différents termes . . . 125
X.5 Fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse non normalisés . . . 127
X.5.a Expression générale . . . 127
X.5.b Calcul du terme d'ordre zéro . . . 127
X.5.c Calcul du terme d'ordre un . . . 128

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

X.5.d Calcul du terme d'ordre deux . . . 129
X.5.e Utilisation des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie . . . 129
X.6 Fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse normalisés . . . 130
X.6.a Expression générale . . . 130
X.6.b Calcul des différents termes . . . 130
X.7 Traitement du cas particulier d'une vitesse moyenne nulle . . . 132
X.8 Discussion des résultats . . . 132
X.8.a À l'ordre zéro . . . 132
X.8.b À l'ordre un . . . 133
X.8.c Les centroïdes de vitesse modifiés . . . 133

XI Le cas des champs browniens fractionnaires 135
XI.1 Introduction : l'exemple de l'intensité intégrée . . . 135
XI.2 Utilisation de champs browniens fractionnaires représentant ρ et v . . . 135
XI.2.a Restriction aux premiers termes non triviaux . . . 135
XI.2.b Fonctions d'autocorrélation des fluctuations de densité et de vitesse . . . 136
XI.3 Développement de la fonction d'autocorrélation moyennée . . . 137
XI.3.a La méthode de Chandrasekhar et Münch . . . 137
XI.3.b Mise en place du calcul . . . 138
XI.3.c Approche en termes de développement limité . . . 139
XI.3.d Détermination du comportement dominant aux petites échelles . . . 141
XI.3.e Fonctions d'autocorrélation et fonctions de structure des cartes . . . 144
XI.4 Conséquences des formes calculées à l'ordre le plus bas . . . 144

XII Étude numérique des centroïdes de vitesse 147
XII.1 Introduction . . . 147
XII.2 Construction de champs de densité et de vitesse . . . 147
XII.3 Simulation d'un cube de données PPV . . . 149
XII.3.a Méthode de construction . . . 149
XII.3.b Spectres synthétiques . . . 149
XII.3.c Cartes par canaux et cartes des moments . . . 151
XII.4 Propriétés statistiques des cartes d'observables . . . 152
XII.5 Intensité intégrée . . . 152
XII.5.a Spectre de puissance de l'intensité intégrée dans la limite $R \ll D$ . . . 152
XII.5.b Spectre de puissance de l'intensité intégrée dans la limite $R \gg D$ . . . 155
XII.5.c Transition entre les deux régimes . . . 156
XII.6 Centroïdes de vitesse . . . 157
XII.6.a Vérification des égalités $\beta_C = \beta_{C_0} = \beta_v$ . . . 157
XII.6.b Influence des différents paramètres . . . 158
XII.7 Une ébauche de conclusion critique . . . 163

XIII Analyse des tranches en vitesse 165
XIII.1 Introduction . . . 165
XIII.2 Épaisseur des tranches en vitesse . . . 165
XIII.2.a Définition . . . 165
XIII.2.b Tranches minces et tranches épaisses . . . 166
XIII.3 Étude numérique des tranches en vitesse . . . 167
XIII.3.a Les prédictions de l'analyse des tranches en vitesse . . . 167
XIII.3.b Spectres de puissance observés . . . 168
XIII.3.c Effet de *shot noise* dû à la taille finie . . . 168
XIII.3.d Analyse des résultats obtenus . . . 169
XIII.4 Discussion et conclusions . . . 172

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

IV Filtrage interférométrique des structures **175**

XIV L'interférométrie en radioastronomie **177**
XIV.1 La course à la résolution angulaire . . . **177**
XIV.2 Un bref historique . . . **177**
XIV.2.a Diverses méthodes de corrélation . . . **178**
XIV.2.b Réseaux d'antennes et synthèse d'ouverture . . . **178**
XIV.2.c L'interférométrie VLBI . . . **178**
XIV.3 Antennes radioastronomiques . . . **179**
XIV.3.a Propagation d'un signal radioastronomique . . . **179**
XIV.3.b Réception du signal . . . **179**
XIV.3.c Conversion de fréquence . . . **181**
XIV.4 L'interféromètre à deux éléments . . . **182**
XIV.4.a Les franges d'interférence . . . **182**
XIV.4.b Cas d'une source étendue et non monochromatique . . . **183**
XIV.4.c Blocage des franges . . . **184**
XIV.4.d Système de coordonnées . . . **185**
XIV.4.e Brouillages fréquentiel et temporel . . . **185**
XIV.5 Réseaux d'antennes et imagerie . . . **186**
XIV.5.a Position du problème . . . **186**
XIV.5.b Affectation de poids aux données . . . **188**
XIV.5.c Le *gridding* . . . **188**
XIV.5.d Le problème du bruit . . . **189**
XIV.5.e La déconvolution . . . **190**
XIV.5.f Imagerie de raies spectrales . . . **191**

XV Filtrage interférométrique des structures **193**
XV.1 Introduction . . . **193**
XV.2 Le projet ALMA . . . **194**
XV.2.a Introduction . . . **194**
XV.2.b Objectifs scientifiques . . . **194**
XV.2.c Spécifications technologiques . . . **195**
XV.2.d Le problème des configurations . . . **197**
XV.3 Implémentation d'un simulateur d'instrument . . . **197**
XV.3.a Le choix de la simplicité . . . **197**
XV.3.b La construction de couvertures (u,v) . . . **198**
XV.3.c Le *gridding* . . . **199**
XV.3.d Simulation des observations . . . **201**

XVI Diagnostics de l'effet du filtrage **203**
XVI.1 Introduction . . . **203**
XVI.2 Les modèles de distribution de brillance . . . **203**
XVI.3 Spectre de puissance . . . **205**
XVI.3.a Effet attendu . . . **205**
XVI.3.b Approche numérique . . . **206**
XVI.4 Δ-variance . . . **208**
XVI.4.a Quelques remarques préliminaires . . . **208**
XVI.4.b Effet du lobe primaire . . . **209**
XVI.4.c Effet du filtrage spatial . . . **210**
XVI.4.d Quelques critiques . . . **212**
XVI.5 Les fonctions de structure . . . **213**
XVI.5.a Introduction . . . **213**
XVI.5.b Étude numérique . . . **214**
XVI.5.c Conclusions . . . **215**
XVI.6 La dimension fractale . . . **216**

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XVI.6.a Nécessité d'un rééchantillonnage des images . . . 216
XVI.6.b Étude numérique systématique . . . 217
XVI.6.c Conclusions . . . 218
XVI.7 Retour sur le spectre de puissance : le cas bruité . . . 219
XVI.7.a Introduction de bruit . . . 219
XVI.7.b Effets sur le spectre de puissance . . . 221
XVI.8 Conclusions . . . 223

XVII Statistiques des incréments de phase 225
XVII.1 Mise en évidence du rôle de la phase . . . 225
XVII.1.a Expérience numérique préliminaire . . . 225
XVII.1.b Importance de la distribution spatiale des phases . . . 225
XVII.2 Histogrammes des incréments de phase . . . 227
XVII.2.a Introduction . . . 227
XVII.2.b Cas des champs browniens fractionnaires . . . 227
XVII.2.c Cas d'une image présentant de la structure . . . 228
XVII.3 Entropie des incréments de phase et quantité de structure . . . 229
XVII.3.a Introduction . . . 229
XVII.3.b Propriétés dans les transformations simples . . . 230
XVII.4 Fiabilité de la méthode entropique pour la détection de structure . . . 232
XVII.4.a Mise en évidence des variations d'histogrammes . . . 232
XVII.4.b Estimation analytique . . . 233
XVII.4.c Estimation numérique . . . 237
XVII.5 Distribution de von Mises . . . 238
XVII.5.a Histogrammes des incréments de phase . . . 238
XVII.5.b Calcul de la quantité de structure associée . . . 239
XVII.6 Évolution de la quantité de structure avec δ . . . 240
XVII.7 Filtrage interférométrique . . . 241
XVII.7.a Effets attendus . . . 241
XVII.7.b Approche numérique . . . 243
XVII.7.c Conclusions très provisoires . . . 244

V Transfert radiatif dans les milieux complexes 247

XVIII Éléments de transfert radiatif 249
XVIII.1 Introduction . . . 249
XVIII.2 Grandeurs photométriques . . . 250
XVIII.2.a Intensité spécifique . . . 250
XVIII.2.b Les moments de l'intensité spécifique . . . 251
XVIII.3 Équation de transfert . . . 251
XVIII.3.a Équation portant sur l'intensité spécifique . . . 251
XVIII.3.b Équations portant sur les moments de l'intensité spécifique . . . 253
XVIII.4 Résolution de l'équation de transfert . . . 253
XVIII.4.a L'approximation d'Eddington . . . 253
XVIII.4.b Solution formelle . . . 253
XVIII.4.c Exemple d'une couche plan-parallèle homogène et finie . . . 254
XVIII.5 Équilibre radiatif et équilibre thermodynamique local . . . 254
XVIII.5.a Introduction et distributions classiques . . . 254
XVIII.5.b La loi de Planck et ses dérivées . . . 255
XVIII.5.c Différentes définitions de la température . . . 255
XVIII.5.d Loi de Kirchoff et équilibre thermodynamique local . . . 256
XVIII.6 Les raies spectrales . . . 257
XVIII.6.a Processus de transition et probabilités d'Einstein . . . 257
XVIII.6.b Profils des raies et causes d'élargissement . . . 257

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XVIII.6.c Courbes de croissance . . . 258
XVIII.6.d Les milieux hors ETL . . . 259

XIX Transfert radiatif stochastique 261
XIX.1 Introduction . . . 261
XIX.2 Le modèle de Gail *et al* . . . 262
XIX.2.a La méthode probabiliste . . . 262
XIX.2.b Modélisation du champ de vitesse . . . 262
XIX.2.c Équation de transfert généralisée . . . 263
XIX.2.d Remarques sur les méthodes de résolution . . . 264
XIX.3 Simulations numériques . . . 265
XIX.3.a Introduction . . . 265
XIX.3.b Profils de raie . . . 266
XIX.3.c Largeurs équivalentes, profondeurs des raies, courbes de croissance . . . 266
XIX.4 Prise en compte des effets hors-ETL . . . 268
XIX.4.a Introduction . . . 268
XIX.4.b Équations d'évolution des populations . . . 269
XIX.4.c Mise en œuvre de la généralisation du modèle . . . 269
XIX.4.d Implémentation numérique . . . 270
XIX.4.e Résultats et analyse . . . 271
XIX.4.f Le cas de l'émission de molécules CO . . . 271
XIX.5 Cas d'un milieu présentant des fluctuations de densité . . . 274
XIX.5.a Introduction . . . 274
XIX.5.b Champ de densité stochastique . . . 274
XIX.5.c Équation de transfert généralisée . . . 274
XIX.5.d Résultats . . . 275

XX Cas des corrélations densité-vitesse 279
XX.1 Introduction . . . 279
XX.2 Équation d'évolution de l'intensité conditionnelle . . . 279
XX.2.a Forme générale de l'équation d'évolution de l'intensité moyenne . . . 279
XX.2.b Forme des corrélations densité-vitesse . . . 281
XX.2.c Évolution de l'intensité conditionnelle . . . 281
XX.3 Distribution des densités logarithmiques . . . 282
XX.4 Distribution des vitesses . . . 283
XX.4.a Première expression des moments de la vitesse . . . 283
XX.4.b Développement en puissances de α . . . 284
XX.4.c Différents types d'intégrales . . . 285
XX.4.d Retour sur les moments et distribution des vitesses . . . 287
XX.5 Distribution jointe . . . 288
XX.5.a Approche par la méthode des moments . . . 288
XX.5.b Approche semi-empirique . . . 289
XX.6 Simulations numériques . . . 290
XX.6.a Corrélations densité-vitesse . . . 290
XX.6.b Densités de probabilité . . . 292
XX.7 Perspectives . . . 294

Conclusion 295

Bibliographie 297

Article paru dans "Astrophysical Journal", 593, 831, 2003 307

Article paru dans "Astronomy & Astrophysics", 421, 387, 2004 327

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Whenever life gets you down, Mrs Brown
And things seem hard or tough
And people are stupid, obnoxious, or daft
And you feel that you've had quite enough...

Just remember that you're standing on a planet that's evolving
Revolving at nine hundred miles an hour
It's orbiting at nineteen miles per second, so it's reckoned
The Sun that is the source of all our power
The Sun, and you, and me, and all the stars that you can see
Are moving at a million miles a day
In an outer spiral arm at forty thousand miles an hour
Of the galaxy we call the Milky Way

Our galaxy itself contains a hundred billion stars
It's a hundred thousand light years side to side
It bulges in the middle, sixteen thousand light years thick
But out by us it's just three thousand light years wide
We're thirty thousand light years from Galactic Central Point
We go 'round every two hundred million years
And our galaxy is only one of millions of billions
In this amazing and expanding universe

The Universe itself keeps on expanding and expanding
In all of the directions it can whiz
The fastest it can go
The speed of light, you know
Twelve million miles a minute, and that's the fastest speed there is
So, remember when you're feeling very small and insecure
How amazingly unlikely is your birth
And pray that there's intelligent life somewhere out in space
'Cause there's bugger all down here on Earth

Monty Python's "The Meaning of Life"

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Introduction

Parmi l'ensemble des domaines qui composent la physique moderne, l'astrophysique tient une place à part. Contrairement aux physiciens des autres disciplines, qui ont abondamment recours à l'expérience, les astrophysiciens ne peuvent se reposer que sur l'observation du ciel pour confronter leurs théories au jugement impartial de la nature. Ce handicap, qu'on attribue d'une part aux distances colossales qui nous séparent des objets d'étude, et d'autre part aux conditions extrêmes qui y règnent[1], fait des astrophysiciens une sorte de naturalistes modernes, éprouvant sans cesse le besoin de classer et de décrire les astres pour mieux les comprendre.

Or, sauf dans le cas des objets très proches comme ceux du système solaire, il est impossible, pour l'instant en tous cas, de sonder les astres *in situ*, de sorte qu'on doit se contenter d'une description incomplète de ces derniers. Plusieurs facteurs contribuent à cette limitation du processus d'observation. En premier lieu, il convient de noter que l'essentiel de l'information dont on dispose sur les objets astrophysiques provient de l'étude du rayonnement électromagnétique qu'on en reçoit, depuis les ondes radio de plus basse fréquence jusqu'aux rayons γ les plus énergétiques. Les autres vecteurs d'information, qu'il s'agisse des neutrinos, des rayons cosmiques ou encore des ondes gravitationnelles, ne nous concerneront pas dans la suite.

D'autre part, la lumière reçue en provenance des astres étudiés possède des propriétés de distribution spectrale et de polarisation qui dépendent *a priori* de la structure des milieux qui l'ont émise et qu'elle a traversés, et qui peuvent donc varier d'un point du ciel à l'autre. La description de ces milieux est donc subordonnée, d'une part à la compréhension des processus d'émission à l'origine des rayonnements, et d'autre part à la résolution du problème du transfert radiatif depuis la source jusqu'à l'observateur. Ainsi, on pourra aussi bien étudier une source grâce au rayonnement qu'elle émet, que grâce aux altérations qu'elle impose à la lumière provenant d'un astre situé en arrière plan.

En effet, et c'est une autre limitation inévitable du processus d'observation en astrophysique, il n'est pas possible, sauf par l'intermédiaire de méthodes indirectes[2], d'avoir accès à la dimension de profondeur, c'est-à-dire à la distance des objets étudiés. Leurs structures subissent ainsi une projection sur le plan du ciel, dont il est impératif de comprendre les effets afin de décrire les propriétés des milieux dans leurs trois dimensions. La prise en compte de l'effet Doppler-Fizeau permettant de séparer en fréquence les rayonnements issus de deux sources alignées sur la même ligne de visée mais se déplaçant à des vitesses longitudinales[3] différentes, cette projection se fait en définitive sur un espace hybride comportant deux dimensions d'espace et une de vitesse.

Enfin, les instruments d'observation utilisés pour recueillir le rayonnement électromagnétique sont loin d'être parfaits. D'une part du fait des résolutions spatiale et spectrale limitées qui les caractérisent, d'autre part en raison du bruit qui vient inévitablement se greffer sur les mesures en différents points de la chaîne de réception du signal, et enfin parce qu'il existe des limitations qui sont inhérentes aux instruments et aux méthodes d'observation associées. En particulier, comme on le verra, l'utilisation d'un interféromètre se traduit par la perte des structures de grande échelle sur les cartes des régions observées.

Le but de cette thèse est d'étudier quelques uns de ces aspects du processus d'observation, avec pour objectif scientifique la description des nuages moléculaires du milieu interstellaire, au sein desquels se forment les étoiles, et la compréhension des processus physiques dont ils sont le siège. En effet, la complexité des structures qu'on trouve dans le milieu interstellaire est particulièrement propice à l'étude des différents filtrages menant des champs physiques réels, en particulier des champs de densité et de vitesse du gaz, jusqu'aux observables finales. En somme, il sera question, tout au long de ce travail, de tenter de décrypter les effets de ces filtrages sur des structures complexes, de façon à dégager des méthodes d'inversion, même partielles, permettant en retour, à partir des observations réelles, de déduire les propriétés des nuages moléculaires, telles qu'on les observerait *in situ*.

[1] Qu'on songe que le vide le plus poussé obtenu en laboratoire, de l'ordre de 10^{-11} hPa, est encore cent fois plus dense que le milieu interstellaire diffus, ou encore qu'il est impossible à l'heure actuelle de contrôler la fusion thermonucléaire telle qu'elle a lieu au centre du Soleil.

[2] On pense à la loi de Hubble permettant de déduire la distance d'astres lointains, tels que quasars ou galaxies, à partir de leur vitesse dans le référentiel de l'observateur.

[3] On appelle ainsi la composante de la vitesse le long de la ligne de visée.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Le lecteur doit être averti qu'il ne s'agit là nullement de résoudre entièrement ce formidable problème inverse qui consiste à déterminer, complètement et sans ambiguïté, les champs physiques[4] caractérisant les nuages observés, à partir des seules données observationnelles. On va plutôt se pencher sur trois effets, relativement distincts, en les abordant à chaque fois dans un souci de simplicité.
Le premier effet auquel nous allons nous intéresser, et qui fait l'objet de l'ensemble de la troisième partie, est la projection des données de densité et de vitesse sur les cubes tridimensionnels hybrides (position-position-vitesse ou PPV) mentionnés plus haut. On commencera par étudier brièvement, au chapitre **IX**, la façon dont sont construits ces cubes de données à partir des champs physiques réels, puis on abordera, aux chapitres **X** et **XI**, le problème de l'inversion, d'un point de vue analytique, de façon à dégager une relation entre les propriétés structurelles des observables et celles des champs tridimensionnels. Les résultats obtenus, dont ceux sur le champ de vitesse, qui n'étaient pas encore connus, seront alors testés numériquement au chapitre **XII**, en se donnant des champs de densité et de vitesse de propriétés connues et en synthétisant les données observationnelles à partir de ces champs. Disposant ainsi de simulations d'observations, il est possible de tester d'autres méthodes d'inversion, ce qui est fait au chapitre **XIII** en prenant l'exemple de l'analyse des tranches en vitesse introduite par Lazarian & Pogosyan [Lazarian & Pogosyan, 2000].
Le deuxième effet considéré est le filtrage des distributions de brillance, projetées sur le plan du ciel, par un interféromètre, c'est-à-dire un réseau d'antennes observant toutes simultanément une même source et dont les signaux sont corrélés deux à deux de façon à obtenir une image de la région étudiée. Sachant que la corrélation de deux signaux fournit une seule composante de Fourier de la distribution de brillance réelle[5] et qu'il n'existe bien entendu qu'un nombre fini d'antennes, on comprend que cette méthode d'observation puisse dégrader les images des structures complexes que forment les nuages du milieu interstellaire. Cet effet fait l'objet de la quatrième partie, qui est organisée comme suit : Le chapitre **XIV** présente succinctement, et en passant sur nombre de difficultés, le domaine de l'interférométrie en radioastronomie, de façon à dégager les principes de cette méthode d'observation. Ceux-ci sont ensuite mis en œuvre au chapitre **XV**, dans le cadre de l'écriture d'un simulateur instrumental simple inspiré des caractéristiques du futur interféromètre ALMA (Atacama Large Millimeter Array). Au chapitre **XVI**, ce simulateur est utilisé sur des champs complexes synthétiques semblables à ceux utilisés dans la troisième partie, de manière à déterminer les méthodes d'analyse les plus à même de restituer les propriétés structurelles des vraies distributions de brillance en dépit du filtrage instrumental. Enfin, le chapitre **XVII**, qui est un peu à part dans cette quatrième partie, introduit une ébauche d'analyse des images en termes de phases des composantes de Fourier[6]. Le lecteur est invité à remarquer que ce travail est encore aux premiers stades de développement.
Le troisième et dernier effet, qui sera abordé dans la cinquième partie, se situe tout en amont de la chaîne d'observation, puisqu'il s'agit de s'intéresser au problème du transfert radiatif dans les milieux présentant une structure complexe en densité et en vitesse. Après avoir introduit les idées de base du transfert du rayonnement dans le chapitre **XVIII**, on présentera, au chapitre **XIX**, les méthodes et les résultats d'un groupe allemand qui s'est penché sur le problème du transfert radiatif stochastique à une dimension, lorsque la vitesse et, éventuellement, la densité présentent des variations aléatoires le long de la ligne de visée. Dans le chapitre **XX**, le lecteur trouvera les premiers résultats d'un travail analytique portant sur l'introduction de corrélations entre les champs de densité et de vitesse. La résolution numérique du transfert incluant ces résultats n'est pour le moment pas terminée et n'est donc pas présentée dans ces pages.
Il n'a certainement pas échappé au lecteur que le plan ainsi détaillé est incomplet. Les deux premières parties de cette thèse sont consacrées à la mise en place des concepts et des outils qui sont utilisés tout au long des chapitres suivants. La première partie traite de la structuration du milieu interstellaire, en commencant, au chapitre **I**, par une présentation rapide de ses diverses composantes, des moyens d'observations dont on dispose pour l'étudier, ainsi que de certains résultats et ordres de grandeur parmi les plus marquants. Le chapitre **II** concerne plus précisément la structure des nuages moléculaires, dont certains résultats discutés ici, en particulier les lois d'échelle, montrent la nature fractale. Cette complexité, tant en densité qu'en vitesse, suggère que la turbulence peut jouer un rôle non négligeable dans cette structuration, ce qui justifie de rappeler, au chapitre **III**, quelques résultats concernant ce type d'écoulements.

[4]Tels que densité et vitesse, mais aussi température, populations des niveaux d'énergie des atomes et des molécules, degré d'ionisation, champ magnétique...

[5]Elle en fournit en fait deux, mais qui sont complexes conjuguées l'une de l'autre et donc non indépendantes.

[6]Ce qui justifie qu'on l'inclue dans cette partie, puisque ce sont précisément les composantes de Fourier qu'on mesure en interférométrie.

La deuxième partie permet, quant à elle, à partir des concepts fondamentaux de la théorie des probabilités rappelés au chapitre **IV**, de se donner les outils mathématiques qui sont utilisés, dans les trois parties centrales de ce travail, à la fois pour construire des champs synthétiques et pour analyser les observables. Ainsi, le chapitre **V** introduit les notions de processus et de champ stochastique, ainsi que les divers outils qui permettent de les caractériser, à savoir la fonction d'autocorrélation, le spectre de puissance, les fonctions de structure, et la Δ-variance. Dans le même ordre d'idée, le chapitre **VI** traite des notions d'ensemble fractal et de dimension fractale, laquelle fournit également un moyen de caractériser les structures complexes telles qu'on en observe dans le milieu interstellaire. Les chapitres **VII** et **VIII**, enfin, détaillent les propriétés des champs stochastiques qui seront utilisés respectivement dans la troisième et la quatrième partie d'une part (mouvements browniens fractionnaires), dans la cinquième partie d'autre part (processus d'Ornstein-Uhlenbeck).

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Première partie

Structuration du milieu interstellaire

Miles Monroe : Science is an intellectual dead end, you know ? It's a lot of little guys in tweed suits cutting up frogs on foundation grants.

"Sleeper" (Woody Allen)

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE I

Le milieu interstellaire

I.1 Introduction

L'astronomie est une science naturelle par excellence, car elle se fonde, avant toute analyse, sur l'observation et la classification de ses objets d'étude. Parmi ceux-ci, le Soleil, la Lune, les étoiles et les planètes sont sans aucun doute les plus accessibles au regard des hommes, et si leurs natures respectives restèrent longtemps mystérieuses, la clarté de l'un, les phases de l'autre, le ballet ordonné des troisièmes et le mouvement erratique des dernières suffisent à les considérer comme des objets différents. D'autres astres encore ne peuvent manquer d'être remarqués à l'œil nu : la Voie Lactée, qui s'étend d'un bout à l'autre du ciel, et dont l'aspect singulier est à l'origine de nombreux mythes ; les comètes et les supernovæ, longtemps annonciatrices de grands bouleversements ; les "nébuleuses", enfin, à l'aspect diffus, et dont le nom même trahit la méconnaissance de leur nature véritable.
Avec les progrès des méthodes d'observation, marqués en particulier par la construction de la lunette de Galilée, cette vision du monde s'est affinée, les planètes sont soudain apparues plus proches et on a pu observer leurs satellites. Quant à la Voie Lactée, elle s'est révélée être la combinaison des éclats de milliards d'étoiles lointaines. Un lien a ainsi été fait entre des objets *a priori* entièrement différents, et la naissance de la physique moderne a permis de consolider ce changement de point de vue. On songe en particulier à la conception newtonienne de la gravité, qui a unifié des phénomènes terrestres et célestes apparemment sans lien et ouvert la voie à une étude physique des astres.
Les découvertes d'Edwin Hubble, au cours des années 1920 et 1930, permirent elles aussi de corriger la classification des objets astronomiques, en identifiant certaines des nébuleuses observées comme autant d'"univers-îles" semblables à notre propre galaxie et extrêmement lointains [Hubble, 1936]. Les autres, objets finalement relativement proches, ont peu à peu été perçues comme les preuves visibles que l'espace interstellaire est loin d'être vide. L'ouverture d'autres domaines spectraux d'observation, en infrarouge et en radio notamment, en a en effet, par la suite, révélé la richesse.

I.2 La machinerie galactique

I.2.a Un système complexe et hiérarchisé

Telle qu'on la conçoit désormais [Binney & Tremaine, 1987], la galaxie se présente comme un système hiérarchique, dont on peut distinguer plusieurs niveaux d'organisation. À des échelles de l'ordre de l'unité astronomique (1 UA $\simeq$ 150.10^6 km), les étoiles et leurs cortèges planétaires forment les constituants élémentaires du système galactique. Celui-ci est formé d'un bulbe sphérique central, d'un disque en rotation, dont le diamètre est de l'ordre de la trentaine de kiloparsecs (1 pc=$3,08.10^{13}$ km) et au sein duquel des ondes de densité forment des bras spiraux, d'un halo stellaire et d'un halo de matière noire. Les étoiles du disque et du bulbe (population I) sont plus jeunes que celles du halo (population II). L'existence du halo de matière noire est suggérée par l'absence de chute de la vitesse de rotation à grande distance du centre galactique [Mannheim, 1997]. Selon les estimations, la masse de ce halo pourrait atteindre 90% de la masse totale de notre galaxie. Aux échelles intermédiaires, entre les étoiles, le milieu interstellaire (MIS) est localisé principalement dans le disque galactique [Lequeux *et al.*, 2002] et essentiellement constitué de gaz sous plusieurs phases[1] ainsi que de poussières. Cette image hierarchisée n'est cependant qu'une première approximation, qui peut se révéler trompeuse, car les différentes composantes ci-dessus sont en interaction constante. La galaxie dans son ensemble peut être considérée comme un système fermé[2], en

[1] Le terme "phase" est ici à comprendre dans le sens de conditions physiques.

[2] Ici, fermé signifie qu'il n'y a pas ou très peu d'échange de matière avec l'extérieur. Le rayonnement électromagnétique de la galaxie nous interdit en effet de la considérer comme un système entièrement isolé puisqu'elle laisse s'échapper une

faisant abstraction des effets gravitationnels dûs aux autres galaxies. En revanche, les échanges de masse et d'énergie entre le milieu interstellaire et les étoiles, d'une part, et le transfert de l'énergie gravitationnelle globale de la galaxie vers les échelles plus petites, d'autre part, font du MIS un système fondamentalement ouvert et hors d'équilibre.

I.2.b Le rôle du milieu interstellaire

L'interaction particulièrement complexe du milieu interstellaire avec les autres composantes du système galactique est au cœur du problème de la formation stellaire [Jeans, 1902]. C'est au sein des régions les plus denses du MIS que les étoiles naissent de la contraction gravitationnelle de nuages de gaz. En retour, le rayonnement électromagnétique émis par les étoiles dissocie et ionise les espèces chimiques présentes dans le milieu environnant [van Dishoeck & Black, 1988], tandis que les vents stellaires et les supernovæ d'une part enrichissent ce dernier en éléments lourds formés dans les réactions thermonucléaires en leur centre, et d'autre part y injectent de l'énergie sous forme de mouvements turbulents. A l'autre bout de la hiérarchie, la rotation différentielle de la galaxie et les ondes de densité à l'origine de la structure spirale du disque [Lin & Shu, 1964] sont suspectées de participer à l'agitation macroscopique du milieu interstellaire et à la formation de condensations locales [Elmegreen, 2002]. Cette position stratégique du MIS dans le système galactique contraste fortement avec son peu d'importance en masse (environ 5% de la masse des étoiles et 0,5% de la masse totale de la galaxie) [Lequeux *et al.*, 2002].

I.3 Le gaz interstellaire

I.3.a Un milieu à la physique inhabituelle

Dans l'ensemble, le gaz du MIS est un milieu très peu dense, où la densité de particules varie *grosso modo* entre quelques 10^{-3} et 10^{4} particules par centimètre cube, mais dont l'étendue est si grande (on compte en moyenne seulement une étoile par parsec cube au voisinage du Soleil) que la densité de colonne, qui représente la quantité de matière interceptée par une ligne de visée, est typiquement de l'ordre de quelques 10^{21} cm^{-2}, suffisante pour que des phénomènes très faibles deviennent mesurables. C'est le cas, par exemple, de la raie à 21 cm, correspondant à la transition entre les deux sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'hydrogène atomique neutre (HI) [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973]. Théoriquement, un atome d'hydrogène dont les spins du proton et de l'électron sont parallèles peut subir une transition de retournement de spin, l'énergie étant libérée sous forme d'un photon radio de longueur d'onde 21 cm (1420 MHz). Cette désexcitation radiative est cependant fortement interdite et la durée de vie du niveau de plus haute énergie est de l'ordre de 10^{7} ans. Sur Terre, et même dans les vides les plus poussés, les collisions entre atomes empêchent d'observer cette transition. Seul le milieu interstellaire peut offrir simultanément les faibles densités et les grandes quantités de matière permettant cette observation [van De Hulst, 1951]. De même, le MIS est le lieu idéal de formation d'espèces chimiques hautement instables dans les conditions du laboratoire [Lequeux & Roueff, 1991].

I.3.b Composition chimique

À l'exception de l'enrichissement en éléments lourds par les étoiles, la composition chimique du gaz interstellaire reflète bien les caractéristiques de la nucléosynthèse primordiale [Harwit & Spaans, 2003]. L'hydrogène représente 70% de sa masse, l'hélium 28%, tandis que les 2% restants[3] sont principalement constitués de carbone, d'oxygène, d'azote, ainsi que d'autres éléments plus lourds [Frisch & Slavin, 2003]. De plus, l'hélium ne participant pas aux réactions chimiques et étant bien couplé à l'hydrogène par les collisions, il est possible de l'inclure dans le traitement du seul gaz d'hydrogène en modifiant simplement la masse moyenne par particule. Quant à l'hydrogène lui-même, on le trouve d'une part sous une forme atomique et ionisée, observée dans le visible grâce à la raie de recombinaison Hα à 656,2 nm, d'autre part sous la forme atomique et neutre déjà évoquée, et enfin sous forme moléculaire, dont l'émission est difficilement observable directement (voir la section **I.3.d**). Les transitions entre ces différentes espèces ont lieu en fonction de l'environnement ionisant des étoiles proches et de la densité du gaz.

puissance de l'ordre de 4.10^{10} $L_\odot$, où $L_\odot$ désigne la luminosité solaire (1 $L_\odot = 3,845.10^{26}$ W).

[3] Qu'on nomme collectivement "métaux" en astrophysique.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

I.3.c Les différentes phases du gaz interstellaire

Loin de former un ensemble homogène, le gaz interstellaire présente différentes phases en température et en densité, issues de la compétition entre divers processus de chauffage et de refroidissement de ses constituants [Wolfire *et al.*, 1995]. Il existe tout d'abord une composante entièrement ionisée, très peu dense ($n \sim 6.10^{-3}$ cm^{-3}) et extrêmement chaude ($T \sim 10^6$ K), appelée milieu coronal par rapprochement avec les conditions physiques rencontrées dans la couronne solaire, ou plus prosaïquement HIM pour Hot Ionized Medium. Cette composante, fortement hors d'équilibre, est interprétée comme le produit des bulles de gaz chaud engendrées par les supernovæ [McKee & Ostriker, 1977].
Deux phases moins chaudes et plus denses sont stables thermiquement et en équilibre de pression l'une avec l'autre. Il s'agit de la composante WNM (Warm Neutral Medium) pour laquelle $n \sim 0,25$ cm^{-3} et $T \sim 8000$ K, et de la composante CNM (Cold Neutral Medium), plus dense ($n \sim 25$ cm^{-3}) et plus froide ($T \sim 80$ K). Il n'est également pas rare de voir mentionnée une troisième phase dite WIM (Warm Ionized Medium). Cependant, la distinction observationnelle de cette phase par rapport au WNM est peu claire, le degré d'ionisation de l'hydrogène pouvant varier de manière continue. A des pressions plus élevées, on trouve d'une part la phase moléculaire, qui présente des densités supérieures à 1000 cm^{-3} pour des températures inférieures à 100 K, et d'autre part, dans l'environnement des étoiles massives de type O et B, les régions HII d'hydrogène ionisé, dont la densité peut varier d'environ 1 cm^{-3} à 10^4 cm^{-3} et dont la température est de l'ordre de 10000 K. L'estimation des masses totales des différentes composantes du MIS de la galaxie est donnée dans le tableau récapitulatif ci-dessous, où l'on rappelle qu'une masse solaire est égale à 1 $M_\odot = 1,989.10^{30}$ kg

TAB. 1 – *Les différentes composantes du gaz interstellaire*

Phase	Densité (cm^{-3})	Température (K)	Masse totale ($M_\odot$)
WNM	0,25	8000	1,5.10^9
CNM	25	80	1,5.10^9
Moléculaire	$\geqslant$ 1000	$\leqslant$ 100	10^9 (?)
WIM	0,03	8000	10^9
HIM	6.10^{-3}	10^6	10^8 (?)
Régions HII	1–10^4	10^4	5.10^7

I.3.d Les moyens d'observation

La diversité des conditions physiques rencontrées dans le milieu interstellaire se traduit par une nécessaire adaptation des moyens d'observation aux composantes du MIS. Chacune de celles-ci ne peut être étudiée qu'au travers de certaines raies d'absorption ou d'émission de "traceurs" de la matière. Le problème posé par ces contraintes est double. Tout d'abord, la déduction, à partir de ces données observationnelles limitées, des conditions physiques précises régnant dans une région de l'espace est obligatoirement indirecte, et souvent incomplète. Ensuite, les observations de composantes différentes étant effectuées dans des domaines spectraux différents, avec des résolutions et des sensibilités variées, toute comparaison entre elles est malaisée. Reprenant la classification des phases ci-dessus, on peut distinguer les méthodes observationnelles suivantes :

▷ En ce qui concerne le gaz neutre atomique, trois types de raies permettent de l'étudier : la raie à 21 cm du HI, les raies de structure fine dans l'infrarouge lointain et les raies d'absorption interstellaires.
La raie à 21 cm trace la composante majoritaire du milieu. Elle peut être large et en émission dans le cas du WNM [Poppel *et al.*, 1994], ou étroite et en absorption devant le continuum radio d'un quasar par exemple [Heiles, 1997], dans le cas du CNM[4]. Si le milieu est optiquement mince, les mesures obtenues grâce à cette raie en fournissent la densité de colonne en hydrogène atomique [Lequeux *et al.*, 2002]. D'autre part, les espèces présentes dans le milieu voient leur niveau fondamental séparé par le couplage de structure

[4]On peut cependant également observer cette raie en émission dans le milieu froid.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

fine entre le moment orbital et le spin de leurs électrons [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973]. Les transitions induites entre ces sous-niveaux sont généralement fortement interdites, de sorte que l'équilibre statistique des populations des niveaux ne fait intervenir que les transitions collisionnelles et l'émission spontanée. Ce sont les raies correspondant à ce dernier processus qui dominent le refroidissement de la phase neutre atomique [Wofsy *et al.*, 1971], en particulier les raies de OI à 63,18 μm dans le milieu tiède (WNM), et de CII à 157,7 μm dans le milieu froid (CNM). Enfin, la présence d'autres espèces chimiques dans la composante neutre est trahie par les raies d'absorption observées dans les spectres des étoiles [Watson, 2001], essentiellement dans le visible et l'ultraviolet (UV). C'est ainsi, d'ailleurs, que furent découvertes les premières molécules interstellaires, à savoir CH, CH^+ et CN [Brengauz, 1960].

▷ Les observations de molécules se font maintenant essentiellement grâce à leurs raies de transitions électroniques, vibrationnelles et rotationnelles. L'espèce la plus abondante de la phase moléculaire, H_2, est une molécule symétrique et ne possède donc pas de moment dipolaire permanent, ce qui rend ses transitions rotationnelles et vibrationnelles très faibles. Les transitions électroniques, quant à elles, se trouvent en général dans l'UV et sont observées en absorption devant le spectre des étoiles [Black & Dalgarno, 1976]. Les raies moléculaires vues en émission sont soit des raies de vibration lorsque la température est assez élevée, soit plus généralement des raies de rotation de molécules asymétriques, dans les domaines submillimétrique et millimétrique principalement [Heithausen *et al.*, 1998]. C'est ainsi que les raies de rotation des différents isotopes du monoxyde de carbone ^{12}CO, ^{13}CO, et $C^{18}O$, dont l'abondance totale par rapport au dihydrogène est de l'ordre de 7.10^{-5}, permettent de tracer la matière moléculaire et d'en déduire une estimation de la densité de colonne de H_2 [Dame *et al.*, 2001].

▷ Les régions HII présentes autour d'étoiles jeunes et chaudes émettent un continuum allant de l'UV aux ondes radio, auquel viennent s'ajouter des raies de recombinaison dans les domaines optique et radio, ainsi que des raies de structure fine.

Selon le modèle de Strömgren [Strömgren, 1939], l'hydrogène est presque entièrement ionisé par le flux de photons UV d'énergie supérieure à 13,6 eV (continuum de Lyman), et l'étendue de cette région HII dépend du type de l'étoile centrale ainsi que de la densité du gaz. Plus précisément, le milieu se structure en couches concentriques où les différentes espèces se présentent avec des degrés d'ionisation divers. Dans l'ensemble, les régions HII sont en forte surpression par rapport au milieu environnant et ont une durée de vie limitée [Yorke *et al.*, 1989]. D'autre part, dans certains cas, une partie des photons ionisants s'échappe vers le milieu diffus, auquel cas on parle de région bornée par la densité, par opposition aux régions bornées par l'ionisation, où tous les photons Lyman sont absorbés au voisinage de l'étoile excitatrice. Le continuum observé en direction des régions HII est constitué d'une part de rayonnement libre-libre ("brehmsstrahlung") produit lors du freinage des électrons par les ions, d'autre part d'émission libre-lié de recombinaison des paires ion-électron [Rohlfs & Wilson, 2000], et enfin de rayonnement à deux photons, processus au cours duquel une désexcitation radiative est séparée en deux étapes, passant par un niveau intermédiaire non quantifié [Lequeux *et al.*, 2002]. Les poussières présentes dans les régions HII participent également au continuum en diffusant la lumière des étoiles dans le visible et l'ultraviolet, et en réémettant dans l'infrarouge (IR) proche et moyen. Lors d'une recombinaison, l'électron capturé se trouve en général sur un niveau excité, et le retour vers l'état fondamental se fait au travers d'une cascade radiative au cours de laquelle sont émis de nombreux photons de raies, dans le visible, en infrarouge proche, et jusque dans le domaine radio pour les transitions entre niveaux de nombres quantiques élevés. Enfin, comme dans la composante neutre atomique, il existe des raies interdites de structure fine, vues en optique et en infrarouge [Aannestad & Emery, 2003].

▷ La présence d'un milieu ionisé diffus (WIM) dans le MIS est, elle, mise en évidence par des méthodes similaires [Mathis, 2000], en particulier par l'observation, même en dehors des régions HII, d'un continuum radio libre-libre, aussi bien en émission à haute fréquence qu'en absorption à plus basse fréquence. On observe également des raies de recombinaison radio de l'hydrogène, ainsi que des raies optiques de recombinaison et de structure fine, mais une preuve spécifique de la présence d'électrons dans le MIS vient des mesures de dispersion du rayonnement radio des pulsars [Rand & Lyne, 1994]. L'existence de ce milieu diffus et ionisé est probablement due au champ ambiant de photons UV présents dans le MIS et issus des populations stellaires jeunes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

▷ L'existence de raies d'absorption d'espèces hautement ionisées [York, 1974] telles que OVI ne peut s'expliquer facilement par des ionisations radiatives (il faudrait par exemple, dans ce cas précis, des photons de 114 eV pour atteindre un tel état d'ionisation), mais bien plus probablement par des collisions dans un milieu chaud, le HIM, dont la température est estimée entre 10^5 K et 10^7 K. Celui-ci émet un continuum X thermique de type libre-libre et libre-lié semblable à celui des régions HII [Bowyer *et al.*, 1968], ainsi que des raies X, correspondant à la retombée en cascade d'électrons des couches externes vers une couche plus interne laissée vide par l'expulsion collisionnelle d'un électron.

I.3.e Distribution spatiale du gaz

La détermination de la répartition spatiale du gaz interstellaire dans la galaxie pose certains problèmes liés aux méthodes observationnelles. Parmi ceux-ci, on note la difficulté de cartographier entièrement une région par des mesures d'absorption, tirées des propriétés des raies moléculaires dans le milieu froid. D'autre part, les observations faites dans des traceurs minoritaires de la matière, tel CO dans le cas de la composante moléculaire, ne donnent qu'une image indirecte de la distribution du gaz [Goldsmith & Langer, 1999]. Enfin, la détermination de la distance des structures observées peut être particulièrement imprécise, en particulier lorsque celles-ci ne sont pas évidemment liées à des étoiles. *A contrario*, les méthodes photométriques fournissent de bonnes estimations des distances stellaires et des structures associées [Kun *et al.*, 2000].
Les résultats principaux portant sur la distribution globale de matière à l'échelle galactique montrent tout d'abord que le gaz interstellaire se concentre dans des disques coplanaires à celui des étoiles de population I, et dont les caractéristiques dépendent de la phase particulière considérée [Lequeux *et al.*, 2002]. Alors que le diamètre du disque de gaz atomique est d'environ 60 kpc [Binney & Tremaine, 1987], le gaz moléculaire et le gaz ionisé se trouvent principalement dans la galaxie interne à l'orbite solaire, c'est à dire aux distances inférieures à 10 kpc du centre. Plus précisément, environ les deux tiers de l'émission totale en ^{12}CO proviennent d'un anneau compris entre 4 kpc et 8 kpc du centre galactique, dit anneau moléculaire [Bronfman *et al.*, 1988].
Pour chaque composante, l'épaisseur du disque, perpendiculairement au plan de la galaxie, dépend théoriquement de la température et de la masse par particule[5]. Effectivement, on observe que l'épaisseur du disque moléculaire froid, lieu de la formation stellaire, est de l'ordre de 80 pc, tandis que celle du milieu moléculaire plus diffus est sensiblement égale à celle du CNM, de l'ordre de 210 pc [Dame & Thaddeus, 1994]. Plus chaud, le disque WNM a une épaisseur de quelques centaines de parsecs [Falgarone & Lequeux, 1973], alors que le milieu ionisé diffus (WIM) s'étend sur une échelle de hauteur de l'ordre du kiloparsec (voir par exemple [Reynolds *et al.*, 1995]). À des latitudes galactiques plus élevées, le milieu chaud HIM domine, avec des échelles de hauteur différentes selon les espèces observées (2,7 kpc pour OVI et 4,4 kpc pour CIV, par exemple) [Lequeux *et al.*, 2002]. Dans cette vision schématique, les régions HII sont un peu à part, car bien qu'ionisées et chaudes, elles sont liées aux étoiles jeunes formées dans le disque moléculaire froid, et leur répartition a donc la même échelle de hauteur que celui-ci [Guibert *et al.*, 1978].
Au delà de ces résultats généraux, la distribution des structures au sein des différentes composantes se révèle fortement hétérogène. Les cartes du CNM observé dans la raie à 21 cm présentent un aspect fractal dominé par des filaments, des nappes et des coquilles, alors que le WNM tend à se distribuer plus uniformément. Les structures complexes vues en absorption dans le milieu froid sont cohérentes dans l'espace des vitesses et on suppose donc qu'elles le sont aussi spatialement, ce qui explique le nom de "nuages" qui leur est donné. Leur taille typique est de l'ordre de 300 pc, pour une masse de 10^7 $M_\odot$. En leur sein se forment des structures moléculaires géantes (GMC pour Giant Molecular Cloud) dont on estime la taille à 50 pc et la masse à 10^6 $M_\odot$. Ces nuages moléculaires géants sont eux aussi structurés à plus petite échelle, et comme on le verra par la suite, l'emboîtement des structures jusqu'à des tailles de 10^{-2} pc et des masses de 10^{-4} $M_\odot$ suggère un comportement fractal [Elmegreen & Falgarone, 1996]. Le degré d'ionisation global du MIS apporte une preuve supplémentaire de l'hétérogénéité de chacune des phases, y compris le WNM. En effet, les sources d'ionisation connues, à savoir les étoiles jeunes, ne sauraient expliquer l'ionisation relativement importante du MIS dans l'hypothèse où celui-ci serait homogène. C'est le caractère "poreux"

[5]Intuitivement, une masse par particule plus grande et une température plus faible impliquent une épaisseur plus petite, car les particules de gaz tombent d'autant plus facilement sur le plan galactique. La valeur du champ de gravité entre également en ligne de compte, mais étant déterminée par les autres composantes du système galactique (étoiles et surtout matière noire), son effet est le même pour toutes les phases du gaz.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

du milieu qui autorise la pénétration profonde des photons UV[6] et donc l'ionisation. D'autre part, les photons d'énergie inférieure à 13,6 eV, s'ils ne peuvent ioniser le HI, peuvent néanmoins dissocier les molécules de dihydrogène. C'est ce qui arrive au bord des nuages denses de la phase moléculaire et est à l'origine des régions de photodissociation (PDR) telles que celle associée la nébuleuse de la Tête de Cheval.

I.4 Les poussières

I.4.a Mise en évidence observationnelle

L'existence de nuages sombres [Lynds, 1962], dont on voit un exemple sur la figure **I.1**, ne peut s'expliquer par l'absorption par le seul gaz. De telles extinctions démontrent la présence, dans le milieu interstellaire, de fins grains de poussière, intimement liés au gaz. Observationnellement, ces poussières absorbent la lumière des étoiles dans le visible et l'ultraviolet, pour la réémettre dans l'infrarouge et le submillimétrique, ce qui se traduit par un chauffage des grains [Kruegel, 2003]. De plus, une partie de la lumière stellaire est diffusée et une autre transmise, et comme dans le cas de l'atmosphère terrestre, la diffusion est plus efficace dans le bleu, et la transmission dans le rouge [Harwit, 1973]. Les grains sont généralement chargés électriquement et se comportent comme des dipôles magnétiques en rotation, en raison des échanges de moment angulaire avec le milieu environnant. Dans le champ magnétique **B** du milieu interstellaire (voir **I.5**), les grains s'alignent de sorte que leur plus grand moment d'inertie soit parallèle au champ. En conséquence, les lumières diffusée et transmise sont polarisées, ce qui est effectivement observé.

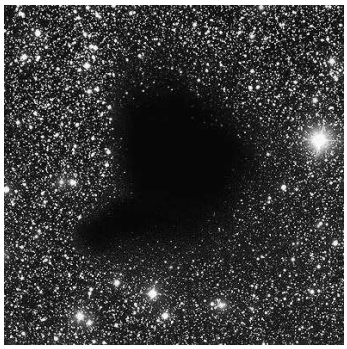

FIG. **I.1** – *Le nuage sombre Barnard 68 (image ESO)*

I.4.b Formation et évolution

Les poussières se forment quasi-instantanément dans le refroidissement des enveloppes d'étoiles. Dans le milieu interstellaire, elles sont détruites par les collisions grain-grain, ainsi que par les impacts d'ions ou d'atomes à haute énergie, mais également reformées ou modifiées par coagulation de grains, condensation de molécules et accrétion d'atomes [Kruegel, 2003]. L'échelle de temps de ce recyclage est de l'ordre de 10^9 ans. Certains de ces processus impliquent un transfert de masse de la phase gazeuse à la phase solide ou l'inverse, tandis que d'autres conservent l'état physique des constituants. D'autre part, les poussières peuvent se former ou être détruites au cours de phénomènes violents tels que des novæ ou des supernovæ. Au final, la masse de poussières est d'environ 1% de la masse totale du MIS [Lequeux *et al.*, 2002], mais leur rôle dans l'évolution physico-chimique du milieu est essentiel.

I.4.c Le rôle des poussières

Atomes et molécules de la phase gazeuse peuvent être adsorbés à la surface des grains de poussière, et y subir des transformations chimiques [d'Hendecourt *et al.*, 1985]. Les poussières jouent ainsi le rôle de catalyseurs des réactions chimiques, certaines d'entre elles étant d'ailleurs impossibles en phase gazeuse dans les conditions du MIS. C'est le cas, par exemple, de la formation de la molécule la plus

[6]Notons qu'il existe un champ de rayonnement UV ambiant, baignant l'ensemble du MIS.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

abondante du milieu interstellaire, H_2 [Hollenbach & Salpeter, 1971]. Le chauffage par les photons permet ensuite l'évaporation des molécules nouvellement créées à la surface des grains et l'enrichissement du gaz interstellaire. Réciproquement, les éléments lourds ont plutôt tendance à être piégés dans les grains de poussière, ce qui explique la déplétion de la phase gazeuse du MIS en ces éléments par rapport aux atmosphères stellaires [Weingartner & Draine, 1999]. D'autre part, l'effet photoélectrique, c'est-à-dire l'expulsion d'électrons des poussières par absorption de photons UV, est une source importante de chauffage du gaz interstellaire [Draine, 1978]. Si l'électron arraché est "suprathermique", autrement dit si son énergie cinétique est supérieure à l'énergie cinétique moyenne du gaz, la thermalisation par collision augmente la température du gaz. Aux densités suffisamment grandes, les collisions gaz-grains thermalisent également les poussières.

I.4.d Distribution des tailles et composition

La variété des processus de formation, de modification et de destruction des grains rend difficile voire impossible la déduction de leurs propriétés à partir de la considération de leur environnement. Il est plus aisé de tenter de remonter aux caractéristiques globales de la phase solide depuis les observations de la lumière émise par les poussières dans les domaines submillimétrique et proche infrarouge. Les modèles disponibles par cette approche dépendent principalement de la distribution de taille des grains et de leur composition chimique. Pour la première, on considère généralement le modèle de Mathis et al. [Mathis *et al.*, 1977], selon lequel le nombre $N(a)\mathrm{d}a$ de grains dont la taille est comprise entre a et $a + \mathrm{d}a$ est proportionnel à $a^{-3.5}$, pour des tailles allant de 0.5 nm à 110 nm. Cette forme simple semble toutefois loin de rendre compte de toutes les propriétés des poussières, en particulier des bandes d'émission IR entre 3,3 μm et 12,7 μm [Puget & Léger, 1989]. Celles-ci sont d'ailleurs attribuées non pas à de "véritables" grains silicatés ou carbonés, mais plutôt à des grosses molécules aromatiques appelées PAH (Polycyclic Aromatic Hydrocarbons)[Désert *et al.*, 1986], dont la composition n'est pas encore bien connue.

I.4.e Distribution spatiale

Les collisions avec le gaz permettent un couplage des grains avec celui-ci, et les distributions spatiales des deux phases sont donc intimement liées [Draine, 2003]. Plus précisément, si la comparaison de l'émission à 100 μm avec celle à 21 cm montre que les gros grains sont bien répartis comme la composante diffuse du milieu atomique (WNM) et que leur distribution est donc structurée sur des échelles de hauteur de l'ordre de quelques centaines de parsecs, l'émission des grains plus petits, observée notamment à 12 μm et 25 μm, révèle un disque moins épais [Boulanger *et al.*, 1990].

I.5 Le champ magnétique du MIS

I.5.a Mise en évidence observationnelle

Les preuves observationnelles du fait que le milieu interstellaire baigne dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ sont de quatre types.

▷ Tout d'abord, dans les atomes ou les molécules de moment magnétique non nul[7], l'interaction entre celui-ci et le champ magnétique provoque une levée de dégénérescence des niveaux d'énergie par effet Zeeman [Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973]. Les transitions entre niveaux sont donc déplacées en fréquence de manière différente suivant l'orientation du moment par rapport au champ, proportionnellement à celui-ci, et elles correspondent à des rayonnements polarisés différemment. Malgré la petitesse des déplacements (de l'ordre de 1,4 Hz.μG^{-1}), on profite de ces propriétés de polarisation pour mesurer la composante longitudinale[8] du champ, notée $B_{\|}$. Dans les régions denses des nuages moléculaires on a ainsi pu mesurer des champs de l'ordre de quelques dizaines de microgauss [Goodman *et al.*, 1989], mais le champ global est, lui, trop faible pour être mesuré par cette méthode.

[7]Soit du fait du moment orbital total des électrons, soit en raison du spin d'électrons célibataires, par exemple.
[8]C'est-à-dire parallèle à la ligne de visée.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

▷ En présence d'un champ magnétique, les électrons libres d'un plasma forment un diélectrique dont le comportement vis à vis des ondes polarisées circulairement est différent selon le sens de polarisation [Rohlfs & Wilson, 2000]. En particulier, la vitesse de propagation d'une onde droite est différente de celle d'une onde gauche. Lorsqu'une onde polarisée linéairement - assimilable à la superposition de deux ondes circulaires de sens opposés - pénètre dans un tel milieu, il en résulte une rotation de la direction de polarisation, d'angle proportionnel à $B_{||}$. Cette rotation Faraday permet ainsi également de mesurer la composante longitudinale du champ magnétique. Les résultats obtenus sont en bon accord avec la méthode fondée sur l'effet Zeeman [Clegg *et al.*, 1992].

▷ Le rayonnement synchrotron d'électrons relativistes dans un champ magnétique est polarisé linéairement, perpendiculairement au champ [Sokolov & Ternov, 1969]. Moyennant les corrections dues à la rotation Faraday, on peut en déduire des renseignements sur la direction du champ. D'autre part, la connaissance du flux d'électrons permet théoriquement de trouver, à partir de l'étude du spectre synchrotron, la valeur du module $|\mathbf{B}|$ du champ magnétique et non pas seulement celle de sa composante longitudinale. Cet avantage est cependant tempéré par le fait qu'il est difficile de mesurer le flux d'électrons relativistes.

▷ La corrélation entre l'extinction interstellaire et la polarisation linéaire de la lumière des étoiles suggère, comme on l'a évoqué plus haut, un alignement des grains de poussières du MIS, ce qui peut s'expliquer en présence d'un champ magnétique [Fosalba *et al.*, 2002]. En effet, les grains portent généralement un moment magnétique $\mathbf{M}$ dû aux électrons non appariés, ou encore à la rotation, la surface des poussières étant chargée localement. Le couple résultant $\mathbf{M} \times \mathbf{B}$ provoque un alignement des grains avec le champ magnétique et l'anisotropie qui en résulte cause la polarisation linéaire partielle des rayonnements se propageant dans le milieu. Il est cependant très difficile d'obtenir des résultats précis par cette méthode en raison de l'incertitude sur les processus de magnétisation des grains.

I.5.b Organisation du champ magnétique à l'échelle galactique

Les principaux résultats observationnels semblent indiquer l'existence d'un champ ordonné parallèle aux bras spiraux, dont l'intensité est estimée à 1,4 μG. Le sens de ce champ s'inverse deux fois lorsqu'on se rapproche du centre galactique, à 0,4 kpc et 5,5 kpc de l'orbite solaire [Rand & Lyne, 1994]. D'autre part, un champ désordonné de l'ordre de 5 μG se superpose au champ ordonné et le domine donc, surtout dans les régions denses du MIS, où les mesures semblent indiquer des valeurs supérieures d'un facteur 10 environ [Goodman *et al.*, 1989]. Dans le halo, la présence d'un rayonnement synchrotron montre l'existence d'un champ magnétique aux grandes latitudes galactiques [Phillipps *et al.*, 1981], probablement dû aux particules ionisées éjectées du plan de la galaxie par les explosions de supernovæ.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE II

La structure des nuages moléculaires

II.1 Introduction

On a déjà évoqué, au **I.3.e**, la complexité des structures du milieu interstellaire, des grands nuages d'hydrogène atomique aux plus petites structures moléculaires, emboîtées les unes dans les autres sur près de cinq ordres de grandeur. Ainsi, il est impossible, en toute rigueur, d'étudier les nuages moléculaires comme des entités isolées. Ceci est d'autant plus vrai qu'il existe un véritable couplage des échelles en termes de processus physiques, depuis les échelles de l'ordre de l'unité astronomique, auxquelles a lieu la formation stellaire, jusqu'aux échelles galactiques et au-delà, ce qui rend extrêmement complexe la compréhension de la physique gouvernant ces objets, et dépasse de loin les capacités de modélisation numérique actuelles. Pour comprendre la structuration des nuages moléculaires, il faut en particulier considérer l'énergie qui leur est fournie par les grandes échelles, du fait par exemple de la rotation différentielle de la galaxie, ainsi que celle qui est injectée aux échelles stellaires, par exemple par les supernovæ ou encore les jets bipolaires des étoiles jeunes. D'autre part, les processus physiques qu'il convient de prendre en compte sont nombreux. On pense évidemment à la gravitation, mais également à la turbulence, à l'évolution chimique du milieu du fait des réactions entre espèces adsorbées à la surface des grains, au transfert radiatif, ou encore au couplage entre le gaz et le champ magnétique via les interactions entre particules chargées et particules neutres. Tous ces processus physiques ne sont pas indépendants les uns des autres, et présentent par conséquent un haut degré de non-linéarité, ce qui complique encore le problème.
Ce chapitre n'a bien entendu pas pour objectif de traiter de manière exhaustive les questions relatives à la physique des nuages moléculaires[1], mais plutôt de présenter, très brièvement, quelques résultats portant sur la structuration de ces nuages, depuis les complexes géants, dont la taille est de l'ordre de plusieurs dizaines de parsecs [Falgarone, 1998], jusqu'aux structures de taille aussi petite que ~ 1000 UA.

II.2 Un état des lieux des nuages moléculaires diffus

II.2.a Des structures probablement éphémères

Dans leur phase la moins condensée, les nuages moléculaires forment des structures complexes, dont on pense actuellement qu'elles sont relativement éphémères, c'est à dire que leur temps de vie est inférieur à leur temps de traversée[2]. Cette théorie [Hartmann *et al.*, 2001] est essentiellement fondée sur le raisonnement suivant : on devrait trouver, au voisinage de tout nuage moléculaire de longue durée de vie, les étoiles âgées qu'il aurait formées au début de son existence. Or, dans la plupart des régions de formation stellaire proches de concentrations de gaz moléculaire, l'âge typique des étoiles est de l'ordre de 1 à 3 millions d'années seulement, soit un ordre de grandeur plus court que les temps dynamiques classiques associés aux nuages. Il se dessine alors une image de la formation des nuages moléculaires comme structures créées par les chocs aux points de convergence des flots de gaz atomique à grande échelle, l'énergie nécessaire à la condensation du gaz en ces points étant issue des grandes échelles, au travers d'une cascade turbulente.
Ceci suggère d'une part que les nuages moléculaires apparaissent et disparaissent assez rapidement, et d'autre part que le processus de formation stellaire n'est pas déclenché par l'évolution lente d'un nuage isolé, mais par les chocs au sein de l'écoulement turbulent du gaz moléculaire. Bien que cette approche des nuages moléculaires en tant que structures hors équilibre présente elle aussi des difficultés, en particulier pour expliquer le faible taux de formation stellaire observé en moyenne dans la galaxie, son caractère dynamique le rend sans doute plus proche de la réalité que ne l'étaient les modèles antérieurs, plus statiques.

[1] Le lecteur intéressé pourra se reporter à la revue de Williams, Blitz et McKee [Williams *et al.*, 2000].
[2] Le temps de traversée, ou *crossing time*, est le rapport entre la taille du nuage et sa dispersion de vitesse typique.

II.2.b D'importantes fluctuations de pression

Le tableau 1 du chapitre **I** montre, en faisant le produit de la densité par la température pour les différentes phases du milieu interstellaire, que la pression thermique dans la phase moléculaire ($\sim 10^5$ K.cm^{-3}) est typiquement 50 fois plus élevée que celle régnant dans le milieu neutre atomique froid (CNM). En fait, la pression dans ce dernier présente des fluctuations importantes [Jenkins & Tripp, 2001] et les valeurs maximales atteintes localement sont comparables à la pression du milieu moléculaire. Ces grandes fluctuations sont interprétées soit comme résultant de concentrations en densité à petite échelle à la rencontre d'écoulements turbulents, soit comme des couches limites à la surface de nuages moléculaires denses et froids se déplaçant dans le milieu diffus. Dans les deux cas de figure, il semble que le milieu moléculaire et le milieu atomique diffus soient étroitement imbriqués.
D'autres résultats pointent l'existence d'une telle interaction entre les deux milieux. On observe ainsi que près de la moitié de l'hydrogène du milieu diffus est sous forme moléculaire [Savage *et al.*, 1977]. Quant aux autres molécules, elles présentent des abondances assez importantes dans le CNM, et on observe même certaines espèces dont l'existence trahit une quantité d'énergie supérieure à ce que peut fournir le milieu atomique froid. Ces idées, ainsi que l'observation par Heiles [Heiles, 2001] du fait que près de 50% du gaz neutre atomique est dans un état instable thermiquement, à une température comprise entre 500 K et 5000 K, suggèrent fortement de considérer que le milieu diffus est en évolution constante et rapide, entre des états hors équilibre et à l'équilibre, que ce soit du point de vue thermique [Hennebelle & Pérault, 2000] ou chimique [Joulain *et al.*, 1998]. On doit alors supposer qu'il en va de même du milieu moléculaire, dont les structures sont souvent non autogravitantes [Simon *et al.*, 2001] et confinées par des forces de pression extérieures, dues en partie au poids du disque atomique de la galaxie, mais aussi aux nuages moléculaires géants dont ces structures font partie, ou encore aux pressions non-thermiques dans leur environnement, par exemple la pression magnétique[3]. La modification des contraintes extérieures est ainsi susceptible de faire évoluer les structures du milieu moléculaire vers une phase plus ou moins dense.

II.2.c Des échelles caractéristiques

Pourtant, malgré cette vision très dynamique du milieu moléculaire et du milieu atomique diffus, il semble qu'il existe des échelles caractéristiques qui soient conservées au cours de l'évolution des structures vers les états de plus en plus liés gravitationnellement. Par exemple, un nuage moléculaire géant a toujours plus ou moins la même taille, soit environ 50 pc, alors même que sa masse et son énergie d'autogravitation peuvent varier sur plusieurs ordres de grandeur. L'exemple des nuages moléculaires géants cités par [Falgarone, 1998] est ainsi frappant : bien que leurs tailles soient toutes sensiblement égales, leurs masses peuvent varier d'un facteur cent. On note au passage que les étoiles les plus massives observées dans ces nuages moléculaires géants présentent des masses d'autant plus grandes que le nuage est lui-même plus massif.
À des échelles plus petites, on observe également, au sein de ces nuages moléculaires géants, des structures filamenteuses massives et sombres, dont la largeur est toujours sensiblement égale à 0,5 pc, mais dont la masse par unité de longueur, déduite de données ^{13}CO($1 \rightarrow 0$), peut varier d'un facteur quarante. Ces filaments sont également visibles dans les cartes de l'extinction due à la poussière froide, et ils tracent vraisemblablement les régions les plus opaques des nuages. Il semble d'ailleurs que de nombreuses étoiles jeunes y soient localisées. La figure **II**.1 montre le cas du complexe Orionis A, observé en ^{13}CO($1 \rightarrow 0$) par [Bally *et al.*, 1987] et où l'on peut voir un de ces filaments, situé en haut à droite.

II.2.d Des structures denses au sein d'une composante diffuse

On a parlé plus haut de l'existence d'espèces moléculaires, ainsi que de conditions rappelant celles de la phase moléculaire, au sein du milieu atomique froid. De la même façon, il n'est pas étonnant de constater que les nuages moléculaires sont également hétérogènes, et qu'ils se présentent en fait comme une imbrication de gaz diffus et de structures plus petites et plus denses. Le milieu diffus, qui présente une faible densité de colonne, avec une extinction dans le visible inférieure à environ 2 magnitudes, est observé en cartographiant l'émission en ^{12}CO($1 \rightarrow 0$). On constate ainsi que la structure de ce gaz est très lacunaire, et que la frontière qui le sépare des composantes plus denses présente un caractère fractal [Falgarone *et al.*, 1991]. On peut d'ailleurs, de manière assez satisfaisante [Stutzki *et al.*, 1998], modéliser ce milieu moléculaire

[3] Voir le chapitre **III**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

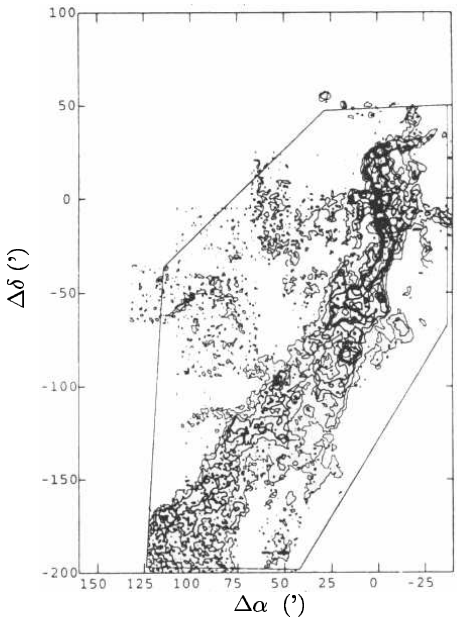

FIG. **II**.1 – *Intensité intégrée d'une observation en* ^{13}CO$(1 \rightarrow 0)$ *du complexe moléculaire Orionis A. Figure issue de [Bally et al., 1987]*

diffus par une distribution fractale de type mouvement brownien fractionnaire[4]. Au sein de cette composante diffuse, on trouve des structures de densité beaucoup plus élevée, appelées cœurs denses, dont l'extinction dans le visible est typiquement de l'ordre de 300 magnitudes, et qu'on observe en absorption infrarouge [Abergel *et al.*, 1996] ou par l'émission thermique des poussières dans le domaine submillimétrique. Ces structures à petite échelle ne sont en revanche pas fractales. Elles sont connectées entre elles par des filaments denses du type de ceux évoqués à la section précédente, qu'on observe notamment en absorption devant des sources brillantes. Il est très probable que ces filaments soient formés en partie par l'action d'un champ magnétique hélicoïdal [Fiege & Pudritz, 2000], ce qui est confirmé par des études cinématiques [Falgarone *et al.*, 2001]. En ce qui nous concerne dans ce travail, nous nous intéresserons uniquement à la composante diffuse et fractale du milieu moléculaire, en remarquant qu'il s'agit des régions qui ne forment pas d'étoiles, et qu'elles constituent la majeure partie de la masse des nuages, en tous cas en ce qui concerne le voisinage solaire.

II.3 La hiérarchie des nuages moléculaires

II.3.a Mise en évidence de lois d'échelle

La cartographie des nuages moléculaires de notre galaxie, à l'aide de l'émission des raies de rotation du monoxyde de carbone, montre que le milieu moléculaire diffus présente de remarquables propriétés d'autosimilarité, à condition bien entendu de se placer loin des tailles caractéristiques évoquées plus haut. Il est probable que les lois d'échelle mises en évidence, qui traduisent cette autosimilarité et dont on va parler un peu plus bas, sont la conséquence des divers processus physiques qui ont lieu au sein des nuages moléculaires. Il faut cependant noter que ces lois d'échelle sont sujettes à caution du fait même de la méthode utilisée pour les obtenir. En effet, la procédure suivie pour extraire un "nuage" à une certaine échelle, afin d'en déduire des propriétés telles que sa masse ou sa dispersion de vitesse intrinsèque, est nécessairement imprécise, étant donnée l'interaction entre échelles qu'on observe dans le milieu moléculaire diffus. Habituellement, on isole des structures connexes dans l'espace position-position-vitesse, dont on calcule ensuite les propriétés comme s'il s'agissait de structures réellement isolées dans l'espace tridimensionnel.
La figure **II**.2 montre ainsi, pour un ensemble de données moléculaires, la relation qu'on peut exhiber entre

[4]Voir le chapitre **VII**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

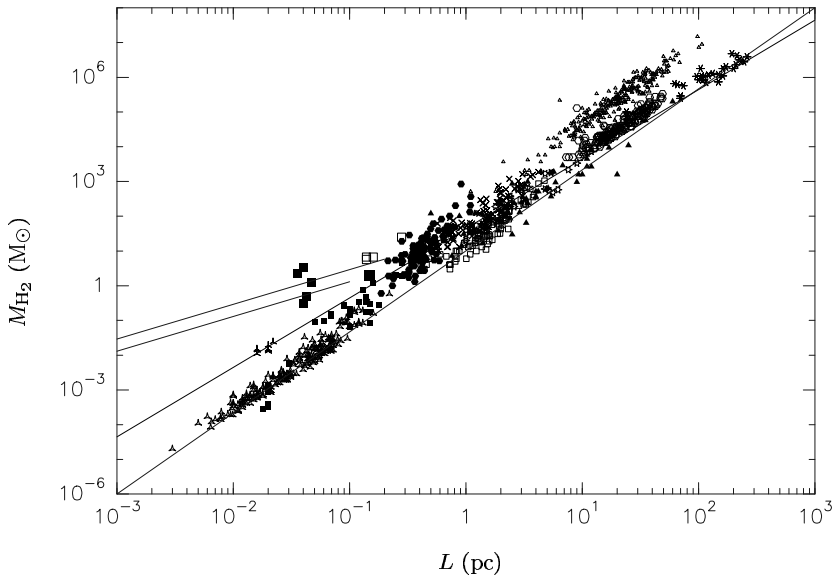

FIG. **II.2** – *Relation entre la taille des structures moléculaires et la masse de gaz* H_2 *qu'elles contiennent. Les données sont essentiellement issues de mesures en* ^{12}CO, ^{13}CO *et* $C^{18}O$ *[Lada et al., 1997, Loren, 1989, Heithausen et al., 1998, Williams et al., 1994, Falgarone & Pérault, 1987, Falgarone et al., 1992, Dame et al., 1986, Solomon et al., 1987, May et al., 1997, Lemme et al., 1995, Wang et al., 1995, Ward-Thompson et al., 1994]. Les références précises sont données par [Falgarone, 1998], dont est extraite cette figure.*

la taille des structures identifiées et la masse de dihydrogène qu'elles contiennent, sachant que cette espèce forme la majeure partie du gaz moléculaire. On remarque notamment que cette loi d'échelle ne peut être ajustée à l'aide d'une seule droite. Si l'on écrit $M_{H_2} \propto L^\gamma$, on doit alors admettre que γ varie, avec $\gamma \simeq 2$ aux grandes échelles, et $\gamma \simeq 2,3$ aux échelles inférieures à 1 pc environ. D'autre part, les mesures symbolisées par des carrés étant issues d'observations de cœurs denses, on remarque que les masses de ceux-ci sont largement plus grandes que celles des structures du mileu diffus à la même échelle. Il n'y a donc pas, en deçà d'environ 0,5 pc, de relation simple entre la taille des structures et leur densité [Falgarone *et al.*, 1992].

La figure **II.3** montre quant à elle la relation entre la taille des structures et leur dispersion de vitesse non-thermique. Étant donné que la température cinétique dans le milieu moléculaire est de l'ordre de quelques dizaines de K, et que les dispersions de vitesses mesurées, de l'ordre du kilomètre par seconde, sont donc beaucoup plus grandes que la vitesse du son dans le gaz, généralement inférieure à 0,1 km s^{-1}, il faut en conclure qu'il existe une quantité importante d'énergie d'origine non-thermique, dont on reparlera plus bas. On remarque d'autre part que ces mesures sont affectées d'une assez forte dispersion.

Historiquement, ces lois d'échelle concernant des données moléculaires ont été obtenues pour la première fois par Larson [Larson, 1981], qui a montré que la largeur des raies d'émission en direction des nuages moléculaires était corrélée avec la taille de ces nuages, sous la forme d'une loi de puissance, $\sigma_v \propto L^c$. Depuis, on a observé de telles relations, non seulement dans le milieu moléculaire, mais également au sein des autres composantes du MIS, qu'il s'agisse de régions HII [Miville-Deschênes *et al.*, 1995], du gaz HI galactique [Baker, 1973, Dickey *et al.*, 2001] et extragalactique [Stanimirovic & Lazarian, 2001], ou encore de l'émission infrarouge des poussières [Gautier *et al.*, 1992, Vogelaar & Wakker, 1994]. Comme dans le cas du milieu moléculaire, on les attribue traditionnellement à un caractère fractal de la distribution des espèces émettrices. En effet, comme on le verra au chapitre **VI**, les ensembles fractals sont précisément caractérisés par ce type de lois d'échelle[5].

On peut également, par ces méthodes d'identification de structures connexes, obtenir une estimation du

[5]Les exposants de ces lois d'échelle sont liés à un nombre appelé dimension fractale, dont la valeur est un indicateur de la manière dont ces ensembles remplissent l'espace. Par exemple, un fractal de dimension d strictement comprise entre 2 et 3 strictement est "plus gros" qu'une surface, mais il ne remplit pas non plus un volume. D'ailleurs, la relation $M_{H_2} \propto L^\gamma$ fait de γ une dimension fractale, ce qu'on utilisera dans la suite.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

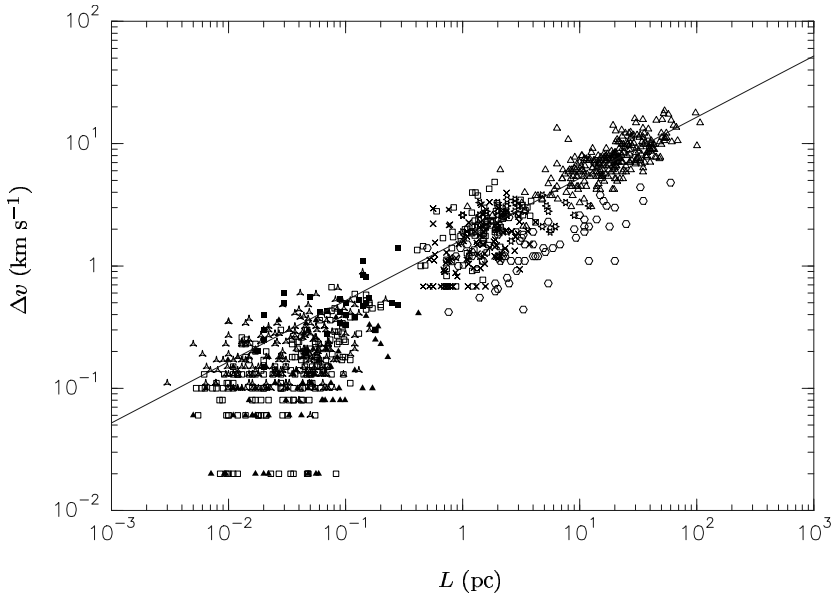

FIG. **II**.3 – *Relation entre la taille des structures moléculaires et leur dispersion de vitesse non-thermique. Les symboles sont les mêmes que pour la figure* **II**.2. *Figure issue de [Falgarone, 1998].*

spectre de masse des nuages moléculaires, qu'on définit comme étant la quantité $f(M) = \mathrm{d}N/\mathrm{d}M$, où $\mathrm{d}N$ est le nombre de nuages dont la masse est M à $\mathrm{d}M$ près. Différentes études ont permis de montrer que ce spectre était bien modélisé par une loi de puissance $f(M) \propto M^{-\alpha}$, avec α compris entre $1,80$ et $1,84$, pour des masses allant de 10^{-3} $\mathrm{M}_\odot$ à 2.10^6 $\mathrm{M}_\odot$, soit sur plus de 9 ordres de grandeur [Solomon *et al.*, 1987, Heithausen *et al.*, 1998, Heyer *et al.*, 2001]. Cette valeur est à comparer avec celle trouvée lorsqu'on étudie le spectre de masse des cœurs denses [Motte *et al.*, 1998, Testi & Sargent, 1998], qui donne un exposant α se situant plutôt entre 2,1 et 2,5. Il faut néanmoins prendre garde au fait que les méthodes de mesure sont également différentes.

II.3.b Autosimilarité et hiérarchie des nuages moléculaires

Les relations illustrées par les figures **II**.2 et **II**.3 traduisent donc une propriété d'autosimilarité qui se manifeste morphologiquement par le fait qu'il apparaît une structuration à toutes les échelles entre 0,002 pc et 300 pc environ, et que l'observation, avec une résolution plus importante, d'une structure de taille donnée révèle que celle-ci est en fait constituée de sous-structures d'aspect sensiblement identique[6]. Ce comportement est typique d'un ensemble fractal, qu'on représente souvent comme un emboîtement de structures semblables à toutes les échelles. On relie généralement cette propriété d'autosimilarité au phénomène de turbulence, qu'on abordera au **II.4.a** et dont on parlera plus en détail au chapitre **III**.
Cette image hiérarchique des nuages moléculaires justifie intuitivement l'utilisation du spectre de puissance pour décrire la structuration du milieu moléculaire[7]. Celui-ci est en effet une mesure de la "quantité de structure" à chaque échelle[8]. On observe ainsi [Stutzki *et al.*, 1998] que l'émission intégrée des nuages moléculaires présente un spectre de puissance relativement bien modélisé par une loi de puissance, de la forme $\mathcal{P}(\boldsymbol{k}) \propto |\boldsymbol{k}|^{-\beta}$, où $\boldsymbol{k}$ désigne le vecteur d'onde et où l'indice spectral β est un nombre caractéristique de la structure observée. Plus celui-ci est grand, plus les grandes échelles dominent les petites, et plus la structure est "lisse", comme on peut le voir en comparant les différentes images de la figure **VII**.2.
L'évolution de l'indice spectral en fonction des différentes plages de tailles considérées est représentée sur la figure **II**.4. Il semble ainsi que β augmente lorsqu'on se place aux échelles de plus en plus petites, ce qui suggère que les structures à ces échelles sont plus lisses que leurs structures parentes, bien qu'il soit possible

[6]Bien entendu, cette ressemblance doit se comprendre au sens statistique.
[7]Voir le chapitre **V**.
[8]Mathématiquement, il est défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation à deux points.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

que des effets d'épaisseur optique expliquent ce changement de comportement [Bensch *et al.*, 2001]. Notons qu'à titre de comparaison, la figure **II**.4 inclut également des observations faites dans des traceurs et sur des composantes du milieu interstellaire qui ne relèvent pas des nuages moléculaires. Remarquons également la discontinuité de la droite représentant l'indice spectral du gaz neutre atomique dans le grand nuage de Magellan [Elmegreen *et al.*, 2001]. Ce changement de régime correspond à une rupture de pente du spectre de puissance, attribuée à la transition entre les turbulences bidimensionnelle et tridimensionnelle, à une échelle d'environ 100 pc. Cette taille caractéristique est assimilée [Lazarian & Pogosyan, 2000] à l'épaisseur du LMC. On reparlera de ce résultat dans la troisième partie.

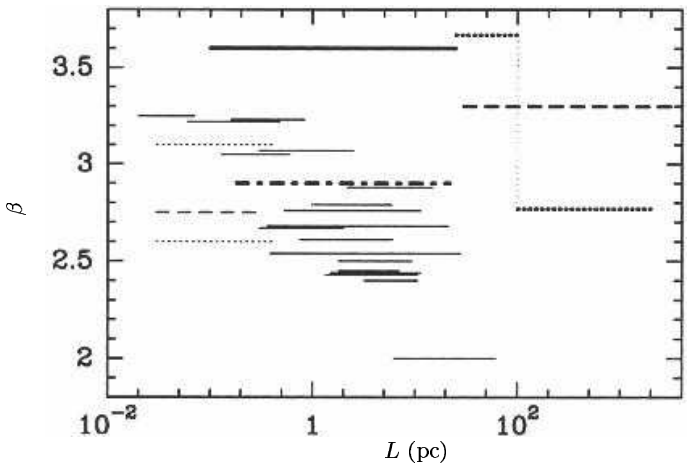

FIG. **II**.4 – *Évolution de l'indice spectral avec l'échelle. Les différents segments représentent les mesures faites sur les intensités intégrées en* ^{12}CO *et* ^{13}CO *de nuages à haute latitude (traits pleins fins), de nuages sans et avec formation d'étoiles observés notamment par [Bensch et al., 2001, Plume et al., 2000] ainsi que par Hily-Blant (traits pointillés fins). Le trait mixte gras représente l'émission des poussières à 100 μm vue par IRAS [Gautier et al., 1992]. On montre également les résultats obtenus sur le* HI *en émission dans le LMC [Elmegreen et al., 2001] (trait pointillé gras), dans le SMC [Stanimirovic & Lazarian, 2001] (trait tireté gras), ainsi que pour une source galactique, à savoir le North Polar Spur [Miville-Deschênes et al., 2003a] (trait plein gras). Le* HI *galactique en absorption (trait tireté fin) a également été inclus, à partir des observations de [Deshpande et al., 2000]. Cette figure est issue de [Falgarone et al., 2003].*

La figure **II**.4 est également révélatrice du lien qui existe entre la turbulence du milieu atomique et celle des nuages moléculaires. On voit en effet que les valeurs de l'indice spectral β obtenues à partir des cartes du gaz atomique HI vu respectivement en émission et en absorption sont différentes. Étant donné que l'émission à 21 cm trace à la fois les phases froide (CNM) et tiède (WNM), tandis que l'absorption de cette même raie est une signature de la seule phase CNM, ceci montre que les comportements des deux phases sont sensiblement différents. D'autre part, les indices spectraux correspondant aux nuages moléculaires sont comparables à ceux de la phase froide et de l'émission des poussières en infrarouge lointain aux mêmes échelles, ce qui semble accréditer l'idée que la variation de β avec l'échelle dans les nuages moléculaires n'est pas due à des effets d'opacité des raies de CO.
Cette variation est plus probablement due à un caractère multifractal des nuages moléculaires. La notion d'ensemble multifractal correspond *grosso modo* à l'imbrication de plusieurs ensembles fractals de dimensions différentes les uns dans les autres. En effet, dans le cadre de champs synthétiques du type mouvement brownien fractionnaire[9], Stutzki [Stutzki *et al.*, 1998] a démontré qu'il existe une relation entre l'indice spectral β, l'exposant α du spectre de masse et l'exposant γ de la relation taille-masse, à savoir $\beta = \gamma(3 - \alpha)$. Or, le spectre de masse est inchangé sur 9 ordres de grandeur, et la variation de β avec l'échelle est donc à mettre au compte de γ, les valeurs extrêmes de l'indice spectral, $\beta = 2,4$ et $\beta = 3,6$, correspondant respectivement à $\gamma = 2$ et $\gamma = 3$. Étant donné que l'exposant γ caractérise la façon dont les structures remplissent l'espace, il est lié à la dimension fractale [Stutzki *et al.*, 1998]. En passant à la li-

[9]Voir le chapitre **VII**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

mite, les nuages moléculaires, tels qu'on les observe en projection, ne sont plus fractals aux petites échelles. Par extrapolation des comportements observés sur la figure **II**.4, on serait tenté de dire que l'échelle où se produit cette transition est inférieure à 0,01 pc, soit au moins un ordre de grandeur plus petite que la taille caractéristique des cœurs denses. Cette évolution de la dimension fractale avec l'échelle suggère donc bien que les nuages moléculaires forment un ensemble multifractal[10].
Plus généralement, la comparaison avec les indices spectraux obtenus pour le HI en émission et en absorption semble indiquer que nuages moléculaires et composante CNM forment eux-mêmes un sous-ensemble multifractal d'un écoulement turbulent du HI à grande échelle. En fait, la structuration du gaz froid, qu'il soit atomique ou moléculaire, semble tracer les régions de dissipation de la turbulence du milieu diffus[11], ce qui interdit fortement de considérer les nuages moléculaires comme des entités isolées.

II.4 Support non-thermique des nuages moléculaires

II.4.a Champ de vitesse turbulent

On a vu que les dispersions de vitesse observées en direction des nuages moléculaires étaient bien supérieures aux dispersions de vitesse thermiques, et l'une des explications possibles de ce surplus d'énergie interne prend la forme d'un champ de vitesse turbulent, dont on a déjà évoqué l'existence à plusieurs reprises. En tenant compte de la viscosité moléculaire, on observe en effet des nombres de Reynolds[12] très grands, de l'ordre de 10^8 à 10^{12}, ce qui correspond largement au régime turbulent des écoulements fluides. D'autre part, contrairement à l'agitation thermique, les mouvements turbulents ont un spectre de puissance non plat, comme on en trouve observationnellement, et ils permettent la formation de structures cohérentes.
Dans la théorie classique de Jeans [Jeans, 1902], on démontre que les grandes échelles d'une structure sont instables vis-à-vis de la gravité, la taille limite étant donnée par la longueur de Jeans,

$L_J = c_s\sqrt{\dfrac{\pi}{G\rho_0}}$ où c_s est la vitesse du son et ρ_0 la densité initiale, supposée uniforme.

L'introduction de mouvements turbulents a la particularité, du fait du spectre de puissance non plat, de pouvoir inverser le critère de Jeans, de sorte que les plus grandes échelles soient stabilisées. En effet, la vitesse du son doit alors être augmentée d'un terme turbulent dépendant du nombre d'onde k, ce qui réduit *de facto* la plage d'échelles instables. En particulier, lorsque la turbulence est supersonique et que le spectre de puissance est suffisamment raide, les grandes échelles deviennent stables. Remarquons que ces conclusions dépendent notablement de l'équation d'état du gaz considéré [Chièze, 1987].
Par ailleurs, un champ de vitesse turbulent dans un fluide aboutit à une structuration plus importante du milieu que ne le permettrait un simple champ de vitesse aléatoire[13]. En particulier, les régions de forte vorticité sont particulièrement marquées et cohérentes lorsque le champ de vitesse est turbulent. On pense que ces structures sont associées au phénomène d'intermittence [Porter *et al.*, 1994] de la dissipation turbulente, sur laquelle on reviendra très brièvement au chapitre suivant. D'autre part, la dissipation de la turbulence aux petites échelles permet de supprimer progressivement le support non-thermique des nuages moléculaires et ainsi de déclencher le processus de formation stellaire.

II.4.b La diffusion ambipolaire

Le champ magnétique du milieu interstellaire, en particulier dans la phase moléculaire, est couplé au gaz via les particules ionisées[14]. En effet, celles-ci sont bien entendu liées aux lignes de champ, mais aussi au reste du gaz du fait des collisions entre particules. Par conséquent, le champ magnétique fournit aux nuages moléculaires un certain support vis-à-vis de leur autogravité. Cependant, si le couplage devient trop lâche, c'est-à-dire si le taux de collisions devient trop faible, les neutres peuvent diffuser au travers des lignes de champ, selon un processus appelé diffusion ambipolaire. Ce couplage a néanmoins pour effet de ralentir la

[10] On reviendra sur la structure à petite échelle à la section **II.5**.
[11] Ce qui concorde avec le fait que le support de la dissipation turbulente, d'après [Meneveau & Sreenivasan, 1991], est précisément multifractal.
[12] Voir le chapitre **III**.
[13] On caractérisera cette propriété d'une manière assez novatrice au chapitre **XVII**.
[14] Notammment les grains de poussière chargés, mais aussi les ions.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

contraction des nuages moléculaires, ce qu'on peut voir comme une stabilisation de ces structures au même titre que les effets du champ de vitesse turbulent décrits précédemment. En ce qui concerne le couplage entre le champ magnétique et le gaz moléculaire, on pourra se reporter utilement à [McKee *et al.*, 1993].

II.4.c Outils statistiques d'analyse

La complexité des structures observées, tant en densité qu'en vitesse, requiert l'utilisation d'outils d'analyse permettant par exemple de remonter aux propriétés de l'écoulement turbulent qu'on soupçonne au sein des nuages moléculaires. On a déjà évoqué plus haut l'utilisation du spectre de puissance et on a mentionné la dimension fractale. On les reverra de manière plus approfondie aux chapitres **V** et **VI**, respectivement. D'autres outils sont régulièrement utilisés pour caractériser les structures observées et tenter d'en tirer des informations physiquement pertinentes. On peut grossièrement les classer en deux types, suivant les observables sur lesquelles ils opèrent.
Les premiers sont essentiellement appliqués aux cartes bidimensionnelles, tirées des données spectrales. On pense ici en particulier aux fonctions d'autocorrélation [Dickman & Kleiner, 1985], aux fonctions de structure et à la Δ-variance [Stutzki *et al.*, 1998, Bensch *et al.*, 2001]. On reparlera fréquemment de ces outils dans la suite, notamment dans la troisième partie, puisqu'il s'agira précisément de caractériser des cartes d'observables bidimensionnelles.
D'autre part, étant donné que les observations fournissent des informations réparties sur deux composantes spatiales et une composante de vitesse, il existe des méthodes permettant d'utiliser cette dernière dimension pleinement. Parmi elles, on note l'analyse des canaux en vitesse (VCA) de [Lazarian & Pogosyan, 2000], fondée sur l'étude analytique des propriétés des cartes par canaux en fonction de leur largeur en vitesse. Elle est probablement difficile à utiliser en pratique sur des observations réelles, comme on le verra au chapitre **XIII**. L'analyse en composantes principales (PCA), qui décompose les données tridimensionnelles sur une base orthogonale afin d'en déduire les propriétés du champ de vitesse à chaque échelle a été calibrée numériquement par [Brunt *et al.*, 2003]. Enfin, la fonction de corrélation spectrale [Rosolowsky *et al.*, 1999] se fonde sur une mesure de la similarité entre les spectres en des points voisins.
Il existe bien d'autres méthodes d'analyse statistique de la structure des nuages moléculaires, mais il serait trop ambitieux de vouloir toutes les décrire ici.

II.5 Quelques idées sur la structure à petite échelle des nuages moléculaires

II.5.a Solutions HDLT et LDHT

On a longtemps pensé que les nuages moléculaires peu brillants dans les raies de CO étaient constitués de matière à faible densité, répartie de façon homogène. En fait, comme on l'a déjà évoqué au sujet de la figure **II**.4, on a pu observer qu'ils sont structurés jusqu'à des échelles inférieures à 0,01 pc, soit 2000 UA. À partir de données de raies CO à haut J obtenues pour des nuages moléculaires de haute latitude galactique, on a montré [Ingalls *et al.*, 2000] que ces structures à petite échelle sont probablement formées de gaz à haute densité ($n_{\mathrm{H_2}} \simeq 3.10^4$ cm^{-3}) et basse température ($T \simeq 8$ K). On parle de modèle HDLT pour *high density low temperature*. Cependant, il semble [Falgarone *et al.*, 2001] qu'il soit possible d'obtenir des solutions plus variées, allant jusqu'à des modèles LDHT (*low density high temperature*), pour lesquels $n_{\mathrm{H_2}} \simeq 180$ cm^{-3} et $T \simeq 250$ K, en restreignant l'étude aux ailes des raies, ceci pour s'affranchir des problèmes d'épaisseur optique. Cette indétermination est probablement due au fait que les longueurs de corrélation des champs de densité et de vitesse dans ces structures ont probablement des effets non négligeables sur les raies de CO [Hegmann & Kegel, 2000]. En effet, les distributions de densité et de vitesse, lorsqu'elles présentent des longueurs de corrélation finies, influent nécessairement sur le transfert radiatif des photons traçant le gaz moléculaire[15]. On s'intéressera plus particulièrement à ce problème dans la dernière partie. Pour l'instant, on se contente de signaler que les propriétés dynamiques des nuages moléculaires doivent être prises en compte, notamment aux échelles de l'ordre du libre parcours moyen des photons, si l'on veut déduire correctement leurs propriétés physiques à partir des raies de CO. En

[15] Il suffit pour s'en convaincre d'imaginer que la vitesse reprenne la même valeur à intervalles réguliers - égaux à la longueur de corrélation. Il est alors tout à fait possible qu'un photon émis à l'une de ces positions soit réabsorbé à une autre. Les raies ainsi que les informations physiques qu'on peut en tirer sont donc influencées par ces considérations.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

particulier, le gaz responsable de l'émission dans les ailes et au centre des raies peut très bien être soumis à des conditions physiques de température et de densité[16] différentes.

II.5.b La structure à l'échelle du milliparsec vue en $^{12}\mathrm{CO}(1 \rightarrow 0)$

Des observations faites respectivement par Ingalls avec OVRO (Owens Valley Radio Interferometer) et par Pety & Falgarone avec l'interféromètre du plateau de Bure, ont tout récemment permis de détecter des structures encore plus petites, à l'échelle de quelques milliparsecs, dans des cartes en $^{12}\mathrm{CO}(1 \rightarrow 0)$. Dans les deux cas, l'ensemble de l'émission vue par l'interféromètre correspond aux vitesses se situant dans les ailes des raies des observations "single dish", ce qu'on interprète comme étant une signature du fait que les structures émettant dans les ailes de la distribution des vitesses ont nécessairement un facteur de remplissage du plan du ciel bien inférieur au gaz émettant dans le centre de la raie. Dans les cartes du plateau de Bure, on voit de nombreuses structures allongées et assez droites, dont la taille transverse est de l'ordre de 1000 UA, ce qui montre d'ailleurs qu'il s'agit de structures résolues spatialement, puisque le lobe synthétisé a une taille d'environ 500 UA. Deux de ces structures, quasiment parallèles l'une à l'autre, sont séparées spatialement en projection par une distance d'environ 1500 UA, et également séparées en vitesse, avec $\Delta v \simeq 3,5$ km s^{-1}. On peut en déduire une estimation du cisaillement dans ces structures à très petite échelle, qu'on estime à environ 500 km s^{-1} pc^{-1}, ce qui représente une valeur colossale, supérieure à celle observée sur une échelle de 0,05 pc pour des nuages à haute latitude [Sakamoto, 2002], et largement plus importante que la valeur moyenne de ~ 1 km s^{-1} pc^{-1} observée dans les nuages moléculaires. Remarquons que des gradients de vitesse très important ont également été observés à petite échelle dans le gaz atomique neutre[17].

II.5.c Origine cinématique des structures à petite échelle

Il est tentant de voir dans ces cisaillements importants à petite échelle la signature de la dissipation intermittente de la turbulence (voir le chapitre **III**) [Falgarone & Phillips, 1990], qu'on les identifie à des chocs ou à des tourbillons. En effet, d'après [Lis *et al.*, 1996], dans le contexte des écoulements turbulents, les extrema des gradients de vitesse[18] observés sont des traceurs des grandes fluctuations non-gaussiennes de la vorticité, que cette dernière soit engendrée par les chocs ou les tourbillons. En étudiant les zones de plus forte divergence négative (les chocs) et de plus grande vorticité (les tourbillons) dans des simulations de turbulence compressible non magnétique [Porter *et al.*, 1994], Pety et Falgarone [Pety & Falgarone, 2000] ont montré que chacun de ces sous-ensembles fournit effectivement des signatures semblables, à savoir des ailes fortement non-gaussiennes dans la distribution des incréments de centroïde à petite échelle. Dans un cas comme dans l'autre, on obtient également une morphologie très filamenteuse, ce qu'on rapproche des observations évoquées plus haut. On a donc affaire à des structures à très petite échelle dont l'origine est sans doute purement cinématique, car elles ne coïncident pas avec les pics de densité de colonne. Leur morphologie est essentiellement allongée et sans courbure, leurs épaisseurs transverses variant typiquement entre 0,01 pc et 0,03 pc, sachant que la limite inférieure est sans doute plus faible, car on atteint là la limite de résolution.

□

[16] Voire de pression, comme le suggèrent les observations de [Jenkins & Tripp, 2001].
[17] Observations de Carl Heiles non encore publiées.
[18] Techniquement, on mesure les incréments des centroïde de vitesse sur le plan du ciel [Pety & Falgarone, 2003]. On reparlera abondamment des centroïdes dans la troisième partie.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE III

Mécanique des fluides et turbulence

III.1 Du laminaire au turbulent

Considérons un fluide s'écoulant autour d'un obstacle cylindrique à vitesse constante, ce qu'on peut obtenir en fixant le débit du fluide. On s'arrange pour visualiser les trajectoires des particules fluides, par exemple en introduisant ponctuellement un colorant. À faible vitesse, on voit que les trajectoires ainsi matérialisées sont régulières, bien définies, et surtout stationnaires, ce qui signifie notamment que si l'on venait à placer une sonde de vitesse en n'importe quel point de l'écoulement, la valeur qu'elle indiquerait ne varierait pas au cours du temps. On dit alors que l'écoulement est laminaire. Notons qu'un tel écoulement est parfaitement prévisible, en ce sens que deux particules fluides issues d'un même point suivent la même trajectoire.

Augmentons progressivement le débit, de sorte que la vitesse de l'écoulement augmente, la section étant fixée. On voit alors apparaître, en aval de l'obstacle, des vortex autour desquels circulent les particules fluides. L'écoulement n'est plus aussi simple qu'à faible vitesse, mais il est toujours stationnaire. En augmentant encore le débit, on voit que les vortex se détachent de l'obstacle, aussitôt remplacés par d'autres, lesquels se détachent à leur tour et ainsi de suite. Il se forme alors ce qu'on appelle une double allée de Bénard et von Karmann, qui est entraînée par l'écoulement. Ce dernier n'est alors plus stationnaire, mais on peut encore le décrire par un modèle périodique.

Si l'on augmente encore le débit, les trajectoires des particules fluides en aval de l'obstacle se brouillent, comme on peut le voir sur la figure **III**.1. Avec une sonde de vitesse, on pourrait montrer que la vitesse varie de manière chaotique à la fois spatialement et temporellement, cela sans que les conditions extérieures imposées varient. On ne peut plus du tout prédire les détails de l'écoulement, du fait d'une succession "infinie" d'instabilités qui annihilent notre capacité prédictive. L'écoulement est devenu turbulent, et la seule approche possible pour le caractériser est alors de nature statistique. Le but des théories de la turbulence est de parvenir à cette description statistique à partir des seules équations du mouvement[1].

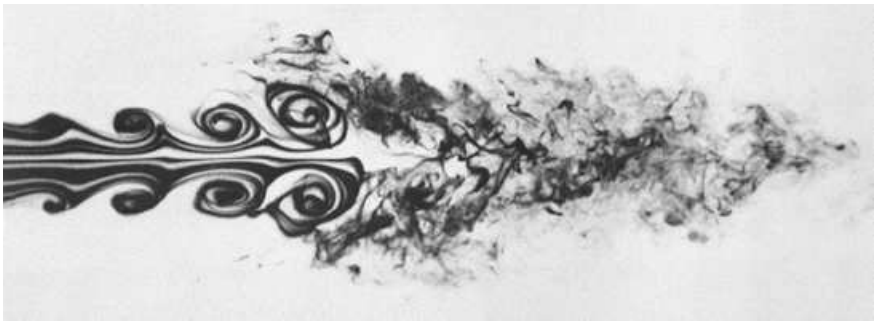

FIG. **III**.1 – *Illustration de la transition laminaire-turbulent. Un jet d'air issu d'un cylindre d'ouverture circulaire s'écoule de la gauche vers la droite avec un nombre de Reynolds de l'ordre de 10000 (voir le* **III.2.c***) et est rendu visible par l'injection de fumée. On voit la fin, à l'extrême gauche, du régime laminaire, puis le développement d'instabilités, de tourbillons formant une double allée de Bénard et von Karmann, puis l'installation abrupte du régime turbulent, à droite. Image issue de [van Dyke, 1982].*

[1]On remarque là une analogie certaine avec la démarche de la mécanique statistique et de la thermodynamique.

III.2 Rappels élémentaires de mécanique des fluides

III.2.a Approches lagrangienne et eulérienne

La mécanique des fluides, ou plus généralement la mécanique des milieux continus, se fonde sur une description mésoscopique des phénomènes. On considèrera ainsi des particules fluides de taille très inférieure à la taille caractéristique des écoulements, mais très supérieure à l'échelle atomique. Cette description est justifiée par le fait que les forces de cohésion au sein d'un fluide ont une portée finie, dont la valeur est néanmoins plus grande dans un liquide que dans un gaz. Si l'on veut schématiser, la taille caractéristique des particules fluides devra être de l'ordre de cette portée des forces de cohésion. À partir de là, la dérivation des équations de la mécanique des fluides se fait en suivant les principes de la mécanique des points matériels. On doit cependant remarquer que, contrairement à la mécanique des systèmes de points matériels isolés, la corrélation entre les mouvements des diverses particules de fluide, du fait de ces forces à grande distance, implique que l'étude d'un écoulement peut se faire suivant deux approches sensiblement différentes. L'une consiste à se placer en un point fixe et à observer la vitesse des éléments de fluide se succédant à cette position au cours du temps. Cette approche constitue le point de vue eulérien, et elle correspond aux conditions expérimentales des mesures par sonde de vitesse. Alternativement, on peut s'intéresser au mouvement d'une particule fluide particulière, ce qui constitue l'approche lagrangienne, mise à profit lorsqu'on visualise les trajectoires grâce à un colorant. À ces deux approches correspondent deux dérivées du champ de vitesse $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ par rapport au temps.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \quad \text{pour l'approche eulérienne et} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} \quad \text{pour l'approche lagrangienne,}$$

où le vecteur "nabla" $\boldsymbol{\nabla}$ a pour composantes les opérateurs de dérivation partielle par rapport aux trois coordonnées d'espace. Le terme $(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ correspond à la variation de la vitesse du fait de l'advection dans l'écoulement. La dérivée de la vitesse apparaissant dans l'équation du mouvement d'une particule fluide est la dérivée totale correspondant à l'approche lagrangienne. Tous les champs emportés par l'écoulement peuvent être traités de l'une ou l'autre manière, notamment la densité ρ,

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\rho = -(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v})\rho \quad \text{du fait de l'équation de continuité} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.(\rho\boldsymbol{v}) = 0.$$

L'équation de continuité traduit la conservation de la masse de fluide. La quantité $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v}$ détermine alors le taux de compression ou d'expansion d'une particule fluide.

III.2.b Forces exercées sur une particule fluide

L'écriture du second membre de la relation fondamentale de la dynamique nécessite de connaître les forces exercées sur les éléments du fluide. Dans la limite du continu, on montre que ces derniers sont soumis à des forces de pression normales à leur surface et à des forces visqueuses tangentielles. Plus précisément, en considérant une surface $\mathrm{d}S$ orientée par un vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$ qui lui est normal, la force exercée par le fluide sur cet élément de surface s'écrit $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$, où $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur d'ordre deux symétrique, appelé tenseur des contraintes. On en déduit la force sur une particule fluide,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \iint \mathrm{d}S\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{d}F_i = \sum_j \iint \mathrm{d}S\sigma_{ij}n_j = \sum_j \iint \mathrm{d}S\alpha_j n_j = \iiint \mathrm{d}\tau \mathrm{div}\boldsymbol{\alpha} = \iiint \mathrm{d}\tau \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

où $\mathrm{d}F_i$ désigne la composante i de la force cherchée. La dernière égalité fait apparaître la densité volumique de force à l'intérieur du fluide. Le tenseur des contraintes peut se décomposer en deux parties, de sorte que $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$, où p désigne la pression scalaire, δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes visqueuses. Sa forme particulière dépend du fluide et des conditions de l'écoulement mais un cas simple est celui des fluides newtoniens[2] incompressibles, pour lesquels le tenseur des contraintes visqueuses est proportionnel au tenseur du taux de cisaillement $\boldsymbol{e}$,

$$\tau_{ij} = \eta e_{ij} = \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

[2]Un fluide est dit newtonien si la relation entre le tenseur des contraintes et celui du taux de cisaillement est linéaire.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

la constante de proportionnalité η étant la viscosité dynamique. La densité volumique de force s'écrit alors vectoriellement, et permet d'écrire l'équation de Navier-Stokes régissant l'évolution de $\boldsymbol{v}$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \mu\Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \tag{1}$$

où $\boldsymbol{f}$ représente la densité massique de l'ensemble des autres forces exercées sur les particules fluides[3]. Le symbole Δ représente l'opérateur laplacien, et μ est appelée viscosité cinématique. Lorsque le terme $\mu\Delta\boldsymbol{v}$ est négligeable devant les autres, l'équation de Navier-Stokes devient l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{f}, \tag{2}$$

qu'on utilisera plus bas.

III.2.c Le nombre de Reynolds

Reprenons l'exemple introductif de l'obstacle cylindrique placé dans un écoulement. On note L la taille caractéristique de ce cylindre, à savoir essentiellement son diamètre, et U la vitesse de l'écoulement loin en amont de l'obstacle. On suppose en outre qu'il n'existe pas d'autre force que celles modélisées par le tenseur des contraintes, c'est-à-dire qu'on suppose $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. L'équation de Navier-Stokes (1) montre qu'alors la variation de la vitesse est déterminée[4] par la compétition entre les effets du terme advectif $(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ et ceux du terme diffusif[5] $\mu\Delta\boldsymbol{v}$. Chacun de ces deux termes peut être écrit en ordre de grandeur en utilisant les valeurs caractéristiques U et L, de sorte qu'on peut les comparer en formant le nombre sans dimension

$$\mathrm{Re} = \frac{U^2}{L} \times \frac{L^2}{\mu U} = \frac{UL}{\mu}, \quad \text{dit nombre de Reynolds.}$$

Celui-ci exprime le rapport entre le temps caractéristique de diffusion et le temps caractéristique d'advection, et quantifie la compétition entre les effets de l'une, tendant à homogénéiser l'écoulement, et de l'autre, tendant à accentuer les hétérogénéités[6]. Qualitativement, on comprend que si le nombre de Reynolds est très inférieur à 1, par exemple parce que la vitesse U est faible, les effets de la diffusion sont beaucoup plus rapides à se mettre en place que ceux de l'advection, et il en résulte que ce régime correspond à celui des écoulements laminaires. En revanche, si le nombre de Reynolds devient très grand devant 1, les effets non linéaires de l'advection deviennent prépondérants, et on passe dans le régime turbulent.
En fait, on peut énoncer le principe de similarité, selon lequel, pour un fluide incompressible, le nombre de Reynolds est le seul paramètre de contrôle de l'écoulement, à géométrie fixée, de sorte que des considérations simples de dimensionnalité peuvent fournir des résultats utiles.

III.2.d Instabilités et transition vers la turbulence

Pour un écoulement donné, les solutions de l'équation de Navier-Stokes (ou de l'équation d'Euler, qui est sa limite à viscosité nulle) sont très souvent instables. Pour l'équation de Navier-Stokes, c'est d'autant plus vrai que le nombre de Reynolds est grand. Toute perturbation de l'écoulement, inévitable en pratique, envoie le système vers un état complètement différent de celui décrit par la solution. Comme on l'a déjà dit, le moteur principal de ces instabilités est le terme d'advection $(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$, mais il ne faut pas oublier le rôle éventuellement joué par les forces extérieures[7]. Au delà d'un certain seuil caractéristique, l'écoulement forme une structure dont la périodicité est fixée par les ordres de grandeur des forces, et cette structure primaire peut elle-même être soumise à de nouvelles instabilités, amenant une transition brusque ou graduelle vers le chaos.

[3] On pense par exemple à la gravité, à la force de Lorentz, etc...
[4] On néglige la variation linéaire due aux hétérogénéités de pression.
[5] On parle de terme diffusif par analogie avec l'équation de diffusion particulaire et l'équation de la chaleur, notamment. La quantité transportée ici est la quantité de mouvement et son coefficient de diffusion associé est la viscosité.
[6] Ceci du fait de son caractère non-linéaire.
[7] Par exemple celui de la gravité dans l'instabilité de l'interface entre deux fluides de densités différentes, le fluide le plus dense étant au-dessus du fuide le moins dense. L'instabilité survenant alors est dite de Rayleigh-Taylor.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

À ce titre, l'exemple de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz est particulièrement intéressant. On considère, sur la figure **III**.2, deux fluides séparés par une interface plane à l'instant $t = 0$. On les met en mouvement avec des vitesses parallèlles à cette interface, égales en module mais de sens opposés. Lorsqu'une perturbation de longueur d'onde appropriée apparaît à l'interface entre les deux fluides, elle est accentuée du fait de la relation de Bernoulli[8], mais atteint un état stable par les effets de capillarité. Par la suite, la différence de vitesse entre les deux fluides au voisinage des ventres de la perturbation déplace ces derniers dans des sens opposés, et on aboutit à la formation de tourbillons de Kelvin-Helmholtz à l'interface.

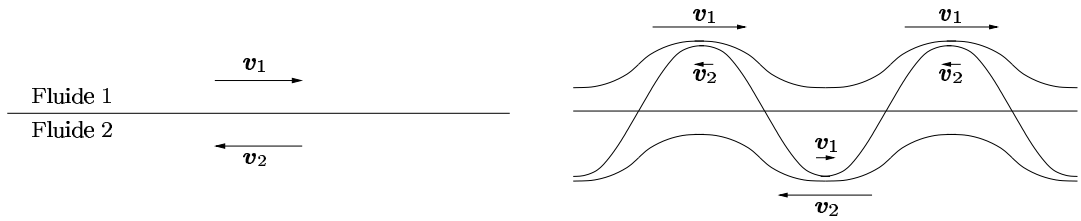

FIG. **III**.2 – *Instabilité de Kelvin-Helmholtz*

La transition vers le chaos turbulent peut se faire suivant plusieurs scénarii. D'une part la transition par intermittence, dont on reparlera, qui se caractérise par des "bouffées" chaotiques au sein d'un comportement régulier. On distingue ensuite les transitions graduelles soit par doublement de période, soit par le modèle quasipériodique de Ruelle-Takens, pour lequel la fréquence de l'instabilité secondaire est incommensurable à celle de l'instabilité primaire. Il est possible de modéliser ces bifurcations en fonction de la dimension de l'espace, en analysant les solutions d'équations différentielles simples. On peut notamment visualiser ces solutions dans l'espace des phases, ce qui permet d'exhiber la notion de cycle limite. Les systèmes chaotiques sont alors caractérisés par des cycles limites extrêmement complexes, fractals, appelés "attracteurs étranges". En particulier, il devient impossible de prédire le comportement du système, faute de connaître les conditions initiales de son évolution avec une précision infinie[9].

III.3 La théorie de Kolmogorov (1941)

III.3.a La cascade turbulente

Le désordre à la fois spatial et temporel qui caractérise la turbulence suggère que l'on ne peut pas déduire complètement une théorie de la turbulence à partir des équations du mouvement de type Navier-Stokes. En l'état actuel des connaissances, c'est effectivement le cas. Cependant, on peut, à partir d'hypothèses simples, compatibles avec l'équation de Navier-Stokes, construire une théorie phénoménologique de la turbulence incompressible. C'est l'objet de la théorie de Kolmogorov, fondée sur les idées de Richardson [Richardson, 1922]. Ce dernier a pour la première fois décrit la turbulence comme une hiérarchie de tourbillons de différentes tailles, imbriqués les uns dans les autres, et permettant le transfert d'énergie cinétique des grandes échelles où elle est injectée par des processus macroscopiques divers, fixés par les conditions de l'écoulement, vers les petites échelles où elle est dissipée par viscosité. Kolmogorov [Kolmogorov, 1941] a par la suite quantifié cette approche, en particulier en identifiant la plus petite échelle turbulente, laquelle porte désormais son nom.
La description qui suit adopte la démarche de Pope [Pope, 2000]. Dans la vision de turbulence pleinement développée de Kolmogorov, les tourbillons sont caractérisés par une certaine taille l, une vitesse typique $v(l)$ et un temps de retournement $\tau(l) = l/v(l)$. La notion de tourbillon doit être prise au sens large, c'est-à-dire comme une région de taille l sur laquelle les mouvements du fluide sont plus ou moins cohérents. Les tourbillons les plus grands sont de taille caractéristique sensiblement identique à l'échelle L de l'écoulement global, et de vitesse caractéristique $\sim U$. Le nombre de Reynolds qui les caractérise est donc le même que celui de l'écoulement global, supposé très grand devant 1. Ils sont donc susceptibles d'être déstabilisés. Selon

[8]La relation de Bernoulli exprime la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant dans un écoulement parfait incompressible. Ici, elle permet d'affirmer que si la vitesse augmente, la pression diminue.
[9]Pour plus de précisions sur l'approche de la turbulence en termes de systèmes dynamiques, le lecteur pourra utilement se reporter à l'ouvrage de Manneville [Manneville, 1990].

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Richardson, c'est exactement ce qui se passe, les grands tourbillons donnant naissance à des tourbillons plus petits, auxquels ils transfèrent une partie de leur énergie. Ces tourbillons plus petits sont eux-mêmes instables, et on assiste donc à une cascade d'énergie turbulente des grandes échelles vers les petites, au travers d'un couplage des échelles. Le caractère local de ce couplage dans l'espace de Fourier[10] n'est pas formellement démontré mais nous n'entrerons pas ici dans ce débat. Les échelles ainsi couplées forment un domaine dit inertiel, car il n'y pas de gain net d'énergie pour les tourbillons à ces échelles, et le transfert d'énergie d'une échelle à l'autre se fait à un taux constant noté ϵ. Celui-ci est déterminé de manière dimensionnelle aux grandes échelles, en écrivant qu'il est proportionnel au rapport de l'énergie cinétique $v(L)^2 = U^2$ au temps de retournement $\tau(L) = L/U$, soit $\epsilon \sim U^3/L$.

III.3.b Les hypothèses de Kolmogorov

Comment se fait la cascade d'énergie vers les petites échelles ? En particulier, comment se comportent la vitesse $v(l)$ et le temps de retournement $\tau(l)$ lorsque l'échelle l diminue ? Le fait qu'on suppose implicitement que le nombre de Reynolds diminue aux petites échelles[11] ne permet pas de répondre directement à ces questions. C'est en posant trois hypothèses que Kolmogorov a établi une théorie résolvant ces problèmes, et montrant que τ et v décroissent tous deux lorsque l'échelle l diminue. Les hypothèses de Kolmogorov sont les suivantes :

▷ Aux grands nombres de Reynolds, les mouvements turbulents à petite échelle $l \ll l_0$ sont statistiquement isotropes,
▷ Dans tout écoulement turbulent à suffisamment grand nombre de Reynolds, les statistiques des mouvements à petite échelle $l \ll l_0$ ont une forme universelle uniquement déterminée par ϵ et ν,
▷ À la limite d'un nombre de Reynolds infini, les statistiques de ces mêmes mouvements à petite échelle l dans le domaine inertiel ($l_d \ll l \ll l_0$) ont une forme universelle uniquement déterminée par la valeur de ϵ.

La première hypothèse, dite d'isotropie locale, sous-entend que les biais anisotropes aux grandes échelles, dûs à la géométrie particulière des conditions aux limites, deviennent négligeables dès qu'on se place à une échelle l petite devant une taille caractéristique l_0 qui est de l'ordre de L. On peut imaginer que cette perte d'information sur la géométrie de l'écoulement aux grandes échelles est en fait générale, et que les mouvements turbulents aux échelles plus petites que l_0 sont en un certain sens universels, c'est-à-dire indépendants des conditions particulières à grande échelle.
Les processus qui dominent les propriétés de l'écoulement aux échelles inertielles sont alors le transfert d'énergie à un taux ϵ et la dissipation visqueuse, fixée par ν, ce qui amène la seconde hypothèse. Étant donnés ϵ et ν, on peut construire d'uniques grandeurs caractéristiques de longueur l_d, de vitesse v_d et de temps τ_d, qui sont les grandeurs de Kolmogorov. Le nombre de Reynolds construit avec ces échelles est égal à 1, ce qui indique que l'échelle l_d est celle pour laquelle la dissipation par viscosité commence à dominer l'advection.
Par ailleurs, ces grandeurs caractéristiques peuvent être rapportées aux valeurs typiques des grandes échelles, les rapports obtenus étant *in fine* exprimés par des puissances du nombre de Reynolds,

$$\frac{l_d}{L} \sim \mathrm{Re}^{-3/4} \quad \frac{v_d}{U} \sim \mathrm{Re}^{-1/4} \quad \text{et} \quad \frac{\tau_d}{\tau(L)} \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$$

À la limite d'un nombre de Reynolds infini, les rapports l_d/L et l_d/l_0 deviennent nuls, et il existe donc une plage d'échelles l à la fois très grandes devant l_d et très petites devant l_0. Les tourbillons à cette échelle étant très grands devant ceux de l'échelle dissipative, on peut supposer que leur comportement ne dépend pas de la viscosité, ce qui constitue la troisième et dernière hypothèse.

III.3.c Les lois d'échelle

À partir de ces hypothèses, on peut déduire des lois d'échelle décrivant le comportement des tourbillons dans le domaine inertiel. Il est en effet possible de construire des échelles de vitesse et de temps à partir des

[10] Ce qui signifie qu'une échelle donnée interagit essentiellement avec les échelles qui lui sont sensiblement égales.
[11] Ceci parce que dans cette approche, la dissipation aux petites échelles est due à la viscosité, ce qui implique un nombre de Reynolds petit.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

seules données de ϵ et de l, ainsi $v(l) = (\epsilon l)^{1/3}$ et $\tau(l) = (l^2/\epsilon)^{1/3}$. Ces relations permettent de déduire que le taux de transfert d'énergie à une échelle l, noté $\epsilon(l)$ et calculé comme le rapport de l'énergie cinétique $\mathcal{E}(l) \sim v(l)^2$ au temps de retournement $\tau(l)$, est en fait égal à ϵ. Il n'y a par conséquent ni accumulation ni dissipation d'énergie aux échelles inertielles, ce qui est cohérent avec l'image qu'on s'est faite plus haut de la cascade turbulente.
La distribution de l'énergie cinétique des tourbillons en fonction de l'échelle est donnée, on vient de le dire, par la loi d'échelle $\mathcal{E}(l) \sim (\epsilon l)^{2/3}$. Comme on le verra plus bas, il est commun de se placer dans l'espace de Fourier, de sorte que les échelles spatiales sont repérées par un nombre d'onde k inversement proportionnel à l. En termes des nombres d'onde, la densité d'énergie cinétique dépend de l'échelle suivant une loi en $k^{-5/3}$. En effet, partant de l'égalité définissant la densité $\mathcal{E}(k)$,

$$\mathcal{E}(k)\mathrm{d}k = \mathcal{E}(l)\mathrm{d}l \quad \text{et en notant que} \quad \mathrm{d}k \propto \frac{\mathrm{d}l}{l^2} \quad \text{on a} \quad \mathcal{E}(k) \sim \mathcal{E}(l)l^2 \sim \epsilon^{2/3}l^{5/3} \sim \epsilon^{2/3}k^{-5/3}.$$

Cet exposant du spectre d'énergie $\mathcal{E}(k)$ implique la convergence des intégrales exprimant les quantités d'énergie contenues respectivement aux grandes et aux petites échelles du domaine inertiel. On peut notamment montrer que l'essentiel de l'énergie se trouve aux grandes échelles [Pope, 2000].

III.3.d Reformulation des hypothèses de Kolmogorov

Le point de vue moderne est un peu différent de celui de Kolmogorov. On le formule également au travers de trois hypothèses, qui viennent remplacer celles précédemment énoncées.

▷ Dans le régime turbulent à la limite des nombres de Reynolds infinis, et loin des sources de la turbulence (typiquement les bords de l'écoulement), les mouvements aux échelles inertielles et dissipatives présentent statistiquement les mêmes symétries que l'équation de Navier-Stokes,
▷ L'écoulement est autosimilaire dans le domaine inertiel,
▷ Le taux de dissipation de l'énergie reste en moyenne fini lorsque la viscosité tend vers zéro.

Ces hypothèses appellent quelques commentaires. Tout d'abord, les symétries des équations du mouvement (invariances par translation, par changement de l'origine des temps, par changement de référentiel Galiléen, par parité et par rotation) y jouent un rôle central. Ces symétries sont souvent brisées par les instabilités apparaissant au cours de la transition vers le chaos [Manneville, 1990], mais elles sont restaurées de manière statistique, dans le régime turbulent, aux échelles suffisamment petites pour ne pas être influencées par la géométrie globale du système. Cette hypothèse se comprend par exemple en observant des représentations d'écoulements turbulents. Sans information supplémentaire, il est impossible de dire quelles sont leurs orientations, tant l'aspect est homogène et isotrope, en un certain sens statistique. Pour illustrer cette idée, on pourra considérer le régime turbulent visible à droite de la figure **III**.1. En isolant une région suffisamment petite de cette image[12], on serait bien en peine de donner la direction de l'écoulement. De même, il est souvent impossible de déterminer, sans autre information, l'échelle de l'image étudiée. Dans le domaine inertiel, les propriétés des écoulements turbulents localement isotropes sont déterminées uniquement par la viscosité ν et le taux de dissipation ϵ. La dernière hypothèse est essentiellement d'ordre expérimental, et elle permet de conserver un taux de dissipation non négligeable, même pour les nombres de Reynolds infinis, correspondant à une viscosité nulle.

III.4 Description statistique de la turbulence

III.4.a Présentation rapide de la méthode

Les écoulements turbulents à grand nombre de Reynolds, on l'a dit, ne peuvent être correctement décrits que de manière statistique. Il faut donc considérer que la vitesse tridimensionnelle $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ ainsi que les autres champs, par exemple ceux de densité $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, de température $T(\boldsymbol{x}, t)$ ou de pression $p(\boldsymbol{x}, t)$, sont des champs aléatoires, qu'il convient de décrire à l'aide des outils statistiques étudiés au chapitre **V**. En prenant de l'avance sur ce qui sera dit plus tard, on définit ainsi des densités de probabilité notées W_p telles que la

[12] C'est-à-dire plus petite que la largeur de l'écoulement.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

quantité $W_p(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_p;\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p;t_1,\ldots,t_p)\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1\ldots\mathrm{d}\boldsymbol{v}_p$ représente la probabilité que la vitesse prenne la valeur $\boldsymbol{v}_i$ à $\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i$ prés à la position $\boldsymbol{x}_i$ et à l'instant t_i.
Toutes les propriétés statistiques du champ de vitesse d'un écoulement turbulent sont contenues dans la connaissance des diverses fonctions W_p. De même, on définit des densités de probabilité associées aux autres variables de l'écoulement, ainsi qu'aux combinaisons de plusieurs variables. On va se concentrer sur le seul champ de vitesse dans la suite de ce chapitre, mais on considérera ultérieurement des quantités dépendant également de la densité, notamment aux chapitres **X**, **XI** et **XX**.
Les différentes hypothèses sur l'écoulement turbulent, faites de manière statistique, portent sur les propriétés de ces densités de probabilité. L'hypothèse de stationnarité, par exemple, implique que toutes sont inchangées par translation de l'origine des temps. Quant aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie statistiques exprimées dans le cadre de la théorie de Kolmogorov, elles reviennent à écrire que les fonctions W_p sont invariantes respectivement par changement de l'origine des coordonnées et par rotation du système d'axes.
Cependant, dans la pratique, les densités de probabilité ne sont pas facilement accessibles, et il faut recourir au calcul de grandeurs moyennes sur l'écoulement, dont on montre[13] qu'elles peuvent s'exprimer comme des intégrales sur des expressions contenant les fonctions W_p. On a de cette manière indirectement accès aux propriétés des densités de probabilité.
Parmi les grandeurs moyennes couramment utilisées, on notera en particulier les fonctions de corrélation à n points, définies ici en rendant implicite la dépendance en temps[14], par

$$A_{v_{i_1},\ldots,v_{i_p}}(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p)=\mathsf{E}\{v_{i_1}(\boldsymbol{x}_1)\ldots v_{i_p}(\boldsymbol{x}_p)\},$$

et donnant la moyenne[15] des produits de n composantes de la vitesse prises en n points. Si l'on se place dans le cas où toutes les composantes considérées sont les mêmes, on parlera de fonctions d'autocorrélation à n points. D'autre part, en supposant l'écoulement homogène, ces fonctions ne peuvent dépendre que des $n-1$ séparations $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_1$ pour $2\leqslant i\leqslant n$. En particulier, on utilisera la fonction de corrélation à deux points $A_{v_i,v_j}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\mathsf{E}\{v_i(\boldsymbol{x}_1)v_j(\boldsymbol{x}_2)\}$, qu'on écrira le plus souvent sous la forme $A_{v_i,v_j}(\boldsymbol{r})$, où $\boldsymbol{r}$ est égal à la séparation $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$. Enfin, on considérera souvent la fonction d'autocorrélation à deux points, qu'on écrira avec un seul indice $A_{v_i}(\boldsymbol{r})=A_{v_i,v_i}(\boldsymbol{r})$, et qu'on appellera abusivement fonction d'autocorrélation, sans plus de précision.
On se sert également des fonctions de structure, définies par la relation générale

$$S_{v_{i_1},\ldots,v_{i_p}}(\boldsymbol{r})=\mathsf{E}\left\{[v_{i_1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-v_{i_1}(\boldsymbol{x})]\ldots[v_{i_p}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-v_{i_p}(\boldsymbol{x})]\right\},$$

où l'on a utilisé l'hypothèse d'homogénéité en ne faisant pas de $\boldsymbol{x}$ un argument de la fonction. Comme pour les fonctions de corrélation, on s'intéressera souvent au cas où les composantes de la vitesse sont toutes les mêmes, c'est-à-dire aux fonctions de structure d'ordre p se mettant sous la forme[16],

$$S_{v_i}^{(p)}(\boldsymbol{r})=S_{v_i,\ldots,v_i}(\boldsymbol{r})=\mathsf{E}\left\{[v_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-v_i(\boldsymbol{x})]^p\right\}.$$

D'autre part, dans ce dernier cas, il est intéressant de considérer l'orientation de la séparation $\boldsymbol{r}$ relativement à l'axe i. On définit ainsi les fonctions de structure d'ordre p longitudinale et transverse,

$$\mathcal{L}_{v_i}^{(p)}(r)=\mathsf{E}\{[v_i(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{u}_i)-v_i(\boldsymbol{x})]^p\}\qquad\text{et}\qquad\mathcal{T}_{v_i}^{(p)}(r)=\mathsf{E}\{[v_i(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{u}_j)-v_i(\boldsymbol{x})]^p\}\qquad(i\neq j).$$

Avec l'hypothèse d'isotropie, ces deux fonctions sont en fait indépendantes de la composante particulière de la vitesse qu'on considère, et on pourra omettre l'indice correspondant. La figure **III**.3 montre un schéma représentant les deux cas, longitudinal et transverse. Notons enfin que, dans le cas d'un champ de vitesse statistiquement homogène, il existe une relation linéaire simple entre la fonction de structure d'ordre deux d'une composante quelconque et la fonction d'autocorrélation de cette même composante, à savoir

$$S_{v_i}^{(2)}(\boldsymbol{r})=2\left[A_{v_i}(\boldsymbol{0})-A_{v_i}(\boldsymbol{r})\right],$$

sur laquelle on reviendra au **V.6.a** et qu'on mettra à profit au chapitre **X**.

[13] Voir le chapitre **IV**.
[14] Toutes les vitesses sont supposées prises au même instant.
[15] La notation E désigne l'espérance mathématique, formalisation de la notion de moyenne (voir le chapitre **IV**).
[16] On peut également définir les fonctions de structure de ce type en prenant la racine $p^{\text{ème}}$ de la fonction $S_{v_i}^{(p)}$, de façon à conserver la dimension d'une vitesse.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

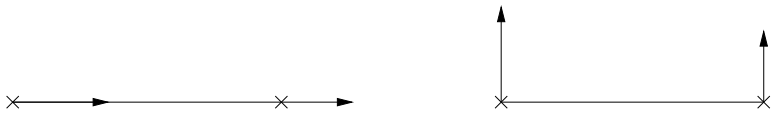

FIG. **III.3** – *Composantes de la vitesse impliquées dans le calcul des fonctions de structure longitudinale (à gauche) et transverse (à droite).*

Comme on l'a évoqué un peu plus haut, on peut effectuer une analyse du champ de vitesse en termes de composantes de Fourier[17]. Les propriétés statistiques décrites dans l'espace direct par les fonctions de corrélation doivent avoir des équivalents en Fourier, ce qui amène à considérer les spectres en vitesse de l'écoulement, définis comme les transformées de Fourier des fonctions de corrélation à deux points,

$$\mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k}) = \int A_{v_i,v_j}(\boldsymbol{r}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{où l'intégration est faite sur l'ensemble des échelles inertielles } \boldsymbol{r}.$$

Cette quantité est complexe et telle que $\mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k}) = \mathcal{P}^*_{v_j,v_i}(\boldsymbol{k}) = \mathcal{P}_{v_j,v_i}(-\boldsymbol{k})$, en raison des propriétés de symétrie des fonctions de corrélation à deux points, et du fait que celles-ci sont réelles. De plus, la matrice constituée des divers spectres en vitesse est semi-définie positive, de sorte qu'en particulier ses éléments diagonaux sont des réels positifs ou nuls. On appelle couramment ces derniers spectres de puissance des composantes de la vitesse auxquelles ils se rapportent,

$$\mathcal{P}_{v_i}(\boldsymbol{k}) = \int A_{v_i}(\boldsymbol{r}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{pour chaque composante } i.$$

Enfin, la trace $\mathcal{P}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k})$ de ce tenseur est égale à la transformée de Fourier de la quantité $\mathsf{E}\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}).\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\}$ et peut légitimement être appelée spectre de puissance de la vitesse, sans plus de précision. Remarquons cependant que, dans la suite, on n'aura accès qu'à une seule composante de la vitesse, à savoir celle parallèle à la ligne de visée, et on fera un abus de langage en parlant de spectre de puissance de la vitesse pour désigner le spectre de puissance de cette composante[18].
L'information contenue dans les spectres $\mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k})$, qui constituent un tenseur d'ordre deux dépendant d'un vecteur tridimensionnel, peut éventuellement être réduite à une fonction scalaire d'un scalaire, en éliminant toute information de direction. On définit ainsi le spectre en énergie de l'écoulement en considérant l'intégration du spectre de puissance de la vitesse sur toutes les directions possibles du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$, lorsque la norme k de ce dernier est fixée, soit

$$\mathcal{E}(k) = \int \mathcal{P}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}) \delta(|\boldsymbol{k}| - k) \mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

On a déjà évoqué cette quantité plus haut, en écrivant que, d'après Kolmogorov, son comportement dans le domaine inertiel suit une loi de la forme $\mathcal{E}(k) \propto k^{-5/3}$. En conséquence, le spectre de puissance de la vitesse suit la loi $\mathcal{P}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}) \propto |\boldsymbol{k}|^{1-n-5/3}$, où n est la dimension de l'espace.

III.4.b Quelques résultats

De manière générale, les spectres en vitesse $\mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k})$ contiennent beaucoup plus d'information que le spectre en énergie $\mathcal{E}(k)$. Cependant, dans le cas de la turbulence isotrope, on montre que la connaissance de ce dernier est suffisante. En effet, étant donnée l'isotropie, l'information de direction contenue dans les spectres en vitesse ne peut dépendre que de $\boldsymbol{k}$. Or, les seuls tenseurs d'ordre deux invariants par rotation

[17] Supposons que l'on cherche une solution harmonique à l'équation de Navier-Stokes, en notation complexe. Le terme non linéaire $(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}$ se traduit alors en termes de vecteurs d'onde par un couplage des modes, correspondant au couplage des échelles décrit par la cascade turbulente [Pope, 2000].

[18] En supposant l'isotropie, on a de toutes les manières la relation $\mathcal{P}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{k}) = 3\mathcal{P}_{v_i}(\boldsymbol{k})$, quelle que soit la composante i.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

que l'on peut former à partir du vecteur d'onde sont le tenseur unité $\mathbf{1}$ et le tenseur dont les éléments sont $k_i k_j$, d'où la forme nécessaire du tenseur des spectres en vitesse

$$\mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k}) = B(k)\delta_{ij} + C(k)k_i k_j.$$

D'autre part, la traduction en Fourier de la condition d'incompressibilité de l'écoulement, $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v} = 0$, s'obtient en remarquant que la dérivation par rapport à une coordonnée d'espace x_j revient à multiplier par ik_j en Fourier[19]. Il s'ensuit que la condition d'incompressibilité s'écrit $\boldsymbol{k}.\boldsymbol{v} = 0$, soit encore

$$\sum_i k_i \mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k}) = \sum_j k_j \mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k}) = 0, \quad \text{en multipliant par une composante de la vitesse.}$$

À partir de ces équations et de la définition du spectre en énergie, on obtient les formes de B et C,

$$\mathcal{P}_{v_i,v_j}(\boldsymbol{k}) = \frac{\mathcal{E}(k)}{4\pi k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right).$$

Des formes similaires sont obtenues dans l'espace direct, en appliquant les hypothèses de Kolmogorov aux fonctions de structure. Dans ce cas, l'hypothèse d'isotropie implique [Monin & Yaglom, 1975] que le tenseur d'ordre deux formé des fonctions $S_{v_i,v_j}(\boldsymbol{r})$ est nécessairement une combinaison linéaire des deux seuls tenseurs invariants par rotation formés à partir du vecteur $\boldsymbol{r}$, à savoir le tenseur unité et le tenseur dont les éléments sont $r_i r_j$. Utilisant les fonctions de structure d'ordre deux longitudinale et transverse, on a

$$S_{v_i,v_j}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{T}^{(2)}(r)\delta_{ij} + \left[\mathcal{L}^{(2)}(r) - \mathcal{T}^{(2)}(r)\right]\frac{r_i r_j}{r^2}.$$

En fait, dans le cadre d'une turbulence localement homogène et isotrope, on peut montrer [Pope, 2000] que S_{v_i,v_j} est entièrement déterminée par la fonction de structure d'ordre deux longitudinale. Or, d'après la deuxième hypothèse de Kolmogorov, on peut écrire une relation dimensionnelle donnant la forme de cette fonction aux grands nombres de Reynolds,

$$\mathcal{L}^{(2)}(r) = (\epsilon r)^{2/3} f(r/l_d), \quad \text{en rappelant que } l_d \text{ est l'échelle de Kolmogorov.}$$

Dans la limite des nombres de Reynolds infinis, ce qui correspond à une viscosité et à une échelle de dissipation l_d nulles, la dernière hypothèse de Kolmogorov implique que f tend vers une constante C universelle et que dans ce cas on a finalement

$$S_{v_i,v_j}(\boldsymbol{r}) = C(\epsilon r)^{2/3}\left(\frac{4}{3}\delta_{ij} - \frac{1}{3}\frac{r_i r_j}{r^2}\right).$$

La forme de la fonction de structure longitudinale écrite plus haut se généralise aux ordres entiers p quelconques. En effet, dans le cadre des hypothèses de Kolmogorov, à la limite des nombres de Reynolds infinis, et si l'on se place dans le domaine inertiel, la fonction de structure longitudinale d'ordre p ne peut dépendre que de ϵ et de r, ce qui donne, dimensionnellement

$$\mathcal{L}^{(p)}(r) = C_p(\epsilon r)^{p/3} \quad \text{où } C_p \text{ est une constante universelle.} \tag{3}$$

En particulier, on a la loi dite "des quatre-cinquièmes" de Kolmogorov, $\mathcal{L}^{(3)}(r) = -(4/5)\epsilon r$, exacte dans le cas de l'homogénéité et de l'isotropie locales à toutes les échelles, mais également très bien vérifiée expérimentalement.

III.4.c Les limites de la théorie de Kolmogorov

De nombreuses mesures expérimentales (voir par exemple [Anselmet *et al.*, 1984]) montrent que les fonctions de structure longitudinales suivent effectivement des lois de puissance en fonction de l'échelle r, mais avec des exposants ζ_p différents de ceux prédits par Kolmogorov. On constate en effet que $\zeta_p < p/3$ dès

[19] Ceci parce qu'on cherche des solutions du champ de vitesse sous la forme $\exp(i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x})$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

qu'on dépasse l'ordre $p = 4$. On observe donc une déviation du comportement attendu dans le domaine inertiel. Dans le domaine dissipatif, c'est-à-dire aux petites échelles, on s'intéresse aux dérivées longitudinales de la vitesse[20]. On observe alors expérimentalement que pour des ordres $p \geqslant 4$, les densités de probabilité de ces dérivées présentent des ailes non-gaussiennes fortement marquées. En fait, ces ailes apparaissent également dans les densités de probabilité des incréments de vitesse eux-mêmes, y compris aux échelles inertielles[21].
Ces diverses observations sont interprétées [Jimenez, 1998] comme des signatures d'un phénomène d'intermittence, ce qui signifie que les transferts d'énergie sont spatialement et temporellement hétérogènes. Ici, le mot "transfert" doit être pris dans un sens large, car il s'agit non seulement de la cascade énergétique aux échelles inertielles mais également de la dissipation. Dans la vision intermittente de la turbulence, les transferts d'énergie et la dissipation sont localisés dans l'espace et le temps, ce qui contredit l'hypothèse d'autosimilarité de Kolmogorov. Ce dernier [Kolmogorov, 1962], ainsi qu'Obukhov [Obukhov, 1962], a proposé de raffiner cette hypothèse en supposant que les incréments de vitesse dépendent d'un coefficient de dissipation local ϵ_r à une certaine échelle r, plutôt que du coefficient de dissipation global ϵ.
L'hétérogénéité de la dissipation d'énergie dans les écoulements turbulents, qu'on vient de remarquer, suggère de s'interroger sur la structure des zones dissipatives. Expérimentalement, on observe des filaments de forte vorticité, auxquels sont associés des taux de dissipation élevés par rapport à leur environnement [Cadot *et al.*, 1995]. On pense que ces structures filamenteuses cohérentes sont liées à l'intermittence de la dissipation [Porter *et al.*, 1994].
Il convient cependant de remarquer, comme le fait Pope [Pope, 2000], que seules les statistiques d'ordre élevé, prises aux petites échelles, sont véritablement influencées par les défauts de la théorie de Kolmogorov. Dans le contexte de la cascade d'énergie au sein des écoulements turbulents, il est plus important de s'intéresser aux phénomènes déterminant le taux de transfert énergétique qu'à l'intermittence, ceci parce que les déviations expérimentales par rapport à la théorie de Kolmogorov sont faibles aux grandes échelles. Il faut néanmoins prendre garde au fait que, réciproquement, les mécanismes d'injection d'énergie à ces échelles dépendent *a priori* fortement du système étudié.

III.5 La turbulence magnétohydrodynamique incompressible

III.5.a Les équations de la magnétohydrodynamique incompressible idéale

La présence de champ magnétique dans un milieu partiellement ionisé, tel que le MIS, en modifie sensiblement le comportement dynamique, du fait des forces électromagnétiques qu'il est nécessaire de considérer dans l'équation du mouvement des ions. La présence d'espèces neutres, obéissant à une équation n'incluant pas ces forces, mais néanmoins couplées aux ions par des forces de friction, complique encore le problème. Il est cependant possible, au prix de certaines approximations[22], d'obtenir les équations régissant la magnétohydrodynamique (MHD) idéale à partir des équations de base de la mécanique des fluides et des équations de Maxwell, lesquelles s'écrivent

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \qquad \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

où ρ_e est la densité de charges et $\boldsymbol{j}$ la densité de courant. Pour simplifier, on considère pour l'instant le cas d'un milieu entièrement ionisé. Dans tous les cas, on peut écrire la conservation de la charge, en prenant la divergence de la dernière équation de Maxwell[23],

$$\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} + \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} = 0.$$

Si la conductivité électrique du milieu est suffisamment grande, les éventuelles concentrations de charges locales sont effacées très rapidement, de sorte qu'on a un milieu globalement neutre, $\rho_e = 0$. De plus, si

[20] À petite échelle, l'incrément de vitesse apparaissant dans l'expression des fonctions de structure longitudinales s'écrit comme le produit de cette dérivée par la séparation r, ce qui justifie l'intérêt qu'on leur porte.
[21] Elles disparaissent néanmois aux plus grandes échelles
[22] Pas toujours justifiées...
[23] Nous utiliserons uniquement le système MKS, comme il est recommandé.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

l'on suppose que les mouvements du fluide sont non relativistes, il est possible de négliger le courant de déplacement, de sorte qu'on a $\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B} \simeq \mu_0 \boldsymbol{j}$, la densité de courant $\boldsymbol{j}$ étant proportionnelle, du fait de la neutralité globale du milieu, à la différence $\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_e$ des vitesses des ions et des électrons. Dans les conditions du milieu interstellaire et aux échelles observées, cette vitesse différentielle est largement négligeable devant les vitesses caractéristiques des écoulements.
Étant donné que les collisions entre ions et électrons se font avec un temps caractéristique τ_c plus court que toutes les autres échelles de temps de la dynamique, on peut considérer que les électrons ont à tout instant une vitesse d'équilibre par rapport aux ions donnée par la relation implicite

$$\boldsymbol{v}'_e = -\frac{e\tau_c}{m_e}\left(\boldsymbol{E}' + \boldsymbol{v}'_e \wedge \boldsymbol{B}'\right) \qquad \text{où } \boldsymbol{E}' \text{ et } \boldsymbol{B}' \text{ représentent les champs dans le référentiel des ions.}$$

On peut en déduire la densité de courant $\boldsymbol{j} = -n_e e \boldsymbol{v}'_e$ puis, en utilisant les transformations des champs dans le cas non relativiste, soit $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_i \wedge \boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{v}_i$ est la vitesse des ions dans le référentiel de l'observateur, on obtient finalement une équation d'évolution du champ magnétique

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}_i) = \varpi \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B} \qquad \text{où } \varpi = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_c \mu_0} \text{ est la résistivité électrique.}$$

Cette équation, couplée à $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{B} = 0$, décrit l'évolution du champ magnétique. Quant à l'évolution dynamique de la matière, on l'obtient en écrivant que les champs électrique et magnétique imposent des forces $\boldsymbol{F}_i$ et $\boldsymbol{F}_e$ aux ions et aux électrons, respectivement. Or, les électrons étant en équilibre, les autres actions exercées sur eux, par les ions, ont une résultante $-\boldsymbol{F}_e$. Par le principe d'action-réaction, les électrons exercent donc sur les ions une force $\boldsymbol{F}_e$, donc ces derniers sont mis en mouvement par une force totale $\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_e$ dont on peut montrer qu'elle s'écrit

$$\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\nabla}.\left(\frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}\right),$$

le premier terme représentant la tension magnétique, s'opposant à la courbure des lignes de champ, et le second la pression magnétique, s'opposant aux gradients du champ. Introduisant cette forme dans l'équation de Navier-Stokes, on obtient l'équation d'évolution de la vitesse des ions

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_i.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}_i = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\left(p + \frac{\boldsymbol{B}^2}{2\mu_0}\right) + \mu \Delta \boldsymbol{v}_i + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}.$$

Avec l'équation d'incompressibilité $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{v}_i = 0$, on obtient ainsi les quatre équations de la magnétohydrodynamique incompressible idéale.

III.5.b Quelques propriétés

Bien que nous ne traitions pas, dans la suite de ce travail, du cas de la magnétohydrodynamique, il n'en est pas moins intéressant de relever certains des résultats obtenus. Tout d'abord, les équations de la MHD possèdent trois types de mode de vibration autour de la situation d'équilibre triviale correspondant à un champ magnétique $\boldsymbol{B}_0$ homogène et à une vitesse nulle. L'un de ces modes est incompressible, constitué d'ondes d'Alfvén se propageant le long du champ $\boldsymbol{B}_0$ à une vitesse v_A proportionnelle à l'intensité du champ. La déviation en vitesse et celle en champ sont reliées linéairement, de telle sorte qu'on a équipartition entre les énergies cinétique et magnétique. Deux autres modes, l'un dit lent et l'autre rapide, sont compressibles, et ne sont donc pas abordés dans cette section.
Dans ces conditions, quelle peut être la nature d'une turbulence magnétohydrodynamique incompressible ? Si l'on fait l'hypothèse que, d'une part, les termes de dissipation visqueuse $\mu \Delta \boldsymbol{v}_i$ et résistive $\varpi \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{B}$ ne sont importants qu'aux petites échelles et que, d'autre part, l'injection d'énergie se fait presqu'exclusivement aux grandes échelles, on peut raisonnablement penser qu'il existera un domaine inertiel. Cependant, une différence fondamentale avec le cas purement hydrodynamique est que le champ magnétique moyen $\boldsymbol{B}_0$ ne peut pas être ignoré dans le traitement des mouvements aux petites échelles, étant donné qu'il détermine en partie les propriétés des ondes d'Alfvén à ces échelles. En fait, on pense maintenant que la turbulence MHD incompressible est probablement le résultat des interactions non-linéaires de paquets

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

d'ondes d'Alfvén se propageant dans des directions opposées le long des lignes du champ magnétique moyen [Goldreich & Sridhar, 1995, Goldreich & Sridhar, 1997].
Cette remarque montre que, même si l'on suppose que l'injection d'énergie aux grandes échelles est statistiquement stationnaire et isotrope, la cascade d'énergie dans le domaine inertiel peut néanmoins être fondamentalement anisotrope, si l'énergie cinétique n'excède pas de beaucoup l'énergie magnétique, la direction privilégiée du problème étant alors celle de $\boldsymbol{B}_0$. Ceci suggère de considérer deux échelles, l'une transverse et l'autre parallèle, afin de décrire la cascade turbulente MHD.
À partir de là, les descriptions deviennent assez complexes et vont bien au-delà de ce qui pourrait nous être utile dans la suite. Le lecteur intéressé se reportera avec profit aux travaux de Goldreich et Sridhar [Sridhar & Goldreich, 1994, Goldreich & Sridhar, 1995, Goldreich & Sridhar, 1997]. Remarquons simplement qu'ils définissent trois grands types de cascades turbulentes en MHD, respectivement dites "forte", "faible" et "intermédiaire", dépendant du nombre et de l'amplitude des paquets d'ondes entrant en collision qui sont nécessaires pour que le transfert d'énergie vers les petites échelles soit efficace. Il semble que, dans le milieu interstellaire, la cascade forte soit la plus appropriée.
Le cas d'un milieu non entièrement ionisé doit être traité en considérant les espèces neutres à part, puisqu'elles ne sont pas soumises aux forces d'origine électromagnétique, mais qu'elles sont couplées aux espèces chargées par collisions. Comme dans le cas des électrons, précédemment, on peut supposer que les ions acquièrent instantanément une vitesse d'équilibre dans le référentiel des neutres par compensation de la force de friction et de la force de Lorentz. En appliquant cette hypothèse, on obtient une équation d'évolution du champ magnétique[24]

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{v}_n) = -\frac{1}{\alpha} \boldsymbol{\nabla} \wedge \left\{ \boldsymbol{B} \wedge \left[\frac{(\boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{B}}{\rho_n \rho_i} \right] \right\}$$

faisant intervenir un terme de diffusion (membre de droite), qu'on appelle diffusion ambipolaire, qu'on a déjà mentionnée au chapitre **II** et qui caractérise la migration des neutres à travers les lignes de champ magnétique. La diffusion ambipolaire est négligeable aux grandes échelles du milieu diffus, mais elle devient importante aux petites échelles, et certaines théories de la formation stellaire lui attribuent d'ailleurs un rôle prépondérant.

III.6 La turbulence compressible

Tout ce qui a été dit jusqu'à présent ne s'applique qu'au cas de la turbulence incompressible, c'est-à-dire sous l'hypothèse que la densité ρ est constante. Or, si cette condition est remplie par l'eau et tous les liquides en général, il n'en va pas de même des gaz, dont on sait pertinemment qu'il est possible de les comprimer. Notons cependant qu'on peut parfaitement envisager des écoulements dits incompressibles, même pour des fluides compressibles, si tant est que, dans ces écoulements, les variations relatives de la densité soient faibles. Ceci implique que les écoulements incompressibles ne doivent pas modifier sensiblement l'état thermodynamique du gaz, et on peut en déduire un critère simple, quoique non universel, permettant de déterminer qu'un écoulement est incompressible,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \left(\frac{U}{c_s}\right)^2 \ll 1 \quad \text{où } U \text{ est une vitesse caractéristique de l'écoulement et } c_s \text{ est la vitesse du son.}$$

Dans le cas incompressible, le champ de pression est entièrement déterminé par le champ de vitesse et le champ de température est indéfini. En revanche, dans le cas compressible, il est indispensable de déterminer les champs de vitesse, de densité, de pression et de température simultanément, ce qui montre la complexité du problème posé.
La compréhension de ce type d'écoulements est cependant rendue nécessaire dans l'étude du milieu interstellaire, du fait de la hiérarchie des structures en densité qu'on y observe. C'est d'ailleurs au cas de la turbulence interstellaire qu'est consacrée la dernière section de ce chapitre.

[24] L'absence du terme de diffusion classique $\varpi \boldsymbol{\Delta B}$ résulte d'une approximation selon laquelle la vitesse de dérive des électrons par rapport aux ions est négligeable. L'équation exacte contient en réalité les deux termes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

III.7 La turbulence dans le milieu interstellaire

III.7.a Un bref historique

Les premiers travaux sur le caractère turbulent du milieu interstellaire remontent à la théorie de von Weizsäcker [von Weizsäcker, 1951], dont les grandes lignes restent encore valables aujourd'hui. En résumé, le MIS peut être vu comme une hiérarchie de structures complexes résultant de l'interaction d'ondes de choc turbulentes et supersoniques, dont l'énergie provient, à grande échelle, de la rotation différentielle de la galaxie, et qui est dissipée de façon visqueuse aux petites échelles. L'observation, la même année [von Hoerner, 1951] d'une relation en loi de puissance entre la différence de vitesses RMS et la séparation sur le plan du ciel, conformément aux idées de Kolmogorov [Kolmogorov, 1941], a été l'une des premières confirmations de cette théorie. L'exposant de cette loi étant différent de celui prédit par Kolmogorov, il a été interprété comme la signature d'une turbulence compressible. Pourtant, ces idées n'eurent pas un grand écho au sein d'une communauté qui se figurait le milieu interstellaire comme rempli d'un gaz chaud en équilibre de pression avec des nuages froids sans interaction entre eux et en simple mouvement ballistique. D'autre part, l'image classique de la turbulence était alors celle du cas incompressible, et on imaginait mal qu'elle pût s'appliquer au milieu interstellaire, dont les fluctuations de densité sont gigantesques.
La découverte par Larson [Larson, 1981] de la loi d'échelle entre les largeurs de raies d'émission des nuages moléculaires et la taille de ces derniers a permis de rendre plus populaire l'idée d'un milieu interstellaire turbulent, au moins aux petites échelles. Les observations détaillées, par le satellite IRAS, de nuages interstellaires de plus grande taille [Low *et al.*, 1984] ont finalement eu raison de l'image classique.

III.7.b Observations de la turbulence interstellaire

Il est maintenant acquis que les différentes composantes du MIS sont soumises à des mouvements turbulents. Ceux-ci ont été observés dans la phase neutre atomique (voir par exemple [Spicker & Feitzinger, 1988, Miville-Deschênes *et al.*, 2003a]), dans le gaz ionisé [van Langevelde *et al.*, 1992] et dans des régions HII [O'Dell & Castaneda, 1987], mais ce sont les études concernant les nuages moléculaires qui sont les plus nombreuses [Kleiner & Dickman, 1985, Kitamura *et al.*, 1993, Miesch & Bally, 1994]. Les observations permettant d'appuyer cette vision hautement dynamique du milieu interstellaire sont essentiellement les suivantes :

▷ Comme on l'a dit au chapitre **II**, les estimations du nombre de Reynolds à partir de la viscosité moléculaire donnent des valeurs de 10^8 à 10^{12}, cohérentes avec les écoulements turbulents [Chandrasekhar, 1949].
▷ Les dispersions de vitesses - mesurées par exemple par la largeur des raies moléculaires - sont nettement suprathermiques sur une large plage d'échelles spatiales.
▷ Les structures en densité de colonne des nuages moléculaires forment une hiérarchie très complexe, et révèlent toujours plus de détails au fur et à mesure qu'on améliore la résolution.
▷ On observe une loi d'échelle entre la dispersion de vitesse et la taille des nuages, qui est bien établie sur près de quatre ordres de grandeur.

Les observations montrent d'ailleurs que de nombreuses propriétés des autres composantes suivent également des lois d'échelle. On a ainsi observé que les spectres de puissance de l'émission HI galactique [Green, 1993, Miville-Deschênes *et al.*, 2003a], de l'absorption du HI [Deshpande *et al.*, 2000], de l'émission du monoxyde de carbone [Stutzki *et al.*, 1998, Bensch *et al.*, 2001], et de l'émission IRAS des poussières à 100 μm [Gautier *et al.*, 1992] se comportent en loi de puissance, avec des exposants compris entre $-2,8$ et $-3,2$. Ces valeurs sont plus grandes, en valeur absolue, que ce qu'on attendrait d'un spectre de Kolmogorov projeté, qui donnerait un exposant $-8/3$. Ceci suggère que la relation entre les spectres de puissance de la vitesse et ceux de l'intensité observée n'est pas encore bien maîtrisée.

III.7.c Quelle turbulence ?

Les observations semblent donc établir que le milieu interstellaire est le siège de mouvements aléatoires, mais il est moins évident d'en connaître l'origine. La détermination de la nature exacte de cette turbulence revient à en déterminer les sources d'énergie et les processus par lesquels cette énergie est transférée vers

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

les petites échelles, puis dissipée. Cette tâche est évidemment très complexe, étant donnée la multitude de processus envisageables, qu'il s'agisse des chocs, de la gravitation imposée par un potentiel extérieur, de l'autogravité, du couplage avec le champ magnétique en fonction du degré d'ionisation, des effets de pression mécanique et de viscosité, des contraintes thermodynamiques de chauffage et de refroidissement du gaz, ou encore de la chimie des espèces présentes. L'analyse des processus dominants, permettant de simplifier les équations régissant la dynamique du milieu, quoiqu'essentielle pour l'étude de la physique de la turbulence interstellaire, ne nous sera pas utile dans la suite, le lecteur intéressé par un exemple se reportera à l'analyse dimensionnelle effectuée par Pety [Pety, 1999] dans le cas du milieu neutre froid.
Il faut cependant noter quelques problèmes avec l'approche classique de la turbulence, même sous ses formes les plus complexes, de type compressible et magnétohydrodynamique, dans le cas du milieu interstellaire. D'une part, l'existence de densités très faibles autorise un couplage énergétique - par l'effet du rayonnement - entre des cellules de gaz interstellaire très éloignées, ce qui délocalise les interactions entre elles et complique sérieusement le traitement du problème. D'autre part, ces faibles densités impliquent que, dans certaines conditions, il est possible que le libre parcours moyen des particules du gaz (atomes ou molécules) devienne macroscopique, de sorte que l'approximation fluide pourrait ne plus être valable. Cette approximation repose sur la satisfaction de deux critères : l'existence d'échelles mésoscopiques, et l'interaction forte des particules dans une même cellule de fluide. S'il existe bien des échelles mésoscopiques dans le milieu interstellaire, y compris dans les régions turbulentes où l'échelle de Kolmogorov est macroscopique, on ne peut cependant pas affirmer que la seconde condition est remplie, si le nombre de Reynolds est petit et le nombre de Mach grand [Pety, 1999]. Notons cependant que l'approximation fluide est de fait vérifiée *a posteriori* par l'ensemble des résultats observationnels.
Pour conclure, nous allons évoquer les sources de l'énergie injectée dans la cascade turbulente. Il est difficile d'estimer l'apport des différentes contributions possibles, en raison essentiellement de l'hétérogénéité spatiale et temporelle de ces injections, et de celle du gaz qui reçoit cette énergie. On peut cependant distinguer les sources suivantes :

▹ La vitesse angulaire d'un disque autogravitant en rotation, tel que celui de la galaxie, décroît lorsque la distance au centre augmente, ce qui provoque un cisaillement à grande échelle des structures du milieu interstellaire et transforme ainsi une énergie cinétique ordonnée en énergie cinétique turbulente.
▹ Les interactions entre nuages permettent un transfert d'énergie et d'impulsion analogue au cas d'une viscosité entre particules fluides.
▹ Les ondes de densité dans le disque spiral de la galaxie transfèrent une certaine quantité d'énergie cinétique aux nuages interstellaires, à condition qu'il existe une asymétrie telle que la décompression lorsque l'onde est passée ne retire pas toute l'énergie injectée lors de la compression.
▹ La contraction des nuages moléculaires géants libère une partie de leur énergie potentielle de gravitation, qui peut être convertie en énergie cinétique turbulente.
▹ Les vents stellaires des étoiles en fin de vie se mêlent au milieu interstellaire et lui injectent de l'énergie par friction.
▹ Les flots bipolaires issus de certaines étoiles jeunes ou en formation contribuent de la même façon à l'injection d'énergie dans le milieu interstellaire. Il s'agit probablement de la source dominante dans les régions de formation d'étoiles.
▹ L'expansion des régions HII , qui ne sont pas en équilibre de pression avec le milieu environnant, accélère le gaz interstellaire jusqu'à des vitesses comparables aux vitesses thermiques de l'hydrogène ionisé de ces régions.
▹ Les supernovæ éjectent une grande quantité de matière dans le milieu interstellaire, et lui transfèrent ainsi de l'énergie cinétique.

L'injection d'énergie aux échelles stellaires (de 100 pc pour les superbulles issues des restes de supernovæ à 0,1 pc pour les flots bipolaires) pourrait faire penser qu'il n'existe en fait pas de domaine inertiel pour la turbulence interstellaire. Cependant, les échelles dissipatives sont encore plus petites dans le milieu froid, d'après ce qui a été dit au chapitre **II**, ce qui assure l'existence d'un domaine inertiel sur plusieurs ordres de grandeurs, du moins loin des régions de formation stellaire.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Deuxième partie

Éléments mathématiques et outils d'analyse

C-3PO : Sir, the possibility of successfully navigating an asteroid field is approximately 3,720 to 1.
Han Solo : Never tell me the odds.

"Star Wars : The Empire strikes back" (George Lucas)

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE IV

Éléments de théorie des probabilités

IV.1 Qu'est-ce qu'une probabilité ?

L'observation de nombreux phénomènes se produisant de façon apparemment désordonnée montre qu'en fait certaines moyennes tendent vers des valeurs bien définies quand le nombre d'évènements croît, et que ces valeurs ne dépendent pas du sous-ensemble particulier d'évènements considérés, pourvu que ces derniers soient en nombre suffisant. Ainsi, on sait intuitivement que si l'on joue à pile ou face un grand nombre de fois, et qu'on compte le nombre de fois qu'on obtient l'un ou l'autre résultat, il est très probable qu'on aura environ autant de pile que de face. Le but de la théorie des probabilités est de formaliser ce problème et de comprendre les propriétés des moyennes qui apparaissent. Pour cela on définit la probabilité $\mathsf{P}(\mathcal{E})$ d'un évènement $\mathcal{E}$ comme étant un nombre représentant *grosso modo* la fréquence relative d'apparition de cet évènement au cours d'une série d'expériences, ce qui semble raisonnable au vu de l'exemple du jeu de pile ou face. Pour fixer les idées, si on effectue un nombre N suffisamment grand d'expériences et que l'évènement $\mathcal{E}$ se produit $N_{\mathcal{E}}$ fois, on aura approximativement $\mathsf{P}(\mathcal{E}) \simeq N_{\mathcal{E}}/N$.
Cette interprétation est floue, car on ne précise pas ce qu'on entend par "nombre suffisamment grand d'expériences" ou encore ce que signifie réellement cette approximation. Pour résoudre ce problème, il est d'usage de définir empiriquement la probabilité d'un évènement $\mathcal{E}$ comme la limite de la fréquence relative ci-dessus, pour un nombre d'expériences infini, soit

$$\mathsf{P}(\mathcal{E}) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_{\mathcal{E}}}{N}.$$

Cette définition, formalisée par von Mises [von Mises, 1957], a l'avantage de fonder le concept mathématique de probabilité sur l'observation quotidienne. Cependant, elle a l'inconvénient de reposer sur l'hypothèse forte de l'existence même de ces limites, et ne saurait par conséquent être aussi prolifique qu'on pourrait le souhaiter en tant que point de départ de la théorie.

IV.2 Axiomatique de la théorie des probabilités

IV.2.a Introduction

L'approche la plus correcte formellement de la théorie des probabilités a été initiée par Kolmogorov au début des années 1930 [Kolmogorov, 1933]. Elle considère d'une part les évènements comme les parties d'un ensemble et d'autre part les probabilités comme des mesures sur ces parties. La théorie des probabilités est alors considérée d'un point de vue ensembliste.
On ne reviendra que brièvement ici sur les notions de base de la théorie des ensembles, et on le fera essentiellement dans l'optique de préciser la terminologie de la théorie des probabilités. Ainsi, on se donne un ensemble $\mathcal{C}$ qu'on appelle ensemble des possibles[1], et ses éléments sont appelés évènements élémentaires. Une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}$, moyennant certaines propriétés, sera appelée de manière générale un évènement. Dans chaque expérience, si le résultat x est un élément de $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, on dit que l'évènement $\mathcal{E}$ se produit. On appelle d'ailleurs évènement certain un évènement qui se produit à chaque expérience, et celui-ci est confondu avec $\mathcal{C}$. Quant à l'ensemble vide, noté $\emptyset$, il est appelé évènement impossible dans le langage des probabilités. À partir de deux évènements $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, on peut aussi en construire de nouveaux par union ou intersection. L'union de deux évènements $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, notée $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ ou $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, est l'évènement qui se produit lorsque l'un ou l'autre se produisent, sans qu'il y ait nécessairement exclusion, tandis que l'intersection $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, notée également $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$, est l'évènement qui se produit lorsque l'un et l'autre se produisent. Les deux évènements

[1] On notera que les probabilités calculées dépendent de manière essentielle de la définition de $\mathcal{C}$.

$\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont mutuellement exclusifs si la réalisation de l'un empêche celle de l'autre, auquel cas $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2$ est l'ensemble vide. Cette notion conduit à celle de partition de $\mathcal{C}$, comme étant une collection d'évènements $\mathcal{E}_i$ exclusifs deux à deux et dont l'union est égale à $\mathcal{C}$. Enfin on notera que tout évènement $\mathcal{E}$ possède un évènement contraire, qui est le complémentaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}$, défini par $\overline{\mathcal{E}} = \{x\,;\, x \in \mathcal{C} \text{ et } x \notin \mathcal{E}\}$.

IV.2.b La notion de tribu de l'ensemble des possibles

Comme on l'a déjà mentionné, étant donné un ensemble des possibles $\mathcal{C}$, on définira une mesure sur les évènements $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, qu'on appellera probabilité. Cependant, on ne considérera pas tous les sous-ensembles de $\mathcal{C}$ comme étant des évènements. La raison en est que dans certains cas d'ensembles infinis, il n'est pas possible d'assigner des probabilités à toutes les parties de l'ensemble des possibles. On se limitera donc à une famille $\mathcal{F}$ de parties de $\mathcal{C}$. Cette famille doit être non-vide et posséder les propriétés suivantes, lui conférant une structure dite de tribu (ou σ-algèbre) :

▷ Si $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ alors il en va de même de son complémentaire, $\overline{\mathcal{E}} \in \mathcal{F}$.
▷ Si on se donne une famille au plus dénombrable $\{\mathcal{E}_i\}$ d'éléments de $\mathcal{F}$, leur union est également un élément de $\mathcal{F}$, soit $\bigcup_i \mathcal{E}_i \in \mathcal{F}$.

L'intersection des $\mathcal{E}_i$ est alors également un élément de $\mathcal{F}$, car le passage au complémentaire intervertit les rôles de l'union et de l'intersection. On peut aussi en déduire que $\mathcal{C}$ et $\emptyset$ sont des éléments de $\mathcal{F}$.

IV.2.c La notion d'espace probabilisé

Un espace probabilisé est un triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ obtenu en se donnant, pour un espace des possibles $\mathcal{C}$ et une famille $\mathcal{F}$ de parties de $\mathcal{C}$ possédant une structure de tribu, une mesure particulière P sur $\mathcal{F}$. Ceci signifie qu'on a une fonction P définie sur $\mathcal{F}$ et à valeurs dans $[0,1]$, appelée probabilité, qui doit

▷ Être positive, $\mathsf{P}(\mathcal{E}) \geqslant 0$ pour tout $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$,
▷ Être normalisée de sorte que la probabilité de l'évènement certain est $\mathsf{P}(\mathcal{C}) = 1$,
▷ Posséder la propriété de σ-additivité pour des évènements incompatibles, c'est-à-dire que pour toute famille au plus dénombrable $\{\mathcal{E}_i\}$ d'évènements deux à deux exclusifs, on a

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_i \mathcal{E}_i\right) = \sum_i \mathsf{P}(\mathcal{E}_i). \tag{4}$$

IV.2.d Quelques propriétés simples

Évidemment, cette propriété de σ-additivité, appliquée à une partition de $\mathcal{C}$, montre que la valeur maximale de P est 1, valeur atteinte pour l'évènement certain, comme il se doit. D'autre part, la probabilité de l'évènement complémentaire de $\mathcal{E}$ est $\mathsf{P}(\overline{\mathcal{E}}) = 1 - \mathsf{P}(\mathcal{E})$, et par conséquent, la probabilité de l'évènement impossible, qui est le complémentaire de l'évènement certain, est nulle.
Il est également possible de montrer que les probabilités de l'union et de l'intersection de deux évènements quelconques $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont liées par la relation $\mathsf{P}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) = \mathsf{P}(\mathcal{E}_1) + \mathsf{P}(\mathcal{E}_2) - \mathsf{P}(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2)$.
Enfin, on dira que les deux évènements $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont indépendants si $\mathsf{P}(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2) = \mathsf{P}(\mathcal{E}_1)\mathsf{P}(\mathcal{E}_2)$. Cette définition peut se généraliser à tout ensemble de n évènements $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$, dont on dira qu'il sont mutuellement indépendants si quelle que soit la suite $(i_1, \ldots, i_k)$ de k indices, avec $1 < k \leqslant n$, on peut effectuer la factorisation $\mathsf{P}(\mathcal{E}_{i_1} \ldots \mathcal{E}_{i_k}) = \mathsf{P}(\mathcal{E}_{i_1}) \ldots \mathsf{P}(\mathcal{E}_{i_k})$.

IV.2.e Probabilités conditionnelles

Définition

Lorsqu'on connaît la probabilité $\mathsf{P}(\mathcal{A})$ d'un évènement donné $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ et que celle-ci n'est pas nulle, il est possible de construire une nouvelle mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$, dite probabilité conditionnelle relativement

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

à $\mathcal{A}$ et notée $\mathsf{P}(\mathcal{E}|\mathcal{A})$ pour un évènement quelconque $\mathcal{E}$, qu'on définit par la relation

$$\forall \mathcal{E} \in \mathcal{F} \quad \mathsf{P}(\mathcal{E}|\mathcal{A}) = \frac{\mathsf{P}(\mathcal{E}\mathcal{A})}{\mathsf{P}(\mathcal{A})} \tag{5}$$

On peut montrer sans difficulté que cette mesure satisfait aux axiomes de positivité, de normalisation, et de σ-additivité, qui en font une probabilité. En termes ensemblistes, cette nouvelle probabilité se comprend comme une mesure (renormalisée) de la partie de $\mathcal{E}$ incluse dans $\mathcal{A}$. Cette interprétation éclaire le fait qu'en général $\mathsf{P}(\mathcal{E}|\mathcal{A}) \neq \mathsf{P}(\mathcal{E})$, ce qu'on nomme parfois effet de sélection.

Formule de Bayes

Considérant deux évènements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de probabilités non nulles, il est possible de construire les probabilités conditionnelles relativement à ces deux évènements. Appliquant la définition (5), on voit qu'on a la double égalité $\mathsf{P}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \mathsf{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})\mathsf{P}(\mathcal{B}) = \mathsf{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A})\mathsf{P}(\mathcal{A})$, ce qui conduit à la formule de Bayes

$$\mathsf{P}(\mathcal{B}|\mathcal{A}) = \frac{\mathsf{P}(\mathcal{A}|\mathcal{B})\mathsf{P}(\mathcal{B})}{\mathsf{P}(\mathcal{A})}.$$

Cette formule est au cœur d'une des méthodes de déconvolution des images astronomiques, à savoir la méthode de maximum d'entropie, qu'on mentionnera au chapitre **XIV**.

IV.2.f Utilisation de la théorie des probabilités

La connaissance de la probabilité $\mathsf{P}(\mathcal{E})$ d'un évènement simple $\mathcal{E}$ donné doit permettre, pour que la théorie puisse s'appliquer de manière opératoire, le calcul des probabilités d'évènements plus complexes. Par exemple, si l'on considère un évènement dont la probabilité $\mathsf{P}(\mathcal{E})$ est connue, quelle prédiction peut on faire sur le résultat d'une seule expérience ?
Intuitivement, on peut distinguer deux cas : Si $\mathsf{P}(\mathcal{E})$ n'est proche ni de 0 ni de 1, par exemple $\mathsf{P}(\mathcal{E}) = 0.6$, on ne peut pas dire avec une confiance suffisante quel va être le résultat de l'expérience. En revanche, si par exemple $\mathsf{P}(\mathcal{E}) = 0.999$, alors on a peu de chances de se tromper en affirmant que l'évènement $\mathcal{E}$ va effectivement se produire, bien qu'on ne puisse pas exclure ici la possibilité qu'il ne se produise pas, puisqu'il n'est pas certain.
La frontière entre les deux cas est bien sûr arbitraire, mais la théorie permet de passer du premier au second, en autorisant le calcul des probabilités d'évènements complexes. En effet, si l'on se place dans le premier cas ($\mathsf{P}(\mathcal{E}) = 0.6$), et qu'on renouvelle l'expérience 1000 fois, alors l'évènement $\mathcal{E}$ va presque sûrement se produire entre 550 et 650 fois. Ceci parce que la théorie permet de montrer que la probabilité de l'évènement $\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}$ se produit entre 550 et 650 fois$\}$ est égale à 0.999, c'est-à-dire qu'on s'est ramené au second cas, pour lequel la prédiction a effectivement un sens.

IV.3 Variables aléatoires : généralités

IV.3.a Introduction et définition

La notion de variable aléatoire permet de se donner une mesure sur un espace probabilisé $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ en créant une relation entre celui-ci et un espace mesurable, typiquement $\mathbb{R}$. On peut ainsi, réciproquement, disposer d'une probabilité sur cet espace mesurable. L'intérêt de cette association, dans le cas où l'espace mesurable est $\mathbb{R}$, ou même $\mathbb{R}^n$, est qu'on peut ainsi assigner un nombre (ou un multiplet) au résultat souvent abstrait d'une expérience, tel que "pile" ou "face", par exemple, ce qui permet de traiter, d'une façon mathématique et unifiée, des expériences similaires usant de terminologies différentes. Une variable aléatoire est donc une application $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ associant un réel $X(\omega)$ à tout évènement élémentaire $\omega \in \mathcal{C}$.
Cependant, toute application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement une variable aléatoire. L'espace mesurable $\mathbb{R}$ étant muni d'une tribu contenant les intervalles $I_x =]-\infty, x]$, il faut, pour que X soit une variable aléatoire, que les images réciproques $\mathcal{E}_x = X^{-1}(I_x)$ de ces intervalles soient des éléments de la tribu $\mathcal{F}$. Il s'agit d'une condition nécessaire et suffisante exprimant la correspondance entre les éléments des tribus de $\mathcal{C}$ et de $\mathbb{R}$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

IV.3.b Fonction de répartition

Définition

Cette correspondance permet, de manière très simple, et comme on le suggérait plus haut, de munir l'espace mesurable d'arrivée d'une probabilité, notée P_X, qui est la probabilité image de P par X, définie par $\mathsf{P}_X[X(\mathcal{E})] = \mathsf{P}(\mathcal{E})$ pour tout $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$. La notation P_X rappelle qu'elle dépend du choix de X. On l'appelle d'ailleurs loi de la variable aléatoire X. Cette notion, appliquée aux intervalles I_x de $\mathbb{R}$ définis plus haut, et considérée alors comme une fonction du réel x, fournit ce qu'on nomme la fonction de répartition $F_X(x)$ de la variable aléatoire X, soit $F_X(x) = \mathsf{P}_X(I_x) = \mathsf{P}(\mathcal{E}_x)$. Il faut bien comprendre ce que signifie cette fonction de répartition : sa valeur en x est égale à la probabilité que le résultat ω d'une expérience donnée soit tel que $X(\omega) \leqslant x$. Par abus de langage, et lorsque les résultats des expériences sont numériques, on assimilera les espaces de départ et d'arrivée de la variable aléatoire, de sorte qu'on dira, de manière équivalente, que $F_X(x)$ est la probabilité que le résultat d'une expérience donnée soit inférieur ou égal à x. On poussera même souvent l'abus jusqu'à supprimer la référence à la variable aléatoire, en écrivant la fonction de répartition sous la forme $F(x) = \mathsf{P}(X \leqslant x)$.

Probabilités attachées aux intervalles de $\mathbb{R}$

Notons que puisqu'on peut construire toute la tribu de $\mathbb{R}$ associée aux intervalles I_x à partir de ceux-ci, la donnée de la fonction de répartition d'une variable aléatoire est équivalente à celle de sa loi. On peut d'ailleurs aisément calculer la probabilité attachée à un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, définie par la probabilité que X prenne une valeur tombant dans cet intervalle. On a, respectivement,

$$\begin{array}{lll}
I =]a,b] & \Rightarrow & \mathsf{P}(X \in I) = F(b) - F(a) \\
I = [a,b] & \Rightarrow & \mathsf{P}(X \in I) = F(b) - F(a) + P(X = a) \\
I = [a,b[& \Rightarrow & \mathsf{P}(X \in I) = F(b) - F(a) + P(X = a) - P(X = b) \\
I =]a,b[& \Rightarrow & \mathsf{P}(X \in I) = F(b) - F(a) - P(X = b),
\end{array}$$

relations qui peuvent se démontrer sans difficulté, et où l'on voit que la fonction de répartition peut éventuellement présenter des sauts aux points a et b. On verra plus loin que ces sauts sont liés au caractère discontinu de la variable aléatoire.

Propriétés de la fonction de répartition

De même que toutes les fonctions de l'espace des possibles dans $\mathbb{R}$ ne sont pas des variables aléatoires, une fonction quelconque sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'est en général pas une fonction de répartition. Elle ne l'est que si et seulement si elle est monotone croissante, continue à droite et ayant les limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. De toutes ces propriétés, la seule qui mérite une explication un peu plus détaillée est celle concernant la continuité à droite. En effet, si l'on se donne $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, on a

$$\mathsf{P}(x < X \leqslant x + \epsilon) = F(x + \epsilon) - F(x) \qquad \text{d'où} \qquad 0 = \mathsf{P}(\emptyset) = F(x^+) - F(x),$$

en passant à la limite $\epsilon \to 0$. Le même calcul de continuité, mais à gauche, montre qu'on a alors la relation $\mathsf{P}(X = x) = F(x) - F(x^-) = F(x^+) - F(x^-)$, où l'on voit à nouveau que la fonction de répartition peut subir des discontinuités, ce dont on va parler maintenant.

Différents types de fonctions de répartition

En fait, il existe trois type de fonctions de répartitions possibles, mais on n'en considérera que deux[2]. Les fonctions discontinues en escalier, associées aux variables aléatoires à valeurs discrètes, et les fonctions absolument continues, qu'on appellera simplement fonctions continues, associées aux variables aléatoires continues.
Les variables aléatoires discrètes sont telles que la probabilité attachée à un point quelconque est nulle sauf en certains points, correspondant aux points de discontinuités de la fonction de répartition associée, qui est alors en escalier. Ces points forment un ensemble au plus dénombrable.

[2]Les fonctions singulièrement continues sont exclues car sans grand intérêt pratique [Pelat, 1998].

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Une fonction de répartition est absolument continue si et seulement si elle est presque partout dérivable et égale à l'intégrale indéfinie de sa dérivée. Pour nous, il suffira qu'elle soit "suffisamment régulière". En particulier, une fonction C^1 est absolument continue. Les variables aléatoires qui sont associées à de telles fonctions de répartition peuvent prendre un ensemble continu de valeurs et sont dites continues. Dans ce cas, le résultat $\mathsf{P}(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$ montre que la probabilité que X prenne une valeur particulière est nulle. Ce qui nous amène à définir la densité de probabilité, de manière à obtenir une estimation de la probabilité que le résultat d'une expérience soit "proche" de x. La figure **IV**.1 montre deux exemples de fonctions de répartition, l'une en escalier, l'autre continue.

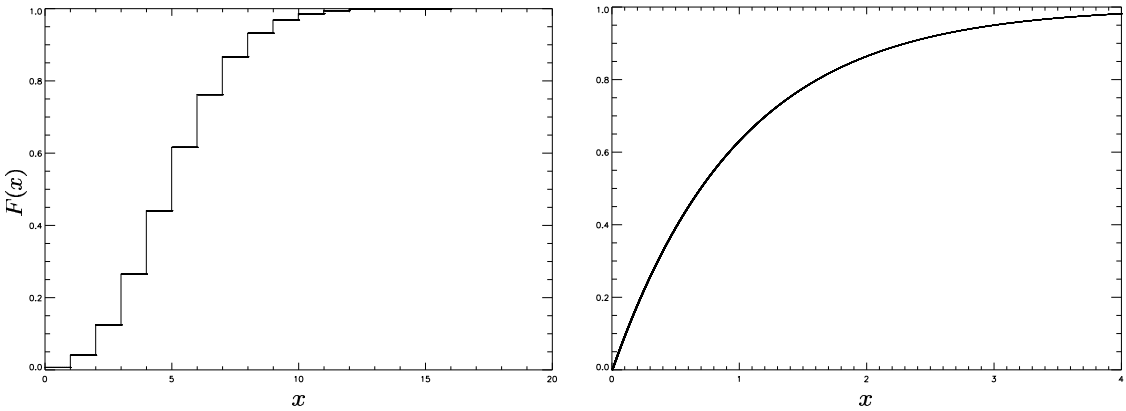

FIG. **IV**.1 – *Exemples de fonctions de répartition en escalier (à gauche) et absolument continue (à droite). L'exemple de gauche correspond à une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu = 5$. L'exemple de droite correspond au cas d'une variable aléatoire continue suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Courbes reproduites d'après [Pelat, 1998].*

IV.3.c Densité de probabilité

Lorsqu'on a affaire à une variable aléatoire continue X, on peut définir, aux points où sa fonction de répartition F est dérivable, la densité de probabilité f de la variable aléatoire, également appelée distribution, comme étant justement égale à cette dérivée, $f(x) = F'(x)$. Ainsi, en un point x où cette densité de probabilité est définie, et pour un petit intervalle δx, on peut écrire que la probabilité pour que la variable aléatoire soit comprise entre x et $x+\delta x$ est égale à $\mathsf{P}(x < X \leqslant x+\delta x) = F(x+\delta x) - F(x) \simeq f(x)\delta x$. Cette forme justifie l'appellation de "densité de probabilité" choisie pour f. Remarquons que certains auteurs étendent cette notion aux variables aléatoires discrètes, auquel cas la densité de probabilité est une somme de distributions de Dirac.

Il est évident que la densité de probabilité f d'une variable aléatoire X est positive en tant que dérivée d'une fonction croissante, et normalisée, puisque son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à $F(\infty) = 1$ par définition. Réciproquement, toute fonction mesurable, positive et normalisée à 1 est la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue.

IV.3.d Variables aléatoires à plusieurs dimensions

Introduction

Certaines mesures physiques fournissent des résultats sous forme vectorielle et non simplement scalaire. D'autre part, on peut vouloir étudier les propriétés de combinaisons de différentes grandeurs scalaires aléatoires, comme ce sera le cas au chapitre **XX**. Il est donc nécessaire de généraliser les notions introduites pour une variable aléatoire scalaire unique X au cas d'un vecteur aléatoire à n dimensions, qu'on peut écrire $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Fonction de répartition et densité de probabilité

Cette généralisation ne pose pas de difficulté majeure. On définit pour commencer la fonction de répartition F de $\boldsymbol{X}$ sur $\mathbb{R}^n$ par $F(x_1,\ldots,x_n) = \mathsf{P}(X_1 \leqslant x_1,\ldots X_n \leqslant x_n)$. Cette fonction est à valeurs dans $[0,1]$, croissante et continue à droite en chacune des variables. Elle vaut 0 si l'une quelconque des variables vaut $-\infty$ et 1 si toutes les variables valent $+\infty$.
Quand elle existe, la densité de probabilité f de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ est définie par

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\ldots\partial x_n}F(x_1,\ldots,x_n) \quad\Longleftrightarrow\quad F(x_1,\ldots,x_n) = \int_{I_{x_1}}\ldots\int_{I_{x_n}} f(u_1,\ldots,u_n)\mathrm{d}u_1\ldots\mathrm{d}u_n.$$

La densité de probabilité n-dimensionnelle est positive et son intégrale sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$ est 1.

Lois marginales

Si l'on connaît la fonction de répartition F du vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$, on peut en déduire la fonction de répartition de chacune des variables aléatoires qui le composent. On peut ainsi connaître les lois, dites lois marginales, suivies par ces composantes. En effet, il suffit de remarquer que la probabilité que X_k soit inférieure à un réel x_k, indépendamment des valeurs prises par les autres variables aléatoires, est égale à $F(\infty,\ldots,\infty,x_k,\infty,\ldots,\infty)$. De manière générale, la fonction de répartition marginale d'un ensemble de k variables, avec $k<n$, s'obtient par passage à la limite $+\infty$ des $n-k$ variables restantes dans la fonction de répartition F. Quant aux densités de probabilités marginales, elles s'expriment à partir de la densité de probabilité f, lorsque celle-ci existe, par intégration sur les $n-k$ variables non concernées.

Variables aléatoires indépendantes

Un cas particulier important à mentionner est celui des variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble[3], pour lequel la fonction de répartition F peut être mise sous la forme du produit des fonctions de répartition marginales, soit $F(x_1,\ldots,x_n) = F_1(x_1)\ldots F_n(X_n)$. On peut remarquer que les variables aléatoires sont alors deux à deux indépendantes, mais que la réciproque n'est pas vraie.

IV.4 Changement de variable aléatoire

Il est fréquent que le résultat direct d'une expérience ne donne pas directement la grandeur à laquelle on souhaite s'intéresser. Dans ce cas, on a généralement une fonction permettant de déduire cette dernière des mesures effectuées. Cependant, on ne désire pas pour autant oublier que la grandeur physique obtenue *in fine* est incertaine, du fait même que les mesures sont entachées d'erreur. On doit donc considérer que la grandeur intéressante est elle-même une variable aléatoire Y, fonction de la variable aléatoire X mesurée dans l'expérience. La question qui se pose à nous est de trouver la fonction de répartition G de Y à partir de la fonction de répartition F de X et de la relation $Y = h(X)$, ou encore de déterminer la densité de probabilité g de Y à partir de celle de X, notée f. Dans le cas général, on peut montrer que les densités de probabilités sont reliées par

$$g(y) = \sum_k \frac{f(x_k)}{|h'(x_k)|} \quad \text{où les } x_k \text{ sont les solutions de } h(x) = y.$$

En réalité, il faut également considérer le cas du passage d'une variable aléatoire n-dimensionnelle $\boldsymbol{X}$ à une nouvelle variable n-dimensionnelle $\boldsymbol{Y}$, par le biais d'une transformation $\boldsymbol{h}:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On a alors une relation similaire à la précédente, avec des notations généralisées,

$$g(y_1,\ldots,y_n) = \sum_k f(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})\left|\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|^{-1}_{x_i=x_i^{(k)}} \quad \text{avec } (y_1,\ldots,y_n) = \boldsymbol{h}(x_1^{(k)},\ldots,x_n^{(k)})$$

Cette expression, on le voit, fait intervenir le Jacobien du changement de variable $\boldsymbol{h}$.

[3] On dira souvent simplement, et abusivement, qu'elles sont indépendantes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

IV.5 Nombres et fonctions caractéristiques

IV.5.a L'espérance mathématique

Définition

L'espérance mathématique est une manière pratique de formaliser l'idée de moyenne, ce dernier terme étant entendu au sens large suggéré au tout début de ce chapitre. On commence par la définir pour une variable aléatoire X discrète ne pouvant prendre qu'un ensemble au plus dénombrable de valeurs $\{x_i\}$ avec des probabilités respectives $\{p_i\}$. L'espérance de la variable X est alors donnée par

$$\mathsf{E}(X) = \sum_i x_i p_i \quad \text{à la condition que} \quad \sum_i |x_i| p_i < \infty. \tag{6}$$

Cette condition de convergence absolue est nécessaire et suffisante pour assurer, avec des ensembles infinis, que l'espérance ne dépende pas de la numérotation choisie.
Pour généraliser cette notion à une variable aléatoire continue X, on va considérer celle-ci comme la limite d'une variable discrète associée. Plus précisément, on se donne $\delta > 0$ et on découpe l'axe réel de définition de X en cellules identiques de taille δ. On dira alors que les issues de deux expériences sont identiques si elles tombent dans la même cellule. Cela revient à dégrader la résolution de la mesure, en quelque sorte. On a alors une variable discrète X_δ, dont l'espérance mathématique $\mathsf{E}(X_\delta)$ a un sens précis, et on définira l'espérance mathématique de X notée $\mathsf{E}(X)$ comme étant la limite, si elle existe, de $\mathsf{E}(X_\delta)$ pour $\delta \to 0$. En fait, cette définition coïncide d'une part avec l'intégrale de Lebesgue de la fonction $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ où la mesure choisie est P, sous la condition de convergence absolue, et d'autre part avec une intégrale de Stieltjes mesurée par la fonction de répartition F,

$$\mathsf{E}(X) = \int_{\mathcal{C}} X(\omega)\mathrm{d}\mathsf{P} = \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}F \qquad \text{pour} \qquad \int_{\mathcal{C}} |X(\omega)|\mathrm{d}\mathsf{P} < \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |x|\mathrm{d}F < \infty.$$

Cette forme (intégrale de Stieltjes) recouvre le cas des variables aléatoire discrètes, car elle redonne alors l'expression (6). Dans le cas des variables aléatoires continues admettant une densité de probabilité f, elle se réduit à l'intégrale de Riemann classique

$$\mathsf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{pour} \qquad \int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

Notons qu'en physique, on appelle souvent "moyenne d'ensemble" l'espérance mathématique d'une variable aléatoire. On pourra la noter $\langle X \rangle$, ou encore $\overline{X}$ quand il n'y aura pas de confusion possible avec la notion d'ensemble complémentaire.

Propriétés

Les propriétés de l'espérance mathématique découlent de celles de l'intégrale de Lebesgue. En particulier, elle est linéaire, c'est à dire que pour un ensemble de n variables aléatoires $\{X_i\}$ et n réels $\{\lambda_i\}$, on a $\mathsf{E}(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 \mathsf{E}(X_1) + \ldots + \lambda_n \mathsf{E}(X_n)$, à condition que les diverses espérances existent, ce qu'on supposera toujours vrai lorsqu'on en écrira une, dans la suite.
En revanche, l'espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires X et Y n'est en général pas égale au produit des espérances mathématiques respectives de chacune des variables, sauf si ces dernières sont indépendantes l'une de l'autre, auquel cas on a bien $\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)$. Cependant, on dispose d'un résultat général, valable que les variables aléatoires soient indépendantes ou non, sous la forme d'une inégalité de Cauchy-Schwarz selon laquelle on a toujours $\mathsf{E}(XY)^2 \leqslant \mathsf{E}(X^2)\mathsf{E}(Y^2)$.
Dans un changement de variables aléatoire $Y = h(X)$, on peut montrer que

$$\mathsf{E}\{Y\} = \mathsf{E}\{h(X)\} = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{C}} h[X(\omega)]\mathrm{d}\mathsf{P},$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

ce qui implique qu'il n'est pas nécessaire, pour calculer l'espérance de Y, de connaître sa loi, ni sa fonction de répartition, ou encore sa densité de probabilité si celle-ci existe. Étant donné le changement de variable h, il suffit en fait de connaître la loi suivie par X. Ce résultat très important se généralise au cas où Y est fonction de n variables aléatoires, et on a alors $\mathsf{E}\{Y\} = \mathsf{E}\{h(X_1, \ldots, X_n)\}$. On voit d'ailleurs là l'importance pratique de la densité de probabilité, qui réside dans le fait que la valeur moyenne de toute fonction $h(X)$ de la variable aléatoire X peut se calculer simplement dès lors qu'on connaît la distribution $f(x)$. En fait, l'équation ci-dessus montre bien que la statistique de X est entièrement déterminée par la connaissance de f.

IV.5.b Les moments

Définitions

Les moments sont des nombres permettant de caractériser la loi suivie par une variable aléatoire X, à défaut de connaître cette loi. En fait, on va voir que la connaissance de l'ensemble des moments est équivalente à celle de la loi. Les moments d'une loi de probabilité sont de deux types, appelés respectivement non centrés et centrés, qu'on peut facilement relier l'un à l'autre.
Étant donnée une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est notée F, le moment non centré μ'_k d'ordre k est défini par différentes expressions équivalentes

$$\mu'_k = \mathsf{E}(X^k) = \int_{\mathcal{C}} X(\omega)^k \mathrm{d}\mathsf{P} = \int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) \mathrm{d}x,$$

où la dernière égalité suppose l'existence de la densité de probabilité f de la variable aléatoire X.
Le moment centré μ_k d'ordre k est quant à lui obtenu par les expressions suivantes

$$\mu_k = \mathsf{E}\left\{[X - \mathsf{E}(X)]^k\right\} = \int_{\mathcal{C}} [X(\omega) - m]^k \mathrm{d}\mathsf{P} = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^k \mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^k f(x) \mathrm{d}x \quad \text{en posant } m = \mu'_1.$$

Pour que le moment centré ou non centré d'ordre k existe, il faut et il suffit que l'espérance $\mathsf{E}(|X|^k)$ existe, et dans ce cas, tous les moments d'ordre inférieur existent.

Moyenne, variance et écart-type

Parmi les différents moments, il convient de souligner l'importance que prennent certains d'entre eux. En particulier, on appelle moyenne de la variable aléatoire X le moment non centré d'ordre un $m = \mu'_1$. La moyenne ainsi définie correspond à l'idée intuitive que l'on s'en fait pour des variables aléatoires discrètes. De même, on appelle variance le moment centré d'ordre deux, μ_2. Il s'agit d'une quantité positive notée généralement σ^2, ce qui permet d'introduire l'écart-type σ, lequel est également toujours positif, ceci par définition. L'écart-type et la variance caractérisent *grosso modo* la plage de valeurs sur laquelle il est raisonnable de penser qu'on va trouver X. Pour préciser encore plus la loi de la variable aléatoire, on utilise aussi les moments centrés d'ordre trois et quatre, μ_3 et μ_4, pour définir le coefficient d'asymétrie γ_1 et le coefficient d'aplatissement γ_2 de la distribution en posant

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

Comme leurs noms l'indiquent, les coefficients γ_1 et γ_2 caractérisent respectivement l'asymétrie de la loi par rapport à la moyenne et l'aplatissement du graphe de la loi. Ainsi défini, le coefficient d'aplatissement est nul pour la loi normale (gaussienne), positif pour les lois plus piquées que la loi normale, et négatif pour les lois moins piquées.

Cas de n variables aléatoires

On considère n variables aléatoires $\{X_i\}$, et on suppose qu'il existe une densité de probabilité jointe $f(x_1, \ldots, x_n)$ telle que définie au **IV.3.d.** On définit les moments non centrés de la loi suivie par la variable

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

aléatoire n-dimensionnelle $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ en écrivant

$$\mu'_{k_1,\ldots,k_n} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

où l'ordre du moment est donné par la somme des k_i. D'après les remarques faites au sujet des lois marginales, on voit que ces moments sont liés à ceux des variables aléatoires X_i prises individuellement. Par exemple, on a $\mu'_{1,0,\ldots,0} = \mathsf{E}\{X_1\}$. D'autre part, on définit les moments centrés par

$$\mu_{k_1,\ldots,k_n} = \int_{\mathbb{R}^n} (x_1 - m_1)^{k_1} \ldots (x_n - m_n)^{k_n} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n,$$

avec la notation $m_i = \mathsf{E}\{X_i\}$. Comme pour les moments non centrés, on peut montrer que les moments centrés ainsi définis redonnent, lorsque certains indices k_i sont nuls, les moments centrés des lois suivies par les variables aléatoires individuelles. Par exemple, $\mu_{2,0,\ldots,0}$ est la variance de la loi de X_1.

IV.5.c La fonction caractéristique

Dans les situations les plus courantes, on ne dispose pas simplement de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X. En revanche, on peut plus facilement en connaître les moments, par des approches variées. Or, on peut montrer qu'il est possible, connaissant l'ensemble des moments centrés μ_k ou non centrés μ'_k, de remonter à la loi de la variable aléatoire considérée.
Pour simplifier, nous allons supposer qu'on a calculé, par des moyens appropriés, les moments non centrés $\mu'_k = \mathsf{E}\{X^k\}$, et qu'on sait qu'il existe une densité de probabilité f. On peut alors définir la fonction caractéristique Z comme étant l'espérance des complexes de module unité,

$$Z(u) = \mathsf{E}\left(e^{iuX}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(x) \mathrm{d}x.$$

La fonction caractéristique et la densité de probabilité sont transformées de Fourier l'une de l'autre. Plus exactement, la formule réciproque doit tenir compte du fait que la densité de probabilité n'est pas nécessairement continue, et la forme générale de la relation inverse est donc

$$\frac{1}{2}\left[f\left(x^+\right) + f\left(x^-\right)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iux} Z(u) \mathrm{d}u \quad \text{qui redonne } f(x) \text{ aux points où } f \text{ est continue.}$$

On peut montrer que la fonction caractéristique est majorée par 1, puisque

$$|Z(u)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|e^{iux} f(x)\right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1 \quad \text{avec } Z(0) = 1.$$

Remarquons d'autre part que la fonction caractéristique est hermitienne. Le lien qu'elle entretient avec les moments non centrés de la loi suivie par X est assez simple à mettre en évidence, puisque, si le moment d'ordre n existe, on a $Z^{(n)}(0) = i^n \mathsf{E}\left(X^n\right)$, où $Z^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de Z. En écrivant le développement de Taylor de la fonction caractéristique,

$$Z(u) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{Z^{(k)}(0)}{k!} u^k = \sum_{k \geqslant 0} \frac{i^k \mathsf{E}\left(X^k\right)}{k!} u^k = \sum_{k \geqslant 0} \frac{i^k u^k}{k!} \mu'_k, \tag{7}$$

on peut donc, à partir des moments non centrés, retrouver Z, puis la densité de probabilité f par transformée de Fourier. On peut généraliser cette approche au cas d'une variable aléatoire n-dimensionnelle $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ possédant une densité de probabilité $f(x_1, \ldots, x_n)$. On définit alors la fonction caractéristique sur l'espace de Fourier réciproque de $\mathbb{R}^n$ par

$$Z(\boldsymbol{u}) = Z(u_1, \ldots, u_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n)} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{u}.\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Les dérivées partielles de cette fonction caractéristique, prises en $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, redonnent les moments non centrés

$$\mu'_{k_1,\ldots,k_n} = \mathcal{D}_{\boldsymbol{k}}[Z](\mathbf{0}) \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_{\boldsymbol{k}} = \prod_j \frac{1}{i^{k_j}} \frac{\partial^{k_j}}{\partial u_j^{k_j}} \quad \text{d'où} \quad Z(u_1,\ldots,u_n) = \sum_{\boldsymbol{k}} \mu'_{k_1,\ldots,k_n} \prod_j \frac{(iu_j)^{k_j}}{k_j!}.$$

Cette méthode permettant de déduire la densité de probabilité à partir des moments sera évoquée dans le chapitre **X** et mise à contribution dans le chapitre **XX**.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE V

Champs stochastiques et outils d'analyse

V.1 Processus stochastiques et modélisation

Le chapitre **IV** a permis de dégager la notion de variable aléatoire, associant un nombre réel $X(\omega)$ au résultat ω d'une expérience, qu'on appelle parfois réalisation. Or, les champs que l'on utilisera dans la suite, par exemple pour modéliser la densité et la vitesse du gaz dans le milieu interstellaire, devront présenter un caractère aléatoire, puisque, comme on l'a vu au chapitre **II**, les champs véritablement observés sont très chaotiques. Il s'agira donc là de construire non plus seulement des nombres aléatoires, mais de véritables fonctions aléatoires de la position. Ainsi, de manière générale, on appellera processus stochastique, ou simplement processus[1], une application de l'ensemble des possibles $\mathcal{C}$ vers l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Alternativement, on peut voir les champs stochastiques comme une fonction associant une variable aléatoire à une position $\boldsymbol{r}$ de $\mathbb{R}^n$, la variable aléatoire étant prise ici au sens d'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$. Un processus stochastique peut donc être interprété soit comme une fonction aléatoire prise dans son ensemble, soit comme une suite de variables aléatoires indexée par la position [Papoulis, 1984]. Pour simplifier, on pourra même directement écrire que le champ $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ associe un réel à une position, ce qui revient à assimiler le champ stochastique avec ses réalisations. C'est d'ailleurs cette approche qui sera le plus souvent utilisée, puisqu'elle correspond naturellement au problème de la modélisation des champs physiques.

Ayant construit, par des moyens qu'on précisera aux chapitres **VII** et **VIII**, des champs stochastiques modélisant les champs physiques du milieu interstellaire, il se pose la question de les comparer aux observations. Or, les modèles étant par définition aléatoires, la caractérisation de leurs propriétés ne peut se faire que de manière statistique, c'est-à-dire en termes de probabilités. En ce qui concerne les champs réels, il est de même évident que l'apparence exacte d'un champ, par exemple un champ de densité, est issue de conditions très particulières, qu'on ne peut pas reproduire *in extenso*, tout comme on ne peut pas prédire l'apparence d'une réalisation donnée d'un champ stochastique. Cependant, l'exemple de la turbulence, étudiée brièvement au chapitre **III**, montre que les outils permettant de caractériser des champs physiques, de densité et de vitesse, sont justement de nature statistique.

Ainsi, il faut aborder le problème en posant qu'un champ stochastique donné représente certaines conditions physiques du milieu interstellaire, et qu'une réalisation de ce champ aléatoire est équivalente à l'observation d'un champ réel où règnent ces conditions. Dès lors, il convient de déterminer les caractéristiques statistiques pertinentes, c'est-à-dire trouver des nombres ne dépendant pas de la réalisation particulière du champ stochastique. Si cette approche est correcte, les outils de caractérisation ainsi développés doivent par construction, lorsqu'ils sont appliqués à des champs réels, donner des résultats indépendants du champ particulier observé, puisque les conditions physiques sont alors les mêmes. En réalité, cette méthode est validée en montrant par exemple que les outils statistiques développés donnent effectivement le même résultat sur différentes réalisations d'un même champ stochastique.

Comme on l'a indiqué plus haut, l'étude du phénomène de turbulence a déjà permis de citer certains de ces outils statistiques, que nous allons considérer plus en détail ici, à savoir les fonctions de structure, la fonction d'autocorrélation et le spectre de puissance. On étudiera également brièvement les propriétés de la variance d'Allan et de la Δ-variance. Ces outils permettront de caractériser les propriétés de champs aléatoires définis sur des espaces de dimension n quelconque, sachant que, dans la pratique, on aura bien sûr $n \leqslant 3$. Notons que dans le cas où $n = 1$ on parlera souvent en termes temporels, tandis que pour $n > 1$ on parlera plutôt en termes spatiaux.

[1] Comme l'indique le titre du chapitre, on parlera de processus stochastique lorsque $n = 1$ et plus généralement de champ stochastique lorsque n est quelconque.

V.2 Statistique des processus stochastiques

V.2.a Fonctions de répartition et densités de probabilité

On considère ici un champ stochastique X comme application de $\mathbb{R}^n$ vers l'espace des variables aléatoires, c'est-à-dire l'espace des fonctions définies sur $\mathcal{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$, la notation $X(\boldsymbol{r})$ désigne une variable aléatoire sur l'espace des possibles $\mathcal{C}$. On peut donc lui associer une fonction de répartition, ce qui amène tout naturellement à définir, pour le champ X, une fonction, dite fonction de répartition du premier ordre, notée F et définie par $F(x, \boldsymbol{r}) = \mathsf{P}\{X(\boldsymbol{r}) \leqslant x\}$. Si cette fonction est dérivable par rapport à x, ce qu'on supposera toujours, on peut en déduire la densité de probabilité du premier ordre du champ stochastique X, notée f, avec

$$f(x; \boldsymbol{r}) = \frac{\partial F(x; \boldsymbol{r})}{\partial x}.$$

Plus généralement, on définit la fonction de répartition d'ordre p et la densité de probabilité d'ordre p du champ X respectivement par $F_p(x_1, \ldots, x_p; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_p) = \mathsf{P}\{X(\boldsymbol{r}_1) \leqslant x_1, \ldots, X(\boldsymbol{r}_p) \leqslant x_p\}$ et

$$f_p(x_1, \ldots, x_p; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_p) = \frac{\partial^p F_p(x_1, \ldots, x_p; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_p)}{\partial x_1 \ldots \partial x_p},$$

lorsque ces dérivées partielles existent.

V.2.b Moyenne et autocorrélation

Ceci étant posé, on se souvient que la connaissance de la fonction de répartition ou de la densité de probabilité d'une variable aléatoire permettait de connaître exactement les propriétés statistiques de cette dernière. De même, la connaissance exacte d'un champ aléatoire équivaut à celle de toutes ses fonctions de répartition, quels que soient l'ordre p et les familles $\{x_i\}$ et $\{\boldsymbol{r}_i\}$. Cependant, on a vu également qu'à défaut de la loi exacte d'une variable aléatoire, on pouvait se contenter de ses premiers moments. Il en va de même pour les champs stochastiques, et l'on utilisera en particulier la moyenne $m(\boldsymbol{r})$ et la fonction d'autocorrélation $A_X(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ définies respectivement par[2]

$$m(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{X(\boldsymbol{r})\} \qquad \text{et} \qquad A_X(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathsf{E}\{X(\boldsymbol{r}_1)X(\boldsymbol{r}_2)\}.$$

On remarque en particulier que la moyenne ainsi définie dépend de $\boldsymbol{r}$, ce qui suggère la possibilité que le champ X ne soit pas statistiquement invariant par translation de l'espace de départ, et amène à introduire la notion de champ stationnaire.

V.2.c Champs stationnaires

Il existe deux définitions possibles de la stationnarité d'un champ stochastique X. Celui-ci est dit stationnaire au sens strict si, précisément, ses propriétés statistiques sont invariantes par translation. Ses fonctions de répartition satisfont alors à

$$F_p(x_1, \ldots, x_p; \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_p) = F_p(x_1, \ldots, x_p; \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\delta}, \ldots, \boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{\delta}) \quad \text{quel que soit le déplacement } \boldsymbol{\delta}.$$

Par conséquent, on en déduit que la densité de probabilité d'ordre un est indépendante de la position de l'origine, et qu'il en va donc de même de la moyenne $m(\boldsymbol{r}) = m$. Quand à $f(x_1, x_2; \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$, densité de probabilité d'ordre deux, elle ne dépend en fait que de x_1, x_2, et de la séparation $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$.
D'un autre côté, on dit que X est un champ stationnaire au sens large si sa moyenne ne dépend pas de la position et si sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de l'intervalle $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Dans ce cas, on écrira d'ailleurs celle ci $A_X(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ et non plus $A_X(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$. Il est évident qu'un champ stationnaire au sens strict l'est également au sens large.

[2] En toute rigueur, la fonction d'autocorrélation est définie par $A_X(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathsf{E}\{X(\boldsymbol{r}_1)X^*(\boldsymbol{r}_2)\}$ où l'étoile indique la conjugaison complexe. Cependant, comme on ne considérera que des champs réels, on ne s'en servira pas.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

V.2.d L'hypothèse ergodique

Le début d'approche très général exposé ci-dessus suppose qu'on puisse se donner un nombre suffisamment grand de réalisations d'un champ stochastique X, de manière à en calculer les propriétés statistiques telles que moyenne et fonction d'autocorrélation. Or, si cette méthode est envisageable pour ces champs modèles, comme on en construira aux chapitres **VII** et **VIII**, elle s'avère inadaptée aux champs réels observés, puisqu'on ne dispose *a priori* que d'une seule réalisation. Quant aux simulations numériques d'écoulements turbulents, la lourdeur des calculs nécessaires pour obtenir une précision raisonnable n'autorise généralement qu'un nombre très restreint de réalisations.
Idéalement, il faudrait donc pouvoir caractériser les champs stochastiques à partir d'une seule réalisation. L'astuce consiste à remarquer qu'on peut, par la pensée, découper un champ observé en plusieurs sous-champs. En supposant que ceux-ci sont soumis aux mêmes conditions physiques que le champ global, chacun d'eux peut être, à la limite, considéré comme une réalisation particulière du champ stochastique modélisant le champ entier. En conséquence, les moyennes d'ensemble peuvent alors être assimilées à des moyennes spatiales sur une seule réalisation. Notons cependant qu'en pratique on n'est pas toujours limité par la difficulté de calculer une moyenne d'ensemble, mais parfois par celle de calculer une moyenne spatiale ou temporelle. Imaginons par exemple qu'on s'intéresse à l'énergie cinétique moyenne des molécules d'un gaz. Chacune d'elles est équivalente aux autres, et la vitesse moyenne à laquelle on peut avoir accès à chaque instant t, au travers de la température, est la moyenne d'ensemble $\mathsf{E}\{e_c(t)\}$. Si les conditions appliquées au système ne changent pas au cours du temps, on peut supposer que chaque particule passe par tous les états possibles avec une probabilité égale aux poids statistiques de ces états.
Cette dernière proposition constitue une hypothèse ergodique, ou principe ergodique[3]. On remarque notamment qu'elle ne peut s'appliquer que si la moyenne $m(\boldsymbol{r})$ est indépendante de la position. On trouvera des conditions nécessaires et suffisantes d'ergodicité dans [Papoulis, 1984]. Dans toute la suite, on supposera implicitement que les champs considérés sont ergodiques[4].

V.3 Moyenne locale et moyenne globale

V.3.a Définition de la moyenne locale

Étant donné un champ stochastique X, on considère l'une de ses réalisations, que l'on notera également X sans risque de confusion. Il s'agit alors d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, qu'on va supposer bornée et continue, et dont les variations sont aléatoires. Un exemple d'une telle application, dans le cas où $n = 1$, est donné sur la figure **V**.1. En supposant la continuité de X, on peut construire une moyenne locale $\mu_\rho(\boldsymbol{r})$

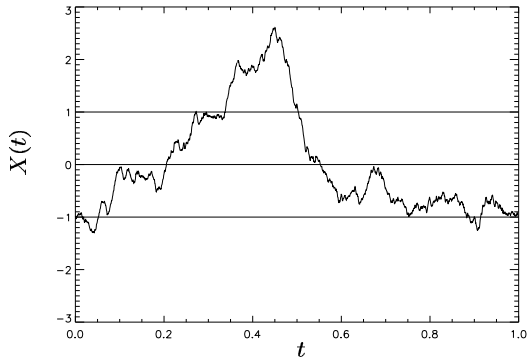

FIG. **V**.1 – *Exemple de signal aléatoire unidimensionnel $X(t)$ (trait continu). Les unités sont arbitraires et le signal est de moyenne nulle (indiquée par les tirets) et de variance unité (les deux traits en pointillés représentent les valeurs $\mathsf{E}\{X\} \pm \sigma_X$).*

en chaque point, comme une intégrale sur la boule n-dimensionnelle de centre $\boldsymbol{r}$ et de rayon ρ, dont on

[3]Il existe en fait plusieurs principes ergodiques, suivant la statistique considérée. Ici il s'agit de l'ergodicité en moyenne, car on suppose l'égalité de la moyenne d'ensemble de X et de la moyenne spatiale d'une de ses réalisations. Les autres possibilités qu'on peut considérer sont notamment les ergodicités en distribution et en autocorrélation.
[4]Il s'agira d'ergodicité en moyenne, en distribution ou en autocorrélation, étant donné le contexte.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des points $\boldsymbol{u}$ tels que $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}| \leqslant \rho$. Plus précisément,

$$\mu_\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{V_\rho} \int_{B_\rho(\boldsymbol{r})} X(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \quad \text{où} \quad V_\rho = \mathcal{V}_n\left[B_\rho(\boldsymbol{r})\right] \quad \text{est le volume d'une boule de rayon } \rho \text{ en dimension } n. \tag{8}$$

V.3.b Définition et unicité de la moyenne globale

Supposons que la moyenne locale $\mu_\rho(\boldsymbol{r})$ tende, pour $\rho \to \infty$, vers une constante finie notée $\mu(\boldsymbol{r})$, qu'on peut considérer comme étant une moyenne globale de X dépendant *a priori* de la position,

$$\mu(\boldsymbol{r}) = \lim_{\rho\to\infty} \mu_\rho(\boldsymbol{r})$$

On peut en fait montrer sans difficulté que cette limite ne dépend pas de $\boldsymbol{r}$. En effet, si on prend deux positions $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$, et qu'on se place dans le cas où $\rho \geqslant |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$, alors la différence entre les deux moyennes locales est majorée simplement et brutalement par

$$|\mu_\rho(\boldsymbol{r}_1) - \mu_\rho(\boldsymbol{r}_2)| \leqslant \frac{\mathcal{V}_n\left[B_\rho(\boldsymbol{r}_1) \cup B_\rho(\boldsymbol{r}_2)\right] - \mathcal{V}_n\left[B_\rho(\boldsymbol{r}_1) \cap B_\rho(\boldsymbol{r}_2)\right]}{V_\rho} ||X||_\infty,$$

où l'on a utilisé le fait que, X étant supposé borné, sa norme infinie $||X||_\infty = \sup\{|X(\boldsymbol{r})| \ ; \ \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n\}$ existe, et que l'intégrale de X sur une région E est inférieure, en valeur absolue, au produit de $||X||_\infty$ par le volume $\mathcal{V}_n(E)$ de cette région. Le volume V_ρ d'une boule quelconque de rayon ρ est identique quel que soit le centre de la boule. Quant au numérateur, il s'agit du volume de l'ensemble des points qui sont dans l'union exclusive des boules $B_\rho(\boldsymbol{r}_1)$ et $B_\rho(\boldsymbol{r}_2)$.
La forme de cette majoration se comprend aisément à l'aide de la figure **V.2**, qui suppose $n = 2$ pour simplifier. La contribution à la différence $\mu_\rho(\boldsymbol{r}_1) - \mu_\rho(\boldsymbol{r}_2)$ d'un élément de volume contenu dans l'intersection des deux boules étant évidemment nulle, seules comptent les régions de l'espace $\mathbb{R}^n$ contenues dans une boule et pas dans l'autre, ce que traduit le numérateur de l'équation précédente. Faisant tendre ρ vers

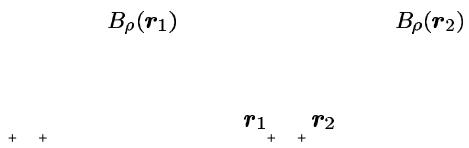

FIG. **V.2** – *Représentation schématique de la démonstration de l'unicité de la moyenne globale. Les boules de rayon ρ et de centres respectifs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ se recouvrent d'autant plus que ρ est grand. La figure de gauche montre le cas $|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| \geqslant \rho$, et celle de droite le cas $|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| \leqslant \rho$.*

l'infini, les deux boules se recouvrent de plus en plus, de sorte que le volume de leur union exclusive, rapporté à celui d'une boule, tend vers 0. On en déduit que, si l'une des deux moyennes globales $\mu(\boldsymbol{r}_1)$ ou $\mu(\boldsymbol{r}_2)$ existe, alors l'autre existe également et elles ont la même valeur μ. Si cette valeur est égale à la moyenne d'ensemble m, le processus est ergodique. Dans toute la suite, on supposera que les champs considérés possèdent tous une unique moyenne globale.
Il est par ailleurs intéressant d'introduire ici, dans l'optique de ce qui va suivre, un champ stochastique tronqué qu'on définit comme $X_\rho(\boldsymbol{r}) = X(\boldsymbol{r})\sqcap_\rho(\boldsymbol{r})$ où la fonction $\sqcap_\rho$ est donnée par

$$\sqcap_\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\boldsymbol{r}| \leqslant \rho \\ 0 & \text{si } |\boldsymbol{r}| > \rho \end{cases} \qquad \text{avec } |\boldsymbol{r}| \text{ le module de } \boldsymbol{r} \text{ dans l'espace euclidien } \mathbb{R}^n.$$

On peut alors écrire la moyenne globale sous la forme $\quad m = \lim_{\rho\to\infty} \mu_\rho(\boldsymbol{0}) = \lim_{\rho\to\infty} \left\{ \frac{1}{V_\rho} \int X_\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} \right\}.$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

V.4 Fonction d'autocorrélation

V.4.a Définition

Les précautions précédentes étant prises quant à la définition de la moyenne d'une réalisation d'un champ stochastique X, il convient de s'intéresser à ses fluctuations, puisque ce sont elles qui doivent nous permettre de caractériser effectivement les propriétés statistiques de X, dans l'optique de les comparer à celles des champs observés. On peut sans perte de généralité faire l'hypothèse que $\mu = 0$, ce qui ne change évidemment rien au problème de la caractérisation des fluctuations. Étant donné un champ stochastique X stationnaire, sa fonction d'autocorrélation A_X est donnée par

$$A_X(\boldsymbol{\delta}) = \mathsf{E}\{X(\boldsymbol{r})X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta})\} \quad \text{indépendamment de la position } \boldsymbol{r}.$$

Supposant que le champ X satisfait à l'hypothèse ergodique au sens de l'autocorrélation, il est possible d'assimiler $A_X(\boldsymbol{\delta})$ à une intégrale sur l'espace $\mathbb{R}^n$ de définition, soit

$$A_X(\boldsymbol{\delta}) = \lim_{\rho\to\infty}\left\{\frac{1}{V_\rho}\int_{B_\rho(\boldsymbol{r})} X(\boldsymbol{u})X(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\delta})\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right\} \quad \text{indépendamment du centre } \boldsymbol{r} \text{ de la boule.}$$

La valeur de la fonction d'autocorrélation pour un déplacement $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ est bien évidemment égale à la variance du champ stochastique $\sigma_X^2 = A_X(\mathbf{0}) = \mathsf{E}\left\{X^2(\boldsymbol{r})\right\}$, qu'on peut calculer comme

$$\sigma_X^2 = \lim_{\rho\to\infty}\left\{\frac{1}{V_\rho}\int_{B_\rho(\boldsymbol{r})} X^2(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}\right\} \quad \text{avec la même remarque que précédemment.}$$

Définissant la fonction d'autocorrélation A_{X_ρ} du champ tronqué introduit plus haut par l'intégrale suivante[5], évidemment convergente puisque portant sur une fonction à support borné,

$$A_{X_\rho}(\boldsymbol{\delta}) = \int X_\rho(\boldsymbol{u})X_\rho(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\delta})\mathrm{d}\boldsymbol{u} \quad \text{et en posant} \quad \sigma_{X_\rho}^2 = \int X_\rho^2(\boldsymbol{u})\mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

on peut réutiliser la remarque faite précédemment sur l'unicité de la moyenne globale sous réserve d'existence, pour écrire que A_X est la limite de A_{X_ρ}/V_ρ, quand ρ tend vers l'infini. En particulier, σ_X^2 est la limite de $\sigma_{X_\rho}^2/V_\rho$. Il est également possible de considérer une version normalisée de la fonction d'autocorrélation du champ tronqué, qu'on écrira comme $a_{X_\rho}(\boldsymbol{\delta}) = A_{X_\rho}(\boldsymbol{\delta})/\sigma_{X_\rho}^2$. Or on a $A_{X_\rho}(\boldsymbol{\delta}) \sim V_\rho A_X(\boldsymbol{\delta})$ et $\sigma_{X_\rho}^2 \sim V_\rho\sigma_X^2$ quand ρ tend vers l'infini. La limite de a_{X_ρ} est donc égale à ce qu'on peut considérer légitimement comme la fonction d'autocorrélation normalisée a_X du champ stochastique complet, soit

$$\lim_{\rho\to\infty} a_{X_\rho}(\boldsymbol{\delta}) = \frac{A_X(\boldsymbol{\delta})}{\sigma_X^2} \equiv a_X(\boldsymbol{\delta}).$$

V.4.b Propriétés

Il est évident que la fonction d'autocorrélation est réelle et paire, puisque $A_X(-\boldsymbol{\delta}) = A_X(\boldsymbol{\delta})$, le champ X étant supposé stationnaire. On peut également montrer qu'elle est définie positive, c'est-à dire que

$$\sum_{i,j} a_i a_j^* A_X(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j) \geqslant 0 \quad \text{quels que soient les nombres complexes } (a_k) \text{ et les déplacements } (\boldsymbol{\delta}_k).$$

On notera que cette propriété se transmet au spectre de puissance de X. On a d'autre part vu, dans la section **IV.5.a**, qu'il existait une inégalité de Cauchy-Schwarz entre les espérances mathématiques impliquant

[5] On ne normalise pas ici par un volume, car le volume approprié dépendrait de $\boldsymbol{\delta}$, ce qui n'est pas souhaitable.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

deux variables aléatoires, inégalité qu'on peut réécrire pour un champ stochastique X et son translaté de $\boldsymbol{\delta}$ selon

$$A_X^2(\boldsymbol{\delta}) \leqslant \mathsf{E}\{X^2(\boldsymbol{r})\}\mathsf{E}\{X^2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta})\} = \sigma_X^4 \quad \text{et par conséquent} \quad A_X(\boldsymbol{\delta}) \leqslant A_X(\mathbf{0}).$$

La fonction d'autocorrélation atteint donc nécessairement son maximum absolu en $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. On peut d'ailleurs le montrer en considérant la fonction de structure d'ordre deux, comme on le verra plus bas. Ce résultat montre également que la fonction d'autocorrélation normalisée est toujours inférieure ou égale à 1, valeur qu'elle atteint en $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$.

V.5 Spectre de puissance

V.5.a Problèmes de définition

Le spectre de puissance d'un champ stochastique X est *a priori* défini comme la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation. Cependant, avant de pouvoir écrire brutalement une relation le définissant explicitement, il convient de se pencher sur le problème de la convergence des intégrales de Fourier. En particulier, la transformée de Fourier de $X(\boldsymbol{r})$ n'existe pas nécessairement, l'intégrale

$$\widehat{X}(\boldsymbol{k}) = \int X(\boldsymbol{r}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{n'ayant aucune raison de converger } \textit{a priori}.$$

Pour contourner cette difficulté on considère le champ stochastique tronqué X_ρ qu'on a défini plus haut. La convergence de l'intégrale définissant la transformée de Fourier de ce champ tronqué est évidente, puisqu'il s'agit en fait d'une intégrale sur un domaine fini de l'espace,

$$\widehat{X}_\rho(\boldsymbol{k}) = \int X_\rho(\boldsymbol{r}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int X(\boldsymbol{r}) \sqcap_\rho(\boldsymbol{r}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{avec } \sqcap_\rho \text{ nulle en dehors de la boule } B_\rho(\mathbf{0}).$$

Si l'on suppose que la transformée de Fourier $\widehat{X}$ du signal complet existe, $\widehat{X}_\rho$ s'écrit alors [Bracewell, 2000] comme le produit de convolution de celle-ci par la transformée de Fourier de $\sqcap_\rho$. Cette dernière est une fonction de Bessel dont l'ordre dépend de la dimension n de l'espace et dont l'argument dépend du module de $\boldsymbol{k}$. En particulier, dans le cas où l'on considère des processus unidimensionnels, elle prend la forme d'un sinus cardinal. Dans tous les cas, elle tend vers une distribution de Dirac quand le rayon ρ tend vers l'infini, étant donné que $\sqcap_\rho$ s'approche d'une fonction uniforme partout égale à un, d'où

$$\lim_{\rho\to\infty} \widehat{X}_\rho = \lim_{\rho\to\infty} (\widehat{X} * \widehat{\sqcap}_\rho) = \widehat{X} * \lim_{\rho\to\infty} \widehat{\sqcap}_\rho = \widehat{X} * \delta = \widehat{X}.$$

Afin d'approcher le spectre de puissance de X, on peut commencer par écrire la transformée de Fourier $\mathcal{P}_{X_\rho}$ de la fonction d'autocorrélation A_{X_ρ} du champ tronqué X_ρ. Or celle-ci peut s'écrire comme le produit de convolution de X_ρ par un champ stochastique miroir, noté Y_ρ et défini par $Y_\rho(\boldsymbol{r}) = X_\rho(-\boldsymbol{r})$. Sa transformée de Fourier $\mathcal{P}_{X_\rho}$ est donc égale au produit simple des transformées de Fourier respectives de X_ρ et de Y_ρ, qui sont en fait complexes conjuguées l'une de l'autre. Par conséquent,

$$\mathcal{P}_{X_\rho}(\boldsymbol{k}) = |\widehat{X}_\rho(\boldsymbol{k})|^2 \quad \text{soit, en passant à la limite infinie} \quad \lim_{\rho\to\infty} \mathcal{P}_{X_\rho}(\boldsymbol{k}) = |\widehat{X}(\boldsymbol{k})|^2.$$

On peut alors légitimement considérer que cette limite constitue le spectre de puissance $\mathcal{P}_X(\boldsymbol{k})$ du champ stochastique complet, bien que [Papoulis, 1984] fasse remarquer qu'en fait, si l'on dispose du spectre de puissance $\mathcal{P}_X$ défini par une transformation de Fourier directe de la fonction d'autocorrélation A_X, le passage à la limite n'est rigoureusement vrai que pour l'espérance,

$$\lim_{\rho\to\infty} \mathsf{E}\left\{\mathcal{P}_{X_\rho}(\boldsymbol{k})\right\} = \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}), \quad \text{la variance } \mathsf{E}\left\{\mathcal{P}_{X_\rho}^2(\boldsymbol{k})\right\} \text{ ne tendant pas vers zéro.}$$

En cas de difficulté, on peut également passer à la limite en partant de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation normalisée du champ tronqué. Quoi qu'il en soit, on ne se posera plus ces problèmes de définition, et on écrira

$$\mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}) = \int A_X(\boldsymbol{\delta}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\delta}} \mathrm{d}\boldsymbol{\delta} \quad \text{et inversement} \quad A_X(\boldsymbol{\delta}) = \int \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}) e^{2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\delta}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{9}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

en notant, comme le fait Bracewell [Bracewell, 2000], qu'on s'arrangera toujours pour que le spectre de puissance soit la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, quitte à modifier quelque peu les définitions de ces deux quantités.

V.5.b Propriétés

La parité de la fonction d'autocorrélation pour un champ stochastique X réel entraîne celle du spectre de puissance, puisque le domaine d'intégration est symétrique. On peut donc considérer, comme on le fait effectivement couramment, que ce qu'on conviendra d'appeler spectre de puissance est la quantité

$P_X(\boldsymbol{k}) = \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}) + \mathcal{P}_X(-\boldsymbol{k}) = 2\mathcal{P}_X(\boldsymbol{k})$ définie sur un demi-espace uniquement.

Remarquons également que le fait de partir d'un champ X réel permet d'écrire les définitions (9) sous la forme de transformations de Fourier en cosinus, du fait de la parité des fonctions A_X et $\mathcal{P}_X$.
L'expression alternative du spectre de puissance écrite plus haut, $\mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}) = |\widehat{X}(\boldsymbol{k})|^2$, directement reliée au champ stochastique X, nous servira de façon essentielle au chapitre **VII**, lorsqu'on voudra construire des champs stochastiques ayant un spectre de puissance spécifié à l'avance. En particulier, prenant la valeur à l'origine de l'espace de Fourier, $\mathcal{P}_X(\boldsymbol{0}) = |\widehat{X}(\boldsymbol{0})|^2 = \mathsf{E}\{X(\boldsymbol{r})\}^2$, on voit qu'elle est égale au carré de la moyenne du champ X. Dans le même ordre d'idées, l'intégrale du spectre de puissance sur tout l'espace de Fourier est en fait la variance σ_X^2 du champ, puisque

$\displaystyle\int \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k} = A_X(\boldsymbol{0}) = \mathsf{E}\{X^2(\boldsymbol{r})\}$ ce qui peut également se montrer par le théorème de Rayleigh.

V.5.c Calcul pratique

L'expression du spectre de puissance d'un champ quelconque X comme carré du module de la transformée de Fourier de ce champ permet de le calculer très simplement, les méthodes de transformation de Fourier numériques étant déjà connues et disponibles. C'est toujours par ce biais que l'on calculera les spectres de puissance des observables discutées aux chapitres **XII** et **XIII**, et non en passant par la fonction d'autocorrélation. On aurait même plutôt tendance à faire le chemin inverse et à calculer cette dernière à partir du spectre de puissance[6].

V.6 Les fonctions de structure

V.6.a Définition et relation avec la fonction d'autocorrélation

Il est possible de construire d'autres mesures des fluctuations d'un champ stochastique. Parmi elles, on note les fonctions de structure, dont on a déjà parlé au chapitre **III** au sujet de la caractérisation des écoulements turbulents. De manière générale, et étant donné un champ stochastique scalaire et stationnaire X, on définit sa fonction de structure d'ordre p par[7]

$S_X^{(p)}(\boldsymbol{\delta}) = \mathsf{E}\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^p\}$ quelle que soit la position $\boldsymbol{r}$.

Remarquons qu'au chapitre **III**, le caractère vectoriel du champ de vitesse nous avait incité à considérer des formes plus complexes, impliquant les différentes composantes de la vitesse. On utilisera peu les fonctions de structure dans ce travail, si ce n'est celle d'ordre deux, car elle est intimement liée à la fonction d'autocorrélation. En effet, en développant simplement l'expression ci dessus, on obtient

$$S_X^{(2)}(\boldsymbol{\delta}) = \mathsf{E}\left\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2\right\} = \mathsf{E}\left\{X^2(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) + X^2(\boldsymbol{r}) - 2X(\boldsymbol{r})X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta})\right\} = 2\left[\sigma_X^2 - A_X(\boldsymbol{\delta})\right],$$

relation qu'on utilisera notamment aux chapitres **X** et **XI** et qui permet de montrer également que la fonction d'autocorrélation est toujours inférieure à σ_X^2. Comme il n'y aura pas de risque de confusion, on notera simplement S_X pour désigner la fonction de structure d'ordre deux.

[6] Notons tout de même que c'est à partir du calcul des fonctions d'autocorrélation qu'on déduira des propriétés du spectre de puissance des cartes de centroïdes aux chapitres **X** et **XI**.

[7] L'ordre p est *a priori* quelconque, mais si on le choisit non entier, la définition correcte des fonctions de structure doit faire intervenir une valeur absolue.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

V.6.b Calcul pratique

D'un point de vue pratique, le calcul des fonctions de structure est ardu, pour plusieurs raisons. Tout d'abord parce qu'il faut *a priori* se donner un grand nombre de réalisations d'un même champ stochastique, ce qui n'est possible que dans le cas des modèles synthétiques qu'on introduira dans les chapitres suivants. Dans le cas contraire, il est nécessaire de s'appuyer sur le principe ergodique et de calculer la moyenne sur la position $\boldsymbol{r}$ des puissances des incréments du champ donnés par $X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta})-X(\boldsymbol{r})$, et ce pour toutes les séparations $\boldsymbol{\delta}$ possibles, ce qui représente un temps de calcul de l'ordre du nombre de pixels du champ et peut devenir extrêmement long dans certains cas.
Afin de contourner ce problème, on peut calculer des fonctions de structure grossières *(coarse structure functions)*, décrites par [Brunt *et al.*, 2003], en procédant comme suit. On commence par découper le champ en un certain nombre de sous-ensembles disjoints, en utilisant une grille orthogonale dont les cellules ont toutes la même taille caractéristique L. On calcule ensuite, dans chacune de ces cellules, la moyenne locale du champ, puis les incréments du champ grossier résultant, le long des différentes directions principales. On élève ces incréments à la puissance p et on en fait la moyenne, ce qui donne une estimation de la fonction de structure d'ordre p pour les séparations de module L. La fiabilité de cette méthode approchée sera testée au chapitre **VII** dans le cadre de champs synthétiques dont la fonction de structure d'ordre deux est connue.

V.7 La Δ-variance

V.7.a Introduction : la variance d'Allan

Dans le cadre de l'étude de la stabilité des horloges atomiques, Allan [Allan, 1966] a introduit un autre outil statistique, adapté à l'analyse de signaux aléatoires unidimensionnels. Cet outil, la variance d'Allan, représente, pour une échelle de temps τ donnée, la variance des différences entre deux moyennes successives sur des durées τ. Présentée ainsi, on comprend pourquoi elle permet de caractériser les dérives de séries temporelles.
Plus précisément, et reprenant les notations de la section **V.3**, on écrit les moyennes locales du signal unidimensionnel $X(t)$ sur une durée 2τ sous la forme de produits de convolution[8],

$$\mu_\tau = \frac{1}{2\tau}\left(X * \sqcap_\tau\right), \quad \text{ce qui est immédiat d'après la définition de } \mu_\tau.$$

La différence entre deux de ces moyennes locales successives peut également se mettre sous la forme d'une convolution, cette fois par des différences de distributions de Dirac, puisque

$$\Delta\mu_\tau(t) = \mu_\tau\left(t+\tau\right) - \mu_\tau\left(t-\tau\right) \quad \text{et donc} \quad \Delta\mu_\tau = \mu_\tau * (\delta_{-\tau} - \delta_\tau) \quad \text{avec} \quad \delta_\tau(t) = \delta(t-\tau).$$

On peut donc écrire $\Delta\mu_\tau$ comme le produit de convolution de X par une fonction F_τ qu'on appellera *down-up* à la manière de [Stutzki *et al.*, 1998], ce qui exprime bien sa forme, représentée sur la figure **V.3**.
La variance d'un signal quelconque étant l'intégrale du spectre de puissance sur l'ensemble de l'espace de Fourier, et puisque la convolution se traduit par la multiplication des spectres de puissance[9], la variance d'Allan apparaît comme une moyenne filtrée du spectre de puissance du signal de départ,

$$\sigma_A^2(2\tau) = \frac{1}{2}\int \mathcal{P}_X(\nu)\mathcal{P}_{F_\tau}(\nu)\mathrm{d}\nu \quad \text{où le facteur } \frac{1}{2} \text{ est introduit pour des raisons historiques.}$$

La fonction de filtrage se met sous la forme $\mathcal{P}_{F_\tau}(\nu) \propto \sin^4(2\pi\nu\tau)/(2\pi\nu\tau)^2$, donnée par [Stutzki *et al.*, 1998]. En faisant varier la durée τ, on peut alors suivre l'évolution du spectre de puissance du signal X avec la fréquence ν, tout en améliorant la statistique par le biais d'une moyenne sur l'ensemble du spectre, ce qui différencie nettement cette méthode de celles fondées sur la simple transformation de Fourier.

[8] On choisit de considérer une durée 2τ uniquement pour alléger les notations, les formes correspondantes pour la durée τ étant triviales à écrire *a posteriori*.

[9] Ce qui est immédiat à partir du théorème de convolution, et en utilisant le fait que le spectre de puissance est égal au carré du module de la transformée de Fourier.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

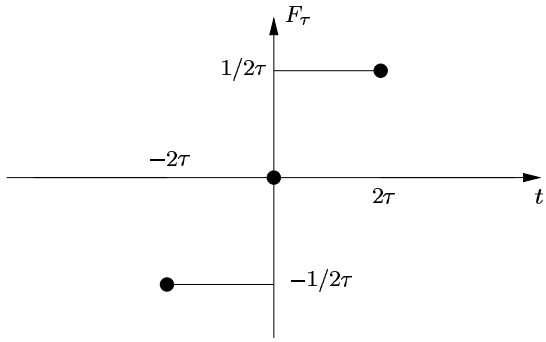

FIG. **V.3** – *Représentation graphique de la fonction down-up F_τ*

Il est possible de choisir d'autres différences entre moyennes locales, de façon à jouer sur la fonction filtre dans l'expression de la variance d'Allan en Fourier. On obtient ainsi d'autres mesures statistiques sur le signal, faisant intervenir une fonction filtre différente. C'est l'idée à la base de l'introduction de la Δ-variance, dont la nécessité devient évidente dès lors que l'on souhaite considérer des champs stochastiques en dimension supérieure. En effet, comme il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ avec $n > 1$, la notion de moyennes "successives " n'a pas de sens et il faut donc trouver une alternative. Assez naturellement, on va considérer des différences symétrisées, en commencant par le cas unidimensionnel.

V.7.b Cas des signaux unidimensionnels

Étant donné le processus stochastique $X(t)$, on construit les doubles différences

$$\Delta^s\mu_\tau(t) = \mu_\tau(t) - \frac{1}{2}\left[\mu_\tau(t-2\tau) + \mu_\tau(t+2\tau)\right] \quad \text{de sorte que la symétrie temporelle soit conservée.}$$

Cette expression peut se voir comme la différence entre deux moyennes locales au même point, mais sur des échelles différentes. On utilisera justement cette approche dans la suite. Pour l'instant, et pour faire le lien avec ce qui précède, remarquons que $\Delta^s\mu_\tau$ peut se mettre sous la forme d'un produit de convolution, soit $\Delta^s\mu_\tau = X * G_\tau$, où G_τ est la fonction *down-up-down* représentée sur la figure **V.4**. En prenant la variance de ces différences, qui forment un signal unidimensionnel, on obtient alors, de manière tout à fait semblable au cas précédent, une mesure statistique sur le signal X analogue à la variance d'Allan et qu'on nomme Δ-variance. Son expression en terme de spectres de puissance est semblable à celle écrite pour la variance d'Allan,

$$\sigma^2_\Delta(2\tau) = \frac{1}{2}\int \mathcal{P}_X(\nu)\mathcal{P}_{G_\tau}(\nu)\mathrm{d}\nu \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{G_\tau}(\nu) = 4\frac{\sin^6(2\pi\nu\tau)}{(2\pi\nu\tau)^2}.$$

Les remarques faites précédemment au sujet de la variance d'Allan s'appliquent également à la Δ-variance, mais la différence principale entre les deux, on l'a souligné, est le fait qu'on puisse généraliser cette dernière au cas des champs stochastiques en dimension supérieure.

V.7.c Cas des dimensions supérieures

Considérant un champ stochastique $X(\boldsymbol{r})$ défini sur un espace $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$, on construit, à la manière de ce qui a été fait en dimension un, la différence entre des moyennes locales prises au même point, mais portant sur des régions de l'espace de tailles différentes,

$$\Delta^s\mu_\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{q^n}{q^n-1}\left[\mu_\rho(\boldsymbol{r}) - \mu_{q\rho}(\boldsymbol{r})\right] \quad \text{où le réel } q > 1 \text{ donne le rapport des tailles considérées.}$$

Habituellement, et pour maintenir la cohérence avec le cas unidimensionnel, on prend $q = 3$. On peut montrer [Stutzki *et al.*, 1998] que cette différence revient à prendre le produit de convolution du champ

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

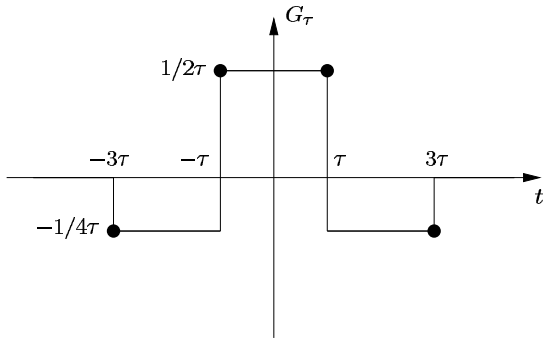

FIG. **V**.4 – *Représentation graphique de la fonction down-up-down* G_τ

X avec une fonction généralisant la fonction *down-up-down* du cas unidimensionnel, qu'on notera $G_{n,\rho}$, et qu'on a représentée sur la figure **V**.5 dans le cas où $n = 2$. La variance du champ $\Delta^s\mu_\rho$ est par définition la Δ-variance associée au champ stochastique X, qu'on peut écrire comme une moyenne filtrée du spectre de puissance de ce dernier sur l'espace de Fourier,

$$\sigma^2_\Delta(2\rho) = \frac{1}{\Sigma_n}\int \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k})\mathcal{P}_{G_{n,\rho}}(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{10}$$

le facteur de normalisation Σ_n étant la surface de la sphère unité en dimension n. Comme le montre Stutzki [Stutzki *et al.*, 1998], la fonction filtre s'écrit à l'aide des fonctions de Bessel J_α et de la fonction Γ d'Euler,

$$\mathcal{P}_{G_{n,\rho}}(\boldsymbol{k}) = \left\{\frac{3^n}{3^n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\left[\left(\sqrt{\frac{1}{\pi k\rho}}\right)^n J_{n/2}(2\pi k\rho) - \left(\sqrt{\frac{1}{3\pi k\rho}}\right)^n J_{n/2}(6\pi k\rho)\right]\right\}^2, \tag{11}$$

où k est bien évidemment le module du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Les conclusions tirées du cas de la variance d'Allan restent valables ici. En particulier, on peut voir la Δ-variance à une échelle ρ comme une façon d'isoler le comportement du champ stochastique X à cette échelle, du fait que la fonction filtre présente un maximum pour un nombre d'onde $k \simeq 1/(2\pi\rho)$.

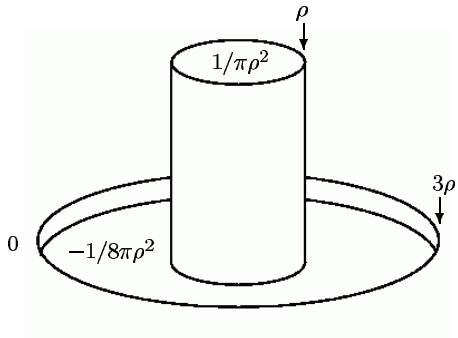

FIG. **V**.5 – *Représentation en perspective de la fonction down-up-down* $G_{2,\rho}$.

V.7.d Mise en pratique

Le calcul pratique de la Δ-variance d'un champ X aux différentes séparations L souffre d'une difficulté semblable à celle affectant le calcul des fonctions de structure, dès lors qu'on souhaite la calculer dans l'espace direct et non en passant par le spectre de puissance. En effet, il faut procéder à la convolution du champ par un ensemble de noyaux de toutes les tailles possibles, en prenant d'autre part garde au problème des bords du champ. De même qu'il est possible de s'affranchir du problème posé par les fonctions de

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

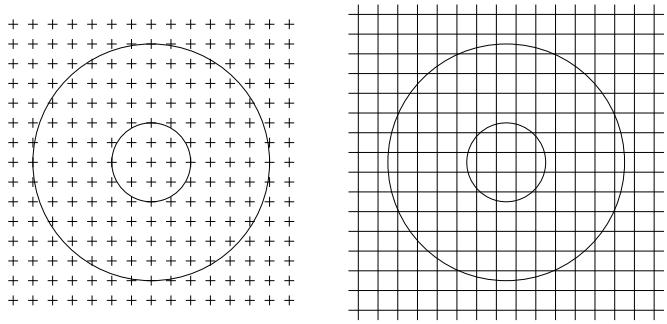

FIG. **V**.6 – *Illustration des algorithmes "POINT" (à gauche) et "PIX" (à droite). Sur chaque sous-figure, les deux cercles concentriques indiquent les rayons ρ et 3ρ. Sur la figure de gauche, les centres des pixels sont symbolisés par des croix, tandis que, sur la figure de droite, on représente leurs bords.*

structure en en introduisant des versions grossières, on peut contourner la difficulté du calcul de la Δ-variance en ne faisant ce dernier que pour certaines tailles ρ du noyau de convolution.
Dans le cas particulier des champs bidimensionnels, on peut suivre la démarche de [Bensch *et al.*, 2001], qu'on résume ici brièvement. Pour effectuer un produit de convolution d'images qui sont échantillonnées et non pas continues, il faut procéder à des approximations numériques. L'image convoluée $Y = G_{2,\rho} * X$ peut s'écrire alors en chaque pixel (i, j) comme

$$Y(i,j) = \sum_{k,l} w(i-k, j-l) X(k,l) \quad \text{où } w \text{ représente le noyau de convolution, centré sur le pixel } (i,j).$$

La notation w plutôt que $G_{2,\rho}$ dans cette forme s'explique par la discrétisation. En effet, idéalement, la fonction filtre devrait, à l'intérieur du disque et de l'anneau qu'on peut voir sur la figure **V**.5, prendre deux valeurs constantes et distinctes. Or tous les pixels ne sont pas équivalents vis-à-vis de ces régions particulières de l'espace bidimensionnel : certains sont plus ou moins recouverts par telle ou telle partie de la fonction filtre, comme le montre la partie droite de la figure **V**.6. Il y a donc ambiguïté quant au fait de savoir si un pixel donné fait partie de telle ou telle région et donc sur la valeur du noyau de convolution en ce point. Par conséquent, w est *a priori* différent de la fonction $G_{2,\rho}$. Parmi les choix possibles pour les poids w, on note les deux suivants : soit tous les pixels dont le centre est inclus dans une région donnée de la fonction filtre ont le même poids (algorithme "POINT"), soit ce poids est proportionnel à la fraction du pixel recouverte par le filtre (algorithme "PIX"). La contrainte supplémentaire étant que les sommes des poids, respectivement dans l'anneau et dans le disque, doivent être égales à l'unité, de sorte que pour une image plate, la convolution donne un résultat nul, comme attendu analytiquement. On verra au chapitre **VII** ce que donne cette méthode sur des champs stochastiques pour lesquels la Δ-variance est connue.
Il est possible de calculer la Δ-variance en passant par l'espace de Fourier, mais cette approche est sujette à caution lorsque les champs considérés ne sont pas périodiques, car les effets de bord affectant le spectre de puissance se retrouvent alors nécessairement dans l'équation (10).

En conclusion, que l'on utilise le spectre de puissance, la fonction d'autocorrélation, les fonctions de structure ou la Δ-variance, le problème de la caractérisation des champs stochastiques est ainsi mis en lumière sous une forme qu'on pourrait résumer par la question suivante : comment décrire les fluctuations d'un tel champ, en fonction de l'échelle à laquelle on les considère ? C'est cette approche qui est à la base de la géométrie fractale, objet du prochain chapitre.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE VI

Géométrie fractale

VI.1 Introduction

La géométrie des systèmes physiques, depuis les échelles microscopiques jusqu'aux échelles astronomiques, joue un rôle central dans la compréhension et la modélisation de la nature. Qu'il s'agisse de cristaux, d'écoulements, de molécules, de galaxies, ou encore des structures du milieu interstellaire, la description des objets de la physique passe inévitablement par une étape géométrique. Ainsi, les figures classiques de la géométrie héritée de la Grèce antique ont occupé une place centrale dans le développement de la physique moderne. On peut citer la modélisation des orbites planétaires par des ellipses, celles des trajectoires de mobiles isolés par des droites, ou encore l'interprétation des figures de diffraction de rayons X par des cristaux réguliers. Plus frappante encore est l'application réussie d'une géométrie alternative, en l'occurrence la géométrie riemannienne, à une théorie physique, la relativité générale d'Einstein.
Pourtant, de nombreux systèmes physiques échappent à ces modélisations simples, et requièrent une géométrie plus appropriée et plus sophistiquée. Il est difficilement concevable, par exemple, de se contenter de modéliser un nuage atmosphérique par une sphère, tant un tel système peut prendre de formes diverses. On peut également penser aux avalanches, dont la compréhension nécessite une modélisation adéquate des surfaces complexes sur lesquelles elles ont lieu. On peut encore évoquer la croissance de certains cristaux, dont les formes sont trop spécifiques pour pouvoir être correctement modélisées par des figures simples.
C'est le rôle de la géométrie fractale que de fournir les outils adaptés à la description de ces systèmes complexes. Le concept de "fractal" a été introduit par le mathématicien français Benoît Mandelbrot au cours des années 1960-1970 [Mandelbrot, 1967] et cette nouvelle branche des mathématiques ainsi que le champ de ses applications ont connu depuis un essor prodigieux. Mandelbrot a ainsi écrit de nombreux ouvrages (voir par exemple [Mandelbrot, 1982]) traitant de la géométrie fractale de phénomènes issus de domaines aussi divers que la biologie, la turbulence, ou encore l'économie. Cependant, l'existence de "fractals naturels" tels que les frontières de nuages ou les surfaces topographiques ne doit pas autoriser à les confondre arbitrairement, à toutes les échelles, avec les fractals mathématiques, qui sont leur modélisation[1].
Mandelbrot évite de donner une définition trop précise de ce qu'est un ensemble fractal, et ce parce que, quelle que soit la définition adoptée, il existe toujours des objets échappant à celle-ci et qu'il est pourtant impossible de ne pas qualifier de fractal. C'est pourquoi il est plus judicieux de considérer une liste de propriétés assez générales et de décider, sur cette base, si un ensemble est fractal ou non. Suivant [Falconer, 1990], on parlera d'un ensemble fractal F si, typiquement :

▷ F possède de la structure à des échelles arbitrairement petites.
▷ F est trop irrégulier pour pouvoir être décrit en termes de figures géométriques traditionnelles, que ce soit localement ou globalement.
▷ F possède, d'une certaine manière, une propriété d'autosimilarité.
▷ On peut assigner à F une "dimension fractale", habituellement plus grande que sa dimension topologique, laquelle est un entier dont la valeur est en générale évidente[2].

La dimension fractale permet de caractériser l'irrégularité d'un ensemble fractal. Il en existe diverses définitions, qui ne sont pas toutes applicables à tous les types d'ensembles[3], mais on va s'intéresser ici plus

[1] Cette remarque vaut également dans le cadre de la géométrie classique : il n'existe pas de ligne droite ou de sphère parfaite dans la nature.
[2] Par exemple, la dimension topologique d'un ensemble de points discrets est nulle. Elle vaut 1 si chaque point de l'ensemble possède des voisinages arbitrairement petits dont l'intersection avec l'ensemble n'est pas réduite au point considéré et si la frontière de l'ensemble est de dimension topologique 0.
[3] On pense en particulier à la dimension de similitude, qui n'a de sens que pour une classe très particulière d'ensembles strictement autosimilaires.

particulièrement aux dimensions de Hausdorff et de boîte.

VI.2 Mesure et dimension de Hausdorff

VI.2.a Mesure de Hausdorff

Définition

La mesure de Hausdorff d'un ensemble consiste à donner une idée de la taille de cet ensemble en le recouvrant par toute une série de parties "étalons". Grossièrement, il s'agit donc de formaliser à des ensembles complexes l'idée simple selon laquelle, pour mesurer une distance par exemple, on reporte une règle ou tout autre instrument de mesure un certain nombre de fois, et que ce nombre caractérise la taille de l'ensemble étudié. Cette idée a été introduite par Carathéodory en 1914 puis appliquée par Hausdorff en 1919.
On considère donc un sous ensemble F de $\mathbb{R}^n$, et on se donne un réel $r > 0$. On suppose qu'il existe un ensemble au plus dénombrable de parties U_i de $\mathbb{R}^n$ dont le diamètre[4] est $|U_i| \leqslant r$, et tel que F soit contenu dans l'union des U_i. La famille $\{U_i\}$ est alors un r-recouvrement de F. Il est par ailleurs évident que si $r' \geqslant r$, alors $\{U_i\}$ est aussi un r'-recouvrement de F.
Si maintenant on se donne un réel $s \geqslant 0$, on peut définir le nombre suivant

$$\mathcal{H}_r^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s \ ; \ \{U_i\} \text{ est un } r\text{-recouvrement de } F \right\}.$$

On peut comprendre que lorsque r décroît, $\mathcal{H}_r^s(F)$ diminue. Or $\mathcal{H}_r^s(F) \geqslant 0$, donc il existe une limite à $\mathcal{H}_r^s(F)$ pour r tendant vers 0, notée $\mathcal{H}^s(F)$ et qu'on appelle mesure s-dimensionnelle de Hausdorff de F.

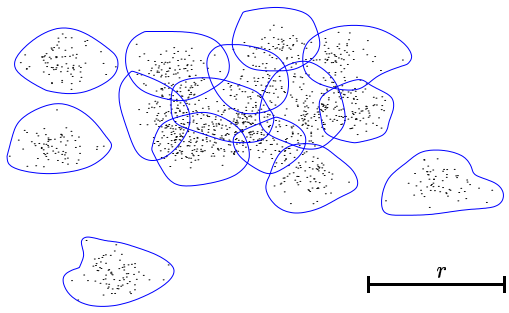

FIG. **VI.1** – *Exemple de r-recouvrement d'un ensemble de points du plan par des parties de $\mathbb{R}^2$. Ce recouvrement n'est de toute évidence pas optimal.*

Propriétés

On peut montrer que $\mathcal{H}^s(F)$ est effectivement une mesure, mais cela ne nous concernera pas ici. Il est cependant utile de remarquer que la mesure de Hausdorff généralise les idées familières de longueur, d'aire et de volume. Plus précisément, si F est un borélien[5] de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{H}^n(F) = c_n \mathcal{V}_n(F)$, où $\mathcal{V}_n(F)$ désigne le volume classique de F en dimension n, et c_n est une constante égale à l'inverse du volume de la boule unité en dimension n.
De même, si F est un sous ensemble "régulier" de $\mathbb{R}^n$ de dimension topologique m strictement inférieure à n, on a $\mathcal{H}^m(F) = c_m \mathcal{V}_m(F)$. En particulier, si F est un ensemble fini de points, $\mathcal{H}^0(F)$ est égal au cardinal de F, et si F est une courbe lisse, $\mathcal{H}^1(F)$ en donne la longueur.

[4] On rappelle que le diamètre d'un ensemble E est la plus grande distance séparant deux points de cet ensemble, ce qu'on peut écrire mathématiquement sous la forme $|E| = \sup\{|x-y| \ ; \ (x,y) \in E^2\}$.
[5] Les boréliens de $\mathbb{R}^n$ sont les éléments de la plus petite tribu de $\mathbb{R}^n$ contenant les ouverts.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

La mesure de Hausdorff étant donc une généralisation des concepts de longueur, d'aire et de volume, elle possède des propriétés similaires dans les changements d'échelles. En effet, si on se donne $\lambda > 0$, alors $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$, avec la notation évidente $\lambda F = \{\lambda x \ ; \ x \in F\}$. La démonstration est sans difficulté et on la trouvera dans [Falconer, 1990]. De manière plus générale, on peut considérer le cas d'une transformation g de F dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant à une condition de Hölder d'exposant α,

$$(x,y) \in F^2 \ \Rightarrow \ |g(x) - g(y)| \leqslant c|x-y|^\alpha \qquad \text{avec } c > 0.$$

Dans ce cas, on a une relation entre les mesures de Hausdorff de $g(F)$ et de F, sous la forme

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}\left[g(F)\right] \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F) \tag{12}$$

En effet, si $\{U_i\}$ est un r-recouvrement de F, et puisque $|g(F \cap U_i)| \leqslant c|U_i|^\alpha$, alors $\{g(F \cap U_i)\}$ est un ϵ-recouvrement de $g(F)$ avec $\epsilon = cr^\alpha$. Ainsi, on a

$$\sum_i |g(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leqslant c^{s/\alpha} \sum_i |U_i|^s \quad \text{de sorte que} \quad \mathcal{H}_\epsilon^{s/\alpha}[g(F)] \leqslant c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F),$$

ce qui donne bien le résultat annoncé dans la limite $\epsilon \to 0$. L'intérêt des transformations satisfaisant à la condition de Hölder - qui implique par ailleurs la continuité de ces fonctions - apparaîtra clairement lorsque l'on parlera des mouvements browniens fractionnaires, au chapitre **VII**. Pour $\alpha = 1$, on dit que g est lipschitzienne et on a une relation portant sur les mesures de Hausdorff de même dimension, à savoir $\mathcal{H}^s\left[g(F)\right] \leqslant c^s\mathcal{H}^s(F)$. En particulier les isométries (translations, rotations, symétries) font partie de cette classe de fonctions, et plus spécifiquement, puisqu'alors $|g(x) - g(y)| = |x - y|$, on a $\mathcal{H}^s\left[g(F)\right] = \mathcal{H}^s(F)$, comme on pouvait s'y attendre.

VI.2.b Dimension de Hausdorff

Définition

La dépendance en s de la mesure de Hausdorff telle que définie ci-dessus permet de définir la dimension fractale dite "dimension de Hausdorff" d'un ensemble F de points. Pour cela remarquons d'abord que si $\{U_i\}$ est un r-recouvrement de F et si on a $s' > s$, alors

$$\sum_i |U_i|^{s'} \leqslant r^{s'-s} \sum_i |U_i|^s \ \Rightarrow \ \mathcal{H}_r^{s'}(F) \leqslant r^{s'-s}\mathcal{H}_r^s(F).$$

Par conséquent, si la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle de F est finie, sa mesure s'-dimensionnelle est nulle, en passant à la limite $r \to 0$. Le même raisonnement permet de montrer que si $s' < s$, la mesure s'-dimensionnelle de F est infinie. Il existe donc une valeur critique de s, appelée dimension de Hausdorff de F, pour laquelle la mesure de Hausdorff passe d'une valeur infinie à 0,

$$D_{\mathrm{h}}(F) = \inf\left\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\right\} = \sup\left\{s \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\right\}.$$

Il est important de noter que la valeur de la mesure de Hausdorff pour $s = D_{\mathrm{h}}(F)$ n'est pas nécessairement finie non nulle.

Propriétés

La dimension de Hausdorff possède les propriétés qu'on est en droit d'attendre d'une dimension. En particulier, si F est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il contient une boule non réduite à son centre, et sa dimension de Hausdorff est bien n. De même, si F est une variété de dimension topologique m plongée dans $\mathbb{R}^n$, on a $D_{\mathrm{h}}(F) = m$. La dimension de Hausdorff est également monotone, car si $E \subset F$, alors $D_{\mathrm{h}}(E) \leqslant D_{\mathrm{h}}(F)$. Enfin, si l'on considère un ensemble au plus dénombrable de parties de $\mathbb{R}^n$, la dimension de Hausdorff de leur union est égale à la borne supérieure des dimensions de Hausdorff de chacune des parties. Par exemple, la dimension de Hausdorff d'un ensemble dénombrable de points est nulle.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

D'autre part, les propriétés de la mesure de Hausdorff vis-à-vis des transformations se transposent au cas de la dimension de Hausdorff. En particulier, si g est une fonction définie sur F et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ satisfaisant une condition de Hölder d'exposant α,

$$(x,y) \in F^2 \;\Rightarrow\; |f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|^\alpha \qquad \text{alors} \qquad D_{\mathrm{h}}[g(F)] \leqslant \frac{1}{\alpha} D_{\mathrm{h}}(F), \tag{13}$$

ce qu'on peut montrer sans difficulté [Falconer, 1990] à partir de la relation (12). En particulier, pour une transformation bi-lipschitzienne, pour laquelle on a une double inégalité,

$$(x,y) \in F^2 \;\Rightarrow\; c_2|x-y| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant c_1|x-y|,$$

la dimension de Hausdorff est conservée, ce qui constitue une invariance fondamentale, en ce sens qu'il n'existe donc pas de correspondance bi-lipschitzienne entre ensembles de dimensions de Hausdorff différentes, ce qui permet une classification des ensembles. Une approche de la géométrie fractale est ainsi de considérer comme identiques des ensembles possédant une telle correspondance, et étant donc de même dimension de Hausdorff.
Il convient cependant de remarquer que le calcul analytique direct de la dimension de Hausdorff d'un ensemble peut se révéler très difficile, voire impossible, et c'est en partie pour cette raison que d'autres dimensions fractales ont été introduites, comme la dimension de boîte.

VI.3 Dimension de boîte

VI.3.a Définitions alternatives d'une dimension fractale

La remarque faite au début de la section **VI.2**, selon laquelle la mesure de Hausdorff est une formalisation de la manière empirique de "mesurer" un objet, est au centre des diverses définitions de dimension fractale. On se donne une échelle r et on mesure un ensemble F à cette échelle, sans se soucier des irrégularités plus petites que r. C'est en observant le comportement de cette "mesure" $M_r(F)$ lorsque r tend vers 0 qu'on peut en déduire un nombre caractérisant la dimension de l'ensemble, typiquement comme exposant d'une loi de puissance de la forme $M_r(F) \sim cr^{-d}$. La dimension d est alors par exemple calculée par extrapolation d'un ensemble de points en coordonnées logarithmiques,

$$d = \lim_{r\to 0} \frac{\ln M_r(F)}{-\ln r}.$$

La définition de la "mesure" $M_r(F)$ laisse une grande latitude permettant de construire des dimensions fractales variées, de sorte qu'il ne faut pas s'attendre à ce qu'elles donnent toutes les mêmes valeurs, même pour des ensembles simples. Ce qu'on demandera en revanche à une dimension, c'est de posséder certaines des propriétés de la dimension de Hausdorff, telles que décrites plus haut [Falconer, 1990].

VI.3.b Dimension de boîte

La dimension de boîte (*box-counting dimension* ou *box dimension*) est l'une des définitions alternatives les plus utilisées, en raison de la facilité relative avec laquelle elle peut être calculée, directement ou empiriquement. Son origine historique est difficile à retracer, et on pourra la retrouver sous les noms de dimension de Kolmogorov, dimension d'entropie ou encore dimension d'information.
Soit F une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. On considère les r-recouvrements de F. Il est clair qu'il en existe de cardinal fini[6], puisque F est bornée. On peut donc sans difficulté définir $N_r(F)$ comme étant le nombre minimum de parties de $\mathbb{R}^n$ de diamètre au plus r nécessaires pour recouvrir F. On définit alors la dimension de boîte de F par

$$D_{\mathrm{b}}(F) = \lim_{r\to 0} \frac{\ln N_r(F)}{-\ln r}.$$

On peut montrer, en ce qui concerne les parties recouvrant F, qu'il est possible de se limiter à des boules disjointes de diamètre r centrées sur des points de F, ou encore aux pavés n-dimensionnels de côté r, sans

[6] Voir la figure **VI.1**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

que la dimension de boîte en soit affectée. Ce dernier choix facilite d'ailleurs considérablement le calcul pratique. En effet, il suffit de construire un ensemble de grilles de taille décroissante sur $\mathbb{R}^n$, et pour chaque taille de compter combien de boîtes contiennent au moins un point de l'ensemble F. Le comportement de ce nombre en fonction de la taille fournit la dimension de boîte de F.
Les propriétés de la dimension de boîte sont semblables à celles de la dimension de Hausdorff. En particulier, si F est une variété "régulière" de $\mathbb{R}^n$, de dimension topologique m, alors $D_{\mathrm{b}}(F) = m$. D'autre part la propriété de monotonie s'applique aussi à la dimension de boîte. Enfin, celle-ci se comporte exactement comme la dimension de Hausdorff vis-à-vis des transformations bi-lipschitziennes ou Hölder. D'autres propriétés, plus ou moins désirables, de la dimension de boîte sont étudiées dans [Falconer, 1990].

VI.4 Techniques analytiques de calcul des dimensions fractales

VI.4.a Estimation directe

Le calcul des dimensions fractales d'ensembles de points de $\mathbb{R}^n$, en particulier de la dimension de Hausdorff, est en général difficile de manière directe, mais on peut souvent assez facilement en obtenir un majorant "évident", qui se révèle également souvent être la valeur correcte de la dimension, bien que la démonstration de cette égalité puisse être particulièrement ardue.
Pour obtenir un tel majorant de la dimension de Hausdorff, il suffit d'évaluer, pour des r-recouvrements $\{U_i\}$ particuliers de F, les sommes de leurs diamètres élevés à la puissance s. Réciproquement, si l'on souhaite obtenir un minorant, il faut impérativement considérer tous les recouvrements possibles de F, pour lesquels les différentes parties n'ont pas nécessairement toutes le même diamètre. Il est possible de contourner ce problème en faisant remarquer que si un seul U_i recouvre une grande partie de F, sa contribution mesurée par $|U_i|^s$ ne peut être petite, et donc ce recouvrement ne s'approche pas de la borne inférieure qu'est la mesure de Hausdorff de F. En fait, les méthodes de calcul de la dimension de Hausdorff reposent beaucoup sur un compromis entre la "taille" $|U|^s$ d'une partie et le recouvrement de F qu'elle permet, mesuré par $\mu(U)$ où μ est une distribution de masse[7] sur F.
Ainsi, si l'on suppose qu'il existe deux réels $c > 0$ et $r > 0$ tels que pour toute partie U de $\mathbb{R}^n$

$$|U| \leqslant r \;\Rightarrow\; \mu(U) \leqslant c|U|^s \qquad \text{alors} \qquad \mathcal{H}^s(F) \geqslant \frac{1}{c}\mu(F) \quad \text{et} \quad s \leqslant D_{\mathrm{h}}(F) \leqslant D_{\mathrm{b}}(F),$$

ce qui fournit théoriquement assez simplement un minorant s de la dimension de Hausdorff de F.

VI.4.b Méthodes potentielles

L'inconvénient de la méthode directe décrite ci-dessus est qu'il est vite nécessaire de calculer les masses d'un grand nombre de petites parties U, ce qui peut se révéler fastidieux. On introduit donc une méthode permettant de remplacer ces évaluations par celle de la convergence d'une seule intégrale. On définit ainsi, pour $s \geqslant 0$, le $s-$potentiel $V_s(x)$ en un point x de $\mathbb{R}^n$ dû à la distribution de masse μ, et la s-énergie $E_s(\mu)$ associée, par les relations

$$V_s(x) = \int \frac{\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s} \qquad \text{et} \qquad E_s(\mu) = \int V_s(x)\mathrm{d}\mu(x) = \iint \frac{\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\mu(y)}{|x-y|^s}.$$

On peut alors montrer [Falconer, 1990] que s'il existe une distribution de masse μ sur F telle que la s-énergie $E_s(\mu) < \infty$, alors $\mathcal{H}^s(F) = \infty$ et $D_{\mathrm{h}}(F) \geqslant s$, ce qui fournit un minorant de la dimension de Hausdorff de F.

VI.5 Projection d'ensembles fractals

La nécessité d'étudier les propriétés des projections orthogonales d'ensembles fractals sur des sous-espaces est soulignée, dans le contexte des structures complexes du milieu interstellaire, par le fait que nous ne pouvons évidemment n'en observer qu'une projection sur le plan du ciel, bien qu'il s'agisse de structures

[7] Par définition, une distribution de masse sur une partie E de $\mathbb{R}^n$ est une mesure sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est contenu dans E et telle que $0 < \mu(E) < \infty$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tridimensionnelles. Si l'on se réfère aux ensembles réguliers de $\mathbb{R}^3$, on voit que dans le cas le plus général, la projection d'une courbe de dimension 1 est également de dimension 1, tandis que les projections d'ensembles de dimension 2 et 3 sont toutes de dimension 2. Qu'en est-il si l'on considère un ensemble F de dimension de Hausdorff $D_{\mathrm{h}}(F)$ non entière ?
On se place d'abord dans le cas d'un borélien F du plan $\mathbb{R}^2$, et l'on considère sa projection $\mathrm{p}_\theta(F)$ sur la droite L_θ passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'axe horizontal. On dispose alors d'un théorème de projection comportant deux parties :

$$\text{Si } D_{\mathrm{h}}(F) \leqslant 1 \text{ alors } D_{\mathrm{h}}[\mathrm{p}_\theta(F)] = D_{\mathrm{h}}(F) \quad \text{et} \quad \text{si } D_{\mathrm{h}}(F) > 1 \text{ alors } D_{\mathrm{h}}[\mathrm{p}_\theta(F)] = 1.$$

Dans les deux cas, le résultat est valable pour presque tous les angles $\theta \in [0, 2\pi[$, c'est-à-dire qu'il n'est pris en défaut que pour un ensemble de valeurs de θ de mesure nulle, et en pratique on ne s'en souciera donc pas. Une démonstration de ce résultat, donnée par [Falconer, 1990], repose sur une méthode potentielle, mais on ne la détaillera pas ici.
Ces propositions peuvent se généraliser sans difficulté au cas d'une partie F de $\mathbb{R}^n$ avec $n > 2$. On se donne $0 < k < n$ et on note $G_{n,k}$ l'ensemble des "plans" de $\mathbb{R}^n$ de dimension k passant par l'origine. Soit π un tel plan et $\mathrm{p}_\pi(F)$ la projection orthogonale de F sur celui-ci. On a alors le résultat suivant

$$\text{Si } D_{\mathrm{h}}(F) \leqslant k \text{ alors } D_{\mathrm{h}}[\mathrm{p}_\pi(F)] = D_{\mathrm{h}}(F) \quad \text{et} \quad \text{si } D_{\mathrm{h}}(F) > k \text{ alors } D_{\mathrm{h}}[\mathrm{p}_\pi(F)] = k,$$

dans les deux cas pour presque tous les plans $\pi \in G_{n,k}$, c'est-à-dire que pour chacun de ces deux résultats, l'ensemble des plans pour lesquels il n'est pas valable est de mesure nulle. En particulier, si une structure de l'espace tridimensionnel possède une projection sur le plan du ciel de dimension de Hausdorff inférieure à 2, alors on peut sans crainte supposer que la structure initiale est de même dimension.
D'autre part, il existe un résultat qui, bien que sans lien direct avec ce qui nous intéresse, montre bien la complexité de l'étude des fractals. En effet, il est possible de montrer que si l'on se donne un espace $\mathbb{R}^n$ et qu'à chaque plan $\pi \in G_{n,k}$ (avec $0 < k < n$) on affecte un ensemble donné $U_\pi \subset \pi$ alors il existe un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ tel que presque toutes les projections $\mathrm{p}_\pi(F)$ ne diffèrent de U_π que par un ensemble de points de mesure nulle. Grossièrement, cela signifie qu'on peut - théoriquement - construire un fractal F ayant toutes les projections que l'on veut. Falconer [Falconer, 1990] illustre cette idée en imaginant un cadran solaire tel que l'ombre du fractal change au fur et à mesure de la course du Soleil en indiquant constamment l'heure sous forme numérique.

VI.6 Fractals autosimilaires et autoaffines

VI.6.a Méthode de construction

De nombreux ensembles fractals sont faits de parties qui, en un certain sens, sont identiques au tout. Ces propriétés permettent en fait bien souvent de définir un fractal, comme on l'a d'ailleurs suggéré au chapitre **II**. Plus précisément, on les définit comme étant des ensembles invariants par des transformations particulières appelées contractions. Une contraction S n'est rien d'autre qu'une transformation lipschtizienne définie sur un fermé D de $\mathbb{R}^n$ réduisant la distance entre les points,

$$(x,y) \in D^2 \;\Rightarrow\; |S(x) - S(y)| \leqslant c|x - y| \quad \text{avec } 0 < c < 1.$$

Dans le cas où il y a égalité, on dit que S est une similitude. Si on se donne un ensemble fini $(S_1, \ldots, S_m)$ de similitudes sur D, alors un ensemble $F \subset D$ invariant par celles-ci, tel que

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F) \quad \text{est souvent un fractal.} \tag{14}$$

On dit que F est autosimilaire. Un exemple typique est celui de l'ensemble classique de Cantor, dont la construction est illustrée sur la figure **VI**.2 et qui est invariant pour les transformations

$$S_1 : \; x \longmapsto \frac{x}{3} \quad \text{et} \quad S_2 : \; x \longmapsto \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

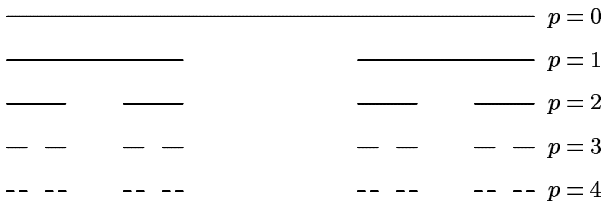

FIG. **VI**.2 – *Construction de l'ensemble de Cantor classique par application successive de l'ensemble des deux transformations S_1 et S_2. Un fractal est obtenu après un nombre infini de transformations.*

En fait on peut montrer qu'il existe une unique partie F, non vide et compacte, invariante sous un ensemble de similitudes. Et cette partie est en fait l'intersection de tous les itérés de n'importe quel sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$, ce qui donne à F un caractère de limite d'une suite d'ensembles appelés préfractals, dont on voit d'ailleurs quelques exemples sur la figure **VI**.2.

VI.6.b Dimension des fractals autosimilaires

La méthode de construction décrite ci-dessus est assez simple pour qu'on puisse supposer que la dimension fractale de l'ensemble F obtenu *in fine* soit calculable en principe. Cette idée provient du fait que les premières dimensions fractales ont précisément été calculées sur de tels ensembles, en utilisant la notion de dimension de similitude, reliant l'évolution du nombre de petites répliques d'une figure génératrice - le premier préfractal - au rapport des tailles d'une étape à l'autre. C'est ainsi qu'on trouve que la dimension de l'ensemble classique de Cantor est de $\ln 2/\ln 3$.
On dispose en effet d'un résultat en ce sens. Si l'on se donne m similitudes S_i caractérisées par des constantes c_i, telles que les composantes $S_i(F)$, où F est l'invariant au sens de l'équation (14), ne se recouvrent pas trop[8], alors on peut affirmer que

$$D_{\mathrm{h}}(F) = D_{\mathrm{b}}(F) = s \qquad \text{avec } s \text{ solution de } \sum_i^m c_i^s = 1.$$

Notons que dans le cas où l'on a affaire à des contractions qui ne sont pas des similitudes, on peut écrire les majorations $D_{\mathrm{h}}(F) \leqslant s$ et $D_{\mathrm{b}}(F) \leqslant s$, où s est toujours la solution de l'équation précédente. Cette méthode permet de calculer les dimensions de Hausdorff et de boîte d'un grand nombre d'ensembles fractals construits par la méthode du **VI.6.a**.

VI.6.c Ensembles autoaffines

Il s'agit d'une surclasse des ensembles autosimilaires, et leur définition est analogue, à ceci près que les transformations $(S_1, \ldots, S_m)$ sont maintenant supposées être des transformations affines,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ S_i(x) = T_i(x) + b_i \quad \text{avec } b_i \in \mathbb{R}^n \text{ et } T_i : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ une transformation linéaire.}$$

Ainsi les transformation S_i sont des combinaisons de translations, de rotations, de contractions, de dilatations, et de symétries. Notons que la différence essentielle avec les similitudes est que les rapports de distance sont différents suivant la direction. Par ailleurs, il est beaucoup moins aisé de trouver la dimension fractale d'ensembles autoaffines, bien qu'il existe un résultat valable dans certains cas particuliers, dont on ne parlera pas ici.
L'importance des notions d'autosimilarité et d'autoaffinité est mise en évidence par la facilité avec laquelle elles peuvent être mises à profit pour modéliser des systèmes naturels tels que fougères, arbres, ou encore nuages [Falconer, 1990], mais il est en revanche généralement difficile, étant donnée une image naturelle, de trouver les transformations S_i et l'invariant F modélisant "au mieux" l'image.

[8] C'est-à-dire qu'il existe un ouvert V borné et non vide contenant l'union disjointe de ses images $S_i(V)$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

VI.6.d Notions d'autosimilarité et d'autoaffinité statistiques

L'ensemble classique de Cantor, tel que représenté sur la figure **VI.**2, est autosimilaire au sens strict. De nombreux autres ensembles fractals, également construits de manière récursive et parfaitement déterministe, présentent cette propriété d'autosimilarité, ou celle d'autoaffinité. Cependant, il est souvent nécessaire de recourir à des fractals aléatoires pour modéliser un système physique, comme on le verra dans la suite, auquel cas on ne peut pas utiliser ces propriétés telles quelles. On introduit alors les notions d'autosimilarité et d'autoaffinité statistiques, définies par analogie avec leurs versions "strictes". Prenons l'exemple d'un ensemble fractal F autosimilaire. Il existe donc une similitude S telle que $F = S(F)$, c'est-à-dire que chaque partie de F est identique strictement au tout. Pour un fractal aléatoire F, le versant "statistique" de cette propriété est de dire que chaque partie de F est équivalente, statistiquement parlant à l'ensemble F entier, c'est-à-dire que les nombres caractéristiques tels que moyenne ou variance ont un comportement simple dans les changements d'échelle. Plus généralement, F est statistiquement autosimilaire (respectivement statistiquement autoaffine) si on peut l'écrire comme une union finie disjointe de parties, chacune d'entre elles étant statistiquement équivalente à la transformée de F par une similitude (respectivement, par une affinité) [Feder, 1988]. On verra cela en particulier dans le contexte des mouvements browniens au chapitre **VII**.

VI.7 Graphes de fonctions

VI.7.a Dimensions des graphes

Une classe particulièrement importante d'ensembles fractals est celle constituée des graphes de fonctions. En effet, on s'aperçoit que les évolutions d'un grand nombre de quantités enregistrées au cours du temps[9] présentent des propriétés fractales. Il en va ainsi par exemple des courbes de température ou de hauteur d'eau dans un fleuve. C'est d'ailleurs en étudiant ce dernier problème à propos du Nil que Hurst a introduit l'exposant qui porte son nom et dont on reparlera au chapitre suivant [Feder, 1988].
Étant donnée une fonction X de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, on définit le graphe de X comme étant l'ensemble

$$G_X = \{(t, X(t)) \ ; \ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{15}$$

qui définit donc un ensemble de points dans $\mathbb{R}^2$. Si une fonction C^1 possède nécessairement un graphe de dimension 1, il est cependant possible de construire des fonctions continues variant de manière suffisamment irrégulière pour que $D_{\mathrm{h}}(G_X) > 1$. C'est le cas de la fonction de Weierstrass, définie sur $[0,1]$ par

$$W : \ t \longmapsto \sum_{k \geqslant 1} \lambda^{(s-2)k} \sin\left(\lambda^k t\right) \quad \text{pour } \lambda > 1 \text{ et } 1 < s < 2.$$

Si λ est assez grand, on montre que $D_{\mathrm{b}}(G_W) = s$. On ne sait en revanche pas prouver que sa dimension de Hausdorff est aussi s, bien qu'on ait des raisons de le supposer.
Dans ce contexte, une propriété utile à remarquer pour la suite est que si X est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux réels $c > 0$ et $s \in [1,2]$ avec

$$(t,u) \in [0,1]^2 \ \Rightarrow \ |X(t) - X(u)| \leqslant c|t_u|^{2-s} \quad \text{alors} \quad D_{\mathrm{h}}(G_X) \leqslant D_{\mathrm{b}}(G_X) \leqslant s. \tag{16}$$

On a également une propriété symétrique, toujours avec $c > 0$ et $s \in [1,2]$, et un réel r_0 tel que pour tout t et pour tout $r \leqslant r_0$ on puisse trouver un point u satisfaisant $|t-u| \leqslant r$ et $|X(t) - X(u)| \geqslant cr^{2-s}$, alors $s \leqslant D_{\mathrm{b}}(G_X)$. Cette double propriété nous servira au **VI.7.b**.
On peut également construire des ensembles autoaffines en imposant une condition de continuité entre les images de l'invariant F par les différentes transformations S_i de sorte que F peut être vu comme un graphe d'une fonction continue. La dimension de boîte est alors reliée simplement aux coefficients des transformations affines. Cette approche est utile dans le cas où l'on veut construire une interpolation fractale, c'est-à-dire une courbe fractale de dimension choisie à l'avance passant par des points spécifiés à l'avance. On s'en sert par exemple pour simuler des paysages.

[9] Si l'on dispose évidemment de données sur une durée assez longue.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

VI.7.b Dimension fractale, fonction de structure et spectre de puissance

Dans l'optique des champs modèles que nous utiliserons dans la suite, il est essentiel de s'intéresser aux propriétés de corrélation des fonctions fractales telles que définies plus haut. Soit donc une fonction fractale continue, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va supposer que cette fonction satisfait des inégalités de la forme de celle introduite dans l'équation (16), à savoir qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que, pour h "petit", la fonction de structure est encadrée de la façon suivante

$$c_1 h^{4-2s} \leqslant S_X(h) = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} [X(t+h) - X(t)]^2 \,\mathrm{d}t \leqslant c_2 h^{4-2s}.$$

Si l'on peut obtenir cet encadrement, on en déduira que la dimension de boîte du graphe de X est égale à s. On peut d'ailleurs en déduire une propriété du spectre de puissance $\mathcal{P}_X$, qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation, aux grands nombres d'onde k. En effet, si dans ce domaine, le spectre de puissance se comporte comme $\mathcal{P}_X(\omega) \sim c\omega^{-\alpha}$, alors on peut montrer que $S_X(h)$ est proportionnelle à $h^{\alpha-1}$, ce qui implique que

$$4 - 2D_{\mathrm{b}}(G_X) = \alpha - 1 \quad \text{d'où} \quad D_{\mathrm{b}}(G_X) = \frac{5-\alpha}{2}.$$

Comme on le verra au chapitre suivant, cette méthode est particulièrement efficace pour construire des fonctions dont le graphe possède une dimension de boîte donnée.

VI.8 Relation périmètre-surface

On a vu dans la section précédente le cas de graphes de fonctions fractales, qui forment par définition des courbes non fermées de $\mathbb{R}^2$. Or il est assez courant de devoir caractériser les propriétés fractales d'une courbe fermée, comme par exemple lorsqu'on considère, comme l'a fait à l'origine Mandelbrot [Mandelbrot, 1967], la longueur de la côte de Grande-Bretagne, ou encore les propriétés des courbes isocontours de reliefs fractals, comme les frontières de nuages.
Évidemment, il est tout à fait possible de calculer une dimension fractale de Hausdorff ou de boîte pour de telles courbes, mais il existe une méthode un peu différente faisant appel à une relation entre la longueur de la courbe et la surface qu'elle entoure. En effet, on remarque sans difficulté que pour une courbe fermée régulière de $\mathbb{R}^2$ - telle qu'un cercle ou un polygône - le rapport

$$\rho = \frac{P}{\sqrt{A}} \quad \text{où } P \text{ est le périmètre et } A \text{ l'aire entourée, est invariant dans n'importe quelle similitude.}$$

Bien entendu, ce rapport dépend néanmoins du type de courbe, et on obtient deux valeurs différentes de ρ si l'on considère l'ensemble des cercles ou l'ensemble des carrés, par exemple.

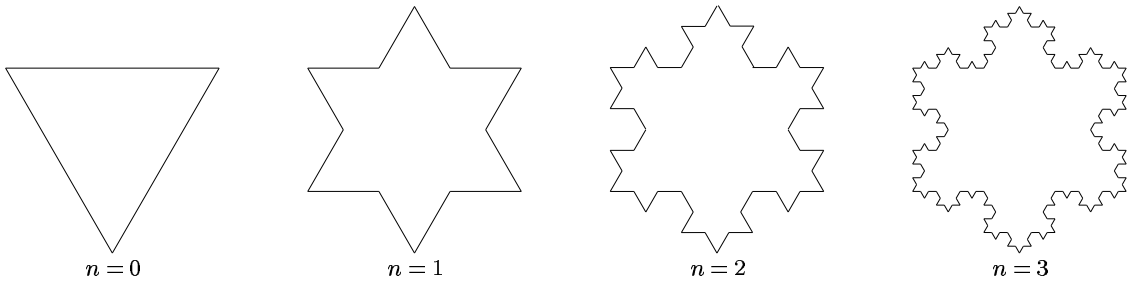

FIG. **VI.3** – *Quatre premiers préfractals d'une courbe de von Koch fermée. La dimension fractale de l'ensemble limite obtenu est* $\ln 4/\ln 3$. *Son périmètre est infini mais la surface incluse est finie.*

Prenons maintenant l'exemple de la courbe de von Koch fermée de la figure **VI.3**. On peut calculer que la longueur P_n et l'aire entourée A_n du $n^{\text{ème}}$ préfractal sont données par

$$P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n \qquad \text{et} \qquad A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} 4^k 3^{-2k-1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{20}\left[8 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right].$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

On voit donc que A_n tend vers une valeur finie pour $n \to \infty$ tandis que P_n diverge. Le rapport ρ qu'on pourrait définir de la même façon que précédemment n'aurait alors pas de sens. Pour contourner ce problème, Mandelbrot propose un rapport modifié qui possède une limite finie

$$\rho' = \frac{P^x}{\sqrt{A}} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n^x}{\sqrt{A_n}},$$

de sorte qu'on doit choisir x comme étant l'inverse de la dimension fractale de la courbe. Pour étudier des ensembles fractals plus compliqués, on remarque que le rang n du préfractal dans le cas de la courbe de von Koch fermée peut être relié à la taille caractéristique r d'une "règle" avec laquelle on mesure l'ensemble fractal. Clairement, on a ici $r = 3^{-n}$ mais on peut écrire, dans le cas général, qu'on mesure le périmètre $P(r)$ et la surface $A(r)$ d'une "île" fractale avec une précision r, et on peut montrer alors [Mandelbrot, 1967] qu'on a la relation dite "périmètre-surface" suivante,

$$P(r) = C\sqrt{A(r)^D} r^{1-D} \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

Ainsi deux îles fractales transformées l'une de l'autre par une similitude partagent la même relation avec la même constante. Cette formule a par exemple permis à Lovejoy [Lovejoy, 1982] de déterminer la dimension fractale des nuages atmosphériques, en ajustant une loi de puissance sur des données réparties sur six ordres de grandeur[10]. Il trouve ainsi $D = 1,35 \pm 0,05$, valeur compatible avec la théorie de Hentschel et Procaccia [Hentschel & Procaccia, 1984] de turbulence homogène entièrement développée. En fait, il semble que les nuages sont proches de fractals autoaffines.

Ce chapitre a permis d'aborder très brièvement certaines notions mathématiques, essentielles à l'étude des structures complexes, autosimilaires sur plusieurs ordres de grandeur en taille, qu'on rencontre dans le milieu interstellaire. Il s'agit maintenant de se donner les modèles qui nous permettront de simuler les champs de densité et de vitesse du MIS. C'est l'objectif des chapitres **VII** et **VIII**.

□

[10] Notons que les îles fractales considérées ici ne sont pas *a priori* transformées l'une de l'autre par une similitude. Le fait que les données expérimentales des aires et des périmètres des nuages observés se placent sur une droite en coordonnées logarithmiques doit s'interpréter de manière statistique. En d'autres termes, les nuages ne sont pas tous identiques à une similitude près, mais leurs formes suivent statistiquement les mêmes lois d'échelle. D'ailleurs, lorsqu'on voudra calculer la dimension fractale d'une surface bidimensionnelle, on pourra simplement la calculer de cette manière, en se donnant comme nuages les isocontours de la carte étudiée. C'est ce qu'on fera au chapitre **VII**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE VII

Les mouvements browniens fractionnaires

VII.1 Les mouvements browniens

VII.1.a Introduction

Le mouvement désordonné de petites particules, telles que des grains de pollen, en suspension dans un fluide fut observé pour la première fois par le physiologiste hollandais Jan Ingenhousz en 1785, puis redécouvert par le botaniste britannique Robert Brown en 1828 [Brown, 1828]. Celui-ci rejeta l'hypothèse qu'une "force vitale" puisse être à l'origine du phénomène, en montrant que des particules minérales étaient également affectées. Par la suite, on comprit que ces mouvements étaient dûs aux collisions des molécules du fluide sur les particules en suspension. Einstein [Einstein, 1905] formalisa le premier cette idée, et Perrin [Perrin, 1913] en déduisit la constante de Boltzmann k.
En 1923, Wiener proposa un modèle mathématique présentant un comportement aléatoire très semblable à celui du mouvement brownien. En particulier, les trajectoires suivies par ces "processus de Wiener" sont très irrégulières, et peuvent tout à fait être vues comme des marches aléatoires dans le plan. La figure **VII**.1 montre deux exemples de mouvements browniens d'une particule, simulés à l'aide d'un algorithme dont on reparlera dans la suite.

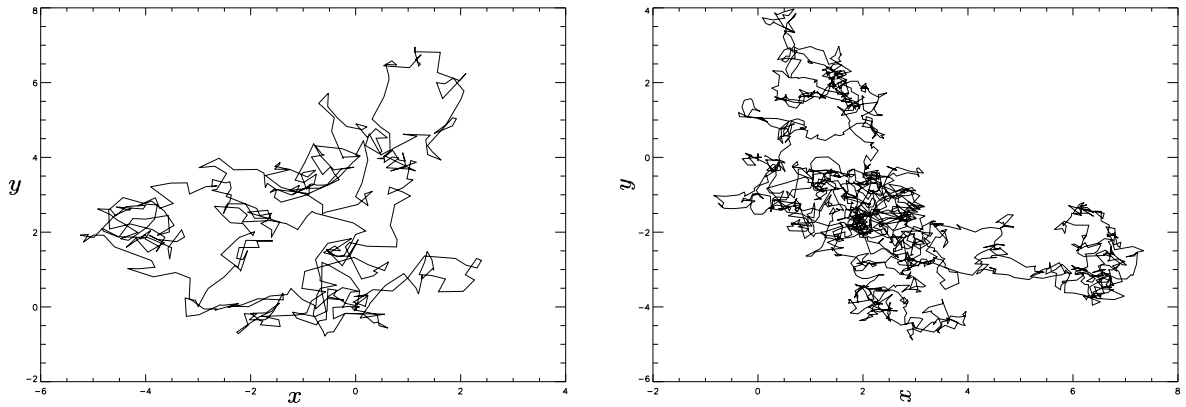

FIG. **VII**.1 – *Trajectoires d'une particule brownienne au cours du temps, dans le plan $\mathbb{R}^2$. Dans les deux cas, la particule part de l'origine des coordonnées à $t = 0$ et effectue un déplacement aléatoire à chaque pas de temps. La différence entre les deux simulations est que celle de gauche comprend 500 pas de temps, tandis que celle de droite en comprend 2000.*

Il s'est avéré par la suite que les mouvements browniens, ainsi que leur généralisation, les mouvements browniens fractionnaires, pouvaient modéliser simplement, et de manière réaliste, des champs aléatoires possédant des propriétés statistiques rencontrées habituellement dans la nature. En particulier, ils nous serviront comme modèles de champs de densité et de vitesse du milieu interstellaire.

VII.1.b Modélisation mathématique

Construction empirique

De la manière la plus générale possible, on peut décrire les mouvements browniens en se donnant une fonction X définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $X(t)$ soit la position de la particule brownienne à

l'instant t. On peut étudier X de deux points de vue, soit en considérant les chemins

$$X([t_1, t_2]) = \{X(t)\ ;\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\},$$

qui sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, soit en tant que graphes, parties de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ définies par

$$G_X = \{(t, X(t))\ ;\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\} \quad \text{de manière analogue à l'équation (15).}$$

Les chemins comme les graphes des processus de Wiener sont, de façon générale, des ensembles fractals. On se place pour l'instant dans le cas unidimensionnel, pour lequel X est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons donc une particule effectuant une marche aléatoire sur la droite réelle, et imaginons qu'à des intervalles de temps réguliers τ petits, elle "saute" d'une distance δ dans un sens ou dans l'autre. On note $X_\tau(t)$ la position de la particule à l'instant t. Dès lors, en faisant l'hypothèse que la particule part de 0 à $t = 0$, sa position $X_\tau(t)$ peut s'écrire, pour $t > 0$, en fonction d'une somme de variables aléatoires indépendantes

$$X_\tau(t) = \delta\left(Y_1 + \ldots + Y_{[t/\tau]}\right), \tag{17}$$

où les variables Y_i ne peuvent prendre que les valeurs 1 et -1, et ce de manière équiprobable. La notation $[t/\tau]$ fait référence à la partie entière de t/τ. En introduisant la variable normalisée

$$X'_\tau(t) = \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\tau}{t}}X_\tau(t) = \sqrt{\frac{\tau}{t}}\left(Y_1 + \ldots + Y_{[t/\tau]}\right),$$

le théorème central limite dans sa forme de Lévy-Lindeberg indique [Pelat, 1998] qu'à t fixé, lorsque $\tau \to 0$, la variable aléatoire $X'_\tau(t)$ converge en loi vers une loi normale de moyenne nulle et de variance 1. On renormalise alors $X_\tau(t)$ en faisant la transformation

$$X_\tau(t) \longrightarrow \frac{\sqrt{\tau}}{\delta}X_\tau(t),$$

de sorte que dans la limite $\tau \to 0$, $X_\tau(t)$ soit sensiblement distribué selon une loi normale de moyenne nulle et de variance t. De même, toujours dans cette limite, l'incrément $X_\tau(t+\tau) - X_\tau(t)$ est distribué selon une loi normale de moyenne nulle et de variance τ. Il suffit pour s'en convaincre de faire la différence de $X_\tau(t+\tau)$ et $X_\tau(t)$ écrits sous la forme (17).

Définition formelle

Cet exemple permet de formaliser la définition des mouvements browniens au sens mathématique. On dit qu'un processus $X : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est un mouvement brownien ou processus de Wiener si

▹ $X(0) = 0$ avec une probabilité égale à 1.
▹ Quels que soient $t \geqslant 0$ et $\tau > 0$, l'incrément $X(t+\tau) - X(t)$ est distribué selon une loi normale de moyenne nulle et de variance τ.

L'existence de tels processus est démontrée mathématiquement, mais est difficile à prouver. En revanche, il est facile de généraliser cette définition à des mouvements browniens dans un espace $\mathbb{R}^n$. Un processus $\boldsymbol{X} : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ défini pour tout $t \geqslant 0$ par un ensemble de n variables aléatoires $X_i(t)$ est ainsi un mouvement brownien si les processus X_i sont eux-mêmes des mouvements browniens unidimensionnels et que quels que soient les instants $(t_1, \ldots, t_n)$, les variables aléatoires $X_i(t_i)$ sont indépendantes. On peut démontrer à partir de cette définition que d'une part toute projection d'un mouvement brownien à n dimensions sur une droite de l'espace $\mathbb{R}^n$ est un mouvement brownien unidimensionnel, et que d'autre part, pour une suite d'instants (t_i) avec $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{2m}$, les incréments $\boldsymbol{X}(t_{2i}) - \boldsymbol{X}(t_{2i-1})$ sont indépendants les uns des autres.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

VII.1.c Propriétés

Autosimilarité et autoaffinité

Le fait que, pour un mouvement brownien X unidimensionnel, l'incrément $X(t+\tau)-X(t)$ soit distribué selon une loi normale de moyenne nulle et de variance τ peut s'écrire en termes de probabilités,

$$P[X(t+\tau)-X(t)\leqslant x]=(2\pi\tau)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{u^2}{2\tau}\right)\mathrm{d}u.$$

À partir de cette relation fondamentale, on peut mettre en évidence une propriété d'autosimilarité. En posant $\gamma>0$, on remarque que

$$P[X(\gamma t+\gamma\tau)-X(\gamma t)\leqslant\sqrt{\gamma}x]=P[X(t+\tau)-X(t)\leqslant x],$$

puisqu'on peut changer t en γt sans problème étant donné la stationnarité de X. Le changement de τ en $\gamma\tau$ impose alors celui de x en $\gamma^{1/2}x$ de manière à laisser le membre de droite invariant. Ceci montre que $X(t)$ et $X(\gamma t)\gamma^{-1/2}$ ont la même distribution, et que par conséquent, les chemins $X(t)$ sont statistiquement autosimilaires et les graphes G_X statistiquement autoaffines.

Propriété de Hölder

Supposons que $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ soit un mouvement brownien à n dimensions. Il découle tout naturellement des propriétés de base que si l'on se donne un domaine $E=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ de l'espace $\mathbb{R}^n$, alors la probabilité qu'un incrément se trouve dans E est donnée par

$$P[\boldsymbol{X}(t+\tau)-\boldsymbol{X}(t)\in E]=\prod_i P[a_i\leqslant X_i(t+\tau)-X_i(t)\leqslant b_i]=(2\pi\tau)^{-n/2}\int_E\exp\left(-\frac{x^2}{2\tau}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

où x désigne la norme du vecteur n-dimensionnel $\boldsymbol{x}$. Cette forme peut se généraliser à tous les boréliens[1] E de $\mathbb{R}^n$, de sorte qu'en particulier, si l'on considère la boule $B_r(0)$ de rayon r centrée en 0, on a

$$P[|\boldsymbol{X}(t+\tau)-\boldsymbol{X}(t)|\leqslant r]=\Sigma_n(2\pi\tau)^{-n/2}\int_0^r\exp\left(-\frac{u^2}{2\tau}\right)u^{n-1}\mathrm{d}u, \tag{18}$$

ce qui fournit l'expression de la fonction de répartition de l'incrément $|\boldsymbol{X}(t+\tau)-\boldsymbol{X}(t)|$. On peut alors montrer que $\boldsymbol{X}$ satisfait à une condition de Hölder d'exposant $\lambda<1/2$. Plus précisément, si on se donne un mouvement brownien $\boldsymbol{X}$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$, on peut montrer que pour $0<\lambda<1/2$ il existe un réel $H_0>0$ et une constante $b_\lambda>0$ tels que pour tout τ avec $0<\tau<H_0$, on a

$$|\boldsymbol{X}(t+\tau)-\boldsymbol{X}(t)|\leqslant b_\lambda\tau^\lambda\quad\text{avec une probabilité 1.}$$

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [Falconer, 1990].

Dimension fractale

On montre que les dimensions fractales de Hausdorff et de boîte de l'image d'un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ avec $n\geqslant 2$ sont égales à 2. On prend un mouvement brownien $\boldsymbol{X}:\ [0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$. Pour $\lambda<1/2$, on a la propriété Hölder énoncée précédemment. Alors, d'après la relation (13),

$$D_{\mathrm{h}}\{\boldsymbol{X}([0,1])\}\leqslant\frac{1}{\lambda}D_{\mathrm{h}}\{[0,1]\}=\frac{1}{\lambda},$$

ce qui montre que la dimension de Hausdorff du brownien est au plus égale à 2. La détermination de la limite inférieure est plus technique, mais on peut en donner une démonstration utilisant la méthode potentielle décrite au **VI.4.b**. En effet, pour s strictement compris entre 1 et 2, et d'après (18),

$$\mathsf{E}\left\{|\boldsymbol{X}(t+\tau)-\boldsymbol{X}(t)|^{-s}\right\}=\Sigma_n(2\pi\tau)^{-n/2}\int_0^\infty\exp\left(-\frac{u^2}{2\tau}\right)u^{-s+n-1}\mathrm{d}u=d_n\tau^{-s/2},$$

[1] Voir la note 5 du chapitre **VI**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

en utilisant un simple changement de variable. Dans cette dernière expression, la constante d_n ne dépendant pas de t ou de τ, on peut intégrer sur les deux arguments, en posant $u = t + \tau$,

$$\mathsf{E}\left\{\iint |\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}(u)|^{-s}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u\right\} = \iint \mathsf{E}\left[|\boldsymbol{X}(t) - \boldsymbol{X}(u)|^{-s}\right]\mathrm{d}t\mathrm{d}u = d_n \iint |t-u|^{-s/2}\mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty,$$

puisque $s < 2$. Or le membre de gauche peut s'interpréter comme la s-énergie associée à une distribution de masse μ sur $\boldsymbol{X}([0,1])$ définie en posant que $\mu(A)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble des points t tels que $\boldsymbol{X}(t) \in A$. Alors, d'après la conclusion du **VI.4.b**, on a $D_{\mathrm{h}}\{\boldsymbol{X}([0,1])\} \geqslant s$ et donc, finalement, $D_{\mathrm{h}}\{\boldsymbol{X}([0,1])\} = 2$. Le résultat est également valable pour la dimension de boîte.

VII.2 Les mouvements browniens fractionnaires

VII.2.a De la nécessité d'aller plus loin

Les mouvements browniens, bien que constituant un modèle théorique essentiel des fonctions aléatoires, peuvent à bien des égards sembler limités. En particulier, le graphe d'un mouvement brownien unidimensionnel est de dimension fractale $3/2$ presque sûrement, alors que de nombreux phénomènes naturels exhibent des dimensions fractales différentes, ce qui suggère de se doter de modèles plus généraux. On peut par ailleurs montrer que les mouvements browniens sont les seuls et uniques processus à posséder des incréments indépendants, stationnaires et de variance finie. Il faut donc, pour les généraliser, relâcher au moins l'une de ces contraintes.
Les processus stables sont une généralisation possible : ils n'imposent plus que la variance des incréments soit finie, de sorte qu'ils peuvent être discontinus. Comme cette dernière propriété est contraire à ce qu'on est en droit d'attendre d'un modèle physique, on ne s'en servira donc pas et ils ne seront plus évoqués ici. En revanche, les mouvements browniens fractionnaires (ou fBm, pour *fractional Brownian motion*) sont continus, mais leurs incréments ne sont plus indépendants, bien que distribués selon une loi normale. Cette propriété est particulièrement efficace dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, en particulier s'il est nécessaire d'inclure des effets de mémoire.

VII.2.b Définition

On va commencer par traiter le cas d'un processus unidimensionnel, puis on généralisera à n dimensions. Étant donné un réel H dans $]0,1[$, on définit un mouvement brownien fractionnaire $X : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ comme étant un processus tel que

▹ Avec une probabilité 1, $X(t)$ est continu et $X(0) = 0$,
▹ Quels que soient $t \geqslant 0$ et $\tau > 0$, l'incrément $X(t+\tau) - X(t)$ est distribué selon une loi normale de moyenne nulle et de variance τ^{2H}.

L'exposant H est appelé exposant de Hurst. On remarque par ailleurs que les mouvements browniens usuels correspondent à la valeur $H = 0,5$ ce qui montre bien que browniens fractionnaires en sont une généralisation. La deuxième propriété ci-dessus peut se mettre sous la forme

$$\mathsf{P}[X(t+\tau) - X(t) \leqslant x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau^H}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2\tau^{2H}}\right)\mathrm{d}u, \tag{19}$$

ce qui permet de trouver la fonction de répartition et la fonction de distribution de X.

VII.2.c Propriétés

Corrélation des incréments

Il est implicite dans cette définition que les incréments $X(t+\tau) - X(t)$ sont stationnaires. En revanche, ils ne peuvent en général pas être indépendants. On a en effet, en utilisant la relation (19),

$$\mathsf{E}\left\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\right\} = \tau^{2H} \qquad \text{donc} \qquad \mathsf{E}\{X(t)\,[X(t+\tau) - X(t)]\} = \frac{1}{2}\left[(t+\tau)^{2H} - t^{2H} - \tau^{2H}\right],$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

qu'on obtient en écrivant l'espérance du carré de $X(t+\tau) - X(0) = X(t+\tau) - X(t) + X(t) - X(0)$, et en se souvenant que $X(0) = 0$. L'expression obtenue n'est nulle que pour $H = 0,5$ et les incréments $X(t+\tau) - X(t)$ et $X(t) - X(0)$ ne sont donc pas indépendants. Plus précisément, on remarque que si $H < 0,5$ alors le membre de droite est négatif et les incréments ont donc tendance à être de signe opposés. $X(t)$ tend par conséquent à avoir une mémoire négative. Réciproquement, si $H > 0,5$ les incréments sont préférentiellement de même signe, et $X(t)$ tend à avoir une mémoire positive. On peut également montrer que les chemins $\gamma^{-H}X(\gamma t)$ ont la même distribution en probabilité que $X(t)$ d'où une propriété d'autosimilarité statistique des mouvements browniens fractionnaires.

Propriété de Hölder

On peut montrer que pour $0 < \lambda < H$, un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst H satisfait une condition de Hölder d'exposant λ,

$$|X(t+\tau) - X(t)| \leqslant b_\lambda \tau^\lambda \quad \text{pour} \quad 0 < \tau < \tau_0 \quad \text{avec} \quad \tau_0 > 0 \text{ et } b_\lambda > 0. \tag{20}$$

La démonstration est identique au cas des mouvements browniens dans le cas où $\lambda < 1/2$, mais dans le cas contraire, il est nécessaire de faire appel à des techniques plus sophistiquées pour démontrer que la condition de Hölder (20) est valide uniformément quel que soit t. On ne le fera pas ici.

Dimension fractale

On montre également qu'avec une probabilité 1, le graphe d'un mouvement brownien fractionnaire unidimensionnel d'exposant de Hurst H possède une dimension fractale de boîte et de Hausdorff égale à $2-H$. On peut d'abord montrer que cette valeur constitue un majorant des dimensions fractales en utilisant la condition de Hölder ci-dessus ainsi que la relation (16). Le fait qu'elle soit également un minorant est obtenu de manière plus technique, en utilisant la distribution (19).

Propriétés en termes d'autocorrélation

On peut parfaitement appliquer les méthodes introduites au **VI.7.b** pour étudier les propriétés d'autocorrélation des mouvements browniens fractionnaires. Pour cela, il est utile de supposer que X est défini sur la droite réelle complète, ce qui ne change rien de fondamental. On peut alors écrire

$$\mathsf{E}\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[X(t+\tau) - X(t)]^2\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mathsf{E}\left\{[X(t+\tau) - X(t)]^2\right\}\mathrm{d}t = \tau^{2H}, \tag{21}$$

ce qui montre que la fonction de structure d'ordre deux d'un mouvement brownien fractionnaire est une loi de puissance en τ^{2H}. Par conséquent, on peut également en déduire que le spectre de puissance d'un tel processus se comporte comme $\mathcal{P}_X(k) \propto k^{-2H-1}$.

Δ-variance

Étant donné le lien qui existe entre le spectre de puissance et la Δ-variance, comme on l'a vu au chapitre **V**, il devrait être envisageable de relier le comportement en loi de puissance du spectre de puissance des mouvements browniens fractionnaires à une propriété de ces processus stochastiques vis-à-vis de la Δ-variance. En effet, on peut montrer [Stutzki *et al.*, 1998] que pour un spectre de puissance $\mathcal{P}_X(k) \propto k^{-\beta}$ la Δ-variance du processus X se comporte en fonction de l'échelle τ selon

$$\sigma_\Delta^2(\tau) \propto \tau^{\beta-1} \quad \text{pour } \beta \leqslant 5 \qquad \text{et} \qquad \sigma_\Delta^2(\tau) \propto \tau^4 \quad \text{pour } \beta \geqslant 5.$$

Dans le cas des mouvements browniens fractionnaires unidimensionnels, l'indice spectral $\beta = 2H+1$ est au plus égal à 3, de sorte qu'on sera toujours dans le premier cas de figure.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

VII.3 Browniens fractionnaires en dimension supérieure

VII.3.a Définition

La nécessité de construire, dans la suite, des champs aléatoires et "réalistes" de densité et de vitesse dans l'espace usuel à trois dimensions requiert qu'on puisse définir un champ brownien fractionnaire sur un espace à n dimensions. Remarquons qu'il ne s'agit pas du tout du même problème que lorsque nous avons étudié, au **VII.1.b**, le cas de champs browniens à n dimensions, puisqu'il s'agissait alors de processus sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors qu'on veut ici se donner un champ X défini sur un espace à n dimensions, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Étant donné un réel H dans $]0,1[$, ceci est possible si l'on peut trouver X tel que

▷ Avec une probabilité 1, $X(\boldsymbol{r})$ est une fonction continue de la position $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$ et $X(\mathbf{0}) = 0$,
▷ Pour $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{R}^n$, les incréments $X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})$ sont des variables aléatoires distribuées selon une loi normale de moyenne nulle et de variance $|\boldsymbol{\delta}|^{2H}$, où $|.|$ désigne la norme canonique sur $\mathbb{R}^n$.

L'existence de tels champs n'est pas facilement démontrable en général, mais la facilité avec laquelle on peut en construire des approximations numériques, comme on le verra un peu plus tard, est une preuve largement suffisante pour notre propos. La seconde propriété peut s'exprimer en termes de fonction de répartition des incréments, de manière analogue à (19),

$$\mathsf{P}[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r}) \leqslant x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\boldsymbol{\delta}|^H} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2|\boldsymbol{\delta}|^{2H}}\right) \mathrm{d}u. \tag{22}$$

Cette forme permet de déduire les propriétés essentielles des champs browniens fractionnaires.

VII.3.b Propriétés

Dimension fractale

On considère dans ce paragraphe le cas de surfaces browniennes fractionnaires, c'est-à-dire qu'on suppose que le champ brownien fractionnaire X est défini sur $\mathbb{R}^2$. On peut montrer qu'une telle surface a pour dimensions de Hausdorff et de boîte $D_{\mathrm{h}}(G_X) = 3 - H$, si H désigne son exposant de Hurst. En effet, pour $0 < \lambda < H$, on peut montrer que X satisfait presque sûrement à la condition de Hölder $|X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})| \leqslant b|\boldsymbol{\delta}|^\lambda$ dès lors que $|\boldsymbol{\delta}|$ est suffisamment petit. Ce résultat implique que $D_{\mathrm{h}}(G_X) \leqslant 3 - H$, en utilisant une relation analogue à (16). L'inégalité réciproque est obtenue en remarquant (voir plus bas) qu'une coupe de X par une droite quelconque du plan $\mathbb{R}^2$ est un mouvement brownien fractionnaire défini en dimension 1, de même exposant de Hurst H, et que par conséquent son graphe[2] est de dimension $2 - H$ presque sûrement. Comme ceci est vrai quelle que soit la coupe effectuée dans X, un résultat sur les intersections de fractals affirme qu'on a alors $D_{\mathrm{h}}(G_X) \geqslant (2-H)+1$, ce qui fournit le résultat annoncé. En généralisant, on peut alors montrer qu'un champ brownien fractionnaire X défini sur $\mathbb{R}^n$ avec $n > 2$, a pour dimensions fractales de Hausdorff et de boîte la valeur $n + 1 - H$.

Propriétés en termes d'autocorrélation

À partir de l'équation (22), on montre que la variance des incréments d'un champ brownien fractionnaire X défini sur $\mathbb{R}^n$ est égale à

$$\mathsf{E}\left\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2\right\} = |\boldsymbol{\delta}|^{2H},$$

de sorte que, considérant la boule B_ρ centrée en $\mathbf{0}$ et de rayon ρ, on a

$$\mathsf{E}\left\{\frac{1}{\mathcal{V}(B_\rho)} \int_{B_\rho} [X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2 \,\mathrm{d}^n\boldsymbol{\delta}\right\} = \frac{1}{\mathcal{V}(B_\rho)} \int_{B_\rho} \mathsf{E}\left\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2\right\} \mathrm{d}^n\boldsymbol{\delta} = |\boldsymbol{\delta}|^{2H},$$

[2] Qui est une coupe de la surface brownienne.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

et par conséquent la fonction de structure d'ordre deux de X suit une loi de puissance en $|\boldsymbol{\delta}|^{2H}$. Il en va donc de même de la fonction d'autocorrélation A_X. On en déduit, d'après [Stutzki *et al.*, 1998], que le spectre de puissance de X se comporte également comme une loi de puissance avec $\mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}) \propto |\boldsymbol{k}|^{-2H-n}$, ce qui montre qu'on a la relation essentielle $\beta = 2H + n$, entre l'exposant de Hurst H et l'indice spectral β. On utilisera cette relation constamment dans la suite.

Δ-variance

Comme en dimension un, on utilise la relation vue au chapitre **V** entre la Δ-variance et le spectre de puissance pour montrer qu'un champ brownien fractionnaire défini sur un espace à n dimensions peut être analysé par le biais de sa Δ-variance. En effet, si l'on se donne un champ stochastique X sur $\mathbb{R}^n$ caractérisé par un spectre de puissance en loi de puissance avec $\mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}) \propto |\boldsymbol{k}|^{-\beta}$, la Δ-variance de ce champ se comporte, en fonction de l'échelle ρ, comme [Stutzki *et al.*, 1998]

$$\sigma^2_\Delta(\rho) \propto \rho^{\beta-n} \quad \text{pour } \beta \leqslant n+4 \qquad \text{et} \qquad \sigma^2_\Delta(\rho) \propto \rho^4 \quad \text{pour } \beta \geqslant n+4.$$

Dans le cas des champs browniens fractionnaires, l'indice spectral $\beta = 2H + n$ est au plus égal à $n+2$, de sorte qu'on sera toujours dans le premier cas de figure. On peut ainsi théoriquement remonter à l'indice du spectre de puissance en restant dans l'espace réel, ce qui peut présenter des avantages certains lorsque les effets de bord altèrent les résultats des algorithmes de calcul des transformées de Fourier [Bensch *et al.*, 2001].

Coupe d'un champ brownien fractionnaire

Étant donné un champ brownien fractionnaire X défini sur $\mathbb{R}^n$ et d'exposant de Hurst H, considérons le graphe obtenu en effectuant une coupe C_π de ce processus par un plan π passant par l'origine des coordonnées. On note Y le processus issu de cette coupe. Il est évident que la continuité de Y découle de celle de X, et que d'autre part $Y(\mathbf{0}) = 0$. En ce qui concerne la seconde propriété (22), le fait de choisir, pour $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{\delta}$, des vecteurs contenus dans π ne modifie en rien l'expression de la fonction de répartition. Il s'ensuit que le graphe de Y est un champ brownien fractionnaire de dimension $n-1$ et de même exposant H que le brownien fractionnaire de départ. Remarquons néanmoins que lorsque le plan π ne passe pas par l'origine des coordonnées il est éventuellement nécessaire de lui ajouter une constante, de manière à assurer la nullité en $\mathbf{0}$.

Propriétés des isocontours

L'utilisation des courbes isointensité dans les cartes du milieu interstellaire suggère de s'intéresser aux propriétés des images réciproques de singletons de $\mathbb{R}$,

$$X^{-1}(c) = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n \mid X(\boldsymbol{r}) = c\}.$$

Du fait de la continuité de X, il est clair en particulier que pour $n = 2$, les images réciproques sont des réunions de singletons et de courbes fermées. Dans le cas $n = 3$, il s'agit d'unions de singletons et de surfaces fermées. En ce qui concerne les propriétés de ces ensembles en termes de géométrie fractale, on peut montrer que, presque sûrement, la dimension de Hausdorff d'une telle image réciproque est majorée par $D_\mathrm{h}\left[X^{-1}(c)\right] \leqslant n - H$, et ce pour presque toutes[3] les valeurs de c, et qu'en fait la probabilité pour que $D_\mathrm{h}\left[X^{-1}(c)\right]$ soit précisément égale à $n - H$ est strictement positive. Notons que ce dernier résultat est particulièrement ardu à établir. Ainsi, les isocontours de champs browniens fractionnaires définis sur $\mathbb{R}^n$ ont généralement pour dimension fractale $n - H$.

VII.3.c Intervalle de définition de l'exposant de Hurst

Le fait que l'exposant de Hurst soit supposé strictement positif peut se comprendre aisément. En effet, si l'on devait choisir un champ brownien fractionnaire tel que $H < 0$, d'après l'équation (21) ou son analogue à n dimensions, la variance de X serait décroissante en fonction de τ. En somme, les fluctuations deviendraient infinies aux petites échelles, ce qui n'a pas de sens physique.

[3] Au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

La restriction $H < 1$ est plus délicate à comprendre, mais étant donné que, pour résumer, plus H est grand, moins X est "chaotique"[4], on peut se douter que $H = 1$ représente une limite pour laquelle les champs browniens fractionnaires deviennent "trop lisses". Pour le montrer, considérons un champ brownien fractionnaire X dont l'exposant de Hurst est $H > 1$. On va partir de l'espérance du carré de l'incrément de X entre deux positions $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\delta}$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathsf{E}\left\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2\right\} = \mathsf{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{p-1} \Delta X_k\right)^2\right] \quad \text{avec} \quad \Delta X_k = X\left(\boldsymbol{r} + \frac{k+1}{p}\boldsymbol{\delta}\right) - X\left(\boldsymbol{r} + \frac{k}{p}\boldsymbol{\delta}\right),$$

où l'on a simplement divisé le vecteur séparation $\boldsymbol{\delta}$ en p parties égales. La quantité ΔX_k est l'incrément de X entre la $k^{\text{ème}}$ et la $(k+1)^{\text{ème}}$ positions. Le développement de l'expression ci-dessus donne alors

$$\mathsf{E}\left\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2\right\} = \sum_{k=0}^{p-1} \mathsf{E}(\Delta X_k^2) + 2\sum_{i<j} \mathsf{E}(\Delta X_i \Delta X_j) = \frac{|\boldsymbol{\delta}|^{2H}}{p^{2H-1}} + 2\sum_{i<j} \mathsf{E}(\Delta X_i \Delta X_j).$$

Or, $\mathsf{E}(\Delta X_i \Delta X_j)$ peut être écrit comme l'autocorrélation du processus $Y(\boldsymbol{r}) = X(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\delta}/p) - X(\boldsymbol{r})$,

$$\mathsf{E}(\Delta X_i \Delta X_j) = \mathsf{E}\left[Y\left(\boldsymbol{r} + \frac{i}{p}\boldsymbol{\delta}\right) Y\left(\boldsymbol{r} + \frac{j}{p}\boldsymbol{\delta}\right)\right] \leqslant \mathsf{E}\left[Y(\boldsymbol{r})^2\right] = \frac{|\boldsymbol{\delta}|^{2H}}{p^{2H}},$$

puisque les fonctions d'autocorrélation décroissent à partir de leur valeur à l'espacement zéro. Ce qui permet de donner une limite supérieure à l'espérance de l'incrément carré de X,

$$\mathsf{E}\left\{[X(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}) - X(\boldsymbol{r})]^2\right\} \leqslant \frac{|\boldsymbol{\delta}|^{2H}}{p^{2H-1}} + 2\frac{p(p-1)}{2}\frac{|\boldsymbol{\delta}|^{2H}}{p^{2H}} = \frac{|\boldsymbol{\delta}|^{2H}}{p^{2(H-1)}}$$

Ce résultat étant valable quelle que soit la valeur de p, qui caractérise la subdivision du vecteur séparation $\boldsymbol{\delta}$, on voit que pour $H > 1$, la limite $p \to \infty$ implique que les fluctuations de X deviennent nulles. Il s'ensuit qu'un champ brownien fractionnaire défini avec $H > 1$ est nécessairement uniforme, ce qui justifie qu'on se limite à $H \in]0, 1[$.

VII.4 Simulations de champs browniens fractionnaires

VII.4.a Méthodes diverses de construction

Tout au long de la troisième partie, il sera question de modéliser des champs de densité et de vitesse aléatoires ayant des propriétés statistiques bien définies. D'après ce qu'on a vu dans ce chapitre, c'est le cas des champs browniens fractionnaires. Il reste à voir s'ils sont faciles et rapides à construire numériquement, de sorte qu'on puisse aisément s'en servir comme modèles statistiques de ces champs. Il existe plusieurs façons de construire des champs approchant les propriétés des champs browniens fractionnaires. Nous allons en décrire brièvement deux avant de nous intéresser plus particulièrement à celle que nous utiliserons dans la suite.

La méthode de Mandelbrot et Wallis, décrite par [Feder, 1988], consiste à se donner un processus gaussien X_0 de type mouvement brownien usuel, et à convoluer les incréments de celui-ci avec un noyau en loi de puissance que l'on peut translater le long de l'axe des temps de façon à le centrer sur un instant t. Le résultat obtenu est interprété comme étant un incrément du mouvement brownien fractionnaire X au voisinage de t, et il suffit d'additionner les différents incréments pour obtenir $X(t)$ à tous les instants discrets choisis.

De manière plus physique, et en dimension supérieure, Stutzki [Stutzki *et al.*, 1998] indique qu'on peut simuler un champ de type champ brownien fractionnaire en le construisant comme une somme de "nuages" disposés aléatoirement dans l'espace à trois dimensions, et tels qu'on dispose d'une relation entre leurs tailles et leurs masses, ainsi que d'un spectre des masses en loi de puissance

$$M \propto r^{\gamma} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}M} \propto M^{-\alpha}, \quad \text{où } M \text{ est la masse d'un nuage et } r \text{ sa taille caractéristique.}$$

[4] Qu'on pense au lien entre exposant de Hurst et indice spectral.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

On rappelle que la notation $\mathrm{d}N$ désigne le nombre de nuages dont la masse est M à $\mathrm{d}M$ près. Dans ce cas, on peut montrer que le spectre de puissance du champ synthétique tridimensionnel X obtenu est de la forme $\mathcal{P}_X(\boldsymbol{\omega}) \propto |\boldsymbol{\omega}|^{(\alpha-3)\gamma}$, ce qui correspond à un comportement de type champ brownien fractionnaire, comme indiqué au **VII.3.b**, avec $2H + n = (3-\alpha)\gamma$.

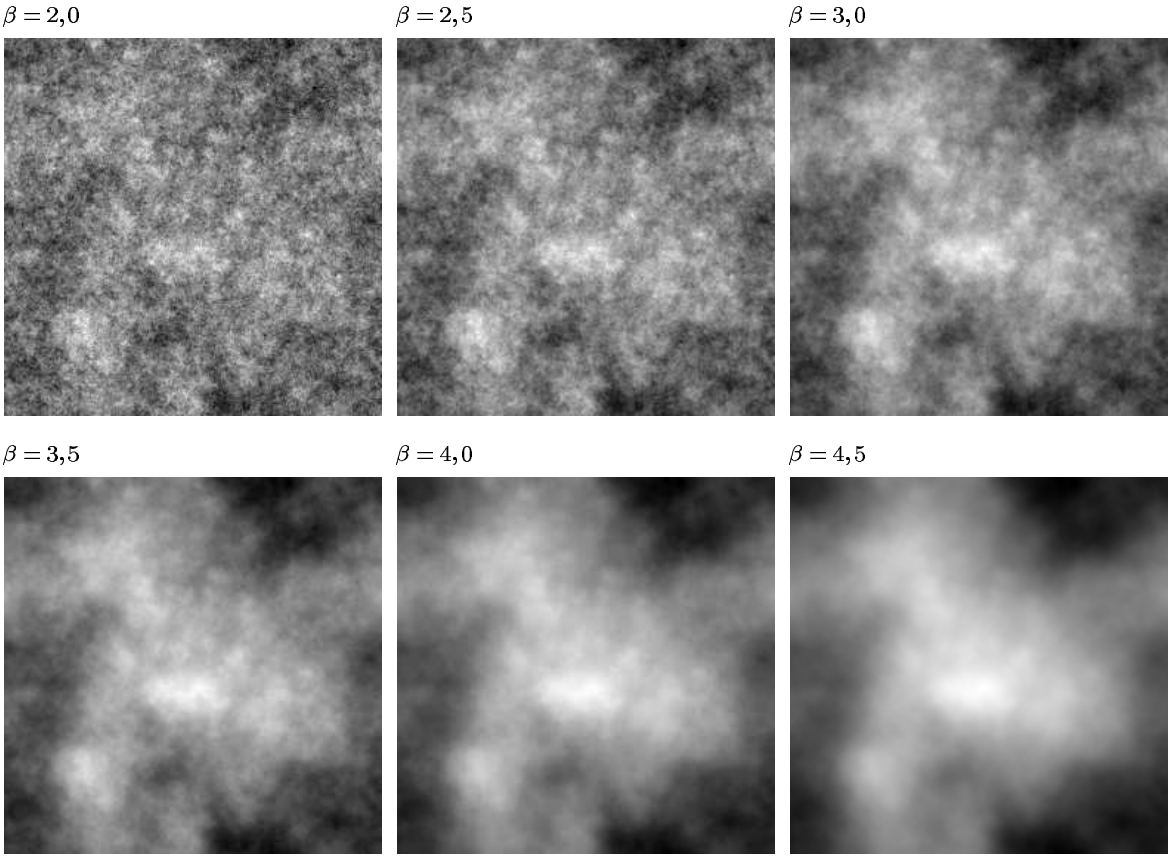

FIG. **VII**.2 – *Simulations de champs browniens fractionnaires en dimension 2, par la méthode décrite au* **VII.4.b**. *L'exposant β du spectre de puissance utilisé est indiqué en haut à gauche de chaque sous-figure. Pour permettre de comparer les propriétés d'un champ à l'autre, les phases sont identiques dans chacun des cinq cas. On remarque que dans un champ présentant un spectre de puissance plus raide, on observe moins de petites structures.*

VII.4.b Construction dans l'espace de Fourier

Méthode théorique

L'exemple de la construction de Stutzki suggère qu'il peut être intéressant de construire les champs browniens fractionnaires directement à partir de leurs propriétés dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire à partir de spectres de puissance en loi de puissance. Cette approche est d'autant plus souhaitable que, le spectre de puissance étant égal au carré de l'amplitude de la transformée de Fourier du champ qu'on veut construire, on dispose évidemment de cette dernière dès lors que l'on s'est donné la loi suivie par le spectre de puissance. Seules les phases de la transformée de Fourier du champ restent à déterminer, et la manière la plus simple de les construire est bien entendu de les tirer aléatoirement d'une distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Étant donné un espace $E = \mathbb{R}^n$, on construit donc, dans l'espace de Fourier associé $\widehat{E}$, un champ d'amplitude de la forme $A(\boldsymbol{k}) = A_0|\boldsymbol{k}|^{-\beta/2}$ et un champ de phase $\phi(\boldsymbol{k})$ aléatoire. Le champ modèle est alors

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

obtenu en effectuant la transformée de Fourier inverse

$$X(\boldsymbol{r}) = \int_{\widehat{E}} A(\boldsymbol{k}) \exp\left[i\phi(\boldsymbol{k})\right] e^{2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

Pour assurer que X est réel, on impose d'ailleurs une contrainte $\phi(-\boldsymbol{k}) = -\phi(\boldsymbol{k})$. La phase étant ainsi impaire, la transformée de Fourier de X est hermitienne et X est réel.

Implémentation

Dans la pratique, si l'on veut construire un champ à n dimensions, chaque dimension k comportant N_k pixels, on se donne d'abord un tableau $\mathbf{D}$ de taille $N_1 \times \ldots \times N_n$ dont chaque élément a pour valeur la distance, en pixels, le séparant du centre du tableau. Il convient par ailleurs de discuter de la position de ce dernier en fonction de la parité des $\{N_k\}$. Si la dimension k contient un nombre impair de points, $N_k = 2p_k+1$, la coordonnée c_k du centre du tableau dans cette dimension est alors égale à p_k, en utilisant la convention selon laquelle les indices d'un tableau sont numérotés de 0 à $N_k - 1$. Dans le cas où $N_k = 2p_k$, on placera également le centre du tableau à la coordonnée $c_k = p_k$, mais en n'oubliant pas qu'alors il n'y a plus autant d'éléments dans chaque moitié du tableau. Étant donné un exposant de Hurst H et la dimension n, l'exposant du spectre de puissance qu'on souhaite construire est $\beta = 2H + n$, et on peut donc calculer les tableaux $\mathbf{A}$ et $\mathbf{P}$ correspondant à l'amplitude et au spectre de puissance, en écrivant les relations suivantes

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}^{-\beta} = \mathbf{D}^{-2H-n} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{P}^{1/2} = \mathbf{D}^{-\beta/2} = \mathbf{D}^{-H-n/2}.$$

Il se pose alors évidemment le problème du pixel central, noté $\mathbf{0}$, puisqu'on a bien sûr $\mathbf{D}(\mathbf{0}) = 0$ et qu'il n'est pas possible de l'élever à une puissance négative. Remarquant que $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ correspondra *in fine* à la valeur moyenne du champ synthétisé et qu'il sera donc facile de la modifier après coup, on se contente, lors de la construction de $\mathbf{D}$, de donner une valeur non nulle quelconque à $\mathbf{D}(\mathbf{0})$.

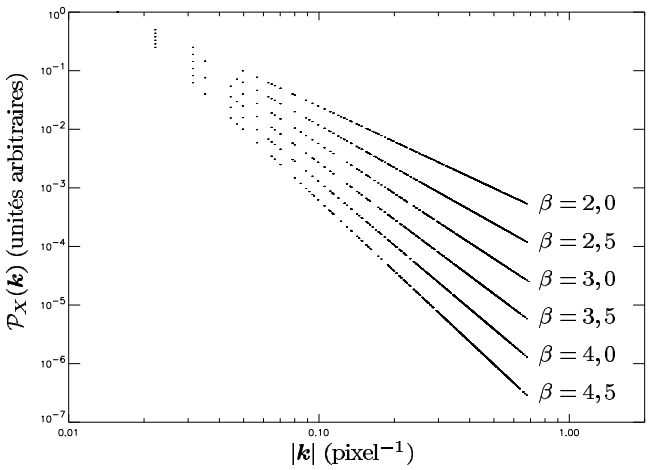

FIG. **VII.3** – *Spectres de puissance des champs browniens fractionnaires bidimensionnels représentés sur la figure* **VII.2**. *L'indice spectral de chacun de ces spectres est indiqué en regard.*

La construction du tableau représentant la phase $\mathbf{\Phi}$ se fait sans difficulté. À chaque position, on tire un nombre aléatoire à partir d'une distribution uniforme sur $[0, 2\pi[$, puis on balaye la moitié du tableau en imposant la condition d'imparité évoquée plus haut

$$\mathbf{\Phi}(c_1 - i_1, \ldots, c_n - i_n) = -\mathbf{\Phi}(c_1 + i_1, \ldots, c_n + i_n).$$

En particulier, $\mathbf{\Phi}(c_1, \ldots, c_n) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{0}) = 0$. Notons que pour une dimension k comportant un nombre pair de points, la dissymétrie déjà remarquée se retrouve dans le tableau $\mathbf{\Phi}$. On combine alors ce dernier avec l'amplitude $\mathbf{A}$ de manière à obtenir un tableau complexe

$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{\Phi}) \quad \text{soit, explicitement} \quad \widehat{\mathbf{X}}(i_1, \ldots, i_n) = \mathbf{A}(i_1, \ldots, i_n) \exp\left[i\mathbf{\Phi}(i_1, \ldots, i_n)\right].$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Le champ synthétisé $\mathbf{X}$ est alors calculé par transformée de Fourier discrète inverse de $\widehat{\mathbf{X}}$. L'algorithme utilisé pour cette opération est celui implémenté dans IDL, et consiste à effectuer des transformées de Fourier discrètes inverses successivement dans chaque direction. Par exemple, en dimension 2,

$$\mathbf{X}(x_1,x_2) = \sum_{u_1=0}^{N_1-1}\sum_{u_2=0}^{N_2-1} \widehat{\mathbf{X}}(u_1,u_2)\exp\left[2i\pi\left(\frac{u_1x_1}{N_1}+\frac{u_2x_2}{N_2}\right)\right]$$

peut se traiter comme la transformée de Fourier discrète inverse unidimensionnelle, selon la direction 2, d'un champ défini sur un espace hybride, et qui est lui-même la transformée de Fourier discrète inverse unidimensionnelle de $\widehat{\mathbf{X}}$ selon la direction 1,

$$\mathbf{X}(x_1,x_2) = \sum_{u_1=0}^{N_1-1} \mathbf{Y}(u_1,x_2)\exp\left(\frac{2i\pi u_1x_1}{N_1}\right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{Y}(u_1,x_2) = \sum_{u_2=0}^{N_2-1} \widehat{\mathbf{X}}(u_1,u_2)\exp\left(\frac{2i\pi u_2x_2}{N_2}\right).$$

Pour des raisons d'implémentation de l'algorithme, il est utile de procéder à une translation du tableau de sorte que le centre de celui-ci se trouve au pixel de coordonnées $(0,\ldots,0)$. Les valeurs des fréquences spatiales u_k correspondant aux indices i_k dans chaque direction dépendent alors de la parité de N_k.
Si $N_k = 2p_k+1$, on a la correspondance suivante entre les indices et les fréquences spatiales

$$\begin{array}{lccccccc} i_k: & 0 & 1 & \ldots & p_k & p_k+1 & \ldots & 2p_k \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ u_k: & 0 & u_k^0 & \ldots & p_ku_k^0 & -p_ku_k^0 & \ldots & -u_k^0 \end{array}$$

et si $N_k = 2p_k$, la correspondance se fait selon le tableau suivant

$$\begin{array}{lcccccccc} i_k: & 0 & 1 & \ldots & p_k-1 & p_k & p_k+1 & \ldots & 2p_k \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ u_k: & 0 & u_k^0 & \ldots & (p_k-1)u_k^0 & u_k^c & -(p_k-1)u_k^0 & \ldots & -u_k^0 \end{array}$$

Dans ces deux cas, on a utilisé les notations $u_k^0 = 1/N_kT_k$ et $u_k^c = 1/2T_k$, où T_k est l'intervalle d'échantillonnage du champ $\mathbf{X}$ dans la direction k. Ainsi u_k^0 est la plus petite fréquence spatiale mesurée dans cette direction, et u_k^c est la fréquence spatiale de Nyquist correspondante. Par défaut, l'intervalle d'échantillonnage est le même dans toutes les directions. On remarque donc que si $N_i \neq N_j$, alors $u_i^0 \neq u_j^0$, ce qui introduit artificiellement une anisotropie dans l'image. Ceci suggère de choisir la même valeur N pour toutes les directions.
Notons enfin que les champs construits avec cette méthode sont nécessairement périodiques, ce qui pourra expliquer certaines de leurs limitations dans la suite, mais permettra également de s'affranchir des pics à hautes fréquences spatiales dans les transformées de Fourier, habituellement associés aux discontinuités des bords[5].

VII.4.c Exemples et propriétés

La figure **VII**.2 montre six champs bidimensionnels de taille 256×256 construits avec la méthode détaillée au **VII.4.b**. D'après la relation $\beta = 2H+n$, on doit *a priori* se limiter à des valeurs de l'indice spectral comprises entre 2 et 4. On a cependant choisi de présenter un champ pour lequel $\beta = 4,5$ ce qui correspond formellement à $H = 1,25$. D'un champ à l'autre, les phases sont conservées, de sorte que l'apparence générale n'est pas modifiée[6]. On voit très bien l'effet d'une variation de β, liée à celle de H. Plus l'exposant du spectre de puissance est grand en valeur absolue, c'est-à-dire plus H est proche de 1, moins on observe de petites structures. On peut d'ailleurs remarquer que l'on touche alors aux limites de la modélisation numérique par cette méthode, puisqu'en pratique, on n'a pas véritablement un champ uniforme pour $H > 1$.

[5]Les discontinuités impliquent également des erreurs sur certaines composantes de Fourier à basse fréquence.
[6]Voir à ce sujet le chapitre **XVII**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

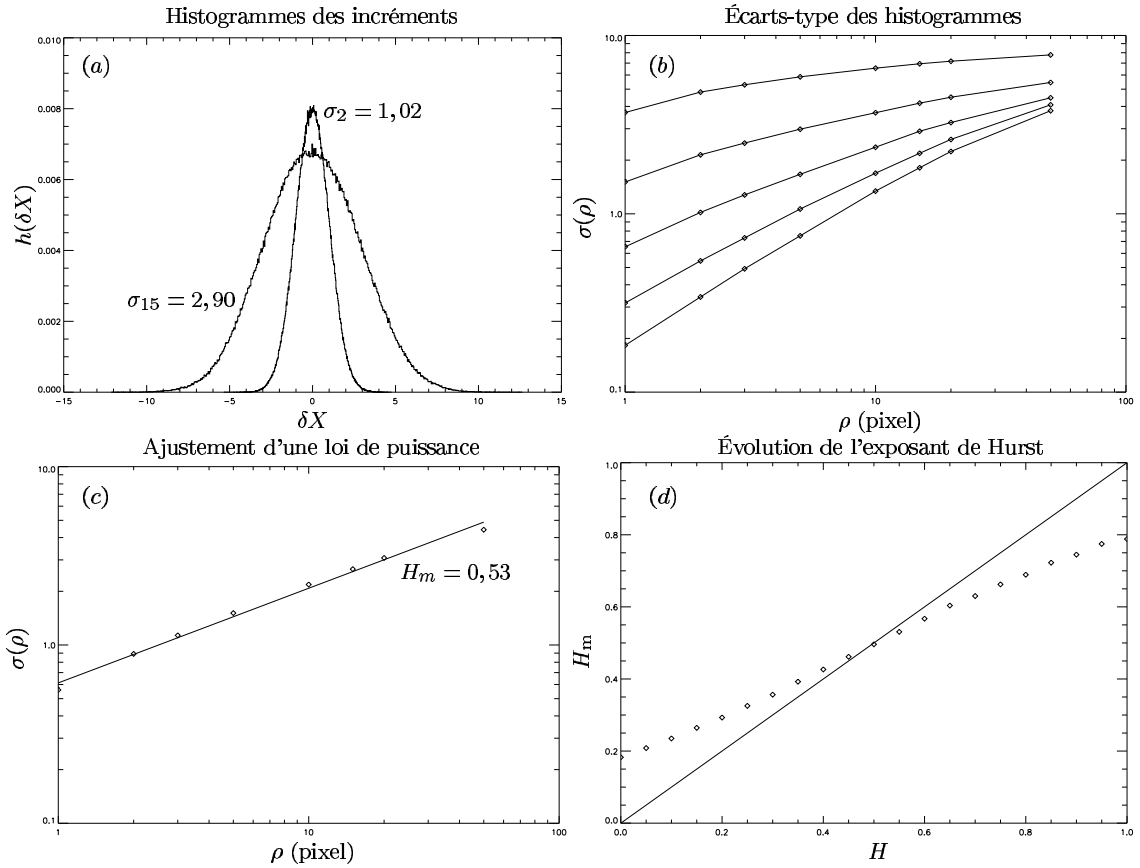

FIG. **VII**.4 – *Étude numérique des incréments des champs browniens fractionnaires. On considère des champs bidimensionnels de taille* 128×128*, et on construit leurs incréments pour des séparations allant de 1 à 50 pixels. La figure (a) en haut à gauche montre les histogrammes des cartes d'incréments pour les séparations* $\rho = 2$ *pixels et* $\rho = 15$ *pixels. La figure (b) en haut à droite donne l'évolution de l'écart-type des cartes d'incréments en fonction de la séparation, pour cinq valeurs de l'indice spectral entre* $\beta = 2$ *et* $\beta = 4$*, de haut en bas. La figure (c) en bas à gauche montre l'ajustement d'une loi de puissance sur les points de mesure correspondant au cas* $\beta = 3$*. La pente mesurée donne une estimation de l'exposant de Hurst, soit ici* $H_{\mathrm{m}} = 0,53$*. Enfin, la figure (d) en bas à droite montre l'évolution des exposants de Hurst ainsi mesurés en fonction des valeurs théoriques.*

Spectre de puissance

Bien entendu, si l'on calcule le spectre de puissance de ces champs, on retrouve les lois de puissance introduites au départ. On le voit sur la figure **VII**.3, qui présente les spectres de puissance des six champs browniens fractionnaires de la figure **VII**.2. La représentation choisie ici consiste simplement à tracer chaque point dans l'espace $(k, \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k}))$, sans effectuer de moyenne azimutale. L'intérêt de cette forme est qu'elle permet de mettre en évidence les anisotropies éventuelles de l'amplitude, puisque celles-ci apparaissent alors comme une dispersion. On utilisera parfois cette forme brute dans le cadre de l'étude numérique du chapitre **XII**, mais pour des raisons de commodité de lecture des figures, on fera le plus souvent des moyennes azimutales.

Distribution des incréments

Les champs browniens fractionnaires, tels qu'on les a définis, présentent des incréments distribués selon des lois normales, avec une variance dépendant en loi de puissance de la séparation considérée, comme le montre l'équation (19). On peut aisément tester cette propriété sur les champs synthétiques qu'on vient de construire. On se place dans le cas bidimensionnel et on se donne, pour chaque indice spectral, une série de réalisations numériques du champ brownien fractionnaire considéré. En les déplaçant par rapport

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

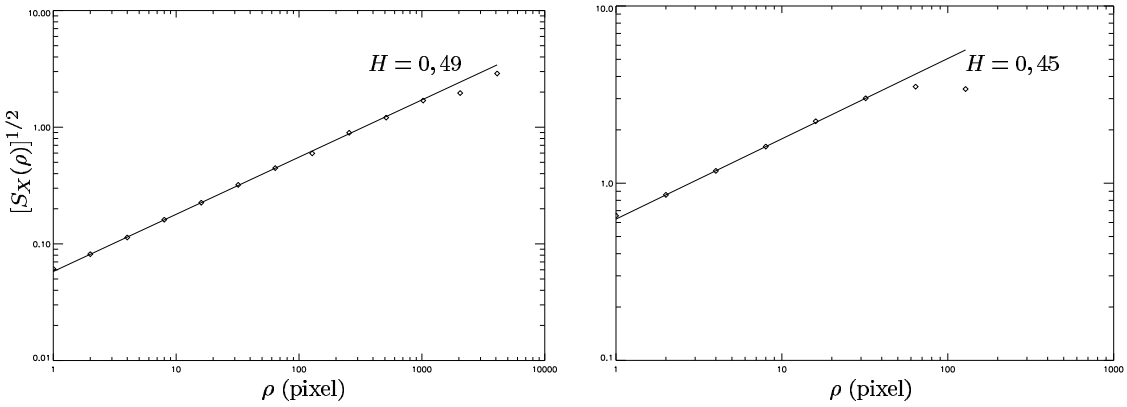

FIG. **VII.**5 – *Fonctions de structure grossières d'ordre deux calculées respectivement sur un mouvement brownien fractionnaire unidimensionnel de taille* 8192 *pixels (à gauche) et sur un champ brownien fractionnaire bidimensionnel de taille* 256×256 *(à droite). Dans les deux cas, l'exposant de Hurst théorique est 0,5, les indices spectraux respectifs étant* $\beta = 2$ *et* $\beta = 3$.

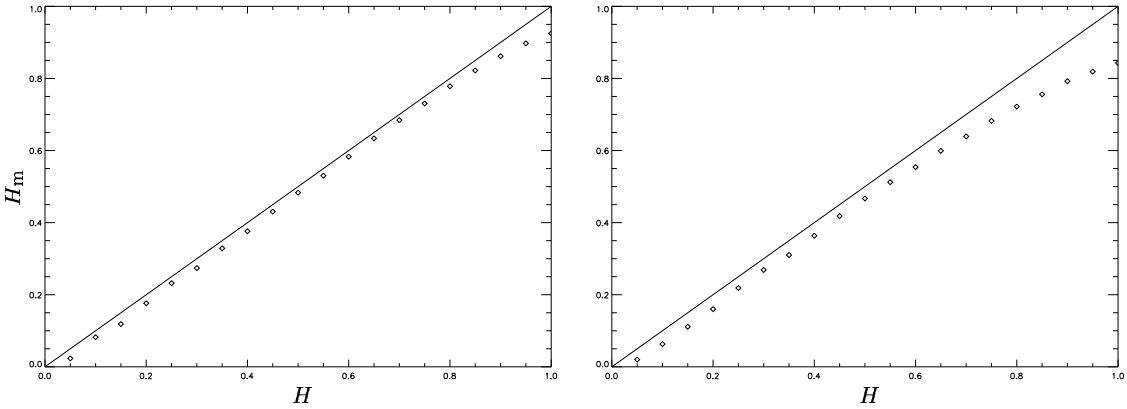

FIG. **VII.**6 – *Évolution des exposants de Hurst mesurés par ajustement de lois de puissance sur les fonctions de structure grossières d'ordre deux, en fonction de l'exposant de Hurst théorique. La figure de gauche présente le cas de champs browniens fractionnaires unidimensionnels de taille* 8192 *pixels, celle de droite le cas de champs bidimensionnels de taille* 256×256 *pixels.*

à eux-mêmes d'une quantité donnée, on construit les cartes d'incréments qui leur sont associées, puis les histogrammes des valeurs de ces dernières. Comme on le voit sur la figure **VII.**4 en haut à gauche, la forme de ceux-ci est gaussienne, et l'évolution de leur écart-type en fonction de la séparation est montrée sur la même figure, en haut à droite. Cette évolution se fait selon des lois proches de lois de puissance, mais pas exactement. On note la présence d'une courbure aux grandes séparations, ce qui ne doit pas nous étonner. En effet, pour ces séparations non négligeables devant la taille de la carte, la périodicité des images doit entrer en ligne de compte. En d'autres termes, les grandes séparations donnent les mêmes cartes d'incréments que les petites, et donc le même écart-type, ce qui explique la chute relative des courbes observée sur la figure. On peut néanmoins ajuster des lois de puissance sur ces mesures, comme le montre le panneau en bas à gauche de la même figure **VII.**4. Cependant, les exposants obtenus, qui devraient être égaux aux exposants de Hurst, en sont notablement différents. Plus précisément, comme le montre la figure en bas à droite, l'exposant de Hurst obtenu par cette méthode est systématiquement surestimé pour $H < 0,5$ et sous-estimé pour $H > 0,5$. On peut interpréter cet effet comme une conséquence du caractère numérique des champs considérés. En particulier, comme on ne peut pas raisonner pour des tailles inférieures à celle du pixel, les champs ne deviennent pas uniformes aux grands exposants de Hurst, contrairement à ce qu'on devrait observer (voir **VII.3.c**). Les exposants de Hurst mesurés sont donc plus

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

petits que les valeurs théoriques. De même, aux faibles valeurs de H, la taille du pixel impose une limite aux plus petites structures observables, ce qui correspond à une limite inférieure de l'exposant de Hurst mesuré.

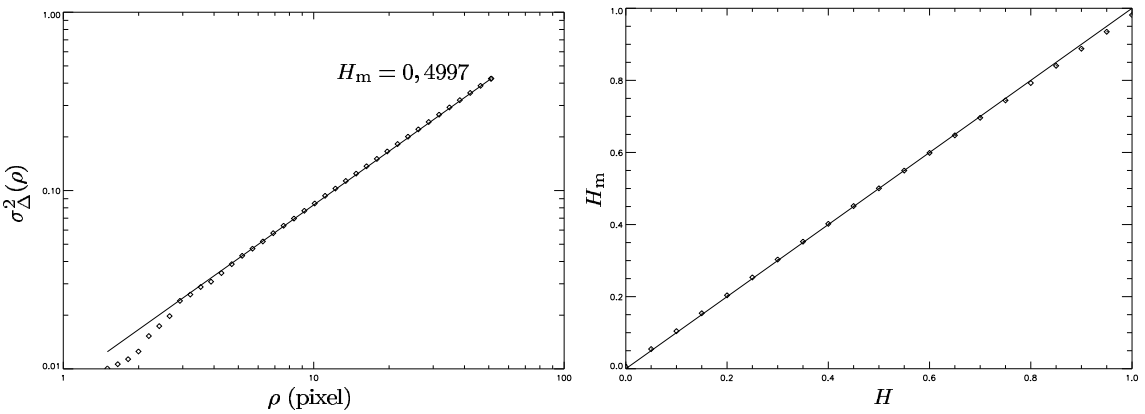

FIG. **VII**.7 – *Ajustement d'une loi de puissance sur la Δ-variance d'un champ brownien fractionnaire (à gauche) et évolution de l'exposant de Hurst ainsi mesuré H_{m} avec l'exposant théorique H (à droite). La droite en tiret sur cette dernière sous-figure représente l'égalité $H_{\mathrm{m}} = H$. Pour chaque valeur de H, on calcule la Δ-variance de 20 champs browniens fractionnaires de taille 256×256 et on ajuste une loi de puissance de façon à obtenir une valeur expérimentale H_{m}. La figure montre la moyenne de ces valeurs à H fixé (losanges) ainsi que les écarts-type sous forme de barres d'erreur (à peine visibles).*

Fonctions de structure

Comme on l'a dit au chapitre **V**, le calcul des fonctions de structure est simplifié si l'on en considère des versions grossières. Or on a vu que les fonctions de structure d'ordre deux des champs browniens fractionnaires suivent des lois de puissance en fonction de la séparation. Ces champs fournissent donc une bonne base de travail pour calibrer l'outil des fonctions de structure grossières, du moins à l'ordre deux. La figure **VII**.5 montre tout d'abord les mesures obtenues sur un champ undimensionnel de taille 8192 pixels, et sur un champ bidimensionnel de taille 256×256 pixels. On voit que les points de mesure se répartissent bien suivant une loi de puissance, excepté aux séparations les plus grandes, ce qu'on explique par l'effet de périodicité évoqué plus haut. L'exposant obtenu par ajustement, qui donne une mesure de l'exposant de Hurst, est clairement meilleur dans le cas du champ unidimensionnel, ce qui peut s'expliquer par le fait que celui-ci permet de tester un plus grand nombre d'échelles non affectées par la périodicité. La figure **VII**.6 montre d'ailleurs l'évolution de l'exposant de Hurst mesuré en fonction de la valeur théorique, pour les deux cas de la figure **VII**.5. On voit notamment que l'exposant de Hurst est systématiquement sous-estimé, et que les grandes valeurs de l'exposant de Hurst sont les moins bien restituées, du fait de la discrétisation discutée plus haut.

Δ-variance

On a vu au **VII.3.b** que la Δ-variance appliquée à un champ brownien fractionnaire défini sur $\mathbb{R}^n$ et d'indice spectral β se comportait en fonction de l'échelle ρ comme $\sigma^2_\Delta(\rho) \propto \rho^{\beta-n} = \rho^{2H}$. On doit donc pouvoir, en théorie, déterminer l'exposant de Hurst H à partir de la Δ-variance, et remonter ainsi à l'indice spectral sans avoir à passer par le plan de Fourier. C'est ce que montre le panneau de gauche de la figure **VII**.7 sur l'exemple d'un champ brownien fractionnaire bidimensionnel de taille 256×256. On voit que mis à part aux plus petites échelles, la Δ-variance d'un champ brownien fractionnaire synthétique suit bien une loi de puissance en fonction de ρ, avec un exposant très proche de l'exposant attendu, puisqu'on déduit de la pente $\gamma = 2H_{\mathrm{m}}$ une valeur de l'exposant de Hurst $H_m = 0,4997$, l'exposant théorique étant $H = 0,5$. Le fait que la loi ne soit pas vérifiée aux petites échelles ($\rho \leqslant 3$ pixels) est sans doute attribuable à l'effet de discrétisation du champ. En faisant varier l'exposant de Hurst, on constate, sur le panneau de droite de la figure **VII**.7, qu'on retrouve la valeur de H introduite en entrée avec une excellente précision, ce qui valide cette méthode de détermination de l'indice spectral dans l'espace direct.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Dimension fractale

Les champs browniens fractionnaires sont des ensembles fractals, et il est assez simple de calculer la dimension fractale associée aux courbes isocontours de ces champs. Comme on l'a vu au **VII.3.b**, cette dimension s'exprime en fonction de l'exposant de Hurst, avec $D = n - H$, où n est la dimension de l'espace. Le calcul de cette dimension fractale se fait en suivant la procédure qu'on a déjà évoquée au **VI.8** et qu'on détaille un peu plus ici dans le cas de la dimension deux, à l'aide de la figure **VII.**8. À partir de l'image de départ X, on forme les images X_c seuillées à une valeur constante c, puis on isole les nuages, c'est-à-dire les composantes connexes de ces images, et on calcule leurs périmètres et leurs aires respectives.

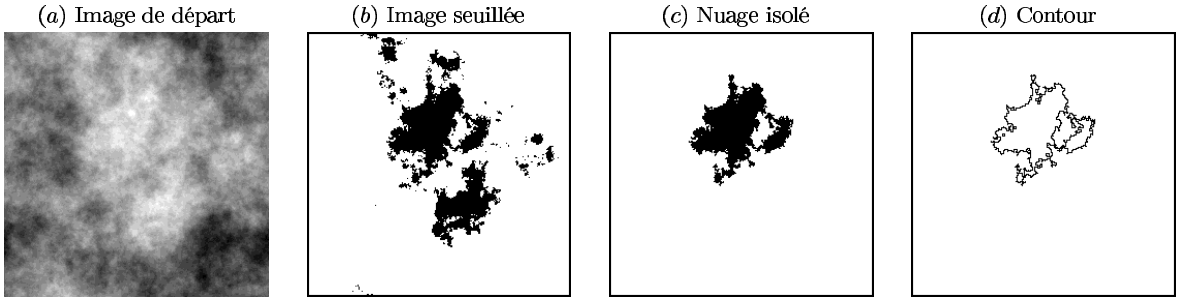

FIG. **VII.**8 – *Procédure de calcul des isocontours d'un champ brownien fractionnaire en dimension deux. L'image de départ est celle de la figure (a). La figure (b) représente le seuillage de cette image pour un niveau donné. Les différents nuages sont isolés les uns des autres automatiquement et l'un d'entre eux est présenté sur la figure (c), ce qui permet le calcul de son aire. Son périmètre est quant à lui calculé en extrayant le contour (d).*

Cette procédure permet de construire directement le panneau de gauche de la figure **VII.**9, qui représente les périmètres et les aires de tous les nuages construits à partir de l'image de départ de la figure **VII.**8 en utilisant cinquante niveaux de seuillage.

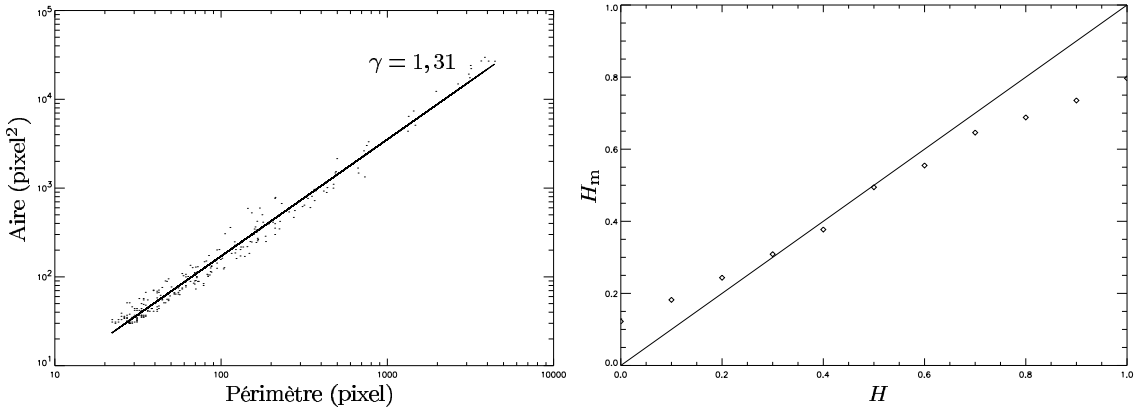

FIG. **VII.**9 – *Relation périmètre-aire des isocontours de l'image de départ de la figure* **VII.**8 *(à gauche) et évolution de l'exposant de Hurst mesuré par ajustement d'une loi de puissance sur cette relation, en fonction de la valeur théorique.*

On voit clairement que les points de mesure se répartissent selon une loi de puissance, et, d'après la section **VI.8**, l'exposant γ trouvé par ajustement est lié à la dimension fractale D des isocontours par

$$\gamma = \frac{2}{D} \quad \text{et est donc également relié à l'exposant de Hurst par} \quad \gamma = \frac{2}{n-H} = \frac{2}{2-H}.$$

On peut donc déduire une estimation de l'exposant de Hurst par cette méthode et la comparer avec la valeur théorique attendue. C'est ce qui est représenté sur le panneau de droite de la figure **VII.**9. On

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

remarque que cette estimation de l'exposant de Hurst souffre des mêmes défauts que ceux observés lors de l'étude des incréments, à savoir une surestimation aux petites valeurs de l'exposant de Hurst et une sous-estimation aux grandes valeurs de celui-ci. Il semble qu'il faille également attribuer ces effets à la discrétisation des champs numériques.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE VIII

Équation de Fokker-Planck

VIII.1 Introduction

On a parlé, au début du chapitre **VII**, des mouvements browniens de petites particules en suspension dans un fluide, et on en a tiré un modèle mathématique permettant de décrire les trajectoires de ces particules. Ce modèle s'est avéré particulièrement prolifique et aisé à généraliser en vue de modéliser d'autres phénomènes physiques aléatoires. On utilisera d'ailleurs les mouvements browniens fractionnaires ainsi construits dans la troisième partie.
Il convient de remarquer que, dans l'expérience du mouvement brownien, la grandeur physique modélisée par un processus de Wiener est la position de la particule en mouvement. Or, bien entendu, d'autres grandeurs attachées à cette particule peuvent être considérées, en particulier sa vitesse. Il est évident, compte tenu de la compréhension physique que nous avons de ce phénomène, que l'évolution de la vitesse de la particule au cours du temps, notée $\boldsymbol{v}(t)$, est un processus stochastique, au même titre que la position $\boldsymbol{r}(t)$, puisqu'elle subit des évolutions aléatoires du fait des collisions avec les molécules du fluide. Le processus modélisant la vitesse est appelé processus de Ornstein-Uhlenbeck, et il est *a priori* différent d'un processus de Wiener [Papoulis, 1984]. En particulier, la variance d'un processus de Ornstein-Uhlenbeck est constante, tandis que celle d'un processus de Wiener dépend linéairement du temps. La raison pour laquelle on va étudier ces processus, et les équations qui s'y rattachent, appelées équations de Langevin et de Fokker-Planck, est qu'ils nous permettront d'aborder, dans la dernière partie, le problème du transfert radiatif en milieux complexes.

VIII.2 Exemple : Modélisation de la vitesse d'une particule brownienne

VIII.2.a Équation déterministe du mouvement

Au chapitre **VII**, nous n'avons fait qu'effleurer la modélisation physique du mouvement brownien pour nous concentrer sur les propriétés statistiques des trajectoires auxquelles il donne naissance. Ici, nous allons donc l'étudier plus en détail afin d'obtenir une équation, dite équation de Langevin, régissant l'évolution de la vitesse de la particule étudiée. Pour simplifier, on considérera un mouvement unidimensionnel. Si l'on observe une particule de masse m immergée dans un fluide, ce dernier exerce sur elle une force de friction $F = -\alpha v$, proportionnelle à la vitesse v de la particule et de sens contraire, selon la loi de Stokes, le coefficient de proportionnalité α dépendant notamment de la viscosité du fluide, ainsi que de la taille et de la géométrie de la particule. L'équation du mouvement de la particule prend alors la forme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma v = 0, \qquad \text{où } \gamma = \frac{\alpha}{m} = \frac{1}{\tau_r} \text{ est l'amortissement.} \tag{23}$$

La vitesse v de la particule, si elle est non nulle au départ, décroît alors exponentiellement, avec une constant de temps égale à τ_r, qu'on nomme temps de relaxation,

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau_r}. \tag{24}$$

Physiquement, cette équation se comprend en se figurant que les collisions avec les molécules du fluide ralentissent la particule, ce qui permet un transfert de quantité de mouvement. Celui-ci aboutit à ce que la vitesse de la particule soit *in fine* égale à la vitesse moyenne des molécules du fluide, qui est nulle. Cependant, cet état de repos étant supposé atteint, on imagine bien que si la masse m n'est pas très grande devant celle des molécules du fluide, toute collision ultérieure résultera en une vitesse v non nulle, puisque les vitesses des molécules individuelles ne sont pas nulles à tout instant. En revanche, si la particule

est très massive, toutes les collisions auront un effet négligeable, qui de plus sera moyenné dans les deux directions, de sorte que l'équation (24) sera alors valable.

VIII.2.b Équation stochastique du mouvement

En fait, le théorème d'équipartition prévoit qu'à l'équilibre à la température T, et à une dimension, l'énergie cinétique moyenne de la particule doit être égale à $k_B T/2$, et on doit donc avoir

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{E}\{v^2(t)\} = \sigma_{\text{th}}^2 \quad \text{où } \sigma_{\text{th}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \text{ est la vitesse d'agitation thermique.} \tag{25}$$

Cette condition est alors contradictoire avec la limite nulle de l'équation (24), sauf si la vitesse déterministe v est grande devant la vitesse d'agitation thermique σ_{th}, ce qui a lieu pour des particules suffisamment massives.
Au contraire, pour une petite particule, cette vitesse d'agitation thermique devient observable "macroscopiquement", au sens où elle est du même ordre de grandeur que la vitesse déterministe décrite par l'équation (23). Dès lors, il est exclu que la vitesse v de la particule puisse être décrite correctement par cette équation différentielle homogène, puisque celle-ci entre en contradiction de manière trop flagrante avec la condition d'équipartition (25). Dans le cas intermédiaire où la masse m est encore relativement grande devant celle des molécules du fluide, on s'attend cependant à ce que (23) reste approximativement valable, si on la modifie pour que la condition (25) soit remplie. On y parvient en ajoutant une force fluctuante $\Gamma(t)$, de sorte que l'équation d'évolution de la vitesse s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \gamma v = \Gamma(t). \tag{26}$$

Cette équation est la forme la plus simple d'une équation de Langevin. $\Gamma(t)$ est de même appelée force de Langevin. Étant données les remarques faites plus haut, celle-ci doit s'interpréter ainsi : tant que la particule est très massive, une collision unique ne modifie pas sensiblement le mouvement, et l'effet n'est sensible que collectivement, comme une friction. Pour de plus petites particules, chaque collision commence à se faire sentir et la vitesse v subit par conséquent des variations brusques. Il existe toujours un terme collectif F, mais il devient impératif de ne plus négliger les effets individuels, qu'on modélise par une force stochastique $m\Gamma(t)$. Les propriétés de cette force ne peuvent être connues de manière déterministe, car il faudrait pour cela non seulement pouvoir résoudre les équations du mouvement couplées des quelque 10^{23} molécules contenues dans le fluide, mais également connaître avec exactitude leurs positions et vitesses initiales. Il s'ensuit que toutes les grandeurs associées au fluide ne peuvent être connues que statistiquement, et doivent être déduites de l'équation (26) par le biais des propriétés du processus $\Gamma(t)$.

VIII.2.c Propriétés de la force de Langevin

Ces dernières peuvent se déduire des hypothèses du modèle. Il est tout d'abord manifeste que l'effet global des collisions est compris dans le terme de friction, et que par conséquent la moyenne de $\Gamma(t)$ est nulle, soit $\mathsf{E}\{\Gamma(t)\} = 0$. On peut d'ailleurs remarquer que l'asymétrie du problème est entièrement due à la vitesse initiale v_0 et que le transfert de quantité de mouvement modélisé par la force de friction tend à rétablir la symétrie. À l'équilibre, les collisions individuelles ont un effet de moyenne nulle.
D'autre part, il semble raisonnable de penser que deux collisions entre la particule et les molécules du fluide sont indépendantes l'une de l'autre. Le produit de deux forces de Langevin prises à des instants différents t et $t+\tau$ doit donc en moyenne être nul si τ est grand devant la durée τ_c d'une collision, ce qu'on écrira évidemment en terme de fonction d'autocorrélation, $A_\Gamma(\tau) = \mathsf{E}\{\Gamma(t)\Gamma(t+\tau)\} = 0$. De plus, comme la durée d'une collision est beaucoup plus petite que le temps de relaxation τ_r, du fait même que ce dernier est lié à l'évolution de la vitesse sous l'effet d'un grand nombre de collisions, on peut faire l'approximation que τ_c tend vers zéro. On supposera donc qu'en fait $A_\Gamma(\tau) = q\delta(\tau)$, la fonction de Dirac apparaissant pour assurer la finitude de l'énergie cinétique moyenne de la particule, dont la valeur est liée à la constante q, comme on le verra. On suppose en fait couramment que $\Gamma(t)$ est un processus gaussien δ-corrélé, c'est-à-dire que la fonction de distribution de chaque variable aléatoire $\Gamma(t)$ est une gaussienne centrée en zéro, et qu'en ce

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

qui concerne les corrélations aux différents ordres, on a

$$\mathsf{E}\{\Gamma(t_1)\dots\Gamma(t_{2n-1})\}=0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\{\Gamma(t_1)\dots\Gamma(t_{2n})\}=q^n\left[\sum_{P_n}\delta(t_{i_1}-t_{i_2})\dots\delta(t_{i_{2n-1}}-t_{i_{2n}})\right],$$

où la somme est effectuée sur l'ensemble P_n des $(2n)!/(2^n n!)$ permutations de $(1,2,\dots,2n)$ ne laissant pas invariant le produit des distributions de Dirac[1].

VIII.2.d Équation d'évolution de la densité de probabilité de la vitesse

La force de Langevin $\Gamma(t)$ étant stochastique, l'équation (26), décrivant l'évolution de la vitesse v de la particule brownienne sous l'effet des collisions avec les molécules du fluide, l'est également. On doit donc voir v comme un processus stochastique, et on peut lui appliquer les méthodes introduites au chapitre **V.** En particulier, on peut se demander quelle est la probabilité d'avoir, à l'instant t, une vitesse v à $\mathrm{d}v$ près, ou de manière équivalente, quelle est la densité de probabilité $W_v(v;t)$ de la vitesse. Cette notation rappelle que, bien entendu, cette distribution dépend du temps, et on remarque qu'elle doit aussi dépendre, *a priori*, de la distribution initiale $W_v(v;0)$. On montrera dans la suite que cette distribution obéit à une équation aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial W_v}{\partial t}=\gamma\frac{\partial(vW_v)}{\partial v}+\gamma\frac{k_BT}{m}\frac{\partial^2 W_v}{\partial v^2} \quad \text{qui est une équation dite de Fokker-Planck.} \tag{27}$$

Celle-ci peut théoriquement se résoudre à partir de la condition initiale $W_v(v;0)$ et des conditions aux limites pour $|v|\to\infty$. Une fois la distribution de la vitesse connue, on peut en déduire toutes les quantités dépendant exclusivement de la vitesse, d'après ce qui a été dit au **IV.5.a.** De manière générale, les équations de Fokker-Planck donnent l'équation d'évolution de la densité de probabilité d'un ensemble de variables stochastiques dont l'évolution est régie par des équations de Langevin[2].

VIII.2.e Solution de l'équation de Langevin

On peut résoudre, tout au moins formellement, l'équation de Langevin (26), en utilisant la méthode de variation de la constante. La solution de l'équation homogène associée (23) étant donnée par (24), on cherche la solution de l'équation complète sous la forme

$$v(t)=c(t)e^{-\gamma t} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}=\Gamma(t)e^{\gamma t} \quad \text{et donc} \quad v(t)=v_0e^{-\gamma t}+\int_0^t\Gamma(t')e^{-\gamma(t-t')}\mathrm{d}t'. \tag{28}$$

Cette forme peut être mise à profit pour calculer la fonction d'autocorrélation de la vitesse

$$A_v(t_1,t_2)=\mathsf{E}\{v(t_1)v(t_2)\}=v_0^2e^{-\gamma(t_1+t_2)}+q\int_0^{t_1}\mathrm{d}t_1'\int_0^{t_2}\mathrm{d}t_2'\delta(t_1'-t_2')e^{-\gamma(t_1+t_2-t_1'-t_2')},$$

où l'on a utilisé les propriétés de la force de Langevin telles que décrites au **VIII.2.c.** L'intégrale double se calcule sans difficulté et l'on obtient finalement

$$A_v(t_1,t_2)=v_0^2e^{-\gamma(t_1+t_2)}+\frac{q}{2\gamma}\left[e^{-\gamma|t_2-t_1|}-e^{-\gamma(t_1+t_2)}\right] \quad \text{qui donne} \quad A_v(t_1,t_2)\simeq\frac{q}{2\gamma}e^{-\gamma|t_1-t_2|}$$

aux temps longs ($\gamma t_1\gg 1$ et $\gamma t_2\gg 1$), c'est-à-dire lorsque le système a atteint l'état stationnaire. La fonction d'autocorrélation ne dépend plus alors que de l'intervalle de temps $\tau=|t_2-t_1|$. Dans cette limite, on peut également écrire l'énergie cinétique moyenne de la particule

$$\mathsf{E}\{e_c\}=\frac{1}{2}m\mathsf{E}\{v^2\}=\frac{1}{2}mA_v(0)=\frac{qm}{4\gamma}=\frac{k_BT}{2} \quad \text{d'où le facteur de normalisation} \quad q=\frac{2\gamma k_BT}{m}.$$

[1] Par exemple, pour $n=2$, les permutations $(1,2,3,4)$, $(2,1,3,4)$ et $(3,4,1,2)$ donnant le même produit de distributions de Dirac, elles ne sont comptées qu'une fois. Le nombre total de ces permutations distinctes est donc égal au nombre total de permutations sans restriction, soit $(2n)!$, divisé par le nombre $n!$ de permutations échangeant une des n distributions de Dirac avec une autre, et par le nombre de permutations échangeant les deux arguments d'une même distribution, soit 2^n, d'où la relation $\mathrm{Card}(P_n)=(2n)!/(2^n n!)$.

[2] Notons qu'il existe d'autres types d'équations décrivant l'évolution des densités de probabilité de variables stochastiques. On pense notamment à l'équation de Boltzmann ou à l'équation maîtresse.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

VIII.2.f Distribution des vitesses dans l'état stationnaire

Lorsque le régime permanent est atteint, le premier terme de la solution formelle (28) s'annule et celle-ci peut alors s'écrire, en effectuant le changement de variable $\tau = t - t'$,

$$v(t) = \int_0^t e^{-\gamma\tau}\Gamma(t-\tau)\mathrm{d}\tau \simeq \int_0^\infty e^{-\gamma\tau}\Gamma(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{en rappelant qu'on se place à } t \gg \frac{1}{\gamma}$$

Pour calculer la distribution des vitesses, on peut calculer les moments de la vitesse μ'_k puis utiliser la méthode, suggérée au chapitre **IV**, faisant appel à la fonction caractéristique Z. Explicitement,

$$\mu'_k = \mathsf{E}\left\{v^k\right\} = \mathsf{E}\left\{\left[\int_0^\infty e^{-\gamma\tau}\Gamma(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]^k\right\} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \exp\left(-\gamma\sum_{i=1}^k \tau_i\right)\mathsf{E}\left\{\prod_{i=1}^k \Gamma(t-\tau_i)\right\}\prod_{i=1}^k \mathrm{d}\tau_i,$$

ce qui montre que les moments d'ordre impair μ'_{2n+1} sont nuls. D'autre part, les moments d'ordre pair μ'_{2n} peuvent être exprimés simplement en remarquant qu'on peut factoriser les intégrales $2n$-dimensionnelles en un produit de n intégrales doubles identiques, soit

$$\mu'_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \mu'_{2n} = \frac{(2n!)}{2^n n!}\left[\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\gamma(\tau_1+\tau_2)} q\delta(\tau_1-\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\right]^n = \frac{(2n!)}{2^n n!}\mathsf{E}\left\{v^2\right\}^n = \frac{(2n!)}{2^n n!}\left(\frac{kT}{m}\right)^n$$

La fonction caractéristique Z est alors une gaussienne, ce qu'il est aisé de démontrer, en insérant simplement l'expression des moments dans la définition (7). La distribution des vitesses dans le régime stationnaire, obtenue par transformation de Fourier de Z, est également une gaussienne, et on retrouve en fait la distribution de Maxwell-Boltzmann,

$$W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{th}}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_{\mathrm{th}}^2}\right), \quad \text{qui est solution de l'équation stationnaire associée à (27).}$$

Remarquons que cet exemple est particulièrement simple, puisque l'équation de Langevin régissant la vitesse est unidimensionnelle, linéaire, et à coefficients constants. C'est ainsi qu'on peut calculer directement la forme de $v(t)$, ainsi que la distribution des vitesses W_v dans l'état stationnaire. Dans les cas plus généraux que l'on va aborder dans la suite, il faut bien voir que l'on part d'une ou de plusieurs équations de Langevin pour obtenir une équation de Fokker-Planck portant sur la densité de probabilité W des variables étudiées, et que c'est en résolvant cette équation qu'on obtient les propriétés de la distribution.

VIII.3 Développement de Kramers-Moyal

VIII.3.a Le cas unidimensionnel

On considère ici un processus stochastique quelconque, noté X. À chaque instant, la variable aléatoire $X(t)$ est distribuée selon une densité de probabilité $W(x;t)$, et les distributions à deux instants t et t' peuvent être reliées entre elles par

$$W(x';t') = \int P(x';t'|x;t)W(x;t)\mathrm{d}x, \tag{29}$$

où $P(x';t'|x;t)$ est la probabilité que le processus passe de la valeur x à l'instant t à la valeur x' à l'instant t'. Puisque ce qui nous intéresse est l'évolution de la distribution W au cours du temps, il convient de se pencher sur cette probabilité de transition P, pour des intervalles de temps courts[3]. On peut montrer, à partir d'un développement de Taylor de P que la variation de la distribution W pendant l'intervalle de temps τ s'écrit [Risken, 1989]

$$W(x;t+\tau) - W(x;t) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\left[M_n(x,t,\tau)W(x;t)\right],$$

[3] Au sens mathématique, c'est-à-dire avec $\tau = t' - t$ tendant vers zéro.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

où les $M_n(x,t,\tau)$ sont les moments successifs des incréments du processus X entre t et $t+\tau$, conditionnés à l'égalité $X(t)=x$, soit, de manière explicite,

$$M_n(x,t,\tau)=\int (x'-x)^n P(x';t+\tau|x;t)\mathrm{d}x'.$$

L'étape suivante consiste à supposer qu'on peut écrire des développements de Taylor en puissances de τ pour les moments M_n, de façon à pouvoir identifier l'expression de la dérivée partielle de W par rapport au temps. Remarquant que pour $\tau=0$ les moments sont nécessairement nuls[4], puisque la probabilité de transition est une distribution de Dirac, le premier ordre non nécessairement nul du développement des M_n est précisément l'ordre un. On écrit habituellement ce résultat sous la forme $M_n(x,t,\tau)=n!D_n(x,t)\tau+\mathcal{O}(\tau^2)$, de sorte que

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t}=\sum_{n\geqslant 1}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n [D_n(x,t)W(x;t)]=\mathbf{K}W}. \tag{30}$$

Cette écriture est appelée développement de Kramers-Moyal et de même les D_n et $\mathbf{K}$ sont respectivement les coefficients de Kramers-Moyal et l'opérateur de Kramers-Moyal, dont on remarque qu'il est linéaire. Notons que si le processus X est markovien, c'est-à-dire si la probabilité de transition P ne dépend que des deux états considérés, les coefficients de Kramers-Moyal ne dépendent effectivement que de l'instant t et de la variable x, de sorte que l'équation précédente peut en théorie être intégrée si l'on se donne une distribution initiale ainsi que des conditions aux limites. Remarquons également que la probabilité de transition satisfait elle aussi au développement ci-dessus, car elle s'identifie avec la distribution de probabilité W si la distribution initiale est un Dirac.

VIII.3.b Théorème de Pawula et équation de Fokker-Planck

Pour résoudre l'équation (30), il est important de savoir si l'on peut tronquer le développement, de façon à simplifier l'intégration. Le théorème de Pawula permet d'apporter une première réponse à cette question. On peut en effet montrer [Risken, 1989] que pour deux entiers n et m supérieurs ou égaux à un, on a l'inégalité suivante entre les coefficients de Kramers-Moyal,

$$0\leqslant [(2n+m)!D_{2n+m}]^2\leqslant (2n)!(2n+2m)!D_{2n}D_{2n+2m} \quad \text{obtenue à partir d'une inégalité de Schwarz.}$$

Ainsi, si D_2 est nul, alors tous les coefficients d'ordre deux ou plus sont nuls. Si cependant D_2 n'est pas nul mais que D_4 l'est, alors D_3 l'est aussi ainsi que tous les coefficients suivants. En raisonnant ainsi de façon itérative, on en déduit que, soit le développement (30) s'arrêtre à l'ordre un, soit il s'arrête à l'ordre deux, soit il est infini. Dans le deuxième cas, on dira qu'on a affaire à une équation de Fokker-Planck,

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[D_1(x,t)W(x;t)]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[D_2(x,t)W(x;t)]=\mathbf{F}W}.$$

Les deux premiers coefficients de Kramers-Moyal ont donc un rôle particulier à jouer et on les nomme respectivement coefficient de dérive pour le premier et coefficient de diffusion pour le second.

VIII.3.c Le cas multidimensionnel

On procède de la même manière que dans le cas plus simple d'une seule variable. Soit $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_p)$ le vecteur regroupant les p processus stochastiques auxquels on s'intéresse. Les valeurs prises par les variables aléatoires $\boldsymbol{X}(t)$ seront notées $\boldsymbol{x}$, et leur distribution de probabilité $W(\boldsymbol{x};t)$ a la propriété suivante, exactement semblable à (29),

$$W(\boldsymbol{x'};t')=\int P(\boldsymbol{x'},t'|\boldsymbol{x},t)W(\boldsymbol{x};t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \text{cette intégrale portant sur } p \text{ dimensions.}$$

[4]On rappelle que $n\geqslant 1$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Utilisant les mêmes méthodes que pour le cas unidimensionnel, détaillées par [Risken, 1989], on peut développer la probabilité de transition P en série de Taylor faisant intervenir les moments

$$M_{i_1,\ldots,i_n}(\boldsymbol{x},t,\tau) = \int \left(x'_{i_1} - x_{i_1}\right) \ldots \left(x'_{i_n} - x_{i_n}\right) P(\boldsymbol{x'}, t+\tau|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x'},$$

où les indices (i_k) sont choisis parmi $(1,\ldots,p)$. Lorsque l'intervalle de temps τ tend vers zéro, on peut écrire ces moments comme $M_{i_1,\ldots,i_n}(\boldsymbol{x},t,\tau) = n!D_{i_1,\ldots,i_n}(\boldsymbol{x},t)\tau + \mathcal{O}(\tau^2)$, d'où le développement de Kramers-Moyal de la dérivée partielle par rapport au temps de la distribution de probabilité W,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \sum_{(i_k)} \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_n}} \left[D_{i_1,\ldots,i_n}(\boldsymbol{x},t)W(\boldsymbol{x};t)\right].$$

On verra, lorsqu'on abordera les processus régis par des équations de Langevin sous leur forme la plus générale, que, dans ce cas précis tout au moins, les coefficients de Kramers-Moyal d'ordre trois ou plus sont nuls, de sorte qu'on aura en fait une équation de Fokker-Planck à p dimensions,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[D_i(\boldsymbol{x},t)W(\boldsymbol{x};t)\right] + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[D_{i,j}(\boldsymbol{x},t)W(\boldsymbol{x};t)\right], \tag{31}$$

où le coefficient de dérive est maintenant un vecteur, et celui de diffusion un tenseur d'ordre deux, symétrique d'après l'expression des moments.

VIII.4 Équations de Langevin

VIII.4.a Forme générale

On se place toujours dans le cadre d'un processus stochastique $\boldsymbol{X}$ composé de p processus unidimensionnels $(X_1,\ldots,X_p)$, mais on fait maintenant l'hypothèse supplémentaire selon laquelle ces processus sont régis par des équations de Langevin sous leur forme la plus générale, non-linéaire,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{X},t\right) + \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{X},t\right)\boldsymbol{\Gamma}(t), \quad \text{soit encore} \quad \frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} = h_i\left(\{X_k\},t\right) + \sum_{j=1}^{p} g_{ij}\left(\{X_k\},t\right)\Gamma_j(t). \tag{32}$$

Les fonctions h_i et g_{ij}, respectivement regroupées sous une forme vectorielle $\boldsymbol{h}$ et matricielle $\boldsymbol{g}$, dépendent de l'ensemble des variables aléatoires $\boldsymbol{X}$ et du temps. Les forces de Langevin Γ_j, qu'on a rassemblées en un vecteur $\boldsymbol{\Gamma}$ pour alléger les notations, sont supposées posséder les propriétés décrites au **VIII.2.c**, c'est-à-dire qu'il s'agit de processus gaussiens indépendants et δ-corrélés, soit,

$$\mathsf{E}\{\Gamma_i(t)\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\{\Gamma_i(t)\Gamma_j(t')\} = 2\delta_{ij}\delta(t-t'), \quad \text{où } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Ceci étant posé, il est en général impossible de déterminer une solution formelle de ces équations. En revanche, on peut établir une équation régissant la densité de probabilité $W(\boldsymbol{x};t)$. Pour cela, il s'agit de déterminer les coefficients de Kramers-Moyal associés à ces équations de Langevin. On va en particulier montrer que le développement de Kramers-Moyal s'arrête en fait à l'ordre deux, et qu'on a donc une équation de Fokker-Planck.

VIII.4.b Coefficients de Kramers-Moyal

Pour simplifier la compréhension de ce qui va suivre, on va commencer par considérer le cas unidimensionnel, afin d'établir la nullité des coefficients de Kramers-Moyal d'ordre trois et plus, sachant que le résultat est conservé dans le cas général [Risken, 1989]. On repassera ensuite au cas p-dimensionnel pour déterminer la forme du vecteur de dérive et du tenseur de diffusion.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Cas unidimensionnel

Dans le cas d'un processus X à une seule dimension, l'équation de Langevin non-linéaire supposée le gouverner est, en adaptant les notations de l'équation multidimensionnelle,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = h\,(X,t) + g\,(X,t)\,\Gamma(t) \quad \text{avec} \quad \mathsf{E}\,\{\Gamma(t)\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\,\{\Gamma(t)\Gamma(t')\} = 2\delta(t-t').$$

Les coefficients de Kramers-Moyal associés sont définis à partir des moments des incréments du processus X entre deux instants t et $t+\tau$, conditionnellement à l'égalité $X(t) = x$. Il faut donc écrire cet incrément à partir de l'équation de Langevin, soit, en intégrant simplement cette dernière,

$$X(t+\tau) - X(t) = X(t+\tau) - x = \int_t^{t+\tau} \{h\,[X(t'),t'] + g\,[X(t'),t']\,\Gamma(t')\}\,\mathrm{d}t' \tag{33}$$

L'intervalle de temps τ devra tendre vers zéro lorsqu'on voudra calculer les coefficients de Kramers-Moyal. On peut donc déjà supposer qu'il est très petit, et développer les fonctions h et g par rapport à la variable $X(t')$, au voisinage de x, en remarquant que le processus X est continu,

$$h\,[X(t'),t'] = h\,(x,t') + \frac{\partial h}{\partial x}\,(x,t')\,[X(t') - x] + \cdots \quad \text{et de même pour la fonction } g.$$

On insère alors ces développements dans l'expression de l'incrément $X(t+\tau) - x$, ce qui permet d'obtenir, pour les fonctions h et g, une dépendance plus simple[5], à savoir x au lieu de $X(t')$. Reste qu'on a introduit, dans l'intégrale (33), les incréments intermédiaires $X(t') - x$ pour $t \leqslant t' \leqslant t+\tau$, qu'on peut à leur tour remplacer par des expressions intégrales. *In fine*, on obtient une expression de l'incrément du processus entre t et $t+\tau$ qui ne fait intervenir que les fonctions h et g et leurs dérivées partielles successives par rapport à la première variable, prises aux points (x,t'), ainsi que les forces de Langevin $\Gamma(t')$. Les propriétés de ces dernières, en termes de moyennes d'ensemble, vont permettre de déterminer les coefficients de Kramers-Moyal, qu'on peut écrire comme

$$D_n(x,t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{n!}\frac{\mathsf{E}\,\{[X(t+\tau) - x]^n\}}{\tau}. \tag{34}$$

En particulier, le coefficient de dérive est obtenu de la manière suivante. Prenant simplement la moyenne de l'incrément du processus, et utilisant les propriétés de la distribution de Dirac, on a

$$\mathsf{E}\,\{X(t+\tau) - x\} = \int_t^{t+\tau} h(x,t')\mathrm{d}t' + \int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t' \frac{\partial h}{\partial x}(x,t') \int_t^{t'} \mathrm{d}t'' h(x,t'') + \cdots + \int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t' \frac{\partial g}{\partial x}(x,t') g(x,t') + \cdots$$

Dans cette expression, les intégrales non écrites, si elles n'ont pas déjà été annulées par le moyennage[6], font intervenir un nombre de fonctions Γ au moins égal à quatre. Les propriétés de corrélation de celles-ci font que le comportement de ces termes aux petits intervalles de temps est au mieux en $\mathcal{O}(\tau^2)$, ce qu'on peut comprendre en considérant l'expression

$$\mathsf{E}\left\{\int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t_1 \Gamma(t_1) \int_t^{t_1} \mathrm{d}t_2 \Gamma(t_2) \int_t^{t_2} \mathrm{d}t_3 \Gamma(t_3) \int_t^{t_3} \mathrm{d}t_4 \Gamma(t_4)\right\} = \int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t_1 \int_t^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_t^{t_2} \mathrm{d}t_3 \int_t^{t_3} \mathrm{d}t_4\, \mathsf{E}\,\{\Gamma(t_1)\Gamma(t_2)\Gamma(t_3)\Gamma(t_4)\}\,.$$

Connaissant les propriétés des forces de Langevin, on voit que cette intégrale multiple peut se mettre sous la forme de somme d'intégrales faisant intervenir un produit de deux distributions de Dirac,

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{d}t_1 \int_t^{t_1} \mathrm{d}t_2 \int_t^{t_2} \mathrm{d}t_3 \int_t^{t_3} \mathrm{d}t_4\, \delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) = \frac{\tau^2}{8} \quad \text{ce qu'on montre par intégrations successives.}$$

Les termes correspondant dans l'écriture du premier moment, ainsi que ceux d'ordre plus élevé, disparaissent donc lorsqu'on prend la limite (34). D'autre part, les termes ne contenant pas de forces de Langevin

[5] Ce qu'on paye en devant connaître leurs dérivées partielles par rapport à la première variable.
[6] On pense évidemment aux termes contenant un nombre impair de fonctions Γ.

sont d'ordre m, où m est le nombre d'intégrales qu'ils contiennent. C'est par exemple le cas du second terme du membre de droite de l'équation donnant le premier moment. L'ensemble de ces arguments peut être utilisé pour montrer que les coefficients de Kramers-Moyal associés à l'équation de Langevin non-linéaire à une dimension sont

$$D_1(x,t) = h(x,t) + g(x,t)\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \qquad D_2(x,t) = g^2(x,t) \quad \text{et} \quad D_n(x,t) = 0 \quad \text{pour } n \geqslant 3,$$

ce qui montre que la distribution de probabilité $W(x;t)$ obéit à une équation de Fokker-Planck.

Cas multidimensionnel

La dérivation des coefficients de Kramers-Moyal dans le cas d'un ensemble de p processus régis par les équations de Langevin (32) se fait d'une manière tout à fait semblable. On admettra que, dans ce cas général, les coefficients d'ordre au moins égal à trois sont nuls, et on se contentera de déterminer le vecteur de dérive et le tenseur de diffusion, en partant de l'écriture intégrale

$$\boldsymbol{X}(t+\tau) - \boldsymbol{x} = \int_t^{t+\tau} \{\boldsymbol{h}[\boldsymbol{X}(t'),t'] + \boldsymbol{g}[\boldsymbol{X}(t'),t']\,\boldsymbol{\Gamma}(t')\}\,\mathrm{d}t',$$

le point $\boldsymbol{x}$ étant la valeur prise par le processus $\boldsymbol{X}$ à l'instant t. On insère ensuite dans cette expression les développements des fonctions $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{g}$ par rapport à la première variable, au voisinage de $\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{h}[\boldsymbol{X}(t'),t'] = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t') + \{[\boldsymbol{X}(t') - \boldsymbol{x}].\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}\}.\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t') + \cdots \quad \text{et de même pour la fonction } \boldsymbol{g}.$$

On a introduit ici l'opérateur vectoriel "nabla", $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}$, dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport aux composantes de $\boldsymbol{x}$. Comme dans le cas unidimensionnel, on doit alors remplacer itérativement, par la même méthode, les incréments intermédiaires $\boldsymbol{X}(t') - \boldsymbol{x}$ qui sont apparus. Les arguments déjà utilisés alors pour éliminer un grand nombre de termes des moments d'ordre un et deux restent valables, bien que les notations deviennent un peu lourdes. On obtient ainsi l'expression des coefficients de Kramers-Moyal d'ordre un et deux [Risken, 1989],

$$\boxed{D_i(\boldsymbol{x},t) = h_i(\boldsymbol{x},t) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} g_{kj}(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x},t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{D_{i,j}(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{p} g_{ik}(\boldsymbol{x},t)g_{jk}(\boldsymbol{x},t)}, \tag{35}$$

tous les coefficients d'ordre trois et plus étant nuls. Les processus dont l'évolution est régie par une équation de Langevin ont donc une densité de probabilité qui suit une équation de Fokker-Planck, les coefficients de celle-ci étant donnés par les expressions ci-dessus.

VIII.4.c Les processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Définition et solution formelle

Un cas particulier qui nous intéressera dans la suite est celui des processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dont l'évolution est gouvernée par une équation de Langevin linéaire, à coefficients constants et indépendants de la valeur du processus. Plus précisément, le processus p-dimensionnel $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_p)$ est déterminé par l'ensemble d'équations différentielles suivant,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Gamma}(t) \qquad \text{soit, explicitement,} \qquad \frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{p}\gamma_{ij}X_j + \Gamma_i(t), \tag{36}$$

ce qui revient à prendre $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},t) = -\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{X}$ d'une part et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},t) = \mathbf{1}$ d'autre part. On voit clairement que la vitesse d'une particule brownienne, dans le modèle décrit par l'équation (26) est ainsi un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Dans ce cas particulier, on peut déterminer, au moins formellement, les solutions de (36) satisfaisant à un jeu de conditions initiales $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{x}$. On procède de manière classique, en deux étapes. Tout d'abord, la solution générale $\boldsymbol{X}_0(t)$ du système linéaire homogène associé s'écrit comme

$$\boldsymbol{X}^0(t) = \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{x}, \quad \text{où la matrice } \boldsymbol{G} \text{ des fonctions de Green satisfait à} \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{G} = \mathbf{0}.$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Sachant qu'à l'instant initial $\boldsymbol{G}$ doit être égale à l'identité, la solution formelle de cette équation différentielle est une exponentielle de matrice $\boldsymbol{G}(t) = \exp(-\boldsymbol{\gamma} t)$. On cherche ensuite la solution du système complet en utilisant la méthode de variation des constantes. Posant une solution de la forme

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{c}(t), \quad \text{on en déduit} \quad \boldsymbol{G}(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Gamma}(t), \quad \text{d'où} \quad \boxed{\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{x} + \int_0^t \boldsymbol{G}(t')\boldsymbol{\Gamma}(t-t')\mathrm{d}t'},$$

en notant que l'inverse de la matrice $\boldsymbol{G}(t)$ est, d'après la forme exponentielle, égale à $\boldsymbol{G}(-t)$.

Équation de Fokker-Planck associée

Comme on l'a vu, les coefficients de Kramers-Moyal d'ordre trois et plus associés à une équation de Langevin générale sont nuls. C'est donc en particulier vrai dans le cas de processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Quant au vecteur des coefficients de dérive et au tenseur des coefficients de diffusion, ils s'écrivent respectivement[7]

$$D_i(\boldsymbol{x}, t) = -\sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij} x_j \quad \text{et} \quad D_{i,j}(\boldsymbol{x}, t) = \delta_{ij} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} . (\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{x}W) + \Delta_{\boldsymbol{x}} W,$$

l'opérateur laplacien $\Delta_{\boldsymbol{x}}$ étant égal au produit scalaire de $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}}$ par lui-même. Plus explicitement, l'équation de Fokker-Planck écrite ci-dessus est

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \gamma_{ij} \frac{\partial (x_j W)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2}}.$$

Retour sur l'exemple de la vitesse d'une particule brownienne

Pour terminer ce très rapide tour d'horizon, revenons au cas de la vitesse d'une particule brownienne, qu'on a étudié au **VIII.2.** L'équation de Langevin (26) qui la détermine est de la forme qu'on vient de voir, ce qui fait du processus unidimensionnel v un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On peut donc appliquer les résultats ci-dessus, mais il convient avant cela de remarquer qu'il faut se préoccuper de la normalisation. En effet, dans l'équation (26), le terme stochastique, c'est-à-dire la force de Langevin, possède une fonction d'autocorrélation dont la valeur en 0 est

$$A_\Gamma(0) = \mathsf{E}\left\{\Gamma^2(t)\right\} = q = \frac{2\gamma k_B T}{m} \quad \text{d'après ce qu'on a écrit au } \textbf{VIII.2.}$$

Par conséquent, si l'on veut se placer dans les conditions exactes des résultats du **VIII.4**, il est judicieux de considérer les variables normalisées

$$v' = \frac{v}{\alpha_v} \quad \text{et} \quad \Gamma' = \frac{\Gamma}{\alpha_v}, \quad \text{avec} \quad \alpha_v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}, \quad \text{de sorte que} \quad \frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t} = -\gamma v' + \Gamma'(t),$$

avec les propriétés suivantes, $\mathsf{E}\{\Gamma'(t)\} = 0$ et $\mathsf{E}\{\Gamma'(t)\Gamma'(t')\} = 2\delta(t-t')$. La solution formelle de cette équation de Langevin est alors donnée par les résultats de la section **VIII.4.c**, à savoir

$$v'(t) = v'_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma t'}\Gamma'(t-t')\mathrm{d}t' \quad \text{d'où} \quad v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-t')}\Gamma(t')\mathrm{d}t',$$

après un changement de variable élémentaire et en remultipliant par le facteur de normalisation. On voit que sans surprise on retrouve la solution formelle déjà obtenue directement. En ce qui concerne l'équation de Fokker-Planck, l'application de la forme trouvée plus haut donne immédiatement

$$\frac{\partial W_{v'}}{\partial t} = \gamma \frac{\partial (v' W_{v'})}{\partial v'} + \frac{\partial^2 W_{v'}}{\partial v'^2},$$

[7] Dans l'ouvrage de Risken [Risken, 1989], on trouvera une expression légèrement différente, non nécessairement diagonale, du tenseur des coefficients de diffusion. Ceci est dû au fait qu'il ne suppose pas que les forces de Langevin sont indépendantes, et qu'il peut donc exister une corrélation entre Γ_i et Γ_j pour $i \neq j$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

or les distributions de probabilité W_v et $W_{v'}$ sont reliées par $W_{v'} = \alpha_v W_v$, de sorte qu'en revenant aux variables usuelles, on retrouve bien l'expression (27),

$$\frac{\partial W_v}{\partial t} = \gamma \frac{\partial (v W_v)}{\partial v} + \alpha_v^2 \frac{\partial^2 W_v}{\partial v^2} = \gamma \frac{\partial (v W_v)}{\partial v} + \frac{\gamma k_B T}{m} \frac{\partial^2 W_v}{\partial v^2}.$$

On retrouvera méthodes et résultats vus dans ce chapitre lorsqu'on abordera, dans la cinquième et dernière partie, et en particulier au chapitre **XX**, le problème du transfert radiatif dans des milieux complexes, décrits par des champs stochastiques de densité et de vitesse suivant précisément des processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Troisième partie

Statistique des centroïdes de vitesse

Dr. Emmett Brown : If my calculations are correct, when this baby hits eighty-eight miles per hour... you're gonna see some serious shit.

"Back to the future" (Robert Zemeckis)

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE IX

Observations de spectro-imagerie

IX.1 Introduction

L'exploitation correcte des observations astronomiques nécessite de prendre en considération plusieurs problèmes afin de décrire correctement les objets et les processus étudiés. En particulier, en ce qui concerne la physique du milieu interstellaire, il faut noter que les données d'émission de raies dépendent de la vitesse, et plus précisément de sa composante longitudinale[1], en raison du décalage Doppler-Fizeau. De plus, l'information dont on dispose est nécessairement intégrée le long de la ligne de visée, et les problèmes de transfert radiatif aboutissent à des expressions dans lesquelles les champs de densité et de vitesse sont mélangés de manière complexe [Hegmann & Kegel, 2000], comme on en discutera dans la cinquième partie. Ainsi, pour décrire les conditions et les processus physiques à l'œuvre dans le MIS, il faut se contenter d'une seule quantité observable pour une ligne de visée et une vitesse longitudinale données. Cette quantité est typiquement la température de brillance[2] $T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X}, u)$, caractérisant l'intensité du rayonnement observé dans une certaine direction[3] $\boldsymbol{X}$ et à une certaine vitesse u. Bien que la comparaison des températures de brillance pour divers traceurs, qu'il s'agisse d'espèces différentes, de transitions différentes ou de polarisations différentes, permette de déterminer certains paramètres physiques des milieux observés, il est néanmoins nécessaire, si l'on souhaite avoir accès aux propriétés tridimensionnelles telles que la densité et la vitesse, de résoudre un problème inverse à partir de données dépendant de deux coordonnées d'espace et d'une coordonnée de vitesse. Cette étape est indispensable dans l'optique de comparer les observations aux modèles théoriques, par exemple pour estimer les rôles de la gravité, du champ magnétique, ou de la turbulence. En particulier, les mouvements turbulents dans le milieu interstellaire, qu'on a évoqués au **II.4.a** et au **III.7**, doivent être correctement décrits [Vazquez-Semadeni *et al.*, 2000], car ils pourraient expliquer nombre de propriétés des raies spectrales [Baker, 1976], tout en fournissant un support efficace contre l'effondrement gravitationnel [Klessen *et al.*, 2000, Heitsch *et al.*, 2001], expliquant par là même le fait que la durée de vie des nuages moléculaires est plus grande que leur temps de chute libre [Scalo, 1985] et que le taux de formation stellaire est donc plus faible que ce qu'on pourrait déduire d'un simple modèle de nuage en effondrement [Zuckerman & Evans, 1974]. La turbulence pourrait également avoir une influence non-linéaire importante sur l'évolution de la poussière en accélérant la coagulation ou la fragmentation des grains [Falgarone & Puget, 1995, Miville-Deschênes *et al.*, 2002], ainsi que sur l'évolution chimique du milieu interstellaire, la dissipation intermittente de l'énergie pouvant favoriser localement des réactions chimiques endothermiques [Joulain *et al.*, 1998].
Comme on vient de le faire remarquer, cette description doit passer par la température de brillance, et il existe un certain nombre de méthodes visant à déduire les propriétés statistiques des champs tridimensionnels à partir des données observationnelles. On les discutera brièvement au début du chapitre **X**, et on se contente ici de souligner que le principal but de ces travaux est de relier les propriétés des observables, en fonction de l'échelle considérée, à des lois d'échelle portant sur les champs tridimensionnels.
Avant de traiter ce problème, qui occupera les chapitres **X** à **XIII**, il s'agit tout d'abord de mettre en place les idées et les notations qui seront utilisées tout au long de cette partie, et d'introduire les observables qui seront étudiées dans la suite.

IX.2 Notations et hypothèses

On repérera un point quelconque de l'espace à trois dimensions par un vecteur tridimensionnel $\boldsymbol{x}$. Les cartes bidimensionnelles seront, elles, écrites en fonction d'un vecteur $\boldsymbol{X}$ situé dans le plan du ciel. Clairement, ce

[1] C'est-à-dire parallèle à la ligne de visée.
[2] Voir le chapitre **XVIII** et en particulier le **XVIII.5.c**.
[3] Le vecteur $\boldsymbol{X}$ est bidimensionnel et situé dans le plan du ciel. Il repère la position de la ligne de visée.

vecteur n'est autre que la projection de $\boldsymbol{x}$ parallèlement à la ligne de visée. On notera $\boldsymbol{u}_z$ le vecteur unitaire de la ligne de visée, de sorte qu'on écrira la relation entre les vecteurs bidimensionnels et tridimensionnels sous la forme $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X} + z\boldsymbol{u}_z$, qu'on notera souvent aussi $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{X}, z)$. Il faut ici remarquer qu'il est nécessaire de ne s'intéresser qu'à une petite surface du ciel, de façon à ce que les différentes lignes de visée puissent être considérées comme parallèles.
Dans les chapitres suivants, on utilisera essentiellement les séparations entre deux lignes de visée et entre deux points de l'espace, l'origine des cartes ainsi que celle de l'espace tridimensionnel étant choisies arbitrairement et ne possédant aucune signification intrinsèque. On notera $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ la séparation tridimensionnelle entre les points $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$, qui donne lieu, sur les cartes bidimensionnelles, à une séparation apparente $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$ entre les lignes de visée correspondantes $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$. Ces notations sont illustrées sur la figure **IX.**1. En définitive, les vecteurs écrits en minuscule correspondront toujours à des quantités tridimensionnelles, tandis que leurs équivalents en majuscule désigneront leurs projections sur le plan du ciel.
En ce qui concerne les champs tridimensionnels de densité et de vitesse on les notera respectivement $\rho(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. La composante longitudinale de la vitesse sera désignée par $v(\boldsymbol{x})$.
On supposera que l'observation est faite dans une transition optiquement mince, en prenant l'exemple de la raie à 21 cm de l'hydrogène atomique neutre HI, que la fréquence est suffisamment basse pour que l'approximation de Rayleigh-Jeans soit valable, que les conditions d'excitation de la transition, en particulier la température cinétique, sont uniformes dans le milieu étudié, et enfin qu'il n'existe pas de rayonnement illuminant le nuage par l'arrière dans ce domaine de fréquences.

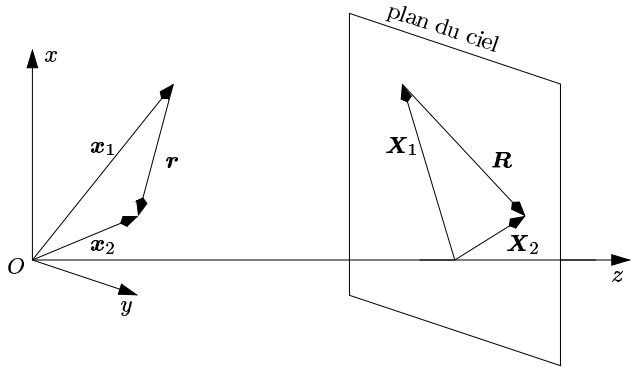

FIG. **IX.**1 – *Convention de notation utilisée dans toute la troisième partie. Les minuscules représentent des vecteurs tridimensionnels, tandis que les majuscules correspondantes désignent leurs projections sur le plan du ciel (xOy). La direction perpendiculaire à celui-ci est celle de l'observateur.*

IX.3 Expression des observables

IX.3.a Température de brillance

Suivant la méthode de [Dickman & Kleiner, 1985], on va exprimer l'intensité spécifique[4] à une fréquence ν issue d'une ligne de visée $\boldsymbol{X}$ comme une température de brillance $T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u)$ dépendant de la vitesse u par rapport à l'observateur, laquelle est reliée à la fréquence par l'effet Doppler-Fizeau,

$$u = \left(\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0}\right) c + u_0 \quad \text{où } \nu_0 \text{ est la fréquence au repos de la transition.}$$

La constante u_0 permet de spécifier l'origine des vitesses vis-à-vis de l'observateur. La température de brillance, caractérisant l'émission sortant du nuage observé perpendiculairement à la surface de celui-ci,

[4]Voir le chapitre **XVIII.**

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

est la solution de l'équation de transfert radiatif (voir le chapitre **XVIII**), et s'écrit

$$T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u) = \int_0^{\tau_0} T_{\rm ex}(\boldsymbol{x}) \exp(-\tau) {\rm d}\tau, \tag{37}$$

avec $T_{\rm ex}$ la température d'excitation et τ la profondeur optique. Celle-ci dépend de la position z le long de la ligne de visée, comme on l'a noté. Plus précisément, τ désigne la profondeur optique entre le fond du nuage, situé par convention ici en $z = 0$, et la position z. D'autre part, la profondeur optique dépend également de la ligne de visée $\boldsymbol{X}$ considérée, ainsi que de la vitesse u, puisqu'on sait notamment qu'un milieu est *a priori* plus opaque au centre de la raie que dans ses ailes. La limite d'intégration τ_0 est égale à la profondeur optique totale du nuage dans la direction et à la vitesse considérées. L'hypothèse d'une transition optiquement mince permet de s'affranchir du facteur exponentiel en l'assimilant à l'unité. D'autre part, étant donné que la profondeur optique est égale à l'intégrale du coefficient d'absorption, on peut réécrire la température de brillance comme

$$T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u) = \int T_{\rm ex}(\boldsymbol{x}) \kappa_0(\boldsymbol{x}) \phi[v(\boldsymbol{x}) - u] \, {\rm d}z, \tag{38}$$

où l'intégration est effectuée sur la ligne de visée. Dans cette équation, κ_0 est le coefficient d'absorption à la position $\boldsymbol{x}$, intégré sur tout le profil de la raie, et ϕ est le profil normalisé de la distribution des vitesses, supposé symétrique par rapport à zéro et indépendant de $\boldsymbol{x}$. Par exemple, si l'on ne considère que l'élargissement thermique, ϕ prend la forme gaussienne suivante,

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm th}} \exp\left[-\frac{w^2}{2\sigma_{\rm th}^2}\right] \quad \text{avec } \sigma_{\rm th} \text{ la dispersion de vitesse thermique.}$$

L'argument translaté $v(\boldsymbol{x}) - u$ de ϕ dans l'équation (38) exprime simplement le fait que l'émission à la position $\boldsymbol{x}$ est élargie autour de la vitesse locale le long de la ligne de visée $v(\boldsymbol{x})$. En faisant l'hypothèse de conditions d'excitation uniformes, $T_{\rm ex}$ est une constante, et $\kappa_0(\boldsymbol{x})$ est proportionnel à la densité locale du gaz $\rho(\boldsymbol{x})$, de sorte que l'on a

$$T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u) = \int \alpha \rho(\boldsymbol{x}) \phi[v(\boldsymbol{x}) - u] \, {\rm d}z \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante de proportionnalité.} \tag{39}$$

Cette expression montre déjà que, même avec des hypothèses simplificatrices, la tâche d'extraire les propriétés de la densité et de la vitesse à partir des données observationnelles $T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u)$ est ardue.

IX.3.b Cartes des moments de la température de brillance

Toute l'information disponible quant aux propriétés des champs tridimensionnels de densité et de vitesse se trouve dans les cubes[5] de données $T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u)$. La manipulation de ces cubes entiers peut cependant se révéler difficile, bien qu'il existe des méthodes fondées sur leur analyse globale, comme on le verra au chapitre **XIII**. Pour simplifier le problème, on peut tirer de ces données des cartes bidimensionnelles, en calculant, pour chaque direction $\boldsymbol{X}$, les moments successifs du profil en vitesse de la température de brillance. Cette approche est justifiée si l'on se rappelle que la connaissance des moments d'une variable aléatoire est équivalente à celle de la distribution de probabilité complète. On va donc considérer les cartes de moments W_n définies par

$$W_n(\boldsymbol{X}) = \int u^n T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u) {\rm d}u \quad \text{avec } n \text{ entier positif ou nul.} \tag{40}$$

L'intégration est faite sur toutes les vitesses de $-\infty$ à ∞, ce qui ne pose pas de problème de convergence si l'on suppose que toute émission continuum a d'abord été soustraite, de façon à ce que la raie soit à support fini. Utilisant l'expression (39) de la température de brillance, on a

$$W_n(\boldsymbol{X}) = \int u^n \left\{ \alpha \int \rho(\boldsymbol{x}) \phi[v(\boldsymbol{x}) - u] \, {\rm d}z \right\} {\rm d}u = \alpha \int \rho(\boldsymbol{x}) \left\{ \int \phi(w) \, [v(\boldsymbol{x}) - w]^n \, {\rm d}w \right\} {\rm d}z,$$

[5] On parle de cubes position-position-vitesse ou PPV, d'après les dimensions de leurs coordonnées.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

où l'on a introduit la variable $w = v(\boldsymbol{x}) - u$ donnant l'écart entre la vitesse observée et la vitesse de l'écoulement au point considéré. Après développement de l'intégrande dans l'intégrale centrale, et puisque le profil local de la raie ϕ est supposé indépendant de la position $\boldsymbol{x}$, on obtient

$$W_n(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k^n \int \rho(\boldsymbol{x}) v^k(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z \quad \text{avec} \quad D_k^n = \alpha \int (-w)^{n-k} \phi(w) \mathrm{d}w. \quad \text{et} \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{41}$$

Il faut noter que l'hypothèse de symétrie de ϕ implique que pour $n-k$ impair, D_k^n est nul. Les deux premiers moments sont particulièrement utilisés, puisqu'il s'agit par définition de l'intensité totale émergente $W_0 = I$ et du centroïde de vitesse non normalisé $W_1 = C$, respectivement,

$$I(\boldsymbol{X}) = W_0(\boldsymbol{X}) = \alpha \int \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z = \alpha N(\boldsymbol{X}) \qquad \text{et} \qquad C(\boldsymbol{X}) = W_1(\boldsymbol{X}) = \alpha \int \rho(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z. \tag{42}$$

On a noté ici $N(\boldsymbol{X})$ la densité de colonne à la position $\boldsymbol{X}$. Dans les chapitres suivants, et dans l'optique de déterminer la statistique des champs de densité et de vitesse, on ne considérera que ces deux premiers moments. L'utilisation de moments d'ordre plus élevé pourrait théoriquement fournir plus d'informations sur la structuration du milieu, mais en pratique, leur utilité est limitée par la résolution spectrale et par le niveau du bruit. On va d'ailleurs discuter de ces problèmes dans la section suivante, au sujet de l'intensité intégrée I et du centroïde non normalisé C.

IX.4 Détermination pratique de l'intensité et du centroïde

IX.4.a Mise en place du problème

En raison de la résolution spectrale finie des observations, les profils spectraux observés ne sont pas parfaitement définis à toutes les fréquences, même en l'absence de bruit. On dispose en réalité d'histogrammes donnant l'émission intégrée sur une bande passante autour d'un certain nombre de fréquences d'échantillonnage $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ correspondant à des vitesses $(u_1, \ldots, u_n)$ le long de la ligne de visée. On notera G_k la bande passante du canal c_k, qui est une fonction de la vitesse u, et w_k sa largeur. L'émission contenue dans le canal c_k est alors caractérisée par une température T_k,

$$T_k(\boldsymbol{X}) = \int G_k(u) T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u) \mathrm{d}u \quad \text{la bande passante ayant la dimension de l'inverse d'une vitesse.}$$

L'intensité émergente est alors calculée en pratique comme une somme discrète $\widetilde{I}$, qu'on peut voir comme un estimateur statistique de l'intégrale définissant la véritable intensité intégrée I,

$$\widetilde{I}(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\boldsymbol{X}) w_k = \sum_{k=1}^{n} w_k \int G_k(u) T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u) \mathrm{d}u \quad \text{alors que} \quad I(\boldsymbol{X}) = \int T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u) \mathrm{d}u.$$

Le centroïde de vitesse est également estimé comme une somme discrète,

$$\widetilde{C}(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{n} u_k T_k(\boldsymbol{X}) w_k = \sum_{k=1}^{n} u_k w_k \int G_k(u) T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u) \mathrm{d}u \quad \text{alors que} \quad C(\boldsymbol{X}) = \int u T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u) \mathrm{d}u.$$

De même, l'estimation pratique $\widetilde{C_0}$ du centroïde de vitesse normalisé C_0, lequel est défini comme le rapport C/I, est alors donnée par le rapport de $\widetilde{C}$ à $\widetilde{I}$. Notons qu'on a écrit ici la forme la plus générale du problème, étant entendu que les vitesses (u_k) peuvent ne pas être régulièrement espacées, que les bandes passantes (G_k) peuvent être différentes les unes des autres, et que la définition des largeurs (w_k) des canaux dépend des bandes passantes. Classiquement, la question qui se pose est de savoir quelle est l'erreur commise en assimilant les estimateurs aux valeurs réelles, sachant que la qualité de ces estimations est affectée par trois grands types de phénomènes :

▷ L'échantillonnage de la vitesse, c'est-à-dire les valeurs des largeurs (w_k), dont il est clair que plus elles sont petites, meilleure est la résolution en vitesse et meilleure est l'estimation du spectre.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

▷ Le bruit intrinsèque aux mesures d'intensité, qui peut être dû d'une part à l'électronique des circuits de mesure[6] et d'autre part au bruit thermique de l'atmosphère.
▷ Les erreurs systématiques de calibration des axes en vitesse et en température.

Pety [Pety, 1999] a étudié les effets des deux dernières causes d'erreur dans l'estimation du centroïde normalisé. Pour traiter le problème du bruit intrinsèque, il traite les valeurs $T_k(\boldsymbol{X})$ comme les moyennes de variables aléatoires gaussiennes indépendantes t_k, de même variance σ^2. À partir de là, il détermine la densité de probabilité du quotient déterminant l'estimateur du centroïde normalisé, ce qui permet d'estimer l'incertitude affectant le calcul de celui-ci, en fonction des paramètres du problème. On renvoie le lecteur intéressé à ce travail [Pety, 1999], en soulignant que les causes d'incertitudes importantes qu'il met en évidence sont essentiellement la largeur de la fenêtre en vitesse[7], l'asymétrie de la raie, ainsi que le rapport signal sur bruit. En ce qui concerne l'étude des biais systématiques, Pety [Pety, 1999] considère les cas où les mauvais étalonnages n'affectent qu'un seul axe à la fois, et il apparaît encore une fois qu'un faible niveau de bruit ainsi qu'une définition locale de la raie sont les facteurs essentiels de la qualité de l'estimation du centroïde.
Pour notre part, nous allons simplement traiter le problème de la résolution en vitesse, en commençant par le cas de l'intensité intégrée.

IX.4.b Le cas de l'intensité intégrée

Les simulations présentées au chapitre **XII** sont caractérisées par des bandes passantes de type porte,

$$G_k(u) = \frac{1}{w_k}\sqcap\left(\frac{u-u_k}{w_k}\right) \quad \text{où l'on utilise la fonction porte} \quad \sqcap(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases},$$

et l'on supposera que les vitesses échantillonnées (u_k) sont choisies de telle sorte que chaque vitesse tombant dans la fenêtre de raie soit couverte par un canal et un seul, ce que montre la figure **IX**.2. De plus, les canaux qu'on prendra dans les simulations auront tous la même largeur w, de sorte que les vitesses échantillonnées seront données par $u_k = u_1 + (k-1)w$. Ce sont ces conventions simplificatrices que nous allons utiliser ici.

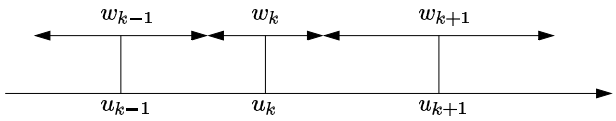

FIG. **IX**.2 – *Condition de non recouvrement des canaux en vitesse.*

Les températures mesurées $T_k(\boldsymbol{X})$ sont alors données par les intégrales de la température de brillance vraie T_b sur les domaines de vitesse définis par chaque canal,

$$T_k(\boldsymbol{X}) = \int \frac{1}{w}\sqcap\left(\frac{u-u_k}{w}\right) T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u = \frac{1}{w}\int_{c_k} T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u, \tag{43}$$

de sorte que l'estimateur de l'intensité est évidemment strictement égal à l'intensité véritable. Ce résultat est d'ailleurs valable aussi si les différents canaux n'ont pas la même largeur en vitesse, dès lors que la condition représentée sur la figure **IX**.2 est remplie. Par conséquent, les incertitudes sur les déterminations respectives du centroïde non normalisé et du centroïde normalisé sont proportionnelles l'une à l'autre, puisqu'il n'existe pas, ici, d'incertitude sur l'intensité.

IX.4.c Le cas du centroïde de vitesse

La forme (43) des températures mesurées dans chaque canal en vitesse permet d'écrire l'erreur faite en assimilant l'estimateur du centroïde non normalisé à la valeur vraie comme une intégrale portant sur

[6] On refroidit d'ailleurs les détecteurs pour limiter cette cause de bruit.
[7] Il s'agit de la différence $W = u_n - u_1$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

l'ensemble du domaine en vitesse, en introduisant les fonctions indicatrices[8] des canaux

$$\Delta(\boldsymbol{X}) = \widetilde{C}(\boldsymbol{X}) - C(\boldsymbol{X}) = \sum_{k=1}^{n} u_k \int_{c_k} T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u - \int u T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u = \int \sum_{k=1}^{n} (u_k - u)\, \mathbf{1}_{c_k}(u) T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u.$$

La résolution spectrale w étant fixée, on peut majorer l'incertitude sur le calcul du centroïde,

$$|\Delta(\boldsymbol{X})| \leqslant \int \sum_{k=1}^{n} |u_k - u|\, \mathbf{1}_{c_k}(u) T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u \leqslant \int w T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u = wI(\boldsymbol{X}) = \frac{W}{n} I(\boldsymbol{X}).$$

En ce qui concerne le centroïde normalisé, il ne fait aucun doute que l'incertitude qui l'affecte

$$\Delta_0(\boldsymbol{X}) = \widetilde{C_0}(\boldsymbol{X}) - C_0(\boldsymbol{X}) = \frac{\Delta(\boldsymbol{X})}{I(\boldsymbol{X})} \quad \text{est majorée par } \frac{W}{n}.$$

L'estimation numérique de l'incertitude se fait en translatant la raie parallèlement à elle-même le long de l'axe des vitesses, d'une quantité u_0, et en étudiant la variation de Δ avec u_0. Plus précisément, on se donne une raie spectrale définie par un grand nombre N de points et à support compact, puis une résolution en vitesse w, comptée en pixels et spécifiée par le nombre n de canaux, puisque l'extension de la raie est donnée au départ. On considère ensuite toutes les subdivisions pertinentes du support de la raie ayant cette résolution, sachant qu'il en existe environ $w/2$. La "vraie" valeur du centroïde étant calculée sur l'ensemble des N points, on peut calculer l'erreur Δ commise pour chaque subdivision à résolution fixée, et on donnera, comme estimation de l'incertitude à cette résolution, l'écart-type σ_Δ de l'ensemble des valeurs de Δ. On calcule de la même façon l'écart-type σ_{Δ_0} sur les valeurs de Δ_0. Le résultat des tests effectués sur l'exemple d'une raie constituée de la somme de deux gaussiennes est présenté sur la figure **IX.3**, qui montre l'évolution de σ_Δ et de σ_{Δ_0} en fonction de l'inverse de la largeur en vitesse w des canaux.

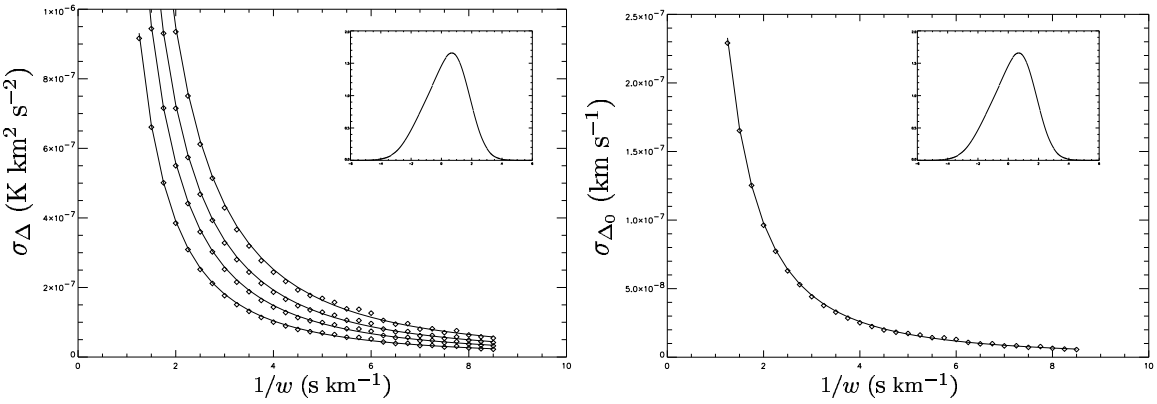

FIG. **IX.3** – *Évolution des écarts-type σ_Δ (à gauche) et σ_{Δ_0} (à droite) en fonction de la résolution en vitesse, pour une raie dont la forme est indiquée en médaillon sur chaque figure. Les mesures sont représentées par des losanges, les courbes en trait plein sont quant à elles des ajustements de la forme $(a + b/w)^{-2}$. Sur la figure de gauche, les différentes courbes correspondent à des profils de raie homothétiques les uns des autres. Seule la courbe inférieure est un ajustement, les autres en sont déduites en multipliant par le rapport des intensités intégrées.*

On voit notamment que les écarts-type entre les estimateurs des centroïdes et les valeurs vraies, alors qu'on pourrait s'attendre à ce que $\sigma_\Delta \propto wI$ et $\sigma_{\Delta_0} \propto w$, se comportent en fait comme

$$\sigma_\Delta = I\left(a + \frac{b}{w}\right)^{-2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\Delta_0} = \left(a + \frac{b}{w}\right)^{-2},$$

[8]On rappelle que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_I$ d'un intervalle I est la fonction valant 1 sur I et 0 partout ailleurs.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

mais bien entendu les majorations qu'on a écrites plus haut sont tellement grossières qu'il n'est pas étonnant de trouver un comportement différent. Cependant, la précision de l'ajustement trouvé sur les courbes de la figure **IX**.3 ne doit pas être considérée comme universelle. Il suffit, pour s'en rendre compte, de modifier la raie utilisée de façon à la rendre plus chaotique, en la multipliant simplement par un brownien fractionnaire unidimensionnel. La figure **IX**.4 montre le résultat de deux expériences numériques de ce type.

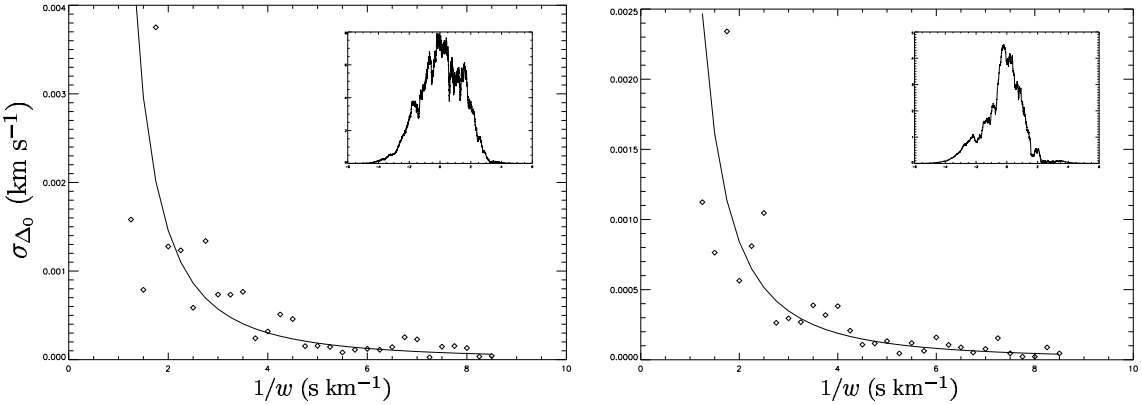

FIG. **IX**.4 – *Évolution de l'écart-type σ_{Δ_0} en fonction de la résolution en vitesse, pour une raie dont la forme est indiquée en médaillon sur chaque figure. Il s'agit de la raie de la figure* **IX**.3*, multipliée par des mouvements browniens fractionnaires d'indices spectraux respectifs $\beta = 2$ (à gauche) et $\beta = 2,5$ (à droite). Les mesures sont représentées par des losanges et les courbes en trait plein sont des ajustements de la forme $(a + b/w)^{-2}$.*

On voit que, bien que le comportement global semble toujours suivre la loi en $(a + b/w)^{-2}$, la dispersion autour de celle-ci devient assez importante. On entrevoit là toute une problématique dont il n'est pas apparent qu'elle soit utile pour l'étude de la statistique des centroïdes de vitesse qui va suivre. C'est pourquoi on s'en tiendra là en ce qui concerne la précision des estimateurs, et on les assimilera dorénavant aux véritables valeurs, correspondant à une résolution en vitesse infinie.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE X

Étude analytique des centroïdes de vitesse

X.1 Introduction

X.1.a Du bidimensionnel au tridimensionnel

Le chapitre précédent a permis de montrer que, dans le cas très simplifié d'une source observée dans une transition optiquement mince, et si les conditions d'excitation sont uniformes, on peut relier simplement des quantités observables, à savoir les moments de la distribution en vitesse de la température de brillance dans une direction donnée, à des quantités dépendant, sous forme intégrale, des champs tridimensionnels de densité et de vitesse. On dispose donc, théoriquement, d'une infinité de cartes bidimensionnelles des sources observées, notées $W_n(\boldsymbol{X})$, dépendant évidemment de la ligne de visée $\boldsymbol{X}$ et de l'ordre n du moment considéré.
La question qui se pose alors naturellement est de savoir si et comment on peut relier les propriétés statistiques de ces cartes bidimensionnelles à des lois d'échelle s'appliquant aux champs tridimensionnels de densité $\rho(\boldsymbol{x})$ et de vitesse $v(\boldsymbol{x})$.
Un exemple de lien de ce type est celui établi [Stutzki *et al.*, 1998], pour des observations dans une raie optiquement mince d'un milieu uniformément excité, statistiquement homogène et isotrope, entre l'indice spectral β_I de la carte d'émission intégrée et celui β_ρ du champ de densité tridimensionnel. On montre en effet que ces deux indices sont égaux dès lors que la profondeur sondée est plus grande que les échelles transverses considérées [Goldman, 2000]. Dans le cas où, au contraire, les échelles transverses sont bien plus grandes que la profondeur du milieu, la relation entre ces deux indices est également très simple. La transition entre les deux régimes permet de déterminer l'épaisseur d'une structure diffuse, comme l'a fait Elmegreen [Elmegreen *et al.*, 2001] dans le cas du grand nuage de Magellan (LMC).
En ce qui concerne l'obtention des propriétés statistiques du champ de vitesse, il apparaît très vite que l'on ne peut pas *a priori* effectuer une analyse aussi simple que dans le cas du champ de densité, ceci parce que les observables écrites au chapitre précédent ne font jamais intervenir le champ de vitesse seul. Toutes les intégrales le long de la ligne de visée contiennent en effet le champ de densité. Les propriétés statistiques qu'on pourrait déduire seraient donc nécessairement entachées, d'une manière ou d'une autre, par les fluctuations de la densité du milieu. Pour contourner cette difficulté, il existe un certain nombre de méthodes indirectes, visant explicitement à déduire les propriétés statistiques du champ de vitesse à partir des données observationnelles. Parmi elles, on note l'analyse des canaux en vitesse (VCA) de Lazarian et Pogosyan [Lazarian & Pogosyan, 2000], fondée sur l'étude analytique des propriétés des cartes par canaux en fonction de leur largeur en vitesse. Elle est probablement difficile à utiliser en pratique sur des observations réelles, comme on le verra au chapitre **XIII**. Sa justification analytique est en outre particulièrement ardue et parfois contre-intuitive. Les centroïdes de vitesse modifés de Lazarian et Esquivel [Lazarian & Esquivel, 2003] sont une tentative récente et prometteuse de réduire l'influence des fluctuations de densité dans les propriétés statistiques des centroïdes, bien qu'on puisse leur reprocher de n'être définis, semble-t-il, qu'au travers de leur fonction de structure d'ordre deux. Un dernier exemple de méthode de récupération des statistiques de vitesse est l'analyse en composantes principales (PCA), qui étudie directement les cubes de données $T_\mathrm{b}(\boldsymbol{X}, u)$ et les décompose sur une base orthogonale afin d'en déduire les propriétés du champ de vitesse à chaque échelle. Elle a été calibrée numériquement par [Brunt *et al.*, 2003] sur des simulations de champs browniens fractionnaires.

X.1.b Les objectifs

Curieusement, il n'existe cependant aucune approche directe du problème, consistant à prendre les cartes bidimensionnelles telles qu'elles se présentent, et à calculer leurs propriétés statistiques à l'aide d'un outil

suffisamment simple pour pouvoir être manipulable, mais suffisamment puissant pour être d'usage courant. Il apparaît en effet naturel de penser que les propriétés structurelles des champs de vitesse et de densité doivent, d'une manière ou d'une autre, apparaître dans les mesures statistiques effectuées sur les cartes W_n, étant données les relations (41). C'est précisément l'objectif premier de ce chapitre que de montrer, dans le cadre d'un modèle extrêmement simple de nuage interstellaire turbulent, qu'il est effectivement possible de relier les propriétés statistiques des centroïdes de vitesse $C = W_1$ à celles des champs de densité et de vitesse, et de calculer explicitement cette relation moyennant certaines hypothèses raisonnables.
Le deuxième objectif de ce chapitre est de mieux comprendre ce que représente la normalisation des centroïdes de vitesse [Münch, 1958, Dickman & Kleiner, 1985]. En effet, comme on l'a déjà fait remarquer, étant donnée l'expression (42) du centroïde C, il apparaît que les fluctuations de densité pourraient affecter l'estimation des statistiques de la vitesse à partir de cette carte. Pour pallier cette difficulté, il est d'usage d'utiliser le centroïde normalisé C_0, qu'on définit simplement par le rapport C/I, où I est l'intensité donnée par l'équation (42). Cette méthode est habituellement et empiriquement justifiée par l'hypothèse selon laquelle les fluctuations de densité dans C sont également présentes dans I, de sorte qu'elles doivent d'une certaine façon dispara^tre dans C_0. Dans le cas simplifié où les seules fluctuations de densité présentes sont transverses à la ligne de visée, ce raisonnement est clairement correct, et la normalisation permet alors de s'affranchir véritablement des fluctuations de densité. Cependant, l'hypothèse d'isotropie interdit d'avoir des fluctuations transverses sans fluctuations longitudinales, de sorte qu'il est nécessaire, sous peine de devoir se contenter d'un cas trivial[1], de prendre en compte ces fluctuations longitudinales de densité, et d'étudier analytiquement leur influence sur les centroïdes de vitesse, dans le cadre du modèle simple que l'on va maintenant présenter.

X.2 Le modèle de couche turbulente infinie transversalement

X.2.a Aspects géométriques

On rappelle qu'un point de l'espace à trois dimensions est repéré par sa position $\boldsymbol{x}$ par rapport à une origine O qu'on précisera dans la suite, et que la projection de $\boldsymbol{x}$ sur le plan du ciel est un vecteur bidimensionnel $\boldsymbol{X}$. La séparation tridimensionnelle entre les points $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ est notée $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ et elle donne lieu à une séparation apparente $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$ entre les lignes de visée correspondantes $\boldsymbol{X}_1$ et $\boldsymbol{X}_2$. Il convient d'insister sur le fait qu'on ne considérera que des échelles assez petites sur le plan du ciel pour que les lignes de visées considérées puissent toutes être supposées parallèles.
Dans tout ce qui suit, le modèle étudié est une couche de gaz comprise entre deux plans parallèles, de largeur D, perpendiculaire à la ligne de visée et dont les extensions transverses en x et en y sont infinies. Remarquons que ceci ne contredit pas l'hypothèse du parallélisme des lignes de visée, dès lors que seule une petite fraction de la couche est observée, qu'on suppose représentative des conditions générales du nuage. L'origine O est placée par convention au milieu de la tranche (voir figure **X.1**), ce qui implique que le gaz se situe nécessairement entre les cotes $z = -D/2$ et $z = D/2$.

X.2.b Propriétés de la densité

Au sein de la couche, la densité volumique moyenne globale du gaz est notée ρ_0. On désignera par v la composante longitudinale de la vitesse $\boldsymbol{v}$ du gaz par rapport à l'observateur, et la valeur moyenne de cette composante sera notée v_0. Les moyennes ρ_0 et v_0 sont nécessairement indépendantes de la ligne de visée, puisqu'elles sont calculées sur l'ensemble de la couche. On fera également l'hypothèse que les fluctuations de densité le long de la ligne de visée sont petites par rapport à la valeur moyenne ρ_0. Plus précisément, on supposera que l'écart-type σ_ρ du champ de densité est petit devant ρ_0.

X.2.c Propriétés de l'écoulement

En ce qui concerne les propriétés de l'écoulement turbulent, on se placera dans le cas le plus général en supposant que v_0 n'est pas nul, le cas $v_0 = 0$ n'étant spécial que dans le sens où le calcul requiert une méthode très légèrement modifiée. De fait, comme on le verra à la section **X.7**, le résultat obtenu dans ce

[1] Celui d'une densité uniforme dans tout l'espace.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

cas particulier peut parfaitement se retrouver en posant $v_0 = 0$ dans la formule générale[2]. On supposera qu'il n'existe pas de vitesse systématique transverse, de sorte que la vitesse moyenne des particules fluides dans la couche turbulente est égale à $\langle \boldsymbol{v} \rangle = v_0 \boldsymbol{u}_z$. Ainsi, le champ de vitesse dans le référentiel du nuage, qui est le champ pertinent du problème, est $\boldsymbol{\delta v} = \boldsymbol{v} - v_0 \boldsymbol{u}_z$. L'écoulement sera supposé homogène et isotrope, ce qui doit être pris au sens fort explicité par Monin et Yaglom [Monin & Yaglom, 1975], selon lequel les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie doivent s'appliquer non seulement aux champs ρ et $\boldsymbol{\delta v}$, mais également au champ quadridimensionnel défini par $(\rho, \boldsymbol{\delta v})$. Cette hypothèse se révèlera utile dans les sections **X.5** et **X.6**.
En dehors de la couche, la densité et la vitesse sont supposées nulles. On rappelle en outre que l'observation est faite dans une transition optiquement mince, que la fréquence est suffisamment basse pour que l'approximation de Rayleigh-Jeans soit valable, qu'au sein de la couche règnent des conditions d'excitation uniformes, et enfin qu'il n'existe pas de fond de radiation illuminant l'arrière de la couche turbulente.

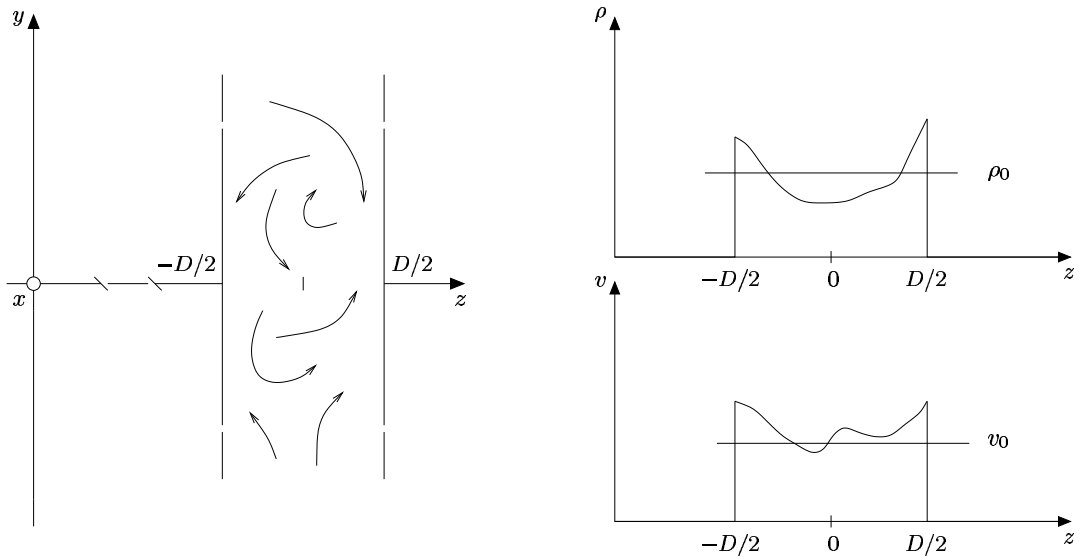

FIG. **X**.1 – *Représentation schématique de la couche turbulente (à gauche) et de l'évolution des champs de densité (en haut à droite) et de vitesse longitudinale (en bas à droite) le long d'une ligne de visée traversant la couche turbulente. La couche est supposée infinie dans les directions x et y et est limitée en z au segment $I_D = [-D/2, D/2]$. Les valeurs moyennes ρ_0 et v_0 sont prises sur l'ensemble de la couche tubulente.*

X.3 Statistiques des cartes d'intensité et de centroïde

X.3.a Utilisation de la fonction d'autocorrélation

Comme on l'a déjà suggéré, pour déterminer comment les propriétés statistiques des cartes W_n dépendent de celles des champs tridimensionnels de densité et de vitesse, la méthode qu'on va employer consiste à leur appliquer directement un outil statistique et à tenter de faire ainsi apparaître, dans les expressions obtenues, des quantités statistiques ayant trait aux champs sous-jacents. De toute évidence, le moment d'ordre zéro $W_0 = I$ permet uniquement de déduire des informations sur le champ de densité, puisqu'il est proportionnel à la densité de colonne N, d'après l'équation (42). Le moment d'ordre un ou centroïde non normalisé $W_1 = C$ est la première quantité appropriée à la description du champ de vitesse, comme on peut le voir sur la même équation.
Parmi les outils permettant de caractériser la statistique des cartes bidimensionnelles, on va ici utiliser la fonction d'autocorrélation [Kleiner & Dickman, 1984] (voir le chapitre **V**), qui donne, on le rappelle, le degré moyen de corrélation entre les valeurs d'un champ pris en des points séparés sur le plan du ciel par

[2]Ce qui n'est pas pour nous suprendre, étant donné que la vitesse v_0 peut être annulée artificiellement par un changement de l'origine des vitesses, ce qui retire toute singularité au cas $v_0 = 0$. Il faut cependant noter qu'on n'a pas accès à v_0, donc il n'est pas inutile de garder une vitesse moyenne non nulle dans les calculs qui suivent.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

un vecteur fixe $\boldsymbol{R}$. Nous considérerons bien évidemment dans la suite les fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes, notées respectivement $A_I(\boldsymbol{R})$, $A_C(\boldsymbol{R})$ et $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$, et nous allons les calculer en fonction de mesures statistiques sur les champs tridimensionnels.

X.3.b Écriture de I, C et C_0 en termes de fluctuations intégrées

Dans ce but, on commence par séparer la moyenne et les fluctuations de la densité et de la vitesse longitudinale, soit $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ et $v = v_0 + \delta v$, ce qui permet de réécrire la carte d'intensité selon

$$I(\boldsymbol{X}) = \int_{I_D} \alpha\rho(\boldsymbol{X}, z)\mathrm{d}z = \alpha\rho_0 D\,[1 + y_{\rho\mathbf{x}}] \qquad \text{avec} \qquad y_{\rho\mathbf{x}} = \frac{1}{D}\int_{I_D} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{X}, z)}{\rho_0}\mathrm{d}z. \tag{44}$$

De la même façon, on peut mettre la carte des centroïdes non normalisés sous la forme suivante,

$$C(\boldsymbol{X}) = \int_{I_D} \alpha\rho(\boldsymbol{X}, z)v(\boldsymbol{X}, z)\mathrm{d}z = \alpha\rho_0 v_0 D\,[1 + y_{\rho\mathbf{x}} + y_{v\mathbf{x}} + y_{\rho v\mathbf{x}}] \tag{45}$$

où sont introduits deux nouveaux termes de fluctuations intégrées, à savoir

$$y_{v\mathbf{x}} = \frac{1}{D}\int_{I_D} \frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{v_0}\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad y_{\rho v\mathbf{x}} = \frac{1}{D}\int_{I_D} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{X}, z)}{\rho_0}\frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{v_0}\mathrm{d}z.$$

Le centroïde normalisé C_0 est alors donné simplement par le rapport

$$C_0(\boldsymbol{X}) = \frac{C(\boldsymbol{X})}{I(\boldsymbol{X})} = v_0\frac{1 + y_{\rho\mathbf{x}} + y_{v\mathbf{x}} + y_{\rho v\mathbf{x}}}{1 + y_{\rho\mathbf{x}}}. \tag{46}$$

Cette dernière expression permet de clarifier l'utilité de l'hypothèse des petites fluctuations de densité.

X.3.c Hypothèse des petites fluctuations de densité

En effet, on peut d'ores et déjà soupçonner que les mesures statistiques tridimensionnelles qui vont apparaître dans les expressions des fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et du centroïde non normalisé seront des fonctions de corrélation entre les champs de densité ρ et de vitesse δv, de la forme $\mathsf{E}\{\rho(\boldsymbol{x}_1)\ldots\rho(\boldsymbol{x}_n)\delta v(\boldsymbol{x}'_1)\ldots\delta v(\boldsymbol{x}'_m)\}$. Pour qu'on puisse espérer faire ressortir le même genre de fonction lors du calcul de la fonction d'autocorrélation de la carte des centroïdes normalisés, il est alors nécessaire de pouvoir linéariser l'équation (46). Il nous faut par conséquent supposer que $|y_{\rho\mathbf{x}}| < 1$, de sorte que le dénominateur de (46) puisse être développé sous la forme d'une série entière convergente, dont l'expression est alors donnée par

$$\frac{1}{1 + y_{\rho\mathbf{x}}} = 1 - y_{\rho\mathbf{x}} + y_{\rho\mathbf{x}}^2 \ldots = \sum_{n\geqslant 0}(-y_{\rho\mathbf{x}})^n. \tag{47}$$

Une telle condition est évidemment remplie si les fluctuations locales de densité sont elles-mêmes petites, dans le sens décrit dans la section **X.2**, c'est-à-dire si l'écart-type σ_ρ du champ de densité est plus petit que la densité moyenne ρ_0, puisqu'on a

$$|y_{\rho\mathbf{x}}| = \left|\frac{1}{D}\int_{I_D}\frac{\delta\rho}{\rho_0}\mathrm{d}z\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{D}\int_{I_D}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2\mathrm{d}z} \simeq \frac{\sigma_\rho}{\rho_0}.$$

L'obtention de cette inégalité appelle une remarque : l'identification de la moyenne du carré des fluctuations de densité le long de la ligne de visée à la variance σ_ρ^2 du champ de densité pris dans son ensemble n'est pas évidente *a priori*, mais étant données les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie, une ligne de visée quelconque doit représenter le champ complet, de sorte que les fluctuations de densité le long de cette ligne

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

de visée doivent être du même ordre de grandeur que les fluctuations du champ tridimensionnel[3]. D'autre part, bien que l'hypothèse plus forte $\sigma_\rho < \rho_0$ ne soit pas strictement nécessaire à la linéarisation mentionnée ci-dessus, elle est utile dans le développement des fonctions d'autocorrélation car les fluctuations intégrées $y_{\rho v_{\mathbf{X}}}$ sont alors du même ordre en densité que $y_{\rho_{\mathbf{X}}}$,

$$|y_{\rho v_{\mathbf{X}}}| \leqslant \sqrt{\frac{1}{D}\int_{I_D}\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)^2 \mathrm{d}z}\sqrt{\frac{1}{D}\int_{I_D}\left(\frac{\delta v}{v_0}\right)^2 \mathrm{d}z} \simeq \frac{\sigma_\rho}{\rho_0}\frac{\sigma_v}{v_0},$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et introduit l'écart-type σ_v de la composante longitudinale de la vitesse[4]. Ceci nous permet de développer les cartes de l'intensité intégrée I et des centroïdes C et C_0, et par suite leurs fonctions d'autocorrélation, en puissances de σ_ρ/ρ_0. Il faut garder en tête que le développement (47) n'est bien entendu pas nécessairement valable pour des données réelles, mais on l'utilise ici comme une première étape vers la compréhension des effets des fluctuations de densité sur les centroïdes de vitesse normalisés.

X.4 Fonction d'autocorrélation de l'intensité

X.4.a Expression générale et remarque sur les moyennes

À partir de l'expression (44) de la carte d'intensité, on obtient sans difficulté sa fonction d'autocorrélation A_I, dont on voit qu'elle contient des termes d'ordre au plus deux en fluctuations de densité,

$$A_I(\boldsymbol{R}) = \mathsf{E}\left\{I(\boldsymbol{X})I(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R})\right\} = (\alpha\rho_0 D)^2\left[1 + \langle y_{\rho_{\mathbf{X}}}\rangle + \langle y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}\rangle + \langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}\rangle\right]. \tag{48}$$

Cette écriture introduit les moyennes prises sur la position $\boldsymbol{X}$ dans le plan du ciel, qu'on notera, dans tout ce chapitre, sous la forme $\langle\ldots\rangle$. Notons qu'on a ainsi fait appel à l'hypothèse ergodique. Or, comme ces moyennes portent sur des quantités intégrées sur z, on peut les interpréter comme des moyennes sur l'ensemble de la couche turbulente. Pour le voir, considérons un champ tridimensionnel $f(\boldsymbol{x})$. On définit naturellement sa carte intégrée $F(\boldsymbol{X})$ par

$$F(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{D}\int_{I_D} f(\boldsymbol{X}, z)\mathrm{d}z, \qquad \text{par analogie avec les termes } y_{\rho_{\mathbf{X}}},\ y_{v_{\mathbf{X}}} \text{ et } y_{\rho v_{\mathbf{X}}}. \tag{49}$$

Prenant la moyenne de cette carte sur le plan du ciel, qu'on écrit explicitement en se donnant une surface S de ce plan, on montre qu'elle s'interprète comme une moyenne de f sur le volume DS,

$$\langle F(\boldsymbol{X})\rangle = \frac{1}{S}\iint F(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X} = \frac{1}{DS}\iiint f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Faisant l'hypothèse d'ergodicité, elle peut également être identifiée à la moyenne d'ensemble $\mathsf{E}\{f(\boldsymbol{x})\}$ pour n'importe quelle position $\boldsymbol{x}$ au sein de l'écoulement.

X.4.b Calcul des différents termes

Cette propriété peut être directement mise à profit dans le calcul de la fonction d'autocorrélation de la carte d'intensité, puisqu'elle permet d'écrire le terme d'ordre un $\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}}\rangle$ sous la forme

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}}\rangle = \frac{1}{\rho_0}\mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\} = 0 \quad \text{puisque, par définition, la moyenne des fluctuations est nulle.}$$

[3]En réalité, l'écart-type $\sigma_{\rho_{\mathbf{X}}}$ des fluctuations le long de la ligne de visée $\boldsymbol{X}$ est nécessairement calculé sur une échelle plus petite que celle utilisée pour calculer σ_ρ, de sorte qu'on a en fait $\sigma_{\rho_{\mathbf{X}}} \leqslant \sigma_\rho$, ce qui justifie *a fortiori* la pertinence de notre hypothèse pour effectuer le développement (47).

[4]Il est important de faire remarquer qu'aucune hypothèse n'est faite quant à l'importance des fluctuations en vitesse, c'est-à-dire sur la valeur de σ_v, de sorte que le fait de les rapporter à une échelle égale à la vitesse moyenne v_0 n'est rien d'autre qu'un moyen élégant de symétriser les expressions. Je suis conscient, cependant, que la vitesse du son serait une échelle de vitesse plus significative physiquement, et elle sera utilisée comme telle lorsque la vitesse moyenne sera supposée nulle (voir la section **X.7**).

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

L'hypothèse d'homogénéité permet alors de conclure que $\langle y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = 0$ de la même façon. En effet, la démonstration précédente reste valable, à ceci près que la surface dans le plan du ciel sur laquelle on effectue la moyenne est une translatée S' de S. On en déduit donc que, dans l'expression (48), les termes d'ordre un sont tous deux nuls. Quant au terme d'ordre deux, il s'écrit sous la forme d'une intégrale double sur le domaine carré $I_D^2 = I_D \times I_D$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2} \left\langle \iint_{I_D^2} \delta\rho(\boldsymbol{X}, z_1)\delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \right\rangle. \tag{50}$$

Il est logique de chercher dès lors à écrire la moyenne sur $\boldsymbol{X}$ apparaissant dans cette expression sous la forme d'une moyenne d'ensemble caractéristique de l'écoulement turbulent, comme on l'a fait plus haut pour les termes d'ordre un. Dans cette optique, on note tout d'abord que la propriété de linéarité de la moyenne permet de la placer sous le signe d'intégration, de sorte que

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2} \iint_{I_D^2} \langle \delta\rho(\boldsymbol{X}, z_1)\delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2)\rangle \,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2.$$

Les cotes z_1 et z_2 étant fixées, la moyenne $\langle \delta\rho(\boldsymbol{X}, z_1)\delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2)\rangle$ sur la position $\boldsymbol{X}$ dans le plan du ciel représente la valeur moyenne de la corrélation entre les fluctuations de densité prises en deux points $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ dont la séparation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z$ est fixée, le point $\boldsymbol{x}_1$ étant astreint à se déplacer dans un plan donné, défini par $z = z_1$, parallèle aux faces de la couche turbulente. Étant donné les hypothèses d'homogénéité, d'isotropie et d'ergodicité, il est clair que cette quantité doit être identifée à la corrélation moyenne des fluctuations de densité prises en deux points dont la séparation est égale à $\boldsymbol{r}$, quels que soient ces deux points, puisque le plan $z = z_1$ est alors représentatif de l'ensemble de l'écoulement. En introduisant la fonction d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ des fluctuations de densité[5],

$B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$ pour toute paire de points $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})$ dans la couche turbulente,

nous pouvons alors écrire le terme en question sous la forme

$$\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2, \tag{51}$$

où l'on a évidemment utilisé les vecteurs tridimensionnels $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{X}, z_1)$ et $\boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2)$. Pour des raisons de concision des écritures, on introduit une quantité $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$, définie par l'intégrale double

$$M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \quad \text{de sorte que} \quad \langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \rangle = \frac{1}{\rho_0^2} M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}). \tag{52}$$

La forme de $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$ montre qu'il faut l'interpréter comme une moyenne de $B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r})$ prise sur toutes les paires de points dont la séparation tridimensionnelle $\boldsymbol{r}$ se projette selon le vecteur donné $\boldsymbol{R}$ sur le plan du ciel (voir la figure **X.2**).
Finalement, la combinaison des différents termes présents dans l'expression générale (48) de la fonction d'autocorrélation de l'intensité permet d'écrire celle-ci sous la forme

$$\boxed{A_I(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})\right]}, \tag{53}$$

qu'on exploitera plus tard en comparaison avec les fonctions d'autocorrélation des centroïdes de vitesse.

[5] On la note $B_{\rho,\rho}$ plutôt que $A_{\delta\rho}$ pour des raisons de commodité, certaines des fonctions de corrélation qu'on écrira plus tard étant trop lourdes pour notre notation habituelle.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

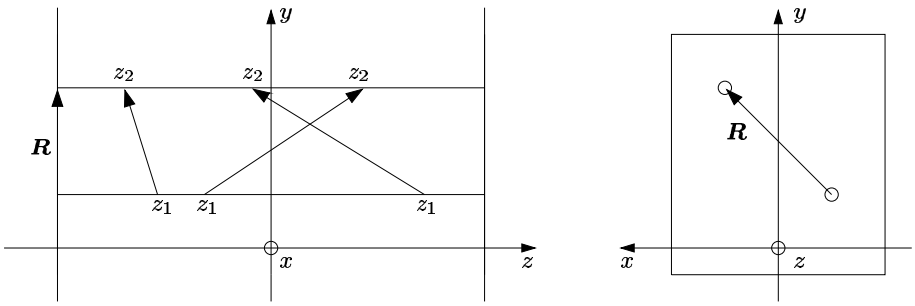

FIG. **X.2** – *Interprétation de la moyenne $M_{\rho,\rho}$ de l'équation (52). La couche turbulente est vue de face (à droite) et de profil (à gauche). La valeur de $M_{\rho,\rho}$ pour une séparation $\boldsymbol{R}$ dans le plan du ciel est la moyenne de la fonction d'autocorrélation des fluctuations de densité, $B_{\rho,\rho}$, sur toutes les paires de points dont la séparation projetée est précisément $\boldsymbol{R}$. La figure de gauche montre justement trois telles paires de points.*

X.5 Fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse non normalisés

X.5.a Expression générale

La même méthode générale s'applique lorsqu'on considère les centroïdes de vitesse non normalisés. Le développement de l'équation (45) inclut des termes d'ordre zéro et un en fluctuations de densité. Par conséquent, la fonction d'autocorrélation A_C contient des termes d'ordre au plus deux,

$$A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha\rho_0 v_0 D)^2 \left\langle \left[1 + y_{v\mathbf{X}} + y_{\rho\mathbf{X}} + y_{\rho v\mathbf{X}}\right]\left[1 + y_{v\mathbf{X+R}} + y_{\rho\mathbf{X+R}} + y_{\rho v\mathbf{X+R}}\right]\right\rangle = (\alpha\rho_0 v_0 D)^2 \sum_{n=0}^{2} \langle a_n \rangle ,$$

où a_n est un terme d'ordre n en fluctuations de densité. La forme explicite de ces coefficients est

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + y_{v\mathbf{X}} + y_{v\mathbf{X+R}} + y_{v\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X+R}}, \\ a_1 &= y_{\rho\mathbf{X}} + y_{\rho\mathbf{X+R}} + y_{\rho\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X+R}} + y_{v\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X+R}} + y_{\rho v\mathbf{X}} + y_{\rho v\mathbf{X+R}} + y_{\rho v\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X+R}} + y_{\rho v\mathbf{X+R}} y_{v\mathbf{X}}, \\ a_2 &= y_{\rho\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X+R}} + y_{\rho v\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X+R}} + y_{\rho v\mathbf{X+R}} y_{\rho\mathbf{X}} + y_{\rho v\mathbf{X}} y_{\rho v\mathbf{X+R}}. \end{aligned} \tag{54}$$

La linéarité du processus de moyennage sur le plan du ciel implique alors que nous allons devoir calculer les expressions de termes de deux sortes, avec d'une part des moyennes de fluctuations intégrées de la forme $\langle y_{\lambda\mathbf{X}} \rangle$, et d'autre part des corrélations à deux points du type $\langle y_{\lambda\mathbf{X}} y_{\mu\mathbf{X+R}} \rangle$, où l'on a écrit λ et μ pour représenter indifféremment l'une des trois possibilités ρ, v ou ρv. En raison de l'hypothèse d'homogénéité, les termes du type $\langle y_{\lambda\mathbf{X+R}} \rangle$ sont évidemment égaux aux termes $\langle y_{\lambda\mathbf{X}} \rangle$ correspondants, comme on l'a fait remarquer plus haut à propos de la moyenne des fluctuations de densité intégrées.

X.5.b Calcul du terme d'ordre zéro

Appliquant l'hypothèse d'homogénéité, la contribution d'ordre zéro s'écrit d'abord sous la forme

$$\langle a_0 \rangle = 1 + 2\langle y_{v\mathbf{X}} \rangle + \langle y_{v\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X+R}} \rangle \quad \text{en rappelant que} \quad \langle y_{v\mathbf{X+R}} \rangle = \langle y_{v\mathbf{X}} \rangle .$$

La moyenne sur le plan du ciel des fluctuations intégrées de vitesse longitudinale se comporte de la même façon que celle portant sur les fluctuations de densité. Elle est donc nulle. Quant au terme de corrélation $\langle y_{v\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X+R}} \rangle$, il peut être relié à la fonction d'autocorrélation du champ de vitesse au sein de l'écoulement, comme on l'a fait plus haut dans le cas de la densité,

$$\langle y_{v\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X+R}} \rangle = \frac{1}{v_0^2} M_{v,v}(\boldsymbol{R}) \quad \text{avec} \quad M_{v,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{v,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2,$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

où $B_{v,v}(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{\delta v(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$ est la fonction d'autocorrélation des fluctuations de la composante de la vitesse le long de la ligne de visée. Le terme d'ordre zéro de la fonction d'autocorrélation du centroïde non normalisé est donc

$\langle a_0 \rangle = 1 + \dfrac{1}{v_0^2} M_{v,v}(\boldsymbol{R})$, expression à rapprocher de la fonction d'autocorrélation de l'intensité.

X.5.c Calcul du terme d'ordre un

Passant au terme d'ordre un, et appliquant d'une part l'hypothèse d'homogénéité et d'autre part les résultats déjà connus sur les moyennes des fluctuations de densité intégrées, on a

$$\langle a_1 \rangle = \left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle + \left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle + 2\left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{X}}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{X}}} \right\rangle.$$

La méthode employée dans les paragraphes précédents reste parfaitement applicable ici. Chaque terme de cette équation peut en effet être relié à des fonctions de corrélation des champs de fluctuations $\delta\rho$ et δv, en commençant par

$$\left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2} \iint_{I_D^2} \langle \delta\rho(\boldsymbol{X}, z_1)\delta v(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2)\rangle \, \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2,$$

qu'on peut réécrire en introduisant la fonction de corrélation mixte des deux champs de fluctuations définie par $B_{\rho,v}(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$. De façon tout à fait analogue aux cas déjà traités, on a alors

$$\left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}(\boldsymbol{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2.$$

Considérons le terme suivant, à savoir $\left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle$. L'hypothèse d'homogénéité permet de décaler les arguments d'une quantité $-\boldsymbol{R}$ de sorte qu'on a l'égalité

$$\left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle = \left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}-\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}(-\boldsymbol{R})$$

en appliquant simplement la formule qui vient d'être établie pour $\left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle$. Naturellement, on regroupe ces deux termes, de façon à obtenir la combinaison suivante[6]

$$\left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} \left[M_{\rho,v}(\boldsymbol{R}) + M_{\rho,v}(-\boldsymbol{R}) \right] = \frac{2}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}^{(s)}(\boldsymbol{R}). \tag{55}$$

On verra plus bas qu'il est en fait possible d'aller plus loin et de montrer que ces termes s'annulent.
Le terme suivant $\left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} \right\rangle$ peut s'écrire en utilisant la même fonction de corrélation $B_{\rho,v}$ puisque

$$\left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D} \int_{I_D} \langle \delta\rho(\boldsymbol{X}, z)\delta v(\boldsymbol{X}, z)\rangle \, \mathrm{d}z = \frac{1}{\rho_0 v_0 D} \int_{I_D} B_{\rho,v}(\mathbf{0}) \mathrm{d}z = \frac{1}{\rho_0 v_0} B_{\rho,v}(\mathbf{0}).$$

De la même manière, on peut calculer la combinaison des deux derniers termes de $\langle a_1 \rangle$, et on montre sans aucune difficulté qu'elle est donnée par une expression analogue à (55),

$$\left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{X}}} \right\rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}^{(s)}(\boldsymbol{R}) \quad \text{avec } M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2,$$

où l'on a introduit la fonction de corrélation à deux points $B_{\rho v,v}(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$. On verra plus loin que cette expression peut se simplifier quelque peu. En attendant, la contribution d'ordre un à la fonction d'autocorrélation du centroïde non normalisé prend la forme

$$\langle a_1 \rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}^{(s)}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0 v_0} B_{\rho,v}(\mathbf{0}) + \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}^{(s)}(\boldsymbol{R}). \tag{56}$$

[6] La notation (s) représente la partie symétrique d'une fonction donnée, définie par $f^{(s)}(x) = [f(x) + f(-x)]/2$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

X.5.d Calcul du terme d'ordre deux

Le calcul de la contribution d'ordre deux en fluctuations de densité $\langle a_2 \rangle$ ne pose pas de difficulté particulière, et il peut se faire d'une manière en tous points semblable à ce qui a été fait jusqu'à présent. Tout d'abord, l'un des termes qui la constituent a déjà été calculé, puisqu'on a vu que

$$\left\langle y_{\rho\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X}+\mathbf{R}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0^2} M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}).$$

Les deux termes suivants dans l'expression de $\langle a_2 \rangle$, à savoir $\left\langle y_{\rho v\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X}+\mathbf{R}} \right\rangle$ et $\left\langle y_{\rho v\mathbf{X}+\mathbf{R}} y_{\rho\mathbf{X}} \right\rangle$ sont regroupés de sorte que leur combinaison fasse apparaître la partie symétrique d'une fonction de corrélation,

$$\left\langle y_{\rho v\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X}+\mathbf{R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v\mathbf{X}+\mathbf{R}} y_{\rho\mathbf{X}} \right\rangle = \frac{2}{\rho_0^2 v_0} M^{(s)}_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2$$

où l'on a introduit la fonction de corrélation $B_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x})\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$. Enfin, le dernier terme est donné par une expression analogue,

$$\left\langle y_{\rho v\mathbf{X}} y_{\rho v\mathbf{X}+\mathbf{R}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0^2 v_0^2} M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}) \quad \text{avec} \quad M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2,$$

où $B_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x})\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$ est également une fonction de corrélation à deux points caractérisant l'écoulement. On a ainsi une expression de la contribution d'ordre deux à la fonction d'auto-corrélation des cartes de centroïdes de vitesse non normalisés,

$$\langle a_2 \rangle = \frac{1}{\rho_0^2} M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0^2 v_0} M^{(s)}_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{\rho_0^2 v_0^2} M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}).$$

X.5.e Utilisation des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie

Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie au sens fort de [Monin & Yaglom, 1975] permettent d'aller plus loin. Comme on l'a dit en présentant le modèle, cela suppose que le champ quadridimensionnel $(\rho, \boldsymbol{\delta v})$, composé de la densité ρ et de la vitesse vectorielle $\boldsymbol{\delta v}$ dans le référentiel barycentrique du nuage, est alors homogène et isotrope. La fonction de corrélation de ρ et de $\boldsymbol{\delta v}$ étant évidemment une quantité vectorielle, l'hypothèse d'isotropie lui impose d'être parallèle à la séparation $\boldsymbol{r}$ entre les points où sont mesurées respectivement la fluctuation de densité et la fluctuation de vitesse. Elle doit donc être de la forme

$$\mathsf{E}\{\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\} = f(r)\boldsymbol{r} \quad \text{où } f \text{ est une fonction de la séparation scalaire } r = |\boldsymbol{r}|. \tag{57}$$

En projetant cette relation sur la ligne de visée $\boldsymbol{u}_z$, on a alors

$$\mathsf{E}\{\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}.\boldsymbol{u}_z = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}.\boldsymbol{u}_z = \mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\} = B_{\rho,v}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}.\boldsymbol{u}_z,$$

en utilisant le fait que la vitesse moyenne $\mathsf{E}\{\boldsymbol{\delta v}(\boldsymbol{x})\}$ est nulle dans la couche turbulente, par définition. L'impact de cette forme très particulière sur l'expression (55) est évident. En explicitant celle-ci[7],

$$\left\langle y_{v\mathbf{X}} y_{\rho\mathbf{X}+\mathbf{R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho\mathbf{X}} y_{v\mathbf{X}+\mathbf{R}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2} \iint_{I_D^2} \left[B_{\rho,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z) + B_{\rho,v}(-\boldsymbol{R} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{u}_z) \right] \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2,$$

on voit que la quantité intégrée est en fait proportionnelle à la partie symétrique de $B_{\rho,v}$. Or, la forme (57) montre que celle-ci est nulle, puisque $B_{\rho,v}(-\boldsymbol{r}) = -f(r)\boldsymbol{r}.\boldsymbol{u}_z = -B_{\rho,v}(\boldsymbol{r})$. Il s'ensuit que la combinaison des deux termes dans l'équation (55) est également nulle. On peut d'ailleurs exprimer ce résultat en disant simplement que l'antisymétrie de $B_{\rho,v}$ se transmet à $M_{\rho,v}$. On peut donc éliminer le terme correspondant de l'expression de $\langle a_1 \rangle$. D'autre part, l'antisymétrie de $B_{\rho,v}$ implique également que $B_{\rho,v}(\mathbf{0}) = 0$, ce qui

[7] Remarquons qu'on échange, dans l'un des termes, les noms des variables d'intégration, ce qui n'est pas gênant, étant donné qu'elles jouent des rôles parfaitement symétriques.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

permet de simplifier encore l'équation (56). Quant au dernier terme d'ordre un apparaissant dans cette même équation (56), il appelle également une remarque. D'après [Monin & Yaglom, 1975], la fonction de corrélation $B_{\rho v,v}$ est de la forme

$$B_{\rho v,v}(\boldsymbol{r}) = g(r)\frac{(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{u}_z)^2}{r^2} + h(r), \quad \text{où } g \text{ et } h \text{ sont des fonctions de la séparation scalaire } r.$$

Cette forme trouve son origine dans le fait que $\mathsf{E}\{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v_i(\boldsymbol{x})\delta v_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\}$, où i et j représentent l'une quelconque des coordonnées x, y ou z, est un tenseur de rang deux supposé homogène et isotrope. Il s'ensuit que $B_{\rho v,v}$ est symétrique et qu'il en va donc de même de $M_{\rho v,v}$, de sorte que le terme d'ordre un, dans le cadre de ces hypothèses, se réduit à

$$\langle a_1 \rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}).$$

Passant au terme d'ordre deux, et toujours d'après [Monin & Yaglom, 1975], $B_{\rho v,\rho}$ possède la même propriété d'antisymétrie déjà remarquée en ce qui concerne $B_{\rho,v}$ et nous pouvons donc en conclure que la partie symétrique de $M_{\rho v,\rho}$ est nulle, de sorte qu'en combinant tous ces résultats, la fonction d'autocorrélation A_C des centroïdes de vitesse non normalisés a pour expression finale

$$\boxed{A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 v_0^2 + \rho_0^2 M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) + v_0^2 M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) + M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R})\right]}. \tag{58}$$

Remarquons que la troncature de cette expression à l'ordre zéro est similaire à la forme calculée pour la fonction d'autocorrélation de l'intensité, puisqu'on a alors $A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R})\right]$. Cette similitude n'est pas surprenante, comme on en discutera à la section **X.8.**

X.6 Fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse normalisés

X.6.a Expression générale

Il n'y a pas de modification majeure de la méthode lorsqu'on considère les centroïdes de vitesse normalisés. Les contributions de chaque ordre peuvent être calculées aussi aisément que dans le cas des centroïdes de vitesse non normalisés, la différence principale se situant au niveau du fait qu'étant donné le développement (47), A_{C_0} est théoriquement une série infinie dont l'expression est

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = v_0^2 \sum_{m\geqslant} \sum_{n=0}^{2} \langle a_n b_m \rangle \quad \text{où} \quad b_m = (-1)^m \sum_{p=0}^{m} y_{\rho\mathbf{X}}^p y_{\rho\mathbf{X}+\mathbf{R}}^{m-p},$$

les coefficients a_n étant donnés par les relations (54). Le terme générique $\langle a_n b_m \rangle$ de ce développement est évidemment d'ordre $n+m$ en fluctuations de densité. Il se pose alors la question de savoir où tronquer ce développement. Sachant que l'un des objectifs de ce chapitre est d'estimer analytiquement les effets de la normalisation des centroïdes, et étant donné que l'ordre le plus élevé apparaissant dans la fonction d'autocorrélation A_C est l'ordre deux, il semble raisonnable de ne considérer que les termes d'ordre au plus deux dans le développement de A_{C_0}. Cependant, on peut également remarquer que les fluctuations de densité se font déjà sentir à l'ordre un dans $A_C(\boldsymbol{R})$, de sorte que la première étape de l'évaluation des effets de la normalisation peut se faire en limitant le développement à l'ordre un,

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = v_0^2 (S_0 + S_1) \quad \text{avec} \quad S_0 = \langle a_0 b_0 \rangle \quad \text{et} \quad S_1 = \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle .$$

X.6.b Calcul des différents termes

Le terme d'ordre zéro a déjà été calculé plus haut. En effet, il se résume de façon évidente à

$$S_0 = \langle a_0 b_0 \rangle = \langle a_0 \rangle = 1 + \frac{1}{v_0^2} M_{v,v}(\boldsymbol{R}).$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Le calcul du terme d'ordre un, $S_1 = \langle a_0 b_1 \rangle + \langle a_1 b_0 \rangle$, est plus ardu. Étant données les expressions de a_0, a_1, et b_1, on obtient tout d'abord un développement assez long comprenant au total seize termes. Certains s'annulent de manière évidente, et d'autres sont égaux du fait de l'hypothèse d'homogénéité. Finalement, on obtient une expression ne contenant plus que six termes,

$$S_1 = 2\left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} \right\rangle - 2\left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle + \left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle - \left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle - \left\langle y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}}} \right\rangle.$$

Le premier terme est nul, comme on l'a vu à la section **X.5.e**. Passant au deuxième terme, on voit, en utilisant le calcul de la section **X.5.c**, qu'il se met sous la forme

$$\left\langle y_{\rho_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0} M_{\rho,v}(\mathbf{0}) = 0,$$

d'après l'antisymétrie de $B_{\rho,v}$, qui entraîne, on l'a déjà noté, celle de $M_{\rho,v}$, et donc la nullité de cette dernière fonction en $\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$. La combinaison des troisième et quatrième termes a été calculée au **X.5.c**,

$$\left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{X}}} \right\rangle = \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}),$$

en utilisant la remarque faite au **X.5.e** concernant la symétrie de la fonction $M_{\rho v,v}$. Les termes restants se traitent de manière analogue, mais comme ils sont tous deux constitués du produit de trois termes de fluctuations intégrées, et non plus un ou deux, il est nécessaire d'introduire des fonctions de corrélation plus élaborées. Prenant l'avant-dernier terme, on a ainsi

$$\left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2 D^3} \iiint_{I_D^3} \langle \delta v(\boldsymbol{X}, z_1) \delta v(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2) \delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_3) \rangle \, \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3,$$

où l'intégration est évidemment effectuée sur le domaine cubique $I_D^3 = I_D \times I_D \times I_D$. Les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie permettent de remplacer la moyenne apparaissant dans l'intégrande par une fonction de corrélation à trois points, dépendant donc de deux séparations vectorielles $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$, à savoir $B_{v,v,\rho}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \mathsf{E}\{\delta v(\boldsymbol{x}) \delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1) \delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_2)\}$. On a alors

$$\left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2} M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}),$$

où la fonction $M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$ est une moyenne de $B_{v,v,\rho}$ sur l'ensemble des triplets de points dont les séparations projetées sur le plan du ciel sont fixées, rappelant les idées utilisées plus haut,

$$M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^3} \iiint_{I_D^3} B_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z, \boldsymbol{R} + (z_3 - z_1)\boldsymbol{u}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \mathrm{d}z_3.$$

On utilise d'ailleurs cette même fonction pour écrire le dernier terme du développement de S_1, en utilisant à nouveau l'hypothèse d'homogénéité pour décaler les arguments en bloc,

$$\left\langle y_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y_{v_{\mathbf{X}}} y_{\rho_{\mathbf{X}}} \right\rangle = \left\langle y_{v_{\mathbf{X}}} y_{v_{\mathbf{X}-\mathbf{R}}} y_{\rho_{\mathbf{X}-\mathbf{R}}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2} M_{v,v,\rho}(-\boldsymbol{R}, -\boldsymbol{R}),$$

de sorte que la somme de ces deux derniers termes est proportionnelle à la partie symétrique de $M_{v,v,\rho}$,

$$M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) = \frac{1}{2}\left[M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) + M_{v,v,\rho}(-\boldsymbol{R}, -\boldsymbol{R})\right].$$

Finalement, la fonction d'autocorrélation A_{C_0} des centroïdes de vitesse normalisés a l'expression suivante, lorsqu'on la limite aux contributions d'ordre au plus un en fluctuations de densité,

$$\boxed{A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0}\left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) - M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})\right]}. \tag{59}$$

Il apparaît donc que la normalisation des centroïdes de vitesse se traduit par une correction au premier ordre, bien qu'elle ne permette pas nécessairement de se débarrasser entièrement des effets de la structure en densité, comme on en discutera au **X.8.**

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

X.7 Traitement du cas particulier d'une vitesse moyenne nulle

Lorsque la vitesse moyenne v_0 est nulle, la méthode utilisée dans les sections précédentes doit être légèrement modifiée pour rester applicable, car les fluctuations de vitesse, qui sont dans ce cas égales aux vitesses, ne peuvent être rapportées à v_0. On peut cependant trouver une autre échelle de vitesse en considérant la vitesse du son c_s, que nous supposerons uniforme au sein de la couche turbulente. Le centroïde de vitesse non normalisé prend alors la forme

$$C(\boldsymbol{X}) = \int_{I_D} \alpha\left[\rho_0 + \delta\rho(\boldsymbol{X}, z)\right]\delta v(\boldsymbol{X}, z)\mathrm{d}z = \alpha\rho_0 c_s D\left(y'_{v_{\mathbf{X}}} + y'_{\rho v_{\mathbf{X}}}\right)$$

où les termes de fluctuations intégrées modifiés $y'_{v_{\mathbf{X}}}$ et $y'_{\rho v_{\mathbf{X}}}$ sont évidemment donnés par les expressions

$$y'_{v_{\mathbf{X}}} = \frac{1}{D}\int_{I_D} \frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{c_s}\mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad y'_{\rho v_{\mathbf{X}}} = \frac{1}{D}\int_{I_D} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{X}, z)}{\rho_0}\frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{c_s}\mathrm{d}z.$$

Le calcul est alors identique au cas général, avec c_s remplaçant v_0 et les (a_i) de l'équation (54) étant remplacés par de nouveaux coefficients (a'_i) donnés par

$$\begin{aligned} a'_0 &= y'_{v_{\mathbf{X}}} y'_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}, \\ a'_1 &= y'_{\rho v_{\mathbf{X}}} y'_{v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} + y'_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}} y'_{v_{\mathbf{X}}}, \\ a'_2 &= y'_{\rho v_{\mathbf{X}}} y'_{\rho v_{\mathbf{X}+\mathbf{R}}}. \end{aligned}$$

dont les moyennes sont facilement exprimées en utilisant les fonctions $M_{v,v}$, $M_{\rho v,v}$ et $M_{\rho v,\rho v}$, comme on l'a fait aux sections précédentes. La fonction d'autocorrélation des centroïdes de vitesse non normalisés étant donnée ici par $A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha\rho_0 c_s D)^2\left[\langle a'_0\rangle + \langle a'_1\rangle + \langle a'_2\rangle\right]$, elle prend donc la forme

$$\boxed{A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2\left[\rho_0^2 M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) + M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R})\right]},$$

ce qui est précisément ce qu'on déduirait de la formule générale en posant $v_0 = 0$. De même, pour le centroïde normalisé, en se limitant aux termes d'ordre un en fluctuations de densité, comme c'était déjà le cas au **X.6**, on obtient la forme qu'on attendrait à partir de l'équation (59),

$$\boxed{A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0}\left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) - M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\right]}.$$

Le cas d'une vitesse moyenne nulle n'étant par conséquent fondamentalement pas différent du cas général, on n'y reviendra pas dans ce chapitre.

X.8 Discussion des résultats

X.8.a À l'ordre zéro

Que nous apprennent les formes que l'on vient de calculer pour les fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes de vitesse ? Tout d'abord, et comme on s'y attendait, ces mesures sur les cartes bidimensionnelles des observables I, C et C_0 peuvent s'exprimer en termes de propriétés statistiques des champs tridimensionnels sous-jacents, à savoir les champs de densité et de vitesse. Plus précisément, il n'est pas surprenant que les fonctions d'autocorrélation $A_I(\boldsymbol{R})$, $A_C(\boldsymbol{R})$ et $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$ puissent s'écrire à l'aide des moyennes de fonctions de corrélation au sein du nuage, comme indiqué sur la figure **X.2**, puisque toutes les paires de points dont la séparation sur le plan du ciel est $\boldsymbol{R}$ doivent contribuer aux mesures statistiques bidimensionnelles à l'espacement $\boldsymbol{R}$.
Concernant la forme exacte des expressions des fonctions d'autocorrélation des centroïdes de vitesse, calculées plus haut, il semble raisonnable de considérer leurs troncatures aux différents ordres en fluctuations de densité. Ainsi, on voit qu'à l'ordre zéro, les développements de ces fonctions sont

$$A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D\rho_0)^2\left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R})\right] \qquad \text{et} \qquad A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}),$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

ce qui les rend très similaires à l'expression complète de la fonction d'autocorrélation de la carte d'intensité, donnée par l'équation (53). L'identité de ces formes était en fait attendue, puisque les termes d'ordre zéro dans les fonctions d'autocorrélation des centroïdes de vitesse sont les limites obtenues lorsque la densité est uniforme. Dans ce cas, les centroïdes sont simplement des intégrales de v, de même que l'intensité est une simple intégrale de ρ. On peut donc en particulier prédire que lorsque les conditions du modèle sont remplies, et que les fluctuations de densité sont assez faibles, les cartes de centroïdes présentent un indice spectral égal à celui du champ de vitesse tridimensionnel, de même que l'indice spectral de la carte d'intensité intégrée est égal à celui du champ de densité, en se plaçant à des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage. On reviendra abondamment sur ce point dans les chapitres **XI** et **XII**.

X.8.b À l'ordre un

Les effets de la normalisation des centroïdes de vitesse ne sont évidemment pas visibles à l'ordre zéro, puisque la contribution des fluctuations de densité est nulle à cet ordre. Il faut donc, pour estimer ces effets, considérer les expressions des fonctions d'autocorrélation des centroïdes à l'ordre un. En ce qui concerne le centroïde non normalisé, on obtient celle-ci en tronquant l'équation (58),

$$A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0} M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) \right].$$

L'expression à l'ordre un de la fonction d'autocorrélation du centroïde normalisé étant donnée par l'équation (59), qu'on réécrit ici pour permettre une comparaison plus aisée,

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0} \left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) - M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}) \right].$$

On voit que la normalisation a pour effet de premier ordre de soustraire le terme $M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ à la fonction d'autocorrélation de la carte des centroïdes de vitesse. Cependant, le terme résultant n'est pas nécessairement nul, et la normalisation n'enlève en fait pas complètement la contribution de premier ordre des fluctuations de densité. Sans plus d'informations sur l'écoulement, c'est-à-dire sans hypothèse relative aux formes des fonctions de corrélation $B_{v,v,\rho}$ et $B_{\rho v,v}$, on est en fait bien en peine de confirmer l'hypothèse empirique selon laquelle la normalisation élimine l'influence des fluctuations de densité dans les centroïdes de vitesse. Il est même possible *a priori* que la normalisation augmente au contraire la contribution d'ordre un de ces fluctuations.

X.8.c Les centroïdes de vitesse modifiés

Cette dernière remarque pointe un défaut potentiel des centroïdes normalisés utilisés comme moyen de retrouver les propriétés statistiques du champ de vitesse à partir des données observationnelles. De tels défauts ont déjà été remarqués par [Lazarian & Esquivel, 2003], dans le cas de simulations de turbulence magnétohydrodynamique hautement compressible, c'est-à-dire dans un cadre très différent de celui que nous avons considéré ici. Pour contourner cet obstacle, [Lazarian & Esquivel, 2003] ont introduit des centroïdes de vitesse modifiés (MVC) C_m, définis par leur fonction de structure d'ordre deux S_{C_m}, avec

$$S_{C_m}(\boldsymbol{R}) = S_C(\boldsymbol{R}) - (v_0^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{\rm th}^2) S_I(\boldsymbol{R}), \tag{60}$$

où l'on rappelle que S_C et S_I sont les fonctions de structure du centroïde non normalisé et de l'intensité, respectivement. Étant donnée la relation entre la fonction de structure S_{C_m} et la fonction d'autocorrélation A_{C_m} des centroïdes de vitesse modifiés, on peut écrire cette dernière comme

$$A_{C_m}(\boldsymbol{R}) = A_C(\boldsymbol{R}) - (v_0^2 + \sigma_v^2 + \sigma_{\rm th}^2) A_I(\boldsymbol{R}) + E,$$

E étant une constante dépendant des valeurs de A_C et A_I à l'espacement zéro. Or, il n'existe pas de terme d'ordre un dans A_I, ce qui implique que les fonctions d'autocorrélation des centroïdes modifiés et non normalisés partagent la même contribution d'ordre un. Comme dit précédemment, cependant, il n'est pas encore clair que cette contribution soit effectivement plus importante que le terme d'ordre un dans la

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

fonction d'autocorrélation des centroïdes normalisés. Pour rendre la comparaison entre les méthodes de correction plus claire, on peut extraire une relation entre les fonctions d'autocorrélation de l'intensité et des centroïdes[8]

$$(\alpha D\rho_0)^2 A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = (\alpha D\rho_0 v_0)^2 + A_C(\boldsymbol{R}) - v_0^2 A_I(\boldsymbol{R}) - 2(\alpha D)^2 \rho_0 M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}) + G(\boldsymbol{R}), \tag{61}$$

où $G(\boldsymbol{R})$ représente les termes d'ordre deux et plus en fluctuations de densité qui apparaissent dans le calcul de A_{C_0}. On en déduit une relation analogue entre les fonctions de structure de I, C et C_0,

$$(\alpha D\rho_0)^2 S_{C_0}(\boldsymbol{R}) = S_C(\boldsymbol{R}) - v_0^2 S_I(\boldsymbol{R}) - 4(\alpha D)^2 \rho_0 \left[M^{(s)}_{v,v,\rho}(\mathbf{0},\mathbf{0}) - M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\right] + 2\left[G(\mathbf{0}) - G(\boldsymbol{R})\right].$$

En comparant cette forme à l'équation (60), on voit que les centroïdes modifiés soustraient une proportion plus grande de la structure d'intensité, en enlevant ainsi des termes d'ordre deux, tandis que la normalisation procède à une correction plus complexe, incluant tous les ordres en fluctuations de densité[9]. Une véritable comparaison des mérites de chacune des deux méthodes (centroïdes modifiés et normalisés) requiert des tests numériques, qui n'ont été faits par Lazarian & Esquivel [Lazarian & Esquivel, 2003] que sur des simulations de turbulence MHD hautement compressible. Ce cas particulier dépasse le cadre de notre étude, en raison d'une part des grandes fluctuations de densité, ce qui suggère que la condition du développement en puissances dans le cas du centroïde normalisé n'est pas remplie, et d'autre part parce que la présence d'un champ magnétique brise l'isotropie. Ces deux limitations rendent la comparaison avec le travail de [Lazarian & Esquivel, 2003] assez incertaine, bien qu'il soit raisonnable de penser que les termes d'ordre élevé deviennent dominants. Ainsi, l'efficacité qu'ils prêtent aux centroïdes de vitesse modifiés, par rapport aux centroïdes normalisés, pourrait être liée à la correction de deuxième ordre apportée par S_I, qui est plus importante dans le cas des centroïdes modifiés.

□

[8]Cette relation est obtenue à partir des équations (53) et (58) ainsi que du développement de A_{C_0} à l'ordre deux en fluctuations de densité, non présenté ici.

[9]Y compris des ordres qui n'apparaissent pas dans le développement de A_C, ce qui n'implique pas nécessairement un défaut de la normalisation, les ordres excédentaires pouvant éventuellement compléter les effets d'ordre un.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XI

Le cas des champs browniens fractionnaires

XI.1 Introduction : l'exemple de l'intensité intégrée

On a évoqué, au début du chapitre précédent, l'existence d'un résultat portant sur les propriétés statistiques de la carte d'intensité intégrée, dans le cas d'un milieu répondant aux hypothèses du chapitre **IX**, c'est-à-dire, essentiellement, un milieu observé dans une transition optiquement mince pour laquelle les conditions d'excitation sont uniformes. Plus précisément, on montre que, si les échelles transverses observées sont plus petites que la profondeur du nuage, alors l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée est égal à celui, noté β_ρ, du champ de densité tridimensionnel.
On peut se faire une idée de ce résultat assez simplement en passant dans l'espace de Fourier. Précisons tout d'abord que les notations utilisées dans le chapitre précédent sont toujours valables, c'est-à-dire qu'on note $\boldsymbol{x}$ les positions tridimensionnelles et $\boldsymbol{X}$ celles projetées sur le plan du ciel, z désignant la position sur la ligne de visée. Dans l'espace de Fourier, un vecteur d'onde est noté $\boldsymbol{k}$, et ses composantes sont notées (k_x, k_y, k_z) dans la base $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ duale de la base usuelle $(\boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y, \boldsymbol{u}_z)$ de l'espace réel. On notera enfin $\boldsymbol{K}$ la projection de $\boldsymbol{k}$ sur le plan $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$.
La transformée de Fourier du champ de densité $\rho(\boldsymbol{x})$ est donnée par

$$\widehat{\rho}(\boldsymbol{k}) = \iiint \rho(\boldsymbol{x}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{x} = a_\rho(\boldsymbol{k}) \exp\left[i\phi_\rho(\boldsymbol{k})\right] \quad \text{avec} \quad a_\rho(\boldsymbol{k}) = a_{\rho,0} |\boldsymbol{k}|^{-\beta_\rho/2},$$

où l'on a introduit l'amplitude et la phase de la transformée, notées respectivement a_ρ et ϕ_ρ, et où l'on a écrit que l'amplitude est donnée par une loi de puissance dont l'exposant est par définition relié à l'indice spectral β_ρ du champ de densité. Effectuant une coupe de $\widehat{\rho}$ dans le plan $k_z = 0$, on a

$$\widehat{\rho}(\boldsymbol{K}, 0) = \iiint \rho(\boldsymbol{X}, z) e^{-2i\pi \boldsymbol{K}.\boldsymbol{X}} \mathrm{d}\boldsymbol{X} \mathrm{d}z = \frac{1}{\alpha} \iint I(\boldsymbol{X}) e^{-2i\pi \boldsymbol{K}.\boldsymbol{X}} \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \frac{1}{\alpha} \widehat{I}(\boldsymbol{K}).$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier de la carte d'intensité est proportionnelle à la coupe $k_z = 0$ dans la transformée de Fourier du champ de densité. Prenant le spectre de puissance de I,

$$\mathcal{P}_I(\boldsymbol{K}) = |\widehat{I}(\boldsymbol{K})|^2 = \alpha^2 |\widehat{\rho}(\boldsymbol{K}, 0)|^2 = (\alpha a_{\rho,0})^2 \, |\boldsymbol{K}|^{-\beta_\rho},$$

on voit qu'effectivement l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée est égal à celui du champ de densité. Cependant, cette approche par l'espace de Fourier ne fait pas apparaître la condition de validité selon laquelle on doit se placer à des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage, si ce n'est d'une manière assez indirecte[1]. Elle ne fournit pas non plus la relation existant entre les indices β_ρ et β_I lorsqu'au contraire les échelles transverses sont plus grandes que la profondeur du nuage. Ces questions, nous semble-t-il, appellent plutôt des réponses dans l'espace direct, fondées sur les mesures statistiques calculées au chapitre **X**. C'est précisément ce que nous allons aborder maintenant.

XI.2 Utilisation de champs browniens fractionnaires représentant ρ et v

XI.2.a Restriction aux premiers termes non triviaux

Dans l'espace réel, on a vu que la fonction d'autocorrélation de la carte d'intensité intégrée avait la forme donnée par l'équation (53). Le résultat explicité ci-dessus et portant sur les propriétés statistiques de cette

[1] En effet, la forme en loi de puissance du spectre de puissance du champ de densité ne peut rester valable aux très petits vecteurs d'onde, pour lesquels elle divergerait. La validité de cette loi, et donc du résultat obtenu est donc ainsi restreinte aux grands vecteurs d'onde, et donc aux petites échelles.

carte vis-à-vis de celles du champ de densité tridimensionnel doit *a priori* pouvoir être retrouvé à partir de cette forme. On pourra en déduire alors une relation similaire entre les cartes des centroïdes et le champ de vitesse, puisqu'en se limitant à l'ordre le plus bas, les fonctions d'autocorrélation A_C et A_{C_0} prennent une forme similaire à A_I (voir la section **X.8.a**)

$$A_I(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})\right], \quad A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R})\right] \quad \text{et} \quad A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}).$$

Cette restriction aux premiers ordres non triviaux, en ce qui concerne les fonctions d'autocorrélation des centroïdes, peut également se justifier en remarquant que le calcul explicite des formes complètes (58) et (59) requiert la connaissance de nombreuses fonctions de corrélation tridimensionnelles apparaissant sous forme intégrale. Comme il est possible qu'il soit très difficile de construire un ensemble complet et cohérent de telles fonctions avant de calculer analytiquement leurs moyennes, la restriction imposée ici permet de se limiter au calcul des termes non triviaux les plus simples, puisque liés aux autocorrélations $B_{\rho,\rho}$ et $B_{v,v}$ des champs $\delta\rho$ et δv, pris séparément, indépendamment des corrélations possibles entre ces deux champs. Ainsi, ces termes sont *a priori* calculables en se donnant les propriétés statistiques de la densité et de la vitesse sans avoir à se préoccuper de l'interaction entre les deux.

XI.2.b Fonctions d'autocorrélation des fluctuations de densité et de vitesse

Une possibilité consiste à supposer que les deux champs tridimensionnels de densité et de vitesse sont des browniens fractionnaires, tels qu'introduits au chapitre **VII.** On rappelle que ceux-ci peuvent être définis par le biais de leur fonction de structure d'ordre deux. Plus précisément, un brownien fractionnaire X défini sur $\mathbb{R}^n$ est caractérisé par une fonction de structure d'ordre deux de la forme

$$S_X(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{[X(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - X(\boldsymbol{x})]^2\} = 2\Lambda_X \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_X}, \tag{62}$$

où $r = |\boldsymbol{r}|$ est la longueur du vecteur de séparation, Λ_X est une constante positive et H_X est l'exposant de Hurst, compris strictement entre 0 et 1. L'utilisation de browniens fractionnaires pour modéliser les nuages du milieu interstellaire diffus sans formation d'étoiles [Stutzki *et al.*, 1998, Brunt & Heyer, 2002, Miville-Deschênes *et al.*, 2003b] est justifiée par le fait qu'ils présentent un spectre de puissance en loi de puissance[2], comme on l'observe dans le MIS, et qu'ils ont un aspect visuel qui rappelle assez nettement la morphologie de ces nuages. En ce qui nous concerne, leur utilité est renforcée par le fait que leur fonction d'autocorrélation est calculable explicitement, et nous les utiliserons donc pour modéliser les champs tridimensionnels. Développant l'expression de la fonction de structure d'ordre deux du champ de densité,

$$S_\rho(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{[\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \rho(\boldsymbol{x})]^2\} = \mathsf{E}\{[\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \delta\rho(\boldsymbol{x})]^2\} = 2\left[\sigma_\rho^2 - B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r})\right] = 2\Lambda_\rho \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_\rho},$$

on fait apparaître la fonction d'autocorrélation du champ des fluctuations de densité. De même, en ce qui concerne le champ des fluctuations de vitesse longitudinale,

$$S_v(\boldsymbol{r}) = \mathsf{E}\{[v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{x})]^2\} = \mathsf{E}\{[\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \delta v(\boldsymbol{x})]^2\} = 2\left[\sigma_v^2 - B_{v,v}(\boldsymbol{r})\right] = 2\Lambda_v \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_v}.$$

Ces deux dernières équations font appel à la relation entre la fonction de structure d'ordre deux d'un champ homogène et sa fonction d'autocorrélation, qu'on a vue au chapitre **V.** On a donc bien des formes explicites pour les fonctions d'autocorrélation des champs de fluctuations de densité $\delta\rho$ et de vitesse δv, données par les expressions suivantes,

$$B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r}) = \sigma_\rho^2 - \Lambda_\rho \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_\rho} \quad \text{et} \quad B_{v,v}(\boldsymbol{r}) = \sigma_v^2 - \Lambda_v \left(\frac{r}{D}\right)^{2H_v}, \tag{63}$$

qu'on doit injecter dans les expressions des moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ apparaissant dans les expressions des trois fonctions d'autocorrélation A_I, A_C et A_{C_0}. La figure **XI.**1 donne l'allure des fonctions d'autocorrélation de cette forme pour diverses valeurs de l'exposant de Hurst.

[2]Ce qui justifie déjà amplement leur utilisation, eu égard au problème posé dans l'introduction.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

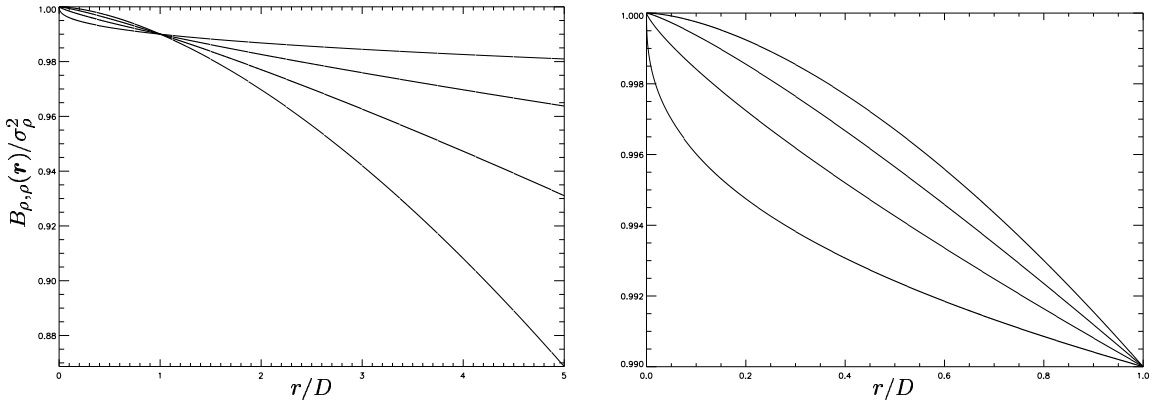

FIG. **XI**.1 – *Allure des fonctions d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ des fluctuations du champ de densité tridimensionnel dans le cas où celui-ci est du type brownien fractionnaire. On a choisi $\Lambda_\rho = 1$ et on représente l'évolution de $B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r})/\sigma_\rho^2$ en fonction du rapport r/D, pour quatre valeurs de l'exposant de Hurst, soient $H_\rho = 0,2$ (pointillés), $H_\rho = 0,4$ (tirets), $H_\rho = 0,6$ (trait mixte) et $H_\rho = 0,8$ (trait continu). La figure de gauche présente une vue d'ensemble pour $r \leqslant 5D$, tandis que la figure de droite montre plus précisément l'évolution des fonctions d'autocorrélation pour $r \leqslant D$.*

XI.3 Développement de la fonction d'autocorrélation moyennée

XI.3.a La méthode de Chandrasekhar et Münch

Comme on le voit, les fonctions d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ et $B_{v,v}$ ne dépendent que de la séparation scalaire r. Or, dans les intégrales définissant $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$, l'argument de ces fonctions est de la forme $\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{u}_z$, où z_1 et z_2 sont deux variables indépendantes. La valeur de la fonction d'autocorrélation est donc constante sur les droites $z_2 - z_1 = a$. Ceci suggère de chercher à écrire les moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ non plus comme des intégrales doubles sur z_1 et z_2, mais comme des intégrales simples sur la séparation $z_2 - z_1$ le long de la ligne de visée. C'est précisément ce que fournit la méthode de calcul de Chandrasekhar et Münch [Chandrasekhar & Münch, 1952], dont on donne le résultat ci-dessous.
Soient donc une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, et D un réel strictement positif. On considère l'intégrale double $\mathcal{J}$, définie par la relation

$$\mathcal{J} = \iint_{I_D^2} f\,(x_2 - x_1)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \quad \text{où le domaine d'intégration est } I_D^2 = I_D \times I_D \text{ avec } I_D = \left[-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}\right].$$

Étant donné que l'intégrande ne dépend que de la différence $z = x_2 - x_1$, il est naturel de procéder à un changement de variables de manière à faire apparaître cette variable z. On obtient ainsi une expression de $\mathcal{J}$ sous la forme d'une intégrale simple, donnée par

$$\mathcal{J} = \int_{I_{2D}} (D - |z|) f(z)\mathrm{d}z \quad \text{en remarquant que } z \in I_{2D} = [-D, D]. \tag{64}$$

Le facteur $(D - |z|)$ est une pondération traduisant le fait que, le domaine de variation de x_1 et de x_2 étant fini, le nombre de couples (x_1, x_2) dont la séparation z est donnée dépend justement de la valeur de z. Par exemple, un seul couple est tel que $z = D$, tandis que de nombreux couples contribuent à la séparation nulle. Cette pondération apparaît graphiquement sur la figure **XI**.2.
Cette formule est directement applicable aux expressions des moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$, qu'on écrit donc

$$M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2}\int_{I_{2D}} (D - |z|) B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R} + z\boldsymbol{u}_z)\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad M_{v,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2}\int_{I_{2D}} (D - |z|) B_{v,v}(\boldsymbol{R} + z\boldsymbol{u}_z)\mathrm{d}z,$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

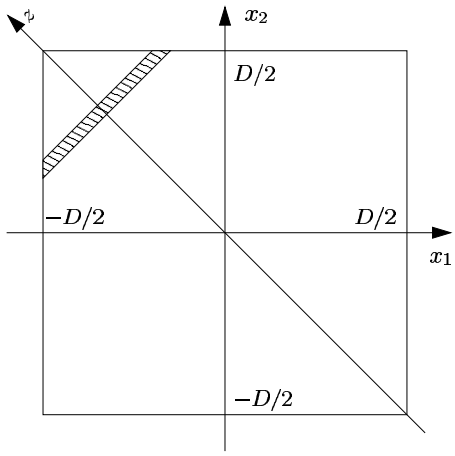

FIG. **XI**.2 – *Représentation graphique de la méthode de calcul de Chandrasekhar et Münch [Chandrasekhar & Münch, 1952]. Le domaine d'intégration est le carré I_D^2 dans l'espace repéré par les coordonnées (x_1, x_2). Le calcul de l'intégrale, sur ce domaine, d'une fonction dépendant uniquement de la différence $z = x_2 - x_1$ est calculable en prenant les éléments de surface hachurés, de longueur $D - |z|$ et de largeur* $\mathrm{d}z$.

où l'on a noté $z = z_2 - z_1$, par souci de cohérence avec l'écriture de (64). On va maintenant calculer explicitement ces expressions en utilisant pour les fonctions d'autocorrélation $B_{\rho,\rho}$ et $B_{v,v}$ les formes déterminées plus haut, correspondant au cas des browniens fractionnaires.

XI.3.b Mise en place du calcul

Étant donc donnée la forme (63) des fonctions d'autocorrélation des fluctuations de densité et de vitesse, leurs moyennes $M_{\rho,\rho}$ et $M_{v,v}$ se calculent en écrivant une intégrale de la forme

$$M(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \int\limits_{I_{2D}} \left[\sigma^2 - \Lambda \frac{\left(R^2 + z^2\right)^H}{D^{2H}} \right] (D - |z|)\mathrm{d}z \quad \text{où l'on a écrit } r^2 = R^2 + z^2, \text{ avec } R = |\boldsymbol{R}|\,. \tag{65}$$

Les constantes Λ et H devront *in fine* être remplacées respectivement par Λ_ρ et H_ρ dans le cadre du calcul de $M_{\rho,\rho}$, et par Λ_v et H_v dans le cadre du calcul de $M_{v,v}$. La figure **XI**.3 montre l'allure générale des courbes $M(\boldsymbol{R})$ pour un ensemble de valeurs de l'exposant H. On y voit qu'elles traduisent bien l'évolution des fonctions d'autocorrélation sous-jacentes, comme on pouvait s'y attendre. On remarque néanmoins qu'elles ne tendent pas toutes vers la même limite aux petites échelles transverses, contrairement aux fonctions d'autocorrélation tridimensionnelles de la figure **XI**.1.
Passant au calcul analytique de l'expression de $M(\boldsymbol{R})$, on voit que la parité de l'intégrande permet de réécrire cette forme comme une intégrale sur $[0, D]$,

$$M(\boldsymbol{R}) = \frac{2}{D^2} \left[\sigma^2 \int_0^D (D - z)\mathrm{d}z - \frac{\Lambda}{D^{2H}} \int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H (D - z)\mathrm{d}z \right].$$

La première intégrale dans cette expression est facilement calculable,

$$\int_0^D (D - z)\mathrm{d}z = \frac{D^2}{2} \quad \text{et donc} \quad M(\boldsymbol{R}) = \sigma^2 - \frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H \mathrm{d}z + \frac{2\Lambda}{D^{2H+2}} \int_0^D z \left(R^2 + z^2\right)^H \mathrm{d}z.$$

La dernière intégrale peut être explicitée assez facilement, en utilisant comme variable la séparation scalaire tridimensionnelle r, liée à la séparation longitudinale z par $R^2 + z^2 = r^2$. La séparation transverse R étant

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

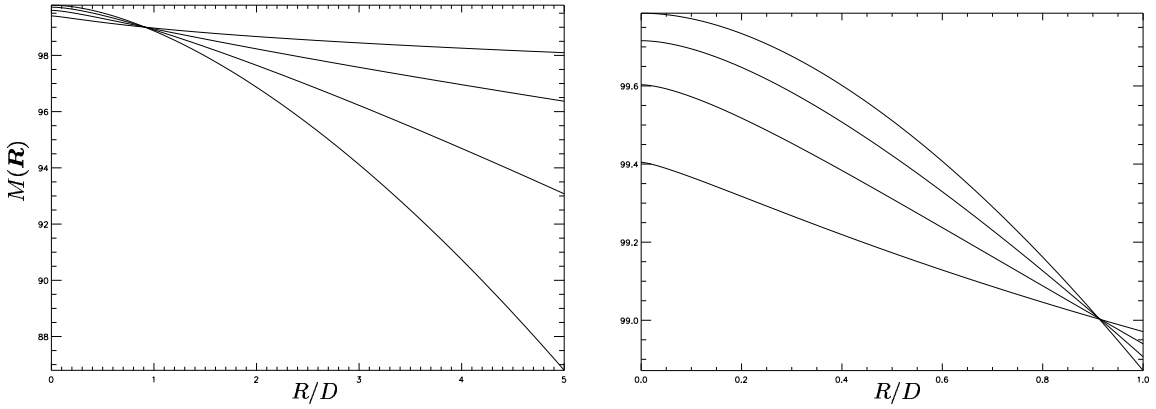

FIG. **XI.3** – *Allure des fonctions $M(\boldsymbol{R})$ pour différentes valeurs de l'exposant de Hurst, à savoir $H = 0,2$ (pointillés), $H = 0,4$ (tirets), $H = 0,6$ (trait mixte) et $H = 0,8$ (trait continu). Les valeurs des paramètres sont $\Lambda = 1$ et $\sigma = 10$, de sorte que les fonctions, maximales en zéro, y prennent la valeur spécifiée par l'équation (67). Comme pour la figure* **XI.1**, *on montre à gauche l'évolution pour des valeurs de la séparation transverse $R \leqslant 5D$, et à droite un zoom sur la région $R \leqslant D$.*

fixée, le changement de variable se traduit par $z\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r$, d'où l'intégrale indéfinie

$$\int z\left(R^2+z^2\right)^H \mathrm{d}z = \int r^{2H+1}\mathrm{d}r = \frac{r^{2(H+1)}}{2(H+1)} \quad \text{car } 2H+1 \neq -1 \text{ pour } 0 < H < 1.$$

Les bornes d'intégration sur r étant R et $\sqrt{R^2+D^2}$, on obtient l'expression suivante

$$M(\boldsymbol{R}) = \sigma^2 + \frac{\Lambda}{H+1}\left[\left(1+\frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} - \left(\frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1}\right] - \frac{2\Lambda}{D^{2H+1}}\int_0^D \left(R^2+z^2\right)^H \mathrm{d}z. \tag{66}$$

Dans le cas général, l'intégrale restante ne peut pas être explicitée [Gradshteyn & Ryzhik, 1980] à l'aide des fonctions usuelles. Il existe néanmoins trois cas particuliers, les deux valeurs extrêmes de l'exposant de Hurst, $H = 0$ et $H = 1$, qu'on ne considérera pas dans la suite, et le cas d'une séparation transverse nulle $R = 0$, quel que soit H. Dans ce dernier cas, on a explicitement

$$M(\mathbf{0}) = \sigma^2 + \frac{\Lambda}{H+1} - \frac{2\Lambda}{D^{2H+1}}\int_0^D z^{2H}\mathrm{d}z = \sigma^2 + \frac{\Lambda}{H+1} - \frac{2\Lambda}{2H+1} = \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)}. \tag{67}$$

XI.3.c Approche en termes de développement limité

La connaissance de cette limite pour une séparation transverse nulle incite à chercher le comportement de $M(\boldsymbol{R})$ pour les petites séparations $R \ll D$, ce qui correspond à étudier la structure à petite échelle des cartes bidimensionnelles. Cette approche est également justifiée par le fait qu'il est déjà connu [Stutzki *et al.*, 1998] que c'est dans cette limite que le spectre de puissance de l'intensité intégrée est égal à celui de la densité, pour le cas d'une transition optiquement mince. Pour simplifier les notations, on introduit pour la suite du calcul la variable $x = R/D$, de sorte que considérer la limite des petites séparations consiste alors à développer l'expression de $M(\boldsymbol{R})$ en puissances de x au voisinage de 0. On écrit par ailleurs celle-ci comme

$$M(\boldsymbol{R}) = \sigma^2 + L(x,H) = \sigma^2 + J(x,H) + K(x,H),$$

où l'on a introduit les fonctions suivantes, qu'il va s'agir de développer en puissances de x pour $x \ll 1$,

$$J(x,H) = \frac{\Lambda}{H+1}\left[\left(1+x^2\right)^{H+1} - x^{2(H+1)}\right] \quad \text{et} \quad K(x,H) = -2\Lambda\int_0^1 \left(x^2+y^2\right)^H \mathrm{d}y,$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

où $y = z/D$ devient la variable naturelle d'intégration. Le développement de J est sans difficulté,

$$J(x,H) = \frac{\Lambda}{H+1}\left[\sum_{n\geqslant 0}\frac{\gamma_n(H+1)}{n!}x^{2n} - x^{2(H+1)}\right] \quad \text{avec} \quad \gamma_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1).$$

La figure **XI**.4 montre les développements successifs de $J(x,H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré, pour $x \leqslant 1$, dans les cas $H = 0,4$ et $H = 0,6$. La différence entre ces deux cas est que le terme d'ordre $2(H+1)$ est compris entre les ordres deux et trois dans le premier cas, et entre les ordres trois et quatre dans le second cas.

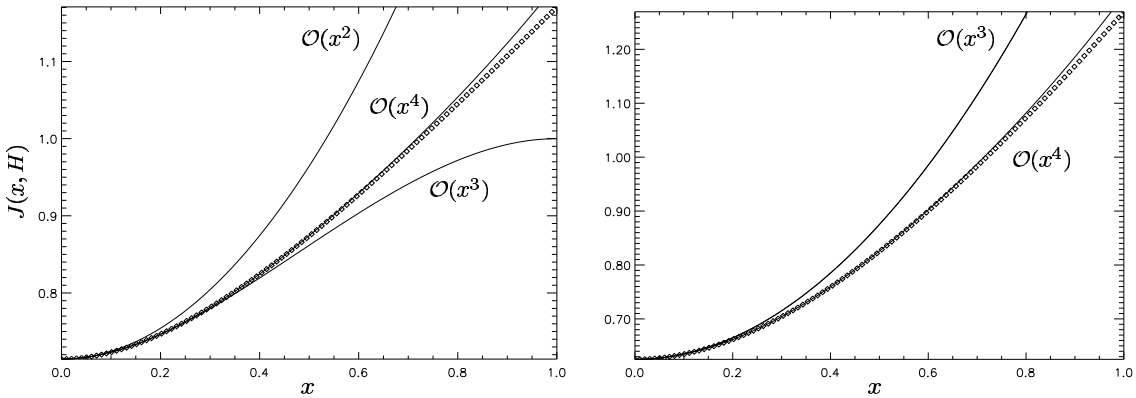

FIG. **XI**.4 – *Développement de $J(x,H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré. La figure de gauche présente un exemple pour lequel l'exposant de Hurst est $H = 0,4$. La figure de droite correspond à $H = 0,6$. Dans les deux cas, on a pris $\Lambda = 1$. Le calcul exact, représenté par les losanges, est approché par les développements aux ordres deux, trois et quatre, comme indiqué sur les figures. Le terme en $x^{2(H+1)}$ apparaît à l'ordre trois sur la figure de gauche et à l'ordre quatre sur celle de droite.*

Le développement de $K(x,H)$ est plus délicat, comme on pouvait le prévoir du fait que l'intégrale contenue dans cette fonction n'est pas calculable explicitement. Comme on se place dans la limite $x \ll 1$, on peut cependant, en posant $t = y/x$, l'écrire sous la forme

$$K(x,H) = -2\Lambda x^{2H+1}\int_0^{1/x}(1+t^2)^H\,\mathrm{d}t = -2\Lambda x^{2H+1}\left[\int_0^1(1+t^2)^H\,\mathrm{d}t + \int_1^{1/x}(1+t^2)^H\,\mathrm{d}t\right].$$

La première intégrale, entre 0 et 1, qu'on note $K_0(H)$, ne peut pas être explicitée, mais puisqu'elle ne dépend pas de x et donc pas non plus de la valeur de la séparation R, le fait qu'elle ne soit pas calculable analytiquement n'est pas gênant pour l'étude de la structure des cartes des moments. La seconde intégrale peut être transformée afin de développer l'intégrande en puissances de $1/t$,

$$\int_1^{1/x}(1+t^2)^H\,\mathrm{d}t = \int_1^{1/x}t^{2H}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^H\mathrm{d}t = \sum_{k\geqslant 0}\frac{\gamma_k(H)}{k!}\int_1^{1/x}t^{2H-2k}\mathrm{d}t, \tag{68}$$

en rappelant que ce développement, déjà utilisé plus haut dans le cadre du calcul de $J(x,H)$, est valable parce que $t \geqslant 1$. Le calcul des intégrales dans l'équation ci-dessus est trivial, dès lors qu'on remarque que pour $H \neq 0,5$ les exposants $2H-2k$ ne peuvent être égaux à -1. On a alors

$$\int_1^{1/x}t^{2H-2k}\mathrm{d}t = \frac{1}{2H-2k+1}\left[\frac{1}{x^{2H-2k+1}} - 1\right].$$

Insérant cette expression dans les équations précédentes, on obtient le développement de $K(x,H)$,

$$K(x,H) = -2\Lambda x^{2H+1}\left[K_0(H) + \sum_{k\geqslant 0}\frac{\gamma_k(H)}{k!}\frac{1}{2H-2k+1}\left(\frac{1}{x^{2H-2k+1}} - 1\right)\right],$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

dont l'écriture finale nécessite un réarrangement des termes, de façon à faire explicitement apparaître les puissances de x qui interviennent dans cette expression,

$$K(x,H) = -2\Lambda \left[K_0(H) - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H-2k+1} \right] x^{2H+1} - 2\Lambda \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{x^{2k}}{2H-2k+1}.$$

La figure **XI**.5 montre le développement de $K(x,H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré, pour $H = 0,4$ et $H = 0,6$. Le terme d'ordre $2H+1$ apparaît dans le premier cas entre les ordres un et deux - lequel est alors égal strictement à l'ordre trois - et entre les ordres deux et trois dans le second cas.

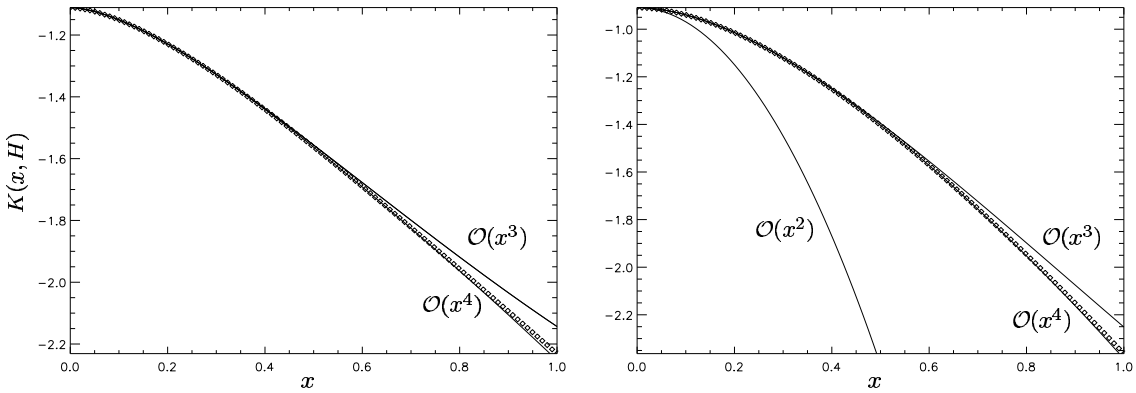

FIG. **XI**.5 – *Développement de $K(x,H)$ en fonction de l'ordre maximal considéré. La figure de gauche présente un exemple pour lequel l'exposant de Hurst est $H = 0,4$. La figure de droite correspond à $H = 0,6$. Dans les deux cas, on a pris $\Lambda = 1$. Le calcul exact, représenté par les losanges, est approché par les développements aux ordres deux, trois et quatre, comme indiqué sur les figures. Le terme en x^{2H+1} apparaît à l'ordre deux sur la figure de gauche et à l'ordre trois sur celle de droite.*

Remarquons que pour $H = 1/2$, le calcul des différents termes du développement (68) est inchangé, sauf en ce qui concerne le terme $k = 1$, qui donne évidemment une contribution logarithmique,

$$\int_1^{1/x} t^{-1}\mathrm{d}t = -\ln x \quad \text{d'où} \quad K(x,1/2) = -2\Lambda x^2 \left\{ K_0(1/2) - \frac{\ln x}{2} + \sum_{k\neq 1} \frac{\gamma_k(1/2)}{(2-2k)k!} \left[\frac{1}{x^{2-2k}} - 1 \right] \right\},$$

ce qui donne, après réarrangement des termes, une expression où le premier terme non constant est précisément issu de cette contribution logarithmique,

$$K(x,1/2) = -\Lambda \left\{ 1 - x^2 \ln x + \left[2K_0(1/2) - \sum_{k\neq 1} \frac{\gamma_k(1/2)}{(1-k)k!} \right] x^2 + \sum_{k\geqslant 2} \frac{\gamma_k(1/2)}{(1-k)k!} x^{2k} \right\}.$$

XI.3.d Détermination du comportement dominant aux petites échelles

On peut alors rassembler les développements de $J(x,H)$ et de $K(x,H)$ pour obtenir la forme de la quantité $M(\boldsymbol{R})$ aux petites séparations sur le plan du ciel. L'expression obtenue est relativement lourde, bien que ne présentant pas de difficulté. On ne l'écrira cependant pas, pour se concentrer sur la détermination du comportement de $M(\boldsymbol{R})$ pour $R \ll D$. Pour cela, on remarque que le développement au "premier ordre" de $K(x,H)$ dépend de la valeur de H. En effet, si $0 < H < 1/2$, alors $2H+1 < 2$ et le terme dominant dans $K(x,H)$ est celui en x^{2H+1}

$$K(x,H) \simeq -\frac{2\Lambda}{2H+1} - 2\Lambda \left[K_0(H) - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H-2k+1} \right] x^{2H+1},$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tandis que si $1/2 < H < 1$, alors $2 < 2H+1$ et le terme dominant est celui en x^2,

$$K(x,H) \simeq -2\Lambda \left[\frac{1}{2H+1} + \frac{H}{2H-1} x^2 \right].$$

Dans le cas particulier $H = 1/2$, le terme dominant non constant est le terme logarithmique, d'où

$$K(x,1/2) \simeq -\Lambda + \Lambda x^2 \ln x.$$

Concernant le développement de $J(x,H)$, et étant donné que $2H+2 > 2$, le terme dominant non constant[3] est quant à lui le terme en x^2, quelle que soit la valeur de l'exposant de Hurst. On doit donc tenir compte ou non de ce terme dans l'étude du comportement de $M(\boldsymbol{R})$ aux petites échelles $R \ll D$ sur le plan du ciel, suivant la valeur de H. On a alors, respectivement,

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} - 2\Lambda \left[K_0(H) - \sum_{k \geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H-2k+1} \right] x^{2H+1} \quad \text{pour} \quad H < \frac{1}{2},$$

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{3} + \Lambda x^2 \ln x \quad \text{pour} \quad H = \frac{1}{2},$$

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} - \frac{\Lambda}{2H-1} x^2 \quad \text{pour} \quad H > \frac{1}{2},$$

en rappelant que la variable x représente simplement le rapport de la séparation transverse R à la profondeur D de la couche turbulente. Pour simplifier l'écriture et la compréhension de ces résultats, on introduit dans la suite des fonctions a et b ne dépendant que de la valeur de l'exposant de Hurst, de sorte que l'on puisse écrire les expressions précédentes sous la forme[4]

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 + \Lambda a(H) - \Lambda b(H) x^{2H+1} \quad \text{pour} \quad H < \frac{1}{2},$$

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 + \Lambda a(H) - \Lambda b(H) x^2 \quad \text{pour} \quad H > \frac{1}{2}.$$

On dispose numériquement des formes de $M(\boldsymbol{R})$ quel que soit l'exposant de Hurst et la séparation transverse R, qu'on obtient en faisant l'intégration directe selon (65). C'est ainsi qu'on a pu en montrer quelques exemples sur la figure **XI**.3. Il est donc possible d'estimer la validité de l'approximation exprimée par les deux équations précédentes. La figure **XI**.6 montre ainsi, pour diverses valeurs de l'exposant de Hurst H, l'erreur relative commise en assimilant les quantités $M(\boldsymbol{R})$ à leurs développements respectifs aux ordres les plus bas, tels qu'on vient de les écrire, soit

$$\Delta(x,H) = \frac{\Lambda a(H) - \Lambda b(H) x^{f(H)} - L(x,H)}{L(x,H)} \quad \text{où} \quad f(H) = \min(2, 2H+1).$$

Notons que cette erreur relative porte en fait sur le développement de $L(x,H) = J(x,H) + K(x,H)$ plutôt que sur celui de $M(\boldsymbol{R})$, du fait de la présence, dans ce dernier, du terme constant σ^2, qui peut écraser les effets qu'on souhaite mettre en évidence. D'après la figure **XI**.6, on voit que cette erreur reste inférieure à environ 10% dès lors que la séparation transverse est plus petite qu'un dixième de la profondeur du nuage. On remarque également que l'erreur est d'autant plus faible qu'on est éloigné de la valeur critique $H = 1/2$.

Pour préciser ce dernier point, on montre sur la figure **XI**.7 deux autres visualisations possibles de l'erreur relative, en fonction de l'exposant de Hurst. L'une d'elles, à gauche, montre cette erreur à différentes séparations transverses données. On voit la divergence de cette erreur au point critique $H = 1/2$. La validité de l'approximation d'ordre le plus bas est alors jugée sur la figure de droite, qui montre la séparation transverse maximale autorisée pour que l'erreur relative ne dépasse pas 1%, toujours en fonction de l'exposant de Hurst.

[3] Il existe toujours un terme constant, dont on tient évidemment compte.

[4] On ne parlera plus explicitement du cas particulier $H = 1/2$, afin d'alléger la présentation des résultats.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

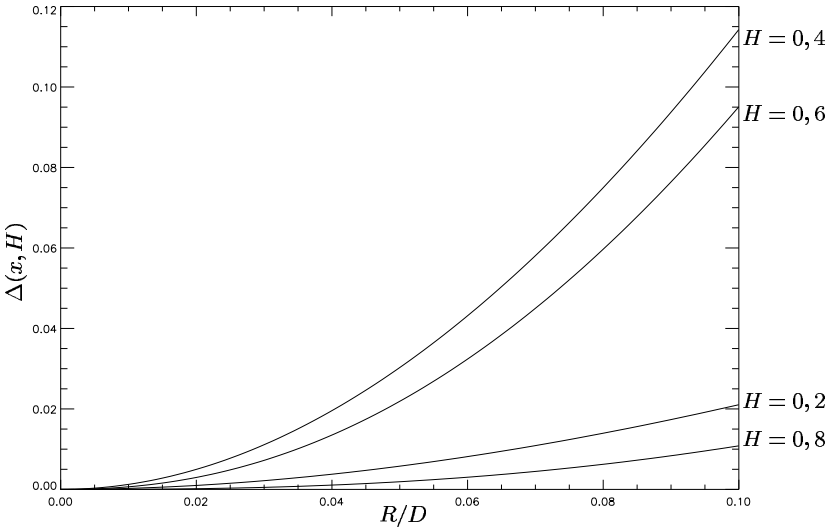

FIG. **XI**.6 – *Erreur relative commise en assimilant $L(x, H)$ aux développements de premier ordre, pour quatre valeurs de H, en fonction de la séparation transverse rapportée à la profondeur.*

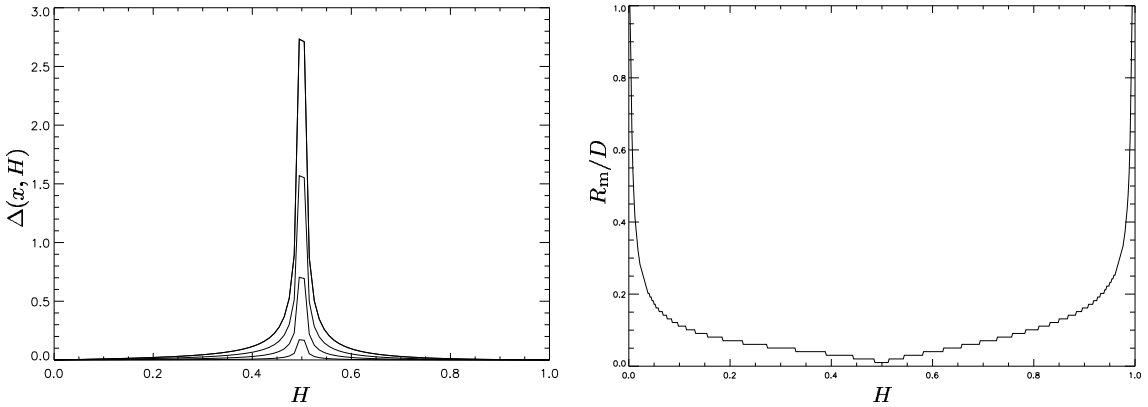

FIG. **XI**.7 – *Visualisation de l'erreur relative constatée sur la figure* **XI**.6. *La figure de gauche représente, pour différentes séparations transverses, l'erreur relative en fonction de l'exposant de Hurst H. Les différentes courbes correspondent aux séparations $R = D/4$ (pointillés), $R = D/2$ (tirets), $R = 3D/4$ (trait mixte) et $R = D$ (trait continu). On voit notamment que l'erreur diverge au voisinage du point critique $H = 1/2$. La figure de droite représente la séparation transverse maximale, rapportée à la profondeur du nuage, au delà de laquelle l'erreur relative dépasse un certain seuil, ici 1%.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XI.3.e Fonctions d'autocorrélation et fonctions de structure des cartes

Lorsque les développements de la section précédente sont valides, les conséquences sur les mesures statistiques effectuées sur les cartes des moments sont simples à déduire. En effet, la fonction d'autocorrélation moyennée des fluctuations de vitesse, $M_{v,v}$, est donnée par l'une des formes écrites ci-dessus, suivant la valeur de l'exposant de Hurst H_v du champ de vitesse tridimensionnel. Des relations similaires sont satisfaites par $M_{\rho,\rho}$ en fonction de la valeur de H_ρ.
Les fonctions d'autocorrélation des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes de vitesse sont de la même forme, étant données les expressions qu'elles prennent à l'ordre le plus bas (voir la section **XI.2.a**), et on a, en prenant l'exemple de la carte d'intensité,

$$A_I(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + \sigma_\rho^2 + \Lambda_\rho a\,(H_\rho) - \Lambda_\rho b\,(H_\rho) \left(\frac{R}{D}\right)^{2H_\rho+1}\right] \quad \text{pour} \quad H_\rho < \frac{1}{2},$$

$$A_I(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + \sigma_\rho^2 + \Lambda_\rho a\,(H_\rho) - \Lambda_\rho b\,(H_\rho) \left(\frac{R}{D}\right)^{2}\right] \quad \text{pour} \quad H_\rho > \frac{1}{2}.$$

De même, en ce qui concerne les fonctions d'autocorrélation des cartes de centroïdes de vitesse

$$A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + \sigma_v^2 + \Lambda_v a\,(H_v) - \Lambda_v b\,(H_v) \left(\frac{R}{D}\right)^{2H_v+1}\right] \quad \text{pour} \quad H_v < \frac{1}{2},$$

$$A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + \sigma_v^2 + \Lambda_v a\,(H_v) - \Lambda_v b\,(H_v) \left(\frac{R}{D}\right)^{2}\right] \quad \text{pour} \quad H_v > \frac{1}{2}.$$

L'utilisation des fonctions de structure d'ordre deux permet de s'affranchir des termes constants, puisqu'elles font intervenir la différence entre les valeurs des fonctions d'autocorrélation en $\boldsymbol{R}$ et à séparation nulle, les champs étant homogènes. Reprenant le cas de la carte d'intensité, on a alors

$$S_I(\boldsymbol{R}) = 2(\alpha D)^2 \Lambda_\rho b(H_\rho) \left(\frac{R}{D}\right)^{2H_\rho+1} \quad \text{pour} \quad H_\rho < \frac{1}{2},$$

$$S_I(\boldsymbol{R}) = 2(\alpha D)^2 \Lambda_\rho b(H_\rho) \left(\frac{R}{D}\right)^{2} \quad \text{pour} \quad H_\rho > \frac{1}{2}.$$

On retrouve les mêmes formes dans le cas des cartes de centroïdes de vitesse,

$$S_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 S_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq 2(\alpha D \rho_0)^2 \Lambda_v b(H_v) \left(\frac{R}{D}\right)^{2H_v+1} \quad \text{pour} \quad H_v < \frac{1}{2},$$

$$S_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D \rho_0)^2 S_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq 2(\alpha D \rho_0)^2 \Lambda_v b(H_v) \left(\frac{R}{D}\right)^{2} \quad \text{pour} \quad H_v > \frac{1}{2}.$$

XI.4 Conséquences des formes calculées à l'ordre le plus bas

Les formes obtenues ci-dessus pour les fonctions de structure des cartes de l'intensité et des deux types de centroïdes de vitesse montrent que, dans le contexte de champs tridimensionnels de type brownien fractionnaire, et dans le cadre des hypothèses utilisées tout au long de ce chapitre et du précédent, les cartes bidimensionnelles I, C et C_0 sont également des browniens fractionnaires, puisque leurs fonctions de structure sont des lois de puissance.
On peut également obtenir une relation entre les exposants de Hurst des champs sous-jacents et ceux des cartes d'observables. Par exemple, les exposants de Hurst H_C et H_{C_0} des cartes de centroïdes de vitesse sont liés à celui du champ de vitesse tridimensionnel par

$$H_C = H_{C_0} = H_v + \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 0 < H_v < \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad H_C = H_{C_0} = 1 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < H_v < 1.$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Il en va de même de la carte de l'intensité intégrée, dont l'exposant de Hurst H_I est donné par

$$H_I = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 0 < H_\rho < \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad H_I = 1 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < H_\rho < 1.$$

Ce dernier résultat reste à relier à celui cité dans l'introduction de ce chapitre, ce qu'on peut faire en notant que l'indice spectral β et l'exposant de Hurst H sont liés par $\beta = 2H + n$, où n est la dimension de l'espace sur lequel est défini le champ. L'égalité, notée par [Stutzki *et al.*, 1998] et [Goldman, 2000], entre l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée et celui β_ρ du champ de densité tridimensionnel, dans le cas de raies optiquement minces, dès lors que la profondeur D du nuage est plus grande que les échelles transverses R considérées, permet alors d'écrire, indépendamment de notre résultat, que l'exposant de Hurst de la carte d'intensité intégrée est donné par

$$H_I = \frac{\beta_I - 2}{2} = \frac{\beta_\rho - 3}{2} + \frac{1}{2} = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{pour } H_\rho < \frac{1}{2},$$

en utilisant le fait que cette carte est bidimensionnelle, tandis que le champ de densité de départ est tridimensionnel. D'autre part, [Stutzki *et al.*, 1998] complète ce résultat en montrant qu'au delà de la valeur critique $H_\rho = 1/2$, l'exposant de Hurst de la carte d'intensité intégrée devient constant et vaut $H_I = 1$. Ces relations sont obtenues par [Goldman, 2000] et [Stutzki *et al.*, 1998] dans le cadre d'un calcul dans l'espace de Fourier, et correspondent précisément à ce que nous déduisons de notre étude analytique effectuée dans le seul espace réel, laquelle permet également d'estimer la valeur maximale du rapport R/D permettant d'écrire $\beta_I = \beta_\rho$.
En ce qui concerne le champ de vitesse, nos résultats semblent indiquer que les indices spectraux β_C et β_{C_0} correspondant respectivement aux cartes des centroïdes non normalisés et des centroïdes normalisés, sont égaux à celui du champ de vitesse tridimensionnel, β_v, dans la limite des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage et dans l'hypothèse des fluctuations faibles de densité. C'est l'un des objectifs du chapitre suivant que de vérifier numériquement cette prédiction et d'en tester les limites.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XII

Étude numérique des centroïdes de vitesse

XII.1 Introduction

Les chapitres **X** et **XI** ont mis en évidence des relations entre les propriétés statistiques de quantités observées telles que l'émission intégrée et les centroïdes de vitesse, normalisés ou non, et les propriétés des champs tridimensionnels de densité et de vitesse, qui sont les quantités pertinentes pour décrire la turbulence interstellaire. En particulier, le chapitre **XI** a montré que dans le cas où ces deux champs sont des browniens fractionnaires, et lorsqu'on se limite aux échelles transverses petites devant la profondeur du nuage, les cartes bidimensionnelles des observables mentionnées ci-dessus sont également des browniens fractionnaires, en faisant, dans le cas des cartes de centroïdes, l'hypothèse supplémentaire selon laquelle les fluctuations de densité sont faibles.
L'objectif de ce chapitre est de vérifier numériquement ces résultats, en simulant des observations de spectro-imagerie, c'est-à-dire des cubes de données position-position-vitesse (PPV), à partir de champs de densité et de vitesse de type brownien fractionnaire, et en mesurant les propriétés statistiques des cartes d'intensité intégrée et de centroïdes de vitesse tirées de ces cubes. On essaiera également, autant que possible, de déterminer les conditions de validité de ces résultats, étant données les hypothèses faites précédemment pour les obtenir analytiquement.
Avant de passer à la suite, remarquons que l'utilisation de champs browniens fractionnaires pour simuler la densité et la vitesse du milieu interstellaire diffus permet de compléter les études effectuées sur des simulations magnétohydrodynamiques (voir par exemple [Ostriker *et al.*, 2001]) parce que le manque de "réalité" physique qui caractérise ces champs aléatoires est en un certain sens compensé par la large plage d'échelles accessibles à l'analyse en termes de lois de puissance. Dans les simulations numériques de turbulence, le domaine inertiel est en effet sévèrement limité par la résolution disponible et le grand nombre d'échelles affectées par l'injection ou la dissipation d'énergie.

XII.2 Construction de champs de densité et de vitesse

La section **VII.4.b** a permis de présenter, de manière détaillée, une méthode de construction numérique de champs browniens fractionnaires en dimension quelconque, à partir de leurs propriétés dans l'espace de Fourier. On rappelle ici simplement que pour construire un champ de dimension $\mathcal{N} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ et d'indice spectral β, on se donne deux cubes $\mathbf{A}$ (amplitude) et $\mathbf{\Phi}$ (phase), de même dimension que le champ souhaité, tels que les éléments du cube $\mathbf{A}$ dépendent du module du vecteur d'onde suivant une loi de puissance d'exposant $-\beta/2$, et que ceux du cube $\mathbf{\Phi}$ prennent des valeurs aléatoires avec une distribution uniforme entre 0 et 2π, en respectant la propriété d'imparité $\mathbf{\Phi}(-\boldsymbol{k}) = -\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{k})$. Le champ obtenu comme transformée de Fourier inverse de $\mathbf{A}\exp[i\mathbf{\Phi}]$ modélise alors un brownien fractionnaire ayant les propriétés attendues. C'est cette méthode que nous allons utiliser pour construire des champs de densité et de vitesse tridimensionnels possédant des indices spectraux donnés *a priori*. Il faut d'ailleurs noter que cette méthode fondée dans l'espace de Fourier aboutit à des distributions périodiques et que par conséquent, nos simulations, contrairement aux données réelles, ne seront pas soumises au problème des conditions aux limites non périodiques[1].
On construit donc une série de champs browniens fractionnaires, tous de taille $128 \times 128 \times 128$ pixels, dont les exposants de Hurst sont choisis pour être de la forme $H = p/4$, avec p un entier compris entre 0 et 4, de sorte que les indices spectraux utilisés prennent la forme $\beta = 3 + p/2$, et sont donc compris entre 3

[1] Ce point a son importance car les algorithmes de transformation de Fourier tels que la FFT traitent les images comme périodiques. Si elles ne le sont pas, des discontinuités apparaissent artificiellement aux bords et se traduisent par des composantes à hautes fréquences spatiales dans le spectre de puissance. D'un autre côté, si l'on apodise une image pour éviter ce problème, cela peut avoir des conséquences aux grandes échelles.

et 5, comme il se doit pour des champs tridimensionnels. Comme il s'agit de modéliser deux champs, l'un étant la densité $\rho(\boldsymbol{x})$ et l'autre la vitesse longitudinale $v(\boldsymbol{x})$, on construit deux browniens fractionnaires pour chaque indice spectral. De plus, le cas particulier d'une densité uniforme étant en soi intéressant, on construit un sixième champ de densité correspondant à ce cas de figure.

Par construction, les valeurs moyennes des cubes de densité et de vitesse sont déterminées initialement par la valeur de l'amplitude au pixel choisi comme origine de l'espace de Fourier. Leurs variances sont quant à elles liées au nombre total de pixels et à l'indice spectral. Pour obtenir des valeurs physiquement plausibles, on applique la procédure suivante, une fois les cubes construits : les valeurs minimales des cubes de densité en sont soustraites, afin d'obtenir des valeurs uniquement positives, et on multiplie le résultat par un facteur tel que la densité moyenne obtenue soit $\rho_0 = 90$ cm^{-3}. En ce qui concerne les cubes de vitesse, on commence par soustraire la valeur moyenne de manière à avoir $v_0 = 0$, puis on multiplie par un facteur numérique pour obtenir une dispersion de vitesse $\sigma_v = 3$ km s^{-1}.

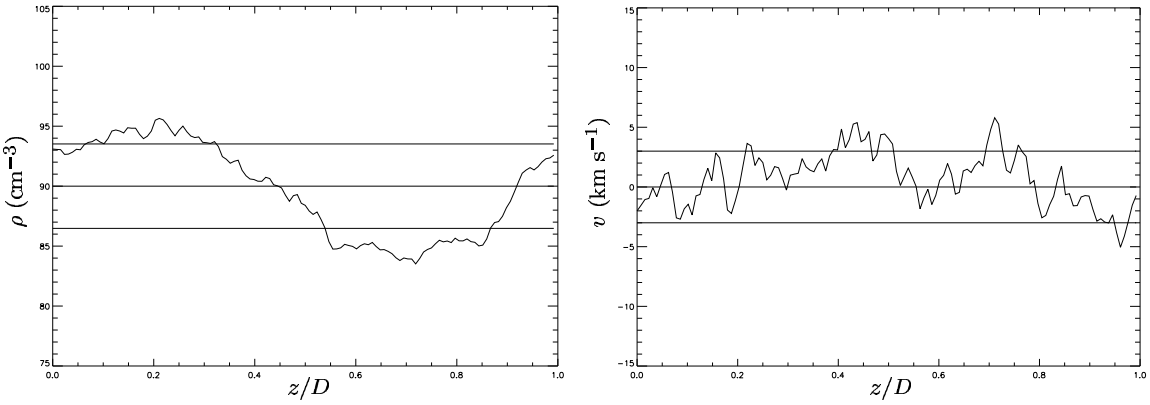

FIG. **XII**.1 – *Évolution de la densité et de la vitesse longitudinale le long de la ligne de visée (64,64) dans le cas du cube de densité $\beta_\rho = 4,5$ et du cube de vitesse $\beta_v = 3,5$. Dans chacun des cas, les tirets représentent la valeur moyenne sur l'ensemble du cube, et les pointillés délimitent les zones $|\rho - \rho_0| \leqslant \sigma_\rho$ et $|v - v_0| \leqslant \sigma_v$. On remarque que la valeur moyenne globale est sensiblement égale à la valeur moyenne calculée sur cette seule ligne de visée, ce qui est conforme à l'hypothèse d'homogénéité.*

Remarquons qu'on ne modifie pas la dispersion σ_ρ du cube de densité. Ceci peut tout d'abord sembler curieux, étant donné qu'une des hypothèses utilisées aux deux chapitres précédents est justement l'inégalité $\sigma_\rho < \rho_0$. En fait, une propriété importante des champs browniens fractionnaires tridimensionnels est que leurs valeurs suivent une distribution gaussienne. Or, seulement environ $0,1\%$ des points d'une telle distribution tombent à plus de 3σ de la valeur moyenne, de sorte que les champs de densité construits présentent naturellement un contraste faible, avec $\sigma_\rho/\rho_0 \lesssim 0,3$.

Notons qu'aucune corrélation n'est imposée *a priori* entre les champs de densité et de vitesse tridimensionnels. Bien que ce choix accentue encore le manque de réalisme physique de ces simulations, il est en partie justifié par l'objectif poursuivi. En effet, il s'agit de vérifier des relations, obtenues au chapitre précédent, valables à des ordres suffisamment bas pour que les corrélations entre densité et vitesse n'interviennent pas (voir la section **XI.2.a**). On verra cependant au **XII.6.b**, que les termes corrélés, qui ne sont pas nécessairement nuls bien qu'on n'impose pas de corrélation entre les champs de densité et de vitesse, ont des effets importants lorsque les fluctuations de densité deviennent grandes.

À titre d'exemple, deux lignes de visée typiques extraites d'un cube de densité et d'un cube de vitesse sont présentées sur la figure **XII**.1. Les champs utilisés ont des indices spectraux respectivement égaux à $\beta_\rho = 4,5$ et $\beta_v = 3,5$. Le second montre plus de structures à petite échelle, comme attendu pour un indice spectral plus faible, dans le cas où les dimensions euclidiennes sont identiques[2]. La profondeur D du cube est choisie égale à 1 pc.

[2]En toute généralité, le nombre caractérisant la quantité de structure à chaque échelle est l'exposant de Hurst.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XII.3 Simulation d'un cube de données PPV

XII.3.a Méthode de construction

Afin d'obtenir un cube de données observationnelles à partir des champs tridimensionnels simulés, on calcule, à chaque position $\boldsymbol{X}$, le spectre qui serait observé dans cette direction. Étant donnée l'hypothèse selon laquelle le nuage est observé dans une transition optiquement mince, le spectre en question résulte alors simplement de l'addition des contributions radiatives issues de chacune des cellules de gaz situées le long de la ligne de visée $\boldsymbol{X}$. Or, l'émission $\delta T_{\rm b}$ d'une de ces cellules a déjà été écrite dans le cadre des hypothèses faites au chapitre **IX**. On y a vu que pour une cellule repérée par la position $\boldsymbol{x}$, cette émission pouvait s'écrire

$$\delta T_{\rm b}(\boldsymbol{x},u) = \alpha\rho(\boldsymbol{x})\phi[v(\boldsymbol{x})-u]\delta z,$$

où u est la vitesse longitudinale considérée, correspondant au canal en vitesse, δz est la profondeur de la cellule, supposée identique pour toutes les cellules, et ϕ est le profil local normalisé de la raie d'émission. Pour simplifier le problème, on va supposer que ce profil est gaussien, et qu'il correspond au seul élargissement thermique, supposé uniforme dans tout le nuage,

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm th}}\exp\left[-\frac{w^2}{2\sigma_{\rm th}^2}\right] \quad \text{et donc} \quad \delta T_{\rm b}(\boldsymbol{x},u) = \alpha\frac{\rho(\boldsymbol{x})\delta z}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm th}}\exp\left\{-\frac{[v(\boldsymbol{x})-u]^2}{2\sigma_{\rm th}^2}\right\} = \alpha\delta N_u(\boldsymbol{x},u).$$

Le facteur numérique α n'étant pas connu et étant sans importance quant à l'étude qui suit, on va essentiellement s'intéresser à la quantité $\delta N_u(\boldsymbol{x},u)$, qui représente la densité de colonne par unité de vitesse de la cellule située en $\boldsymbol{x}$, à la vitesse u. Au sortir du nuage, la densité de colonne du gaz par unité de vitesse, le long de la ligne de visée $\boldsymbol{X}$ et à la vitesse u peut être écrite selon

$$N_u(\boldsymbol{X},u) = \sum_z \delta N_u(\boldsymbol{x},u) = \sum_z \frac{\rho(\boldsymbol{x})\delta z}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\rm th}}\exp\left\{-\frac{[v(\boldsymbol{x})-u]^2}{2\sigma_{\rm th}^2}\right\}. \tag{69}$$

Cette quantité est calculée pour un ensemble discret de vitesses longitudinales $(u_1,\ldots,u_n)$, ce qui fournit le cube de données recherché, puisque les lignes de visée $\boldsymbol{X}$ sont elles aussi échantillonnées de façon discrète. En faisant l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la résolution spectrale de l'observation est égale à la largeur δu d'un canal, et où la fonction de transmission spectrale est une fonction porte de même largeur, le produit $N_u(\boldsymbol{X},u_k)\delta u$ représente alors exactement l'intensité intégrée entre les vitesses $u_k-\delta u/2$ et $u_k+\delta u/2$.
Concernant les valeurs numériques utilisées pour construire ces cubes, la dispersion de vitesse thermique $\sigma_{\rm th}$ dépend de la température cinétique T du gaz et de la masse m de l'espèce émettrice[3],

$$\sigma_{\rm th} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad \text{formule qu'on avait déjà écrite au chapitre } \textbf{VIII}.$$

La profondeur δz de chaque cellule est quant à elle égale à la 128ème partie de la profondeur totale D du nuage, laquelle est fixée à 1 pc, soit $\delta z = 2,411.10^{16}$ cm.
De plus, afin d'assurer que seule une fraction négligeable du signal est perdue, les limites en vitesse dans le cube PPV final sont données par $v_{\rm min}-2\sigma_{\rm th}$ et $v_{\rm max}+2\sigma_{\rm th}$, où $v_{\rm min}$ et $v_{\rm max}$ désignent les valeurs minimum et maximum dans le champ de vitesse tridimensionnel. Le nombre n de canaux est alors obtenu en divisant cette plage en vitesse par la largeur d'un canal δu, qu'on a prise égale à $0,25$ km s^{-1}. En conséquence, tous nos cubes de données n'ont pas le même nombre de canaux, puisque l'extension dans la troisième dimension dépend non seulement de la température T mais aussi et surtout du cube de vitesse tridimensionnel.

XII.3.b Spectres synthétiques

La figure **XII**.2 montre quatre exemples de spectres synthétiques obtenus le long de la ligne de visée représentée sur la figure **XII**.1. Ces spectres ont été calculés en utilisant l'équation (69) pour quatre températures

[3]Ici, on suppose qu'il s'agit de l'hydrogène atomique, dont la masse est $m = 1,6735344.10^{-27}$ kg.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

comprises entre $T = 1$ K et $T = 500$ K. On y voit notamment l'effet de lissage lié à la température. Les fluctuations à petite échelle sont effacées au fur et à mesure que T augmente, et le spectre observé s'approche d'une gaussienne lorsque l'élargissement thermique devient comparable à la dispersion σ_v du cube de vitesse tridimensionnel.

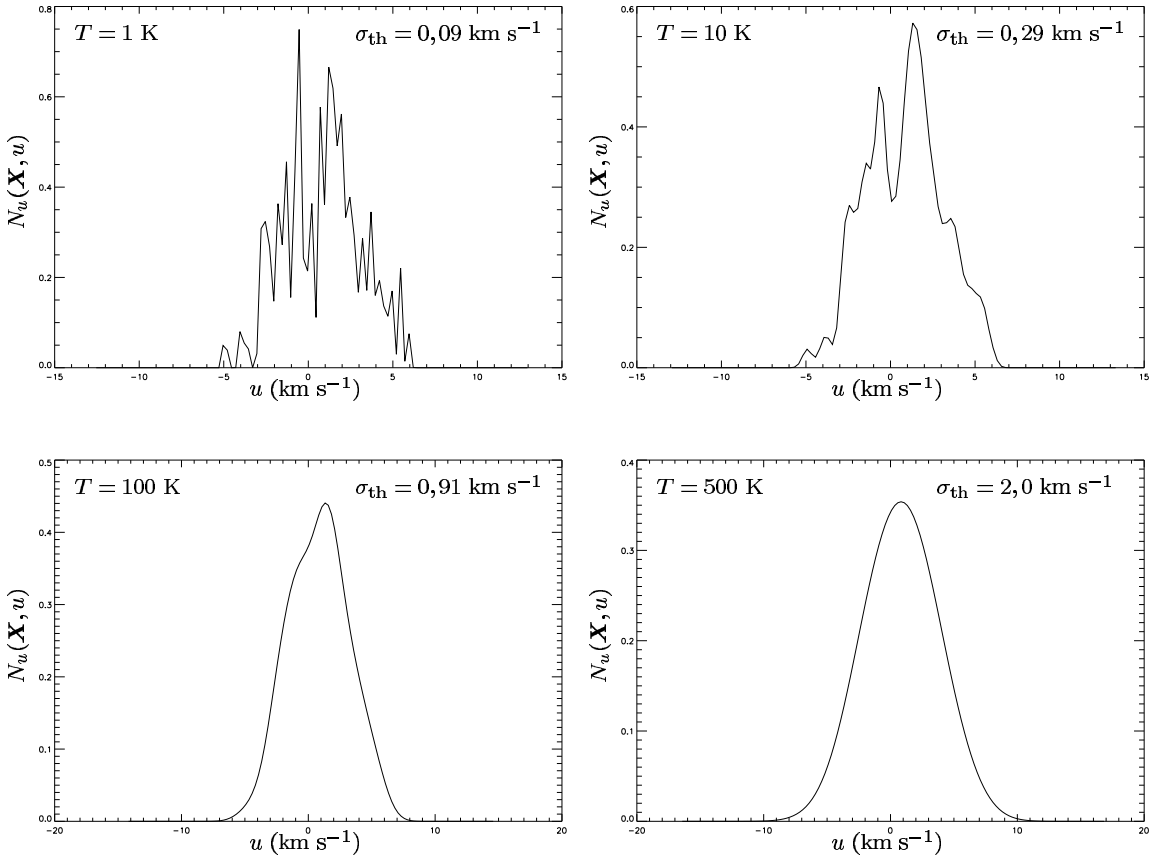

FIG. **XII.2** – *Spectres synthétiques correspondant à la ligne de visée représentée sur la figure* **XII.1**, *pour quatre températures cinétiques du gaz différentes. Les dispersions thermiques σ_{th} sont notées sur les différentes figures en regard de la température.*

Le spectre calculé à $T = 100$ K, température représentative des conditions du gaz HI, rappelle assez bien ce qui est observé à 21 cm dans les nuages à haute latitude [Miville-Deschênes *et al.*, 2003a]. Étant données les conditions régnant dans le milieu atomique[4], les températures $T = 1$ K et $T = 10$ K représentent des conditions artificiellement froides, mais leur exemple montre que les composantes qu'on peut voir apparaître dans les spectres réels observés peuvent correspondre non pas à de véritables nuages au sens d'entités connexes dans l'espace, mais plutôt aux propriétés fractales de la vitesse et de la densité le long de la ligne de visée. Physiquement, d'ailleurs, l'hypothèse d'une transition optiquement mince devient intenable à des températures cinétiques si basses. Ces spectres sont donc présentés uniquement pour illustrer les effets de la température cinétique sur notre capacité à résoudre des structures cinématiques. On voit en particulier qu'à haute température, toutes les structures en vitesse sont lavées par l'élargissement thermique, ce qui empêche formellement de les résoudre. Quantitativement, on peut estimer la résolution spectrale effective $\delta u_{\rm e}$ de ces observations simulées comme étant la largeur à mi-hauteur du produit de convolution du profil ϕ avec le profil d'un canal en vitesse. En supposant, juste pour ce calcul, que les bandes passantes des canaux sont de forme gaussienne, avec une largeur à mi-hauteur δu, la résolution effective est alors donnée

[4]Voir le chapitre **I**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

par [Myers *et al.*, 1991]

$$\delta u_{\rm e} \approx \sqrt{\delta u^2 + (8\ln 2)\sigma_{\rm th}^2}. \tag{70}$$

À titre d'exemple, les résolutions effectives pour les valeurs extrêmes T =1 K et T =500 K de la température considérées sur la figure **XII**.2 sont respectivement $\delta u_{\rm e} \simeq 0,33$ km s^{-1} et $\delta u_{\rm e} \simeq 4,72$ km s^{-1}.

XII.3.c Cartes par canaux et cartes des moments

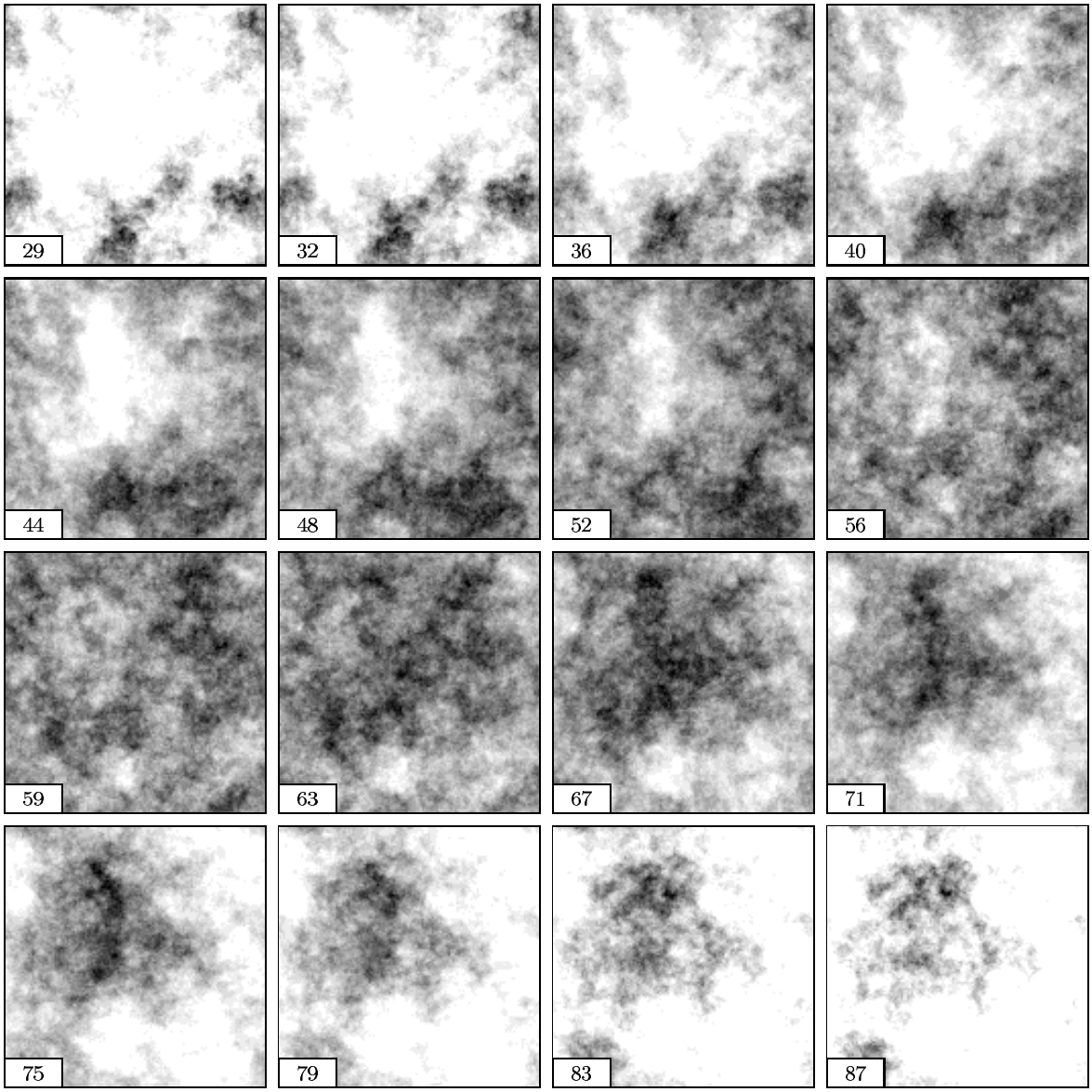

FIG. **XII**.3 – *Cartes par canaux typiques obtenues par simulation d'observations de spectro-imagerie telles que décrites dans le texte. Le cas présenté correspond aux cubes de densité et de vitesse dont les indices spectraux sont respectivement $\beta_\rho = 4,5$ et $\beta_v = 3,5$. La température cinétique du gaz est prise égale à 100* K. *Le nombre inscrit dans le coin inférieur gauche de chaque image donne le numéro du canal, sachant qu'il y a 196 canaux au total dans le cube de données.*

Les coupes des cubes de données le long d'un plan de vitesse constante forment les cartes par canaux. La figure **XII**.3 montre certaines de ces cartes, issues du cube PPV simulé, à T = 100 K, à partir

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

des champs de densité et de vitesse caractérisés par les indices spectraux $\beta_\rho = 4,5$ et $\beta_v = 3,5$. On peut y voir certaines ressemblances avec les cartes réellement observées dans la raie à 21 cm (voir par exemple [Joncas *et al.*, 1992]), notamment des structures allongées[5] et d'autres plus diffuses. On remarque également que les structures présentes dans des canaux adjacents sont corrélées, et qu'on passe d'un canal à l'autre de façon quasi continue. Si cet effet est dû en partie au fait que la largeur des canaux est sous-thermique, puisque $\delta u = 0,25$ km s^{-1} et que $\sigma_{\rm th} \simeq 0,91$ km s^{-1}, on voit qu'il existe néanmoins des corrélations entre des canaux trop éloignés l'un de l'autre pour que l'on puisse dire qu'il s'agit de l'effet du lissage thermique. En effet, on a une résolution effective $\delta u_{\rm e} \simeq 2,16$ km s^{-1}, de sorte qu'on peut considérer que l'élargissement thermique se fait sentir sur une plage d'environ neuf canaux. Les corrélations évidentes entre les structures des canaux 29 et 40, ou entre celles des canaux 75 et 87, par exemple, sont donc issues des champs de densité et de vitesse.
À partir des cubes de données, on peut également construire les cartes de moments telles qu'on les a définies au chapitre **IX**. Étant donnée la relation (40), la carte d'intensité intégrée simulée est

$$I(\boldsymbol{X}) = \int T_{\rm b}(\boldsymbol{X},u){\rm d}u = \alpha \int N_u(\boldsymbol{X},u){\rm d}u = \alpha \sum_k N_u(\boldsymbol{X},u_k)\delta u.$$

De même, les cartes des centroïdes non normalisés et normalisés sont données respectivement par

$$C(\boldsymbol{X}) = \alpha \sum_k u_k N_u(\boldsymbol{X},u_k)\delta u \qquad \text{et} \qquad C_0(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_k u_k N_u(\boldsymbol{X},u_k)}{\sum_k N_u(\boldsymbol{X},u_k)}.$$

Dans la suite, on fera abstraction du facteur constant α en ce qui concerne les cartes de l'intensité et du centroïde non normalisé, en posant $\alpha = 1$ numériquement.

XII.4 Propriétés statistiques des cartes d'observables

À partir de là, on peut commencer à examiner les spectres de puissance des cartes d'observables, qu'il s'agisse des canaux individuels, ce qu'on développera pour l'essentiel au chapitre **XIII**, ou des cartes des moments, auxquelles on va plus particulièrement s'intéresser ici. L'objectif, bien entendu, est de relier les propriétés statistiques de ces observables à celles des champ tridimensionnels, c'est-à-dire aux indices spectraux β_ρ et β_v. Pour procéder à cette analyse, on construit des cubes de données correspondant à toutes les combinaisons possibles de champs de densité et de vitesse, en se plaçant à une température typique du CNM, soit $T = 100$ K.
L'analyse des résultats est facilitée par l'étude des figures **XII**.4 et **XII**.5, qui montrent, pour certains de ces cubes simulés, les cartes de l'intensité intégrée, des centroïdes non normalisé et normalisé, ainsi que deux canaux en vitesse - l'un au centre de la raie et l'autre dans une aile. Plus précisément, la figure **XII**.4 présente le cas des cinq cubes de données issus du champ de densité $\beta_\rho = 4$ et de tous les champs de vitesse, tandis que la figure **XII**.5 correspond au cas des cinq cubes de données construits à partir du champ de vitesse d'indice spectral $\beta_v = 4$ et de tous les champs de densité, à l'exception du cube de densité uniforme. Les sections suivantes sont consacrées à l'étude détaillée de ces figures et de ce qu'elles impliquent en termes de propriétés statistiques.

XII.5 Intensité intégrée

XII.5.a Spectre de puissance de l'intensité intégrée dans la limite $R \ll D$

Comme on l'a remarqué au début du chapitre **XI**, et comme plusieurs auteurs l'ont montré (voir par exemple [Stutzki *et al.*, 1998, Goldman, 2000]), un milieu observé dans une raie optiquement mince présente une carte d'intensité intégrée dont le spectre de puissance est égal à celui du champ de densité à trois dimensions, à condition que $R/D \ll 1$, où R représente la plus grande échelle transverse considérée et D est la profondeur du nuage. L'identité des comportements des spectres de puissance $\mathcal{P}_I$ et $\mathcal{P}_\rho$ est en fait valable que le spectre de puissance soit une loi de puissance ou pas, dès lors que l'isotropie est

[5] Celles-ci sont néanmoins peu claires, ce qui n'est pas surprenant étant donnée l'isotropie des champs ρ et v.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

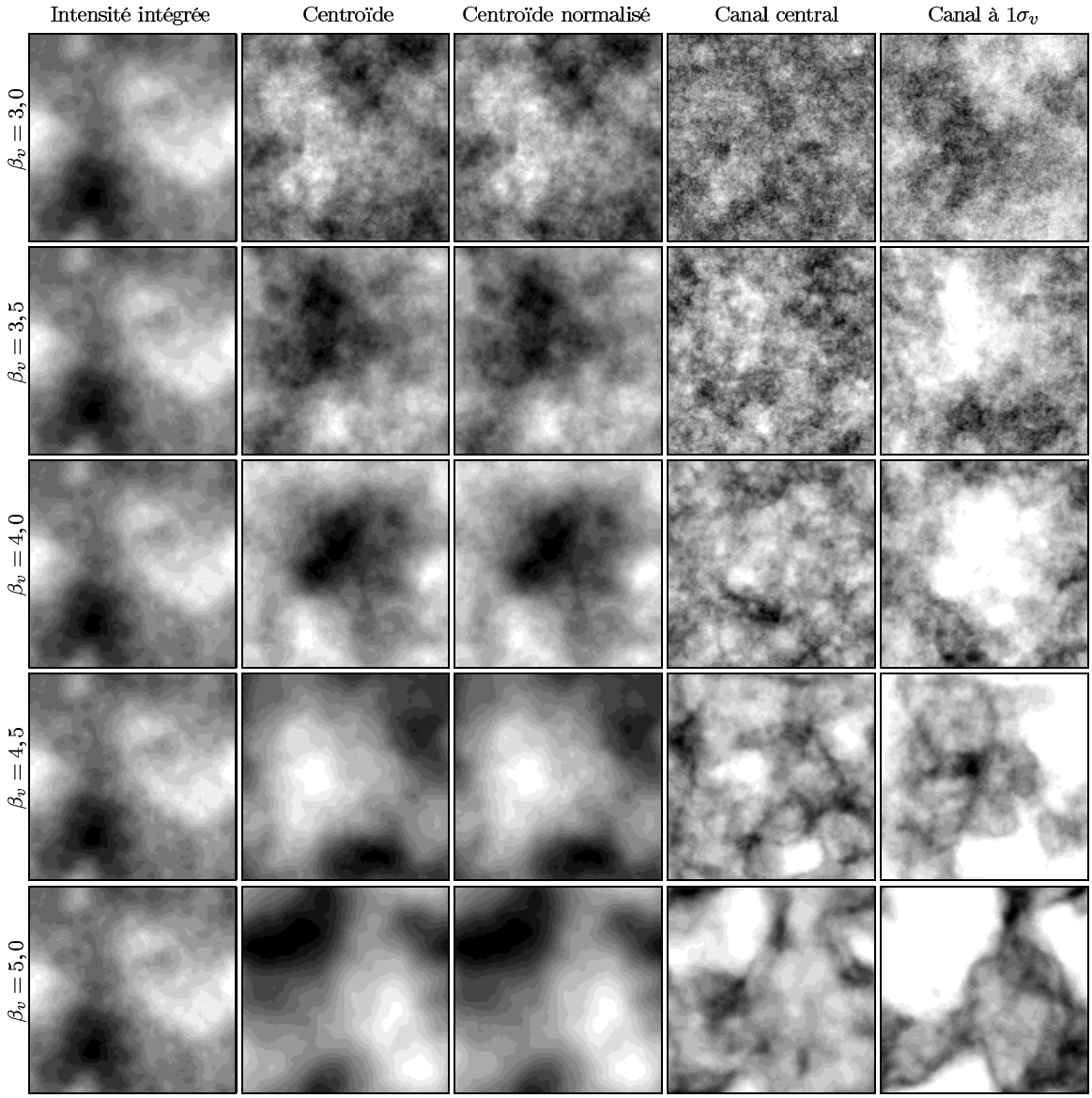

FIG. **XII**.4 – *Vue synthétique des cartes d'observables pour les cubes de données construits à partir du champ de densité $\beta_\rho = 4$ et des cinq champs de vitesse. Chaque ligne correspond à l'une des valeurs de β_v, et les différentes colonnes représentent respectivement l'intensité intégrée, le centroïde non normalisé, le centroïde normalisé, un canal au centre de la raie et un canal à 1 σ_v du centre de la raie.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

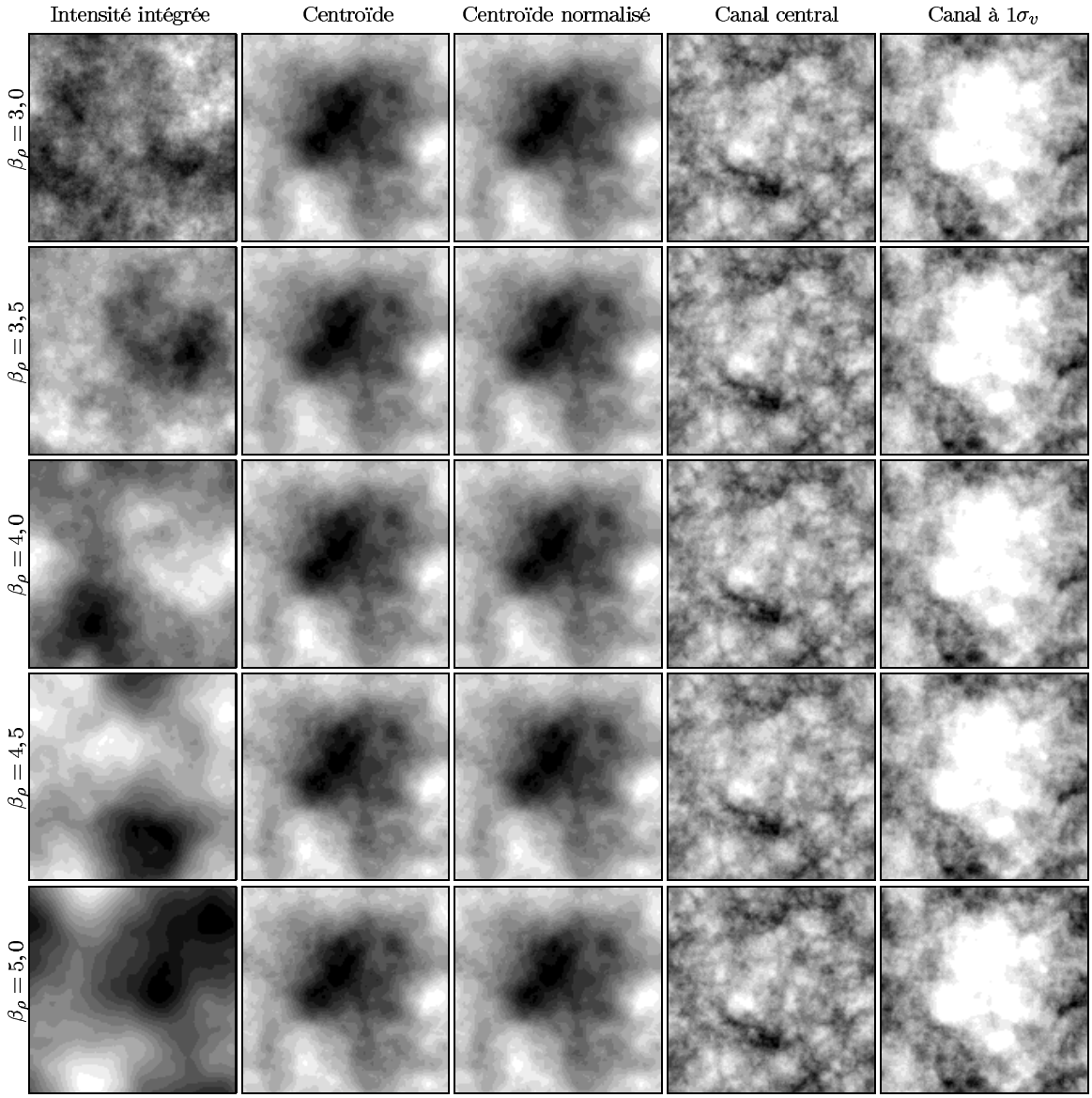

FIG. **XII**.5 – *Vue synthétique des cartes d'observables pour les cubes de données construits à partir du champ de vitesse $\beta_v = 4$ et des cinq champs de densité non uniformes. Chaque ligne correspond à l'une des valeurs de β_ρ, et les différentes colonnes représentent respectivement l'intensité intégrée, le centroïde non normalisé, le centroïde normalisé, un canal au centre de la raie et un canal à 1 σ_v du centre de la raie.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

assurée. Cette propriété des milieux optiquement minces est puissante car elle permet ainsi de déduire directement le spectre de puissance du champ de densité interstellaire en trois dimensions à partir des observations [Elmegreen *et al.*, 2001].
Les calculs du chapitre **XI** ont fourni le pendant de cette prédiction dans l'espace réel, en montrant que l'exposant de Hurst de la carte d'intensité intégrée était lié à celui du champ de densité par

$$H_I = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{pour } H_\rho < 1/2 \qquad \text{et} \qquad H_I = 1 \quad \text{pour } H_\rho > 1/2.$$

La première relation se traduit effectivement, comme on l'a vu, par l'égalité des indices spectraux $\beta_I = \beta_\rho$, et c'est cette égalité que nos simulations confirment. On voit sur la première colonne de la figure **XII**.4 que les différentes cartes d'intensité intégrée sont sensiblement identiques, quel que soit le champ de vitesse utilisé pour construire le cube de données, ce qui montre déjà que l'intensité intégrée ne dépend ici que du champ de densité. Les spectres de puissance correspondant à ces cinq cartes sont également identiques les uns aux autres. Afin de montrer qu'ils ont bien la forme de lois de puissance et que leurs indices spectraux sont égaux à celui du champ de densité associé, on construit la figure **XII**.6, qui montre les spectres de puissance des cartes d'intensité intégrée formant la première colonne de la figure **XII**.5. On voit qu'il s'agit effectivement de lois de puissance, et qu'on a bien l'égalité des indices spectraux $\beta_I = \beta_\rho$.

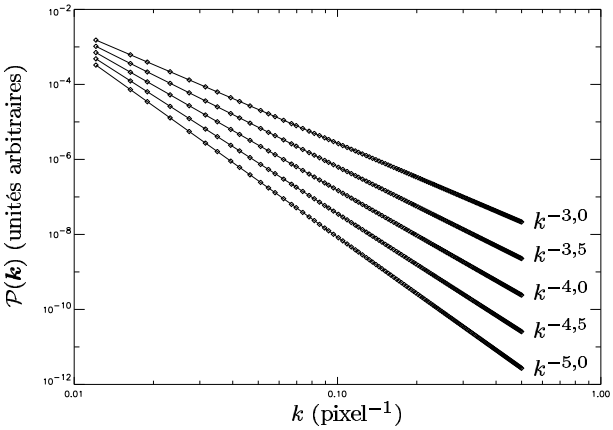

FIG. **XII**.6 – *Spectres de puissance des cartes d'intensité intégrée constituant la première colonne de la figure* **XII**.5. *Les mesures sont représentées par les losanges. Les droites correspondent à des lois de puissance dont les formes sont indiquées en regard.*

L'intensité intégrée I est égale, dans le cas considéré, et avec la convention $\alpha = 1$, à la densité de colonne N, qu'il est bien évidemment possible de simuler ici directement à partir du cube de densité,

$$N(\boldsymbol{X}) = \sum_k \rho(\boldsymbol{X}, z_k)\delta z.$$

L'identité de la densité de colonne et de l'intensité intégrée dans nos simulations est illustrée sur la figure **XII**.7, qui compare la densité de colonne du cube de densité $\beta_\rho = 4$ avec l'intensité intégrée du cube de données construit à partir des paramètres $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$. On voit que les deux images sont identiques, au niveau de détail observable ici. Remarquons que la plus grande échelle tranverse considérée est $R = D$. Le fait qu'on trouve exactement le résultat attendu dans la limite $R \ll D$ se justifie en observant que les échelles intervenant majoritairement dans les cartes étudiées ici sont bien plus petites que D.

XII.5.b Spectre de puissance de l'intensité intégrée dans la limite $R \gg D$

À l'inverse, le fait qu'on dispose des cubes de densité tridimensionnels permet de tester la limite d'un nuage très peu profond, soit $R \gg D$, en étudiant une coupe bidimensionnelle de l'un de ces cubes. Théoriquement, celle-ci doit représenter statistiquement le cube entier, et son exposant de Hurst H_c doit donc être égal à

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

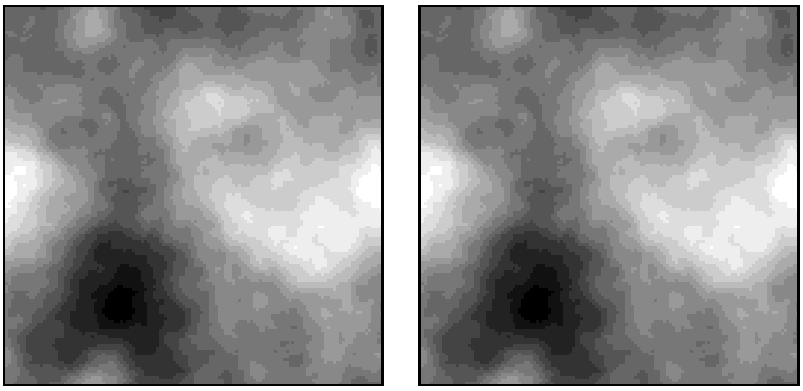

FIG. **XII**.7 – *Densité de colonne du cube de densité $\beta_\rho = 4$ (à gauche) et intensité intégrée I du cube de données correspondant à $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$ (à droite).*

H_ρ. Étant donné le lien entre exposant de Hurst, indice spectral et dimension de l'espace, l'indice β_c de cette coupe bidimensionnelle est donné par

$$\beta_c = 2H_c + 2 = 2H_\rho + 2 = \beta_\rho - 1.$$

Un exemple de cet effet est montré sur la figure **XII**.8 pour une tranche de 1 pixel de large extraite du cube tridimensionnel de densité caractérisé par $\beta_\rho = 4$. On y voit le spectre de puissance de cette tranche, moyenné azimutalement[6], ainsi qu'un ajustement en loi de puissance. L'indice spectral obtenu, $\beta_c \simeq 3,14$ est légèrement plus grand que celui attendu, puisque $\beta_\rho - 1 = 3$. Ceci peut se comprendre en remarquant que la coupe dans le cube n'est pas parfaitement bidimensionnelle, mais qu'elle possède nécessairement une certaine largeur intrinsèque. D'ailleurs, si l'on avait représenté l'ensemble du spectre de puissance comme un nuage de points, c'est-à-dire sans faire de moyenne azimutale, on aurait observé une dispersion plus prononcée aux petites échelles, comparables à cette largeur intrinsèque.

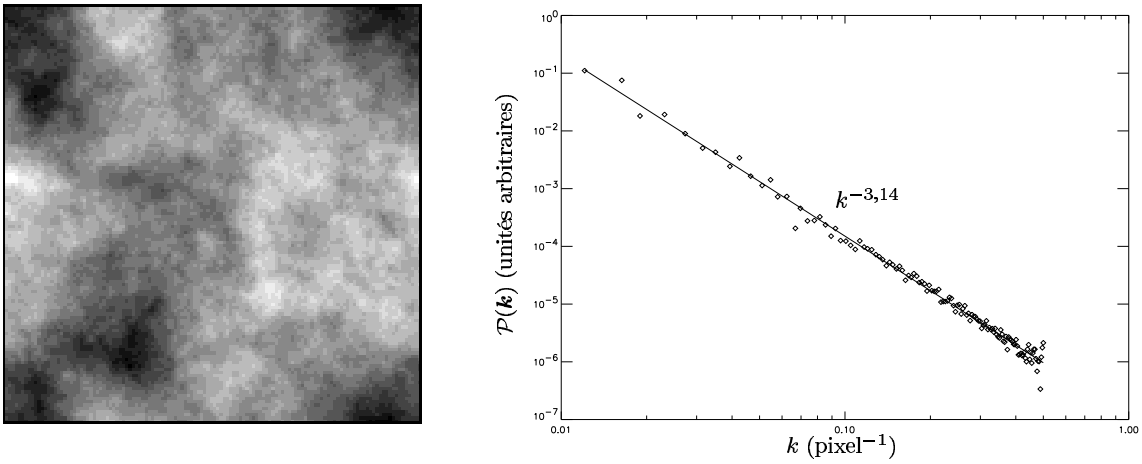

FIG. **XII**.8 – *La figure de gauche présente une coupe bidimensionnelle extraite du cube de densité $\beta_\rho = 4$. La figure de droite montre le spectre de puissance de celle-ci, moyenné azimutalement (losanges), ainsi qu'un ajustement en loi de puissance.*

XII.5.c Transition entre les deux régimes

Il est également intéressant d'étudier le spectre de puissance d'une tranche dans le régime intermédiaire entre les deux cas présentés plus haut. À cette fin, on calcule les spectres de puissance de tranches du cube

[6]On rappelle qu'il s'agit de faire la moyenne sur les anneaux de nombre d'onde k constant.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

de densité, de largeur d croissante. Les résultats sont présentés sur la figure **XII**.9 qui montre les spectres de puissance de deux tranches du cube de densité d'indice $\beta_\rho = 5$, où l'on a sommé respectivement 5 et 10 plans du cube. On observe que les spectres de puissance sont courbés, avec un indice spectral β_ρ aux petites échelles et $\beta_\rho - 1$ aux grandes échelles. La transition a lieu à une fréquence spatiale $k_d = 1/2d$ et fournit une méthode permettant de déterminer la profondeur du milieu observé. C'est ainsi qu'Elmegreen [Elmegreen *et al.*, 2001] a pu déterminer l'épaisseur de la couche de gaz HI dans le grand nuage de Magellan (LMC). Réciproquement, l'absence d'une telle courbure dans le spectre de puissance de l'émission du HI galactique à grande échelle suggère que l'épaisseur du milieu observé est bien plus grande que la taille des cartes disponibles, de l'ordre de 25 pc dans le cas des nuages à haute latitude observés par Miville-Deschênes [Miville-Deschênes *et al.*, 2003a].
Ce résultat est également pertinent quant aux études des milieux optiquement épais (tels que les nuages moléculaires) où l'émission observée provient de la région la plus en surface du nuage. Dans ce cas, l'indice spectral mesuré sur la carte d'émission intégrée d'un traceur optiquement épais devrait être plus proche de $\beta_\rho - 1$.

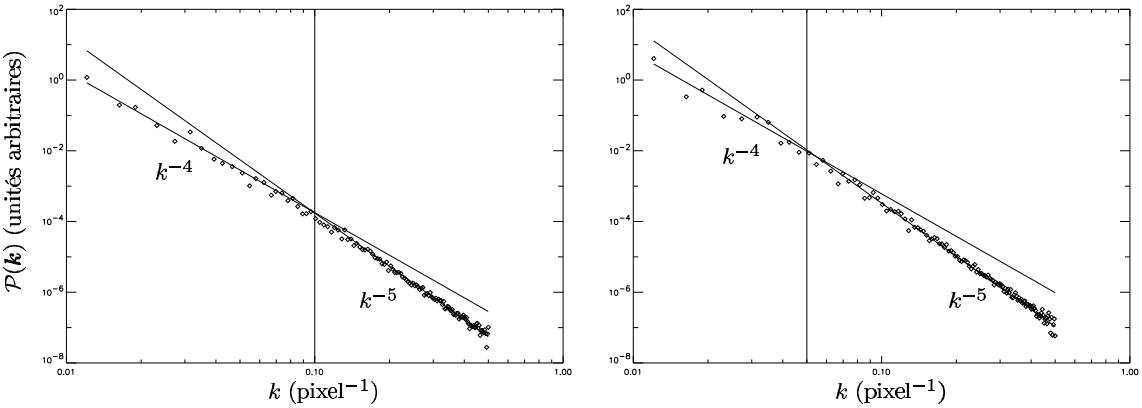

FIG. **XII**.9 – *Spectres de puissance de cartes bidimensionnelles construites en sommant respectivement cinq plans (figure de gauche) et dix plans (figure de droite) consécutifs extraits du cube de densité $\beta_\rho = 5$. Les mesures sont indiquées par des losanges, et les droites représentent les régimes limites $R \ll d$ et $R \gg d$. Les pointillés correspondent au nombre d'onde de la transition $k_d = 1/2d$.*

XII.6 Centroïdes de vitesse

XII.6.a Vérification des égalités $\beta_C = \beta_{C_0} = \beta_v$

La limite des petites fluctuations de densité $\sigma_\rho < \rho_0$ étant satisfaite dans tous les cubes de densité, il est légitime de vouloir vérifier que les centroïdes de vitesse, qu'ils soient normalisés ou non, présentent des spectres de puissance en loi de puissance, avec des indices spectraux β_C et β_{C_0} tous deux égaux à l'indice spectral β_v du champ de vitesse sous-jacent.
Les cartes de centroïdes présentées sur la figure **XII**.5 montrent déjà clairement que le champ de densité n'a pas d'influence sur la structure de ces cartes, puisqu'elles sont toutes identiques. On remarque d'ailleurs que la normalisation ne modifie pas cette structure. Dans le cadre de ces simulations, les propriétés statistiques des centroïdes de vitesse sont donc essentiellement déterminés par le champ de vitesse. Plus précisément, si l'on construit les spectres de puissance des cartes de centroïdes non normalisés représentées sur la figure **XII**.4, c'est-à-dire pour $\beta_\rho = 4$ et toutes les valeurs de β_v, on obtient la figure **XII**.10, qui montre que les indices spectraux β_C et β_{C_0} sont bien égaux aux indices β_v des champs de vitesse.
Ce résultat, obtenu avec un champ de densité caractérisé par un indice spectral $\beta_\rho = 4$, est vérifié quel que soit le champ de densité utilisé. L'ajustement de lois de puissance sur les spectres de puissance des cartes de centroïdes fournit toujours l'indice spectral du champ de vitesse. Cependant, il faut remarquer que ces mesures sont faites sur les moyennes azimutales des spectres de puissance. En effet, et comme le montre la figure **XII**.11, les spectres de puissance représentés sous la forme de nuages de points peuvent être affectés d'une forte dispersion. On note que cette dispersion autour de la loi de puissance décroît quand le spectre

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

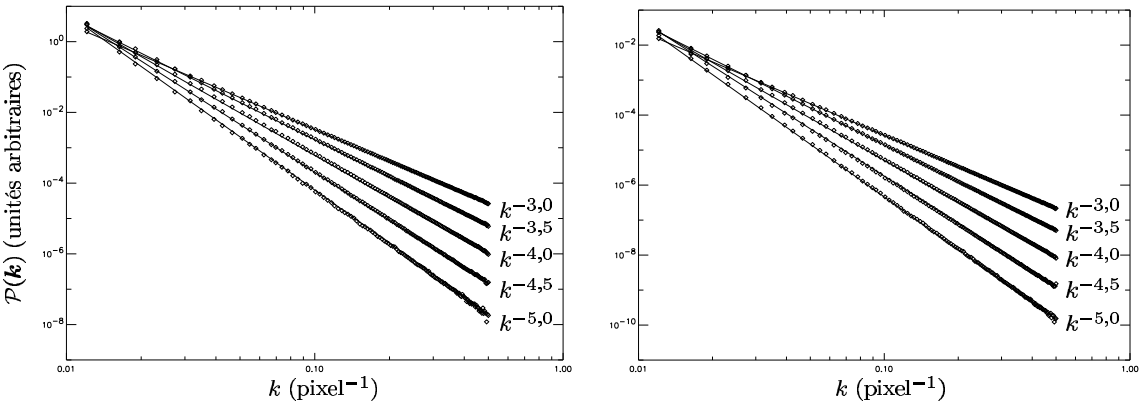

FIG. **XII**.10 – *Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (à gauche) et normalisés (à droite) constituant respectivement les deuxième et troisième colonnes de la figure* **XII**.4. *Les mesures sont représentées par les losanges. Les droites correspondent à des lois de puissance dont les formes sont indiquées en regard de chacune des courbes.*

de puissance du champ de densité devient plus raide[7], et dans la limite d'un champ de densité uniforme, on retrouve la dispersion nulle caractéristique de l'isotropie. Réciproquement, pour un indice β_ρ donné, les spectres de puissance des cartes de centroïdes sont plus dispersés pour des valeurs de β_v plus grandes. Ceci peut s'expliquer par le fait que les fluctuations de densité se manifestent plus clairement lorsque le champ de vitesse est plus lisse.

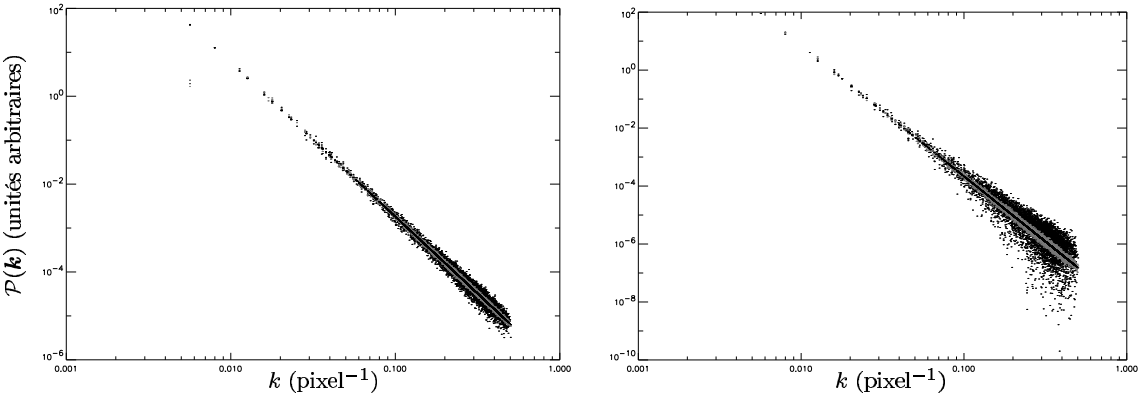

FIG. **XII**.11 – *Spectres de puissance, non moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés correspondant aux champs de vitesse $\beta_v = 3,5$ (à gauche) et $\beta_v = 4,5$ (à droite). Sur chaque figure, on a représenté les données issues de trois cubes de densité, soit $\beta_\rho = 3$ (en noir, forte dispersion), $\beta_\rho = 4$ (en gris) et le cube de densité uniforme (en noir, sans dispersion).*

XII.6.b Influence des différents paramètres

Influence de la température cinétique

Les conditions de validité de ce résultat doivent être déterminées, les simulations faites jusqu'à présent ne représentant qu'une petite partie des conditions possibles pour les paramètres du problème. On désire avant tout vérifier que le résultat reste valable quelle que soit la température cinétique, comme le suggère l'écriture du centroïde sous la forme d'une intégrale du produit ρv. Pour cela, on choisit arbitrairement un champ de densité d'indice β_ρ et un champ de vitesse d'indice β_v, et on construit, de la manière décrite plus

[7] C'est-à-dire quand le champ de densité lui-même devient plus lisse.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

haut, les cubes de données correspondant à une série de températures différentes. Les indices spectraux des centroïdes de vitesse non normalisés calculés à partir de ces cubes sont reportés sur la figure **XII.**12. On voit clairement que β_C est indépendant de la température cinétique. Aux incertitudes près, on retrouve $\beta_C = \beta_v$, en remarquant que l'erreur systématique s'interprète comme une preuve de l'indépendance des cartes du centroïde vis-à-vis de T.

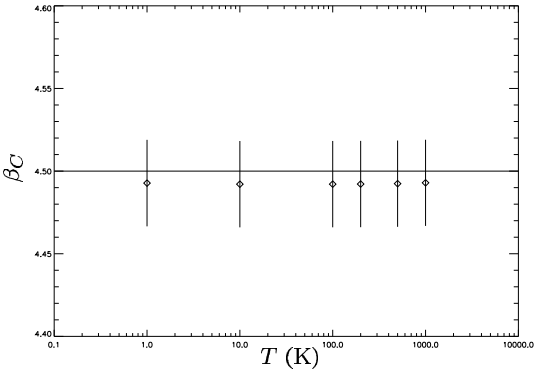

FIG. **XII.**12 – *Indices spectraux mesurés sur les cartes de centroïdes non normalisés construits à partir des cubes de densité $\beta_\rho = 3,5$ et de vitesse $\beta_v = 4,5$, en fonction de la température cinétique utilisée, entre $T = 1$ K et $T = 1000$ K. Les barres d'erreur recouvrent la valeur attendue $\beta_C = 4,5$.*

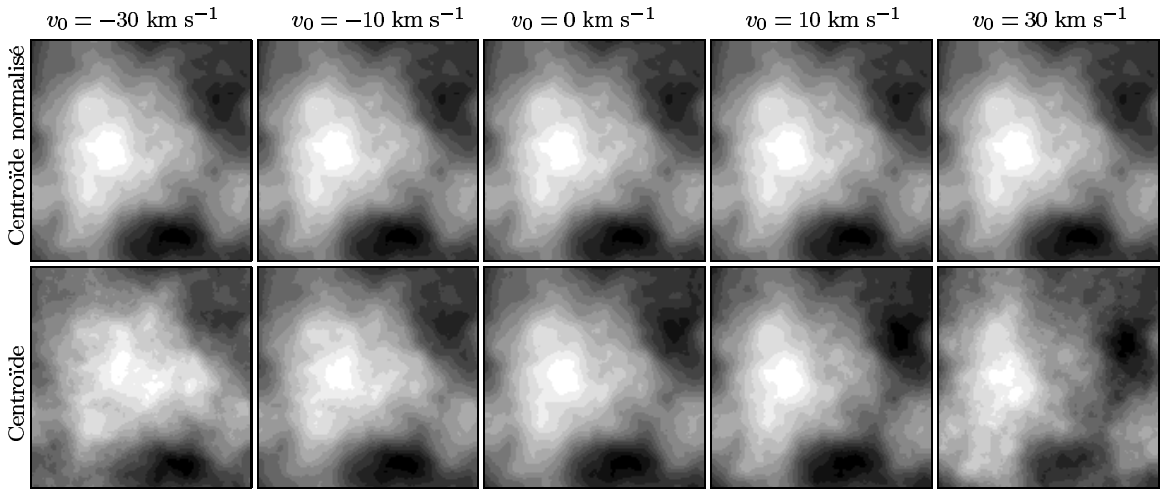

FIG. **XII.**13 – *Cartes des centroïdes de vitesse normalisés (ligne du haut) et non normalisés (ligne du bas) correspondant aux cubes de données construits à partir du cube de densité $\beta_\rho = 3,5$ et des cubes de vitesse $\beta_v = 4,5$ modifiés de façon à obtenir une vitesse moyenne v_0 indiquée au dessus de chaque colonne.*

Influence de la vitesse moyenne v_0

En ce qui concerne l'influence des paramètres numériques caractérisant les champs de densité et de vitesse, à savoir ρ_0, σ_ρ, v_0 et σ_v, le premier test effectué est l'introduction d'une vitesse moyenne non nulle. On se donne donc une série de cubes de vitesse en ajoutant différentes constantes v_0 au cube déjà construit et caractérisé par $\beta_v = 4,5$. La figure **XII.**13 montre, en fonction de v_0, l'évolution des cartes des deux types de centroïdes construits à partir de ces cubes de vitesse modifiés et du cube de densité $\beta_\rho = 3,5$.

On remarque notamment que la structure des centroïdes non normalisés change légèrement avec la vitesse moyenne, alors que les centroïdes normalisés semblent indépendants de v_0. Pour préciser ce comportement en termes statistiques, on présente sur la figure **XII.**14 les spectres de puissance, moyennés azimutalement, de six des dix cartes de la figure **XII.**13, à savoir celles des deux types de centroïdes de vitesse dans les cas

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

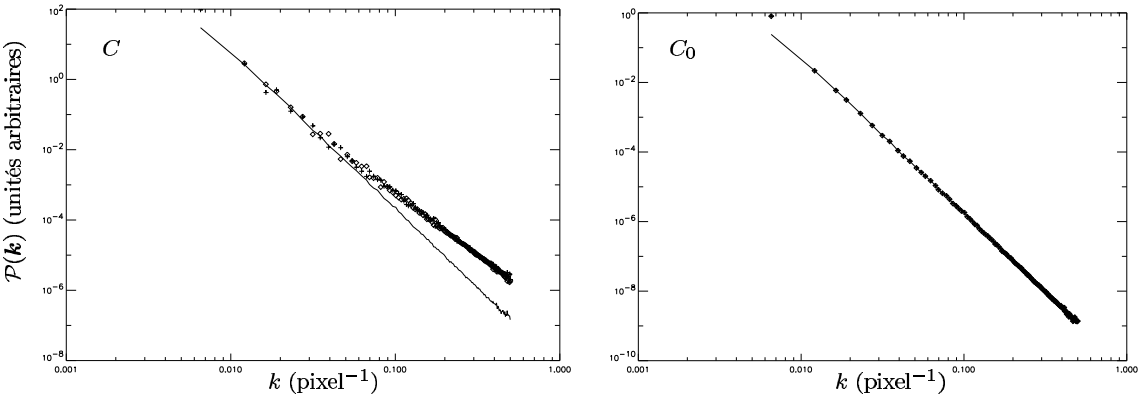

FIG. **XII**.14 – *Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (à gauche) et normalisés (à droite) correspondant aux cubes de données construits à partir du cube de densité* $\beta_\rho = 3,5$ *et des cubes de vitesse* $\beta_v = 4,5$ *modifiés de façon à obtenir* $v_0 = -30$ km s^{-1} *(losanges) et* $v_0 = +30$ km s^{-1} *(croix). La courbe en trait plein correspond au cas* $v_0 = 0$ km s^{-1}.

d'une valeur nulle et d'une valeur extrême de la vitesse moyenne. Clairement, l'égalité $\beta_C = \beta_v$ est mise en défaut lorsque la vitesse moyenne prend des valeurs non nulles, tandis qu'on a toujours $\beta_{C_0} = \beta_v$.
Étant donnée la forme (58) de la fonction d'autocorrélation A_C, la dépendance en v_0 de la structure des cartes des centroïdes non normalisés est évidemment liée au terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$. On le vérifie tout d'abord en montrant, sur la figure **XII**.14, que le signe de v_0 est sans importance. D'autre part, si l'on devait construire la quantité $A_C - v_0^2 A_I$, soit $\mathcal{P}_C - v_0^2 \mathcal{P}_I$ dans l'espace de Fourier, on s'attendrait à retrouver le spectre de puissance de la carte du centroïde non normalisé dans le cas $v_0 = 0$. La figure **XII**.15 semble montrer la validité de cette analyse, bien que le spectre obtenu soit entaché d'une dispersion assez importante[8]. En ce qui concerne les centroïdes normalisés, le calcul de la fonction d'autocorrélation A_{C_0} a été poussé au second ordre en fluctuations de densité, ce qui permet de voir que le terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ est supprimé. On comprend alors que la vitesse moyenne n'affecte pas, semble-t-il, les spectres de puissance correspondants. On va voir cela plus en détail dans ce qui suit.

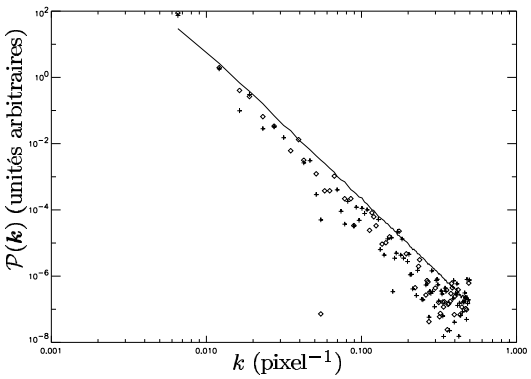

FIG. **XII**.15 – *Spectre de puissance, moyenné azimutalement, de la carte des centroïdes non normalisés dans le cas* $v_0 = 30$ km s^{-1} *(figure* **XII**.14*), corrigé d'un terme* $v_0^2 \mathcal{P}_I$*, où* $\mathcal{P}_I$ *est le spectre de puissance de l'intensité intégrée calculée sur le même cube de données. La courbe en trait plein représente toujours le cas du centroïde non normalisé dans le cas* $v_0 = 0$ km s^{-1}.

Influence des petites fluctuations de densité

Revenant au cas des centroïdes non normalisés, la modification du spectre de puissance $\mathcal{P}_C$ du fait de la présence d'une vitesse moyenne non nulle, dont l'origine est donc le terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ dans l'expression de A_C, doit par conséquent dépendre des propriétés statistiques du champ de densité. Nos simulations permettent

[8]Cette dispersion est issue de celle affectant le spectre de puissance de la carte des centroïdes, non moyenné azimutalement.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

d'étudier cette dépendance, en construisant des cartes de centroïdes de vitesse à partir d'un cube de vitesse de moyenne non nulle et de divers cubes de densité. C'est ce que montre la figure **XII**.16, sur laquelle on peut voir que l'indice spectral de la carte des centroïdes non normalisés est en fait donné par le plus petit des deux indices β_ρ et β_v, tandis que les cartes des centroïdes normalisés donnent encore $\beta_{C_0} = \beta_v$. Autrement dit, les contributions de la densité au spectre de puissance des cartes de centroïdes non normalisés dominent les contributions cinématiques pures dès lors que $\beta_\rho < \beta_v$, ce qui s'interprète à l'aide la figure **XII**.17. Sur la figure de gauche, on voit que la puissance correspondant aux fluctuations de densité est effectivement plus importante que celle correspondant aux structures en vitesse à la même échelle, si l'on a $\beta_\rho < \beta_v$. En revanche, on pressent que si l'on diminue globalement l'amplitude des fluctuations de densité quel que soit leur spectre, comme sur la figure de droite, alors on devrait retrouver l'égalité $\beta_C = \beta_v$. Pour le vérifier, on montre, sur la figure **XII**.18, l'évolution de l'indice spectral β_C en fonction du rapport σ_ρ/ρ_0, pour un cube de densité $\beta_\rho = 3,5$ et un cube de vitesse $\beta_v = 4,5$ avec une vitesse moyenne $v_0 = 30$ km s^{-1}.

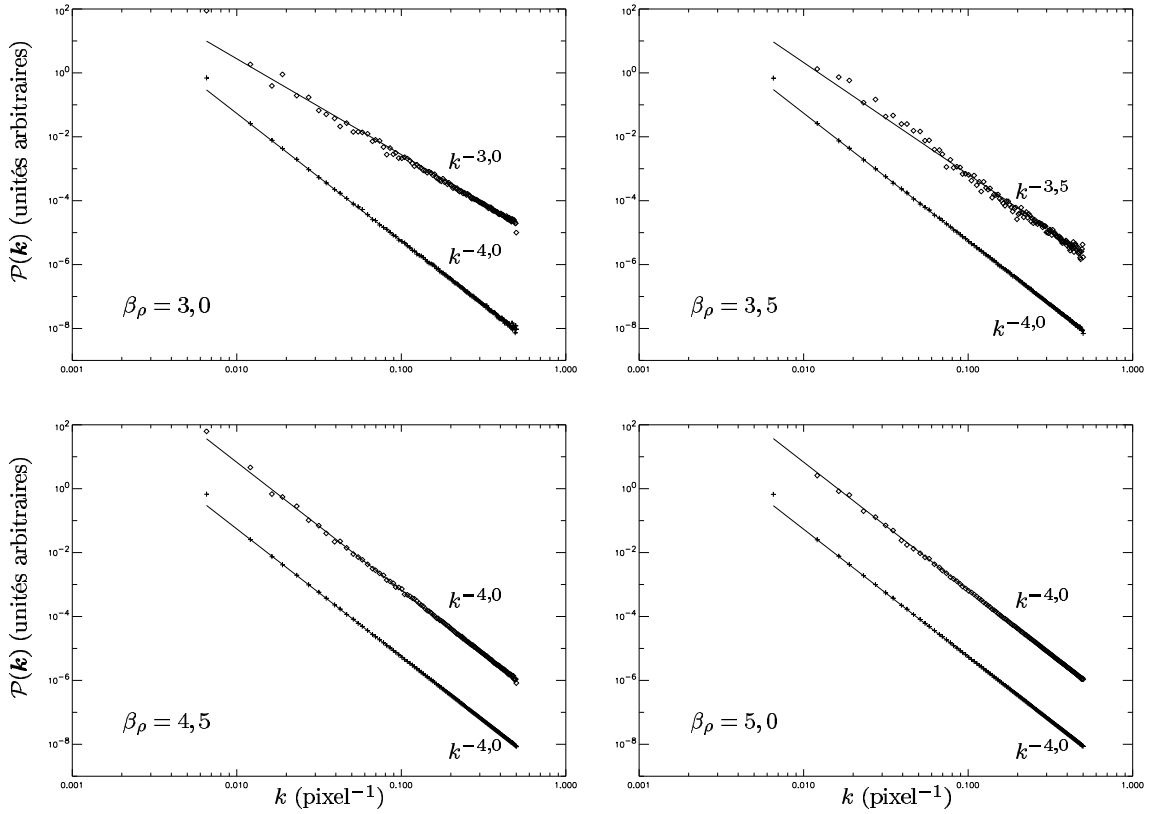

FIG. **XII**.16 – *Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (losanges) et normalisés (croix) construits à partir du cube de vitesse caractérisé par* $\beta_v = 4,0$ *et* $v_0 = 30$ km s^{-1} *et de quatre cubes de densité. Les droites représentent des lois de puissances dont les formes sont indiquées.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

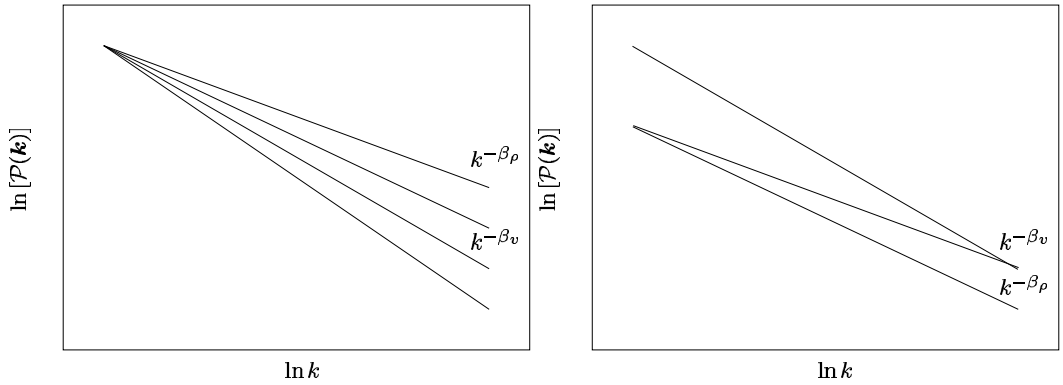

FIG. **XII**.17 – *Interprétation de l'effet observé sur la figure* **XII**.16. *Le trait plein représente le spectre de puissance du champ de vitesse et les tirets le spectre de puissance du champ de densité, pour différentes valeurs de l'indice β_ρ. La puissance contenue dans les fluctuations de vitesse est la même sur les deux figures. La puissance correspondant aux fluctuations de densité est plus importante sur la figure de gauche que sur la figure de droite.*

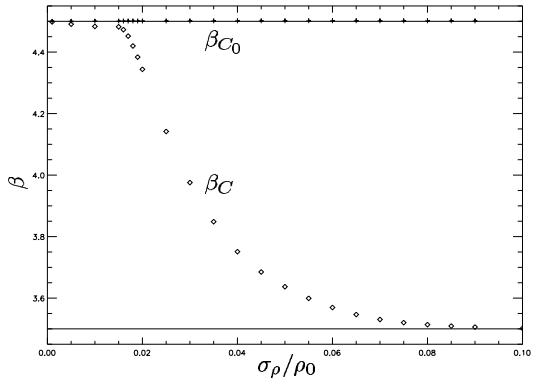

FIG. **XII**.18 – *Évolution des indices spectraux β_C (losanges) et β_{C_0} (croix) en fonction du rapport σ_ρ/ρ_0, pour un cube de densité d'indice spectral $\beta_\rho = 3,5$ et un cube de vitesse $\beta_v = 4,5$ dont la valeur moyenne est $v_0 = 30$ km s^{-1}. Les pointillés indiquent les asymptotes à $\beta = 3,5$ et $\beta = 4,5$.*

On peut y voir qu'effectivement, dans la limite des petites fluctuations de densité, on retrouve le résultat $\beta_C = \beta_v$, et qu'en revanche, lorsque ces fluctuations deviennent trop importantes, l'indice spectral de la carte des centroïdes non normalisés prend la valeur de β_ρ. L'hypothèse des petites fluctuations de densité, qu'on avait utilisée comme condition de validité d'un développement limité au chapitre **X**, est donc nécessaire en pratique si l'on veut retrouver les statistiques de la vitesse à partir de celles des cartes de centroïdes non normalisés, dans le cas où la vitesse moyenne n'est pas nulle. Notons cependant qu'il est toujours possible se ramener au cas $v_0 = 0$ en calibrant correctement les canaux en vitesse.

Le cas des grandes fluctuations de densité

On peut donc se placer dans le cas d'une vitesse moyenne nulle à l'aide d'une calibration adéquate. Dans cette hypothèse, les fluctuations de densité peuvent *a priori* être augmentées sans modifier le résultat $\beta_C = \beta_v$, puisque le terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ est alors nul. Ce cas de figure est intéressant d'un point de vue pratique, car les champs de densité du milieu interstellaire présentent fréquemment de grandes variations. Cependant, comme on l'a dit plus haut, les fluctuations des browniens fractionnaires sont limitées par construction, avec typiquement $\sigma_\rho/\rho_0 \lesssim 0,3$, ce qui impose de trouver un autre modèle de champ de densité. Une possibilité qui s'offre à nous est de considérer les exponentielles de champs browniens fractionnaires. On obtient alors des distributions lognormales de la densité avec des excursions importantes. Partant d'un champ caractérisé par un indice spectral $\beta = 4$, on obtient par ce biais un champ de densité dont les valeurs sont comprises

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

entre $\sim$ 0,6 cm^{-3} et $\sim$ 2700 cm^{-3}, si l'on pose que la valeur moyenne est ρ_0 =90 cm^{-3}. Le rapport σ_ρ/ρ_0 est alors de l'ordre de 1,22. Comme on peut le voir sur la figure **XII**.19, ce cube de densité présente des grandes déviations loin de la valeur moyenne. On remarque également que son spectre de puissance suit une loi de puissance presque parfaite, dont l'indice spectral est justement $\beta_\rho = 4$.

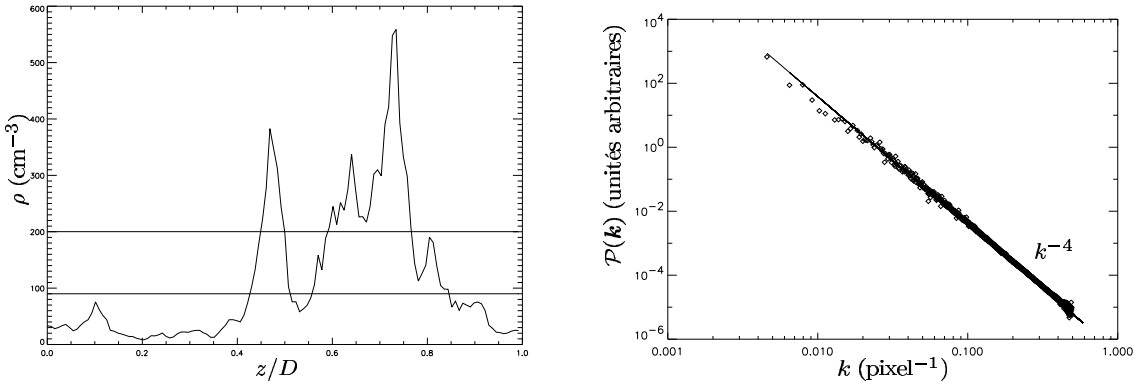

FIG. **XII**.19 – *Exemple de ligne de visée (à gauche) et spectre de puissance moyenné azimutalement (à droite) du cube de densité construit comme exponentielle d'un brownien fractionnaire d'indice* $\beta = 4$.

À partir de ce cube et des cinq champs de vitesse de type brownien fractionnaire avec $v_0 = 0$, on construit cinq cubes de données et les centroïdes de vitesse correspondants. Les spectres de puissance des cartes de centroïdes normalisés et non normalisés sont présentés sur la figure **XII**.20. On voit que contrairement au cas précédent, la nullité de la vitesse moyenne ne suffit pas à assurer l'égalité des indices spectraux $\beta_C = \beta_v$. En fait, on retrouve la même situation que celle rencontrée dans le cas d'un champ de densité de type brownien fractionnaire avec une vitesse moyenne non nulle (figure **XII**.16) c'est-à-dire que l'indice spectral obtenu est le plus petit des deux nombres β_ρ et β_v. Plus gênant encore, on arrive à la même conclusion en ce qui concerne β_{C_0}, alors que tout montrait jusqu'à présent que ce dernier fournissait toujours la valeur de l'indice spectral de la vitesse.
Étant donné que cet effet ne peut donc être attribué au terme $v_0^2 M_{\rho,\rho}$ dans l'expression (58) de la fonction d'autocorrélation A_C, il faut en chercher la cause dans les autres termes dépendant des fluctuations de densité, à savoir les termes corrélés $2\rho_0 M_{\rho v,v}$ et $M_{\rho v,\rho v}$. Ceci expliquerait également le fait que les cartes des centroïdes normalisés soient aussi affectées, puisque A_{C_0} comporte des termes corrélés semblables. On ne poussera cependant pas plus loin l'analyse dans le cadre de cette thèse.

XII.7 Une ébauche de conclusion critique

Ce chapitre nous a permis, à partir de la simulation de champs de densité et de vitesse possédant des propriétés statistiques bien déterminées, de construire des observables synthétiques sous forme de cubes de données PPV, d'où l'on a tiré des cartes de l'intensité intégrée et des deux types de centroïdes de vitesse. Il s'agissait de vérifier, en utilisant ces simulations, les résultats analytiques obtenus aux chapitres **X** et **XI** dans le cadre de transitions optiquement minces.
Les résultats obtenus confirment tout d'abord que l'indice spectral β_I de la carte d'intensité intégrée est le même que celui du champ de densité tridimensionnel β_ρ, lorsque la profondeur D du milieu le long de la ligne de visée est au moins de l'ordre de la plus grande échelle transverse considérée. Pour des profondeurs plus faibles, le spectre de puissance de l'émission intégrée montre deux pentes asymptotiques égales respectivement à β_ρ et $\beta_\rho - 1$ aux petites et aux grandes échelles, la transition ayant lieu à une fréquence spatiale caractéristique $k_D = 1/2D$. Cette propriété du spectre de puissance de l'émission intégrée peut être utilisée pour estimer la profondeur des nuages interstellaires et pour déduire les propriétés statistiques tridimensionnelles de milieux optiquement épais.
En ce qui concerne les cartes des centroïdes de vitesse, le résultat analytique du chapitre **XI**, correspondant à l'ordre non trivial le plus bas en fluctuations de densité, dont l'expression dans l'espace de Fourier revient à écrire l'égalité des trois indices spectraux β_C, β_{C_0} et β_v, est vérifié parfaitement lorsque ces fluctuations sont effectivement très faibles ($\sigma_\rho/\rho_0 \lesssim 0,015$ pour $|v_0|$=30 km s^{-1}) mais l'influence de la structure en

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

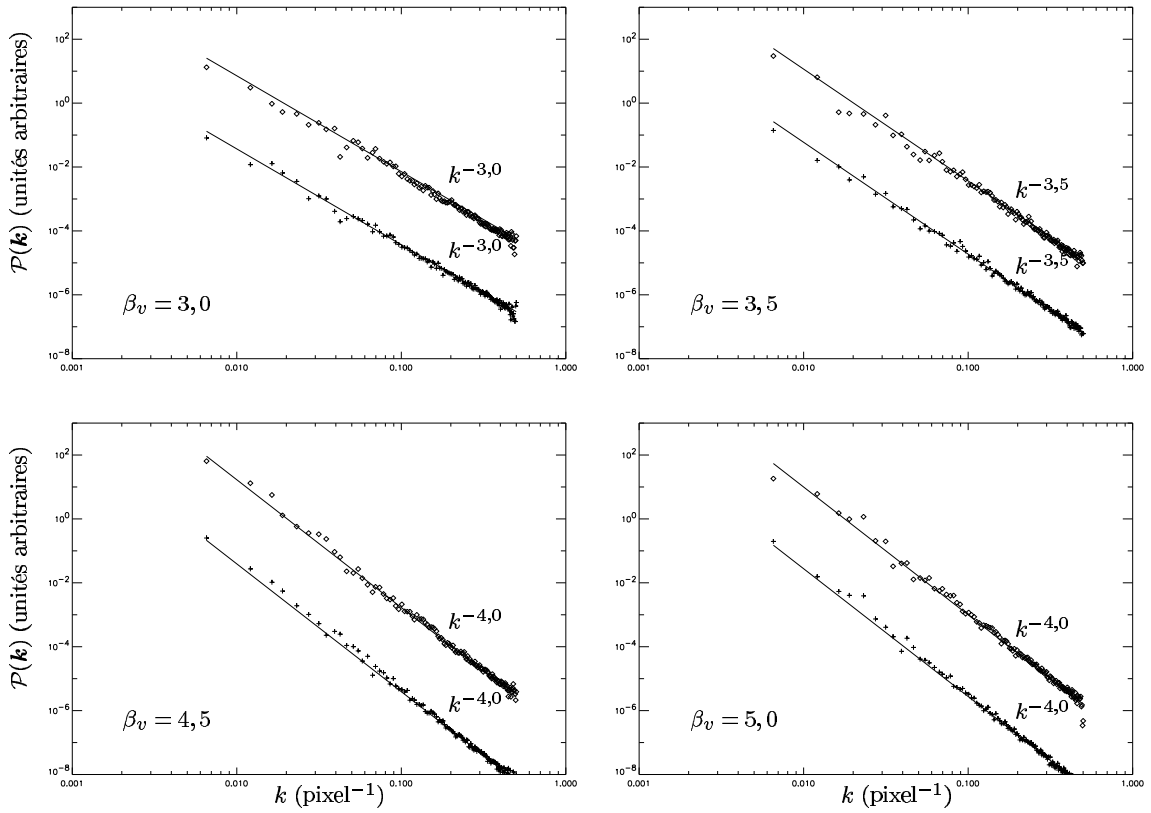

FIG. **XII.**20 – *Spectres de puissance, moyennés azimutalement, des cartes de centroïdes non normalisés (losanges) et normalisés (croix) obtenues à partir du cube de densité construit comme une exponentielle de champ brownien fractionnaire et de quatre cubes de vitesse. Les droites en trait plein représentent des lois de puissances dont les formes sont indiquées.*

densité dans les cartes des centroïdes non normalisés se fait de plus en plus sentir lorsque l'on sort de ce régime, que la vitesse moyenne v_0 est non nulle et que l'indice du spectre de puissance de la densité est plus faible que celui de la vitesse. Le spectre de puissance des cartes de centroïdes normalisés reste quant à lui représentatif de la structure cinématique. Cependant, quand les fluctuations de densité deviennent trop importantes ($\sigma_\rho/\rho_0 \gtrsim 1$), la fiabilité du centroïde normalisé s'effondre également, dans le cas où $\beta_\rho < \beta_v$, et ce quelle que soit la vitesse moyenne, ce qu'on interprète comme l'effet des termes corrélés apparaissant dans les formes analytiques des fonctions A_C et A_{C_0}.
Cette limitation des centroïdes de vitesse, y compris dans leur version normalisée, justifie *a posteriori* la recherche de nouvelles méthodes d'extraction des statistiques des champs de vitesse interstellaires. L'une d'elles, la méthode d'analyse des tranches en vitesse (VCA) de [Lazarian & Pogosyan, 2000], fait l'objet d'une étude numérique dans le chapitre suivant.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XIII

Analyse des tranches en vitesse

XIII.1 Introduction

Comme on vient de le voir, dans le cas de champs de densité présentant de fortes fluctuations, tels qu'on peut en rencontrer dans le milieu interstellaire et dans les simulations de turbulence compressible, les cartes de centroïdes de vitesse donnent une image biaisée de la structure cinématique des écoulements. La normalisation permet de s'affranchir de ce problème dans une certaine mesure, jusqu'à ce que les fluctuations de densité deviennent trop importantes. Dans ce cas de figure, il est nécessaire d'avoir recours à d'autres méthodes d'analyse des données permettant de retrouver le comportement statistique du champ de vitesse tridimensionnel.
Dans cette optique, Lazarian & Pogosyan [Lazarian & Pogosyan, 2000] ont proposé une méthode, justifiée analytiquement, se fondant sur l'étude des propriétés statistiques des cartes par canaux d'un cube de données PPV. Prenant l'exemple de la variation de l'indice spectral d'une carte d'intensité intégrée avec la profondeur du nuage observé, cette analyse cherche à estimer β_v à partir de la variation de l'indice spectral des cartes par canaux en fonction de leur largeur en vitesse. On peut comprendre cette approche en notant que, dans le cas incompressible, les structures apparaissant dans les cartes par canaux reflètent exactement la structure cinématique de l'écoulement. Cette remarque n'est pas anodine, car elle souligne qu'encore une fois, comme dans le cas des cartes de centroïdes de vitesse, c'est la limite de la densité uniforme qui montre la voie à suivre, ce qui invite nécessairement à la prudence quant à l'utilisation de la méthode d'analyse des tranches en vitesse. Pourtant, les travaux de [Lazarian *et al.*, 2001] et [Esquivel *et al.*, 2003] ont analysé des simulations de turbulence magnétohydrodynamique fortement compressibles à l'aide de cette méthode, et en ont semble-t-il confirmé les prédictions. Dans les deux cas, le spectre de puissance des champs de vitesse simulés a été modifié de façon à suivre une loi de puissance exacte, afin d'étendre artificiellement le domaine inertiel. Cette méthode préserve les phases en Fourier et donc l'essentiel de l'information physique, comme on le soulignera au chapitre **XVII**. D'autre part, un grand nombre de travaux récents sur des observations HI [Stanimirovic & Lazarian, 2001, Elmegreen *et al.*, 2001, Dickey *et al.*, 2001] sont fondés sur la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000].
L'objectif de ce chapitre, étant donné que nous disposons de simulations d'observations pour lesquelles les champs de densité et de vitesse ont des propriétés statistiques parfaitement connues, est de tester ces prédictions théoriques sur des cubes de densité et de vitesse de type brownien fractionnaire, dont les deux principaux avantages sont d'une part qu'ils possèdent intrinsèquement des spectres de puissance en loi de puissance et d'autre part qu'ils obéissent à des statistiques gaussiennes, ce qui constitue les hypothèses de départ du modèle de [Lazarian & Pogosyan, 2000].

XIII.2 Épaisseur des tranches en vitesse

XIII.2.a Définition

Les observables considérées dans la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] sont les tranches en vitesse dans le cube de données, qu'on définit comme l'intensité intégrée limitée à un certain domaine en vitesse,

$$S(\boldsymbol{X},u,\Delta u) = \int T_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{X},u)\mathrm{d}u \quad \text{où l'intégrale est prise entre } u-\frac{\Delta u}{2} \text{ et } u+\frac{\Delta u}{2}.$$

Cette expression est semblable à celle de la carte d'un canal en vitesse dont la bande passante serait une fonction porte de largeur Δu. En pratique, la construction de tranches en vitesse de différentes largeurs se

fait justement en sommant des cartes par canaux. L'hypothèse sous-jacente relative à la bande passante est implicitement admise, comme elle l'a été dans les chapitres **X**, **XI** et **XII**.
La largeur en vitesse Δu peut être comparée à la dispersion des vitesses dans le cube tridimensionnel, ce qui permet une classification des tranches en vitesse, en fonction de l'échelle. En effet, la dispersion des vitesses $\sigma(l)$ à une échelle l dépend de cette dernière au travers de la relation

$$\sigma(l) = \sigma_v \left(\frac{l}{L}\right)^{H_v} \quad \text{où } H_v \text{ est l'exposant de Hurst du champ de vitesse.} \tag{71}$$

Dans cette expression, σ_v est la dispersion des vitesses totale, sur l'ensemble du cube, laquelle est fixée à 3 km s^{-1} dans nos simulations, et L est la plus grande échelle tridimensionnelle.

XIII.2.b Tranches minces et tranches épaisses

Étant donnée cette relation, on dit qu'une tranche en vitesse de largeur Δu est mince à l'échelle l si la dispersion des vitesses $\sigma(l)$ est plus grande que Δu. Réciproquement, une tranche est dite épaisse à l'échelle l si $\sigma(l) < \Delta u$. Il est clair, d'après l'équation (71), que les tranches en vitesse ont plus de chances d'être minces aux grandes échelles qu'aux petites, puisque l'exposant de Hurst est strictement positif. En fait, la plus petite échelle l_m à laquelle une tranche en vitesse de largeur Δu fixée peut être considérée comme mince est donnée par ce qu'on appellera l'échelle limite du régime mince,

$$l_m = L\left(\frac{\Delta u}{\sigma_v}\right)^{1/H_v} \quad \text{à comparer avec les échelles caractéristiques des simulations.} \tag{72}$$

Dans le cas où une tranche en vitesse est mince à toutes les échelles présentes dans les simulations, c'est-à-dire si l_m est plus petite que l'échelle du pixel l_p, on dira que cette tranche est entièrement mince. Réciproquement, si la tranche considérée est épaisse à l'échelle L, elle le sera à toutes les échelles et on dira qu'elle est entièrement épaisse. Bien entendu, les tranches en vitesse présentent généralement, en fonction de l'échelle, une transition entre les deux régimes.
À partir de là, il est important de vérifier si nos simulations permettent d'explorer les deux régimes possibles. Étant donné que la largeur maximale Δu accessible est par construction plus grande que σ_v, il ne fait pas de doute qu'il existe, dans nos simulations, des tranches entièrement épaisses. L'accès aux tranches entièrement minces est, lui, plus problématique. Pour étudier ce problème, il convient de calculer la dispersion de vitesse $\sigma(l_p)$ à l'échelle du pixel, qui est donnée par l'équation (71), en notant que les simulations sont de taille $128 \times 128 \times 128$, de sorte que $L = 128 l_p$. Les courbes représentant l'évolution de la dispersion de vitesse avec l'échelle sont présentées sur la figure **XIII**.1, afin de faciliter la compréhension. Le cas particulier de l'exposant de Hurst nul, correspondant à un indice spectral β_v de la vitesse égal à 3, n'est pas représenté, car dans ce cas la dispersion de vitesse est évidemment constante en fonction de l'échelle et égale à σ_v.
Le régime entièrement mince est accessible à nos simulations à la seule condition que des tranches en vitesse de largeur Δu significative, c'est-à-dire plus grande que la résolution effective δu_{e}, soient elles-mêmes entièrement minces, ce qui revient à rechercher l'inégalité $\sigma(l_p) > \delta u_{\mathrm{e}}$. Avec les valeurs numériques choisies, soient $T = 100$ K et $\delta u = 0,25$ km s^{-1}, la résolution effective est égale à 2,16 km s^{-1} (voir le chapitre **XII**), et est représentée par une ligne en tirets sur la figure **XIII**.1. On voit que dans tous les cas où H_v n'est pas nul, la dispersion de vitesse à l'échelle du pixel est plus petite que la résolution effective, ce qui signifie qu'il n'existe alors pas de tranches en vitesse entièrement minces. La position de l'échelle limite du régime mince, représentée sur la figure **XIII**.1 par des pointillés, montre cependant que les tranches en vitesse de largeur comparable à la résolution effective présentent une transition entre les deux régimes. Seul le cas $H_v = 0$, néanmoins, permet d'accéder à des tranches entièrement minces. L'accès aux tranches en vitesse entièrement minces pour des valeurs non nulles de l'exposant de Hurst demanderait une augmentation de la dispersion de vitesse ou une diminution de la température cinétique. La première solution est nécessaire si l'on souhaite conserver la même résolution effective. Cependant, l'augmentation de σ_v amène une augmentation du nombre de canaux dans le cube de données, la résolution δu étant constante, et donc un bruit dit de *shot noise* plus important, comme on le verra plus tard.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

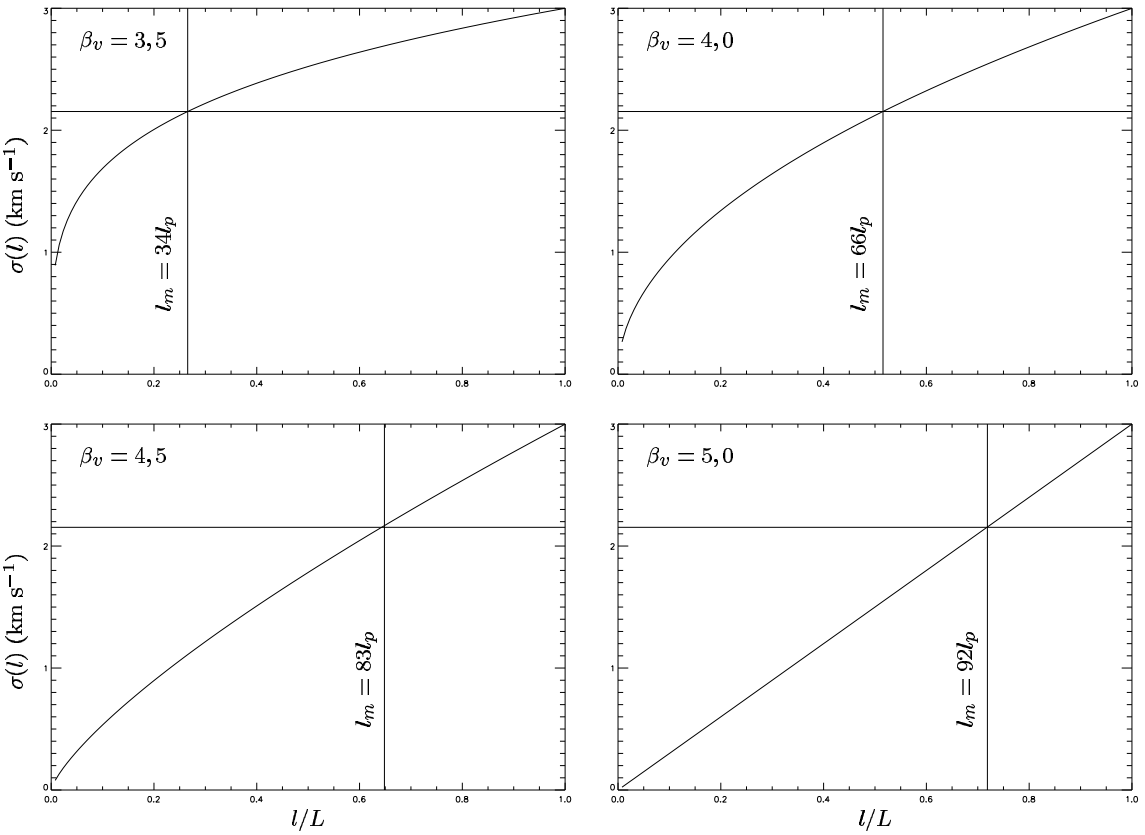

FIG. **XIII**.1 – *Courbes représentant la dispersion de vitesse en fonction de l'échelle, suivant la valeur de l'indice spectral β_v de la vitesse, dont on rappelle qu'il est lié à l'exposant de Hurst H_v par $\beta_v = 2H_v + 3$ dans le cas tridimensionnel. La résolution effective δu_e est indiquée par les tirets, et la position de l'échelle limite du régime mince l_m par des pointillés. Sa valeur est notée verticalement, en unités de l'échelle d'un pixel l_p.*

XIII.3 Étude numérique des tranches en vitesse

XIII.3.a Les prédictions de l'analyse des tranches en vitesse

D'après [Lazarian & Pogosyan, 2000], les tranches en vitesse, qui sont donc des cartes bidimensionnelles puisqu'elles sont intégrées sur la vitesse, possèdent, lorsqu'elles sont entièrement minces, un spectre de puissance dont l'indice β_m est donné par une relation linéaire dépendant uniquement de l'indice spectral de la vitesse,

$$\beta_m = 3 + \frac{3-\beta_v}{2} \quad \text{soit} \quad H_m = \frac{1-H_v}{2} \quad \text{en termes d'exposants de Hurst.} \tag{73}$$

De même, les tranches en vitesse entièrement épaisses sont caractérisées par un indice spectral β_e dont l'expression est très similaire à celle de β_m,

$$\beta_e = 3 - \frac{3-\beta_v}{2} \quad \text{soit} \quad H_e = \frac{1+H_v}{2} \quad \text{en termes d'exposants de Hurst.} \tag{74}$$

Étant donné que la tranche en vitesse dont la largeur couvre toute l'étendue de la distribution des vitesses n'est autre que l'intensité intégrée, dont on a vu au **XII.5** que son indice spectral est égal à celui de la densité, il apparaît que le régime des tranches en vitesse entièrement épaisses est un régime de transition entre le régime entièrement mince et ce qu'on convient d'appeler régime "très épais", pour lequel une partie importante de l'émission est intégrée, l'indice spectral tendant alors vers celui du champ de densité tridimensionnel β_ρ.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XIII.3.b Spectres de puissance observés

Pour tester les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000], on a calculé les indices spectraux de tranches en vitesse de différentes épaisseurs, extraites des cubes de données simulés au chapitre **XII**. On rappelle que la température cinétique utilisée est $T = 100$ K. Les spectres de puissance de certaines de ces tranches sont présentés sur la figure **XIII**.2. Chaque graphe correspond à un cube de données particulier, caractérisé par l'ensemble des deux indices spectraux β_ρ et β_v et montre, pour ce cube, le spectre de puissance de quatre tranches en vitesse dont les largeurs vont de $\Delta u = 1,25$ km s^{-1} à $\Delta u = 10$ km s^{-1}.
Dans chaque cas, les droites représentent les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] pour les régimes mince et épais décrits respectivement par les équations (73) et (74), et le petit trait vertical indique l'échelle de transition l_m donnée par (72). La tranche en vitesse considérée est alors mince aux échelles situées à gauche de cette marque[1], et épaisse aux échelles situées à droite. Les spectres de puissance montrés sur la figure **XIII**.2 sont en relativement bon accord avec les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000]. On observe des spectres de puissance courbés, avec une rupture de pente aux alentours de l_m. Cependant, la faible plage d'échelles sur laquelle les tranches en vitesse sont minces rend la comparaison avec les prédictions difficile. De plus, les spectres de puissance des tranches en vitesse pour β_v plus grand que 4,5 s'éloignent de la prédiction de [Lazarian & Pogosyan, 2000] aux petites échelles, car ces tranches passent dans le régime très épais à ces échelles. Ce comportement est en effet corrélé à la valeur de β_ρ, et ce d'autant plus que β_ρ diffère plus fortement de β_v. Une autre particularité de la figure **XIII**.2 est l'augmentation de la puissance aux petites échelles pour $\beta_v = 3$, due au *shot noise*.

XIII.3.c Effet de *shot noise* dû à la taille finie

Le calcul des cubes de données à partir de champs tridimensionnels de taille finie amène une augmentation artificielle des fluctuations à haute fréquence dans les cartes par canaux [Lazarian *et al.*, 2001, Brunt & Heyer, 2002, Esquivel *et al.*, 2003]. En effet, comme remarqué par [Esquivel *et al.*, 2003], la taille limitée des lignes de visée simulées introduit des variations brusques de l'émission d'un canal à l'autre, et implique l'existence de canaux presque vides. Cet effet est d'autant plus important que la résolution spectrale effective est meilleure, c'est-à-dire que $\delta u_{\rm e}$ est plus petit. L'aplatissement à haute fréquence, caractéristique du bruit que représentent ces fluctuations de l'émission, est clairement visible sur les spectres de puissance des tranches en vitesse dans le cas $\beta_v = 3$ (figure **XIII**.2). Comme attendu, l'amplitude de cette composante à haute fréquence augmente quand la taille des champs tridimensionnels diminue. Cet effet, qu'on ne montre pas ici mais qui a été vérifié, affecte de manière importante les spectres de puissance des canaux simulés.
Une solution pour réduire les effets du *shot noise* est d'appliquer un lissage gaussien aux spectres simulés, ce qui revient à augmenter l'élargissement thermique. Mais un tel lissage augmente également la valeur de δu_e, ce qui réduit nécessairement le domaine d'échelles minces accessibles. Un exemple de l'effet de la température cinétique sur l'analyse des tranches en vitesse est montré sur la figure **XIII**.3, où sont représentés les spectres de puissance de tranches en vitesse d'épaisseur Δu égale à la résolution effective $\delta u_{\rm e}$, pour des cubes de données correspondant d'une part à $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$, d'autre part à $\beta_\rho = 3$ et $\beta_v = 4,5$, calculés à différentes températures entre $T = 1$ K et $T = 200$ K. Le cas $\beta_v = 3$ est particulièrement intéressant car les tranches en vitesse sont minces à toutes les échelles dès lors que $\Delta u \leqslant \sigma_v$, ce qui est le cas ici puisque $\delta u_{\rm e} \simeq \sigma_v$ pour la plus haute température considérée $T = 200$ K. Ceci permet d'étudier séparément les effets de lissage gaussien sur la réduction du *shot noise* et sur la minceur des tranches en vitesse. Sur la figure **XIII**.3, le panneau de gauche montre que le lissage gaussien réduit significativement le *shot noise*. En effet, l'augmentation de la température cinétique provoque un affaiblissement de la composante haute fréquence associée au bruit, et donc un raidissement du spectre de puissance. Il semble cependant que même à la température la plus élevée, $T = 200$ K, le *shot noise* ne soit pas complètement nettoyé. À plus haute température, la condition de minceur des tranches en vitesses[2] $\delta u_{\rm e} \leqslant \sigma_v$ ne serait de son côté plus remplie. Le panneau de droite illustre quant à lui l'effet du lissage gaussien à la fois sur le *shot noise* et sur l'épaisseur de la tranche en vitesse. À basse température (T =1 K), la tranche est mince à presque toutes les échelles, mais on voit clairement l'effet du *shot noise* sur les composantes à haute fréquence spatiale. Lorsque la température augmente, l'amplitude du *shot noise* et la plage d'échelles pour

[1] Quand celle-ci est absente, c'est que les tranches en vitesse sont entièrement épaisses.
[2] On est ici dans le régime entièrement mince, car avec $\beta_v = 3$, la dispersion de vitesse est indépendante de l'échelle.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

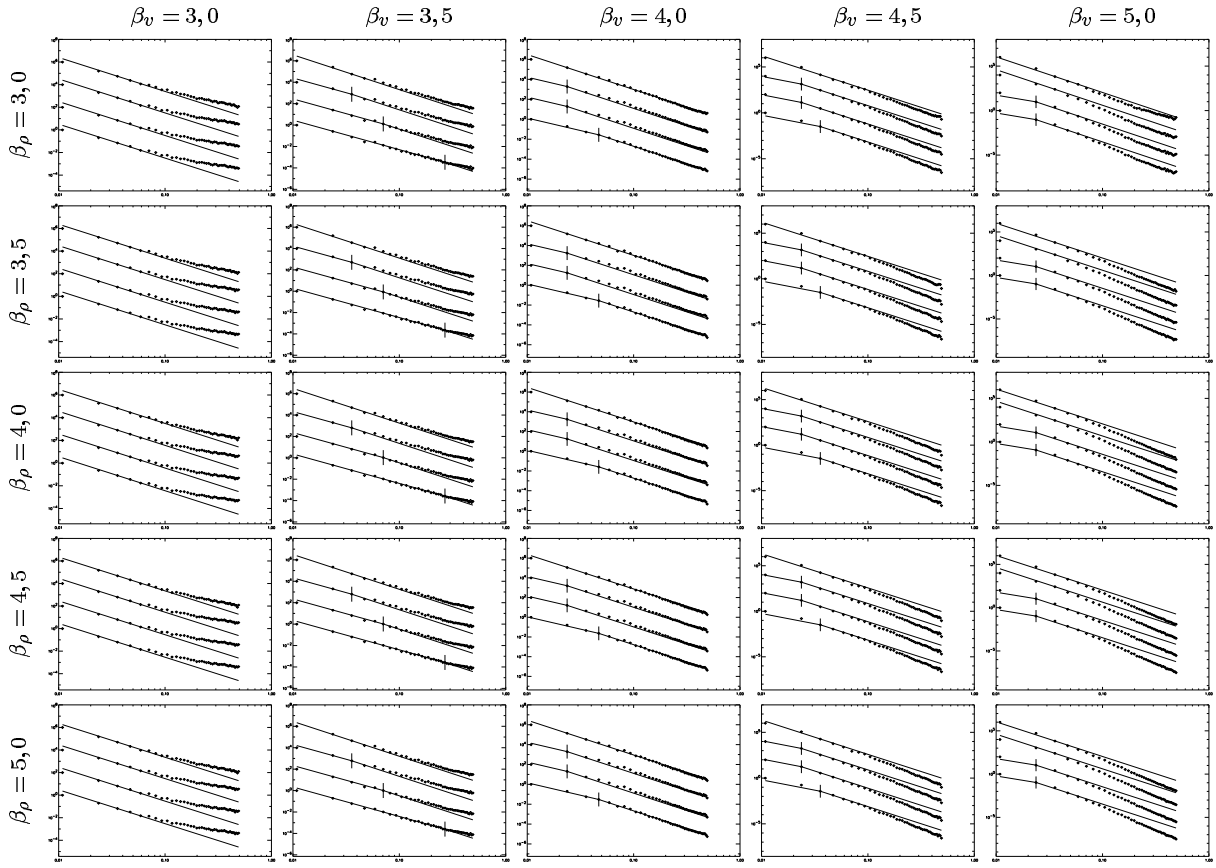

FIG. **XIII**.2 – *Spectres de puissance, moyennés azimutalement, de tranches en vitesse extraites de chacun des 25 cubes de données construits à partir de champs de densité et de vitesse de type brownien fractionnaire. Sur chaque figure, les points représentent les spectres de puissance de quatre tranches en vitesse d'épaisseurs respectives* $\Delta u = 1,25$ km s^{-1}, $\Delta u = 1,75$ km s^{-1}, $\Delta u = 2,25$ km s^{-1} *et* $\Delta u = 10$ km s^{-1} *(de bas en haut). Les droites correspondent aux prédictions de l'analyse des tranches en vitesse, ajustées de manière à se croiser à l'échelle de transition* l_m*, repérée par un trait vertical.*

lesquelles la tranche en vitesse est mince décroissent toutes les deux, comme on s'y attendait. À haute température, le *shot noise* est complètement nettoyé mais la tranche en vitesse est entièrement épaisse. On comprend donc que l'utilisation d'un lissage gaussien impose nécessairement un compromis entre la réduction du *shot noise* et la minceur des tranches en vitesse. En ce qui concerne nos simulations, les spectres de puissance de la figure **XIII**.2 montrent que le *shot noise* est significatif seulement pour $\beta_v = 3$, ce qui indique que les paramètres choisis, à savoir σ_v, T et δu, forment un bon compromis, pour la plupart des valeurs de l'indice spectral de la vitesse β_v, entre la réduction du *shot noise* et l'accessibilité du régime mince des tranches en vitesse.

XIII.3.d Analyse des résultats obtenus

La méthode d'analyse des tranches en vitesse proposée par [Lazarian & Pogosyan, 2000] pour déterminer les indices spectraux β_ρ et β_v consiste à étudier l'indice spectral β_s des tranches en vitesse en fonction de l'épaisseur Δu de celles-ci. D'après les prédictions analytiques, la courbe de β_s en fonction de Δu doit avoir deux limites aux petites valeurs et aux grandes valeurs de Δu, correspondant respectivement aux régimes entièrement mince et très épais, et permettant de déterminer β_ρ et β_v.
Nous avons fait cette analyse des tranches en vitesse sur nos simulations, et les résultats sont présentés sur la figure **XIII**.4, qui montre les variations de l'indice β_s, déterminé par un ajustement du spectre de puissance, moyenné azimutalement, sur l'ensemble des nombres d'onde k, en fonction de l'épaisseur en vitesse Δu. Les courbes, une pour chaque combinaison (β_ρ, β_v) des indices spectraux des champs tridimensionnels, sont

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

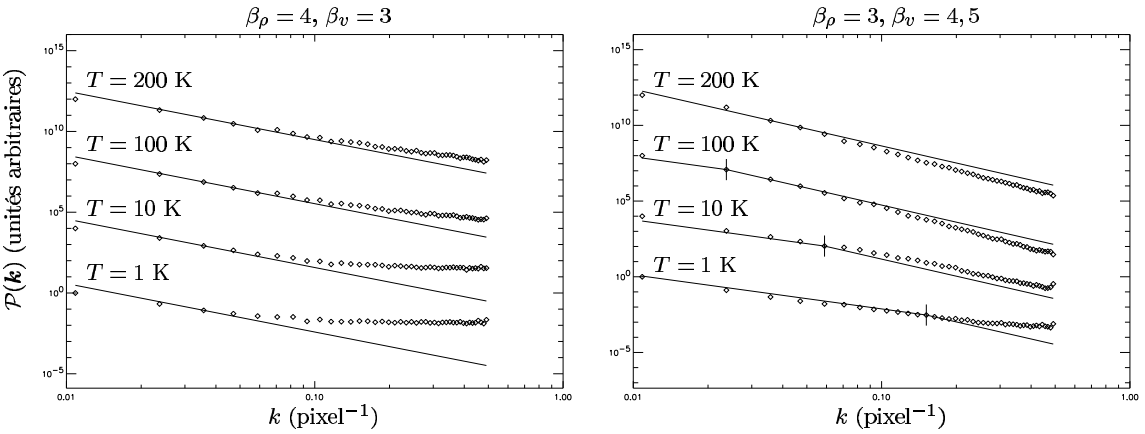

FIG. **XIII**.3 – *Spectres de puissance, moyennés azimutalement, de tranches en vitesse de largeur $\Delta u = \delta u_{\mathrm{e}}$ pour quatre températures cinétiques. La figure de gauche correspond au cas $\beta_\rho = 4$ et $\beta_v = 3$, la figure de droite au cas $\beta_\rho = 3$ et $\beta_v = 4,5$. Les droites représentent les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] dans les régimes d'échelles minces et épaisses, la transition étant marquée par le trait vertical.*

regroupées par valeur de β_v. On distingue bien entendu le régime entièrement mince, pour lequel la tranche en vitesse est mince à toutes les échelles, soit $\Delta u \leqslant \sigma(l_p)$, le régime entièrement épais, déterminé par la relation $\Delta u \geqslant \sigma_v$, et le régime très épais, caractérisé par l'égalité $\beta_s = \beta_\rho$, qu'on observe typiquement pour $\Delta u \geqslant 20$ km s^{-1}. On indique également le régime transitoire pour lequel la tranche en vitesse est mince aux grandes échelles et épaisse aux petites échelles. Les tirets marquent quant à eux la position de la résolution spectrale effective δu_{e} de nos simulations. Le plateau observé à gauche de cette dernière séparation reflète le fait que les structures en vitesse plus petites que la résolution effective ne peuvent pas être résolues.

Dans la limite des grandes épaisseurs en vitesse, on retrouve le fait que les indices spectraux des tranches en vitesse convergent vers la valeur de β_ρ. Inversement, aux petites épaisseurs en vitesse, on voit qu'en accord avec [Lazarian & Pogosyan, 2000], le spectre de puissance des tranches en vitesses devient indépendant du champ de densité, sauf dans les cas où $\beta_v \geqslant 4,5$, comme expliqué au paragraphe suivant. La forte corrélation entre le champ de vitesse tridimensionnel et les cartes par canaux était déjà visible sur la figure **XII**.5, où l'on voit notamment que la structure des cartes par canaux est dominée par le champ de vitesse puisqu'elle varie très peu avec l'indice spectral du champ de densité.

Sur la figure **XIII**.4, on remarque que les courbes correspondant à $\beta_v = 3$ décroissent aux petites épaisseurs en vitesse Δu, jusqu'à une valeur de 1,8 environ. Puisque l'indice spectral β_s est calculé sur l'ensemble des valeurs de k, cet effet peut être entièrement attribué au *shot noise*, dont l'amplitude est importante dans ce cas, comme on le voit sur la figure **XIII**.3. Pour $\beta_v = 3,5$, l'effet du *shot noise* est réduit, et dans ce cas, les courbes sont en relativement bon accord avec les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000]. Il existe un plateau significatif dans le régime épais, à une valeur proche de la valeur prédite β_e, donnée par l'équation (74). De plus, la transition marquée par $\Delta u = \delta u_{\mathrm{e}}$ n'est pas très éloignée du régime des tranches en vitesse entièrement minces, et il est donc cohérent de trouver, pour une tranche de cette épaisseur en vitesse, un indice spectral β_s proche de la valeur prédite β_m. Pour les valeurs plus grandes de β_v, l'accord avec [Lazarian & Pogosyan, 2000] n'est pas clair. Dans les trois cas restants, en effet, on peut sans problème négliger le *shot noise* du fait du lissage gaussien, mais on est en revanche très loin d'avoir des tranches en vitesse entièrement minces, ce qui ne permet pas de tester les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] dans le régime mince. D'autre part, on observe un semblant de plateau au sein du régime épais, en tous cas pour $\beta_v = 4$ et $\beta_v = 4,5$, mais pas à la valeur β_e prédite. Ceci est dû au fait que les plus petites échelles deviennent en fait très épaisses. C'est également pour cette dernière raison que, dans les cas $\beta_v = 4,5$ et $\beta_v = 5$, les courbes dépendent de β_ρ et ne convergent pas toutes vers la même valeur aux petites largeurs en vitesse.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

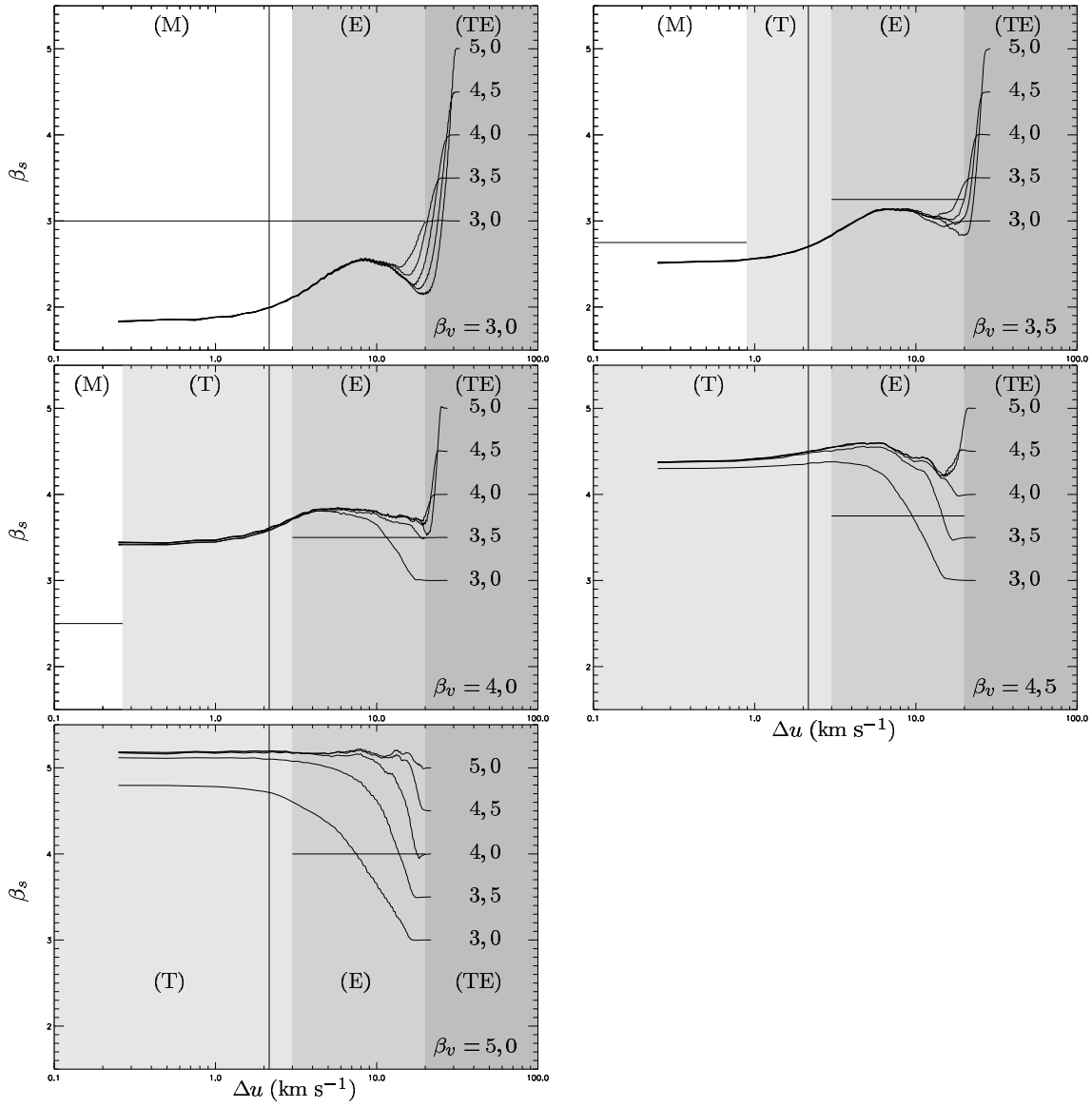

FIG. **XIII.**4 – *Indice spectral β_s des tranches en vitesse extraites des différents cubes de données, en fonction de la largeur Δu. Les courbes sont regroupées en fonction de l'indice spectral β_v, indiqué en bas à droite de chaque figure. Les zones grisées indiquent les domaines correspondant aux régimes mince (M), de transition (T), épais (E) et très épais (TE). Les tirets verticaux indiquent la résolution en vitesse effective, et les pointillés horizontaux représentent les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000] dans les régimes mince et épais, respectivement $\beta_s = \beta_m$ et $\beta_s = \beta_e$. Chaque courbe correspond à une valeur de β_ρ, indiquée en regard.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XIII.4 Discussion et conclusions

Du fait du lissage gaussien utilisé, l'effet du *shot noise* sur nos simulations est relativement limité, à part dans le cas extrême $\beta_v = 3$. Cependant, ceci se fait au prix d'un rétrécissement du régime mince accessible, car on a vu que précisément seul le cas $\beta_v = 3$ permettait d'observer des tranches en vitesse entièrement minces significatives, c'est-à-dire telles que $\Delta u \geqslant \delta u_{\rm e}$.
Dans ces conditions, l'interprétation des courbes montrant l'évolution de l'indice spectral β_s des tranches en vitesse en fonction de la largeur Δu de celles-ci (figure **XIII**.4) est particulièrement ambiguë, ce qui rend la détermination de l'indice spectral du champ de vitesse très difficile par le biais du régime mince. D'un autre côté, le spectre de puissance de tranches en vitesse entièrement épaisses peut en fait dépendre de β_ρ, ce qui rend également difficile la déduction de β_v à partir de l'indice spectral de ces tranches suivant l'équation (74). Il s'avère donc qu'en raison de ces différentes limitations, il est prématuré de conclure que la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut effectivement être utilisée pour déterminer les propriétés statistiques du champ de vitesse tridimensionnel.
Ce qu'on peut toutefois remarquer, c'est qu'une limite pratique de la méthode de Lazarian et Pogosyan est qu'elle requiert de savoir si oui ou non le régime entièrement mince est atteint, pour une observation donnée. Si un plateau asymptotique significatif est trouvé aux petites épaisseurs Δu sur les courbes de β_s en fonction de Δu, on pourrait penser que c'est le cas. Mais malheureusement, comme on le voit sur la figure **XIII**.4, un tel plateau peut être observé également dans le régime épais, et amener une estimation fausse de β_v. De plus, le seul moyen d'estimer la position de l'échelle de transition l_m entre les deux régimes pour une tranche donnée passe par l'équation (72), qui nécessite justement la connaissance de β_v. Par suite, il n'y a pas de moyen indépendant de déterminer si le régime des tranches entièrement minces est effectivement atteint. Ceci étant dit, la détermination de β_v dans le petit nuage de Magellan (SMC) par [Stanimirovic & Lazarian, 2001], faite en utilisant la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut être mise en doute, car leurs observations ne semblent pas leur permettre d'atteindre le régime asymptotique mince.
À ce sujet, il est important d'estimer dans quelles conditions la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut être utilisée sur des observations réelles, pour un nuage HI à haute latitude, par exemple. On a montré que la plus petite épaisseur en vitesse pertinente pour cette analyse est $\Delta u = \delta u_{\rm e} \simeq \sqrt{8\ln 2}\,\sigma_{\rm th}$, en considèrant ici que la résolution spectrale effective est dominée par l'élargissement thermique, ce qui est clairement le cas à $T = 100$ K. Pour estimer β_v en utilisant la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000], on doit pouvoir observer un plateau aux petites largeurs en vitesse dans la courbe de β_s en fonction de Δu, ce qui nécessite des tranches en vitesse entièrement minces sur une plage relativement importante de largeurs Δu, disons pour $\delta u_{\rm e} \leqslant \Delta u \leqslant 2\,\delta u_{\rm e}$. On se souvient qu'une tranche en vitesse de largeur donnée Δu est mince aux échelles $l \geqslant l_m$ où l'échelle limite l_m est fournie par l'équation (72). Donc, pour évaluer sur quelles échelles la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] peut être utilisée pour déduire β_v, il faut estimer cette échelle limite l_m pour une tranche en vitesse d'épaisseur $\Delta u = 2\,\delta u_{\rm e}$.
Comme montré par [Miville-Deschênes *et al.*, 2003a], le spectre d'énergie du HI est compatible avec la cascade d'énergie de Kolmogorov [Kolmogorov, 1941], selon laquelle la dispersion de vitesse en fonction de l'échelle est de la forme $\sigma(l) = A\,l^{1/3}$. Le facteur de normalisation A peut être estimé à partir d'observations du HI à haute latitude, comme dans [Joncas *et al.*, 1992], où la dispersion de vitesse interne à une échelle de 1 pc est de l'ordre de 4 km s^{-1}. Dans ces conditions, l'échelle limite du régime mince pour une tranche d'épaisseur $\Delta u = 2\,\delta u_{\rm e}$ est donnée par

$$\sigma(l_m) = 2\delta u_{\rm e} = 2\sqrt{8\ln 2}\,\sigma_{\rm th} \quad \text{et donc} \quad \frac{l_m}{1\ \text{pc}} \simeq 1,223.10^{-3}\left(\frac{T}{1\ \text{K}}\right)^{3/2}\left(\frac{m}{1\ \text{u.m.a.}}\right)^{-3/2}$$

Si l'on considère le gaz du milieu neutre froid (CNM) à $T = 100$ K, la plus petite échelle mince l_m pour un nuage à une distance de 100 pc est alors environ égale à $42'$, et est donc notablement supérieure à la résolution angulaire à 21 cm du radio interféromètre du Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO), qui est de l'ordre de la minute d'arc. De plus, si l'on considère la présence de gaz HI plus chaud (Warm Neutral Medium) dont la température est comprise entre $T = 5000$ K et $T = 8000$ K, ou celle de gaz thermiquement instable à $T \sim 1000$ K, l'élargissement thermique plus important augmente la valeur de l'échelle limite et rend la détermination de β_v à partir de la méthode de [Lazarian & Pogosyan, 2000] possible uniquement sur des échelles plus grandes que quelques degrés, du moins pour le HI du voisinage

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

solaire.
En conclusion, on voit qu'en raison de la résolution limitée de nos simulations, nous ne sommes pas en mesure de confirmer les prédictions de [Lazarian & Pogosyan, 2000], mais nous pouvons d'ores et déjà affirmer que la méthode d'analyse des tranches en vitesse, en tant qu'outil permettant de remonter aux propriétés statistiques du champ de vitesse tridimensionnel, est dans la pratique difficilement applicable aux observations réelles. Il semble, malgré les défauts remarqués au chapitre **XII**, que la méthode fondée sur les centroïdes de vitesse soit mieux adaptée à la détermination du spectre de puissance de la vitesse, en particulier parce qu'elle ne dépend pas de la température du gaz, et qu'elle permet la détermination des statistiques de la vitesse jusqu'à des échelles comparables à la résolution angulaire des observations, tant que les fluctuations de densité restent faibles.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

QUATRIÈME PARTIE

Filtrage interférométrique des structures

Elliot : How do you explain school to a higher intelligence ?
"E.T. the extraterrestrial" (Steven Spielberg)

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XIV

L'interférométrie en radioastronomie

XIV.1 La course à la résolution angulaire

L'existence d'un rayonnement radio en provenance de sources astronomiques, c'est-à-dire à des longueurs d'onde supérieures à 1 mm environ, correspondant à des fréquences inférieures à 300 GHz, est connue depuis les travaux pionniers de Jansky en 1933 [Jansky, 1933] et de Reber en 1940 [Reber, 1940]. On dispose, depuis cette époque et le développement du radar lors de la seconde guerre mondiale, d'antennes permettant de détecter ce rayonnement radio cosmique afin d'en tirer des informations quant à la structure des sources astrophysiques. De manière générale, ces antennes - ou radiotéléscopes - sont destinées à collecter le rayonnement provenant d'une direction donnée du ciel, une chaîne de réception en aval permettant la transformation du signal électromagnétique en signal électrique, puis l'amplification et le traitement de ce dernier à des fins d'analyse.
Cependant, dans le cas d'une antenne unique, la résolution angulaire - caractérisée par le rapport de la longueur d'onde λ du rayonnement au diamètre d de l'ouverture - est bien souvent insuffisante pour l'étude correcte des sources. En effet, dans les conditions optimales, une antenne de 100 m de diamètre, telle que celle d'Effelsberg, utilisée à 5 mm de longueur d'onde, offre une résolution angulaire maximale de l'ordre de 13 secondes d'arc, alors que la limite de diffraction des plus grands téléscopes optiques ($d \sim 10$ m) est de l'ordre du centième de seconde d'arc. Même en tenant compte de la turbulence atmosphérique dont l'effet de perturbation sur la forme du front d'onde est beaucoup plus marqué en optique qu'en radio, et sans système actif de correction de la forme des miroirs, la résolution angulaire des téléscopes optiques est couramment meilleure qu'une seconde d'arc.
Or, l'obtention de grandes résolutions angulaires dans le domaine radio est essentielle à plus d'un titre. Il s'agit d'une part de permettre l'identification des radiosources avec des objets déjà connus dans d'autres domaines de longueurs d'onde, et mieux encore, d'établir des cartes de sources étendues pour pouvoir comparer, avec une même résolution, les distributions spatiales de l'émission dans les différentes parties du spectre électromagnétique, afin d'affiner la compréhension des phénomènes physiques dont ces objets sont le siège. D'autre part, l'amélioration de la résolution angulaire doit permettre l'établissement de systèmes de référence astrométriques de plus en plus précis. Actuellement, les observations de quasars lointains en radio permettent, grâce aux techniques d'interférométrie à très longue base, d'obtenir des résolutions allant jusqu'à 10^{-4} seconde d'arc, soit un ordre de grandeur de mieux que les observations en optique du satellite astrométrique Hipparcos[1].
Ce renversement de la hiérarchie des résolutions angulaires accessibles aux domaines optique et radio témoigne de l'essor exceptionnel de l'interférométrie radioastronomique. C'est en associant plusieurs antennes au sein d'un réseau appelé interféromètre, et en corrélant les signaux reçus par chacune de ces antennes, qu'on peut atteindre ces résolutions angulaires, comme on le verra dans la suite. La rapidité avec laquelle ces techniques se sont développées dans le domaine radio, par rapport aux domaines infrarouge et visible, est due en particulier à la facilité avec laquelle les signaux radio peuvent être traités électroniquement, ainsi qu'à l'effet moindre des turbulences atmosphériques sur le rayonnement de grande longueur d'onde.

XIV.2 Un bref historique

Le développement d'interféromètres radio remonte aux premières années suivant la seconde guerre mondiale. En 1946, Ryle et Vonberg [Ryle & Vonberg, 1946] construisirent un équivalent de l'interféromètre de Michelson à l'aide de deux antennes fonctionnant à 175 MHz. Parallèlement, des interféromètres pla-

[1] Remarquons qu'en ce qui concerne l'astrométrie interférométrique, c'est plus la précision sur la phase que la résolution angulaire qui joue.

cés le long des côtes et utilisant la réflexion des rayons lumineux à la surface de la mer ont permis d'enregistrer des premiers résultats scientifiques notables, comme la découverte de la radiosource Cygnus A [Hey *et al.*, 1946]. D'autres sources importantes furent ensuite observées à l'aide d'interféromètres à deux éléments, puis identifiées à des galaxies ou à des restes de supernovæ. À cette époque, la stabilité des chaînes de réception ne permettait cependant généralement pas de remonter aux distributions spatiales de brillance des sources, ce qui est théoriquement faisable, comme on le verra dans la suite. Les observateurs modélisaient alors ces sources par des distributions symétriques, en déduisant la largeur angulaire de l'objet à un niveau de brillance donné à partir des variations d'amplitude des franges d'interférence avec l'espacement des antennes, sans utiliser l'information de phase.

XIV.2.a Diverses méthodes de corrélation

La manière dont les signaux sont corrélés a évolué au cours du temps. Aux débuts de l'interférométrie radio, la technique de corrélation était une simple copie du phénomène d'interférences déjà bien connu en optique, puisque les signaux étaient simplement additionnés puis transmis à un détecteur quadratique, le signal final étant donc de la forme $u_1^2+u_2^2+2u_1u_2$, où u_1 et u_2 sont les signaux en sortie des antennes. Les variations de gain des amplificateurs placés au niveau de celles-ci, qui représentent par ailleurs des sources de bruit potentiellement importantes, pouvaient alors complètement noyer l'information contenue dans le terme croisé. La mise en œuvre, à partir des années 1950, de la technique du *phase switching*, consistant à déphaser régulièrement l'un des deux signaux de π avant de l'additionner à l'autre signal, puis à prendre la différence entre les signaux $(u_1-u_2)^2$ et $(u_1+u_2)^2$ obtenus, ne laissant subsister que le terme croisé, a permis de s'affranchir de ce problème, car les bruits des amplificateurs sont non corrélés. En définitive, on est passé d'interféromètres additifs à des interféromètres multiplicatifs. Aujourd'hui, les corrélateurs permettant de faire le produit des signaux u_1 et u_2 sont essentiellement numériques, à l'exception du mélange avec le signal de l'oscillateur local, dont on parlera plus loin.

XIV.2.b Réseaux d'antennes et synthèse d'ouverture

La fin des années 1950 et le début de la décennie suivante ont vu le développement de réseaux d'antennes dédiés à la détermination précise des positions angulaires de radiosources, en particulier l'interféromètre développé par Mills, dont les éléments étaient répartis le long des deux bras d'une croix, et l'interféromètre de Cambridge, constitué de quatre antennes placées aux coins d'un rectangle, et qui fut notamment utilisé pour établir le catalogue 3C.
C'est au tournant des années 1970 que l'intérêt a commencé à se porter plus franchement sur la structure détaillée des sources de rayonnement radio. La nécessité de disposer d'une résolution suffisante pour cartographier ces objets imposa d'abord de travailler à des longueurs d'onde centimétriques et de construire des instruments permettant de faire varier les positions relatives des antennes le plus librement possible dans le plan, tels que l'interféromètre d'Owens valley. Mais c'est en utilisant la rotation terrestre comme moyen de faire varier la ligne de base entre deux antennes qu'il a véritablement été possible, pour la première fois, de cartographier des radiosources avec une grande résolution [Ryle *et al.*, 1965]. Cette méthode de synthèse d'ouverture était connue depuis plusieurs années, mais le succès des cartographies de Cygnus A et Cassiopeia A en démontra brillamment le potentiel, amenant les instruments existants à s'y adapter, et incitant les organismes de recherche à construire de nouveaux grands réseaux d'antennes la mettant à profit. C'est ainsi que virent le jour, notamment, l'interféromètre de Westerbork et le VLA, ainsi que, dans le domaine millimétrique, l'interféromètre du plateau de Bure.

XIV.2.c L'interférométrie VLBI

L'obtention de résolutions angulaires encore meilleures a alors requis le développement des techniques d'interférométrie à très longue base (VLBI), dont le principe consiste à séparer la réception des signaux de leur corrélation : on enregistre les signaux au niveau de chaque antenne sur un système de sauvegarde adapté, et les données sont corrélées ultérieurement. Simple en soi, cette méthode nécessite un certain nombre de prouesses techniques, notamment au niveau de la bande passante utilisable - les premiers essais étaient limités à 2 kHz, en raison de la fréquence intermédiaire très basse imposée par le système d'enregistrement - et de la précision des oscillateurs locaux. En contrepartie, elle permet d'utiliser des

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

lignes de base longues de plusieurs milliers de kilomètres, permettant des résolutions meilleures que la milliseconde d'arc. La combinaison de plus de deux instruments en interférométrie VLBI, à partir du milieu des années 1970, a permis la cartographie de sources éloignées, et la découverte de vitesses apparemment supraluminiques dans les quasars [Pearson *et al.*, 1981]. C'est également grâce aux techniques VLBI que des progrès essentiels en astrométrie et en géodésie ont été accomplis.

XIV.3 Antennes radioastronomiques

XIV.3.a Propagation d'un signal radioastronomique

Nous allons aborder maintenant les diverses étapes de l'observation radiointerférométrique, de façon à établir la relation qui existe entre la distribution de brillance dans le plan du ciel et les données instrumentales accessibles à l'observateur.

Considérons un phénomène physique en un point $\boldsymbol{x}_0$ d'une source astronomique, donnant naissance à un champ électrique variable $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_0, t)$. De manière générale, les variations de ce champ sont aléatoires, à la fois en termes d'amplitude, de phase et de polarisation. L'application des équations de Maxwell montre alors qu'une onde électromagnétique se propage dans l'espace, et peut ainsi être observée à la position $\boldsymbol{x}$ par un instrument approprié, soit une antenne dans le domaine des radiofréquences. La propagation du champ électromagnétique s'interprète à l'aide du principe de Huygens-Fresnel, qu'on peut résumer ainsi [Born & Wolf, 1959] : L'onde électromagnétique se propage de proche en proche, chaque élément de surface (réel ou virtuel) atteint par une vibration du champ électromagnétique se comportant comme une source secondaire d'ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à la taille de l'élément de surface considéré. La vibration du champ électromagnétique en un point quelconque est alors la somme vectorielle - l'interférence - des vibrations produites par toutes les sources secondaires.
Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ au voisinage de l'antenne est également dépendant du temps et de la position considérée. Cependant, la linéarité des équations de Maxwell autorise à le décrire comme une superposition de composantes monochromatiques, à l'aide d'une transformée de Fourier inverse,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \int \boldsymbol{E}_\nu(\boldsymbol{x}) \exp(2i\pi\nu t) \mathrm{d}\nu,$$

et on peut ainsi se contenter d'étudier le cas d'une onde électromagnétique monochromatique, de fréquence ν. D'autre part, on peut faire l'hypothèse simplificatrice que le champ électrique possède une polarisation linéaire fixe, adaptée à la chaîne de réception en aval de l'antenne, de sorte qu'on peut ne considérer que la grandeur scalaire E_ν correspondant à la projection du vecteur $\boldsymbol{E}_\nu$ sur un vecteur unitaire fixe caractérisant la polarisation du champ. Enfin, la distance entre la source et l'antenne étant grande devant la taille de cette dernière, il est tout à fait raisonnable de supposer que l'onde arrivant au niveau de l'ouverture de l'antenne est plane, si l'on suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de perturbation du front d'onde éventuellement due aux milieux traversés par le rayonnement, en particulier l'atmosphère terrestre.

XIV.3.b Réception du signal

Concrètement, le champ électrique incident sur un élément de surface de l'antenne y crée un courant variable, lequel est à l'origine d'un champ électrique additionnel. La superposition des deux champs peut alors s'interpréter comme une réflexion du champ électrique sur l'antenne. Ainsi les propriétés des antennes radioastronomiques peuvent parfaitement se comprendre à partir des lois de l'optique et on peut également voir les antennes comme des instruments modifiant la phase du champ électrique incident de manière à concentrer les rayons sur un point focal. En particulier, les antennes de type paraboloïde de révolution sont théoriquement stigmatiques lorsque la source est à l'infini[2]. De même, comme en optique, la taille finie des antennes se traduit par un phénomène de diffraction autour de l'image géométrique de la source. Afin de comprendre quelle est la quantité mesurée par une antenne, intéressons nous donc d'abord au cas d'une source ponctuelle monochromatique située à l'infini sur l'axe de pointage de l'antenne, comme sur la figure **XIV.**1. Schématiquement, l'antenne se comporte comme la combinaison d'un diaphragme et d'une lentille formant l'image de la source sur le plan focal.

[2]Comme on l'a dit, c'est le cas des objets astronomiques, avec une excellente approximation.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

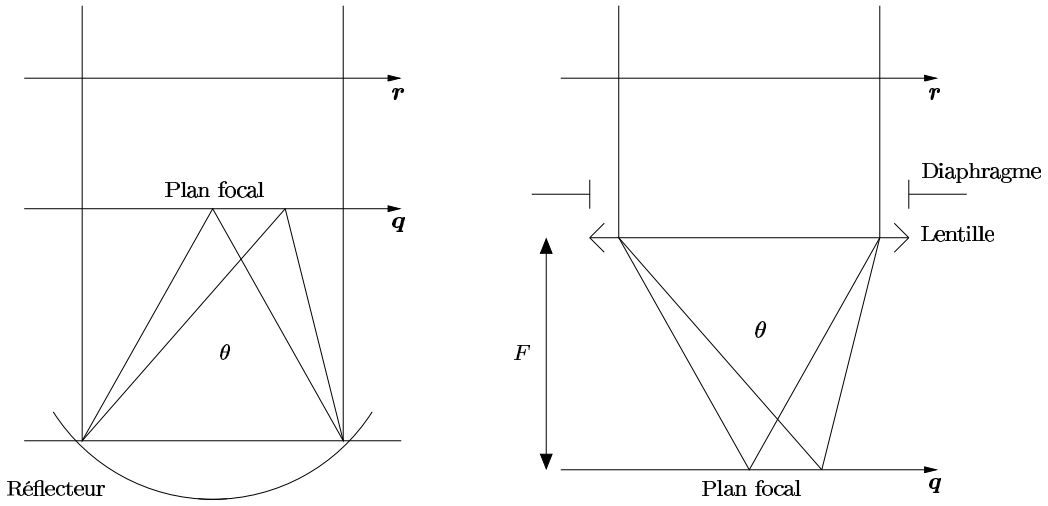

FIG. **XIV.1** – *Formation d'une image par un radiotéléscope. Le front d'onde plane arrive perpendiculairement à la ligne de visée et est concentré au foyer du réflecteur (à gauche). La situation est formellement identique à celle de la formation de l'image d'un objet à l'infini par une lentille convergente (à droite).*

On est alors dans les conditions de l'approximation de Fraunhofer du phénomène de diffraction. Si l'on note $E_\nu^0(\boldsymbol{r})$ le champ électrique dans un plan perpendiculaire aux rayons situé juste en amont du système optique, et si l'on note $g_\nu(\boldsymbol{r})$ la fonction de transfert de ce système, définie par le rapport du champ électrique en aval à celui en amont, alors le champ électrique $E_\nu(\boldsymbol{q})$ dans le plan focal de l'instrument est donné par une relation de transformée de Fourier,

$$E_\nu(\boldsymbol{q}) = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} \iint g_\nu(\boldsymbol{r}) E_\nu^0(\boldsymbol{r}) \exp\left(-2i\pi \boldsymbol{q}.\boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{75}$$

où F est la distance focale de l'instrument, $k = (2\pi\nu)/c$ et $\boldsymbol{q}$ repère la position d'un point dans le plan focal en termes de fréquences spatiales, et peut être relié aux angles d'inclinaison θ_x et θ_y de la direction de diffraction sur l'axe optique,

$$\boldsymbol{q} = q_x \boldsymbol{e}_x + q_y \boldsymbol{e}_y = \frac{\nu}{c} \sin(\theta_x) \boldsymbol{e}_x + \frac{\nu}{c} \sin(\theta_y) \boldsymbol{e}_y.$$

Puisque la source est ponctuelle, monochromatique, et située à l'infini sur l'axe optique, le champ $E_\nu^0(\boldsymbol{r})$ dans le plan juste en amont de l'ouverture est évidemment uniforme, égal à une constante E_ν^0, de sorte que l'équation (75) devient

$$E_\nu(\boldsymbol{q}) = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} E_\nu^0 \iint g_\nu(\boldsymbol{r}) \exp\left(-2i\pi \boldsymbol{q}.\boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E_\nu^0 \widehat{g_\nu}(\boldsymbol{q}).$$

Le traitement du signal en aval de l'antenne nécessite alors un couplage au niveau du plan focal, de façon à faire entrer le champ électrique E_ν dans un guide d'onde menant au mélangeur. Ce couplage complexe se fait à l'aide d'un cornet permettant une adaptation d'impédance entre l'espace libre et le guide, de sorte que les pertes d'énergie par réflexion soient limitées. De plus, il faut noter qu'on récupère uniquement le champ au centre du plan focal, de sorte que le signal obtenu pour une source située dans la direction de pointage est simplement $U_\nu(\boldsymbol{0}) = E_\nu^0 \widehat{g_\nu}(\boldsymbol{0}) = E_\nu^0 B_\nu(\boldsymbol{0})$, où l'on a introduit $B_\nu(\boldsymbol{q}) = \widehat{g_\nu}(-\boldsymbol{q})$, qui représente la réponse impulsionnelle de l'instrument en termes d'amplitude du champ électrique, ou *voltage reception pattern* [Thompson *et al.*, 1991], à ne pas confondre avec le *power pattern* ou lobe primaire $P_\nu(\boldsymbol{q})$ qui est égal à $|B_\nu(\boldsymbol{q})|^2$. Typiquement, $B_\nu(\boldsymbol{q})$ présente un pic central important pour $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ et des pics secondaires positifs et négatifs, qu'on peut atténuer en modifiant la fonction de transmission[3]. La largeur du pic central,

[3]Cette modification se fait en réalité plus loin dans la chaîne, grâce à des corrugations sur la surface interne du cornet au niveau de l'entrée du récepteur.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

ou lobe principal, donne la résolution angulaire de l'antenne unique. En effet, si l'on considère maintenant une source également monochromatique et ponctuelle mais située hors de l'axe optique, la distribution du champ électrique au niveau du plan focal est

$$E_\nu(\boldsymbol{q}) = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} \iint g_\nu(\boldsymbol{r}) E_\nu^0 e^{i\phi_0(\boldsymbol{r})} \exp(-2i\pi \boldsymbol{q}.\boldsymbol{r}) \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\nu e^{ikF}}{icF} \iint g_\nu(\boldsymbol{r}) E_\nu^0 \exp[-2i\pi(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0).\boldsymbol{r}] \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

où $\phi_0(\boldsymbol{r}) = 2\pi \boldsymbol{q}_0.\boldsymbol{r}$ est la phase du champ électrique en $\boldsymbol{r}$ au niveau de l'ouverture, par rapport à la phase au point central $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, le vecteur $\boldsymbol{q}_0$ correspondant, dans le plan de Fourier, à la direction de la source par rapport à la direction de pointage. Ainsi, dans le cas considéré, $E_\nu(\boldsymbol{q}) = E_\nu^0 \widehat{g}_\nu(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)$, ce qui traduit le déplacement de la réponse impulsionnelle dans le plan focal, et le signal reçu finalement en sortie est $U_\nu(\boldsymbol{q}_0) = E_\nu^0 B_\nu(\boldsymbol{q}_0)$ et c'est donc bien la taille du lobe central de B_ν qui donne la résolution angulaire de l'instrument.

XIV.3.c Conversion de fréquence

Le traitement des signaux en sortie des antennes comprend de nombreuses étapes, notamment d'amplification, de transport, de retard, de filtrage et bien sûr de corrélation. La plupart de ces manipulations du signal sont techniquement difficiles aux fréquences d'origine, qui peuvent atteindre plusieurs centaines de GHz. Il est donc classique d'abaisser la fréquence ν du signal astronomique à l'aide d'un oscillateur local et d'un mélangeur, de la manière suivante. À la sortie de l'antenne, on dispose d'une tension alternative $U_\nu(t)$, de fréquence ν et dont l'amplitude est proportionnelle au champ électrique. Cette tension est ensuite mélangée au signal $U_0(t)$ issu d'un oscillateur local (LO),

$$U_\nu(t) = \alpha E_\nu^0 \cos(2\pi\nu t + \phi) \quad \text{et} \quad U_0(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0).$$

Ce mélange se fait en appliquant la superposition des deux tensions à un dipôle non-linéaire (de type diode) dont la caractéristique courant-tension est exprimable sous forme d'une série, d'où [Guilloteau, 2000]

$$I = \sum_{p\geqslant 0} a_p (U_\nu + U_0)^p = \sum_{i,j\geqslant 0} b_{ij} U_\nu^i U_0^j = \sum_{i,j\geqslant 0} b_{ij} (\alpha E_\nu^0)^i A^j [\cos(2\pi\nu t + \phi)]^i [\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0)]^j.$$

La relation fondamentale $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ montre que l'intensité aux bornes du dipôle possède un spectre discret, où seules sont présentes les fréquences de la forme $|p\nu + q\nu_0|$ avec p et q entiers relatifs. En sortie du mélangeur, on insère un filtre de fréquence centrale ν_c et de bande passante $\Delta\nu$ permettant de sélectionner uniquement la composante de fréquence $|\nu - \nu_0|$, soit

$$\nu_c - \frac{\Delta\nu}{2} \leqslant |\nu - \nu_0| \leqslant \nu_c + \frac{\Delta\nu}{2}.$$

Le signal en sortie du filtre est alors, suivant les positions relatives de ν et de ν_0,

$$I \propto E_\nu^0 A \cos[2\pi(\nu-\nu_0)t + \phi - \phi_0] \quad \text{si } \nu \geqslant \nu_0 \quad \text{ou} \quad I \propto E_\nu^0 A \cos[2\pi(\nu_0-\nu)t + \phi_0 - \phi] \quad \text{si } \nu \leqslant \nu_0.$$

La fréquence $\nu' = |\nu - \nu_0|$ est appelée fréquence intermédiaire (*intermediate frequency*). En conclusion, le filtre laisse passer les composantes du signal radioastronomique dont les fréquences se trouvent dans deux bandes de part et d'autre de la fréquence de l'oscillateur local, appelées *Upper Side Band* (USB) et *Lower Side Band* (LSB), respectivement, comme indiqué sur la figure **XIV.**2. Remarquons que la phase à $t = 0$ est différente dans chaque cas. Sans autre filtrage ou information complémentaire sur le spectre de la source, il est donc *a priori* impossible de déterminer à quelle bande de fréquence appartient un signal particulier en sortie du récepteur, et on a affaire à une réception de type *Double Side Band* (DSB). Certains récepteurs, cependant, permettent de supprimer l'une des deux bandes, soit parce qu'ils ont une réponse très dépendante de la fréquence, soit parce qu'un filtre a été placé en amont de la chaîne de réception, auquel cas on parle de réception *Single Side Band* (SSB).

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

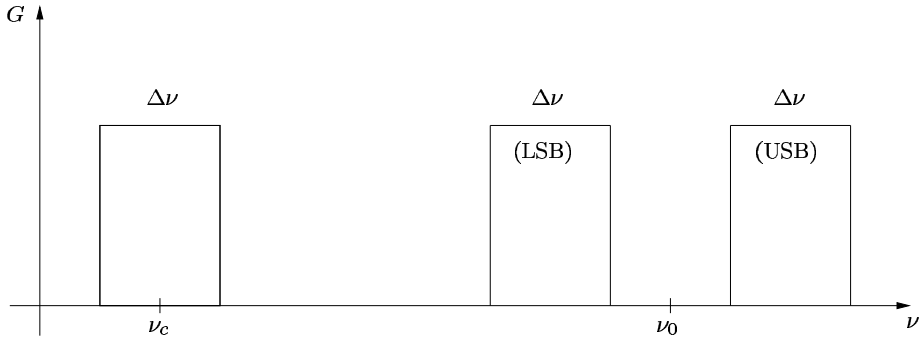

FIG. **XIV**.2 – *Représentation schématique de la conversion de fréquence. Les deux bandes de fréquences observables (USB et LSB) sont représentées en tirets, la bande passante du récepteur en trait plein.*

XIV.4 L'interféromètre à deux éléments

XIV.4.a Les franges d'interférence

Supposons maintenant que la source ponctuelle monochromatique est observée simultanément par deux antennes identiques formant l'interféromètre le plus simple qu'on puisse imaginer, dans la direction du vecteur unitaire $\boldsymbol{\sigma}_0$. On suppose toujours que la distance à laquelle se trouve la source permet de considérer que l'onde électromagnétique incidente est plane.

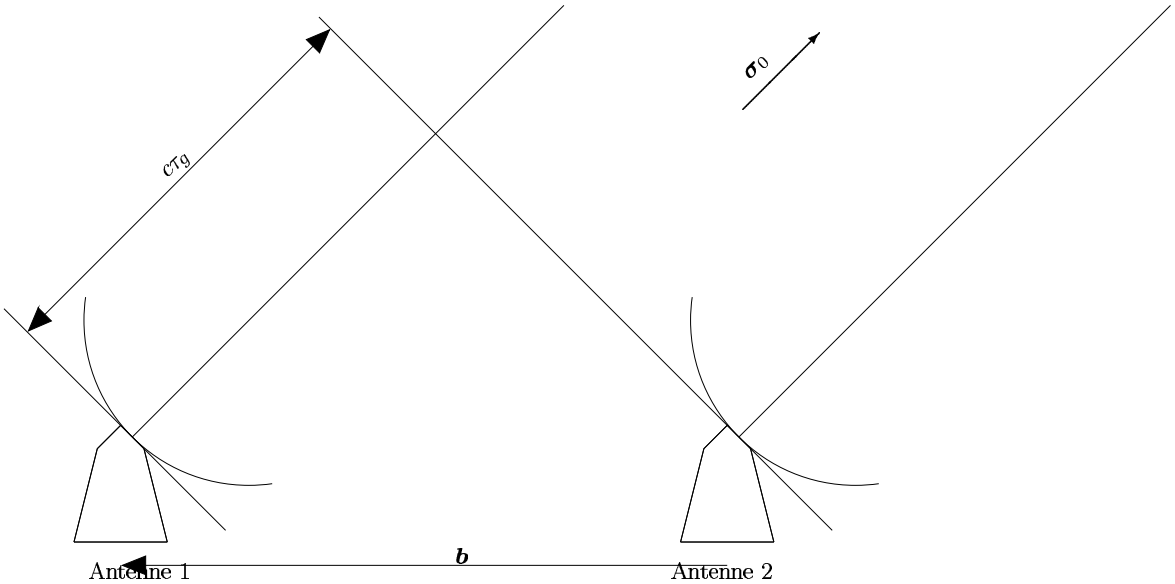

FIG. **XIV**.3 – *Représentation de l'origine du retard géométrique τ_g.*

On voit sur la figure **XIV**.3 que l'onde arrivant sur l'antenne 1, bien qu'étant la même que celle arrivant sur l'antenne 2, est reçue avec un retard géométrique τ_g donné par la relation $c\tau_g = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{\sigma}_0$, où $\boldsymbol{b}$ désigne le vecteur de ligne de base reliant les deux antennes. En faisant l'hypothèse que les deux récepteurs sont également strictement identiques, et en négligeant toutes les sources de bruit, les signaux issus des deux antennes sont[4]

$$u_1 = U\cos\left[2\pi\nu(t-\tau_g)\right] \quad \text{et} \quad u_2 = U\cos\left(2\pi\nu t\right),$$

[4]On oublie pour l'instant la conversion de fréquence évoquée au dessus.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

où l'amplitude U des deux signaux est proportionnelle à celle du champ électrique reçu au niveau des antennes. Les deux signaux sont alors combinés dans un corrélateur constitué d'un multiplicateur et d'un intégrateur, de sorte que le signal en sortie u_s est une moyenne du produit $u_1 u_2$ sur un temps τ_i,

$$u_s = 2\mu U^2 \left\langle \cos\left[2\pi\nu(t-\tau_g)\right] \cos\left(2\pi\nu t\right)\right\rangle_{\tau_i} = \mu U^2 \cos\left(2\pi\nu\tau_g\right), \tag{76}$$

où μ est un facteur de proportionnalité dépendant du corrélateur. Cette équation suppose que le délai géométrique τ_g ne varie pas sur la durée de l'intégration, ce qui est inexact en toute rigueur. En fait, le temps caractéristique de variation de τ_g est celui de la rotation terrestre, et est donc grand devant les temps caractéristiques τ_i d'intégration des signaux, qui sont plutôt de l'ordre de la minute. Ainsi, le signal de sortie dépend lentement du temps selon $u_s(t) = \mu U^2 \cos\left[2\pi\nu\tau_g(t)\right]$, et présente donc des variations sinusoïdales exactement analogues aux franges d'interférence connues en optique, avec une amplitude proportionnelle à l'intensité du champ de rayonnement incident. Il faut noter que ce résultat n'est valable que si la réponse des antennes au signal est invariante dans le temps, soit parce qu'elles sont isotropes, soit parce qu'elles suivent la source dans son mouvement sur la sphère céleste.

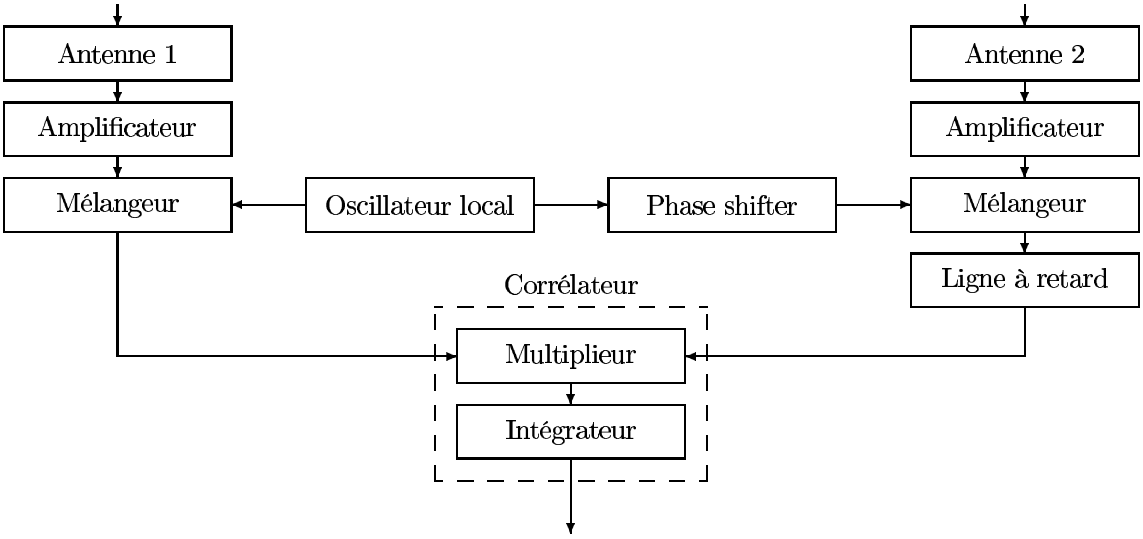

FIG. **XIV.**4 – *Schéma simplifié de la chaîne de réception et de corrélation des signaux reçus au niveau de deux antennes. En sortie, le signal résultant est enregistré pour un traitement ultérieur.*

XIV.4.b Cas d'une source étendue et non monochromatique

Le cas d'une source ponctuelle et monochromatique est hautement idéalisé. De manière plus réaliste, on doit considérer que la source observée est étendue et qu'elle émet dans un domaine de fréquence $\Delta\nu$, en s'autorisant toutefois à supposer que son émission est spatialement et temporellement incohérente. Considérons que les deux antennes pointent dans la direction $\boldsymbol{\sigma}_0$ du "centre" de la source. Comme on l'a vu, le signal $U_\nu(\boldsymbol{\sigma})$ reçu par chaque antenne en provenance d'un angle solide $\mathrm{d}\Omega$ autour d'une direction $\boldsymbol{\sigma}$ et dans un intervalle de fréquence $\mathrm{d}\nu$ autour d'une fréquence centrale ν est proportionnel au produit[5] $E_\nu(\boldsymbol{\sigma})B_\nu(\boldsymbol{\sigma})$, et le signal en sortie du corrélateur, correspondant à l'équation (76), est

$$\mathrm{d}^2 u_s = CP_\nu(\boldsymbol{\sigma}) I_\nu(\boldsymbol{\sigma}) \cos\left(2\pi\nu\frac{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{\sigma}}{c}\right)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu \quad \text{avec} \quad I_\nu(\boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega = Z|E_\nu(\boldsymbol{\sigma})|^2, \tag{77}$$

le coefficient de proportionnalité Z, homogène à une impédance par unité de surface, dépend des caractéristiques de la chaîne de réception. La quantité $I_\nu(\boldsymbol{\sigma})$ désigne l'intensité spécifique (voir le chapitre **XVIII**)

[5]Notons qu'on change quelque peu la notation, puisque les quantités considérées sont écrites ici en fonction de la direction $\boldsymbol{\sigma}$ et non plus des coordonnées $\boldsymbol{q}_0$ dans le plan de Fourier, ce qui est équivalent.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

émise par la source à la fréquence ν et dans la direction $\boldsymbol{\sigma}$. Notons que l'équation (77) suppose que les antennes sont identiques. En intégrant sur le champ de vue, on a donc

$$\mathrm{d}u_s = \mathrm{d}\nu \int P_\nu(\boldsymbol{\sigma}) I_\nu(\boldsymbol{\sigma}) \cos\left(2\pi\nu \frac{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{\sigma}}{c}\right) \mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\nu \int P_\nu(\boldsymbol{\sigma}) I_\nu(\boldsymbol{\sigma}) \cos(2\pi \boldsymbol{p}.\boldsymbol{\sigma}) \mathrm{d}\Omega \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{p} = \frac{\nu}{c}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{b}}{\lambda}.$$

Sachant que le pointage des antennes se fait dans la direction "moyenne" $\boldsymbol{\sigma}_0$, on introduit le vecteur $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$, qui est orthogonal à $\boldsymbol{\sigma}_0$ puisqu'on suppose les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}_0$ et $\boldsymbol{\sigma}$ unitaires. En effet,

$$1 = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\sigma} \approx \boldsymbol{\sigma}_0.\boldsymbol{\sigma}_0 + 2\boldsymbol{\sigma}_0.\boldsymbol{s} = 1 + 2\boldsymbol{\sigma}_0.\boldsymbol{s} \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{\sigma}_0.\boldsymbol{s} \approx 0$$

au premier ordre si $|\boldsymbol{s}| \ll 1$, c'est-à-dire si on s'intéresse à une source assez petite. On peut alors écrire[6] la réponse de l'interféromètre sous la forme

$$\mathrm{d}u_s = \cos(2\pi \boldsymbol{p}.\boldsymbol{\sigma}_0)\mathrm{d}\nu \int P_\nu(\boldsymbol{s}) I_\nu(\boldsymbol{s}) \cos(2\pi \boldsymbol{p}.\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\Omega - \sin(2\pi \boldsymbol{p}.\boldsymbol{\sigma}_0)\mathrm{d}\nu \int P_\nu(\boldsymbol{s}) I_\nu(\boldsymbol{s}) \sin(2\pi \boldsymbol{p}.\boldsymbol{s}) \mathrm{d}\Omega.$$

En introduisant la fonction de visibilité complexe V_0 définie par

$$V_0(\boldsymbol{p}) = \int P_\nu(\boldsymbol{s}) I_\nu(\boldsymbol{s}) e^{-2i\pi \boldsymbol{p}.\boldsymbol{s}} \mathrm{d}\Omega, \quad \text{on a} \quad \mathrm{d}u_s = \mathrm{d}\nu |V_0| \cos(2\pi\nu\tau_g - \phi_\nu), \tag{78}$$

où $|V_0|$ et ϕ_ν sont respectivement l'amplitude et la phase de la fonction de visibilité complexe.
En intégrant sur la bande passante $\Delta\nu$ autour de la fréquence centrale ν_0, et en faisant ici l'hypothèse simplificatrice que le lobe primaire et l'intensité spécifique ne dépendent pas de la fréquence, on a

$$u_s = \int \mathrm{d}\nu |V_0| \cos(2\pi\nu\tau_g - \phi_\nu) = |V_0| \Delta\nu \cos(2\pi\nu_0\tau_g - \phi_\nu) \frac{\sin(\pi\Delta\nu\tau_g)}{\pi\Delta\nu\tau_g}. \tag{79}$$

Le facteur d'atténuation de la forme sinus cardinal apparaissant dans cette équation[7] correspond au brouillage des franges d'interférence pour une source présentant un spectre étendu, chaque longueur d'onde apportant son propre système de franges avec un interfrange différent. On peut également interpréter cette atténuation, qui augmente rapidement avec le délai géométrique, comme le résultat de la "désynchronisation" des trains d'onde arrivant sur les antennes 1 et 2. Cet effet peut donc être dévastateur si l'on souhaite suivre une source pendant son transit, et il convient de compenser le retard τ_g de manière à resynchroniser les trains d'onde.

XIV.4.c Blocage des franges

On introduit donc, sur le chemin du signal issu de l'antenne en avance, une ligne à retard qui peut être constituée soit de câbles de différentes longueurs qui sont connectés à tour de rôle au système de façon adaptée à l'évolution de τ_g, soit de retardateurs électroniques lorsque le signal est déjà numérisé. On a donc un retard τ_d introduit dans la chaîne de réception en aval du mélangeur de l'antenne 2. En considérant le schéma de la figure **XIV**.4 et en se plaçant dans le cas d'une conversion de fréquence USB, les signaux issus des antennes 1 et 2 présentent des phases ϕ_1 et ϕ_2 en entrée du corrélateur, avec $\phi_1 = -2\pi\nu\tau_g - \theta_1$ et $\phi_2 = -2\pi\nu'\tau_d - \theta_2$, où θ_1 et θ_2 sont les déphasages introduits, sur les signaux 1 et 2 respectivement, par l'oscillateur local. La forme intégrale de l'équation (79) s'écrit alors

$$u_s = \int \mathrm{d}\nu |V_0| \cos(\phi_2 - \phi_1 - \phi_\nu) = \int \mathrm{d}\nu |V_0| \cos(2\pi\nu\Delta\tau + 2\pi\nu_0\tau_d - \theta_2 + \theta_1 - \phi_\nu).$$

De manière générale, cette forme implique que l'amplitude de la réponse du corrélateur est également modulée, comme au **XIV.4.b**, par une fonction dépendant cette fois de l'erreur $\Delta\tau = \tau_g - \tau_d$ appelée *delay*

[6] Sous réserve de redéfinir le lobe primaire P_ν et l'intensité spécifique I_ν en les recentrant sur la direction $\boldsymbol{\sigma}_0$.

[7] Le fait que le facteur d'atténuation soit ici un sinus cardinal est lié aux hypothèses d'uniformité en fréquence de la réponse des récepteurs et du spectre de puissance de la source, mais le résultat général est qu'il apparaît un brouillage des franges pour des bandes passantes ou des délais géométriques trop grands.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tracking error, qui en pratique est bien inférieure au retard géométrique τ_g, ce qui permet, en ajustant régulièrement le retard τ_d, de préserver le contraste des franges.
Cependant, la présence du terme $2\pi\nu_0\tau_d$ provoque également une modulation des franges à une vitesse un peu trop rapide pour la numérisation du signal. On introduit donc un décalage de phase (*phase shift*) ϕ_0 permettant de compenser ce terme, et ainsi de bloquer les franges. En théorie, ce blocage empêche dès lors de mesurer simultanément l'amplitude et la phase de la fonction de visibilité. On améliore donc encore le système en utilisant un second corrélateur qui déphase l'un des deux signaux de $\pi/2$ avant corrélation. On mesure ainsi simultanément les parties réelle et imaginaire de la fonction de visibilité complexe. Le système ainsi décrit est appelé corrélateur complexe, pour des raisons évidentes.

XIV.4.d Système de coordonnées

Une fois mesurée la fonction de visibilité complexe $V_0(\boldsymbol{p})$ donnée par l'équation (78), son utilisation pratique requiert la définition d'un système de coordonnées approprié dans lequel écrire le vecteur $\boldsymbol{p}$ représentant, à un facteur multiplicatif près, la ligne de base entre les deux antennes. Il apparaît naturel que l'une de ses composantes soit prise parallèle à la direction de pointage $\boldsymbol{\sigma}_0$ de l'interféromètre. On introduit donc un système $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ avec $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{\sigma}_0$ et $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ définissant un système de coordonnées perpendiculaire à la direction de pointage avec, conventionnellement, $\boldsymbol{e}_x$ vers l'est et $\boldsymbol{e}_y$ vers le nord. On notera ainsi $\boldsymbol{p} = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z$. Notons que u, v et w donnent les composantes de la ligne de base dans ce système de coordonnées, mesurées en longueurs d'onde. La direction quelconque $\boldsymbol{\sigma}$, dans ce système de coordonnées, s'écrit alors $\boldsymbol{\sigma} = l\boldsymbol{e}_x + m\boldsymbol{e}_y + n\boldsymbol{e}_z$, avec $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Les coordonnées l et m correspondent aux cosinus directeurs de $\boldsymbol{\sigma}$ dans le système $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. Bien entendu, les fonctions P_ν et I_ν ne dépendent que de ces deux paramètres, et une image dans le plan (l, m) représente la projection de la sphère céleste sur son plan tangent à l'origine des coordonnées, comme le montre la figure **XIV**.5. Dans ces conditions, le vecteur $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_0$ s'écrit $l\boldsymbol{e}_x + m\boldsymbol{e}_y + (n-1)\boldsymbol{e}_z$ et la fonction de visibilité devient

$$V_0(u,v,w) = \iint P_\nu(l,m) I_\nu(l,m) e^{-2i\pi[ul+vm+w(n-1)]} \frac{\mathrm{d}l\mathrm{d}m}{\sqrt{1-l^2-m^2}},$$

avec la convention que l'intégrande est nulle pour $l^2 + m^2 \geqslant 1$. Cette équation est presque une transformée de Fourier, mais pas exactement. Afin de pouvoir utiliser le puissant formalisme de Fourier, on peut faire l'hypothèse que le champ dont on veut faire l'image est petit, de sorte que

$$n - 1 \approx -\frac{1}{2}\left(l^2 + m^2\right) \quad \Rightarrow \quad V_0(u,v,w) \approx \iint \frac{P_\nu(l,m) I_\nu(l,m)}{\sqrt{1-l^2-m^2}} e^{-2i\pi(ul+vm)} e^{i\pi\left(l^2+m^2\right)w} \mathrm{d}l\mathrm{d}m.$$

Le terme d'erreur de phase $\delta\phi = \pi\left(l^2 + m^2\right) w$ peut être majoré simplement en remarquant que

$$w < w_{\max} \simeq \frac{b_{\max}}{\lambda} \simeq \frac{1}{\theta_s} \quad \text{et} \quad l^2 + m^2 < \theta_f^2 \quad \text{donc} \quad \delta\phi < \frac{\pi\theta_f^2}{4\theta_s},$$

où θ_s et θ_f désignent respectivement la taille du lobe synthétisé (voir plus bas) et celle du champ de vue, ce qui implique une majoration de ce dernier suivant l'erreur de phase maximale qu'on s'autorise.
Moyennant la redéfinition du lobe primaire d'une antenne selon la transformation

$$P'_\nu(l,m) = \frac{P_\nu(l,m)}{\sqrt{1-l^2-m^2}} \quad \text{on a} \quad V_0(u,v,w) \approx V'_0(u,v) = \iint P'_\nu(l,m) I_\nu(l,m) e^{-2i\pi(ul+vm)} \mathrm{d}l\mathrm{d}m,$$

ce qui constitue une véritable transformée de Fourier bidimensionnelle reliant la distribution de brillance dans le ciel à la fonction de visibilité complexe $V_0(\boldsymbol{p})$ ou plutôt à la projection $V'_0(\boldsymbol{q})$ de cette dernière sur le plan (u, v), le vecteur $\boldsymbol{p} = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y + w\boldsymbol{e}_z$ se projetant en $\boldsymbol{q} = u\boldsymbol{e}_x + v\boldsymbol{e}_y$. Pour simplifier les écritures, on notera cependant P_ν pour P'_ν et V_0 pour V'_0 dans la suite.

XIV.4.e Brouillages fréquentiel et temporel

Le point $\boldsymbol{q}$ de l'espace (u, v) représentant la ligne de base entre deux antennes à un instant donné et pour une direction de pointage donnée, dépend également de la fréquence d'observation ν puisqu'on a la relation

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

$\boldsymbol{p} = \nu \boldsymbol{b}/c$. Si l'on considère alors une source observée dans une bande de fréquence $\Delta\nu$ autour de ν_0, toutes les mesures sont traitées comme si elles étaient effectuées à cette fréquence centrale et les valeurs de u et de v attribuées sont celles calculées pour ν_0. Les vraies fréquences spatiales u_ν et v_ν correspondant à la fréquence ν sont alors données par

$$u_\nu = \frac{\nu}{\nu_0} u \quad \text{et} \quad v_\nu = \frac{\nu}{\nu_0} v,$$

donc la contribution de la fréquence ν à la fonction de visibilité complexe est de la forme

$$V_0(u,v) = V_0\left(\frac{\nu_0}{\nu} u_\nu, \frac{\nu_0}{\nu} v_\nu\right) \quad \text{dont la transformée de Fourier est} \quad \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 I\left(\frac{\nu}{\nu_0} l, \frac{\nu}{\nu_0} m\right),$$

par application du théorème de similitude des transformées de Fourier [Bracewell, 2000]. Chaque fréquence ν dans la bande passante $\Delta\nu$ se traduit donc par une image déformée de la vraie distribution de brillance, qu'on peut résumer par un brouillage radial (*bandwidth smearing*).
D'autre part, la mesure des visibilités ne se fait pas de manière instantanée, et chaque mesure est le résultat d'une intégration sur un temps τ_i. Pendant le temps d'une intégration, la rotation terrestre modifie la ligne de base projetée $\boldsymbol{q}$, comme on le verra, et les visibilités instantanées intégrées correspondent donc à des points différents du plan (u,v). Il en résulte un brouillage (*time averaging*) et une distortion de l'image. Il faut donc trouver un compromis entre cette contrainte et la nécessité d'obtenir un bon rapport signal sur bruit, pour lequel on devrait choisir un temps d'intégration long.

XIV.5 Réseaux d'antennes et imagerie

XIV.5.a Position du problème

Comme on l'a vu, un interféromètre élémentaire, constitué de deux antennes identiques, permet à chaque instant de mesurer la valeur de la fonction de visibilité complexe V_0 en un point $\boldsymbol{q}$ d'un espace à deux dimensions, dit espace (u,v) ou plan (u,v), en référence aux notations u et v habituellement utilisées pour les fréquences spatiales dans deux directions orthogonales[8],

$$V_0(\boldsymbol{q}) = \iint P_\nu(\boldsymbol{\sigma}) I_\nu(\boldsymbol{\sigma}) e^{-2i\pi \boldsymbol{q}.\boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \iint J(\boldsymbol{\sigma}) e^{-2i\pi \boldsymbol{q}.\boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{soit} \quad V_0 = \mathrm{TF}\,[J]\,. \tag{80}$$

Le processus d'imagerie consiste à inverser cette équation, de manière à obtenir, à partir des visibilités, la distribution de brillance I_ν. Notons que si le lobe d'antenne P_ν est suffisamment bien connu, on pourra oublier celui-ci dans un premier temps et considérer que l'image à obtenir à partir des visibilités est $J = P_\nu I_\nu$, sachant qu'une simple division par le lobe permettra, en fin de traitement, de retrouver la distribution de brillance réelle I_ν de la source.
La relation de transformation de Fourier (80) exprime le fait qu'à tout instant, une paire d'antennes permet de mesurer une composante de Fourier particulière de la distribution de brillance modifiée J. Notons que cette dernière étant réelle, la fonction de visibilité est hermitienne [Bracewell, 2000], soit

$$V_0^*(\boldsymbol{q}) = V_0(-\boldsymbol{q}) \quad \text{où l'étoile désigne la conjugaison complexe.}$$

Chaque mesure fournit donc en réalité deux points dans l'espace (u,v), bien que ces deux points ne soient pas indépendants. L'utilisation d'un réseau de N_a antennes doit alors permettre la mesure simultanée d'un nombre important de composantes de Fourier, environ de l'ordre de $N_a(N_a-1)/2$, aux fréquences spatiales $\boldsymbol{q}$ correspondant aux projections des différentes lignes de base sur un plan perpendiculaire à la direction de pointage (voir la figure **XIV**.5). D'autre part, la rotation de la Terre se traduit par un déplacement du point représentatif d'une ligne de base donnée dans le plan (u,v), selon un chemin qu'on décrira dans le chapitre suivant, et dont on voit un exemple sur la figure **XIV**.6. On dispose donc en fin d'observation d'un ensemble de points $\boldsymbol{q}_k$ où est mesurée la fonction de visibilité complexe. L'incomplétude de l'information sur cette dernière représente la difficulté majeure de l'imagerie en interférométrie.

[8]Remarquons qu'on désignera ici la transformation de Fourier sous la forme d'un opérateur TF, la transformation réciproque étant notée TF^{-1}.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

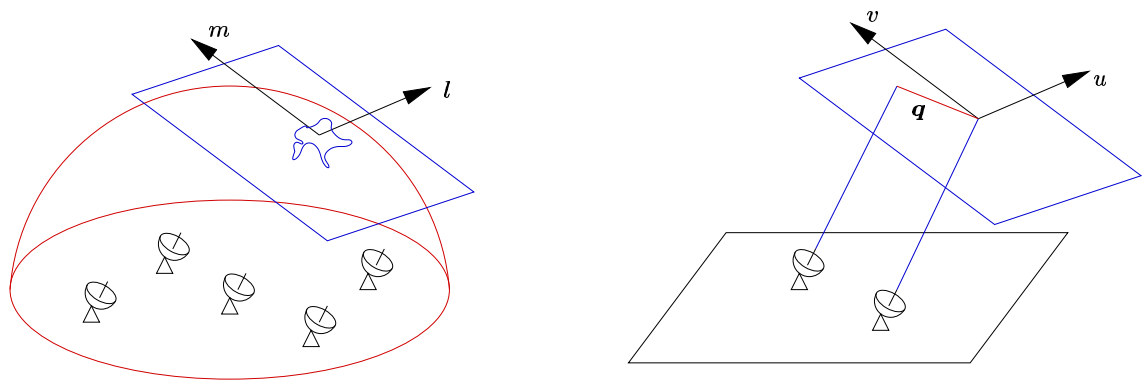

FIG. **XIV**.5 – *Systèmes de coordonnées dans le plan du ciel (à gauche) et dans le plan de Fourier (à droite).*

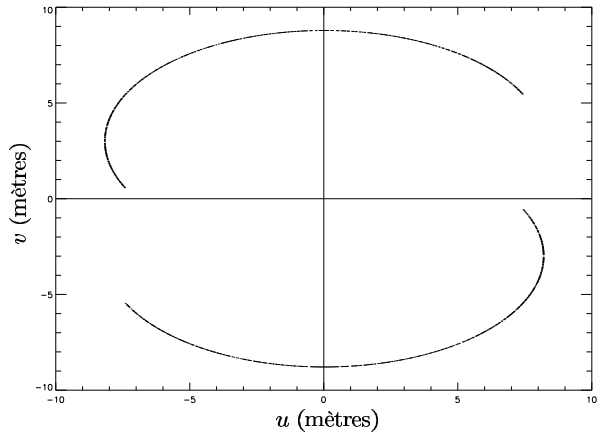

FIG. **XIV**.6 – *Couverture (u, v) d'un interféromètre à deux éléments situé à une latitude de 45° nord, lors d'une observation d'une source à 45° de déclinaison, pendant 12 heures.*

Afin de formaliser cette idée, on introduit une fonction d'échantillonnage S, non nulle uniquement aux points effectivement mesurés. La fonction de visibilité V dont on dispose réellement est alors

$$V(\boldsymbol{q}) = S(\boldsymbol{q})V_0(\boldsymbol{q}) \quad \text{avec} \quad S(\boldsymbol{q}) = \sum_k \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_k). \tag{81}$$

Le support de S est constitué des points mesurés et est couramment appelé couverture (u, v), bien que ce terme soit également parfois utilisé pour désigner la fonction S elle-même. Par ailleurs, en réalité, les mesures des visibilités sont entachées de bruit, de sorte que $V = SV_0'$, où V_0' représente la fonction de visibilité complexe corrompue par le bruit. On y reviendra plus bas. Afin d'obtenir une image, la première possibilité consiste à prendre brutalement la transformée de Fourier inverse de V,

$$I^B(\boldsymbol{\sigma}) = \iint V(\boldsymbol{q}) e^{2i\pi \boldsymbol{q}.\boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}\boldsymbol{q} \quad \text{soit} \quad I^B = \mathrm{TF}^{-1}[V]. \tag{82}$$

L'image I^B, dite image sale, est une représentation de la distribution de brillance qui, bien qu'incorrecte, représente généralement la première étape du processus d'imagerie. La relation entre l'image sale et la véritable distribution de brillance est alors donnée par une équation de convolution,

$$I^B = B * J \quad \text{avec} \quad B = \mathrm{TF}^{-1}[S],$$

où l'on a négligé la présence de bruit. La fonction B, appelée lobe sale ou lobe synthétisé, représente la réponse impulsionnelle de l'instrument, et on voit donc que, même en l'absence de bruit, l'obtention de la

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

distribution réelle de brillance nécessite une déconvolution dont la solution n'est pas unique. Supposons en effet qu'on se donne une distribution de brillance Z solution de l'équation homogène $B * Z = 0$, ce qui est possible : on peut simplement prendre la transformée de Fourier inverse d'une fonction définie sur le plan (u, v), hermitienne, dont le support soit disjoint de celui de S. Dans ces conditions, il est impossible de distinguer la distribution $J + Z$ de J à partir des données. L'existence de ces distributions invisibles empêche le plus souvent de considérer la solution principale de l'équation de convolution - pour laquelle V_0 est prise nulle en dehors des points mesurés - comme une solution réaliste du problème posé. En effet, cette solution est souvent non-physique, présentant par exemple des valeurs négatives.
C'est l'objet des multiples méthodes dites de déconvolution que d'obtenir une solution réaliste en remplissant les trous du plan (u, v). On construit ainsi des modèles de distribution de brillance, qu'on appelle images propres, à partir des données et d'hypothèses *a priori* sur l'objet observé.

XIV.5.b Affectation de poids aux données

Dans l'expression de la fonction d'échantillonnage S de l'équation (81), il apparaît que toutes les mesures sont traitées de la même façon et qu'on leur accorde une importance identique. Or, il est bien évident que la réalité est différente, car certaines mesures peuvent être plus bruitées que d'autres, par exemple. D'autre part, il peut s'avérer intéressant de modifier les valeurs de la fonction d'échantillonnage de manière à atténuer les artefacts et à obtenir un lobe synthétisé plus proche d'un lobe "propre". On introduit ainsi une fonction de poids W telle que

$$W(\boldsymbol{q}) = \sum_k F_k T_k D_k \delta(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_k) = F(\boldsymbol{q}) T(\boldsymbol{q}) D(\boldsymbol{q}) S(\boldsymbol{q})$$

où les coefficients F_k, T_k et D_k correspondent à divers effets. Les F_k traduisent la fiabilité des mesures, telle qu'envisagée précédemment, et on ne peut donc pas les modifier. La fonction T, dite de *tapering*, permet de diminuer l'importance accordée aux mesures à haute fréquence spatiale, afin de supprimer les lobes parasites à petite échelle. La fonction de densité D permet quant à elle de compenser, en partie, l'incomplétude de la couverture (u, v) en prenant comme valeur en un point l'inverse de la densité locale de points de mesure[9]. On dispose alors d'une fonction de visibilité $V_w = W V_0$, et d'une image sale dépendant évidemment du schéma de poids appliqué

$$I_w = B_w * J \quad \text{avec} \quad B_w = \mathrm{TF}^{-1}[W].$$

Il ne faut cependant pas oublier que l'image I_w n'est pas, de manière générale, une solution acceptable du problème de la distribution de brillance, car l'influence des poids sur l'aspect de l'image sale est toute relative, et on ne peut se passer de l'étape de déconvolution.

XIV.5.c Le *gridding*

L'obtention de l'image sale à partir des données nécessite, on l'a vu, une transformation de Fourier. Numériquement, le calcul de cette transformée peut se faire de deux façons. On peut effectuer une transformation "directe" en calculant, pour chaque direction d'observation $\boldsymbol{\sigma}$ désirée, la quantité

$$I^B(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} V(\boldsymbol{q}_k) e^{2i\pi \boldsymbol{q}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}}.$$

Le coût numérique de cette méthode, pour obtenir une image $M \times M$, est de l'ordre de M^4, et peut donc s'avérer extrêmement lourd. Plus rapide, l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (FFT) requiert que les données soient placées sur une grille régulière. Or, bien entendu, ce n'est pas le cas des données d'origine, et il convient de procéder à une interpolation communément appelée *gridding*. Le coût numérique

[9] Cette option est appelée *uniform weighting*, tandis que le choix $D = 1$ constitue le *natural weighting*. Le choix de l'une ou l'autre option est essentiellement dicté par l'objectif de sensibilité de l'instrument à plus ou moins grande ligne de base. Notons qu'il existe des variantes, telles que le *robust weighting* ou encore le *super uniform weighting*.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

d'une telle interpolation suivie d'une FFT est lui de l'ordre de $M^2 \log M$, ce qui justifie amplement qu'on choisisse cette option plutôt que la transformation directe[10].
Il s'agit donc de se donner une grille régulière dans le plan (u, v) et d'assigner des valeurs à chaque nœud de cette grille en fonction des visibilités observées dans son voisinage. Plusieurs méthodes sont possibles pour parvenir à ce résultat [Thompson & Bracewell, 1974], mais il apparaît que les techniques consistant à convoluer les données dans l'espace (u, v) sont les plus utilisées, en particulier parce qu'elles ne se limitent pas à une simple interpolation, mais qu'elles impliquent également une moyenne permettant de limiter quelque peu les effets de mesures aberrantes. Il est par ailleurs possible de corriger les effets de cette convolution sur l'image finale, ce qui est un avantage certain.
Si G est le noyau de convolution utilisé, la fonction dont on prend la transformée de Fourier est évidemment $V_w^g = G * V_w$ et on peut relier l'image sale I_w^g et le lobe sale B_w^g, correspondant à V_w^g, aux quantités analogues avant *gridding*,

$$I_w^g = \mathrm{TF}^{-1}[G * V_w] = \widehat{G} I_w \quad \text{et} \quad B_w^g = \mathrm{TF}^{-1}[G * W] = \widehat{G} B_w \quad \text{avec} \quad \widehat{G} = \mathrm{TF}^{-1}[G].$$

Bien entendu, V_w^g ne représente qu'une étape intermédiaire, puisqu'il s'agit d'une fonction lisse, qu'il faut maintenant échantillonner sur la grille. Ce procédé est équivalent à la multiplication par un peigne de Dirac à deux dimensions, noté ici R et défini par

$$R(u,v) = \frac{1}{\Delta u \Delta v} \sum_{i,j} \delta\left(\frac{u}{\Delta u} - i, \frac{v}{\Delta v} - j\right) \quad \text{où la sommation porte sur } (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

De manière évidente, Δu et Δv désignent les tailles des cellules de la grille dans chacune des directions. Ainsi l'échantillonnage de la fonction V_w^g fournit une distribution de visibilités $V_s = R V_w^g$. L'image sale I_s reconstruite à partir de ces visibilités est alors donnée par une convolution,

$$I_s = \mathrm{TF}^{-1}[V_s] = \widehat{R} * I_w^g \quad \text{avec} \quad \widehat{R} = \mathrm{TF}^{-1}[R].$$

La fonction $\widehat{R}$ est également un peigne de Dirac, dont la périodicité, dans chaque direction, est égale à l'inverse de la périodicité de R. Cette convolution a pour effet de répliquer l'image sale I_w^g dans l'espace réel, et il est donc possible qu'un repliement (*aliasing*) se produise, si le support de l'image sale est plus grand que la périodicité de $\widehat{R}$. L'atténuation due au lobe de l'antenne permet d'assurer, en première approximation, que ce support est fini, mais il n'est pas exclu que des sources brillantes dans un lobe secondaire soient repliées dans l'image I_s. De plus, le bruit n'est pas limité dans l'espace réel et subit donc un repliement qui augmente son niveau aux bords de la carte. Remarquons que si l'aliasing est négligeable, on préserve l'équation de convolution sous la forme[11]

$$\frac{I_s}{\widehat{G}} = \frac{I_w^g}{\widehat{G}} = I_w = B_w * J.$$

Les fonctions de *gridding* G choisies habituellement tentent de satisfaire des conditions quelque peu contradictoires, à savoir être non nulles uniquement sur une petite région tout en limitant l'aliasing et sans trop ralentir la vitesse de calcul. Le choix le plus simple[12] est de prendre une fonction rectangle, c'est-à-dire d'assigner chaque visibilité au nœud de la grille le plus proche. Mais en définitive, le choix le plus approprié répondant aux contraintes de support et d'aliasing limités est celui des fonctions sphéroïdales, qu'on ne peut exprimer analytiquement, mais dont les valeurs sont tabulées, ce qui permet de procéder au *gridding* de manière numérique.

XIV.5.d Le problème du bruit

On a bien pris soin de noter plus haut que les visibilités observées sont corrompues par l'existence de bruit. Celui-ci peut-être de deux types principaux, additif ou multiplicatif. Si on note ϵ_a le bruit additif et

[10] Ce n'est plus vraiment le cas, cependant, pour les petites images construites à partir d'un nombre réduit de données. D'autre part, la méthode directe a l'avantage de permettre de construire l'image sale en temps réel, au fur et à mesure que de nouvelles visibilités sont disponibles.
[11] La division par $\widehat{G}$ de l'image sale I_s obtenue *in fine* se nomme correction de *gridding*.
[12] Bien qu'il soit le pire en termes d'*aliasing*...

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

ϵ_m le bruit multiplicatif, on a, schématiquement, $V_0' = \epsilon_m V_0 + \epsilon_a$. Toutes les opérations effectuées étant linéaires, le bruit additif a pour effet d'ajouter une structure de bruit sur l'image finale, tandis que le bruit multiplicatif se traduit par une convolution dans l'espace image.
En ce qui concerne l'origine du bruit, on peut essentiellement en distinguer deux sources. Les récepteurs, tout d'abord, qui peuvent collecter des photons radio provenant de leur environnement immédiat et non de la source astronomique. Il faut donc les protéger par des écrans appropriés, qu'on doit refroidir pour minimiser leur émission thermique propre, sans quoi le remède risquerait d'être pire que le mal. Le refroidissement est d'ailleurs effectué en plongeant chaque récepteur dans un cryostat dont la température est de l'ordre de la quinzaine de Kelvins, de façon à réduire leur bruit intrinsèque, sans qu'il soit possible de l'éliminer entièrement.
D'autre part, les fluctuations de l'atmosphère, en particulier de son contenu en vapeur d'eau, se traduisent par des retards de phase différents, et dépendant bien entendu du temps[13], au niveau de chaque antenne. La corrélation des signaux est alors entachée d'une erreur. En conséquence, la source semble bouger sur le ciel, ce qui limite la résolution de l'instrument, ainsi que sa sensibilité puisque le signal est étalé spatialement et donc plus faible. Cet effet de dégradation atmosphérique est plus important à haute fréquence. Pour en minimiser les effets, on peut par exemple observer régulièrement un calibrateur, en alternance avec la source à laquelle on s'intéresse. Le calibrateur doit avoir une position connue dans le ciel, ce qui fournit une référence de phase. Les fluctuations du retard sont calibrées *a posteriori* en interpolant les mesures faites sur le calibrateur, puis soustraites des mesures de phase sur la source. Alternativement, on peut mesurer directement, par exemple à l'aide de radiomètres, la quantité de vapeur d'eau présente sur la ligne de visée au niveau de chaque antenne, et en déduire le retard de phase correspondant. On reparlera brièvement de ce problème au **XV.2.c**.

XIV.5.e La déconvolution

Comme on l'a vu, les images sales obtenues aux différentes étapes du traitement des données décrites plus haut peuvent toujours se mettre sous la forme d'une convolution de la véritable distribution de brillance modifiée par un lobe synthétisé. Cependant, le problème des distributions invisibles demeure, et la remarque faite plus haut sur l'inadéquation des méthodes de déconvolution linéaire est toujours valable. On doit donc plutôt construire, à partir de l'image sale, des modèles de distribution de brillance compatibles avec les observations, en se fondant sur des hypothèses *a priori*. On va voir quelques unes de ces méthodes.

CLEAN et ses dérivés

La méthode CLEAN, dont il existe de nombreuses variantes, fait l'hypothèse qualitative que la distribution de brillance réelle peut être représentée par une collection de sources ponctuelles, et la reconstruit en adoptant la procédure suivante : On se donne deux images de la taille de l'image sale. L'une, l'image propre, est intialisée à zéro, tandis que l'autre, l'image des résidus, est identifiée à l'image sale. On commence par repérer le maximum de brillance dans l'image des résidus, et on place dans l'image propre, au même point, une source ponctuelle avec une amplitude égale à γ, où γ est un facteur de gain typiquement de l'ordre de 0,1 à 0,2. Cette source ponctuelle est convoluée avec le lobe synthétisé et le résultat est soustrait de l'image des résidus. On reprend alors le processus jusqu'à ce que l'image des résidus passe en dessous d'un certain seuil - usuellement lié au niveau de bruit - ou lorsqu'une limite d'itérations a été atteinte. L'image propre est alors une collection de sources ponctuelles, qu'on convolue par un "lobe propre" (typiquement une gaussienne de même taille que le lobe synthétisé) de façon à obtenir une image lisse et réaliste. On ajoute enfin à cette image propre celle des résidus, ce qui permet d'obtenir une estimation du rapport signal sur bruit de cette image. L'approche CLEAN ne permet cependant pas d'écrire explicitement la solution qu'elle fournit, et il est donc très difficile de faire une analyse de ses performances, par exemple en termes de bruit.

Les méthodes de maximum d'entropie (MEM)

En revanche, les méthodes de maximum d'entropie sélectionnent une image parfaitement bien déterminée, à savoir positive, compatible avec les données au bruit près, et dont l'entropie est maximale. Ici, l'entropie

[13] L'échelle de temps de ces variations est de l'ordre de la dizaine de secondes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

est une fonction sur l'image caractérisant sa plausibilité, qui prend la forme suivante

$$\mathcal{S}(I) = -\int I \ln\left(\frac{I}{M}\right) = -\sum_k I_k \ln\left(\frac{I_k}{M_k}\right),$$

où M est une image modèle incluant les hypothèses *a priori*. Cette forme est égale à l'opposé de la pseudo-distance de Küllback de l'image I au modèle M (voir le chapitre **XVII**) et la procédure déterminant l'image propre consiste donc à minimiser cette distance, tout en imposant que les visibilités théoriques restent proches[14] des visibilités mesurées. Pour cela, on inclut une contrainte de type χ^2. À cela il faut ajouter qu'on a remarqué [Cornwell & Evans, 1985] qu'il était également nécessaire de contraindre les grandes échelles en imposant le flux total, car les espacements courts étant absents des données, ils ne permettent pas de contraindre l'image finale par le biais du χ^2.

Comparaison des deux méthodes et alternatives multirésolution

Contrairement à CLEAN, les méthodes de maximum d'entropie ne sont pas spécifiques au domaine de la radioastronomie, car il ne s'agit ni plus ni moins que de méthodes bayesiennes de détermination d'un modèle "le plus probable" étant donné un ensemble d'observations, tandis que CLEAN fait implicitement l'hypothèse que l'image à reconstruire est un ensemble de sources ponctuelles. Par conséquent, les images d'émission étendue reconstruites par CLEAN sont souvent mauvaises, tandis que MEM échoue typiquement lorsque des sources ponctuelles sont superposées à un fond étendu.
Il existe de nombreux algorithmes hybrides entre CLEAN et MEM, ainsi que des méthodes fondées sur des principes différents, dont l'objectif est de permettre une déconvolution correcte des structures à toutes les échelles, puisque c'est justement dans ces situations que CLEAN et MEM se heurtent à des difficultés. Il existe donc des méthodes dites "multirésolution" faisant par exemple appel à des décompositions en ondelettes des images, de manière à déconvoluer séparément chaque plage d'échelles, avec des méthodes adaptées.

XIV.5.f Imagerie de raies spectrales

Les sources astronomiques peuvent présenter de l'émission et de l'absorption continuum, indépendante de la fréquence[15], et des raies spectrales, en émission ou en absorption. Ces raies ne sont pas infiniment minces, elles sont élargies, par exemple par effet Doppler ou du fait des collisions entre émetteurs. Les récepteurs dont la bande passante peut être découpée en un certain nombre de sous-bandes appelées canaux permettent alors d'établir un ensemble de cartes bidimensionnelles des sources étudiées, à différentes fréquences, c'est-à-dire à différentes vitesses longitudinales. C'est ainsi qu'on obtient les cartes par canaux $T_k(\boldsymbol{X})$ décrites au chapitre **IX**, dont on essaie de tirer des informations quant à la structure en vitesse, aussi bien qu'en densité, de la source observée.
Dans tout ce qui va suivre, cependant, on ne se préoccupera pas de la vitesse, et l'on ne considérera que des structures bidimensionnelles telles qu'on peut en observer sur les cartes par canaux d'une observation interférométrique. L'objectif du reste de cette partie est de caractériser le filtrage interférométrique sur ces structures, à l'aide des outils introduits dans la deuxième partie.

□

[14] Au sens que la différence entre les deux est inférieure au niveau du bruit.
[15] En fait lentement variable, de sorte qu'on peut la considérer comme constante sur les plages de fréquences habituellement considérées.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XV

Filtrage interférométrique des structures

XV.1 Introduction

On vient de voir que l'observation d'une source radioastronomique par un interféromètre fournit, au travers de mesures de la fonction de cohérence spatiale du champ électromagnétique, une image "sale" qui est égale au produit de convolution de la distribution de brillance réelle dans le ciel, à la fréquence considérée, par un noyau dépendant de l'ensemble des paramètres d'observation. Autrement dit, avant d'appliquer l'un des algorithmes classiques de déconvolution, les différentes cartes par canaux effectivement observées sont des versions dégradées de celles qu'on a définies au chapitre **IX**. Le schéma de la figure **XV**.1 résume succinctement les différentes étapes du filtrage interférométrique, à la fois dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier.

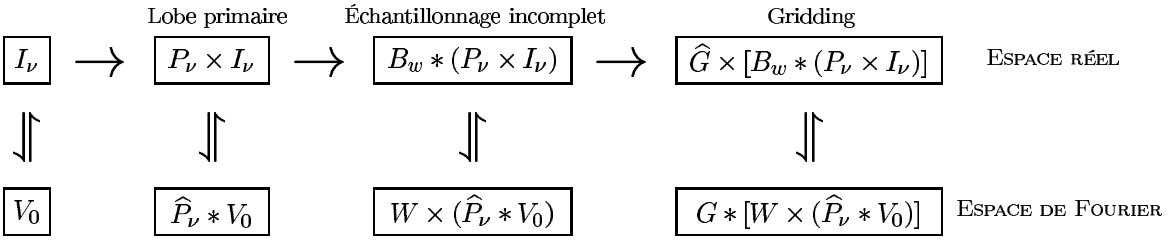

FIG. **XV**.1 – *Représentation schématique du filtrage interférométrique. La première ligne donne les étapes successives du filtrage de la brillance I_ν dans l'espace réel, la seconde donne les quantités correspondantes dans l'espace de Fourier.*

Cette vue d'ensemble permet de remarquer que s'il est particulièrement ardu de remonter des visibilités effectivement observées jusqu'à la distribution de brillance réelle, il est en revanche, au moins théoriquement, beaucoup plus simple de faire le chemin inverse, c'est-à-dire de se donner un modèle de brillance et de calculer la carte sale qu'on devrait obtenir en sortie de l'instrument, étant donnés les paramètres d'observation. En effet, si l'on reprend un à un les divers filtrages appliqués, on voit que la donnée d'un modèle d'antenne et d'une fréquence d'observation suffisent à définir le lobe primaire[1], que d'autre part la couverture du plan (u, v) est déterminée par la position initiale de la source, la configuration du réseau d'antennes et la durée d'observation, et qu'enfin les autres étapes de filtrages (*gridding* et poids notamment) sont contrôlées par l'observateur. Seul le bruit, par son caractère aléatoire, peut venir altérer cette approche par ailleurs entièrement déterministe.

Il fait peu de doutes que le facteur essentiel du filtrage interférométrique décrit ici réside dans l'incomplétude de la couverture du plan (u, v). Or, celle-ci se traduit naturellement par un défaut de mesure de certaines échelles spatiales, qui doivent donc être absentes des images sales obtenues en sortie. Cette idée suggère fortement d'étudier les effets du filtrage sur des objets possédant des structures sur une grande plage d'échelles, tels qu'on en observe dans le milieu interstellaire. Afin de procéder à cette étude, on a choisi de recourir à une approche numérique, en construisant un simulateur assez simple permettant d'obtenir rapidement des images sales à partir d'une distribution de brillance donnée et de paramètres observationnels qu'on précisera plus loin. Le choix de l'approche numérique est amplement justifié par la complexité du filtrage instrumental, d'autant plus importante que le nombre d'antennes, et donc de corrélations, est élevé.

[1] On ne considérera que des antennes illuminées uniformément, de sorte que leur lobe sera supposé suivre exactement une fonction d'Airy.

XV.2 Le projet ALMA

XV.2.a Introduction

La nécessité de comprendre et d'optimiser le filtrage interférométrique dans le cas d'un grand nombre d'antennes est en effet une priorité actuelle de la communauté radioastronomique, dont l'un des projets majeurs pour le début du siècle est justement la construction d'un réseau d'une soixantaine d'antennes travaillant dans le domaine millimétrique. Cet interféromètre, fruit d'une collaboration entre les États-Unis, l'Europe et le Japon, et baptisé ALMA pour Atacama Large Millimeter Array, du nom du plateau andin où il sera installé, doit voir le jour en 2007, date à laquelle commenceront les premières opérations, avec un nombre limité d'antennes. Le réseau devra être complété au cours du temps et il est actuellement prévu que les dernières antennes soient livrées aux alentours de 2012.
In fine, le réseau sera composé de 64 antennes de 12 mètres de diamètre, qui devront être réparties sur 240 stations fixes, pour former diverses configurations dont les plus grandes lignes de base s'étaleront entre environ 150 mètres et 14 kilomètres. Le projet d'opération suggère de passer continûment d'une configuration à l'autre[2], de manière à ne pas interrompre l'exploitation de l'instrument le temps de déplacer l'ensemble des antennes. Le problème de la détermination des configurations "optimales" a été étudié par Boone [Boone, 2001, Boone, 2002] et on en dira quelques mots plus loin.

FIG. **XV**.2 – *Le site choisi pour ALMA. Sur la carte du nord du Chili, à gauche, le plateau de Chajnantor est indiqué par un point bleu. La photographie de droite montre une vue du site.*

XV.2.b Objectifs scientifiques

Les motivations scientifiques d'un tel projet sont multiples, et les performances attendues devront fournir à la communauté des astrophysiciens en général et non pas seulement des radioastronomes, des résultats dont l'importance justifie à elle seule les coûts de construction d'un tel instrument. ALMA permettra en effet de mieux comprendre le processus de formation stellaire dans les galaxies proches, ainsi que la naissance des quasars et des galaxies dans l'Univers lointain, par l'observation des raies spectrales de molécules interstellaires, de l'émission submillimétrique des poussières, de transitions atomiques, ou bien encore du fond diffus cosmologique (qui pique à environ 1 mm de longueur d'onde).
L'évolution du projet a connu de nombreuses étapes depuis les premières idées apparues au cours des années 1980. En résumé, ALMA peut être considéré comme la fusion de deux projets distincts, l'un américain, l'autre européen. Le projet américain MMA (pour MilliMeter Array) mettait l'accent sur la couverture en fréquence plus que sur la sensibilité et la résolution. Le projet européen LSA (Large Southern Array) optait quant à lui pour des antennes plus grandes et des configurations plus étendues, maximisant la sensibilité pour l'observation des sources de taille angulaire réduite. Ces choix reposaient sur des objectifs scientifiques différents, mais suffisamment proches pour qu'une fusion des deux concepts soit possible [Booth, 2000].

[2]Du moins pour les configurations les plus compactes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XV.2.c Spécifications technologiques

En ce qui concerne les fréquences d'observation, l'altitude du site de Chajnantor sur le plateau de l'Atacama, qui est d'environ 5000 mètres[3], ainsi que la faible quantité de vapeur d'eau atmosphérique sur le site permettent d'exploiter au mieux les fenêtres du domaine millimétrique et submillimétrique présentées sur la figure **XV**.3.

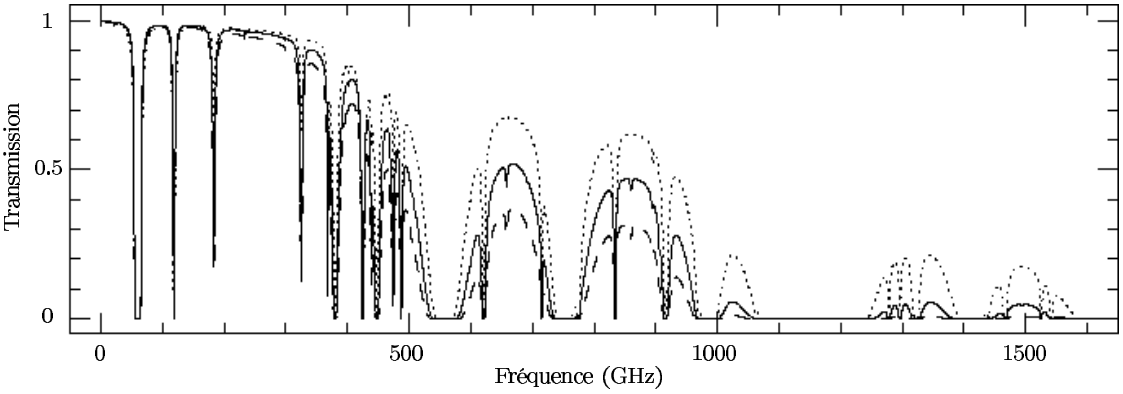

FIG. **XV**.3 – *Transmission atmosphérique calculée pour une observation au zénith sur différents sites et pour une quantité de vapeur d'eau correspondant au premier quartile des statistiques locales en hiver. Le trait plein correspond au site de Chajnantor, les tirets au Mauna Kea, à Hawaï, et les pointillés au Pôle Sud. Figure due à Juan Pardo [Pardo, 2000].*

Les récepteurs construits pour ALMA sont en effet prévus pour fonctionner entre 30 GHz et 950 GHz, c'est-à-dire entre 0,3 mm et 10 mm de longueur d'onde. Le tableau 1, provenant de [Wootten *et al.*, 1998], résume les bandes passantes des différents récepteurs qui devront être installés aux foyers des antennes. Chaque bande de fréquence devra pouvoir être séparée en un grand nombre de canaux (de l'ordre de 1024), permettant d'atteindre une résolution en vitesse d'environ 0,05 km s^{-1}. Le nombre de récepteurs devra en outre tenir compte de la possibilité de traiter les deux polarisations séparément. Au total il faudra compter plus de 1300 récepteurs, ce qui constitue un défi majeur du point de vue technologique.

TAB. 1 – *Les bandes de fréquence prévues pour ALMA*

Numéro	ν_l (GHz)	ν_0 (GHz)	ν_u (GHz)
1	30	35	40
2	67	79	90
3	89	100	116
4	125	144	163
5	163	187	211
6	211	243	275
7	275	323	370
8	385	442	500
9	602	660	720
10	787	869	950

La surface collectrice totale avoisinant les 7000 m^2, la sensibilité d'ALMA sera inégalée dans son domaine de fréquences, d'autant qu'avec 64 antennes, l'instrument sera capable de mesurer 2016 lignes de base simultanément, ce qui, dans le cas des configurations compactes, permet d'obtenir une couverture "complète" du plan (u, v) en mode *snapshot*, comme on le verra plus loin. Par ailleurs, les grandes lignes de

[3]La difficulté logistique avec le manque d'oxygène suggère de procéder aux observations à distance, depuis une station scientifique située dans le village de San Pedro de Atacama.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

base qui seront disponibles permettront d'atteindre des résolutions impressionnantes, jusqu'à moins d'une dizaine de milliseconde d'arc dans le cas de figure optimal (ligne de base de 14 kilomètres et fréquence d'observation 870 GHz). Notons qu'il s'agit là d'une limite théorique, car la résolution sera en pratique limitée du fait des fluctuations spatio-temporelles de la quantité de vapeur d'eau atmosphérique sur le site. Pour minimiser cet effet, il est possible de passer rapidement de l'observation de la source à celle d'un calibrateur selon une méthode nommée *fast switching*. Cependant, cette procédure requiert des antennes dont la conception peut s'avérer très coûteuse. Pour allonger le cycle d'observation entre la source et le calibrateur, les équipes de Cambridge et d'Onsala travaillent actuellement sur des radiomètres, prévus pour être installés sur chacune des antennes, permettant de mesurer les fluctuations de brillance grâce à la raie de H_2O à 183 GHz et d'en déduire les fluctuations de phase dans l'ouverture synthétisée par le réseau d'antennes.

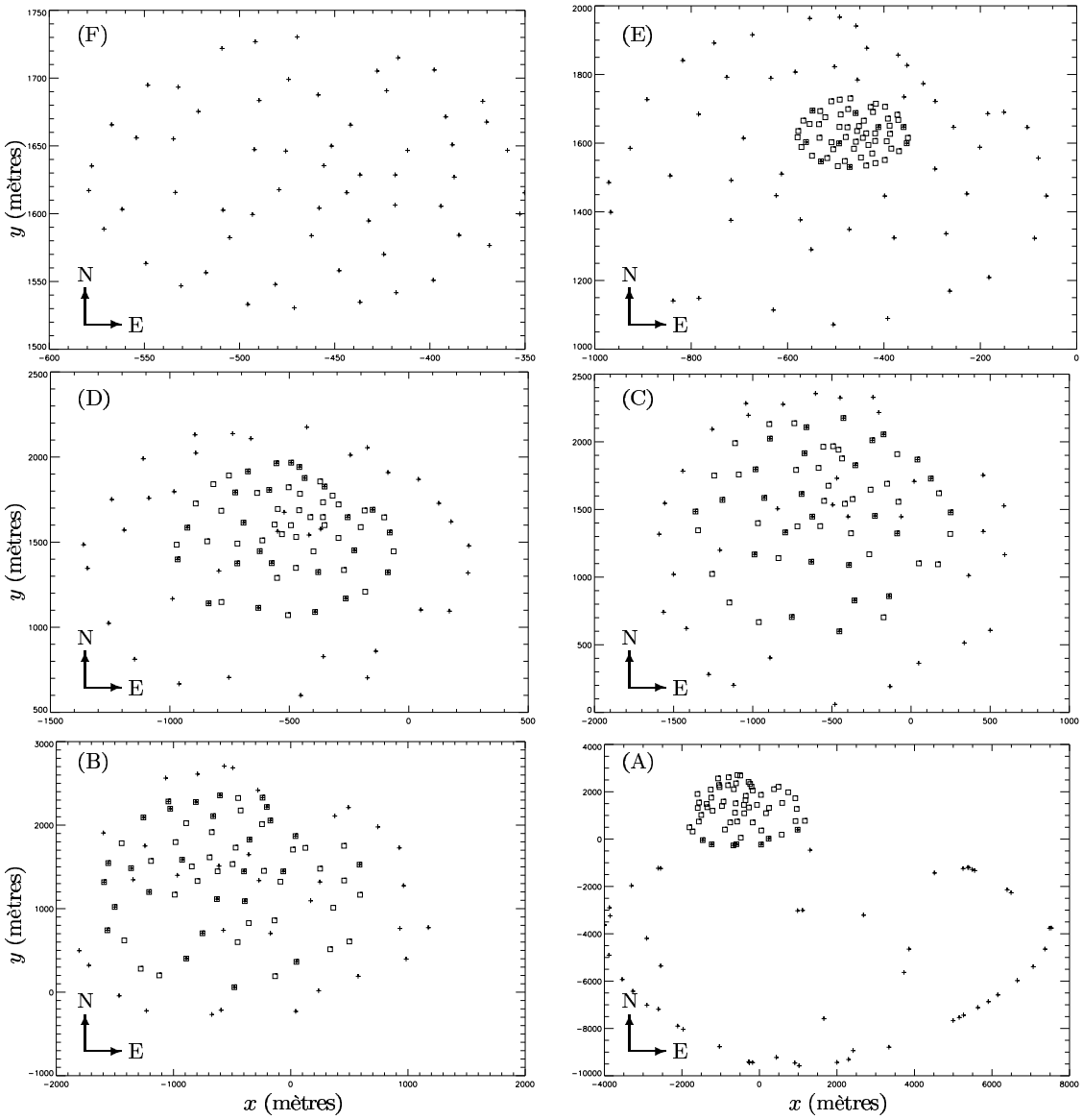

FIG. **XV.4** – *Configurations "optimales" calculées par Boone dans le cadre du projet ALMA. Chacune des configurations comporte soixante antennes, dont les positions sont repérées par les croix. La configuration A est la plus étendue, et la configuration F la plus compacte. Excepté pour cette dernière, on représente également, par des carrés, les positions des antennes dans la configuration précédente. On voit que certaines stations sont réutilisées d'une configuration à l'autre.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XV.2.d Le problème des configurations

Le choix des configurations de base de l'instrument a fait l'objet de nombreuses études (voir [Boone, 2001] et les références qu'il cite), et il faut bien comprendre qu'il n'existe pas de configuration optimale en soi, mais qu'on cherche à obtenir les meilleures solutions d'un problème dépendant évidemment de l'objectif scientifique recherché. On aura en effet plutôt intérêt à choisir une configuration compacte si l'on veut par exemple cartographier un nuage moléculaire proche, alors que l'observation de sources lointaines nécessitera une meilleure résolution et donc une configuration étendue. Comme le fait remarquer Boone [Boone, 2002], l'objectif scientifique peut ainsi se traduire par une distribution "idéale" des composantes de Fourier mesurées dans le plan (u, v). Étant alors donnés les paramètres de l'instrument (nombre d'antennes et de stations), ceux du site (latitude, contraintes du terrain) et ceux de la source (position et durée d'observation), on est confronté à un problème d'optimisation qui est cette fois bien posé, puisqu'on sait qu'il s'agit d'approcher au mieux cette distribution idéale.

Pour résoudre ce problème, Boone [Boone, 2001] a développé un programme d'optimisation dont on va maintenant décrire le principe. On se place dans le cas idéalisé d'une observation instantanée d'une source au zénith. La fonction d'échantillonnage S définie au chapitre **XIV** est alors simplement l'autocorrélation de la fonction décrivant la position des antennes. Comme c'est la distribution de S dans le plan (u, v) qu'il s'agit d'optimiser, on pourrait penser qu'il suffit d'inverser l'autocorrélation en partant de la distribution idéale, mais cela n'est pas toujours possible[4]. La méthode proposée par Boone, à l'opposé, consiste à partir d'une configuration initiale et à la modifier progressivement de façon à ce que la distribution $\mathcal{D}$ de la couverture S s'approche au mieux de la distribution idéale $\mathcal{D}_0$. La modification de la configuration se fait en observant que le déplacement d'une antenne implique le déplacement de $2(N_a - 1)$ points de la couverture, où N_a est le nombre d'antennes, et qu'il existe une relation linéaire entre le déplacement de l'antenne et le mouvement de chaque point de mesure dans le plan (u, v), relation qu'on peut inverser. Le gradient[5] $\boldsymbol{\nabla}(\mathcal{D} - \mathcal{D}_0)$ fournissant le déplacement souhaitable en moyenne pour les points de mesure, on obtient ainsi simplement la direction dans laquelle on doit déplacer l'antenne. On répète le processus de manière itérative pour toutes les antennes jusqu'à ce que la distribution $\mathcal{D}$ converge[6] vers la distribution cible $\mathcal{D}_0$.

Il est également possible de prendre en compte les contraintes imposées par le terrain en interdisant par exemple aux antennes de se déplacer sur certaines zones, puis d'étendre l'optimisation au cas d'observations de durée finie, ainsi qu'aux problèmes du *mosaïcing* et des configurations multiples[7] . La figure **XV.**4 montre le résultat de telles optimisations dans le cas de six configurations de taille croissante. Ce sont ces dernières que nous utiliserons dans la suite.

XV.3 Implémentation d'un simulateur d'instrument

XV.3.a Le choix de la simplicité

La mise en œuvre d'un outil permettant de simuler les observations qu'on peut attendre d'un instrument tel qu'ALMA peut se faire selon plusieurs niveaux de complexité, suivant les paramètres intervenant dans la formation des images sales qu'on choisit d'intégrer à la simulation. La prise en compte des configurations, de la position de l'instrument sur la Terre, de la position de la source dans le ciel, de la durée et de la fréquence d'observation forment sans doute une base incontournable, mais il est bien sûr possible d'inclure de nombreux autres paramètres. On pense notamment aux effets de l'atmosphère, au bruit des récepteurs, aux erreurs de pointage, à la possibilité d'utiliser des fonctions de *gridding* sophistiquées, à la déformation des antennes[8] lorsque la source est basse sur l'horizon, aux effets de *shadowing* quand une antenne fait de l'ombre à une autre, ou encore au brouillage en fréquence et au moyennage temporel, dont on a parlé au chapitre **XIV**. On peut également inclure des procédures réalistes d'observation, en imposant par exemple

[4]Étant donnée une fonction quelconque Y, il n'existe pas nécessairement de fonction X telle que $Y = A_X$.

[5]Le calcul de ce gradient pose clairement des problèmes de définition, du fait de la discrétisation de la couverture.

[6]Comme la distribution idéale n'est pas nécessairement une autocorrélation, le critère de convergence ne doit pas être trop strict. Boone discute d'ailleurs de ce problème [Boone, 2001].

[7]Le coût de construction des stations étant élevé, cette extension du problème revient à imposer de réutiliser le plus grand nombre de stations d'une configuration à l'autre.

[8]Qui implique une modification du lobe ainsi que des erreurs de pointage.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

que les antennes pointent régulièrement un calibrateur, ou encore que l'étendue du champ observé nécessite la construction d'une mosaïque.
Cependant, si l'on souhaite modéliser un grand nombre de ces paramètres, il faut le payer en temps de programmation, et également en temps de calcul, et quant à savoir lesquels de ces paramètres doivent être inclus en premier, il n'est pas clair qu'un consensus soit arrêté. Pour ma part, j'ai choisi l'option de construire un simulateur extrêmement simple, dont je vais maintenant décrire le fonctionnement.

XV.3.b La construction de couvertures (u, v)

Comme on l'a dit, certaines des caractéristiques du simulateur sont incontournables, car celui-ci doit absolument permettre de calculer une couverture (u, v) étant donnés les paramètres de l'instrument et de l'observation. Les positions des antennes au sol ont été fournies par Frédéric Boone sous forme de fichiers de configuration comprenant 9 colonnes. Pour chaque ligne, la première colonne donne le numéro de la station. Les deux suivantes repèrent la position de celle-ci au sol, en mètres, respectivement vers le sud et vers l'est. Enfin, les six dernières colonnes correspondent aux six configurations et indiquent si la station en question accueille ou non une antenne[9]. La figure **XV**.4 présente les positions des antennes dans les six configurations de l'instrument.

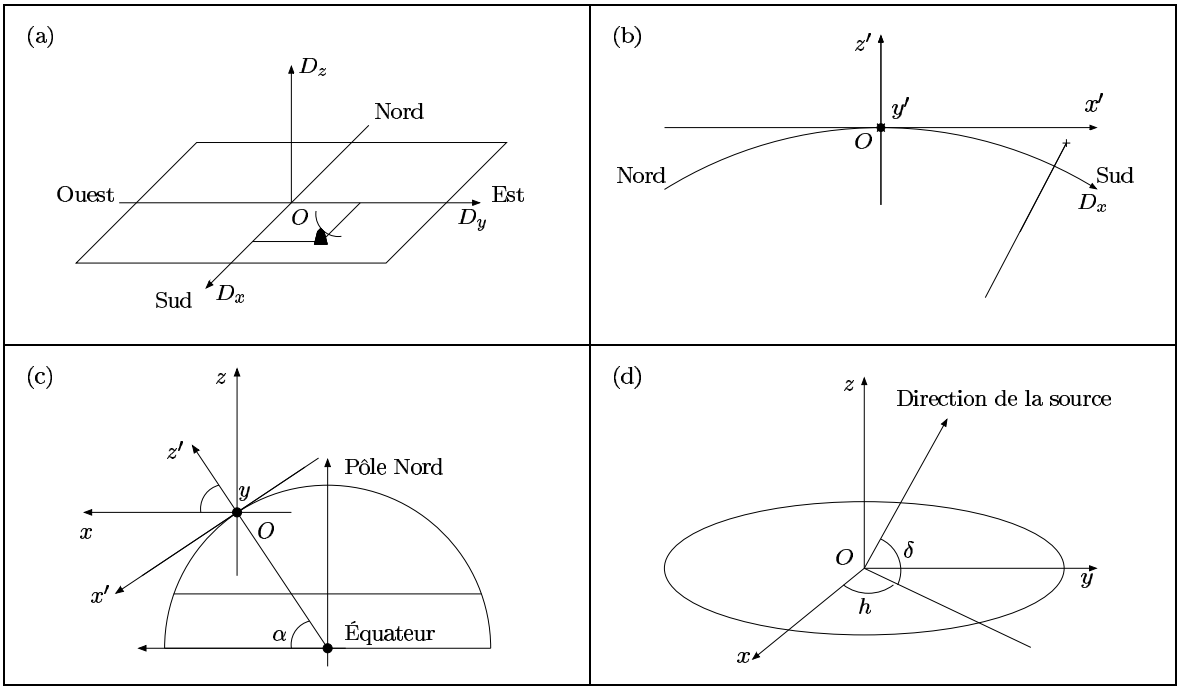

FIG. **XV**.5 – *Représentations schématiques des différents systèmes de coordonnées utilisés pour passer des positions des antennes au sol aux coordonnées (x, y, z) apparaissant dans l'équation (83). La latitude du site de l'interféromètre est notée α. L'angle horaire et la déclinaison de la source sont notés h et δ, respectivement.*

On notera D_x la distance parcourue au sol vers le sud, et D_y la distance au sol vers l'est, comptées à partir du barycentre O des positions des antennes, comme le schématise la figure **XV**.5(a). Ce sont les positions lues dans le fichier de configuration. À partir d'elles, on peut calculer les coordonnées des différentes antennes dans le repère orthonormé $(Ox'y'z')$ représenté sur la figure **XV**.5(b) et défini de la manière suivante : le plan (Ox', Oy') est le plan tangent à la Terre en O et les directions Ox' et Oy' pointent respectivement vers le sud et vers l'est. Étant données les courtes distances au sol mises en jeu, la courbure de la Terre est négligeable et on peut en fait écrire $x' = D_x$, $y' = D_y$ et $z' = 0$. Numériquement, l'erreur relative commise en faisant cette approximation est inférieure à 10^{-7}.

[9]La valeur stockée dans le fichier est un dans le premier cas, zéro dans l'autre.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Le repère $(Ox'y'z')$ est également représenté sur la figure **XV**.5(c), où l'on peut le comparer au repère $(Oxyz)$ qu'on utilisera dans la suite. L'axe Oy est confondu avec Oy', tandis que Ox et Oz sont déduits respectivement de Ox' et Oz' par rotation autour de la direction Oy, de telle sorte que Oz soit parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Les positions des antennes dans le repère $(Oxyz)$ sont soustraites deux à deux pour obtenir les coordonnées des différentes lignes de base. À l'aide de la déclinaison δ et de l'angle horaire h de la source, on passe alors dans l'espace (u, v, w) par application de la transformation linéaire suivante [Thompson *et al.*, 1991],

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin h & \cos h & 0 \\ -\sin\delta\cos h & \sin\delta\sin h & \cos\delta \\ \cos\delta\cos h & -\cos\delta\sin h & \sin\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{83}$$

La déclinaison de la source est inchangée au cours de la rotation terrestre, mais il n'en va pas de même de l'angle horaire, de sorte que le point représentant une ligne de base donnée se déplace dans le plan (u, v), comme on l'a déjà remarqué sur la figure **XIV**.6. La durée totale de l'observation et le temps d'intégration τ_i séparant deux mesures successives complètent le jeu des paramètres permettant de construire la couverture associée à cette observation simulée. La figure **XV**.6 montre le résultat du calcul de six couvertures (u, v) exemplaires, construites à partir de trois des configurations de la figure **XV**.4. On remarque notamment le manque de mesures aux plus petites lignes de base.

XV.3.c Le *gridding*

Les couvertures (u, v) ainsi obtenues correspondent aux fréquences spatiales de la source qui seront effectivement mesurées par l'instrument au cours de l'observation. Or, les champs modèles que nous allons introduire en entrée du simulateur seront échantillonnés sur une grille régulière orthonormée, et pour les raisons qu'on a déjà évoquées au chapitre **XIV**, il est recommandé de ne travailler qu'avec des tableaux réguliers de données, de façon à pouvoir utiliser les algorithmes de transformation de Fourier rapide, ce qui se justifie, en termes de temps de calcul, dès que la taille des images et le nombre de visibilités augmentent. Dans le cas d'ALMA, le seul fait de disposer de 2016 lignes de base simultanément impose de passer par une étape de *gridding*.

Le choix le plus simple pour la fonction de *gridding* G consiste, on l'a dit au chapitre **XIV**, à prendre une fonction nulle en dehors d'un petit rectangle de taille $(\delta u, \delta v)$ centré sur l'origine du plan (u, v) et prenant une valeur constante non nulle à l'intérieur de ce rectangle. C'est ce choix qui a été fait pour le simulateur. Dès lors, il se pose la question de savoir quelle taille de support choisir pour cette fonction de *gridding*. Pour y répondre, il faut prendre en considération plusieurs éléments. Tout d'abord, cette taille ne doit pas être trop petite, sous peine d'obtenir une couverture sur-échantillonnée, avec de nombreux trous. D'autre part, plus les cellules sont petites, plus les images sont grandes, ce qui peut devenir gênant pour la rapidité du simulateur. Inversement, si la taille des cellules est trop grande, on se retrouve avec une couverture sous-echantillonnée, des trous significatifs du plan (u, v) ayant été remplis artificiellement par la convolution. Autrement dit, si la fonction de *gridding* a un support trop grand, on va combiner des visibilités relativement éloignées les unes des autres et donc *a priori* indépendantes, et ainsi fausser la représentation de la brillance. En effet, lorsqu'on corrèle des signaux issus de deux antennes de diamètre d uniformément illuminées, les composantes de Fourier mesurées sont moyennées sur un disque de rayon d. Plus précisément, le poids qui est affecté à une visibilité dépend linéairement de la distance au centre du disque, de sorte que la taille de l'intervalle d'échantillonnage effectif est de l'ordre de d. Le critère de Nyquist impose alors de mesurer les visibilités avec une résolution dans l'espace (u, v) meilleure que $d/2$. En pratique, pour utiliser les algorithmes de déconvolution, on se place souvent à $d/3$ ou mieux.

Ceci est à relier au problème de l'*aliasing*, puisque si l'intervalle d'échantillonnage est trop grand, les différentes répliques de l'image vont se recouvrir. Or, le champ de vue est inversement proportionnel au diamètre d d'une antenne unique, donc la taille "optimale" des cellules dans l'espace doit être de l'ordre de d, et plutôt inférieur à cette valeur pour limiter l'*aliasing*. On a choisi de prendre ici $\delta u = \delta v = d/2$. La figure **XV**.7 montre les résultats obtenus pour les deux couvertures correspondant à la première ligne de la figure **XV**.6. Dans le cas de cette configuration compacte, l'échantillonnage est presque parfait sur une grande plage de fréquences spatiales même sans utiliser la rotation terrestre pour effectuer une synthèse d'ouverture.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

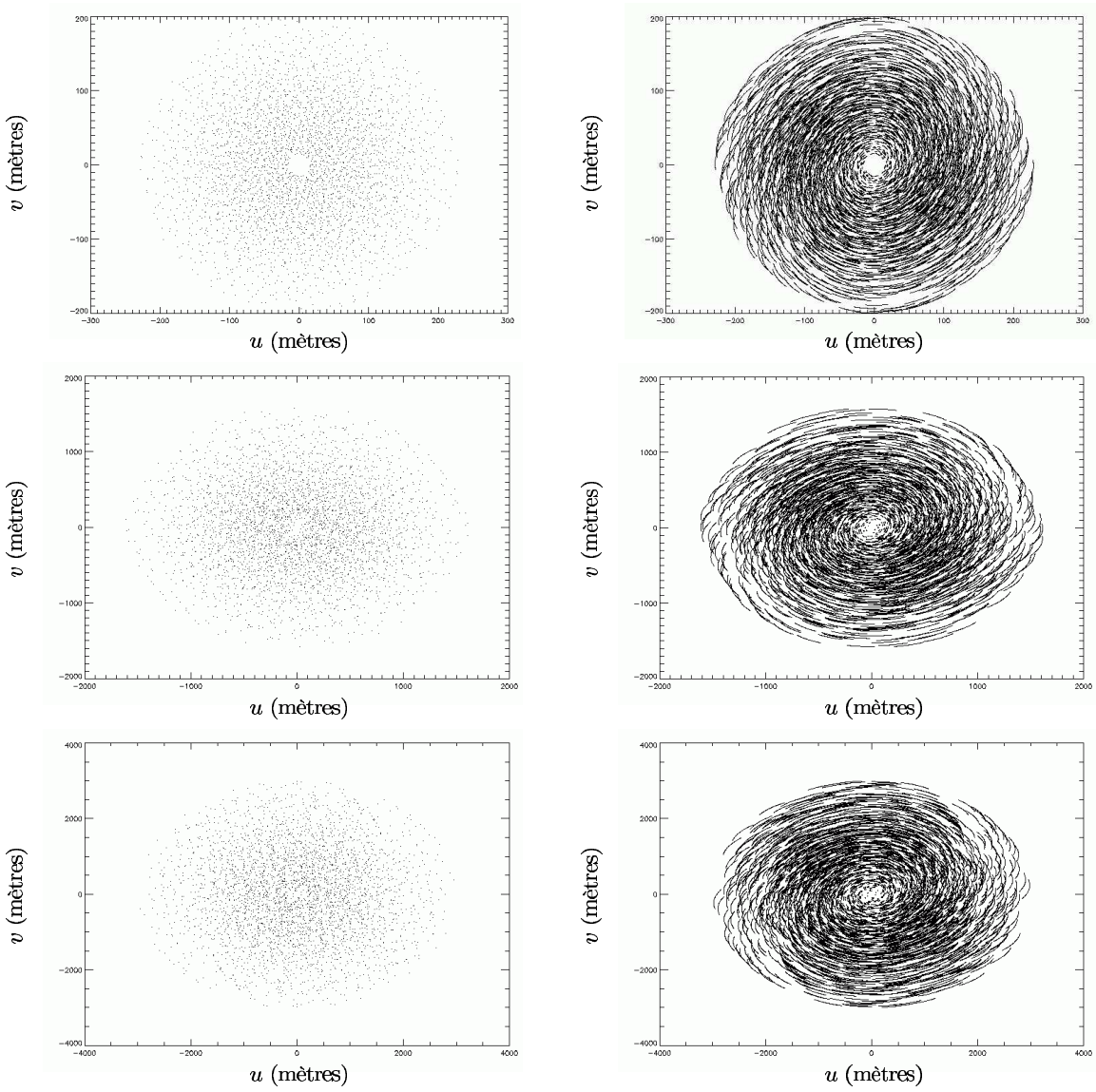

FIG. **XV**.6 – *Exemples de couvertures* (u, v) *calculées par le simulateur. Dans tous les cas, la source est à une déclinaison* $\delta = -23°$*. La colonne de gauche montre une observation instantanée et celle de droite une observation d'une durée de 100 minutes. Les trois lignes correspondent à trois configurations différentes de la figure* **XV**.4*, à savoir, de haut en bas, les configurations F, D et B. L'angle horaire initial est choisi égal à* $h_0 = -5°$*. On note les échelles très différentes entre ces trois configurations.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

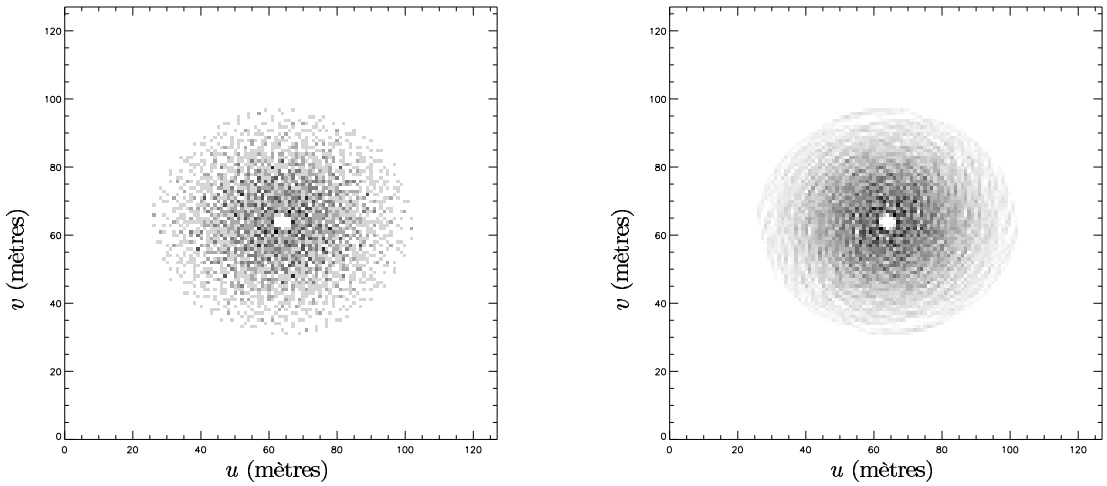

FIG. **XV**.7 – *Couvertures* (u,v) *rééchantillonnées sur une grille orthonormée. Il s'agit des couvertures illustrées sur la première ligne de la figure* **XV**.6. *La taille des cellules dans les deux directions* u *et* v *est égale au rayon d'une antenne.*

XV.3.d Simulation des observations

Maintenant qu'on dispose de couvertures (u,v) et de leurs versions rééchantillonnées, il s'agit de passer à la simulation des observations. Les distributions de brillance modèles introduites en entrée du simulateur seront des champs browniens fractionnaires, tels qu'on les a définis au chapitre **VII**. Si l'on devait respecter la méthode de simulation à la lettre, il faudrait, pour chaque vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ mesuré, se donner une visibilité exacte dont l'amplitude serait déterminée selon une loi de puissance dépendant du module de $\boldsymbol{k}$, et dont la phase serait choisie aléatoirement dans une distribution uniforme entre 0 et 2π, puis rééchantillonner ces visibilités sur la même grille orthonormée. Le problème de cette méthode, c'est qu'assez paradoxalement, elle rend moins bien compte des phases des composantes de Fourier qui sont les mieux mesurées. En effet, la valeur assignée à une cellule donnée est égale à la moyenne[10] des visibilités tombant dans cette cellule, qui sont des nombres complexes dont les phases sont complètement décorrélées et les amplitudes sensiblement identiques. En somme, la valeur rééchantillonnée sera un complexe dont l'amplitude sera en moyenne égale au rapport de l'amplitude d'une seule visibilité à la racine carrée du nombre de visibilités tombant dans cette cellule[11]. En revanche, on ne saurait donner la phase de cette visibilité rééchantillonnée. D'un autre côté, si l'on se donne ces visibilités "brutes", et si l'on souhaite avoir une image de la distribution de brillance modèle, on est confronté au même problème de temps de calcul que celui mentionné plus haut, et donc obligé de rééchantillonner.

La solution de ce probème, c'est probablement de le contourner. Puisque c'est le caractère aléatoire des phases au sein d'une même cellule de l'espace de Fourier qui pose problème, supprimons-le. Cela revient à considérer que les phases des visibilités tombant dans la même cellule sont toutes identiques, et prennent une valeur aléatoire, toujours choisie dans la même distribution. En somme, ce qu'on fait là, c'est considérer que la phase est plus lisse dans l'espace de Fourier que ne le suggère le modèle mathématique, ce qui est parfaitement raisonnable physiquement. En ce qui concerne les amplitudes, rien n'empêche *a priori* de les construire comme on l'a suggéré plus haut avant de les rééchantillonner, cependant il est beaucoup plus simple de supposer que l'amplitude est aussi constante sur une cellule donnée, de sorte qu'on peut se donner les distributions de brillance modèle directement sur la grille régulière, comme sont construits les champs browniens fractionnaires du chapitre **VII**. Dans cette approximation, la simple multiplication de la transformée de Fourier de l'image par la couverture rééchantillonnée W donne les composantes de Fourier de l'image sale. La notation W n'est pas innocente. Elle fait référence au fait que la couverture présentée

[10] On considère une fonction de poids uniforme.

[11] Qu'on se représente une visibilité tombant dans la cellule considérée comme un pas d'une marche aléatoire dans $\mathbb{R}^2$, chaque pas étant de même longueur. La valeur rééchantillonnée est égale à la position finale du marcheur par rapport à son point de départ, divisée par le nombre de pas.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

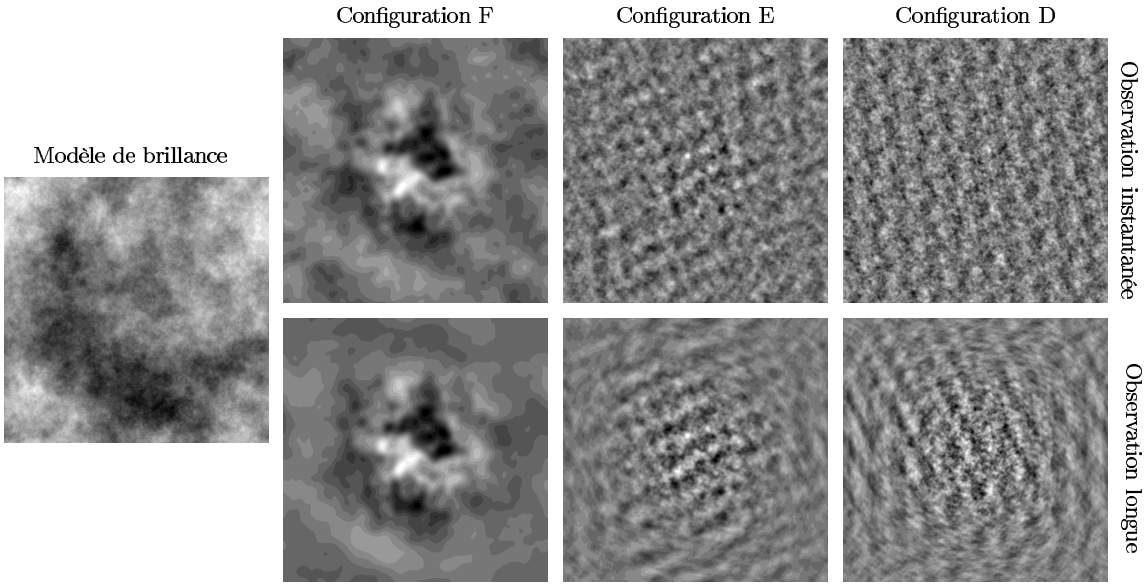

FIG. **XV**.8 – *Exemples de filtrage interférométrique d'une distribution de brillance complexe. L'image de départ est un champ brownien fractionnaire d'indice spectral* $\beta = 3$ *et de taille* 1024×1024*, représenté à l'extrême gauche. Les six autres figures montrent les images sales obtenues dans divers cas. La première ligne correspond au cas d'une observation de type snapshot, la seconde à une observation de durée 100 minutes. Chaque colonne correspond à l'une des trois configurations les plus compactes montrées sur la figure* **XV**.4*. Dans tous les cas, on a utilisé les poids naturels. La taille du champ est de 51 secondes d'arc dans chaque direction.*

sur la figure **XV**.7 inclut les poids naturels affectés aux données, puisque la valeur de chaque cellule est égale au nombre de visibilités qu'elle contient. Si l'on désire les composantes de Fourier de l'image sale dans le cas des poids uniformes, il faut prendre comme filtre non plus W mais son support W_0, c'est-à-dire l'image valant un là où W est non nulle et zéro partout ailleurs.
Il est un dernier point à aborder avant de montrer des exemples du filtrage interférométrique de structures complexes et de passer à l'analyse quantitative. La taille des pixels dans l'espace (u, v) est fixée arbitrairement, on l'a vu, et reste identique d'une configuration à l'autre. Seulement, lorsqu'on éloigne les antennes les unes des autres, il en résulte une augmentation de la taille des tableaux représentant les couvertures, et donc de celle des images. Or on voudrait n'avoir qu'une seule taille d'image de façon à pouvoir comparer les résultats obtenus d'une configuration à l'autre, sur la même distribution de brillance. Il suffit en fait pour cela de plonger les couvertures correspondant aux configurations les plus compactes dans des tableaux plus grands, ce qui ne pose pas de problème puisque justement les pixels ont toujours la même taille. La seule limitation est qu'avec des tableaux très grands le temps de calcul devient prohibitif, de sorte qu'on se limitera aux trois configurations les plus compactes, et à des images de taille 1024×1024.
La figure **XV**.8 montre, pour ces trois premières configurations, l'exemple d'un champ brownien fractionnaire filtré par le simulateur, dans le cadre d'une observation instantanée et d'une observation de 100 minutes, en utilisant les poids naturels. On voit notamment que le trou central de la couverture (u, v) supprime les plus grandes structures, et que la taille caractéristique des structures présentes dans les images sales diminue avec l'étendue de la configuration. D'autre part, on remarque peu de différences entre le *snapshot* et l'observation de longue durée, ce qui correspond au fait que la couverture instantanée des configurations compactes est déjà pratiquement complète, et que par conséquent la synthèse d'ouverture par utilisation de la rotation terrestre n'est pas fondamentalement nécessaire.
Ceci étant posé, on va s'intéresser maintenant aux diagnostics du filtrage interférométrique ainsi simulé en utilisant les divers outils de caractérisation des structures introduits au chapitre **V**.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XVI

Diagnostics de l'effet du filtrage

XVI.1 Introduction

Le simulateur décrit au chapitre **XV** va nous permettre d'étudier les effets du filtrage interférométrique sur des distributions de brillance complexes, telles qu'ALMA pourra en observer dans le milieu interstellaire, et de déterminer les différentes réponses qu'apportent à ce filtrage les outils de caractérisation des structures introduits dans la deuxième partie. Dans l'idéal, ceux-ci devraient être suffisamment robustes pour que leur utilisation sur les distributions de brillance modèles et sur les cartes sales fournissent les mêmes valeurs, ou qu'à défaut la relation entre les deux soit univoque et bien calibrée. On pourra alors dire que l'outil en question permet de remonter aux propriétés des distributions de brillance sans passer par une étape de déconvolution.
Comme on l'a déjà annoncé au chapitre précédent, les champs synthétiques que nous allons "observer" au travers du simulateur instrumental seront des browniens fractionnaires bidimensionnels. Le fait qu'ils possèdent de la structure à toutes les échelles constitue une propriété particulièrement intéressante dans l'optique du filtrage interférométrique, puisque celui-ci est essentiellement de nature spatiale. On a d'ailleurs déjà pu constater visuellement, sur la figure **XV**.8, la dégradation causée par le simulateur sur ce type de champ. De plus, en ce qui concerne les outils de caractérisation des structures, les browniens fractionnaires présentent l'intérêt d'être entièrement déterminés par l'exposant de leur spectre de puissance et par leur carte de phases. Comme le lecteur s'en apercevra, ce chapitre traitera essentiellement de la question de l'indice spectral, le problème des phases étant abordé au chapitre **XVII**.
Ainsi, l'objectif de ce chapitre consiste à évaluer le comportement, vis-à-vis du filtrage interférométrique, des différents outils introduits dans la deuxième partie, à savoir le spectre de puissance, les fonctions de structure, la Δ-variance ou encore la dimension fractale, et à déterminer lesquels sont les plus aptes à fournir des estimations fiables de l'indice spectral des distributions de brillance modèles. Plus précisément, on essaiera de séparer les effets de l'incomplétude de la couverture (u, v) de ceux induits par le lobe primaire, et on introduira également un bruit heuristique de façon à tester plus avant la fiabilité des méthodes de caractérisation choisies.

XVI.2 Les modèles de distribution de brillance

Concernant l'implémentation pratique de cette étude, comme on l'a déjà expliqué au chapitre précédent, on se limitera aux trois configurations les plus compactes de la figure **XV**.4 et on utilisera, comme champs modèles, des browniens fractionnaires de taille 1024×1024, d'indice spectral compris entre 2 et 4. Plus précisément, on se donne 21 valeurs de cet indice, régulièrement espacées, et on construit 21 browniens fractionnaires, représentés sur la figure **XVI**.1, correspondant chacun à un indice spectral différent. Notons que les cartes de phase utilisées pour chacun de ces champs sont toutes différentes, ce qui ne pose pas de problème, comme on le verra dans la suite de ce chapitre.
Pour chacun de ces champs, on applique en premier lieu l'atténuation due au lobe d'antenne. Dans le cas d'une antenne ayant une ouverture de diamètre $d = 12$ m illuminée uniformément, ce lobe est une fonction d'Airy dont la largeur à mi-hauteur est d'environ 27 secondes d'arc, en se plaçant à une longueur d'onde $\lambda = 1,3$ mm. Le champ de vue, lui, fait un peu plus de 51 secondes d'arc dans chaque direction, la taille d'un pixel étant de 0,05 seconde d'arc. La figure **XVI**.2 montre ainsi l'exemple du champ correspondant à $\beta = 3,1$. Le fait que l'on ait choisi ce champ plutôt qu'un autre n'a pas de signification particulière. Le lecteur doit bien être conscient qu'on obtient des résultats semblables avec les autres champs de la figure **XVI**.1.
À partir de ces images propres atténuées par le lobe primaire, on construit ensuite six images sales, correspondant aux deux fonctions de poids (naturel et uniforme) et aux trois configurations les plus compactes

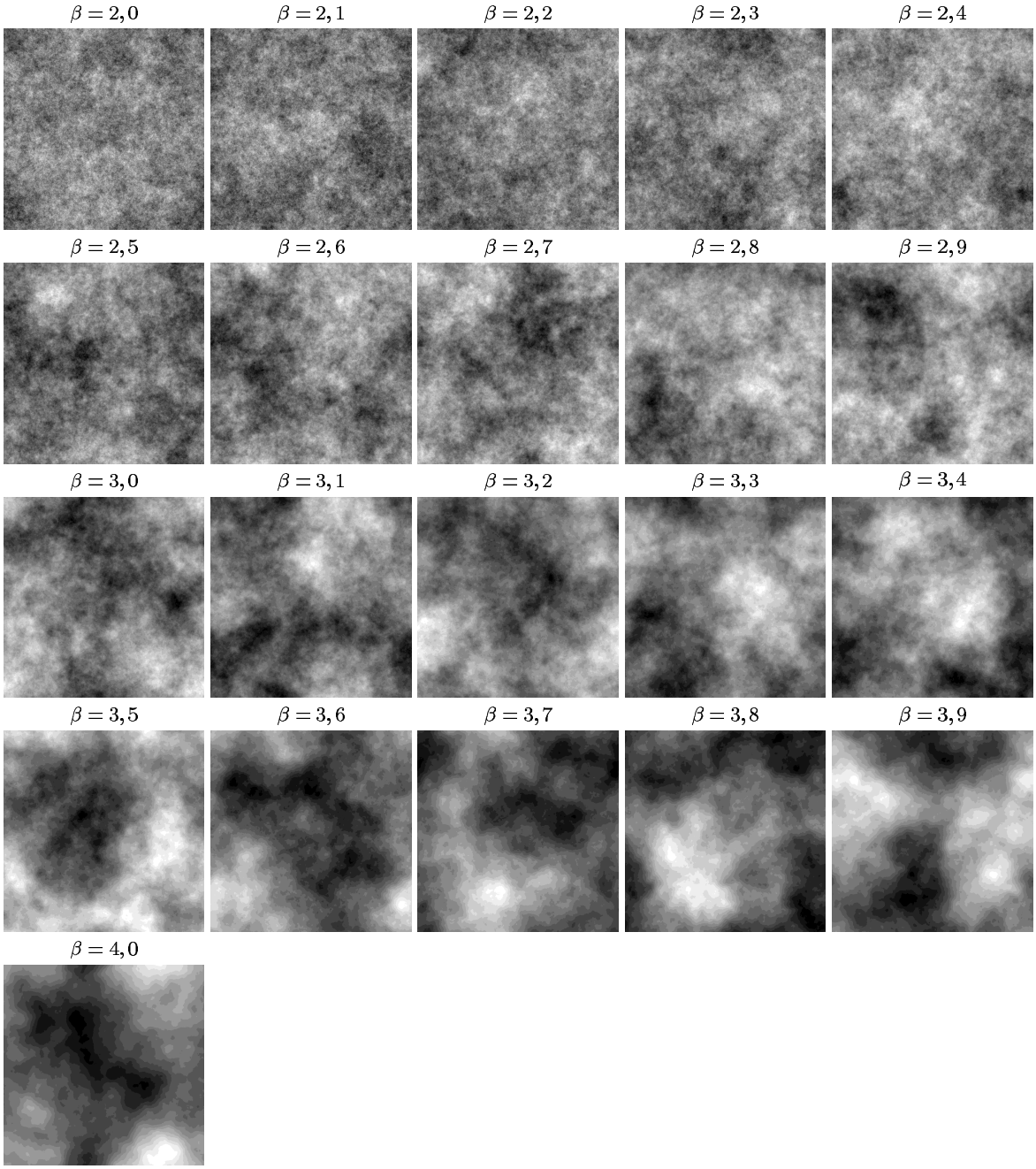

FIG. **XVI.**1 – *Modèles de distribution de brillance utilisés en entrée du simulateur. L'indice spectral de chacun de ces champs est indiqué sur chaque sous-figure. Les cartes de phase ne sont pas conservées d'un modèle à l'autre.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

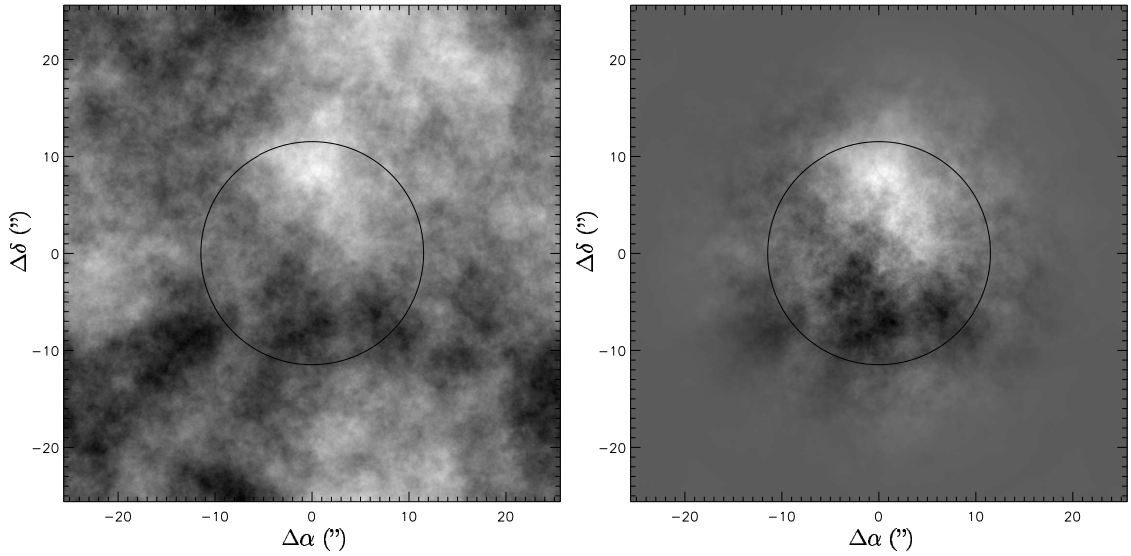

FIG. **XVI**.2 – *Atténuation par le lobe primaire. La distribution de brillance d'indice spectral $\beta = 3,1$ est représentée sur la figure de gauche. À droite, on peut voir la distribution obtenue après multiplication par le lobe primaire, celui-ci étant caractérisé par une largeur à mi-hauteur de 27", indiquée par le cercle noir sur chacune des deux figures. Les axes sont gradués en secondes d'arc par rapport au centre de pointage. La taille d'un pixel est de 0,05" × 0,05".*

(F, E et D) de la figure **XV**.4. Dans tous les cas, l'observation se fait en mode *snapshot*, c'est-à-dire sans utiliser la rotation terrestre pour remplir le plan (u, v), et en supposant que le centre de pointage se trouve à la position $\alpha = -5°$ et $\delta = -23°$. On a vu très qualitativement, à la fin du chapitre précédent, que la synthèse d'ouverture par ce biais n'apportait pas grand chose de plus dans le cas des configurations compactes d'ALMA. La figure **XVI**.3 présente les images sales obtenues de cette manière dans le cas de la distribution de brillance déjà représentée sur la figure **XVI**.2 et correspondant à $\beta = 3,1$. Les remarques essentielles concernant cette figure sont les mêmes que celles qu'on a faites à propos de la figure **XV**.8.
En ce qui concerne l'introduction de bruit dans les données, on en discutera plus loin, sachant bien entendu que celui-ci modifiera les cartes sales de la figure **XVI**.3. Dans tout ce qui suit, on notera X les modèles de distribution de brillance, et Y les images sales en sortie du simulateur.

XVI.3 Spectre de puissance

XVI.3.a Effet attendu

Comme on l'a dit, l'une des propriétés essentielles des champs browniens fractionnaires introduits en entrée du simulateur est le fait que leur spectre de puissance suit une loi de puissance sur l'ensemble des échelles échantillonnées dans l'image, et l'exposant de cette loi est donc une caractéristique de la distribution de brillance que l'on va chercher à retrouver à partir des images sales. Dans ce contexte, il est logique de commencer par étudier l'effet du filtrage sur le spectre de puissance lui-même.
Le spectre de puissance brut, c'est-à-dire non moyenné azimutalement, est égal, en chaque point du plan (u, v), au carré du module de la transformée de Fourier du champ. Par conséquent, le diagnostic du spectre de puissance doit être évalué dans l'espace des visibilités plutôt que dans l'espace image.
Les spectres de puissance de l'image modèle et de l'image sale obtenue dans une simulation donnée, notés respectivement $\mathcal{P}_X$ et $\mathcal{P}_Y$, sont alors

$$\mathcal{P}_X = |V_0|^2 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_Y = |W(\widehat{P}_\nu * V_0)]|^2 = |W|^2 \times |\widehat{P}_\nu * V_0|^2,$$

en rappelant que cette écriture est une version simplifiée de celle de la figure **XV**.1, en ce sens qu'elle suppose le *gridding* déjà inclus dans les images modèles, ce qu'on a discuté au chapitre précédent, et qu'elle ignore

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

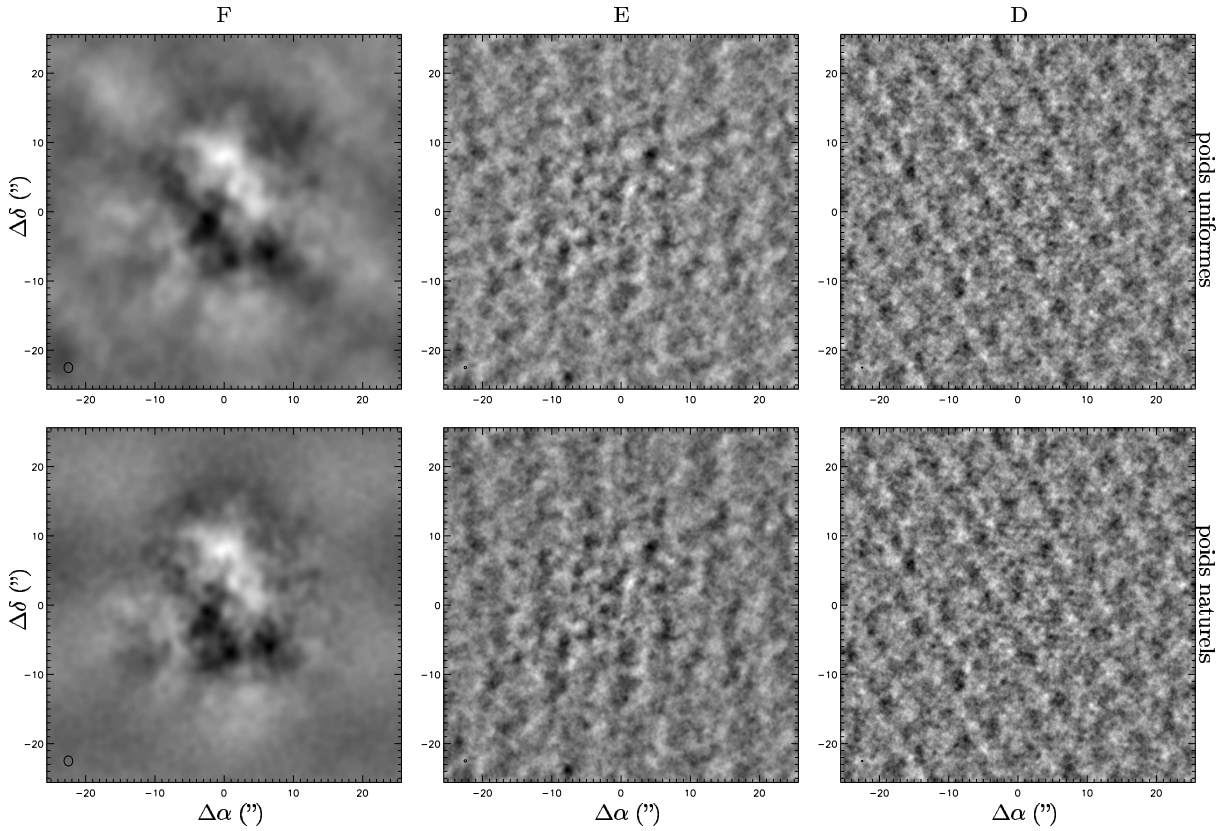

FIG. **XVI**.3 – *Images sales obtenues en sortie du simulateur, correspondant au modèle de distribution de brillance caractérisé par un indice $\beta = 3,1$, représenté sur la figure* **XVI**.2. *Chaque colonne correspond à l'une des trois configurations F, E ou D, et chaque ligne à l'une des deux fonctions de poids. La taille du lobe synthétisé (FWHM) est indiquée en bas à gauche de chaque sous-figure (difficilement visible dans le cas des configurations E et D).*

la réplication due au rééchantillonnage. On a justifié cette dernière approximation au chapitre précédent en disant que l'atténuation par le lobe primaire permettait *a priori* d'éviter que l'*aliasing* ne se fasse sentir[1]. Aux points du plan (u, v) effectivement mesurés, c'est-à-dire où la couverture W est non nulle, le rapport du spectre de puissance $\mathcal{P}_Y$ au carré du module de celle-ci donne une première estimation du spectre de puissance de l'image modèle. Notons que dans le cas où l'on utilise une fonction de poids uniforme, cette estimation est directement fournie par $\mathcal{P}_Y$.
Il subsiste le problème posé par le lobe primaire, dont l'effet est une convolution dans l'espace de Fourier. Le noyau de cette convolution est une fonction triangle[2] relativement étroite, et ce d'autant plus que le lobe primaire couvre une plus grande partie du champ. Étant données les valeurs qu'on a prises ici, à savoir un champ de $51,2'' \times 51,2''$ et un lobe primaire dont la largeur à mi-hauteur vaut environ 27" pour $\lambda = 1,3$ mm, la taille du noyau de convolution appliqué aux vraies visibilités est de l'ordre de deux pixels. Par conséquent, l'approximation consistant à écrire $\mathcal{P}_Y \simeq |W|^2 \mathcal{P}_X$ est amplement justifiée, ce qui montre qu'on doit pouvoir retrouver directement la statistique de l'image modèle à partir de celle de l'image sale.

XVI.3.b Approche numérique

Les simulations faites sur les champs browniens fractionnaires de la figure **XVI**.1 permettent de vérifier ces idées. En ce qui concerne l'influence du lobe primaire, on montre, sur la figure **XVI**.4, et toujours dans le cas $\beta = 3,1$, les spectres de puissance de l'image de départ, ainsi que le spectre brut et le spectre moyenné

[1] Ce qu'on peut remettre en question, par exemple s'il existe une source dans l'un des lobes secondaires du lobe d'antenne. Il est alors possible que l'émission de cette source soit repliée dans le lobe primaire.
[2] Transformée de Fourier d'une fonction d'Airy.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

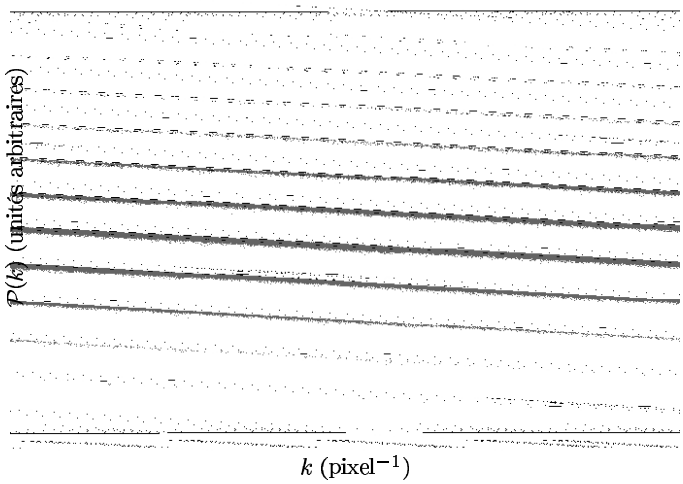

FIG. **XVI**.4 – *Effet du lobe primaire sur le spectre de puissance. Le spectre correspondant à l'image initiale est représenté par les losanges, et il suit une loi de puissance d'exposant -3,1. Les points gris représentent quant à eux le spectre de puissance brut de l'image atténuée par le lobe primaire, et le trait continu en est la moyenne azimutale, dont on montre qu'elle suit également une loi de puissance, de même indice que la loi initiale(tirets).*

azimutalement de l'image atténuée par le lobe primaire.

On voit notamment que si la convolution des visibilités V_0 par la fonction $\widehat{P}_\nu$ altère sensiblement le spectre de puissance brut, en introduisant une dispersion d'autant plus forte qu'on se place aux grands nombres d'onde, on retrouve néanmoins le comportement en loi de puissance lorsqu'on applique une moyenne azimutale. Par ailleurs, le fait que le spectre de puissance de l'image atténuée soit systématiquement inférieur à celui de l'image initiale peut s'interpréter en remarquant qu'effectuer la convolution correspondant à la multiplication par le lobe d'antenne dans l'espace réel revient à moyenner localement les visibilités. Comme on en a déjà discuté au chapitre précédent, cela a pour effet de diminuer l'amplitude des visibilités, ce qu'on observe directement sur le spectre de puissance.

En ce qui concerne le filtrage spatial par la couverture incomplète W, on observe bien l'effet attendu. La figure **XVI**.5 montre ainsi les spectres de puissance des images sales associées aux configurations F et E, dans le cas d'une fonction de poids uniforme. Comme on l'a dit, on s'attend à ce que le spectre de puissance brut des images sales soit alors simplement un sous-ensemble du spectre de puissance de l'image de départ, correspondant aux points effectivement mesurés dans le plan (u, v). C'est ce qu'on voit sur la figure. Si les spectres de puissance bruts des images sales ne s'alignent pas sur la droite du spectre de l'image initiale, c'est qu'il faut prendre en compte l'effet du lobe. En effet, si l'on ne prend pas en compte cette atténuation et qu'on effectue simplement le filtrage spatial, on obtient un spectre parfaitement aligné avec celui d'origine, comme le montre la figure. Dans le cas "réaliste", la moyenne azimutale suffit à redonner une loi de puissance de même exposant que le spectre de puissance de la distribution de brillance modèle.

Le cas des poids naturels est présenté sur la figure **XVI**.6. On voit notamment, dans le cas de la configuration F, que le spectre de puissance, qu'il soit brut ou moyenné azimutalement, présente une pente différente de celle du spectre de puissance de la distribution de brillance originale, qu'on a représentée par le trait en pointillés. En corrigeant des poids, c'est-à-dire en divisant le spectre par le carré de la couverture, on retombe bien sur la loi de puissance attendue. Le cas de la configuration E est également intéressant parce que le spectre de puissance non corrigé est identique au spectre corrigé, ce qu'on interprète simplement par le fait que dans cette configuration, il existe au plus une visibilité tombant dans une cellule donnée.

L'ajustement d'une loi de puissance sur le spectre de puissance, moyenné azimutalement, des images sales correspondant aux poids uniformes préalablement atténuées par le lobe primaire, semble donc redonner l'indice spectral de la distribution de brillance modèle. Pour vérifier cette hypothèse, on montre, sur la figure **XVI**.7, le résultat de tels ajustements[3] effectués d'une part pour chaque configuration séparément

[3]Les résultats sont présentés en termes d'exposants de Hurst, pour permettre la comparaison avec les diagnostics qui suivront.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

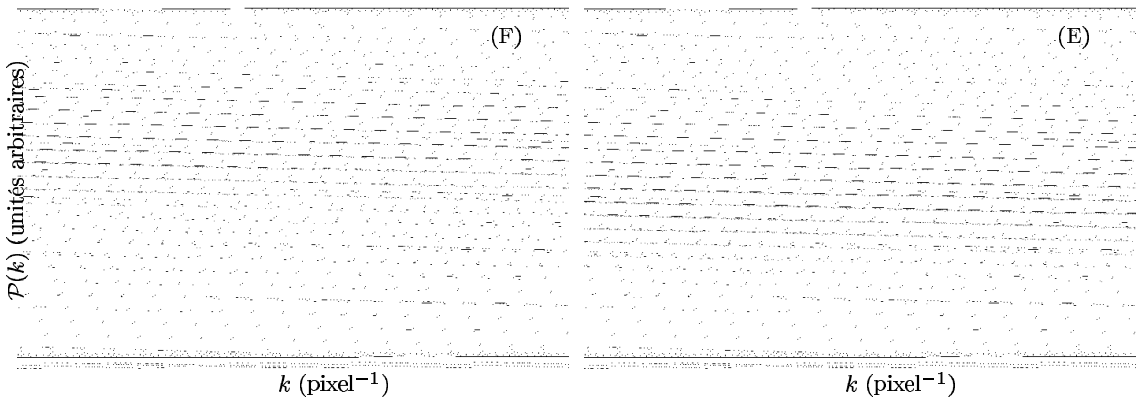

FIG. **XVI**.5 – *Effet du filtrage spatial dans le cas d'une fonction de poids uniforme. La figure de gauche correspond à la configuration F, celle de droite à la configuration E. Le spectre de puissance des images sales est représenté par le nuage de points gris. La moyenne azimutale de ce spectre brut est le trait plein qui traverse ce nuage. Pour comparaison, on montre le spectre de puissance de l'image originale (droite en trait plein) et le spectre de puissance brut d'une image filtrée mais non atténuée par le lobe primaire (croix). Les tirets, représentant une loi de puissance de même exposant que le spectre de puissance de départ, montrent que la moyenne azimutale du spectre de puissance de l'image sale permet de remonter à l'indice spectral initial.*

et d'autre part sur la combinaison des trois spectres de puissance correspondant aux trois configurations. On observe qu'il existe des écarts entre les mesures et les valeurs théoriques, mais que ces écarts sont relativement faibles, et surtout qu'il n'existe pas d'erreur systématique comme on en verra dans la suite. Par ailleurs, lorsqu'on combine les mesures faites dans les trois configurations en un seul jeu de données, les ajustements obtenus sont encore améliorés. Notons enfin que les écarts observés sont entièrement attribuables à l'effet du lobe primaire. En effet, si l'on considère les images sales non atténuées par celui-ci, les indices spectraux obtenus par ajustement redonnent exactement les indices des distributions de brillance initiales.

XVI.4 Δ-variance

XVI.4.a Quelques remarques préliminaires

On a introduit, au chapitre **V**, les notions de variance d'Allan et de Δ-variance, en remarquant notamment qu'elles sont étroitement liées au spectre de puissance $\mathcal{P}_X$, puisqu'on peut écrire leurs valeurs à une échelle donnée comme une intégrale de ce spectre, pondérée par une fonction filtre $\mathcal{P}_{G_{n,\rho}}$ dépendant de l'échelle considérée, ce qu'exprime l'équation (10), qu'on réécrit ici par commodité,

$$\sigma_\Delta^2(2\rho) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k})\mathcal{P}_{G_{2,\rho}}(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k} \quad \text{en se plaçant en dimension 2.}$$

L'application de cette méthode aux champs browniens fractionnaires bidimensionnels (voir le chapitre **VII**) a d'ailleurs permis de montrer qu'on pouvait déduire l'indice spectral β à partir du comportement de la Δ-variance en fonction de l'échelle, puisque $\sigma_\Delta^2(\rho) \propto \rho^{\beta-2}$.
L'utilité de cet outil se manifeste en pratique par le fait qu'on peut la calculer de la même façon sur des champs périodiques et non périodiques [Bensch *et al.*, 2001, Ossenkopf & Mac Low, 2002], alors que ce dernier cas de figure pose des difficultés lorsqu'on cherche à calculer le spectre de puissance[4]. Dans notre cas, la question ne se pose pas ainsi, puisque les modèles de distribution de brillance sont par construction

[4]Les méthodes de transformée de Fourier rapide font l'hypothèse implicite que le champ est périodique. S'il ne l'est pas, on est confronté à des effets de discontinuité qui perturbent donc le calcul du spectre de puissance.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

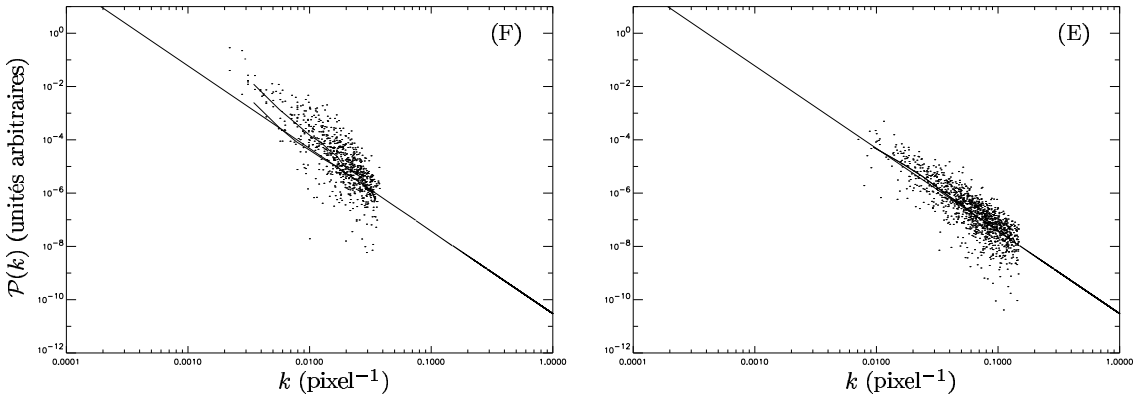

FIG. **XVI.**6 – *Effet du filtrage spatial dans le cas d'une fonction de poids naturelle. La figure de gauche correspond à la configuration F, celle de droite à la configuration E. Le spectre de puissance des images sales, non corrigé de la couverture, est représenté par le nuage de points et la courbe en tirets, qui correspond à la moyenne azimutale du spectre brut. La courbe en trait plein représente le spectre de puissance moyenné azimutalement, après correction des poids. Pour comparaison, on présente également une loi de puissance de même exposant que le spectre de puissance de départ (pointillés).*

périodiques et qu'il en va donc de même des images en sortie du simulateur. Il ne faudrait pas en conclure que l'étude de l'effet du filtrage interférométrique sur le diagnostic de la Δ-variance n'a alors pas d'intérêt, car dans le cas de l'imagerie directe d'une distribution de brillance réelle, non-périodique, c'est cet outil, plus que le calcul direct du spectre de puissance, qui fournit les estimations les plus fiables de l'indice spectral [Bensch *et al.*, 2001][5].

XVI.4.b Effet du lobe primaire

Que peut-on s'attendre à observer en calculant la Δ-variance d'une image sale ? Comme pour le spectre de puissance, séparons le raisonnement concernant l'effet du lobe primaire de celui concernant le filtrage spatial proprement dit. On a dit à la section précédente que le spectre de puissance de l'image multipliée par le lobe primaire devait s'interpréter à la lumière de la convolution équivalente dans l'espace de Fourier. Dans notre cas, le noyau de cette convolution est très étroit, étant donnée la grande taille du lobe primaire. Lorsqu'on se place à des échelles ρ relativement petites, la fonction filtre ne présente que des variations lentes avec la fréquence spatiale, de sorte qu'on peut la considérer comme presque constante. La Δ-variance est alors simplement proportionnelle à l'intégrale, sur tout l'espace de Fourier, du spectre de puissance de l'image atténuée. En intégrant d'abord sur l'angle, on a déjà vu que la moyenne azimutale de ce spectre redonnait la loi de puissance de la distribution de brillance de départ. On s'attend donc à ce que la Δ-variance des images atténuées par le lobe primaire suive le même comportement que celle des images initiales, tout au moins aux échelles suffisamment petites. C'est ce que montre effectivement la figure **XVI.**8. En raisonnant dans l'espace direct, on peut dire plus simplement que les échelles notablement plus petites que le lobe ne sont pas affectées, puisque ce dernier est quasi-constant.

La Δ-variance mesurée sur l'image atténuée par le lobe primaire suit effecitvement la même loi de puissance que lorsqu'on la calcule sur la distribution de brillance modèle, sauf aux échelles supérieures à environ 3", soit 60 pixels ou encore 6% de la taille de la carte. Le fait que la Δ-variance soit plus petite dans le cas atténué correspond au fait que le spectre de puissance est lui aussi plus faible. Le comportement au-delà de l'échelle limite est en revanche difficile à expliquer.

[5]Notons que dans ce qui suit, c'est l'algorithme "PIX" de [Bensch *et al.*, 2001] qui est utilisé pour calculer la Δ-variance. On pourra se reporter au chapitre **V** pour plus de précisions.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

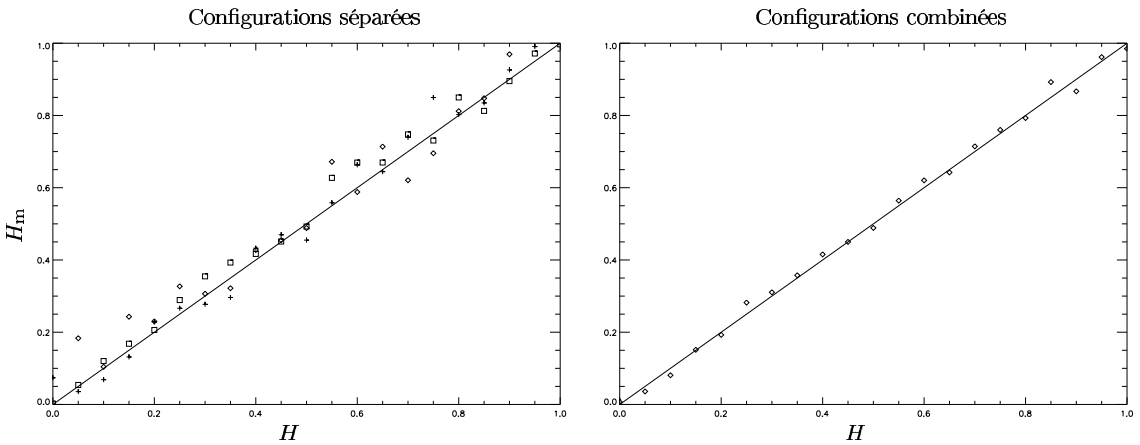

FIG. **XVI**.7 – *Évolution de l'exposant de Hurst mesuré H_m à partir d'un ajustement des spectres de puissance des cartes sales, moyennés azimutalement, en fonction de l'exposant théorique H. La figure de gauche montre les résultats obtenus en séparant les données correspondant aux configurations F (losanges), E (croix) et D (carrés), tandis que la figure de droite montre les ajustements obtenus en combinant les trois spectres de puissance.*

XVI.4.c Effet du filtrage spatial

Premières observations

La fonction filtre $\mathcal{P}_{G_{2,\rho}}$ est une fonction positive, comme le montre son expression (11). Par conséquent, l'absence de mesure en certains points de l'espace de Fourier, qu'on peut concevoir comme l'annulation des composantes correspondantes, doit aboutir à une diminution de la valeur de la Δ-variance mesurée pour chaque échelle. Inversement, si l'on se place dans le cas d'une fonction de poids naturelle et de la configuration la plus compacte, certaines composantes de Fourier dans le voisinage de l'origine $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$ sont renforcées par l'accumulation des visibilités dans les cellules de l'espace (u, v). Les valeurs de la Δ-variance mesurées aux échelles correspondantes, c'est-à-dire aux plus grandes échelles, devraient donc être plus importantes sur l'image filtrée que sur l'image initiale.

C'est ce qu'on observe immédiatement sur la figure **XVI**.9, qui montre la Δ-variance mesurée sur les images filtrées par l'interféromètre dans les trois configurations considérées, sans atténuation préalable par le lobe primaire. La distribution de brillance modèle est toujours celle d'indice spectral $\beta = 3,1$, mais les résultats sont semblables pour les autres images initiales. On voit notamment que les mesures effectuées sur les images filtrées sont systématiquement inférieures à celles portant sur le modèle de départ, sauf dans le cas de la configuration F et de la fonction de poids naturelle. D'ailleurs, comme on l'avait remarqué à propos du spectre de puissance, le choix des poids n'a en fait pas d'incidence sur la Δ-variance dans le cas des configurations E et D. D'autre part, les chutes observées aux petites et aux grandes échelles correspondent aux rayons limites des couvertures dans le plan (u, v).

On pourrait hâtivement en conclure, d'après le cas des poids uniformes, que seule la configuration la plus compacte possède une couverture complète sur une certaine plage de nombres d'onde, du fait que les valeurs de la Δ-variance mesurées entre les échelles $\rho = 1,8''$ et $\rho = 3''$ redonnent les valeurs de la carte initiale. C'est oublier qu'un trou dans la couverture (u, v) se fait sentir sur une grande plage d'échelles, comme le montre la figure **XVI**.10, qui présente la Δ-variance mesurée sur une image filtrée par une couverture complète sauf en un point[6], rapportée à la Δ-variance de l'image de départ. Les valeurs affectées par cette incomplétude ne sont pas parfaitement localisées, du fait de l'intégration sur l'espace de Fourier et de la largeur finie de la fonction filtre. Ainsi, les configurations E et D peuvent parfaitement comporter des plages de nombres d'onde entièrement mesurées, sans que l'on dispose pour autant d'une plage d'échelles sur laquelle la Δ-variance ne serait pas affectée.

[6]Ce cas de figure est purement académique. Dans le cas d'une observation interférométrique réelle, s'il manque un point de mesure, il en manque au moins $2(N_a - 1)$, où N_a est le nombre d'antennes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

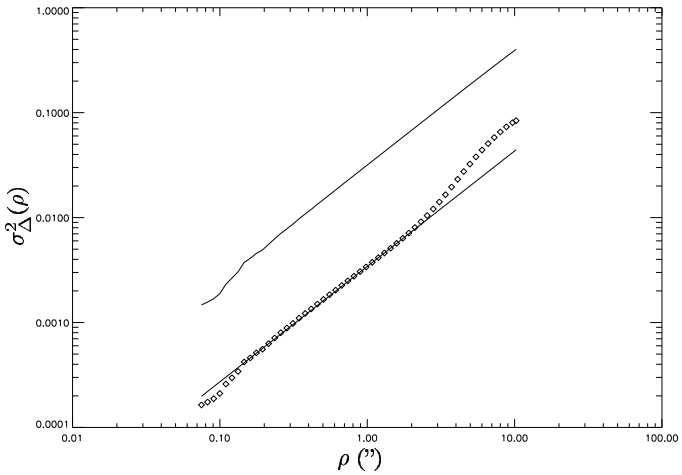

FIG. **XVI**.8 – *Effet du lobe primaire sur la Δ-variance. Les losanges correspondent aux mesures faites sur la distribution de brillance repérée par $\beta = 3,1$, atténuée par le lobe primaire. À titre de comparaison, la Δ-variance mesurée sur l'image non atténuée est représentée par le trait plein, et les tirets correspondent à une loi de puissance d'indice 1,1.*

"Reconstruction" de la Δ-variance

L'observation de la figure **XVI**.9 semble indiquer que l'évolution de la Δ-variance des images filtrées en fonction de l'échelle ne fournit pas directement l'indice spectral de la distribution de brillance initiale. En effet, à part pour la configuration F dans le cas d'une fonction de poids uniforme, on ne voit pas clairement de comportement en loi de puissance. Il est donc important de se demander s'il est possible, à l'aide de manipulations simples des données, de remonter à cet indice spectral à partir de la Δ-variance mesurée sur une image filtrée. Pour aborder ce problème, remarquons que celle-ci est reliée au spectre de puissance par l'équation (10), dont la forme discrète est

$$\sigma^2_\Delta(2\rho) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{9}{8}\right)^2 \sum_{\boldsymbol{k}} \mathcal{P}_X(\boldsymbol{k})|W|^2(\boldsymbol{k}) \left[\frac{J_1(2\pi k\rho)}{\pi k\rho} - \frac{J_1(6\pi k\rho)}{3\pi k\rho}\right]^2 \Delta k^2, \tag{84}$$

en explicitant le spectre de puissance (11) de la fonction filtre, et où Δk est la taille d'un pixel dans l'espace de Fourier. On rappelle que l'effet du lobe primaire n'est pas pris en compte ici, ce qui permet d'écrire $\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_X|W|^2$. Ainsi, et sans surprise, la contribution d'un pixel $\boldsymbol{k}_0$ à la Δ-variance à une échelle donnée est entièrement déterminée par la valeur du spectre de puissance $\mathcal{P}_X$ en ce point. La déformation des courbes de la figure **XVI**.9, par rapport au cas sans filtrage, s'interprète en disant que certaines de ces contributions sont manquantes, étant bien entendu que ces dernières correspondent aux trous de la couverture (u, v). Si l'on veut retrouver le comportement en loi de puissance, il faut donc nécessairement faire une hypothèse sur la valeur du spectre de puissance aux points non mesurés[7].

Dans le cadre de nos simulations, il suffit cependant de supposer que le champ observé est isotrope, au sens où le spectre de puissance ne dépend que du nombre d'onde k et non de la direction du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Cette hypothèse va nous permettre de retrouver un comportement en loi de puissance sur une certaine plage d'échelles, en se fondant simplement sur les visibilités. Pour simplifier, on se place dans le cas d'une fonction de poids uniforme, mais le raisonnement peut s'appliquer, sous réserve de quelques modifications, au cas des poids naturels. Les points non mesurés dans le plan (u, v) peuvent être considérés comme appartenant à un anneau caractérisé par des rayons intérieur et extérieur égaux à $k \pm \Delta k/2$. Si l'on ne se place pas à des fréquences spatiales trop petites ou trop grandes[8], cet anneau contient alors un nombre p non nul de pixels où les visibilités ont été mesurées, et un nombre q de pixels où elles ne l'ont pas été, comme le schématise la figure **XVI**.11.

L'hypothèse d'isotropie consiste à supposer que les amplitudes des coefficients de Fourier associés à ces $p+q$ pixels sont toutes identiques. Les poids étant uniformes, cela revient à supposer que les visibilités mesurées

[7]Ce qui ne surprendra pas le lecteur familier des problèmes liés à la déconvolution.
[8]Les fréquences spatiales limites correspondent aux espacements minimal et maximal entre deux antennes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

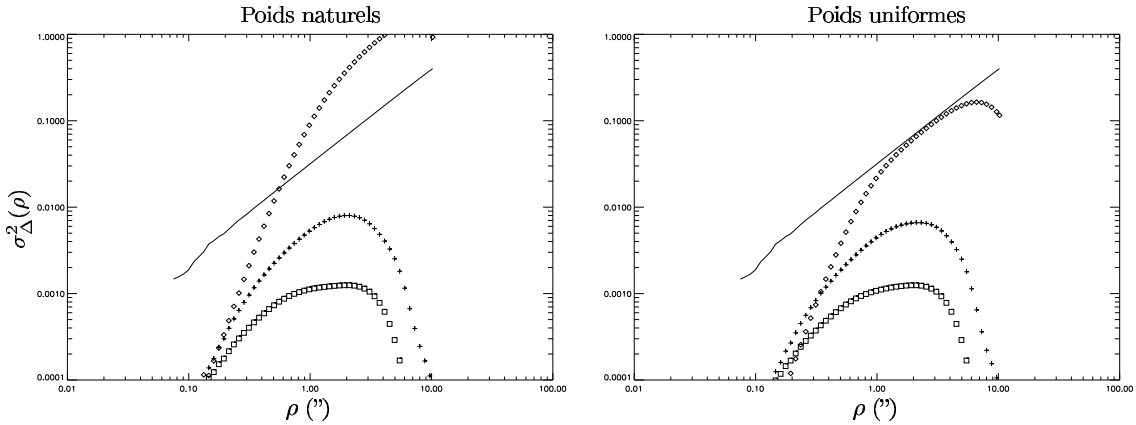

FIG. **XVI**.9 – *Effet du filtrage spatial seul sur la Δ-variance. La figure de gauche correspond à une fonction de poids naturelle, celle de droite à une fonction de poids uniforme. Sur chaque figure, on présente les mesures faites sur les images filtrées par les trois configurations les plus compactes, F (losanges), E (croix) et D (carrés). La Δ-variance associée à la distribution de brillance initiale, qui est toujours celle correspondant à $\beta = 3,1$, est présentée en trait plein.*

en ces points sont toutes égales, ce qui doit pouvoir être vérifié tout au moins sur les p mesures disponibles. La contribution de ces p pixels à la Δ-variance calculée sur les images filtrées est connue, puisqu'elle est donnée par le biais de l'équation (84). Il suffit de la multiplier par le facteur de normalisation $(p+q)/p$ et d'additionner les contributions des différents anneaux pour construire la Δ-variance associée à une image filtrée par une couverture complète entre les deux fréquences spatiales limites[9]. C'est ce que montre la figure **XVI**.12. On voit qu'en comparant les reconstructions obtenues pour les différentes configurations, on peut retrouver, sur une plage non négligeable d'échelles, l'évolution de la Δ-variance du modèle de distribution de brillance, et donc l'indice spectral β de cette dernière.

Prise en compte des effets combinés du lobe primaire et du filtrage spatial

Les images en sortie du simulateur sont affectées par les deux effets discutés précédemment. La figure **XVI**.13 montre l'évolution avec l'échelle de la Δ-variance calculée sur les différentes images filtrées. On remarque que les courbes ont sensiblement la même forme que sur la figure **XVI**.9, mais qu'elles sont globalement décalées vers le bas, comme on peut le comprendre en observant l'effet du lobe primaire sur la figure **XVI**.8. La reconstruction dans le cas des poids uniformes est quant à elle présentée sur la figure **XVI**.14. On y observe également, comme sur la figure **XVI**.12, le comportement en loi de puissance permettant de remonter à l'indice spectral de la distribution de brillance initiale.

XVI.4.d Quelques critiques

Manifestement, cette méthode de détermination de l'indice spectral est moins efficace que celle fondée directement sur le spectre de puissance, puisqu'il est nécessaire de faire une hypothèse sur ce dernier pour retrouver le comportement en loi de puissance de la Δ-variance permettant de remonter à β. L'intérêt de cette approche, comparée au calcul du spectre de puissance, réside pour les observateurs dans le fait qu'elle n'impose pas de transformation de Fourier sur des cartes non-périodiques. Or ce problème ne se pose pas dans nos simulations, puisque les modèles de distribution de brillance sont précisément périodiques, et il ne se pose en fait pas dès qu'il s'agit d'interférométrie, étant donné que l'on travaille directement dans l'espace de Fourier. On aurait plutôt tendance à penser que c'est en passant dans l'espace réel qu'on se heurte à des difficultés, liées au problème de la déconvolution. C'est d'ailleurs ce à quoi nous avons été

[9]En pratique, comme les différents pixels appartenant à un anneau donné ne sont pas tous à la même distance de l'origine, les valeurs du spectre de puissance sont légèrement différentes d'un pixel à l'autre. On affecte alors aux pixels non mesurés la moyenne des valeurs mesurées.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

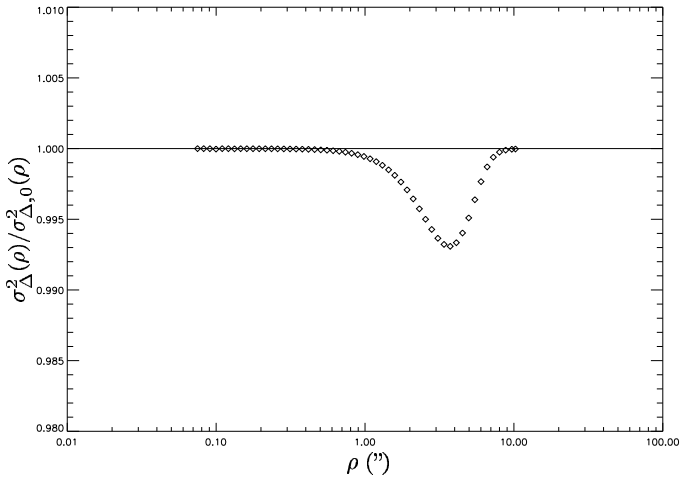

FIG. **XVI**.10 – *Rapport des Δ-variances mesurées d'une part sur la distribution de brillance $\beta = 3,1$ filtrée par une couverture complète sauf en un point, et d'autre part sur l'image initiale.*

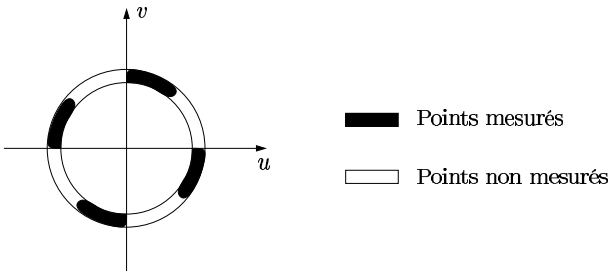

FIG. **XVI**.11 – *Schéma du principe de la méthode de renormalisation décrite dans le texte. L'anneau compris entre les nombres d'onde $k - \Delta k/2$ et $k + \Delta k/2$ est séparé en régions pour lesquelles on dispose de mesures de visibilité (en noir) et pour lesquelles on n'a pas d'information (en blanc). Dans le cadre de l'hypothèse d'isotropie, la contribution de l'ensemble de l'anneau à la Δ-variance de l'image non dégradée est proportionnelle à sa contribution à la Δ-variance de l'image filtrée, le facteur de proportionnalité étant le rapport de l'aire totale de l'anneau à l'aire des régions noires.*

confrontés dès lors qu'il a fallu remplir les trous de la couverture (u, v). Inversement, il suffit de moyenner azimutalement les visibilités[10] pour obtenir une estimation fiable de l'indice spectral, comme l'a montré la section **XVI.3.b**. On peut donc en conclure que, dans le cadre de l'interférométrie, la Δ-variance n'apporte rien de plus que les visibilités, en ce qui concerne la détermination des propriétés structurelles des champs observés.

XVI.5 Les fonctions de structure

XVI.5.a Introduction

Étant donné que la définition des champs browniens fractionnaires, qui nous servent ici de modèles de distribution de brillance, fait intervenir la fonction de structure d'ordre deux, il n'est pas déraisonnable de chercher à évaluer cet outil de caractérisation des structures dans le cadre du filtrage interférométrique. Comme l'a montré l'étude des implémentations numériques de ces champs au **VII.4.c**, les fonctions de structures grossières d'ordre deux (voir le **V.6.b**) donnent bien un comportement en loi de puissance, l'exposant étant légèrement différent de l'exposant de Hurst attendu (voir les figures **VII**.5 et **VII**.6). La question qui se pose bien entendu ici est de savoir comment se comportent les fonctions de structure

[10] Après avoir divisé par la fonction de poids.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

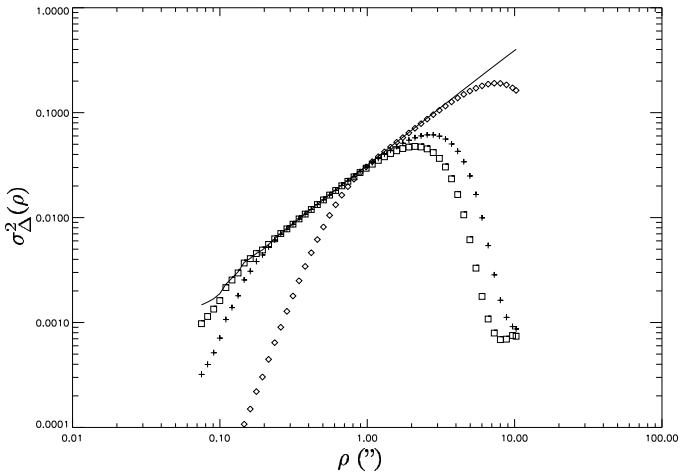

FIG. **XVI**.12 – *"Reconstruction" de la Δ-variance de l'image initiale par la procédure de renormalisation décrite dans le texte. Les différentes courbes correspondent aux images filtrées spatialement par l'instrument dans les configurations F (losanges), E (croix) et D (carrés). La courbe en trait plein montre l'évolution de la Δ-variance du modèle de distribution de brillance.*

grossières quand on les applique aux images filtrées par l'interféromètre, et si l'on peut remonter à l'exposant de Hurst par cette voie, quitte à devoir calibrer numériquement la relation entre celui-ci et l'exposant mesuré, comme le suggère en définitive la figure **VII**.6.
Cependant, le temps de calcul de l'estimation numérique des fonctions de structure pour l'ensemble des images filtrées est absolument prohibitif, du fait de la grande taille des champs considérés. Pour s'en tirer, il est possible de considérer des versions des images sales qui soient plus manipulables, et qu'on obtient en effectuant un rééchantillonnage des cartes sur des grilles plus petites, de taille 256×256. La figure **XVI**.15 montre que, ce faisant, on ne perd pas l'information essentielle fournie par la fonction de structure d'ordre deux. En considérant la distribution de brillance associée à l'indice spectral $\beta = 3,1$, et en calculant la fonction de structure grossière d'ordre deux, d'une part sur l'image complète et d'autre part sur sa version rééchantillonnée, on obtient le même comportement en loi de puissance. En fait, tenant compte de la taille réelle des pixels, on voit qu'on retrouve les mêmes valeurs, ce qui n'est pas surprenant, étant donné que les fonctions de structure grossières sont justement calculées à chaque échelle en rééchantillonnant les images sur des grilles de plus en plus petites. Par ailleurs, même si l'on n'observait pas cette identité, il ne serait pas insensé de calculer les fonctions de structure sur les versions modifiées des cartes sales, à condition de garder à l'esprit qu'il faudrait alors nécessairement voir les résultats obtenus comme une calibration numérique de cette méthode, les exposants de Hurst théoriques étant connus par construction.
En définitive, il est donc parfaitement justifié de se fonder sur les versions rééchantillonnées des images initiales et des images sales pour étudier les propriétés des fonctions de structure vis-à-vis du filtrage interférométrique.

XVI.5.b Étude numérique

Pour chacune des images filtrées, correspondant aux 21 indices spectraux considérés, aux trois configurations et aux deux fonctions de poids, on construit la fonction de structure grossière d'ordre deux, telle qu'on l'a décrite au **V.6.b**. À titre d'exemple des résultats obtenus, la figure **XVI**.16 montre le cas de la distribution de brillance associée à $\beta = 3,1$. On remarque notamment que les valeurs calculées en considérant la configuration la plus compacte sont plus élevées dans le cas des poids naturels que dans le cas des poids uniformes, ce qu'on avait déjà observé dans le cadre de l'étude de la Δ-variance et du spectre de puissance. Les courbes associées aux configurations E et D sont, elles, pratiquement indépendantes du choix de la fonction de poids, comme on l'a expliqué plus haut. Quant au lobe primaire, son effet est clairement d'abaisser les valeurs des fonctions de structure d'ordre deux, ce qui s'interprète également à partir de ce qui a déjà été dit, en notant que celles-ci sont liées linéairement aux fonctions d'autocorrélation et donc aux spectres de puissance.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

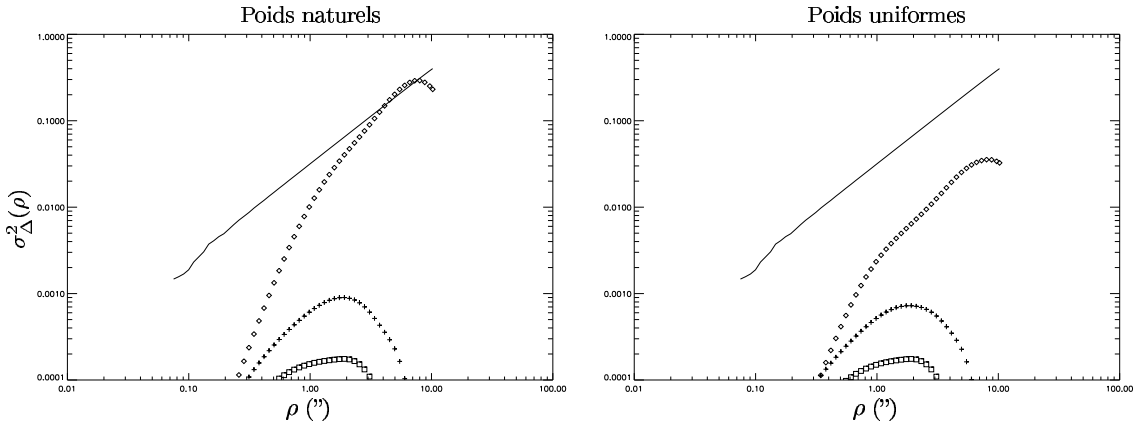

FIG. **XVI**.13 – *Effets combinés du lobe primaire et du filtrage spatial sur la Δ-variance. La figure de gauche correspond à une fonction de poids naturelle, celle de droite à une fonction de poids uniforme. Les notations sont les mêmes que celles de la figure* **XVI**.9.

En ce qui concerne l'évolution de ces fonctions de structure d'ordre deux avec l'échelle spatiale, il est difficile de distinguer un domaine sur lequel on observerait un comportement en loi de puissance, en particulier lorsqu'on s'intéresse aux configurations les moins compactes, E et D, car le manque de mesures aux espacements courts, et donc aux grandes échelles, se traduit par une cassure des courbes laissant peu de marge pour un ajustement fiable. Inversement, la configuration la plus compacte est défaillante aux plus petites échelles, ce qui apparaît notamment sur le panneau de la figure **XVI**.16 correspondant au cas des poids uniformes et sans atténuation par le lobe primaire. L'accentuation de la pente aux petites échelles s'interprète ainsi comme l'effet d'une cassure due au manque d'information sur ces échelles. Si l'on souhaite obtenir un exposant de Hurst expérimentalement malgré ces difficultés, il faut donc restreindre la plage d'échelles sur laquelle on fait un ajustement de loi de puissance, en fonction de la configuration considérée. Étant donné ce qu'on observe sur la figure **XVI**.16, il semble raisonnable de se limiter aux échelles comprises entre 0,5" et 2" pour la configuration F, et aux échelles inférieures à 1" et à 0,5", respectivement, pour les configurations E et D. Cette même figure montre d'ailleurs les ajustements obtenus, ainsi que les exposants de Hurst qu'on en déduit.
En procédant de cette façon pour l'ensemble des images filtrées par l'interféromètre, on construit, sur la figure **XVI**.17, l'évolution des exposants de Hurst H_m mesurés, en fonction de l'exposant théorique H, lequel est relié à l'indice spectral par $\beta = 2H + 2$ en dimension deux. On remarque notamment que les courbes associées aux différents cas de figure considérés présentent toutes le même défaut, à savoir que les exposants sont systématiquement surestimés lorsque H est *grosso modo* inférieur à 0,5 et systématiquement sous-estimés lorsque H est supérieur à 0,5. Le premier effet doit être attribué à la limite de résolution des observations, qui impose une taille minimale des structures observables et donc une limite inférieure à l'exposant de Hurst. Le second a déjà été observé sur les champs modèles, comme on peut le voir sur la figure **VII**.6. D'autre part, il apparaît que plus une configuration est compacte, plus les valeurs mesurées de l'exposant de Hurst sont importantes, ce qu'on peut comprendre en disant que ces configurations mesurant moins bien les petites échelles, elles ont tendance à fournir des images plus lisses et donc des exposants de Hurst plus élevés. Cet effet est flagrant dans le cas d'une fonction de poids naturelle, qui donne plus d'importance encore aux espacements les plus courts. Réciproquement, le passage à une fonction de poids uniforme ne modifie que peu les courbes associées aux configurations moins compactes E et D. La prise en compte de l'atténuation par le lobe primaire ne semble en revanche pas modifier globalement les courbes, mais elle les affecte de façon plus chaotique, ce qui rend l'interprétation difficile.

XVI.5.c Conclusions

À la vue de l'étude précédente, il semble par conséquent que l'utilisation des fonctions de structure, en tant qu'outil de détermination directe de l'indice spectral d'une distribution de brillance observée par un

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

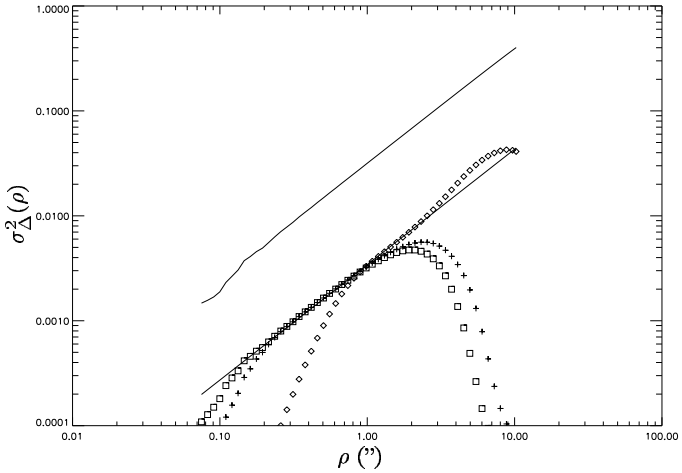

FIG. **XVI**.14 – *"Reconstruction" de la Δ-variance de l'image initiale par la procédure de renormalisation décrite dans le texte. Les différentes courbes correspondent aux images atténuées par le lobe primaire puis filtrées spatialement par l'instrument dans les configurations F (losanges), E (croix) et D (carrés), et en utilisant une fonction de poids uniforme. La courbe en trait plein montre l'évolution de la Δ-variance du modèle de distribution de brillance, qui est toujours celui associé à $\beta = 3,1$, et les tirets représentent une loi de puissance d'exposant 1,1, comme celle attendue théoriquement.*

interféromètre, soit peu fiable, étant donnés les écarts observés entre les exposants de Hurst mesurés sur les différentes images sales et les valeurs théoriques. On peut cependant envisager d'utiliser les courbes de la figure **XVI**.17 comme abaques numériques, pour déduire indirectement l'indice spectral des cartes observées. Il faut cependant remarquer que ces courbes ne représentent qu'une petite partie des paramètres observationnels possibles, ne serait-ce que parce que les configurations réelles des instruments ne sont *a priori* pas celles utilisées ici, que les lobes d'antenne ont des tailles variables suivant la longueur d'onde, ou encore que les fonctions de poids peuvent être différentes. Il ne paraît donc pas particulièrement utile de poursuivre l'étude dans cette direction.

XVI.6 La dimension fractale

XVI.6.a Nécessité d'un rééchantillonnage des images

Dans la deuxième partie, on a parlé du concept d'ensemble fractal et on a remarqué que les structures complexes observées dans le milieu interstellaire pouvaient être étudiées par ce biais, en leur attribuant une dimension fractale. On a notamment vu, au **VII.4.c**, que les isocontours des champs browniens fractionnaires possédaient une dimension $D = n - H$ où n est la dimension de l'espace dans lequel ils sont définis. Le calcul de cette dimension fractale, dans le cas bidimensionnel, par la méthode périmètre-surface décrite également au **VII.4.c**, doit donc *a priori* permettre de remonter à l'exposant de Hurst et par conséquent à l'indice spectral des structures observées. Cependant, comme c'était déjà le cas à la section précédente, le calcul de la dimension fractale d'une image 1024×1024 est beaucoup trop long[11] pour envisager de le faire tel quel sur l'ensemble des 126 images sales dont on dispose. On peut contourner cette difficulté de la même façon, en rééchantillonnant les images sur des grilles plus petites, de taille 128×128, et en utilisant ces versions "dégradées" pour calculer les dimensions fractales auxquelles on s'intéresse. Le gain de temps est significatif[12] et rend ainsi possible cette étude.
Il faut néanmoins vérifier auparavant qu'on ne perd pas d'information en procédant de cette manière. C'est ce que montre la figure **XVI**.18 en comparant les périmètres et les aires des "nuages" obtenus par seuillage sur la distribution de brillance associée à l'indice spectral $\beta = 3,1$ et sur la version rééchantillonnée de cette même image. On constate que les points correspondant à ces deux cas suivent chacun une loi de

[11] Environ quatorze heures sur un portable équipé d'un processeur à 2 GHz et de 470 Mo de mémoire, en activant l'ensemble des options du calcul et avec cinquante niveaux de seuillage.
[12] Dans les mêmes conditions que précédemment, le temps de calcul est ramené à cinq minutes. Cette différence suggère d'ailleurs que l'algorithme est probablement loin d'être optimal.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

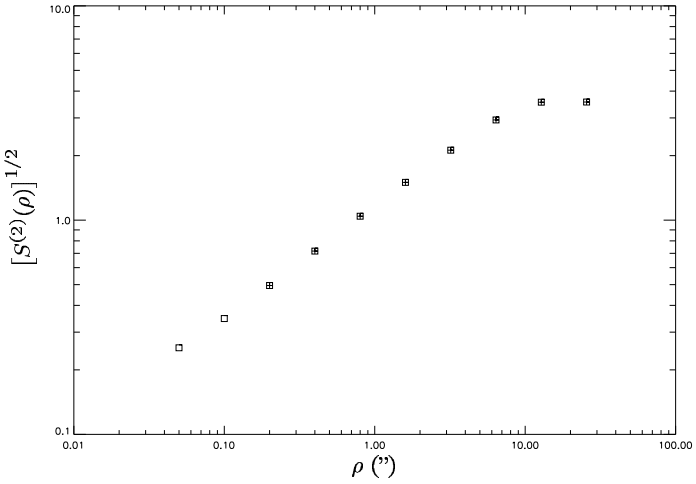

FIG. **XVI**.15 – *Comparaison des fonctions de structure grossières d'ordre deux calculées sur la version originale* 1024×1024 *(carrés) de la distribution de brillance associée à* $\beta = 3,1$ *et sur la version rééchantillonnée* 256×256 *(croix) de cette même distribution de brillance.*

puissance, dont les exposants respectifs donnent des dimensions fractales sensiblement identiques. Ce qui peut sembler plus étonnant à première vue, c'est que les deux nuages de points ne sont pas alignés l'un avec l'autre, alors qu'on s'attendrait à ce que ce soit le cas. C'est oublier que la propriété des isocontours fractals est d'avoir un périmètre qui augmente "plus vite que prévu" lorsqu'on se place à une résolution plus fine. L'exemple de l'île de von Koch (voir la figure **VI**.3), dont le périmètre tend vers l'infini tandis que l'aire reste finie, est en cela typique. Il n'est donc pas surprenant qu'à une aire donnée, on trouve un périmètre en moyenne plus grand pour la version 1024×1024 que pour la version 128×128. Cette remarque étant faite, il convient avant tout de noter que la propriété souhaitée, à savoir la conservation de la dimension fractale lors du rééchantillonnage, est bien vérifiée, ce qui permet d'étudier numériquement l'effet du filtrage sur cet outil de caractérisation des structures.

XVI.6.b Étude numérique systématique

On calcule ainsi les dimensions fractales D de l'ensemble des images sales obtenues en sortie du simulateur, et on en déduit des exposants de Hurst expérimentaux $H_{\mathrm{m}} = 2 - D$, à comparer aux valeurs théoriques des distributions de brillance initiales. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure **XVI**.19, regroupés suivant la présence ou non d'atténuation par le lobe primaire et la fonction de poids utilisée.
Ce qu'on remarque immédiatement sur ces figures, c'est l'échec complet des configurations les moins compactes, E et D, quand on se place à des exposants de Hurst théoriques relativement éloignés de zéro. Si l'on essaie de déterminer cet exposant à partir de ces configurations, on obtiendra systématiquement une valeur faible, même si l'exposant de Hurst initial est en fait proche de l'unité. Ceci s'explique par le trou dans la couverture (u, v) que ces configurations laissent au voisinage de l'origine du plan de Fourier. L'inspection visuelle des images obtenues dans ces conditions de filtrage, comme on en a présenté sur la figure **XVI**.3, montre d'ailleurs que les seules structures restantes sont de petite taille caractéristique, de sorte que, du point de vue de la dimension fractale, la distribution de brillance en sortie présente des isocontours très découpés, de dimension proche de 2, d'où un exposant de Hurst expérimental toujours proche de zéro. On note d'ailleurs, comme on l'avait déjà remarqué au sujet des fonctions de structure grossières d'ordre deux, que les exposants de Hurst mesurés sont d'autant plus grands que la configuration considérée est plus compacte.
En ce qui concerne plus particulièrement la configuration F, qui est la plus compacte, on observe le même genre de défaut que pour la distribution de brillance initiale, à savoir une surestimation de l'exposant de Hurst lorsque celui-ci tend vers zéro et, inversement, une sous-estimation systématique quand l'exposant de Hurst théorique tend vers un. Ces effets ont déjà été discutés plus haut, et on rappelle qu'il faut y voir respectivement la manifestation de la finitude des rayons extérieur et intérieur de la couverture (u, v). Enfin, il semble que l'atténuation par le lobe primaire se traduise, comme dans le cas de l'utilisation des fonctions de structure, par un bruit difficilement interprétable.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

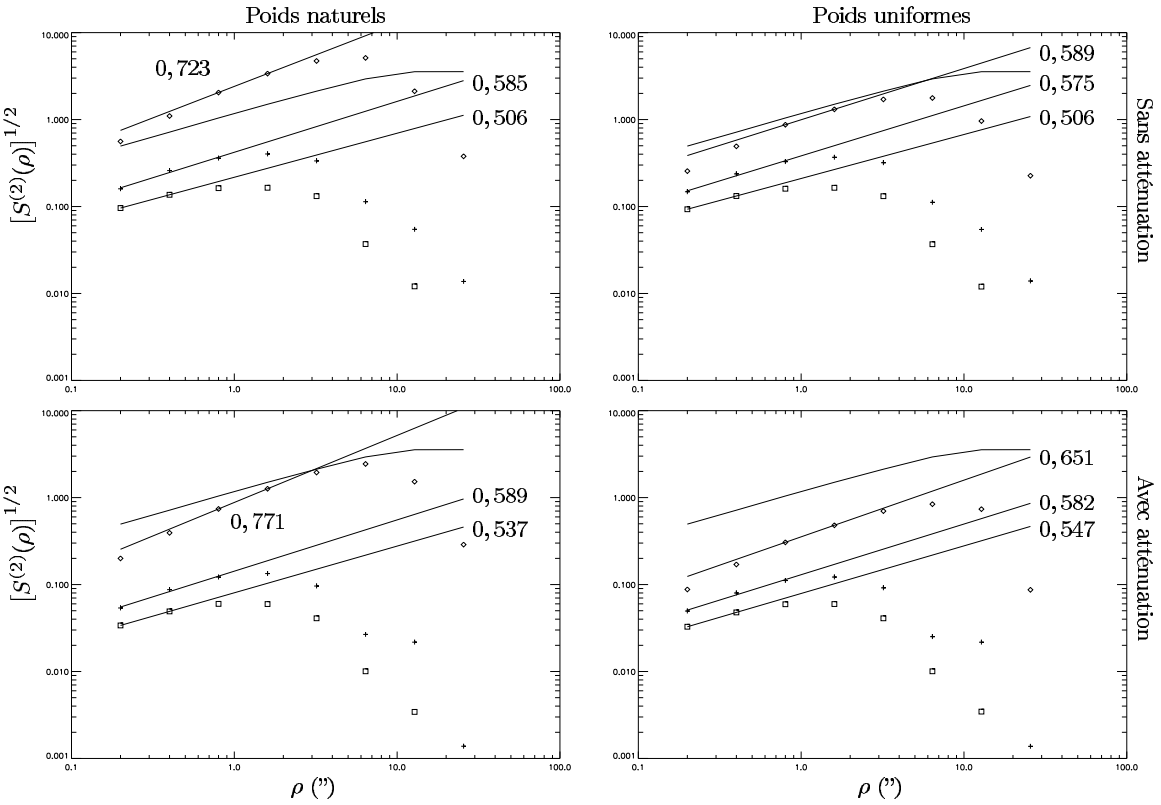

FIG. **XVI**.16 – *Fonctions de structure grossières d'ordre deux calculées sur les images filtrées obtenues à partir de la distribution de brillance modèle $\beta = 3,1$. La première ligne correspond au cas sans atténuation par le lobe primaire, la seconde au cas où cette atténuation est prise en compte. Les deux colonnes correspondent aux deux fonctions de poids, comme indiqué. En ce qui concerne les configurations, les notations sont identiques à celles de la figure* **XVI**.14*, à savoir des losanges pour la configuration F, des croix pour la configuration E et des carrés pour la configuration D. La courbe en trait plein représente la fonction de structure calculée sur la distribution de brillance initiale. Les tirets indiquent les ajustements de lois de puissance décrits dans le texte. Les exposants de Hurst correspondants sont indiqués en regard.*

XVI.6.c Conclusions

La détermination de la propriété essentielle des distributions de brillance modèles introduites en entrée du simulateur interférométrique, à savoir l'indice spectral β ou, de manière équivalente, l'exposant de Hurst H, ne semble pas être facilitée par l'utilisation de la dimension fractale, telle qu'employée ici. En effet, de manière encore plus flagrante que ce qu'on avait remarqué au sujet des fonctions de structure grossières d'ordre deux, on observe des écarts importants entre les valeurs mesurées et les valeurs théoriques, et ce d'autant plus que la configuration instrumentale considérée est étendue, car les grandes structures éventuellement présentes dans les cartes initiales[13], sont alors complètement filtrées. En cela, la dimension fractale ainsi calculée est même moins efficace encore que les fonctions de structure de la section précédente, car ces dernières permettaient une estimation, même grossière, de l'exposant de Hurst quelle que soit la configuration du réseau d'antennes, ce que ne semble pas permettre la relation périmètre-surface dans le cas des configurations les moins compactes, qui donnent systématiquement une valeur de H_{m} inférieure à 0,3 environ. Il apparaît donc également difficile de poursuivre l'étude du filtrage interférométrique en se fondant sur la dimension fractale.

[13]Structures qui sont essentielles à la détermination de la dimension fractale, puisqu'elles fournissent les "nuages" de grand périmètre et de grande aire.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

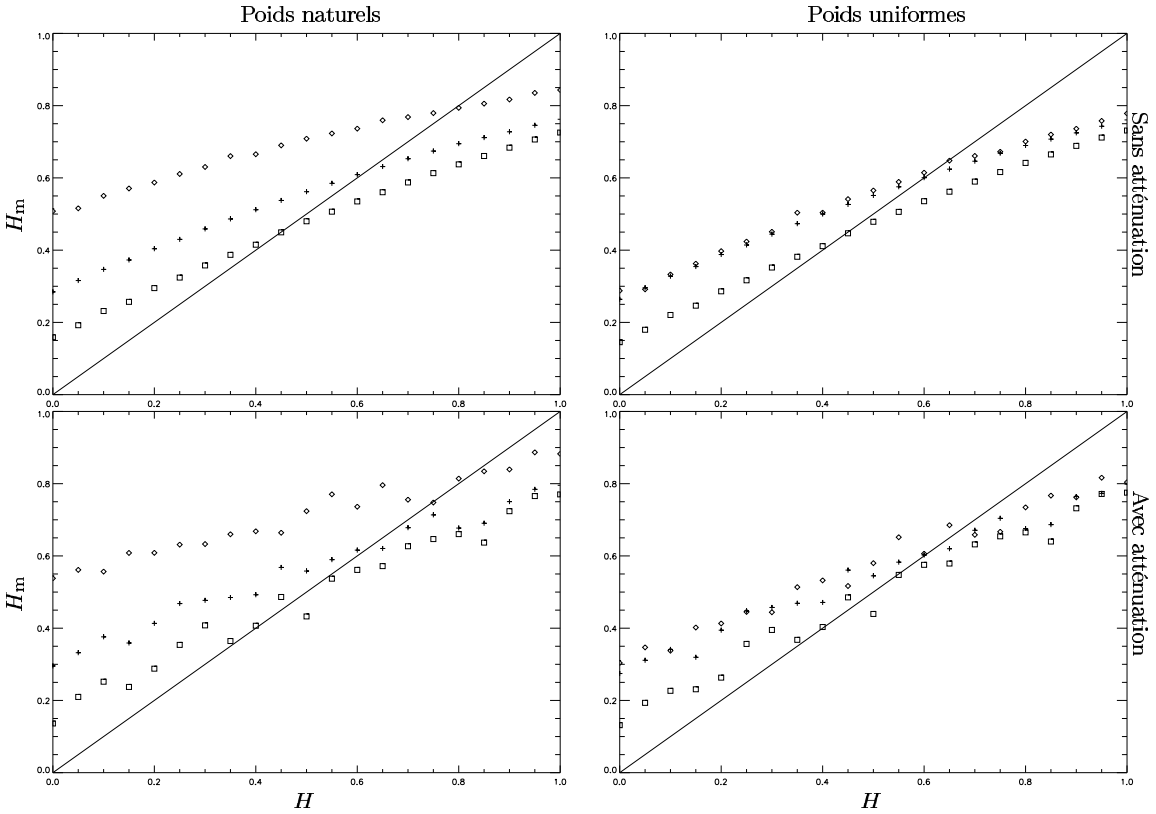

FIG. **XVI**.17 – *Évolution des exposants de Hurst H_m mesurés par les fonctions de structure grossières d'ordre deux, en fonction des valeurs théoriques. La disposition des sous-figures ainsi que les symboles utilisés sont les mêmes que sur la figure* **XVI**.16.

XVI.7 Retour sur le spectre de puissance : le cas bruité

XVI.7.a Introduction de bruit

En définitive, la détermination la plus efficace de l'indice spectral de la distribution de brillance initiale est également la plus simple, puisqu'il suffit d'effectuer un ajustement en loi de puissance sur la moyenne azimutale du spectre de puissance des cartes sales, qu'on obtient à partir du rapport des visibilités à la fonction de poids. Dans les conditions utilisées ici, l'effet du lobe primaire est suffisamment localisé dans l'espace de Fourier pour ne pas perturber cette approche, comme on l'a montré sur la figure **XVI**.5. Ceci étant établi, il convient maintenant de se pencher sur la fiabilité de cet outil vis-à-vis des perturbations qu'on peut introduire dans la chaîne de filtrage. Autrement dit, il s'agit en pratique de déterminer quel est le niveau de bruit maximal permettant malgré tout de remonter à l'indice spectral β par le biais du spectre de puissance des cartes sales.

La modélisation réaliste du bruit affectant les données interférométriques mériterait qu'on s'y attarde longuement, mais nous nous contenterons d'en discuter certains aspects, avant de l'introduire de façon extrêmement simplifiée dans nos simulations. Comme on l'a dit au **XIV.5.d**, le bruit sur les visibilités peut se modéliser par une contribution multiplicative et une contribution additive, en écrivant que les visibilités observées V' sont reliées aux vraies visibilités V par $V' = \epsilon_m V + \epsilon_a$. Bien entendu, cela ne suffit pas à préciser la forme du bruit, et il faut se donner les propriétés de ϵ_m et de ϵ_a. Initialement, le bruit introduit dans la chaîne de filtrage l'est au niveau des signaux encore non corrélés [Massi & Comoretto, 1990], de sorte qu'on doit en fait écrire que la visibilité observée V'_{ij} correspondant à la ligne de base entre les antennes i et j est reliée à la vraie visibilité V_{ij} par

$$V'_{ij} = \epsilon_i \epsilon_j V_{ij} + \sigma_{ij},$$

où ϵ_i et ϵ_j sont des complexes dont l'amplitude est une variable aléatoire de moyenne 1 et dont la phase est

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

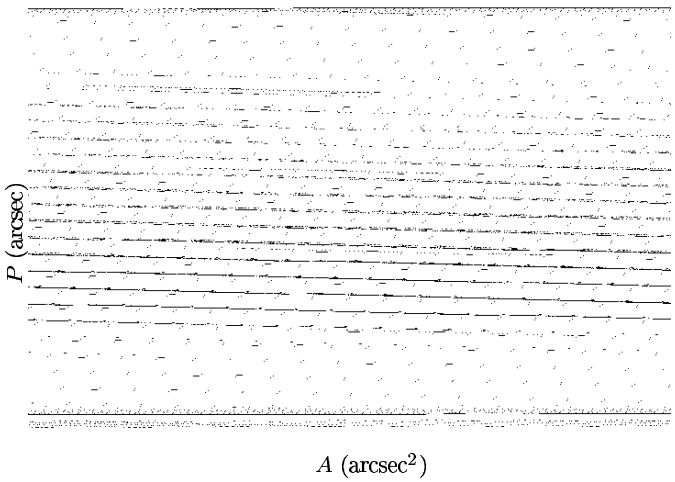

FIG. **XVI**.18 – *Relations périmètre-aire établies pour la distribution de brillance associée à l'indice spectral* $\beta = 3,1$ *(croix) et pour sa version rééchantillonnée sur une grille* 128×128 *(losanges). Les dimensions fractales mesurées sont respectivement égales à 1,445±0,012 et 1,437±0,019.*

également aléatoire. Le terme additif σ_{ij} représente quant à lui le bruit thermique, également complexe. Ainsi, une modélisation réaliste du bruit devrait affecter les signaux avant corrélation, antenne par antenne. Or, la façon dont est construit notre simulateur ne donne pas accès à cette étape de l'observation, puisqu'on part directement des visibilités dans l'espace (u, v) sans passer par les signaux de chaque antenne. La réécriture du simulateur ne pourrait d'autre part se faire qu'au prix de gros efforts de calcul, car il est loin d'être trivial d'introduire cette étape de la chaîne de réception, surtout lorsqu'il s'agit de considérer 64 antennes. En conséquence, nous avons choisi d'introduire un bruit *ad hoc* dans le simulateur.
En se fondant sur l'équation $V' = \epsilon_m V + \epsilon_a$, il faut donc préciser les formes des bruits ϵ_m et ϵ_a. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer qu'il n'existe en fait pas de bruit multiplicatif, soit $\epsilon_m = 1$, et que toutes les sources de bruit peuvent être modélisées par un simple bruit additif ϵ_a dont on va supposer qu'il s'agit d'une variable aléatoire gaussienne complexe. Autrement dit, la distribution en probabilité de l'amplitude de ϵ_a est une gaussienne centrée en zéro. La phase de ϵ_a est également aléatoire, et distribuée uniformément[14] sur $[0, \pi]$. Le seul paramètre restant encore à déterminer est la largeur de la densité de probabilité de l'amplitude. Classiquement, le bruit affectant une cellule de l'espace (u, v) diminue lorsque le nombre de visibilités tombant dans cette cellule augmente. Plus précisément, si l'on écrit explicitement la visibilité mesurée V' comme une somme de p visibilités V'_k tombant dans la même cellule, on a, en notant V_k les visibilités vraies et ϵ_k le bruit sur chacune d'elles,

$$V' = \sum_{k=1}^{p} V'_k = \sum_{k=1}^{p} (V_k + \epsilon_k) = V + \epsilon_a \quad \text{avec} \quad \epsilon_a = \sum_{k=1}^{p} \epsilon_k.$$

On sait qu'alors le bruit ϵ_a constitué de la somme des bruits indépendants ϵ_k - dont on suppose que les propriétés statistiques sont toutes les mêmes - a une amplitude en moyenne $\sqrt{p}$ fois plus grande que celle de chaque ϵ_k. Par conséquent, lorsqu'on s'intéresse aux images obtenues en utilisant une fonction de poids uniforme, comme on le fera dans la suite, le bruit affectant chaque visibilité est distribué selon une gaussienne bidimensionnelle dont la largeur est inversement proportionnelle à la racine carrée des poids naturels. On jouera sur la constante de proportionnalité de façon à ajuster le rapport signal sur bruit[15]. La figure **XVI**.20 montre quelques exemples d'images bruitées construites par cette approche, en fonction de η et de la couverture (u, v) considérée. On remarque notamment que la taille caractéristique des structures de la carte de bruit, qu'on peut observer dans le cas $\eta = 0,1$, dépend de la configuration, ce qui était attendu. Quand le rapport signal sur bruit augmente, les cartes bruitées tendent vers les cartes non bruitées, telles qu'on peut les voir sur la figure **XVI**.3.

[14]Sur $[0, \pi]$ plutôt que sur $[0, 2\pi]$ car on a pris une distribution de l'amplitude autorisant des valeurs négatives.
[15]Le rapport signal sur bruit η est défini dans l'espace image, comme le rapport entre les écarts-type respectifs de l'image non bruitée, à laquelle on a bien entendu accès, et de l'image du bruit seul.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

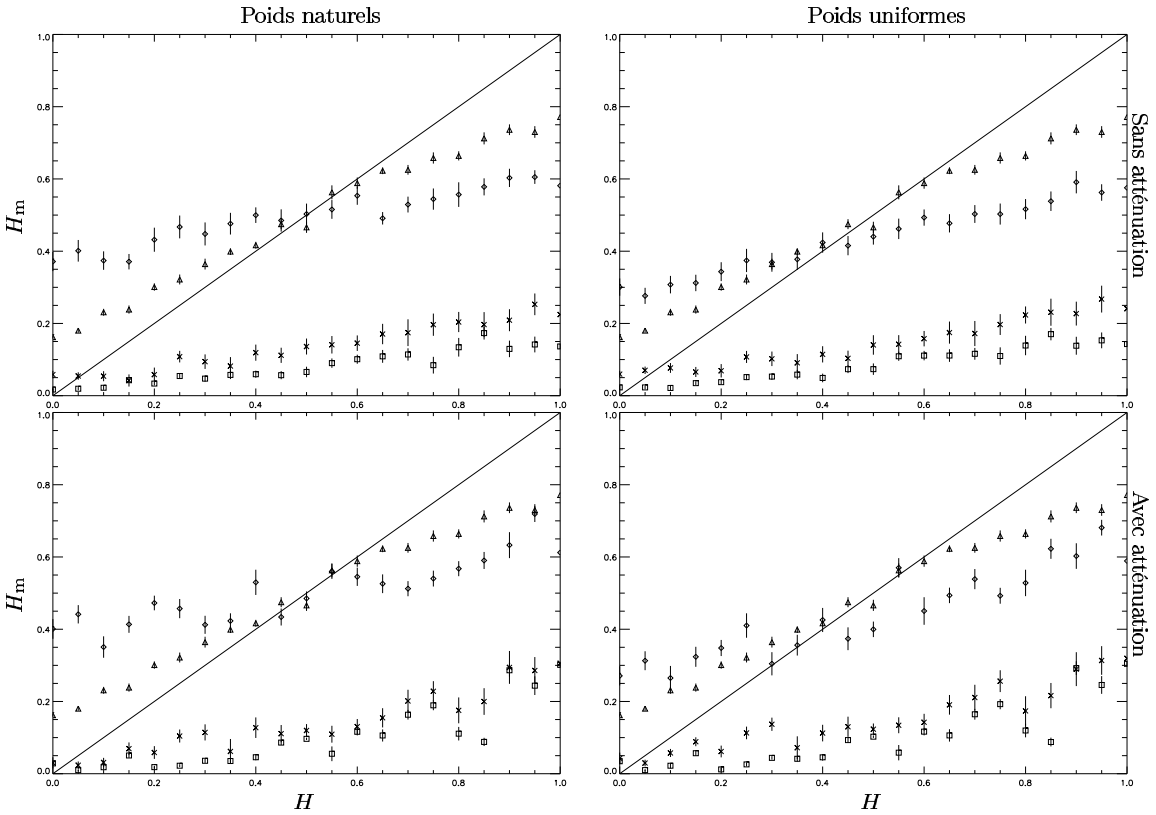

FIG. **XVI.**19 – *Évolution des exposants de Hurst H_m mesurés par le biais de la dimension fractale, en fonction des valeurs théoriques. La disposition des sous-figures est la même que sur la figure* **XVI.**17. *Les différents symboles correspondent aux distributions de brillance initiales (triangles), aux images filtrées par la configuration F (losanges), par la configuration E (croix) et par la configuration D (carrés). La ligne pointillée représente l'identité entre les exposants théorique et expérimental. Chaque valeur mesurée est affectée d'une incertitude indiquée par des barres verticales.*

XVI.7.b Effets sur le spectre de puissance

La figure **XVI.**21 montre les effets de différents niveaux de bruit sur les spectres de puissance des images sales correspondant aux deux configurations instrumentales les plus compactes. Dans tous les cas, on part de la distribution de brillance associée à l'indice spectral $\beta = 3,1$, atténuée par le lobe primaire, et on utilise les poids uniformes. On voit notamment que l'effet du bruit tend à aplatir le spectre de puissance aux plus petites échelles dans la carte, ce qui peut se comprendre en considérant les cartes de la figure **XVI.**20. Les structures qui apparaissent lorsque le bruit se met à dominer le signal sont effectivement plus petites que les structures de ce dernier. L'interprétation classique de cet effet consiste à remarquer que le bruit possède une distribution spectrale plate, son amplitude étant indépendante du vecteur d'onde. Lorsque le niveau du bruit augmente, c'est d'abord aux plus grands nombres d'onde, et donc aux plus petites échelles, que sa puissance devient plus importante que celle du signal, puisque celle-ci décroît lorsque k augmente. Lorsque le rapport signal sur bruit devient suffisamment grand, on retrouve, sur une plage d'échelles assez grande, un comportement en loi de puissance permettant de remonter à l'indice spectral de la distribution de brillance initiale. Sur la figure **XVI.**21, un rapport signal sur bruit $\eta = 8$ semble suffisant pour procéder ainsi, couverture par couverture, car en considérant la valeur immédiatement inférieure, soit $\eta = 4$, on ne dispose pas, dans le cas de la configuration F, d'échelles immunisées vis-à-vis du bruit. En ajustant une loi de puissance, on trouve ainsi une valeur de β égale à 2,6, sensiblement plus faible que la valeur cherchée.

Comme on l'avait remarqué dans le cas non bruité, on obtient de bien meilleurs résultats en combinant les observations faites dans les trois configurations considérées. La figure **XVI.**22 montre ainsi les spectres de puissance des images bruitées regroupés non plus selon la couverture, mais selon le rapport signal sur

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

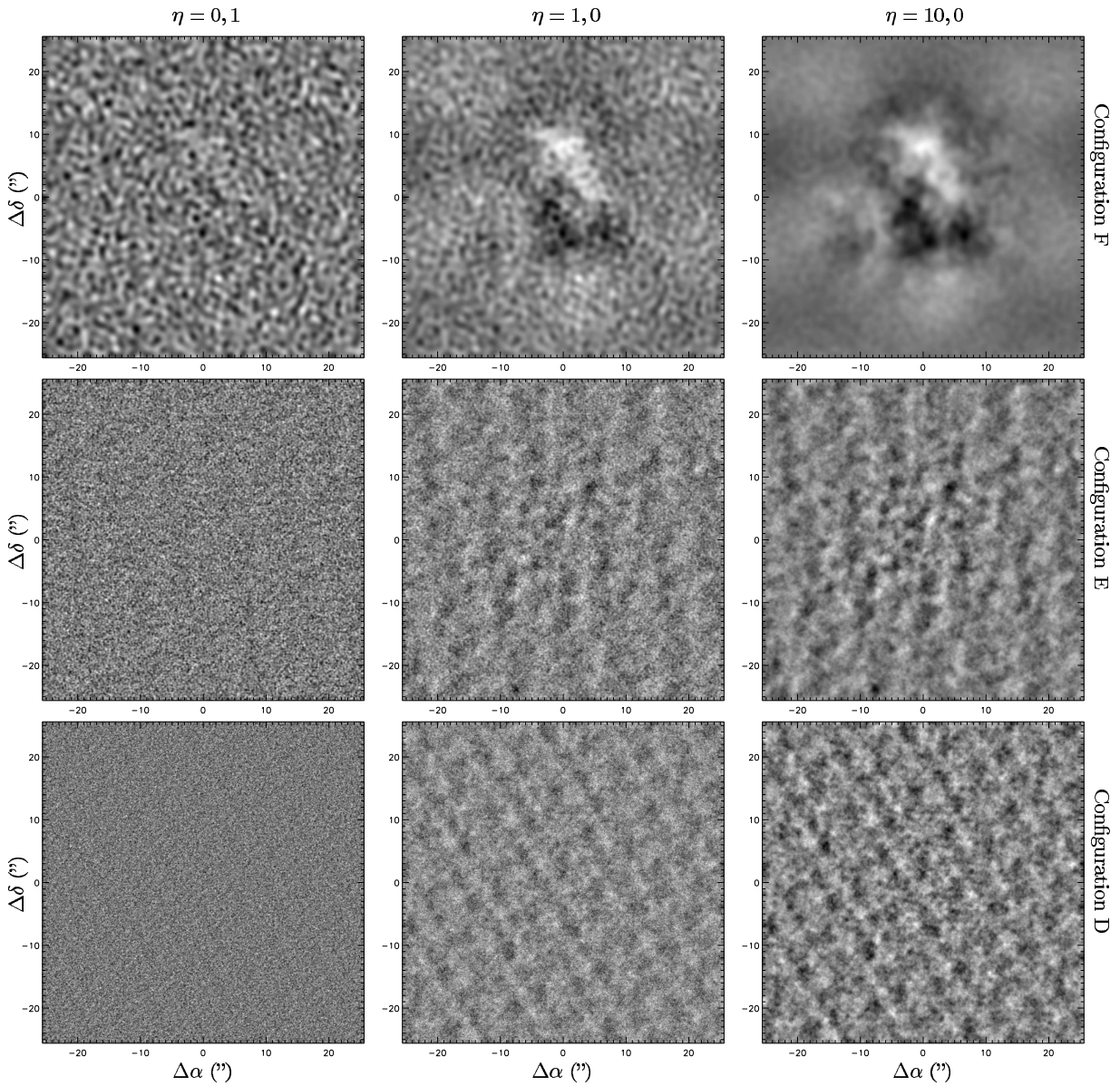

FIG. **XVI**.20 – *Exemples de cartes bruitées obtenues par la méthode décrite dans le texte. Le rapport signal sur bruit est constant le long d'une colonne, et sa valeur est indiquée en haut de la figure. Chaque ligne correspond à une configuration instrumentale différente et la distribution de brillance initiale est celle associée à l'indice spectral* $\beta = 3,1$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

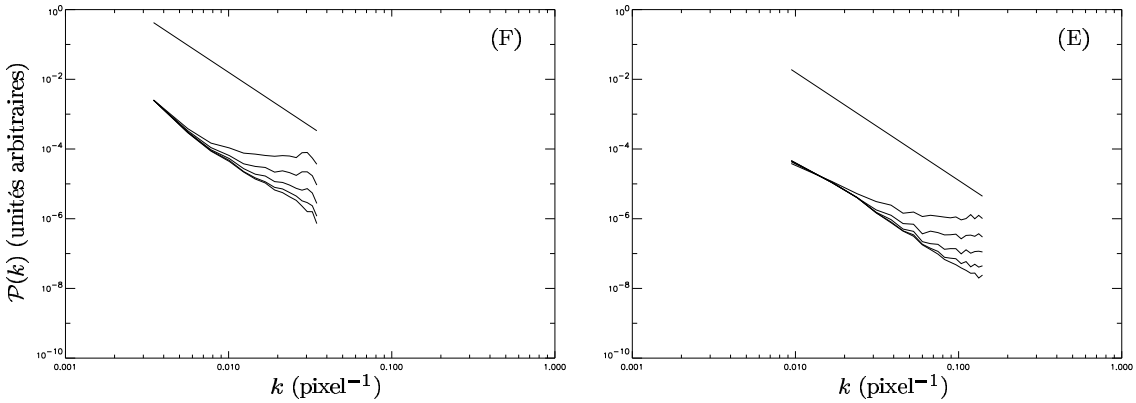

FIG. **XVI**.21 – *Spectres de puissance des images bruitées correspondant à la distribution de brillance $\beta = 3,1$ atténuée par le lobe primaire, à la fonction de poids uniforme et aux configurations F (à gauche) et E (à droite). Les différents rapports signal sur bruit sont égaux à $\eta = 1$ (trait plein), $\eta = 2$ (pointillés), $\eta = 4$ (tirets), $\eta = 8$ (trait mixte) et $\eta = 16$ (trait mixte avec trois pointillés successifs). La droite en tirets montre une loi de puissance d'exposant -3,1.*

bruit, compris entre $\eta = 1$ et $\eta = 8$. L'effet du bruit ne se manifeste pas aux mêmes échelles suivant la configuration considérée, car le rapport signal sur bruit dépend en fait de cette configuration puisqu'il est calculé sur les images sales. Par conséquent, lorsqu'on se fixe une certaine valeur de η, on a en fait des niveaux absolus de bruit différents sur chaque carte. Ceci ne retire rien à l'intérêt de l'analyse qui va suivre, car les cartes correspondant aux différentes configurations relèvent d'observations différentes, dont on peut régler le niveau de bruit en en choisissant la durée. Si l'on souhaite diminuer le bruit, il est *a priori* possible de le faire en observant plus longtemps, de sorte que la couverture soit mieux échantillonnée, et qu'ainsi plus de visibilités tombent dans chaque cellule. Le bruit est alors atténué d'un facteur inversement proportionnel á la racine carrée des poids naturels, comme on l'a déjà fait remarquer. On peut donc s'arranger pour que les niveaux de bruit absolus dans chaque configuration correspondent au même rapport signal sur bruit.
L'étude de la figure **XVI**.22 montre alors qu'en superposant les spectres de puissance, moyennés azimutalement, des différentes images sales et en ignorant, sur chacun d'eux, les remontées dues au bruit, on retrouve un comportement en loi de puissance avec un exposant proche de l'indice spectral d'origine, et ce pour un rapport signal sur bruit égal à $\eta = 4$ ou plus. En ignorant complètement la configuration F, on peut même éventuellement considérer que le cas $\eta = 2$ est encore favorable. Il s'avère donc qu'on peut se contenter d'un rapport signal sur bruit assez faible, de l'ordre de quatre, pour retrouver l'indice spectral de la distribution de brillance en entrée du simulateur, à partir des cartes sales, à condition de combiner les données issues des différentes configurations, et en se restreignant aux nombres d'onde pour lesquels le bruit a une influence négligeable.

XVI.8 Conclusions

Ce chapitre a permis d'aborder la question de la réponse d'un interféromètre à un milieu complexe, dont la distribution de brillance est fractale, en utilisant certains des outils de caractérisation des structures dont on a discuté au cours de la deuxième partie, à savoir le spectre de puissance, la Δ-variance, les fonctions de structure d'ordre deux et la dimension fractale. Plus spécifiquement, il s'agissait d'établir lesquels de ces outils permettent de remonter à l'indice spectral de la distribution modèle observée. Après étude dans le cas non bruité, on constate que l'outil le plus direct et le plus simple, à savoir le spectre de puissance, est également le plus fidèle, puisqu'il suffit de moyenner azimutalement les visibilités brutes, corrigées de la fonction de poids, pour obtenir une bonne estimation de l'indice spectral cherché. On remarque d'ailleurs qu'en l'absence d'atténuation par le lobe primaire, cette méthode donne le bon résultat de manière exacte. En ajoutant du bruit, on a ensuite estimé qu'un rapport signal sur bruit $\eta \simeq 8$ était nécessaire pour retrouver, par cette méthode et avec une seule configuration instrumentale, l'indice spectral de la distribution de brillance modèle. La combinaison des spectres de puissance des cartes sales obtenues

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

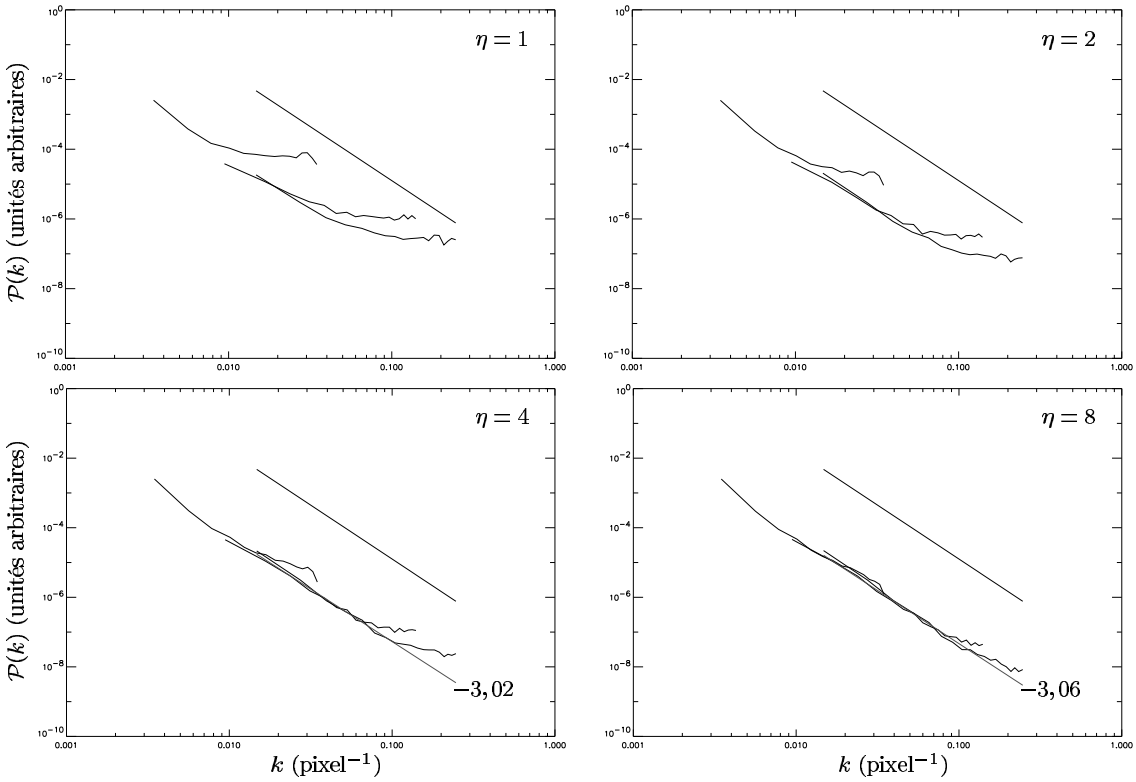

FIG. **XVI**.22 – *Spectres de puissance des images bruitées, regroupés par valeur du rapport signal sur bruit, comme indiqué sur chaque sous-figure. Les courbes en trait plein représentent les spectres de puissance, moyennés azimutalement, des images sales construites à partir de la distribution de brillance* $\beta = 3,1$ *atténuée par le lobe primaire, en utilisant les configurations F, E et D, et une fonction de poids uniforme. La droite en tirets représente le comportement recherché, et sur les deux sous-figures du bas, on montre, par une droite grisée, l'ajustement obtenu selon la méthode décrite dans le texte. Les exposants de ces ajustements sont indiqués en regard.*

en utilisant plusieurs configurations permet d'abaisser cette limite d'un facteur deux environ.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XVII

Statistiques des incréments de phase

XVII.1 Mise en évidence du rôle de la phase

XVII.1.a Expérience numérique préliminaire

On a vu, dans le cadre de l'étude des centroïdes de vitesse et, à l'instant, du filtrage interférométrique, les outils statistiques généralement utilisés pour caractériser les structures présentes dans une image. On a d'ailleurs noté qu'ils étaient liés, en ce sens que, d'une part, la fonction d'autocorrélation et la fonction de structure d'ordre deux peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation linéaire, pourvu que le champ en question soit homogène, et d'autre part, le spectre de puissance est la transformée de Fourier de cette même fonction d'autocorrélation. Enfin, l'indice spectral β peut être relié de façon simple à l'exposant de la Δ-variance et à la dimension fractale. Ainsi, d'une manière ou d'une autre, ces outils sont tous fondés sur la mesure des amplitudes des coefficients de Fourier de l'image, en écartant l'information qui pourrait être présente dans leurs phases.
En réalité, cette approche est beaucoup trop limitative. En effet, chaque composante de Fourier représente une onde plane dans l'espace réel, et les structures effectivement observées sont issues de l'interaction de ces multiples ondes. Se contenter des outils tels que le spectre de puissance revient de fait à ignorer purement et simplement le phénomème d'interférence. On peut se convaincre aisément de l'importance des phases et de leur contenu informationnel, en considérant l'exemple présenté sur la figure **XVII**.1. On extrait d'abord l'amplitude et la phase d'un portrait de Joseph Fourier, en haut à gauche. On construit d'autre part une amplitude synthétique en loi de puissance dont l'exposant est obtenu par un ajustement du spectre de puissance de l'image de départ. Enfin, une phase synthétique est déduite de la phase originale par une redistribution spatiale des valeurs. Notons que cette redistribution se fait en assurant l'imparité de la carte de phase synthétique, de façon à ce que les images reconstruites soient réelles. À partir de ces deux amplitudes et de ces deux phases, on peut donc reconstruire quatre images, (a), (b), (c) et (d).
L'image (a), construite à partir de l'amplitude et de la phase originales, n'est autre que l'image de départ. L'image (b) est issue de la combinaison de la phase originale et de l'amplitude synthétique. On remarque que la structure de l'image originale y est très bien conservée, que ce soit aux grandes ou aux petites échelles. L'image (c), construite à partir de l'amplitude originale et de la phase synthétique, ne retient en revanche rien ou presque de la structure de départ, et est à peine distinguable de l'image (d), laquelle est entièrement synthétique.

XVII.1.b Importance de la distribution spatiale des phases

La comparaison des images (b) et (c) souligne l'importance de la phase dans la caractérisation des structures d'une image. Plus précisément, c'est la distribution spatiale de la phase qui semble contenir l'essentiel de l'information, puisque bien que les valeurs de la carte de phase synthétique soient strictement les mêmes que celles de la carte de phase originale, les images recontruites à partir de la première ont perdu toute la structure d'origine. On voit d'ailleurs des structures cohérentes dans la carte de phase originale, structures qui sont bien entendu éliminées par la redistribution. C'est donc dans la distribution spatiale des phases qu'il faut chercher la caractérisation des structures, plutôt que dans la distribution des valeurs de ces phases. En fait, on peut voir sur la figure **XVII**.2 que l'histogramme des phases du portrait de Fourier est très proche d'une distribution uniforme, et par conséquent indistinguable de l'histogramme des phases d'un champ brownien fractionnaire.
L'importance de la distribution spatiale des phases pour la caractérisation des structures n'est pas surprenante lorsqu'on se place à nouveau du point de vue de la superposition d'ondes planes. En un point $\boldsymbol{k}$ de l'espace de Fourier, la composante $\widehat{F}(\boldsymbol{k}) = A(\boldsymbol{k}) \exp[i\phi(\boldsymbol{k})]$ donne, dans l'espace réel, une onde plane de

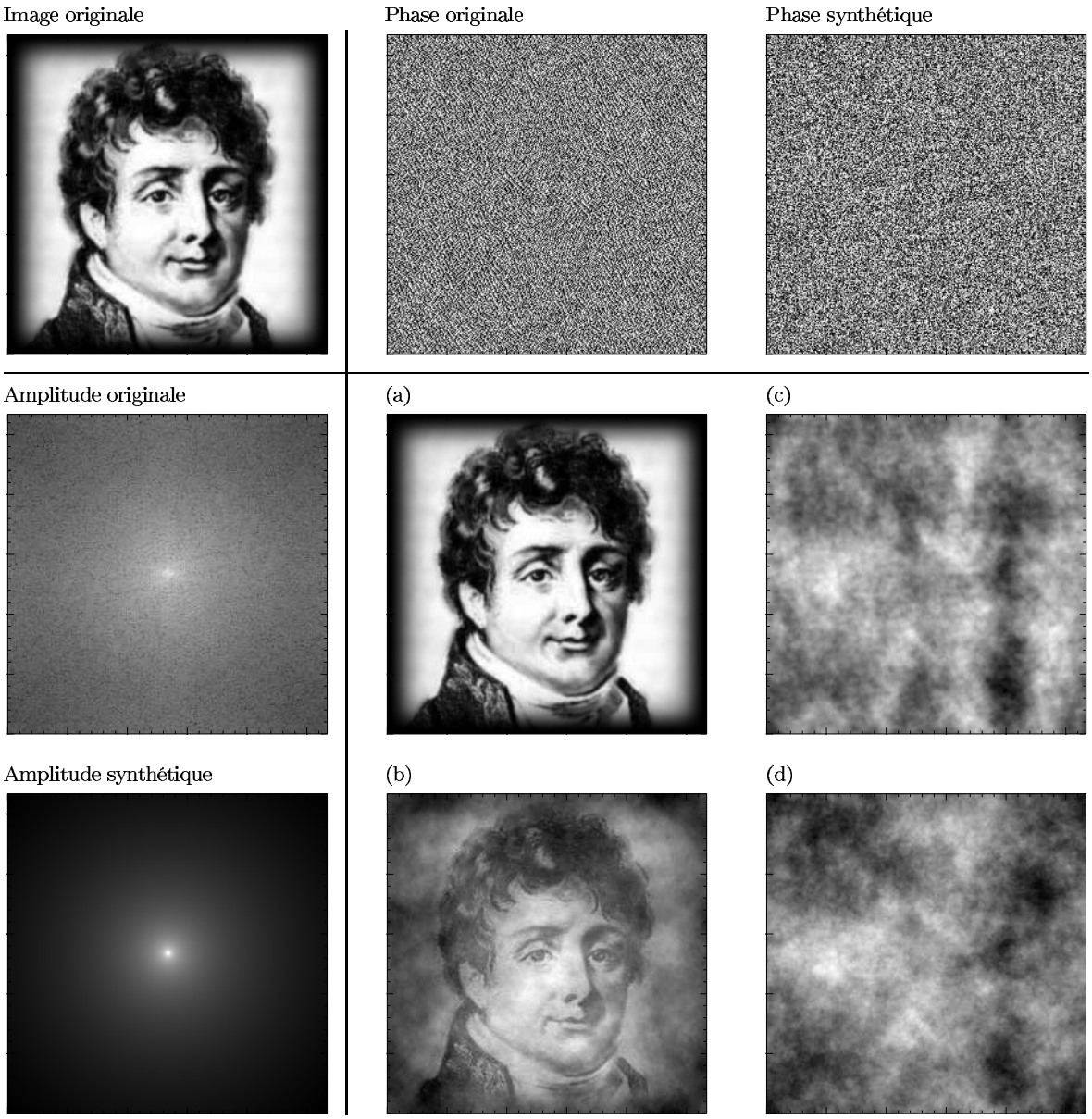

FIG. **XVII.**1 – *Illustration de l'importance de la phase dans la structure d'une image. Les amplitudes sont représentées en échelle logarithmique, afin de faciliter la visualisation.*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

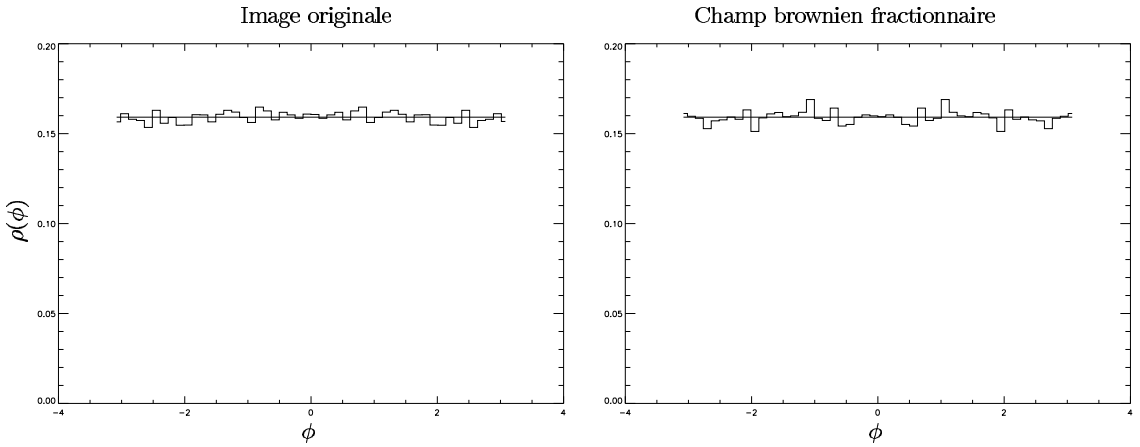

FIG. **XVII.**2 – *Distribution des valeurs des phases dans le portrait de Fourier (à gauche) et dans un champ brownien fractionnaire de même taille (à droite). Le trait en pointillé représente la distribution uniforme sur* $[-\pi, \pi]$.

vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$, dont l'amplitude est $A(\boldsymbol{k})$ et dont la phase à l'origine des coordonnées est $\phi(\boldsymbol{k})$. L'image finale étant le résultat de l'interférence de toutes ces ondes, les relations entre les phases en deux points voisins ont une importance essentielle. En effet, en un point $\boldsymbol{k'}$ proche de $\boldsymbol{k}$, les paramètres de l'onde (amplitude, direction, longueur d'onde) sont sensiblement les mêmes qu'en $\boldsymbol{k}$, à l'exception de la phase, laquelle peut varier brutalement, comme le montre la carte de la phase originale sur la figure **XVII.**1. Suivant alors que la différence des phases $\phi(\boldsymbol{k})$ et $\phi(\boldsymbol{k'})$ est plutôt proche d'un multiple pair ou impair de π, la structure dans l'image finale s'en trouvera respectivement fortement renforcée ou au contraire détruite. Comparativement, l'effet des ondes planes issues de régions plus éloignées de l'espace de Fourier est moins dépendant de la phase, soit parce que les échelles spatiales de variation sont très différentes, soit parce que les orientations des structures associées à ces ondes dans l'espace réel ne sont pas cohérentes.

XVII.2 Histogrammes des incréments de phase

XVII.2.a Introduction

Il ressort du paragraphe précédent qu'une caractérisation efficace des structures d'une image doit passer par une évaluation quantitative des propriétés de cohérence de la phase, par exemple au travers de ses incréments $\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta})$ définis, pour un déplacement donné $\boldsymbol{\delta}$ dans l'espace de Fourier, par

$$\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta}) = \phi(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta}) - \phi(\boldsymbol{k}) \simeq \boldsymbol{\nabla_k}\phi.\boldsymbol{\delta} \quad \text{où } \boldsymbol{\nabla_k} \text{ est l'opérateur gradient dans l'espace de Fourier}$$

La dernière équation n'étant valable que pour des petits déplacements, dans l'approximation linéaire. Comme on peut le voir sur la figure **XVII.**3, la présence de structure dans la carte des phases se retrouve dans celles des incréments, et on peut espérer que les distributions des valeurs de ces cartes d'incréments nous renseigneront sur la présence de structure dans l'image de départ. Cette propriété a été remarquée pour la première fois par [Scherrer *et al.*, 1991], puis tout récemment étudiée par [Chiang & Coles, 2000], dans le cadre de l'étude du *clustering* à grande échelle sous l'effet de la gravité.

XVII.2.b Cas des champs browniens fractionnaires

Dans l'hypothèse où les valeurs des incréments de phase nous fourniraient un renseignement sur la structure d'une image, les champs browniens fractionnaires devraient *a contrario* être des champs tests sans structure, puisque leurs phases sont totalement aléatoires et indépendantes les unes des autres. Dans ce cas simple, on peut calculer explicitement la distribution $\rho(\Delta\phi)$ des incréments de phase, puisqu'il s'agit

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

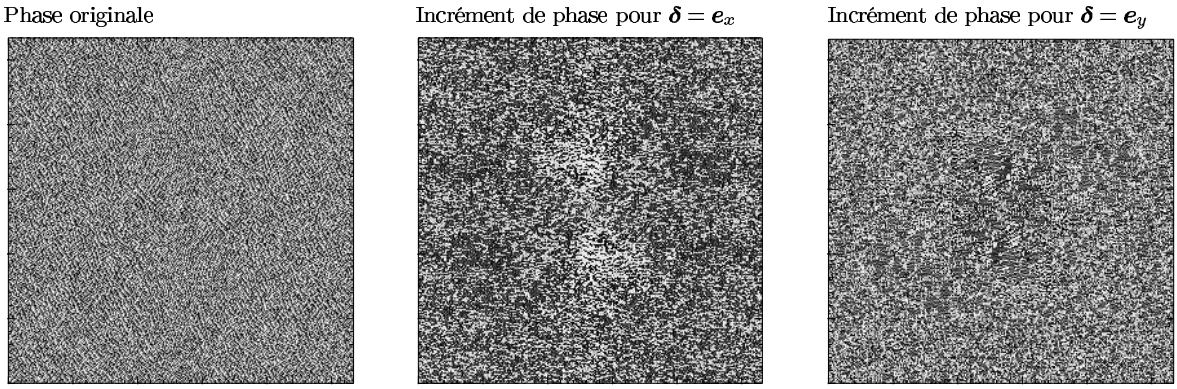

FIG. **XVII.**3 – *Carte de la phase originale (à gauche) du portrait de Fourier et cartes des incréments de phase pour $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$ (au centre) et $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_y$ (à droite). Rappelons que les vecteurs $\boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{e}_y$ sont les vecteurs unitaires des axes de l'espace de Fourier.*

de l'autocorrélation de la distribution $\rho_0(\phi)$ des phases, qui est uniforme,

$$\rho(\Delta\phi) = \iint\limits_{\mathcal{D}_{\Delta\phi}} \rho_0(\phi_1)\rho_0(\phi_2)\mathrm{d}\phi_1\mathrm{d}\phi_2 = \int \rho_0(\phi_1)\rho_0(\phi_1 - \Delta\phi)\mathrm{d}\phi_1 = \frac{1}{4\pi^2}(2\pi - |\Delta\phi|) \quad \text{avec} \quad \rho_0(\phi) = \frac{1}{2\pi}.$$

Dans cette équation, $\mathcal{D}_{\Delta\phi}$ désigne le domaine de $[-\pi, \pi]^2$ défini par $\phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi$. Cette forme est cependant définie sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, ce qui est incompatible avec le fait que les incréments de phase sont définis à 2π près. Ainsi, si l'incrément $\Delta\phi$ est compris entre -2π et $-\pi$, il doit être remplacé par son correspondant $\Delta\phi + 2\pi$. Réciproquement, s'il est compris entre π et 2π, il doit être remplacé par son correspondant $\Delta\phi - 2\pi$, suivant le schéma de la figure **XVII.**4. Par conséquent, la distribution réelle

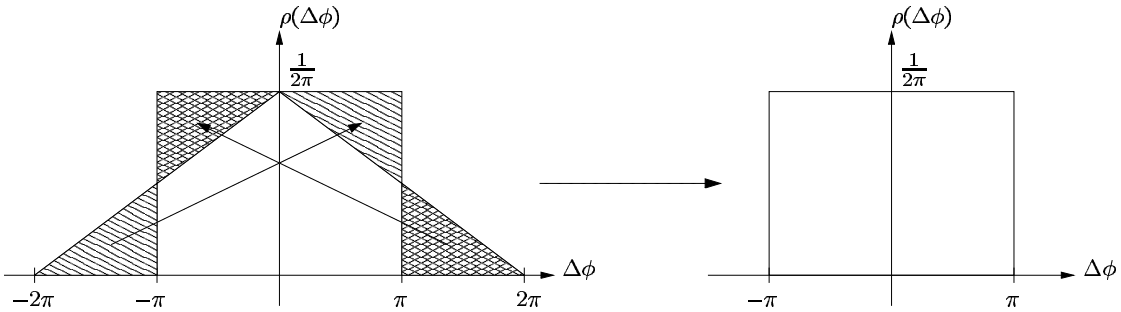

FIG. **XVII.**4 – *"Renormalisation" de la distribution des incréments de phase d'un brownien fractionnaire.*

des incréments de phase pour un champ brownien fractionnaire est uniforme entre $-\pi$ et π, et est donc identique à la distribution des phases elles-même, quel que soit le déplacement $\boldsymbol{\delta}$. On peut le vérifier expérimentalement, sur la figure **XVII.**5, qui présente les histogrammes des incréments de phase d'un champ brownien fractionnaire pour $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_y$. On voit que ces distributions sont uniformes, comme le suggérait le calcul précédent.

XVII.2.c Cas d'une image présentant de la structure

Si l'image considérée présente des structures, on peut s'attendre, du fait que les valeurs de la phase en des points voisins sont corrélées, à obtenir une distribution non uniforme des incréments de phase. On utilise comme image test la densité de colonne d'une simulation de turbulence compressible obtenue

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

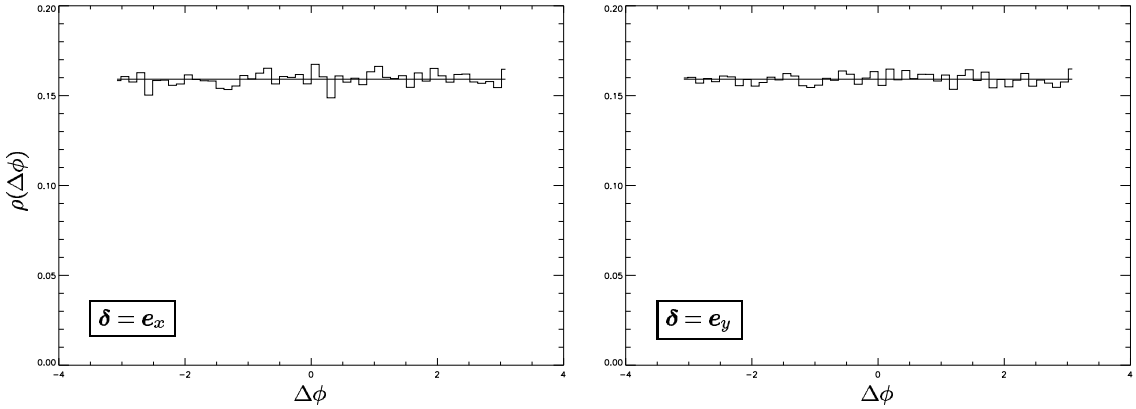

FIG. **XVII.**5 – *Histogrammes des incréments de phase d'un brownien fractionnaire* 512×512.

par [Porter *et al.*, 1994], représentée sur la figure **XVII.**6. On y voit des structures filamenteuses assez grossières, mais qui n'ont pas de signature dans la distribution des valeurs des phases, également représentée sur la figure **XVII.**6. Ceci n'est pas étonnant, étant donné le cas du portrait de Fourier, lequel, bien que présentant une grande quantité de structures, possédait une distribution des phases uniforme (voir la figure **XVII.**2). La présence de structure a en revanche un effet sur les propriétés statistiques des incréments de phase, comme on peut s'en convaincre en considérant la deuxième ligne de la même figure **XVII.**6. On y voit les histogrammes des incréments de phase correspondant aux cas des déplacements $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_y$. Leur écart à l'uniformité est flagrant, et est plus marqué dans le cas $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$, ce qu'on aurait tendance à interpréter comme la signature d'une anisotropie de l'image. On y reviendra dans la suite, après avoir introduit le concept d'entropie des incréments de phase, qui permet de quantifier la non-uniformité de ces distributions.

XVII.3 Entropie des incréments de phase et quantité de structure

XVII.3.a Introduction

Le concept d'entropie de phase a été introduit par [Polygiannakis & Moussas, 1995] dans le cadre de l'étude des variations du champ magnétique dans les plasmas cométaires et le vent solaire. Il a par la suite été réutilisé, par [Chiang & Coles, 2000] entre autres auteurs, pour étudier les propriétés de formation des grandes structures de l'Univers. Son intérêt principal, en ce qui concerne la caractérisation de la présence de structure dans une image, réside dans ses propriétés simples vis-à-vis des transformations courantes, comme on le verra plus loin. En particulier, c'est une mesure globale sur la distribution des incréments de phase, contrairement aux moments de la distribution, qui dépendent explicitement du centre de phase. En pratique, on définit l'entropie $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ associée à une distribution d'incréments de phase $\rho[\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta})]$ par

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) = -\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi) \ln\left[\rho(\Delta\phi)\right] \mathrm{d}\Delta\phi. \tag{85}$$

Cette définition est celle de l'entropie d'information de la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue, dont le domaine de variation est ici limité à $[-\pi, \pi]$. En particulier, dans le cas des champs browniens fractionnaires, on a,

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{2\pi}\right) \mathrm{d}\Delta\phi = \ln(2\pi) = \mathcal{S}_0.$$

Quant aux distributions non uniformes, les propriétés classiques de l'entropie bien connues en physique statistique permettent d'affirmer que l'entropie $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ d'une distribution d'incréments de phase est inférieure ou égale à $\mathcal{S}_0$, quel que soit le déplacement $\boldsymbol{\delta}$. On peut donc introduire un nombre $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ positif, défini par $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$, qui caractérisera d'une certaine façon la quantité de structure présente dans l'image, pour un déplacement $\boldsymbol{\delta}$ donné.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

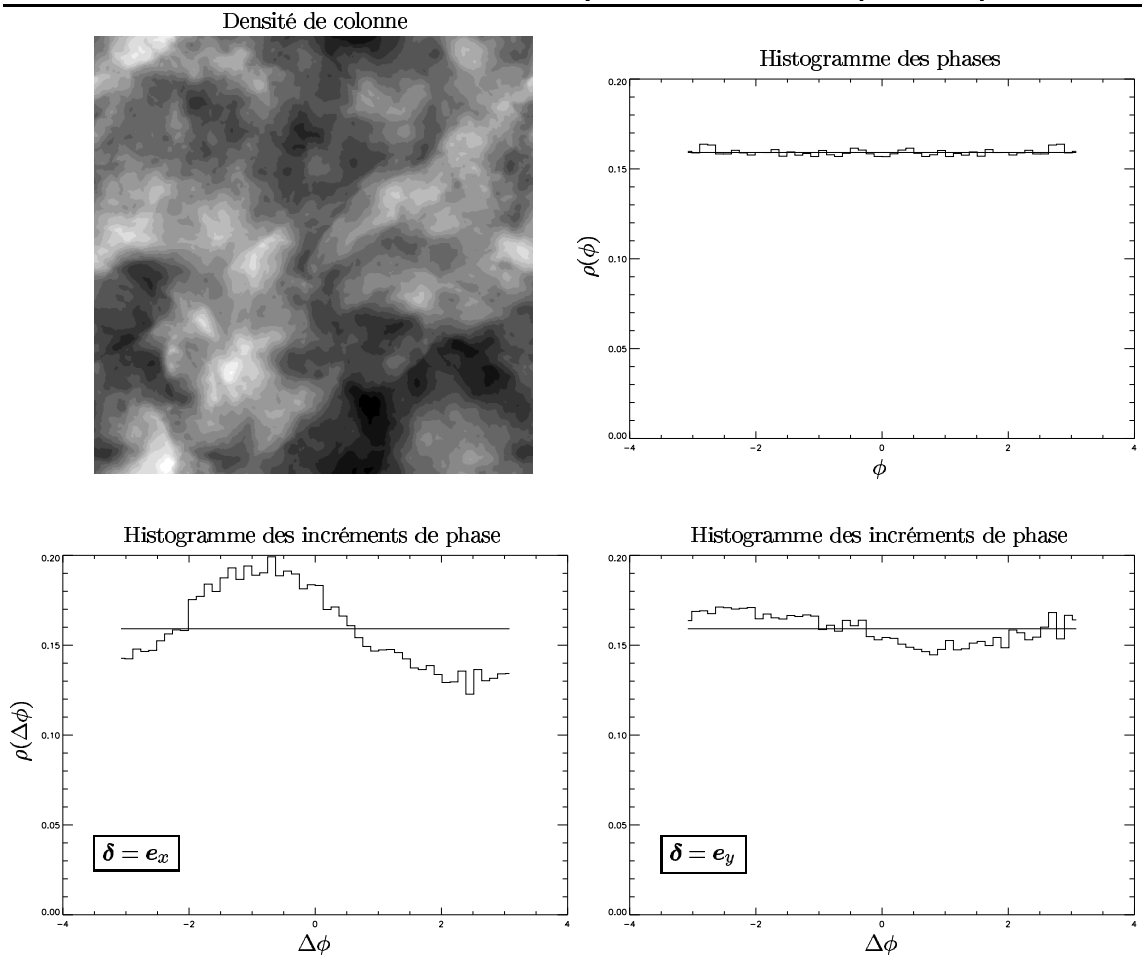

FIG. **XVII.6** – *Densité de colonne d'une simulation de turbulence compressible* 512^3 *(en haut à gauche) et histogramme de ses phases (en haut à droite) et de deux incréments de phase (en bas).*

XVII.3.b Propriétés dans les transformations simples

Pour que l'entropie des incréments de phase soit un concept véritablement opérationnel, il faut qu'elle se comporte de manière simple lorsqu'on fait subir à l'image étudiée des transformations élémentaires, telles que translations, rotations et symétries.

Translation

Soit donc $F(\boldsymbol{r})$ une image dont on souhaite étudier la structure. On note $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ l'entropie de ses incréments de phase pour un déplacement $\boldsymbol{\delta}$ donné, et on introduit une translation $\mathsf{T}_{\boldsymbol{r}_0}$ de vecteur $\boldsymbol{r}_0$ transformant F en F', de sorte que $F'(\boldsymbol{r}) = F(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$. La transformée de Fourier de F' est alors

$$\widehat{F'}(\boldsymbol{k}) = \iint F'(\boldsymbol{r}) \exp\left(-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = \iint F(\boldsymbol{r}') \exp\left[-2i\pi \boldsymbol{k}.(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0)\right] \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' = \widehat{F}(\boldsymbol{k}) \exp\left[-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}_0\right].$$

La phase ϕ' de F' est donc liée à la phase ϕ de F par $\phi'(\boldsymbol{k}) = \phi(\boldsymbol{k}) - 2\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}_0$, ce qui donne, pour les incréments de phase $\Delta\phi$ et $\Delta\phi'$, la relation

$$\Delta\phi'(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta}) = \Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta}) - 2\pi \boldsymbol{\delta}.\boldsymbol{r}_0, \tag{86}$$

où l'effet de la translation, contrairement au cas des phases, est cette-fois ci indépendant du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$. Remarquons que la formule précédente doit être corrigée pour tenir compte de la périodicité des incréments de phase. On a donc une translation globale de la distribution des incréments de phase, et l'entropie $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ est par conséquent invariante dans une translation de l'image,

$$\boxed{F' = \mathsf{T}_{\boldsymbol{r}_0}(F) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})}. \tag{87}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

On vérifie numériquement cette propriété, comme indiqué sur la figure **XVII**.7.

Rotation

On introduit une rotation R_θ, centrée sur l'origine O des coordonnées et d'angle θ, qui transforme l'image F en F' telle que $F'(\boldsymbol{r}) = \{\mathsf{R}_\theta[F]\}(\boldsymbol{r}) = F[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{r})]$, de sorte que dans l'espace de Fourier,

$$\widehat{F'}(\boldsymbol{k}) = \iint F[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{r})] \exp\left(-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}\right) \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = \iint F(\boldsymbol{r'}) \exp\left[-2i\pi \boldsymbol{k}.\mathsf{R}_\theta(\boldsymbol{r'})\right] \mathrm{d}^2\boldsymbol{r'} = \widehat{F}[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{k})],$$

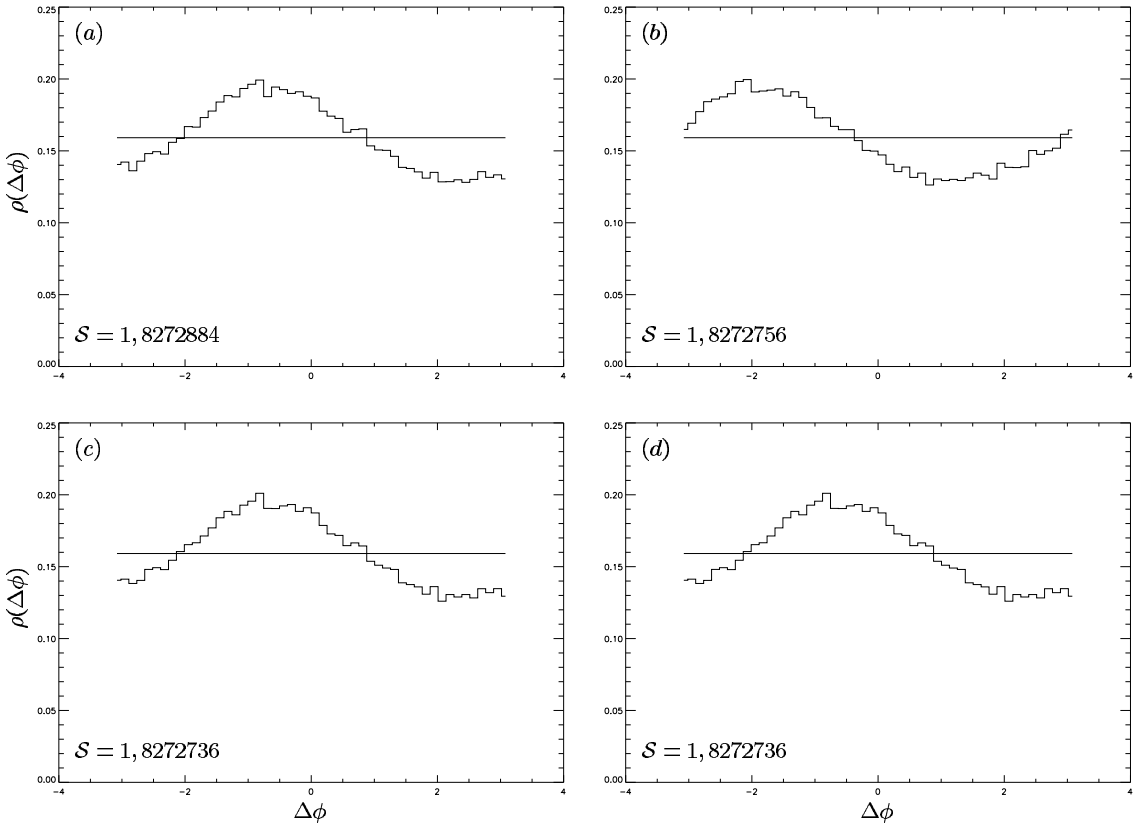

FIG. **XVII**.7 – *Illustration des effets des transformations élémentaires. La figure (a) représente l'histogramme des incréments de phase de la densité de colonne de la figure* **XVII**.6*, pour* $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y$*, et constitue la référence. La figure (b) représente l'histogramme des incréments de phase, pour le même déplacement* $\boldsymbol{\delta}$*, d'une image obtenue par translation de vecteur* $100\boldsymbol{e}_x$*. On remarque que l'histogramme est déplacé en bloc, sans modification sensible de sa forme. Les figures (c) et (d) correspondent quant à elles respectivement aux cas d'une rotation d'angle* $\pi/2$*, et d'une symétrie par rapport à l'axe* Ox*, et ce pour un déplacement* $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y$ *dans les deux cas. Les histogrammes sont sensiblement identiques à celui de référence, comme le prévoit la théorie. Les entropies correspondantes sont indiquées dans le coin inférieur gauche de chaque figure et sont toutes égales, à* 10^{-5} *près.*

en utilisant le fait que le Jacobien d'une rotation est égal à 1, ainsi que la relation $\boldsymbol{k}.\mathsf{R}_\theta(\boldsymbol{r'}) = \boldsymbol{r'}.\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{k})$. Il s'ensuit que les phases de l'image et de sa transformée par rotation sont liées par $\phi'(\boldsymbol{k}) = \phi[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{k})]$ et les incréments de phase par

$$\Delta\phi'(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta}) = \phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta}) - \phi'(\boldsymbol{k}) = \phi[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta})] - \phi[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{k})] = \Delta\phi[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{k}); \mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{\delta})].$$

On en conclut que l'entropie $\mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta})$ de l'image transformée est reliée à l'entropie $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ originale,

$$\boxed{F' = \mathsf{R}_\theta(F) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{S}[\mathsf{R}_\theta^{-1}(\boldsymbol{\delta})]}, \tag{88}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

c'est-à-dire que la carte $\mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta})$ se déduit de $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ par la rotation R_θ. Une vérification numérique rapide de cette égalité est présentée sur la figure **XVII**.7.

Symétrie

On considère ici une symétrie S_Δ par rapport à un axe Δ passant par O. La transformée F' de l'image de départ F est définie par $F'(\boldsymbol{r}) = \{\mathsf{S}_\Delta[F]\}(\boldsymbol{r}) = F[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{r})]$, d'où la relation dans l'espace de Fourier,

$$\widehat{F'}(\boldsymbol{k}) = \iint F[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{r})] \exp(-2i\pi \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}) \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = \iint F(\boldsymbol{r}') \exp[-2i\pi \mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k}).\boldsymbol{r}'] \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}' = \widehat{F}[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k})]$$

en utilisant le fait que le Jacobien d'une symétrie est égal à -1, que la symétrie S_Δ est son propre inverse, et que $\boldsymbol{k}.\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{r}') = \mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k}).\boldsymbol{r}'$. Les phases ϕ et ϕ' sont alors reliées par $\phi'(\boldsymbol{k}) = \phi[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k})]$ et les incréments de phase par

$$\Delta\phi'(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta}) = \phi'(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta}) - \phi'(\boldsymbol{k}) = \phi[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta})] - \phi[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k})] = \Delta\phi[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{k}); \mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{\delta})].$$

De la même manière que dans le cas des rotations, on en déduit que l'entropie des incréments de phase de la transformée de F dans une symétrie S_Δ est la transformée, par cette symétrie, de l'entropie des incréments de phase de F, soit

$$\boxed{F' = \mathsf{S}_\Delta(F) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}'(\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{S}[\mathsf{S}_\Delta(\boldsymbol{\delta})]}. \tag{89}$$

On propose une vérification numérique de cette propriété sur la figure **XVII**.7.

Conclusions

Il apparaît donc que la carte d'entropie des incréments de phase $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$, en tant que fonction du déplacement bidimensionnel $\boldsymbol{\delta}$, possède des propriétés simples vis-à-vis des transformations géométriques élémentaires qu'on peut appliquer à l'image considérée, et que ces propriétés s'interprètent bien en termes de conservation des notions intuitives de quantité de structure et d'anisotropie de l'image. Plus précisément, on comprend que la structure présente dans une image est invariante au cours d'une translation, et qu'il en va de même de l'anisotropie, puisque, par exemple, un filament est déplacé parallèlement à lui-même. Dans une rotation ou une symétrie, la quantité de structure est également conservée, mais les directions caractéristiques de l'anisotropie sont modifiées conformément à la transformation appliquée. Une mesure pertinente de la quantité de structure présente dans une image et de son anisotropie se doit donc de formaliser ces propriétés de symétrie. C'est le cas de la carte d'entropie des incréments de phase, comme le montrent les équations (87), (88) et (89).

XVII.4 Fiabilité de la méthode entropique pour la détection de structure

XVII.4.a Mise en évidence des variations d'histogrammes

L'examen attentif des exemples de la figure **XVII**.7 montre que les histogrammes sont très légèrement modifiés par les transformations appliquées à l'image, alors que les calculs précédents suggèrent que les distributions parentes sont identiques. De même, les entropies correspondantes diffèrent les unes des autres, les variations étant de l'ordre de 10^{-5}. Ces différences peuvent se comprendre à partir de la méthode de calcul numérique des incréments de phase. En raison de la finitude de l'espace de Fourier accessible, il est nécessaire en effet, pour calculer l'incrément $\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta})$, de se restreindre à un sous-ensemble où les phases $\phi(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta})$ et $\phi(\boldsymbol{k})$ sont toutes deux définies. Ce sous-ensemble dépendant du déplacement $\boldsymbol{\delta}$, les histogrammes (c) et (d) diffèrent nécessairement quelque peu de l'histogramme de référence. D'autre part, dans le cas de la translation, l'équation (86) montre que des incréments de phase comptés dans la même cellule dans l'histogramme correspondant à l'image d'origine, peuvent être séparés dans le cas de l'image translatée, comme on le représente schématiquement sur la figure **XVII**.8. Les histogrammes correspondant aux deux images sont donc en général légèrement différents[1],

[1]Comme on le note en légende de la figure **XVII**.8, ils sont identiques si $-2\pi\boldsymbol{\delta}.\boldsymbol{r}_0$ est un multiple de la taille de la cellule.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

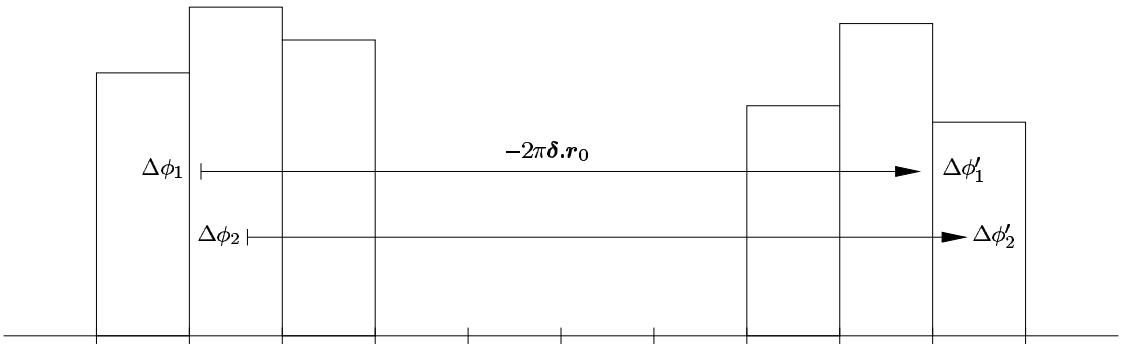

FIG. **XVII**.8 – *Modification des histogrammes des incréments de phase* $\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta})$ *sous l'effet de la translation* $\mathsf{T}_{\boldsymbol{r}_0}$. *La quantité* $-2\pi\boldsymbol{\delta}.\boldsymbol{r}_0$ *n'étant a priori pas un multiple de la taille de la cellule, les incréments* $\Delta\phi_1$ *et* $\Delta\phi_2$ *sont séparés par la translation.*

Il apparaît donc nécessaire de s'interroger sur la précision du calcul de l'entropie des incréments de phase en fonction des paramètres principaux que sont la taille de l'image et l'échantillonnage des histogrammes. En particulier, puisque l'absence de structure se caractérise théoriquement par une entropie maximale $\mathcal{S}_0 = \ln(2\pi)$, il s'agit de savoir quel est le seuil de la quantité $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ permettant d'affirmer qu'une image possède effectivement de la structure.

XVII.4.b Estimation analytique

Approche à partir des moments

Les variations des histogrammes illustrées sur la figure **XVII**.7 se traduisent naturellement par des variations de l'entropie des incréments de phase, qu'on a déjà notées sur la même figure **XVII**.7. Étant donné que les variations des histogrammes sont faibles, on peut d'ailleurs calculer explicitement la variation de l'entropie. On considère pour cela une image F comportant N_0 pixels, la carte de phase $\phi(\boldsymbol{k})$ de l'image étant alors de même taille. La carte des incréments de phase $\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta})$ est en revanche plus petite, d'après la remarque faite au paragraphe précédent. On note $N < N_0$ le nombre d'incréments de phase pris en compte, lequel dépend de la valeur du déplacement $\boldsymbol{\delta}$. On choisit alors un échantillonnage caractérisé par un nombre de cellules n, de sorte que la cellule i contienne un nombre N_i d'incréments de phase. Le calcul de l'entropie se fait en transformant (85) en somme discrète,

$$\mathcal{S} = -\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi)\ln[\rho(\Delta\phi)]\mathrm{d}\Delta\phi \approx -\sum_{i=1}^{n} h_i \ln(h_i)\frac{2\pi}{n} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{N_i}{N}\ln\left(\frac{nN_i}{2\pi N}\right), \tag{90}$$

où $h_i = N_i/N$ est la valeur de l'histogramme pour la $i^{\text{ème}}$ cellule. Lorsque les valeurs des histogrammes varient de δh_i, l'entropie varie d'une quantité $\delta\mathcal{S}$ qu'on calcule explicitement selon

$$\delta\mathcal{S} = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}[h_i\ln(h_i) - (h_i+\delta h_i)\ln(h_i+\delta h_i)] = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta\mathcal{S}_i,$$

où $\delta\mathcal{S}_i = h_i\ln(h_i) - (h_i+\delta h_i)\ln(h_i+\delta h_i)$ peut être réécrit en utilisant la propriété du logarithme,

$$\delta\mathcal{S}_i = -(h_i+\delta h_i)\ln\left(1+\frac{\delta h_i}{h_i}\right) - \delta h_i\ln(h_i) = -\delta h_i\ln(h_i) - (h_i+\delta h_i)\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{p+1}\left(\frac{\delta h_i}{h_i}\right)^{p+1},$$

en faisant appel au développement de $\ln(1+x)$ en série entière. Dans l'optique de donner un ordre d'idée de l'intervalle des valeurs d'entropie pour lequel il est raisonnable de conclure à l'absence de structure, on se place dans le cas où l'histogramme de référence est uniforme, soit $h_i = 1/(2\pi)$. Alors,

$$\delta\mathcal{S}_i = \delta h_i\ln(2\pi) - \frac{1}{2\pi}(1+2\pi\delta h_i)\sum_{p\geqslant 0}\frac{(-1)^p}{p+1}(2\pi\delta h_i)^{p+1},$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

qu'on peut réorganiser pour obtenir finalement la variation de l'entropie sous la forme

$$\delta\mathcal{S} = \frac{2\pi}{n}[\ln(2\pi) - 1]\sum_{i=1}^{n}\delta h_i - \frac{1}{n}\sum_{q\geqslant 2}\frac{(-1)^q}{q(q-1)}\sum_{i=1}^{n}(2\pi\delta h_i)^q = -\sum_{q\geqslant 2}\frac{(-1)^q}{q(q-1)}(2\pi)^q\mu_q = -\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}). \tag{91}$$

en introduisant les moments μ_q de l'échantillon $\{\delta h_i\}$ et en utilisant la condition de normalisation des histogrammes, qui implique que $\mu_1 = 0$. La dernière égalité exprime le fait que la quantité de structure $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ est égale à $\mathcal{S}_0 - \mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ et est donc l'opposée de la variation $\delta\mathcal{S}$ considérée.
On montre sur la figure **XVII**.9 l'évolution du développement (91) en fonction de l'ordre maximal $q_{\max}$ considéré. On voit que, pour un champ brownien fractionnaire, la troncature à $q_{\max} = 4$ suffit à retrouver la valeur calculée à partir de la formule (90), et que dans le cas d'une image possédant de la structure, comme la densité de colonne de la figure **XVII**.6, on peut se contenter de $q \leqslant q_{\max} = 6$.

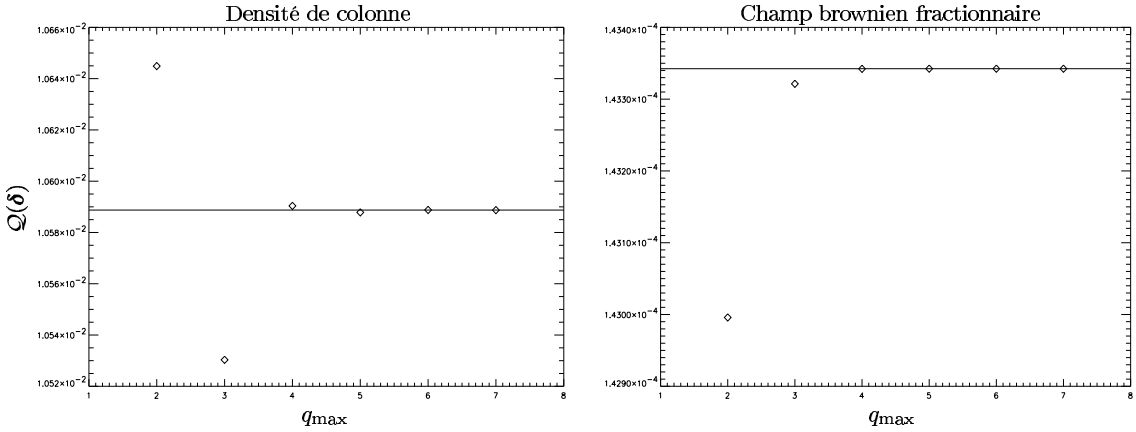

FIG. **XVII**.9 – *Évolution de la quantité de structure avec l'ordre maximal q_{max} du développement (91). La figure de gauche représente le cas de la densité de colonne de la figure* **XVII**.6*, tandis que la figure de droite correspond à un brownien fractionnaire de même taille* (512^2)*. Dans les deux cas, le déplacement est $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y$, et le trait pointillé représente la valeur limite de $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$, calculée d'après la formule (90).*

Approche en termes de pseudo-distance de Küllback

L'approche en termes de moments n'est cependant pas la mieux adaptée à l'estimation analytique des valeurs probables de la quantité de structure en fonction des paramètres N et n, car il n'existe pas, à ma connaissance, de méthode de calcul fondée sur l'équation (91) permettant d'obtenir la probabilité que $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ soit plus grande qu'un nombre donné, sachant que la distribution parente est uniforme.
Pour faire ce calcul, on peut en revanche utiliser les résultats de [Castellan, 2000]. Comme précédemment, les N incréments $(\Delta\phi_1, \ldots, \Delta\phi_N)$ sont distribués uniformément sur $[-\pi, \pi]$, et répartis dans n intervalles $\mathcal{A}_i$ de même longueur. On note toujours N_i le nombre d'incréments tombant dans l'intervalle $\mathcal{A}_i$, et on introduit les fonctions s et σ définies par

$$s(x) = \frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}(x) \quad \text{et} \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbf{1}_{\mathcal{A}_i}(x),$$

où $\mathbf{1}_{[a,b]}$ désigne l'indicatrice du segment $[a, b]$, dont on rappelle qu'il s'agit de la fonction prenant la valeur 1 sur $[a, b]$ et 0 ailleurs. En utilisant ces formes, la quantité de structure peut s'écrire

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) = \mathcal{S}_0 - \mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) = \ln 2\pi + \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i \ln(h_i) = -\int s(x)\ln[s(x)]\mathrm{d}x + \int \sigma(x)\ln[\sigma(x)]\mathrm{d}x.$$

Or, s étant constante sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ considéré, on peut remplacer le premier terme par

$$\int s(x)\ln[s(x)]\mathrm{d}x = \ln(s)\int s(x)\mathrm{d}x = \ln(s)\int \sigma(x)\mathrm{d}x = \int \sigma(x)\ln[s(x)]\mathrm{d}x,$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

puisque s et σ sont normalisées. La quantité de structure, en se mettant alors sous la forme

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) = \int \sigma(x) \ln \left[\frac{\sigma(x)}{s(x)}\right] \mathrm{d}x = \mathcal{K}(\sigma, s)$$

apparaît comme une pseudo-distance de Küllback de σ à s. La méthode de [Castellan, 2000] suggère, pour calculer la probabilité $\mathsf{P}(\{\mathcal{Q} > x\})$ que la quantité de structure calculée pour une distribution parente s uniforme soit plus grande qu'un réel x donné, de la majorer en isolant les évènements pour lesquels l'échantillon $\{h_i\}$ présente un "record". On définit ainsi, pour $\epsilon > 0$ réel, l'évènement Ω_ϵ pour lequel il existe une cellule "anormalement" remplie ou "anormalement" vide,

$$\Omega_\epsilon = \{\exists i \in [\![1, n]\!]; |h_i - p| > \epsilon p\} \quad \text{avec} \quad h_i = \frac{N_i}{N} \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{n}.$$

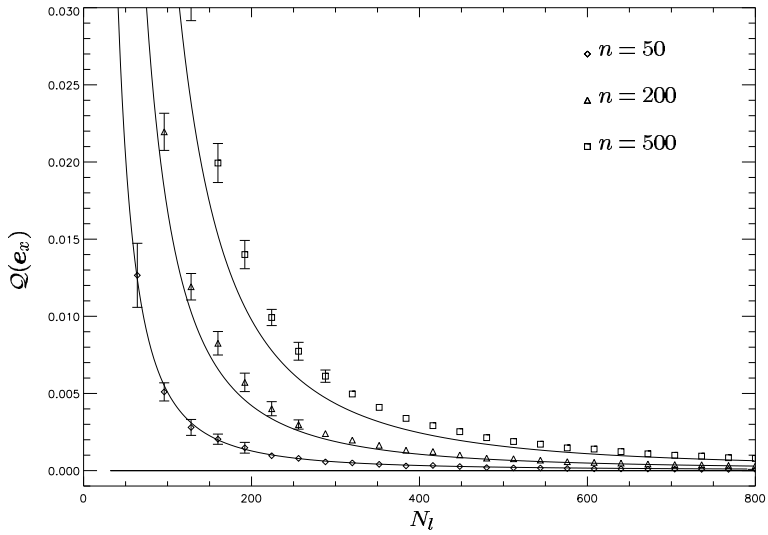

FIG. **XVII.**10 – *Évolution de la quantité de structure $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_x)$ en fonction de la taille linéaire N_l de champs browniens fractionnaires bidimensionnels et du nombre de cellules n utilisées dans la construction des histogrammes d'incréments de phase. Pour chaque jeu de paramètres (n, N_l) on présente la moyenne de $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_x)$ sur dix réalisations, ainsi que l'écart-type si celui-ci est plus grand que $2,5.10^{-4}$. Les traits pointillés représentent la limite au delà de laquelle on a moins de 1% de chances de trouver $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_x)$, en se limitant au deuxième terme de la majoration (92). Le paramètre ϵ est pris égal à 0,1.*

Dans cette optique, h_i peut être interprété comme le nombre moyen de "succès" - c'est-à-dire d'occurrences de l'évènement "l'incrément $\Delta\phi$ tombe dans l'intervalle $\mathcal{A}_i$" - dans une série de N épreuves de Bernoulli, et p comme la probabilité de ce même évènement élémentaire. La probabilité $\mathsf{P}(\Omega_\epsilon)$ peut alors être majorée par

$$\mathsf{P}(\Omega_\epsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(\{|h_i - p| > \epsilon p\}) \leqslant n\mathsf{P}(\{|h_i - p| > \epsilon p\}).$$

Les ordres de grandeur respectifs de N et n permettent d'écrire que N_i est suffisamment grand pour qu'on puisse appliquer le théorème central limite, selon lequel les écarts de h_i à p suivent approximativement une loi normale. Plus précisément, on a, d'après le théorème de Moivre-Laplace [Pelat, 1998],

$$\sqrt{N}\frac{h_i - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{où} \quad \mathcal{N}(0,1) \quad \text{désigne la loi normale de moyenne nulle et de variance 1.}$$

Par conséquent, on peut calculer la probabilité $\mathsf{P}(\{|h_i - p| > \epsilon p\})$ en utilisant la fonction d'erreur,

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \quad \text{d'où} \quad \mathsf{P}(\{|h_i - p| > \epsilon p\}) \approx 1 - \mathrm{Erf}(x_\epsilon) \quad \text{avec} \quad x_\epsilon = \sqrt{\frac{Np}{2(1-p)}}\epsilon.$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

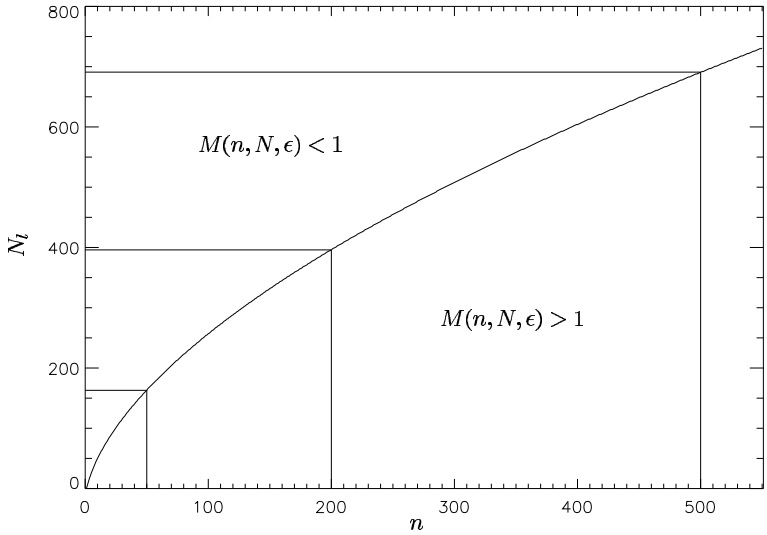

FIG. **XVII.**11 – *Courbe $M(n,N,\epsilon) = 1$ dans l'espace à deux dimensions repéré par le nombre de cellules n en abscisses et la taille linéaire $N_l = \sqrt{N}$ en ordonnées. Le paramètre ϵ est fixé à 0,1. Les domaines $M(n,N,\epsilon) < 1$ et $M(n,N,\epsilon) > 1$ sont indiqués sur la figure, ainsi que les points sur la courbe correspondant aux valeurs de n choisies sur la figure* **XVII.**10*. Les tailles linéaires "limites" sont respectivement $N_l = 163$ pour $n = 50$, $N_l = 396$ pour $n = 200$, et $N_l = 691$ pour $n = 500$, ce qui correspond aux ordres de grandeur des tailles pour lesquelles la majoration (92) n'est plus correcte.*

Numériquement, pour $N = 512^2$ et $n = 50$, la probabilité qu'il existe une cellule $\mathcal{A}_i$ où le nombre moyen d'incréments différerait de cinq pour cent ($\epsilon = 5.10^{-2}$) de sa valeur théorique est de l'ordre de $0,012$, et tombe à 10^{-11} pour un écart de dix pour cent ($\epsilon = 0,1$).
En ce qui concerne les échantillons "usuels", c'est-à-dire ne donnant pas lieu à l'évènement Ω_ϵ, on a l'encadrement suivant [Castellan, 2000],

$$\frac{1}{2}\int \inf(\sigma,s)\left[\ln\left(\frac{\sigma}{s}\right)\right]^2 \mathrm{d}x \leqslant \mathcal{K}(\sigma,s) = \mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) \leqslant \frac{1}{2}\int \sup(\sigma,s)\left[\ln\left(\frac{\sigma}{s}\right)\right]^2 \mathrm{d}x.$$

Or, sur le complémentaire $\overline{\Omega_\epsilon}$ de Ω_ϵ, la fonction $\inf(\sigma,s)$ est minorée par $(1-\epsilon)s$, et la fonction $\sup(\sigma,s)$ est majorée par $(1+\epsilon)s$. D'autre part, on a également l'encadrement [Castellan, 2000]

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^2}\int s\left(\frac{s-\sigma}{s}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int s\left[\ln\left(\frac{\sigma}{s}\right)\right]^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(1-\epsilon)^2}\int s\left(\frac{s-\sigma}{s}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

qu'on peut réécrire en remarquant que l'intégrale apparaissant dans le minorant et dans le majorant est en fait liée à la statistique du χ^2 de Pearson, puisque

$$\int s\left(\frac{s-\sigma}{s}\right)^2 \mathrm{d}x = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi}{n}\left(\frac{N_i}{N}\frac{n}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\frac{(N_i - Np)^2}{Np} = \frac{\chi^2}{N}.$$

En combinant ces inégalités, on obtient finalement un encadrement de la quantité de structure sur $\overline{\Omega_\epsilon}$, qui montre que celle-ci constitue une statistique équivalente[2] au χ^2,

$$a_\epsilon\frac{\chi^2}{N} \leqslant \mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) \leqslant b_\epsilon\frac{\chi^2}{N} \quad \text{en posant } a_\epsilon = \frac{1-\epsilon}{2(1+\epsilon)^2} \text{ et } b_\epsilon = \frac{1+\epsilon}{2(1-\epsilon)^2}.$$

Dès lors, on peut brutalement majorer la probabilité de trouver une quantité de structure supérieure à x par la somme des probabilités d'avoir un échantillon "record" d'une part, et d'avoir un échantillon "normal"

[2] Asymptotiquement, il s'agit d'un χ^2 à $n-1$ degrés de liberté, et non n comme on pourrait le supposer, car il faut tenir compte de la contrainte $\sum N_i = N$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

pour lequel $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) > x$, d'autre part,

$$\mathsf{P}\left(\{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) > x\}\right) \leqslant \mathsf{P}\left(\Omega_\epsilon\right) + \mathsf{P}\left(\{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) > x\} \cap \overline{\Omega_\epsilon}\right) \leqslant n\left[1 - \mathrm{Erf}\left(x_\epsilon\right)\right] + \mathsf{P}\left(\chi^2 > \frac{Nx}{b_\epsilon}\right), \tag{92}$$

En choisissant $\epsilon = 0,1$ on a vu qu'on pouvait parfaitement négliger le premier terme de la majoration précédente, de sorte qu'on obtient un majorant de $\mathsf{P}\left(\{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) > x\}\right)$ en considérant les quantiles de la loi du χ^2. Ainsi, pour une image de taille 512^2 et un nombre de cellules $n = 50$, on estime qu'il y a 99% de chances pour que la quantité de structure $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ soit inférieure à 2.10^{-4}.

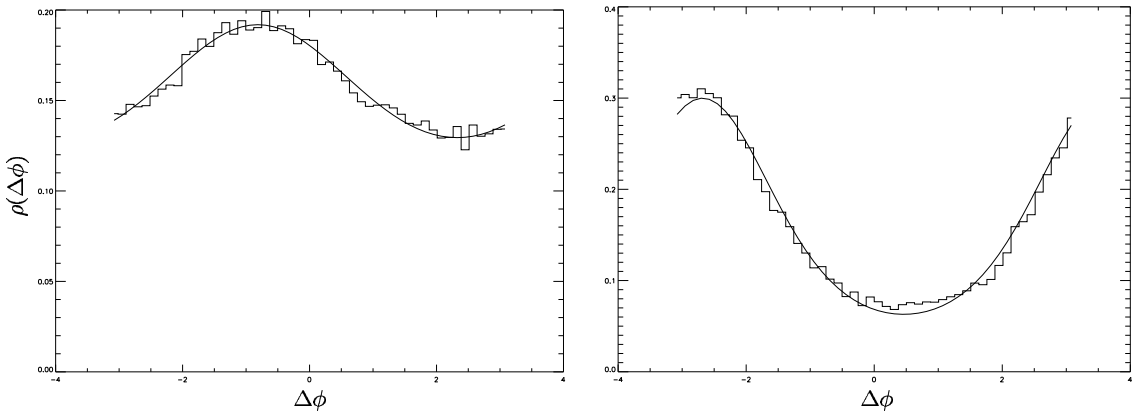

FIG. **XVII**.12 – *Histogrammes des incréments de phase de la densité de colonne de la figure* **XVII**.6 *(à gauche) et du portrait de Fourier (à droite), pour un déplacement* $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$. *Le trait pointillé représente l'ajustement d'une distribution de von Mises. On trouve* $\kappa \approx 0.197$ *dans le cas de la densité de colonne et* $\kappa \approx 0.780$ *dans celui du portrait de Fourier.*

XVII.4.c Estimation numérique

On peut également estimer numériquement l'influence de la taille de l'image ainsi que du nombre de cellules sur la fiabilité de la quantité de structure. Pour cela, on réalise une série de simulations de champs browniens fractionnaires bidimensionnels de diverses tailles. Le déplacement $\boldsymbol{\delta}$ étant donné, le calcul numérique de $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ pour ces simulations doit fournir une estimation de la limite au delà de laquelle la présence de structure peut être considérée comme avérée. On construit donc des champs browniens fractionnaires bidimensionnels possédant un indice spectral $\beta = 3$ et de taille $N = N_l^2$, la taille linéaire N_l allant de 32 à 800 pixels. Pour chaque taille, on se donne dix réalisations, puis on calcule leurs cartes d'incréments de phase pour $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$. À partir de chacune de ces cartes, on construit 3 histogrammes, pour des nombres de cellules n égaux à 50, 200 et 500, et on calcule la quantité de structure $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$ associée à chaque histogramme. Enfin, on exhibe la valeur moyenne et l'écart-type des quantités de structure obtenues à N et n donnés. Les résultats sont présentés sur la figure **XVII**.10.

Il apparaît que la quantité de structure calculée numériquement augmente lorsque la taille des images diminue, et lorsque le nombre de cellules augmente. On interprète cet effet en remarquant que les histogrammes sont alors moins bien définis, et moins proches de la distribution parente uniforme. La figure montre également, en pointillés, la valeur du $99^{\text{ème}}$ percentile de la loi suivie par $b_\epsilon \chi^2/N$, pour $\epsilon = 0,1$. Cette valeur dépend de N bien sûr, mais également de n à travers le nombre de degrés de liberté de la loi du χ^2. Idéalement, ces courbes devraient majorer les quantités de structure obtenues numériquement sur des champs browniens fractionnaires. On voit que la majoration est très bonne dans le cas où $n = 50$, qu'elle commence à faiblir pour $n = 200$ aux plus petites tailles d'images, et qu'elle est mise en défaut sauf aux plus grandes tailles pour $n = 500$. Ceci suggère que dans ces cas précis, la probabilité $\mathsf{P}(\Omega_\epsilon)$ n'est plus négligeable. Le premier terme de la majoration (92)

$$\mathsf{P}\left(\Omega_\epsilon\right) \leqslant n\left[1 - \mathrm{Erf}\left(\sqrt{\frac{N}{2(n-1)}}\epsilon\right)\right] = M(n, N, \epsilon)$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

perdant de toutes les manières sa pertinence dès que n est trop grand ou que N est trop petit, puisque le majorant $M(n, N, \epsilon)$ devient supérieur à 1. On montre d'ailleurs sur la figure **XVII.**11, pour $\epsilon = 0,1$, la courbe $M(n, N, \epsilon) = 1$ dans l'espace des paramètres (n, N_l). On n'est pas surpris de voir que les valeurs de cette courbe pour $n = 50$, $n = 200$ et $n = 500$ correspondent *grosso modo* aux points, sur la figure **XVII.**10, où les évaluations numériques rejoignent les courbes du 99ème percentile.
Ces estimations permettent de conclure quant à la présence de structure dans une image pour un déplacement $\boldsymbol{\delta}$ donné. À titre d'exemple, on considère la densité de colonne illustrée sur la figure **XVII.**6, dont on calcule les quantités de structure $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_x)$ et $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_y)$ pour $n = 50$. On trouve $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_x) = 9,79.10^{-3}$ et $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_y) = 1,27.10^{-3}$, ce qui est 5 à 50 fois plus grand que les valeurs correspondantes pour des champs browniens fractionnaires de même taille.

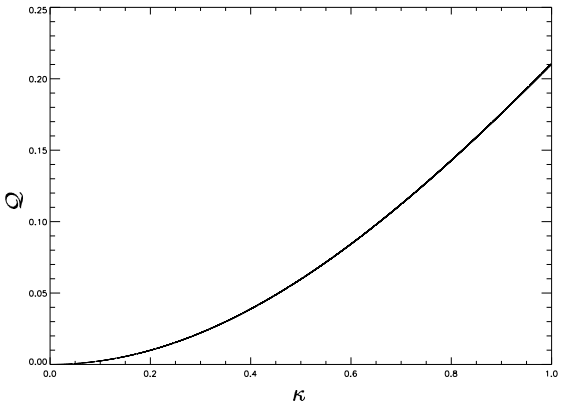

FIG. **XVII.**13 – *Évolution de la quantité de structure $\mathcal{Q}$ en fonction du paramètre κ caractérisant la non-uniformité de la distribution de von Mises. Dans la limite de $\kappa \to 0$, $\mathcal{Q}$ est proportionnelle à κ^2.*

XVII.5 Distribution de von Mises

XVII.5.a Histogrammes des incréments de phase

L'entropie $\mathcal{S}$ des incréments de phase et la quantité de structure associée $\mathcal{Q}$ semblent donc permettre de déterminer si une image présente de la structure, à partir de la seule information des phases, puisque les valeurs de $\mathcal{Q}$ trouvées pour un champ brownien fractionnaire sont typiquement de l'ordre de 10^{-4}, alors que pour une image telle que celle de la densité de colonne de la figure **XVII.**6, la quantité de structure est d'environ 10^{-2}, et peut monter, pour des images très structurées comme le portrait de Fourier (figure **XVII.**1), jusqu'à des valeurs de $0,1$ ou plus, soit 100 à 1000 fois plus élevées que pour des images "sans structure".
Il apparaît cependant que l'entropie et la quantité de structure ne sont en réalité que des moyens de caractériser simplement la non-uniformité des distributions d'incréments de phase, et que ce sont ces dernières qui contiennent en définitive l'information structurelle des images étudiées. En effet, toutes les propriétés simples de l'entropie dans les transformations géométriques de la section **XVII.3.b** sont fondées sur les propriétés des distributions d'incréments de phase elles-mêmes. Or on voit, par exemple sur la figure **XVII.**12, que les histogrammes d'incréments de phase étudiés présentent tous une forme similaire, avec une et une seule oscillation de grande longueur d'onde. Il semble donc probable que cette forme générale de la distribution des incréments de phase soit indépendante du processus particulier à l'origine de la structuration des images. Ainsi, les simulations de la formation des grandes structures de l'univers sous l'effet de la gravité (voir par exemple [Watts *et al.*, 2003]) donnent des distributions d'incréments de phase de même forme que les simulations de turbulence compressible de [Porter *et al.*, 1994]. Comme l'indique [Watts *et al.*, 2003], ces distributions sont d'ailleurs très proches de distributions de von Mises, données par la forme suivante, dépendant de deux paramètres κ et μ,

$$\rho(\Delta\phi) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp\left[-\kappa \cos(\Delta\phi - \mu)\right],$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre zéro. Le paramètre μ correspond à l'incrément de phase le moins représenté, pour lequel la distribution $\rho(\Delta\phi)$ est donc minimale. Quant au paramètre κ, il contrôle l'écart à l'uniformité. On voit, sur les ajustements de la figure **XVII**.12, que celui-ci est de l'ordre de quelques dixièmes pour une image structurée.

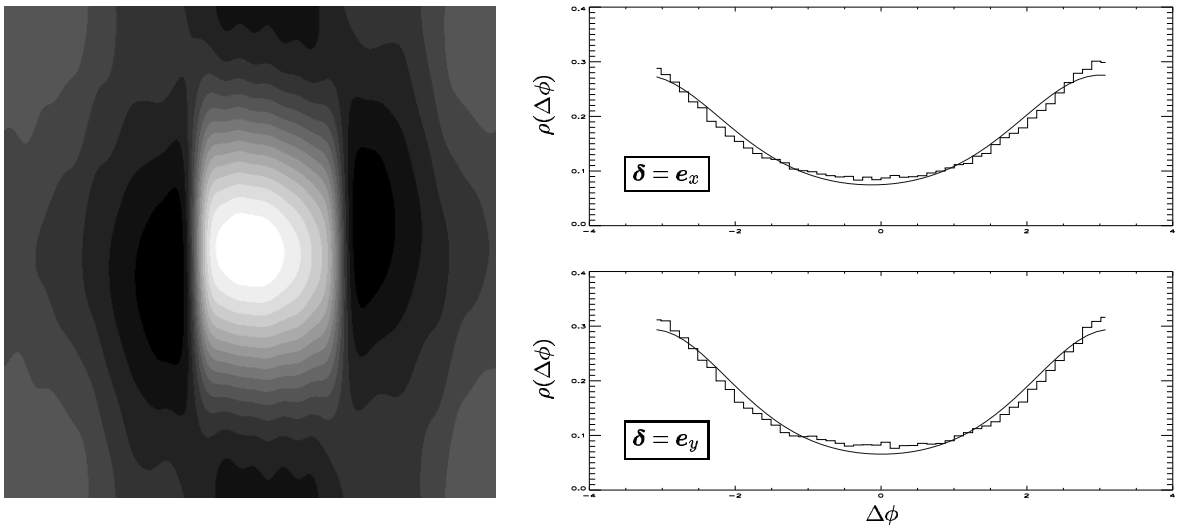

FIG. **XVII**.14 – *Image synthétique modèle présentant un fort degré d'anisotropie (à gauche) et histogrammes des incréments de phase associés à $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$ (en haut à droite) et $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_y$ (en bas à droite). Les quantités de structure correspondantes sont respectivement $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_x) = 0,0922$ et $\mathcal{Q}(\boldsymbol{e}_y) = 0,116$.*

XVII.5.b Calcul de la quantité de structure associée

Puisque la distribution des incréments de phase peut être approchée par une distribution de von Mises, le paramètre κ contrôlant la non-uniformité de cette distribution doit pouvoir être relié à l'entropie et à la quantité de structure associées aux incréments de phase. En effet, en utilisant l'équation (85)

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) = \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\Delta\phi) \left\{ \ln\left[2\pi I_0(\kappa)\right] + \kappa \cos\left(\Delta\phi - \mu\right) \right\} \mathrm{d}\Delta\phi.$$

Etant donnée l'invariance translationnelle de l'entropie, on peut supposer que $\mu = 0$, soit

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) = \ln\left[2\pi I_0(\kappa)\right] + \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \int_{-\pi}^{\pi} \kappa \exp\left[-\kappa \cos\left(\Delta\phi\right)\right] \cos\left(\Delta\phi\right) \mathrm{d}\Delta\phi.$$

Or, la fonction de Bessel modifiée de première espèce et d'ordre n est [Abramowitz & Stegun, 1964]

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp\left[x \cos\left(\theta\right)\right] \cos\left(n\theta\right) \mathrm{d}\theta \quad \text{d'où} \quad \mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) = \ln\left[2\pi I_0(\kappa)\right] + \kappa \frac{I_1(-\kappa)}{I_0(\kappa)}.$$

De là, on déduit la forme de la quantité de structure en fonction du paramètre κ,

$$\boxed{\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta}) = \kappa \frac{I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} - \ln\left[I_0(\kappa)\right]} \quad \text{étant donné que } I_1 \text{ est une fonction impaire.}$$

Cette équation, tout comme les précédentes, tient implicitement compte du fait que le paramètre κ dépend de l'histogramme des incréments de phase, et donc du déplacement $\boldsymbol{\delta}$. La figure **XVII**.13 montre l'évolution de $\mathcal{Q}$ avec κ. La tangente horizontale pour $\kappa \to 0$ suggère que ce dernier paramètre pourrait permettre une meilleure détermination de la présence ou non de structure dans des images globalement peu structurées. Cependant, dans le cas d'images peu structurées, il est difficile d'obtenir un ajustement des histogrammes des incréments de phase par une distribution de von Mises, car les variations de faible amplitude et de grande longueur d'onde sont alors noyées dans les fluctuations de l'histogramme. Par conséquent, la détermination de la présence ou non de structure dans une telle image se fera plutôt par la quantité $\mathcal{Q}$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

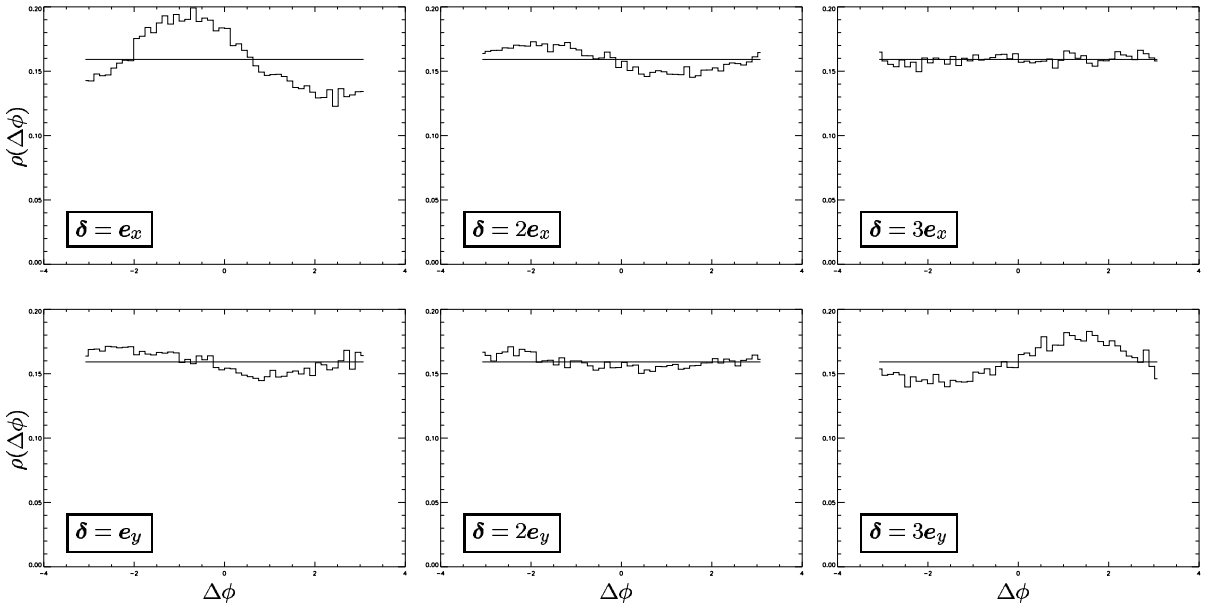

FIG. **XVII.**15 – *Histogrammes des incréments de phase correspondant à la densité de colonne de la figure* **XVII.**6 *et à six vecteurs déplacements colinéaires à l'un des deux vecteurs unitaires* $\boldsymbol{e}_x$ *et* $\boldsymbol{e}_y$.

XVII.6 Évolution de la quantité de structure avec δ

Jusqu'à présent, nous avons considéré les incréments de phase en nous fixant, de manière complètement arbitraire, un vecteur déplacement $\boldsymbol{\delta}$ dans l'espace de Fourier. On a néanmoins pu noter, par exemple sur la figure **XVII.**6, que les histogrammes d'incréments de phase, et par conséquent les quantités de structure associées $\mathcal{Q}$, pouvaient être très différents suivant le choix de ce vecteur.
On est tenté d'interpréter cette propriété en termes d'orientation préférentielle du gradient de la phase. Or il est possible de calculer explicitement la valeur moyenne de ce vecteur en remarquant que

$$\mathsf{E}\{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\phi\} = \mathsf{E}\{\Delta\phi_x\}\,\boldsymbol{e}_x + \mathsf{E}\{\Delta\phi_y\}\,\boldsymbol{e}_y, \quad \text{avec } \Delta\phi_i \text{ les incréments de phase associés à } \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_i.$$

Les moyennes des incréments de phase correspondant à chacun des deux vecteurs de la base canonique de l'espace de Fourier sont liées aux coefficients μ obtenus par ajustement de distribution de von Mises. Plus précisément, on a, de manière générale, la relation $\mathsf{E}\{\Delta\phi\} = \mu \pm \pi$, la valeur exacte étant celle tombant dans l'intervalle de définition $[-\pi, \pi]$. Par conséquent, l'orientation moyenne du vecteur $\boldsymbol{\nabla}\phi$ n'est pas une mesure globale sur les histogrammes, et elle peut par exemple varier lorsque l'on translate l'image de départ, sans que les amplitudes des oscillations changent pour autant.
Peut-on alors relier les différences globales[3] observées, par exemple sur la figure **XVII.**6, à une orientation préférentielle des structures dans l'espace image ? Après tout, c'est cette propriété qui nous intéresse directement, plutôt que l'orientation moyenne du gradient des phases. Autrement dit, il s'agit d'établir si la variation des oscillations des histogrammes en fonction de l'orientation du vecteur $\boldsymbol{\delta}$ traduit une anisotropie de l'image. Malheureusement, il ne semble pas, *à première vue*, que cette relation soit simple. En effet, comme le montre la figure **XVII.**14, on peut avoir une image présentant une forte anisotropie sans que celle-ci ne se répercute sur les histogrammes des incréments de phase, puisqu'on observe des distributions sensiblement identiques pour $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$ et $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_y$. À l'inverse, la figure **XVII.**6 montre des histogrammes très différents, alors qu'on n'observe pas d'anisotropie évidente. S'il est néanmoins permis de supposer qu'il existe effectivement une relation entre, d'une part, la variation des histogrammes des incréments de phase avec l'orientation du vecteur déplacement $\boldsymbol{\delta}$ et, d'autre part, l'anisotropie de l'image étudiée, elle est trop complexe pour pouvoir être exploitée dans le cadre de ce travail.

[3]En termes de quantité de structure $\mathcal{Q}$ ou de coefficient κ.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Dans le même ordre d'idées, on peut s'interroger sur l'évolution des histogrammes d'incréments de phase lorsque la norme du vecteur $\boldsymbol{\delta}$ varie. La figure **XVII**.15 montre ce qu'on obtient alors, en considérant toujours la densité de colonne de la figure **XVII**.6 comme image modèle. Lorsque le vecteur déplacement est colinéaire à $\boldsymbol{e}_x$, on observe que les oscillations sont de moins en moins marquées au fur et à mesure que les incréments de phase considérés sont pris entre deux points de plus en plus distants. Ceci suggère que la corrélation spatiale des phases disparaît assez rapidement lorsque $|\boldsymbol{\delta}|$ augmente. Cependant, lorsqu'on considère la seconde direction dans l'espace de Fourier, on constate que l'oscillation de l'histogramme est plus forte dans le cas $\boldsymbol{\delta} = 3\boldsymbol{e}_y$ que dans le cas $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_y$
Il semble d'ailleurs que les phases de cette image modèle soient corrélées sur des distances plus grande que les trois pixels explorés sur la figure **XVII**.15. En effet, partant de la densité de colonne de la figure **XVII**.6, le calcul des histogrammes correspondant aux vecteurs déplacement $\boldsymbol{\delta} = \delta_x \boldsymbol{e}_x + \delta_y \boldsymbol{e}_y$, avec $|\delta_x| \leqslant 12$ et $|\delta_y| \leqslant 12$, permet d'établir une carte de $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\delta})$, comme le montre la figure **XVII**.16. Le tracé des valeurs de la quantité de structure en fonction de la distance à l'origine, également montré sur la figure **XVII**.16, comparé au cas d'un champ brownien fractionnaire de taille 512×512, permet d'estimer que les phases de la densité de colonne sont corrélées sur plus de quinze pixels, puisque les valeurs de la quantité de structure dans le cas de la densité de colonne restent toujours nettement supérieures à celles obtenues pour le champ brownien fractionnaire[4]. Notons que si l'on cherche à ajuster une forme exponentielle au milieu de ces points, on trouve une longueur de corrélation de l'ordre de 2,3 pixels, mais avec une valeur asymptotique d'environ 6.10^{-4}, soit deux à trois fois supérieure aux valeurs associées aux browniens fractionnaires. On va voir dans la section suivante que cette remarque a son importance quant il s'agira de déterminer la présence de structure dans des images filtrées par un interféromètre.

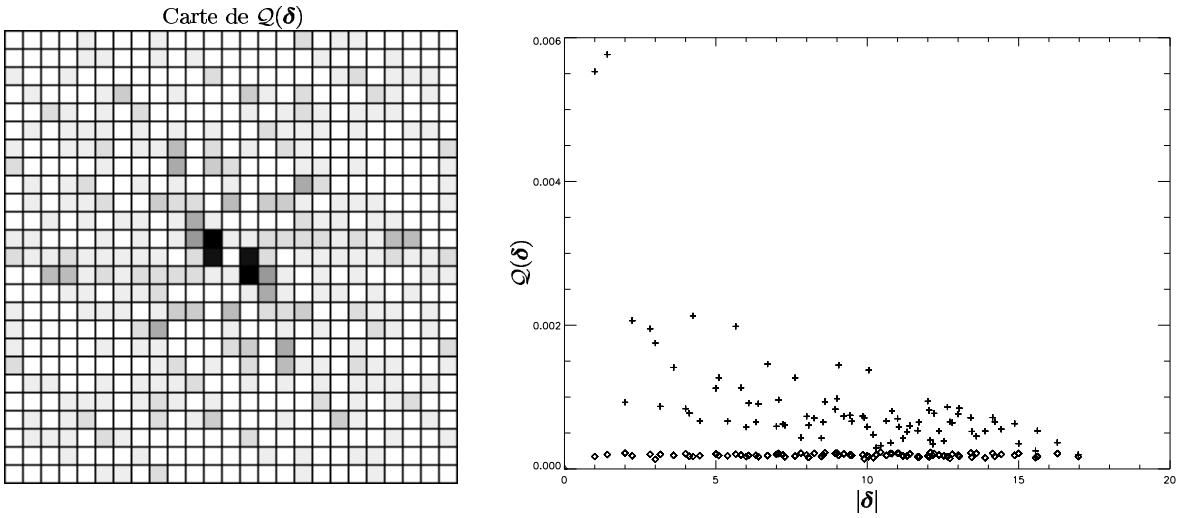

FIG. **XVII**.16 – *Carte des quantités de structure associées aux histogrammes des incréments de phase de la densité de colonne de la figure* **XVII**.6, *pour* $\boldsymbol{\delta} = \delta_x \boldsymbol{e}_x + \delta_y \boldsymbol{e}_y$ *avec* $|\delta_x| \leqslant 12$ *et* $|\delta_y| \leqslant 12$ *(à gauche) et évolution de* $\mathcal{Q}$ *avec la norme de* $\boldsymbol{\delta}$ *(à droite). Les pixels de la carte ont été grossis d'un facteur dix pour faciliter la lecture, et sont d'autant plus sombres que la quantité de structure est plus grande. Sur la figure de droite, les croix correspondent au cas de la densité de colonne et les losanges à celui d'un brownien fractionnaire de même taille.*

XVII.7 Filtrage interférométrique

XVII.7.a Effets attendus

On a vu au chapitre **XVI** que le filtrage par un interféromètre pouvait dégrader notablement les distributions de brillance observées, en raison d'une part du filtrage dans l'espace de Fourier, et d'autre part de l'effet du lobe d'antenne. On se plaçait alors dans le cadre d'une caractérisation des structures par les seules

[4]Cette évolution de la corrélation dépend *a priori* de l'image considérée. Il ne faut donc pas donner à la valeur numérique trouvée ici une signification trop importante.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

amplitudes des composantes de Fourier, et on avait établi que l'outil le plus fiable[5], dans ce contexte, consistait à calculer directement le spectre de puissance des cartes sales, soit la moyenne azimutale des carrés des modules des visibilités, corrigées de la fonction de poids.

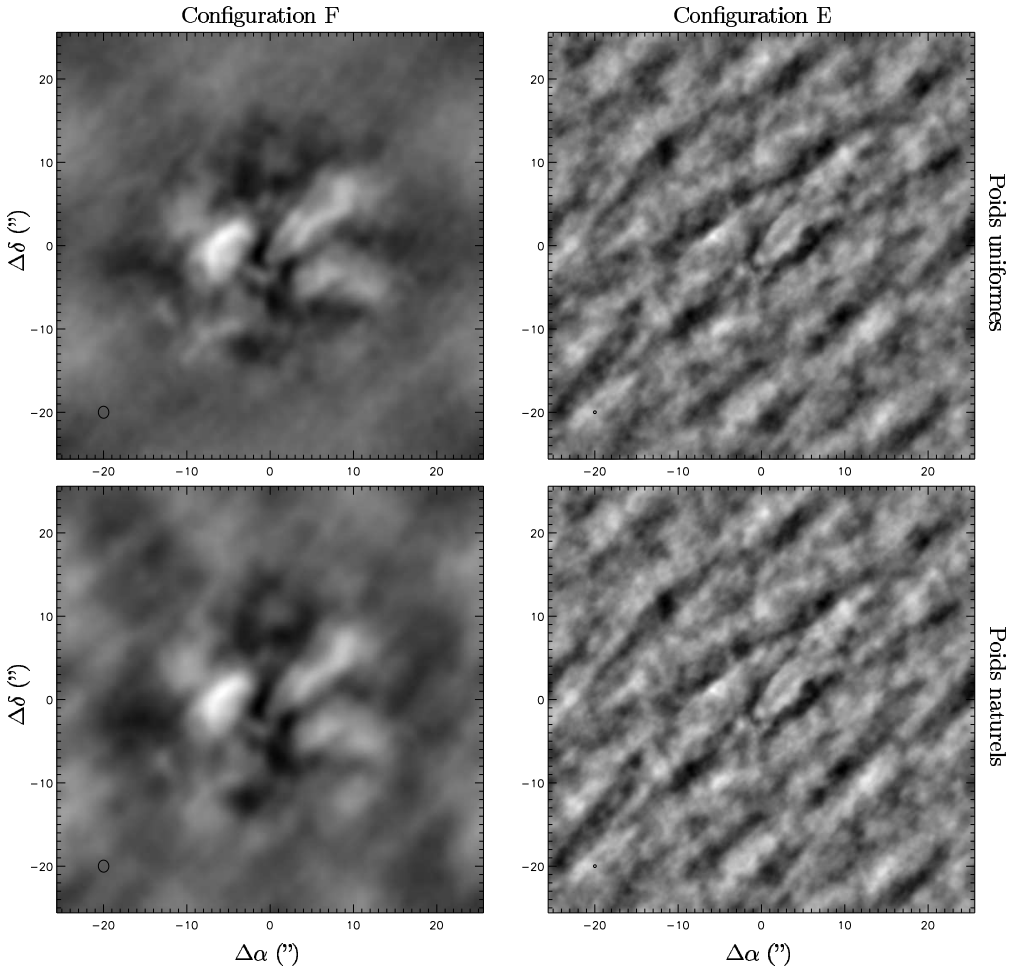

FIG. **XVII**.17 – *Images sales construites à partir de la densité de colonne de la figure* **XVII**.6 *en utilisant les deux configurations les plus compactes de la figure* **XV**.4. *La taille (FWHM) du lobe synthétisé est indiquée en bas à gauche de chaque sous-figure.*

Or, la mesure des visibilités donne également accès, en théorie du moins, aux phases de la distribution de brillance. Il est donc logique de chercher à exploiter cette information complémentaire, par exemple en appliquant les méthodes décrites dans ce chapitre. Que peut-on alors dire *a priori* des incréments de phase des images sales obtenues en sortie du simulateur décrit au chapitre **XV** ? L'effet du lobe primaire, on l'a déjà souligné, se traduit par une convolution dans l'espace de Fourier, avec un noyau dont la taille est inversement proportionnelle au rapport entre la taille de l'image et celle du lobe. En supposant que les amplitudes des composantes de Fourier ne varient presque pas sur une distance de l'ordre de la taille du noyau[6], Cette convolution revient *grosso modo* à faire une moyenne locale des complexes $\exp(i\phi)$, dont il n'est pas trivial de déterminer la phase. Par conséquent, si l'on peut imaginer que les incréments de phase correspondant à des vecteurs déplacement $\boldsymbol{\delta}$ de norme inférieure à la taille du noyau seront fortement modifiés par l'effet du lobe d'antenne, il n'est pas pour autant assuré que les incréments de phase correspondant à des déplacements plus importants soient en revanche peu altérés, puisque les valeurs des phases elles-mêmes sont difficiles à évaluer.
L'effet du filtrage en Fourier, sans atténuation par le lobe primaire et en l'absence de bruit, est plus simple

[5]C'est-à-dire le moins affecté par le filtrage interférométrique.
[6]Ce qu'on peut concevoir si le lobe primaire couvre une grande partie de l'image.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

à comprendre, en partant du fait que les seules phases accessibles sont celles correspondant aux points effectivement mesurés. Ce qui suggère que les incréments de phase dont on dispose pour construire les histogrammes sont beaucoup moins nombreux que dans le cas des images non filtrées, d'autant qu'un incrément de phase $\Delta\phi(\boldsymbol{k};\boldsymbol{\delta})$ ne peut être considéré que si les deux phases $\phi(\boldsymbol{k})$ et $\phi(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\delta})$ sont connues, d'où une limitation[7] sur la norme maximale de $\boldsymbol{\delta}$. On dispose donc de beaucoup moins de points pour construire les histogrammes. Or, comme l'a montré la figure **XVII**.10, cette diminution du nombre de points augmente considérablement le bruit sur les histogrammes, si l'on ne diminue pas également le nombre de cellules d'échantillonnage. Sous cette dernière condition, on peut en revanche espérer que la forme globale de l'histogramme soit conservée.

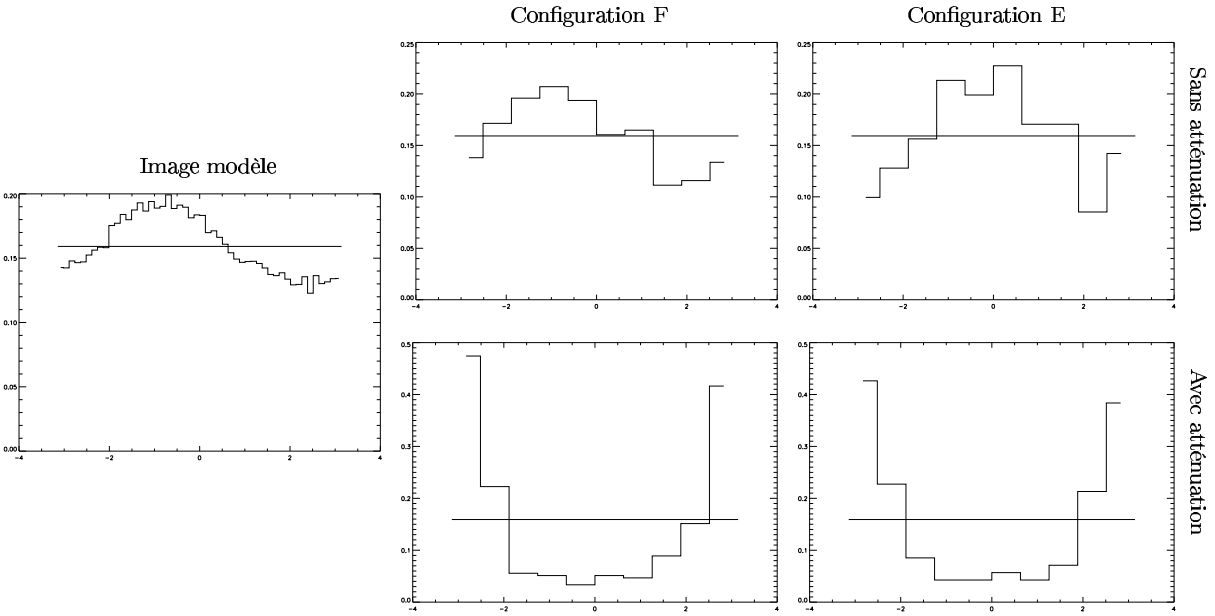

FIG. **XVII**.18 – *Histogrammes d'incréments de phase correspondant aux images sales construites à partir de la densité de colonne de la figure* **XVII**.6 *en utilisant les configurations instrumentales F et E, et une fonction de poids uniforme. On présente les deux cas, avec et sans atténuation par le lobe primaire, ainsi que l'histogramme des incréments de phase pour la distribution de brillance modèle. Le vecteur déplacement utilisé est* $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$.

XVII.7.b Approche numérique

En ce qui concerne l'approche numérique, on construit les images sales associées aux configurations F et E de la figure **XV**.4, à partir de la densité de colonne de la figure **XVII**.6, en se donnant une taille de pixel de 0,1", soit le double de la taille utilisée au chapitre **XVI**, de façon à concilier le fait que l'on dispose d'une distribution de brillance modèle de taille 512×512, et non plus 1024×1024, avec un lobe primaire couvrant la même fraction du champ de vue[8]. La figure **XVII**.17 montre ainsi les quatre images sales obtenues, selon la configuration et la fonction de poids utilisées.

Les cartes d'incréments de phase contiennent alors un nombre restreint de points valables, d'après ce qui a été dit plus haut. Par exemple, pour $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$, au lieu de disposer de 261632 points[9], on n'en a que 1430 pour la configuration F et 224 pour la configuration E. On calcule donc leurs histogrammes sur 10 cellules d'échantillonnage au lieu de 50, ce qui permet de limiter le bruit. La figure **XVII**.18 montre certains des résultats obtenus, dans le cas où le vecteur déplacement est justement $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{e}_x$.

[7]Limitation peu contraignante, puisqu'on n'imagine pas envisager des vecteurs déplacement de norme plus grande que l'espacement maximal entre deux visibilités.

[8]On prend toujours une observation en mode *snapshot*, la position de la source étant $h = -5°$ et $\delta = -23°$.

[9]Correspondant au produit 511×512

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

La forme de l'histogramme est globalement conservée lorsqu'on considère l'image sale construite en utilisant la configuration la plus compacte, et en ne prenant pas en compte l'atténuation par le lobe primaire. C'est encore approximativement vrai dans le cas de la configuration E, bien que ce soit moins clair. En revanche, dès que l'effet du lobe primaire est inclus dans la simulation, les histogrammes sont complètement déformés, avec un pic très marqué au voisinage de $\pm\pi$.

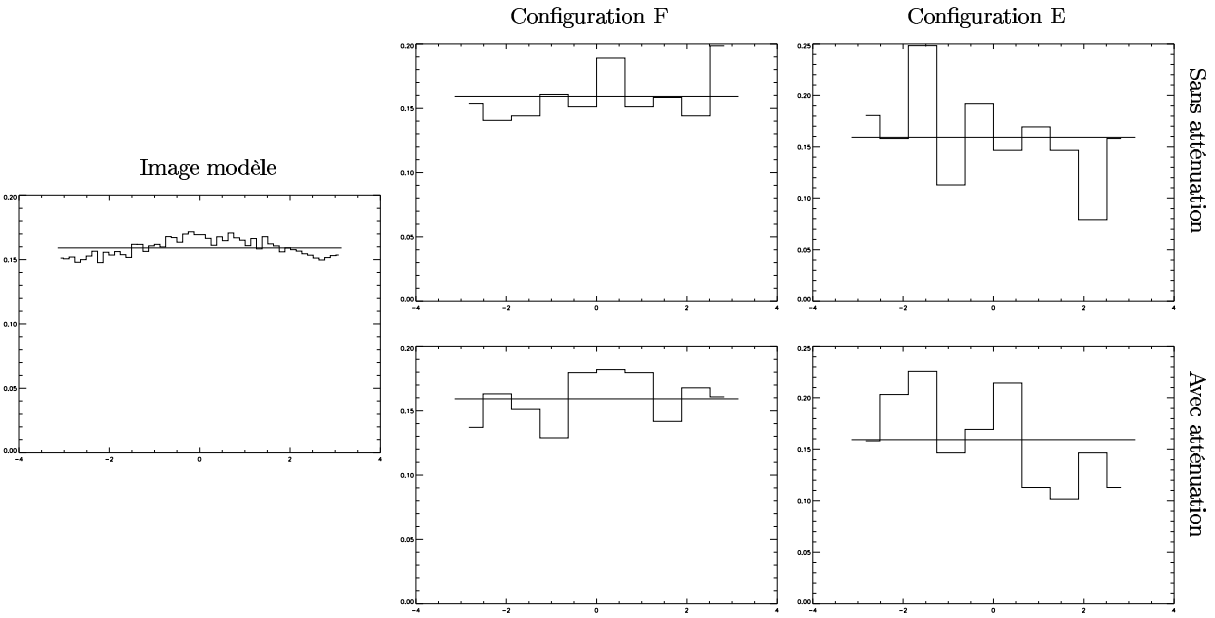

FIG. **XVII**.19 – *Même chose que pour la figure* **XVII**.18*, avec cette fois un vecteur déplacement* $\boldsymbol{\delta} = 6\boldsymbol{e}_x$.

Afin de tester s'il est possible de remédier à ce problème en utilisant des vecteurs déplacement de plus grande norme[10], on montre, sur la figure **XVII**.19, les histogrammes d'incréments de phase construits dans les mêmes cas que ceux considérés sur la figure **XVII**.18, mais pour $\boldsymbol{\delta} = 6\boldsymbol{e}_x$, sachant que la taille caractéristique du noyau de convolution mentionné plus haut est d'environ 2 pixels, puisque le lobe primaire a une taille de l'ordre du moitié de celle de l'image. On constate que la forme globale des histogrammes est en effet conservée dans le cas de la configuration F, mais pas dans le cas de la configuration E. Il semble qu'il faille attribuer cet effet au manque de points de mesure des incréments de phase dans cette configuration. Concernant l'effet du lobe primaire, on voit que celui-ci est minime puisque les histogrammes sont globalement inchangés lorsqu'on applique l'atténuation. Il faut cependant prendre ces résultats avec prudence, étant donné le bruit statistique.

XVII.7.c Conclusions très provisoires

En conclusion, il semble raisonnable d'affirmer qu'étant donnée une distribution de brillance observée au travers de l'interféromètre, si celle-ci présente une certaine quantité de structure[11] et si, comme pour la densité de colonne de la figure **XVII**.6, cette structure est décelable, sur l'image de départ, pour des déplacements $\boldsymbol{\delta}$ plus grands que la taille du noyau de convolution associé au lobe d'antenne, alors on pourra détecter cette structure dans les histogrammes d'incréments de phase des images sales, à condition de disposer d'un suffisamment grand nombre de pixels de mesures[12]. Faute de temps, l'étude approfondie des conditions pratiques permettant de retrouver une quantité de structure à partir des images sales n'a malheureusement pas pu être menée à terme dans le cadre de ce travail. On retiendra cependant que la méthode décrite dans ce chapitre n'en est de toutes les façons qu'à ses balbutiements, et que bien que ces premiers résultats soient prometteurs, il faudra certainement fournir encore de nombreux efforts avant de

[10] C'est-à-dire plus grande que la taille du noyau de convolution associé au lobe d'antenne.
[11] Au sens des incréments de phase étudiés dans ce chapitre.
[12] Ce qui suggère de diminuer la taille des pixels dans l'espace de Fourier, en prenant garde à la taille du noyau de convolution et à la complétude de la couverture (u, v).

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

comprendre exactement comment la structure d'une image se dissimule dans la distribution spatiale de la phase. En particulier, il est probable que l'amplitude des composantes de Fourier doive jouer un rôle de pondération qui n'a pas du tout été abordé ici.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Cinquième partie

Transfert radiatif dans les milieux complexes

Sir Bedevere : ...and that, my liege, is how we know the Earth to be banana shaped.
King Arthur : This new learning amazes me, Sir Bedevere. Explain again how sheep's bladders may be employed to prevent earthquakes.

"Monty Python and the Holy Grail" (The Monty Python)

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XVIII

Éléments de transfert radiatif

XVIII.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons passé sous silence une partie essentielle du problème général auquel est consacré ce travail. En effet, la détermination des caractéristiques des structures du milieu interstellaire à partir des données observationnelles n'a été pour le moment étudiée que de deux points de vue, celui de la projection le long de la ligne de visée et celui du filtrage par un interféromètre. Pour préciser les choses, remarquons d'une part que le traitement du filtrage instrumental suppose connu le cube de données dans l'espace position-position-vitesse, et d'autre part que l'on a obtenu celui-ci au chapitre **IX** en faisant l'hypothèse d'une transition optiquement mince.
C'est justement cette hypothèse qui a permis d'éviter de se pencher sur le problème qui va nous intéresser dans cette dernière partie, à savoir le transfert radiatif dans des milieux présentant des structures complexes aussi bien en densité qu'en vitesse. Rappelons qu'une transition optiquement mince correspond physiquement au fait qu'un photon émis en n'importe quel endroit du nuage s'en échappe et peut donc être détecté. Pourtant, ce cas de figure ne représente certainement pas le cas général. En effet, supposons qu'un atome émette un photon d'énergie $h\nu_0$. Il existe une probabilité non nulle que ce photon rencontre, lors de sa propagation, un autre atome de la même espèce, non excité et donc susceptible de l'absorber. Pour qu'il y ait effectivement absorption, il faut que la vitesse relative des deux atomes soit assez faible, sans quoi l'effet Doppler décale la fréquence du photon vers une valeur ν_0' en dehors de la bande d'absorption de l'atome, comme le schématise la figure **XVIII**.1.

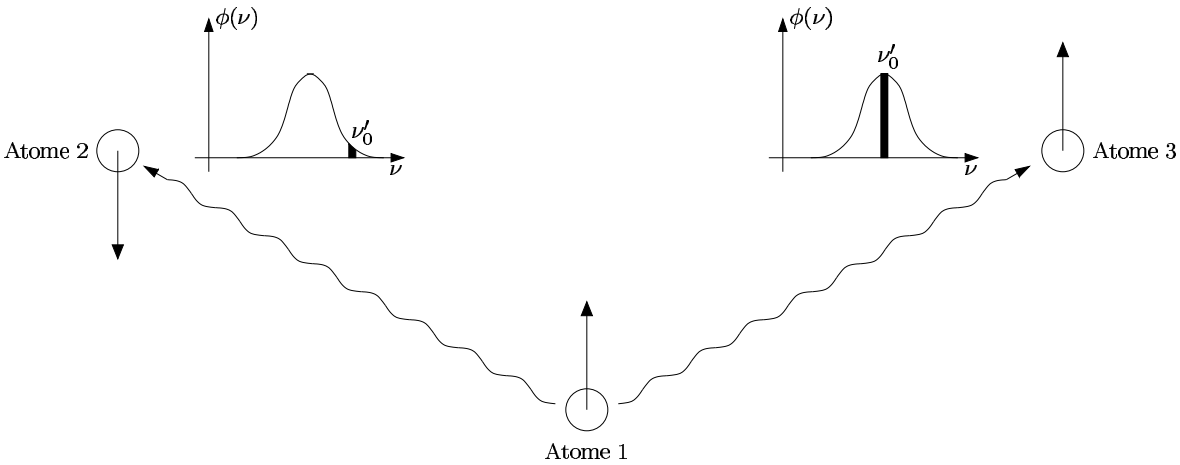

FIG. **XVIII**.1 – *Influence de la vitesse sur le transfert radiatif. L'atome 1 émet deux photons de fréquence ν_0, rencontrant respectivement les atomes 2 et 3. La fréquence ν_0' vue par l'atome absorbeur est représentée sur chacun des deux schémas du profil d'absorption par une bande noire.*

Ce phénomène qu'on vient de présenter très grossièrement n'est que le processus de base du problème du transfert radiatif. Il existe en effet de multiples complications dont il est plus ou moins nécessaire de tenir compte. Tout d'abord, le peuplement des niveaux d'énergie des espèces du milieu interstellaire, préalable à toute émission de photons, se fait par transitions radiatives, mais également par les collisions, ce qui donne une importance nouvelle à la densité[1], ainsi qu'aux mouvements turbulents au sein du milieu, en

[1] C'est-à-dire que celle ci n'intervient pas comme un simple facteur de proportionnalité comme dans le cas très simplifié du chapitre **IX**.

particulier les chocs. Les transformations chimiques, que peut provoquer l'échauffement du gaz dans ces chocs, modifient quant à elles la composition du milieu interstellaire, ce qui a des répercussions sur le transfert de rayonnement, en altérant les fréquences et les conditions d'absorption et d'émission.
Il existe également d'autres sources de rayonnement, par exemple l'émission thermique des poussières, le fond diffus cosmologique[2], ou encore le rayonnement synchrotron, qui est un mécanisme d'émission non-thermique par freinage d'électrons relativistes dans un champ magnétique. D'autre part, les photons du milieu interstellaire peuvent être altérés par d'autres phénomènes que l'absorption, à l'instar de la diffusion Compton sur des électrons. Enfin, les espèces présentes dans le milieu peuvent encore être excitées par d'autres voies. On pense en particulier aux collisions avec les rayons cosmiques.
Il n'est bien sûr pas question ici de prendre en compte tous ces aspects du problème du transfert, et le lecteur intéressé pourra se référer à de nombreux ouvrages, notamment ceux de Mihalas [Mihalas, 1978] et Shu [Shu, 1991]. Nous oublierons donc les problèmes de chimie, de sources alternatives de rayonnement et d'absorption, de polarisation ou encore de dépendance en fonction du temps, pour nous concentrer sur le problème apparemment simple suivant : étant donnée une ligne de visée présentant une structure complexe en vitesse aussi bien qu'en densité, dans un milieu composé d'une seule espèce, quelles peuvent être les propriétés des raies spectrales en sortie du nuage ? Cette question est au centre des travaux amorcés par Gail *et al.* [Gail *et al.*, 1974] et poursuivis aujourd'hui [Albrecht & Kegel, 1987, Hegmann & Kegel, 2000]. On présentera dans le chapitre suivant les principales méthodes et les résultats obtenus par ce groupe au cours de leurs recherches, et on proposera, au chapitre **XX**, une généralisation possible de ces travaux en introduisant des corrélations entre les structures de densité et de vitesse le long de la ligne de visée. Mais avant cela, il n'est pas superflu de passer quelques instants à présenter les outils et les équations de base du transfert radiatif, en s'appuyant sur l'introduction donnée par [Shu, 1991].

XVIII.2 Grandeurs photométriques

XVIII.2.a Intensité spécifique

Définition

On considère, sur la figure **XVIII**.2, une petite surface $\mathrm{d}S$ autour d'un point P repéré par le vecteur $\boldsymbol{x}$, et un petit angle solide $\mathrm{d}\Omega$ autour d'une direction $\boldsymbol{u}$, qui est *a priori* différente de la normale $\boldsymbol{n}$ à la surface élémentaire considérée[3]. Au cours de l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, des photons de fréquence ν à $\mathrm{d}\nu$ près traversent la surface $\mathrm{d}S$ dans une direction contenue dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$. Ces photons transportent une quantité d'énergie $\mathrm{d}E_\nu$ qu'on peut écrire sous la forme

$$\mathrm{d}E_\nu = I_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t)\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t = I_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t)\cos\theta\mathrm{d}S\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t \quad \text{où } \theta \text{ est l'angle entre } \boldsymbol{u} \text{ et } \boldsymbol{n}.$$

Cette équation définit l'intensité spécifique I_ν, également appelée brillance, dépendant de la position $\boldsymbol{x}$, de la direction $\boldsymbol{u}$, de la fréquence ν, et du temps.

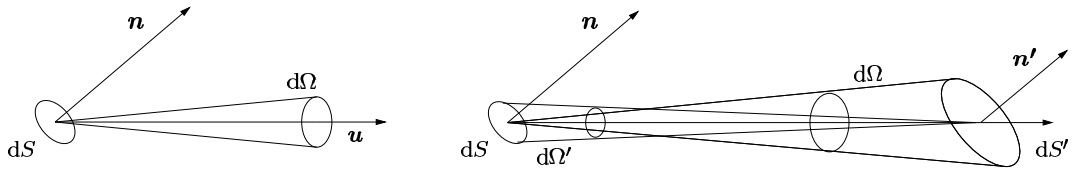

FIG. **XVIII**.2 – *Définition de l'intensité spécifique (à gauche) et propriété de conservation (à droite).*

Conservation

La propriété essentielle de l'intensité spécifique est qu'elle se conserve lorsque le rayonnement se propage librement, c'est-à-dire sans interaction avec la matière. Pour le montrer, considérons, sur la figure **XVIII**.2,

[2]Dont on a dit que le maximum se situait aux alentours d'un millimètre de longueur d'onde.
[3]Les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{n}$ sont unitaires.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

le passage de l'énergie radiative de l'élément de surface $\mathrm{d}S$ autour de la position $\boldsymbol{x}$, à un élément de surface $\mathrm{d}S'$ autour de $\boldsymbol{x'}$. L'énergie reçue par ce second élément de surface se met sous la forme suivante, $\mathrm{d}E'_\nu = I_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x'}, t)\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n'})\,\mathrm{d}S'\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega'\mathrm{d}t$. Or, les angles solides $\mathrm{d}\Omega$ et $\mathrm{d}\Omega'$ sont, par définition,

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S'\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n'})}{d^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\Omega' = \frac{\mathrm{d}S\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n})}{d^2} \quad \text{où } d \text{ est la distance entre les points } \boldsymbol{x} \text{ et } \boldsymbol{x'}.$$

La conservation de l'énergie lors de la propagation libre du rayonnement implique alors que

$$\mathrm{d}E'_\nu = \mathrm{d}E_\nu \quad \text{soit, en substituant les expressions de } \mathrm{d}\Omega \text{ et } \mathrm{d}\Omega', \quad I_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x'}, t) = I_\nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, t).$$

Lorsqu'en revanche il existe des interactions entre la matière et le rayonnement, l'intensité spécifique obéit à une équation intégro-différentielle qu'on écrira plus loin.

Relation avec les distributions des photons dans l'espace des phases

L'intensité spécifique est reliée aux distributions[4] des photons dans l'espace des phases, comme le démontre [Shu, 1991]. En effet, ces distributions $f_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)$, définies comme le rapport du nombre de photons contenus dans l'élément de volume $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ centré autour de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ à la taille de ce même élément de volume, sont reliées à l'énergie $\mathrm{d}E_\nu$ par

$$\mathrm{d}E_\nu = \sum_\alpha h\nu f_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \sum_\alpha h\nu f_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) \times c\mathrm{d}t\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S \times p^2\mathrm{d}p\mathrm{d}\Omega.$$

Or, la quantité de mouvement p d'un photon est proportionnelle à sa fréquence, soit $p = h\nu/c$, et donc

$$\mathrm{d}E_\nu = \frac{h^4\nu^3}{c^2}\sum_\alpha f_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}t\,(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega \quad \text{d'où} \quad I_\nu = \frac{h^4\nu^3}{c^2}\sum_\alpha f_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t) = \frac{h\nu^3}{c^2}\sum_\alpha \mathcal{N}_\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, t),$$

en introduisant le nombre moyen d'occupation des états, $\mathcal{N}_\alpha = h^3 f_\alpha$. Ce nombre moyen suit la distribution de Bose-Einstein dans le cas des photons, qui sont des bosons (voir le **XVIII.5.a**).

XVIII.2.b Les moments de l'intensité spécifique

La résolution complète de l'équation de transfert, qui dépend des trois variables de position $\boldsymbol{x}$, des deux angles définissant la direction $\boldsymbol{u}$, de la fréquence ν et du temps, n'est pas toujours nécessaire, et il peut être suffisant, et en tous les cas utile, de commencer par s'affranchir de la dépendance en $\boldsymbol{u}$, en introduisant les trois premiers moments de l'intensité par rapport à la direction de propagation, soit

$$cU_\nu = \int I_\nu \mathrm{d}\Omega \qquad \boldsymbol{F}_\nu = \int \boldsymbol{u} I_\nu \mathrm{d}\Omega \quad \text{et} \quad c\mathsf{P}_\nu = \int (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u})\, I_\nu \mathrm{d}\Omega,$$

ce qui fait apparaître respectivement la densité d'énergie U_ν du champ de rayonnement, son flux[5] $\boldsymbol{F}_\nu$, ainsi que le tenseur de la pression de radiation P_ν, toutes ces quantités étant définies dans le cadre d'un champ monochromatique. On peut les intégrer sur la fréquence pour obtenir des quantités globales sur tout le spectre.
Dans le cas particulier d'un rayonnement isotrope, le flux est nul, et le tenseur de la pression de radiation est proportionnel au tenseur unité, la constante de proportionnalité étant $U_\nu/3$.

XVIII.3 Équation de transfert

XVIII.3.a Équation portant sur l'intensité spécifique

Lorsqu'un rayon lumineux se propage dans la matière, l'intensité spécifique ne se conserve pas, contrairement au cas libre. Grossièrement, on se convainc facilement que l'émission par les atomes la renforce,

[4] On parle de distributions au pluriel, car il en existe une pour chacun des deux états possibles du spin ($\alpha = \pm 1$).
[5] Il s'agit de la puissance traversant une surface unité, dans un intervalle de fréquence unité, et dans toutes les directions. En radioastronomie, on l'exprime le plus souvent en Janskys, avec 1 Jy$=10^{-26}$ W.m^{-2}.Hz^{-1}.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tandis que l'absorption l'affaiblit. On peut formaliser cette idée en écrivant que l'intensité spécifique varie au cours de sa propagation, du fait d'un terme source Σ_ν et d'un terme puits Π_ν. En repérant la position sur le parcours de la lumière par une abscisse curviligne s, on a

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = \Sigma_\nu + \Pi_\nu \quad \text{soit} \quad \frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla})\, I_\nu = \Sigma_\nu + \Pi_\nu \quad \text{en se plaçant du point de vue lagrangien.}$$

Les formes respectives des termes Σ_ν et Π_ν doivent être déterminées à partir de la considération des différents phénomènes susceptibles de modifier l'intensité spécifique, à savoir l'émission, l'absorption et la diffusion, comme le montre schématiquement la figure **XVIII**.3.

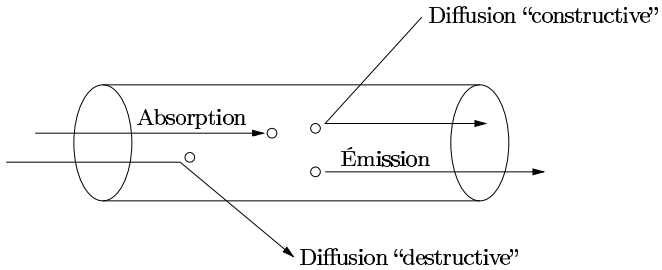

FIG. **XVIII**.3 – *Illustration des diverses causes de variation de l'intensité spécifique*

On prend en compte l'émission de rayonnement, par les espèces présentes au point considéré, sous la forme d'un terme $\mathcal{E}'_\nu$, fonction de la densité massique ρ_m et de l'émissivité par unité de masse j_ν,

$$\mathcal{E}'_\nu = \frac{1}{4\pi}\rho_\mathrm{m} j_\nu \quad \text{le facteur } \frac{1}{4\pi} \text{ assurant que la quantité } \mathcal{E}'_\nu \text{ est bien définie par unité d'angle solide.}$$

L'absorption se met quant à elle sous une forme assez semblable, à ceci près qu'elle est également proportionnelle à l'intensité spécifique du rayonnement,

$$\mathcal{A}_\nu = -\rho_\mathrm{m}\kappa^a_\nu I_\nu \quad \text{l'opacité } \kappa^a_\nu \text{ étant égale à la section efficace d'absorption par unité de masse.}$$

En ce qui concerne la diffusion[6], elle intervient à la fois dans le terme puits, en déviant une partie du rayonnement de la direction de propagation considérée vers d'autres directions, mais aussi dans le terme source, puisque réciproquement, des photons se propageant dans des directions quelconques peuvent être diffusés dans la direction $\boldsymbol{u}$. On a donc deux termes,

$$\mathcal{D}_\nu = -\rho_\mathrm{m}\kappa^d_\nu I_\nu + \rho_\mathrm{m}\kappa^d_\nu \int \phi_d(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u}) I_\nu(\boldsymbol{u'})\mathrm{d}\Omega',$$

où κ^d_ν est la section efficace de diffusion par unité de masse, intégrée sur toutes les directions, et $\phi_d(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u})\mathrm{d}\Omega'$ représente la probabilité de diffusion de la direction $\boldsymbol{u'}$ vers la direction $\boldsymbol{u}$.
In fine, puisque $\Sigma_\nu + \Pi_\nu = \mathcal{E}'_\nu + \mathcal{A}_\nu + \mathcal{D}_\nu$, nous avons l'équation de transfert régissant l'évolution de l'intensité spécifique sous la forme

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t} + (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{\nabla})\, I_\nu = \frac{1}{4\pi}\rho_\mathrm{m} j_\nu - \rho_\mathrm{m}\kappa^a_\nu I_\nu - \rho_\mathrm{m}\kappa^d_\nu I_\nu + \rho_\mathrm{m}\kappa^d_\nu \int \phi_d(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u}) I_\nu(\boldsymbol{u'})\mathrm{d}\Omega'. \tag{93}$$

On peut simplifier cette écriture en introduisant $\kappa_\nu = \rho_\mathrm{m}(\kappa^a_\nu + \kappa^d_\nu)$, coefficient d'opacité total par unité de volume, ainsi qu'une fonction source S_ν dépendant *a priori* de l'intensité spécifique,

$$S_\nu = \frac{\rho_\mathrm{m}}{\kappa_\nu}\left[\frac{j_\nu}{4\pi} + \kappa^d_\nu \int \phi_d(\boldsymbol{u'},\boldsymbol{u}) I_\nu(\boldsymbol{u'})\mathrm{d}\Omega'\right] = \frac{\mathcal{E}_\nu}{\kappa_\nu} \qquad \text{ce qui donne} \qquad \frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} = -\kappa_\nu\left(I_\nu - S_\nu\right). \tag{94}$$

Dans cette équation, on a introduit une émissivité $\mathcal{E}_\nu$ incluant les effets de la diffusion de $\boldsymbol{u'}$ vers $\boldsymbol{u}$. Notons que le coefficient d'absorption κ^a_ν peut inclure une correction négative pour tenir compte de l'émission stimulée, qui est proportionnelle à I_ν et anisotrope. D'autre part, on utilise souvent la notion d'épaisseur ou de profondeur optique τ_ν, grandeur sans dimension définie par $\mathrm{d}\tau_\nu = \kappa_\nu \mathrm{d}s$.

[6]On ne parlera ici que de la diffusion cohérente, c'est-à-dire qu'on considérera que la fréquence du photon diffusé n'est pas modifiée, ce qui n'est pas vrai en général.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XVIII.3.b Équations portant sur les moments de l'intensité spécifique

En intégrant l'équation (93) sur la direction de propagation $\boldsymbol{u}$, on obtient l'équation d'évolution de la densité d'énergie, en remarquant que les contributions de la diffusion s'annulent,

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{F}_\nu = \rho_{\mathrm{m}}\left(j_\nu - c\kappa_\nu^a U_\nu\right).$$

Cette équation traduit en fait la conservation de l'énergie. Sa résolution nécessite néanmoins de connaître le flux $\boldsymbol{F}_\nu$, même si l'émissivité et le coefficient d'absorption sont connus. Pour trouver une équation donnant l'évolution du flux, on intègre cette fois l'équation (93) après l'avoir multipliée par $\boldsymbol{u}$, ce qui donne, d'après la démonstration de [Shu, 1991],

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{F}_\nu}{\partial t} + c\boldsymbol{\nabla}.\mathsf{P}_\nu = -\kappa_\nu \boldsymbol{F}_\nu.$$

Cette équation représente la conservation de la quantité de mouvement des photons. Elle comporte cependant une inconnue supplémentaire, le tenseur de la pression de radiation P_ν, ce qui montre qu'on ne dispose pas d'un système d'équations fermé. En fait, quel que soit le moment dont on cherche l'équation d'évolution, celle-ci fait toujours apparaître une inconnue supplémentaire, dont le nombre de degrés de liberté va croissant. Il faudrait considérer l'infinité des moments de l'intensité spécifique pour représenter l'ensemble des propriétés de l'équation de transfert de départ. On est confronté à un problème semblable au fait que la connaissance de la distribution de probabilité d'une variable aléatoire est équivalente à celle de l'ensemble de ses moments. Or on sait qu'il suffit bien souvent de connaître les premiers moments pour avoir une bonne idée de la fonction de distribution. On serait donc satisfait de n'avoir à utiliser que les équations de conservation déjà écrites, et donc que les trois premiers moments U_ν, $\boldsymbol{F}_\nu$ et P_ν. Mais pour cela il faut introduire une relation entre eux, de façon à fermer le système d'équations.

XVIII.4 Résolution de l'équation de transfert

XVIII.4.a L'approximation d'Eddington

Dans le cas où l'épaisseur optique est grande, c'est-à-dire si le libre parcours moyen des photons est petit devant les échelles macroscopiques du problème, les occurrences multiples de la diffusion, de l'absorption, et de l'émission font que le champ de rayonnement est quasi isotrope. C'est le cas dans les régions suffisamment profondes des étoiles, où l'épaisseur optique est si grande[7] que le milieu réalise *de facto* un corps noir, dont l'intensité spécifique est donnée par la fonction de Planck [Diu *et al.*, 2000],

$$I_\nu \simeq B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2}\frac{\epsilon}{\exp\left(\beta\epsilon\right) - 1} \quad \text{avec} \quad \epsilon = h\nu \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad \text{à ne pas confondre avec l'indice spectral.}$$

On en déduit que la densité d'énergie et le tenseur de la pression de radiation sont liés,

$$\mathsf{P}_\nu \simeq \frac{4\pi B_\nu(T)}{3c}\mathbf{1} \simeq \frac{U_\nu}{3}\mathbf{1} \qquad \text{où } \mathbf{1} \text{ désigne le tenseur unité.}$$

L'approximation d'Eddington, également appelée approximation de conduction de la radiation, consiste justement à prendre comme relation de fermeture cette dernière équation entre U_ν et P_ν. Elle est en fait largement utilisée, pour la qualité des résultats qu'elle fournit, bien qu'elle ne soit formellement valide que dans le cas des grandes épaisseurs optiques.

XVIII.4.b Solution formelle

Quand l'épaisseur optique devient trop faible, on ne peut cependant plus utiliser l'approximation d'Eddington. Il faut revenir à l'équation de transfert (94), dont on peut chercher une solution sous une forme exponentielle, en considérant l'équation homogène associée,

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}s} + \kappa_\nu I_\nu = 0 \quad \text{d'où} \quad I_\nu(s) = I_\nu(0)e^{-\kappa_\nu s} \quad \text{soit aussi} \qquad I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu},$$

[7] Elle est de l'ordre de 10^{11}.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

en introduisant la profondeur optique τ_ν, qu'on choisit nulle à l'abscisse $s = 0$ correspondant à la face arrière du milieu étudié. La méthode de variation de la constante fournit alors la solution formelle

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu)e^{-t_\nu}\mathrm{d}t_\nu.$$

Le problème avec cette écriture, comme le souligne Shu [Shu, 1991], est que la fonction source dépend en fait directement de la position, et sa dépendance en l'épaisseur optique t_ν sera différente selon la fréquence ν et la direction d'incidence $\boldsymbol{u}$. Il est donc plus judicieux, en pratique, de travailler dans l'espace réel[8],

$$I_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = I_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_0)\exp\left[-\tau_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\right] + \int_{s_0}^{s} S_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x'})\exp\left[-\tau_\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x'})\right]\kappa_\nu(\boldsymbol{x'})\mathrm{d}s'$$

où $\boldsymbol{x}_0$ est le point d'entrée du rayonnement dans le milieu considéré.

XVIII.4.c Exemple d'une couche plan-parallèle homogène et finie

Il s'agit en fait du même modèle que celui étudié analytiquement dans la troisième partie, à savoir une couche plan-parallèle homogène, finie dans la direction z mais infinie dans les directions x et y. La face arrière du nuage correspond à $s = 0$ et $\tau_\nu = 0$. Sa face avant, la plus proche de l'observateur, à $s = H$ et $\tau_\nu = \tau_\nu^H$. L'intensité spécifique du rayonnement entrant par la face arrière, perpendiculairement à celle-ci, est notée I_0, et on suppose qu'il n'existe pas de rayonnement entrant par la face avant. En sortie du nuage, on a alors, toujours dans la direction perpendiculaire au nuage[9],

$$I_\nu(\tau_\nu^H) = I_0 e^{-\tau_\nu^H} + S_\nu\left(1 - e^{-\tau_\nu^H}\right), \tag{95}$$

la fonction source étant constante car le milieu est homogène. Si la couche est non émissive, seul le premier terme doit être pris en compte. On a alors une atténuation exponentielle du rayonnement incident. C'est le cas par exemple lorsqu'une source intense est observée à travers un nuage froid. Si la couche est émissive mais optiquement mince, on a, en plus de cette émission attenuée provenant de l'arrière du nuage, une émission égale à l'intégrale de l'émissivité sur la profondeur de la couche,

$$I_\nu(\tau_\nu^H) \simeq I_0 e^{-\tau_\nu^H} + S_\nu\tau_\nu^H = I_0 e^{-\tau_\nu^H} + \mathcal{E}_\nu H.$$

Enfin dans le cas optiquement épais, le rayonnement incident est complètement retiré du faisceau émergent, et le terme intrinsèque se réduit à la fonction source, soit $I_\nu(\tau_\nu^H) \simeq S_\nu$.
On peut résumer les résultats de cet exemple en disant que dans le cas mince on voit toute l'émissivité et la puissance du rayonnement en sortie est proportionnelle au volume, tandis que dans le cas épais, on voit la fonction source à la surface du nuage. Cet effet, combiné avec la prise en compte de l'inclinaison des rayons, permet d'expliquer l'assombrissement centre-bord du Soleil [Shu, 1991].

XVIII.5 Équilibre radiatif et équilibre thermodynamique local

XVIII.5.a Introduction et distributions classiques

On a déjà évoqué plus haut, lorsqu'on a introduit l'approximation d'Eddington, que le cas d'une grande épaisseur optique correspondait au fait que les photons, avant de pouvoir s'échapper du milieu, interagissent un grand nombre de fois avec la matière. La notion d'équilibre thermodynamique formalise cette idée, de façon très générale. Elle désigne l'état dans lequel se trouve un ensemble de particules et de photons, soumis à leurs interactions mutuelles, dans une enceinte fermée[10]. Dans cet état, tout processus est compensé par un processus inverse de même probabilité, de sorte qu'en particulier il existe, par seconde, autant d'atomes subissant une transition radiative d'un état A vers un état B que d'atomes subissant la transition radiative

[8] On oublie désormais la dépendance en temps, en supposant que le milieu est dans un régime stationnaire.
[9] Le cas des rayons inclinés d'un angle θ par rapport à la couche se traite exactement de la même façon, à ceci près que la profondeur optique doit être corrigée d'un facteur $(\cos\theta)^{-1}$
[10] Ce qui revient à supposer une épaisseur optique infinie à toutes les longueurs d'onde

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

opposée, et de même pour les transitions collisionnelles entre ces deux états. On parle de microréversibilité des états.
Dans le cas de l'équilibre thermodynamique, les distributions des états quantiques, c'est-à-dire la probabilité qu'une particule d'un type donné soit dans un état donné, sont donc stationnaires, et suivant la famille à laquelle appartient cette particule, la distribution des états prend une forme bien spécifique. Si l'on a affaire à des fermions, tels que les électrons, définis comme étant les particules de spin demi-entier, le nombre moyen $\mathcal{N}_\alpha$ de particules de cette espèce se trouvant dans un état d'énergie ϵ est donné par la statistique de Fermi-Dirac,

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} \quad \text{où } \mu \text{ est le potentiel chimique.}$$

Le paramètre α fait référence aux autres grandeurs relatives à la particule, notamment son état de spin. Quand les particules considérées sont des bosons, c'est-à-dire que leur spin est entier, la distribution des états est celle de Bose-Einstein,

$$\mathcal{N}_\alpha = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}.$$

On ne reviendra pas sur les conséquences que l'on tire de ces formes, à savoir le principe d'exclusion de Pauli concernant les fermions, et la possibilité d'une condensation de Bose des photons dans un seul état. On remarquera juste que la loi de Planck écrite plus haut n'est rien d'autre qu'une distribution de Bose-Einstein. Dans la limite classique, le nombre moyen de particules par état devient très petit devant un[11], et les deux distributions quantiques précédentes tendent vers la distribution de Maxwell-Boltzmann, soit $\mathcal{N}_\alpha = e^{-\beta(\epsilon-\mu)}$. Cette distribution est celle qui s'applique dans le cas de la distribution des vitesses des particules, mais également dans celui des populations des niveaux d'énergie quantifiés.

XVIII.5.b La loi de Planck et ses dérivées

Dans le cas de l'équilibre thermodynamique, l'intensité spécifique est donnée par la fonction de Planck, dont l'intégrale sur les fréquences fournit la loi de Stefan-Boltzmann,

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2}\frac{\epsilon}{\exp(\beta\epsilon)-1} \quad \Longrightarrow \quad I = \int I_\nu \mathrm{d}\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

La figure **XVIII**.4 représente les courbes $B_\nu(T)$ pour différentes températures. On peut également définir une fonction de Planck par intervalle de longueur d'onde B_λ à partir de la relation $B_\lambda \mathrm{d}\lambda = B_\nu \mathrm{d}\nu$. Le maximum de B_λ se situe à une longueur d'onde λ_m inversement proportionnelle à la température, avec $\lambda_\mathrm{m}.T \simeq 2900\mu$m.K. Cette formule constitue la loi du déplacement de Wien[12]. La loi de Planck admet deux expressions limites suivant la valeur du rapport $h\nu/kT$. Respectivement,

$$\text{la loi de Rayleigh-Jeans} \quad B_\nu \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{kT}{h\nu} = \frac{2kT}{\lambda^2} \quad \text{valable pour } h\nu \ll kT,$$

$$\text{et la loi de Wien} \quad B_\nu \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \quad \text{valable pour } h\nu \gg kT.$$

XVIII.5.c Différentes définitions de la température

C'est la loi de Rayleigh-Jeans qu'on utilise en radioastronomie, même à basse température, du fait des grandes longueurs d'onde qui sont en jeu[13]. L'intensité spécifique est alors proportionnelle à la température T. Dans le cas général, même en dehors de l'équilibre thermodynamique, on pourra définir une température dite température de brillance T_b telle que l'intensité spécifique à une fréquence ν donnée soit égale à celle,

[11] On peut le voir en disant que les sytèmes classiques sont issus de l'interaction d'un grand nombre de systèmes quantiques, chaque interaction provoquant une multiplication des états possibles.
[12] Le maximum d'émission du corps noir cosmologique à 3 K se situe ainsi à environ 1 mm de longueur d'onde.
[13] Inversement, la loi de Wien est utilisée en astronomie X.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

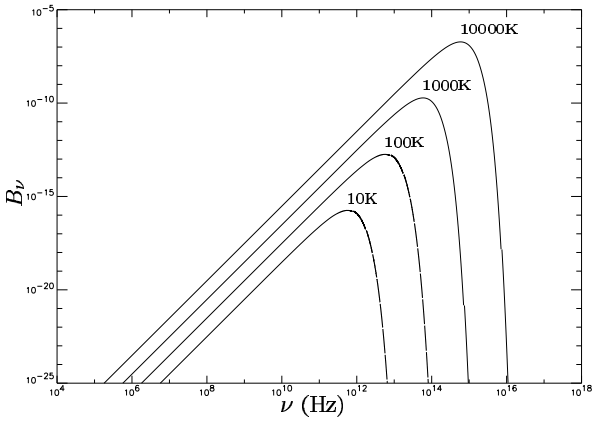

FIG. **XVIII**.4 – *Loi de Planck $B_\nu(T)$ représentée en fonction de la fréquence, pour quatre températures comprises entre 10 K et 10000 K.*

à cette même fréquence, d'un corps noir de température T_b, soit $I_\nu = B_\nu(T_\mathrm{b})$. Dans le cas général, cette température dépend donc de la fréquence. De même, on définit la température d'excitation T_ex comme la température d'un corps noir dont la fonction de Planck serait égale à la fonction source du milieu considéré $S_\nu = B_\nu(T_\mathrm{ex})$, de sorte qu'on peut écrire la solution de l'équation de transfert comme

$$T_\mathrm{b} = T_\mathrm{b}(0)e^{-\tau_\nu^H} + T_\mathrm{ex}\left(1 - e^{-\tau_\nu^H}\right).$$

La température d'excitation est en fait celle caractérisant les rapports entre les populations des différents niveaux d'énergie de l'espèce étudiée. On définit encore la température de couleur T_c comme la température du corps noir présentant les mêmes variations avec la fréquence que l'intensité spécifique, et enfin la température effective T_eff comme celle du corps noir dont le flux total serait égal à celui de la source, soit respectivement,

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{\mathrm{d}B_\nu(T_\mathrm{c})}{\mathrm{d}\nu} \qquad \text{et} \qquad F = \int |\boldsymbol{F}_\nu|\,\mathrm{d}\nu = \pi B\left(T_\mathrm{eff}\right) = \sigma T_\mathrm{eff}^4.$$

Ces différentes définitions sont équivalentes lorsqu'on se place à l'equilibre thermodynamique. On écrira alors simplement T pour désigner toutes ces températures.

XVIII.5.d Loi de Kirchoff et équilibre thermodynamique local

On a dit que l'équilibre thermodynamique correspondait au fait que l'épaisseur optique devenait infinie à toutes les fréquences. D'après l'équation (95), cela revient à égaler l'intensité spécifique et la fonction source[14]. Par conséquent, cette dernière est égale à la fonction de Planck, et l'émissivité est alors donnée par $\mathcal{E}_\nu = \kappa_\nu B_\nu(T)$, relation qui constitue la loi de Kirchoff.

Comme il est dit dans la note 14, l'intensité spécifique est constante dans le cas de l'équilibre thermodynamique, ce qui ne présente pas un grand intérêt. En revanche, si l'on suppose que les conditions d'un tel équilibre sont réalisées mais uniquement localement, avec des températures différentes suivant la position dans la source, il est possible d'avoir effectivement un transfert de rayonnement d'un point à un autre. C'est l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (ETL).

Remarquons que cette hypothèse n'est valable le plus souvent que dans les couches profondes des étoiles et que les nuages interstellaires sont eux, loin de l'ETL[15]. Il faut alors traiter le problème de façon plus complexe, en étudiant les différents processus de transition entre les états.

[14]D'où aussi le fait que l'intensité spécifique ne varie pas le long du rayon lumineux.
[15]Sauf dans les régions les plus internes où les photons millimétriques ne s'échappent pas.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XVIII.6 Les raies spectrales

XVIII.6.a Processus de transition et probabilités d'Einstein

Les raies spectrales, qu'on peut observer en émission ou en absorption sur un fond continu, correspondent aux transitions radiatives entre les niveaux quantifiés des espèces présentes dans le milieu. Le rayonnement continu, quant à lui, est relié aux transitions impliquant au moins un état libre, et éventuellement les deux comme dans le cas du *Brehmsstrahlung*.
Les processus radiatifs de transition entre deux états quantifiés n et m, d'énergies respectives U_n et U_m avec $U_m > U_n$, sont de trois types, l'émission spontanée, l'absorption, et l'émission induite, dite aussi émission stimulée. On les caractérise par des probabilités de transition dites probabilités d'Einstein, notées A_{mn}, B_{nm} et B_{mn} et définies de la façon suivante,

▷ Le nombre de transitions radiatives spontanées de m vers n par unité de volume et par seconde est $N_m A_{mn}$, où N_m est la densité volumique des particules dans l'état m.
▷ Le nombre d'absorptions de photons d'énergie $U_m - U_n$ impliquant une transition de n vers m, par unité de volume et par seconde, est $N_n J_{nm} B_{nm}$, où N_n est la densité volumique des particules dans l'état n et J_{nm} l'intensité moyenne du rayonnement à la fréquence $\nu = (U_m - U_n)/h$.
▷ Le nombre de transitions radiatives de m vers n, induite par un photon d'énergie $U_m - U_n$, par unité de volume et par seconde est $N_m J_{nm} B_{mn}$. Le photon émis est de même énergie que celui induisant la transition. Ce phénomène est l'une des bases de l'effet LASER.

Contrairement à ce que l'on croit souvent, le phénomène éminemment quantique parmi ces trois processus n'est pas l'émission induite, qui, bien qu'étant la plus récemment découverte, n'est autre que la face cachée de l'absorption, comme on peut s'en rendre compte en regardant la similitude des relations définissant B_{nm} et B_{mn}. C'est bien l'émission spontanée, qu'on peut rapprocher de la désintégration d'un noyau radioactif, qui est en fait fondamentalement quantique.
Les relations entre les différentes probabilités sont calculées à l'équilibre thermodynamique, sachant qu'on peut ensuite les utiliser dans le cas général. On ne fera pas ici ce calcul, renvoyant le lecteur aux ouvrages pertinents [Diu *et al.*, 2000]. Notons cependant que, dans le cas où les profils d'absorption et d'émission[16] sont identiques, on peut montrer que le coefficient d'absorption κ_ν^a est proportionnel à la différence $N_n B_{nm} - N_m B_{mn}$, ce qu'on a déjà mentionné plus haut en disant que le coefficient d'absorption était corrigé par l'émission induite[17].

XVIII.6.b Profils des raies et causes d'élargissement

Comme on l'a déjà implicitement évoqué au début de ce chapitre, les atomes ou les molécules qui constituent le milieu ont des vitesses différentes, à la fois en direction et en norme. La distribution des vitesses suit d'ailleurs une distribution gaussienne, comme on peut le déduire des résultats du **XVIII.5.a**. Considérons une raie en émission. Pour l'observateur, du fait de l'effet Doppler, les fréquences des photons émis sont également distribuées autour d'une valeur moyenne, correspondant à la vitesse moyenne des particules. Comme le décalage en fréquence est proportionnel à la vitesse[18], on en conclut que la raie observée doit avoir un profil gaussien,

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \exp\left[-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{2\sigma_D^2}\right] \qquad \text{avec} \quad \sigma_D = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{kT}{m}},$$

m étant la masse des particules émettrices. En fait, la raie est encore élargie par les mouvements turbulents dans le gaz, ce qui augmente, parfois considérablement[19], la largeur Doppler σ_D.

[16] Voir la sous-section suivante.
[17] Cette "correction" peut devenir prédominante dans le domaine radio lorsque la température d'excitation est élevée.
[18] On se place dans le cas non relativiste.
[19] On a déjà fait remarquer que les largeurs de raie dans les nuages moléculaires étaient fortement suprathermiques. Il faut aussi noter que le fait que les mouvements soient turbulents n'est aucunement nécessaire, on voit très bien l'élargissement des raies en observant des galaxies en rotation...

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Imaginons cependant qu'on supprime à la fois la turbulence et l'élargissement thermique, en fixant les atomes à des positions données. La raie spectrale n'en sera pas pour autant infiniment minces. Il existe toujours une largeur intrinsèque, d'origine quantique. En effet, le principe d'incertitude de Heisenberg affirme que l'énergie d'un niveau n'est pas connue avec une précision infinie, et que l'incertitude δU sur cette valeur est inversement proportionnelle à la durée de vie t_v du niveau, soit $\delta U.t_v \sim \hbar$. Par conséquent, le photon émis lors de la transition entre deux niveaux discrets possède une énergie, et donc une fréquence, entachée d'une certaine incertitude, d'où un élargissement des raies. On peut calculer que le profil résultant est du type lorentzien,

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi}\frac{\delta}{\delta^2 + (\nu - \nu_0)^2} \qquad \text{où} \quad \delta = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{t_m} + \frac{1}{t_n}\right),$$

t_m et t_n étant respectivement les durées de vie des niveaux m et n impliqués dans la transition.
Enfin, l'existence de collisions entre les particules, qui modifient la durée de vie des niveaux en entraînant des transitions entre états, peut à son tour provoquer un élargissement des raies, qui sera lui aussi de forme lorentzienne, où la constante δ de l'équation précédente est remplacée par une quantité dépendant inversement de la durée moyenne entre collisions. La mesure de cet élargissement permet donc en théorie de remonter aux conditions de température, de densité ou encore d'ionisation.
En définitive, le profil des raies spectrales, qu'il s'agisse de raies en absorption ou en émission, est issu de la combinaison de ces divers effets d'élargissement. Il faut donc, pour calculer la forme de ce profil, procéder à la convolution successive de deux lorentziennes et de deux gaussiennes. Or, la convolution de deux lorentziennes est encore une lorentzienne, et de même la convolution de deux gaussiennes est aussi une gaussienne. Il s'agit donc de convoluer une lorentzienne de coefficient d'amortissement δ par une gaussienne de variance σ, ce qui donne un profil dit profil de Voigt,

$$H(a,u) = \frac{a}{\pi}\int \frac{e^{-y^2}}{a^2 + (u-y)^2}\mathrm{d}y \quad \text{avec} \quad a = \frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma} \quad \text{et} \quad u = \frac{\nu - \nu_0}{\sqrt{2}\sigma},$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble de la droite réelle. Les valeurs de ce profil sont tabulées en fonction des paramètres a et u, ce qui permet de retrouver les profils sous-jacents à partir des observations. Remarquons cependant qu'étant donné que la lorentzienne décroît plus vite que la gaussienne au centre de la raie, et qu'inversement elle a des ailes plus développées, il n'est pas étonnant qu'on observe que le profil gaussien domine au centre de la raie et que le profil lorentzien domine dans les ailes. En fait, ceci est vrai pour les transitions permises, mais pour les transitions interdites, étant donnée la petitesse du coefficient d'amortissement, liée à la grande durée de vie des niveaux, le profil gaussien domine dans la pratique sur l'ensemble de la raie.

XVIII.6.c Courbes de croissance

On vient de voir quelles sont les causes d'élargissement des raies spectrales et quels profils d'émission on est en droit d'attendre. Cependant, ces profils ne sont *a priori* valables que localement, et le transfert de rayonnement est susceptible de les modifier. En retour, au niveau de l'observateur, l'étude de l'intensité et du profil d'une raie spectrale doit en principe permettre de déterminer les conditions physiques régnant dans le milieu où elle s'est formée. Pour cela, on introduit la notion de largeur équivalente W, définie comme le rapport entre l'intégrale du profil de la raie et l'intensité du continuum sous-jacent au centre de la raie [Spitzer, 1978]. Dans le cas d'une raie en absorption, on écrira donc

$$W = \int \frac{I_c - I_\nu}{I_c}\mathrm{d}\lambda \quad \text{où } I_c \text{ représente l'intensité spécifique du continuum.}$$

On peut montrer [Mihalas, 1978], en prenant par exemple le cas très simple d'une source de rayonnement continu située derrière un nuage homogène, purement absorbant dans la raie spectrale mais non absorbant dans le continu, que le rapport entre la largeur équivalente et la largeur Doppler σ_D a la forme

$$\frac{W}{\sigma_D} = \frac{\sqrt{2}\lambda_0^2}{c}\int \{1 - \exp[-\tau_0 H(a,u)]\}\,\mathrm{d}u \quad \text{où } \lambda_0 \text{ est la longueur d'onde centrale de la raie.}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Le coefficient τ_0 est l'épaisseur optique au centre de la raie, qui est proportionnelle à la densité de colonne le long de la ligne de visée. La valeur de cette épaisseur optique détermine le comportement du profil de la raie. Si par exemple elle est très petite devant un, le cœur Doppler domine et le rapport W/σ_D devient simplement proportionnel à la densité de colonne. En revanche, lorsque le nombre de particules sur la ligne de visée devient grand, et que l'épaisseur optique τ_0 devient grande devant $1/a$, la raie est saturée jusqu'aux ailes lorentziennes, et on peut montrer que la largeur équivalente varie alors comme la racine carrée de la densité de colonne. Le passage d'un régime asymptotique à l'autre dépend de la valeur de la largeur Doppler. On peut donc construire théoriquement ce qu'on appelle une courbe de croissance pour chaque raie spectrale, montrant l'évolution de la largeur équivalente, rapportée à la largeur Doppler, en fonction de la densité de colonne, dont le comportement est schématisé par la figure **XVIII**.5. En pratique, en

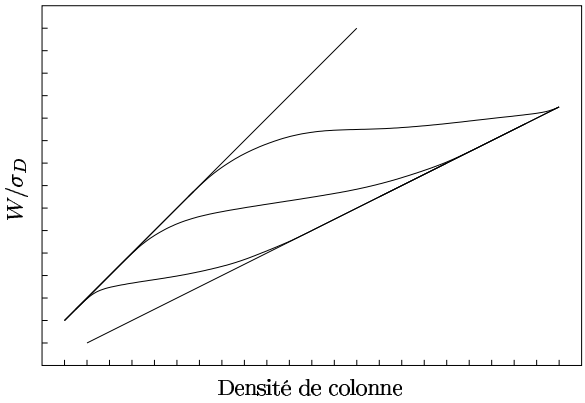

FIG. **XVIII**.5 – *Allure des courbes de croissance en coordonnées* log – log *(traits gras) pour trois valeurs de la largeur Doppler. Les traits fins représentent les comportements asymptotiques à petite et grande densité de colonne.*

comparant les différentes raies d'un même spectre, on peut construire des courbes de croissance empiriques, permettant de déterminer par exemple la vitesse turbulente caractéristique et la température du gaz. En supposant l'ETL réalisé, on peut également en déduire les populations des différents degrés d'ionisation d'un même élément. Il faut cependant bien voir que le calcul est compliqué par le fait que le milieu n'est pas en général purement absorbant, et que d'autre part il n'est pas nécessairement homogène.

XVIII.6.d Les milieux hors ETL

Le cas de l'équilibre thermodynamique local simplifie considérablement le problème du transfert radiatif, puisqu'alors la fonction source est donnée par la fonction de Planck. Pourtant, dans le cas des raies interstellaires, les densités sont beaucoup trop faibles pour qu'on puisse considérer que le milieu est à l'ETL[20]. Dans ce cas de figure, on ne peut plus supposer la microréversibilité des états, et il faut considérer l'ensemble des processus de transition, qu'ils soient collisionnels ou radiatifs, et calculer simultanément, de façon cohérente, les populations des niveaux, la fonction source et l'intensité du rayonnement, sachant que toutes ces variables sont interdépendantes. Pour cela, on fait néanmoins l'hypothèse de stationnarité, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de phénomène faisant varier trop rapidement[21] les conditions physiques dans lesquelles se forment les raies. Le calcul est en général très complexe et doit le plus souvent être fait numériquement, à l'aide de simulations Monte-Carlo. On va en reparler dans le chapitre suivant.

□

[20]Du fait du transfert d'énergie des photons aux particules dans des collisions inélastiques, on peut également être proche de l'ETL si l'épaisseur optique est grande, même si la densité de particules ne l'est pas.

[21]C'est-à-dire plus vite que le temps moyen entre deux processus radiatifs ou collisionnels.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XIX

Transfert radiatif stochastique

XIX.1 Introduction

On a brièvement parlé, dans le chapitre précédent, de la prise en compte des mouvements du gaz, en particulier de ses mouvements turbulents, dans le problème du transfert radiatif. On avait alors simplement dit que la turbulence du gaz émetteur provoquait un élargissement qu'on calculait comme une convolution du profil de la raie par une gaussienne de largeur σ_v représentant la vitesse turbulente moyenne, à savoir $\sigma_v^2 = \mathsf{E}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\}$, où $\boldsymbol{v}$ est le champ de vitesse turbulent[1].

Cette approche est en fait bien trop grossière, car la vitesse turbulente σ_v ne peut constituer à elle seule une caractérisation complète du champ de vitesse. Imaginons en effet les deux cas particuliers suivants, pour lesquels on choisira la même valeur de σ_v. Considérons pour commencer le cas d'un champ de vitesse dont les fluctuations se font à très petite échelle. Les mouvements turbulents peuvent alors parfaitement être assimilés à une agitation thermique supplémentaire et traités comme tels. Le profil d'absorption et d'émission local est donc élargi, du fait de sa convolution par une gaussienne de largeur σ_v. En revanche, imaginons maintenant que le champ de vitesse présente des fluctuations de même amplitude, mais sur des échelles spatiales beaucoup plus grandes. Localement, la vitesse turbulente est quasiment la même partout, de sorte que le profil d'émission est inchangé. On observe donc la superposition des rayonnement issus de différentes régions du nuage, et c'est le profil émergent qui est cette fois convolué par la distribution des vitesses, laissant les largeurs équivalentes inchangées [Gail *et al.*, 1974].

Ces deux cas de figure extrêmes, bien que décrits par la même vitesse turbulente σ_v, ne donneront pas les mêmes raies observées. On parle respectivement de modèle microturbulent et de modèle macroturbulent. Quantitativement, on est dans le premier régime si l'échelle caractéristique du champ de vitesse, qu'on notera l_v, est petite devant le libre parcours moyen des photons, et on sera dans le second régime lorsque la condition réciproque sera remplie. Ces deux modèles ne sont cependant que des approximations, et il est nécessaire, pour pouvoir traiter le transfert radiatif dans le cas de nuages interstellaires turbulents réalistes, de comprendre les mécanismes du transfert lorsque l'échelle l_v de corrélation du champ de vitesse a une valeur finie. Les tentatives dans ce sens remontent aux années 1960, quand Traving [Traving, 1964] a proposé un modèle dans lequel le champ de vitesse était découpé en cellules de taille l_v, au sein desquelles la vitesse prenait une valeur uniforme v, et qui se déplaçaient indépendamment les unes des autres. Cependant, ce modèle est assez grossier, et bien qu'il redonne les régimes microturbulent et macroturbulent, dans les limites $l_v \to 0$ et $l_v \to \infty$ respectivement, on ne peut s'en satisfaire, ne serait-ce que parce que le champ de vitesse qui y est décrit est discontinu.

La principale difficulté, lorsqu'on souhaite incorporer un champ de vitesse turbulent dans le problème du transfert radiatif, provient essentiellement de la difficulté qu'il y a à inclure les fluctuations stochastiques de la vitesse, ainsi que ses corrélations, dans les représentations intégrales des intensités spécifiques. En effet, le coefficient d'absorption, qui dépend du champ de vitesse, y intervient à la fois dans l'émissivité[2] et dans le facteur exponentiel d'atténuation.

[1] Comme on en a l'habitude, on notera v la composante longitudinale du champ de vitesse. C'est elle qui interviendra dans la suite, les rayons considérés étant dirigés vers l'observateur. La dispersion σ_v sera d'ailleurs celle de cette seule composante, soit $\sigma_v^2 = \mathsf{E}\left\{v^2\right\} = (1/3)\mathsf{E}\left\{\boldsymbol{v}^2\right\}$ dans l'hypothèse isotrope.

[2] Qu'on se rappelle la loi de Kirchoff.

XIX.2 Le modèle de Gail *et al*

XIX.2.a La méthode probabiliste

Le fait que le champ de vitesse turbulent soit par nature stochastique incite à traiter le problème de manière probabiliste. Cela n'est évidemment pas pour nous surprendre, étant donné que c'est cette approche qui a déjà été utilisée lorsque nous avons abordé le problème des centroïdes de vitesse dans la troisième partie. C'est également l'approche qui a été choisie au milieu des années 1970 par un groupe allemand, dont l'un des articles fondateurs présente la méthode de la façon suivante [Gail *et al.*, 1974].
On part de l'équation de transfert écrite sous la forme (94), qu'on redonne ici,

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}z} = -\kappa_\nu \left[I_\nu(z) - S_\nu(z)\right],$$

la coordonnée z repérant la position le long d'un rayon lumineux. On suppose que les profils d'émission et d'absorption sont identiques. Ils dépendent de la vitesse locale, bien que cette dépendance ne soit pas explicitée dans l'équation ci-dessus. Comme le champ de vitesse est stochastique, le coefficient d'absorption au point z est aléatoire. À chaque fréquence, l'intensité spécifique en sortie du nuage est donc également aléatoire, et dépendante de la réalisation particulière du processus stochastique modélisant le champ de vitesse. Cependant, en admettant que ce processus est stationnaire et ergodique, et étant donné qu'il existe un grand nombre de lignes de visée dans un lobe instrumental, on peut supposer que les profils émergents sont donnés par l'espérance $\mathsf{E}\{I_\nu(D)\}$ au point D marquant la sortie du nuage. C'est le but de la méthode de [Gail *et al.*, 1974] que de déterminer et de résoudre une équation portant sur cette espérance, en passant par la densité de probabilité de l'intensité spécifique. On rappelle en effet qu'à partir de cette distribution, l'espérance de l'intensité ainsi que tous les autres moments de cette dernière sont en théorie directement accessibles, comme on l'a montré au chapitre **IV**.

XIX.2.b Modélisation du champ de vitesse

L'hypothèse de base consiste à supposer que les variations de la vitesse, ainsi que celles de l'intensité spécifique, sont gouvernées par un processus markovien, c'est-à-dire que la probabilité de passer d'un état (v, I_ν) au point z à un état (v', I'_ν) au point z' ne dépend que de ces deux états, et non des conditions régnant entre les deux points z et z'. Il ne s'agit là que d'une approximation, car en vérité les probabilités de transition d'une vitesse à l'autre sont clairement dépendantes des conditions intermédiaires, du fait des contraintes imposées par l'hydrodynamique. Ce modèle a cependant l'avantage de permettre la considération de champs de vitesse continus, contrairement aux tentatives précédentes. Il suffit en fait de supposer le caractère markovien du processus décrivant le champ de vitesse, celui décrivant l'intensité spécifique étant alors également markovien du fait de l'équation de transfert. On suppose qu'en revanche le champ de radiation n'influe pas sur le champ de vitesse, en excluant donc le cas d'une turbulence alimentée par la pression de radiation.
En pratique, le champ de vitesse est modélisé par une équation de Langevin, dont on a parlé au chapitre **VIII**, caractérisée par un écart-type σ_v et une longueur de corrélation l_v,

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{v}{l_v} + \frac{\sigma_v}{\sqrt{l_v}}\Gamma_v(z) \quad \text{avec} \quad \mathsf{E}\{\Gamma_v(z)\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\{\Gamma_v(z)\Gamma_v(z')\} = 2\delta(z - z'). \tag{96}$$

Γ_v représente la force de Langevin. Cette forme, d'après [Risken, 1989] et comme on l'a vu au chapitre **VIII**, implique que la distribution des vitesses $W_v(v)$ est une gaussienne de variance σ_v^2 et que la fonction d'autocorrélation des vitesses A_v prend une forme exponentielle,

$$W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}\right) \qquad \text{et} \qquad A_v(r) = A_v(0)\exp\left(-\frac{r}{l_v}\right) = \sigma_v^2\exp\left(-\frac{r}{l_v}\right)$$

La figure **XIX**.1 montre deux exemples de champs de vitesse obtenus à partir de ce modèle. On remarque notamment que la taille caractéristique des structures en vitesse est reliée à la valeur de la longueur de corrélation l_v. Le lecteur trouvera plus de détails sur la construction de ces champs simulés au **XX.6**.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

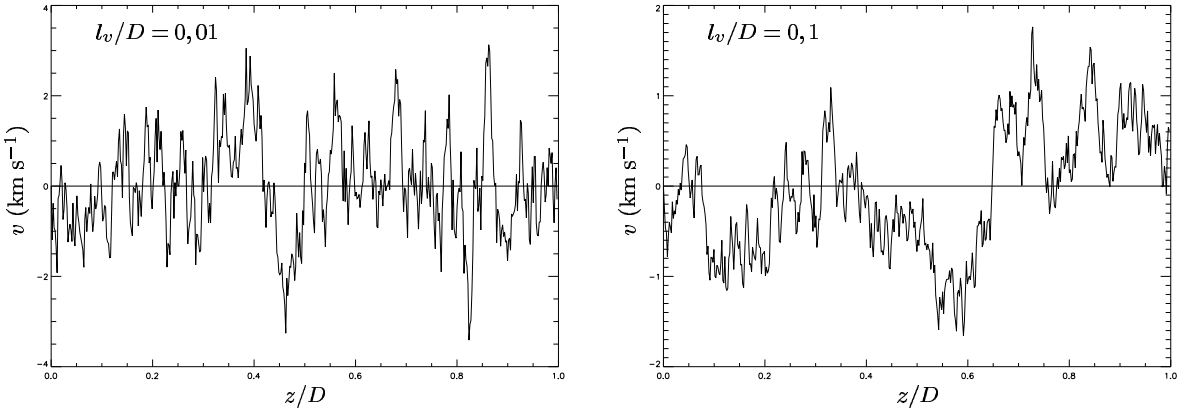

FIG. **XIX**.1 – *Deux exemples de champs de vitesse construits à partir de l'équation de Langevin (96). Dans les deux cas, la dispersion des vitesses est prise égale à* $\sigma_v = 1$ km s^{-1}. *Les longueurs de corrélation* l_v *sont indiquées sur chacune des deux figures.* D *est la longueur de la ligne de visée.*

Cette description de la turbulence semble appropriée aux séparations r assez grandes, mais dans le domaine inertiel, la théorie de Kolmogorov indique que $A_v(0) - A_v(r) \propto r^{2/3}$, comme le montre l'équation (3), ce qui indique que le modèle n'est alors plus adéquat. Autrement dit, lorsque la séparation $z - z'$ devient petite mais non nulle, les forces de Langevin $\Gamma_v(z)$ et $\Gamma_v(z')$ ne sont pas décorrelées, contrairement à ce que suppose le modèle de l'équation (96). De toutes les manières, le point essentiel du modèle est de disposer d'un champ de vitesse continu, bien que peu réaliste physiquement.

XIX.2.c Équation de transfert généralisée

On notera $P(v, I_\nu; z)\mathrm{d}v\mathrm{d}I_\nu$ la probabilité qu'au point z la vitesse et l'intensité aient respectivement pour valeurs v et I_ν à $\mathrm{d}v$ et $\mathrm{d}I_\nu$ près. L'espérance de l'intensité sera alors donnée par l'intégrale double

$$\mathsf{E}\{I_\nu(z)\} = \iint I_\nu P(v, I_\nu; z)\mathrm{d}v\mathrm{d}I_\nu \tag{97}$$

Étant donné que la vitesse est modélisée par un processus de Ornstein-Uhlenbeck, comme le montre l'équation (96), et que l'équation de transfert peut également être vue comme une équation de Langevin de la forme (32) avec un terme stochastique nul,

$$\frac{\mathrm{d}I_\nu}{\mathrm{d}z} = -\kappa_\nu\left[I_\nu(z) - S_\nu(z)\right] + 0.\Gamma_{I_\nu}(z)$$

on peut appliquer les méthodes décrites au chapitre **VIII**, en posant $\boldsymbol{X} = (I_\nu, v)$ et en remarquant que le paramètre temps est ici remplacé par la position z. La densité de probabilité P suit alors une équation de Fokker-Planck, dont les coefficients de dérive et de diffusion sont donnés par

$$D_v = -\frac{v}{l_v} \qquad D_{vv} = \frac{\sigma_v^2}{l_v} \qquad D_{I_\nu} = -\kappa_\nu\left[I_\nu(z) - S_\nu(z)\right] \qquad D_{I_\nu,I_\nu} = D_{v,I_\nu} = D_{I_\nu,v} = 0,$$

ce qu'il est aisé de retrouver à partir des formules établies au chapitre **VIII**, en prenant garde toutefois aux facteurs de normalisation, comme on l'avait déjà fait remarquer alors. L'équation de Fokker-Planck associée au processus bidimensionnel $\boldsymbol{X}$ ainsi construit, décrivant l'évolution de la densité de probabilité P le long de la ligne de visée, est donc

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{l_v}\frac{\partial(vP)}{\partial v} + \frac{\sigma_v^2}{l_v}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial I_\nu}\left[\kappa_0\phi(I_\nu - S_\nu)P\right] \quad \text{en posant} \quad \kappa_\nu = \kappa_0\phi. \tag{98}$$

Dans cette équation, κ_0 est le coefficient d'absorption au centre de la raie et ϕ est le profil d'absorption, supposé identique au profil d'émission. En introduisant l'épaisseur optique $\tau = \kappa_0 z$ ainsi que la vitesse

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

réduite $u = v/\sigma_v$, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v}\left[\frac{\partial(uP)}{\partial u} + \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\right] + \frac{\partial}{\partial I_\nu}\left[\phi(I_\nu - S_\nu)P\right] \quad \text{avec} \quad \tau_v = \kappa_0 l_v.$$

Comme on s'intéresse uniquement à l'espérance de l'intensité (97), il est légitime d'introduire le premier moment de la distribution de probabilité P par rapport à l'intensité,

$$Q_\nu(u;\tau) = \int_0^\infty P\left(\sigma_v u, I_\nu; \frac{\tau}{\kappa_0}\right) I_\nu \mathrm{d}I_\nu \quad \text{qui est reliée à l'espérance par} \quad \mathsf{E}\left\{I_\nu(z)\right\} = \int \sigma_v Q_\nu(u;\kappa_0 z)\mathrm{d}u.$$

L'équation d'évolution de ce moment est obtenue par intégration de l'équation sur P. Le membre de gauche ainsi que les dérivées par rapport à la vitesse réduite sont immédiats à calculer, et seul le terme dérivé par rapport à l'intensité spécifique requiert une intégration par parties,

$$\int_0^\infty I_\nu \frac{\partial}{\partial I_\nu}\left[\phi(I_\nu - S_\nu)P\right]\mathrm{d}I_\nu = \left[I_\nu \phi(I_\nu - S_\nu)P\right]_0^\infty - \int_0^\infty \phi(I_\nu - S_\nu)P\mathrm{d}I_\nu = -\phi(Q_\nu - W_v S_\nu),$$

puisque l'intégrale de P sur l'intensité spécifique redonne la distribution des vitesses W_v. Finalement, on a l'équation aux dérivées partielles régissant le moment Q_ν,

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v}\frac{\partial}{\partial u}\left(uQ_\nu + \frac{\partial Q_\nu}{\partial u}\right) - \phi(Q_\nu - W_v S_\nu),$$

qui constitue une équation de transfert généralisée, puisqu'elle décrit le comportement de l'intensité moyenne le long de l'axe des profondeurs optiques. Il s'agit alors de la résoudre en se donnant des conditions initales, pour $\tau = 0$, caractérisant le champ de rayonnement à l'entrée du milieu, ainsi que des conditions aux limites en marge de la raie, soit pour $|u| \to \infty$.

XIX.2.d Remarques sur les méthodes de résolution

La résolution de l'équation de transfert généralisée fournit en principe toutes les informations qu'on pourrait souhaiter, puisqu'en définitive, le profil de raie émergent est justement donné, en fonction de ν, par l'intégrale de $Q_\nu(u;\tau_d)$ sur la vitesse, où $\tau_d = \kappa_0 D$ désigne la profondeur optique au niveau du point de sortie du rayonnement.

Solution formelle en termes matriciels

L'article de Gail *et al* [Gail *et al.*, 1974] donne plusieurs méthodes analytiques de résolution de cette équation. En premier lieu, il est suggéré de développer la fonction Q_ν sur une base de fonctions orthogonales dépendant de la seule coordonnée de vitesse, les coefficients du développement étant alors des fonctions de la profondeur optique τ uniquement,

$$Q_\nu(u;\tau) = \sum_{n\geqslant 0} T_n(\tau)\varphi_n(u) \quad \text{avec} \quad \varphi_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}}\frac{\partial^n}{\partial u^n}\left(e^{-u^2/2}\right), \quad \text{en particulier } \varphi_0(u) = \sigma_v W_v(\sigma_v u).$$

L'insertion de cette forme dans l'équation de transfert fournit un système d'équations linéaires portant sur les fonctions T_n, ce qui permet de calculer celles-ci formellement, et de les mettre sous la forme

$$\boldsymbol{T}(\tau) = e^{-\tau \mathbf{A}}\boldsymbol{T}(0) \quad \text{où les éléments de la matrice } \mathbf{A} \text{ sont} \quad A_{mn} = \frac{m}{\tau_v}\delta_{mn} + \int \frac{\varphi_m(u)\phi(u)\varphi_n(u)}{\varphi_0(u)}\mathrm{d}u$$

On montre alors [Gail *et al.*, 1974] qu'on retrouve les conclusions des cas microturbulent et macroturbulent quand on passe aux limites respectives $\tau_v \to 0$ et $\tau_v \to \infty$. On peut d'ailleurs généraliser le résultat obtenu dans la limite microturbulente au cas d'une longueur de corrélation petite mais finie, ce qui permet de voir que le coefficient d'absorption a alors une valeur plus faible que dans le cas microtubulent, et les profils de raie sont alors plus aplatis.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Approche "quantique"

En fait, cette approche en termes de développement sur un ensemble de fonctions orthogonales ressemble à la résolution d'un problème quantique. D'ailleurs, l'intégrale écrite juste au dessus dans l'expression de A_{mn} est semblable à l'expression d'un élément de matrice $\langle m|\phi|n\rangle$ d'un opérateur quantique ϕ entre deux états m et n. Dans cette optique, [Gail *et al.*, 1974] propose une transformation de l'équation de transfert généralisée[3] permettant de la mettre sous une forme identique à celle de l'équation de Schrödinger. Plus précisément, il s'agit d'introduire la fonction

$$R_\nu(u;\tau) = \exp\left(\frac{u^2}{4}\right)\frac{Q_\nu(u;\tau)}{S_\nu(\tau)} \quad \text{et de faire l'hypothèse que} \quad R_\nu(u;\tau) = X_\nu(\tau)U_\nu(u).$$

L'équation de transfert généralisée se traduit alors par l'égalité de deux membres dépendant chacun d'une seule des deux variables τ et u, et qui sont donc égaux à la même constante $-\epsilon$. On en tire une forme intégrale pour X_ν et on peut alors établir que U_ν suit une équation de Schrödinger, dont le potentiel dépend du profil ϕ,

$$\frac{\mathrm{d}^2U_\nu}{\mathrm{d}u^2} + (\epsilon - V)\,U_\nu = 0 \quad \text{avec} \quad V(u) = \frac{u^2}{4} + \tau_v\phi(u) - \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des solutions est discret, et celles-ci peuvent être reliées aux fonctions φ_n dans la limite $\tau_v \to 0$. Par rapport à la méthode matricielle, cette approche a l'avantage d'être valide pour les valeurs quelconques de τ_v, car on peut intégrer numériquement l'équation de Schrödinger. La fonction Q_ν est alors une superposition de solutions particulières de la forme $X_\nu U_\nu$, qu'on peut théoriquement calculer en fonction des conditions initiales et des conditions aux limites.
Dans le cas où $\tau_v \ll 1$, il est possible de faire un calcul analytique en appliquant les méthodes perturbatives bien connues en mécanique quantique, puisque $\tau_v\phi$ apparaît comme une petite perturbation du potentiel parabolique. On retrouve alors le comportement asymptotique aux faibles longueurs de corrélation obtenu par l'approche matricielle.

XIX.3 Simulations numériques

XIX.3.a Introduction

Dans un article suivant [Gail & Sedlmayr, 1974], Gail et Sedlmayr ont appliqué cette méthode au cas de raies du fer et de l'oxygène atomiques (FeI et OI) formées dans la photosphère solaire. L'intégration numérique directe de l'équation de transfert généralisée donnant le profil des raies, et donc les largeurs équivalentes et les courbes de croissance théoriques, il est possible de comparer les résultats obtenus aux observations disponibles dans le cas du Soleil. Remarquons tout d'abord que pour des raisons de stabilité numérique, ils introduisent la fonction q_ν, définie par

$$Q_\nu(u;\tau) = W_v(\sigma_v u)q_\nu(u;\tau) \quad \text{dont l'équation d'évolution est} \quad \frac{\partial q_\nu}{\partial \tau} = \frac{1}{\tau_v}\left(-u\frac{\partial q_\nu}{\partial u} + \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial u^2}\right) - \phi(q_\nu - S_\nu),$$

et c'est cette équation aux dérivées partielles qui est résolue, étant données les conditions initiales et les conditions aux limites. Celles-ci sont spécifiées, pour les premières, en posant qu'à l'entrée du nuage, soit pour $\tau = 0$, l'intensité conditionnelle q_ν est donnée par la fonction de Planck B_ν, pour une certaine température T_0, et pour les secondes, en se donnant une intensité du continu, notée I_ν^c, et en posant que q_ν tend vers I_ν^c pour $|u| \to \infty$. D'un point de vue pratique, les paramètres de l'équation de transfert (coefficient d'absorption au centre de la raie et fonction source en particulier) sont donnés par un modèle d'atmosphère [Holweger, 1967].

[3] Correspondant en fait à considérer que l'on peut séparer les variables τ et u, ce qui est d'ailleurs déjà fait implicitement quand on a écrit $Q_\nu(u;\tau)$ en fonction des $T_n(\tau)$ et des $\varphi_n(u)$.

XIX.3.b Profils de raie

La figure **XIX**.2 montre les profils des raies d'absorption de l'oxygène à 7771 Å et du fer à 5576 Å ainsi calculés[4], pour différentes valeurs de l_v et de σ_v. On voit que les profils d'absorption sont d'autant plus profonds et larges que la longueur de corrélation de la vitesse est plus petite. Ceci reste vrai tant qu'on n'a pas atteint l'une des deux limites, macroturbulente ou microturbulente, pour lesquelles le profil d'intensité devient en pratique indépendant de l_v. D'après les résultats de [Gail & Sedlmayr, 1974], la transition microturbulente est atteinte pour $l_v \leqslant 1$ km en ce qui concerne la raie de l'oxygène et pour $l_v \leqslant 10$ km en ce qui concerne celle du fer. Réciproquement, la limite macroturbulente se situe aux alentours de $l_v \geqslant 1000$ km pour l'oxygène et $l_v \geqslant 3000$ km pour le fer.
Étant donné que le champ de vitesse turbulent se superpose à l'agitation thermique, son influence est plus grande sur les raies d'éléments dont la dispersion thermique est plus petite, ce qu'on confirme ici[5]. Pour les dispersions de vitesse turbulente inférieures à la dispersion thermique (cas des panneaux (a) et (e) de la figure **XIX**.2), c'est l'agitation thermique qui domine l'élargissement des raies, et la structure du champ de vitesse turbulent, c'est-à-dire la valeur de l_v, n'a qu'une importance secondaire, tous les profils étant sensiblement identiques. En revanche, lorsque σ_v domine la dispersion thermique, comme c'est le cas sur les panneaux (c), (d), (f), (g) et (h), les profils de raie sont assez différents les uns des autres suivant la longueur de corrélation, cet effet étant d'autant plus marqué que σ_v augmente. Par ailleurs, la structure du champ de vitesse n'a pas la même importance au centre de la raie et dans les ailes. Les résultats de [Gail & Sedlmayr, 1974] montrent que, si pour les petites longueurs de corrélation, l'ensemble de la raie est effectivement formé dans les conditions de microturbulence, en revanche, lorsque l_v est assez grand, le régime macroturbulent se fait d'abord et essentiellement sentir dans les parties du profil d'absorption présentant les gradients les plus forts en fonction de $\Delta\lambda$, avant de se faire sentir au centre de la raie et dans les ailes.
On remarque enfin que dans les ailes des raies, l'absorption devient faible, et la structure du champ de vitesse perd son importance, d'où la convergence des différents profils.

XIX.3.c Largeurs équivalentes, profondeurs des raies, courbes de croissance

Conformément aux prédictions de [Gail *et al.*, 1974], c'est dans le régime microturbulent que les raies sont les plus profondes, ainsi que les plus larges, comme on le voit sur la figure **XIX**.2. C'est également la première remarque qu'on peut faire en considérant le panneau de gauche de la figure **XIX**.3, qui représente l'évolution de la largeur équivalente W_λ et de la profondeur[6] r_0 au centre de la raie OI à 7771 Å, en fonction de la longueur de corrélation l_v d'une part, et de la vitesse turbulente σ_v d'autre part.
Le comportement observé est semblable pour les autres raies de l'oxygène et du fer [Gail & Sedlmayr, 1974]. On remarque que pour $\sigma_v \to 0$, la largeur équivalente ainsi que la profondeur de la raie deviennent indépendantes de la longueur de corrélation, ce qu'on a déjà souligné plus haut. L'élargissement de la raie est alors purement thermique. Dans ce cas, les raies présentent une profondeur maximale et une largeur équivalente minimale. Lorsque la dispersion des vitesses augmente, la largeur équivalente augmente et la profondeur de la raie diminue, de façon à peu près linéaire en fonction de σ_v.
En ce qui concerne les effets de la longueur de corrélation, on voit que dans la limite macroturbulente, représentée par des tirets sur les panneaux (a) et (c), la largeur équivalente devient indépendante de σ_v, ce que traduit également la convergence des courbes sur le panneau (b).
Les courbes de croissance correspondant à la transition à 5576 Å du fer atomique sont présentées sur le panneau de droite de la figure **XIX**.3, où $\ln(gf\epsilon)$ est le paramètre d'abondance de l'espèce en question. Chaque sous-figure correspond à une valeur de la longueur de corrélation et comprend quatre courbes représentant, de bas en haut, les cas $\sigma_v = 0$ km s^{-1}, $\sigma_v = 1$ km s^{-1}, $\sigma_v = 2$ km s^{-1} et $\sigma_v = 3$ km s^{-1}. On remarque que lorsque l_v augmente les différentes courbes se rapprochent du cas purement thermique, qui est aussi le cas macroturbulent. Inversement, la limite microturbulente est celle pour laquelle les courbes de croissance sont les plus éloignées du cas purement thermique.

[4] Notons qu'il s'agit de profils calculés au centre du Soleil, la prise en compte de l'inclinaison des rayons si l'on souhaite s'intéresser aux raies observées sur les bords du disque étant très simple.

[5] La vitesse d'agitation thermique est inversement proportionnelle à la racine carrée de la masse de l'espèce chimique. Le fer étant plus lourd que l'oxygène, la formation de ses raies est donc plus susceptible d'être influencée par le champ de vitesse turbulent.

[6] Relativement au continu.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

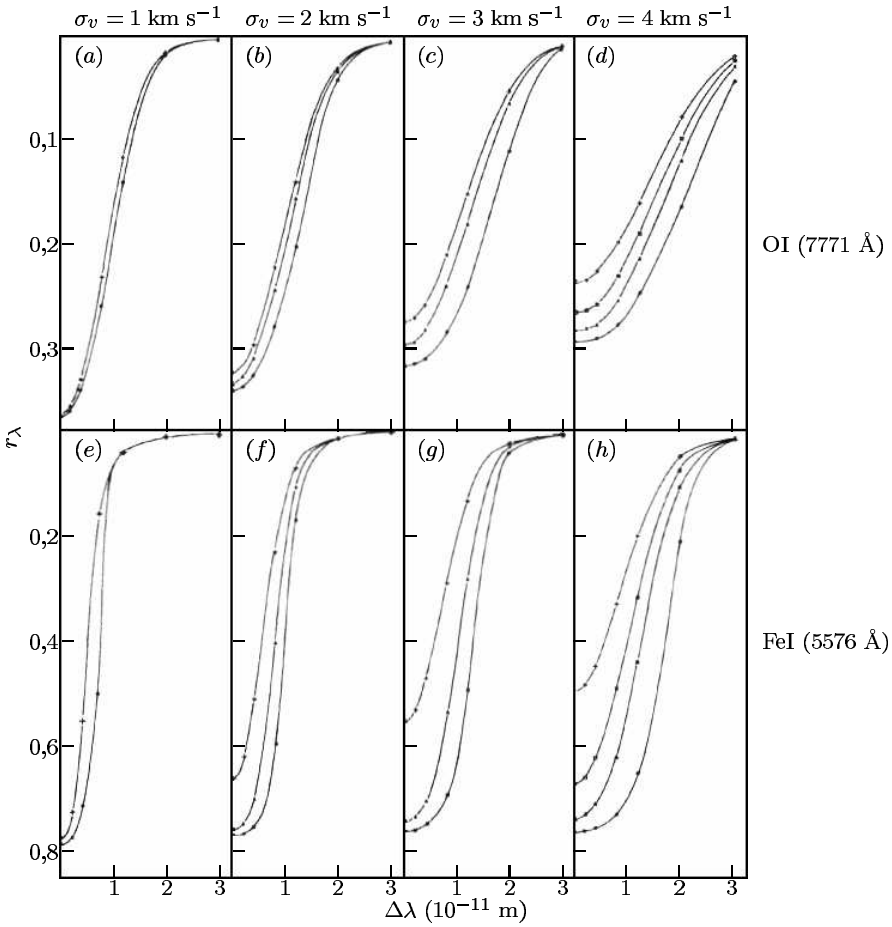

FIG. **XIX**.2 – *Profils des raies d'absorption* OI *à 7771* Å *(figures a – d) et* FeI *à 5576* Å *(figures e – h) calculés par [Gail & Sedlmayr, 1974]. Comme il est usuel, seule la moitié de chaque profil est présentée, étant donné qu'ils sont symétriques. Le centre de la raie est situé à gauche de chaque sous-figure et* r_λ *représente l'absorption relative au continu. De gauche à droite, les figures correspondent aux cas* $\sigma_v = 1$ km s^{-1}, $\sigma_v = 2$ km s^{-1}, $\sigma_v = 3$ km s^{-1} *et* $\sigma_v = 4$ km s^{-1}. *Dans chaque sous-figure, les différents profils correspondent à des valeurs différentes de* l_v, *comprises entre* 1 km *et* 3000 km. *Les profils les plus profonds correspondent aux longueurs de corrélation les plus petites. Figure issue de [Gail & Sedlmayr, 1974].*

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

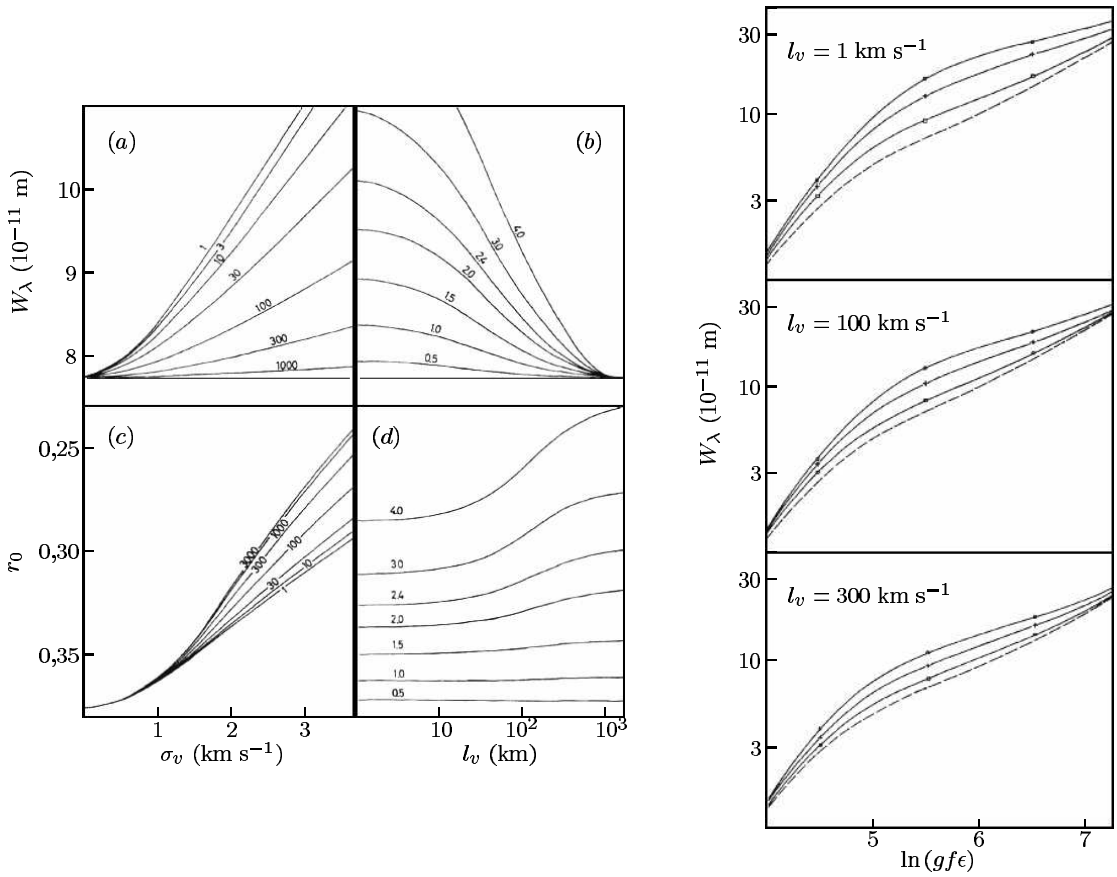

FIG. **XIX.3** – *Largeur équivalente et profondeur de la raie* OI *à 7771* Å *en fonction des caractéristiques du champ de vitesse turbulent (à gauche) et courbes de croissance de la raie* FeI *à 5576* Å *(à droite). Les chiffres indiqués sur les figures du panneau de gauche donnent la valeur de l_v lorsque les courbes sont tracées en fonction de σ_v, et réciproquement. Les courbes en tirets, sur les panneaux de gauche comme de droite, correspondent au cas macroturbulent, qui est identique au cas purement thermique. Figure issue de [Gail & Sedlmayr, 1974].*

Ces courbes de croissance théoriques peuvent être mises à profit pour déterminer les caractéristiques du champ de vitesse ainsi que les abondances reproduisant au mieux les profils observés. Étant donné que les résultats de [Gail & Sedlmayr, 1974] concernent des raies formées dans la photosphère solaire, on ne les donnera pas ici, puisque les valeurs obtenues ne sont pas vraiment utiles à notre étude. En effet, les conditions régnant dans les nuages moléculaires du milieu interstellaire sont de toutes les manières très différentes de celles du modèle d'atmosphère qu'ils utilisent [Holweger, 1967].

XIX.4 Prise en compte des effets hors-ETL

XIX.4.a Introduction

On a effectivement dit, au chapitre précédent, que les raies interstellaires étaient très vraisemblablement formées dans des conditions hors équilibre thermodynamique local, étant données les faibles densités qu'on y trouve. La méthode exposée plus haut doit donc être adaptée à ce cas, c'est-à-dire qu'en sus de l'équation de transfert généralisée, il est nécessaire de résoudre simultanément les équations régissant l'évolution des populations des niveaux du fait des transitions radiatives et collisionnelles, tout en satisfaisant à la conservation des particules. Cette généralisation a été amorcée par [Gail *et al.*, 1975], puis essentiellement par [Albrecht & Kegel, 1987], dont on va présenter succinctement les résultats dans la suite. Remarquons également qu'il est justifié de chercher à étendre la méthode de [Gail *et al.*, 1974] au cas hors équilibre thermodynamique local parce que le libre parcours moyen des photons - qui est précisément lié à la notion

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

d'ETL - doit intuitivement dépendre de la structure du champ de vitesse, c'est-à-dire non seulement de la vitesse turbulente moyenne σ_v, mais également de la longueur de corrélation l_v.

XIX.4.b Équations d'évolution des populations

Considérons un ensemble de N particules de la même espèce, pouvant se trouver dans un certain nombre d'états discrets[7]. Étant donné qu'on s'intéresse à une transition bien particulière, deux de ces niveaux, notés m et p, joueront un rôle particulier. La variation de la population $\{n_k\}$ d'un niveau k est donnée par une équation de conservation, dont la forme est

$$\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left[n_j \left(C_{jk} + A_{jk}\right) - n_k \left(C_{kj} + A_{kj}\right)\right] + \sum_j \left[n_j B_{jk} - n_k B_{kj}\right] J_{kj},$$

dont le membre de droite fait intervenir les coefficients d'Einstein A et B introduits au chapitre **XVIII**, ainsi que les probabilités de transition collisionnelle, notées C. Plus précisément, le membre de droite est composé de deux sommations portant sur les niveaux $j \neq k$, la première correspondant aux processus collisionnels ainsi qu'à l'émission spontanée, la seconde à l'absorption et à l'émission induite. Dans chacune des sommes, on fait la différence entre les processus remplissant le niveau k et ceux le vidant. Si l'on a séparé les deux sommes, c'est que l'absorption et l'émission induite font intervenir le champ de rayonnement, sous la forme du facteur

$$J_{kj} = \frac{1}{4\pi} \int \phi I_\nu \mathrm{d}\Omega \quad \text{où } \phi \text{ est le profil normalisé d'émission et d'absorption de la transition.}$$

Quant au membre de gauche, il ne prend des valeurs non négligeables que si l'échelle de temps des variations macroscopiques n'est pas très grande devant le temps de relaxation des processus de transitions, qui est typiquement d'environ 10^{-8} s. Autant dire qu'on peut considérer que les populations $\{n_k\}$ sont constantes au cours du temps[8], ce qui donne

$$p_k = \sum_j \left[n_j \left(C_{jk} + A_{jk}\right) - n_k \left(C_{kj} + A_{kj}\right)\right] + \left[n_j B_{jk} - n_k B_{kj}\right] J_{kj} = 0 \quad \text{et} \quad p = \sum_k n_k - N = 0, \tag{99}$$

cette dernière équation traduisant la conservation des particules.

XIX.4.c Mise en œuvre de la généralisation du modèle

L'implémentation des équations du problème pose un certain nombre de questions pratiques, abordées en détail par [Gail *et al.*, 1975][9]. En ce qui concerne les équations des populations, l'approche hors-ETL classique consiste à supposer que l'équilibre statistique représenté par les équations (99) est satisfait sur chaque élément de volume, mais uniquement pour la "valeur moyenne" de l'intensité I_ν, cette moyenne étant calculée sur l'ensemble des configurations possibles du champ de vitesse, ce qui revient à supposer que les équations (99) ne sont vérifiées qu'en moyenne sur tout l'espace des vitesses et des intensités. Cette approche semble par trop grossière, mais l'approche inverse, consistant à supposer que l'équilibre statistique est réalisé en tout point de cet espace, c'est-à-dire pour toutes les vitesses et toutes les intensités possibles, et qui permet d'éliminer purement et simplement les populations $\{n_k\}$ et de se ramener à une seule équation de transfert, est en fait difficile à utiliser, en particulier parce qu'elle aboutit à des équations hautement non-linéaires.
L'approche intermédiaire de [Gail *et al.*, 1975] consiste à n'imposer l'équilibre statistique qu'en tout point de l'espace des vitesses, mais en moyenne sur l'intensité. En pratique, on considère que les $\{p_k\}$ et p sont des variables du problème, et on s'intéresse à la densité de probabilité $P(v, I_\nu, \boldsymbol{p}, p; z)$ d'avoir, à la position

[7] On peut inclure le cas des transitions avec le continu sans difficulté.

[8] Ce qu'on doit comprendre dans le sens "quasi-statique". En effet le champ de vitesse varie au cours du temps, mais ses variations sont suffisamment lentes pour qu'à chaque pas de temps, on puisse calculer la solution du problème du transfert en supposant les populations constantes.

[9] On ne parlera pas ici du problème de la généralisation à des milieux bidimensionnels ou tridimensionnels, dont discute [Gail *et al.*, 1975]. On se placera toujours dans le cas à une seule dimension, par exemple celui d'une couche telle que celle utilisée dans le chapitre **X**, sans pour autant oublier que les rayons peuvent être inclinés sur l'axe.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

z, une intensité spécifique I_ν à la fréquence ν donnée, une vitesse longitudinale turbulente v, des variations de populations $\{p_k\}$, qu'on a rassemblées sous une notation vectorielle $\boldsymbol{p}$, et un paramètre de conservation p. Dans cette optique, il est inévitable de supposer que les $\{p_k\}$ et p puissent prendre des valeurs non nulles[10], mais on impose néanmoins que leurs valeurs moyennes le soient. Finalement, les formes pratiques des équations d'évolution des populations ainsi que l'équation de conservation de la matière sont obtenues en appliquant à (99) l'opérateur intégral

$$\int P(v, I_\nu, \boldsymbol{p}, p; z)\mathrm{d}p\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}I_\nu \quad \text{d'où} \quad \sum_j \left[n_j\left(C_{jk}+A_{jk}\right)-n_k\left(C_{kj}+A_{kj}\right)\right]W_v+\left[n_jB_{jk}-n_kB_{kj}\right]\mathcal{Q}_{kj}=0,$$

où l'on a fait apparaître la distribution des vitesses W_v, et où $\mathcal{Q}_{kj}$ est donnée par

$$\mathcal{Q}_{kj}=\frac{1}{4\pi}\int \phi Q_\nu \mathrm{d}\Omega \quad \text{sachant que} \quad Q_\nu=\int PI_\nu \mathrm{d}p\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}I_\nu \quad \text{et} \quad W_v=\int P\mathrm{d}p\mathrm{d}\boldsymbol{p}\mathrm{d}I_\nu.$$

Le traitement de l'équation de transfert généralisée se fait exactement comme dans le cas de l'équilibre thermodynamique local, puisque les effets des populations des niveaux sont inclus dans la fonction source S_ν et dans le profil d'absorption et d'émission ϕ (voir le chapitre **XVIII**). De même, on peut introduire l'intensité conditionnelle $q_\nu = Q_\nu/W_v$ dont l'équation est toujours

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial \tau}=\frac{1}{\tau_v}\left(-u\frac{\partial q_\nu}{\partial u}+\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial u^2}\right)-\phi(q_\nu-S_\nu).$$

Comme c'est cette dernière quantité qu'on va en fait considérer, il convient de noter que les équations des populations peuvent s'écrire, en factorisant par la distribution des vitesses,

$$\sum_j \left[n_j\left(C_{jk}+A_{jk}\right)-n_k\left(C_{kj}+A_{kj}\right)\right]+\left[n_jB_{jk}-n_kB_{kj}\right]\frac{1}{4\pi}\int \phi q_\nu \mathrm{d}\Omega=0. \tag{100}$$

Il faut noter que, dans cette approche, les nombres d'occupation $\{n_k\}$ ne dépendent plus seulement de la position z, mais également de la vitesse.

XIX.4.d Implémentation numérique

Comme on l'a déjà évoqué, le milieu étudié est nécessairement unidimensionnel, au sens où les variations considérée ne peuvent se produire que selon un axe z, ce qui n'empêche pas de considérer une couche turbulente comme on l'a fait au chapitre **X**, dès lors que celle ci est homogène transversalement, dans le plan (Ox, Oy). On peut alors inclure le traitement des rayons inclinés d'un angle θ sur l'axe z en faisant le simple changement de variable

$$\mathrm{d}\tau \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\tau}{\mu} \quad \text{avec} \quad \mu=\cos\theta \quad \text{ce qui ne change pas fondamentalement les équations.}$$

Numériquement, [Gail *et al.*, 1975] traite le problème en choisissant un ensemble de fréquences $(\nu_1, \ldots, \nu_M)$ et de cosinus directeurs $(\mu_1, \ldots, \mu_P)$, et en résolvant le système de $M \times P$ équations aux dérivées partielles sur l'intensité conditionnelle, simultanément avec les équations des populations et la conservation des particules. Les conditions initiales du système sont obtenues en supposant que l'intensité conditionnelle incidente à l'arrière de la couche suit une fonction de Planck, pour une certaine température T_0, et qu'il n'existe pas de rayonnement incident au niveau de la face de sortie. En effet, la résolution proposée par [Gail *et al.*, 1975] consiste à séparer les rayons se déplacant vers le demi espace $z > 0$ de ceux allant dans le sens opposé. On a donc en fait deux systèmes de $M \times P/2$ équations de transfert, et il faut une condition initiale pour chacun de ces systèmes. Les conditions aux limites sont données pour les vitesses tendant vers l'infini, et spécifient que l'intensité conditionnelle devient alors égale à l'intensité du continu à la même fréquence.

[10] Sans quoi l'on se ramène à l'approche "rigide" évoquée plus haut.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

On ne détaillera pas ici la méthode suggérée par [Gail *et al.*, 1975] pour résoudre ces systèmes. On se contentera de remarquer qu'elle revient à partir d'une estimation (par exemple issue d'un modèle à l'ETL) des intensités conditionnelles correspondant à $\mu < 0$, puis, en se déplacant le long de l'axe z, à calculer les intensités correspondant à $\mu > 0$. La combinaison des intensités pour tous les angles est alors utilisée pour calculer le champ de rayonnement au point z et donc les populations. Après avoir atteint le bord extérieur du nuage on recommence en sens inverse jusqu'à obtenir la convergence. Par comparaison, la méthode de [Albrecht & Kegel, 1987] consiste à se donner une estimation des populations dans tout l'espace, à en déduire les coefficients d'absorption et la fonction source, qu'on utilise ensuite pour résoudre le système d'équations de transfert. Les intensités ainsi calculées donnent de nouvelles estimations des populations $\{n_k\}$, et on itère le processus jusqu'à atteindre un critère de convergence spécifié à l'avance.

XIX.4.e Résultats et analyse

Les premières simulations numériques de ce modèle hors équilibre thermodynamique local sont présentées par [Gail *et al.*, 1975] dans le cadre d'une approximation à deux niveaux et à deux rayons ($\mu = \pm 1$) de la transition à 5576 Å du fer atomique, déjà utilisée par [Gail & Sedlmayr, 1974]. Le paramètre caractérisant alors le caractère hors-ETL du modèle est le rapport $\varepsilon = C_{21}/A_{21}$ de dépopulation par collisions du niveau supérieur. On montre en effet que les équations de transfert généralisées incluent des termes de couplage entre les différentes fréquences et les différents angles, termes qui sont proportionnels à $(1+\varepsilon)^{-1}$, de sorte que si ε est grand devant un[11], on a en fait un simple système d'équations exactement identiques à celles du cas de l'ETL. En revanche, si ε est inférieur ou de l'ordre de un, il faut traiter le cas hors-ETL.

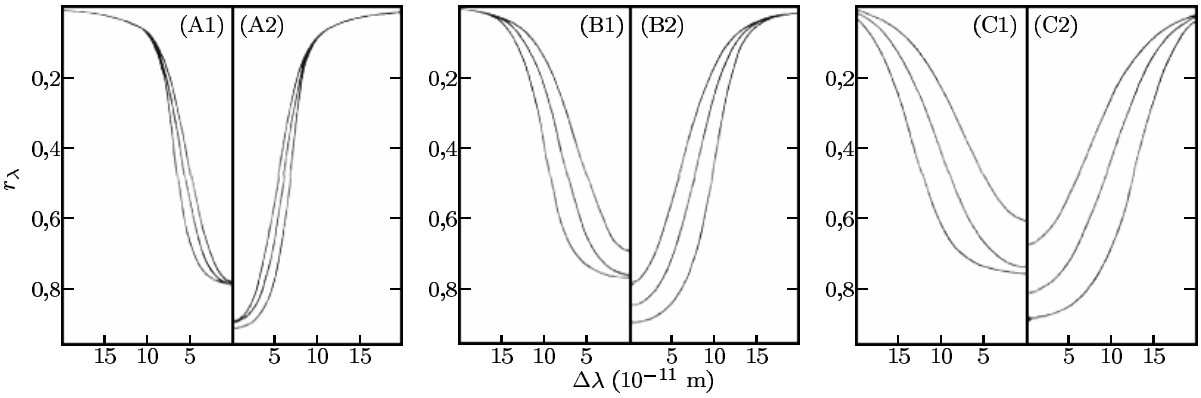

FIG. **XIX.**4 – *Profils de raies d'absorption du* Fe I *à 5576* Å, *dans le cas de vitesses turbulentes* $\sigma_v = 1$ km s^{-1} *(figures* A1 *et* A2*),* $\sigma_v = 2$ km s^{-1} *(figures* B1 *et* B2*) et* $\sigma_v = 3$ km s^{-1} *(figures* C1 *et* C2*). Les figures* A1, B1 *et* C1 *correspondent à l'ETL, les figures* A2, B2 *et* C2 *au cas hors-ETL. Sur chacune des sous-figures, les trois courbes représentent, de bas en haut, les profils d'absorption dans le cas des longueurs de corrélation* $l_v = 10$ km, $l_v = 100$ km *et* $l_v = 1000$ km, *respectivement. Figure issue de [Gail et al., 1975].*

La figure **XIX.**4 montre, pour trois valeurs différentes de la vitesse turbulente σ_v et trois longueurs de corrélation l_v, la comparaison entre les cas ETL et hors-ETL, telle que calculée par [Gail *et al.*, 1975]. Sur chaque sous-figure, le profil le plus profond correspond au cas microturbulent. Que l'on soit dans le cas de l'équilibre thermodynamique local ou pas, on constate que les profils d'absorption sont de moins en moins profonds et de moins en moins larges quand la longueur de corrélation augmente, comme on l'avait remarqué au **XIX.3.b**. D'autre part, à l_v et σ_v identiques, le profil hors-ETL est plus profond que le profil ETL correspondant, en tous les cas au centre de la raie. On remarque en revanche que les ailes de raies sont sensiblement identiques dans les deux cas, ce qui suggère que celles-ci sont toujours formées à l'ETL.

XIX.4.f Le cas de l'émission de molécules CO

Albrecht et Kegel [Albrecht & Kegel, 1987] ont utilisé le modèle qu'on vient de décrire pour calculer numériquement les profils en émission de raies du monoxyde de carbone, modélisé par une molécule à six

[11] Ce qui signifie que les processus collisionnels dominent les processus radiatifs.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

niveaux d'énergie. Cette approximation décrivant relativement bien le diagramme d'énergie de CO, les profils obtenus sont pertinents pour l'étude des raies du monoxyde de carbone interstellaire.

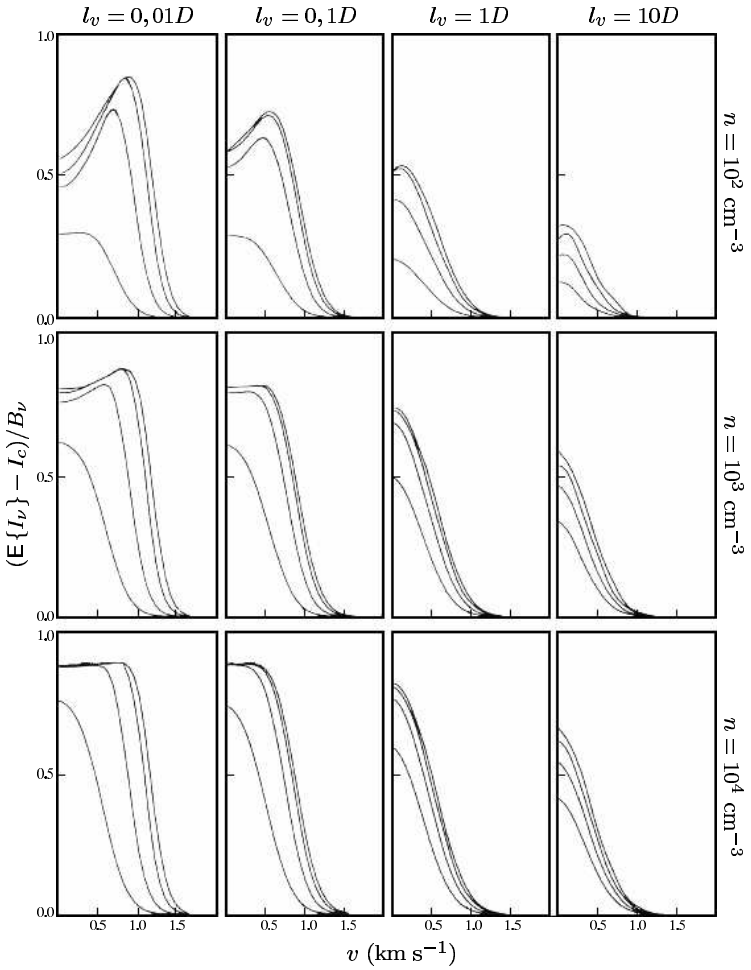

FIG. **XIX**.5 – *Profils de raie calculés pour la transition $J = 1 \rightarrow 0$ du monoxyde de carbone. La vitesse turbulente σ_v est prise égale à $3\sigma_{\mathrm{th}}$, pour $T_k = 10$ K. Les différentes sous-figures correspondent à différentes valeurs de la densité n et de la longueur de corrélation l_v, comme indiqué en regard, en rappelant que D est la profondeur de la couche turbulente. Sur chacune des sous-figures, les quatre courbes correspondent aux différentes densités de colonne de* CO *considérées, soit $N_{\mathrm{CO}} = 10^{16}$ cm^{-2}, $N_{\mathrm{CO}} = 10^{17}$ cm^{-2}, $N_{\mathrm{CO}} = 10^{18}$ cm^{-2} et $N_{\mathrm{CO}} = 10^{19}$ cm^{-2}, en partant de la raie la moins intense. Figure issue de [Albrecht & Kegel, 1987].*

On ne reviendra évidemment pas sur l'établissement de l'équation de transfert généralisée ni des équations régissant les populations des niveaux. La procédure numérique a également été décrite un peu plus haut, pour un modèle de nuage constitué d'une couche turbulente homogène[12] de largeur D. À la différence de [Gail *et al.*, 1975], le nuage est ici illuminé des deux côtés par le rayonnement du fond diffus cosmologique, lequel constitue en moyenne une fraction importante du rayonnement ambiant aux fréquences des transitions rotationnelles de CO. D'autre part, les faibles densités du milieu interstellaire justifient de prendre une gaussienne comme profil d'absorption et d'émission ϕ.

Les paramètres du problème sont la densité volumique n de particules, à savoir essentiellement celle des molécules de dihydrogène, la température cinétique T_k, la densité de colonne[13] du monoxyde de carbone N_{CO}, et bien entendu les paramètres σ_v et l_v du champ de vitesse. En ce qui concerne leurs influences respectives, on remarquera que la densité du gaz n'intervient qu'au travers des probabilités de transition

[12]Ici, homogène signifie qu'il n'existe pas de fluctuations de densité, à ne pas confondre avec le caractère homogène de la turbulence évoqué dans le chapitre **X**.

[13]L'abondance de CO par rapport à H_2 est fixée, dans le modèle, à 10^{-5}.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

collisionnelle[14]. La température cinétique, elle, détermine d'une part la largeur des coefficients d'absorption, et d'autre part les taux de collision, et donc les coefficients C_{jk}. Par ailleurs, la densité de colonne de CO joue d'un côté sur la probabilité d'échappement des photons (qui diminue lorsque $N_{\rm CO}$ augmente) et d'un autre côté sur l'émission des raies à haut J. En effet, lorsque les raies correspondant aux niveaux de basse énergie deviennent optiquement épaisses à grande densité de colonne, les niveaux excités correspondant sont plus facilement peuplés du fait des émissions et absorptions multiples, ce qui permet alors d'exciter les niveaux plus élevés. Enfin, on a déjà discuté de l'influence des paramètres du champ de vitesse au **XIX.3**.

Les figures **XIX**.5 et **XIX**.6 montrent certains des résultats obtenus par [Albrecht & Kegel, 1987], pour la transition $J = 1 \rightarrow 0$, la température cinétique étant égale à $T_k = 10$ K. Sur la figure **XIX**.5, on voit les profils de raie tracés pour différentes valeurs de la longueur de corrélation, de la densité de colonne de CO, et de la densité n du dihydrogène. La vitesse turbulente caractéristique est ici fixée à $\sigma_v = 3\sigma_{\rm th}$, où $\sigma_{\rm th}$ est la dispersion de vitesse thermique. Sur ces profils, on remarque l'autoabsorption au centre de la raie, qui est particulièrement marquée dans le cas des plus petites longueurs de corrélation, mais qui disparaît presque complètement lorsque l_v augmente, ce qui pourrait expliquer le fait qu'en pratique on n'observe que très peu d'autoabsorption dans les raies interstellaires, contrairement à ce que prédisent les modèles hors-ETL microturbulents. D'autre part, les profils sont plus intenses et plus larges dans le cas des petites longueurs de corrélation, ce qui corrobore les résultats obtenus par [Gail *et al.*, 1975] pour des raies en absorption.

La figure **XIX**.6 présente quant à elle les courbes de croissance de cette transition, correspondant aux mêmes densités n et à la même température cinétique. On considère deux valeurs pour la vitesse turbulente, soit $\sigma_v = \sigma_{\rm th}$ et $\sigma_v = 3\sigma_{\rm th}$. Chaque sous-figure regroupe les courbes de croissance calculées pour différentes longueurs de corrélation, tous autres paramètres étant égaux par ailleurs. Si l'interprétation de ces courbes, ainsi que des profils de raie, est assez délicate, on remarque quoi qu'il en soit que la valeur de la longueur de corrélation de la vitesse en modifie sensiblement l'aspect, ce qui suggère que l'interprétation des raies interstellaires doive en tenir compte pour accéder aux propriétés physiques des nuages.

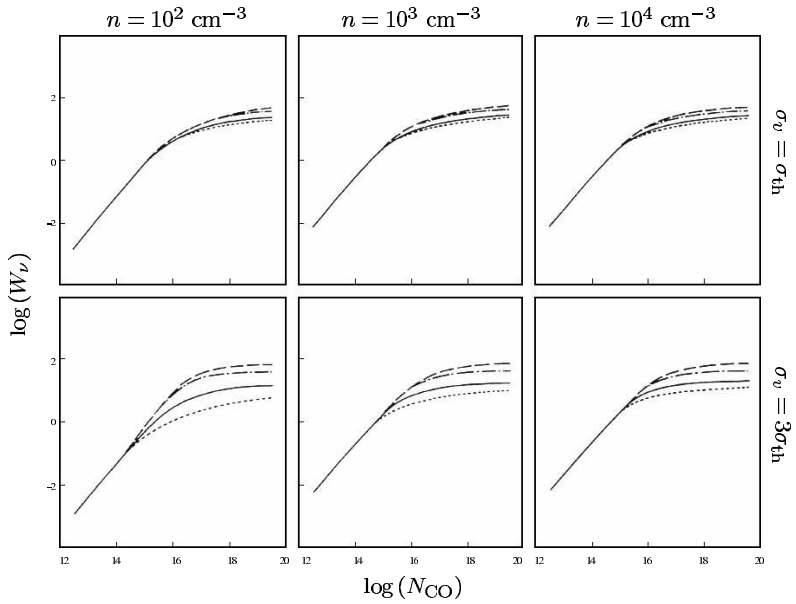

FIG. **XIX**.6 – *Courbes de croissance théoriques de la transition $J = 1 \rightarrow 0$ du monoxyde de carbone, calculées pour une température cinétique $T_k = 10$ K. La première ligne correspond au cas $\sigma_v = \sigma_{\rm th}$, la seconde à $\sigma_v = 3\sigma_{\rm th}$. Les différentes sous-figures regroupent les courbes obtenues pour les valeurs $l_v = 0,01D$ (tirets), $l_v = 0,1D$ (trait mixte), $l_v = D$ (trait plein) et $l_v = 10D$ (pointillés) de la longueur de corrélation, la densité n variant d'une sous-figure à l'autre, comme indiqué. Figure issue de [Albrecht & Kegel, 1987].*

[14]La densité critique de H_2 au-delà de laquelle les processus collisionnels dominent est d'environ 10^5 cm^{-3}.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XIX.5 Cas d'un milieu présentant des fluctuations de densité

XIX.5.a Introduction

Le milieu moléculaire froid et dense, dans lequel se forment les raies de CO discutées à la section précédente, présente une structure hétérogène en densité (voir le chapitre **II**). Or on vient de voir, dans le cas d'une couche homogène, que cette densité influe assez nettement sur les profils des raies. Il semble donc raisonnable, dans une nouvelle étape de généralisation du modèle de [Gail *et al.*, 1974], de chercher à inclure les effets d'un champ stochastique décrivant la densité n du dihydrogène dans le nuage. C'est ce que proposent Hegmann et Kegel [Hegmann & Kegel, 2000], tout en notant qu'il existe des modèles de transfert radiatif dans des milieux hétérogènes[15]. Mis à part cette amélioration, le travail de [Hegmann & Kegel, 2000] repose sur le même modèle de couche turbulente que [Albrecht & Kegel, 1987], et ils s'intéressent également aux raies d'émission de CO, représenté par un rotateur rigide à six niveaux d'énergie. On va maintenant décrire le champ de densité stochastique qu'ils introduisent, avant de donner quelques résultats.

XIX.5.b Champ de densité stochastique

Le modèle de [Gail *et al.*, 1974] reposait sur l'idée que l'équation de transfert pouvait se voir comme une équation de Langevin, dont le terme stochastique pur est nul, et qu'en prenant un champ de vitesse obéissant également à une équation de Langevin, on pouvait alors dériver une équation de Fokker-Planck portant sur la probabilité jointe de la vitesse et de l'intensité.
De même, si l'on introduit un champ de densité dont l'évolution le long de la ligne de visée est régi par une équation de Langevin, on pourra appliquer le même formalisme pour la probabilité jointe des trois variables intensité spécifique, densité et vitesse. Le problème qui se pose alors est de contraindre la positivité de la densité, ce que ne permet pas *a priori* l'équation de Langevin. On s'en sort en prenant comme variable, non pas la densité n proprement dite, mais son logarithme, en posant

$$\tilde{n} = \ln\left(\frac{n}{n_0}\right) \quad \text{où } n_0 \text{ est une densité de référence.}$$

C'est cette densité logarithmique qui est alors décrite par une équation de Langevin identique à celle régissant la vitesse, et caractérisée par une dispersion $\sigma_{\tilde{n}}$ et une longueur de corrélation $l_{\tilde{n}}$, qui sont des constantes indépendantes des autres paramètres du problème,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}z} = -\frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{n}}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}}{\sqrt{l_{\tilde{n}}}}\Gamma_{\tilde{n}}(z) \quad \text{avec} \quad \langle\Gamma_{\tilde{n}}(z)\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle\Gamma_{\tilde{n}}(z)\Gamma_{\tilde{n}}(z')\rangle = 2\delta(z-z')$$

Remarquons qu'étant donné ce qui a été dit au chapitre **VIII**, la distribution des densités logarithmiques est gaussienne, comme la distribution des vitesses. Par conséquent, la distribution de la densité est lognormale, ce qu'on illustre sur la figure **XIX**.7, laquelle montre également des exemples de champs de densité le long d'une ligne de visée, pour deux valeurs de la dispersion $\sigma_{\tilde{n}}$.
On remarque notamment que plus cette dispersion est élevée, plus le gaz a tendance a être regroupé dans des entités denses, séparées les unes des autres par des régions peu denses. L'échelle caractéristique de variation de la densité est quant à elle donnée par la longueur $l_{\tilde{n}}$. Notons enfin que la densité moyenne le long de la ligne de visée est reliée à la densité de référence par

$$\mathsf{E}\{n\} = n_0 \exp\left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2}\right) \quad \text{et en pratique c'est elle qu'on se donnera, plutôt que } n_0.$$

XIX.5.c Équation de transfert généralisée

Suivant ce qui a été fait au **XIX.2.c**, on considère la probabilité $P(v, \tilde{n}, I_\nu; z)\mathrm{d}v\mathrm{d}\tilde{n}\mathrm{d}I_\nu$ pour qu'au point z la vitesse, la densité logarithmique et l'intensité aient respectivement pour valeurs v à $\mathrm{d}v$ près, $\tilde{n}$ à $\mathrm{d}\tilde{n}$ près,

[15] Toutefois, ces hétérogénéités sont représentées par un nombre fini de phases homogènes distinctes [Juvela, 1997].

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

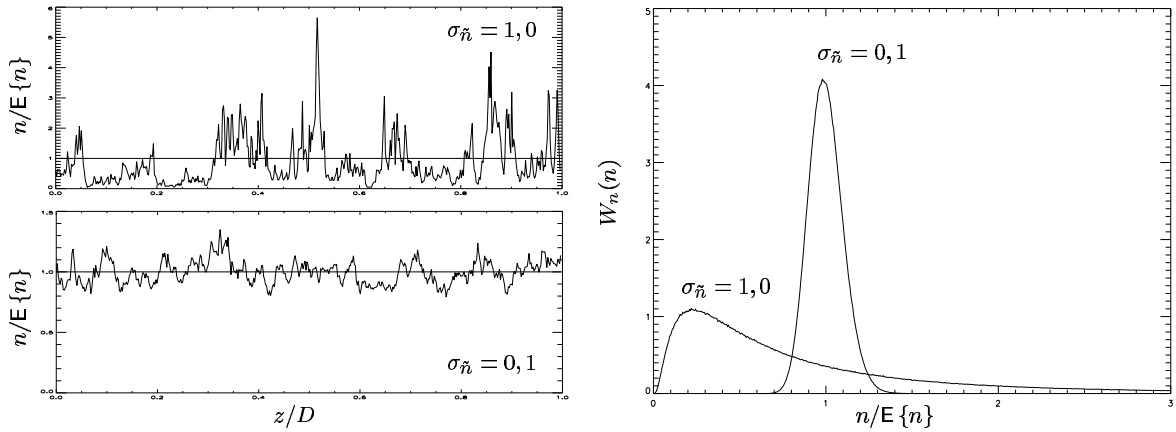

FIG. **XIX.**7 – *Exemples de champs de densité le long d'une ligne de visée (à gauche pour deux valeurs de la dispersion $\sigma_{\tilde{n}}$) et distributions de probabilité correspondantes (à droite). Figure reproduite d'après [Hegmann & Kegel, 2000].*

et I_ν à $\mathrm{d}I_\nu$ près. Étant donné que les différentes équations de Langevin portant sur ces trois variables ne sont pas couplées, l'équation de Fokker-Planck portant sur P est simplement[16]

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{l_v}\frac{\partial(vP)}{\partial v} + \frac{\sigma_v^2}{l_v}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \frac{1}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial(\tilde{n}P)}{\partial \tilde{n}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{\partial}{\partial I_\nu}\left[\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu)P\right], \tag{101}$$

où, par rapport à l'équation (98), on a juste ajouté les termes correspondant à la variable $\tilde{n}$, dont la forme est identique à celle des termes se rapportant à la vitesse. On n'introduira pas ici la vitesse réduite ou la profondeur optique, et les quantités Q_ν et q_ν seront cette fois dépendantes des variables z, v et $\tilde{n}$. En particulier, l'équation de transfert généralisée pour l'intensité conditionnelle q_ν est

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial z} = \frac{1}{l_v}\left(-v\frac{\partial q_\nu}{\partial v} + \sigma_v^2\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{l_{\tilde{n}}}\left(-\tilde{n}\frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}} + \sigma_{\tilde{n}}^2\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2}\right) - \kappa_\nu\left(q_\nu - S_\nu\right) \tag{102}$$

Remarquons que l'espérance de l'intensité spécifique est maintenant donnée, en fonction de Q_ν - ou de q_ν - par une intégrale portant non seulement sur la vitesse, comme c'était le cas jusqu'à présent, mais également sur la densité logarithmique,

$$\mathsf{E}\{I_\nu\} = \iint Q_\nu(v,\tilde{n};z)\mathrm{d}v\mathrm{d}\tilde{n} = \iint q_\nu(v,\tilde{n};z)W_v(v)W_{\tilde{n}}(\tilde{n})\mathrm{d}v\mathrm{d}\tilde{n}$$

Dans le cas hors ETL, l'équation de transfert généralisée (102) doit être résolue simultanément avec les équations (100) donnant l'évolution des populations des niveaux, équations qui restent inchangées, si ce n'est que les nombres d'occupation dépendent maintenant aussi de la densité logarithmique $\tilde{n}$, en plus de la position et de la vitesse.

XIX.5.d Résultats

Le modèle utilisé par [Hegmann & Kegel, 2000] est le même que celui de [Albrecht & Kegel, 1987], soit une couche turbulente bidimensionnelle, homogène transversalement, et illuminée de chaque côté par le rayonnement du fond cosmologique. La température cinétique choisie est $T_k = 10$ K, et les densités moyennes du dihydrogène sont comprises entre 10^3 et 10^4 cm^{-3}, l'abondance du monoxyde de carbone étant fixée à 8.10^{-5}, valeur donnée par [Black & Willner, 1984]. Pour commencer, [Hegmann & Kegel, 2000] observe les effets de la seule structure en densité[17], en prenant l'exemple d'un champ de vitesse microturbulent. Il apparaît que cette structure affecte bien le transfert radiatif, car, tout en se plaçant dans les conditions de

[16]Puisque les variables ne sont pas couplées, les coefficients de diffusion associés à deux variables distinctes sont nuls.
[17]Les effets de la turbulence sont alors assimilables à l'élargissement thermique.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

l'ETL, l'intensité spécifique au centre de la raie $J = 1 \rightarrow 0$ diminue lorsqu'une des deux quantités $\sigma_{\tilde{n}}$ ou $l_{\tilde{n}}$ augmente, ce qu'on interprète en notant que les fortes valeurs de $\sigma_{\tilde{n}}$ conduisent à des lignes de visée sur lesquelles le gaz est essentiellement concentré dans des nuages petits et denses, séparés les uns des autres par une distance de l'ordre de $l_{\tilde{n}}$. Dans ce cas, on a un effet de dilution du rayonnement qui atténue la raie observée. D'autre part, les hétérogénéités de la densité ont également une influence sur les populations des niveaux, puisque les taux de collision dépendent directement de n^2. Plus $\sigma_{\tilde{n}}$ est grande, plus la fraction de gaz contenue dans des nuages denses est forte, et plus on se rapproche des conditions de l'ETL. C'est bien ce qu'observe [Hegmann & Kegel, 2000].

La prise en compte d'un champ de vitesse turbulent possédant une longueur de corrélation finie aboutit à des profils de raie présentés sur les figures **XIX**.8 et **XIX**.9, correspondant respectivement aux transitions $J = 1 \rightarrow 0$ et $J = 4 \rightarrow 3$. Dans les deux cas, la densité de colonne du monoxyde de carbone est $N_{\mathrm{CO}} = 2,4.10^{18}$ cm^{-2}, la densité moyenne du gaz est $\mathsf{E}\{n\} = 10^3$ cm^{-3} et la vitesse caractéristique de la turbulence est $\sigma_v = 10\sigma_{\mathrm{th}}$. Les profils correspondant aux mêmes valeurs de $l_{\tilde{n}}$ et l_v, qui sont prises entre 10^{17} et $2,5.10^{18}$ cm, sont regroupés, les différentes courbes d'une même sous-figure représentant les différentes valeurs de la dispersion de la densité logarithmique, à savoir $\sigma_{\tilde{n}} = 0,1$, $\sigma_{\tilde{n}} = 1,0$ et $\sigma_{\tilde{n}} = 2,0$.

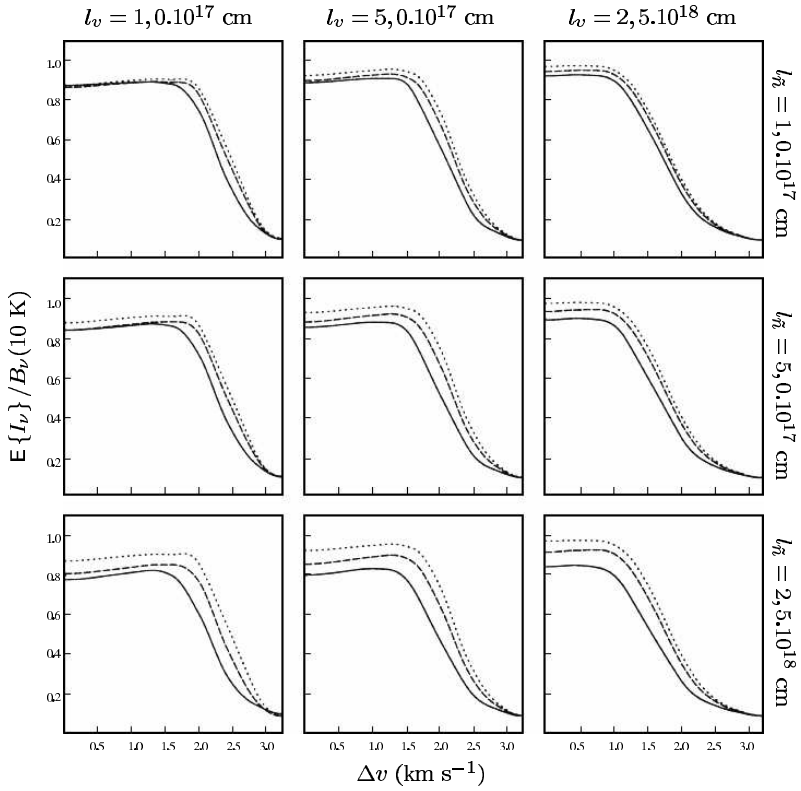

FIG. **XIX**.8 – *Profils de raie pour la transition $J = 1 \rightarrow 0$ du monoxyde de carbone, calculés pour une température cinétique $T_k = 10$ K, une densité moyenne $\mathsf{E}\{n\} = 10^3$ cm^{-3}, une densité de colonne $N_{\mathrm{CO}} = 2,4.10^{18}$ cm^{-2} et une vitesse turbulente $\sigma_v = 10\sigma_{\mathrm{th}}$. La longueur de corrélation de la densité augmente de haut en bas, celle de la vitesse augmente de gauche à droite, chaque sous-figure correspondant à une combinaison $(l_{\tilde{n}}, l_v)$. Les courbes regroupées sur une sous-figure représentent les différentes valeurs de la dispersion, $\sigma_{\tilde{n}} = 0,1$ (pointillés), $\sigma_{\tilde{n}} = 1,0$ (tirets) et $\sigma_{\tilde{n}} = 2,0$ (trait plein). Figure issue de [Hegmann & Kegel, 2000].*

On remarque notamment que les profils de la raie $J = 4 \rightarrow 3$ sont plus intenses lorsque $\sigma_{\tilde{n}}$ augmente, ce qu'on interprète en disant que, dans ce cas de figure, les nuages denses présents dans le milieu favorisent les transitions collisionnelles vers les niveaux de J élevé, et donc les désexcitations radiatives correspondantes. À l'inverse, et comme on l'a déjà suggéré, la raie $J = 1 \rightarrow 0$ devient plus faible quand $\sigma_{\tilde{n}}$ augmente. D'autre part, l'autoabsorption au centre de la raie pour les faibles valeurs de l_v sur la figure **XIX**.8 disparaît quand cette longueur de corrélation augmente.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

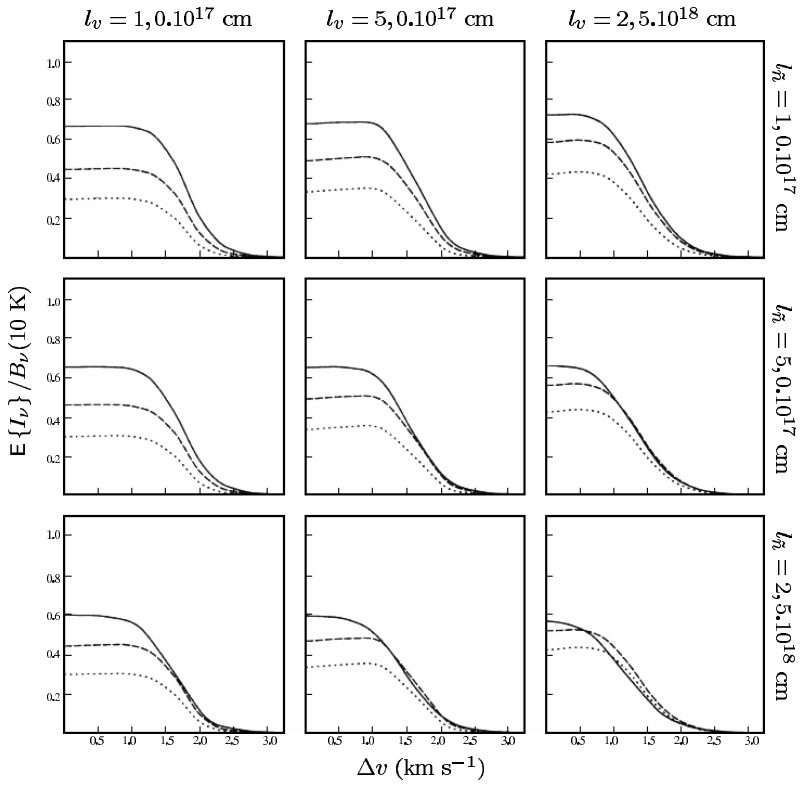

FIG. **XIX**.9 – *Profils de raie pour la transition $J = 4 \rightarrow 3$ du monoxyde de carbone. Les paramètres et la disposition des figures sont identiques à ceux de la figure* **XIX**.8. *Figure issue de [Hegmann & Kegel, 2000].*

En résumé, les raies de bas J sont en général atténuées par l'existence d'un champ de densité stochastique, et ce d'autant plus que les longueurs de corrélation $l_{\tilde{n}}$ et l_v sont grandes (voir la figure **XIX**.8). Au contraire, on observe que les raies de haut J sont renforcées par les hétérogénéités de densité. En ce qui concerne l'influence d'un champ de vitesse ayant une longueur de corrélation finie, on a noté l'atténuation des effets d'autoabsorption, de sorte que les raies semblent saturer bien qu'on ne soit pas à l'ETL. Encore une fois, ces résultats montrent que l'interprétation des raies interstellaires ne peut pas être faite correctement sans prendre en compte la structure des champs de densité et de vitesse.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

CHAPITRE XX

Cas des corrélations densité-vitesse

XX.1 Introduction

Comme on vient de le voir au chapitre **XIX**, l'existence de champs de densité et de vitesse stochastiques dans les nuages moléculaires peut notablement affecter la forme des raies qu'on y observe, en particulier des raies rotationnelles de CO, dont l'importance est fondamentale pour l'étude des propriétés physiques de ces nuages. Il se pose alors la question de savoir de quelle façon on pourrait rendre ce modèle encore plus réaliste, de manière à en observer les effets sur la formation des raies.
Or, le modèle de [Hegmann & Kegel, 2000] présente le défaut d'ignorer totalement l'existence de corrélations entre les champs de densité et de vitesse. Il semble donc que l'introduction de telles corrélations puisse constituer une étape supplémentaire, à la fois raisonnable et réaliste, de complexification du problème du transfert radiatif stochastique tel que décrit par le modèle de Gail *et al* [Gail *et al.*, 1974], généralisé par [Hegmann & Kegel, 2000]. C'est l'objectif de ce chapitre que d'introduire ces corrélations.
Dans cette optique, la prise en compte des contraintes hydrodynamiques au sein du gaz interstellaire peut se faire par exemple en reliant la densité du gaz à la dispersion locale des vitesses, ce que nous ferons au **XX.2.b**. Ainsi, tout en restant dans le cadre formel de champs décrits par des équations de Langevin, il doit être clair dès maintenant que les équations portant sur $\tilde{n}$ et v ne pourront plus être indépendantes, comme c'était le cas jusqu'à présent. L'équation de transfert généralisée en sera probablement modifiée, d'autant que son écriture (102) a été obtenue en faisant implicitement l'hypothèse qu'on pouvait écrire la densité de probabilité jointe $W(v,\tilde{n})$ comme le produit des densités de probabilité associées à chacune des variables $\tilde{n}$ et v, ce qui n'est *a priori* plus possible dès lors qu'on introduit des corrélations entre la densité et la vitesse.

XX.2 Équation d'évolution de l'intensité conditionnelle

XX.2.a Forme générale de l'équation d'évolution de l'intensité moyenne

Pour simplifier l'approche, on conservera les équations d'évolution de la vitesse et de la densité logarithmique le long de la ligne de visée, telles qu'introduites par [Gail *et al.*, 1974] et [Hegmann & Kegel, 2000]. Cependant, étant donné que l'équation de transfert généralisée est susceptible d'être modifiée par la présence de corrélations entre la densité et la vitesse, il ne semble pas superflu de repartir de formes très générales pour les équations de Langevin décrivant ces deux champs, et d'en dériver l'équation d'évolution de l'intensité moyenne Q_ν, qu'on simplifiera ensuite en revenant aux équations de Langevin spécifiées par [Hegmann & Kegel, 2000].

Équation portant sur la densité de probabilité tridimensionnelle

La forme générale des équations de Langevin portant sur $\tilde{n}$ et v est obtenue en supposant que les paramètres des équations sont des fonctions de $\tilde{n}$ et v, ainsi que de la position z,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}z} = h_{\tilde{n}}(v,\tilde{n};z) + g_{\tilde{n}}(v,\tilde{n};z)\Gamma_{\tilde{n}}(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = h_v(v,\tilde{n};z) + g_v(v,\tilde{n};z)\Gamma_v(z).$$

On reconnaît là une forme déjà simplifiée des équations de Langevin (32), en ce sens qu'on suppose que les éléments non-diagonaux de la matrice $\boldsymbol{g}$ sont nuls. On fait cette hypothèse pour ne pas trop alourdir les notations et l'expression finale de l'équation sur q_ν, et parce que les équations qu'on utilisera *in fine* sont de ce type. Les forces de Langevin $\Gamma_{\tilde{n}}$ et Γ_v possèdent les propriétés décrites au chapitre **VIII**, c'est-à-dire

qu'il s'agit de processus gaussiens indépendants, avec

$$\mathsf{E}\{\Gamma_v(z_1)\ldots\Gamma_v(z_{2n-1})\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\{\Gamma_v(z_1)\ldots\Gamma_v(z_{2n})\} = 2^n\left[\sum_{P_n}\delta(z_{i_1}-z_{i_2})\ldots\delta(z_{i_{2n-1}}-z_{i_{2n}})\right],$$

en rappelant que P_n est l'ensemble des $(2n)!/(2^n n!)$ permutations de $(1,2,\ldots,2n)$ ne laissant pas invariant le produit des distributions de Dirac. On a bien sûr la même propriété pour $\Gamma_{\tilde{n}}$.
En rapprochant les deux équations d'évolution de $\tilde{n}$ et v de l'équation de transfert classique, on peut traiter le problème dans le cadre général des équations de Langevin non-linéaires à plusieurs variables. Dans notre cas, le vecteur composé des divers processus stochastiques considérés est $\boldsymbol{X} = (v, \tilde{n}, I_\nu)$, et les fonctions h_i et g_{ij} apparaissant dans les équations (32) s'écrivent respectivement

$$h_1 = h_{\tilde{n}} \qquad h_2 = h_v \qquad h_3 = -\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu) \qquad g_{11} = g_{\tilde{n}} \qquad g_{22} = g_v \quad \text{et} \quad g_{33} = 0,$$

les éléments non diagonaux de la matrice $\boldsymbol{g}$ étant nuls, comme on l'a déjà souligné. À partir de ces expressions, on peut en déduire directement l'équation de Fokker-Planck régissant l'évolution, le long de la ligne de visée, de la densité de probabilité tridimensionnelle $P(v, \tilde{n}, I_\nu; z)$, en suivant la méthode décrite au chapitre **VIII**. Pour l'écrire, il nous suffit de calculer les coefficients de dérive et de diffusion, ce qui est immédiat à partir des formules (35),

$$D_1 = h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}}\frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}} \qquad D_2 = h_v + g_v\frac{\partial g_v}{\partial v} \qquad D_3 = -\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu) \qquad D_{1,1} = g_{\tilde{n}}^2 \qquad D_{2,2} = g_v^2 \qquad D_{3,3} = 0,$$

les coefficients de diffusion non diagonaux étant nuls du fait que la matrice $\boldsymbol{g}$ est elle-même diagonale. Insérant ces expressions dans l'équation de Fokker-Planck (31), on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}\left[\left(h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}}\frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}}\right)P\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(h_v + g_v\frac{\partial g_v}{\partial v}\right)P\right] + \frac{\partial}{\partial I_\nu}\left[\kappa_\nu(I_\nu - S_\nu)P\right] + \frac{\partial^2\left(g_{\tilde{n}}^2 P\right)}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{\partial^2\left(g_v^2 P\right)}{\partial v^2}.$$

On montre sans difficulté qu'en remplaçant $h_{\tilde{n}}$, $g_{\tilde{n}}$, h_v et g_v par leurs valeurs dans le cas considéré par [Hegmann & Kegel, 2000], on retrouve leur équation, donnée au chapitre **XIX** par l'équation (101).

Équation portant sur l'intensité moyenne

Suivant toujours la méthode de [Hegmann & Kegel, 2000], l'étape suivante consiste à définir l'espérance de l'intensité, laquelle dépend non seulement de la position sur la ligne de visée, mais également de la vitesse et de la densité logarithmique. Explicitement, on pose

$$Q_\nu(v, \tilde{n}; z) = \int P(v, \tilde{n}, I_\nu; z) I_\nu \mathrm{d}I_\nu, \quad \text{et on cherche à déterminer son équation d'évolution.}$$

Dans ce but, on multiplie l'équation portant sur la densité de probabilité P par l'intensité spécifique I_ν, avant d'intégrer sur cette même variable. En utilisant l'intégration par parties décrite au **XIX.2.c**, on obtient alors l'expression suivante

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}\left[\left(h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}}\frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}}\right)Q_\nu\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(h_v + g_v\frac{\partial g_v}{\partial v}\right)Q_\nu\right] - \kappa_\nu(Q_\nu - S_\nu W) + \frac{\partial^2\left(g_v^2 Q_\nu\right)}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\left(g_{\tilde{n}}^2 Q_\nu\right)}{\partial \tilde{n}^2}$$

Cette équation est l'équation de transfert dans le cas le plus général considéré ici. Elle fait intervenir la densité de probabilité jointe pour la densité logarithmique et la vitesse longitudinale,

$$W(v, \tilde{n}; z) = \int P(v, \tilde{n}, I_\nu; z)\mathrm{d}I_\nu,$$

dont on remarque qu'elle vérifie également une équation de Fokker-Planck, qu'on peut d'ailleurs écrire directement, puisqu'elle est associée au processus stochastique bidimensionnel $\boldsymbol{Y} = (v, \tilde{n})$, lequel est déjà parfaitement déterminé en termes de coefficients de dérive et de diffusion,

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}\left[\left(h_{\tilde{n}} + g_{\tilde{n}}\frac{\partial g_{\tilde{n}}}{\partial \tilde{n}}\right)W\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(h_v + g_v\frac{\partial g_v}{\partial v}\right)W\right] + \frac{\partial^2\left(g_{\tilde{n}}^2 W\right)}{\partial \tilde{n}^2} + \frac{\partial^2\left(g_v^2 W\right)}{\partial v^2}. \tag{103}$$

Cette remarque n'est pas que formelle, car on se servira de cette équation dans la suite.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

XX.2.b Forme des corrélations densité-vitesse

Avant de résoudre cette équation de transfert généralisée, on va d'abord expliciter les formes que vont prendre les corrélations entre les champs de densité et de vitesse. Si l'on se penche sur ce problème maintenant, alors qu'on n'a pas encore écrit l'équation gouvernant l'évolution de l'intensité conditionnelle q_ν, c'est que les expressions deviennent extrêmement lourdes dans le cas général qu'on a utilisé jusqu'ici. On va donc introduire les formes spécifiques que nous allons utiliser dans la suite. Il n'est pas déraisonnable, en vue d'imposer une corrélation entre les champs de densité et de vitesse, de supposer que le gaz suit une équation d'état polytropique, selon laquelle la pression turbulente varie comme une puissance de la densité, soit $P_{\rm turb} \propto n^\gamma$. Comme d'autre part, cette pression turbulente est liée à la dispersion locale du champ de vitesses σ_v par $P_{\rm turb} \propto n\sigma_v^2$, on est amené à conclure que la dispersion des vitesses est elle-même liée à la densité,

$$\sigma_v = \sigma_0 \left(\frac{n}{n_0}\right)^\alpha = \sigma_0 \exp(\alpha\tilde{n}) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\gamma-1}{2} \quad \text{et où } n_0 \text{ est la densité de référence du } \textbf{XIX.5.b}.$$

Pour rester proche du modèle de [Gail *et al.*, 1974] et [Hegmann & Kegel, 2000], on choisit alors simplement de prendre les mêmes équations décrivant l'évolution du champ de vitesse et du champ de densité logarithmique,

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{n}}{\mathrm{d}z} = -\frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{n}}} + \frac{\sigma_{\tilde{n}}}{\sqrt{l_{\tilde{n}}}}\Gamma_{\tilde{n}}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{v}{l_v} + \frac{\sigma_v}{\sqrt{l_v}}\Gamma_v(z), \tag{104}$$

à ceci près que, dans notre cas, le paramètre σ_v n'est plus une constante mais dépend de la variable $\tilde{n}$. Les autres paramètres, l_v, $l_{\tilde{n}}$ et $\sigma_{\tilde{n}}$ restent quant à eux inchangés.
Afin d'évaluer les valeurs possibles de γ, il convient de remarquer que la pression turbulente $P_{\rm turb}$ est ici considérée comme une pression cinétique associée aux mouvements macroscopiques du gaz, et on peut donc s'inspirer des valeurs de l'indice polytropique connues pour la pression cinétique microscopique P_k au sein d'un gaz supposé parfait. Au cours d'une évolution isotherme, $\gamma = 1$ et α est donc nul, tandis qu'en évolution adiabatique, et suivant qu'on se trouve plutôt dans une phase atomique ou ionisée, ou plutôt dans une phase moléculaire, γ varie entre $5/3$ ($\alpha = 1/3$) et $7/5$ ($\alpha = 1/5$). En conclusion, il semble que des valeurs de γ comprises entre 1 et 2 soient représentatives des conditions rencontrées dans les différentes phases du milieu interstellaire.
Avec ces hypothèses, la forme de l'équation régissant l'évolution de l'intensité moyenne Q_ν est la même que celle de [Hegmann & Kegel, 2000], à ceci près que la distribution W n'est pas factorisable du fait des corrélations, et que σ_v n'est pas une constante mais dépend de la densité,

$$\boxed{\frac{\partial Q_\nu}{\partial z} = \frac{1}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}\left[\tilde{n}Q_\nu + \sigma_{\tilde{n}}^2\frac{\partial Q_\nu}{\partial \tilde{n}}\right] + \frac{1}{l_v}\frac{\partial}{\partial v}\left[vQ_\nu + \sigma_v^2\frac{\partial Q_\nu}{\partial v}\right] - \kappa_\nu(Q_\nu - S_\nu W)}. \tag{105}$$

En effet, les expressions des différentes fonctions $h_{\tilde{n}}$, h_v, $g_{\tilde{n}}$ et g_v sont inchangées par rapport au cas sans corrélation. La seule nouveauté vient du fait que g_v est une fonction de $\tilde{n}$, ce qui ne change rien au coefficient de dérive D_2 puisque c'est la dérivée par rapport à v qui intervient, laquelle est nulle.

XX.2.c Évolution de l'intensité conditionnelle

L'intensité moyenne Q_ν dépend de la densité logarithmique et de la vitesse. Il est donc intéressant, comme cela est fait dans les différentes approches du transfert radiatif stochastique, de [Gail & Sedlmayr, 1974] à [Hegmann & Kegel, 2000], d'introduire l'intensité conditionnelle q_ν, qui revient à normaliser l'intensité moyenne par la distribution jointe W de la densité logarithmique et de la vitesse,

$$q_\nu(v,\tilde{n};z) = \frac{Q_\nu(v,\tilde{n};z)}{W(v,\tilde{n};z)} \quad \text{de sorte que} \quad \mathsf{E}\{I_\nu(z)\} = \iint q_\nu(v,\tilde{n};z)W(v,\tilde{n};z)\mathrm{d}\tilde{n}\mathrm{d}v.$$

On remarque que q_ν a effectivement la dimension d'une intensité spécifique, contrairement à Q_ν. Notons d'autre part que cette quantité est utilisée par [Hegmann & Kegel, 2000] pour des raisons de stabilité

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

numérique. L'introduction de cette forme dans l'équation (105) donne alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_\nu}{\partial z} &= \frac{q_\nu}{l_{\tilde{n}}}\left(1+\frac{\tilde{n}}{W}\frac{\partial W}{\partial \tilde{n}}+\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{W}\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{n}^2}\right)+\frac{1}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}}\left(\tilde{n}+\frac{2\sigma_{\tilde{n}}^2}{W}\frac{\partial W}{\partial \tilde{n}}\right)+\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2}\\ &+ \frac{q_\nu}{l_v}\left(1+\frac{v}{W}\frac{\partial W}{\partial v}+\frac{\sigma_v^2}{W}\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right)+\frac{1}{l_v}\frac{\partial q_\nu}{\partial v}\left(v+\frac{2\sigma_v^2}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)+\frac{\sigma_v^2}{l_v}\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2}-\kappa_\nu(q_\nu-S_\nu).\end{aligned}$$

La simplification de cette équation tient aux propriétés de la distribution de probabilité jointe, dont on a écrit plus haut l'équation d'évolution. Il est légitime, en se plaçant à une position z assez grande devant les longueurs de corrélation $l_{\tilde{n}}$ et l_v, de supposer que cette distribution a atteint le régime stationnaire, de sorte qu'elle vérifie l'équation sans second membre

$$\frac{1}{l_{\tilde{n}}}\left(W+\tilde{n}\frac{\partial W}{\partial \tilde{n}}+\sigma_{\tilde{n}}^2\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{n}^2}\right)+\frac{1}{l_v}\left(W+v\frac{\partial W}{\partial v}+\sigma_v^2\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right)=0, \tag{106}$$

qu'on obtient directement à partir de l'équation (103) en remplaçant les fonctions $h_{\tilde{n}}$, h_v, $g_{\tilde{n}}$ et g_v par leurs expressions respectives, puis en développant les dérivées. On en déduit que les termes en facteur de q_ν dans l'équation de l'intensité conditionnelle s'annulent, de sorte que finalement

$$\boxed{\frac{\partial q_\nu}{\partial z}=\frac{1}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}}\left(\tilde{n}+\frac{2\sigma_{\tilde{n}}^2}{W}\frac{\partial W}{\partial \tilde{n}}\right)+\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2}+\frac{1}{l_v}\frac{\partial q_\nu}{\partial v}\left(v+\frac{2\sigma_v^2}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)+\frac{\sigma_v^2}{l_v}\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2}-\kappa_\nu(q_\nu-S_\nu)}. \tag{107}$$

Dans le cas limite où les corrélations sont absentes, soit pour $\gamma=1$, on a d'une part $\sigma_v=\sigma_0$ quelle que soit la densité, mais également factorisation de W, sous la forme $W(v,\tilde{n})=W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v(v)$, où les distributions respectives de la densité logarithmique et de la vitesse sont données par des gaussiennes, puisque ces deux variables, supposées ici indépendantes, sont régies par des équations de Langevin exactement identiques à celle étudiée en détail dans l'exemple du mouvement brownien, au chapitre **VIII**. On a donc, dans ce cas particulier,

$$W(v,\tilde{n})=W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tilde{n}}}\exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right),$$

et l'équation (107) prend alors la forme plus simple utilisée par [Hegmann & Kegel, 2000]

$$\frac{\partial q_\nu}{\partial z}=-\frac{\tilde{n}}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial q_\nu}{\partial \tilde{n}}+\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}}\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial \tilde{n}^2}-\frac{v}{l_v}\frac{\partial q_\nu}{\partial v}+\frac{\sigma_0^2}{l_v}\frac{\partial^2 q_\nu}{\partial v^2}-\kappa_\nu(q_\nu-S_\nu),$$

ce qui fait disparaître *de facto* la distribution jointe W. En revanche, dans le cas général où les corrélations sont présentes, on ne peut clairement pas procéder à cette simplification sans précaution. Il convient donc de déterminer la forme de la densité de probabilité jointe. Comme on le verra, le calcul direct pose de grosses difficultés, et il paraît utile de commencer par calculer la distribution des vitesses W_v et celle des densités logarithmiques $W_{\tilde{n}}$, définies par les intégrations

$$W_v(v)=\int W(v,\tilde{n})\mathrm{d}\tilde{n} \quad \text{et} \quad W_{\tilde{n}}(\tilde{n})=\int W(v,\tilde{n})\mathrm{d}v.$$

Pour reprendre la terminologie du chapitre **IV**, les fonctions $W_{\tilde{n}}$ et W_v sont les densités de probabilité marginales de la loi du couple de variables aléatoires $(v,\tilde{n})$.

XX.3 Distribution des densités logarithmiques

Étant donné que les paramètres de l'équation de Langevin gouvernant l'évolution de $\tilde{n}$ le long de la ligne de visée sont des constantes, il est possible de la considérer séparément des équations sur la vitesse et sur l'intensité spécifique. Vu ainsi, le calcul de la distribution des densités logarithmiques a en fait déjà été fait au chapitre **VIII**, et on a donc, en transposant,

$$W_{\tilde{n}}(\tilde{n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tilde{n}}}\exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right), \quad \text{cette distribution n'étant donc pas modifiée par les corrélations.}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Le point important à relever ici n'est pas tant le résultat, qu'on connaissait déjà, mais la méthode utilisée au **VIII.2.f** pour calculer la distribution des valeurs prises par un processus régi par une équation de Langevin. Cette méthode, suggérée par [Risken, 1989], va maintenant être appliquée au cas, bien plus complexe, de la distribution des vitesses.

XX.4 Distribution des vitesses

XX.4.a Première expression des moments de la vitesse

La procédure en question consiste à calculer la distribution $W_v(v)$ à partir des moments de la vitesse $\mu'_p = \mathsf{E}\{v(z)^p\}$, pris en régime stationnaire, c'est-à-dire pour $z \gg l_v$ et $z \gg l_{\tilde{n}}$. La première étape consiste donc, partant de l'équation de Langevin sur la vitesse, à en écrire la solution formelle $v(z)$ le long de la ligne de visée en utilisant la variation de la constante, ce qui revient à refaire le calcul en termes de fonctions de Green du **VIII.4.c**,

$$v(z) = \int_0^z \frac{\sigma_v(t)}{\sqrt{l_v}} \exp\left(-\frac{z-t}{l_v}\right)\Gamma_v(t)\mathrm{d}t = \frac{\sigma_0}{\sqrt{l_v}} \int_0^z \exp\left[\alpha\tilde{n}(t) + \frac{t-z}{l_v}\right]\Gamma_v(t)\mathrm{d}t,$$

en prenant garde à la normalisation, et en choisissant une vitesse initiale $v_0 = v(0)$ nulle, ce qui ne constitue pas une perte de généralité, puisqu'en régime stationnaire, le terme dépendant de la vitesse initiale est négligeable[1]. Le moment d'ordre p de la vitesse au point z est alors l'espérance

$$\mu'_p = \mathsf{E}\{v(z)^p\} = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{l_v}}\right)^p \int_0^z \mathrm{d}t_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}t_p\, \mathsf{E}\left\{\prod_{i=1}^p \exp\left[\alpha\tilde{n}(t_i) + \frac{1}{l_v}(t_i - z)\right]\Gamma_v(t_i)\right\},$$

Ce qu'on peut réécrire en effectuant les changements de variables $\tau_i = z - t_i$,

$$\mu'_p = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{l_v}}\right)^p \int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_p \exp\left(-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^p \tau_i\right)\mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^p \tilde{n}(z-\tau_i)\right].\prod_{i=1}^p \Gamma_v(z-\tau_i)\right\}, \tag{108}$$

Les termes stochastiques Γ_v à l'origine des fluctuations de vitesse sont naturellement décorrelés de la densité, la corrélation ne se faisant qu'au travers des coefficients σ_v de ces forces de Langevin. Par conséquent, les moyennes d'ensemble présentes dans l'équation (108) peuvent être factorisées

$$\mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^p \tilde{n}(z-\tau_i)\right].\prod_{i=1}^p \Gamma_v(z-\tau_i)\right\} = \mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^p \tilde{n}(z-\tau_i)\right]\right\}\mathsf{E}\left\{\prod_{i=1}^p \Gamma_v(z-\tau_i)\right\}. \tag{109}$$

Remarquons que dans le cas particulier où il n'y a pas de corrélation, α est nul, de sorte que cette factorisation est élémentaire. Par ailleurs, les propriétés statistiques de Γ_v montrent [Risken, 1989] que les moments d'ordre impair sont nuls, et que les moments d'ordre pair font intervenir des produits de distributions de Dirac qui vont simplifier les intégrales (108). On rappelle en effet que

$$\mathsf{E}\left\{\prod_{i=1}^{2m+1} \Gamma_v(z-\tau_i)\right\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\left\{\prod_{i=1}^{2m} \Gamma_v(z-\tau_i)\right\} = 2^m \sum_{P_m} \delta(\tau_{i_1} - \tau_{i_2}) \ldots \delta(\tau_{i_{2m-1}} - \tau_{i_{2m}}),$$

où P_m représente l'ensemble des $(2m)!/(2^m m!)$ permutations $(i_1, i_2, \ldots, i_{2m})$ de $(1, 2, \ldots, 2m)$ pour lesquelles les produits de distributions de Dirac sont effectivement distincts. Il découle alors immédiatement de ces propriétés que les moments impairs sont nuls, et que les moments pairs s'écrivent

$$\mu'_{2m} = \left(\frac{2\sigma_0^2}{l_v}\right)^m \sum_{P_m} \int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m} \tau_i\right]\mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^{2m} \tilde{n}(z-\tau_i)\right]\right\}\prod_{j=1}^m \delta(\tau_{i_{2j-1}} - \tau_{i_{2j}}).$$

[1] Le lecteur ne doit pas être perturbé par la notation t pour la variable muette. Il s'agit bien d'une position et non d'un temps. De même, dans la suite, les notations τ désigneront également des positions, et non des profondeurs optiques.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Or, dans chacune des intégrales $2m$-dimensionnelles de cette somme, les arguments des deux facteurs exponentiels sont parfaitement symétriques dans les variables d'intégration τ_i. Par conséquent, l'action d'une permutation quelconque appartenant à l'ensemble P_m laisse l'intégrande invariant. Tous les termes sont donc identiques, et on peut s'affranchir du signe somme en écrivant directement

$$\mu'_{2m} = \frac{(2m)!}{m!}\left(\frac{\sigma_0^2}{l_v}\right)^m \int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i\right] \mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^{2m}\tilde{n}(z-\tau_i)\right]\right\}\prod_{i=1}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i}).$$

Au passage, on a simplifié la notation des indices dans l'argument des distributions de Dirac, ce qui revient à prendre comme permutation particulière l'identité.

XX.4.b Développement en puissances de α

Pour obtenir μ'_{2m} dans le cas de champs de densité et de vitesse corrélés, il faut donc calculer le facteur

$$\mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^{2m}\tilde{n}(z-\tau_i)\right]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\mathsf{E}\left\{\left[\sum_{i=1}^{2m}\tilde{n}(z-\tau_i)\right]^k\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\sum_{\mathcal{C}_{k,m}}\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{k}\tilde{n}(z-\tau_{i_j})\right\}$$

en développant l'exponentielle en série infinie, de façon à faire apparaître des produits de corrélation de la densité logarithmique, dont on peut espérer pouvoir calculer les propriétés, en utilisant la même procédure que celle utilisée jusqu'à maintenant pour calculer les moments de la vitesse. On note d'ailleurs que cette écriture permet d'isoler les effets des corrélations densité-vitesse, puisque le terme d'ordre zéro ($k = 0$) correspond justement au cas sans corrélation. La dernière égalité dans l'équation précédente utilise le développement formel de la $k^{\text{ème}}$ puissance de la somme des $\tilde{n}(z-\tau_i)$. L'ensemble $\mathcal{C}_{k,m}$ est ainsi celui des k-uples $(i_1,\ldots,i_k)$ pris dans $(1,\ldots,2m)$. Le calcul du moment μ'_{2m} se réduit donc à celui des intégrales de la forme

$$\mathcal{I}_{k,m} = \sum_{\mathcal{C}_{k,m}}\int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i\right]\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{k}\tilde{n}(z-\tau_{i_j})\right\}\prod_{i=1}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i}). \tag{110}$$

Pour calculer ces dernières, on doit donc s'intéresser aux corrélations du champ de densité logarithmique en différents points de la ligne de visée. En partant de la solution formelle de l'équation de Langevin régissant l'évolution de $\tilde{n}$, on écrit[2]

$$\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{k}\tilde{n}(z-\tau_{i_j})\right\} = \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}}{\sqrt{l_{\tilde{n}}}}\right)^k \int_0^{z-\tau_{i_1}}\mathrm{d}t_1 \ldots \int_0^{z-\tau_{i_k}}\mathrm{d}t_k \exp\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{t_j+\tau_{i_j}-z}{l_{\tilde{n}}}\right]\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{k}\Gamma_{\tilde{n}}(t_j)\right\}, \tag{111}$$

l'exponentielle pouvant être extraite de l'espérance puisqu'elle n'a pas de caractère aléatoire. Il suffit donc en théorie de calculer les moyennes de produits de $\Gamma_{\tilde{n}}$, dont on connaît les propriétés, puisqu'elles sont les mêmes que celles de Γ_v, à savoir

$$\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{2r+1}\Gamma_{\tilde{n}}(t_j)\right\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{2r}\Gamma_{\tilde{n}}(t_j)\right\} = 2^r\sum_{P_r}\delta(t_{j_1}-t_{j_2})\ldots\delta(t_{j_{2r-1}}-t_{j_{2r}}). \tag{112}$$

Il s'ensuit que pour toute valeur impaire de k, les intégrales $\mathcal{I}_{k,m}$ sont nulles. Seules restent celles correspondant aux valeurs paires de k. On a déjà remarqué que le terme d'ordre zéro $\mathcal{I}_{0,m}$ donnait le cas sans corrélation, puisque c'est le seul terme présent lorsque α est nul. On a déjà établi une expression semblable au chapitre **VIII**, mais on redonne ici le calcul pour des raisons de commodité de lecture. L'intégrale $\mathcal{I}_{0,m}$ se factorise en m intégrales doubles identiques, ce qui permet d'écrire

$$\mathcal{I}_{0,m} = \left[\int_0^z \mathrm{d}\tau_1\int_0^z \mathrm{d}\tau_2 \exp\left(-\frac{\tau_1+\tau_2}{l_v}\right)\delta(\tau_1-\tau_2)\right]^m = \left(\frac{l_v}{2}\right)^m \quad \text{en régime stationnaire } (z \gg l_v).$$

[2] Qu'on compare avec les expressions (108) et (109) dans le cas particulier $\alpha = 0$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

À partir de là, la prise en compte des corrélations entre les champs de densité et de vitesse implique que les termes d'ordre $k = 2r$ plus élevé ne sont pas nuls *a priori*. Notre but est ici de calculer les expressions correspondantes, ce qui passe par le calcul des intégrales suivantes, obtenues en insérant les propriétés (112) de $\Gamma_{\tilde{n}}$ dans l'expression (111),

$$\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{2r}\tilde{n}(z-\tau_{i_j})\right\} = \frac{(2r)!}{r!}\left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}}\right)^r \int_0^{z-\tau_{i_1}}\mathrm{d}t_1\ldots\int_0^{z-\tau_{i_{2r}}}\mathrm{d}t_{2r}\exp\left[\sum_{j=1}^{2r}\frac{t_j+\tau_{i_j}-z}{l_{\tilde{n}}}\right]\prod_{j=1}^{r}\delta(t_{2j-1}-t_{2j}).$$

On a réutilisé ici le fait que l'intégrande est invariant sous l'effet d'une permutation de P_r. Après avoir fait les changements de variables $u_j = z - t_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, 2r$ et factorisé les intégrales en regroupant les variables présentes dans la même distribution de Dirac, on obtient

$$\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{2r}\tilde{n}(z-\tau_{i_j})\right\} = \frac{(2r)!}{r!}\left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{l_{\tilde{n}}}\right)^r \prod_{j=1}^{r}\mathcal{W}(2j-1,2j;z),$$

en introduisant temporairement la notation condensée $\mathcal{W}(a,b;z)$, pour s'affranchir d'une équation trop longue. Cette fonction représente l'intégrale double obtenue lorsqu'on a effectué le regroupement des variables d'une même distribution de Dirac,

$$\mathcal{W}(a,b;z) = \int_{\tau_{i_a}}^{z}\mathrm{d}u_a\int_{\tau_{i_b}}^{z}\mathrm{d}u_b\exp\left[\frac{\tau_{i_a}-u_a+\tau_{i_b}-u_b}{l_{\tilde{n}}}\right]\delta(u_a-u_b).$$

Celle-ci est intégrable explicitement, et sa limite en régime stationnaire ($s \gg l_{\tilde{n}}$) prend la forme d'un facteur exponentiel dépendant de la séparation $|\tau_{i_a} - \tau_{i_b}|$, comparable à celui de la fonction d'autocorrélation du champ de densité logarithmique[3]. Par conséquent, dans ce régime stationnaire, les fonctions de corrélation d'ordre pair de la densité logarithmique sont

$$\mathsf{E}\left\{\prod_{j=1}^{2r}\tilde{n}(z-\tau_{i_j})\right\} = \frac{(2r)!}{r!}\left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2}\right)^r \exp\left[-\frac{1}{l_{\tilde{n}}}\sum_{j=1}^{r}|\tau_{i_{2j-1}}-\tau_{i_{2j}}|\right],$$

ce qui permet d'expliciter les intégrales $\mathcal{I}_{2r,m}$ en insérant cette forme dans l'expression (110), et fournit une équation apparemment simple, puisque ne faisant intervenir que des facteurs exponentiels,

$$\mathcal{I}_{2r,m} = \frac{(2r)!}{r!}\left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2}\right)^r \sum_{\mathcal{C}_{2r,m}}\int_0^z\mathrm{d}\tau_1\ldots\int_0^z\mathrm{d}\tau_{2m}\exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i-\frac{1}{l_{\tilde{n}}}\sum_{j=1}^{r}|\tau_{i_{2j-1}}-\tau_{i_{2j}}|\right]\prod_{i=1}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i}).$$

XX.4.c Différents types d'intégrales

Pour s'affranchir du préfacteur qui ne ferait qu'alourdir les notations dans les calculs qui vont suivre, nous allons écrire les moments pairs de la vitesse sous la forme

$$\mu'_{2m} = \frac{(2m)!}{m!}\left(\frac{\sigma_0^2}{l_v}\right)^m\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2r}}{(2r)!}\mathcal{I}_{2r,m} = \frac{(2m)!}{m!}\left(\frac{\sigma_0^2}{l_v}\right)^m\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2r}}{r!}\left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2}\right)^r\mathcal{K}_{r,m}, \tag{113}$$

où l'on a introduit les sommes d'intégrales $\mathcal{K}_{r,m}$ définies par

$$\mathcal{K}_{r,m} = \sum_{\mathcal{C}_{2r,m}}\int_0^z\mathrm{d}\tau_1\ldots\int_0^z\mathrm{d}\tau_{2m}\exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i-\frac{1}{l_{\tilde{n}}}\sum_{j=1}^{r}|\tau_{i_{2j-1}}-\tau_{i_{2j}}|\right]\prod_{i=1}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i}). \tag{114}$$

Comme dit plus haut, la contribution correspondant à $r = 0$ est celle du cas sans corrélation entre la densité et la vitesse. Il s'agit donc de déterminer les contributions des ordres suivants. Mais avant de nous lancer

[3] Ce qui n'est pas pour nous surprendre, et signifie que l'échelle caractéristique de décroissance est $l_{\tilde{n}}$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

dans le calcul, considérons la forme des termes $\mathcal{K}_{r,m}$. Chacun d'eux est composé d'une somme d'intégrales $2m$-dimensionnelles, dont la particularité est l'argument de l'exponentielle. Celui-ci fait intervenir un terme parfaitement symétrique en toutes les variables τ_i, ainsi qu'un terme dépendant de $2r$ variables choisies parmi les $2m$ possibles. Notons que ce choix est fait sans restriction, c'est-à-dire qu'on peut choisir deux fois la même variable, ce qui devient d'ailleurs inévitable dès que $r > m$. D'autre part, les couples de variables intervenant dans une même valeur absolue peuvent tout aussi bien se retrouver dans la même distribution de Dirac, ou bien dans deux distributions différentes. On voit donc que, suivant le choix de $(i_1, \ldots, i_{2r})$ dans $[\![1, 2m]\!]^{2r}$, l'intégrale multiple correspondante pourra être de plusieurs types. Pour mieux comprendre ce point, prenons l'exemple de l'ordre $r = 1$. Les indices i_1 et i_2, apparaissant dans la valeur absolue dans l'expression (114), sont à choisir parmi $2m$ possibilités, chaque paire donnant une intégrale *a priori* différente dans la somme $\mathcal{K}_{1,m}$. Chacune de ces intégrales, cependant, relève d'un des trois cas suivants,

$$\mathcal{K}_{1,m}^{(1)} = \int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i\right]\prod_{i=1}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i})$$

$$\mathcal{K}_{1,m}^{(2)} = \int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i - \frac{1}{l_{\tilde{n}}}|\tau_{i_1}-\tau_{i_2}|\right]\delta(\tau_{i_1}-\tau_{i_2})\prod_{\substack{i=1\\2i\neq i_1,i_2}}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i})$$

$$\mathcal{K}_{1,m}^{(3)} = \int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_{2m} \exp\left[-\frac{1}{l_v}\sum_{i=1}^{2m}\tau_i - \frac{1}{l_{\tilde{n}}}|\tau_{i_1}-\tau_{i_2}|\right]\delta(\tau_{i_1}-\tau_{i'_1})\delta(\tau_{i_2}-\tau_{i'_2})\prod_{\substack{i=1\\2i\neq i_1,i_2,i'_1,i'_2}}^{m}\delta(\tau_{2i-1}-\tau_{2i}),$$

suivant que $i_1 = i_2$ (premier cas), que $i_1 \neq i_2$ apparaissent dans la même distribution de Dirac (deuxième cas), ou encore que $i_1 \neq i_2$ apparaissent dans des distributions de Dirac différentes (troisième cas). Le calcul de ces intégrales est assez fastidieux, mais il se fait sans difficulté fondamentale. Le premier type d'intégrale est en fait donné par le cas sans corrélation, et les deux autres se ramènent respectivement aux calculs d'une intégrale double et d'une intégrale quadruple, lesquelles peuvent être explicitées[4], de sorte qu'en se plaçant dans le régime stationnaire, on a finalement

$$\mathcal{K}_{1,m}^{(1)} = \left(\frac{l_v}{2}\right)^m, \qquad \mathcal{K}_{1,m}^{(2)} = \left(\frac{l_v}{2}\right)^m \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_{1,m}^{(3)} = \frac{2l_{\tilde{n}}}{l_v + 2l_{\tilde{n}}}\left(\frac{l_v}{2}\right)^m.$$

Quant à la valeur du terme $\mathcal{K}_{1,m}$ complet, il faut la calculer en comptant le nombre d'intégrales de chaque type. Il en existe $2m$ du premier, suivant l'indice $i_1 = i_2$ choisi parmi $(1, \ldots, 2m)$. Il y a également $2(2m-1)$ termes du deuxième type et $2(m-1)(2m-1)$ termes du troisième type[5]. Au total, il y a donc $(2m)^2$ termes, comme il se doit.

Cet exemple montre que, d'une manière générale, $\mathcal{K}_{r,m}$ est la somme de $(2m)^{2r}$ termes relevant chacun d'un type d'intégrale parmi un nombre N dépendant *a priori* de r et m. Pour un type n donné entre 1 et $N(r,m)$, on dénombre $D(r,m,n)$ intégrales de ce type, notées $\mathcal{K}_{r,m}^{(n)}$, de sorte que

$$\mathcal{K}_{r,m} = \sum_{n=1}^{N(r,m)} D(r,m,n)\mathcal{K}_{r,m}^{(n)} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{n=1}^{N(r,m)} D(r,m,n) = (2m)^{2r}.$$

Le poids $D(r,m,n)$ de chaque type d'intégrale $\mathcal{K}_{r,m}^{(n)}$ est le nombre de ses représentants apparaissant dans $\mathcal{K}_{r,m}$. Ce sont nécessairement des polynômes en m à coefficients entiers, de degré au plus $2r$, et au moins l'un d'entre eux est de degré $2r$, d'après la contrainte sur leur somme écrite précédemment,

$$D(r,m,n) = \sum_{p=0}^{2r} a_p m^p \quad \text{où les coefficients } a_p \text{ dépendent } a \textit{ priori} \text{ de } r, m \text{ et } n.$$

Notons que la dépendance vis-à-vis de m n'est pas un obstacle à l'écriture sous cette forme polynômiale. Ce qu'on rappelle simplement en disant que les coefficients dépendent de m, c'est que pour certaines valeurs

[4] Le lecteur intéressé pourra refaire le calcul en s'inspirant du cas sans corrélation.
[5] Ceci en supposant que $m \geqslant 2$, sinon il n'existe pas d'intégrale du troisième type.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

de cet entier, les intégrales d'un type donné n'ont pas lieu d'être, par exemple pour $m < 2$ et $r = 1$, il n'y a que deux types d'intégrales possibles. Formellement, cela revient à annuler les coefficients a_p pour ces valeurs de r, m et $n \geqslant 3$.
Ceci étant dit, le calcul explicite de ces intégrales à l'ordre un, bien que ne présentant pas de difficulté conceptuelle, est déjà assez pénible, de sorte qu'aux ordres supérieurs, la multiplication des intégrales de types plus complexes encore semble en pratique en interdire le calcul analytique. On peut néanmoins invoquer un argument dimensionnel en posant $\tau_i = x_i l_v$ et $z = x l_v$ et en réécrivant $\mathcal{K}_{r,m}$ comme

$$\mathcal{K}_{r,m} = l_v^m \sum_{\mathcal{C}_{2r,m}} \int_0^x \mathrm{d}x_1 \ldots \int_0^x \mathrm{d}x_{2m} \exp\left[-\sum_{i=1}^{2m} x_i - \frac{l_v}{l_{\tilde{n}}} \sum_{j=1}^{r} |x_{i_{2j-1}} - x_{i_{2j}}|\right] \prod_{i=1}^{m} \delta(x_{2i-1} - x_{2i}),$$

d'où la proportionnalité de chacune des intégrales $\mathcal{K}_{r,m}^{(n)}$ à l_v^m. En réalité, suivant l'exemple de l'ordre un, on écrira qu'elles sont proportionnelles à $(l_v/2)^m$, le coefficient de proportionnalité dépendant du rapport des longueurs de corrélation $l_v/l_{\tilde{n}}$ ainsi que des valeurs de r, m et n. Par suite,

$$\mathcal{K}_{r,m} = \sum_{n=1}^{N(r,m)} \left[\sum_{p=0}^{2r} a_p m^p\right] c_n \left(\frac{l_v}{2}\right)^m = \sum_{p=0}^{2r} b_p m^p \left(\frac{l_v}{2}\right)^m,$$

où chaque coefficient b_p dépend donc des entiers r et m et du rapport des longueurs de corrélation.

XX.4.d Retour sur les moments et distribution des vitesses

On en déduit la forme des moments d'ordre pair de la vitesse d'après l'équation (113),

$$\mu'_{2m} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2r}}{r!} \left(\frac{\sigma_{\tilde{n}}^2}{2}\right)^r \sum_{p=0}^{2r} b_p m^p \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\sigma_0^2}{2}\right)^m.$$

En rappelant que les moments impairs μ'_{2m+1} sont nuls, la fonction caractéristique Z_v de la distribution des vitesses est alors donnée par une somme infinie qu'on peut mettre sous la forme[6]

$$Z_v(u_v) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha\sigma_{\tilde{n}})^{2r}}{2^r r!} \sum_{p=0}^{2r} b_p S_p\left(-\frac{u_v^2\sigma_0^2}{2}\right) \quad \text{avec} \quad S_p(x) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{x^m}{m!} m^p = Q_p(x) e^x,$$

où Q_p est un polynôme d'ordre p. La fonction caractéristique peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$F_k(u_v) = \left(\frac{u_v\sigma_0}{\sqrt{2}}\right)^{2k} \exp\left(-\frac{u_v^2\sigma_0^2}{2}\right) \quad \text{puisque} \quad Z_v(u_v) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha\sigma_{\tilde{n}})^{2r}}{2^r r!} \sum_{p=0}^{2r} b_p Q_p\left(-\frac{u_v^2\sigma_0^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{u_v^2\sigma_0^2}{2}\right).$$

Enfin, la distribution des vitesses est une combinaison linéaire des transformées de Fourier $\widehat{F}_k$ des fonctions F_k, qu'on peut calculer par récurrence, en utilisant une intégration par parties, soit

$$\widehat{F}_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad \text{et} \quad \widehat{F}_1(v) = \left(\frac{1}{2} - \frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \widehat{F}_0(v) \quad \text{pour les deux premiers termes,}$$

$$\widehat{F}_k(v) = \left(2k - \frac{3}{2} - \frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \widehat{F}_{k-1}(v) - \left(k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{3}{2}\right) \widehat{F}_{k-2}(v) \quad \text{pour} \quad k \geqslant 2.$$

Par conséquent, $\widehat{F}_k$ est le produit de la gaussienne $\widehat{F}_0 = W_v^0$ du cas non-corrélé par un polynôme d'ordre k en $(v/\sigma_0)^2$, et on en déduit que la distribution des vitesses est, elle, le produit de W_v^0 par une série paire

[6] En ce qui concerne la forme de $S_p(x)$, on la démontre en simplifiant par m, puis en développant $m^{p-1} = (m-1+1)^{p-1}$ selon la formule du binôme. On en déduit alors que $S_p(x)$ s'exprime comme x multiplié par une combinaison linéaire des $S_k(x)$ pour k compris entre 0 et $p-1$. Par récurrence et partant du fait que $S_0(x) = e^x$, on obtient la forme annoncée.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

en v/σ_0, dont les coefficients d_p dépendent de α (et donc de l'exposant polytropique γ), de la dispersion des densités logarithmiques $\sigma_{\tilde{n}}$ et du rapport des longueurs de corrélation $l_v/l_{\tilde{n}}$,

$$\boxed{W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \sum_{p\geqslant 0} d_p \left(\frac{v^2}{\sigma_0^2}\right)^p}. \tag{115}$$

On verra au **XX.6** que la forme (115) est confirmée par le biais de simulations numériques de la distribution des vitesses, et qu'on obtient déjà une très bonne approximation de celle-ci en ne considérant qu'un petit nombre de coefficients d_p.

XX.5 Distribution jointe

XX.5.a Approche par la méthode des moments

Comme on l'a dit avant de faire le calcul de la distribution des densités logarithmiques et de la distribution des vitesses, la quantité qui nous intéresse réellement est la densité de probabilité jointe $W(v, \tilde{n})$, dont on vient en fait de calculer les intégrales sur chacune des variables. Pour déterminer cette distribution jointe, on peut en principe utiliser la même procédure que précédemment, c'est-à-dire partir du calcul des moments mixtes $\mathsf{E}\{v^p \tilde{n}^q\}$, en déduire la fonction caractéristique bidimensionnelle $Z(u_v, u_{\tilde{n}})$ définie par la somme infinie

$$Z(u_v, u_{\tilde{n}}) = \sum_{p\geqslant 0}\sum_{q\geqslant 0} \frac{(iu_v)^p}{p!}\frac{(iu_{\tilde{n}})^q}{q!} \mathsf{E}\{v^p \tilde{n}^q\}$$

pour enfin obtenir la distribution jointe $W(v, \tilde{n})$ comme transformée de Fourier de Z. Cependant, si l'on se réfère à ce qui a été écrit plus haut, et en particulier à l'équation (108), les moments mixtes sont proportionnels aux intégrales suivantes,

$$\int_0^z \mathrm{d}\tau_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau_p \int_0^z \mathrm{d}\tau'_1 \ldots \int_0^z \mathrm{d}\tau'_q \, \mathsf{E}\left\{\prod_{i=1}^p \exp\left[\alpha\tilde{n}(z-\tau_i) - \frac{\tau_i}{l_v}\right]\Gamma_v(z-\tau_i) \prod_{j=1}^q \exp\left(-\frac{\tau'_j}{l_{\tilde{n}}}\right)\Gamma_{\tilde{n}}(z-\tau'_j)\right\},$$

dont les intégrandes font intervenir des moyennes de la forme

$$\mathsf{E}\left\{\exp\left[\alpha\sum_{i=1}^p \tilde{n}(z-\tau_i)\right]\prod_{i=1}^p \Gamma_v(z-\tau_i)\prod_{j=1}^q \Gamma_{\tilde{n}}(z-\tau'_j)\right\}.$$

Comparées avec l'équation (109), ces moyennes semblent bien plus difficile à calculer. En effet, si l'on peut factoriser les fonctions Γ_v, il n'en va pas de même des forces de Langevin associées à la densité logarithmique, puisque les valeurs de $\tilde{n}$ intervenant dans ces moyennes ne sont pas *a priori* indépendantes des sauts de densité logarithmique $\Gamma_{\tilde{n}}$, et, par conséquent, on ne peut pas utiliser les propriétés statistiques de ces derniers pour simplifier les expressions ci-dessus. Si cela était néanmoins possible, on obtiendrait une distribution jointe W factorisable selon

$$W(v, \tilde{n}) = W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tilde{n}}} \exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right)\sum_{p\geqslant 0} d_p \left(\frac{v^2}{\sigma_0^2}\right)^p. \tag{116}$$

Comme on le verra dans l'analyse numérique, cette forme ne reflète pas la réalité de la distribution W car la forme d'une coupe à densité logarithmique fixée n'est pas indépendante de la valeur de $\tilde{n}$, contrairement à ce que laisserait supposer la forme (116).

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

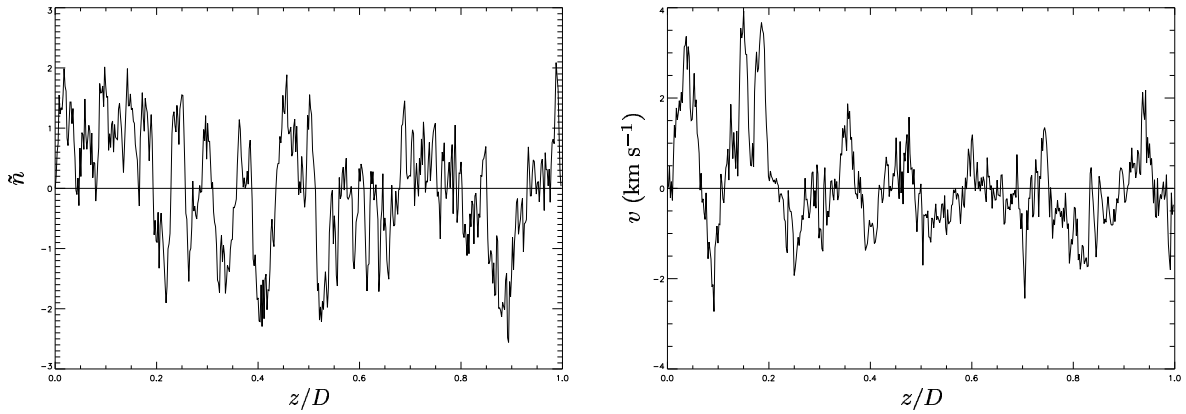

FIG. **XX**.1 – *Champ de densité logarithmique (à gauche) et champ de vitesse (à droite), construits pour le jeu de paramètres suivants :* $l_{\tilde{n}}/D = l_v/D = 0,02$, $\sigma_{\tilde{n}} = 1$, $\sigma_0 = 1$ km s^{-1} *et* $\alpha = 0,33$. *Les tirets représentent les valeurs moyennes (nulles) des deux champs.*

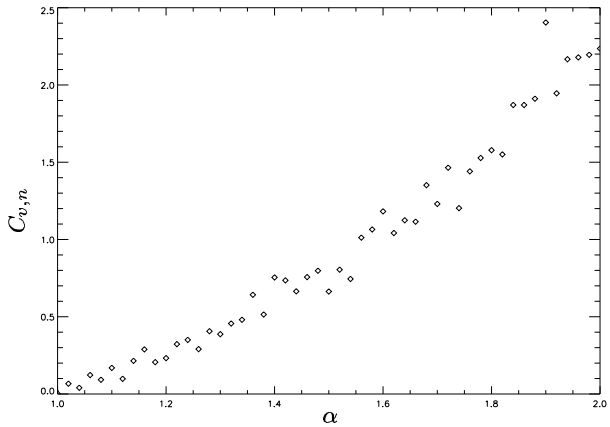

FIG. **XX**.2 – *Évolution de la corrélation entre les champs de densité et de vitesse, mesurée par la quantité* $C_{v,n}$ *introduite dans le texte, en fonction du paramètre* α. *Les autres paramètres du modèle sont fixés, et leurs valeurs respectives sont* $\sigma_{\tilde{n}} = 1$, $\sigma_v = 1$ km s^{-1}, *et* $l_{\tilde{n}} = l_v = 0,005D$.

XX.5.b Approche semi-empirique

Par conséquent, on est tentés de faire l'hypothèse que W a bien cette forme, mais avec des coefficients d_p dépendant explicitement de $\tilde{n}$, en plus de leur dépendance en α, $\sigma_{\tilde{n}}$ et $l_v/l_{\tilde{n}}$,

$$\boxed{W(v,\tilde{n}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\tilde{n}}} \exp\left(-\frac{\tilde{n}^2}{2\sigma_{\tilde{n}}^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}\right) \sum_{p\geqslant 0} d_p(\tilde{n}) \left(\frac{v^2}{\sigma_0^2}\right)^p}. \tag{117}$$

Avec cet *ansatz*, et en utilisant l'équation (106) du régime stationnaire pour W, on peut en déduire que les coefficients d_p doivent obéir aux équations différentielles suivantes

$$d_1(\tilde{n}) = \frac{e^{-2\alpha\tilde{n}}}{2} \left[-\frac{l_v}{l_{\tilde{n}}}\sigma_{\tilde{n}}^2 d_0'' + \frac{l_v}{l_{\tilde{n}}}\tilde{n} d_0' + \left(e^{2\alpha\tilde{n}} - 1\right) d_0\right] \quad \text{et}$$

$$d_{k+1}(\tilde{n}) = \frac{e^{-2\alpha\tilde{n}}}{(2k+1)(2k+2)} \left\{-\frac{l_v}{l_{\tilde{n}}}\sigma_{\tilde{n}}^2 d_k'' + \frac{l_v}{l_{\tilde{n}}}\tilde{n} d_k' + \left[(4k+1)e^{2\alpha\tilde{n}} - (2k+1)\right] d_k + \left(1 - e^{2\alpha\tilde{n}}\right) d_{k-1}\right\},$$

où d_k' et d_k'' désignent les dérivées première et seconde de d_k par rapport à $\tilde{n}$. D'après ces formes, la connaissance de d_0 permet en théorie de déduire explicitement tous les autres coefficients. Ce travail,

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

qui n'a pas encore été mené à bien, devrait permettre de déterminer une forme suffisamment précise de la distribution jointe W, qui puisse être utilisée dans l'intégration numérique de l'équation de transfert généralisée (107). En attendant que cette étude soit poursuivie, on présente dans la section suivante les résultats de simulations numériques justifiant les formes trouvées pour la distribution des vitesses et la distribution jointe.

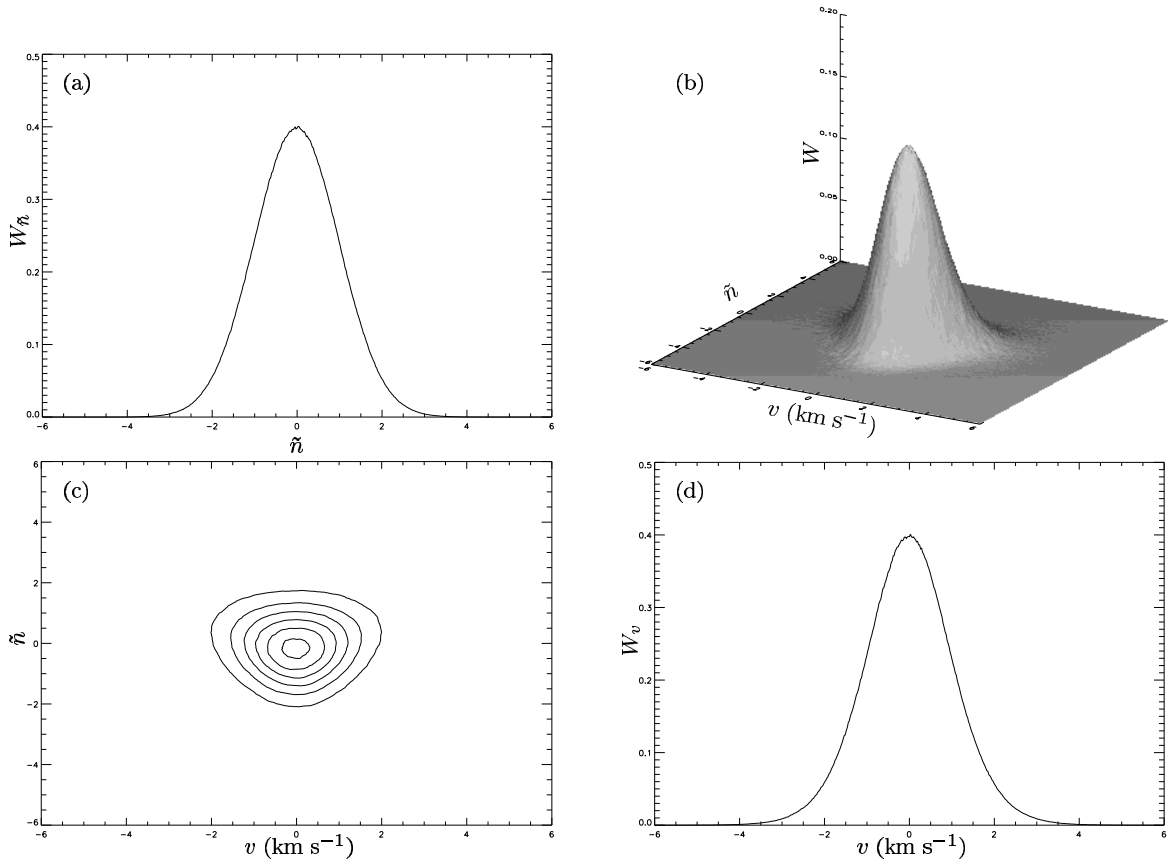

FIG. **XX.3** – *Distributions obtenues à partir de cent réalisations de champs de densité et de vitesse avec les paramètres suivants :* $l_{\tilde{n}} = l_v = 0,0005D$, $\sigma_{\tilde{n}} = 1$, $\sigma_0 = 1$ km s^{-1} *et* $\alpha = 0,25$. *Les figures (b) et (c) représentent la distribution jointe* W, *respectivement sous la forme d'une surface dans un espace à trois dimensions, et comme un ensemble d'isocontours, correspondant à sept valeurs de la distribution régulièrement espacées entre zéro et la valeur maximale. C'est cette dernière représentation qui sera utilisée dans la suite. Notons que cette distribution bidimensionnelle a été lissée pour atténuer le bruit dû à un échantillonnage très fin. Les figures (a) et (d) montrent quant à elles la distribution des densités logarithmiques et la distribution des vitesses.*

XX.6 Simulations numériques

XX.6.a Corrélations densité-vitesse

La simulation de champs de vitesse et de densité logarithmique dont l'évolution est gouvernée par les équations de Langevin (104) se fait en partant des conditions initiales $\tilde{n}(0) = 0$ et $v(0) = 0$ et en intégrant numériquement ces équations le long de la ligne de visée. Les processus stochastiques $\Gamma_{\tilde{n}}$ et Γ_v sont tirés de distributions gaussiennes de variance 2. Pour le lecteur intéressé, signalons que l'intégration est effectuée suivant la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Les premiers pas le long de la ligne de visée doivent être exclus de l'étude du régime stationnaire, puisque les valeurs des champs en ces points sont encore affectées par les conditions initiales. Pour s'affranchir de ce problème, on ne considérera, dans la construction des histogrammes de vitesse et de densité logarithmique, que les positions $z \geqslant 5l_v$ et $z \geqslant 5l_{\tilde{n}}$. Ce choix

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

présente évidemment une part d'arbitraire, mais il assure que l'influence relative des conditions initiales est inférieure au pourcent[7].

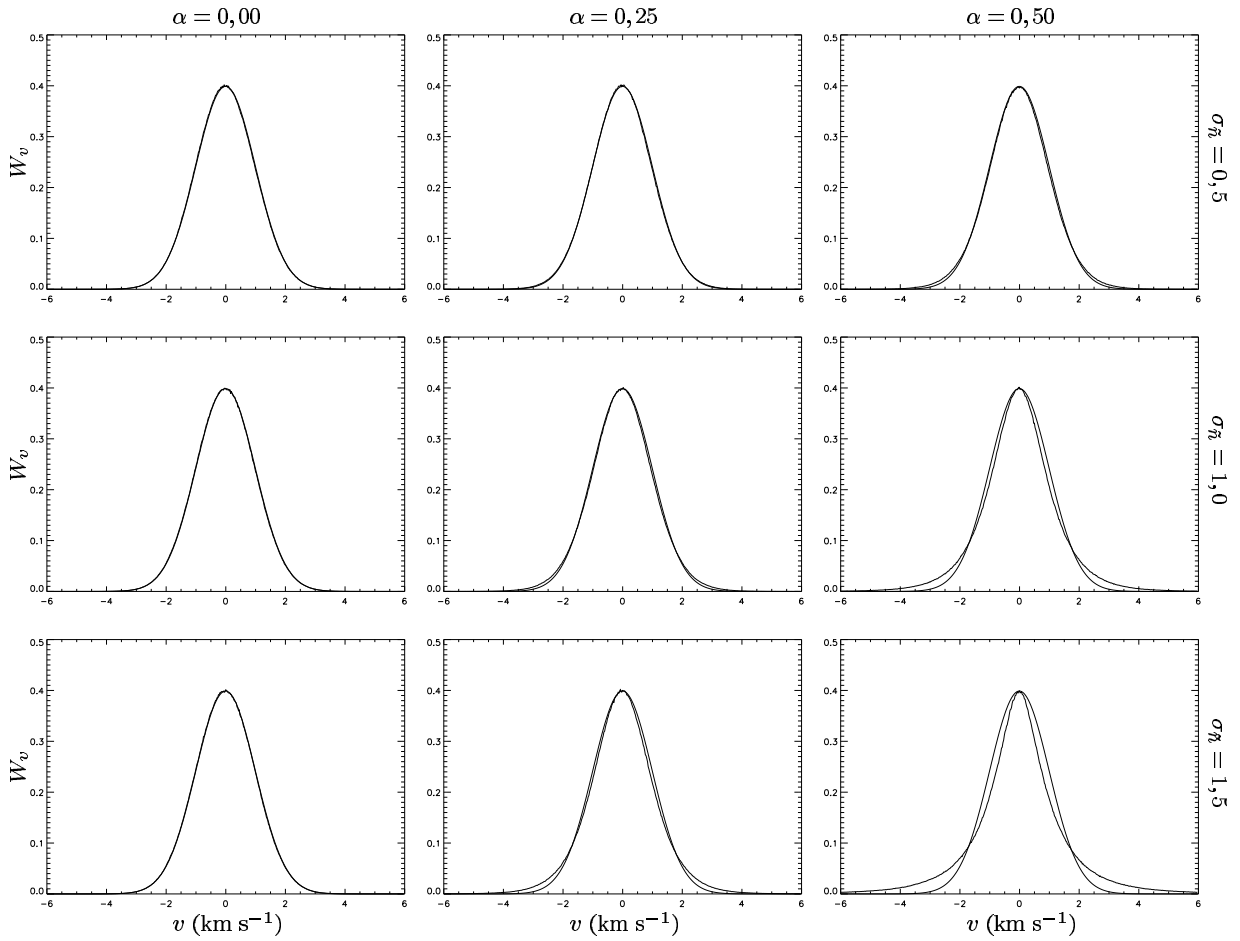

FIG. **XX**.4 – *Distributions des vitesses $W_v(v)$ obtenues pour les valeurs des paramètres α et $\sigma_{\tilde{n}}$ indiquées en regard. Le paramètre de corrélation est constant le long de chaque colonne, la dispersion des densités logarithmiques l'est le long de chaque ligne. Les autres paramètres $l_{\tilde{n}}$, l_v et σ_0 sont identiques à ceux de la figure* **XX**.3. *La gaussienne W_v^0 du cas non-corrélé est indiquée par des pointillés sur chacune des sous-figures.*

On a déjà montré, sur la figure **XIX**.7, des exemples de champs de densité[8] obtenus en utilisant l'équation (104) correspondante. La figure **XIX**.1 montre quant à elle deux exemples de champs de vitesse construits par la même méthode. L'effet des corrélations entre ces deux quantités, telles qu'on les a introduites dans ce chapitre, peut être observé[9] sur la figure **XX**.1, qui représente un champ de densité logarithmique et un champ de vitesse construits pour $\alpha = 1/3$.
La méthode de corrélation suggère qu'aux endroits où la densité logartihmique est faible, il en va de même pour la dispersion de vitesse, et inversement. Pour vérifier que la corrélation est bien prise en considération, on construit un ensemble de champs de densité et de vitesse en faisant varier le paramètre α, tous les autres paramètres étant fixés. La corrélation est alors mesurée pour chaque couple de champs en calculant la quantité

$$C_{v,n} = \frac{\mathsf{E}\left\{(vn)^2\right\}}{\mathsf{E}\left\{v^2\right\}\mathsf{E}\left\{n^2\right\}} - 1, \quad \text{qui est nulle si les champs de densité et de vitesse ne sont pas corrélés.}$$

[7]Puisque $e^{-5} \simeq 6,74.10^{-3}$.
[8]Il s'agit bien de la densité n, et non de la densité logarithmique $\tilde{n}$.
[9]Bien qu'il ne soit pas inutile de s'en être persuadé auparavant...

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

La figure **XX**.2 présente le résultat de cette simulation, en précisant que pour chaque valeur du paramètre de corrélation α, on a construit cent couples de champs, et que c'est la moyenne de $C_{v,n}$ sur ces réalisations qu'on représente en fonction de α. On voit cette fois clairement que la méthode introduite au **XX.2.b** pour corréler les champs de densité et de vitesse stochastiques se traduit bien ainsi dans les simulations.

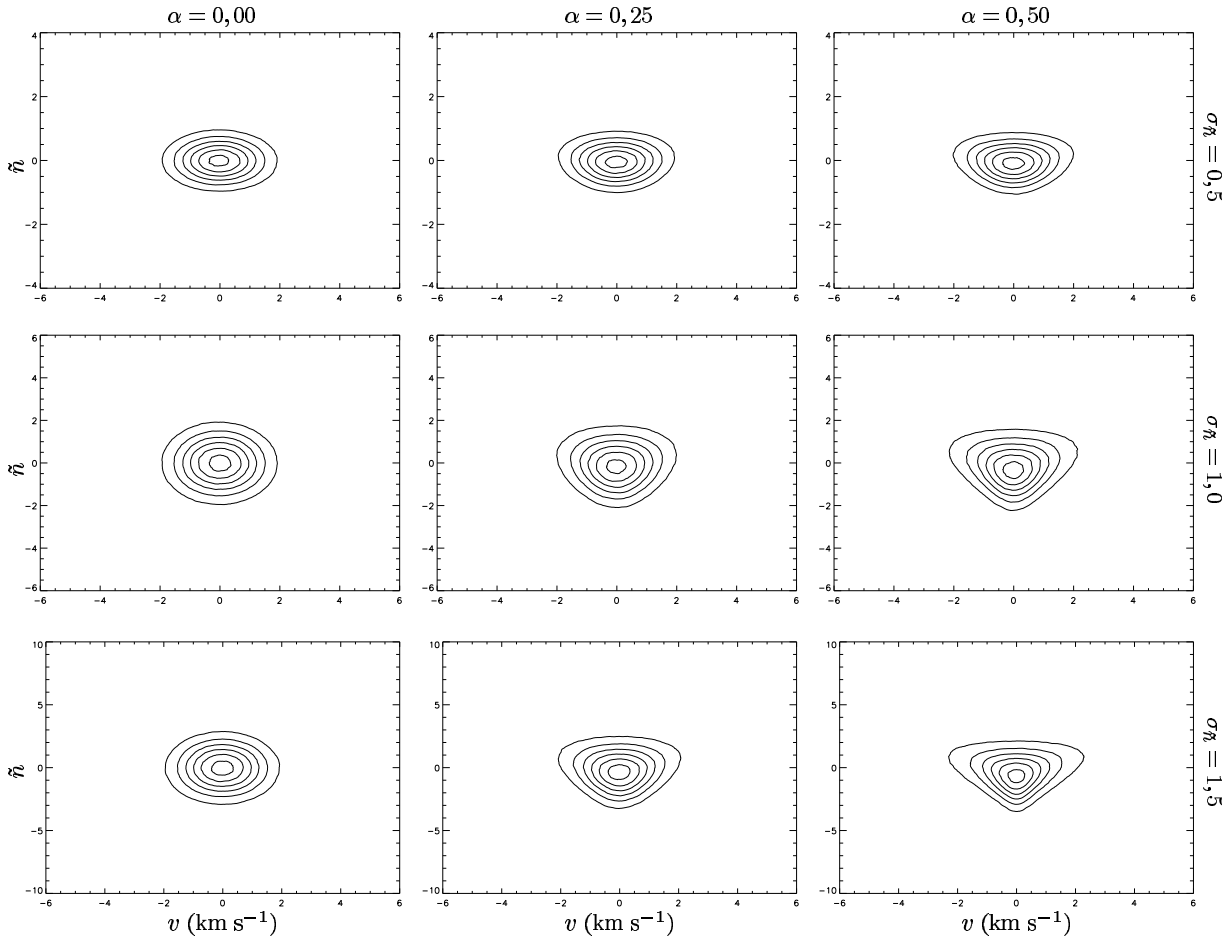

FIG. **XX**.5 – *Distributions jointes $W(v, \tilde{n})$ obtenues pour les mêmes valeurs des paramètres que celles utilisées sur la figure* **XX**.4. *La disposition des sous-figures est également la même.*

XX.6.b Densités de probabilité

Ceci étant établi, on va considérer les effets de ces corrélations sur les densités de probabilité discutées plus haut du point de vue analytique, à savoir la distribution des densités logarithmiques $W_{\tilde{n}}(\tilde{n})$, la distribution des vitesses $W_v(v)$ et la distribution jointe $W(v, \tilde{n})$. Le calcul numérique des histogrammes de la densité logarithmique et de la vitesse se fait en se limitant, comme on l'a dit, aux positions suffisamment éloignées de la frontière $z = 0$ du nuage pour pouvoir être considérées comme représentatives du régime stationnaire. Plus précisément, les champs sont construits sur des lignes de visée contenant 10^6 pixels, les longueurs de corrélation $l_{\tilde{n}}$ et l_v pouvant être égales, suivant le modèle considéré, à 50 ou 500 pixels. Le régime stationnaire est ainsi atteint sur plus de $99,75\%$ de la ligne de visée.

La figure **XX**.3 montre, de façon synthétique, un exemple des différentes distributions obtenues dans ces simulations, pour un jeu de paramètres donné, précisé en légende. On voit en particulier que l'effet des corrélations entre la densité et la vitesse se traduit par une déformation de la distribution jointe par rapport à la gaussienne elliptique du cas non-corrélé, ce qu'on vérifiera d'ailleurs dans la suite. L'écart à la gaussienne de la distribution des vitesses est, lui, plus difficile à voir sur cette figure. Pour l'observer, on considère les distributions des vitesses obtenues en faisant varier le paramètre α ainsi que la dispersion

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

des densités logarithmiques $\sigma_{\tilde{n}}$. Les résultats sont présentés sur la figure **XX**.4, pour neuf combinaisons de ces paramètres.

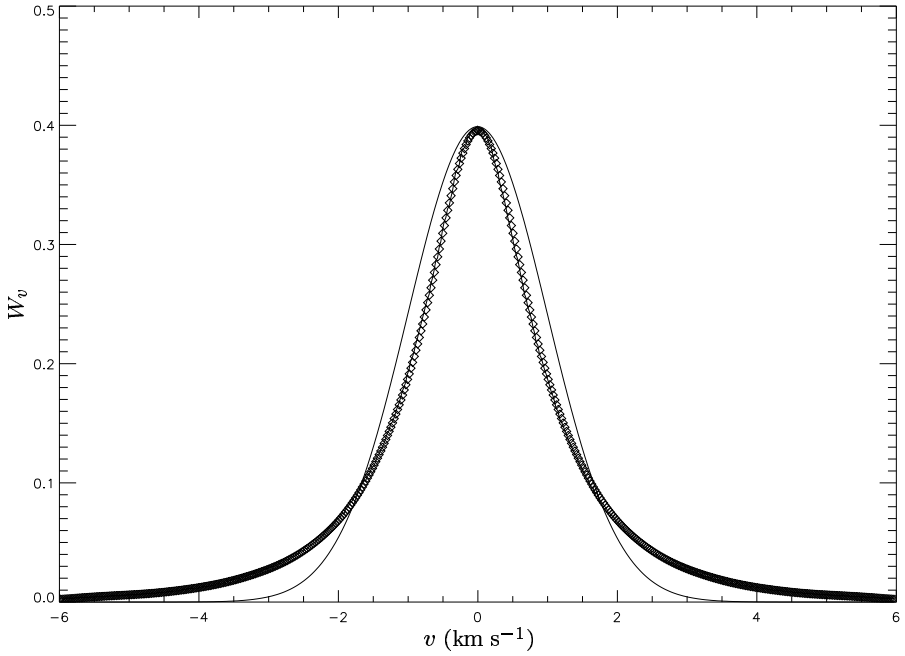

FIG. **XX**.6 – *Exemple d'ajustement de la distribution des vitesses par une expression de la forme (115). La distribution simulée (trait plein) correspond au cas $\alpha = 0,5$ et $\sigma_{\tilde{n}} = 1,5$, les autres paramètres étant les mêmes que sur les figures* **XX**.4 *et* **XX**.5*. L'ajustement obtenu par la procédure décrite dans le texte est représenté par des losanges. Pour mémoire, la gaussienne W_v^0 est tracée en pointillés.*

Les effets de la corrélation sont d'autant plus marqués que α et $\sigma_{\tilde{n}}$ augmentent. À l'inverse, la distribution $W_{\tilde{n}}$ de la densité logarithmique ne s'écarte jamais de la gaussienne de variance $\sigma_{\tilde{n}}^2$, quel que soit le niveau de corrélation. Quant à la distribution jointe, la figure **XX**.5 montre la déformation qu'elle subit lorsque les corrélations entrent en jeu. Celle-ci peut se comprendre en rappelant que la dispersion locale des vitesses σ_v est proportionnelle à une puissance positive de la densité, de sorte qu'une coupe de la distribution jointe à $\tilde{n}$ fixée est d'autant plus large que cette valeur de la densité logarithmique est grande. C'est bien ce qu'on observe sur la figure **XX**.5.

En ce qui concerne la distribution des vitesses, la vérification de la forme analytique (115) se fait en ajustant le rapport W_v/W_v^0 par un polynôme en v^2. Notons que la limite nulle de W_v^0 lorsque la valeur absolue de la vitesse tend vers l'infini impose de se donner une plage limitée de vitesses sur laquelle est calculé l'ajustement. Cette contrainte n'est cependant pas trop restricitive, car on verra que les ajustements résultants sont en fait excellents sur l'ensemble de l'axe des vitesses. Le polynôme $P(v^2)$ obtenu est alors multiplié par $W_v^0(v)$ pour obtenir un ajustement de W_v. La figure **XX**.6 montre un exemple de ce qu'on obtient par cette procédure. Le polynôme P calculé dans ce cas précis est de degré dix, mais il s'agit d'un exemple relativement extrême et le degré du polynôme nécessaire pour reconstruire proprement la distribution des vitesses chute rapidement dès que le paramètre de corrélation α ou la dispersion des densités logarithmiques diminue.

L'ajustement des distributions jointes par la forme semi-empirique (117) se fait quant à lui en cherchant, pour chaque plan de densité logarithmique constante, un ajustement polynômial de

$$\frac{W(v,\tilde{n})}{W_{\tilde{n}}(\tilde{n})W_v^0(v)}, \quad \text{prise bien entendu comme une fonction de la vitesse.}$$

La figure **XX**.7 montre le résultat obtenu pour le cas $\alpha = 0,5$ et $\sigma_{\tilde{n}} = 1,5$ déjà utilisé dans les figures précédentes. On constate que l'ajustement trouvé est très proche de la distribution bidimensionnelle W simulée, ce qui justifie *a posteriori* la forme (117). Les différents polynômes calculés par cette méthode sont de degré au plus treize, et comme on l'a signalé plus haut, ce degré maximum est plus petit lorsque les corrélations sont moins importantes.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

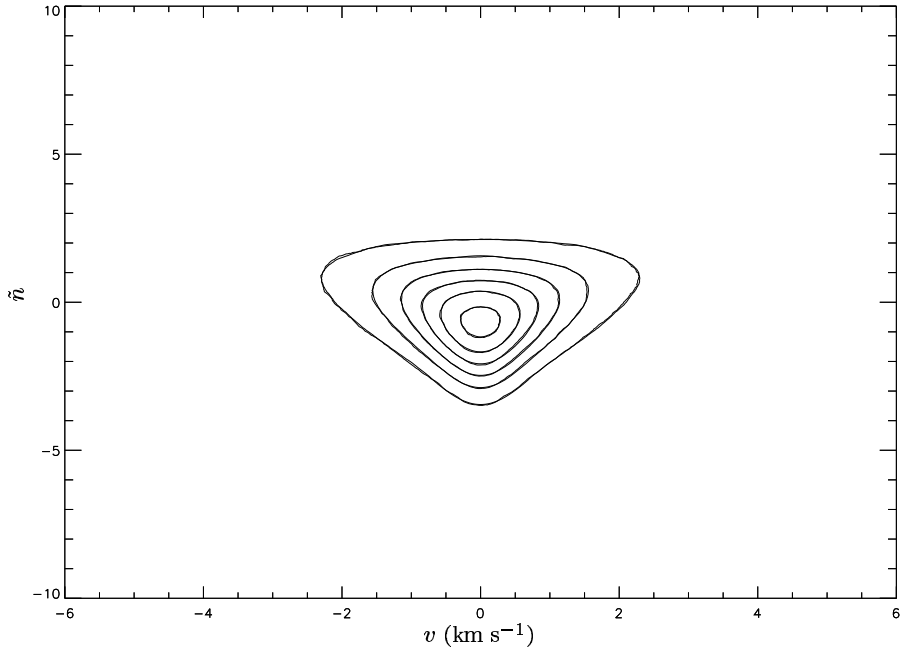

FIG. **XX**.7 – *Ajustement de la distribution jointe correspondant au même jeu de paramètres que la figure* **XX**.6. *La distribution simulée est représentée par des contours pointillés, l'ajustement par les contours en trait plein.*

XX.7 Perspectives

La prise en compte des corrélations entre les champs de densité et de vitesse stochastiques utilisés dans le cadre de l'étude du transfert radiatif au sein de milieux complexes tels que les nuages moléculaires, nécessitera comme prochaine étape le calcul précis des coefficients d_p intervenant dans la forme semi-empirique (117) de la distribution jointe $W(v,\tilde{n})$, dont on vient de voir rapidement, mais sans approfondir l'étude, qu'elle était justifiée par la simulation numérique de champs corrélés. La détermination de ces coefficients doit pouvoir se faire d'une part numériquement, en améliorant la précision des distributions simulées et en utilisant la méthode d'ajustement décrite à la section précédente, et d'autre part semi-analytiquement, en se fondant sur les équations différentielles écrites au **XX.5.b**.
Une fois ces coefficients connus, et leur comportement compris, on pourra par la suite inclure cette forme de la distribution jointe dans l'équation de transfert généralisée (107). L'intégration de cette dernière, en combinaison avec les équations régissant les populations des niveaux, doit alors permettre de déterminer les profils de raie émergents, à la manière de [Gail & Sedlmayr, 1974] et [Hegmann & Kegel, 2000]. Il est d'ailleurs probable que les corrélations ainsi introduites entre les champs de densité et de vitesse auront un effet notable sur ces profils, car la distribution des vitesses, qu'on relie naturellement au profil d'émission local ϕ, s'écarte de la distribution gaussienne qui prévalait jusqu'alors. Ce travail analytique et numérique, réalisé en collaboration avec Michael Hegmann, n'est pour l'instant pas achevé.

□

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse a porté, d'une manière générale, sur le problème inverse consistant à remonter aux propriétés des champs physiques tridimensionnels caractérisant le milieu interstellaire froid, à partir de l'information contenue dans les données observationnelles. Sachant que celles-ci sont obtenues au bout d'une chaîne de filtrage complexe, incluant de multiples effets, la résolution de ce problème ne peut se faire que pas à pas, en prenant les étapes les unes après les autres. Trois d'entre elles ont été abordées au cours de cette thèse, de manière plus ou moins approfondie mais en gardant sans cesse à l'esprit que les champs physiques réels auxquels on s'intéresse présentent un haut degré de complexité, et que par conséquent la modélisation de ces champs, ainsi que leur analyse et celle des observables, se doivent d'être axées sur cette propriété. On a en particulier utilisé abondamment les outils de l'analyse statistique des processus stochastiques.

Le cœur de ce travail a eu pour objet la résolution du problème de la projection des données sur un espace hybride constitué de deux dimensions d'espace et d'une dimension de vitesse, à partir de champs réels définis sur les trois dimensions d'espace. En modélisant le champ de densité et le champ de vitesse par des fractals de type browniens fractionnaires, et en effectuant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices mais néanmoins raisonnables, parmi lesquelles on retiendra le caractère optiquement mince de la transition observée, ou encore les propriétés d'homogénéité et d'isotropie de l'écoulement turbulent, on a pu déterminer analytiquement le comportement statistique des cartes d'observables telles que l'intensité intégrée, le centroïde de vitesse et le centroïde normalisé. En particulier, les relations obtenues permettent en théorie de séparer les contributions des fluctuations de densité de celles de la vitesse dans la statistique des raies observées. On a ainsi retrouvé le résultat déjà connu établissant l'égalité des indices spectraux de la densité et de l'intensité intégrée, dans la limite des échelles transverses petites devant la profondeur du nuage. On a également montré qu'on pouvait écrire la même égalité entre les indices spectraux du champ de vitesse et ceux des deux types de centroïdes, à condition que les fluctuations du champ de densité restent faibles. Cette égalité, qui constitue un résultat nouveau, a ensuite été testée numériquement, en construisant des observations synthétiques à partir de champs de densité et de vitesse possédant des propriétés statistiques bien déterminées. On a pu en vérifier la validité pour des fluctuations de densité relativement faibles, et on a remarqué que la normalisation des centroïdes autorisait un niveau de fluctuations plus élevé avant que l'égalité des indices spectraux ne soit mise en défaut.

Le deuxième problème auquel on s'est intéressé dans ce travail concerne le filtrage des structures complexes observées, après projection bidimensionnelle, par un interféromètre dont les caractéristiques sont inspirées de celles du futur instrument ALMA. Un simulateur couvrant les principes de base de l'interférométrie a donc été écrit, permettant d'obtenir des cartes de distribution de brillance filtrées par une fonction de transfert instrumentale réaliste, en prenant comme images de départ des champs browniens fractionnaires représentant les structures complexes du milieu interstellaire. Il est apparu que, parmi les outils permettant de caractériser la structure des images à la fois en entrée et en sortie du simulateur, le spectre de puissance, égal à la moyenne azimutale des carrés des modules des visibilités, éventuellement corrigées de la fonction de poids, constituait la méthode la plus fiable et la plus directe de détermination des propriétés structurelles des distributions de brillance. Après avoir remarqué que les outils testés ne tiraient partie que des amplitudes des composantes de Fourier d'une image, on a introduit une nouvelle méthode prometteuse, fondée sur l'analyse des histogrammes des incréments de phase. La forme de ces distributions de probabilité traduit la présence, dans une image, de structure à un niveau d'organisation plus élevé que les simples champs browniens fractionnaires utilisés pour la modélisation des nuages moléculaires.

Le troisième et dernier problème abordé au cours de cette thèse concerne la formation des raies moléculaires, observées en direction de structures complexes à la fois en densité et en vitesse. Pour cette étude, on s'est fondé sur des méthodes de transfert radiatif stochastique unidimensionnel développées, à partir du milieu des années 1970, par Gail, ses collaborateurs et ses successeurs. La contribution apportée par ce travail de thèse, détaillée dans le dernier chapitre, a consisté à introduire une corrélation entre la densité du gaz moléculaire et sa vitesse, toutes deux modélisées par des processus stochastiques de Ornstein-Uhlenbeck le long de la ligne de visée, et à calculer l'équation de transfert généralisée à laquelle obéit l'espérance de l'intensité en sortie du nuage. La résolution de cette équation nécessite la connaissance de la distribution de probabilité jointe du couple de variables aléatoires constitué par la vitesse et la densité logarithmique, problème qu'on a abordé en calculant les distributions de probabilité de chacune des deux variables indépendamment. Cette approche a permis d'établir que la distribution des vitesses n'est pas gaussienne en présence de corrélations, telles qu'elles ont été modélisées ici. Ce résultat nous incite à penser que la forme des raies peut être notablement modifiée par rapport au cas sans corrélation, ce qui pourrait amener une révision sensible des modèles de formation des raies dans les nuages moléculaires. La résolution numérique du problème est en cours.

En conclusion, il apparaît que le problème de l'inversion, qu'on a attaqué sur trois fronts dans ce travail et qui a cédé au passage quelques-uns de ses secrets, notamment en ce qui concerne les effets de projection sur l'espace hybride position-position-vitesse, reste encore largement ouvert. Qu'on songe seulement à quel point les différents problèmes ont été traités indépendamment les uns des autres ! On n'a, par exemple, pas du tout inclus le problème du transfert radiatif, ni même la notion d'épaisseur optique lorsqu'il a été question de la projection des champs tridimensionnels. Réciproquement, le traitement du transfert dans la dernière partie utilise des champs différents des browniens fractionnaires et qui n'ont pas d'équivalent en dimension trois, ce qui limite la portée du modèle. D'ailleurs, la modélisation des champs de densité et de vitesse par des browniens fractionnaires n'est pas non plus idéale, étant données les différences observées, en termes d'incréments de phase, entre ce type de champs synthétiques et des champs plus réalistes issus de simulations hydrodynamiques. Toutes ces critiques, amplement justifiées, n'appellent à mon sens qu'une seule conclusion : il reste encore beaucoup de travail à faire...

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Bibliographie

[Aannestad & Emery, 2003] Aannestad, P. A. & Emery, R. J., Modeling far-infrared line emission from the HII region S125, A&A, 406, 155, 2003.

[Abergel *et al.*, 1996] Abergel, A., Bernard, J. P., Boulanger, F., Cesarsky, C., Désert, F. X., Falgarone, E., Lagache, G., Pérault, M., Puget, J. L., Reach, W. T., Nordh, L., Olofsson, G., Huldtgren, M., Kaas, A. A., André, P., Bontemps, S., Burgdorf, M., Copet, E., Davies, J., Montmerle, T., Persi, P. & Sibille, F., ISOCAM mapping of the ρ Ophiuchi main cloud, A&A, 315, L329, 1996.

[Abramowitz & Stegun, 1964] Abramowitz, M. & Stegun, I. A., *Handbook of mathematical functions*, Dover, New York, 1964.

[Albrecht & Kegel, 1987] Albrecht, M. A. & Kegel, W. H., The formation of interstellar molecular lines in a turbulent velocity field with finite correlation length, A&A, 176, 317, 1987.

[Allan, 1966] Allan, D. W., Statistics of atomic frequency standards, Proc. IEEE, 54, 2, 221, 1966.

[Anselmet *et al.*, 1984] Anselmet, F., Gagne, Y., Hopfinger, E. J. & Antonia, R. A., High-order velocity structure functions in turbulent shear flows, J. Fl. Mech., 140, 63, 1984.

[Baker, 1973] Baker, P. L., A statistical investigation of neutral hydrogen line profiles, A&A, 23, 81, 1973.

[Baker, 1976] Baker, P. L., CO emission from turbulent molecular clouds, A&A, 50, 327, 1976.

[Bally *et al.*, 1987] Bally, J., Stark, A. A., Wilson, R. W. & Langer, W. D., Filamentary structure in the Orion molecular cloud, ApJ, 312, L45, 1987.

[Bensch *et al.*, 2001] Bensch, F., Stutzki, J. & Ossenkopf, V., Quantification of molecular cloud structure using the Δ-variance, A&A, 366, 636, 2001.

[Binney & Tremaine, 1987] Binney, J. & Tremaine, S., *Galactic dynamics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987.

[Black & Dalgarno, 1976] Black, J. H. & Dalgarno, A., Interstellar H_2 - The population of excited rotational states and the infrared response to ultraviolet radiation, ApJ, 203, 132, 1976.

[Black & Willner, 1984] Black, J. H. & Willner, S. P., Interstellar absorption lines in the infrared spectrum of NGC 2024 IRS 2, ApJ, 279, 673, 1984.

[Boone, 2001] Boone, F., Interferometric array design : Optimizing the locations of the antenna pads, A&A, 377, 368, 2001.

[Boone, 2002] Boone, F., Interferometric array design : Distributions of Fourier samples for imaging, A&A, 386, 1160, 2002.

[Booth, 2000] Booth, R. S., ALMA, the Atacama Large Millimetre Array, dans *Perspectives on Radio Astronomy : Technologies for Large Antenna Arrays*, edité par A. B. Smolders & M. P. Haarlem, ASTRON, Dwingeloo, 2000, 17.

[Born & Wolf, 1959] Born, M. & Wolf, E., *Principles of Optics*, Pergamon Press, London, 1959.

[Boulanger *et al.*, 1990] Boulanger, F., Falgarone, E., Puget, J. L. & Helou, G., Variations in the abundance of transiently heated particles within nearby molecular clouds, ApJ, 364, 136, 1990.

[Bowyer *et al.*, 1968] Bowyer, C. S., Field, G. B. & Mack, J. E., Detection of an anisotropic soft X-ray background flux, Nature, 217, 32, 1968.

[Bracewell, 2000] Bracewell, R. N., *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill, Boston, 2000.

[Brengauz, 1960] Brengauz, G. E., Contribution to the detection of the absorption radio line of interstellar CH molecules, Sov. Ast., 4, 554, 1960.

[Bronfman *et al.*, 1988] Bronfman, L., Cohen, R. S., Alvarez, H., May, J. & Thaddeus, P., A CO survey of the southern Milky Way - The mean radial distribution of molecular clouds within the solar circle, ApJ, 324, 248, 1988.

[Brown, 1828] Brown, R., A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants ; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, Phil. Mag., 4, 161, 1828.

[Brunt & Heyer, 2002] Brunt, C. M. & Heyer, M. H., Interstellar turbulence. I. Retrieval of velocity field statistics, ApJ, 566, 276, 2002.

[Brunt *et al.*, 2003] Brunt, C. M., Heyer, M. H., Vázquez-Semadeni, E., & Pichardo, B., Intrinsic, observed, and retrieved properties of interstellar turbulence, ApJ, 595, 824, 2003.

[Cadot *et al.*, 1995] Cadot, O., Douady, S. & Couder, Y., Characterization of the low-pressure filaments in a three-dimensional turbulent shear flow, Ph. Fl., 7, 630, 1995.

[Castellan, 2000] Castellan, G., *Sélection d'histogrammes ou de modèles exponentiels de polynômes par morceaux à l'aide d'un critère de type akaike*, Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, France, 2000.

[Chandrasekhar, 1949] Chandrasekhar, S., Turbulence - A physical theory of astrophysical interest, ApJ, 110, 329, 1949.

[Chandrasekhar & Münch, 1952] Chandrasekhar, S. & Münch, G., The theory of the fluctuations in brightness of the Milky way, ApJ, 115, 103, 1952.

[Chiang & Coles, 2000] Chiang, L. Y. & Coles, P., Phase information and the evolution of cosmological density perturbations, MNRAS, 311, 809, 2000.

[Chièze, 1987] Chièze, J. P., The fragmentation of molecular clouds. I. The mass-radius-velocity dispersion relations, A&A, 171, 225, 1987.

[Clegg *et al.*, 1992] Clegg, A. W., Cordes, J. M., Simonetti, J. M. & Kulkarni, S. R., Rotation measures of low-latitude extragalactic sources and the magnetoionic structure of the Galaxy, ApJ, 386, 143, 1992.

[Cohen-Tannoudji *et al.*, 1973] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F., *Mécanique Quantique*, Hermann, Paris, 1973.

[Cornwell & Evans, 1985] Cornwell, T. J. & Evans, K. F., A simple maximum entropy deconvolution algorithm, A&A, 143, 77, 1985.

[Dame *et al.*, 1986] Dame, T. M., Elmegreen, B. G., Cohen, R. S. & Thaddeus, P., The largest molecular cloud complexes in the first galactic quadrant, ApJ, 305, 892, 1986.

[Dame *et al.*, 2001] Dame, T. M., Hartmann, D. & Thaddeus, P., The Milky Way in molecular clouds : a new complete CO survey, ApJ, 547, 792, 2001.

[Dame & Thaddeus, 1994] Dame, T. M. & Thaddeus, P., Detection of a thick molecular disk in the galaxy, ApJ, 436, L173, 1994.

[Désert *et al.*, 1986] Désert, F. X., Boulanger, F., Léger, A., Puget, J. L. & Sellgren, K., Nature of very small grains - PAH molecules or silicates ?, A&A, 159, 328, 1986.

[Deshpande *et al.*, 2000] Deshpande, A. A., Dwarakanath, K. S. & Goss, W. M., Power spectrum of the density of cold atomic gas in the Galaxy toward Cassiopeia A and Cygnus A, ApJ, 543, 227, 2000.

[d'Hendecourt *et al.*, 1985] d'Hendecourt, L. B., Allamandola, L. J. & Greenberg, J. M., Time dependent chemistry in dense molecular clouds. I. Grain surface reactions, gas/grain interactions and infrared spectroscopy, A&A, 152, 130, 1985.

[Dickey *et al.*, 2001] Dickey, J. M., McClure-Griffiths, N. M., Stanimirovic, S., Gaensler, B. M. & Green, A. J., Southern Galactic plane survey measurements of the spatial power spectrum of interstellar HI in the inner Galaxy, ApJ, 561, 264, 2001.

[Dickman & Kleiner, 1985] Dickman, R. L. & Kleiner, S. C., Largescale structure of the Taurus molecular complex. III. Methods for turbulence, ApJ, 295, 479, 1985.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[Diu *et al.*, 2000] Diu, B., Guthmann, C., Lederer, D. & Roulet, B., *Physique Statistique*, Hermann, Paris, 2000.

[Draine, 1978] Draine, B. T., Photoelectric heating of interstellar gas, ApJS, 36, 595, 1978.

[Draine, 2003] Draine, B. T., Interstellar dust grains, ARAA, 41, 241, 2003.

[Einstein, 1905] Einstein, A., Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, Ann. Phys., 17, 549, 1905.

[Elmegreen, 2002] Elmegreen, B. G., Star formation from galaxies to globules, ApJ, 577, 206, 2002.

[Elmegreen & Falgarone, 1996] Elmegreen, B. G. & Falgarone, E., A fractal origin for the mass spectrum of interstellar clouds, ApJ, 471, 816, 1996.

[Elmegreen *et al.*, 2001] Elmegreen, B. G., Kim, S. & Staveley-Smith, L., A fractal analysis of the HI emission from the Large Magellanic Cloud, ApJ, 548, 749, 2001.

[Esquivel *et al.*, 2003] Esquivel, A., Lazarian, A., Pogosyan, D. & Cho, J., Velocity statistics from spectral line data : effects of density-velocity correlations, magnetic field and shear, MNRAS, 342, 325, 2003.

[Falconer, 1990] Falconer, K., *Fractal Geometry : Mathematical foundations and applications*, John Wiley and Sons, Chichester, 1990.

[Falgarone, 1998] Falgarone, E., From giant molecular clouds to compact cores, dans *Starbursts : Triggers, Nature, and Evolution*, edité par B. Guiderdoni & A. Kembhavi, EDP Sciences, Les Houches School, 1998, 41.

[Falgarone *et al.*, 2003] Falgarone, E., Hily-Blant, P. & Levrier, F., Structure of molecular clouds, dans *Magnetic fields and star formation*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2003.

[Falgarone & Lequeux, 1973] Falgarone, E. & Lequeux, J., A discussion of the distribution of interstellar matter close to the Sun, A&A, 25, 253, 1973.

[Falgarone & Pérault, 1987] Falgarone, E. & Pérault, M., Structure and physics of cool giant molecular complexes, dans *Physical processes in interstellar clouds*, D. Reidel, Dordrecht, 1987, 59.

[Falgarone *et al.*, 2001] Falgarone, E., Pety, J. & Phillips, T. G., Filamentary structure and helical magnetic fields in the environment of a starless dense core, ApJ, 555, 178, 2001.

[Falgarone & Phillips, 1990] Falgarone, E. & Phillips, T. G., A signature of the intermittency of interstellar turbulence - The wings of molecular line profiles, ApJ, 359, 344, 1990.

[Falgarone *et al.*, 1991] Falgarone, E., Phillips, T. G. & Walker, C. K., The edges of molecular clouds - Fractal boundaries and density structure, ApJ, 378, 186, 1991.

[Falgarone & Puget, 1995] Falgarone, E. & Puget, J. L., The intermittency of turbulence in interstellar clouds : implications for the gas kinetic temperature and decoupling of heavy particles from the gas motions, A&A, 293, 840, 1995.

[Falgarone *et al.*, 1992] Falgarone, E., Puget, J. L. & Pérault, M., The small-scale density and velocity structure of quiescent molecular clouds, A&A, 257, 715, 1992.

[Feder, 1988] Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.

[Fiege & Pudritz, 2000] Fiege, J. D. & Pudritz, R. E., Helical fields and filamentary molecular clouds. I, MNRAS, 311, 85, 2000.

[Fosalba *et al.*, 2002] Fosalba, P., Lazarian, A., Prunet, S. & Tauber, J. A., Statistical properties of Galactic starlight polarization, ApJ, 564, 762, 2002.

[Frisch & Slavin, 2003] Frisch, P. C. & Slavin, J. D., The chemical composition and gas-to-dust mass ratio of nearby interstellar matter, ApJ, 594, 844, 2003.

[Gail *et al.*, 1974] Gail, H. P., Hundt, E., Kegel, W. H., Schmid-Burgk, J. & Traving, G., Line formation in turbulent media, A&A, 32, 65, 1974.

[Gail & Sedlmayr, 1974] Gail, H. P. & Sedlmayr, E., Effects of correlated turbulent velocities on photospheric line formation, A&A, 36, 17, 1974.

[Gail *et al.*, 1975] Gail, H. P., Sedlmayr, E. & Traving, G., Non-LTE line formation in turbulent media, A&A, 44, 421, 1975.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[Gautier *et al.*, 1992] Gautier, T. N. I., Boulanger, F., Pérault, M. & Puget, J. L., A calculation of confusion noise due to infrared cirrus, AJ, 103, 1313, 1992.

[Goldman, 2000] Goldman, I., Interpretation of the spatial power spectra of neutral hydrogen in the Galaxy and in the Small Magellanic Cloud, ApJ, 541, 701, 2000.

[Goldreich & Sridhar, 1995] Goldreich, P. & Sridhar, S., Toward a theory of interstellar turbulence. II. Strong Alfvénic turbulence, ApJ, 438, 763, 1995.

[Goldreich & Sridhar, 1997] Goldreich, P. & Sridhar, S., Magnetohydrodynamic turbulence revisited, ApJ, 485, 680, 1997.

[Goldsmith & Langer, 1999] Goldsmith, P. F. & Langer, W. D., Population diagram analysis of molecular line emission, ApJ, 517, 209, 1999.

[Goodman *et al.*, 1989] Goodman, A. A., Crutcher, R. M., Heiles, C., Myers, P. C. & Troland, T. H., Measurement of magnetic field strength in the dark cloud Barnard 1, ApJ, 338, L61, 1989.

[Gradshteyn & Ryzhik, 1980] Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M., *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, 1980.

[Green, 1993] Green, D. A., A power spectrum analysis of the angular scale of Galactic neutral hydrogen emission towards $l = 140°$, $b = 0°$, MNRAS, 262, 327, 1993.

[Guibert *et al.*, 1978] Guibert, J., Lequeux, J. & Viallefond, F., Star formation in interstellar gas density in our Galaxy, A&A, 68, 1, 1978.

[Guilloteau, 2000] Guilloteau, S., Millimeter Interferometers, dans *Proceedings from the Second IRAM Millimeter Interferometry Summer School*, edité par A. Dutrey, Grenoble, 2000.

[Hartmann *et al.*, 2001] Hartmann, L., Ballesteros-Paredes, J. & Bergin, E. A., Rapid formation of molecular clouds and stars in the Solar neighborhood, ApJ, 562, 852, 2001.

[Harwit, 1973] Harwit, M., *Astrophysical concepts*, Wiley, 1973.

[Harwit & Spaans, 2003] Harwit, M. & Spaans, M., Chemical composition of the early Universe, ApJ, 589, 53, 2003.

[Hegmann & Kegel, 2000] Hegmann, M. & Kegel, W. H., Non-LTE line formation in clumpy and turbulent molecular clouds, A&A, 359, 405, 2000.

[Heiles, 1997] Heiles, C., Tiny-scale atomic structure and the cold neutral medium, ApJ, 481, 193, 1997.

[Heiles, 2001] Heiles, C., New temperatures of diffuse interstellar gas : Thermally unstable gas, ApJ, 551, L105, 2001.

[Heithausen *et al.*, 1998] Heithausen, A., Bensch, F., Stutzki, J., Falgarone, E. & Panis, J. F., The IRAM key project : small-scale structure of pre-star forming regions. Combined mass spectra and scaling laws, A&A, 331, L65, 1998.

[Heitsch *et al.*, 2001] Heitsch, F., Mac Low, M. M. & Klessen, R. S., Gravitational collapse in turbulent molecular clouds. II. Magnetohydrodynamical turbulence, ApJ, 547, 280, 2001.

[Hennebelle & Pérault, 2000] Hennebelle, P. & Pérault, M., Dynamical condensation in a magnetized and thermally bistable flow. Application to interstellar cirrus, A&A, 359, 1124, 2000.

[Hentschel & Procaccia, 1984] Hentschel, H. G. E. & Procaccia, I., Relative diffusion in turbulent media : the fractal dimension of clouds, Phys. Rev. A, 29, 1461, 1984.

[Hey *et al.*, 1946] Hey, J. S., Parsons, S. J. & Phillips, J. W., Fluctuations in cosmic radiation at radio frequencies, Nature, 158, 234, 1946.

[Heyer *et al.*, 2001] Heyer, M. H., Carpenter, J. M. & Snell, R. L., The equilibrium state of molecular regions in the outer Galaxy, ApJ, 551, 852, 2001.

[Hollenbach & Salpeter, 1971] Hollenbach, D. & Salpeter, E. E., Surface recombination of hydrogen molecules, ApJ, 163, 155, 1971.

[Holweger, 1967] Holweger, H., Ein empirisches Modell der Sonnenatmosphäre mit lokalem thermodynamischem Gleichgewicht, Zeit. Ast., 65, 365, 1967.

[Hubble, 1936] Hubble, E. P., *The realm of the nebulae*, Yale University Press, New Haven, 1936.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[Ingalls *et al.*, 2000] Ingalls, J. G., Bania, T. M., Lane, A. P., Rumitz, M. & Stark, A. A., Physical state of molecular gas in high Galactic latitude translucent clouds, ApJ, 535, 211, 2000.

[Jansky, 1933] Jansky, K. G., Electrical disturbances apparently of extraterrestrial origin, Proc. IRE, 21, 1387, 1933.

[Jeans, 1902] Jeans, J. H., Phil. Trans. A., 199, 1, 1902.

[Jenkins & Tripp, 2001] Jenkins, E. B. & Tripp, T. M., The distribution of thermal pressures in the interstellar medium from a survey of CI fine-structure excitation, ApJS, 137, 297, 2001.

[Jimenez, 1998] Jimenez, J., dans *Dynamics and statistics of concentrated vortices in turbulent flows*, Euromech, 1998, 384.

[Joncas *et al.*, 1992] Joncas, G., Boulanger, F. & Dewdney, P. E., A high-resolution 21 centimeter line study of infrared cirrus, ApJ, 397, 165, 1992.

[Joulain *et al.*, 1998] Joulain, K., Falgarone, E., Des Forêts, G. P. & Flower, D., Non-equilibrium chemistry in the dissipative structures of interstellar turbulence, A&A, 340, 241, 1998.

[Juvela, 1997] Juvela, M., Non-LTE radiative transfer in clumpy molecular clouds., A&A, 322, 943, 1997.

[Kitamura *et al.*, 1993] Kitamura, Y., Sunada, K., Hayashi, M. & Hasegawa, T., High-resolution observations of turbulence in the subcondensation TMC-1C in Heiles' cloud 2 - Estimation of the velocity spectrum of turbulence, ApJ, 413, 221, 1993.

[Kleiner & Dickman, 1984] Kleiner, S. C. & Dickman, R. L., Large-scale structure of the Taurus molecular complex. I. Density fluctuations - A fossil Jeans length ?, ApJ, 286, 255, 1984.

[Kleiner & Dickman, 1985] Kleiner, S. C. & Dickman, R. L., Large-scale structure of the Taurus molecular complex. II - Analysis of velocity fluctuations and turbulence, ApJ, 295, 466, 1985.

[Klessen *et al.*, 2000] Klessen, R. S., Heitsch, F. & Mac Low, M. M., Gravitational collapse in turbulent molecular clouds. I. Gasdynamical turbulence, ApJ, 535, 887, 2000.

[Kolmogorov, 1933] Kolmogorov, A. N., Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits Rechnung, Ergeb. Math und ihrer Grensg., 2, 1933.

[Kolmogorov, 1941] Kolmogorov, A. N., Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds numbers, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 30, 299, 1941.

[Kolmogorov, 1962] Kolmogorov, A. N., A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number, J. Fl. Mech., 13, 82, 1962.

[Kruegel, 2003] Kruegel, E., *The physics of interstellar dust*, The Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 2003.

[Kun *et al.*, 2000] Kun, M., Vinkó, , J. & Szabados, L., Star formation in the Cepheus Flare region - II. A-type stars associated with IRAS sources, MNRAS, 319, 777, 2000.

[Lada *et al.*, 1997] Lada, E. A., Evans, N. J. I. & Falgarone, E., Physical properties of molecular cloud cores in L1630 and implications for star formation, ApJ, 488, 286, 1997.

[Larson, 1981] Larson, R. B., Turbulence and star formation in molecular clouds, MNRAS, 194, L809, 1981.

[Lazarian & Esquivel, 2003] Lazarian, A. & Esquivel, A., Statistics of velocity from spectral data : modified velocity centroids, ApJ, 592, L37, 2003.

[Lazarian & Pogosyan, 2000] Lazarian, A. & Pogosyan, D., Velocity modification of HI power spectrum, ApJ, 537, 720, 2000.

[Lazarian *et al.*, 2001] Lazarian, A., Pogosyan, D., Vázquez-Semadeni, E. & Pichardo, B., Emissivity statistics in turbulent compressible magnetohydrodynamic flows and the density-velocity correlation, ApJ, 555, 130, 2001.

[Lemme *et al.*, 1995] Lemme, C., Walmsley, C. M., Wilson, T. L. & Muders, D., A detailed study of an extremely quiescent core : L1498, A&A, 302, 509, 1995.

[Lequeux *et al.*, 2002] Lequeux, J., Falgarone, E. & Ryter, C., *Le milieu interstellaire*, CNRS Éditions, Paris, 2002.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[Lequeux & Roueff, 1991] Lequeux, J. & Roueff, E., Interstellar molecules, Physics Reports, 200, 241, 1991.

[Lin & Shu, 1964] Lin, C. C. & Shu, F. H., On the spiral structure of disk galaxies., ApJ, 140, 646, 1964.

[Lis *et al.*, 1996] Lis, D. C., Pety, J., Phillips, T. G. & Falgarone, E., Statistical properties of line centroid velocities and centroid velocity increments in compressible turbulence, ApJ, 463, 623, 1996.

[Loren, 1989] Loren, R. B., The cobwebs of Ophiuchus. I. Strands of ^{13}CO - The mass distribution, ApJ, 338, 902, 1989.

[Lovejoy, 1982] Lovejoy, S., Area-perimeter relation for rain and cloud areas, Science, 216, 185, 1982.

[Low *et al.*, 1984] Low, F. J., Young, E., Beintema, D. A., Gautier, T. N., Beichman, C. A., Aumann, H. H., Gillett, F. C., Neugebauer, G., Boggess, N. & Emerson, J. P., Infrared cirrus - New components of the extended infrared emission, ApJ, 278, L19, 1984.

[Lynds, 1962] Lynds, B. T., Catalogue of dark nebulae., ApJS, 7, 1, 1962.

[Mandelbrot, 1982] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, 1982.

[Mandelbrot, 1967] Mandelbrot, B. M., How long is the coast of Britain ?, Science, 155, 636, 1967.

[Manneville, 1990] Manneville, P., *Structures dissipatives, chaos et turbulence*, Alea, Saclay, 1990.

[Mannheim, 1997] Mannheim, P. D., Are galactic rotation curves really flat ?, ApJ, 479, 659, 1997.

[Massi & Comoretto, 1990] Massi, M. & Comoretto, G., Recovery of phase information from radio-interferometric observations, A&A, 228, 569, 1990.

[Mathis, 2000] Mathis, J. S., The warm ionized medium in the Milky Way and other galaxies, ApJ, 544, 347, 2000.

[Mathis *et al.*, 1977] Mathis, J. S., Rumpl, W. & Nordsieck, K. H., The size distribution of interstellar grains, ApJ, 217, 425, 1977.

[May *et al.*, 1997] May, J., Alvarez, H. & Bronfman, L., Physical properties of molecular clouds in the southern outer Galaxy., A&A, 327, 325, 1997.

[McKee & Ostriker, 1977] McKee, C. F. & Ostriker, J. P., A theory of the interstellar medium - Three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate, ApJ, 218, 148, 1977.

[McKee *et al.*, 1993] McKee, C. F., Zweibel, E. G., Goodman, A. A. & Heiles, C., *Magnetic Fields in Star-Forming Regions - Theory*, University of Arizona Press, Tucson, Arizona, 1993.

[Meneveau & Sreenivasan, 1991] Meneveau, C. & Sreenivasan, K. R., The multifractal nature of turbulent energy dissipation, J. Fl. Mech., 224, 429, 1991.

[Miesch & Bally, 1994] Miesch, M. S. & Bally, J., Statistical analysis of turbulence in molecular clouds, ApJ, 429, 645, 1994.

[Mihalas, 1978] Mihalas, D., *Stellar atmospheres*, W.H. Freeman, San Francisco, 1978.

[Miville-Deschênes *et al.*, 2002] Miville-Deschênes, M. A., Boulanger, F., Joncas, G. & Falgarone, E., ISO-CAM observations of the Ursa Major cirrus - Evidence for large abundance variations of small dust grains, A&A, 381, 209, 2002.

[Miville-Deschênes *et al.*, 1995] Miville-Deschênes, M. A., Joncas, G. & Durand, D., The HII region Sharpless 170 : A multiscale analysis of the Hα velocity field, ApJ, 454, 316, 1995.

[Miville-Deschênes *et al.*, 2003a] Miville-Deschênes, M. A., Joncas, G., Falgarone, E. & Boulanger, F., High resolution 21 cm mapping of the Ursa Major Galactic cirrus - Power spectra of the high-latitude HI gas, A&A, 411, 109, 2003a.

[Miville-Deschênes *et al.*, 2003b] Miville-Deschênes, M. A., Levrier, F. & Falgarone, E., On the use of fractional Brownian motion simulations to determine the three-dimensional statistical properties of interstellar gas, ApJ, 593, 831, 2003b.

[Monin & Yaglom, 1975] Monin, A. S. & Yaglom, A. M., *Statistical Fluid Mechanics, Vol. 2*, MIT Press, Cambridge, MA, 1975.

[Motte *et al.*, 1998] Motte, F., André, P. & Neri, R., The initial conditions of star formation in the ρ Ophiuchi main cloud : wide-field millimeter continuum mapping, A&A, 336, 150, 1998.

[Münch, 1958] Münch, G., Internal motions in the Orion nebula, Rev. Mod. Phys., 30, 1035, 1958.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[Myers *et al.*, 1991] Myers, P. C., Ladd, E. F. & Fuller, G. A., Thermal and nonthermal motions in dense cores, ApJ, 372, L95, 1991.

[Obukhov, 1962] Obukhov, A. M., Some specific features of atmospheric turbulence, J. Fl. Mech., 13, 77, 1962.

[O'Dell & Castaneda, 1987] O'Dell, C. R. & Castaneda, H. O., Evidence for turbulence in HII regions, ApJ, 317, 686, 1987.

[Ossenkopf & Mac Low, 2002] Ossenkopf, V. & Mac Low, M. M., Turbulent velocity structure in molecular clouds, A&A, 390, 307, 2002.

[Ostriker *et al.*, 2001] Ostriker, E. C., Stone, J. M. & Gammie, C. F., Density, velocity and magnetic field structure in turbulent molecular cloud models, ApJ, 546, 980, 2001.

[Papoulis, 1984] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1984.

[Pardo, 2000] Pardo, J., Atmospheric absorption, dans *Proceedings from the Second IRAM Millimeter Interferometry Summer School*, edité par A. Dutrey, IRAM, Grenoble, 2000.

[Pearson *et al.*, 1981] Pearson, T. J., Unwin, S. C., Cohen, M. H., Linfield, R. P., Readhead, A. C. S., Seielstad, G. A., Simon, R. S. & Walker, R. C., Superluminal expansion of quasar 3C273, Nature, 290, 365, 1981.

[Pelat, 1998] Pelat, D., Bruits et Signaux, Polycopié DEA, 1998.

[Perrin, 1913] Perrin, J., *Les atomes*, Flammarion, Paris, 1913.

[Pety, 1999] Pety, J., *Structures dissipatives de la turbulence interstellaire : signatures cinématiques*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, France, 1999.

[Pety & Falgarone, 2000] Pety, J. & Falgarone, E., The elusive structure of the diffuse molecular gas : shocks or vortices in compressible turbulence ?, A&A, 356, 279, 2000.

[Pety & Falgarone, 2003] Pety, J. & Falgarone, E., Non-Gaussian velocity shears in the environment of low mass dense cores, A&A, 412, 417, 2003.

[Phillipps *et al.*, 1981] Phillipps, S., Kearsey, S., Osborne, J. L., Haslam, C. G. T. & Stoffel, H., Distribution of galactic synchrotron emission. II, A&A, 103, 405, 1981.

[Plume *et al.*, 2000] Plume, R., Bensch, F., Howe, J. E., Ashby, M. L. N., Bergin, E. A., Chin, G., Erickson, N. R., Goldsmith, P. F., Harwit, M., Kleiner, S., Koch, D. G., Neufeld, D. A., Patten, B. M., Schieder, R., Snell, R. L., Stauffer, J. R., Tolls, V., Wang, Z., Winnewisser, G., Zhang, Y. F., Reynolds, K., Joyce, R., Tavoletti, C., Jack, G., Rodkey, C. J. & Melnick, G. J., Large-scale ^{13}CO ($J = 5 \rightarrow 4$) and CI Mapping of Orion A, ApJ, 539, L133, 2000.

[Polygiannakis & Moussas, 1995] Polygiannakis, J. M. & Moussas, X., Detection of nonlinear dynamics in solar wind and a comet using phase-correlation measures, So. Ph., 158, 159, 1995.

[Pope, 2000] Pope, S. B., *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Poppel *et al.*, 1994] Poppel, W. G. L., Marronetti, P. & Benaglia, P., The warm and cold neutral phase in the local interstellar medium at absolute value of b greater than or equal to 10°, A&A, 287, 601, 1994.

[Porter *et al.*, 1994] Porter, D. H., Pouquet, A. & Woodward, P. R., Kolmogorov-like spectra in decaying three-dimensional supersonic flows, Ph. Fl., 6, 2133, 1994.

[Puget & Léger, 1989] Puget, J. L. & Léger, A., A new component of the interstellar matter - Small grains and large aromatic molecules, ARAA, 27, 161, 1989.

[Rand & Lyne, 1994] Rand, R. J. & Lyne, A. G., New rotation measures of distant pulsars in the inner Galaxy and magnetic field reversals, MNRAS, 268, 497, 1994.

[Reber, 1940] Reber, G., Cosmic static, ApJ, 91, 621, 1940.

[Reynolds *et al.*, 1995] Reynolds, R. J., Tufte, S. L., Kung, D. T., McCullough, P. R. & Heiles, C., A comparison of diffuse ionized and neutral hydrogen away from the Galactic plane : Hα-emitting HI clouds, ApJ, 448, 715, 1995.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[Richardson, 1922] Richardson, L. F., *Weather prediction by numerical process*, Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

[Risken, 1989] Risken, H., *The Fokker-Planck equation : methods of solution and applications*, Springer, Berlin, 1989.

[Rohlfs & Wilson, 2000] Rohlfs, K. & Wilson, T. L., *Tools of radio astronomy*, Springer, New York, 2000.

[Rosolowsky *et al.*, 1999] Rosolowsky, E. W., Goodman, A. A., Wilner, D. J. & Williams, J. P., The spectral correlation function : A new tool for analyzing spectral line maps, ApJ, 524, 887, 1999.

[Ryle *et al.*, 1965] Ryle, M., Elsmore, B. & Neville, A. C., High resolution observations of radio sources in Cygnus and Cassiopeia, Nature, 205, 1259, 1965.

[Ryle & Vonberg, 1946] Ryle, M. & Vonberg, D. D., Solar radiation at175 Mc/s, Nature, 158, 339, 1946.

[Sakamoto, 2002] Sakamoto, S., Detailed structure of low-density molecular gas in high-latitude clouds, ApJ, 565, 1050, 2002.

[Savage *et al.*, 1977] Savage, B. D., Drake, J. F., Budich, W. & Bohlin, R. C., A survey of interstellar molecular hydrogen. I, ApJ, 216, 291, 1977.

[Scalo, 1985] Scalo, J. M., Fragmentation and hierarchical structure in the interstellar medium, dans *Protostars and planets II*, University of Arizona Press, Tucson, AZ, 1985, 201.

[Scherrer *et al.*, 1991] Scherrer, R. J., Melott, A. L. & Shandarin, S. F., A quantitative measure of phase correlations in density fields, ApJ, 377, 29, 1991.

[Shu, 1991] Shu, F. H., *The Physics of Astrophysics*, University Science Books, Mill Valley, 1991.

[Simon *et al.*, 2001] Simon, R., Jackson, J. M., Clemens, D. P., Bania, T. M. & Heyer, M. H., The structure of four molecular cloud complexes in the BU-FCRAO Milky Way Galactic Ring survey, ApJ, 551, 747, 2001.

[Sokolov & Ternov, 1969] Sokolov, A. A. & Ternov, J. M., *Synchrotron radiation*, Pergamon press, Londres, 1969.

[Solomon *et al.*, 1987] Solomon, P. M., Rivolo, A. R., Barrett, J. & Yahil, A., Mass, luminosity, and line width relations of Galactic molecular clouds, ApJ, 319, 730, 1987.

[Spicker & Feitzinger, 1988] Spicker, J. & Feitzinger, J. V., Analysis of turbulence in the Large Magellanic Cloud - The HI radial velocity field, A&A, 191, 10, 1988.

[Spitzer, 1978] Spitzer, L., *Physical processes in the interstellar medium*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[Sridhar & Goldreich, 1994] Sridhar, S. & Goldreich, P., Toward a theory of interstellar turbulence. I. Weak Alfvénic turbulence, ApJ, 432, 612, 1994.

[Stanimirovic & Lazarian, 2001] Stanimirovic, S. & Lazarian, A., Velocity and Density Spectra of the Small Magellanic Cloud, ApJ, 551, L53, 2001.

[Strömgren, 1939] Strömgren, B., The physical state of interstellar hydrogen., ApJ, 89, 526, 1939.

[Stutzki *et al.*, 1998] Stutzki, J., Bensch, F., Heithausen, A., Ossenkopf, V. & Zielinsky, M., On the fractal structure of molecular clouds, A&A, 336, 697, 1998.

[Testi & Sargent, 1998] Testi, L. & Sargent, A. I., Star formation in clusters : A survey of compact millimeter-wave sources in the Serpens core, ApJ, 508, L91, 1998.

[Thompson & Bracewell, 1974] Thompson, A. R. & Bracewell, R. N., Interpolation and Fourier transformation of fringe visibilities, AJ, 79, 11, 1974.

[Thompson *et al.*, 1991] Thompson, A. R., Moran, J. M. & Swenson, G. W., *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, Krieger, Malabar, Florida, 1991.

[Traving, 1964] Traving, G., Über die Bildung von Fraunhoferlinien in turbulenten Sternatmosphären. Mit 3 Textabbildungen, Zeit. Ast., 60, 167, 1964.

[van De Hulst, 1951] van De Hulst, H. C., Observations of the interstellar hydrogen line of wave length 21 cm made at Kootwijk, Netherlands, AJ, 56, 144, 1951.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

[van Dishoeck & Black, 1988] van Dishoeck, E. F. & Black, J. H., The photodissociation and chemistry of interstellar CO, ApJ, 334, 771, 1988.

[van Dyke, 1982] van Dyke, M., *An album of fluid motion*, Parabolic Press, Stanford, 1982.

[van Langevelde *et al.*, 1992] van Langevelde, H. J., Frail, D. A., Cordes, J. M. & Diamond, P. J., Interstellar scattering toward the Galactic center as probed by OH/IR stars, ApJ, 396, 686, 1992.

[Vazquez-Semadeni *et al.*, 2000] Vazquez-Semadeni, E., Ostriker, E. C., Passot, T., Gammie, C. F. & Stone, J. M., Compressible MHD turbulence : Implications for molecular cloud and star formation, dans *Protostars and Planets IV*, edité par V. Mannings, A. P. Boss & S. S. Russell, University of Arizona Press, Tucson, AZ, 2000, 3.

[Vogelaar & Wakker, 1994] Vogelaar, M. G. R. & Wakker, B. P., Measuring the fractal structure of interstellar clouds, A&A, 291, 557, 1994.

[von Hoerner, 1951] von Hoerner, S., Eine Methode zur Untersuchung der Turbulenz der interstellaren Materie. Mit 10 Textabbildungen, Zeit. Ast., 30, 17, 1951.

[von Mises, 1957] Von Mises, R., *Probability, Statistics and Truth*, G. Allen and Unwin Ltd., London, 1957.

[von Weizsäcker, 1951] von Weizsäcker, C. F., The evolution of galaxies and stars, ApJ, 114, 165, 1951.

[Wang *et al.*, 1995] Wang, Y., Evans, N. J. I., Zhou, S. & Clemens, D. P., Collapse candidates among the Bok globules, ApJ, 454, 217, 1995.

[Ward-Thompson *et al.*, 1994] Ward-Thompson, D., Scott, P. F., Hills, R. E. & André, P., A submillimetre continuum survey of pre-protostellar cores, MNRAS, 268, 276, 1994.

[Watson, 2001] Watson, J. K. G., Assignment of the λ1369.13 diffuse interstellar absorption band and three other far-ultraviolet interstellar absorption lines to the CH molecule, ApJ, 555, 472, 2001.

[Watts *et al.*, 2003] Watts, P., Coles, P. & Melott, A., The universal behavior of phase correlations in nonlinear gravitational clustering, ApJ, 589, L61, 2003.

[Weingartner & Draine, 1999] Weingartner, J. C. & Draine, B. T., Interstellar depletion onto very small dust grains, ApJ, 517, 292, 1999.

[Williams *et al.*, 2000] Williams, J. P., Blitz, L. & McKee, C. F., The structure and evolution of molecular clouds : from clumps to cores to the IMF, dans *Protostars and Planets IV*, edité par V. Mannings, A. P. Boss & S. S. Russell, University of Arizona Press, Tucson, AZ, 2000, 97.

[Williams *et al.*, 1994] Williams, J. P., De Geus, E. J. & Blitz, L., Determining structure in molecular clouds, ApJ, 428, 693, 1994.

[Wofsy *et al.*, 1971] Wofsy, S., Reid, R. H. G. & Dalgarno, A., Spin-change scattering of CII and OI by atomic hydrogen, ApJ, 168, 161, 1971.

[Wolfire *et al.*, 1995] Wolfire, M. G., Hollenbach, D., McKee, C. F., Tielens, A. G. G. M. & Bakes, E. L. O., The neutral atomic phases of the interstellar medium, ApJ, 443, 152, 1995.

[Wootten *et al.*, 1998] Wootten, A., Snyder, L., van Dischoek, E. & Owen, F., Frequency band considerations and recommendations, Rapport technique, MMA Memo 213, Page :, 1998.

[York, 1974] York, D. G., Highly ionized atoms observed with Copernicus, ApJ, 193, L127, 1974.

[Yorke *et al.*, 1989] Yorke, H. W., Tenorio-Tagle, G., Bodenheimer, P. & Rozyczka, M., The combined role of ionization and supernova explosions in the destruction of molecular clouds, A&A, 216, 207, 1989.

[Zuckerman & Evans, 1974] Zuckerman, B. & Evans, N. J. I., Models of massive molecular clouds, ApJ, 192, L149, 1974.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Article paru dans "Astrophysical Journal", 593, 831, 2003

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, 593:831–847, 2003 August 20
© 2003. The American Astronomical Society. All rights reserved. Printed in U.S.A.

ON THE USE OF FRACTIONAL BROWNIAN MOTION SIMULATIONS TO DETERMINE THE THREE-DIMENSIONAL STATISTICAL PROPERTIES OF INTERSTELLAR GAS

M.-A. MIVILLE-DESCHÊNES
Canadian Institute for Theoretical Astrophysics, 60 St. George Street, Toronto, ON M5S 3H8, Canada

AND

F. LEVRIER AND E. FALGARONE
Laboratoire d'Étude du Rayonnement et de la Matière en Astrophysique (LERMA)/Laboratoire de Radioastromomie (LRA)–CNRS UMR 8112, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France
Received 2002 November 20; accepted 2003 April 30

ABSTRACT

Based on fractional Brownian motion (fBm) simulations of three-dimensional gas density and velocity fields, we present a study of the statistical properties of spectroimagery observations (channel maps, integrated emission, and line centroid velocity) in the case of an optically thin medium at various temperatures. The power spectral index γ_W of the integrated emission is confirmed to be that of the three-dimensional density field (γ_n) provided that the medium's depth is at least of the order of the largest transverse scale in the image, and the power spectrum of the centroid velocity map is found to have the same index γ_C as that of the velocity field (γ_v). Further tests with non-fBm density and velocity fields show that this last result holds and is not modified by the effects of density-velocity correlations. A comparison is made with the theoretical predictions of Lazarian & Pogosyan.

Subject headings: ISM: structure — methods: numerical — methods: statistical — turbulence

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

1. INTRODUCTION

The early works on interstellar turbulence, summarized by Chandrasekhar (1949), pointed out that the interstellar medium (ISM) exhibits Reynolds numbers so large that it is very likely to be turbulent. For incompressible turbulent flows the Kolmogorov (1941) theory predicts a dissipation-free energy cascade between large scales where turbulent energy is injected, down to small scales where it is dissipated and heats the gas. In this inertial range the theory predicts a three-dimensional power-law energy spectrum [$E(k) \propto k^{-5/3}$], which has been observed extensively in terrestrial turbulence experiments (see, e.g., Grant, Stewart, & Moilliet 1962).

Since the work of Chandrasekhar (1949), several studies have shown that the ISM density and velocity structures projected onto the plane of the sky are self-similar and well described by power laws. For instance, a number of works were done on Hα centroid velocity fields in H II regions using autocorrelation and structure functions (see Miville-Deschênes, Joncas, & Durand 1995 and references therein). The self-similar structure of H I has also been studied, almost exclusively using the power spectrum of the 21 cm emission in Galactic (Baker 1973; Crovisier & Dickey 1983; Green 1993; Deshpande, Dwarakanath, & Goss 2000; Dickey et al. 2001) and extragalactic regions (Spicker & Feitzinger 1988; Elmegreen, Kim, & Staveley-Smith 2001; Stanimirovic & Lazarian 2001). Various studies aimed at describing the fractal properties of dust infrared emission were also done using power spectra (Gautier et al. 1992; Wright 1998) and the area-perimeter relation (Bazell & Désert 1988; Dickman, Margulis, & Horvath 1990; Vogelaar & Wakker 1994). However, it is probably on molecular clouds (CO emission) that most of the work has been done using several statistical tools: the size–line width relation (Larson 1981; Myers 1983; Falgarone & Phillips 1990), the autocorrelation function (Kleiner & Dickman 1984, 1985, 1987; Pérault, Falgarone, & Puget 1986; Kitamura et al. 1993; Miesch & Bally 1994; Larosa, Shore, & Magnani 1999), wavelet decomposition (Gill & Henriksen 1990), the area-perimeter relation (Falgarone, Phillips, & Walker 1991), principal component analysis (Heyer & Schloerb 1997; Brunt & Heyer 2002b), and the Δ-variance method (Stutzki et al. 1998; Bensch, Stutzki, & Ossenkopf 2001).

All those studies suggest that turbulence, for which such self-similar properties are expected, may play a key role in the structuration of the ISM, in both density and velocity. Furthermore, by providing nonthermal support against self-gravitational collapse, turbulence also regulates star formation (Klessen, Heitsch, & Mac Low 2000; Heitsch, Mac Low, & Klessen 2001). It might also have a strong and very nonlinear impact on dust evolution by accelerating the coagulation or fragmentation of grains (Falgarone & Puget 1995; Miville-Deschênes et al. 2002) and on the ISM chemical evolution as intermittent energy dissipation could locally trigger endothermic reactions (Joulain et al. 1998). However, following Scalo (1987), interstellar turbulence may be very different from Kolmogorov's prediction. The ISM is compressible and magnetized, and several processes inject energy at very different scales (from Galactic differential rotation down to stellar winds). Therefore, the description of interstellar turbulence in various environments is mandatory to understand its role on the structure, kinematics, energy transfer, thermodynamics, and chemistry of the gas at various scales.

One important issue here is to relate the statistical properties of the observed quantities (integrated emission, channel maps, and centroid velocity) to the three-dimensional properties of the density and velocity fields, which actually describe interstellar turbulence. This calls for reliable methods to extract the relevant information from spectroimagery observations, called position-position-

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

velocity (PPV) data cubes, and disentangle the density, velocity, and temperature contributions to the observed space-velocity structures. There is also a need to understand the effects of three-dimensional/two-dimensional projection and of line opacity on the observed statistical properties. Lately there have been a number of works based on PPV data cubes to deduce the statistical properties of the underlying three-dimensional density and velocity fields of H I observations (Stanimirovic & Lazarian 2001; Elmegreen et al. 2001; Dickey et al. 2001). Most of these works are based on the theoretical work of Lazarian & Pogosyan (2000, hereafter LP00), who proposed a method to deduce the three-dimensional density and velocity power spectral indices (hereafter γ_n and γ_v, respectively) from the PPV cubes.

In this paper we study the spectral properties of simulated PPV cubes using fractional Brownian motion (fBm) density and velocity fields, with the twofold purpose of comparing them with the predictions of LP00 and proposing another method, based on the centroid velocity map, to determine the spectral index of the three-dimensional velocity field. The reason for using fBms, despite their lack of physical reality, lies with their well-behaved statistical properties and the ease with which they can be generated. With single-index power-law power spectra and Gaussian fluctuations, fBms represent useful and flexible test cases for structure statistics retrieval methods. Such random fields were used, for instance, by Stutzki et al. (1998) to describe molecular cloud images using Δ-variance analysis and by Brunt & Heyer (2002a) to retrieve the statistics of turbulent interstellar velocity fields through the use of principal component analysis (PCA). It should, however, be stressed that these fields do not arise from physical simulations. In particular, they do not comply with hydrodynamics or gravity and are used solely for their statistical simplicity.

This kind of study based on fBms usefully complements those conducted on magnetohydrodynamical (MHD) simulations (see, e.g., Ostriker, Stone, & Gammie 2001) because the lack of physics is somewhat compensated by the broad range of scales accessible to the analysis in terms of power laws. In numerical simulations of turbulence the inertial range is severely limited by the available resolution and the large number of scales affected by injection and dissipation.

The paper is organized as follows. In § 2 we briefly present fBms and their properties, in the context of designing simple model distributions for our three-dimensional density and velocity fields. The computation of PPV data cubes from these fields is detailed in § 3, and an analysis of their spectral properties is done in § 4. In § 5 we present our concluding remarks. The Appendix contains some details on analytical computations.

2. DENSITY AND VELOCITY FIELDS

2.1. *Definition and Construction of fBms*

An fBm is a Gaussian random field F that can be defined, as done in Voss (1985), in any Euclidean dimension N by the relation

$$\left\langle [F(\boldsymbol{r}_2) - F(\boldsymbol{r}_1)]^2 \right\rangle \propto \|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\|^{2H} , \qquad (1)$$

where H, called the Hurst exponent, is a real number in [0, 1] and the brackets stand for a spatial average over positions $\boldsymbol{r}_1$ and $\boldsymbol{r}_2$. The value $H = 0.5$ gives the usual Brownian motion, for which it is well known that the mean squared increment $\langle \Delta F^2 \rangle = \left\langle [F(\boldsymbol{r}_2) - F(\boldsymbol{r}_1)]^2 \right\rangle$ scales as the separation $\|\Delta \boldsymbol{r}\| = \|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\|$. This relation states that the fluctuations of the field are isotropic and that their amplitude as a function of scale is a power law. It easily translates into a similar relation for the power spectrum, which is the Fourier transform of the autocorrelation function $\mathscr{A}_F(\boldsymbol{\rho}) = \langle F(\boldsymbol{r}) F(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\rho}) \rangle$:

$$P_F(\boldsymbol{k}) = \tilde{\mathscr{A}}_F(\boldsymbol{k}) \propto k^{\gamma} , \qquad (2)$$

where isotropy is expressed by the fact that P_F depends only on the wavenumber k, which is the length of the N-dimensional wavevector $\boldsymbol{k}$. The power spectral index γ is related to the Hurst exponent and the dimension by $\gamma = -2H - N$.

Several methods are available to numerically generate fBms (for instance, as a collection of clumps with a power-law mass spectrum; see Stutzki et al. 1998), but the easiest is based on equation (2) and the fact that P_F is proportional to $|\tilde{F}|^2$, the squared amplitude of the Fourier transform of F. Hence, we first compute an isotropic amplitude following a power law:

$$A(\boldsymbol{k}) = A_0 k^{\gamma/2} , \qquad (3)$$

where A_0 is a normalization factor. Then the phase $\phi(\boldsymbol{k})$ is constructed using a random number generator algorithm based on a uniform distribution between $-\pi$ and π, and to make sure the image in direct space is real, we enforce the constraint $\phi(-\boldsymbol{k}) = -\phi(\boldsymbol{k})$. From the amplitude and the phase, the real and imaginary parts of the Fourier transform are computed,

$$\mathrm{Re}\left[\tilde{F}(\boldsymbol{k})\right] = A(\boldsymbol{k}) \cos[\phi(\boldsymbol{k})] , \qquad (4)$$

$$\mathrm{Im}\left[\tilde{F}(\boldsymbol{k})\right] = A(\boldsymbol{k}) \sin[\phi(\boldsymbol{k})] , \qquad (5)$$

and the fBm $F(\boldsymbol{r})$ is simply obtained by taking the inverse Fourier transform of $\tilde{F}(\boldsymbol{k})$.

The method described here is general for any dimension, and the power spectra of the fields generated this way obey exact power laws,[1] as can be seen in Figure 1, which shows a two-dimensional 257×257 fBm image, along with its power spectrum.[2] In this figure we used a scatter plot (all points of the two-dimensional amplitude are shown) in order to assess the field's isotropy, but in other figures of the paper, where we compare power spectra, azimuthal averages are used to make the plots easier to read. It should also be noted that this Fourier-based method of generating fBms leads to periodic distributions and therefore our computations, unlike real observations, will not suffer from nonperiodic boundary conditions.[3]

2.2. *Three-dimensional Density and Velocity Fields*

The purpose of this paper is to study the effects of projection from a three-dimensional dynamical medium onto a

[1] The only random elements are the phases.

[2] The odd size is simply a matter of convenience when building the fields. The Fourier transform algorithm is a bit slower, but speed was not critical in our simulations.

[3] The reason why this is important is that numerical Fourier transform algorithms such as the fast Fourier transform treat images as if they were periodic. If they are not, artificial jumps at the edges result in high-frequency components that alter the power spectra. On the other hand, apodization of the images to prevent this may in turn affect large scales.

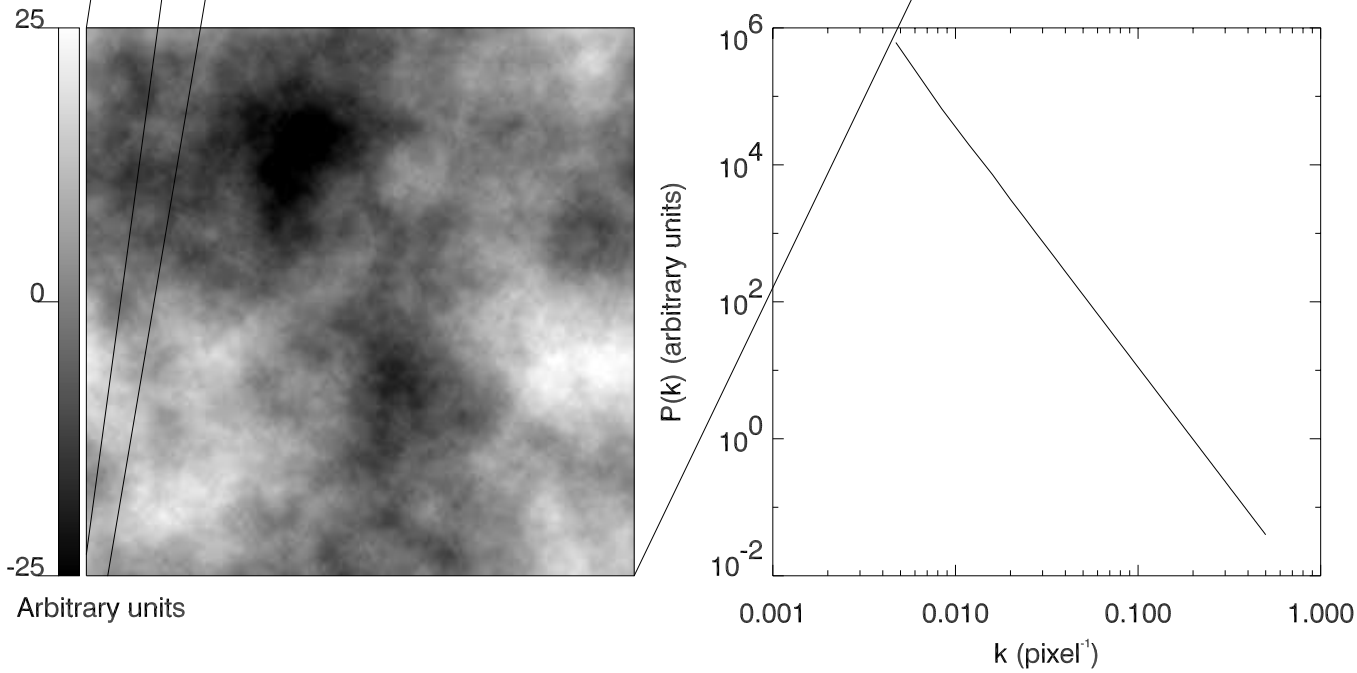

FIG. 1.—Typical two-dimensional 257×257 fBm image with its power spectrum, which by construction follows a power law with an index equal to -3.5.

spectroimagery observation. To conduct such a study, the first step is to generate model interstellar three-dimensional density and velocity fields and from these compute simulated PPV data cubes.

We therefore generated three-dimensional[4] fBms with spectral indices of -3.0, -3.5, -4.0, and -4.5.[5] For each spectral index, two fBms were computed, one for the density field $n(x, y, z)$ and one for the velocity field $v(x, y, z)$. The computations were also performed with a uniform density field, for which the power spectral index is formally equal to $-\infty$. Here we just consider the line-of-sight (longitudinal) velocity component, as it is the only one available to observers. Like Kitamura et al. (1993) we make the assumption that the three-dimensional velocity field $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ is isotropic and homogeneous and that the longitudinal and lateral velocity components have the same power spectra as $\boldsymbol{v}(x, y, z)$.

For the sake of realism, some sort of correlation should exist between the three-dimensional density and velocity fields. However, for simplicity, the main part of this paper deals with uncorrelated cubes, the effects of a certain amount of correlations between n and v being reported on in § 4.2.

A typical line of sight extracted from one set of three-dimensional density and velocity fields is shown in Figure 2. The density and velocity fields used in this example have power spectral indices of $\gamma_v = -3.0$ and $\gamma_n = -4.5$, respectively. The former displays more small-scale structures, as expected for a shallower spectral index ($\gamma_n < \gamma_v$).[6] By construction, the mean values of the original cubes are set by the normalization A_0, and their variances are determined by the total number of pixels. To obtain physically plausible numbers, the following procedure was applied: The minimum values of the density cubes were subtracted from them in order to obtain only positive values, and a multiplicative factor was applied to obtain an average density of 90 cm^{-3}. For the velocity cubes, we first subtracted the mean and then scaled the values to obtain a velocity dispersion of 3 km s^{-1}. An important feature to point out is that, since typically only 0.1% of the points in a Gaussian distribution are more than 3 σ away from the mean, our density fields present quite low contrasts, with $\sigma/\bar{n} \lesssim 0.3$. This is an unavoidable limitation of these model fields.

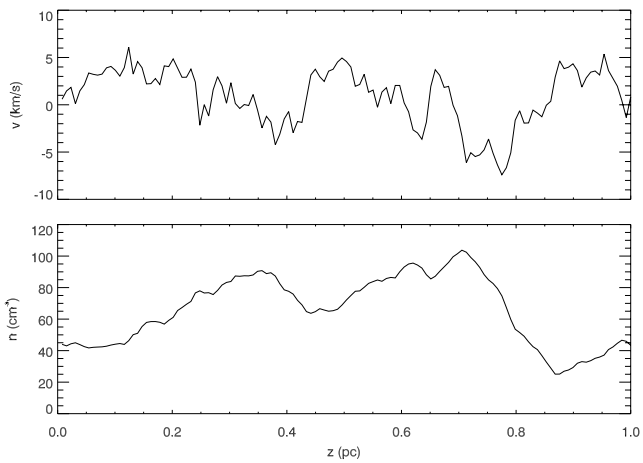

FIG. 2.—Typical fractal line of sight extracted from the three-dimensional density (*bottom*; $\gamma_n = -4.5$) and velocity (*top*; $\gamma_v = -3.0$) fields.

[4] The dimensions are $129 \times 129 \times 129$ pixels.

[5] These correspond to Hurst exponents equal to 0, 0.25, 0.5, and 0.75, respectively.

[6] This criterion holds when comparing fields of the same Euclidean dimension, but the relevant number in direct space when assessing the amount of small-scale structures is the Hurst exponent, as will be discussed later. Here $\gamma_n < \gamma_v$ is equivalent to $H_n > H_v$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

3. SIMULATION OF A PPV DATA CUBE

3.1. *Definition*

To obtain a PPV data cube from the simulated three-dimensional density and velocity fields, we compute, at each position (x, y), the spectrum that would be observed in this direction. This is done under the simplifying assumption that the medium is observed in an optically thin line, such as, in some instances, the 21 cm line of neutral atomic hydrogen. In this case, the spectrum at a given position (x, y) is computed by simply adding the contributions of all cells along the line of sight, the emission from a single gas cell being a Gaussian line centered at velocity $v(x, y, z)$ and of velocity-integrated area proportional to $n(x, y, z)\delta z$.[7] Eventually, the PPV data cube $N_u(x, y, u)$, which is the column density of H I along the line of sight (x, y) at the velocity u within δu, can be expressed by the following equation:[8]

$$N_u(x,y,u) = \sum_z \frac{n(x,y,z)\delta z}{\sqrt{2\pi}\sigma(x,y,z)} \exp\left\{-\frac{[u - v(x,y,z)]^2}{2\sigma(x,y,z)^2}\right\}. \tag{6}$$

The dispersion of the Gaussian is given by

$$\sigma(x,y,z) = \sqrt{\left[\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}\delta z\right]^2 + \frac{k_B T}{m}}, \tag{7}$$

where k_B is the Boltzmann constant, T is the gas kinetic temperature, and m is the mass of the emitting species (in our case H I). This broadening includes not only the thermal velocity dispersion $\sigma_{th} = (k_B T/m)^{1/2}$ but also a small-scale velocity gradient that roughly models the subpixel structure of the velocity field (Brunt & Heyer 2002a). In addition, to make sure that we lose a negligible fraction of the signal, the velocity limits in the final PPV cube are given by $v_{min} - 2\sigma_{th}$ and $v_{max} + 2\sigma_{th}$, where v_{min} and v_{max} are the minimum and maximum values in the three-dimensional velocity field. The number of channels is then obtained by dividing this velocity range by the channel width δu, which was set to 0.25 km s^{-1}. As a result, all of our PPV cubes do not have the same extent in the third dimension, since it depends on the three-dimensional velocity cube and the temperature.

3.2. *Synthesized Spectra*

Examples of the line synthesis procedure described above are shown in Figure 3 for the same line of sight that was used in Figure 2. These spectra were computed using equation (6) for $T = 1$, 10, 100, and 500 K. One can see the expected smearing effect of the temperature, which smooths the spectra as T increases, similar to the effect of decreasing the spectral resolution. As the temperature increases, the spectrum becomes smoother and closer to Gaussianity, indicating that the thermal broadening is close to the original dispersion in the input three-dimensional velocity cube. For reference, the thermal dispersions for all temperatures are 0.09, 0.29, 0.91, and 2.0 km s^{-1} at $T = 1$, 10, 100, and 500 K, respectively.

The spectrum computed at $T = 100$ K, a value representative of H I gas, is reminiscent of what is observed at 21 cm in high-latitude clouds. At artificially low temperature[9] ($T = 1$ K) many components appear. These components do not correspond to any physical "cloud" structure, as they simply represent the fractal properties of velocity and density fluctuations along the line of sight. At such a low kinetic temperature, the line is far from the optically thin regime and the effect of opacity on the observed spectrum would be important. These spectra are shown only to illustrate the effect of kinetic temperature on our ability to resolve kinematical structures. The effective spectral resolution of such PPV observations therefore includes the thermal broadening. Considering, as a simplification, a Gaussian-shaped channel of FWHM δu, this effective resolution is approximately

$$\delta v_{eff} \approx \sqrt{\delta u^2 + (2.16)\sigma_{th}^2}. \tag{8}$$

3.3. *Channel Maps*

Selected channel maps from the PPV cube computed with $\gamma_n = -3.5$ and $\gamma_v = -3.0$ are shown in Figure 4. These channel maps are reminiscent of what is observed at 21 cm, for instance (Joncas, Boulanger, & Dewdney 1992). The structures in neighboring channel maps are clearly correlated, with both elongated and diffuse structures. If it is partly due to the channel width being subthermal, correlation still exists between more widely separated channels.

4. STATISTICAL PROPERTIES

In this section the power spectra of individual channel, integrated emission, and centroid velocity maps, obtained from the PPV data cubes, are examined and linked to the statistical properties of the three-dimensional density and velocity fields. To conduct our analysis, PPV cubes with all possible combinations of three-dimensional density and velocity fields were simulated. Figures 5 and 6 display the integrated emission map, the centroid velocity map, three selected channel maps (one in the line center and two in the line wings), and their associated power spectra, for a subset of data cubes. More precisely, Figure 5 shows the variations of these quantities for $\gamma_v = -4$ and all values of γ_n, while Figure 6 presents the same analysis for $\gamma_n = -4$ and all values of γ_v. A detailed analysis of these figures follows.

4.1. *Integrated Emission*

It has been shown by several authors (see, e.g., Stutzki et al. 1998; Goldman 2000) that, for optically thin gas with Gaussian statistics, the power spectral index of the integrated emission map is exactly the power spectrum of the three-dimensional density field, under the condition $d/L \geq 1$, where L is the largest scale on the (x, y)-plane and d is the depth in the z dimension. A brief summary of the derivation of this result is given in the Appendix. This is true whether the power spectrum is a power law or not, provided that isotropy is maintained. This property of optically thin media is powerful as it allows us to directly deduce the

[7] Here δz is the depth, in cm, of a cell in the three-dimensional density cube. The total depth of the cloud was set to 1 pc, and the size of the fBm is $129 \times 129 \times 129$. In this case, $\delta z = 2.414 \times 10^{16}$ cm.

[8] Here we consider the particular case in which the spectral resolution of the observation is equal to the channel width and the spectral transmission is a step function of width δu.

[9] In H I, temperatures seem to vary from around 80 K in the cold neutral medium (CNM) to 5000–8000 K in the warm neutral medium (WNM).

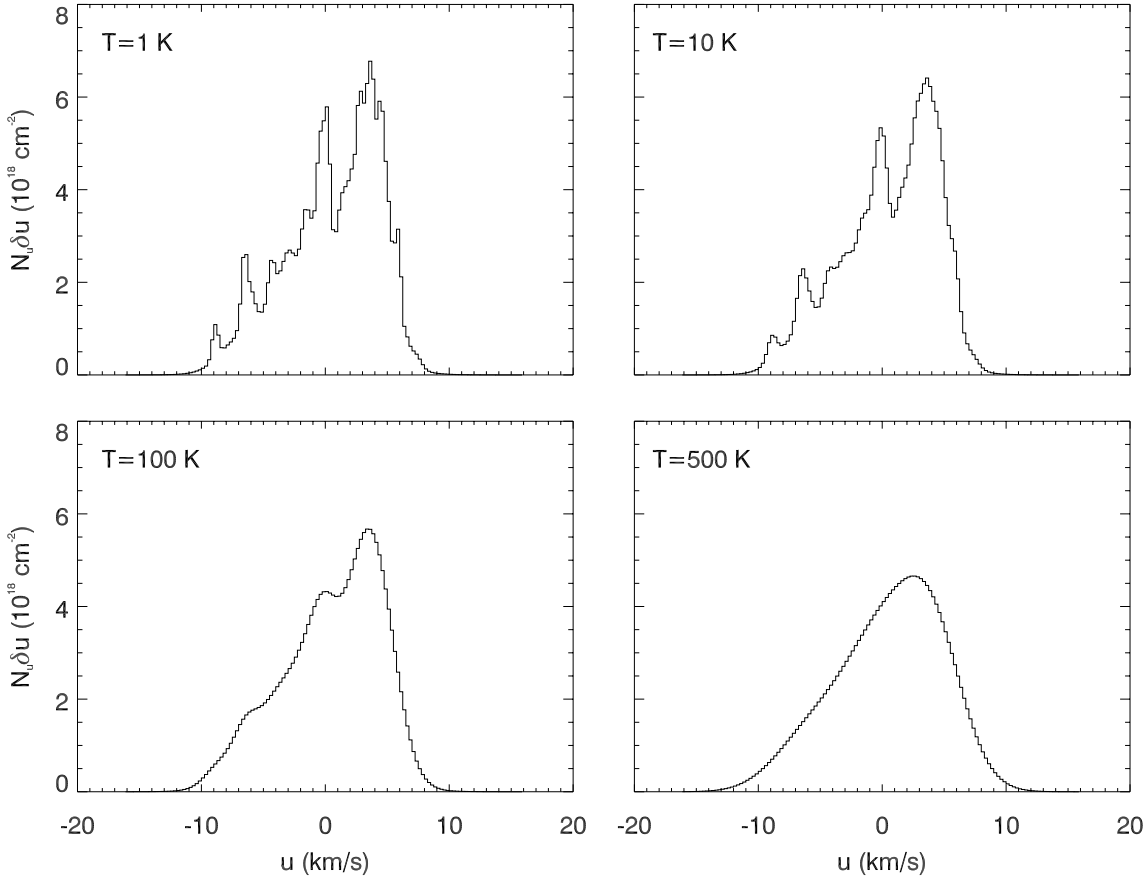

FIG. 3.—Synthetic spectra for the line of sight described in Fig. 2, at kinetic temperatures $T = 1$, 10, 100, and 500 K. The spectral resolution was set to $\delta u = 0.25\ \mathrm{km\,s^{-1}}$.

power spectrum of the interstellar three-dimensional density field from the observed map.

Our simulations confirm this property for the PPV cube integrated emission (see the top panels of Figs. 5 and 6) and for the image of the three-dimensional density field integrated along the z-axis (see Fig. 7). The fact that the three-dimensional density field and the integrated emission (which is its projection onto the plane of the sky) should have the same spectral index does not mean, however, that they exhibit the same amount of structure as a function of scale. As already suggested in footnote 6, the relevant number in this comparison is the Hurst exponent. Now, since $\gamma_{3D} = -2H_{3D} - 3$ and $\gamma_{proj} = -2H_{proj} - 2$, the preservation of the spectral index means that $H_{proj} = H_{3D} + 0.5$, an effect called projection smoothing.

On the other hand, a cut through the three-dimensional density field would statistically represent the original field, and the Hurst exponent would remain the same, $H_{cut} = H_{3D}$. The power spectrum of such a cut would then have an index $\gamma_{cut} = -2H_{cut} - 2 = \gamma_{3D} + 1$. An example of this is shown in Figure 7 for a 1 pixel slice of the three-dimensional density cube.[10]

[10] In this figure, the power spectrum shows a fair amount of dispersion and the index is a bit lower than $\gamma_{3D} + 1$. This can be understood by the fact that our slice through the three-dimensional density cube is not a "perfect" one but indeed has a certain width. The dispersion effect is more pronounced at small scales, which are comparable to this width.

It is also interesting to study the power spectrum of a slice in the intermediate regime, where $0 < d < L$. To study this, the power spectra of density field slices of increasing thickness d were computed. Figure 8 presents the power spectra of three cases for $d = 5$, 10, and 20 pixels. The three-dimensional density field used here has $\gamma_n = -3$. The power spectra are bent, with a spectral index of γ_n at small scales and $\gamma_n + 1$ at large scales. The transition occurs at a frequency $k_d = 1/2d$ and provides a method to determine the depth of the observed medium. This is in accordance with the pioneer work of von Hoerner (1951; summarized by O'Dell & Castaneda 1987), who studied the effect of projection smoothing on the index of the structure function. Recently, Elmegreen et al. (2001) used this property to determine the thickness of the H I layer in the Large Magellanic Cloud. The absence of such a curvature in the power spectra of large-scale H I Galactic emission suggests in turn that the depth of the H I layer sampled by the observations is significantly larger than the map size, i.e., much larger than 25 pc in the case of the high-latitude cloud observed by Miville-Deschênes et al. (2003). This result is also relevant for studies of optically thick media (e.g., molecular clouds) where the observed emission comes only from the surface of the cloud. In that case, the spectral index measured on the integrated emission map of an optically thick tracer should be closer to $\gamma_n + 1$.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

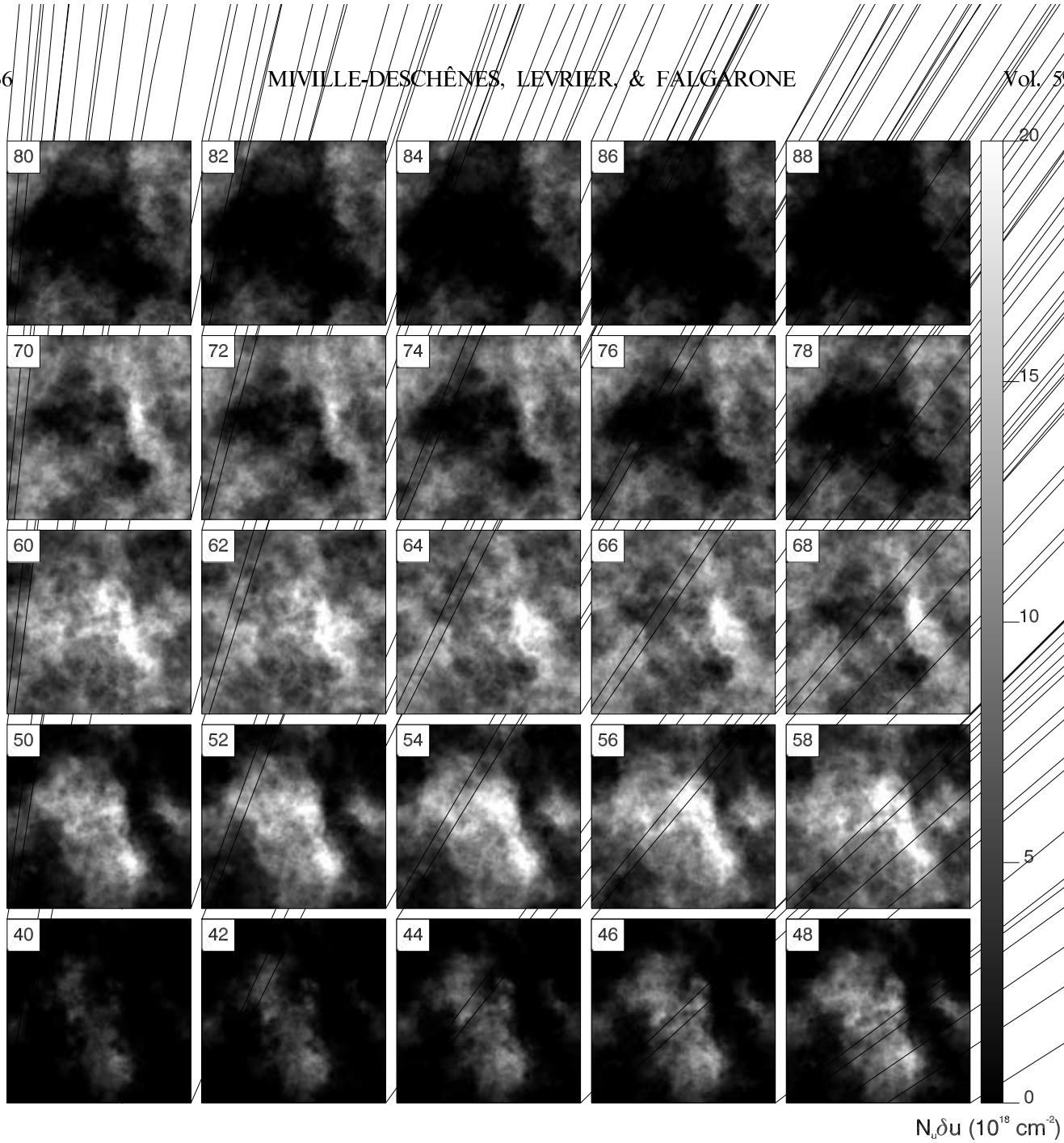

FIG. 4.—Selected channel maps from a typical simulated PPV data cube, shown here for comparison with actual observations. In this case the power spectrum indices of the density and velocity fields are, respectively, $\gamma_n = -3.5$ and $\gamma_v = -3.0$. The gas temperature used is $T = 100$ K (thermal velocity dispersion $\sigma_{\rm th} = 0.91$ km s^{-1}), and the spectral resolution is $\delta u = 0.25$ km s^{-1}. The channel number is indicated in the upper left-hand corner of every channel map.

4.2. *Centroid Velocity*

Another quantity built from PPV data cubes is the centroid velocity map, which, for any line of sight, is simply an average velocity weighted by the line temperatures,

$$C(x,y) = \frac{\sum_u uN_u(x,y,u)\delta u}{\sum_u N_u(x,y,u)\delta u} \ . \qquad (9)$$

This equation is easily shown to be equivalent to the density-averaged velocity component parallel to the line of sight (Dickman & Kleiner 1985):

$$C(x,y) = \frac{\sum_z v(x,y,z)n(x,y,z)\delta z}{\sum_z n(x,y,z)\delta z} \ . \qquad (10)$$

Centroid velocity maps have traditionally been used to study gas kinematics in various ISM environments, for instance, in the study of the turbulent energy cascade in H II regions (Miville-Deschênes et al. 1995) and in molecular clouds (Miesch & Bally 1994). However, one of the main difficulties of these analyses is to relate the statistical properties

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

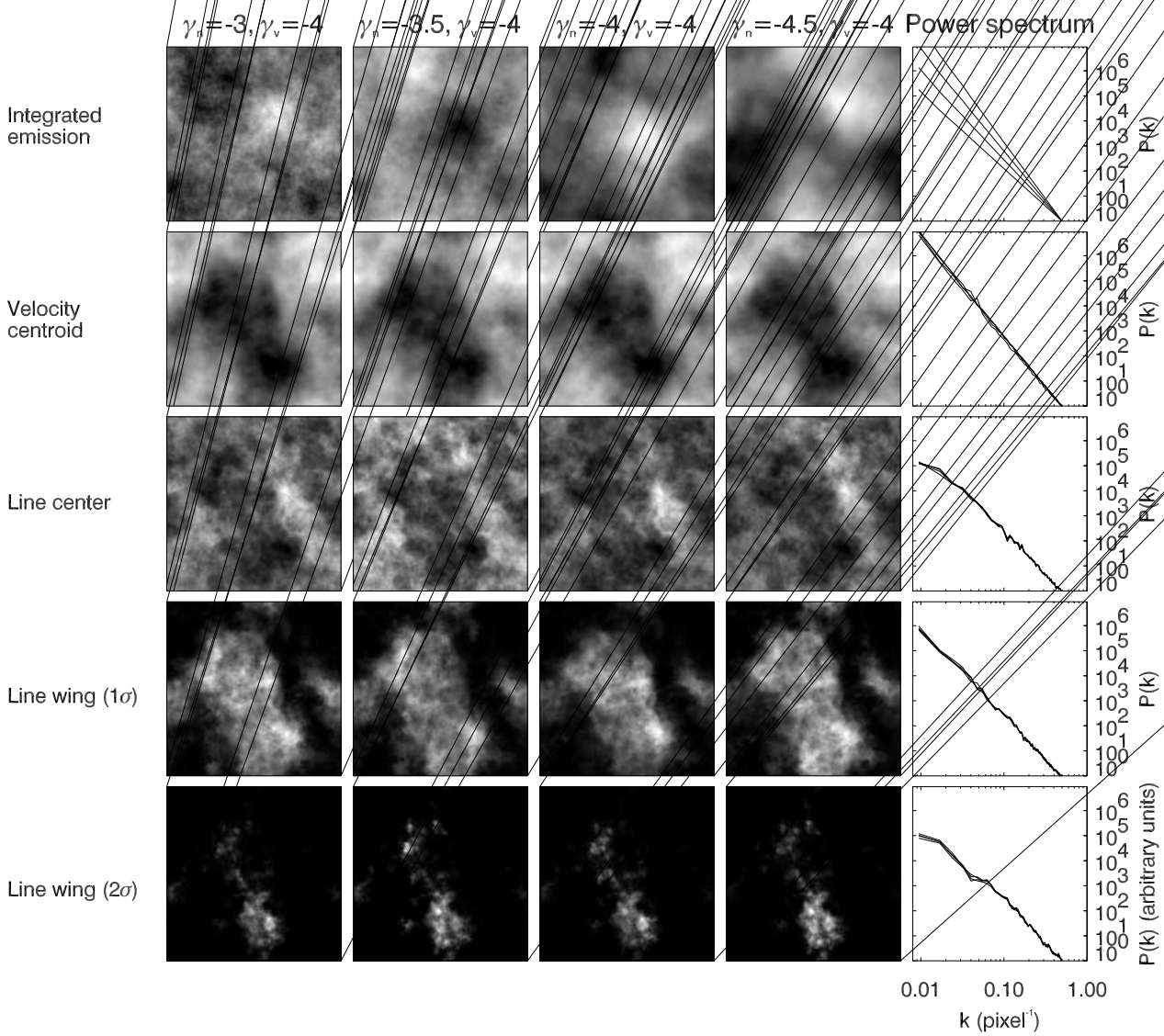

FIG. 5.—Integrated emission, centroid velocity, and three velocity channels ($\sigma = 3.75$ kms s^{-1}) for $\gamma_v = -4$ simulations. The four image columns correspond to four values of γ_n specified above each column. The power spectra of all two-dimensional maps shown here are displayed on the far right column, the solid, dashed, dotted, and dot-dashed lines representing, respectively, $\gamma_n = -3.0$, -3.5, -4.0, and -4.5. This figure highlights the fact that the power spectrum of the integrated emission is completely determined by the three-dimensional density field (we verify that their power spectrum indices are equal). However, the most striking feature of this figure is the fact that the centroid velocity is independent of the density field and that the power spectrum of the centroid velocity is equal to the power spectrum of the three-dimensional velocity field. In addition, the structure of channel maps and their power spectra are mostly determined by the velocity field (we observe a slight variation of the channel maps' structure with different density fields).

of the centroid velocity map to the three-dimensional velocity field.

To assess this relation in the framework of our fBm simulations, we computed the centroid velocity maps from PPV cubes for every combination of γ_n and γ_v. Some of them are shown in Figures 5 and 6, along with their power spectra, and all measured spectral indices are given in Table 1. In the range of density and velocity indices tested, the spectral index γ_C of the centroid velocity map is remarkably equal to γ_v, whatever the power spectrum of the density field. Figure 5 illustrates this behavior: the velocity centroid maps computed for the different values of γ_n are the same, and their power spectra all merge into the same spectrum.

This result is easy to obtain analytically for a uniform density, as is shown in the Appendix (see also Dickman & Kleiner 1985). However, to our knowledge, this is the first time that it is demonstrated for stochastic density fields. Figure 9 displays the full scatter plots of power versus wavenumber for several (γ_n, γ_v) combinations. It appears that the dispersion around the power law decreases with

TABLE 1

SPECTRAL INDEX OF THE CENTROID VELOCITY (γ_C) FOR THE SIMULATED PPV DATA CUBES COMPUTED IN THE ANALYSIS

γ_C	$\gamma_n = -3.0$	$\gamma_n = -3.5$	$\gamma_n = -4.0$	$\gamma_n = -4.5$
$\gamma_v = -3.0$.....	−3.0	−3.0	−3.0	−3.0
$\gamma_v = -3.5$.....	−3.5	−3.5	−3.5	−3.5
$\gamma_v = -4.0$.....	−4.0	−4.0	−4.0	−4.0
$\gamma_v = -4.5$.....	−4.5	−4.5	−4.5	−4.5

NOTE.—The uncertainty of the measured spectral indices is about 0.1.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

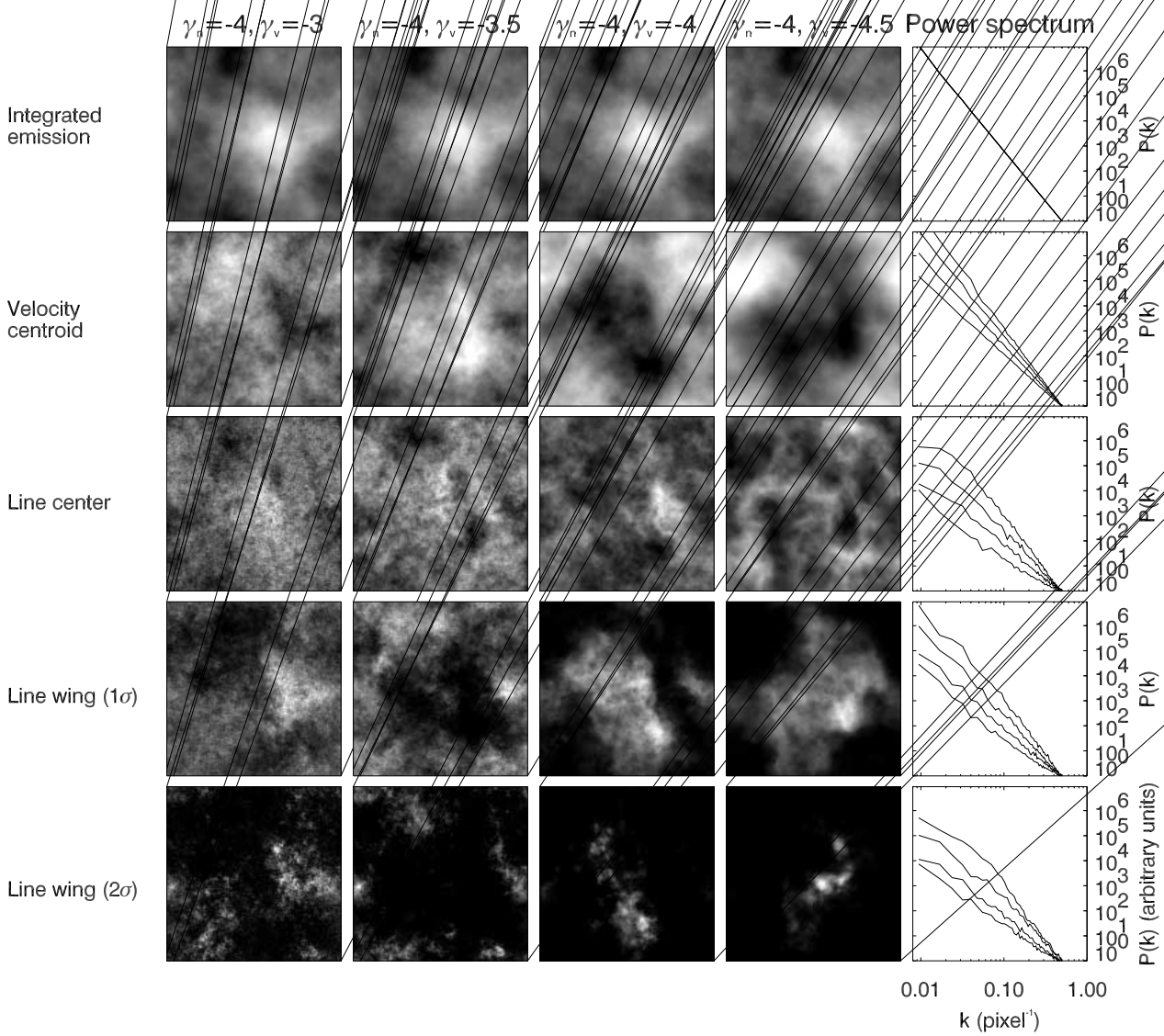

FIG. 6.—Integrated emission, centroid velocity, and three velocity channels ($\sigma = 3.75$ kms s^{-1}) for $\gamma_n = -4$ simulations. The four image columns correspond to four values of γ_v specified above each column. The power spectra of all two-dimensional maps shown here are displayed on the far right column, the solid, dashed, dotted, and dot-dashed lines representing, respectively, $\gamma_v = -3.0$, -3.5, -4.0, and -4.5. This figure confirms the fact that the integrated emission is completely independent of the velocity field (*top row*) and that the power spectra of the velocity centroid and channel maps are completely dominated by the three-dimensional velocity field. This figure also shows the effect of "shot noise" discussed in the text that produces a flattening at small scales of the

steepening density spectra, and in the limit of a uniform density field, isotropy is recovered. Conversely, for a given γ_n, the centroid spectra are more scattered for steeper values of γ_v. This may be explained by the fact that density fluctuations manifest themselves more strongly with smoother velocity fields.

Further tests of this result have been performed. For instance, in accordance with equation (10), it does not depend on the gas kinetic temperature, with γ_C being equal to γ_v in all cases considered. More interesting was the test of non-fBm density and velocity fields. One of these involved a velocity field for which the power spectrum was bent, varying from a k^{-5} behavior at large scales (small k) to a k^{-3} behavior at small scales (large k). For this, two fBms with respective indices -3.0 and -5.0 were built and their Fourier amplitudes added with proper weights.[11] After introduction of a random phase map, an inverse Fourier transform was performed. The velocity field computed this way was then used with two density cubes, one with $\gamma_n = -4.0$ and the other being the uniform density cube, to simulate two PPV data sets. Velocity centroids for both cases were then computed, and their power spectra are shown in Figure 10. For the uniform density case, unsurprisingly, the power spectrum of the velocity centroid has zero dispersion and exhibits exactly the same variation as

[11] This is to ensure that the velocity field is not dominated by either behavior over the whole range of k, in which case the curvature of the power spectrum would be impossible to see.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

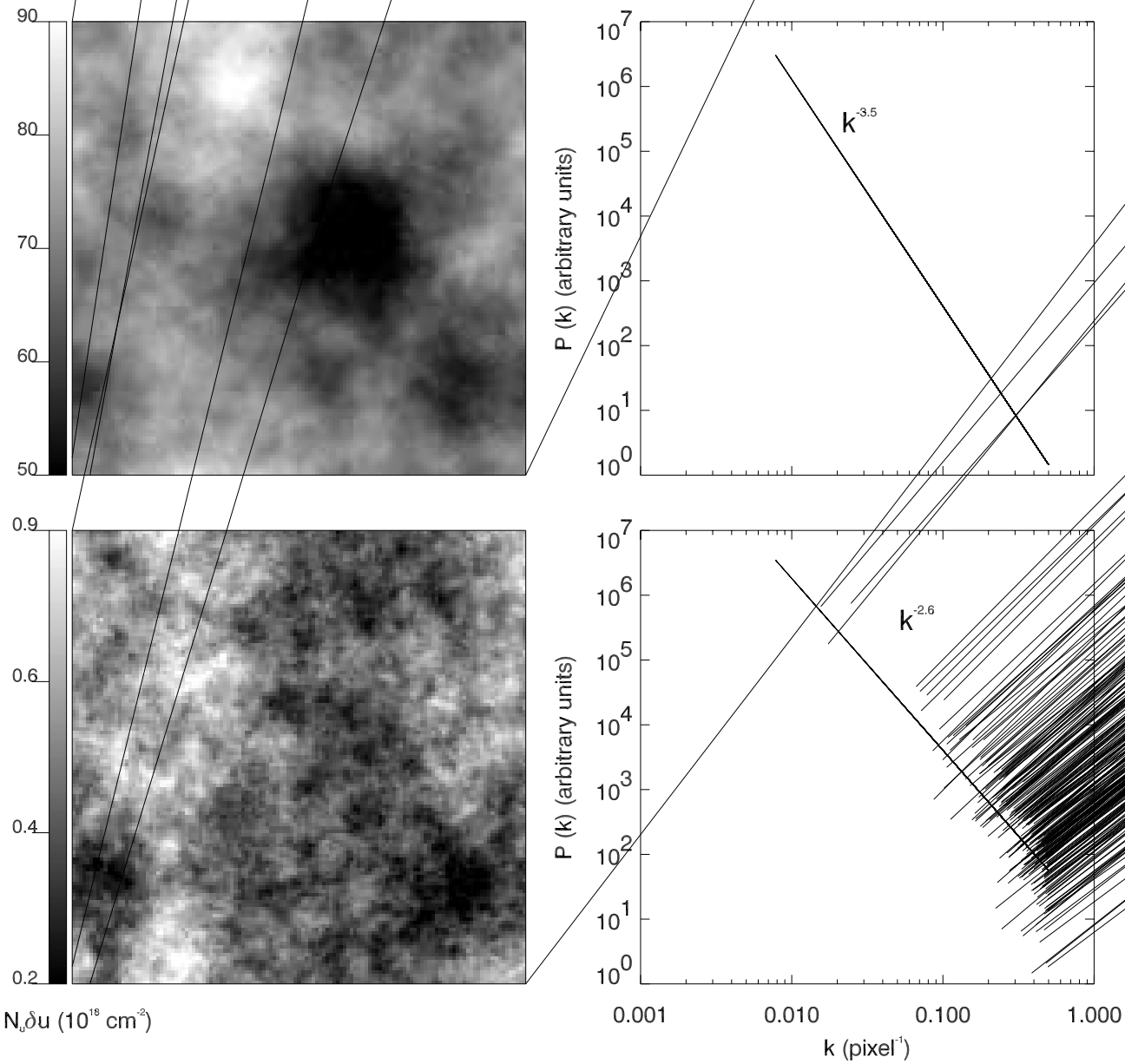

FIG. 7.—Map and power spectra of the fully integrated emission (*top*) and of a single slice (*bottom*) through one of the three-dimensional fBm density cubes, in this case $\gamma_n = -3.5$ and $\delta u = 0.25$ km s^{-1}.

that of the full three-dimensional velocity field. For the $\gamma_n = -4.0$ case, despite the dispersion, the behavior remains, showing the consistency of the method, even for isotropic velocity fields with non–power-law power spectra.

As a second extension of the types of fields tested, density cubes with increased fluctuations were built by exponentiation of fBm fields, resulting in lognormal distributions. The original fBm field used had an index $\gamma = -4.0$, and the resulting density values ranged from $\sim$1 to $\sim$2500 cm^{-3}, with a mean of $\sim$90 cm^{-3}. This density cube was used in conjunction with all of our fBm velocity fields to compute PPV data sets and velocity centroids, the power spectra of which are shown in Figure 11. For such large density fluctuations, the dispersion is noticeably increased with respect to the fBm case, but the main result that $\gamma_C = \gamma_v$ holds when averaging in wavevector space.

Considering the possibility that the complete agreement between γ_C and γ_v, without γ_n entering into the picture, could be caused by the absence of density-velocity correlations, we computed three-dimensional density and velocity fBm fields featuring a certain level of correlation. The way we did this is based on the idea that most, if not all, of the spatial structure of images is contained in the structure of their Fourier phases. We introduced correlations between two fBms by setting a number of phase points to the same value in both fields. The points were chosen randomly, and their number varied between 10% and 90% of the total number of pixels. The amplitudes were computed separately.

Once again, we found that the velocity centroid spectral index was exactly the same as that of the three-dimensional velocity field, whatever the density spectral index and

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

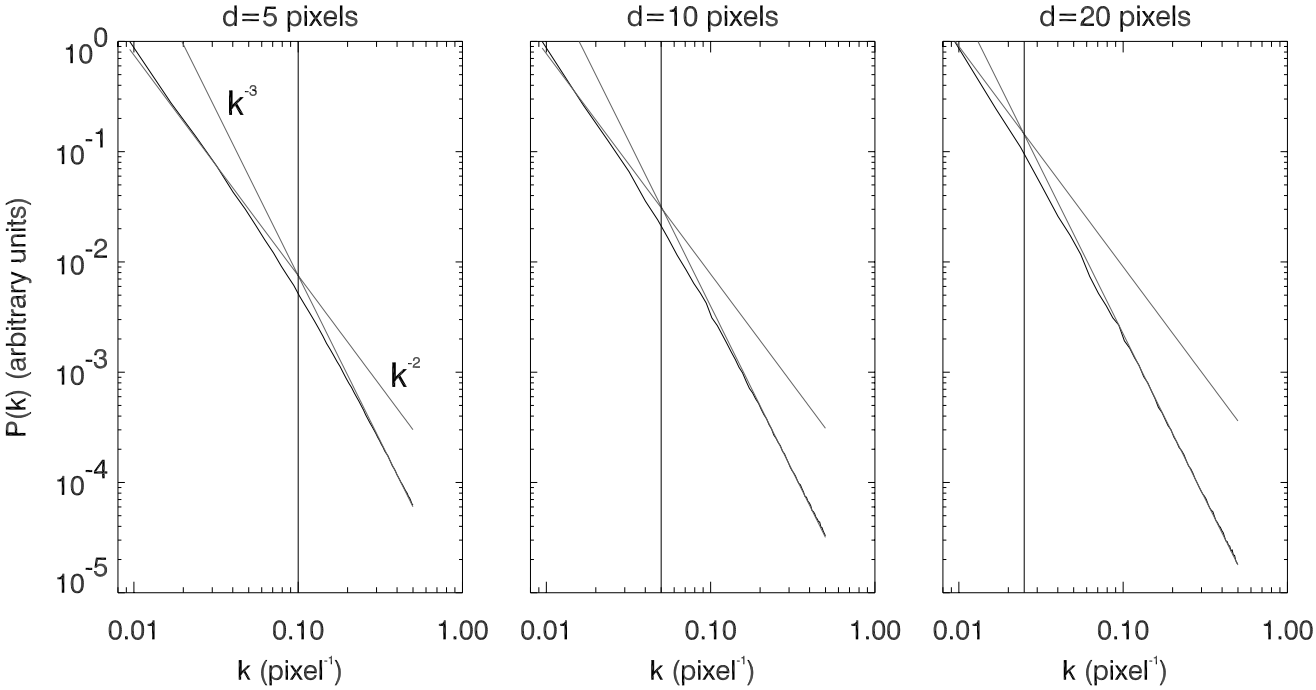

FIG. 8.—Power spectra of integrated emission slices of a $\gamma_n = -3.0$ density cube. The depths of the slices are $d = 5$, 10, and 20 pixels, from left to right. The solid line is the power spectrum of the integrated density slice. The dotted lines indicate -3.0 and -2.0 slopes, and the vertical dashed line shows the $1/2d$ scale.

whatever the amount of correlations. From this remarkable result we infer that velocity centroids are robust observables for recovering three-dimensional velocity statistics from optically thin lines. This result has obvious applications for studies of ISM statistical properties and of interstellar turbulence (see Miville-Deschênes et al. 2003).

We are aware that the method used to introduce density-velocity correlation in our simulations does not comply with (magneto)hydrodynamics, as, for instance, high densities would correspond to high velocities along the line of sight, but this technique allows us to test easily various correlation degrees while staying in the fBm scheme. Obviously, it would be useful to make a similar analysis on physically relevant fields, such as MHD simulations, to study the effects on the centroid velocity power spectrum of physical density-velocity correlation, sharper density/velocity contrasts, and non-Gaussian statistics, and thus assess the robustness of this result in more realistic conditions.

One should also keep in mind that our results may not be generally applicable to all interstellar conditions. For instance, the statistical properties of centroid velocity maps can be significantly affected by systematic motions like rotation or expansion, if proven not to be part of the turbulent cascade itself. In this case, such systematic velocity fields should be filtered prior to any analysis of turbulent motions (Kleiner & Dickman 1985).

4.3. *Channel Maps and Velocity Slices*

In a recent study, LP00 showed that, for Gaussian random fields, the spectral index of the three-dimensional velocity field can be determined by studying the variation of the spectral index of velocity slices[12] as a function of their thickness ΔV. Subsequently, Lazarian et al. (2001) and Esquivel et al. (2003) analyzed and confirmed this proposition using MHD simulations. In both these works the power spectrum of the simulated velocity field is forced to be a power law (a method called spectral modification) to extend the limited power-law range of MHD simulations. This method preserves the phase information and thus much of the expensively obtained physics. We propose here to also test the theoretical predictions of LP00 on fBm simulations because they have intrinsically well-defined power spectra and obey Gaussian statistics, the working hypotheses of LP00.

4.3.1. *Thickness of Velocity Slices*

The main prediction of LP00 deals with what they call *thin* and *thick* velocity slices of the PPV data cube. These properties are scale dependent: a velocity slice of width ΔV is considered thin at a scale l if the velocity dispersion in the observed medium at that scale $\sigma(l)$ is larger than ΔV; conversely, a velocity slice is said to be thick at scale l if $\sigma(l) < \Delta V$. Since the velocity dispersion depends on l according to

$$\sigma(l) = \sigma(L)\left(\frac{l}{L}\right)^{(-\gamma_v-3)/2}, \qquad (11)$$

where $\sigma(L)$ is the total velocity dispersion[13] (set to 3 km s^{-1} in our simulations), velocity slices are thinner at large scales than at small scales ($\gamma_v < -3$). In fact, from equation (11), the smallest scale $l_{\rm thin}$ for which a velocity slice of width ΔV

[12] A velocity slice of thickness ΔV is the integrated emission of the PPV cube between v and $v + \Delta V$.

[13] L is the largest scale in the image.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

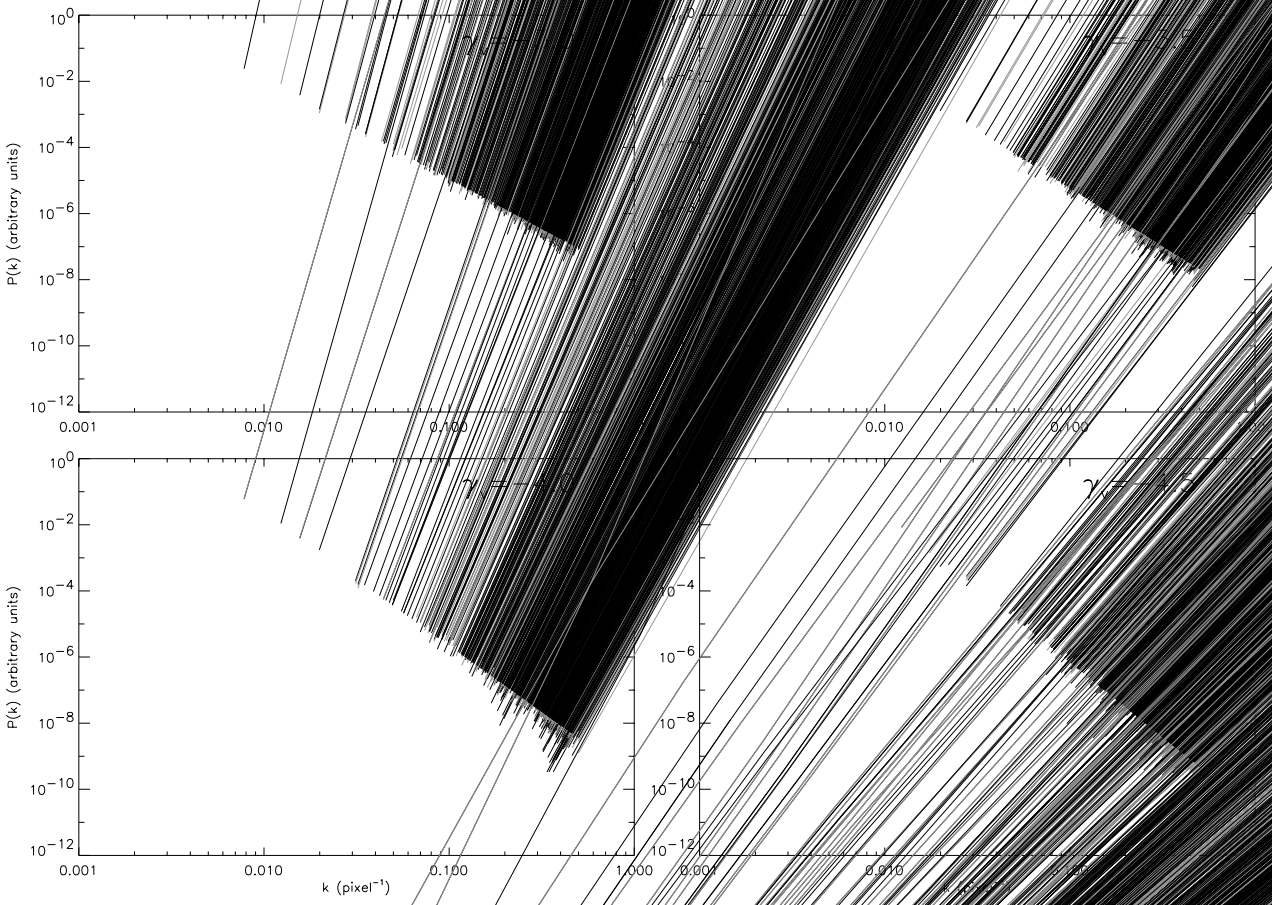

FIG. 9.—Power spectra of centroid velocity maps for various (γ_n, γ_v) combinations. Each subplot corresponds [illegible] $\gamma_n = -3.0$ (*black scatter plot*), $\gamma_n = -4.0$ (*gray scatter plot*), and uniform density (*thin black line*). The [illegible] dispersion, as expected.

can be considered thin is given by

$$l_{\rm thin} = L\left[\frac{\Delta V}{\sigma(L)}\right]^{2/(-\gamma_v-3)} . \qquad (12)$$

Given the values of ΔV and $\sigma(L)$ sampled in our simulations [illegible] or thick at [illegible] *thin* or [illegible] exhibit a [illegible] at large scales [illegible] locity slice will be [illegible] ger than $l_{\rm thin}$ and fully [illegible] is smaller than $l_{\rm thin}$.

[illegible] to check whether or not our [illegible] investigate the thin regime. The [illegible] the 1 pixel scale (see Table 2) is given [illegible] and is to be compared with the smallest ΔV [illegible] is determined by the effective spectral reso- [illegible] eq. [8]), namely, $\delta v_{\rm eff} = 1.4$ km s^{-1} for $\delta u = 0.25$ [illegible] and $T = 100$ K. It appears that, for $\gamma_v = -3$, there [illegible] meaningful velocity slices (with $\Delta V \geq \delta v_{\rm eff}$) in the fully thin regime, since $\sigma(l = 1 \text{ pixel}) > \delta v_{\rm eff}$. For smaller values of γ_v, however, any velocity slice will be thick at small scales. Nonetheless, the values of $l_{\rm thin}$, given for all γ_v in Table 2, show that a $\Delta V = \delta v_{\rm eff}$ velocity slice is thin on a large range of scales, even for $\gamma_v = -4.5$. In order to have access to fully thin velocity slices for all γ_v, an increased dispersion $\sigma(L)$ or a lower temperature would have been necessary (see eq. [11]), but that would have led to more velocity channels in the PPV cube[14] and therefore to more shot noise, which has

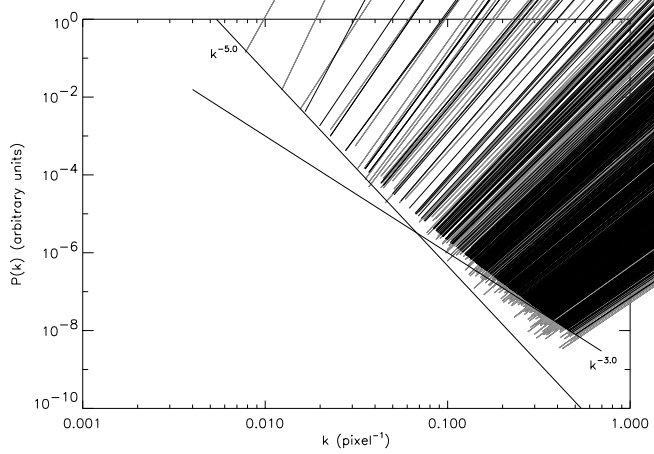

FIG. 10.—Power spectra of centroid velocity maps constructed from a velocity field with a curved power spectrum (see text). Plots for the uniform density case (*black*) and the $\gamma_n = -4$ case are presented, along with the expected asymptotic behaviors at small (k^{-3}) and large (k^{-5}) scales.

[14] The spectral resolution δu is being kept constant, in order to keep $\delta v_{\rm eff}$ unchanged.

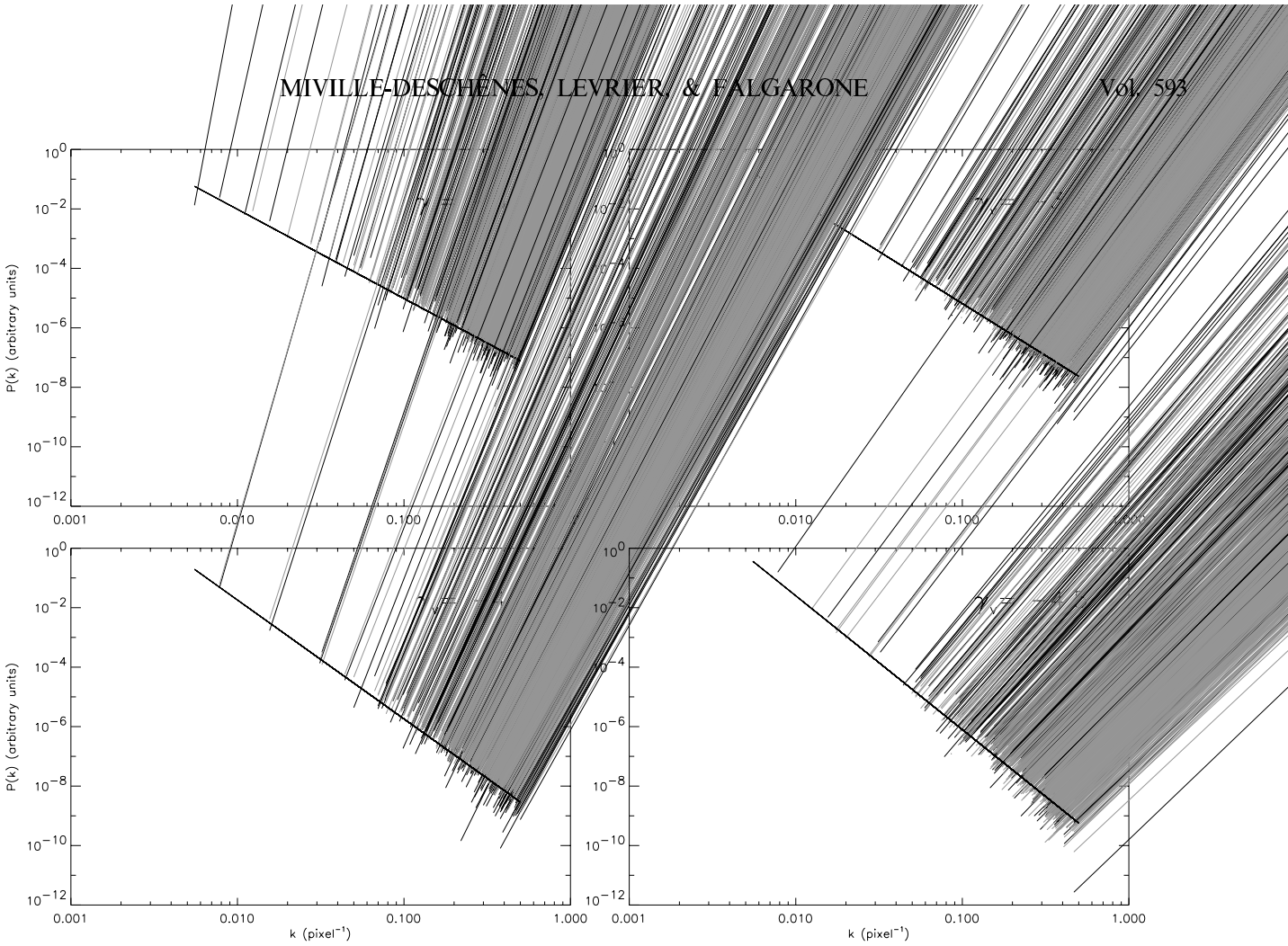

FIG. 11.—Power spectra of centroid velocity maps constructed from a lognormally distributed density field (see text). Each subplot corresponds to a given γ_v and features the lognormal density case (*black scatter plot*) and the fBm density case with $\gamma_n = -4$ (*gray scatter plot*). The black line represents the expected behavior in $k^{-\gamma_v}$.

a dramatic effect on simulated channel maps, as will be discussed later.

The condition expressed above for a velocity slice of width ΔV to be fully thin calls for a remark. The criterion $\sigma(l) > \Delta V$ is given for two-dimensional scales l in the plane of the sky, but the velocity dispersion of the gas sampled at that scale by the observations is actually a function of the three-dimensional scales l_{3D}. Many of those, when projected, give the same two-dimensional scale l, but their velocity dispersions can be quite different, and an average should enter in the thinness condition. Its present form, however, ensures that, since $l_{3D} \geq l$ if the velocity slice is thin at scale l, it will also be thin at all unprojected scales l_{3D}, according to equation (11).

TABLE 2
VELOCITY DISPERSION AT THE 1 pixel SCALE AND SMALLEST THIN SCALE AVAILABLE

γ_v	$\sigma(l = 1$ pixel) (km s^{-1})	$l_{\rm thin}(\Delta V = \delta v_{\rm eff})$ (pixel)
−3.0	3	0
−3.5	0.9	4
−4.0	0.3	24
−4.5	0.08	42

NOTE.—These values were computed for $T = 100$ K, $\delta u = 0.25$ km s^{-1}, $\sigma(L) = 3$ km s^{-1}, and $L = 129$ pixels. The effective spectral resolution of our simulation (see eq. [8]) is 1.4 km s^{-1}.

According to LP00, fully thin velocity slices, when integrated, produce maps whose spectral index is (for $\gamma_n < -3$)

$$\gamma_{\rm thin} = -3 - \frac{\gamma_v + 3}{2} , \quad (13)$$

and fully thick velocity slices exhibit a spectral index

$$\gamma_{\rm thick} = -3 + \frac{\gamma_v + 3}{2} . \quad (14)$$

When a substantial part of the emission is integrated over, the slices are said to be *very thick* and their spectral index tends to that of the three-dimensional density field, as shown in § 4.1.

To test this prediction, the spectral indices of velocity slices of increasing width were computed, for all our PPV data cubes and at a temperature of $T = 100$ K. The power spectra of selected velocity slices with different widths ΔV are shown in Figure 12. Each plot corresponds to a different set of (γ_n, γ_v) and shows, for the given PPV cube, the power spectra of four velocity slices (*open circles*) with $\Delta V = 1.25$, 1.75, 2.25, and 10.0 km s^{-1} (from bottom to top). In each case, the solid lines represent the predictions of LP00 for the thin and thick regimes (see eqs. [13] and [14]), and the small

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

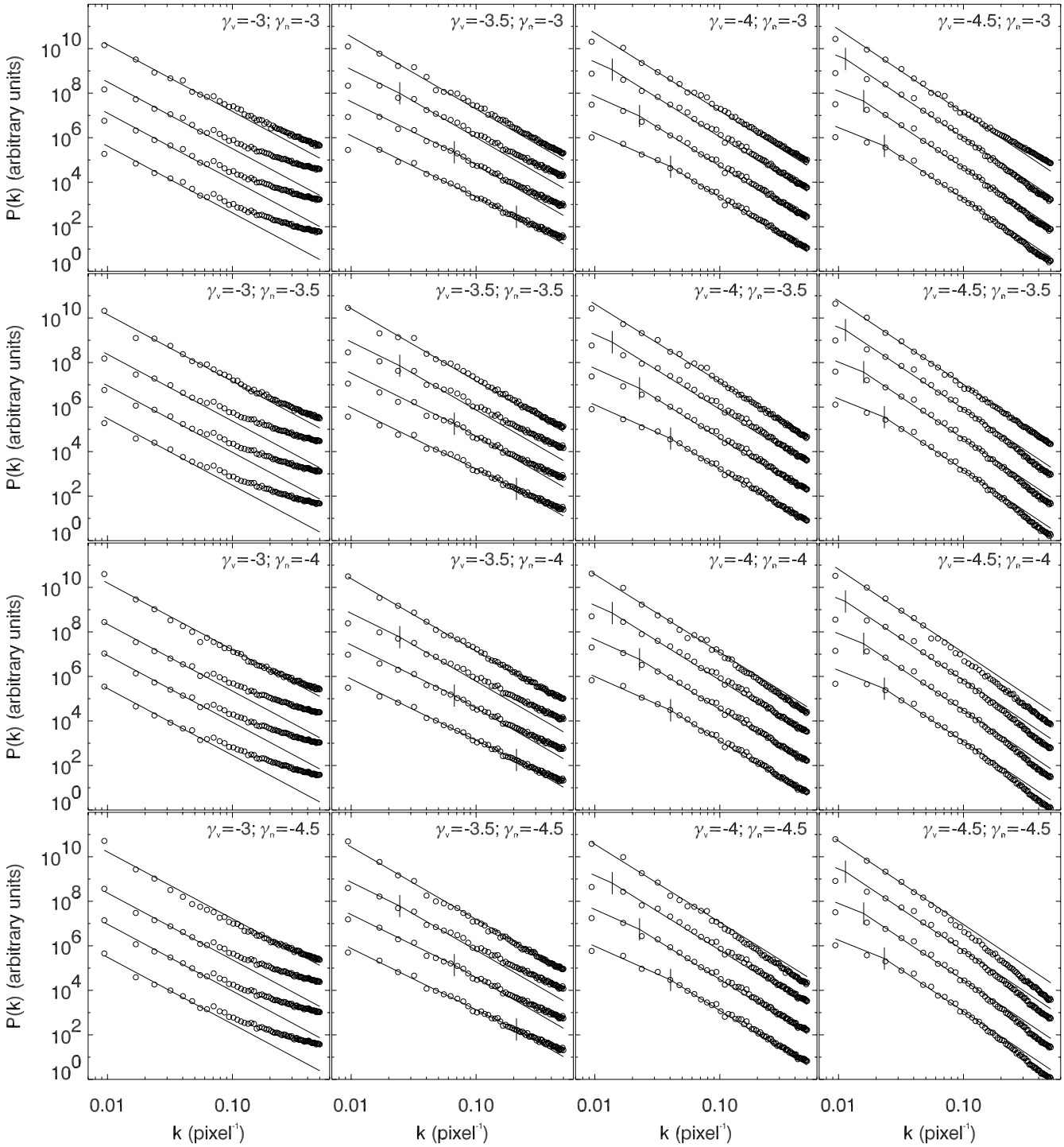

FIG. 12.—Power spectra of velocity slices for all (γ_n, γ_v) combinations. On each plot, the open circles represent the power spectra of velocity slices for $\Delta V = 1.25$, 1.75, 2.25, and 10.0 km s^{-1}, from bottom to top. The solid line on each curve is the prediction of LP00 (see eqs. [13] and [14]), normalized to fit around the thin-thick transition (indicated by a vertical marker). On each curve, the scales are thin (thick) on the left-hand (right-hand) side of this vertical marker.

vertical marker indicates the transition scale $l_{\rm thin}$, given by equation (12). The velocity slice under consideration is thin for scales on the left of this mark and thick for those on the right. The power spectra shown in Figure 12 are in general agreement with the predictions of LP00, given the selected values of ΔV, γ_n, and γ_v. Bent power spectra are observed, with a break close to $l_{\rm thin}$. However, the narrow range of scales over which the velocity slices are thin makes the comparison with the predictions uneasy. Furthermore, the power spectra of velocity slices for $\gamma_v = -4.5$ move away from the LP00 prediction at small scales because these velocity slices are becoming very thick at those scales. This

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

behavior is indeed correlated with γ_n. Another feature of Figure 12 is the increase of power at small scales for $\gamma_v = -3$, as a result of shot noise.

4.3.2. *Finite-Size or "Shot-Noise" Effect*

The computation of PPV cubes from finite-size three-dimensional velocity fields leads to an artificial increase of high-frequency fluctuations in channel maps (Lazarian et al. 2001; Brunt & Heyer 2002a; Esquivel et al. 2003). As pointed out by Esquivel et al. (2003), the limited size of the simulated lines of sight introduces sharp edges and almost empty channels in the PPV cube. This effect is more important with a small effective spectral resolution. Such a high-frequency flattening is seen in the power spectra of channel maps for $\gamma_v = -3$ in Figures 6 and 12. As expected, the amplitude of this high-frequency component increases when the size of the three-dimensional fields decreases. This effect biases the determination of simulated channel maps' power spectra.

One solution to reduce the effects of shot noise is to apply a Gaussian smoothing to the PPV spectra, simulating the effect of thermal broadening. However, such a smoothing also increases the effective spectral resolution (see eq. [8]), which results in a reduction of the accessible thin regime. An example of this is shown in Figure 13, where we plot the power spectra of velocity slices with $\Delta V = \delta v_{\rm eff}$, for two PPV cubes [($\gamma_n = -4$, $\gamma_v = -3$) and ($\gamma_n = -3$, $\gamma_v = -4.5$)] computed with different temperatures ($T = 1$, 10, 100, 200, and 500 K). The $\gamma_v = -3$ case is particularly interesting as velocity slices are thin at all scales as long as $\Delta V \leq \sigma(L)$ (see eq. [11]), which is the case here [$\sigma(L) = 3$ km s^{-1} and $\delta v_{\rm eff} = 2.9$ km s^{-1} for the highest temperature $T = 500$ K]. This allows for a separate study of the effect of Gaussian smoothing on shot-noise reduction and velocity slice thinness. The top panel of Figure 13 shows that Gaussian smoothing significantly dampens shot noise. Up to a temperature of 500 K the power spectrum steepens through reduction of the shot-noise effect, but it seems that, even at this temperature, shot noise has not been completely removed. At higher temperatures, the condition $\delta v_{\rm eff} \leq \sigma(L)$ would not be met any longer.

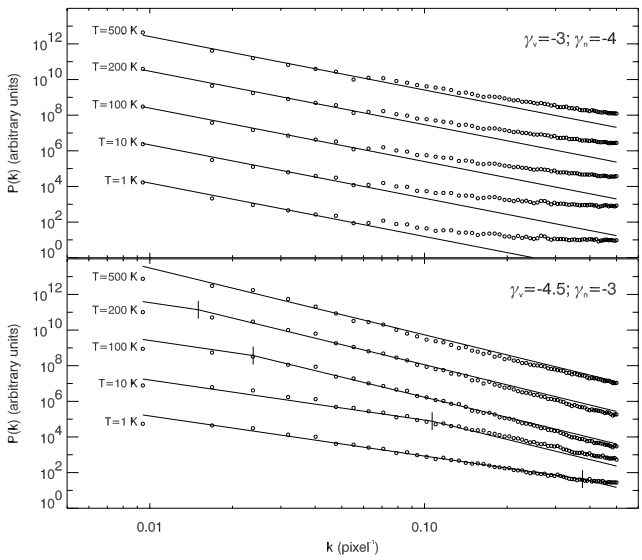

FIG. 13.—Power spectra of velocity slices of width $\Delta V = 1.25$ km s^{-1} for ($\gamma_n = -4$, $\gamma_v = -3$) (*top*) and ($\gamma_n = -3$, $\gamma_v = -4.5$) (*bottom*). On each plot, the five curves (*open circles*) represent PPV cubes computed with $T = 1$, 10, 100, 200, and 500 K. The solid line on each curve is the prediction of LP00 (see eqs. [13] and [14]), normalized to fit around the thin-thick transition (indicated by a vertical marker). The slices are thin for scales on the left-hand side of these vertical lines and thick for scales on their right-hand side.

The bottom panel of Figure 13 illustrates the effect of Gaussian smoothing on both the shot noise and the thickness of the velocity slice. At low temperature ($T = 1$ K), the velocity slice is thin on almost all scales, but the effect of shot noise can be observed at high frequency as the power spectrum is above the prediction of LP00. As expected, the shot-noise amplitude and the range of scales at which the velocity slice is thin both decrease with increasing T. At high temperature, the shot noise is completely removed, but the velocity slice is fully thick. This shows how the use of Gaussian smoothing is necessarily a compromise between the reduction of shot noise and the thinness of velocity slices. From the power spectra shown in Figure 12, shot noise appears to be significant only for $\gamma_v = -3$, indicating that the simulation parameters selected [$\sigma(L) = 3$ km s^{-1}, $T = 100$ K, and $\delta u = 0.25$ km s^{-1}] provide a good compromise, for most of our γ_v values, between shot-noise reduction and channel map thinness.

4.3.3. *Velocity Slice Analysis*

The method proposed by LP00 to determine γ_n and γ_v is to look at the spectral index ($\gamma_{\rm slice}$) of velocity slices of increasing width ΔV. According to LP00, the curve of $\gamma_{\rm slice}$ versus ΔV should reach two asymptotic values at small (thin) and large (very thick) ΔV that allow the determination of γ_n and γ_v. This velocity slice analysis has been performed on our simulations, and the results are presented in Figure 14, which shows the variations of the index $\gamma_{\rm slice}$ (fitted over the whole range of k) as a function of the velocity width ΔV. The curves, one for every set of (γ_n, γ_v), are grouped by their γ_v value. The shaded areas in this figure indicate not only the fully thin, fully thick, and very thick regimes but also the transition regime where the velocity slice is thin at large scales and thick at small scales. The vertical dashed line indicates the effective spectral resolution of our simulations. The plateau seen on the left of this line reflects the fact that velocity structures cannot be resolved as a result of the finite spectral resolution.

As ΔV enters the very thick regime, the spectral index $\gamma_{\rm slice}$ converges to the γ_n value, in agreement with the fact that the integrated emission has the same power spectrum as the three-dimensional density field. At the other end, we confirm the prediction of LP00 that the power spectrum of narrow velocity slices is independent of the density field. For a given γ_v all curves converge to the same value for small ΔV, except in the case of $\gamma_v = -4.5$, as explained in the next paragraph. This strong correlation between the three-dimensional velocity field and channel maps is also seen in Figures 5 and 6. First, in Figure 5, the channel maps' structure is dominated by the velocity field as it varies very little with γ_n. Similarly, the channel maps' power spectra for a given γ_v are the same for all values of γ_n. The influence of the velocity field on the channel maps' structure is also manifest in Figure 6, where channel maps' power spectra vary with γ_v.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

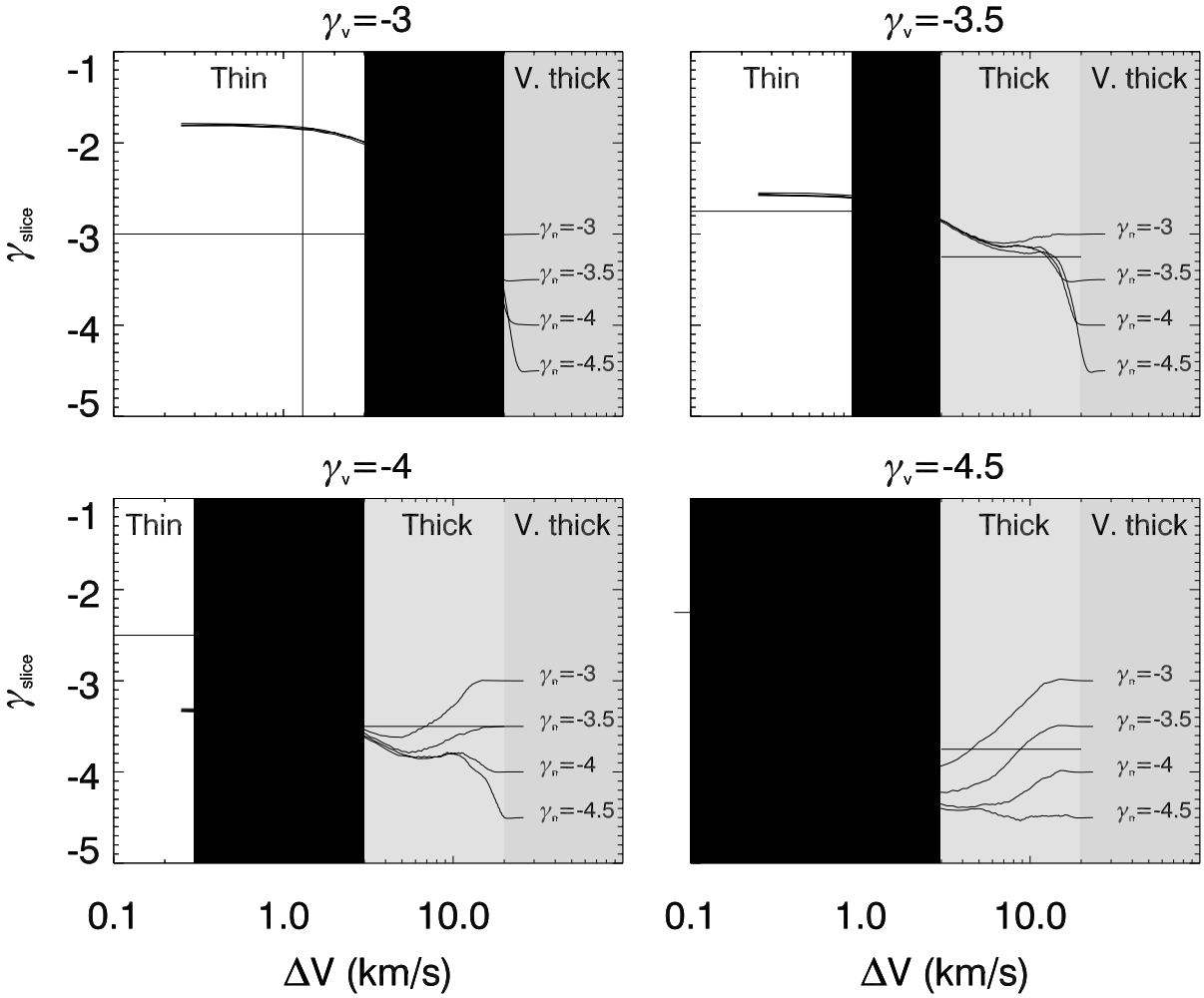

FIG. 14.—Velocity slice spectral indices as a function of velocity width ΔV, computed for all (γ_n, γ_v) combinations. Curves are grouped by their γ_v value. The white and gray zones indicate the "thin," "transition," "thick," and "very thick" regimes. The thin regime is for $\Delta V < \sigma(l = 1$ pixel). The thick regime is for $\Delta V > \sigma(L)$ (the velocity width is larger than the velocity dispersion at the largest scale). The transition regime corresponds to velocity slices with intermediate ΔV (they are thin at large scales and thick at small scales). The very thick regime is where $\gamma_{\rm slice} = \gamma_n$ ($\Delta V \sim 20$ km s^{-1}). The vertical dashed line indicates the effective spectral resolution of our simulations ($\delta v_{\rm eff} = 1.4$ km s^{-1}). The horizontal dotted lines indicate LP00's predictions for $\gamma_{\rm thin}$ and $\gamma_{\rm thick}$ (see eqs. [13] and [14]).

Back to Figure 14, the curves for $\gamma_v = -3$ rise at small ΔV, up to a value of -1.8. As the spectral index $\gamma_{\rm slice}$ has been computed over the whole k range, this trend can be completely attributed to shot noise, which has a significant effect for $\gamma_v = -3$ (see Fig. 13). For $\gamma_v = -3.5$ the effect of shot noise is reduced, and in that case, the curves are in relatively good agreement with the predictions of LP00. There is a significant plateau in the thick regime, at a value very close to the predicted $\gamma_{\rm thick}$ value (see eq. [14]). Moreover, for $\Delta V = \delta v_{\rm eff}$, we are very close to the fully thin regime, and the spectral index measured there is consistent with LP00. For $\gamma_v = -4$ and -4.5, the concordance with LP00 is not that clear. In these two cases the effect of shot noise is completely removed by the Gaussian smoothing, but, on the other hand, we are very far from the fully thin velocity slices. Some kind of plateau is observed in both cases within the thick regime, but not at the predicted $\gamma_{\rm thick}$ value. This is due to the fact that the smallest scales are actually becoming very thick. This is why, in the case of $\gamma_v = -4.5$, the curves are dependent on γ_n and do not converge to the same value.

4.3.4. *Discussion*

Except for $\gamma_v = -3.0$, we have seen that shot noise has a limited effect on our simulations because of the Gaussian smoothing applied. However, this is at the expense of a narrowing of the accessible thin regime: fully thin velocity slices with $\Delta V \geq \delta v_{\rm eff}$ are present only when $\gamma_v = -3.0$. In these conditions, the interpretation of the $\gamma_{\rm slice}$ versus ΔV curves (see Figs. 13 and 14) is ambiguous, which makes the determination of γ_v very difficult. The power spectra of fully thick velocity slices can actually depend on γ_n, which makes it impossible to deduce γ_v from $\gamma_{\rm thick}$ using equation (14). Therefore, as a result of the relative thickness of velocity slices in our simulations, we could not demonstrate whether the LP00 method can be used to determine γ_v.

One practical limitation of the LP00 method, however, is that it requires one to find out whether or not the fully thin regime is reached, for a given observation. If a significant asymptotic plateau is found at small ΔV in the $\gamma_{\rm slice}$ versus ΔV curves, one might think that it is the case. However,

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

as seen in Figure 14, such a plateau could also be observed in the thick regime, and this could lead to a wrong estimate of γ_v. In addition, the only way to estimate the position of the transition scale $l_{\rm thin}$ between the two regimes for a given velocity slice is by using equation (12), which requires γ_v. Therefore, there is no independent way to determine whether thin velocity slices have been reached or not. In that respect, the determination of γ_v in the Small Magellanic Cloud by Stanimirovic & Lazarian (2001) might be questionable as they do not seem to reach the thin asymptotic regime.

It is important to estimate in what conditions LP00's method could be used on real observations, for a typical high-latitude H I cloud, for instance. We have shown that the narrowest relevant velocity slice for this analysis has a width of $\Delta V = \delta v_{\rm eff} \sim (2.16 k_{\rm B} T/m)^{1/2}$ (here we consider that the effective spectral resolution is dominated by the thermal broadening). But to estimate γ_v using LP00's method, one must have a plateau at small ΔV in the $\gamma_{\rm slice}$ versus ΔV curve, which calls for fully thin velocity slices on a significant range of ΔV, say, $\delta v_{\rm eff} \leq \Delta V \leq 2\delta v_{\rm eff}$. We recall that velocity slices are thin at scales $l \geq l_{\rm thin}$ where $\sigma(l_{\rm thin}) = \Delta V$. Therefore, to evaluate on what scales LP00's method could be used to deduce γ_v, one must assess what $l_{\rm thin}$ is for a velocity slice of $\Delta V = 2\delta v_{\rm eff}$. As shown by Miville-Deschênes et al. (2003), the energy spectrum of H I is compatible with the Kolmogorov (1941) cascade [$\sigma(l) = Al^{0.33}$]. In these conditions, $l_{\rm thin}$ for a velocity slice of $\Delta V = 2\delta v_{\rm eff}$ is

$$l_{\rm thin} = \left(\frac{8.64 k_{\rm B} T}{m A^2}\right)^{3/2} . \tag{15}$$

The normalization factor A can be estimated from high-latitude H I observations like in Joncas et al. (1992), where the internal velocity dispersion at a scale of 1 pc is of the order of 4 km s^{-1}, significantly larger than that observed in molecular clouds (Larson 1981). If we consider CNM gas at $T = 100$ K, the smallest thin scale $l_{\rm thin}$ for a cloud at a distance of 100 pc is $\sim 8'$, which is significantly larger than the angular resolution ($1'$) of the 21 cm radio interferometer at Dominion Radio Astrophysical Observatory (DRAO). Furthermore, if we consider the presence of warmer gas (WNM [$T = 5000$–8000 K] or thermally unstable H I [$T \sim 1000$ K]), the thermal broadening would increase $l_{\rm thin}$ (which scales as $T^{3/2}$) and make the determination of γ_v using the LP00 method only possible at scales larger than a few degrees, at least for H I in the solar neighborhood. In this respect, the velocity centroid method is better suited to determine the three-dimensional velocity power spectrum as it does not depend at all on the gas temperature and on the thickness of the velocity slices in the observation. Therefore, the velocity centroid method allows the determination of the velocity power spectrum down to the angular resolution of the observations.

5. CONCLUSION

In this paper three-dimensional fBms with various spectral indices were used to simulate interstellar three-dimensional density and velocity fields. From these we computed several spectroimagery observations assuming optically thin line emission. Our results confirm that the spectral index γ_W of the integrated emission is the same as that of the three-dimensional density field γ_n, when the depth d of the medium probed along the line of sight is at least of the order of the largest transverse scale observed. For smaller depths, the power spectrum of the integrated emission shows two asymptotic slopes of γ_n and $\gamma_n + 1$ at small and large scales, respectively, with the transition occurring at a frequency $k = 1/2d$. This property of the power spectrum of integrated emission could be used to estimate the depth of interstellar clouds and to infer the three-dimensional statistical properties of optically thick media.

The main result of our study is that the spectral index of the maps of line centroid velocities is the same as that of the three-dimensional velocity field. This result is particularly robust because it holds for any gas temperature and whether density-velocity correlations are present or not. This similarity is also recovered if the power spectrum of the three-dimensional velocity field is not a power law or if the density fluctuations follow a lognormal distribution. This remarkable property of optically thin media may be used to estimate the three-dimensional energy spectrum of interstellar turbulence in various ISM environments.

We also compare the power spectra of velocity slices with the predictions of LP00. Because of the limited resolution of our simulations, we are not able to confirm their predictions. On the other hand, we show that the method proposed by LP00 is in practice barely applicable to real observations, and we suggest that a more robust determination of three-dimensional velocity statistics lies with velocity centroids.

We would like to thank our anonymous referee, whose detailed and thorough comments and suggestions considerably helped us improve the former version of this paper.

APPENDIX

SPECTRAL INDEX OF THE INTEGRATED EMISSION

In our case in which the medium under study is optically thin, the integrated emission map is simply the sum of all velocity channels:

$$W(x,y) = \sum_u N_u(x,y,u)\delta u . \tag{A1}$$

Using equation (6), reverting the order of summations over z and u, and with our values of δz and δu, this translates into

$$W(x,y) = \alpha \sum_z n(x,y,z)\delta z , \tag{A2}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

where α is a numerical coefficient coming from the unit conversion. The important point is that W is proportional to the sum over z of the three-dimensional density cube, which by construction is an fBm with spectral index γ_n. To compute the spectral index γ_W of the integrated emission, we consider the limit for which the summation can be replaced by an integral over z,

$$W(x,y) = \alpha \int n(x,y,z)dz \; . \tag{A3}$$

Writing the Fourier transform of the three-dimensional density as a function of the three-dimensional wavevector $\boldsymbol{k}$, we have

$$\tilde{n}(\boldsymbol{k}) = \iiint n(\boldsymbol{r}) e^{-2i\pi \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \, dx\, dy\, dz \; , \tag{A4}$$

which becomes, if we consider the $k_z = 0$ cut through $\tilde{n}(\boldsymbol{k})$ and integrate first over z,

$$\tilde{n}(k_x, k_y, 0) = \iint \frac{W(x,y)}{\alpha} e^{-2i\pi(k_x x + k_y y)} \, dx\, dy \; , \tag{A5}$$

meaning that the Fourier transform of W is proportional to the $k_z = 0$ cut through $\tilde{n}$. We therefore have

$$\left|\tilde{W}(k_x, k_y)\right|^2 \propto \left|\tilde{n}(k_x, k_y, 0)\right|^2 \propto \left(k_x^2 + k_y^2\right)^{\gamma_n/2} \; , \tag{A6}$$

and it is then easy to see that P_W and P_n follow the same law, and thus

$$\gamma_W = \gamma_n \; . \tag{A7}$$

This calculation can be fully duplicated to compute the spectral index of the centroid velocity map, in the case of a uniform density field. In this situation, the centroid velocity map (eq. [10]) is just

$$C(x,y) = \beta \int v(x,y,z)dz \; . \tag{A8}$$

We therefore have a similar result that reads

$$\gamma_C = \gamma_v \; . \tag{A9}$$

REFERENCES

Baker, P. L. 1973, A&A, 23, 81
Bazell, D., & Désert, F. X. 1988, ApJ, 333, 353
Bensch, F., Stutzki, J., & Ossenkopf, V. 2001, A&A, 366, 636
Brunt, C. M., & Heyer, M. H. 2002a, ApJ, 566, 276
———. 2002b, ApJ, 566, 289
Chandrasekhar, S. 1949, ApJ, 110, 329
Crovisier, J., & Dickey, J. M. 1983, A&A, 122, 282
Deshpande, A. A., Dwarakanath, K. S., & Goss, W. M. 2000, ApJ, 543, 227
Dickey, J. M., McClure-Griffiths, N. M., Stanimirovic, S., Gaensler, B. M., & Green, A. J. 2001, ApJ, 561, 264
Dickman, R. L., & Kleiner, S. C. 1985, ApJ, 295, 479
Dickman, R. L., Margulis, M., & Horvath, M. A. 1990, ApJ, 365, 586
Elmegreen, B. G., Kim, S., & Staveley-Smith, L. 2001, ApJ, 548, 749
Esquivel, A., Lazarian, A., Pogosyan, D., & Cho, J. 2003, MNRAS, 342, 325
Falgarone, E., & Phillips, T. G. 1990, ApJ, 359, 344
Falgarone, E., Phillips, T. G., & Walker, C. K. 1991, ApJ, 378, 186
Falgarone, E., & Puget, J. L. 1995, A&A, 293, 840
Gautier, T. N. I., Boulanger, F., Pérault, M., & Puget, J. L. 1992, AJ, 103, 1313
Gill, A. G., & Henriksen, R. N. 1990, ApJ, 365, L27
Goldman, I. 2000, ApJ, 541, 701
Grant, H. L., Stewart, R. W., & Moilliet, A. 1962, J. Fluid Mech., 12, 241
Green, D. A. 1993, MNRAS, 262, 327
Heitsch, F., Mac Low, M. M., & Klessen, R. S. 2001, ApJ, 547, 280
Heyer, M. H., & Schloerb, F. P. 1997, ApJ, 475, 173
Joncas, G., Boulanger, F., & Dewdney, P. E. 1992, ApJ, 397, 165
Joulain, K., Falgarone, E., Des Forêts, G. P., & Flower, D. 1998, A&A, 340, 241
Kitamura, Y., Sunada, K., Hayashi, M., & Hasegawa, T. 1993, ApJ, 413, 221
Kleiner, S. C., & Dickman, R. L. 1984, ApJ, 286, 255
———. 1985, ApJ, 295, 466
———. 1987, ApJ, 312, 837
Klessen, R. S., Heitsch, F., & Mac Low, M. M. 2000, ApJ, 535, 887
Kolmogorov, A. N. 1941, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30, 299
Larosa, T. N., Shore, S. N., & Magnani, L. 1999, ApJ, 512, 761
Larson, R. B. 1981, MNRAS, 194, 809
Lazarian, A., & Pogosyan, D. 2000, ApJ, 537, 720 (LP00)
Lazarian, A., Pogosyan, D., Vázquez-Semadeni, E., & Pichardo, B. 2001, ApJ, 555, 130
Miesch, M. S., & Bally, J. 1994, ApJ, 429, 645
Miville-Deschênes, M. A., Boulanger, F., Joncas, G., & Falgarone, E. 2002, A&A, 381, 209
Miville-Deschênes, M. A., Joncas, G., & Durand, D. 1995, ApJ, 454, 316
Miville-Deschênes, M. A., Joncas, G., Falgarone, E., & Boulanger, F. 2003, A&A, in press
Myers, P. C. 1983, ApJ, 270, 105
O'Dell, C. R., & Castaneda, H. O. 1987, ApJ, 317, 686
Ostriker, E. C., Stone, J. M., & Gammie, C. F. 2001, ApJ, 546, 980
Pérault, M., Falgarone, E., & Puget, J. L. 1986, A&A, 157, 139
Scalo, J. M. 1987, in Interstellar Processes, ed. D. J. Hollenbach & H. A. Thronson (Dordrecht: Reidel), 349
Spicker, J., & Feitzinger, J. V. 1988, A&A, 191, 10
Stanimirovic, S., & Lazarian, A. 2001, ApJ, 551, L53
Stutzki, J., Bensch, F., Heithausen, A., Ossenkopf, V., & Zielinsky, M. 1998, A&A, 336, 697
Vogelaar, M. G. R., & Wakker, B. P. 1994, A&A, 291, 557
von Hoerner, S. 1951, Z. Astrophys., 30, 17
Voss, R. F. 1985, Fundamental Algorithms for Computer Graphics (Berlin: Springer)
Wright, E. L. 1998, ApJ, 496, 1

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Article paru dans "Astronomy & Astrophysics", 421, 387, 2004

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

A&A 421, 387–398 (2004)
DOI: 10.1051/0004-6361:20047139
© ESO 2004

Astronomy & Astrophysics

Velocity centroids and the structure of interstellar turbulence

I. Analytical study*

F. Levrier**

LERMA / LRA – UMR 8112 du CNRS, École normale supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

Received 26 January 2004 / Accepted 15 March 2004

Abstract. We present an analytical study of the statistical properties of integrated emission and velocity centroids for a slightly compressible turbulent slab model, to retrieve the underlying statistics of three-dimensional density and velocity fluctuations. Under the assumptions that the density and velocity fields are homogeneous and isotropic, we derive the expressions of the antenna temperature for an optically thin spectral line observation, and of its successive moments with respect to the line of sight velocity component, focusing on the zeroth (intensity or integrated emission I) and first (non-normalized velocity centroid C) moments. The ratio of the latter to the former is the normalized centroid C_0, whose expression can be linearized for small density fluctuations. To describe the statistics of I, C and C_0, we derive expansions of their autocorrelation functions in powers of density fluctuations and perform a lowest-order real-space calculation of their scaling behaviour, assuming that the density and velocity fields are fractional Brownian motions. We hence confirm, within the scope of this study, the property recently found numerically by Miville-Deschênes et al. (2003a) that the spectral index of the normalized centroid is equal to that of the full velocity field. However, it is also argued that, in order to retrieve the velocity statistics, normalization of centroids may actually not be the best way to remove the influence of density fluctuations. In this respect, we discuss the modified velocity centroids introduced by Lazarian & Esquivel (2003) as a possible alternative. In a following paper, we shall present numerical studies aimed at assessing the validity domain of these results.

Key words. ISM: structure – methods: analytical – turbulence

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

1. Introduction

The proper exploitation of astronomical observations requires one to deal with several problems to accurately describe the objects and processes under study. In particular, regarding the physics of the interstellar medium (ISM), it should be stressed that spectral emission data depends on the velocity field solely via its component along the line of sight, through Doppler shifts. Furthermore, this information is necessarily integrated along the line of sight, and radiative transfer leads to expressions in which the contributions of the density and velocity fields are mixed in a complex way (Hegmann & Kegel 2000). Hence, to describe the physical conditions and processes in the ISM, one has to rely on a single number (e.g. antenna temperature) for any given direction in the plane of the sky and any given velocity along the line of sight. Although the comparison of antenna temperatures for various tracers helps, it is necessary to solve an inverse problem to have access to the three-dimensional properties of the medium, such as density and velocity, and compare them with various models, for instance to assess the roles of gravity, magnetic field or turbulence.

Indeed, it is now recognized that the different components of the ISM are subjected to turbulent motion. This has been observed in the ionized gas (Van Langevelde et al. 1992), in HII regions (O'Dell & Castaneda 1987) and in the neutral atomic phase (Spicker & Feitzinger 1988; Miville-Deschênes et al. 2003b), but molecular cloud studies are by far the most numerous (see e.g. Kleiner & Dickman 1985a; Kitamura et al. 1993; Miesch & Bally 1994). Estimates of Reynolds numbers from molecular viscosity in these clouds are of the order of 10^8, consistent with turbulent flows (Chandrasekhar 1949). Moreover, molecular lines in this phase exhibit suprathermal widths over a wide range of spatial scales, from a few $\mathrm{km\,s^{-1}}$ in small dark clouds to a few tens of $\mathrm{km\,s^{-1}}$ in giant complexes, while the thermal dispersion is only of about $0.3\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ for molecular hydrogen at $T = 10$ K. These linewidths scale as a power-law of the cloud's size (Larson 1981), with an exponent close to that predicted by the classical theory of turbulence (Kolmogorov 1941). Such random motions within molecular clouds may in turn account for a number of other properties of spectral lines (Baker 1976), as well as provide support against gravitational collapse, explaining the fact that

* Appendices A to D are only available in electronic form at http://www.edpsciences.org

** e-mail: levrier@lra.ens.fr

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

the lifetime of molecular clouds is larger than their free-fall time (Scalo 1985) and that the star formation rate is therefore much smaller than predicted by gravitationally collapsing cloud models (Zuckerman & Evans 1974).

Because of this interplay between random motion and many physical processes at work in the ISM in general and in the molecular phase in particular, one needs to accurately describe these turbulent flows (see the review by Vázquez-Semadeni et al. 2000). As noted earlier, this has to be done using the antenna temperature which represents the emission from a given direction and at a given velocity, and so a number of methods were devised to derive the statistical properties of the three-dimensional fields from those of the observational data. Among these, the velocity channel analysis (VCA) of Lazarian & Pogosyan (2000) is based on an analytical derivation of the properties of channel maps with varying velocity widths. It may however prove difficult to apply to actual observations, as shown by Miville-Deschênes et al. (2003a). The modified velocity centroids (MVC) of Lazarian & Esquivel (2003) are a recent promising attempt to reduce the influence of density fluctuations in the statistical properties of centroids, although it can be argued that they are only defined through their structure function. As a final example of velocity statistics retrieval methods, principal component analysis (PCA), which works on the full position-position-velocity cubes, is meant to decompose data onto an orthogonal basis and derive properties of the velocity field at each scale, as calibrated numerically by Brunt et al. (2003). The main objective of these works is to relate the scaling behaviour observed in the two-dimensional maps to scaling laws inferred for the three-dimensional fields. For instance, Stutzki et al. (1998) showed that for optically thin media, the spectral index of the integrated emission map is the same as that of the full density field, provided that the depth probed is larger than the transverse scales considered. In a recent work, Miville-Deschênes et al. (2003a) used numerical simulations to show that the same is true for the normalized velocity centroid with respect to the three-dimensional velocity field. However, this latter result lacks theoretical support, and it is therefore the goal of this paper to present an analytical study aimed at clarifying the relationship between the velocity centroids and the velocity field, within a simple turbulent cloud model.

Given the observational data, one may derive moments of the antenna temperature profiles, each of these moments yielding a potentially informative two-dimensional map. For instance, the zeroth moment is the integrated emission, or intensity, while the first moment is the velocity centroid, which can also be normalized to the intensity (Münch 1958; Dickman & Kleiner 1985b; Miville-Deschênes et al. 2003a). For an optically thin line and uniform excitation conditions, the non-normalized centroid can be related to the cloud's total momentum, while the normalized centroid is a measure of average velocity within the medium. While density fluctuations may bias the description of the turbulent motion (Lazarian & Esquivel 2003), it is however commonly believed, and intuitively plausible, that their effects are somewhat compensated by normalization. To properly assess these, and following Dickman & Kleiner (1985b) (see also Scalo 1984; Kitamura et al. 1993; Miesch & Bally 1994), we shall use autocorrelation functions of the moment maps and relate them to correlation functions of the underlying three-dimensional fields. To this end, we first describe the model we shall use and introduce the notations and assumptions in Sect. 2. We then present a brief summary of how moments of the line profile can be related to the density and velocity fields within the medium (Sect. 3). Section 4 contains a general study of the statistical properties of intensity, normalized and non-normalized velocity centroid maps as functions of the three-dimensional density and velocity fields' statistics. The equations obtained in the lowest order are then applied to the test case of fractional Brownian motion (fBm) density and velocity fields (Sect. 5). Section 6 presents a discussion of the various results obtained with respect to earlier works. Our concluding remarks are given in Sect. 7 and details on the calculations can be found in the appendix.

2. The model

Throughout the paper, boldface notations stand for vector quantities. A point in three-dimensional space is given by its position $\boldsymbol{x}$, which can be written as $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{X}, z) = \boldsymbol{X} + z\boldsymbol{e}_z$, where $\boldsymbol{X}$ is a two-dimensional vector in the plane of the sky and z marks the line-of-sight position of the point considered, $\boldsymbol{e}_z$ being the unit vector along the line of sight. The three-dimensional separation between points $\boldsymbol{x}_1$ and $\boldsymbol{x}_2$ is written as $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ and the separation between their respective lines of sight $\boldsymbol{X}_1$ and $\boldsymbol{X}_2$ is $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1$. In short, three-dimensional vectors are written in lowercase, while vectors in the plane of the sky are written in uppercase. These notations are illustrated in Fig. 1. It should be emphasized that we shall only consider small scales on the plane of the sky, so that all lines of sight are parallel.

Hereafter, our model is a slab of gas of width D, perpendicular to the line of sight, and of infinite transverse extensions[1], with $z = 0$ conventionally placed halfway through the slab (see Fig. 1). Within the slab, the average density (that is, the average number of emitters per unit volume taken over the whole slab) is a constant noted ρ_0. As for the velocity $\boldsymbol{v}$ of the gas with respect to the observer, we shall write v to stand for its component along the line of sight, the mean value of which over the slab is v_0. These averages (ρ_0 and v_0) are obviously constants, independent of the line of sight. To assume the most general case, we shall take v_0 to be nonzero[2]. The gas velocity within the rest frame of the cloud is simply $\delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - v_0\boldsymbol{e}_z$, assuming that there is no systematic transverse velocity. Furthermore, fluctuations of density along any given line of sight are supposed to be small compared to the average value ρ_0, in the sense that the standard deviation of the density field should be less than ρ_0. It is also assumed that the turbulent flow within the slab is homogeneous and isotropic. These last hypotheses are to be understood in the strong sense of Monin & Yaglom (1975): not only are the scalar

[1] This is in no way contradictory with the assumption that all lines of sight considered are parallel. The cloud is supposed to be infinite, but only a small fraction of it is observed and supposed to be representative of the whole.

[2] The case $v_0 = 0$ is only special in the way the calculations are performed, as the end result amounts to setting v_0 to zero in the general formulæ. This is shown in Appendix B.

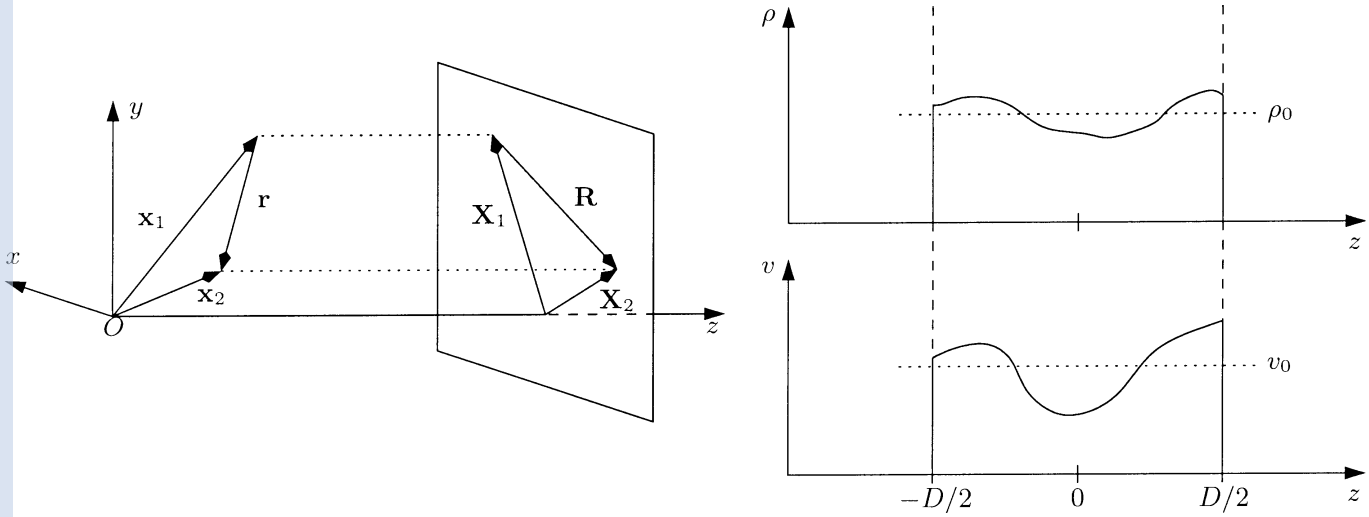

Fig. 1. Notations used in the paper (*left*) and schematics of the turbulent slab model (*right*). A lowercase boldface letter stands for a three-dimensional vector, while the corresponding uppercase represents its projection on the plane of the sky (xOy). The slab is infinite in the x and y directions and is limited to $I_D = [-D/2, D/2]$ in the z direction. The density ρ and line-of-sight velocity v distributions along a line of sight are shown on the right. The mean values ρ_0 and v_0 are taken over the whole slab.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

field ρ and the vector field $\delta\boldsymbol{v}$ homogeneous and isotropic, but the same should apply to the four-dimensional field $(\rho, \delta\boldsymbol{v})$. This will be useful in the derivation of our results in Sect. 4. Outside the slab, the density and velocity are set to zero. We further assume that the observation is done in an optically thin transition, at a frequency for which the Rayleigh-Jeans approximation is valid, that uniform excitation conditions apply within the slab, and that no background radiation is present.

With these assumptions in mind, the antenna temperature $T_a(\boldsymbol{X}, u)$ representing the emission from a given line of sight $\boldsymbol{X}$ at an observed velocity u can be written as the integral (Dickman & Kleiner 1985b),

$$T_a(\boldsymbol{X}, u) = \int_{I_D} T_{ex}(\boldsymbol{x})\kappa_0(\boldsymbol{x})\phi(v(\boldsymbol{x}) - u)\mathrm{d}z, \tag{1}$$

where I_D is the segment $[-D/2, D/2]$ over which the integration is performed. At each position $\boldsymbol{x}$, T_{ex} is the excitation temperature and κ_0 is the integrated absorption coefficient. The normalized line profile function ϕ is assumed to be symmetrical about zero and independent of $\boldsymbol{x}$. For instance, if one only considers thermal broadening, ϕ takes the form

$$\phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{th}} \exp\left[-\frac{w^2}{2\sigma_{th}^2}\right], \tag{2}$$

with σ_{th} the thermal velocity dispersion. The shifted argument $v(\boldsymbol{x}) - u$ of ϕ in Eq. (1) simply expresses the fact that the emission at position $\boldsymbol{x}$ is broadened around the local line of sight velocity $v(\boldsymbol{x})$. Assuming uniform excitation conditions, T_{ex} is a constant, and $\kappa_0(\boldsymbol{x})$ is proportional to the local gas density $\rho(\boldsymbol{x})$, so we can write

$$T_a(\boldsymbol{X}, u) = \int_{I_D} \alpha\rho(\boldsymbol{x})\phi(v(\boldsymbol{x}) - u)\mathrm{d}z, \tag{3}$$

where α is a proportionality constant. The expression in Eq. (3) shows that, even under simplifying assumptions, the task of extracting properties of the density and velocity fields from the observational data $T_a(\boldsymbol{X}, u)$ is a difficult one.

3. Velocity moments

In order to obtain information about the velocity field properties from the data sets, one may compute the various moments of the antenna temperature profiles $T_a(\boldsymbol{X}, u)$ for a given line of sight $\boldsymbol{X}$. This is a logical step considering that knowledge of the moments of a random variable is equivalent to that of the full probability distribution. We shall therefore consider the moment maps $W_n(\boldsymbol{X})$ defined by

$$W_n(\boldsymbol{X}) = \int u^n T_a(\boldsymbol{X}, u)\mathrm{d}u. \tag{4}$$

The integration is done over all velocities from $-\infty$ to ∞, which poses no convergence problem since the line profile has a finite support[3]. Using Eq. (3) to express T_a as a function of the local line profile and of the density,

$$\begin{aligned} W_n(\boldsymbol{X}) &= \int u^n \left[\alpha \int_{I_D} \rho(\boldsymbol{x})\phi(v(\boldsymbol{x}) - u)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}u \\ &= \alpha \int_{I_D} \rho(\boldsymbol{x}) \left[\int (v(\boldsymbol{x}) - w)^n \phi(w)\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{5}$$

where we introduced the variable $w = v(\boldsymbol{x}) - u$. Developing the integrand in the innermost integral, and since the local line

[3] If any continuum emission is present, it should first be removed.

profile ϕ is assumed to be independent of the position $\boldsymbol{x}$, we get the following expression

$$W_n(\boldsymbol{X}) = \alpha \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left[\int_{I_D} \rho(\boldsymbol{x}) v^{n-k}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z \right] \left[\int w^k \phi(w) \mathrm{d}w \right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k h_k \left[\int_{I_D} \rho(\boldsymbol{x}) v^{n-k}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z \right], \quad (6)$$

where the C_n^k are the binomial's coefficients and the h_k are related to the moments of the normalized line profile ϕ,

$$h_k = (-1)^k \alpha \int w^k \phi(w) \mathrm{d}w. \quad (7)$$

It should be noted that the assumed evenness of ϕ leads to $h_{2p+1} = 0$. The first two moments are of particuler interest, since, by definition, they are the total emergent intensity I and the non-normalized velocity centroid C, respectively,

$$I(\boldsymbol{X}) = W_0(\boldsymbol{X}) = \alpha \int_{I_D} \rho(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z = \alpha N(\boldsymbol{X})$$

and

$$C(\boldsymbol{X}) = W_1(\boldsymbol{X}) = \alpha \int_{I_D} \rho(\boldsymbol{x}) v(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}z. \quad (8)$$

Here, $N(\boldsymbol{X})$ is the column density at position $\boldsymbol{X}$. In the rest of this paper, we shall only consider the intensity and the velocity centroid. The use of higher order moments would theoretically give access to more information about the structures of the density and velocity fields, but, in practice, noise levels and limited spectral resolution may very well jeopardize their usefulness.

4. Statistics of intensity and centroid maps

4.1. Rationale of the computations

We may use the line profile moments defined above to quantify the structure of the turbulent flow within the slab. Obviously, the zeroth moment $W_0(\boldsymbol{X}) = I(\boldsymbol{X})$ can only be used to derive statistics of the density field, as it is proportional to the column density $N(\boldsymbol{X})$. The first moment or non-normalized velocity centroid $W_1(\boldsymbol{X}) = C(\boldsymbol{X})$ is the first appropriate quantity to study the velocity field, as can be seen from Eq. (8). However, $C(\boldsymbol{X})$ represents the integration of a momentum, rather than of a velocity proper, and it appears that density fluctuations may affect the estimation of the velocity statistics from this map. To circumvent this problem, it is common to use normalized centroids $C_0(\boldsymbol{X})$, which are simply defined as the ratio $C(\boldsymbol{X})/I(\boldsymbol{X})$. This is usually and empirically justified by the assumption that density fluctuations in $C(\boldsymbol{X})$ are also present in $I(\boldsymbol{X})$ and therefore somehow vanish from $C_0(\boldsymbol{X})$. In the simplified case where density does not fluctuate along the line of sight, such a reasoning is obviously correct, even if transverse density fluctuations are present, and normalization then only serves as a dimensionality factor. As far as we are aware, however, no analytical study exists of the influence of longitudinal fluctuations of density on velocity centroids, even in the quite simplified model used here.

Now, in order to gain a better understanding of the underlying three-dimensional statistics of the velocity field through velocity centroids, it seems natural to consider the two-dimensional statistics of the centroid maps. Indeed, structural properties of the velocity and density fields should arise, under one form or another, in statistical measures performed on the maps $C(\boldsymbol{X})$ and $C_0(\boldsymbol{X})$. Of course, it is similarly reasonable to look for the influence of density structure in the statistics of the intensity map $I(\boldsymbol{X})$. One such useful measure to be performed on the available two-dimensional maps is the autocorrelation function (ACF), which gives the mean degree of correlation between values of a field taken at points separated on the plane of the sky by a given vector $\boldsymbol{R}$ (Kleiner & Dickman 1984). More precisely, the autocorrelation function $A_{\mathcal{F}}$ of a field $\mathcal{F}$ is defined by

$$A_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{R}) = \langle \mathcal{F}(\boldsymbol{X}) \mathcal{F}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{R}) \rangle, \quad (9)$$

where the brackets stand for a spatial average over position $\boldsymbol{X}$ in the plane of the sky. Hereafter, we shall consider the autocorrelation functions of the intensity and of both types of centroid, respectively noted $A_I(\boldsymbol{R})$, $A_C(\boldsymbol{R})$ and $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$, and compute them as functions of statistical measures of the three-dimensional density and velocity fields. In order to do so, we first separate mean and fluctuating contributions of density and velocity in the quantities involved, with $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ and $v = v_0 + \delta v$. These expressions can be used to write the first two moment maps as

$$I(\boldsymbol{X}) = \int_{I_D} \alpha \rho(\boldsymbol{X}, z) \mathrm{d}z = \alpha \rho_0 D \left[1 + y_{\rho_X} \right]$$

and

$$C(\boldsymbol{X}) = \int_{I_D} \alpha \rho(\boldsymbol{X}, z) v(\boldsymbol{X}, z) \mathrm{d}z = \alpha \rho_0 v_0 D \left[1 + y_{\rho_X} + y_{v_X} + y_{\rho v_X} \right], \quad (10)$$

where we have introduced the following integrated fluctuation terms[4]

$$y_{\rho_X} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{X}, z)}{\rho_0} \mathrm{d}z, \quad y_{v_X} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{v_0} \mathrm{d}z$$

and

$$y_{\rho v_X} = \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{X}, z)}{\rho_0} \frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{v_0} \mathrm{d}z. \quad (11)$$

The normalized centroid C_0 is then simply written as

$$C_0(\boldsymbol{X}) = \frac{C(\boldsymbol{X})}{I(\boldsymbol{X})} = v_0 \frac{1 + y_{\rho_X} + y_{v_X} + y_{\rho v_X}}{1 + y_{\rho_X}}. \quad (12)$$

This last expression can be used to clarify the usefulness of the small fluctuations hypothesis. Indeed, for a perturbative method to be applicable in the computation of the autocorrelation function of the normalized velocity centroid map, one should be able to linearize Eq. (12), and therefore we need to

[4] In these integrated fluctuation terms, we chose to denote the position $\boldsymbol{X}$ on the plane of the sky as a subindex, rather than as an argument, to allow for concise equations in the subsequent developments.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

assume that $|y_{\rho_X}| < 1$, so that the denominator can be expanded as a converging series,

$$\frac{1}{1+y_{\rho_X}} = 1 - y_{\rho_X} + y_{\rho_X}^2 \ldots = \sum_{n\geqslant 0}(-y_{\rho_X})^n. \tag{13}$$

Such a condition is obviously achieved if local density fluctuations themselves are small in the sense, expressed in Sect. 2, that the standard deviation of the density field σ_ρ should be smaller than the average density ρ_0, since

$$|y_{\rho_X}| = \left|\frac{1}{D}\int_{I_D}\frac{\delta\rho(\boldsymbol{X},z)}{\rho_0}\mathrm{d}z\right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{D}\int_{I_D}\left(\frac{\delta\rho(\boldsymbol{X},z)}{\rho_0}\right)^2\mathrm{d}z}$$
$$\simeq \sqrt{\frac{\overline{\delta\rho^2}}{\rho_0^2}} = \frac{\sigma_\rho}{\rho_0}. \tag{14}$$

The identification of the mean squared density fluctuations along a single line of sight with the variance σ_ρ^2 of the whole density field is based on the homogeneity hypothesis. Indeed, any line of sight should statistically represent the full field. Although the stronger assumption $\sigma_\rho < \rho_0$ is not strictly necessary for the linearization mentioned earlier, it is useful in the expansion of the autocorrelation functions since, in this case, the hybrid integrated fluctuation term $y_{\rho v_X}$ is of the same order in density as y_{ρ_X},

$$|y_{\rho v_X}| \leqslant \sqrt{\frac{1}{D}\int_{I_D}\left(\frac{\delta\rho(\boldsymbol{X},z)}{\rho_0}\right)^2\mathrm{d}z}\sqrt{\frac{1}{D}\int_{I_D}\left(\frac{\delta v(\boldsymbol{X},z)}{v_0}\right)^2\mathrm{d}z}$$
$$\simeq \frac{\sigma_\rho}{\rho_0}\frac{\sigma_v}{v_0}, \tag{15}$$

where we used the Cauchy-Schwarz inequality and introduced the standard deviation σ_v of the line-of-sight component of the velocity field[5]. This allows us to develop the intensity and the velocity centroid maps, as well as their autocorrelation functions, according to the powers of σ_ρ/ρ_0. It should be made clear that the expansion in Eq. (13) is not necessarily true for real data, but that it is used here as a reasonable first step towards understanding the effects of realistic density fluctuations on velocity centroids.

4.2. Autocorrelation function of the intensity I

Taking the autocorrelation function $A_I(\boldsymbol{R})$ of the intensity map $I(\boldsymbol{X})$, and using the linearity property of averages, we have terms of order up to two in density fluctuations, namely

$$A_I(\boldsymbol{R}) = (\alpha\rho_0 D)^2\left[1 + \left\langle y_{\rho_X}\right\rangle + \left\langle y_{\rho_{X+R}}\right\rangle + \left\langle y_{\rho_X} y_{\rho_{X+R}}\right\rangle\right], \tag{16}$$

where we recall that the brackets stand for an average over $\boldsymbol{X}$. These are performed on quantities integrated over z, and can therefore be interpreted as averages over the whole turbulent slab. Indeed, if one considers a three-dimensional field $f(\boldsymbol{x})$, its integrated map $F(\boldsymbol{X})$ defined by

$$F(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{D}\int_{I_D} f(\boldsymbol{X},z)\mathrm{d}z$$

has an average

$$\langle F(\boldsymbol{X})\rangle = \frac{1}{D}\int_{I_D}\langle f(\boldsymbol{X},z)\rangle\,\mathrm{d}z = \frac{1}{DS}\iiint f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

over a surface S of the sky. The quantity $\langle F(\boldsymbol{X})\rangle$ can then be seen as an average of f over the volume DS, and, assuming ergodicity, it can also be identifid with the ensemble average $\overline{f(\boldsymbol{x})}$ at any given position $\boldsymbol{x}$ within the flow. In the present case, the term $\left\langle y_{\rho_X}\right\rangle$, which is of the first order in density fluctuations, can be written as

$$\left\langle y_{\rho_X}\right\rangle = \frac{1}{\rho_0 D}\int_{I_D}\langle\delta\rho(\boldsymbol{X},z)\rangle\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho_0}\overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})} = 0, \tag{18}$$

since, by definition, the average of the density fluctuations over the whole volume of the slab is zero. The assumption of homogeneity allows one to write that $\left\langle y_{\rho_{X+R}}\right\rangle = 0$ as well. As for the second order term, which reads

$$\left\langle y_{\rho_X} y_{\rho_{X+R}}\right\rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2}\left\langle\left[\int_{I_D}\delta\rho(\boldsymbol{X},z)\mathrm{d}z\right]\left[\int_{I_D}\delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R},z)\mathrm{d}z\right]\right\rangle$$
$$= \frac{1}{\rho_0^2 D^2}\iint_{I_D^2}\langle\delta\rho(\boldsymbol{X},z_1)\delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R},z_2)\rangle\,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2, \tag{19}$$

and where I_D^2 is the square domain $I_D \times I_D$, it includes an average over $\boldsymbol{X}$ that, following the idea used above, should be replaced by an ensemble average characteristic of the turbulent flow. Indeed, one can see that

$$\langle\delta\rho(\boldsymbol{X},z_1)\delta\rho(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R},z_2)\rangle = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x}_1)\delta\rho(\boldsymbol{x}_2)}, \tag{20}$$

with the three-dimensional vectors $\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{X},z_1)$ and $\boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R},z_2)$. Introducing the autocorrelation function $B_{\rho,\rho}$ of the density fluctuations, which is defined, for any pair of points $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})$ within the slab, by[6]

$$B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r}) = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}, \tag{21}$$

we therefore can write the term under study as

$$\left\langle y_{\rho_X} y_{\rho_{X+R}}\right\rangle = \frac{1}{\rho_0^2 D^2}\iint_{I_D^2} B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2$$

or, more concisely,

$$\left\langle y_{\rho_X} y_{\rho_{X+R}}\right\rangle = \frac{1}{\rho_0^2}M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}), \tag{22}$$

[5] It should be stressed that no hypothesis is made on the strength of velocity fluctuations, so that scaling them to the mean velocity v_0 is merely a convenient way to symmetrize expressions, and should not be given too much importance. We are aware, however, that the sound speed would be a much more physically meaningful velocity scale, and it will be used as such when the mean velocity is zero (see Appendix B).

[6] We chose to write $B_{\rho,\rho}$ instead of using the more consistent notation $A_{\delta\rho}$ for the autocorrelation function of the density fluctuations, because, in the following developments, higher order and multipoint correlation functions of mixed fields arise for which the $A_{\mathcal{F}}$ notation would have become cumbersome.

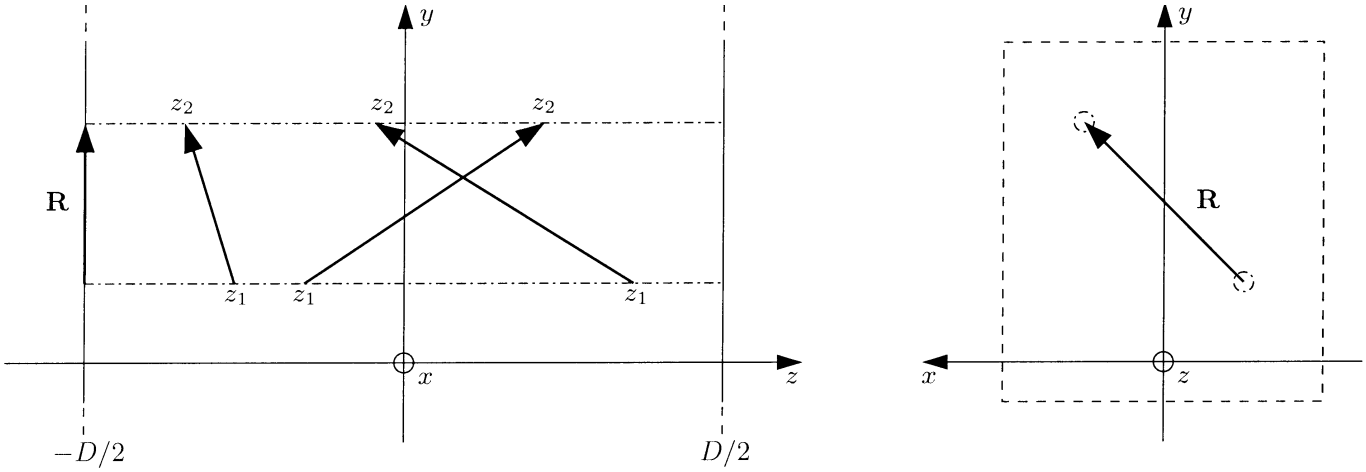

Fig. 2. Interpretation of the average $M_{\rho,\rho}$ appearing in Eq. (23). The slab is viewed edge-on in the left figure, and face-on in the right. The value of $M_{\rho,\rho}$ at any lag $\boldsymbol{R}$ is the average of the correlation function $B_{\rho,\rho}$ over all pairs of points whose projected separation on the plane of the sky is $\boldsymbol{R}$. Three such pairs are presented on the left.

where $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$, which is defined by the double integral

$$M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2}\iint_{I_D^2} B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2, \tag{23}$$

is interpreted as an average of $B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r})$ taken over all pairs of points within the slab whose three-dimensional separation $\boldsymbol{r}$ has the given vector $\boldsymbol{R}$ for component in the plane of the sky (see Fig. 2). Eventually, the autocorrelation function of the intensity simply reads

$$A_I(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2\left[\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})\right]. \tag{24}$$

This expression will be exploited later on when compared with the autocorrelation functions of velocity centroids.

4.3. Autocorrelation function of the non-normalized velocity centroid C

The same general method applies when considering the non-normalized velocity centroid $C(\boldsymbol{X})$. Its expansion, written in Eq. (10), includes terms of order zero and one in density fluctuations. Therefore, its autocorrelation function $A_C(\boldsymbol{R})$ features terms of order up to two. Namely,

$$\begin{aligned} A_C(\boldsymbol{R}) &= (\alpha\rho_0 v_0 D)^2\left\langle\left[1 + y_{v_X} + y_{\rho_X} + y_{\rho v_X}\right]\right. \\ &\quad\left.\times\left[1 + y_{v_{X+R}} + y_{\rho_{X+R}} + y_{\rho v_{X+R}}\right]\right\rangle \\ &= (\alpha\rho_0 v_0 D)^2\sum_{n=0}^{2}\langle a_n\rangle, \end{aligned} \tag{25}$$

where a_n is a term of order n in density. The explicit forms of these coefficients are given by

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + y_{v_X} + y_{v_{X+R}} + y_{v_X}y_{v_{X+R}}, \\ a_1 &= y_{\rho_X} + y_{\rho_{X+R}} + y_{\rho_X}y_{v_{X+R}} + y_{v_X}y_{\rho_{X+R}} \\ &\quad + y_{\rho v_X} + y_{\rho v_{X+R}} + y_{\rho v_X}y_{v_{X+R}} + y_{\rho v_{X+R}}y_{v_X}, \\ a_2 &= y_{\rho_X}y_{\rho_{X+R}} + y_{\rho v_X}y_{\rho_{X+R}} + y_{\rho v_{X+R}}y_{\rho_X} + y_{\rho v_X}y_{\rho v_{X+R}}. \end{aligned} \tag{26}$$

The linearity of the averaging process over the plane of the sky implies then that we should consider terms of the form $\langle y_{\lambda_X}\rangle$ and $\left\langle y_{\lambda_X}y_{\mu_{X+R}}\right\rangle$, where λ and μ represent either ρ, v or ρv. Due to the homogeneity hypothesis, terms of the form $\langle y_{\lambda_{X+R}}\rangle$ are of course equal to $\langle y_{\lambda_X}\rangle$, and so, considering the zeroth order contribution $\langle a_0\rangle$, we have

$$\begin{aligned} \langle a_0\rangle &= 1 + 2\langle y_{v_X}\rangle + \langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}\rangle \\ &= 1 + \frac{2}{v_0}\overline{\delta v(\boldsymbol{x})} + \frac{1}{v_0^2}M_{v,v}(\boldsymbol{R}) = 1 + \frac{1}{v_0^2}M_{v,v}(\boldsymbol{R}), \end{aligned} \tag{27}$$

with $M_{v,v}(\boldsymbol{R})$ being defined similarly to $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$ in Eq. (23),

$$M_{v,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2}\iint_{I_D^2} B_{v,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2, \tag{28}$$

and $B_{v,v}(\boldsymbol{r}) = \overline{\delta v(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}$ is the autocorrelation function of the fluctuations of the line-of-sight velocity component. Turning to the first order term, we have, since $\left\langle y_{\rho_X}\right\rangle = \left\langle y_{\rho_{X+R}}\right\rangle = 0$ as shown in the previous section,

$$\begin{aligned} \langle a_1\rangle &= \left\langle y_{\rho_X}y_{v_{X+R}}\right\rangle + \left\langle y_{v_X}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle + 2\left\langle y_{\rho v_X}\right\rangle \\ &\quad + \left\langle y_{\rho v_X}y_{v_{X+R}}\right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{X+R}}y_{v_X}\right\rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

Each term in this equation can be related to correlation functions of the fluctuation fields $\delta\rho$ and δv, beginning with

$$\begin{aligned} \left\langle y_{\rho_X}y_{v_{X+R}}\right\rangle &= \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2}\iint_{I_D^2}\langle\delta\rho(\boldsymbol{X}, z_1)\delta v(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}, z_2)\rangle\,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \\ &= \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2}\iint_{I_D^2} B_{\rho,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2, \end{aligned} \tag{30}$$

introducing the mixed correlation function $B_{\rho,v}(\boldsymbol{r}) = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}$. Considering the next term $\left\langle y_{v_X}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle$, the homogeneity hypothesis allows us to shift the arguments by $-\boldsymbol{R}$ so that, exchanging the integration variables,

$$\begin{aligned} \left\langle y_{v_X}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle &= \left\langle y_{\rho_X}y_{v_{X-R}}\right\rangle \\ &= \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2}\iint_{I_D^2} B_{\rho,v}(-\boldsymbol{R} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{e}_z)\,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2, \end{aligned} \tag{31}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Combination of both terms leads to

$$\left\langle y_{v_X} y_{\rho_{X+R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho_X} y_{v_{X+R}} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0 D^2} \iint_{I_D^2} \Big[B_{\rho,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z) + B_{\rho,v}(-\boldsymbol{R} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{e}_z) \Big] \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2. \quad (32)$$

Now, according to Monin & Yaglom (1975), and assuming that the four-dimensional field $(\rho, \delta\boldsymbol{v})$, made up of the density ρ and vector velocity $\delta\boldsymbol{v}$, is homogeneous and isotropic, the correlation function of ρ and $\delta\boldsymbol{v}$ is a vector quantity, and due to isotropy should be along the separation vector $\boldsymbol{r}$. It should therefore be of the form $\overline{\rho(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} = f(r)\boldsymbol{r}$, so that, projecting this relation on $\boldsymbol{e}_z$, we have

$$\begin{aligned} f(r)\boldsymbol{r}.\boldsymbol{e}_z &= \overline{\rho(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}.\boldsymbol{e}_z = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}.\boldsymbol{e}_z \\ &= \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})} = B_{\rho,v}(\boldsymbol{r}), \end{aligned} \quad (33)$$

using the fact that $\overline{\delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{0}$. As a consequence, we have $B_{\rho,v}(-\boldsymbol{r}) = -f(r)\boldsymbol{r}.\boldsymbol{e}_z = -B_{\rho,v}(\boldsymbol{r})$, so that $B_{\rho,v}$ is an antisymmetric field. Of course, this is a statistical property, and does not hold when considering the specific values of velocity and density fluctuations for a given pair of points within the flow. What one can conclude is that the integrand in Eq. (32) is zero, and so $\left\langle y_{v_X} y_{\rho_{X+R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho_X} y_{v_{X+R}} \right\rangle = 0$. So is the next term $\left\langle y_{\rho v_X} \right\rangle$, since

$$\begin{aligned} \left\langle y_{\rho v_X} \right\rangle &= \frac{1}{\rho_0 v_0 D} \int_{I_D} \langle \delta\rho(\boldsymbol{X}, z)\delta v(\boldsymbol{X}, z) \rangle \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{\rho_0 v_0 D} \int_{I_D} B_{\rho,v}(\boldsymbol{0}) \mathrm{d}z = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

because the antisymmetry of $B_{\rho,v}$ implies that $B_{\rho,v}(\boldsymbol{0}) = 0$. Similarly, the last two terms of $\langle a_1 \rangle$ are given by

$$\left\langle y_{\rho v_X} y_{v_{X+R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{X+R}} y_{v_X} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2 D^2} \iint_{I_D^2} \Big[B_{\rho v,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z) + B_{\rho v,v}(-\boldsymbol{R} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{e}_z) \Big] \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2, \quad (35)$$

introducing the two-point correlation function $B_{\rho v,v}(\boldsymbol{r}) = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}$. This last combination of terms, unlike the one considered previously, is not necessarily zero. According to Monin & Yaglom (1975), it is of the form

$$B_{\rho v,v}(\boldsymbol{r}) = g(r)\frac{(\boldsymbol{r}.\boldsymbol{e}_z)^2}{r^2} + h(r), \quad (36)$$

where g and h are functions of the scalar separation r. This form stems from the fact that $\overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v_i(\boldsymbol{x})\delta v_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}$, where i and j stand for any of the x, y and z coordinates, is a tensor of rank 2 which we suppose to be homogeneous and isotropic. It follows that $B_{\rho v,v}$ is symmetric, and so, using an averaging notation $M_{\rho v,v}$ defined, similarly to the expressions of $M_{\rho,\rho}$ and $M_{v,v}$, by

$$M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2, \quad (37)$$

we can write $\langle a_1 \rangle$, contribution of the first order in density fluctuations to the autocorrelation function A_C, as

$$\begin{aligned} \langle a_1 \rangle &= \left\langle y_{\rho v_X} y_{v_{X+R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{X+R}} y_{v_X} \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 v_0^2} \left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) + M_{\rho v,v}(-\boldsymbol{R}) \right] \\ &= \frac{2}{\rho_0 v_0^2} M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}). \end{aligned} \quad (38)$$

Lastly, the second order term in density fluctuations $\langle a_2 \rangle = \left\langle y_{\rho_X} y_{\rho_{X+R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_X} y_{\rho_{X+R}} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_{X+R}} y_{\rho_X} \right\rangle + \left\langle y_{\rho v_X} y_{\rho v_{X+R}} \right\rangle$ is computed in much the same way, introducing the two-point correlation functions

$$B_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{r}) = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x})\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}$$

and

$$B_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{r}) = \overline{\delta\rho(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x})\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})}, \quad (39)$$

and their averages defined by

$$M_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2$$

and

$$M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \iint_{I_D^2} B_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z) \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2. \quad (40)$$

With these notations, it is straightforward to derive the expression of the second order term,

$$\langle a_2 \rangle = \frac{1}{\rho_0^2} \left[M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{v_0} M^{(s)}_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R}) + \frac{1}{v_0^2} M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}) \right], \quad (41)$$

with the (s) superscript indicating the symmetric part of a given function, defined by the relation

$$f^{(s)}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x) \right]. \quad (42)$$

Now, still following Monin & Yaglom (1975), $B_{\rho v,\rho}$ exhibits the same antisymmetry property as $B_{\rho,v}$ and we can conclude that the symmetric part of $M_{\rho v,\rho}(\boldsymbol{R})$ is zero, so that the autocorrelation function A_C of the non-normalized velocity centroid eventually reads

$$\begin{aligned} A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \Big[&\rho_0^2 v_0^2 + \rho_0^2 M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) \\ &+ v_0^2 M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) + M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}) \Big]. \end{aligned} \quad (43)$$

When considering only the zeroth order in density fluctuations, one finds that the expression of $A_C(\boldsymbol{R})$ is very similar to that of $A_I(\boldsymbol{R})$, with $A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D \rho_0)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}) \right]$. This is not surprising, as we shall discuss in Sect. 6. Moreover, as the forthcoming comparison of the autocorrelation functions of both normalized and non-normalized velocity centroids will be performed on expressions of order up to one only, it is useful to write out the truncation of $A_C(\boldsymbol{R})$ at that order, which is, given Eq. (43),

$$A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 v_0^2 + \rho_0^2 M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) \right]. \quad (44)$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

4.4. Autocorrelation function of the normalized velocity centroid C_0

There is little qualitative change to the method when dealing with the normalized centroid. Contributions of each order can be computed as easily as for the non-normalized case, with the main difference being that, given the expansion written in Eq. (13), $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$ is a theoretically infinite series which reads

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R})=v_0^2\left\langle\left[\sum_{p,q}(-1)^{p+q}y_{\rho_X}^p y_{\rho_{X+R}}^q\right]\left[\sum_{n=0}^{2}a_n\right]\right\rangle=v_0^2\sum_m\sum_{n=0}^{2}\langle a_n b_m\rangle$$

with

$$b_m=(-1)^m\sum_{p=0}^{m}y_{\rho_X}^p y_{\rho_{X+R}}^{m-p}, \tag{45}$$

the generic term $\langle a_n b_m\rangle$ obviously being of order $n+m$ in density fluctuations. Now, given that the highest order present in $A_C(\boldsymbol{R})$ is two, it seems reasonable to consider only terms of order at most two in the expansion. However, it may also be argued that, since density fluctuations effectively contribute to the first order in the expression of $A_C(\boldsymbol{R})$, assessing the effects of normalization may already be performed when limiting the expansion to that order,

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R})=v_0^2\left[\langle a_0b_0\rangle+\langle a_0b_1\rangle+\langle a_1b_0\rangle\right]=v_0^2\left(S_0+S_1\right)$$
$$\text{with}\quad S_0=\langle a_0b_0\rangle\quad\text{and}\quad S_1=\langle a_0b_1\rangle+\langle a_1b_0\rangle. \tag{46}$$

Now, the zeroth order term in $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$ has been computed in the previous subsection,

$$S_0=\langle a_0b_0\rangle=\langle a_0\rangle=1+\frac{1}{v_0^2}M_{v,v}(\boldsymbol{R}), \tag{47}$$

so we turn to the first order term $S_1=\langle a_0b_1\rangle+\langle a_1b_0\rangle$ which reads, after a long but straightforward calculation,

$$S_1=2\left\langle y_{\rho v_X}\right\rangle-2\left\langle y_{\rho_X}y_{v_X}\right\rangle+\left\langle y_{\rho v_X}y_{v_{X+R}}\right\rangle+\left\langle y_{v_X}y_{\rho v_{X+R}}\right\rangle$$
$$-\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_X}\right\rangle-\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle. \tag{48}$$

The first term is zero, as shown before. So is the second term, for we have

$$\left\langle y_{\rho_X}y_{v_X}\right\rangle=\frac{1}{\rho_0v_0D^2}\iint_{I_D^2}B_{\rho,v}\left((z_2-z_1)\,\boldsymbol{e}_z\right)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2=0, \tag{49}$$

since the integration domain is symmetric about $z_2-z_1=0$ and $B_{\rho,v}$ is antisymmetric. The combination of third and fourth terms has been computed in the previous subsection

$$\left\langle y_{\rho v_X}y_{v_{X+R}}\right\rangle+\left\langle y_{\rho v_{X+R}}y_{v_X}\right\rangle=\frac{2}{\rho_0v_0^2}M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}). \tag{50}$$

The remaining terms require a more elaborate, although similar, treatment. Taking for instance the last term, we have

$$\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle=\frac{1}{\rho_0v_0^2D^3}\iiint_{I_D^3}\langle\delta v\left(\boldsymbol{X},z_1\right)\delta v\left(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R},z_2\right)$$
$$\times\delta\rho\left(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R},z_3\right)\rangle\,\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3, \tag{51}$$

where the integration is performed over the cubic domain $I_D^3=I_D\times I_D\times I_D$. Introducing the three-point correlation function $B_{v,v,\rho}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\overline{\delta v(\boldsymbol{x})\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_1)\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}_2)}$, this expression reads

$$\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle=\frac{1}{\rho_0v_0^2D^3}$$
$$\times\iiint_{I_D^3}B_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R}+(z_2-z_1)\boldsymbol{e}_z,\ \ \boldsymbol{R}+(z_3-z_1)\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3$$
$$=\frac{1}{\rho_0v_0^2}M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}), \tag{52}$$

with an averaging notation $M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ reminiscent of the ones used previously,

$$M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})=\frac{1}{D^3}$$
$$\times\iiint_{I_D^3}B_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R}+(z_2-z_1)\boldsymbol{e}_z,\ \ \boldsymbol{R}+(z_3-z_1)\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_3. \tag{53}$$

Similarly, the next-to-last term can be written as

$$\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_X}\right\rangle=\frac{1}{\rho_0v_0^2}M_{v,v,\rho}(-\boldsymbol{R},-\boldsymbol{R})$$

so that

$$\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_{X+R}}\right\rangle+\left\langle y_{v_X}y_{v_{X+R}}y_{\rho_X}\right\rangle=\frac{2}{\rho_0v_0^2}M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}), \tag{54}$$

with $M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ being the symmetric part of the function $M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$,

$$M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})=\frac{1}{2}\left[M_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})+M_{v,v,\rho}(-\boldsymbol{R},-\boldsymbol{R})\right]. \tag{55}$$

Finally, the autocorrelation function $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$ of the normalized centroid has the following expression when limited to contributions of the first order in density fluctuations,

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R})=v_0^2+M_{v,v}(\boldsymbol{R})+\frac{2}{\rho_0}\left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R})-M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\right]. \tag{56}$$

It appears then that normalization of velocity centroids indeed performs a first order correction, as compared with Eq. (44), although it does not necessarily fully remove the density structure, as will be discussed in more detail in Sect. 6.

5. The case of fractional Brownian motion fields

Explicitly computing the forms of the two-dimensional statistical measures $A_I(\boldsymbol{R})$, $A_C(\boldsymbol{R})$ and $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$ requires the knowledge of the three-dimensional correlation functions appearing as integrated terms in Eqs. (24), (44) and (56). However, it may prove impossibly difficult to build a complete and consistent set of such functions and then to analytically compute their averages. Therefore, as a first step, one should stick to the lowest order terms in the expressions of the two-dimensional autocorrelation functions,

$$A_I(\boldsymbol{R})=(\alpha D)^2\left[\rho_0^2+M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})\right],$$
$$A_C(\boldsymbol{R})\simeq(\alpha D\rho_0)^2\left[v_0^2+M_{v,v}(\boldsymbol{R})\right]$$
and
$$A_{C_0}(\boldsymbol{R})\simeq v_0^2+M_{v,v}(\boldsymbol{R}). \tag{57}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

In this limit, one only has to compute the $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$ and $M_{v,v}(\boldsymbol{R})$ averages given density and velocity fields with known autocorrelation functions $B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r})$ and $B_{v,v}(\boldsymbol{r})$. One possibility is to suppose that both of the three-dimensional fields are fractional Brownian motions (fBm). These are defined in the following way: if $\mathcal{F}$ is such a field in N dimensions, it is characterized by a single-index power-law structure function,

$$S_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{r}) = \overline{[\mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{x})]^2} = 2\Lambda\left(\frac{r}{D}\right)^{2H}, \tag{58}$$

where $r = |\boldsymbol{r}|$ is the length of the separation vector, Λ is a positive constant and H is a real number in $[0,1]$ called the Hurst exponent. The restriction $H \geqslant 0$ corresponds to the fact that the amplitude of fluctuations should decrease at smaller scale, while we impose $H \leqslant 1$ because an fBm field having a Hurst exponent $H > 1$ would be uniform, as shown in Appendix D. Fractional Brownian motion fields have already been used (Stutzki et al. 1998; Brunt & Heyer 2002; Miville-Deschênes et al. 2003a) to model clouds of the diffuse, non-starforming interstellar medium. In this section, we shall use them to model the three-dimensional density and velocity fields, so that, for the former,

$$\begin{aligned} S_{\rho}(\boldsymbol{r}) &= \overline{[\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \rho(\boldsymbol{x})]^2} = \overline{[\delta\rho(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \delta\rho(\boldsymbol{x})]^2} \\ &= 2\left[\sigma_\rho^2 - B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r})\right] = 2\Lambda_\rho\left(\frac{r}{D}\right)^{2H_\rho}, \end{aligned} \tag{59}$$

since the density fluctuations field is supposed to be homogeneous. Similarly, for the velocity field,

$$\begin{aligned} S_{v}(\boldsymbol{r}) &= \overline{[v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{x})]^2} = \overline{[\delta v(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) - \delta v(\boldsymbol{x})]^2} \\ &= 2\left[\sigma_v^2 - B_{v,v}(\boldsymbol{r})\right] = 2\Lambda_v\left(\frac{r}{D}\right)^{2H_v}. \end{aligned} \tag{60}$$

These last two equations make use of the relationship between the second order structure function $S_{\mathcal{F}}$ of an homogeneous field $\mathcal{F}$ and its autocorrelation function $A_{\mathcal{F}}$, which is $S_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{R}) = 2\,[A_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{0}) - A_{\mathcal{F}}(\boldsymbol{R})]$. In the results of Sect. 4, we then have to inject the following relations

$$B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{r}) = \sigma_\rho^2 - \Lambda_\rho\left(\frac{r}{D}\right)^{2H_\rho}$$

and

$$B_{v,v}(\boldsymbol{r}) = \sigma_v^2 - \Lambda_v\left(\frac{r}{D}\right)^{2H_v}. \tag{61}$$

To compute the averages $M_{v,v}(\boldsymbol{R})$ and $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$ featured in the expressions of $A_I(\boldsymbol{R})$, $A_C(\boldsymbol{R})$ and $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$, we can use the calculation scheme of Chandrasekhar & Münch (1952), which is given in Appendix A, to write them as single integrals over the separation $\Delta z = z_2 - z_1$ along the line of sight, noting that $\Delta z \in I_{2D} = [-D, D]$. We then have

$$M_{v,v}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2}\int_{I_{2D}} (D - |\Delta z|)\, B_{v,v}(\boldsymbol{R} + \Delta z\boldsymbol{e}_z)\,\mathrm{d}\Delta z$$

and

$$M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2}\int_{I_{2D}} (D - |\Delta z|) B_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R} + \Delta z\boldsymbol{e}_z)\,\mathrm{d}\Delta z. \tag{62}$$

In these expressions, the factor $(D - |\Delta z|)$ represents the weight of each separation Δz, that is the relative number of pairs of points taken into account whose projected separation along the line of sight is Δz. With the expressions above for $B_{v,v}$ and $B_{\rho,\rho}$, it is possible, as shown in Appendix C, to write these averages under the form

$$M_{v,v}(\boldsymbol{R}) = -\Lambda_v K(R, H_v) + \sigma_v^2$$

and

$$M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R}) = -\Lambda_\rho K(R, H_\rho) + \sigma_\rho^2, \tag{63}$$

where $R = |\boldsymbol{R}|$ is the scalar separation on the plane of the sky, and the function K is given by

$$\begin{aligned} K(R,H) = &\frac{2}{D^{2H+1}}\int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H \mathrm{d}z \\ &- \frac{1}{H+1}\left[\left(1 + \frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} - \left(\frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1}\right]. \end{aligned} \tag{64}$$

The integral in Eq. (64) cannot be explicited (Gradshteyn & Ryzhik 1980) unless $H = 0$ or $H = 1$, but one interesting limit to consider is that of small separations on the plane of the sky ($R \ll D$), in which case $K(R,H)$ can be developed in powers of R/D. As shown in Appendix C, this yields the following scaling relations for $M_{v,v}(\boldsymbol{R})$

$$M_{v,v}(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma_v^2 - \Lambda_v a(H_v) - \Lambda_v b(H_v)\left(\frac{R}{D}\right)^{2H_v+1} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant H_v < \frac{1}{2}, \tag{65}$$

$$M_{v,v}(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma_v^2 - \Lambda_v a(H_v) - \Lambda_v b(H_v)\left(\frac{R}{D}\right)^{2} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < H_v \leqslant 1, \tag{66}$$

$$M_{v,v}(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma_v^2 - \frac{\Lambda_v}{3} + \Lambda_v\left(\frac{R}{D}\right)^2 \ln\left(\frac{R}{D}\right) \quad \text{for} \quad H_v = \frac{1}{2}, \tag{67}$$

where a and b are functions of H_v only. Similar relations are satisfied by $M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})$ depending on the value of H_ρ. To the lowest order, the structure function $S_{C_0}(\boldsymbol{R})$ of the normalized centroid C_0 therefore reads

$$S_{C_0}(\boldsymbol{R}) = 2\Lambda_v b(H_v)\left(\frac{R}{D}\right)^{2H_v+1} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant H_v < \frac{1}{2}, \tag{68}$$

$$S_{C_0}(\boldsymbol{R}) = 2\Lambda_v b(H_v)\left(\frac{R}{D}\right)^{2} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < H_v \leqslant 1, \tag{69}$$

$$S_{C_0}(\boldsymbol{R}) = -2\Lambda_v\left(\frac{R}{D}\right)^2 \ln\left(\frac{R}{D}\right) \quad \text{for} \quad H_v = \frac{1}{2}. \tag{70}$$

According to Eq. (57), the structure function S_C of the non-normalized velocity centroid has the same scaling behaviour. This is also the case for the structure function S_I of the intensity, depending on the value of H_ρ. The consequences of such forms are presented in the next section.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

6. Discussion

As expected, the statistical measures on the intensity and centroid maps can be expressed in terms of the statistical properties of the underlying three-dimensional velocity and density fields. More precisely, it should come as no surprise that the autocorrelation functions $A_I(\boldsymbol{R})$, $A_C(\boldsymbol{R})$ and $A_{C_0}(\boldsymbol{R})$ should be written as averages of correlation functions within the slab in the manner described in Fig. 2, since all pairs of points with a given separation $\boldsymbol{R}$ in the plane of the sky should contribute to the two-dimensional statistical measures at lag $\boldsymbol{R}$.

It also appears that the zeroth order term in the autocorrelation functions of the velocity centroids has the same form as the autocorrelation of the intensity map, since we then have

$$A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha\rho_0 D)^2 A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha\rho_0 D)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R})\right]$$

while

$$A_I(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 + M_{\rho,\rho}(\boldsymbol{R})\right]. \tag{71}$$

The identity of these forms was to be expected, since the zeroth order terms in the autocorrelation functions of the velocity centroids are the limits obtained when the density is uniform. In this case, the centroids simply are integrals of v, as the intensity is a simple integral of ρ. In the context of fBm fields, the implication of this limit is that both non-normalized and normalized velocity centroids have a fractional Brownian motion behaviour, since their structure functions are power laws, with respective Hurst exponents H_C and H_{C_0} such that

$$H_C = H_{C_0} = H_v + \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant H_v < \frac{1}{2}$$

and

$$H_C = H_{C_0} = 1 \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < H_v \leqslant 1. \tag{72}$$

And similarly, the intensity map has a fractional Brownian motion behaviour with a Hurst exponent H_I with

$$H_I = H_\rho + \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant H_\rho < \frac{1}{2}$$

and

$$H_I = 1 \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < H_\rho \leqslant 1. \tag{73}$$

These results should be interpreted in the light of what is already known about the statistical properties of the integrated emission map I from studies in the Fourier domain. Indeed, in the case of optically thin lines, the power spectrum index γ_I of the intensity map is the same as that of the three-dimensional density field γ_ρ (see e.g. Goldman 2000) provided the depth probed D is larger than the transverse scales R, which is the case in the limit considered in Sect. 5. Now, spectral index γ and Hurst exponent H are related by $\gamma = 2H + N$, with N the dimension of the space over which the field is defined. As a result, Stutzki et al. (1998) concluded that the Hurst exponent of the integrated emission map is $H_I = H_\rho + 1/2$ for $H_\rho \leqslant 1/2$ with a turnover to $H_I = 1$ for $H_\rho \geqslant 1/2$, since

$$H_I = \frac{\gamma_I - 2}{2} = \frac{\gamma_\rho - 3}{2} + \frac{1}{2} = H_\rho + \frac{1}{2}, \tag{74}$$

using the fact that the integrated emission map is two-dimensional, while the original density field is three-dimensional. This result is precisely what we find from our analytical study performed solely in real space. Similarly, the expression for the structure function of the normalized centroid confirms the numerical findings of Miville-Deschênes et al. (2003a), who showed that the spectral index γ_{C_0} of normalized centroid maps was equal to that of the three-dimensional velocity field, γ_v. It should be noted that their result holds even for density fields with large fluctuations, which implies that our analytical result may be applicable to a more general class of fields. On the other hand, in the limit of negligible density fluctuations, one should find the same behaviour for the non-normalized centroid, a result Miville-Deschênes et al. (2003a) have not reported on.

Returning to a study of the autocorrelation functions of velocity centroids in the first order approximation,

$$A_C(\boldsymbol{R}) \simeq (\alpha D\rho_0)^2 \left[v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0} M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R})\right]$$

and

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R}) \simeq v_0^2 + M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0}\left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) - M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\right],$$

we see that, since $M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) - M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ is not necessarily zero, normalization actually does not remove the first order contribution of density fluctuations. The empirical assumption that normalization somehow eliminates the influence of density fluctuations on velocity centroids may therefore not be true, although assessing the magnitude of the remaining first order contribution in the normalized centroid's autocorrelation function with respect to the non-normalized case could be difficult, as it involves computing averages of correlation functions whose forms are still unknown. This will be investigated in a forthcoming paper.

Such shortcomings of the normalized centroids as a way to retrieve the actual velocity statistics from the observational data have already been pointed out by Lazarian & Esquivel (2003), albeit in the case of simulations of highly compressible MHD turbulence. Instead, they introduced modified velocity centroids (MVC) C_m, defined through their second order structure function S_{C_m} as

$$\begin{aligned} S_{C_\mathrm{m}}(\boldsymbol{R}) &= \left\langle [C_\mathrm{m}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}) - C_\mathrm{m}(\boldsymbol{X})]^2 \right\rangle \\ &= S_C(\boldsymbol{R}) - \left(v_0^2 + \sigma_v^2 + \sigma_\mathrm{th}^2\right) S_I(\boldsymbol{R}), \end{aligned} \tag{75}$$

where S_C and S_I are the structure functions of the non-normalized velocity centroid and of the intensity, respectively. Given the relationship between the structure and autocorrelation functions, we can write the autocorrelation function A_{C_m} of the modified velocity centroids as

$$A_{C_\mathrm{m}}(\boldsymbol{R}) = A_C(\boldsymbol{R}) - \left(v_0^2 + \sigma_v^2 + \sigma_\mathrm{th}^2\right) A_I(\boldsymbol{R}) + E, \tag{76}$$

E being a constant involving the values of A_C and A_I at zero lag. Now, since A_I contains no first-order term, it appears that modified and non-normalized velocity centroids have the same first order contribution in their autocorrelation functions. As noted earlier, however, it is not yet clear whether this contribution is actually more important than the first order term in

the autocorrelation function of normalized centroids. If it is, it would tend to prove that normalization may be a better way of retrieving velocity statistics in weakly compressible flows. To make the comparison of correction schemes clearer, one can show a relationship between the autocorrelation functions of I, C and C_0 as written in Eqs. (24), (43) and (56),

$$(\alpha D\rho_0)^2 A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = (\alpha D\rho_0 v_0)^2 + A_C(\boldsymbol{R}) - v_0^2 A_I(\boldsymbol{R}) \\ -2(\alpha D)^2\rho_0 M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}) + G(\boldsymbol{R}), \qquad (77)$$

where $G(\boldsymbol{R})$ stands for the terms of order at least two in density fluctuations. Deriving the relationship between the structure functions of I, C and C_0, the latter being noted S_{C_0}, we have

$$(\alpha D\rho_0)^2 S_{C_0}(\boldsymbol{R}) = S_C(\boldsymbol{R}) - v_0^2 S_I(\boldsymbol{R}) - 4(\alpha D)^2\rho_0 \left[M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}) \right. \\ \left. -M^{(s)}_{v,v,\rho}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})\right] + 2\left[G(\boldsymbol{0}) - G(\boldsymbol{R})\right]. \qquad (78)$$

Comparing this with Eq. (75), it is clear that modified velocity centroids subtract more of the intensity structure, thus removing second order terms, while normalization performs a more complex correction, involving all orders in density fluctuations. Actual comparison of the merits of normalized and modified velocity centroids requires numerical tests, which have only been performed by Lazarian & Esquivel (2003) on highly compressible MHD turbulence. That particular case is actually not within the scope of our study, firstly because density fluctuations are large and the condition for the expansion in the normalized velocity centroid's case may not be met, and secondly because the presence of a magnetic field implies anisotropy. Both limitations render the comparison with the work of Lazarian & Esquivel (2003) a bit uncertain, although it is likely that terms of higher order in density fluctuations may become dominant. Thus, the effectiveness of modified velocity centroids, as compared to normalized centroids, in their simulations may be related to the second order correction through S_I, which is more important in modified velocity centroids. In any case, further analytical and numerical work is warranted in order to establish these conclusions more firmly, especially in the weakly compressible flow regime.

7. Conclusions

An analytical study of a simple slightly compressible turbulent cloud model was presented, assuming homogeneity and isotropy of the turbulent flow. From the expressions of the antenna temperature for an optically thin spectral line and of its successive moments with respect to the line of sight velocity component, we computed the autocorrelation functions of the intensity and of both normalized and non-normalized velocity centroids, which involve averages, along the line of sight, of correlation functions of the three-dimensional density and velocity fields.

To the lowest order, the autocorrelation functions of the velocity centroids behave, with respect to the velocity field, as the autocorrelation function of the intensity with respect to the density field. This sheds light on the numerical result of Miville-Deschênes et al. (2003a), who found that, for fractional Brownian motion density and velocity fields, the spectral index of the normalized centroid is equal to that of the velocity field. We derived this result analytically, for separations across the sky much smaller than the cloud's depth, and in real space, while previous studies such as that of Goldman (2000) were performed in Fourier space. However, the result of Miville-Deschênes et al. (2003a) holds for fields outside of the validity domain for our calculation.

Comparison of the expansions of the autocorrelation functions of both types of velocity centroids shows that normalization performs a correction of the first order in density fluctuations, although its magnitude remains to be assessed, a task for which numerical simulations are probably necessary. Numerical tests should also provide us with a robust comparison between normalized velocity centroids and the modified velocity centroids of Lazarian & Esquivel (2003), which imply corrections of order two in density fluctuations. At present, this comparison has been performed only on simulations of highly compressible and magnetized turbulence, a case beyond the scope of our analytical study, and has shown that, in this particular case, modified velocity centroids provide a more reliable tool than normalized centroids.

In a forthcoming paper, we shall therefore present numerical simulations aimed at assessing the validity domain of our calculations and, beyond normalized and modified velocity centroids, pursuing the search for a better correction scheme able to retrieve the underlying velocity statistics from observational data.

Acknowledgements. I wish to acknowledge fruitful discussions with Alex Lazarian during his stay at the École normale supérieure. His suggestions, in the early stages of this work, proved very helpful. I also wish to thank Enrique Vázquez-Semadeni for his careful reading of the manuscript and insightful remarks.

References

Goldman, I. 2000, ApJ, 541, 701
Baker, P. L. 1976, A&A, 50, 327
Brunt, C. M., & Heyer, M. H. 2002, ApJ, 566, 276
Brunt, C. M., Heyer, M. H., Vásquez-Semadeni, E., & Pichardo, B. 2003, ApJ, 595, 824
Chandrasekhar, S. 1949, ApJ, 110, 329
Chandrasekhar, S., & Münch, G. 1952, ApJ, 115, 103
Dickman, R. L., & Kleiner, S. C. 1985, ApJ, 295, 479
Gradshteyn, I. S., & Ryzhik, I. M. 1980, Tables of integrals, series and products (Academic Press)
Hegmann, M., & Kegel, W. H. 2000, A&A, 359, 405
Kitamura, Y., Sunada, Y., Hayashi, M., & Hasegawa, T. 1993, ApJ, 413, 221
Kleiner, S. C., & Dickman, R. L. 1984, ApJ, 286, 255
Kleiner, S. C., & Dickman, R. L. 1985, ApJ, 295, 466
Kolmogorov, A. N. 1941, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 30, 299
Larson, R. B. 1981, MNRAS, 194, 809
Lazarian, A., & Pogosyan, D. 2000, ApJ, 537, 720

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Lazarian, A., & Esquivel, A. 2003, ApJ, 592, L37
Miesch, M. S., & Bally, J. 1994, ApJ, 429, 645
Miville-Deschênes, M. A., Levrier, F., & Falgarone, E. 2003a, ApJ, 593, 831
Miville-Deschênes, M. A., Joncas, G., Falgarone, E., & Boulanger, F. 2003b, A&A, 411, 109
Monin, A. S., & Yaglom, A. M. 1975, Statistical Fluid Mechanics, Vol. 2 (Cambridge, MA: MIT Press)
Münch, G. 1958, Rev. Mod. Phys., 30, 1035
O'Dell, C. R., & Castaneda, H. O. 1987, ApJ, 317, 686
Scalo, J. M. 1984, ApJ, 277, 556
Scalo, J. M. 1985, in Protostars and Planets II, ed. D. C. Black, & M. S. Matthews (Tucson: Univ. Arizona Press), 201
Spicker, J., & Feitzinger, J. V. 1988, A&A, 191, 10
Stutzki, J., Bensch, F., Heithausen, A., Ossenkopf, V., & Zielinsky, M. 1998, A&A, 336, 697
Van Langevelde, H. J., Frail, D. A., Cordes, J. M., & Diamond, P. J. 1992, ApJ, 396, 686
Vázquez-Semadeni, E., Ostriker, E. C., Passot, T., Gammie, C. F., & Stone, J. M. 2000, in Protostars and Planets IV, ed. V. Mannings et al. (Tucson: Univ. Arizona Press), 3
Zuckerman, B., & Evans, N. J., II 1974, ApJ, 192, L149

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Online Material

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Appendix A: The Chandrasekhar-Münch scheme

For a function $f(\boldsymbol{r})$ depending on the three-dimensional separation $\boldsymbol{r}$, double integrals of the form

$$\mathcal{I} = \iint_{I_D^2} f(\boldsymbol{R} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2 \tag{A.1}$$

can be transformed, taking into account the fact that the integrand only depends on the difference $\Delta z = z_2 - z_1$, because $\boldsymbol{R}$ is fixed, as shown in Chandrasekhar & Münch (1952). Making the variable change $\Delta z = z_2 - z_1$ and $z = z_1$,

$$\mathcal{I} = \int_{I_D} \mathrm{d}z \int_{I_{D_z}} \mathrm{d}\Delta z\, f(\boldsymbol{R} + \Delta z \boldsymbol{e}_z). \tag{A.2}$$

where the notation I_{D_z} stands for the segment I_D shifted by $-z$, $I_{D_z} = [-D/2 - z, D/2 - z]$, which we can separate in two, with a negative part, $I_{D_z}^- = [-D/2 - z, 0]$, and a positive part $I_{D_z}^+ = [0, D/2 - z]$.

$$\mathcal{I} = \int_{I_D} \mathrm{d}z \int_{I_{D_z}^-} \mathrm{d}\Delta z\, f(\boldsymbol{R} + \Delta z \boldsymbol{e}_z) + \int_{I_D} \mathrm{d}z \int_{I_{D_z}^-} \mathrm{d}\Delta z\, f(\boldsymbol{R} + \Delta z \boldsymbol{e}_z). \tag{A.3}$$

Exchanging the order of integrations in each of these two terms, and expliciting the integral over z, we have

$$\mathcal{I} = \int_{-D}^{0} f(\boldsymbol{R} + \Delta z \boldsymbol{e}_z)(D + \Delta z)\mathrm{d}\Delta z + \int_{0}^{D} f(\boldsymbol{R} + \Delta z \boldsymbol{e}_z)(D - \Delta z)\mathrm{d}\Delta z, \tag{A.4}$$

which can be finally written as

$$\mathcal{I} = \int_{I_{2D}} (D - |\Delta z|) f(\boldsymbol{R} + \Delta z \boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}\Delta z. \tag{A.5}$$

The factor $(D - |\Delta z|)$ expresses the fact that for a finite slab, two given separations Δz and $\Delta z'$ are not represented by the same number of pairs of points.

Appendix B: Autocorrelation functions of the velocity centroid maps in the case $v_0 = 0$

When the mean velocity v_0 is null, the method used in the main body of the paper cannot be applied without some modification. Little needs to be done, however, as velocity fluctuations can be measured with respect to the sound speed c_s, which we assume to be uniform within the turbulent slab. We may then write the velocity centroid C as

$$C(\boldsymbol{X}) = \alpha \int_{I_D} (\rho_0 + \delta\rho(\boldsymbol{X}, z))\, \delta v(\boldsymbol{X}, z)\mathrm{d}z = \alpha\rho_0 c_s D \left[\frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{c_s} \mathrm{d}z + \frac{1}{D} \int_{I_D} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{X}, z)}{\rho_0} \frac{\delta v(\boldsymbol{X}, z)}{c_s} \mathrm{d}z \right], \tag{B.1}$$

which can be written in the shorthand form $C(\boldsymbol{X}) = \alpha\rho_0 c_s D \left[y_{v_{\boldsymbol{X}}} + y_{\rho v_{\boldsymbol{X}}} \right]$. The normalized velocity centroid then reads

$$C_0(\boldsymbol{X}) = \frac{C(\boldsymbol{X})}{I(\boldsymbol{X})} = c_s \left[y_{v_{\boldsymbol{X}}} + y_{\rho v_{\boldsymbol{X}}} \right] \left[1 + y_{\rho_{\boldsymbol{X}}} \right]^{-1}. \tag{B.2}$$

The calculation therefore proceeds in the same way, with c_s taking the place of v_0 and the a_i of Eq. (26) being replaced by new coefficients a_i' given by

$$\begin{aligned} a_0' &= y_{v_{\boldsymbol{X}}} y_{v_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}}}, \\ a_1' &= y_{\rho v_{\boldsymbol{X}}} y_{v_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}}} + y_{\rho v_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}}} y_{v_{\boldsymbol{X}}}, \\ a_2' &= y_{\rho v_{\boldsymbol{X}}} y_{\rho v_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{R}}}. \end{aligned}$$

It follows that the autocorrelation function of the non-normalized centroid is, in this case,

$$A_C(\boldsymbol{R}) = (\alpha D)^2 \left[\rho_0^2 M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + 2\rho_0 M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) + M_{\rho v,\rho v}(\boldsymbol{R}) \right], \tag{B.3}$$

which is precisely what is found form the general case when setting $v_0 = 0$. Similarly, for the normalized centroid,

$$A_{C_0}(\boldsymbol{R}) = M_{v,v}(\boldsymbol{R}) + \frac{2}{\rho_0} \left[M_{\rho v,v}(\boldsymbol{R}) - M_{v,v,\rho}^{(s)}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}) \right]. \tag{B.4}$$

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Appendix C: Expansion of the averaged autocorrelation function of an fBm field

We wish to compute the following expression as a function of the lag $R = |\boldsymbol{R}|$, in the limit $R \ll D$,

$$M(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{D^2} \int_{I_{2D}} \left[-\Lambda \frac{\left(R^2 + z^2\right)^H}{D^{2H}} + \sigma^2 \right] (D - |z|) \mathrm{d}z, \tag{C.1}$$

where Λ is a positive constant and $H \in [0, 1]$ is the Hurst exponent. $M(\boldsymbol{R})$ can be expressed as an integral over $[0, D]$,

$$M(\boldsymbol{R}) = \frac{2}{D^2} \int_0^D \left[-\Lambda \frac{\left(R^2 + z^2\right)^H}{D^{2H}} + \sigma^2 \right] (D - z) \mathrm{d}z = \frac{2}{D^2} \left[-\Lambda \int_0^D \frac{\left(R^2 + z^2\right)^H}{D^{2H}} (D - z) \mathrm{d}z + \sigma^2 \int_0^D (D - z) \mathrm{d}z \right].$$

The last integral is easily shown to be equal to $D^2/2$, and so

$$M(\boldsymbol{R}) = -\frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H \mathrm{d}z + \frac{2\Lambda}{D^{2H+2}} \int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H z \mathrm{d}z + \sigma^2. \tag{C.2}$$

The second of the remaining integrals can be explicited by setting $R^2 + z^2 = r^2$, since $z\mathrm{d}z = r\mathrm{d}r$ for R fixed,

$$\int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H z \mathrm{d}z = \int_R^{\sqrt{R^2+D^2}} r^{2H+1} \mathrm{d}r = \frac{1}{2H+2} \left[\left(R^2 + D^2\right)^{H+1} - \left(R^2\right)^{H+1} \right], \tag{C.3}$$

since $2H + 1 \neq -1$ for $0 \leqslant H \leqslant 1$. We therefore have

$$M(\boldsymbol{R}) = -\frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H \mathrm{d}z + \frac{\Lambda}{H+1} \left[\left(1 + \frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} - \left(\frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} \right] + \sigma^2. \tag{C.4}$$

For a zero separation in the plane of the sky, this expression is, explicitly,

$$M(\boldsymbol{0}) = -\frac{2\Lambda}{D^{2H+1}} \int_0^D z^{2H} \mathrm{d}z + \frac{\Lambda}{H+1} + \sigma^2 = -\frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} + \sigma^2. \tag{C.5}$$

When $R \neq 0$, the first integral in Eq. (C.4) generally cannot be written in closed form (Gradshteyn & Ryzhik 1980). Notable exceptions are for $H = 0$ and $H = 1$, when, respectively,

$$M(\boldsymbol{R}) = -\Lambda + \sigma^2 \qquad \text{and} \qquad M(\boldsymbol{R}) = -\Lambda \left(\frac{R}{D}\right)^2 - \frac{\Lambda}{6} + \sigma^2. \tag{C.6}$$

To simplify the notations, we introduce the function $K = K' - K''$, defined by $M(\boldsymbol{R}) = -\Lambda K(R, H) + \sigma^2$, with

$$K'(R, H) = \frac{2}{D^{2H+1}} \int_0^D \left(R^2 + z^2\right)^H \mathrm{d}z \quad \text{and} \quad K''(R, H) = \frac{1}{H+1} \left[\left(1 + \frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} - \left(\frac{R^2}{D^2}\right)^{H+1} \right]. \tag{C.7}$$

It is now interesting to consider the case of separations $R \ll D$, which corresponds to studying the small scale structure of centroid maps. This allows to develop $K(R, H)$ in powers of R/D. Expansion of K'' is straightforward,

$$K''(R, H) = \frac{1}{H+1} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\gamma_n(H+1)}{n!} \left(\frac{R}{D}\right)^{2n} \quad \text{for} \quad 0 < H \leqslant 1 \qquad \text{and} \qquad K''(R, 0) = 1, \tag{C.8}$$

where we introduced $\gamma_n(x) = x(x-1)\ldots(x-n+1)$. As for K', since we consider $D \gg R > 0$ we can write it as

$$K'(R, H) = 2 \int_0^{D/R} \left(1 + y^2\right)^H \mathrm{d}y \left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} = 2 \left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} \left[\int_0^1 \left(1 + y^2\right)^H \mathrm{d}y + \int_1^{D/R} \left(1 + y^2\right)^H \mathrm{d}y \right]. \tag{C.9}$$

The first integral, between 0 and 1, which we dub $K_0(H)$, cannot be explicited, but since it does not depend on R, it is unimportant with respect to the structure of the moment maps. The second integral can be transformed in order to develop the integrand through $1 + y^2 = y^2(1 + y^{-2})$,

$$K'(R, H) = 2 \left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} \left[K_0(H) + \sum_{k \geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \int_1^{D/R} y^{2H-2k} \mathrm{d}y \right]. \tag{C.10}$$

Computing the integrals in the equation above for $0 < H < 1$ and $H \neq 0.5$, we have

$$K'(R, H) = 2 \left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} \left\{ K_0(H) + \sum_{k \geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{k!} \frac{1}{2H - 2k + 1} \left[\left(\frac{D}{R}\right)^{2H-2k+1} - 1 \right] \right\}, \tag{C.11}$$

which, after rearranging the terms, leads to the following expression for K',

$$K'(R,H) = 2\left[K_0(H) - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{(2H-2k+1)k!}\right]\left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} + \sum_{k\geqslant 0} \frac{2\gamma_k(H)}{(2H-2k+1)k!}\left(\frac{R}{D}\right)^{2k}. \tag{C.12}$$

If $0 < H < 0.5$, then $1 < 2H+1 < 2$ and the leading order expansion is therefore

$$K'(R,H) \simeq \frac{2}{2H+1} + 2\left[K_0(H) - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{2H-2k+1}\right]\left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1}, \tag{C.13}$$

while if $0.5 < H < 1$, then $2 < 2H+1 < 3$ and the $k = 1$ term of the last sum is dominant,

$$K'(R,H) \simeq \frac{2}{2H+1} + \frac{2H}{2H-1}\left(\frac{R}{D}\right)^2. \tag{C.14}$$

This last expression is also valid for $H = 1$, while obviously $K'(R,0) = 2$. For $H = 0.5$, the $k = 1$ integral is

$$\int_1^{D/R} y^{-1}\mathrm{d}y = -\ln\left(\frac{R}{D}\right), \tag{C.15}$$

and for $k \neq 1$ the integrals are unchanged. It follows that

$$K'(R,0.5) = 2\left(\frac{R}{D}\right)^2 \left\{K_0(0.5) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{R}{D}\right) + \sum_{k\neq 1} \frac{\gamma_k(0.5)}{2-2k}\left[\left(\frac{D}{R}\right)^{2-2k} - 1\right]\right\}, \tag{C.16}$$

which gives, after rearranging the terms,

$$K'(R,0.5) = 1 - \left(\frac{R}{D}\right)^2 \ln\left(\frac{R}{D}\right) + \left[2K_0(0.5) - \sum_{k\neq 1} \frac{\gamma_k(0.5)}{1-k}\right]\frac{R^2}{D^2} + \sum_{k\geqslant 2} \frac{\gamma_k(0.5)}{1-k}\left(\frac{R}{D}\right)^{2k}. \tag{C.17}$$

Finally, the leading order expansion of $K(R,H)$ for small separations $R \ll D$ is

$$K(R,H) \simeq \frac{1}{(2H+1)(H+1)} + 2\left[K_0(H) - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{2H-2k+1}\right]\left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant H < 0.5, \tag{C.18}$$

$$K(R,H) \simeq \frac{1}{(2H+1)(H+1)} + \frac{1}{2H-1}\left(\frac{R}{D}\right)^2 \quad \text{for} \quad 0.5 < H \leqslant 1, \tag{C.19}$$

$$K(R,0.5) \simeq \frac{1}{3} - \left(\frac{R}{D}\right)^2 \ln\left(\frac{R}{D}\right). \tag{C.20}$$

Consequently, the expansion of $M(\boldsymbol{R}) = -\Lambda K(R,H) + \sigma^2$ reads

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} - 2\Lambda\left[K_0(H) - \sum_{k\geqslant 0} \frac{\gamma_k(H)}{2H-2k+1}\right]\left(\frac{R}{D}\right)^{2H+1} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant H < 0.5, \tag{C.21}$$

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{(2H+1)(H+1)} - \frac{\Lambda}{2H-1}\left(\frac{R}{D}\right)^2 \quad \text{for} \quad 0.5 < H \leqslant 1, \tag{C.22}$$

$$M(\boldsymbol{R}) \simeq \sigma^2 - \frac{\Lambda}{3} + \Lambda\left(\frac{R}{D}\right)^2 \ln\left(\frac{R}{D}\right) \quad \text{for} \quad H = 0.5. \tag{C.23}$$

The consequences on the statistical measures performed on the moment maps are straightforward to derive. They are given and analyzed in the main body of the paper.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Appendix D: The uniformity of fBm fields with $H > 1$

We consider the mean squared increment of an fBm field $\mathcal{F}$ of Hurst exponent $H > 1$ between positions $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}$. The separation vector $\boldsymbol{r}$ is then separated in p equal parts, so that

$$\overline{[\mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\mathcal{F}(\boldsymbol{x})]^2} = \overline{\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\left[\mathcal{F}\left(\boldsymbol{x}+\frac{k+1}{p}\boldsymbol{r}\right)-\mathcal{F}\left(\boldsymbol{x}+\frac{k}{p}\boldsymbol{r}\right)\right]\right\}^2} = \overline{\left[\sum_{k=0}^{p-1}\Delta\mathcal{F}_k\right]^2}, \tag{D.1}$$

where $\Delta\mathcal{F}_k$ is the increment of $\mathcal{F}$ between the kth and $(k+1)$th positions. Expansion of the expression above yields

$$\overline{[\mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\mathcal{F}(\boldsymbol{x})]^2} = \sum_{k=0}^{p-1}\overline{\Delta\mathcal{F}_k^2} + 2\sum_{i<j}\overline{\Delta\mathcal{F}_i\Delta\mathcal{F}_j}. \tag{D.2}$$

Now, $\overline{\Delta\mathcal{F}_i\Delta\mathcal{F}_j}$ can be written as an autocorrelation product of the function $\mathcal{G}_{\boldsymbol{r},p} = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}/p) - \mathcal{F}(\boldsymbol{x})$,

$$\overline{\Delta\mathcal{F}_i\Delta\mathcal{F}_j} = \overline{\left[\mathcal{G}_{\boldsymbol{r},p}\left(\boldsymbol{x}+\frac{i}{p}\boldsymbol{r}\right)\right]\left[\mathcal{G}_{\boldsymbol{r},p}\left(\boldsymbol{x}+\frac{j}{p}\boldsymbol{r}\right)\right]}. \tag{D.3}$$

Since autocorrelation functions are decreasing from their zero spacing value, we have

$$\overline{\Delta\mathcal{F}_i\Delta\mathcal{F}_j} \leqslant \overline{\left[\mathcal{G}_{\boldsymbol{r},p}(\boldsymbol{x})\right]^2}, \tag{D.4}$$

which allows us to give an upper limit for the mean squared increment of $\mathcal{F}$,

$$\overline{[\mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\mathcal{F}(\boldsymbol{x})]^2} \leqslant \frac{2\Lambda}{p^{2H-1}}r^{2H} + p(p-1)\frac{2\Lambda}{p^{2H}}r^{2H} = 2\Lambda p^{2(1-H)}r^{2H}. \tag{D.5}$$

This result being valid for any value of p, which characterizes a subdivision of the separation vector $\boldsymbol{r}$, we see that since $H > 1$, the limit $p \to \infty$ implies $\overline{[\mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\mathcal{F}(\boldsymbol{x})]^2} = 0$ and therefore $\mathcal{F}$ is a uniform field.

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

tel-00008481, version 1 - 14 Feb 2005

Résumé

Les observations de la phase moléculaire du milieu interstellaire révèlent une structure complexe, tant en vitesse qu'en densité, hiérarchisée sur plus de quatre ordres de grandeur. La compréhension des phénomènes à l'origine de cette structuration, amenant aux premiers stades de la formation stellaire, appelle une description adéquate de champs auxquels l'observateur n'a pas accès directement. Il est donc nécessaire de comprendre la chaîne des processus physiques, observationnels et instrumentaux aboutissant aux quantités effectivement mesurées. Ce problème est ici abordé en trois points.

Les structures observées sont le résultat d'une projection complexe des champs tridimensionnels sur un espace hybride position-position-vitesse, dont on peut tirer des cartes bidimensionnelles d'intensité intégrée et de centroïdes de vitesse. Nous démontrons le lien qui existe entre les propriétés statistiques de ces cartes et celles des champs d'origine. En particulier, nous montrons que l'indice spectral de la carte des centroïdes est égal à celui du champ de vitesse, dans l'approximation des faibles fluctuations de densité, qui est discutée numériquement.

D'autre part, le filtrage spatial imposé par les observations interférométriques dégrade les distributions de brillance projetées sur le plan du ciel. Dans le cadre de l'évaluation des performances du futur réseau ALMA, et à l'aide d'un simulateur instrumental, nous montrons que le spectre de puissance est, parmi les différents outils de caractérisation des structures, celui qui permettra le mieux de remonter aux statistiques des distributions de brillance à partir des données. Nous introduisons en outre une méthode nouvelle et prometteuse, tant en termes d'analyse que de traitement, fondée sur les incréments des phases des composantes de Fourier.

Enfin, la question de la formation des raies interstellaires est abordée dans le cadre d'un formalisme de transfert radiatif stochastique unidimensionnel. Sur cette base préexistante, nous introduisons le cas d'un champ de vitesse corrélé au champ de densité par une relation polytropique, et nous en déduisons une équation de transfert généralisée. Nous montrons également que la distribution des vitesses le long de la ligne de visée n'est pas gaussienne, contrairement au cas sans corrélation, ce qui indique que l'interprétation des profils de raie doit tenir compte de cet effet.

Abstract

Observations of the molecular phase of the interstellar medium reveal a hierarchy of complex structures, both in density and velocity, over more than four decades. The understanding of physical phenomena leading to this structuration and to the first stages of star formation, calls for a proper description of fields which observers do not have direct access to. It is therefore necessary to understand the chain of physical, observational and instrumental processes providing the observer with meanignful quantities. Three aspects of this problem are considered here.

The observed structures are the result of a complex projection of three-dimensional fields onto a position-position-velocity space, from which two-dimensional maps of intensity and velocity centroids are constructed. We establish the relationships between the statistical properties of these maps and those of the original fields. In particular, we show that the spectral index of the velocity centroids' map is equal to that of the velocity field, in the approximation of small density fluctuations, which is discussed numerically.

Also, interferometric observations impose a filtering of spatial frequencies which degrades the brightness distributions over the plane of the sky. In the purpose of evaluating the performances of the forthcoming ALMA instrument, we show, using numerical simulations, that the power spectrum is the most suited tool to recover structural characteristics from the dirty maps. We furthermore introduce a new and promising method of analysis, based on the increments of Fourier phases.

Finally, we consider the problem of interstellar line formation in the framework of a one-dimensional stochastic radiative transfer formalism. We introduce the case of correlations between the velocity and density fields through a polytropic relation, and we come up with a generalized transfer equation. We show that the probability distribution function of line-of-sight velocities is non-Gaussian, contrary to the uncorrelated case, which strongly suggests that these correlations should be taken into account in the interpretation of line profiles.