

# Graphes parfaits : structure et algorithmes

Nicolas Trotignon

Thèse réalisée dans l'équipe Graphes et Optimisation Combinatoire,

Laboratoire Leibniz, IMAG, Grenoble

Sous la direction de Frédéric Mafray et Michel Burlet

# Coloration

- **Colorier** un graphe, c'est affecter une couleur à chaque sommet, de sorte que 2 sommets adjacents sont toujours de couleurs différentes.

# Coloration

- **Colorier** un graphe, c'est affecter une couleur à chaque sommet, de sorte que 2 sommets adjacents sont toujours de couleurs différentes.
- On cherche à minimiser le nombre de couleurs utilisées.

# Coloration

- **Colorier** un graphe, c'est affecter une couleur à chaque sommet, de sorte que 2 sommets adjacents sont toujours de couleurs différentes.
- On cherche à minimiser le nombre de couleurs utilisées.
- Problème pour lequel il semble qu'il n'existe aucune méthode générale efficace (NP-difficile, Karp 1972).

# Les graphes parfaits

- On note  $\chi(G)$  le **nombre chromatique** de  $G$ , c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs permettant de colorier  $G$ .

# Les graphes parfaits

- On note  $\chi(G)$  le **nombre chromatique** de  $G$ , c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs permettant de colorier  $G$ .
- On appelle **clique** de  $G$  tout ensemble de sommets 2 à 2 adjacents.  
On note  $\omega(G)$  la taille de la plus grande clique de  $G$ .

# Les graphes parfaits

- On note  $\chi(G)$  le **nombre chromatique** de  $G$ , c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs permettant de colorier  $G$ .

- On appelle **clique** de  $G$  tout ensemble de sommets 2 à 2 adjacents.

On note  $\omega(G)$  la taille de la plus grande clique de  $G$ .

- Berge, 1960 : on appelle **graphe parfait** tout graphe  $G$  tel que pour tout sous-graphe induit  $G'$  on a :

$$\chi(G') = \omega(G')$$

# Théorème fort des graphes parfaits

- Un **trou** est un cycle (taille  $\geq 4$ ) sans corde.  
Un **antitrou** est le complémentaire d'un trou.



# Théorème fort des graphes parfaits

- Un **trou** est un cycle (taille  $\geq 4$ ) sans corde.  
Un **antitrou** est le complémentaire d'un trou.
- Un graphe est dit **de Berge** s'il ne contient aucun trou impair et aucun antitrou impair.

# Théorème fort des graphes parfaits

- Un **trou** est un cycle (taille  $\geq 4$ ) sans corde.  
Un **antitrou** est le complémentaire d'un trou.
- Un graphe est dit **de Berge** s'il ne contient aucun trou impair et aucun antitrou impair.
- **Théorème fort des graphes parfaits** : un graphe  $G$  est parfait si et seulement s'il est de Berge.

Conjecturé par Claude Berge en 1960.

Démontré par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas en 2002.

# Optimisation combinatoire

- Soit  $A$  une matrice en 0 – 1. Le polyèdre défini par :

$$Ax \leq 1, x \geq 0$$

a ses sommets à coordonnées entières si et seulement si  $A$  est la matrice des cliques d'un graphe parfait  $G$ .  
(Fulkerson 1972, Lovász 1972, Chvátal 1975)

# Optimisation combinatoire

- Soit  $A$  une matrice en 0 – 1. Le polyèdre défini par :

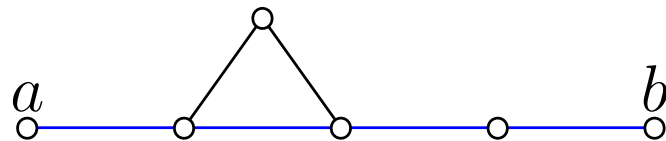
$$Ax \leq 1, x \geq 0$$

a ses sommets à coordonnées entières si et seulement si  $A$  est la matrice des cliques d'un graphe parfait  $G$ .  
(Fulkerson 1972, Lovász 1972, Chvátal 1975)

- Il existe un algorithme en temps polynomial pour colorier tout graphe parfait et trouver une clique maximum (Grötschel, Lovász, Schrijver, 1984).

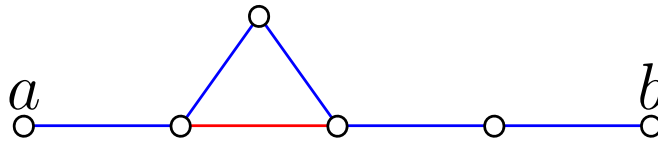
# Paire d'amis

- Une **paire d'amis** d'un graphe  $G$  est une paire de sommets  $\{a, b\}$  telle que tous les chemins sans corde entre  $a$  et  $b$  sont de longueur paire (Meyniel, 1987).



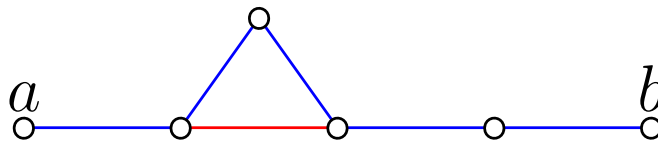
# Paire d'amis

- Une **paire d'amis** d'un graphe  $G$  est une paire de sommets  $\{a, b\}$  telle que tous les chemins sans corde entre  $a$  et  $b$  sont de longueur paire (Meyniel, 1987).



# Paire d'amis

- Une **paire d'amis** d'un graphe  $G$  est une paire de sommets  $\{a, b\}$  telle que tous les chemins sans corde entre  $a$  et  $b$  sont de longueur paire (Meyniel, 1987).



- **Théorème** (Fonlupt, Uhry, 1981) :  
Si  $\{a, b\}$  est une paire d'amis d'un graphe  $G$ , alors le graphe obtenu en **contractant**  $\{a, b\}$  a même nombre chromatique et même taille de clique maximum que  $G$ .

# Coloration par contraction

- Un graphe  $G$  est **contractile** si, à partir de  $G$ , on peut obtenir une clique en contractant des paires d'amis.

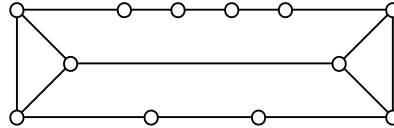


# Coloration par contraction

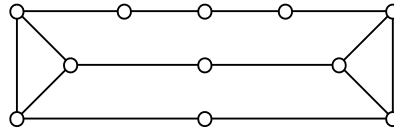
- Un graphe  $G$  est **contractile** si, à partir de  $G$ , on peut obtenir une clique en contractant des paires d'amis.
- Un graphe  $G$  est **parfaitement contractile** si tout sous-graphe induit de  $G$  est contractile (Bertschi, 1990).
- Les graphes parfaitement contractiles sont parfaits.

# Prismes

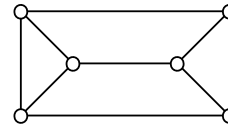
Un prisme impair



Un prisme pair

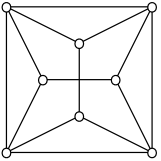
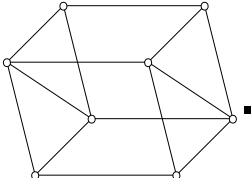


Le plus petit prisme



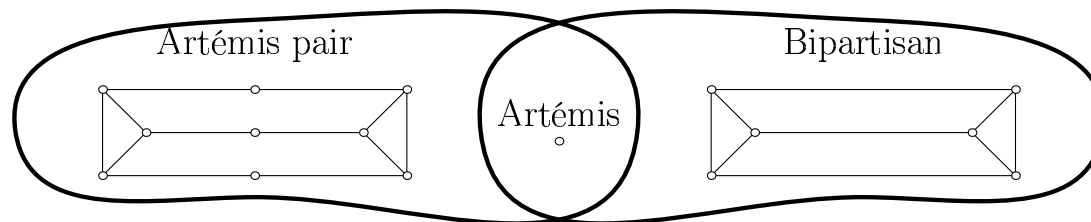
# 3 classes de graphes

- **Bipartisan** : dans  $G, \overline{G}$ , ni trou impair,

ni prisme long, ni , ni .

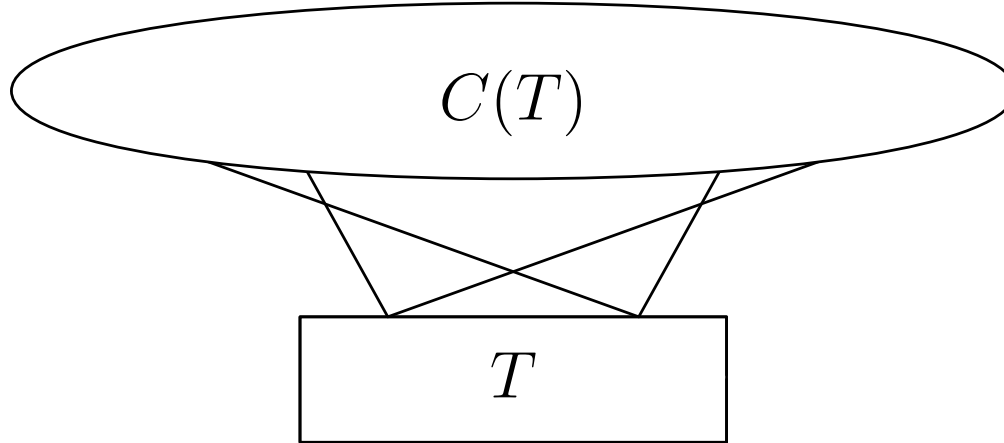
- **Artémis** : ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme.

- **Artémis pair** : ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme impair.



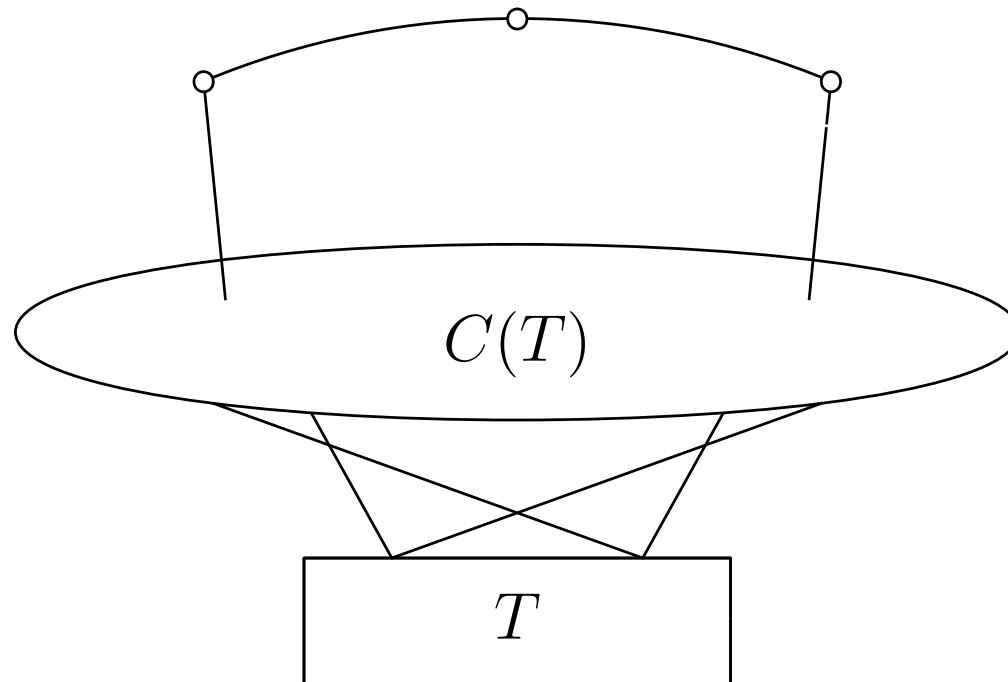
# Graphes d'Artémis

Comment trouver des paires d'amis ?



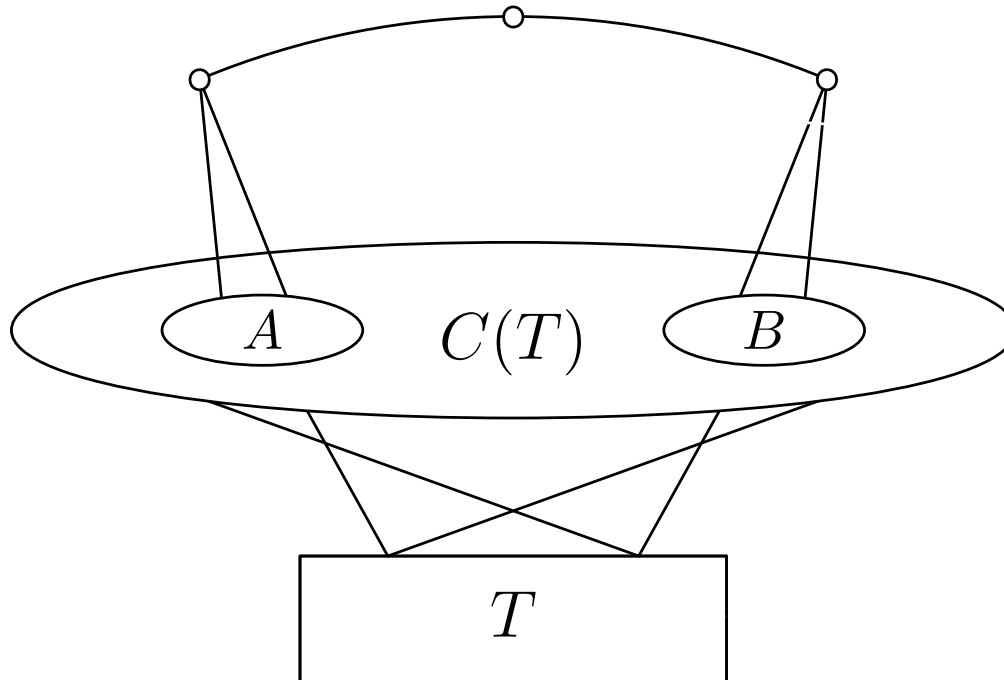
# Graphes d'Artémis

Comment trouver des paires d'amis ?



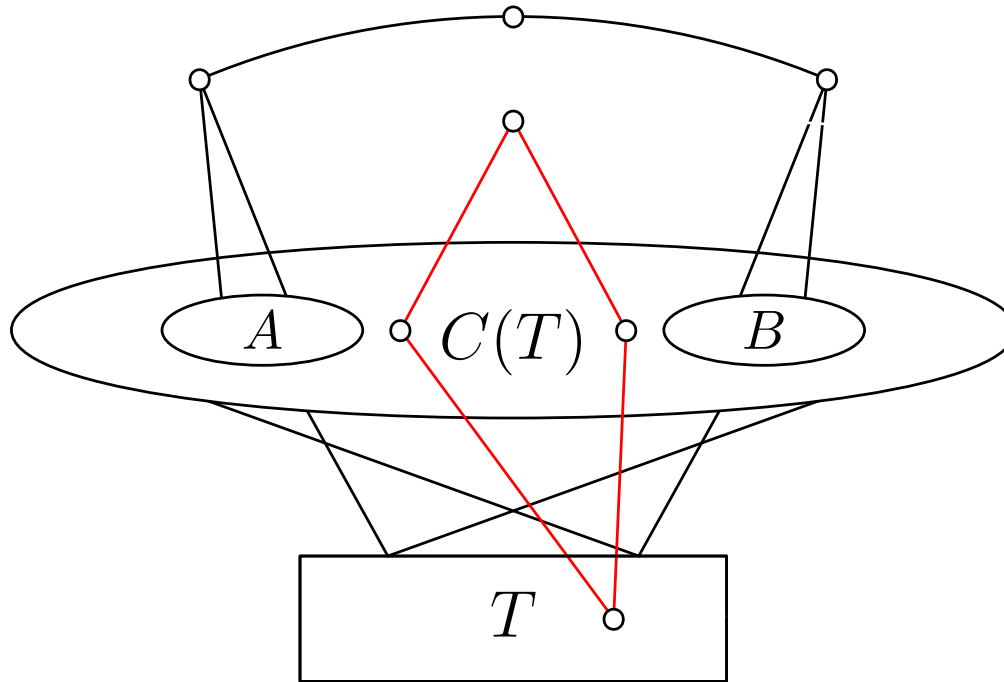
# Graphes d'Artémis

Comment trouver des paires d'amis ?



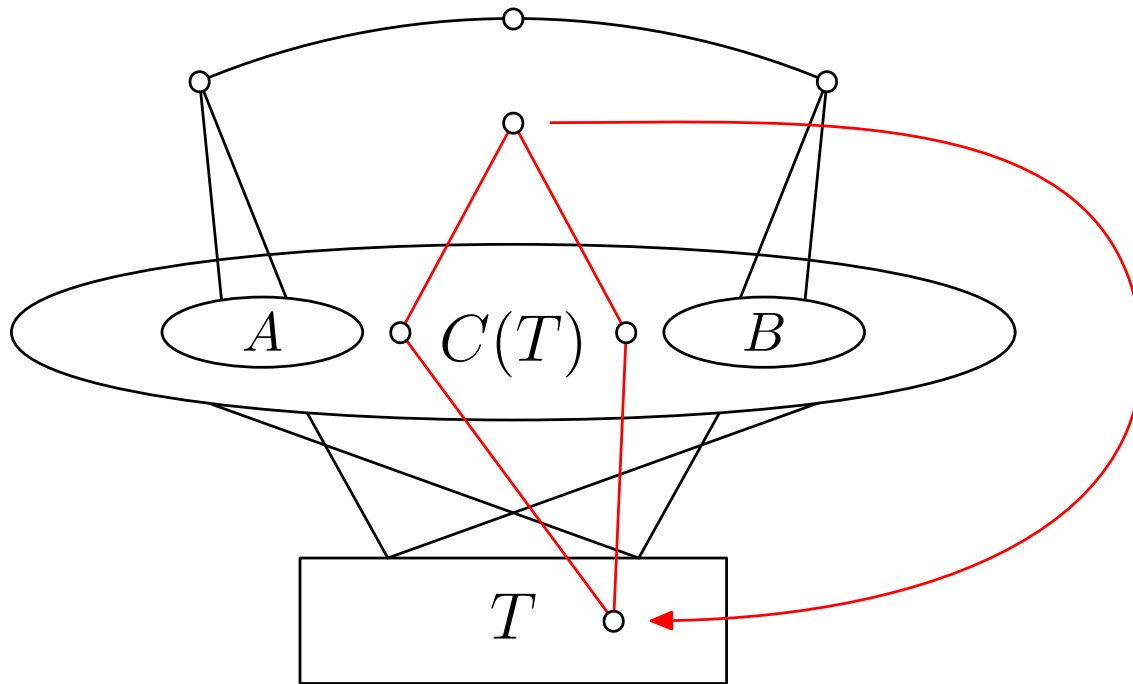
# Graphes d'Artémis

Comment trouver des paires d'amis ?



# Graphes d'Artémis

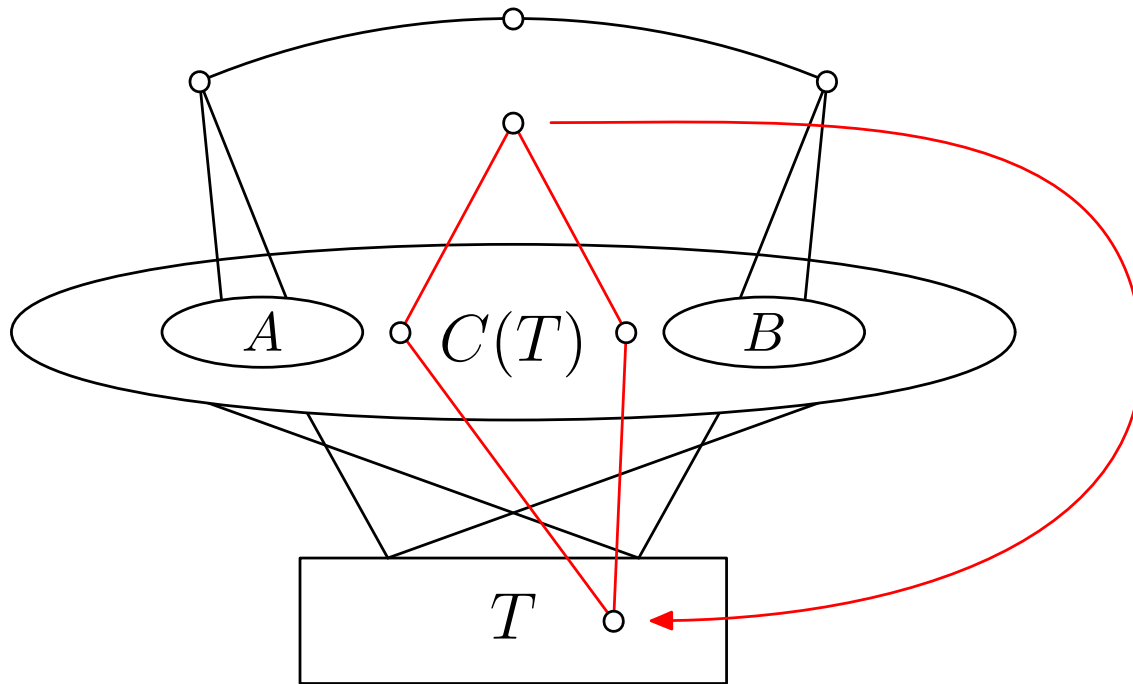
Comment trouver des paires d'amis ?





# Graphes d'Artémis

Comment trouver des paires d'amis ?



Tout se passe comment dans le cas sans carré, étudié par Linhares et Mafray.

# Lemme de Roussel & Rubio (Artémis)

**Lemme** : Soit  $G$  un graphe d'Artémis (ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme) et  $T$  un ensemble anticonnexe de sommets.

On définit un nouveau graphe en remplaçant  $T$  par un sommet, et en reliant ce nouveau sommet à tous les sommets de  $G$  qui étaient complets à  $T$ .

Alors ce nouveau graphe ne contient ni :

- Trou impair (Roussel et Rubio, 2000)
- Prisme (voir thèse, lemmes 4.9 et 4.10)
- Antitrou (exercice)

# Lemme de Roussel & Rubio (Artémis)

**Lemme** : Soit  $G$  un graphe d'Artémis (ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme) et  $T$  un ensemble anticonnexe de sommets.

On définit un nouveau graphe en remplaçant  $T$  par un sommet, et en reliant ce nouveau sommet à tous les sommets de  $G$  qui étaient complets à  $T$ .

Alors ce nouveau graphe est d'Artémis.

# Graphes d'Artémis

- Ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme.
- **Théorème** : Soit  $T$  un ensemble anticonnexe de sommets. Soit  $C(T)$  l'ensemble des sommets complets à  $T$ . Alors  $C(T)$  est une clique ou  $C(T)$  contient une paire d'amis. Chaque graphe d'Artémis pair est parfaitement contractile.

# Graphes d'Artémis

- Ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme.
- **Théorème** : Soit  $T$  un ensemble anticonnexe de sommets. Soit  $C(T)$  l'ensemble des sommets complets à  $T$ . Alors  $C(T)$  est une clique ou  $C(T)$  contient une paire d'amis. Chaque graphe d'Artémis pair est parfaitement contractile.
- **Algorithme de coloration & clique max** :  $O(n^6)$   
(B. Reed a ramené la complexité à  $O(n^2m)$ )

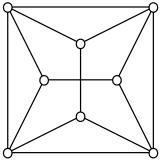
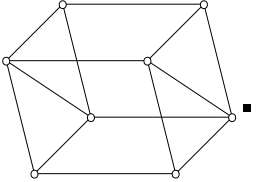
# Graphes d'Artémis

- Ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme.
- **Théorème** : Soit  $T$  un ensemble anticonnexe de sommets. Soit  $C(T)$  l'ensemble des sommets complets à  $T$ . Alors  $C(T)$  est une clique ou  $C(T)$  contient une paire d'amis. Chaque graphe d'Artémis pair est parfaitement contractile.
- **Algorithme de coloration & clique max** :  $O(n^6)$   
(B. Reed a ramené la complexité à  $O(n^2m)$ )
- **Décomposition** (prouvée par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas) :
  - Basiques : bipartis, cliques.
  - Opération : partition antisymétrique paire.

# Graphes d'Artémis pairs

- Ni trou impair, ni antitrou (taille  $\geq 5$ ), ni prisme impair.
- **Décomposition** (prouvée par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas) :
  - Basiques : bipartis, cliques, prismes pairs.
  - Opération: partition antisymétrique paire, 2-joint.
- **Conjecture** (Everett et Reed) : les graphes d'Artémis pairs sont exactement les graphes parfaitement contractiles et il existe des séquences de contractions maintenant les graphes dans la classe.

# Graphes bipartisans

- $G, \overline{G}$  : ni trou impair, ni prisme long, ni , ni .
- **Décomposition** (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas) :
  - Basiques : bipartis et leurs complémentaires.
  - Opération : partition antisymétrique paire.
- **Conjecture** (Maffray, Thomas) : pour chaque  $G$  bipartisan, l'un de  $G, \overline{G}$  possède une paire d'amis.



# Problèmes de reconnaissance

# Problèmes de reconnaissance

- Détecter les trous impairs : problème ouvert.

# Problèmes de reconnaissance

- Détecter les trous impairs : problème ouvert.
- Reconnaissance des graphes de Berge : Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković,  $O(n^9)$ , 2002.

# Problèmes de reconnaissance

- Détecter les trous impairs : problème ouvert.
- Reconnaissance des graphes de Berge : Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković,  $O(n^9)$ , 2002.
- Détection des antitrous : facile en  $O(n^5)$ .

# Problèmes de reconnaissance

- Détecter les trous impairs : problème ouvert.
- Reconnaissance des graphes de Berge : Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour, Vušković,  $O(n^9)$ , 2002.
- Détection des antitrous : facile en  $O(n^5)$ .
- Détection des prismes : NP-complet.

# Le problème $\Pi$

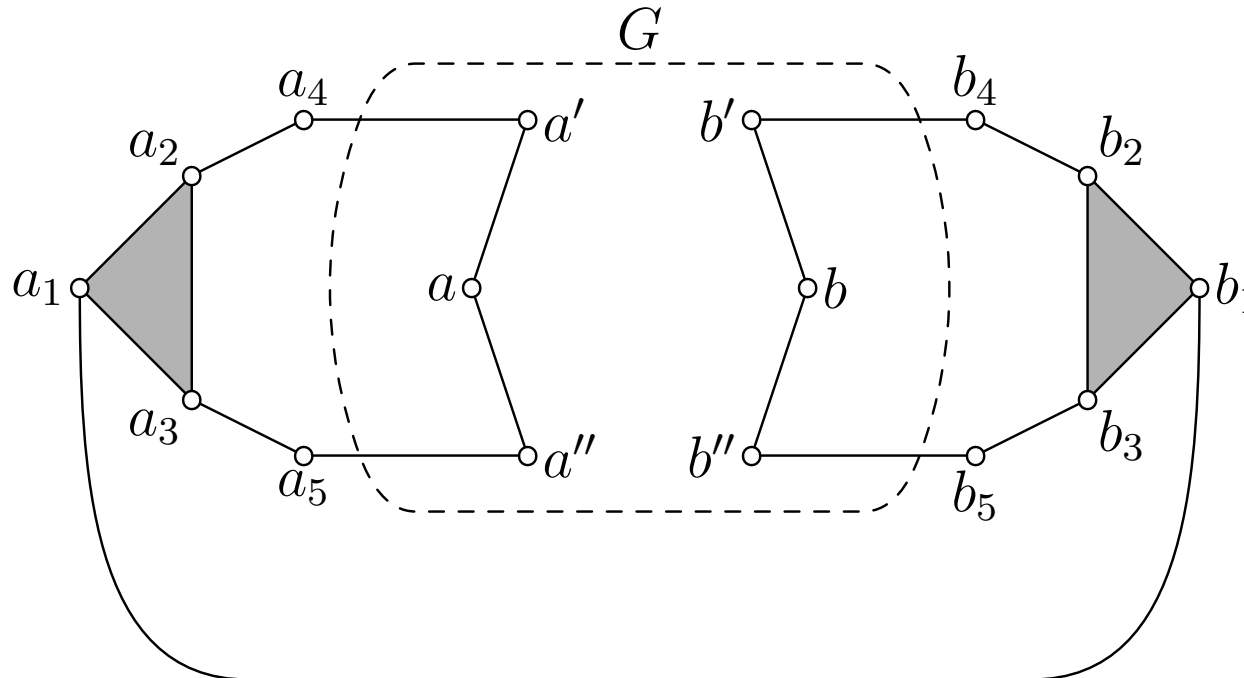
Instance : Un graphe  $G$  sans triangle, deux sommets non-adjacents  $a$  et  $b$  de degré 2.

Question :  $G$  contient-il un trou passant par  $a$  et  $b$  ?

**Théorème** : Le problème  $\Pi$  est NP-complet.

La preuve utilise une construction imaginé par Bienstock pour prouver la CoNP-complétude de la détection des paires d'amis.

# Détection des prismes



**Théorème** : la détection des prismes est un problème NP-complet.

Preuve : si on sait comment détecter les prismes, alors on sait résoudre le problème  $\Pi$ .

# Problèmes NP-complets

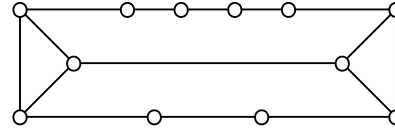
**Théorème** : Les problèmes suivants sont NP-complets.

- Détection des prismes.
- Détection des prismes pairs.
- Détection des prismes impairs.

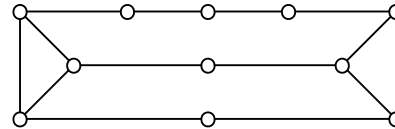


# Prismes et pyramides

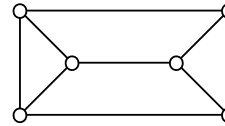
Un prisme impair



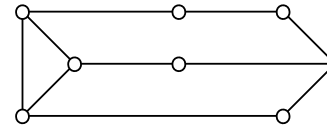
Un prisme pair



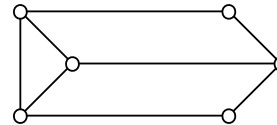
Le plus petit prisme



Une pyramide



La plus petite pyramide



# Prisme ou pyramide

**Lemme** : Soit  $G$  un graphe, soit  $K$  un sous-graphe de  $G$  qui est un prisme ou une pyramide, de taille minimale avec ces propriétés, avec un triangle  $\{a_1, a_2, a_3\}$  et un sommet  $b$  à l'autre extrémité de  $K$ .

Soit  $R$  un plus court chemin de  $a_i$  à  $b$  dont les sommets intérieurs manquent  $a_{i+1}, a_{i+2}$ .

Alors, si on remplace le chemin de  $K$  allant de  $a_i$  à  $b$  par  $R$ , on obtient encore un prisme ou une pyramide de taille minimale de  $G$ .

# Prisme ou pyramide

**Lemme** : Soit  $G$  un graphe, soit  $K$  un sous-graphe de  $G$  qui est un prisme ou une pyramide, de taille minimale avec ces propriétés, avec un triangle  $\{a_1, a_2, a_3\}$  et un sommet  $b$  à l'autre extrémité de  $K$ .

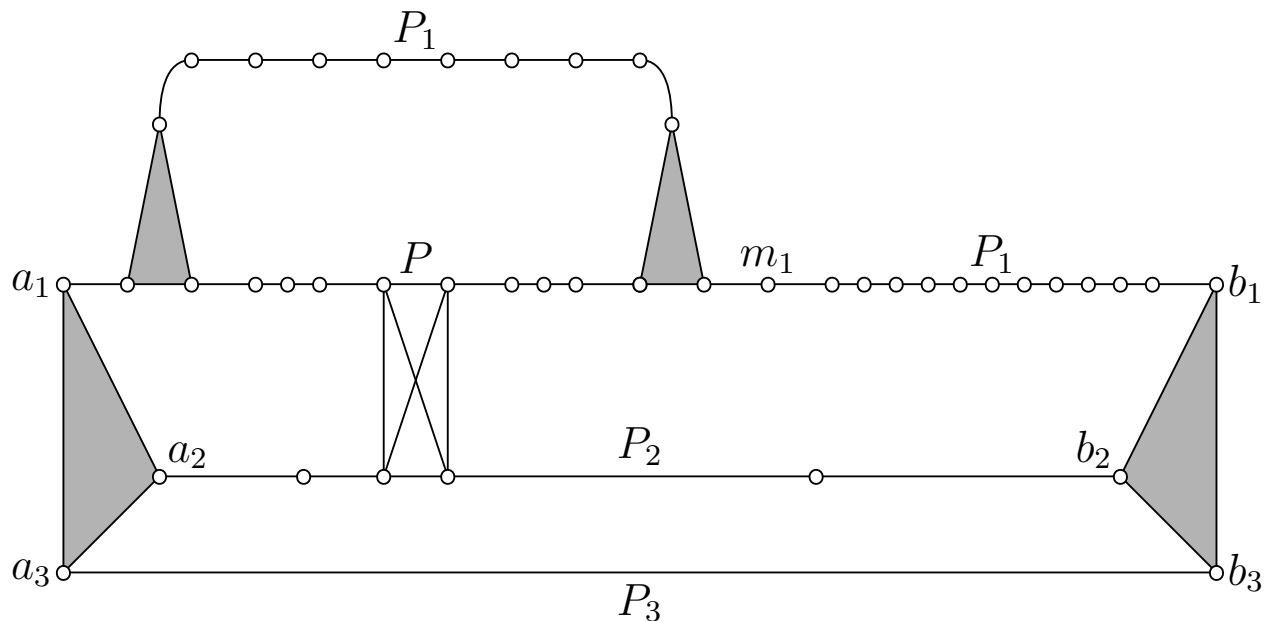
Soit  $R$  un plus court chemin de  $a_i$  à  $b$  dont les sommets intérieurs manquent  $a_{i+1}, a_{i+2}$ .

Alors, si on remplace le chemin de  $K$  allant de  $a_i$  à  $b$  par  $R$ , on obtient encore un prisme ou une pyramide de taille minimale de  $G$ .

**Algorithme** : détection des prismes ou pyramides en  $O(n^6)$ .

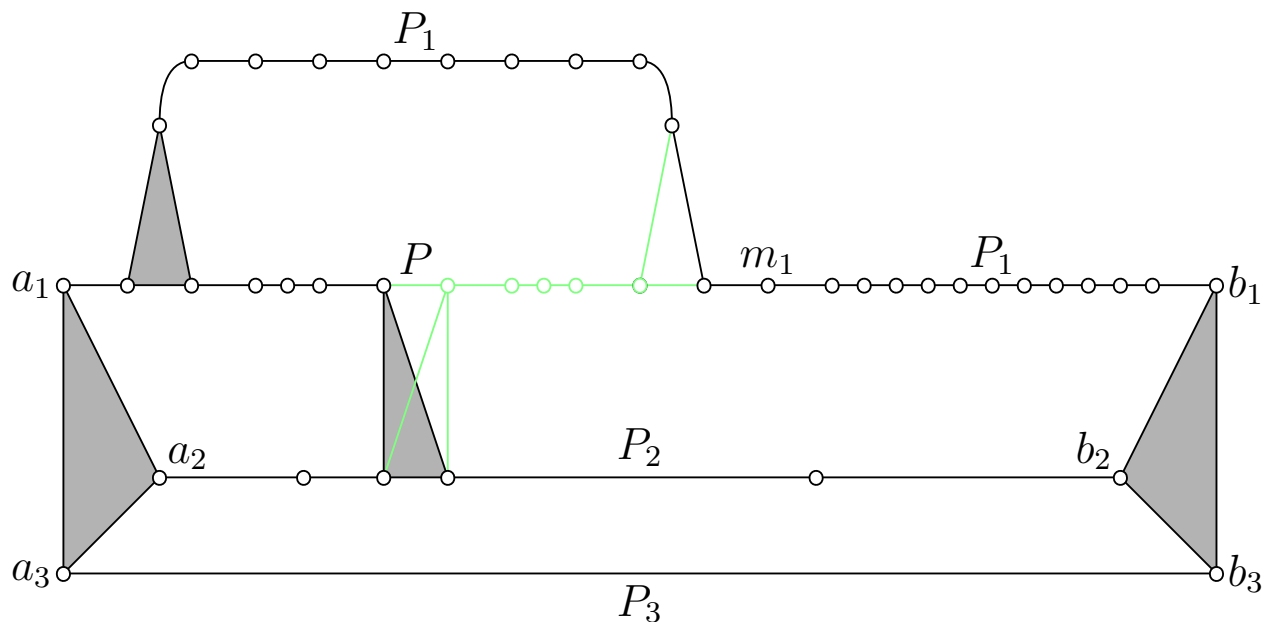
# Détection des prismes impairs

Pourquoi la technique des plus courts chemins ne fonctionne-t-elle pas ?

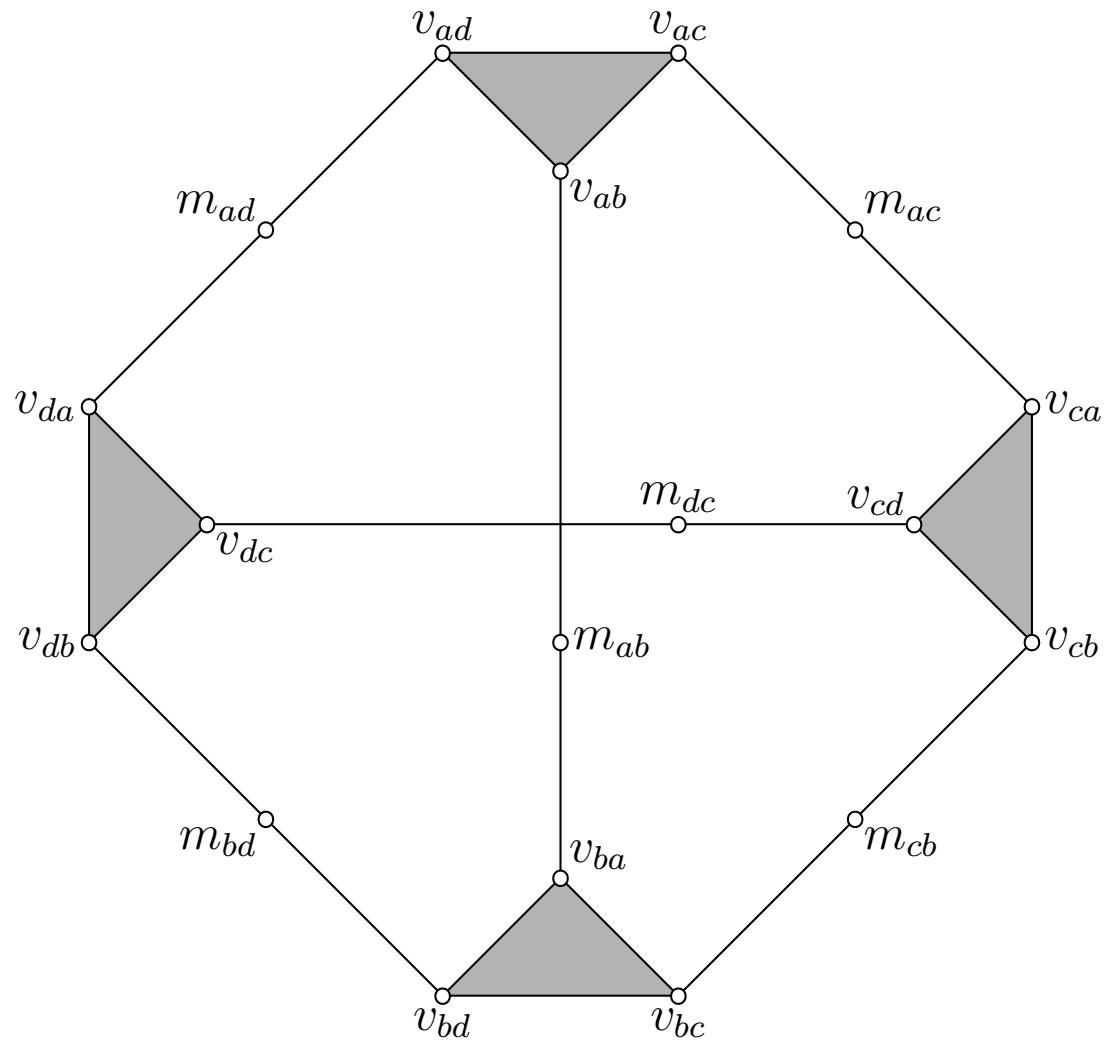


# Détection des prismes impairs

Pourquoi la technique des plus courts chemins ne fonctionne-t-elle pas ?



# La trame d'un $\text{LGS}K_4$ :



# Détection des prismes impairs

**Lemme** : soit  $G$  un graphe sans trou impair ni  $LG\text{SB}K_4$  et soit  $K$  un prisme de  $G$  de triangles  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$ .

Soit  $R$  un chemin sans corde de  $G$  d'extrémités  $a_1, b_1$ , dont l'intérieur manque  $a_2, a_3, b_2, b_3$ .

Alors, si on remplace le chemin de  $K$  reliant  $a_1$  et  $b_1$  par  $R$ , on obtient un prisme de  $G$  de même parité que  $K$ .

# Détection des prismes impairs

**Lemme** : soit  $G$  un graphe sans trou impair ni  $LG\text{SB}K_4$  et soit  $K$  un prisme de  $G$  de triangles  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$ .

Soit  $R$  un chemin sans corde de  $G$  d'extrémités  $a_1, b_1$ , dont l'intérieur manque  $a_2, a_3, b_2, b_3$ .

Alors, si on remplace le chemin de  $K$  reliant  $a_1$  et  $b_1$  par  $R$ , on obtient un prisme de  $G$  de même parité que  $K$ .

**Algorithme** : détection des prismes impairs en  $O(n^{20})$ .



# Détection : Résumé des résultats

	Graphes quelconques	Graphes sans pyramide	Graphes sans sans trou impair
Pyramide ou prisme	$n^5$	$n^5$	$n^5$
Pyramide	$n^9$ [1]	1	1
Prisme	NPC	$n^5$	$n^5$
LGSP $K_4$	NPC	$n^{20}$	$n^{20}$
LGSB $K_4$	NPC	?	$n^{20}$
Prisme impair	NPC	?	$n^{20}$
Prisme pair	NPC	?	$n^{11}$

[1] M. Chudnovsky, P. D. Seymour, *Recognizing Berge Graphs*, 2002.

# Résumé des résultats

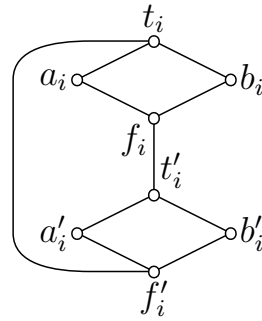
- Artémis :  
Ces graphes sont parfaitement contractiles.  
Algorithme de coloration :  $O(n^2m)$ .  
Algorithme de reconnaissance :  $O(n^9)$ .
- Artémis pair :  
Algorithme de coloration en  $O(n^{23})$  dont l'optimalité dépend de la conjecture de Everett et Reed.  
Algorithme de reconnaissance :  $O(n^{20})$ .
- Bipartisan :  
Algorithme de reconnaissance :  $O(n^9)$ .

# Résumé des résultats

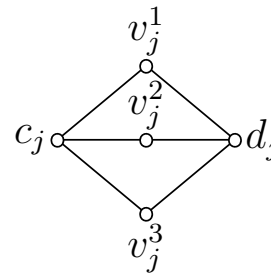
- Artémis :  
Ces graphes sont parfaitement contractiles.  
Algorithme de coloration :  $O(n^2m)$ .  
Algorithme de reconnaissance :  $O(n^9)$ .
- Artémis pair :  
Algorithme de coloration en  $O(n^{23})$  dont l'optimalité dépend de la conjecture de Everett et Reed.  
Algorithme de reconnaissance :  $O(n^{20})$ .  
Conjecture de Everett et Reed ?
- Bipartisan :  
Algorithme de reconnaissance :  $O(n^9)$ .  
Conjecture de Maffray et Thomas ?
- Coloration des graphes parfaits par paire d'amis et/ou décompositions ?

# Bienstock's reduction

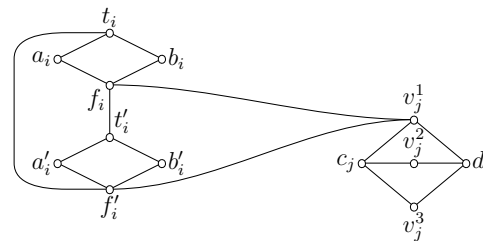
A variable  $x_i$



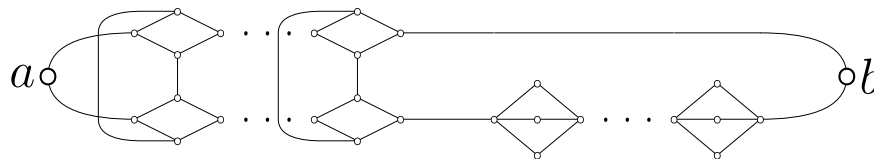
A clause  $y_j$



Together



All together



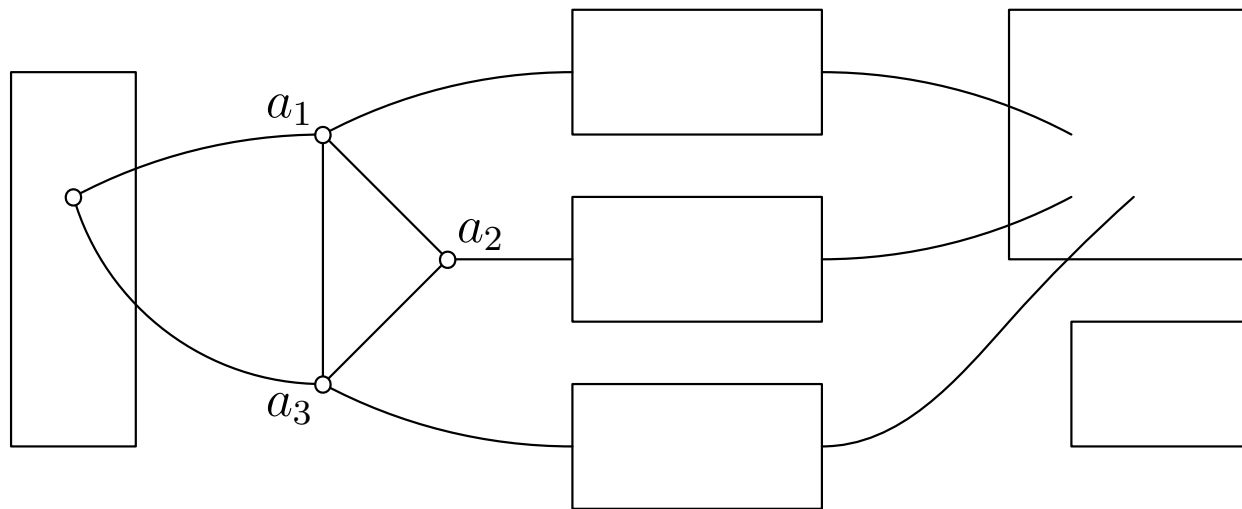
# Detecting prisms or pyramids

Lemma: Let  $G$  be any graph and let  $K$  be a smallest prism or pyramid in  $G$  with frame  $(a_1, a_2, a_3, b_1)$ .

Let  $R$  be any path of  $G$  whose ends are  $a_1, b_1$ , whose interior vertices are not adjacent to  $a_2, a_3$ , and which is shortest with these properties.

Then  $R_1, P_2, P_3$  form a smallest prism or pyramid of  $G$ .

# Detecting prisms or pyramids



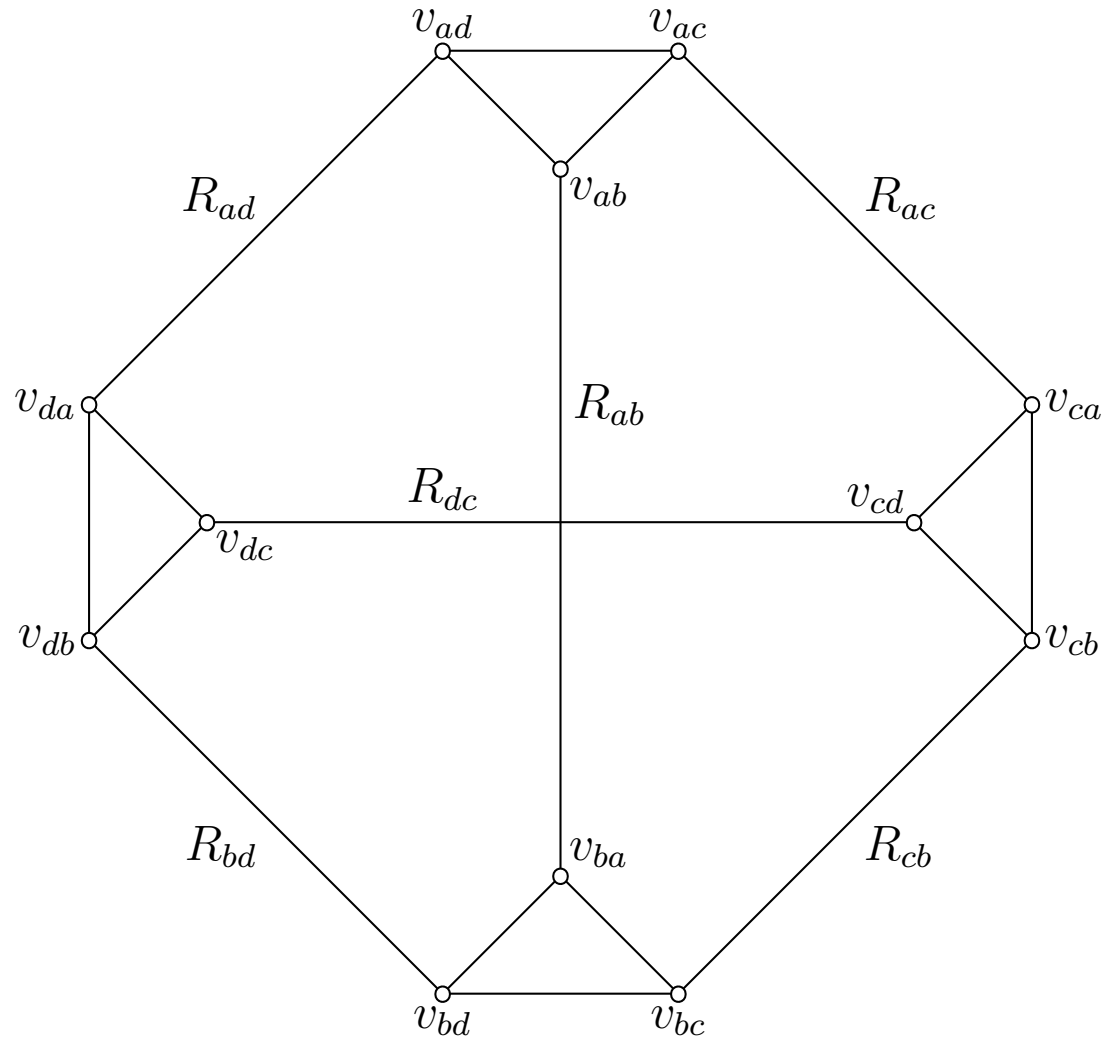
# Detecting even prisms

Lemma: Let  $G$  be a graph that contains no odd hole and let  $K$  be a smallest even prism in  $G$  with frame  $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, m_1, m_2, m_3)$ .

Let  $R$  be any path of  $G$  whose ends are  $a_1, m_1$ , whose interior vertices are not adjacent to  $a_2, a_3, b_2$  or  $b_3$ , and which is shortest with these properties.

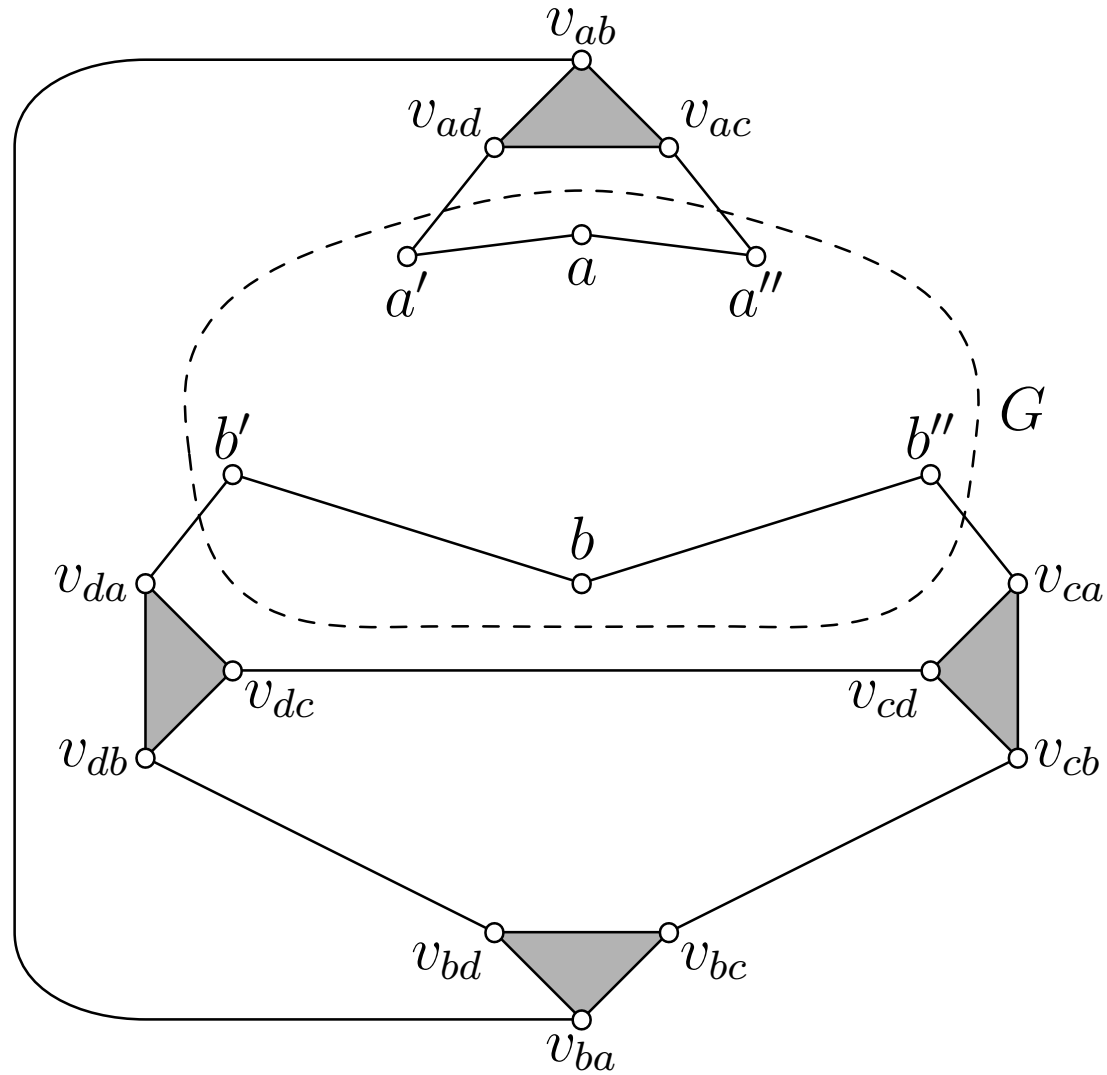
Then  $a_1-R-m_1-P_1-b_1$  is a chordless path  $R_1$  and  $R_1, P_2, P_3$  form a smallest even prism in  $G$ .

# LGPS $K_4$





# LGPS $K_4$ : NP-complete



# Detecting $LGPSK_4$

