



**HAL**  
open science

# Dynamique des grandes échelles de la convection dans la photosphère solaire

Francois Rincon

► **To cite this version:**

Francois Rincon. Dynamique des grandes échelles de la convection dans la photosphère solaire. Astrophysique [astro-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. Français. NNT : . tel-00008710

**HAL Id: tel-00008710**

**<https://theses.hal.science/tel-00008710>**

Submitted on 7 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ TOULOUSE III – PAUL SABATIER  
U.F.R. Physique, Chimie, Automatique

## THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III

Discipline : Astrophysique

présentée par

**François RINCON**

et soutenue publiquement le vendredi 10 décembre 2004

# DYNAMIQUE DES GRANDES ÉCHELLES DE LA CONVECTION DANS LA PHOTOSPHÈRE SOLAIRE

Directeur de thèse : Pr M. Rieutord

## JURY

Dr J.-C. Vial ..... Président  
Pr M. R. E. Proctor ..... Examineur  
Dr J. Sommeria ..... Examineur  
Dr J.-P. Zahn ..... Rapporteur  
Dr T. Passot ..... Rapporteur  
Dr F. Lignièrès ..... Invité  
Pr M. Rieutord ..... Directeur de thèse

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes – UMR CNRS 5572  
Observatoire Midi-Pyrénées – 14, avenue E. Belin  
31400 Toulouse – FRANCE





*À ma grand-mère*



# Remerciements

Le lecteur rompu à l'exercice de style canonique – pour ne pas dire au rituel tribal – auquel je vais me livrer ici sera certainement fort déçu par mon manque d'originalité à ce sujet. Mais « la tradition, c'est important » (Hansen et al. 1999), et de fait je compte bien la respecter ici.

Pour commencer, je m'empresserai de remercier tous les membres du jury. Merci donc à Jean-Paul Zahn et Thierry Passot d'avoir relu attentivement ce manuscrit et à Joël Sommeria et Jean-Claude Vial de s'être prêtés au jeu de l'examen. J'exprime ma reconnaissance toute particulière à Michael Proctor qui a pour commencer eu la gentillesse de m'inviter à Cambridge en juin 2004, puis a réussi à se libérer d'obligations importantes pour effectuer un trop bref aller-retour Cambridge-Toulouse afin de participer à ce jury de thèse.

Que serais-je devenu sans Michel Rieutord et Geneviève Soucail ? « Poser la question c'est y répondre » (Rieutord 2004). Je souhaite donc ici témoigner de toute mon affection à leur égard. Je remercie tout d'abord Michel de m'avoir proposé un premier stage de recherche en licence (le piège à thésard avait alors parfaitement fonctionné), puis de m'avoir orienté sur un sujet de thèse passionnant mais malheureusement si difficile. Il a fallu toute son expertise de sherpa pour parvenir à rallier le camp de base lors de la troisième année (le sommet reste malheureusement très éloigné). Dans cet exercice de longue haleine, Geneviève, très certainement guidée par une observation multi-spectre de lentille gravitationnelle clignotante à cinq mégaparsecs, s'est révélée un soutien formidable. Sans elle, ce travail n'aurait peut-être pas abouti.

J'exprimerai également ma reconnaissance à François Lignières pour sa participation au jury, mais surtout pour son aide et sa disponibilité permanentes au cours de notre collaboration. J'ai énormément apprécié ses qualités humaines et scientifiques. Je souhaite pour continuer témoigner de mon amitié à Boris Dintans et à sa femme Stéphanie, qui m'ont offert un soutien sans faille tout au long de la thèse et ont contribué à l'entretien de ma condition physique déclinante en me proposant à plusieurs reprises des activités de déménagement aussi ludiques que variées. Je tiens bien sûr à remercier Katia Ferrière, qui a toujours su se mon-

trer disponible et compréhensive au cours de ces trois ans, ainsi que Daniel Reese et Shahram Abasi.

J'ai une pensée amicale pour Thierry Roudier et Nadège Meunier, avec lesquels je n'ai pas travaillé autant que je l'aurais souhaité en raison de la distance entre Toulouse et Tarbes et de celle entre mes modèles et le vrai Soleil. Je remercie Rachid Ouyed, qui a eu la gentillesse de m'inviter à Copenhague, mais aussi Lorenzo Valdetaro pour toute son aide, Bertrand Georgeot et Pierre-Henri Chavanis qui ont permis la rencontre entre Smoluchowski<sup>1</sup>, Poisson, KAM, Navier et Stokes. Mon amitié va également à Frédéric Paletou, Torsten Böhm, Guy Mathez et Jean-Pierre Picat, qui ont constamment égayé les pauses et nourri la machine à moral, ainsi qu'à José-Philippe Perez, qui a accepté d'être mon tuteur de monitorat et a entretenu ma maigre culture scientifique et ma conscience politique en période de disette intellectuelle. J'aurai une pensée reconnaissante pour Sylvie Roques et son grand dévouement ainsi que pour les bibliothécaires de l'observatoire, le service informatique, l'équipe administrative du laboratoire et de l'école doctorale. Merci aussi à Hervé Valentin et Pierre Tilloles de m'avoir permis de sortir la tête de l'astrophysique tout en restant à l'observatoire.

J'adresse de chaleureux remerciements à de nombreuses personnes rencontrées en cours de thèse, parmi lesquelles Nigel Weiss, Paul Bushby, Alexander Schekochihin, Gordon Ogilvie, Guillaume Bascoul, Tarek Yousef, Laurent Gizon, Rolland Grappin, Axel Brandenburg, Oskar Steiner, Reza Tavakol, Gilles Chabrier, Isabelle Baraffe, Pierre Brancher, David Fabre, Yannick Ponty, Franck Plunian, Sacha Brun, Pascal Lambert, Alice Courvoisier, Evy Kersalé, Philippe Stee, Bertrand Plez, Reza Samadi, Hans Ludwig, Bernd Freytag, Reinhard Prix, Pascale Garaud, Juri Toomre, Jérôme Ballot et Lionel Bigot, pour toutes ces discussions qui m'ont conforté dans le sentiment que je ne savais quasiment rien. J'aurai aussi une pensée pour mes anciens enseignants, dont les inoubliables Marie-France Schreiner, Claude Lapeyre, Denis Favennec, Jacques Gouaillardou, Guy Chanfray, Pierre Pujol, Bernard Castaing, Olivier Michel, Jean-François Gonzalez et Yannick Ricard.

Le moment me semble opportun pour faire une parenthèse et remercier un fabricant d'aspirine et divers producteurs de boissons à base de houblon et de bulles pour leur contribution majeure à ce travail. Je souhaiterais au passage exprimer ma gratitude aux piranhas du Canal du Midi qui ont eu la bonté de me laisser ressortir de l'eau entier, par un froid et venteux matin d'hiver de l'An 2004.

Je tiens à présent à saluer les efforts plus que méritoires de mes amis Mathieu, (Nicolas)<sup>2</sup>, Arnaud, Émeline et Hervé qui ont réussi à éviter l'explosion de thésard en vol. Je ne saurais comment les remercier assez pour tout ce qu'ils ont fait. Je voudrais également saluer les fidèles soutiens toulousains Vincent, Benoît, Noémie et Fabrice. Enfin, toute mon amitié va aux merveilleux camarades que sont Jérôme, Stanislas, Édouard, (Jean-Yves)<sup>2</sup>, Bertrand, Fabrice, Hu-

---

<sup>1</sup>C'est la bonne orthographe !

bert, Hervé, Pierre, Emmanuel, David, Vincent, Pierre-François, Benjamin, Brice, Bénédicte, Glenn, Véronique, Christophe et Stéphane. Richard, Jean-Yves, Pat Metheny, Keith Jarrett et Dave Holland ont pour leur part assuré l'ambiance musicale et offert un abri pentatonique au cerveau dans les moments difficiles.

Évidemment, j'ai souhaité garder le meilleur pour la fin. Je conclurai donc en remerciant de tout mon cœur toute ma famille pour ses encouragements permanents et en exprimant une reconnaissance infinie à mes parents pour leur inestimable soutien depuis toujours. Ils savent tout ce qu'ils représentent pour moi.







# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Sommaire</b>	<b>9</b>
<b>Notations utilisées</b>	<b>11</b>
<b>Problématique générale</b>	<b>15</b>
<b>1 Observations et modèles de la photosphère solaire</b>	<b>19</b>
<b>2 Équations MHD dans un milieu fortement stratifié</b>	<b>47</b>
<b>3 Approche linéaire de la supergranulation solaire</b>	<b>55</b>
<b>4 Simulations numériques à grand rapport d'aspect</b>	<b>75</b>
<b>5 Théories de champ moyen</b>	<b>119</b>
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>A Méthodes numériques et tests</b>	<b>145</b>
<b>B Oscillations alfvéniques d'une coquille sphérique</b>	<b>163</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>199</b>
<b>Liste des communications</b>	<b>201</b>
<b>Table des matières</b>	<b>203</b>





# Liste des notations utilisées et ordres de grandeur

Dans le manuscrit, les vecteurs sont notés en caractères gras et la sommation sur les indices répétés est implicite. Sauf mention particulière, les valeurs sont données pour la photosphère du Soleil calme.

## Variables

$x, r$	Position	
$k, a$	Vecteur d'onde	
$\Omega_k$	Angle solide sur $k$	
$t$	Temps	Granulation solaire $t \simeq 10$ mn
$v$	Champ de vitesse	Granulation solaire $v \simeq 1$ km s <sup>-1</sup>
$B, b$	Champ magnétique	Réseau chromo. $B \simeq 100$ G $\simeq 10^{-2}$ T
$j$	Densité de courant	
$T, \theta$	Température	À la surface solaire $T \simeq 5780$ K
$P, p$	Pression	À la surface solaire $p \simeq 10^4$ Pa
$\rho$	Densité	À la surface solaire $\rho \simeq 2 \cdot 10^{-4}$ kg m <sup>-3</sup>
$e$ et $s$	Énergie interne et entropie	
$\omega$	Pulsation	Modes acoustiques du Soleil $P \simeq 5$ mn
$\Gamma, \tau$	Taux de croissance	
$\lambda$	Valeur propre	$\lambda = i\omega + \tau$

## Opérateurs, moyennes

$\nabla$ ou $\partial$	Gradient	
$\nabla \cdot$	Divergence	
$\nabla \times$	Rotationnel	
$\Delta$	Laplacien	
$\mathcal{P}$	Opérateur de projection	$\mathcal{P} \equiv \text{Id} - \nabla \Delta^{-1} \nabla \cdot$
$\Re$	Partie réelle	
$\bar{x}$	Moyenne de $x$ sur un plan	
$\langle x \rangle$	Moyenne d'ensemble ou moyenne temporelle	

### Paramètres physiques

$R_{\odot}$	Rayon solaire	$R_{\odot} = 700\,000\text{ km}$
$M_{\odot}$	Masse solaire	$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}\text{ kg}$
$g$	Gravité	À la surface solaire $g = 274\text{ m s}^{-2}$
$d$	Dimension verticale de l'atmosphère	Ionisation de l'hydrogène solaire $d \simeq 1\,000\text{ km}$
$A$	Rapport d'aspect	Dimension horizontale / Dimension verticale
$c_v$	Capacité calorifique à volume constant	
$c_p$	Capacité calorifique à pression constante	
$\gamma$	Index adiabatique	Gaz monoatomique $\gamma = 5/3$
$c_s$	Vitesse du son	$c_s^2 = \gamma p / \rho$ , quelques $\text{km s}^{-1}$ à la surface solaire
$\mathcal{R}$	Constante des gaz parfaits	
$\mu_o$	Perméabilité magnétique	$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ S. I.}$
$V_A$	Vitesse d'Alfvén	$V_A = B / \sqrt{\rho \mu_o}$ , dans le réseau $V_A > 1\text{ km s}^{-1}$
$N$	Fréquence de Brünt-Vaisälä	
$\mu$	Viscosité dynamique	
$\nu$	Viscosité cinématique	$\nu = \mu / \rho$ , à la surface solaire $\nu \simeq 1\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$
$\chi$	Conductivité thermique	
$\kappa$	Diffusivité thermique	$\kappa = \chi / \rho c_p$ , à la surface solaire $\kappa \simeq 2 \cdot 10^8\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$
$\sigma_o$	Conductivité électrique	
$\eta$	Diffusivité magnétique	$\eta = 1 / \sigma_o \mu_o$ , à la surface solaire $\eta > 10^3\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$
$m$	Indice polytropique	$m = g d / \mathcal{R} T$ , stratification adiabatique $m = 3/2$
$z_o$	Degré de stratification	Fluide incompressible $z_o \rightarrow +\infty$

### Nombres caractéristiques sans dimension

$\Lambda$	Gravité sans dimension	$\Lambda = g d^3 / \kappa^2$
$R$	Nombre de Rayleigh	$R = g d^4 \nabla s / \nu \kappa$ , à la surface solaire $R = 10^{20}$
$Re$	Nombre de Reynolds	$Re = d v / \nu$ , à la surface solaire $Re = 10^{10}$
$Pr$	Nombre de Prandtl	$Pr = \nu / \kappa$ , à la surface solaire $Pr \simeq 10^{-9}$
$Pr_m$	Nombre de Prandtl magnétique	$Pr_m = \nu / \eta$ , à la surface solaire $Pr_m < 10^{-3}$
$\zeta$	Rapport des Prandtl	$\zeta = \eta / \kappa$
$Q$	Nombre de Chandrasekhar	$Q = B^2 d^2 / \mu_o \mu \eta$
$Nu$	Nombre de Nusselt	défini par l'équation (2.17)
$M$	Nombre de Mach	$M = v / c_s$ , à la surface solaire $M \simeq 0.1$ à $1$
$C_k$	Nombre de Mach thermique	$C_k = \sqrt{\gamma} \kappa / d c_s$

## Turbulence

$\langle \varepsilon \rangle$	Taux de dissipation de l'énergie cinétique	$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{i,j} \langle v(\partial_i v_j)^2 \rangle$
$\langle N \rangle$	Taux de dissipation des fluctuations de $\theta$	$\langle N \rangle = \sum_i \langle \kappa (\partial_i \theta)^2 \rangle$
$G$	Couplage par gravité	En Boussinesq $G = \alpha g$
$L_D$	Échelle de Kolmogorov	$L_D = (v^3 / \langle \varepsilon \rangle)^{1/4}$
$L_B$	Échelle de Bolgiano	$L_B = \langle \varepsilon \rangle^{5/4} / \langle N \rangle^{3/4} G^{3/2}$

## Dynamique à grande échelle

$\mathbf{X}$	Position	
$\mathbf{K}$	Vecteur d'onde	
$T$	Temps	
$\mathbf{v}, \mathbf{V}$	Champs de vitesse	
$\psi$	Fonction de courant	
$\Theta$	Phase	$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \exp [i \Theta(\mathbf{X}, T)]$
$R_{ij}$	Tenseur de Reynolds	$R_{ij} = \langle v_i v_j \rangle$
$\alpha_{ijk}$	Tenseur AKA	
$N_{ijlm}, \nu_{ijlm}$	Viscosités turbulentes	

## Oscillations magnétiques

$R$	Rayon stellaire	Pour une roAp $R = 1.5 R_\odot$
$V_A$	Vitesse d'Alfvén	Pour une roAp $V_A \simeq 60 \text{ m s}^{-1}$
$\eta$	Rapport d'aspect	Rayon interne / Rayon stellaire
$E$	Viscosité	$E = \nu / R V_A$ , pour une roAp $E = 10^{-13}$
$E_m$	Diffusivité magnétique	$E_m = (\sigma_0 \mu_0 R V_A)^{-1}$ , pour une roAp $E_m = 10^{-8}$
$Y_\ell^m$	Harmonique sphérique de degré $\ell$ , de nombre d'onde azimuthal $m$	
$\mathbf{R}_\ell^m, \mathbf{S}_\ell^m, \mathbf{T}_\ell^m$	Vecteurs de la base harmonique	





# Les grandes échelles de la convection dans la photosphère solaire

## Problématique générale

*Why these distinct scales would be present (and possibly a third intermediate scale mesogranulation) is somewhat of a mystery.*

T. L. Duvall, 188<sup>th</sup> AAS Meeting, 1996

La mise en service dans les années 1990 de télescopes dédiés à l'observation du Soleil, comme SOHO ou TRACE, a en grande partie révolutionné les méthodes d'étude de notre étoile. De la structure interne aux couches externes que sont la photosphère ou la couronne, un ensemble considérable de nouveaux phénomènes a pu être observé, l'exemple le plus marquant étant certainement la découverte de la tachocline solaire et « l'imagerie » de la rotation différentielle dans la zone convective. Grâce notamment à l'amélioration continue des moyens de calcul mis à la disposition de la communauté astrophysique, beaucoup de problèmes de la physique solaire sont également aujourd'hui nettement mieux compris. C'est par exemple le cas de la granulation ou de la dynamique des taches solaires. Bien heureusement pour les scientifiques, de nombreux phénomènes demeurent largement inexplicables. On ne parlera pas ici du problème du cycle d'activité de onze ans du Soleil ni de la génération des champs magnétiques en son sein. Des conférences entières sont encore consacrées à ces questions, qui demeurent parmi les plus difficiles de la physique solaire et stellaire. D'autres problèmes aux dimensions *a priori* plus modestes sont susceptibles d'être résolus dans la prochaine décennie. Cette thèse est consacrée en particulier à l'étude de certains aspects du problème de la génération des écoulements de surface dans la photosphère solaire à des échelles horizontales plus grandes que la granulation solaire (1 000 km) dans le Soleil calme (c'est-à-dire loin des taches solaires, plages



et autres facules). Il s'agit principalement de la mésogranulation (8 000 km) et de la supergranulation (30 000 km).

Si la granulation solaire est connue depuis deux siècles, la découverte des structures méso et supergranulaire est plutôt récente (le début des années 1980 pour la première et les années 1950 pour la seconde). Leur compréhension, quant à elle, est encore très partielle mais, comme nous le verrons tout au long de cette étude, il y a de bons espoirs pour qu'elle s'améliore notablement dans les années à venir. Pour être synthétique, les problèmes essentiels relatifs à ces écoulements sont les suivants :

- Qu'est-ce que la supergranulation ? Quelle est son origine ?
- La mésogranulation existe-t-elle ? Si oui, quelle est son origine ?
- Quelles sont les relations entre ces diverses échelles ? La mésogranulation et la supergranulation sont-elles issues de mécanismes non-linéaires d'interaction de la granulation solaire ?
- Ces écoulements s'étendent-ils en profondeur dans la zone convective ?
- Pourquoi les écoulements dans le Soleil calme nous semblent-ils particulièrement structurés aux trois échelles *distinctes* que sont la granulation, la mésogranulation, et la supergranulation, alors que les couches périphériques de la zone convective sont de toute évidence extrêmement turbulentes et devraient de ce fait générer un *continuum* monotone d'échelles ?
- Quel rôle ces écoulements jouent-ils dans la distribution et la génération des champs magnétiques dans le Soleil calme ? De quelle manière sont-ils influencés par la présence du champ magnétique ?

Comme on peut l'imaginer, certaines de ces questions sont connectées de manière assez forte. Si nous connaissions la réponse à l'une d'elles, nous progresserions sensiblement dans la recherche d'une réponse à certaines autres.

On peut aborder ces problèmes sous trois angles différents : l'amélioration de la précision et de la compréhension des observations, la théorie, et la simulation numérique. Au cours de cette thèse, nous nous sommes principalement consacrés à ces deux derniers points. Bien évidemment, on ne saurait se lancer dans des théories et des simulations sans avoir essayé de comprendre au préalable la nature des phénomènes observés ainsi que les techniques (observationnelles ou numériques) utilisées pour les étudier et les modéliser. C'est pourquoi nous présentons pour commencer ce manuscrit une description non exhaustive mais nous l'espérons suffisamment détaillée de l'état actuel des connaissances observationnelles sur la convection et les champs magnétiques dans le Soleil calme, suivie par une étude détaillée des efforts de modélisation réalisés au cours de ces trente dernières années (chapitre 1). Cette synthèse nous permettra de mieux comprendre

la nature précise des problèmes rencontrés à l'heure actuelle dans l'étude de la mésogranulation et de la supergranulation solaire et fournira des éléments de justification aux différentes approches utilisées dans le cadre de cette thèse pour tenter de les résoudre.

Dans le chapitre 2, nous décrivons ensuite les éléments essentiels du formalisme mathématique utilisé au cours de ce travail pour décrire les mouvements turbulents de fluides stratifiés en densité en présence de champ magnétique.

Une fois ces différentes tâches accomplies, nous détaillons trois approches possibles du problème qui ont été suivies au cours de cette thèse. La première consiste à élaborer une théorie linéaire idéalisée de la supergranulation ainsi que de ses interactions avec le champ magnétique à la surface solaire (chapitre 3). Elle tente en particulier de répondre aux questions suivantes : quel est le modèle linéaire le plus approprié pour décrire des mouvements à des échelles horizontales aussi grandes que la supergranulation ? Quel sont les effets de la stratification en densité et du champ magnétique (deux ingrédients essentiels de la physique des atmosphères stellaires) sur les résultats d'une telle théorie ? Les ordres de grandeurs obtenus par l'intermédiaire de celle-ci sont-ils satisfaisants si on les compare aux observations ? Quelles conclusions pouvons-nous tirer d'un tel modèle pour la supergranulation ?

La deuxième approche est basée sur des simulations numériques directes de turbulence hydrodynamique dans une atmosphère de grand rapport d'aspect (très aplatie) et fortement stratifiée en densité (chapitre 4). De telles simulations permettent de décrire la dynamique d'une vaste gamme d'échelles turbulentes et offrent au fluide une liberté horizontale de mouvement importante. Elles sont susceptibles de nous éclairer sur les mécanismes d'interactions entre ces diverses échelles et sur leur origine physique. Il faut cependant toujours garder à l'esprit que les simulations numériques de turbulence sont loin de permettre d'atteindre les régimes d'écoulement du gaz dans la photosphère solaire, et que les résultats de telles études doivent de ce fait être analysés avec précaution et les conclusions rester fort prudentes. Nous tenterons donc d'identifier les ressemblances entre nos simulations idéalisées et la convection photosphérique afin d'en tirer des conclusions pour les problèmes de la mésogranulation et de la supergranulation, mais aussi – et c'est un point extrêmement important – d'en comprendre les limites. La configuration de la simulation numérique que nous présentons (avec un rapport d'aspect  $A = 42.6$ ) est unique à ce jour et notre expérience peut être rattachée à des problèmes différents de celui de la convection photosphérique. Nous présentons en particulier des résultats susceptibles d'être reliés à des questions actuellement discutées dans le milieu de la convection expérimentale. Le développement du code de simulations magnétohydrodynamiques (MHD) pour les milieux compressibles utilisé pour cette étude, qui a constitué une part importante de ce travail, est présenté dans l'annexe A.

Nous présentons enfin un travail encore préliminaire visant à mieux formaliser les interactions entre l'échelle caractéristique d'un écoulement (par exemple la granulation) et une échelle beaucoup plus grande (la supergranulation) : l'hy-

pothèse de séparation d'échelles est largement utilisée en MHD et en hydrodynamique pure et permet de procéder à des développements asymptotiques intéressants (théories de champ moyen) visant à décrire la stabilité et l'évolution de structures à grande échelle. En MHD, il s'agit par exemple de l'effet  $\alpha$ . En hydrodynamique, il s'agit de l'effet AKA et de la théorie de la viscosité turbulente (chapitre 5). Notons que cette approche s'inscrit dans le cadre plus général de la compréhension et de la paramétrisation des mécanismes de transport turbulent dans les zones convectives stellaires, et que la modélisation de ces mécanismes représente un des défis actuels importants pour des disciplines comme l'astérosismologie, la structure et l'évolution stellaires.

L'organisation logique suivante a été adoptée dans le manuscrit : les motivations des différentes approches utilisées sont systématiquement détaillées au début des chapitres correspondants, tandis que les conclusions propres à chacune de ces approches sont données en fin de chapitre. Nous concluons le manuscrit par une discussion globale sur le travail effectué au cours de cette thèse et sur les conséquences des résultats obtenus pour la compréhension de la mésogranulation, de la supergranulation, et plus généralement de la convection turbulente aux grandes échelles.

Pour terminer, mentionnons que l'annexe B du manuscrit est consacré à la présentation d'une étude des oscillations alfvéniques d'une coquille sphérique de plasma incompressible baignée par un champ magnétique. Ce deuxième projet de recherche a été mené tout au long de ces trois ans en parallèle du sujet principal et trouve sa motivation dans l'astérosismologie des étoiles magnétiques de type roAp. Il ne présente de fait pas de relation directe avec le thème principal de cette thèse, ce qui justifie son report en annexe.



# Chapitre 1 Observations et modèles de la photosphère solaire

*When this work started, we hoped to write the definitive life history of a typical granule. We now know that this is not possible.*

A. M. Title et al., The Astrophysical Journal, 1989

## 1.1 Introduction

Le seul exemple observationnel de convection dans un système astrophysique nous est donné par la surface solaire. Les télescopes solaires nous révèlent en effet au premier coup d'œil le motif de la granulation, qui pave la surface de notre étoile. Au-delà de la granulation, un vaste ensemble de processus magnétohydrodynamiques plus ou moins reliés à la convection forment un continuum d'échelles spatiales et temporelles. Les mesures photométriques, vélocimétriques, mais aussi magnétiques, réalisées depuis plus d'un siècle en attestent. Des plus petites échelles résolues observationnellement aux plus grandes, on peut citer la mésogranulation, la supergranulation, les cellules géantes. Les taches solaires offrent quant à elles un exemple excitant de la diversité des échelles de temps : leur durée de vie peut être importante, et elles présentent des oscillations à courte période.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter une partie des très nombreux résultats relatifs à ces phénomènes (la plupart d'entre eux ont été obtenus dans la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle) et de les analyser dans une perspective de dynamique des fluides. L'objectif est d'obtenir un état des lieux de ces phénomènes astrophysiques fondamentalement complexes, pour lesquels les principes de simplicité s'appliquent malheureusement fort difficilement.

Pour parvenir à nos fins, nous suivrons deux directions : d'une part, les ob-

servations de la dynamique photosphérique, riches et variées en contenu, pas toujours conciliables. D'autre part, les simulations numériques, en plein essor, mais malheureusement toujours limitées à des régimes de paramètres hydrodynamiques astrophysiquement irréalistes. Nous verrons malgré tout à cette occasion les perspectives que l'outil numérique a ouvertes au cours des dernières années.

Avant toute chose, il nous semble indispensable de donner une image générale de l'unité de lieu de ce manuscrit, à savoir la zone convective solaire. Les paragraphes suivants sont consacrés à un compte-rendu des observations puis des simulations qui ont contribué à la construction de cette image. Une synthèse des différents renseignements obtenus par la littérature est entreprise en fin de chapitre.

## 1.2 Phénoménologie de la zone convective du Soleil

### 1.2.a Convection en profondeur

À l'intérieur du Soleil, le transport de l'énergie libérée au centre par les processus nucléaires est assuré par radiation. La zone radiative s'arrête à une profondeur d'environ 200 000 km ( $0.713 R_{\odot}$ ), qui marque le début de la zone convective<sup>1</sup> (Christensen-Dalsgaard et al. 1991, Basu et Antia 1997). En-deçà de cette profondeur, les recombinaisons successives de  $\text{He}^{++}$ , de  $\text{He}^+$  et de l'hydrogène ionisé font augmenter l'opacité du milieu et l'énergie latente du gaz. Le transport radiatif cède alors progressivement sa place à la convection au fur et à mesure qu'on se rapproche de la surface.

Remarque

Le coefficient de diffusion radiative augmente considérablement dans un milieu complètement ionisé. Dans l'approximation de diffusion, le flux radiatif est donné par

$$F_{\nu} = -\kappa_{\nu} \nabla T, \quad (1.1)$$

avec  $\kappa_{\nu} \sim T^3 / K_{\nu}$  où  $K_{\nu}$  est l'opacité (en général l'opacité est notée  $\kappa$  mais cette notation est souvent utilisée en convection pour le coefficient de diffusion thermique). Dans un gaz ionisé, l'opacité est régie par des transitions libre-libre (opacité de Kramers) et est alors proportionnelle à  $T^{-3.5}$ . Pour un gradient de température donné, le flux radiatif varie alors comme  $T^{6.5}$  (Kippenhahn et Weigert 1994), et diminue donc vers l'extérieur de l'étoile.

<sup>1</sup>Une telle précision n'a été atteinte que très récemment grâce à l'avènement de l'héliosismologie, qui a également permis de déterminer le profil de rotation différentielle au sein de la zone convective (Kosovichev et al. 1997).

La recombinaison des ions abaisse significativement le gradient adiabatique et favorise le développement de l'instabilité convective au sens du critère de Schwarzschild ( $\nabla > \nabla_{\text{ad}}$ ). On estime d'autre part à  $10^{23}$  le nombre de Rayleigh dans la zone convective (rapport entre l'intensité de la force d'Archimède, le moteur de la convection, et la diffusion de quantité de mouvement et de chaleur, les freins), ce qui signifie que la convection est extrêmement efficace et génère un profil thermodynamique vertical quasi-isentropique, correspondant à un gradient de température très proche du gradient adiabatique. Le temps de parcours d'une bulle de gaz chaude depuis la base de la zone convective jusqu'à la surface est de l'ordre du mois (voir par exemple Brandenburg et al. 2000).

### 1.2.b Convection photosphérique

Contrairement aux profondeurs de la zone convective, la photosphère (« l'extérieur immédiat » du Soleil) est par définition un milieu optiquement transparent dans lequel le transport de l'énergie s'effectue grâce à la lumière. On observe donc une transition au niveau de cette surface entre le régime convectif et le régime radiatif. Ceci se traduit par le spectaculaire effet de la granulation solaire (figure 1.1) : la radiation refroidit brutalement le gaz chaud et montant dans la zone convective et donne ainsi une vigueur très importante à la convection, qui se manifeste sous la forme d'un ensemble de cellules au centre desquelles le gaz chaud et brillant monte, puis s'étend horizontalement, avant de redescendre, après refroidissement, de manière très turbulente dans les zones sombres dites intergranulaires (*intergranular lanes*). La diffusion radiative à la surface est le principal obstacle à la convection, dans le sens où la photosphère supérieure est un milieu stablement stratifié, mais c'est aussi un moteur, puisque le refroidissement rend la convection très active à la surface.

À la granulation se superposent la supergranulation (figure 1.2), à laquelle on attribue habituellement une échelle horizontale de l'ordre de 30 000 km et (peut-être) la mésogranulation (figure 1.3), qui aurait une échelle intermédiaire entre granulation et supergranulation. Ces deux structures sont entre autres responsables de l'advection du motif de la granulation. Finalement, il est possible que des écoulements à plus grande échelle encore existent, comme par exemple les cellules géantes (résultats observationnels marginaux).

## 1.3 Une (brève) histoire de l'observation de la dynamique photosphérique

Dans ce paragraphe, nous proposons un panorama des observations de la surface solaire, et tout particulièrement des structures comme la granulation, la mésogranulation, la supergranulation ainsi que des structures magnétiques associées. Pour commencer nous donnons une description sommaire des différentes



FIG. 1.1 – Cliché de la granulation solaire telle qu'elle apparaît en lumière visible, mettant en évidence des zones sombres et étroites correspondant au gaz froid descendant et des panaches clairs et chauds montants. L'échelle caractéristique des granules est de l'ordre de 1 000 km (paragraphe 1.3.b). Image réalisée avec le réflecteur de 48 cm de la coupole tourelle du Pic du Midi.

méthodes utilisées et des informations physiques auxquelles elles permettent de remonter.

### 1.3.a Méthodes d'observation et d'analyse

#### Photométrie

Les images en lumière blanche ou dans l'infrarouge constituent la plus ancienne technique d'observation de la surface solaire. Elles permettent d'étudier des structures thermiques et vélocimétriques. Le suivi (*tracking*) des structures apparentes (comme les granules) par corrélation d'images successives permet alors de calculer les champs de vitesse horizontaux responsables de l'advection de ces structures. On peut citer dans ces méthodes la LCT (*Local Correlation Tracking*) et la CST (*Coherent Structure Tracking*). Les avantages et inconvénients de ces différentes méthodes sont détaillés dans Roudier et al. (1999), Rieutord et al. (2000).

#### Dopplergrammes

Les dopplergrammes permettent uniquement d'obtenir des informations sur les champs de vitesse, puisque par définition, le signal qu'ils renvoient est directement proportionnel au champ de vitesse suivant la ligne de visée. Ils ont entre autres permis de découvrir la supergranulation (Hart 1954). L'instrument

## Average Dopplergram Minus Polynomial Fit

45 images averaged (30-Mar-96 19:26 to 30-Mar-96 20:17)



FIG. 1.2 – Visualisation du motif de la supergranulation solaire à partir d'un dopplergramme obtenu par l'instrument MDI sur le satellite SOHO, mettant en évidence une circulation de gaz à l'échelle de 30 000 km (paragraphe 1.3.c), responsable de l'advection des granules solaires.

MDI (Scherrer et al. 1995) à bord de SOHO a notamment permis ces dernières années d'obtenir des informations détaillées sur la structure des champs de vitesse par cette technique. La LCT est couramment utilisée pour analyser des dopplergrammes, mais de nouvelles méthodes d'héliosismologie locale comme l'analyse « temps-distance » (Duvall et al. 1997) ont vu le jour avec SOHO. L'analyse temps-distance permet entre autres de déterminer des champs de vitesses moyens à la surface en calculant la différence de temps de parcours entre deux points pour deux ondes sonores se propageant en sens opposé.

### Magnétogrammes et spectrohéliogrammes associés

En parallèle des observations photométriques et vélocimétriques se situent les observations des structures magnétiques. Plusieurs approches sont utilisées. Celles basées sur la polarisation associée à l'effet Zeeman (par exemple sur la raie FeI à 525 nm) donnent la composante suivant la ligne de visée des champs d'intensité importante (de l'ordre de quelques dizaines de Gauss au minimum). Des spectrohéliogrammes utilisant la signature des ions  $\text{Ca}^+K$  ( $\lambda = 393.3$  nm)



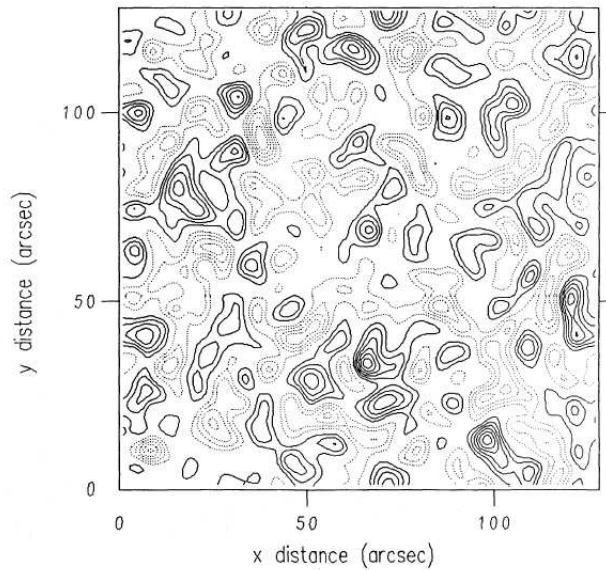


FIG. 1.3 – Carte de divergence horizontale du champ de vitesse moyenné sur plusieurs dizaines de minutes, obtenue par November et Simon (1988) par *local correlation tracking*. L'échelle caractéristique des motifs obtenus est de l'ordre de 8 000 km, ce qui correspond à la mésogranulation (voir paragraphe 1.3.d).

piégés par le champ magnétique quelques milliers de kilomètres au-dessus de la photosphère permettent de leur côté de remonter à la distribution spatiale de champs magnétiques (voir par exemple Schrijver et al. (1997)). À partir de cartes de ces structures magnétiques, il est également possible d'utiliser les techniques de corrélation évoquées plus haut (voir par exemple Lisle et al. 2000).

### 1.3.b Données relatives à la granulation

On connaît depuis longtemps la taille caractéristique des granules. Historiquement, c'est W. Herschel, en 1801, qui le premier donna une description du phénomène qu'il présenta comme un ensemble de « grains de riz ». Janssen (1896) estima la taille de ces grains entre 750 et 1 500 km. Chevalier (1908) donna ensuite une valeur remarquable pour la durée de vie des granules de cinq minutes (un historique intéressant de l'évolution des mesures de la granulation est présenté dans Spruit et al. (1990)). Les observations vélocimétriques et photométriques de la deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle, plus fiables, n'ont pas contredit ces résultats, bien au contraire (voir par exemple Bray et al. 1984). Le groupe de Princeton a évalué la durée de vie moyenne à 8 minutes (Bahng et Schwarzschild 1961) et dans une revue sur le phénomène, Leighton (1963) a conclu à des cellules de taille 2 000 km, avec des bords sombres de l'ordre de 300 km, mettant en évidence l'asymétrie entre les écoulements montant et descendant.

Il serait possible de donner des centaines de références d'observations sur la granulation, tant ce phénomène a été étudié. Dans ce domaine (et contrairement

au cas des phénomènes qui seront décrits plus loin), les différents observateurs s'accordent plutôt bien. Nous nous contenterons donc de citer une dernière étude assez récente, celle de Title et al. (1989). Leurs observations aboutissent à des vitesses granulaires entre  $0.5$  et  $1.4 \text{ km s}^{-1}$ , à des tailles de  $1\,000 \text{ km}$ , et à des durées de vie de  $10$  minutes.

Remarquons au passage qu'il existe une dispersion importante dans les différentes mesures, qui nous montre de toute évidence le rôle fondamental de la turbulence dans ce milieu.

### 1.3.c La dynamique de la supergranulation

#### Observations historiques

Après que la granulation eut été identifiée comme un processus convectif distinct, l'augmentation dans la précision des mesures permit de mettre en évidence de nouveaux phénomènes à la surface<sup>2</sup>. Hart (1954) fut la première à mettre en évidence ce qui est désormais connu sous le nom de supergranulation. Par des techniques de corrélation de mesures Doppler, elle donna une taille caractéristique pour les supergranules de  $75\,000 \text{ km}$ , avec des vitesses horizontales de l'ordre de  $170 \text{ m s}^{-1}$ . Dans Hart (1956), une valeur plus précise de  $26\,000 \text{ km}$  fut proposée, mais l'auteur insista sur la grande dispersion autour de cette valeur. Sa découverte fut alors étudiée par Leighton et al. (1962) puis Simon et Leighton (1964) qui confirmèrent les résultats et donnèrent des valeurs de  $32\,000 \text{ km}$  et une vitesse horizontale de  $300 \text{ m s}^{-1}$ . Leur analyse se basait à la fois sur la corrélation de dopplergrammes, sur l'analyse de la répartition des champs magnétiques dans le Soleil calme, et sur l'observation du réseau chromosphérique  $\text{Ca}^+\text{K}$ . La conclusion de ces articles fondateurs est la remarquable coïncidence entre ces différents phénomènes. En outre, ces auteurs affirmèrent que la supergranulation pavait complètement la surface du Soleil, et soulignèrent que le motif vélocimétrique était principalement horizontal (cette observation est renforcée par le fait que le signal issu des dopplergrammes devient insignifiant à proximité du centre du disque solaire (visible sur figure 1.2), là où le décalage spectral est principalement dû à la vitesse verticale).

Dans les années 1970, magnétogrammes et vélocimétrie furent utilisés de manière complémentaire pour déterminer les propriétés de la supergranulation. Citons les travaux de Worden et Simon (1976) qui proposèrent une durée de vie (basée sur des corrélations d'images Doppler) proche de  $36$  heures et déterminèrent des champs de vitesse verticaux seulement en bordure des supergranules, tout comme Frazier (1970).

Comme le souligna Worden (1975b), il n'existe quasiment pas de traces photométriques de la supergranulation. Diverses tentatives durant cette période n'aboutirent pas de manière convaincante : les contrastes de lumière entre périphé-

---

<sup>2</sup>Même si elles ne concernent pas directement ce travail, on peut donner l'exemple des oscillations sonores de cinq minutes du Soleil, si bien connues aujourd'hui. Cette découverte a été publiée par Leighton et al. (1962).

rie et centre des supergranules ne semblent pas dépasser 5 % (Worden 1975a), du moins dans l'infrarouge, alors que des variations d'intensité r.m.s. propres à la granulation de l'ordre de 20 % ont été observées par l'instrument SOUP (Spruit et al. 1990).

### Histoire contemporaine

Notre connaissance des propriétés de la supergranulation (et des échelles supérieures à celle de la granulation en général) a considérablement évolué au cours des vingt dernières années. Dans les années 1980, des techniques de suivi des granules (November 1986) ont vu le jour, qui permettent de déterminer le champ de vitesse responsable de l'advection des granules<sup>3</sup>. Enfin, les récentes observations de l'instrument MDI ont apporté leur lot de nouvelles interrogations sur l'origine physique du phénomène.

Wang et Zirin (1989) ont montré que la durée de vie d'un supergranule était fortement dépendante de la méthode utilisée pour la calculer. Dans cet article, une détermination basée sur le suivi de structures magnétiques aboutit à une dizaine d'heures, le temps de corrélation issu des dopplergrammes à 20 heures, tandis que les comptages directs de supergranules s'accordent plutôt sur deux jours. En outre, une borne supérieure sur la vitesse verticale du plasma dans les supergranules de  $0.1 \text{ km s}^{-1}$  est avancée, tandis que la taille caractéristique de ces structures  $y$  est estimée à 31 000 km, avec des champs de vitesse horizontaux compris entre  $0.3$  et  $0.5 \text{ km s}^{-1}$  (Title et al. (1989) ont donné une valeur de  $370 \text{ km s}^{-1}$ ). Hagenaar et al. (1997) ont obtenu la même taille par des mesures de corrélation mais ont trouvé un diamètre plus proche de 16 000 km grâce à des observations du réseau chromosphérique, confirmant encore la dépendance entre le résultat obtenu et la méthode utilisée. Notons que cette disparité des résultats, que l'on retrouve d'un auteur à l'autre, est en partie responsable de notre mauvaise compréhension du phénomène, puisqu'ils ne permettent pas d'infirmer ou de confirmer les différentes théories.

De leur côté, Hathaway et al. (2000, 2002), en calculant le spectre de puissance en harmoniques sphériques des dopplergrammes (figure 1.5) de MDI, ont mis en évidence l'existence de deux pics d'énergie cinétique, un à l'échelle de la granulation ( $\ell > 1\,000$ ) et un autre à l'échelle de la supergranulation ( $\ell = 120, 30\,000 \text{ km}$ ). Hathaway et al. (2002) ont par ailleurs donné une nouvelle estimation des vitesses verticales associées aux supergranules de  $30 \text{ m s}^{-1}$ , contre  $300 \text{ m s}^{-1}$  pour le champ de vitesse horizontal.

DeRosa et al. (2000) et DeRosa (2001), en utilisant une méthode d'identification directe des supergranules basée sur la mesure de la divergence du champ de vitesse, ont obtenu de nouveaux résultats. Ils soulignent une nouvelle fois que les supergranules sont avant tout des structures vélocimétriques, et proposent un temps de vie de 20 heures en moyenne, avec des structures persistantes à des

---

<sup>3</sup>Ces techniques, par rapport aux dopplergrammes, permettent de reconstruire les champs de vitesse horizontaux même au centre du disque solaire.

temps de 36 heures. Mais, de manière similaire à Hagenaar et al. (1997), le résultat semble dépendre de l'algorithme de réduction utilisé. Selon eux, des diamètres supergranulaires de 13 000 à 18 000 km peuvent également être obtenus, avec des temps de vie associés de 16 heures. Shine et al. (2000) ont confirmé grâce à MDI la persistance de supergranules à des temps supérieurs à 45 heures.

En parallèle de ces recherches, les techniques d'héliosismologie locale ont fait leur apparition dans les années 1990. Duvall et Gizon (2000) ont montré en particulier grâce à l'analyse temps-distance de modes  $f$  (modes de gravité de surface) que la distribution méridienne de vorticité associée aux échelles supergranulaires ( $\ell = 120$ ) était clairement influencée par la force de Coriolis. La problématique de l'interaction entre rotation et supergranulation avait déjà été évoquée par Snodgrass et Ulrich (1990) qui avaient trouvé que le motif supergranulaire tournait environ 2 % plus vite que le réseau magnétique qui est structuré à des échelles similaires (voir paragraphe 1.3.e), ce qu'ont confirmé Duvall et Gizon (2000). Enfin Gizon et al. (2003) ont mis récemment en évidence une composante ondulatoire dans le champ de vitesse de la supergranulation, avec un excès de puissance dans la direction prograde, expliquant ainsi le taux de rotation anormalement élevé de la supergranulation. La période de cette onde serait d'environ sept jours, bien plus longue que la durée de vie du supergranule en lui-même. Ils ont alors envisagé que la supergranulation soit une manifestation de la convection oscillante, caractéristique des systèmes affectés par un champ magnétique ou par la rotation, bien que la taille caractéristique et la durée de vie caractéristique des supergranules, elle, ne semble pas influencée par la rotation (Beck 1997). Le résultat de Gizon et al. (2003) a cependant été remis en cause très récemment par Rast et al. (2004), qui proposent une explication alternative à un phénomène ondulatoire. Finalement, comme le montre la figure 1.4, l'héliosismologie locale semble montrer que la supergranulation n'est pas observable à des profondeurs supérieures à 2 000 km (Duvall et al. 1997) et serait donc essentiellement un écoulement de surface.

### 1.3.d Le problème de la mésogranulation

Avant de refermer cet historique des mesures vélocimétriques, remontons légèrement le temps pour revenir au début des années 1980. La polémique scientifique qui est née à cette époque à propos de la mésogranulation solaire (et qui est toujours d'actualité) est en effet un réservoir potentiel de renseignements susceptibles de nous aider à mieux appréhender ces différents phénomènes.

November et al. (1981), grâce à la technique d'autocorrélation d'images Doppler, ont mis en évidence un nouveau phénomène dynamique dans la photosphère, la mésogranulation, avec une échelle horizontale de 8 000 km environ, qui semblait faire le lien entre la granulation et la supergranulation, et consacrait les théories convectives de la supergranulation (cf. paragraphe 1.5.b). De nouvelles mesures ont ensuite été effectuées à partir des données de l'instrument SOUP sur Spacelab 2, en utilisant la technique de *tracking*, qui ont renforcé cette découverte

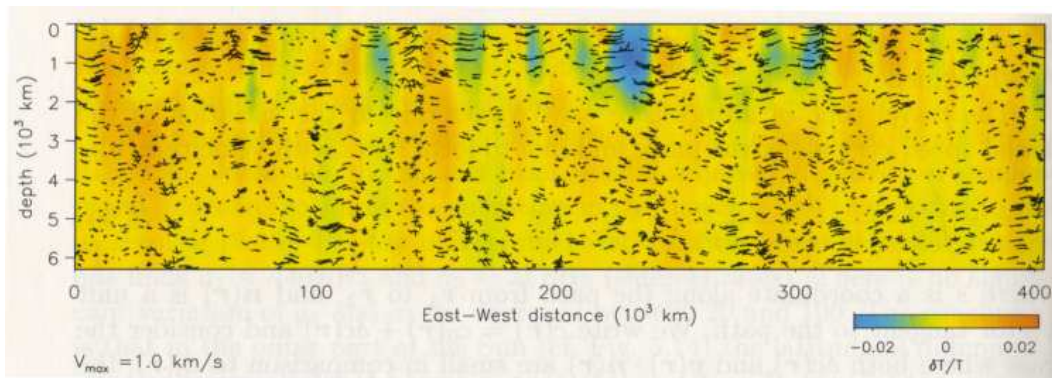


FIG. 1.4 – Perturbations de température et écoulement à l'échelle supergranulaire dérivés en utilisant la méthode temps-distance. Le motif de la supergranulation est visible principalement dans les 2 000 premiers kilomètres sous la surface (image tirée de Stix (2002), travail publié initialement par Duvall et al. (1997)).

(November et Simon 1988, Title et al. 1989). Une séquence de trois heures réalisée au Pic du Midi et analysée par Muller et al. (1992) a donné une durée de vie de l'ordre de trois heures pour ces structures qui semblent advectées par le champ de vitesse supergranulaire. Des modèles cinématiques ont été proposés par Simon et Weiss (1989), Simon et al. (1991) pour explorer les relations entre les granules dits explosifs (granules d'intensité anormale) et la mésogranulation. Cette approche a alors montré que les mésogranules ne pouvaient pas émerger d'une assemblée décorrélée de granules explosifs, mais qu'en revanche, une succession d'explosions corrélées permettait en partie de reconstruire le champ de vitesse « mésogranulaire » (là encore, soulignons la forte relation avec l'image classique de la turbulence). Par la suite, November (1994) a affirmé que la mésogranulation correspondait en fait au champ de vitesse vertical de la supergranulation. De son côté, Wang (1989) a avancé que le spectre de puissance ne présentait pas de maximum à une telle échelle. Chou et al. (1991) ont présenté des résultats similaires, avant d'affirmer qu'un pic était bel et bien présent sur des données avec un meilleur seeing (Chou et al. 1992).

Comme nous l'avons évoqué plus haut, les spectres de puissance de la surface solaire réalisés par Hathaway et al. (2000) à partir des images de MDI, ont mis en évidence une continuité dans les échelles dynamiques. En particulier, la figure 1.5 tirée de Hathaway et al. (2000), n'exhibe pas de pic d'énergie cinétique à l'échelle de la mésogranulation. Un modèle simple à deux composantes (granules et supergranules) présenté dans cet article permet d'autre part de reproduire le spectre observé. Straus et Bonaccini (1997) ont également étayé par des analyses spectrales ce qu'on pourrait appeler la « théorie du continuum » (*i. e.* la mésogranulation en tant qu'extension turbulente de la granulation), puis Roudier et al. (1999), Rieutord et al. (2000) ont suggéré que le phénomène de la mésogranulation était en fait un artefact de la méthode de *tracking* utilisée, ce qu'ont contesté partiellement Shine et al. (2000). En utilisant la LCT sur un grand champ filmé

pendant 45 heures par MDI, ils ont trouvé que des mésogranules de taille comprise entre 4 000 et 7 000 km étaient advectés à des vitesses proches de  $700 \text{ m s}^{-1}$ . Leur durée de vie serait alors de 3 à 6 heures. Lawrence et al. (2001) ont tenté d'utiliser une nouvelle technique par analyse en ondelettes des images de MDI et ont trouvé deux pics d'énergie à des échelles granulaires (2 000 km) et mésogranulaires (4 000 km) similaires à celles obtenues par les techniques de *tracking*, ainsi qu'une composante vélocimétrique turbulente « non cellulaire » plus conforme aux spectres de puissance calculés et aux arguments de Rieutord et al. (2000). Selon Lawrence et al. (2001), les techniques spectrales ne sont pas adéquates pour identifier la mésogranulation car elles ne prennent pas en compte la « forme » des structures observées, un argument déjà évoqué par Nordlund et al. (1997) dans un autre contexte.

Enfin, une analyse récente de Roudier et al. (2003) a mis en évidence que les mésogranules semblaient en réalité être la manifestation de la corrélation temporelle de granules explosifs (*trees of fragmenting granules*) de divergence plus puissante que la moyenne des granules. Faut-il alors parler d'échelles privilégiées dans le spectre ? Les tenants de la thèse de la turbulence et ceux de la thèse des échelles discrètes semblent aujourd'hui se diriger vers un compromis bien illustré par les résultats de Lawrence et al. (2001).

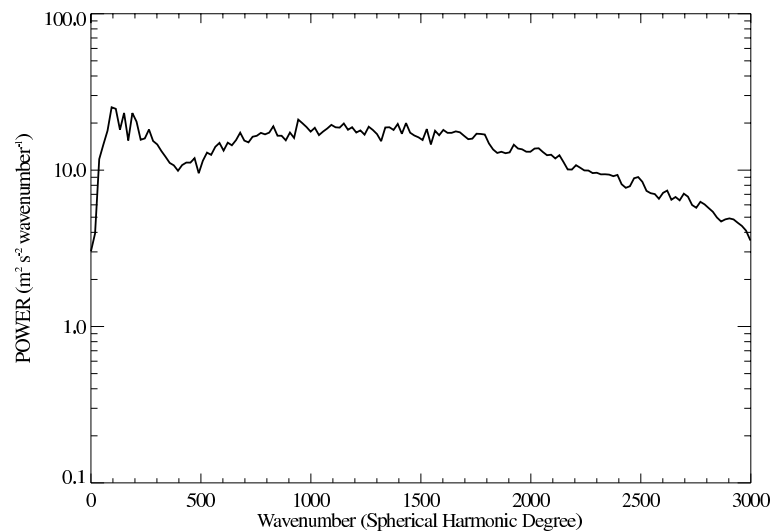


FIG. 1.5 – Spectre de puissance de la convection solaire réalisé à partir de mesures Doppler (Hathaway et al. 2000). Le motif principal centré sur  $\ell = 1\,500$  est dû à la granulation. Le pic secondaire à  $\ell = 120$  correspond quant à lui à la supergranulation.

### 1.3.e Magnétisme et dynamique dans la photosphère

Moins polémique que la mésogranulation mais tout aussi intéressant est le problème de la distribution des champs magnétiques dans la photosphère. Nous

allons ici tenter de décrire les relations observées entre structures magnétiques et dynamique photosphérique, déjà évoquées dans les paragraphes précédents pour déterminer la taille des supergranules. De telles informations peuvent en effet nous éclairer sur le rôle du champ magnétique dans la structuration de la dynamique, en particulier aux grandes échelles. Les deux points qu'il nous paraît important de souligner dans ce paragraphe sont les suivants : l'étude des champs qui composent le réseau magnétique et la mesure des champs dits intra-réseau.

La découverte du réseau chromosphérique  $\text{Ca}^+\text{K}$  (spectrohéliogrammes) date de Deslandres (1899). Leighton et al. (1962), Simon et Leighton (1964), en menant une étude comparée entre magnétogrammes, spectrohéliogrammes et dopplérogammes, ont mis en évidence une forte relation entre ce réseau, la distribution des champs magnétiques, et leur supergranulation. Les observateurs étudient attentivement les similarités entre ces structures, mais aussi leurs différences. Si les relations entre réseau magnétique et réseau chromosphérique semblent bien établies (ce qui fait qu'on les utilise tous deux de manière complémentaire comme traceurs de la supergranulation), les interactions entre le champ magnétique et la supergranulation elle-même sont certainement complexes.

Le réseau magnétique est un ensemble de points « brillants », identifiés comme des tubes de flux de plusieurs centaines de Gauss (Zwaan 1987, Martin 1988, Solanki 1993), qui se regroupent principalement en périphérie des supergranules (Simon et al. 1988), dans les zones d'écoulement descendant. L'hypothèse émise par Simon et Leighton (1964) selon laquelle les champs sont passifs au niveau de la dynamique permet de rendre compte en première approximation des observations. Cependant, plusieurs auteurs ont également insisté sur le comportement non cinématique de ces champs et sur leurs effets coercitifs à l'échelle des supergranules (Zwaan 1987, November et Simon 1988).

Certaines différences sont visibles entre supergranulation et réseau magnétique, en particulier l'écart de 2 % entre les taux de rotation de ces deux structures. Il faut souligner aussi que le réseau magnétique ne permet pas de « dessiner » complètement la périphérie des supergranules, se concentrant préférentiellement dans les vertex intenses. Enfin, les mesures de durée de vie et de taille de supergranules dérivées à partir de magnétogrammes ou du réseau chromosphérique (voir plus haut Wang et Zirin (1989), Schrijver et al. (1997), Hagenaar et al. (1997)) ne sont pas complètement compatibles avec celles basées sur les observations vélocimétriques, puisqu'elles semblent donner des valeurs plus petites pour ces deux observables.

Lisle et al. (2000) ont cependant montré en utilisant MDI que les techniques de *tracking* pouvaient être adaptées aux éléments du réseau magnétique, alors qu'elles étaient principalement utilisées au préalable sur des structures vélocimétriques de type granule/mésogranule. Leurs résultats sont en très bon accord avec les résultats de *tracking* traditionnel, avec des vitesses horizontales pour les points du réseau de  $350 \text{ m s}^{-1}$ . Krijger et Roudier (2003) ont obtenu des résultats similaires avec les données du satellite TRACE, mettant en évidence la formation du réseau par l'intermédiaire de l'écoulement dans les supergranules.

Les champs intra-réseau peuplent l'intérieur des supergranules. Leur intensité, faible, est difficile à mesurer par effet Zeeman, puisque la séparation des raies n'est pas assurée pour les champs faibles. Ils ont été découverts par Livingston et Harvey (1975). Des valeurs caractéristiques pour ces champs sont de l'ordre de quelques dizaines de Gauss (Martin 1988, Keller et al. 1994, Lin 1995). Leur structure spatiale consiste de polarités mixtes réparties avec une échelle caractéristique de quelques milliers de kilomètres. Enfin, très récemment, les travaux de Domínguez Cerdeña (2003), Roudier et Muller (2004) et des observations réalisées sur le télescope solaire de La Palma ont mis en évidence une distribution de champs magnétiques à des échelles mésogranulaire et même granulaire.

Ce rapide tour d'horizon des propriétés magnétiques de la dynamique photosphérique conclut notre étude des observations de la surface du Soleil. Dans le paragraphe qui suit, nous tentons de faire le point sur les simulations numériques réalisées au cours des trente dernières années en complément de ces observations.

## 1.4 Expériences numériques sur la convection turbulente

En dépit des limitations techniques évidentes de l'outil informatique, l'ensemble des études numériques a tout de même permis d'améliorer considérablement notre compréhension de la convection solaire. Avant de nous intéresser aux expériences à grand rapport d'aspect<sup>4</sup> directement reliées à ce travail de thèse, nous effectuons un relevé des connaissances acquises sur la physique de la convection en milieu fortement stratifié par l'intermédiaire de simulations à rapport d'aspect petit ou modéré. Un tel exercice est à la fois nécessaire pour obtenir l'état de l'art dans ce domaine et utile pour le développement « concret » d'un code de simulations comme celui présenté en annexe A.

### 1.4.a Les pionniers

Les premières simulations numériques de mécanique des fluides (et plus particulièrement de convection, champ auquel nous nous limiterons ici), ont vu le jour dans les années 1970, et elles ont rapidement commencé à être utilisées dans le cadre astrophysique. Graham (1975), Graham et Moore (1978) ont été les premiers à effectuer des simulations bidimensionnelles de convection en milieu stratifié (leur code a par la suite été réutilisé et développé par d'autres chercheurs). Ils ont montré que les rouleaux de convection dans un tel milieu présentaient une asymétrie haut-bas, avec en particulier un décalage du centre des rouleaux vers le bas de l'atmosphère. Le nombre de Rayleigh était dix fois supercritique dans

---

<sup>4</sup>on définit le rapport d'aspect d'une simulation comme étant le rapport entre les dimensions horizontale et verticale du domaine étudié.



leurs expériences. Massaguer et Zahn (1980) puis Toomre et al. (1982) ont ensuite tenté une résolution numérique d'un modèle d'atmosphère anélastique tronqué à deux ou trois modes horizontaux, avec un certain succès, puisqu'ils ont mis en évidence le phénomène d'inversion de densité (en anglais, *buoyancy braking*). Mentionnons également les simulations 2D de Chan et al. (1982) assez similaires à celles de Graham (1975).

Les travaux cités ci-dessus ne permettaient pas d'obtenir des modèles « réalistes » de convection turbulente, en raison des régimes de paramètres explorés. En effet, que conclure d'une simulation avec un nombre de Rayleigh dix fois critique, ou d'un modèle à trois modes, lorsqu'on regarde la richesse d'un spectre réel de turbulence ?

Deux voies ont alors été explorées : la première, principalement suivie par le groupe de Nordlund à Copenhague, s'est attachée à pousser le réalisme des ingrédients physiques au maximum. La seconde, dans l'esprit des simulations de Graham (1975), s'est limitée à des modèles d'atmosphère simplifiés (principalement des polytropes) avec des conditions aux limites idéalisées. C'est la voie choisie par les groupes américains de Chicago et Boulder, et par le groupe de Cambridge. Le tableau 1.1 donne une liste représentative des efforts engagés par la communauté astrophysique dans la modélisation numérique de la convection.

### 1.4.b Propriétés des modèles détaillés de la granulation

Certaines simulations prennent aujourd'hui en compte transfert de rayonnement, ionisation, équations d'état réalistes, lois de comportement fluides non triviales, ainsi que des conditions aux limites pertinentes (parois ouvertes, refroidissement radiatif, etc.). Une première approche 3D ( $32 \times 32 \times 32$ ) a été réalisée par Nordlund (1982), prolongée par Stein et Nordlund (1989) avec une résolution double, sur une zone convective de rapport d'aspect 2.5. Ils ont observé que le motif de la granulation apparaissait avant tout à la surface où un refroidissement radiatif important était imposé, alors que l'explication classique considérait ces cellules comme des modes de convection similaires aux hexagones de Rayleigh-Bénard. En profondeur, leurs panaches convectifs se collent entre eux pour donner naissance à des structures de taille croissante. Cette observation est à noter dans le contexte de la génération des grandes échelles de la turbulence.

Plus récemment, Stein et Nordlund (1998) ont confirmé ces résultats sur des résolutions bien plus importantes (cf. tableau 1.1). Dans cet article, de nombreux profils thermodynamiques illustrant très nettement la suradiabaticité de la couche de surface mettent en évidence la granulation comme un phénomène superficiel principalement relié au refroidissement radiatif, alors que les couches profondes fortement mélangées présentent un profil quasi-isentropique. Leurs résultats soulignent l'influence de la stratification sur l'extension horizontale des granules et la vitesse du fluide dans les granules (l'échelle de hauteur de densité est de l'ordre de 150 km immédiatement sous la surface, et l'extension horizontale des granules vaut environ 1 000 km).

Groupe	Type de simulation	Résolution	<i>A</i>
Chan et al. (1982)	Polytrophe (LES)	2D 52 × 72	2
Hurlburt et al. (1984)	Polytrophe	2D 41 × 161	6
Stein et Nordlund (1989)	Atmosphère détaillée (LES)	3D 63 × 63 × 63	2.5
Chan et Sofia (1989)	Polytrophe (LES)	3D 46 × 28 × 28	1.5
Cattaneo et al. (1990)	Polytrophe	2D 128 × 512	4
Malagoli et al. (1990)	Polytrophe (PPM)	3D 56 × 96 × 96	4
Cattaneo et al. (1991)	Polytrophe	3D 96 × 96 × 96	6
Porter et Woodward (1994)	Polytrophe (PPM)	2D 256 × 1 024	4
Matthews et al. (1995)	Polytrophe avec <b>B</b>	3D 25 × 16 × 16	2
Chan et Sofia (1996)	Polytrophe (LES)	3D 100 × 137 × 137	1.5
Brummell et al. (1996)	Polytrophe	3D 130 × 256 × 256	4
Stein et Nordlund (1998)	Atmosphère détaillée (LES)	3D 63 × 253 × 253	3
Tao et al. (1998)	Polytrophe avec <b>B</b>	3D 82 × 256 × 256	8
Elliott (2000)	Polytrophe (LES)	3D 64 × 256 × 256	4
Cattaneo et al. (2001)	Boussinesq	3D 96 × 1 024 × 1 024	20
Brummell et al. (2002)	Polytrophe	3D 575 × 512 × 512	2.5
Weiss et al. (2002)	Polytrophe avec <b>B</b>	3D 82 × 256 × 256	8
Rieutord et al. (2002)	Atmosphère détaillée (LES)	3D 82 × 315 × 315	10
DeRosa et al. (2002)	Coquille sphérique (LES)	3D 128 × 512 × 1 024	75
Cattaneo et al. (2003)	Boussinesq avec <b>B</b>	3D 96 × 1 024 × 1 024	20

TAB. 1.1 – Résumé des paramètres utilisés dans différentes simulations de convection astrophysique réalisées dans les vingt dernières années, avec ou sans champ magnétique (liste non exhaustive). *A* est le rapport d'aspect de la simulation. L'emploi de méthodes numériques « spéciales » est indiqué entre parenthèses (LES=*Large Eddy Simulations*, PPM=*Piecewise Parabolic Method*). En absence d'une telle mention, il s'agit de Simulations Numériques Directes (DNS).

À ce jour ces simulations constituent certainement le modèle le plus réaliste de convection photosphérique réalisé, puisqu'un excellent accord avec les observations est obtenu, que ce soit au niveau de la taille caractéristique des structures obtenues, de l'amplitude des fluctuations thermodynamiques, ou de la modification de certains profils de raies sous l'effet de la convection. Notons en revanche que la dynamique turbulente obtenue dans ces simulations est limitée, puisque les corrélations d'ordre élevé obtenues ne sont pas satisfaisantes. De l'article de 1982 au produit final publié en 1998, le groupe de Nordlund aura toutefois consacré seize ans à la compréhension détaillée de la granulation, ce qui montre à quel point les investigations numériques peuvent s'avérer délicates et complexes à mettre en œuvre.

### 1.4.c Propriétés des simulations d'atmosphères polytropiques

Parallèlement à ces investigations, d'autres groupes ont considéré des modèles « idéalisés » d'atmosphères polytropiques fortement stratifiées, dans l'approximation de diffusion (les équations utilisées dans ce type de simulation sont données au chapitre 2, paragraphe 2.3).

#### Inversion de densité, flux d'énergie

Hurlburt et al. (1984) ont confirmé les résultats de Graham (1975) et Massaguer et Zahn (1980) sur des simulations 2D avec des nombres de Rayleigh jusqu'à 1 000 fois critique, une résolution verticale de 41 points et horizontale de 161 points, et un rapport d'aspect 4. En plus de la confirmation du phénomène d'inversion de densité, ils ont obtenu des informations quantitatives sur l'asymétrie entre les panaches montants et descendants (voir plus bas), expliqué en détail l'équilibre des forces dans la dynamique de ces structures, et caractérisé l'influence précise de la stratification sur les flux énergétiques au travers de l'atmosphère. Parmi leurs résultats, soulignons la mise en évidence d'un flux cinétique net descendant (en relation avec la vigueur des panaches descendants) et d'un flux convectif total positif (grâce au flux d'enthalpie), ainsi que l'apparition d'un profil de température isentropique stationnaire dans le régime non-linéaire, relié à l'efficacité du mélange convectif. De ce point de vue, leurs simulations se rapprochent beaucoup de celles de Stein et Nordlund (1989).

Remarque

Inversion de densité (*buoyancy braking*)

Dans un milieu compressible, une perturbation de densité  $\delta\rho$  est la composition d'une perturbation de pression  $\delta p$  et de température  $\delta T$ . Pour un gaz parfait, on peut linéariser selon

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta T}{T}, \quad (1.2)$$

Que ce soit au niveau des panaches montants ou descendants, la fluctuation de pression est toujours positive, puisque les rouleaux de convection « appuient » sur ces panaches sous l'effet de la force centrifuge. En revanche, la fluctuation de température peut être soit positive, soit négative, selon qu'il s'agit d'un panache montant (fluide plus chaud que la moyenne) ou descendant (fluide plus froid). Dans le cas d'un panache descendant, les deux fluctuations interfèrent positivement au sens où toutes deux accentuent la surdensité de la bulle. Dans le cas d'un panache montant, une fluctuation de densité initialement négative peut devenir positive si les effets de pression contrebalancent ceux de la température. On arrive à la conclusion qu'une bulle plus dense que son environnement peut monter si elle possède initialement une vitesse verticale suffisante. Les effets de pression agissent alors comme un frein à la poussée d'Archimède. Réciproquement, dans un tel milieu, les surdensités initiales sont accentuées par la pression, ce qui a pour conséquence d'accélérer le fluide et accroît la turbulence dans son voisinage. On explique ainsi l'asymétrie entre les panaches montants relativement laminaires et les écoulements descendants turbulents dans la convection compressible. Le rôle de la pression y est donc *dynamique*.

Dans le cas d'un milieu incompressible (un liquide s'écoulant à faible nombre de Mach par exemple), en revanche, la fluctuation de densité est simplement reliée à la fluctuation de température par un coefficient de dilatation  $\alpha$  tel que  $\delta\rho = -\alpha\rho\delta T$ . Aucune asymétrie comparable au cas compressible ne peut se manifester puisque la force centrifuge n'a pas d'influence sur les perturbations thermiques.

Les modèles polytropiques ont été largement étendus à des problèmes tridimensionnels plus réalistes. Chan et Sofia (1986, 1989), Cattaneo et al. (1991), Chan et Sofia (1996) ont ainsi étudié le transport de l'énergie dans une zone 3D fortement stratifiée. Selon Cattaneo et al. (1991), les flux enthalpique et cinétique liés aux écoulements descendants caractérisés par une échelle spatiale de l'ordre de l'épaisseur de la couche de fluide se compensent, si bien que ces structures ne contribuent pas en moyenne au transport convectif de l'énergie. Le transport est alors assuré par des structures turbulentes à plus petite échelle, contrairement aux résultats des simulations de Stein et Nordlund (1989) décrites précédemment. Nordlund et al. (1994), s'appuyant sur une série d'expériences menées par Rast et al. (1993), Rast et Toomre (1993), ont suggéré que cette différence pouvait s'expliquer par la prise en compte dans les modèles détaillés de convection granulaire de la chaleur latente d'ionisation du gaz, alors que les simulations polytropiques se limitent au gaz parfait.

## Chocs

Une autre propriété de ces flots, mise en évidence par Cattaneo et al. (1990), Malagoli et al. (1990), Porter et Woodward (1994), est l'existence de chocs dans le domaine supérieur de la boîte de simulation, lorsque le nombre de Rayleigh devient très important (de l'ordre de  $10^6$  pour des simulations dans un milieu fortement stratifié). Ces chocs existent aussi bien dans les modèles bidimensionnels que tridimensionnels et contribuent à la diminution de la vigueur de la turbulence, par transfert d'énergie cinétique en énergie thermique.

## Champs magnétiques

Hurlburt et Toomre (1988), Hurlburt et al. (1989) puis Weiss et al. (1990) se sont intéressés à des configurations 2D avec champ magnétique et ont mis en évidence l'apparition de nappes de champ magnétique intense entre les rouleaux de convection, conduisant à une forte diminution de la densité dans ces zones sous l'effet des fortes pressions magnétiques. Une étude exhaustive des différents régimes a également été menée dans ces articles. Selon le degré de suradiabaticité du système, l'intensité du champ magnétique, et la valeur relative des diffusivités dans le milieu, la convection peut se présenter sous forme stationnaire, d'ondes qui se propagent, d'ondes stationnaires ou d'un régime chaotique. Lorsque le champ magnétique initial est oblique, Matthews et al. (1992) ont montré que des ondes se propageant étaient favorisées. Nous nous sommes servis de certains de ces résultats pour valider quantitativement le comportement de notre code de simulations directes (cf. annexe A, paragraphe A.4.c).

Les aspects 3D de la magnétoconvection dans les polytropes en régime faiblement non-linéaire (ou avec un fort champ magnétique) ont été abordés par Matthews et al. (1995), Weiss et al. (1996), avec l'idée de l'appliquer aux taches solaires et aux champs intergranulaires. En champ faible, leurs simulations font apparaître des régimes pour lesquels le champ magnétique est évacué dans le réseau des panaches descendants et se déplace le long des interstices entre granules, où la pression magnétique peut devenir de l'ordre de la pression thermique. En champ fort, la convection et le réseau magnétique semblent plus stationnaires. Rucklidge et al. (2002) ont pour leur part mis en évidence les brisures de symétrie et la désorganisation des motifs de convection de l'écoulement lorsque le rapport d'aspect augmente.

Finalement, mentionnons brièvement les expériences récentes à haute résolution de Brummell et al. (1996, 1998, 2002), faisant intervenir la rotation et/ou la pénétration dans des zones stratifiées stables. Ces simulations ne sont pas en rapport direct avec le problème abordé dans ce travail<sup>5</sup>, mais représentent aujourd'hui ce qui se fait de plus abouti dans le domaine.

---

<sup>5</sup>Rappelons malgré tout que la rotation semble avoir un rôle perturbatif au niveau de la supergranulation.

### Influence des conditions aux limites

Un point soulevé par Nordlund et al. (1994) est l'influence des conditions aux limites sur la vitesse et la différence entre des frontières de type « mur », souvent employées dans les simulations de polytropes, et des conditions de type « pénétratif ». Ces conditions ont évidemment une influence sur la topologie de la convection. En effet, le retournement du fluide descendant sur une paroi inférieure rigide réinjecte des fluctuations d'énergie et donc de la turbulence dans les panaches *ascendants*. Ils soulignent que le choix d'une stratification importante permet d'atténuer cet effet de bord, puisque celle-ci accentue le degré de turbulence des panaches *descendants*.

Malgré les quelques différences évoquées ci-dessus, les simulations de Stein et Nordlund (1989) et de polytropes se rejoignent sur un grand nombre de points. Ceci laisse à penser qu'une modélisation détaillée de tous les effets physiques présents dans la photosphère n'est pas forcément nécessaire pour étudier les mécanismes d'instabilité (magnéto)hydrodynamiques, puisque la morphologie générale des écoulements semble peu dépendante de l'intégration de ces processus. En particulier, l'approximation de diffusion permet de reproduire qualitativement le motif de la granulation en surface, comme le montrent par exemple les expériences de Cattaneo et al. (2001). En pratique, elle s'avère d'autre part bien plus simple à mettre en œuvre que le transfert de rayonnement dans la zone convective. Nous reviendrons en détail sur ces comparaisons au chapitre 4.

#### 1.4.d Simulations à grands rapports d'aspects

Après cet aperçu des propriétés de la convection turbulente compressible étudiée par l'intermédiaire de simulations à faible rapport d'aspect, abordons à présent le domaine encore peu exploré des expériences à grande échelle. À l'heure actuelle, les résultats de ces simulations restent très préliminaires.

L'intérêt des simulations de convection stellaire à grande échelle est multiple. Il peut s'agir d'expliquer les propriétés globales de la convection dans une enveloppe stellaire sphérique en rotation (rotation différentielle, circulation méridienne, cellules géantes, transfert de moment cinétique), de caractériser la distribution et la génération des champs magnétiques (dynamos locales, globales, réseau magnétique) sous l'effet de la convection, et bien sûr de déterminer les relations entre granules, mésogranules, supergranules.

Soulignons tout de suite les limites auxquelles les numériciens sont confrontés aujourd'hui. Deux approches géométriques sont possibles pour ces simulations : une approche cartésienne, et une approche sphérique. Dans le premier cas, les simulations les plus récentes ne permettent d'accéder qu'à des structures dynamiques de taille caractéristique horizontale inférieure ou égale à 10 000 km, puisqu'on souhaite conserver un nombre de points suffisant pour résoudre les petites échelles de la convection photosphérique (typiquement les granules). Dans le deuxième cas, une approche de champ moyen est implicitement adoptée. Le problème est le suivant : sachant que dans ces simulations la plus grande échelle

correspond à l'étoile dans sa globalité, quelle est la plus petite échelle horizontale *inertielle* que l'on puisse simuler sans trop d'erreur ? La réponse, dans le cas du Soleil, est environ 30 000 km, compte-tenu des ressources informatiques existantes. Ceci correspond à l'échelle de la supergranulation. Autrement dit, on voit que la bande du spectre de la convection allant de 10 000 km à 30 000 km n'est pas correctement couverte par les simulations actuelles, ce qui ne permet pas d'étudier les interactions non-linéaires entre petites et grandes échelles. Si on ajoute à cette remarque les difficultés observationnelles à caractériser la mésogranulation et la supergranulation, on obtient certainement une partie de l'explication de notre mauvaise compréhension de ces phénomènes.

### Géométrie sphérique

L'intérêt pour la simulation des échelles globales date d'une trentaine d'années, quand Gilman (1975) a élaboré un modèle numérique de convection Boussinesq 2D dans une coquille sphérique pour étudier l'influence de la rotation sur la convection et les profils radiaux de taux de rotation. Gilman et Glatzmaier (1981), Glatzmaier (1984) ont poursuivi ce travail dans le cadre de l'approximation anélastique. Le problème analogue pour des milieux complètement compressibles a été abordé par Valdetaro et Meneguzzi (1990). Compte-tenu de la résolution utilisée, seules des structures laminaires de l'ordre de 100 000 km pouvaient être identifiées dans ces simulations.

Des simulations numériques intensives sont aujourd'hui menées avec le code anélastique américain ASH (Anelastic SHell) développé à Boulder (Clune et al. 1999). L'utilisation de ce programme pour l'étude de la supergranulation est assez récente. DeRosa (2001), DeRosa et al. (2002) ont mené des simulations 3D dans des coquilles sphériques minces. La résolution utilisée permet en théorie d'observer des structures d'extension horizontale supérieure à 10 000 km et leur travail a mis en évidence de la convection à l'échelle supergranulaire. Une critique peut cependant être émise à propos de la validité « dynamique » de ces échelles dans leurs simulations. Les auteurs reconnaissent eux-mêmes que le modèle de sous-maille qu'ils utilisent ne prend certainement pas bien en compte toute la dynamique aux échelles plus petites (et en particulier à l'échelle granulaire). Le mécanisme de formation de la supergranulation reste donc encore largement indéterminé si on se limite à l'analyse de ces travaux. On voit en particulier mal pourquoi une échelle de l'ordre de 30 000 km serait favorisée spécialement dans leur simulation si ce n'est que cette longueur correspond également à la profondeur de la zone convective choisie<sup>6</sup>.

Malgré tout, ces études présentent un intérêt important, puisque l'apparition d'échelles supergranulaires permet de caractériser l'influence de ces structures à des échelles globales (et d'étudier en particulier leur interaction avec la zone de cisaillement sous la surface solaire). La prochaine génération de travaux de ce

---

<sup>6</sup>Ce groupe a depuis refait des simulations avec une meilleure résolution et les motifs « supergranulaires » ont semble-t-il disparu.

type sera de toute évidence très instructive.

### Géométrie cartésienne

Nous venons de soulever le problème de la modélisation des échelles non résolues par la maille dans les simulations en géométrie sphérique. Une réponse à cette question ne peut être apportée que par une étude détaillée de la dynamique et des transferts d'énergie aux échelles intermédiaires entre granulation et supergranulation. Des simulations de convection à grand rapport d'aspect en géométrie cartésienne sont donc nécessaires pour combler ce « trou de résolution ». Comme il a été évoqué en introduction, de telles expériences sont également soumises à des problèmes de résolution, mais dans la direction opposée, à savoir que la taille maximale des boîtes de simulation peut difficilement excéder 10 000 km avec la technologie actuelle.

Récemment, Cattaneo et al. (2001) ont présenté des simulations dans l'approximation de Boussinesq pour un rapport d'aspect allant jusqu'à 20 et un nombre de Rayleigh élevé ( $5 \cdot 10^5$ ). Celles-ci semblent mettre en évidence un champ de vitesse advectif à l'échelle de la mésogranulation. Un argument intéressant pour caractériser l'existence effective d'un tel écoulement est l'estimation de son temps de corrélation. En effet, il est possible qu'une distribution aléatoire de « fontaines » à petite échelle fasse apparaître transitoirement des motifs plus grands, sans véritable origine dynamique. Cattaneo et al. (2001) estiment ce temps de corrélation à environ trente temps de retournement convectif pour leurs mésogranules, ce qui exclut un simple artefact stochastique. Les auteurs penchent en faveur d'une explication dynamique du phénomène, *i. e.* d'une interaction collective entre les granules, et concluent à la non-plausibilité d'un tel mécanisme dans le cadre de la supergranulation, affirmant que celle-ci trouve probablement sa source en profondeur. Récemment, Rast (2003a), se basant sur les dernières observations disponibles, a au contraire argumenté en faveur d'une interaction collective de panaches granulaires comme origine commune à la mésogranulation et à la supergranulation. Cattaneo et al. (2001) suggèrent également que la formation de mésogranules ne requiert pas la présence d'une stratification importante (puisque'il s'agit d'une simulation en milieu incompressible), par opposition au scénario de « collage » de panaches évoqué paragraphe 1.4.b, qui est précisément lié à cette physique. Tout comme Cattaneo et al. (2001), Spruit et al. (1990) avaient argumenté qu'il est difficile de favoriser une échelle particulière comme la mésogranulation par un tel processus.

Rieutord et al. (2002) ont eux aussi réalisé une simulation cartésienne à grande échelle, en utilisant le code de Nordlund et Stein décrit plus haut, pour un rapport d'aspect 10. Ils n'ont pas réussi à mettre en évidence des modes à grande échelle et attribuent ceci soit à une turbulence insuffisamment vigoureuse dans leur expérience, soit à un domaine de simulation trop restreint.

Du côté des simulations avec champ magnétique, Tao et al. (1998) ont été les premiers à envisager des rapports d'aspects importants ( $A = 8$ ) et à étudier la



distribution des champs dans un polytrophe fortement stratifié. Rucklidge et al. (2002), Weiss et al. (2002) ont poursuivi ces simulations et montré que dans un régime de champs modérés avec  $A > 6$ , le flux magnétique peut dans certains cas se séparer des mouvements convectifs, les lignes de champs se concentrant fortement sur un réseau à grande échelle entourant des « cellules » de convection. Un enseignement important à tirer de leurs expériences est l'apparition de structures de plus en plus grandes lorsque le rapport d'aspect augmente, illustrant le fait qu'avec les résolutions envisageables aujourd'hui, il est difficile de générer des structures à grande échelle indépendantes de la taille de la boîte. Finalement, Cattaneo (1999), Emonet et Cattaneo (2001), Cattaneo et al. (2003) ont réalisé le même genre d'expériences dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et ont discuté la transition entre un régime de dynamo turbulente à petite échelle apparaissant lorsqu'aucun champ magnétique initial n'est imposé et un régime de type magnétoconvection pour lequel un champ magnétique de plus en plus fort imposé au début de l'expérience structure progressivement l'écoulement.

## 1.5 Une tentative de synthèse

Ce tour d'horizon des observations et des simulations de convection turbulente étant terminé, nous pouvons à présent dresser un premier bilan de nos connaissances actuelles sur la convection photosphérique et apprécier le rôle que peuvent jouer les simulations numériques pour l'amélioration de notre compréhension de ces phénomènes.

### 1.5.a Granulation solaire

Comment caractériser quantitativement les propriétés de la convection photosphérique en termes de dynamique des fluides, en se basant sur les observations et les simulations ? Diverses estimations s'avèrent utiles pour la compréhension de ces processus physiques. La valeur de la diffusivité thermique<sup>7</sup> à proximité de la surface est  $\kappa \simeq 2 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ . Cette donnée permet de calculer :

- le temps de thermalisation d'un granule,

$$\tau_{\text{th}} = \frac{L_g^2}{\kappa} \simeq 10^3 \text{ s} ; \quad (1.3)$$

- le temps dynamique d'un granule, qui correspond au temps mis par une particule fluide pour parcourir  $L_g$ ,

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{L_g}{V_g} \simeq 10^3 \text{ s} . \quad (1.4)$$

---

<sup>7</sup>On suppose que l'approximation de diffusion est valable dans le domaine considéré. Cette hypothèse, est de toute évidence mis en défaut dans les zones supérieures de la photosphère solaire où le libre parcours moyen des photons est important.

On voit que ces deux temps sont du même ordre de grandeur, et proches du temps de vie caractéristique d'une structure granulaire. Cela se traduit par

$$\text{Pe} \equiv \frac{\tau_{\text{th}}}{\tau_{\text{dyn}}} = \frac{L_g V_g}{\kappa} = \mathcal{O}(1), \quad (1.5)$$

en introduisant le nombre de Peclet. Lorsque  $\text{Pe} < 1$ , la turbulence n'est pas assez vigoureuse pour « apporter » des fluctuations de température en un point, celles-ci étant rapidement atténuées par la diffusion thermique. Au contraire, pour  $\text{Pe} > 1$ , la diffusion thermique agit sur des échelles de temps trop importantes pour gommer les fluctuations turbulentes de température ( $\text{Pe}$  est l'analogie thermique du nombre de Reynolds). Autrement dit, le granule est avant tout une structure issue de l'équilibre entre les processus de diffusion et la force d'Archimède, qui assure l'interface entre le transport convectif et le transport radiatif. La plus petite échelle de longueur à laquelle il est possible d'observer des fluctuations de température significatives est donc de l'ordre de  $L_g = \kappa/V_g$ .

De manière analogue, on peut former le nombre de Reynolds d'un granule, en utilisant la viscosité du gaz, estimée à  $\nu \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  en surface. On a

$$\text{Re} = \frac{L_g V_g}{\nu} \simeq 10^9 \quad (1.6)$$

Autrement dit, la granulation est laminaire du point de vue radiatif mais extrêmement turbulente du point de vue purement hydrodynamique. Le nombre de Prandtl, défini par

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (1.7)$$

est de l'ordre de  $10^{-9}$  en surface<sup>8</sup>.

Remarque | Le nombre de Peclet est proche de 1 à la surface, mais augmente dès qu'on pénètre à  $\tau > 1$ , pour atteindre des valeurs de l'ordre de  $10^7$  dans les profondeurs de la zone convective où le transfert radiatif redevient prédominant et les échelles de vitesse et de longueur caractéristique sont très grandes, contrairement à la surface (Brandenburg et al. 2000). En profondeur on a simultanément  $\text{Pe} \gg 1$  et  $\text{Re} \gg 1$ , tandis que le nombre de Prandtl reste très petit (environ  $10^{-6}$ ).

### 1.5.b Le modèle standard de la convection à la surface du Soleil

Les observations des années 60 ont conduit Simon et Leighton à proposer le modèle physique « historique » de la supergranulation (Simon et Leighton 1964). Dans ce modèle, la granulation est identifiée à la profondeur de recombinaison de  $\text{H}^+$ , tandis que la supergranulation trouve son origine dans la recombinaison en

<sup>8</sup>On peut noter que ce paramètre différencie complètement les comportements de la convection solaire et de la convection dans le manteau terrestre, caractérisée par  $\text{Pr} \rightarrow \infty$ , puisque le fluide qui compose celui-ci est hypervisqueux.

profondeur de  $\text{He}^{++}$ . Dans le cadre de l'étude linéaire de l'instabilité convective, des cellules peuvent en effet se développer sur des échelles horizontales du même ordre de grandeur que la hauteur de la couche de fluide. Demeure alors la question de la profondeur intermédiaire de recombinaison de  $\text{He}^+$ , qui devrait elle aussi faire émerger une échelle distincte à la surface (figure 1.6). La découverte de la mésogranulation par November et al. (1981), avec une échelle horizontale de 8 000 km, a donné un argument aux défenseurs de cette théorie, qui y ont vu la manifestation de la recombinaison de l'hélium ionisé une fois.

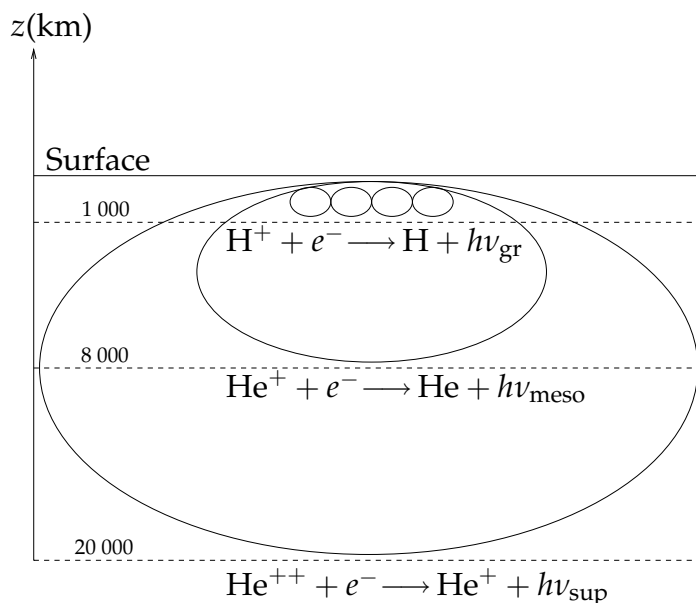


FIG. 1.6 – Modèle standard de la convection photosphérique. Ce scénario est principalement basé sur une relation linéaire (*i. e.* une superposition) entre les différentes échelles observées.

### 1.5.c Le modèle en question : et la turbulence ?

Plusieurs ombres viennent cependant noircir ce tableau. Les travaux de Beckers (1968), Worden et Simon (1976), Lin et Kuhn (1992), pour ne citer que ceux-ci, montrent que les faibles fluctuations de température observées s'identifient surtout au réseau magnétique et peuvent difficilement être attribuées à une structure convective transportant un flux d'énergie significatif. Rast (2003b) soutient également que les profondeurs d'injection d'énergie ne sont pas aussi nettes que dans la description du modèle standard et que dans tous les cas cet apport d'énergie tendrait plutôt à destabiliser des structures cohérentes et à faire apparaître des petites échelles.

En réalité, la description classique fait totalement abstraction de la nature turbulente de la convection photosphérique et des interactions entre les diverses échelles qui font partie d'un *continuum*, comme le montre le spectre de puissance de la figure 1.5. Nous avons vu au paragraphe 1.5.a que l'échelle de la granulation

est intrinsèquement liée au processus de convection et au refroidissement radiatif. En utilisant des arguments généraux de turbulence, il est alors tout à fait possible de faire apparaître les bons ordres de grandeurs pour les grandes échelles (Rieutord et al. 2000) en utilisant la granulation pour normaliser le spectre turbulent. Par exemple, la durée de vie caractéristique d'une échelle  $k$  varie comme

$$\tau \sim k^{\frac{\alpha-3}{2}}, \quad (1.8)$$

en faisant l'hypothèse de similarité pour le spectre de puissance de la turbulence  $E(k) \sim k^{-\alpha}$ . Sachant que pour une turbulence 3D on doit avoir  $\alpha < 3$ , les grandes structures doivent vivre plus longtemps. On peut ainsi estimer la valeur de l'échelle supergranulaire pour  $\alpha = 5/3$  (turbulence universelle tridimensionnelle homogène et isotrope), connaissant les temps caractéristiques de la granulation et de la supergranulation. On trouve

$$L_{sg} \simeq L_g \left( \frac{\tau_{sg}}{\tau_g} \right)^{3/2} \simeq 10^8 \text{ m}, \quad (1.9)$$

Cet exemple n'a bien sûr pas valeur de référence en lui-même, il montre simplement qu'une alternative à l'explication historique de Simon et Leighton (1964) et November et al. (1981), basée sur des hypothèses de dynamique des fluides plus réalistes, est possible et doit être considérée attentivement, au regard des observations et simulations récentes : les études de Rieutord et al. (2000), Ploner et al. (2000), Cattaneo et al. (2001), Roudier et al. (2003), Rast (2003b) suggèrent majoritairement des mécanismes d'interactions non-linéaires entre granules pour expliquer l'émergence de structures de taille supérieure.

Le scénario turbulent possède malgré tout ses propres inconvénients, le premier d'entre eux étant qu'il n'explique pas actuellement le maximum de puissance observé à l'échelle supergranulaire, et dans une moindre mesure à l'échelle mésogranulaire. Pour éviter de pécher par naïveté dans ce sens et illustrer la complexité du problème, rappelons simplement quelques arguments qui suggèrent qu'un spectre en  $k^{-5/3}$ , par exemple, n'est pas approprié à la convection photosphérique, et que l'image de la turbulence universelle doit être utilisée avec précaution pour un tel écoulement.

Au vu de la figure 1.5, il est difficile d'identifier le spectre de la convection solaire avec le spectre universel de Kolmogorov de la turbulence homogène isotrope avec une pente en  $k^{-5/3}$ . Nordlund et al. (1997) soulignent que la granulation apparaît à la fois observationnellement et numériquement comme un écoulement laminaire, en particulier dans sa partie montante, et relèvent que les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité utilisées en turbulence classique sont complètement violées dans le cadre de la photosphère, puisque l'échelle de hauteur de densité au niveau de la surface ne constitue qu'un dixième de la taille caractéristique d'un granule.

Finalement nous concluerons ce paragraphe par une question : comment définir la zone inertielle de la convection photosphérique ? Si la granulation s'identifie à l'échelle d'injection d'énergie dans la turbulence, la mésogranulation et la

supergranulation n'appartiendraient pas à la zone inertielle, dont les propriétés constituent, avec l'échelle de dissipation de Kolmogorov, les principales prédictions de la théorie K41. Constatant ainsi que la dynamique au-delà de l'échelle d'injection est largement inconnue, la quête d'une explication simple à l'existence des mésogranules et des supergranules basée uniquement sur des arguments académiques de stabilité linéaire ou de turbulence semble malheureusement partiellement compromise...

### 1.5.d Que nous apportent les simulations numériques ?

Le problème complet de la convection photosphérique, au vu de l'ensemble des observations que nous avons décrites précédemment, ne possède pas de solution analytique. En fait, l'inclusion d'un ingrédient aussi « simple » que la stratification fait que toute tentative dans cette direction est vouée à l'échec (mentionnons les efforts méritoires de Spiegel (1965) qui a cherché une solution exacte au problème linéaire de l'instabilité convective en milieu compressible !). En revanche, la stratification se traite plutôt bien avec une simulation numérique. De manière générale, cet outil se prête très bien à l'incorporation de nombreux ingrédients (nous avons déjà évoqué les résultats de Stein et Nordlund (1998)) et permet une compréhension poussée des mécanismes physiques à l'œuvre dans le Soleil. Malheureusement, il montre très vite ses limites dès lors que l'on s'intéresse aux problèmes fondamentaux de la turbulence, qui font intervenir une grande disparité d'échelles.

Avec les ordinateurs de la génération actuelle, il est toutefois envisageable de résoudre une partie de nos problèmes, le nombre de degrés de liberté des systèmes étudiés n'étant pas forcément aussi important qu'il n'y paraît. Par exemple, Stein et Nordlund (1998) ont pu reproduire une bonne partie des observations relatives à la granulation sans pour autant résoudre toutes les échelles de la turbulence, du centimètre au mégamètre. Il se pourrait également que, de manière générale, les éléments cohérents (filaments tourbillonnaires, *worms*) de la turbulence soient responsables de l'essentiel de la structure des écoulements bien qu'ils se concentrent uniquement dans des petites zones (Vincent et Meneguzzi 1994, Moffatt et al. 1994, Frisch 1995). Si tel était le cas, il suffirait de savoir les décrire pour obtenir toute l'information importante sur la turbulence (et cela ne demanderait pas forcément autant de points de grille  $N$  que la déprimante évaluation  $N \sim Re^{9/4}$  en trois dimensions). La suggestion récente de Cattaneo et al. (2001) que l'essentiel de l'écoulement aux échelles supérieures à celle de la granulation puisse être gouverné par des structures vorticales intenses laisse à penser que ce cas de figure ne peut pas être exclu et que même une résolution modérée peut permettre de trouver une explication aux grandes échelles de la convection turbulente. Si celles-ci sont issues d'une interaction collective de structures comme les granules, alors une simulation reproduisant ne serait-ce que grossièrement les structures granulaires devrait pouvoir nous aider à progresser. Des simulations à  $N$  corps (Rast 2003b) pourraient également débloquent en partie la situation. Ce

sont de toute façon les seules solutions qui s'offrent aujourd'hui aux numériciens.

## 1.6 Conclusion

La convection solaire telle que nous l'observons au niveau de la photosphère trouve son apparence granulaire dans un équilibre entre dynamique et refroidissement radiatif. De nombreuses simulations ont permis d'étudier en détail ces structures et d'obtenir des résultats importants à ce sujet. Au-delà de la granulation, il existe cependant un *continuum* d'échelles.

Parmi celles-ci, la supergranulation et peut-être la mésogranulation se voient attribuer un rôle particulier. Malheureusement, nous avons vu au cours de cette exploration les difficultés à expliquer l'existence de ces phénomènes, en dépit des progrès considérables effectués ces dernières années dans la caractérisation observationnelle des écoulements photosphériques à grande échelle.

Nous avons tenté d'identifier les raisons de cette mauvaise compréhension. Elles sont de plusieurs types : tout d'abord, le nombre d'ingrédients qu'il serait possible d'incorporer dans les modèles est très important : turbulence, stratification, champ magnétique, rotation, cisaillement, etc. L'espace des paramètres associé est immense et personne ne semble avoir véritablement trouvé un effet déterminant parmi les autres, même si depuis quelques années, les scénarii d'interactions non-linéaires semblent prendre de l'importance.

Ensuite, les théories actuelles ne sont pas suffisamment abouties pour prédire l'émergence de structures à grande échelle dans la convection hautement non-linéaire, même si elles permettent d'obtenir des informations qualitatives. Les explications historiques de la supergranulation semblent pour leur part en partie dépassées.

Enfin, comme nous l'avons montré quantitativement, l'apport des simulations numériques dans le domaine des grandes échelles n'a pas pu être décisif jusqu'à aujourd'hui pour des raisons principalement matérielles. Si la génération actuelle de calculateurs peut aider à lever une partie du mystère, il n'en reste pas moins que les temps et les quantités de calculs nécessaires pour simuler des structures comme la supergranulation ne permettent pas dans l'immédiat d'explorer l'espace des paramètres de manière exhaustive : comme nous le verrons au chapitre 4, toute tentative de modélisation numérique devra présenter des compromis entre le réalisme physique et les ressources disponibles.





# Chapitre **2** Équations MHD dans un milieu fortement stratifié

## 2.1 Introduction

Les équations avec lesquelles nous avons choisi de travailler dans la perspective de cette thèse sont essentiellement celles utilisées par les groupes de Cambridge (Matthews et al. 1995, Tao et al. 1998, Rucklidge et al. 2002), de Chicago (Malagoli et al. 1990, Cattaneo et al. 1991) et de Boulder (Hurlburt et al. 1984). L'incorporation de transfert radiatif et d'équations d'état réalistes comme dans le travail de Stein et Nordlund (1998) ajoute en effet une complexité supplémentaire à l'ensemble des développements, en particulier numériques, qui aurait été difficile à gérer dans une période aussi courte que celle d'une thèse. Nous espérons bien sûr en faisant ces hypothèses simplificatrices qu'elles n'ont pas une incidence trop grande sur les phénomènes que nous souhaitons mettre en évidence et que l'essentiel de la dynamique des grandes échelles dans les photosphères d'étoiles de type solaire peut être capturé sans ces ingrédients. L'incorporation d'éléments comme le transfert radiatif constitue bien évidemment un objectif intéressant à plus long terme pour raffiner des modèles obtenus avec des hypothèses physiques plus simples.

## 2.2 Système physique étudié

Dans l'ensemble des calculs, les variables  $v$  pour le champ de vitesse,  $B$  pour le champ magnétique,  $T$  pour la température,  $\rho$  pour la densité et  $p$  pour la pression sont utilisées.



### 2.2.a Cadre général

On considère une atmosphère plan-parallèle constituée de gaz parfait, comprise entre  $z = 0$  (bas de la couche) et  $z = d$ , où  $z$  repère l'altitude, tandis que  $x$  et  $y$  sont les coordonnées dans les directions horizontales. On s'intéressera plus particulièrement à l'atmosphère isotherme, pour laquelle  $T = T_o = C^{\text{te}}$  au repos, et à des polytropes pour lesquels une différence de température  $\Delta T$  est établie initialement entre le haut et le bas de l'atmosphère. L'index adiabatique du gaz, noté  $\gamma$ , vaut  $5/3$  dans ce manuscrit. La constante des gaz parfait est notée  $\mathcal{R}$ .  $c_p$  et  $c_v$  sont les capacités calorifiques à pression ou volume constant. La gravité,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ , est supposée constante sur l'épaisseur de la couche et les perturbations du potentiel gravitationnel induites par l'écoulement sont négligées. La viscosité dynamique  $\mu$ , la conductivité thermique  $\chi$ , et la diffusivité magnétique  $\eta$  sont supposées constantes. La viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$  et la diffusivité thermique  $\kappa = \chi/(\rho c_p)$ , sont donc proportionnelles à l'inverse de la densité  $1/\rho$ .

### 2.2.b Paramètres caractéristiques

Dans ce qui suit, un indice  $_b$  caractérise des quantités physiques évaluées au bas de la couche et un indice  $_t$  les mêmes quantités évaluées en haut. On utilise pour adimensionaliser les équations  $d$  comme unité de distance (l'altitude sans dimension va donc de 0 à 1),  $d^2/\kappa_b$  comme unité de temps, une température caractéristique du problème  $T_{\text{car}}$  comme unité de température.  $\rho_b$  est choisie comme unité de densité,  $B_o$ , l'intensité du champ magnétique initial, comme unité de champ magnétique. Les paramètres suivants apparaissent alors naturellement dans les équations (les notations sont les mêmes que dans Depassier et Spiegel (1981) et Chandrasekhar (1961) pour le champ magnétique) :

- le nombre de Chandrasekhar  $Q = (B_o^2 d^2) / (\mu_o \mu \eta)$  ;
- la gravité adimensionalisée  $\Lambda = (gd^3) / \kappa_b^2$  ;
- le nombre de Prandtl thermique  $\text{Pr} = \mu / (\rho_b \kappa_b)$  ;
- le nombre de Prandtl magnétique  $\text{Pr}_m = \mu / (\rho_b \eta)$  ;
- une estimation du « nombre de Mach thermique » de la couche

$$C_k = \sqrt{\gamma \kappa_b^2 / (d^2 c_s^2)} = \sqrt{\gamma} M_{th}, \text{ avec } c_s^2 = \gamma \mathcal{R} T_{\text{car}} .$$

## 2.3 Équations sans dimension

Les paramètres précédents permettent d'obtenir les équations MHD directement dans une forme sans dimension (voir par exemple Cattaneo et al. 1991). Nous utilisons des notations identiques pour les variables sans dimensions. À partir de ce paragraphe, nous travaillerons toujours avec des équations sans dimensions.

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Équation pour la vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = & -\frac{1}{C_k^2} (T \nabla \ln \rho + \nabla T) + Q \frac{\text{Pr}^2}{\rho \text{Pr}_m} \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \Lambda \mathbf{e}_z \\ & + \frac{\text{Pr}}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \frac{\text{Pr}}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Équation sur la température :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma}{\rho} \Delta T + (\gamma - 1) C_k^2 \frac{\text{Pr}}{\rho} \left( \nu + Q \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} \right)^2 |\mathbf{j}|^2 \right). \quad (2.3)$$

Équation d'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} \Delta \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

$\nu = \frac{1}{2} \left( \partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3} (\partial_k v_k) \delta_{ij} \right)^2 = \partial_j v_i \left( \partial_j v_i + \partial_i v_j - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right)$  est la dissipation visqueuse au sein de la couche, et  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$  est la densité de courant électrique. Enfin, nous adoptons l'équation d'état d'un gaz parfait :

$$p = \frac{\Lambda}{m+1} \rho T, \quad (2.5)$$

avec  $m+1 = gd/\mathcal{R}T_{\text{car}}$ .

## 2.4 Différents équilibres hydrostatiques

Si on note avec l'indice  $s$  les profils verticaux statiques, on a

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = -\Lambda \rho_s, \quad (2.6)$$

et l'équation de la température se résume à un flux conductif vertical constant

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (2.7)$$

### 2.4.a Les polytropes

On caractérise un polytrophe par deux paramètres, la température en haut de la couche  $z_o = T_o/\Delta T$  et l'index polytropique  $m = gd/\mathcal{R}\Delta T - 1$  ( $\Delta T$ , la différence de température entre le haut et le bas de la couche, fait ici office de température caractéristique). Les profils de température, de densité, et de pression pour un polytrophe s'écrivent

$$\begin{aligned} T_s(z) &= z_o + 1 - z, \\ \rho_s(z) &= \left( \frac{z_o + 1 - z}{z_o + 1} \right)^m, \\ p_s(z) &= \frac{\Lambda (z_o + 1)}{(m + 1)} \left( \frac{z_o + 1 - z}{z_o + 1} \right)^{m+1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

On remarquera que les faibles valeurs de  $z_o$  correspondent à des milieux fortement stratifiés, tandis que la limite  $z_o \rightarrow +\infty$  se ramène à faire l'approximation de Boussinesq (Chandrasekhar 1961).

### 2.4.b L'atmosphère isotherme

Dans le cas de l'atmosphère isotherme, l'équation (2.5) permet d'obtenir directement les profils statiques de pression et de densité

$$\begin{aligned} T_s &= 1, \\ \rho_s(z) &= \exp[-z/H], \\ p_s(z) &= \Lambda H \exp[-z/H], \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec  $H = 1/(m + 1) = \mathcal{R}T_o/(gd)$ .

### 2.4.c Échelles de hauteur, temps caractéristiques

La correspondance entre l'échelle de hauteur de densité adimensionalisée  $H$  et « l'index polytropique » pour les deux configurations hydrostatiques précédentes est donnée par  $m + 1 = 1/H$ . Dans la limite d'un milieu non stratifié,  $H \rightarrow +\infty$ ,

et par conséquent  $m \rightarrow -1$ . Notons également que  $H$ ,  $C_k$  et  $\Lambda$  ne sont pas indépendants, puisque

$$H = 1/(C_k^2 \Lambda). \quad (2.10)$$

Les temps caractéristiques du système sont alors complètement fixés par rapport au temps de relaxation thermique en imposant par exemple  $\Lambda$  et  $H$  (ou  $m$ ).

- $\tau_{cl} = \sqrt{d/g} = 1/\sqrt{\Lambda}$  (temps de chute libre);
- $C_k = 1/\sqrt{\Lambda H} = \sqrt{(m+1)/\Lambda}$  (propagation verticale d'une onde sonore).

## 2.5 Conditions aux limites

Les problèmes de mécanique des fluides, et de physique plus généralement, seraient certainement beaucoup moins difficiles (mais également moins intéressants) à résoudre si des conditions aux limites n'avaient pas lieu d'être. Celles-ci jouent un rôle essentiel dans la sélection des solutions générales des équations, que ce soit dans la théorie linéaire ou dans le cas complètement turbulent. Notons en particulier que leur implémentation pratique dans un code de simulation peut être une source majeure de problèmes. Nous décrivons donc ici l'ensemble des conditions aux limites « idéalisées » qu'il est possible d'associer au problème.

Dans la direction horizontale, le choix de conditions aux limites périodiques se fait naturellement, que ce soit pour des simulations en géométrie sphérique ou cartésienne. De telles conditions se prêtent en effet mieux à l'étude de milieux plan-parallèles infinis que des conditions de type mur, plus caractéristiques de simulations d'expériences de laboratoire.

En ce qui concerne la direction verticale, des conditions de type stress-free ou rigides pour la vitesse peuvent être adoptées. On pourrait aussi envisager des conditions de type frontière ouverte, avec l'existence d'un flux de masse non nul localement mais nul globalement. La mise en place de telles conditions est cependant plus délicate.

Pour la variable de température, des conditions de température fixée ou de flux de chaleur fixé sont la norme. Enfin, des conditions de type isolant ou conducteur sont souvent utilisées pour les champs magnétiques (Hurlburt et al. 1989, Matthews et al. 1995, Rucklidge et al. 2002). Selon les problèmes, des conditions aux limites sur la densité peuvent être requises, mais ce n'est pas le cas par exemple pour des simulations de convection, pour lesquelles le système se comporte bien (en croisant les doigts) en fixant juste des conditions sur le champ de vitesse et la température.

On peut finalement remarquer que les conditions aux limites évoquées ci-dessus sont toutes du type « dérivée fixée » ou « champ fixé », c'est-à-dire que pour toutes les variables  $f$  sur lesquelles des conditions aux limites sont requises, on peut mettre celles-ci sous la forme  $f = cl(x, y)$  ou  $\partial_z f = cl(x, y)$  en  $z = 0$  ou

$z = 1$ . Cette remarque est importante pour le choix des schémas de bords utilisés par les méthodes numériques de différentiation spatiale.

## 2.6 Définitions diverses et variées

Pour finir ce chapitre, nous définissons diverses quantités caractérisant la physique des écoulements de convection turbulente.

### 2.6.a Nombre de Rayleigh

Il n'est pas possible en milieu compressible de définir un nombre de Rayleigh identique en tout point de la couche, mais il est commode de raisonner avec le nombre de Rayleigh défini au milieu de la couche

$$R = \left( \frac{1/2 + z_o}{1 + z_o} \right)^{2m-1} \frac{\Lambda}{\text{Pr} (1 + z_o)} \frac{(1 + m - \gamma m)}{\gamma}. \quad (2.11)$$

dont la définition rejoint celle utilisée habituellement dans l'approximation de Boussinesq, lorsque  $z_o \rightarrow +\infty$ .

### 2.6.b Équation pour l'énergie

Au-delà du système d'équations décrit précédemment, il est intéressant de considérer l'équation de conservation de l'énergie, et de définir les divers flux au travers de la couche, en utilisant le système d'unités choisi. L'équation-bilan est la suivante (*e. g.* Roberts 1967) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{Q \text{Pr}^2 B^2}{\text{Pr}_m 2} \right] &= -\nabla \cdot \left[ \rho v \left( e + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi \right) \right] \\ &\quad - \nabla \cdot (F_{\text{poynt}} + F_{\text{visc}} + F_{\text{cond}}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $e = \Lambda T / ((\gamma - 1)(m + 1))$ ,  $\phi = \Lambda z$  sont l'énergie interne et l'énergie potentielle par unité de masse, et

$$\begin{aligned} F_{\text{poynt}} &= \frac{Q \text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} (E \times B), \\ F_{\text{visc},i} &= -\text{Pr} (v_j \tau_{ij}), \\ F_{\text{cond}} &= -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Lambda}{m + 1} \nabla T, \end{aligned} \quad (2.13)$$

sont respectivement les flux de Poynting ( $E$  est le champ électrique), visqueux et conductif. On définit également les flux d'énergie cinétique, d'enthalpie, et le flux convectif total par

$$\begin{aligned} F_{\text{cin}} &= \frac{\rho v^2 v}{2}, \\ F_{\text{ent}} &= \rho (e + p/\rho) v = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\Lambda}{m + 1} \rho T v, \\ F_{\text{conv}} &= F_{\text{ent}} + F_{\text{cin}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

On a utilisé  $p/\rho = T/C_k^2 = \Lambda T/(m + 1)$ . Si on moyenne l'équation (2.12) sur les coordonnées horizontales (les moyennes horizontales sont notées par un sur-lignage), et en supposant la périodicité des différents champs dans ces directions, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \overline{\rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right)} + \frac{\overline{Q \text{Pr}^2 B^2}}{\text{Pr}_m} \frac{1}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{F}_{\text{conv}} + \overline{F}_{\text{cond}} + \overline{F}_{\text{visc}} + \overline{F}_{\text{poynt}}) = 0, \quad (2.15)$$

Notons que la relation (2.15) peut servir de vérification lors de la construction d'un code de simulation.

### 2.6.c Nombre de Nusselt

Si le profil thermodynamique moyen est adiabatique ( $p \propto \rho^\gamma$ ), on montre en utilisant l'équation (2.6) que le gradient de température vertical est

$$\nabla_{\text{ad}} = -\frac{(\gamma - 1)(m + 1)}{\gamma}, \quad (2.16)$$

auquel correspond un flux *conductif* vertical  $F_{\text{ad}} = \Lambda$ . Par conséquent, dans une telle configuration, il est possible de quantifier quelle fraction du flux d'énergie total  $F_{\text{tot}}$  n'est pas liée à la conduction, par l'intermédiaire de  $F_{\text{tot}} - F_{\text{ad}}$ . Pour illustrer ceci, on peut prendre une situation extrêmement turbulente, pour laquelle le profil est quasi-adiabatique loin des bords grâce au mélange convectif. Dans ce cas,  $F_{\text{tot}} - F_{\text{ad}}$  représente simplement la contribution de la convection au flux d'énergie. Le nombre de Nusselt mesure alors l'efficacité de la convection :

$$\text{Nu} = \frac{F_{\text{tot}} - F_{\text{ad}}}{F_{\text{ref}} - F_{\text{ad}}}. \quad (2.17)$$

où  $F_{\text{ref}}$  est le flux (fictif) qui serait transporté par conduction pour une différence de température linéaire calculée à partir des températures réelles des deux parois. Le nombre de Nusselt tend vers 1 lorsque la convection est absente et vers l'infini lorsque le transport d'énergie s'effectue efficacement par convection (notons que pour un milieu fortement stratifié un flux conductif  $F_{\text{ad}}$  important est cependant

toujours présent). En imposant des conditions aux limites sur la température aux extrémités de la couche, on génère dans le cas très turbulent des couches limites thermiques dans lesquelles l'essentiel du flux est conductif, alors qu'il est complètement convectif loin des bords. Le nombre de Nusselt est donc important en dehors des couches limites thermiques au niveau des parois.



# Chapitre 3

## Approche linéaire de la supergranulation solaire

*Hardy l'informait dans un billet laconique que la première démonstration de Petros avait été établie deux ans auparavant par un jeune mathématicien [...] Il y exprimait sa sympathie pour son jeune confrère en cette fâcheuse circonstance.*

Apostolos Doxiadis, *Oncle Petros et la conjecture de Goldbach*, Seuil, p.110

### 3.1 Introduction

Comme il a été mentionné au chapitre 1, l'approche la plus simple de la supergranulation consiste à étudier l'instabilité convective dans le régime linéaire. En invoquant l'injection d'énergie par la voie de la recombinaison de l'hélium à 30 000 km de profondeur, Leighton (1963) avait suggéré qu'il était ainsi possible d'exciter un mode de longueur d'onde égale à la supergranulation. Nous avons déjà évoqué (chapitre 1.5.c) les gros problèmes que rencontrent cette théorie. Nous pensons également que le choix des conditions aux limites de type température fixée, qui est responsable de l'obtention d'échelles horizontales semblables à la profondeur de la couche fluide, n'est pas justifié dans ce problème (nous allons revenir sur ce point dans la suite).

Le seul moyen d'espérer pouvoir conserver un scénario linéaire (« simple ») est alors d'étudier la configuration d'une couche mince (d'épaisseur égale à la profondeur de recombinaison de l'hydrogène), sous les deux hypothèses suivantes :

- aux grandes échelles horizontales, le choix de conditions aux limites de type flux thermique fixé est plus réaliste que celui de conditions aux limites de type température fixée ;



- la granulation solaire agit comme un diffuseur turbulent de quantité de mouvement efficace qui rend la situation marginale pour les grandes échelles, du point de vue de l'instabilité convective.

Les premières études de la configuration avec flux fixé dans l'approximation de Boussinesq ont été effectuées par Sparrow et al. (1964), Hurle et al. (1966). Leurs travaux ont montré que l'instabilité linéaire se développait sur des échelles horizontales plus grandes lorsque les parois étaient de mauvais conducteurs thermiques (qui se rapprochent des conditions de flux fixé) que dans le cas de conducteurs parfaits (température fixée). Plus précisément, le vecteur d'onde horizontal critique dans le cas de parois parfaitement isolantes est zéro (mais le taux de croissance de ce mode reste toujours nul). D'autre part, le nombre de Rayleigh critique dans ce cas de figure passe de 657 à 120 pour des conditions aux limites stress-free sur la vitesse. Une étude pour les perturbations d'amplitude finie a ensuite été effectuée par van der Borgh (1974), Busse et Riahi (1980) et Chapman et Proctor (1980), toujours dans l'approximation de Boussinesq. Il semble que l'échelle horizontale la plus grande accessible au système soit toujours favorisée dans le régime faiblement non-linéaire. Une configuration en carrés semble privilégiée dans le cas de perturbations tridimensionnelles.

L'incorporation de la compressibilité au problème des conditions de flux fixé a été discuté par Depassier et Spiegel (1981) pour des polytropes. En utilisant un développement asymptotique justifié par l'existence de grandes échelles, ils ont conclu que de telles échelles persistaient dans le domaine faiblement non-linéaire et devaient bel et bien se manifester dans des systèmes astrophysiques tels que la photosphère solaire. Dans le problème avec température fixée, Gough et al. (1976) ont montré que la stratification augmentait le seuil de l'instabilité et qu'elle réduisait la longueur d'onde critique.

Murphy (1977) puis Edwards (1990) ont pour leur part étudié le cas Boussinesq linéaire avec champ magnétique. L'existence d'une transition vers des vecteurs d'onde critiques non nuls a ainsi été démontrée pour des champs magnétiques suffisamment forts. Un effet similaire a été identifié par Roberts (1985) pour la convection pénétrative en présence de conditions de flux fixé, la transition étant dans ce cas gouvernée par la profondeur de la zone convective.

L'existence de ces différents phénomènes, dont l'émergence naturelle de grandes échelles, nous semble intéressante à étudier dans le cas de la supergranulation, tout particulièrement l'influence simultanée de la stratification et du champ magnétique. Cependant, avant d'explorer les méandres de l'espace des paramètres, il convient de donner une justification à la démarche qui nous a conduit à une telle étude, et plus spécifiquement aux hypothèses que nous avons proposées ci-dessus.

## 3.2 Justification des hypothèses de l'étude

### 3.2.a Utilisation de diffusivités turbulentes

Dans le cadre général de l'étude de la turbulence, une des difficultés majeures est de trouver une modélisation adéquate de l'influence des petites échelles sur les grandes (entre autres, au-delà de l'échelle d'injection). Les granules sont avant tout responsables d'un transport turbulent très important comme en témoigne leur nombre de Reynolds gigantesque ( $Re = 10^{10}$  à la surface). Ils transportent à la fois de l'énergie thermique (transport convectif) et de la quantité de mouvement (par l'intermédiaire du tenseur de Reynolds). La modélisation de ce transport est un épineux problème puisqu'il s'agit intrinsèquement d'un mécanisme non-linéaire. L'approximation la plus simple que l'on puisse effectuer consiste à l'assimiler à un phénomène de diffusion. Dans le cadre de la convection photosphérique,  $Pr \ll 1$ , ce qui signifie que le principal frein à la convection est la diffusion thermique. Il est clair que c'est le refroidissement radiatif qui fixe en première approximation les coefficients turbulents vus par les grandes structures, en imposant la taille caractéristique des panaches convectifs à petite échelle. À la surface, nous avons vu au chapitre 1 que  $\kappa = 2 \cdot 10^8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} = L_g V_g$ . À grande échelle, les coefficients de transport turbulents sont alors donnés en première approximation par  $\nu_T = \eta_T = L_g V_g = \kappa = \kappa_T$ . On a alors  $Pr_T = \mathcal{O}(1)$ . De fait, la viscosité turbulente ainsi définie est beaucoup plus grande que la viscosité (qui vaut  $\nu \sim 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ), et le nombre de Rayleigh effectif pour les grandes échelles horizontales est alors bien plus petit que le nombre de Rayleigh qui serait calculé à partir des propriétés matérielles du système. Cet argument justifie qualitativement l'approche linéaire de l'instabilité pour des échelles très grandes devant les échelles contenant l'essentiel de l'énergie. Malgré tout, il faut bien sûr garder à l'esprit qu'il s'agit là d'une théorie « d'ordre zéro » qui ne prend aucunement en compte la complexité de l'écoulement turbulent associé aux granules et la forme précise du tenseur de Reynolds généré par l'écoulement turbulent. Cette remarque sera en particulier pleinement justifiée par les résultats numériques présentés au chapitre 4.

### 3.2.b Conditions aux limites sur la température

La turbulence présente dans la zone convective impose un profil thermodynamique isentropique en profondeur et ce n'est qu'en surface, où le refroidissement a lieu, que l'on rencontre de forts gradients d'entropie. Le bilan énergétique total est le suivant : au bas de la zone convective, la luminosité solaire est imposée. Puisque le régime est stationnaire, le flux doit être le même à la surface, où c'est le transfert radiatif qui assure alors le transport de l'énergie. L'interface entre la convection et la radiation est assurée par la granulation (chapitre 1.5.a). Les échelles plus grandes « voient » donc un milieu présentant des variations ho-

horizontales de température qui ne peuvent pas être annulées faute d'une diffusivité thermique suffisante. Il semble alors logique de considérer des conditions aux limites de type flux fixé pour étudier la stabilité des grandes échelles horizontales, puisque ces conditions correspondent au cas idéal de parois qui ne peuvent pas diffuser instantanément les fluctuations de température.

### 3.3 Détails du modèle linéaire

#### 3.3.a Linéarisation pour un fluide complètement compressible

Le modèle repose sur la description MHD complètement compressible des mouvements fluides effectuée au chapitre 2, sous une forme linéarisée que nous explicitons ici.

#### Note importante

Dans ce chapitre, et dans ce chapitre seulement,  $z$  désignera la profondeur et non l'altitude, si bien que dans l'ensemble des équations exposées au chapitre précédent (en particulier dans les profils hydrostatiques (2.8) on doit procéder au changement de variable  $z \rightarrow 1 - z$ . Dans ce chapitre, la gravité et le champ magnétique permanents sont orientés respectivement suivant  $+e_z$  et  $-e_z$  si bien que dans l'équation de la vitesse on doit utiliser  $+\Lambda e_z$  du terme de gravité. Ce changement temporaire de convention trouve son origine dans plusieurs études linéaires utilisant la variable de profondeur.

Avant toute chose, précisons les paramètres de cette étude linéaire. Nous nous plaçons dans le cas d'un polytrophe d'indice  $m = 1$  (cf. chapitre 2.4.a) confiné entre deux plaques thermiquement *isolantes* situées entre  $z = 0$  (haut) et  $z = 1$  (bas). Un champ magnétique vertical  $\mathbf{B} = -e_z$  est présent (des variables sans dimension sont toujours utilisées). Pour le reste, les notations sont les mêmes qu'au chapitre 2.

Comme il est de rigueur dans ce type d'analyse, nous considérons des perturbations infinitésimales bidimensionnelles de l'état hydrostatique du polytrophe, donné dans l'équation (2.8), avec les dépendances en  $t$  et  $x$  suivantes :

$$\begin{aligned}
 v_x &= U(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 v_z &= W(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 T &= T_s(z) + \theta(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 \rho &= \rho_s(z) + \rho(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 p &= p_s(z) + p(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 B_z &= -1 + b_z(z) e^{\lambda t} e^{i a x}, \\
 B_x &= b_x(z) e^{\lambda t} e^{i a x}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Le système d'équations linéaires associé s'écrit ( $D = \partial/\partial z$ ) :

$$\begin{aligned}
 \lambda \rho &= -WD \rho_s - \rho_s (ia U + DW), \\
 \lambda \rho_s U &= \frac{Q \text{Pr}^2}{ia \text{Pr}_m} D^2 b_z + Q \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} ia b_z + \frac{1}{3} \text{Pr} ia DW \\
 &\quad + \text{Pr} \left( D^2 U - \frac{4}{3} a^2 U \right) \\
 &\quad - \frac{1}{C_k^2} (\rho_s ia \theta + T_s ia \rho), \\
 \lambda \rho_s W &= \frac{ia}{3} \text{Pr} D U + \frac{4}{3} \text{Pr} D^2 W - \text{Pr} a^2 W \\
 &\quad - \frac{1}{C_k^2} (\rho_s D \theta + \theta D \rho_s + T_s D \rho) \\
 &\quad + \left( \Lambda - \frac{1}{C_k^2} D T_s \right) \rho, \\
 \frac{\lambda \rho_s}{\gamma} \theta &= (D^2 - a^2) \theta - \frac{\rho_s}{\gamma} W \\
 &\quad - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho_s T_s (ia U + DW), \\
 \lambda b_z &= \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} (D^2 - a^2) b_z + ia U,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

tandis que la pression et le champ magnétique horizontal sont donnés par

$$\frac{p}{p_s} = \frac{\rho}{\rho_s} + \frac{\theta}{T_s}, \tag{3.3}$$

$$0 = D b_z + iab_x. \tag{3.4}$$

Finalement, les conditions aux limites suivantes sur les perturbations sont imposées :

$$W = D U = D \theta = 0 \tag{3.5}$$

sur les deux parois ( $z = 0$  and  $z = 1$ ), afin d'obtenir un problème aux valeurs propres complet. Ces conditions expriment l'absence de contrainte tangentielle pour la vitesse aux parois et un flux thermique fixé.

Remarque

On suppose que le champ magnétique est vertical au niveau des parois, ce qui implique

$$D b_z = 0. \quad (3.6)$$

Dans le cas où la bifurcation vers la convection se produit pour  $\lambda = 0$ , cette dernière condition ne joue aucun rôle dans la détermination du mode propre. En effet, l'équation différentielle sur  $z$  est alors du sixième ordre et les conditions aux limites sur la vitesse et la température suffisent à bien poser le problème. En revanche si on considère le problème de l'overstabilité magnétique pour laquelle la convection se met en place par une bifurcation de Hopf ( $\lambda = \pm i\omega$ ), l'ordre de l'équation est huit, et les conditions aux limites sur le champ magnétique deviennent cruciales pour le calcul du mode propre, un aspect négligé par Chandrasekhar (1961) dans son analyse de l'instabilité de magnétoconvection dans l'approximation de Boussinesq (les valeurs des seuils d'overstabilité données dans le livre ne sont valables que dans le cas où le champ magnétique vertical s'annule aux bords).

### 3.3.b Forme anélastique

Il est également possible d'utiliser la version anélastique des équations linéarisées, comme dans le travail de Gough et al. (1976). L'approximation anélastique consiste à négliger les ondes sonores en imposant  $\partial_t \rho = 0 = -\nabla \cdot (\rho v)$ , mais ne supprime pas pour autant les effets de la stratification de densité sur la convection. Elle permet donc de se débarrasser de l'équation d'évolution pour la densité et d'exprimer le problème complet pour les trois variables  $(\theta, W, b_z)$  uniquement. Nous donnons simplement ici le résultat des calculs. Pour les obtenir on utilise les relations suivantes pour les perturbations, basées sur la définition du profil polytropique d'index  $m$  :

$$\begin{aligned} D \rho_s &= \frac{m}{z + z_0} \rho_s, \\ \nabla \cdot v &= -\frac{m W}{(z + z_0)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 -\rho_s \lambda \left\{ \begin{array}{l} (D^2 - a^2) W \\ + \frac{(m-1)}{(z+z_0)} D W \\ - \frac{2m}{(z+z_0)^2} W \end{array} \right\} &= -\frac{(m+1)}{(z+z_0)} Q \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} (D^2 - a^2) b_z \\
 &+ Q \frac{\text{Pr}^2}{\text{Pr}_m} D (D^2 - a^2) b_z \\
 &- \frac{a^2 \Lambda \rho_s}{(z+z_0)} \theta - \text{Pr} (D^2 - a^2)^2 W \\
 &+ \frac{2m(m+4)}{(z+z_0)^4} \text{Pr} W - \frac{2m(m+4)}{(z+z_0)^3} \text{Pr} D W \\
 &+ \frac{m(m+4)}{(z+z_0)^2} \text{Pr} D^2 W - \frac{1}{3} \frac{a^2 m (4m+7)}{(z+z_0)^2} \text{Pr} W \\
 &+ \text{Pr} \frac{D (D^2 - a^2)}{(z+z_0)} W, \\
 \frac{\rho_s \lambda}{\gamma} \theta &= -\frac{(1+m-\gamma m)}{\gamma} \rho_s W + (D^2 - a^2) \theta, \\
 \lambda b_z &= -\frac{m}{(z+z_0)} W - D W \\
 &+ \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_m} (D^2 - a^2) b_z.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Résoudre le problème anélastique en marge du problème complet permet notamment de vérifier la validité des solutions obtenues, ce qui est toujours intéressant.

### 3.3.c Équation cubique dans l'approximation de Boussinesq

Finalement, dans la limite de l'approximation de Boussinesq, que nous étudierons plus tard, les équations que l'on doit résoudre pour calculer les seuils de stabilité marginale se mettent sous la forme suivante :

$$(D^2 - a^2)^3 W + a^2 R W - Q D^2 (D^2 - a^2) W = 0 \tag{3.9}$$

et

$$(D^2 - a^2) \theta = -\text{Pr} W. \tag{3.10}$$

## 3.4 Résultats

### 3.4.a Méthode numérique

Nous avons calculé les modes propres du système dans le cas de mouvements stationnaires en utilisant LSB, le code de résolution de problèmes linéaires développé par Lorenzo Valdettaro et Michel Rieutord. La projection de l'équation différentielle est effectuée sur une grille de Gauss-Lobatto construite à partir des polynômes de Chebyshev. L'avantage principal de cette méthode de collocation est sa convergence spectrale. Deux algorithmes ont été utilisés : une méthode QZ (voir par exemple Chatelin (1993)) qui permet de déterminer le spectre complet des valeurs propres, et une méthode itérative (Arnoldi-Chebyshev) qui calcule seulement quelques modes propres autour d'une valeur propre choisie. Soulignons que la résolution des équations présentées ci-dessus requiert l'utilisation d'arithmétiques 64 bits (disponibles sur Compaq-Alpha et SGI Origin) et de quadruple précision<sup>1</sup>, afin d'obtenir une bonne convergence des solutions lorsque le vecteur d'onde horizontal  $a$  tend vers 0. Ceci permet d'éviter l'utilisation de développements en série comme ceux employés par Gough et al. (1976) dans une étude similaire.

On peut procéder de deux façons distinctes : dans le premier cas, la valeur propre est directement  $\lambda$ , et on fait varier le nombre de Rayleigh  $R$  jusqu'à ce que la partie réelle de  $\lambda$  devienne positive. Cette méthode présente l'avantage de donner à la fois les seuils d'overstabilité et de convection stationnaire. Dans la deuxième approche, on fixe  $\lambda$  à zéro et on résout alors le problème aux valeurs propres directement pour  $R$ . Cette dernière méthode permet d'obtenir immédiatement la courbe de stabilité marginale  $R(a)$  de manière très précise mais n'est pas utilisable dans le cas de la convection oscillante.

Le code a été validé sur des configurations utilisant des conditions aux limites différentes étudiées auparavant (Gough et al. 1976, Weiss et al. 1990).

### 3.4.b Diverses configurations

L'ensemble des résultats pour  $m = 1$  est résumé dans le tableau 3.1.

#### Effet du degré de compressibilité

En premier lieu, on peut s'intéresser au comportement de l'instabilité lorsqu'on passe d'un milieu quasi-incompressible ( $z_0 \rightarrow +\infty$ ) à un milieu fortement stratifié (petits  $z_0$ ), en absence de champ magnétique. Le nombre de Rayleigh critique est relativement peu sensible à ce changement de configuration, même si la stratification défavorise la naissance de la convection (partie gauche de la fi-

---

<sup>1</sup>Merci à Arnaud Antkowiak et Lorenzo Valdettaro pour leur aide à ce sujet !

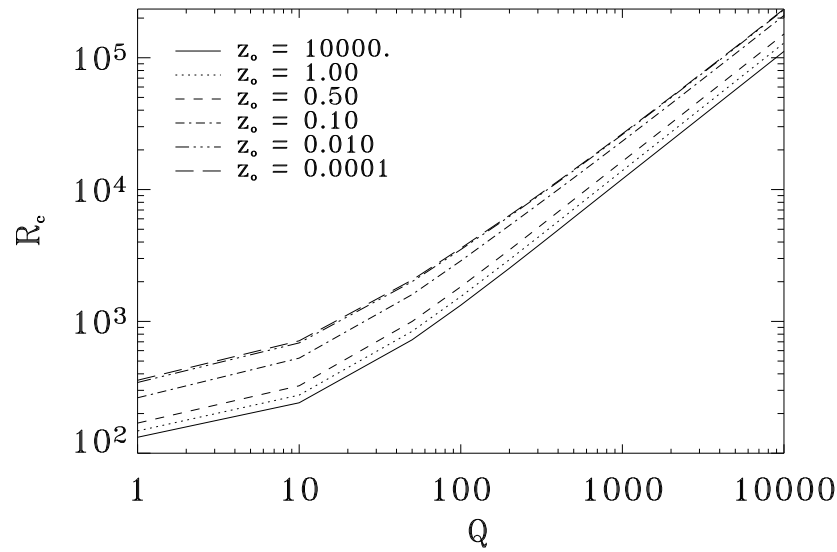


FIG. 3.1 – Variation du nombre de Rayleigh critique  $R_c$  pour différents  $z_0$  lorsqu'on augmente le champ magnétique. Le comportement dans la partie droite de la figure correspond à la limite  $R_c \rightarrow 12Q$  (voir paragraphe 3.5).

gure 3.1). Le vecteur d'onde critique est toujours  $a = 0$  quelque soit le degré de stratification du milieu (figure 3.2).

### Influence du champ magnétique

En se limitant à l'influence du champ magnétique vertical sur une configuration de type Boussinesq, on retrouve le comportement qualitatif décrit par Murphy (1977) et les résultats de Edwards (1990). La figure 3.1 met en évidence une grande augmentation du nombre de Rayleigh critique, comme dans le cas des conditions aux limites plus habituelles. Cependant la situation est légèrement différente dans la mesure où le vecteur d'onde critique reste nul pour  $Q < 394.4$  puis devient non-nul pour des intensités magnétiques supérieures (figure 3.2). La transition est bien illustrée sur le réseau de courbes de stabilité marginale de la figure 3.3. Lors de la transition, la courbure change de signe, une propriété que nous utiliserons au paragraphe 3.5 pour calculer le seuil de transition analytiquement.

### Régime mixte

Dans la photosphère solaire, la stratification et le champ magnétique sont deux acteurs majeurs de la dynamique. Le régime mixte est donc le plus intéressant à étudier. On voit sur la figure 3.2 que la valeur seuil du nombre de Chandrasekhar pour que la transition mentionnée précédemment se produise diminue en même



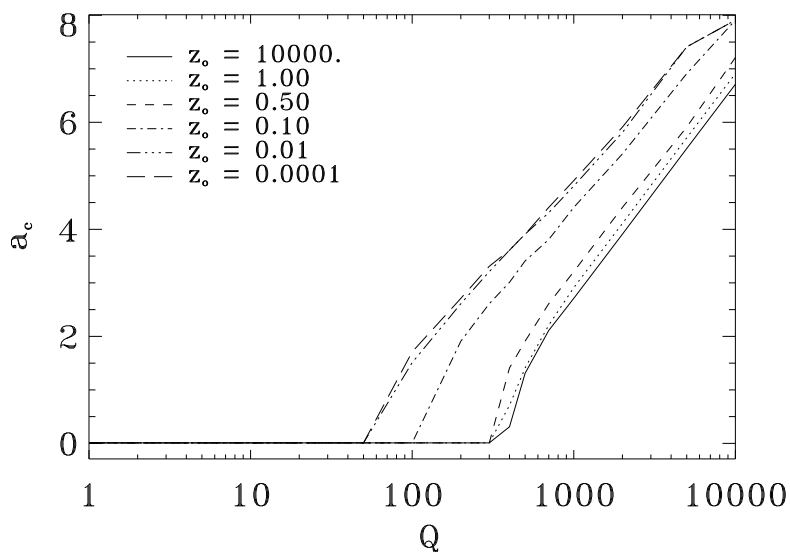


FIG. 3.2 – Influence de  $Q$  sur le vecteur d'onde horizontal critique  $a_c$ , à  $z_0$  fixé. Pour des valeurs suffisamment élevées,  $a_c$  bifurque vers des valeurs non-nulles. La valeur précise du seuil dépend du degré de stratification de la couche.

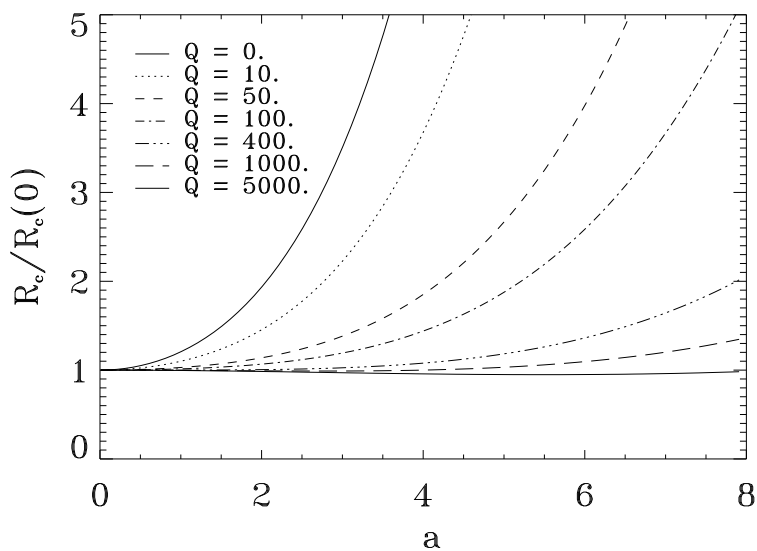


FIG. 3.3 – Courbes de stabilité marginale pour différents  $Q$ , dans l'approximation de Boussinesq. Celles-ci sont normalisées à  $R_c(a = 0, Q)$  pour souligner la transition vers  $a_c \neq 0$ . La courbe supérieure correspond à  $Q = 0$ .

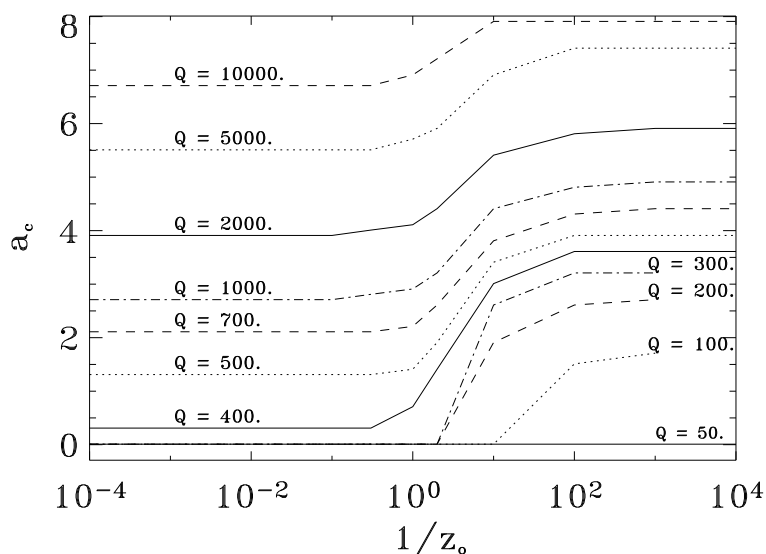


FIG. 3.4 – Influence du degré de compressibilité sur le vecteur d’onde horizontal à  $Q$  fixé.

temps que l’on augmente la stratification de densité au travers de la couche, jusqu’à atteindre une valeur limite de 61 dans le cas infiniment compressible. Cette valeur a été obtenue numériquement et est atteinte relativement rapidement lorsqu’on diminue  $z_0$ , en raison de la forme asymptotique des équations vis-à-vis de ce paramètre<sup>2</sup>. Si  $Q$  est supérieur à la valeur seuil, les comportements du vecteur d’onde et du nombre de Rayleigh critiques sont alors qualitativement les mêmes que dans le cas de conditions aux limites de type température fixée (figure 3.4 et 3.5). Lorsque  $Q$  est inférieur à 61 il est impossible dans tous les cas de générer dans le régime linéaire une instabilité avec  $a_c \neq 0$ . Bien sûr, la situation pourrait être différente dans le domaine non-linéaire. Finalement, remarquons que la compressibilité et le champ magnétique agissent toujours de concert pour inhiber la convection, le champ magnétique étant cependant plus efficace pour cela. Dans le cas où la rotation et le champ sont combinés, il est au contraire possible de faciliter la naissance de la convection dans certains régimes où la force de Coriolis contrebalance la force de Lorentz (Chandrasekhar 1961).

<sup>2</sup>Le développement anélastique des équations linéarisées pour les polytropes fait apparaître des termes en  $(z + z_0)^{-n}$ , avec  $1 \leq n \leq 4$ .

$Q$	$1/z_0$							
	0	0.33	1.	2.	10.	100.	1000.	10000.
0	120.	121.9	133.2	151.8	232.8	303.	313.7	314.8
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
1	132.1	134.4	147.5	169.2	263.3	344.1	356.4	357.7
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
10	241.3	246.4	276.	324.6	526.6	686.9	710.1	712.5
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
50	724.8	742.2	840.7	999.	1597.9	2001.4	2054.6	2060.1
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
60	845.4	865.9	981.1	1165.9	1856.5	2312.5	2371.8	2377.9
	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
70	966.	989.4	1121.4	1332.4	2113.4	2620.2	2683.9	2690.4
	0.	0.	0.	0.	0.	0.6	0.8	0.8
80	1086.5	1112.9	1261.6	1498.6	2369.1	2921.2	2988.	2994.8
	0.	0.	0.	0.	0.	1.	1.2	1.2
100	1327.4	1359.7	1541.6	1830.5	2877.9	3506.	3578.8	3586.2
	0.	0.	0.	0.	0.	1.5	1.7	1.7
300	3732.	3823.2	4333.2	5132.7	7691.6	8869.8	8997.7	9010.5
	0.	0.	0.	0.	2.6	3.2	3.2	3.3
400	4933.1	5053.7	5726.5	6771.8	9990.3	11420.3	11573.5	11588.9
	0.3	0.3	0.7	1.4	3.	3.6	3.6	3.6
500	6129.1	6278.7	7111.	8394.1	12254.7	13929.7	14108.1	14126.
	1.3	1.3	1.4	1.9	3.4	3.9	3.9	3.9
1000	12011.	12303.2	13917.1	16354.8	23296.9	26145.9	26446.	26475.9
	2.7	2.8	2.9	3.2	4.4	4.8	4.9	4.9
10000	111725.8	114459.5	129417.3	151427.2	209267.7	231172.7	233442.6	233670.
	6.7	6.7	6.9	7.2	8.2	8.7	8.7	8.7

TAB. 3.1 – Nombres de Rayleigh et vecteurs d'onde critiques pour des conditions aux limites de type flux fixé dans une couche polytropicque d'indice  $m = 1$ , en fonction de l'intensité du champ magnétique, donnée par  $Q$ , et du degré de compressibilité, défini par l'intermédiaire du paramètre  $1/z_0$ .

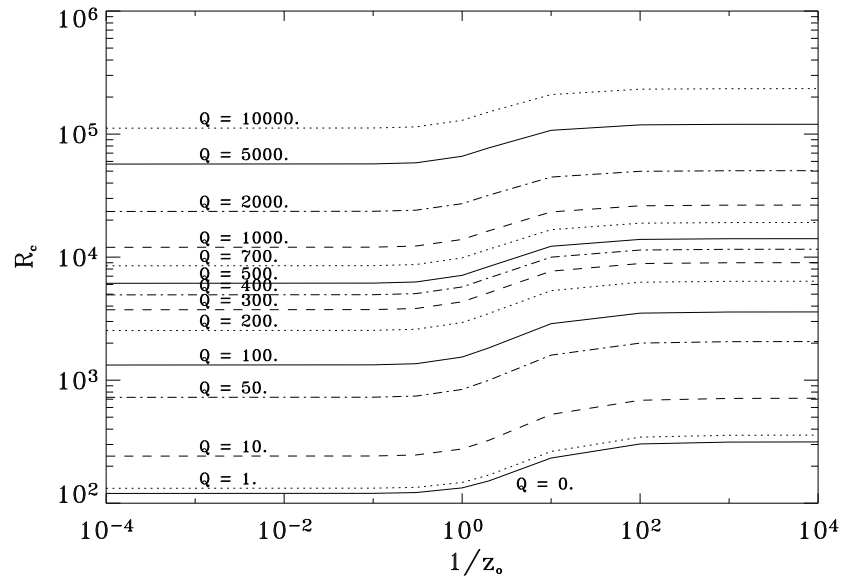


FIG. 3.5 – Influence de  $z_0$  sur le nombre de Rayleigh critique à  $Q$  fixé.

### 3.5 Développements analytiques dans l'approximation de Boussinesq

Nous présentons dans cette section des développements analytiques dans le cas Boussinesq, permettant de démontrer rigoureusement l'occurrence de la transition décrite précédemment. Ce travail a été effectué par Edwards (1990), et est publié dans la revue *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. Malheureusement, cette publication n'a jamais été citée et n'est référencée dans aucune base de données bibliographique à l'heure actuelle. Un referee de la revue *Physics of Fluids* nous a signalé l'existence de ces résultats, que nous avons redémontrés intégralement de manière indépendante. Nous nous permettons donc de les reproduire ici, la méthode de dérivation utilisée étant toutefois légèrement différente. Murphy (1977) s'était également intéressé à cette transition, mais les résultats quantitatifs contenus dans l'acte de conférence sont faux. La procédure utilisée s'inspire à la fois de Chandrasekhar (1961) et de Hurle et al. (1966).

#### 3.5.a Résolution de l'équation cubique

Nous partons des équations (3.9)-(3.10) pour résoudre le problème. Pour des raisons de symétrie spécifiques au cas Boussinesq et au jeu de conditions aux limites utilisé, il est possible de se restreindre aux solutions paires par rapport au milieu de la couche, qui sont toujours les premières instables :

$$W = \sum_{i=1}^3 A_i \cosh \left( q_i \left( z - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (3.11)$$

où les  $q_i$  sont solutions de l'équation caractéristique associée à l'équation (3.9). En posant  $Z_i = q_i^2 - a^2$ , on obtient l'équation cubique (Chandrasekhar 1961)

$$Z^3 - QZ^2 - Qa^2Z + a^2R = 0. \quad (3.12)$$

Les racines de celle-ci s'écrivent (Abramowitz et Stegun 1954)

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Q}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{Q^2 + 3Qa^2} \cos \left( \frac{\nu}{3} \right), \\ Z_2 &= \frac{Q}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{Q^2 + 3Qa^2} \cos \left( \frac{\nu + 2\pi}{3} \right), \\ Z_3 &= \frac{Q}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{Q^2 + 3Qa^2} \cos \left( \frac{\nu - 2\pi}{3} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec

$$\nu = \arccos \left( \frac{-2Q^3 - 9Q^2a^2 + 27a^2R}{2Q^3(1 + 3a^2/Q)^{3/2}} \right). \quad (3.14)$$

On insère alors les racines dans le déterminant D du système en utilisant les conditions aux limites, afin d'obtenir la solution complète. Il n'y aura des solutions non-triviales que si

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 \\ \left( q_1 Z_1^2 - Q q_1^3 \right) \times \tanh \left( \frac{q_1}{2} \right) & \left( q_2 Z_2^2 - Q q_2^3 \right) \times \tanh \left( \frac{q_2}{2} \right) & \left( q_3 Z_3^2 - Q q_3^3 \right) \times \tanh \left( \frac{q_3}{2} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.15)$$

Puisque l'on cherche à déterminer le comportement autour de  $a = 0$ , on peut essayer de développer D en série de puissances de  $a$  (on suppose que le rayon de convergence de cette série est non-nul) en utilisant les expressions (3.13)-(3.14) :

$$D = f_1(R, Q) a^3 + f_2(R, Q) a^5 + \mathcal{O}(a^7). \quad (3.16)$$

Le premier terme non nul est  $\mathcal{O}(a^3)$ . Si on résout l'équation (3.15) à cet ordre, on trouve alors le comportement de  $R_c(a = 0, Q)$ . L'ordre suivant est  $\mathcal{O}(a^5)$  et permet de calculer la courbure de la courbe de stabilité marginale. Lorsque la convexité change, la bifurcation vers  $a_c \neq 0$  est observée.

### 3.5.b Dépendance de $R_c$ vis-à-vis de $Q$ pour $a = 0$

Le premier terme obtenu à partir des équations (3.13)-(3.14) donne

$$f_1(R, Q) = \frac{2R^{3/2}}{Q} \tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right) - \frac{R^{3/2}}{\sqrt{Q}} - \sqrt{R}Q^{3/2} + \frac{R^{3/2}\sqrt{Q}}{12}. \quad (3.17)$$

$D$  obéit à l'équation (3.15) à la stabilité marginale. Pour tout  $a$  petit, on doit donc avoir  $f_1 = 0$ . Le nombre de Rayleigh critique approche alors

$$R_c(a = 0, Q) = \frac{12 Q^{5/2}}{Q^{3/2} + 24 \tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right) - 12\sqrt{Q}} \quad (3.18)$$

lorsque  $a$  tend vers 0. Dans la limite  $Q \rightarrow +\infty$  (figure 3.1), on montre que  $R_c(0, Q)$  tend vers  $12Q$  de manière similaire à la loi  $\pi^2 Q$  obtenue par Chandrasekhar (1961) dans le cas de conditions aux limites de type température fixée. Si  $Q \rightarrow 0$ , on retrouve la valeur  $R_c(a = 0) = 120$  de Hurle et al. (1966). Le résultat (3.18) est en parfait accord avec les solutions numériques. On peut alors calculer la pente de la fonction  $R(a)$  :

$$\left. \frac{\partial R}{\partial a} \right|_D = - \left. \frac{\partial R}{\partial D} \right|_a \left. \frac{\partial D}{\partial a} \right|_R = -3 \frac{f_1}{a f_1'} - \frac{5f_2 - \frac{3f_1 f_2'}{f_1'}}{f_1'} a + \mathcal{O}(a^3), \quad (3.19)$$

où les  $'$  correspondent à des dérivées par rapport à la variable  $R$ , et

$$\Phi(Q) = Q^{3/2} + 24 \tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right) - 12\sqrt{Q}, \quad (3.20)$$

$$f_1' = \frac{Q^{1/4}}{\sqrt{12}} \Phi^{1/2}. \quad (3.21)$$

Pour  $a \rightarrow 0$ ,  $f_1/a \rightarrow f_1' \left. \frac{\partial R}{\partial a} \right|_D$ . En utilisant l'équation (3.19), on peut vérifier que la pente est nulle pour  $a = 0$ . Ceci était attendu puisque la courbe de stabilité marginale est une fonction paire de  $a$  en raison de la symétrie du problème physique.

### 3.5.c Transition vers une longueur d'onde finie

Un calcul assez laborieux, effectué partiellement grâce au logiciel de calcul formel Maxima, permet alors d'accéder à la fonction  $f_2(R, Q)$  :

$$f_2 = \frac{\Phi^{1/2}}{\sqrt{12} Q^{21/4}} \left\{ \begin{array}{l} -1080 \frac{Q^8}{\Phi^3} - \frac{57}{2} \frac{Q^7}{\Phi} + 450 \frac{Q^{15/2}}{\Phi^2} + 27 \frac{Q^{17/2}}{\Phi^2} - 54 \frac{Q^9}{\Phi^3} \\ + \frac{9}{8} \frac{Q^8}{\Phi} - \frac{144}{5} \frac{Q^{10}}{\Phi^3} - \frac{12}{5} \frac{Q^{19/2}}{\Phi^2} + \frac{51}{35} \frac{Q^{11}}{\Phi^3} - \frac{Q^{13/2}}{8} \\ + 576 \frac{Q^{15/2} \exp \sqrt{Q}}{\Phi^2 (1 + \exp \sqrt{Q})^2} - 3456 \frac{Q^8 \exp \sqrt{Q}}{\Phi^3 (1 + \exp \sqrt{Q})^2} \\ + 3 \frac{Q^{13/2} \tanh \left( \frac{\sqrt{Q}}{2} \right)}{\Phi} - 216 \frac{Q^7 \tanh \left( \frac{\sqrt{Q}}{2} \right)}{\Phi^2} \\ + 3888 \frac{Q^{15/2} \tanh \left( \frac{\sqrt{Q}}{2} \right)}{\Phi^3} \end{array} \right\}. \quad (3.22)$$

On peut alors déterminer directement la valeur de  $Q$  pour laquelle la transition vers les longueurs d'onde finies se produit. La courbure de  $R(a)$  est donnée par

$$\left. \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \right|_{D=0} = -2 \frac{f_2(R_c(0, Q))}{f_1'(R_c(0, Q))} \quad (3.23)$$

en  $a = 0$ . On peut vérifier sur la figure 3.6 que  $f_1'$  est toujours positive, si bien que tout dépend directement du signe de  $f_2$ . Pour  $Q < 394.4$ ,  $f_2 < 0$  et  $R_c(0, Q)$  est le minimum absolu. Pour des valeurs de  $Q$  supérieures,  $f_2$  est toujours positive et  $R_c(0, Q)$  est un maximum local. Murphy (1977) avait donné une valeur erronée  $Q \sim 10^{2.2}$  pour la transition, tandis que Edwards (1990) avait obtenu le résultat exact en utilisant une méthode légèrement différente basée sur les conditions de solvabilité d'un développement du nombre de Rayleigh en puissances de  $a$ .

### 3.6 Discussion

Les résultats établis aux paragraphes précédents ont des implications intéressantes du point de vue de la génération de structures convectives de grande taille dans la photosphère solaire. En dépit de la simplicité du modèle, cette étude livre des informations importantes sur le comportement de l'instabilité dans les conditions particulières de flux fixé.

Dans une zone extrêmement stratifiée comme le haut de la zone convective solaire, où la turbulence aux échelles correspondant à la granulation augmente

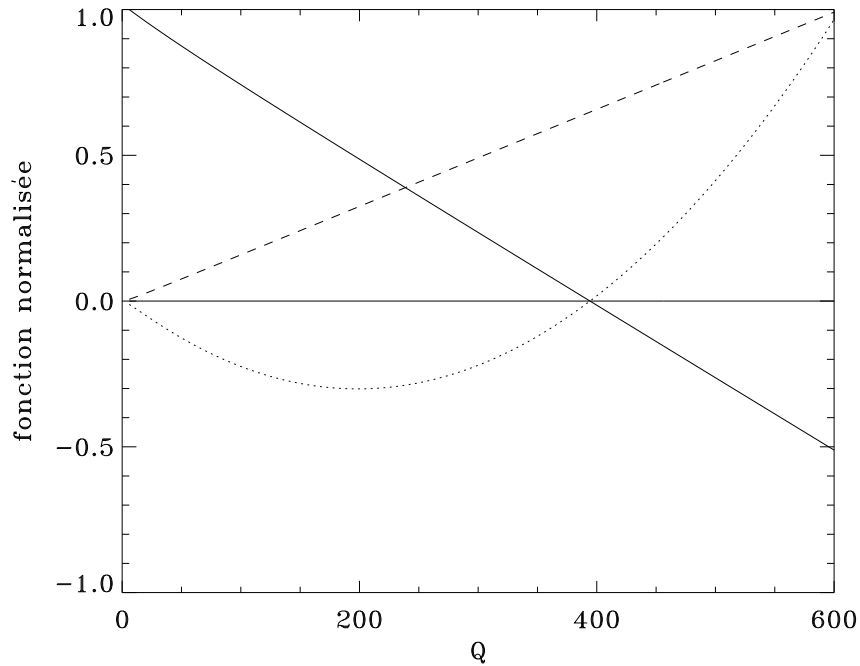


FIG. 3.6 – Variation de  $f(Q) = \frac{\partial^2 R}{\partial a^2} \Big|_D$  (trait plein),  $f_1'$  (tirets) and  $f_2$  (pointillés) pour  $a = 0$ . Les fonctions ont été normalisées.

considérablement les propriétés de transport du fluide, on peut imaginer un scénario pour lequel des longueurs d'onde très grandes par rapport à la granulation peuvent être déstabilisées par un mécanisme linéaire<sup>3</sup>. La taille de la longueur d'onde déstabilisée serait alors contrôlée par l'intensité moyenne du champ magnétique qui traverse la couche. En effet, nous avons montré qu'une transition vers les longueurs d'onde finies était réalisable pour peu que le champ magnétique soit suffisamment fort, et que cette transition était favorisée lorsque la stratification devenait extrêmement importante. Dans ce cas, le nombre de Chandrasekhar critique est 61.

On peut estimer le champ magnétique minimal nécessaire à l'occurrence de cet effet dans la photosphère solaire. Considérons les diffusivités renormalisées calculées au paragraphe 3.2.a, une densité  $\rho_d = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$  pour une profondeur  $d \simeq 5 \text{ 000 km}$  ( $z_o \simeq 0.01$ ). La longueur d'onde de la supergranulation sera l'échelle instable si  $Q \simeq 100$ , ce qui correspond à un champ de l'ordre de 100 G à 1 kG. Cette valeur, est élevée, mais reste compatible avec les intensités observées au niveau du réseau magnétique solaire.

<sup>3</sup>On peut là encore faire un parallèle avec les modèles de dynamo. Le modèle (linéaire) de dynamo cinématique permet par exemple d'expliquer certaines des observations sur l'activité magnétique solaire *aux grandes échelles*, alors que la turbulence sous-jacente est par définition fortement non-linéaire. Ceci suggère que les mécanismes agissant aux grandes échelles peuvent être seulement faiblement non-linéaires.



Bien entendu, beaucoup de paramètres sont mal contrôlés dans ce modèle empirique. Par exemple, certains auteurs (Vainshtein et al. 1991, Cattaneo et Vainshtein 1991, Cattaneo 1994) ont suggéré que la diffusivité magnétique turbulente pouvait être très inférieure à la valeur approximative obtenue par la « recette » de l'analyse dimensionnelle, lorsqu'un champ magnétique même faible était présent dans le fluide. La distribution du champ magnétique de surface montre aussi que le facteur de remplissage est plutôt faible et que l'interaction entre la dynamique et le champ magnétique est loin d'être négligeable, si bien que l'hypothèse d'un champ vertical et constant au travers de la couche est plutôt simpliste. Cependant, les valeurs estimées donnent un ordre de grandeur satisfaisant.

Nous concluons donc qu'un tel mécanisme d'instabilité linéaire reste crédible pour expliquer la supergranulation comme phénomène de surface (sans avoir à évoquer la recombinaison de l'hélium en profondeur). La supergranulation pourrait alors être vue comme la première grande échelle linéairement instable convectivement lorsque des champs magnétiques similaires à ceux du réseau photosphérique sont présents. Cette étude ne permet pas pour autant de résoudre le problème de la nature convective ou non de la supergranulation, puisque la modélisation du transport turbulent aux échelles plus petites que la supergranulation y est réduite à sa plus simple expression (une diffusion turbulente), ce qui exclut *de facto* des mécanismes d'instabilité liés à la turbulence à petite échelle. Pour aller plus loin, une simulation numérique de turbulence comme celle présentée au chapitre 4 est nécessaire.



# Magnetically driven transition of marginal compressible convection with a prescribed heat flux

F. Rincon\* and M. Rieutord

*Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées,  
14 avenue Édouard Belin, 31400 TOULOUSE, FRANCE*

(Dated: October 26, 2004)

We present an investigation of the onset of steady Rayleigh-Bénard magnetoconvection in a polytropic fluid layer when a fixed heat flux is prescribed at the boundaries. In a non-magnetic Boussinesq context, such a configuration is known to favor a “mode” with zero horizontal wave number. We show that the situation can be somewhat different when stratification and magnetic field combine, giving birth to a finite horizontal marginal scale in most cases. We demonstrate analytically that the transition to a non-zero wave number occurs for a Chandrasekhar number  $Q = 394.3$  in the Boussinesq limit, while stratification tends to reduce this critical value.

PACS numbers: 47.27.Te, 96.60.Mz

Since the pioneering work of Rayleigh<sup>1</sup>, natural convection and the Rayleigh-Bénard problem have been extensively studied, mainly in the framework of the Boussinesq approximation. Also, the almost-exclusive choice of perfectly thermally conducting boundaries has been made, since the top and bottom plates are usually held at fixed temperature in laboratory experiments. However, for some highly stratified convective layers such as stellar atmospheres, including compressible effects becomes necessary<sup>2,3</sup>. Depassier and Spiegel<sup>4</sup> initiated a discussion about the right choice of temperature boundary conditions in astrophysical convection. Nordlund<sup>5</sup> suggested to use thermally insulating boundaries (hereafter called “fixed flux boundaries”) in numerical simulations of flows at scales larger than granulation at the Sun’s surface, since small-scale granular flows are known to transport most of the *prescribed* solar energy flux.

Linear stability results with fixed flux boundaries have first been obtained by Sparrow et al.<sup>6</sup> and Hurle et al.<sup>7</sup>; these authors showed that the convective instability developed on large horizontal scales since such boundary conditions yield a critical wave number  $a_c = 0$ .

Depassier and Spiegel<sup>4</sup> used this property to investigate the weakly non-linear problem for a *compressible* fluid, focusing on the limit of small wave numbers  $a$ . They concluded that this type of large-scale convection was very likely at work in stellar atmospheres, although the very special case  $a = 0$  made little sense physically. In the same spirit, Murphy<sup>8</sup> tackled the problem of mixing fixed flux boundaries with a constant *magnetic field* permeating a Boussinesq layer. A sufficiently strong magnetic field was able to create a transition to non-zero critical wave number. Roberts<sup>9</sup>, using such boundaries in non-magnetic penetrative convection, found a similar transition depending on the depth of the layer.

In this Brief Communication we address the problem of the onset of convection in a *compressible magnetized fluid with fixed flux boundaries*, a configuration that has not yet been studied in detail in spite of its relevance to astrophysical systems; we show that the marginal stability curve undergoes a transition from zero to finite wave

number when the magnetic field exceeds a critical value and perform a mathematical analysis of the Boussinesq limit.

The model relies on a fully compressible description of the fluid motions in a constant gravity field  $\vec{g} = g \vec{e}_z$ . We assume a perfect gas equation of state and impose constant specific heat  $c_p$ , dynamical viscosity  $\mu$ , electrical ( $\sigma$ ) and thermal ( $\chi$ ) conductivities. The static background is a polytrope confined between two thermally insulating plates at  $z = 0$  (top, temperature  $T_o$ ) and  $z = d$  (bottom, temperature  $T_1 > T_o$ ). A uniform vertical magnetic field  $\vec{B} = -B_o \vec{e}_z$  is imposed. The non-dimensional equations for compressible magnetoconvection are obtained by taking  $d$  as the unit of length (from now on,  $0 < z < 1$ ),  $\rho_d$ , the bottom density, as the unit of density,  $\Delta T$ , the temperature difference between the two plates, as the unit of temperature, the thermal time scale  $(\rho_d c_p d^2)/\chi$  as the unit of time, and  $B_o$  as the unit of magnetic field. The resistivity is  $\eta = 1/(\sigma \mu_o)$  and the thermal diffusivity is  $\kappa = \chi/(\rho_d c_p)$ .  $Q = (B_o^2 d^2)/(\mu_o \mu \eta)$  is the Chandrasekhar number,  $Pr = \mu/(\rho_d \kappa)$  is the thermal Prandtl number,  $Pr_m = \mu/(\rho_d \eta)$  is the magnetic Prandtl number at the bottom of the layer,  $\beta = c_s^2/V_A^2 = \mathcal{R} \Delta T \rho_d \mu_o / B^2$  is an estimate of the ratio between the sound speed and the Alfvén speed, and  $m = (gd)/(\mathcal{R} \Delta T) - 1$  is the polytropic index of the layer. Finally, we set  $\Lambda = (g d^3)/\kappa^2$ . The background polytropic solution reads

$$\begin{aligned} T_s(z) &= z_o + z, \\ \rho_s(z) &= \left( \frac{z_o + z}{z_o + 1} \right)^m, \\ P_s(z) &= \frac{\Lambda}{m + 1} \rho_s T_s, \end{aligned} \tag{1}$$

with  $z_o = T_o/\Delta T$ . Note that  $1/z_o$  is a measure of the stratification of the layer for fixed  $m$ .

As is usual in linear stability we consider 2D infinitesimal disturbances  $W(z)$  (vertical velocity),  $U(z)$  (horizontal velocity),  $\theta(z)$ ,  $\rho(z)$ ,  $b_z(z)$  with a prescribed



# Simulations numériques de convection turbulente à grand rapport d'aspect

*There is a need for numerical simulations at the scale of supergranulation [...] This is probably feasible with present day computers and numerical methods.*

Å. Nordlund, Solar Physics, Oct. 1985

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé les résultats d'un modèle linéaire de convection à grande échelle. L'hypothèse essentielle de cette étude était que le mouvement aux grandes échelles pouvait être approximé correctement par un formalisme linéaire, en supposant que les petites échelles se comportaient essentiellement comme des diffuseurs turbulents. Notons au passage que dans ce modèle simplifié de supergranulation, nous nous sommes concentrés sur une modélisation de couche mince, et que nous n'avons pas pris en compte divers degrés d'ionisation à différentes profondeurs, contrairement à l'explication historique de la supergranulation.

Pour aller plus loin que cette modélisation à l'ordre zéro, il est nécessaire de passer à des simulations numériques directes d'écoulements convectifs à grande échelle, similaires à celles présentées au chapitre 1. Une telle approche a plusieurs avantages. Elle offre un cadre physique plus réaliste que le modèle linéaire, car elle intègre rigoureusement les interactions entre un grand nombre de modes. L'incorporation de la stratification en densité dans ce modèle est également réalisable, à quelques difficultés numériques près (voir annexe A).

Notre approche a été similaire à celle utilisée par Cattaneo et al. (1991, 2001). Pour cela, nous avons eu recours à BALAÏTOUS, le code de simulations numé-

riques directes de l'équipe de dynamique des fluides de Toulouse, qui est présenté extensivement en annexe A. Nous avons pour la première fois simulé un écoulement convectif turbulent compressible (polytropique) *sans champ magnétique* dans un domaine cartésien (il s'agit donc d'une simulation locale) de rapport d'aspect  $A = 42.6$ . Cette valeur permet tout particulièrement de combler le vide existant entre les simulations globales et les simulations locales réalisées jusqu'à présent (chapitre 1) et d'autoriser simultanément le développement d'échelles supergranulaires et granulaires en dehors de la zone de dissipation. La prise en compte de la stratification en densité par le biais d'un profil polytropique permet d'obtenir un modèle plus satisfaisant d'atmosphère stellaire qu'une simulation de type Boussinesq comme celle de Cattaneo et al. (2001), et également d'atténuer les effets d'une condition aux limites de type paroi. Finalement, la présence du champ magnétique ajoute une complexité considérable de tous points de vue (numérique et théorique) et nous avons estimé qu'il était préférable de ne pas l'inclure dans un premier temps.

Les résultats de la simulation fournissent de nombreux renseignements sur la nature des interactions non-linéaires entre échelles très différentes pouvant simultanément être résolues numériquement. Nous tenterons en particulier de répondre aux questions suivantes. Quelles sont les propriétés qualitatives, statistiques et spectrales de l'écoulement observé lorsqu'on lui laisse « de la place » horizontalement ? Peut-on mettre en évidence des interactions collectives entre petites échelles, comme il a été suggéré par Cattaneo et al. (2001) ?

Nous nous demanderons ensuite dans quelle mesure les structures observées dans la simulation peuvent être reliées aux structures visibles dans la photosphère solaire. Nous tenterons d'identifier les mécanismes responsables de la formation de structures d'échelles différentes dans la simulation et de les rattacher dans la mesure du possible aux mécanismes à l'œuvre dans la photosphère. Pour cela, nous présenterons une comparaison avec des simulations de convection radiative à grand rapport d'aspect réalisées par Rieutord et al. (2002), qui utilisent un modèle plus réaliste que le polytrophe à proximité de la surface.

Nous essaierons finalement de tirer les conclusions de cette expérience pour le problème des relations entre granulation, mésogranulation et supergranulation. Les résultats obtenus peuvent-ils en particulier nous aider à savoir si la supergranulation est issue d'un mécanisme non-linéaire agissant à la surface solaire (*via* une instabilité à grande échelle de la granulation) ou si son existence repose sur d'autres phénomènes physiques ?

Ce travail a été réalisé en collaboration étroite avec François Lignières. Il a été discuté à plusieurs reprises avec notamment Michael Proctor, Nigel Weiss et Bernd Freytag, que je souhaite tout particulièrement remercier ici.

## 4.2 La simulation

### 4.2.a Paramètres physiques et numériques

Les notations employées ici sont celles des chapitres 2 et de l'annexe A. Les paramètres de la simulation sont les suivants : le rapport d'aspect vaut  $A = 42.6$ , l'index polytropique est  $m = 1$  (stratification instable). Une stratification initiale  $z_o = 0.5$  est appliquée, correspondant à un contraste de densité  $\rho_b/\rho_t = 3$  entre le bas et le haut (la surface) de la couche. Le nombre de Prandtl est  $Pr = 0.3$ , et le nombre de Rayleigh est  $R = 3 \cdot 10^5$ . Dans cette configuration, on trouve alors  $\Lambda = 1.012 \cdot 10^6$  et  $C_k = 1.4 \cdot 10^{-3}$ . Au profil thermodynamique initial, on ajoute comme conditions initiales des perturbations aléatoires de vitesse, densité et température.

Les conditions aux limites sont stress-free et impénétrables pour la vitesse sur les deux parois. Une température  $z_o = 0.5$  constante est imposée au niveau de la plaque supérieure, tandis qu'un flux thermique constant  $(\gamma \Lambda)/((\gamma - 1)(m + 1))$ , correspondant à un gradient de température de -1 dans le système d'unités choisi, est imposé en bas de la couche (cf. équation (2.13), chapitre 2). Avec ces conditions aux limites, les paramètres physiques du modèle et le nombre de Rayleigh choisi, la configuration est approximativement 640 fois supercritique du point de vue de l'instabilité convective.

La résolution utilisée pour atteindre ce rapport d'aspect est  $1024 \times 1024 \times 82$  (1024 points dans chaque direction horizontale). Le schéma compact d'ordre 6 est utilisé dans la direction verticale, un dealiasing coupant le dernier tiers des modes de Fourier horizontaux est appliqué à chaque pas de temps. L'avancement en temps est réalisé avec le schéma complètement explicite de Runge-Kutta d'ordre 3. Aucune hyperviscosité n'est ajoutée. Cette simulation a été réalisée sur 64 processeurs Power 4 cadencés à 1.7 GHz de l'IBM SP4 de l'IDRIS. Elle a nécessité 60 000 heures de calcul et a produit plus de 400 Go de données.

### 4.2.b Commentaires

La stratification en densité appliquée n'est pas très importante dans cette expérience. En raison du choix d'une viscosité dynamique et d'une conductivité thermique constantes, imposer de très faibles densités en surface revient à augmenter considérablement la diffusion dans ces couches et donc à diminuer fortement les pas de temps correspondants. Le choix d'une stratification modeste a donc été fait pour éviter ce genre de désagréments qui auraient rendu le calcul prohibitif. Cependant, pour le contraste de densité choisi, on observe déjà une bonne partie des effets de la compressibilité dans le problème linéaire de l'instabilité convective (voir par exemple la figure 3.5, chapitre 3 :  $Q = 0$  et  $1/z_o = 2$  correspond à la région de transition entre le régime incompressible et le régime infiniment stratifié), si bien que l'on peut espérer capturer une bonne partie des effets de la stratification en densité avec cette valeur.

La combinaison  $R = 3 \cdot 10^5$ ,  $Pr = 0.3$  provient de simulations de Cattaneo et al. (1991) avec un rapport d'aspect  $A = 6$ . Dans cette étude les auteurs considéraient que ce jeu de paramètres était le minimum requis pour obtenir un écoulement présentant un début de loi de puissance pour les spectres.

Remarquons également que pour les paramètres choisis, les pas de temps requis pour résoudre les ondes sonores et la diffusion sont du même ordre de grandeur. L'utilisation d'un schéma implicite sur la diffusion dans ce cas est donc d'un intérêt limité, puisque c'est la condition CFL qui détermine de toute façon le pas de temps.

### 4.2.c Définition des spectres

Dans ce chapitre, il sera à de nombreuses occasions question de spectres turbulents. Nous définissons donc de la manière suivante le spectre pour la quantité de mouvement  $E(k, z)$  et pour la température  $E_\theta(k, z)$  :

$$E(k, z) = \int_{\Omega_k} \left| \widehat{(\rho v)}_k(z) \right|^2 k \, d\Omega_k \quad (4.1)$$

et

$$E_\theta(k, z) = \int_{\Omega_k} \left| \widehat{T}_k(z) \right|^2 k \, d\Omega_k. \quad (4.2)$$

Le chapeau signifie qu'on a pris la transformée de Fourier 2D horizontale des champs et  $d\Omega_k$  correspond à l'intégration sur les angles des vecteurs d'onde  $k$  dans le plan horizontal. Ces spectres dépendent de la profondeur. On peut alors définir les spectres intégrés  $E(k) = \int_0^1 E(k, z) dz$  et  $E_\theta(k) = \int_0^1 E_\theta(k, z) dz$  (noter que sur certaines figures, ces dernière notations sont utilisées pour désigner  $E(k, z)$  et  $E_\theta(k, z)$ ). Dans tout ce qui suit, les vecteurs d'onde horizontaux sont normalisés par rapport au plus petit vecteur d'onde de la boîte  $k_{\min} = 2\pi/A$  et sont donc entiers. Le mode  $k = 1$  est la composante à plus grande échelle, tandis que  $k = 42$  correspond à une longueur d'onde à peu près égale à l'épaisseur du domaine de simulation.

## 4.3 Description de l'écoulement

Nous allons à présent décrire l'évolution temporelle de la simulation et la structure de la convection. L'ensemble de l'expérience couvre 0.7 temps de relaxation thermique vertical (basé sur la valeur de la diffusivité en bas de la couche), ce qui correspond à environ douze temps de retournement de la convection. Dans toute la suite les cartes de couleurs sont établies avec une échelle linéaire. Celles-ci sont telles que la valeur de la quantité représentée est plus élevée que la valeur moyenne dans les zones claires et plus faible que la valeur moyenne dans les zones sombres.

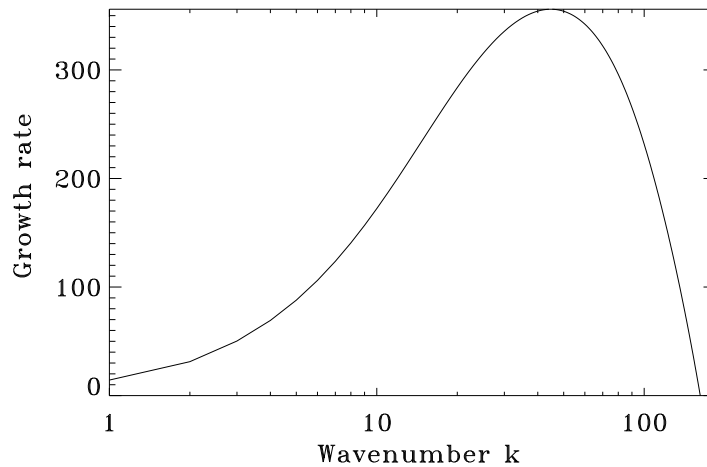


FIG. 4.1 – Taux de croissance  $\Gamma$  de l'instabilité convective dans le régime linéaire, pour tous les modes possibles dans une couche de rapport d'aspect  $A = 42.6$  et pour les paramètres et les conditions aux limites donnés au paragraphe 4.2.a.

### 4.3.a Évolution temporelle

#### Croissance linéaire

Initialement, les perturbations introduites sont petites et on s'attend à observer la croissance linéaire du mode le plus instable de la boîte. Les taux de croissance de l'instabilité en fonction du vecteur d'onde pour les paramètres physiques de cette simulation sont représentés sur la figure 4.1. Le plus instable d'entre eux est le mode  $k = 45$ . On observe effectivement l'apparition de cellules correspondant à ce vecteur d'onde au début de la simulation, comme le montre la carte de température de la figure 4.2 et le spectre correspondant figure 4.3. Le mode  $k = 45$  correspond à une longueur d'onde  $\lambda = 0.95$  (cellules de taille horizontale à peu près égale à l'épaisseur du domaine de simulation).

Tous les modes avec  $k < 163$  sont instables. Les modes à grande échelle  $k < 7$  ont pour leur part des taux de croissance suffisants pour croître sur une échelle de temps similaire au temps de relaxation thermique dans la direction verticale.

#### Évolution non-linéaire

Après que la saturation non-linéaire est atteinte pour le mode le plus instable linéairement, une évolution nette de l'échelle qui domine le spectre énergétique-



Champ de température

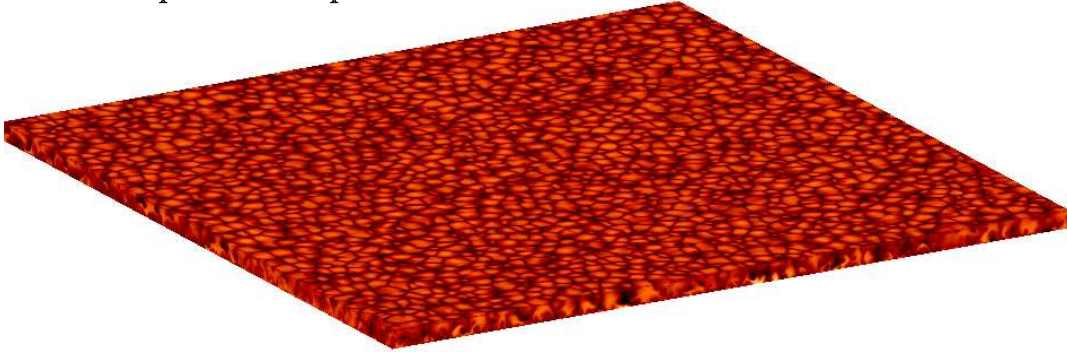


FIG. 4.2 – Carte des perturbations de température observées près de la surface ( $z = 0.87$ ) et sur deux tranches latérales, pendant la phase de croissance linéaire ( $t = 0.032$ ). Le motif visible correspond à un vecteur d'onde caractéristique  $k = 45$ . Le rapport d'aspect de la représentation correspond à celui de la simulation.

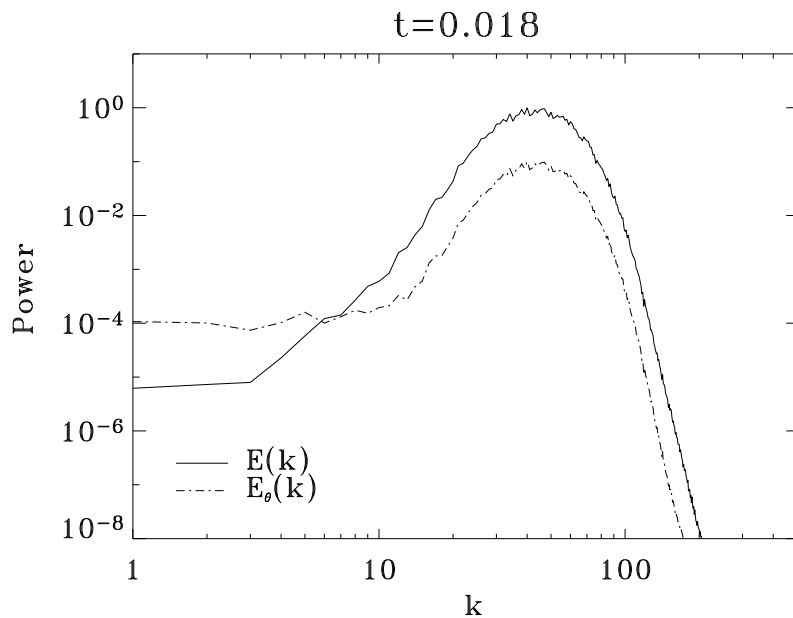


FIG. 4.3 – Spectre de la quantité de mouvement et de la température près de la surface ( $z = 0.87$ ) pendant la phase de croissance linéaire ( $t = 0.018$  ici).

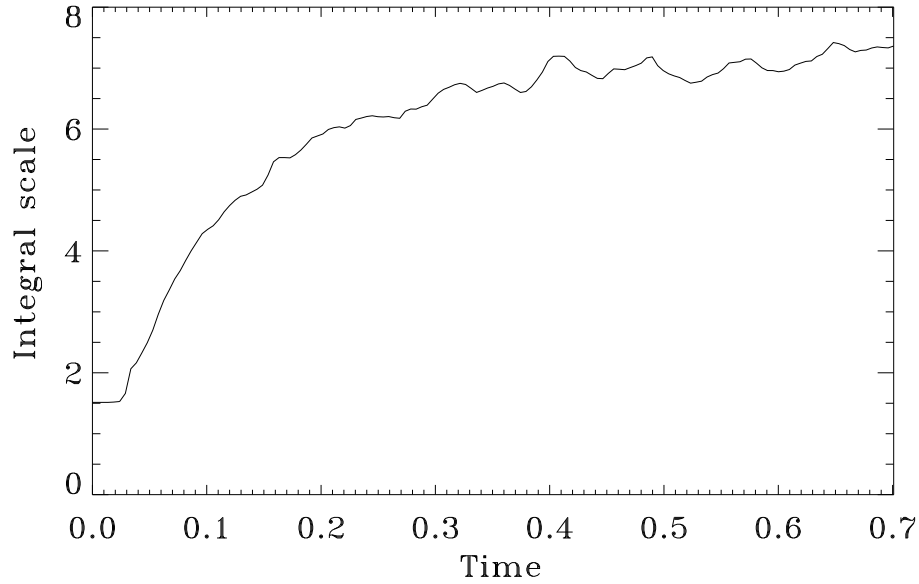


FIG. 4.4 – Évolution temporelle de l'échelle intégrale (à l'altitude  $z = 0.87$ ), donnée par l'équation (4.3). Une valeur quasi-stationnaire  $L_{\text{int}} \sim 7$  est atteinte pour  $t > 0.4$ .

ment est observée. On constate en effet que l'échelle intégrale

$$L_{\text{int}}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{2/3 k_{\text{max}}} k^{-1} E(k, z) dk}{\int_0^{2/3 k_{\text{max}}} E(k, z) dk} \quad (4.3)$$

croît sensiblement (figure 4.4). La dynamique spectrale de cette croissance sera analysée de manière détaillée au paragraphe 4.4.b. Notons simplement pour le moment que les taux de croissance effectifs des modes à grande échelle  $\Gamma_{\text{eff}}(k) = 1/2 d \ln E(k) / dt$  sont fortement réduits (figure 4.5) comparativement à leur valeur dans le régime linéaire (figure 4.1). L'énergie des modes avec  $k > 45$  est quant à elle pratiquement constante aux temps longs (figure 4.6).

On peut observer visuellement la croissance des échelles dominant les spectres sur la figure 4.7, sur laquelle on a représenté pour quatre temps différents une carte des perturbations de température au milieu de la couche de convection. On voit très clairement que les cellules ont une taille de plus en plus importante, de la croissance linéaire jusqu'à la phase de saturation. Le phénomène de développement des grandes échelles est également très apparent sur les spectres de température et de quantité de mouvement pris à une profondeur fixée (figure 4.8).

On peut finalement s'intéresser à l'évolution de l'apparence visuelle du profil vertical de la convection au cours du temps, en regardant une coupe verticale des perturbations de température (figure 4.9). Les structures dominantes cor-

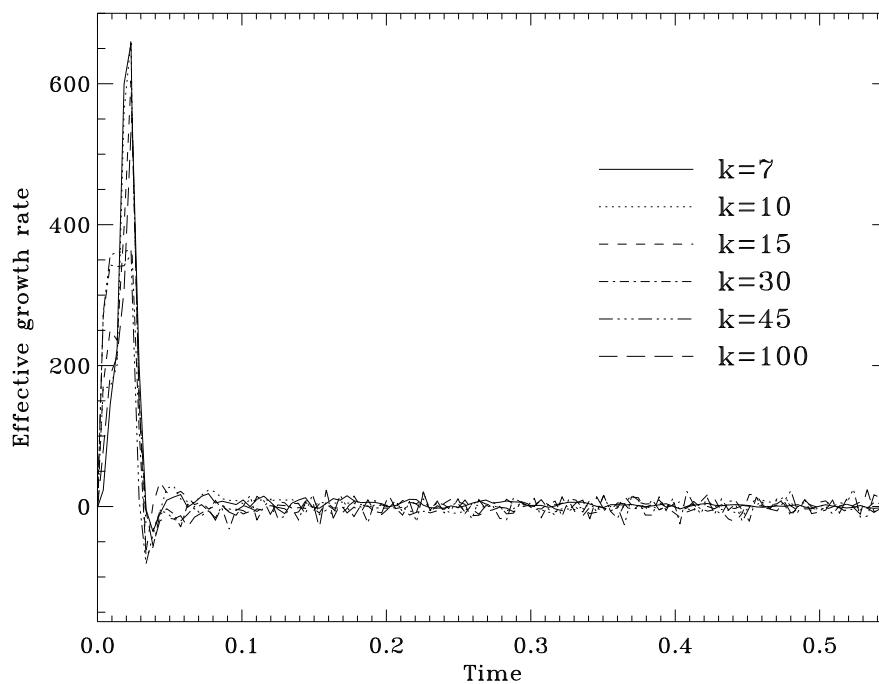


FIG. 4.5 – Évolution des taux de croissances effectifs  $\Gamma_{\text{eff}} = 1/2 \, d \ln E(k) / dt$  pour différents vecteurs d'onde.

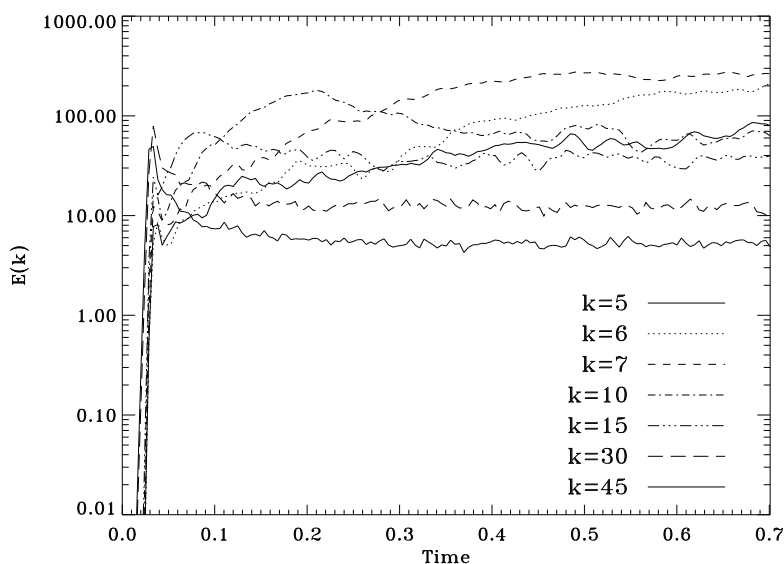


FIG. 4.6 – Évolution de  $E(k)$  pour plusieurs  $k$ . Les modes avec  $k > 20$  sont stationnaires très rapidement après la phase de croissance linéaire, tandis que les modes à grande échelle croissent sur des échelles de temps plus longues.

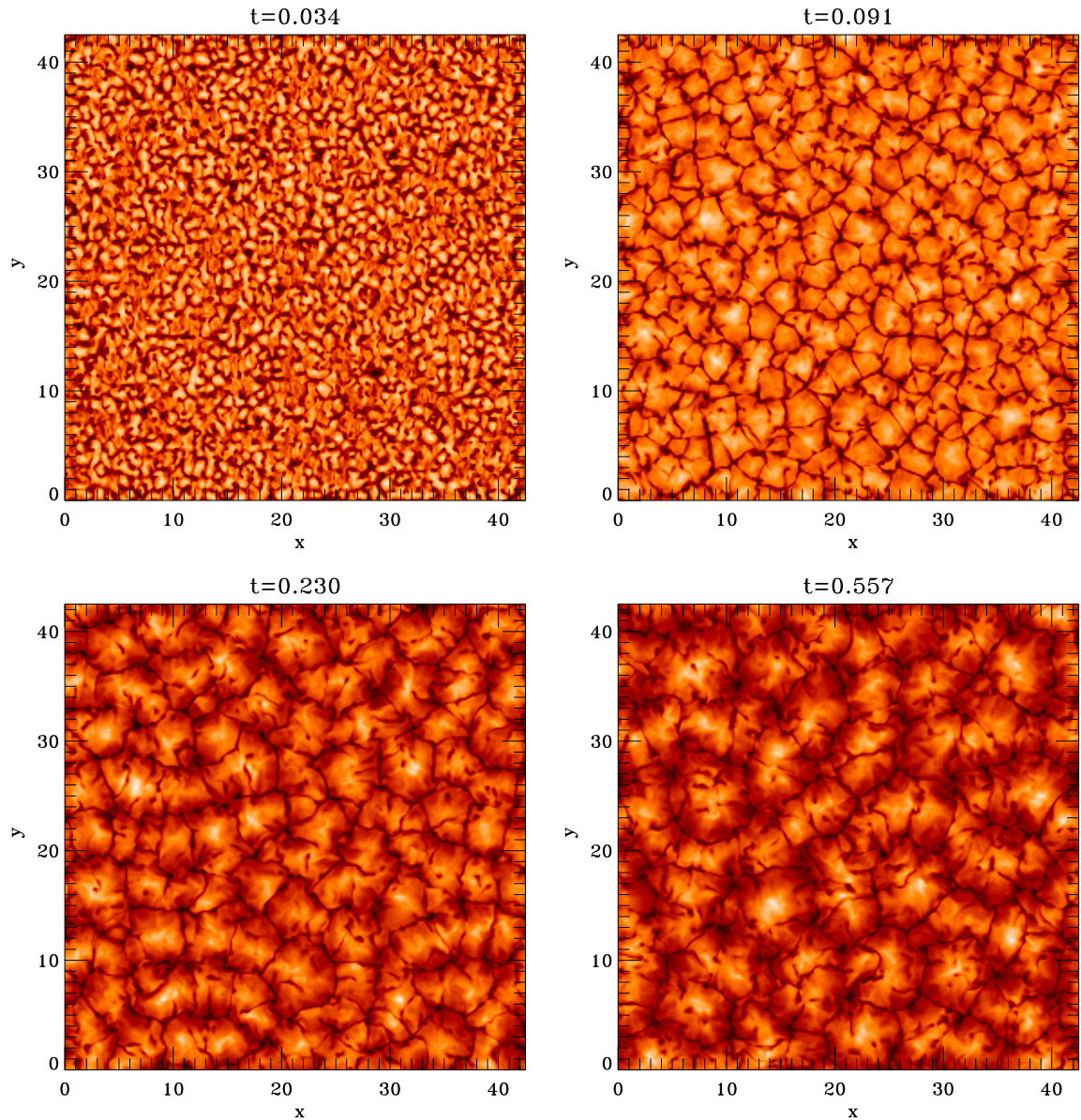


FIG. 4.7 – De gauche à droite et de haut en bas, évolution temporelle des cartes de température prises près du milieu de la zone convective ( $z = 0.63$ ). La taille caractéristique des cellules visibles à cette profondeur augmente progressivement et sature à une mésoéchelle  $L \sim 7$ .

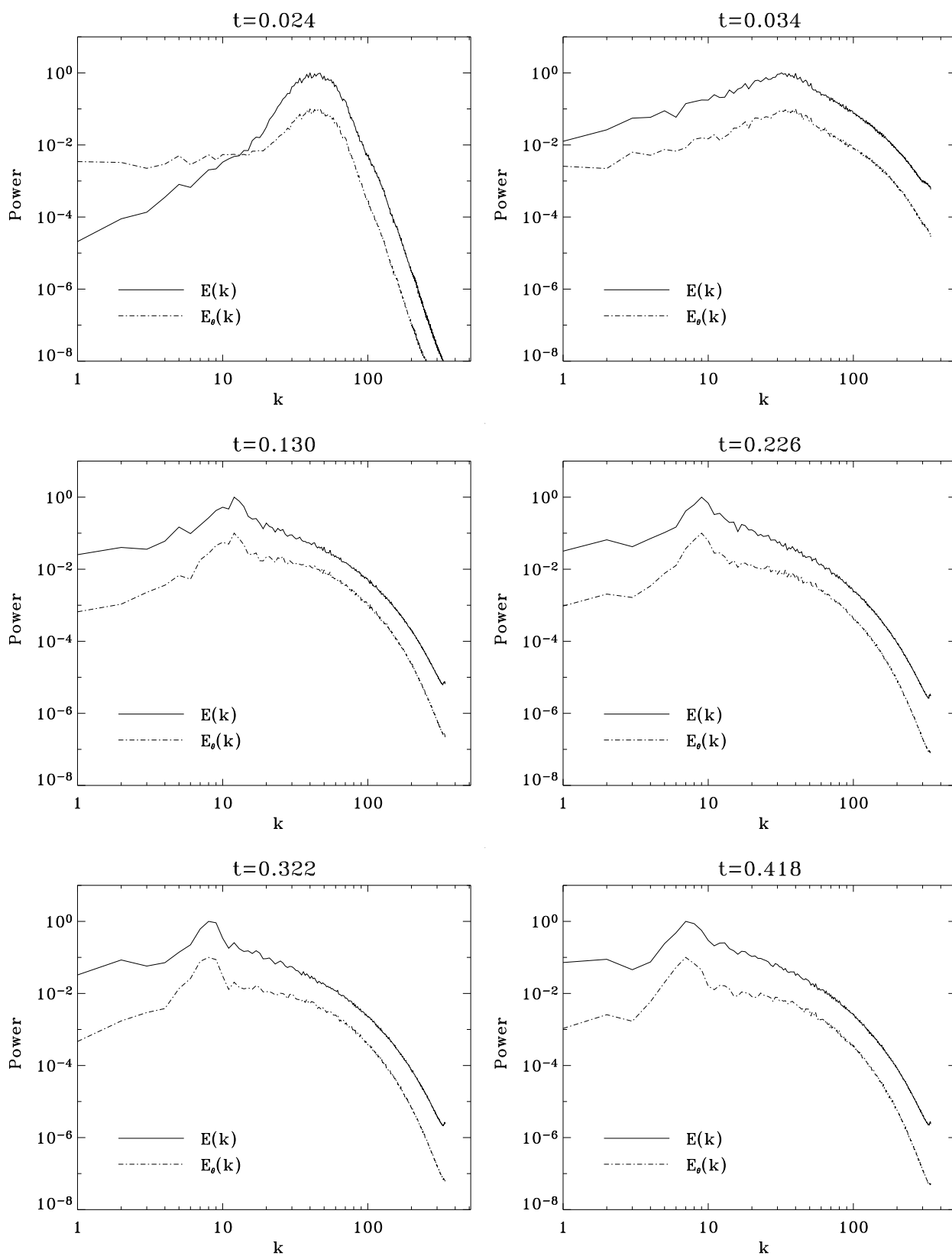


FIG. 4.8 – De gauche à droite et de haut en bas, spectres de température et de quantité de mouvement à différents temps pour  $z = 0.87$ , mettant en évidence la croissance progressive de l'échelle d'injection dans le régime non-linéaire.

respondent à des panaches convectifs froids (sombres) descendants intenses qui s'étendent sur toute l'épaisseur de la couche. Ces panaches s'identifient aux cellules visibles sur la figure 4.7. Comme le montrent l'ensemble des figures précédentes, ces panaches ont tendance à s'organiser sur des échelles spatiales horizontales de plus en plus grandes et, de par leur intensité, ils structurent fortement la forme de l'écoulement aux différentes profondeurs. On peut également remarquer, en anticipant les paragraphes suivants, la présence de nombreux panaches descendants de petite taille sous la surface, qui sont générés dans la couche limite thermique.

### 4.3.b Régime quasi-stationnaire

#### Comportement à différentes profondeurs

Au-delà de l'analyse de l'évolution temporelle de l'écoulement, la figure 4.9 recèle de nombreuses informations sur l'organisation en profondeur de la convection compressible, que nous allons maintenant analyser. En complément de cette représentation nous utiliserons également la figure 4.10. Une telle description existe en partie dans la littérature pour des simulations à plus faible rapport d'aspect (Toomre et al. 1990, Cattaneo et al. 1991) et nous insisterons ici sur les points les plus intéressants du point de vue du problème posé, à savoir l'apparence de la surface et la structuration des grandes échelles.

En surface, on observe une structure « granulaire » très nette, qui correspond à une couche limite thermique. Cette structure correspond aux panaches peu profonds observés auparavant dans les coupes verticales de la figure 4.9. La vorticité à proximité de la surface est principalement verticale en raison des conditions aux limites de vitesse choisies. La divergence horizontale du champ de vitesse exhibe quant à elle une apparence proche de la carte de température.

On peut voir que la structure de la convection au bas de la couche est complètement différente de celle en haut. Près de la plaque inférieure, les fluctuations de température se concentrent sur un réseau de points brillants correspondant à l'écoulement montant aux mésoéchelles identifiées sur la figure 4.7. La différence haut/bas est principalement due à l'asymétrie cr  e par la stratification en densité, qui impose des écoulements descendants plus vigoureux et une largeur caractéristique plus petite que celle des panaches ascendants. Pour des simulations de type Boussinesq, on observerait au contraire le même motif au niveau des deux plaques, à un déphasage près (phénomène de dualité). On pourrait penser que la différence de comportement entre le haut et le bas de la couche dans ce type de simulation est lié au fait que la viscosité cinématique varie de manière importante avec la profondeur, mais Toomre et al. (1990) ont montré qu'un comportement similaire était observé pour des simulations utilisant la méthode PPM de Porter et Woodward (1994), qui offre semble-t-il une viscosité cinématique constante.

Dans les couches intermédiaires, une disparition progressive de l'échelle granulaire et l'apparition du motif mésoéchelle sont observées. En revanche, il est frappant de constater que dans les couches du milieu, si la température revêt une

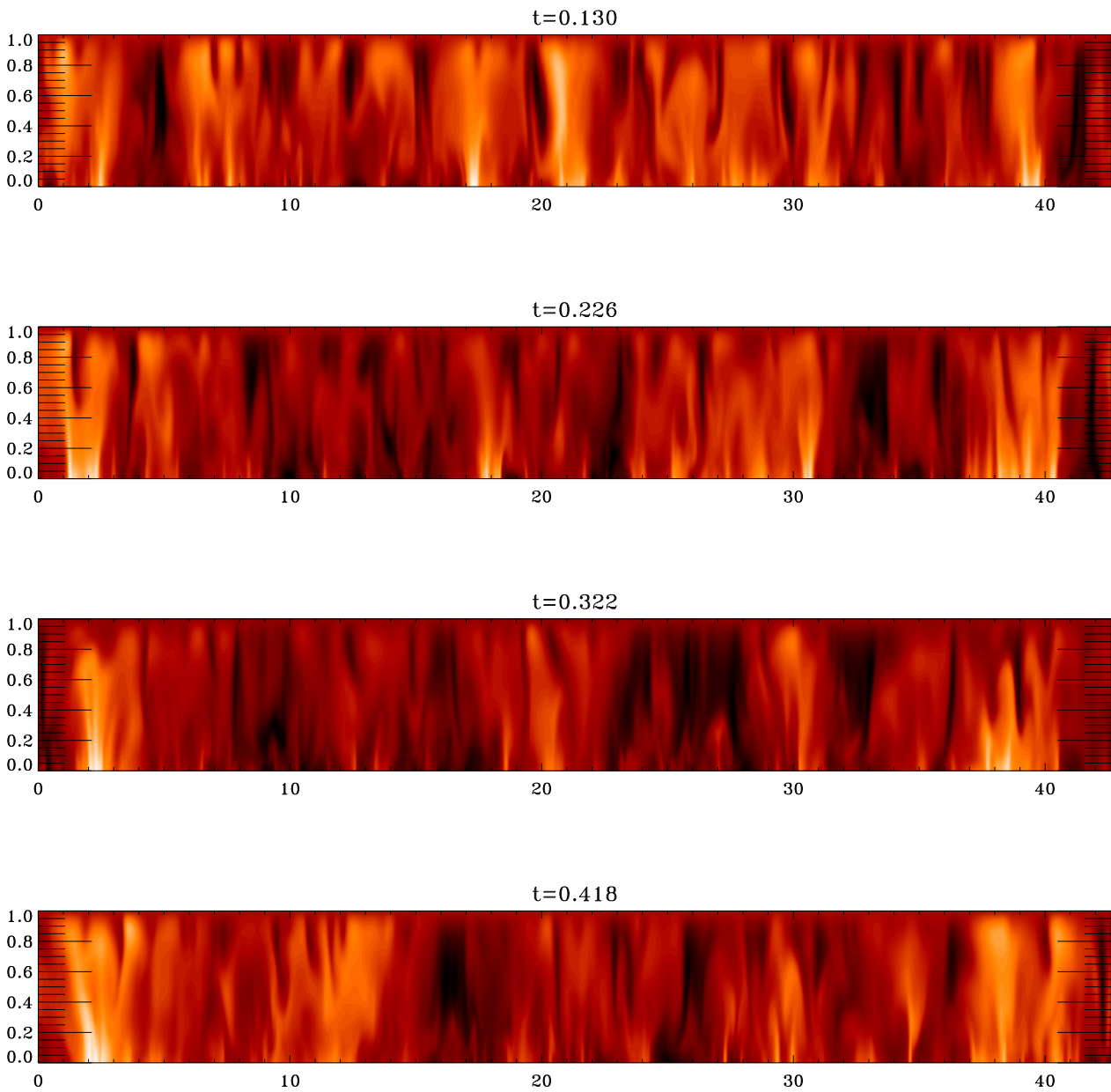


FIG. 4.9 – De haut en bas, évolution temporelle des perturbations de température au travers de la zone convective pour une abscisse  $x$  fixée (le rapport d'aspect de la figure diffère du rapport d'aspect réel de la simulation, la coupe ayant été comprimée dans la direction horizontale). Les panaches descendants, présents sur toute l'épaisseur de la couche, s'organisent sur des échelles horizontales de plus en plus grandes au cours du temps. De nombreux petits panaches sont également visibles sous la surface.

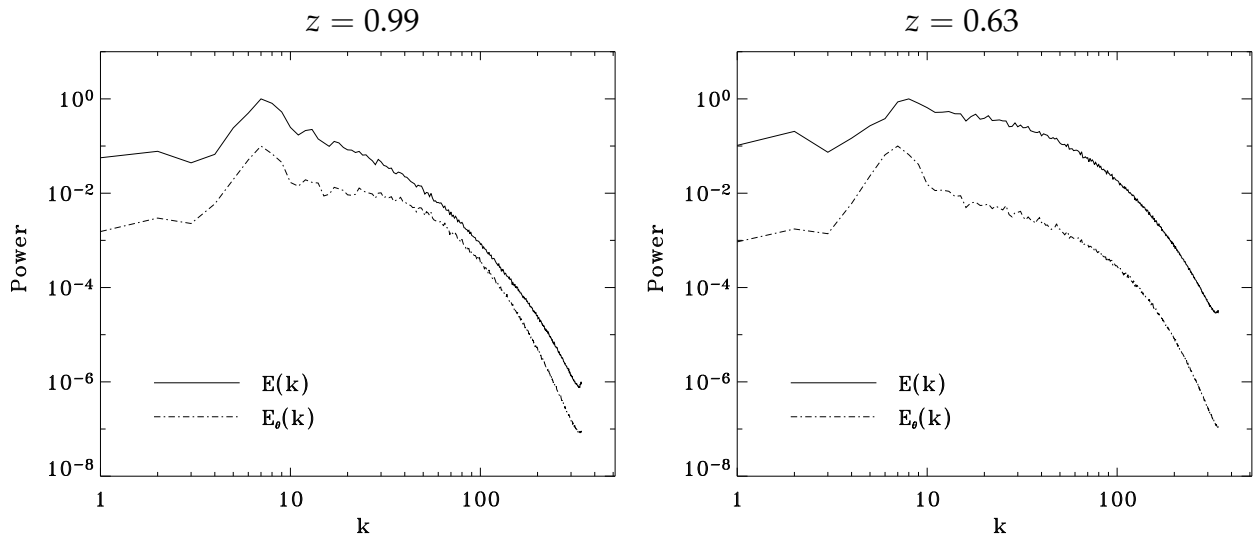


FIG. 4.11 – Spectres de température et de vitesse près de la surface (à gauche) et près du milieu de la couche. Seul le spectre de vitesse remonte aux échelles  $k \sim 40$  en profondeur, ce qui était apparent sur les représentations de la figure 4.10.

apparence assez douce, le champ de vitesse et la vorticité exhibent des structures nettement plus petites. Cet effet est visible sur les spectres de la figure 4.11. Le spectre de la quantité de mouvement, contrairement au spectre de température, possède une grosse « bosse » au milieu de la couche, centrée sur des échelles correspondant à peu près à la profondeur de la boîte. Comme ce comportement se retrouve dans des simulations réalisées avec un nombre de Prandtl de 1, il s'agit plus probablement d'une différence de comportement entre la cascade hydrodynamique et la cascade de température.

### La couche limite thermique

- **Dissipation des fluctuations thermiques et granules.** L'apparition de motifs granulaires en surface (jusqu'à  $z = 0.8$ , soit 20 % de la profondeur de la couche), comme nous l'avons mentionné auparavant, est liée à une couche limite thermique. La figure 4.12 illustre clairement la différence entre le motif de surface et en profondeur, à l'échelle de la simulation complète. Pour quantifier cet effet, il est possible de calculer le taux moyen de dissipation des fluctuations thermiques  $\theta$ ,

$$\bar{N}(z) = \sum_i \overline{\kappa (\partial_i \theta)^2}, \quad (4.4)$$

en fonction de la profondeur (figure 4.13). Au contact avec la plaque supérieure, qui est thermiquement conductrice, de forts gradients verticaux de température sont présents, si bien que la dissipation des fluctuations de température y est beaucoup plus efficace qu'au centre de la couche. En revanche, au bas de la zone,



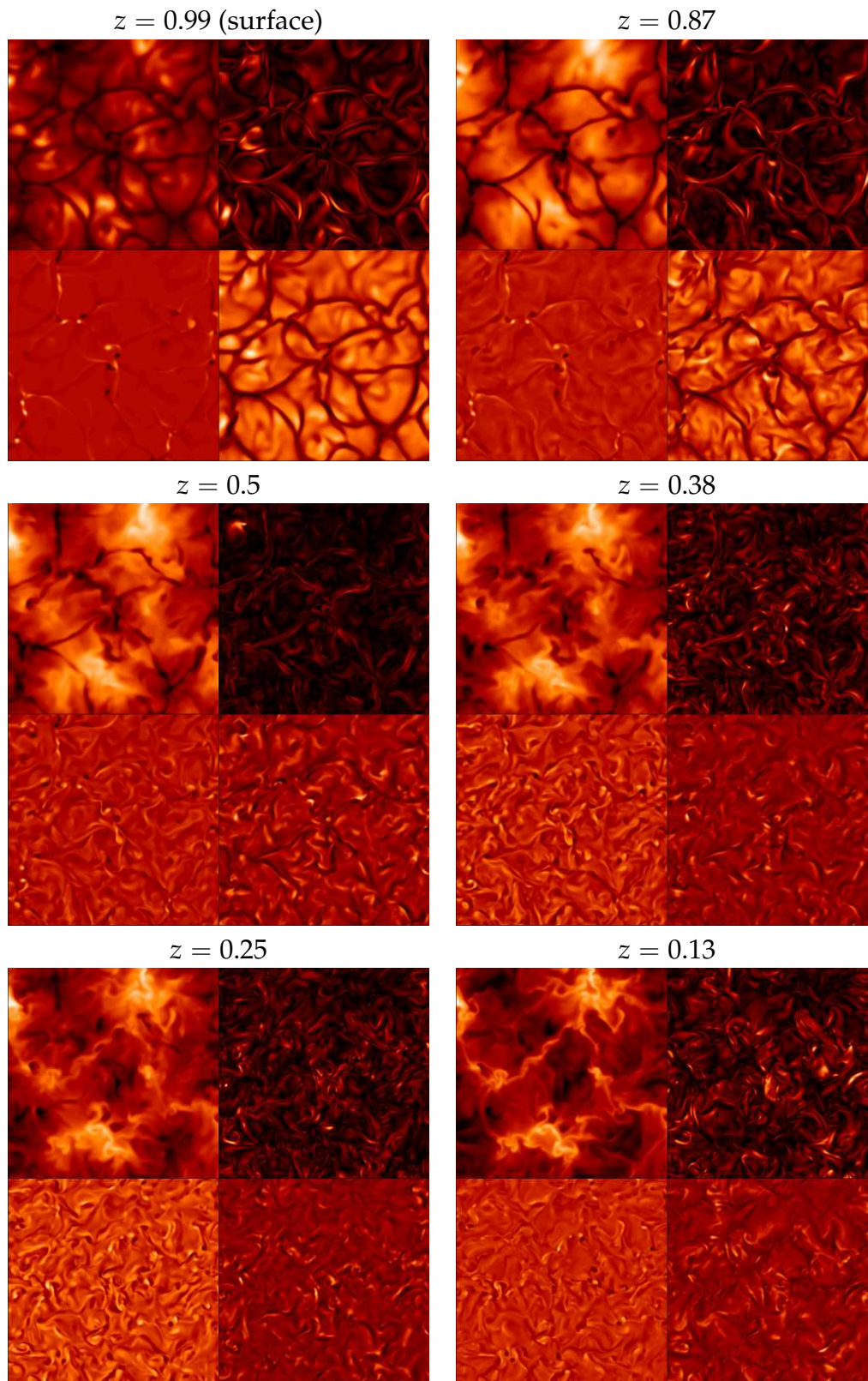


FIG. 4.10 – De haut en bas et de gauche à droite, évolution de diverses quantités physiques avec la profondeur, pour un morceau du plan de taille  $10 \times 10$ . Pour chaque mosaïque, on a représenté dans le quart supérieur gauche les perturbations de température, dans le quart supérieur droit la norme de la vorticité horizontale, dans le quart inférieur gauche la norme de la vorticité verticale, et dans le quart inférieur droit la valeur de la divergence horizontale de l'écoulement à la profondeur spécifiée.

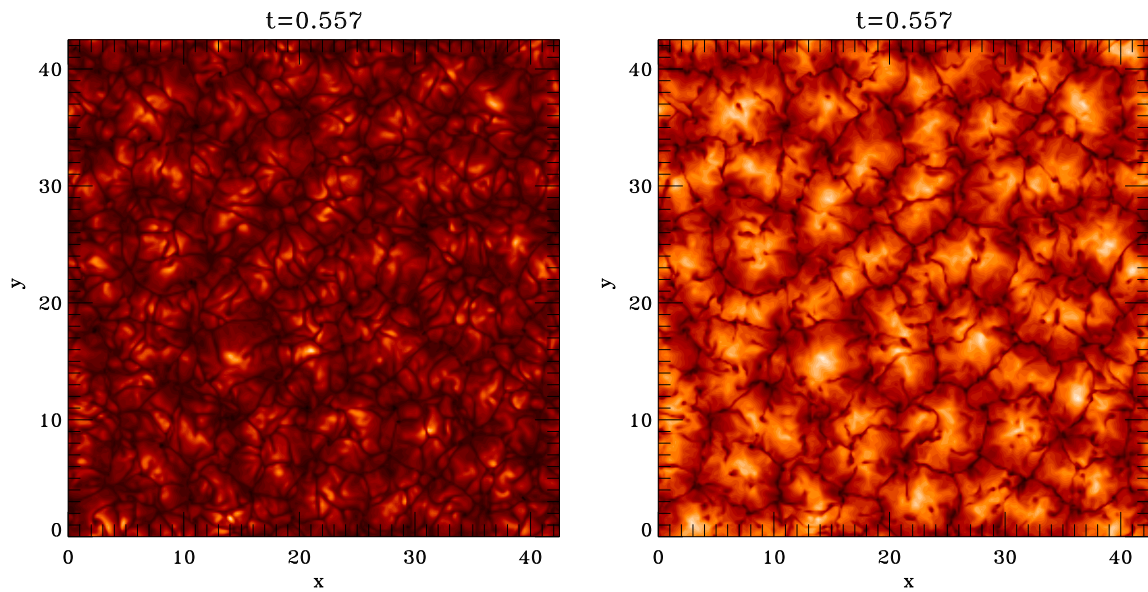


FIG. 4.12 – Comparaison entre une carte des fluctuations de température pour une couche superficielle ( $z = 0.99$ , à gauche) et une couche en profondeur ( $z = 0.63$ , à droite). La mésoéchelle est visible sur les deux représentations tandis que la petite échelle granulaire se forme uniquement à proximité de la surface.

où la dérivée verticale des perturbations de température est fixée à zéro, il n'y a pas de formation de couche limite de température.

- **D'autres conditions aux limites.** Nous avons étudié l'effet de la condition aux limites de température en réalisant deux simulations à rapport d'aspect 10 (résolution  $256 \times 256 \times 82$ ) sur l'Origin 3800 du CINES, avec une stratification plus forte  $z_0 = 0.1$ ,  $Pr = 1$  et  $R = 10^5$ . Dans la première simulation, le flux est fixé en bas et la température en haut (cas identique à la grande simulation). Dans le deuxième cas, le flux est fixé au niveau des deux plaques. Les profils de  $\bar{N}$  correspondants sont donnés figure 4.14.

L'apparence visuelle de la convection en surface est modifiée par cet effet, les fluctuations à l'échelle granulaire étant plus importantes dans le cas où la température est fixée (figure 4.15). Dans le cas du flux fixé, la mésoéchelle ressort de manière plus prononcée près de la surface, alors qu'elle se mélange aux granules dans le cas de la température fixée.

Il ressort de cette analyse que l'apparence visuelle des zones superficielles est fortement dépendante de la condition aux limites de température choisie et qu'une condition de type température fixée aboutit à la formation d'une « couverture » qui masque plus efficacement la dynamique dans les zones profondes. Cette remarque doit être gardée en mémoire en prévision de la comparaison de la

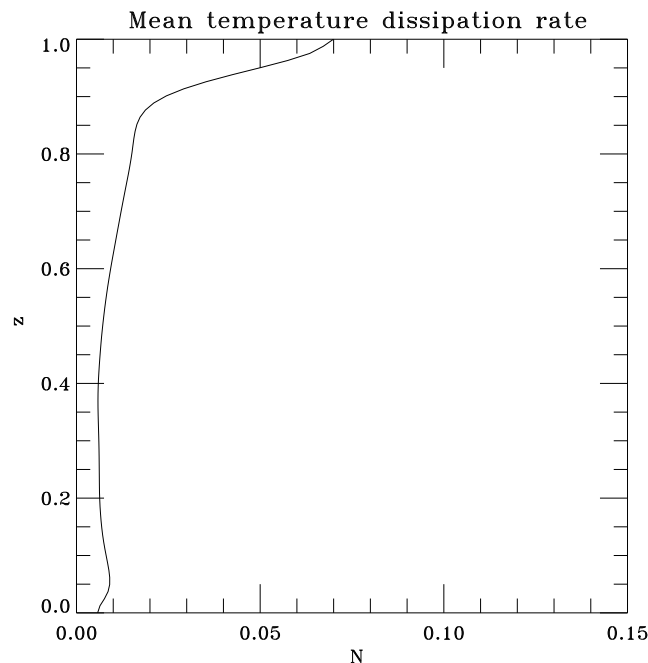


FIG. 4.13 – Taux de dissipation thermique  $\bar{N}$  donné par l'équation (4.4) en fonction de l'altitude  $z$ .

simulation avec des simulations avec radiation utilisant des profils d'opacité plus réalistes (paragraphe 4.5.a) et de la discussion sur l'extrapolation des résultats de l'expérience numérique à la physique de la photosphère (paragraphe 4.5.b). Une autre remarque est qu'il faut toujours être méticuleux lors de l'analyse des résultats de ce type de simulations, car les conditions aux limites peuvent influencer significativement l'interprétation.

### Caractéristiques de la turbulence

Ce paragraphe est destiné à donner une idée du régime de turbulence simulé dans notre expérience. Dans le régime quasi-stationnaire, le nombre de Reynolds

$$\text{Re}(z) = \frac{v_{\text{r.m.s.}}}{\text{Pr}}, \quad (4.5)$$

basé sur la vitesse r.m.s à l'altitude  $z$  et l'épaisseur de la couche, est proche de 120 près de la plaque supérieure (où la viscosité est la plus importante), et de 450 au niveau de la plaque du bas (figure 4.16 et 4.17).

Le nombre de Nusselt, calculé à partir de l'équation (2.17), est proche de 5, ce qui situe la simulation dans un régime de turbulence plutôt « molle », si l'on se réfère à la classification donnée par exemple dans le travail de Heslot et al. (1987), dont une illustration est reproduite figure 4.18.

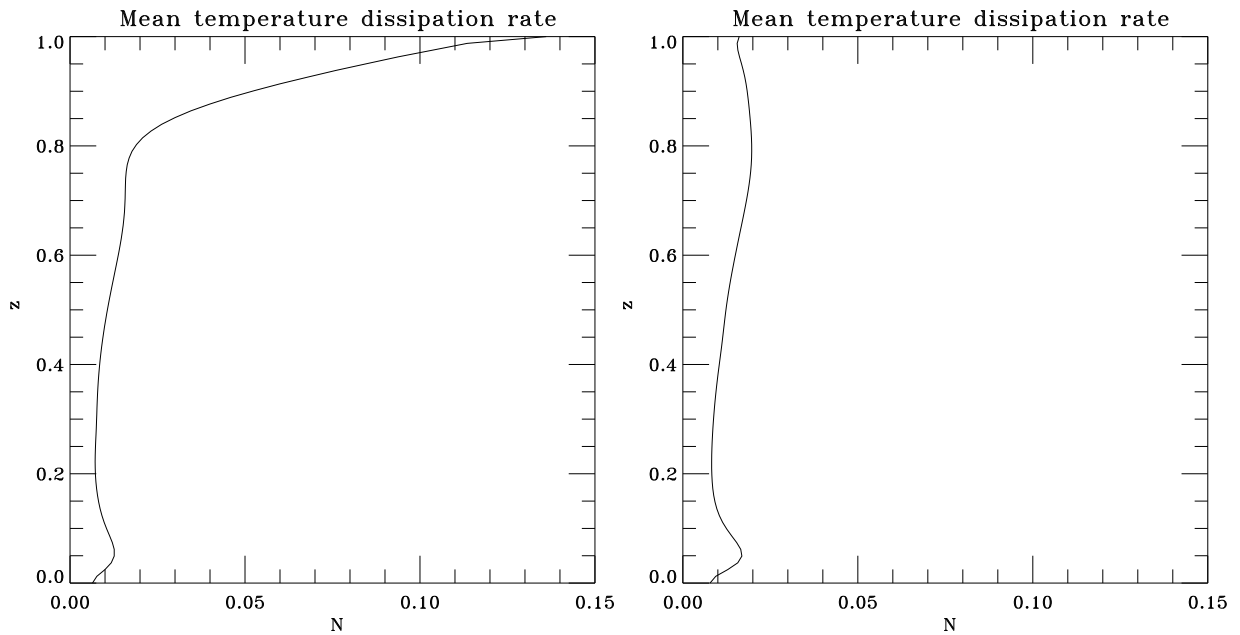


FIG. 4.14 – Comparaison entre le taux de dissipation des fluctuations thermiques au travers d'une couche de rapport d'aspect  $A = 10$  fortement stratifiée ( $z_o = 0.1$ ,  $Pr = 1$ ,  $R = 10^5$ ,  $m = 1$ ) pour une condition aux limites supérieure de type température fixée (à gauche) et une condition aux limites de type flux thermique fixé (à droite). Dans les deux cas, le flux thermique est fixé en bas.

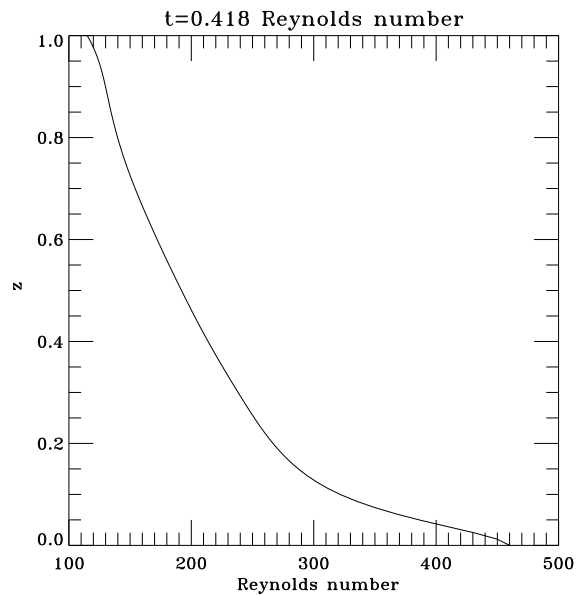


FIG. 4.16 – Profil vertical du nombre de Reynolds r.m.s. donné par l'équation (4.5).

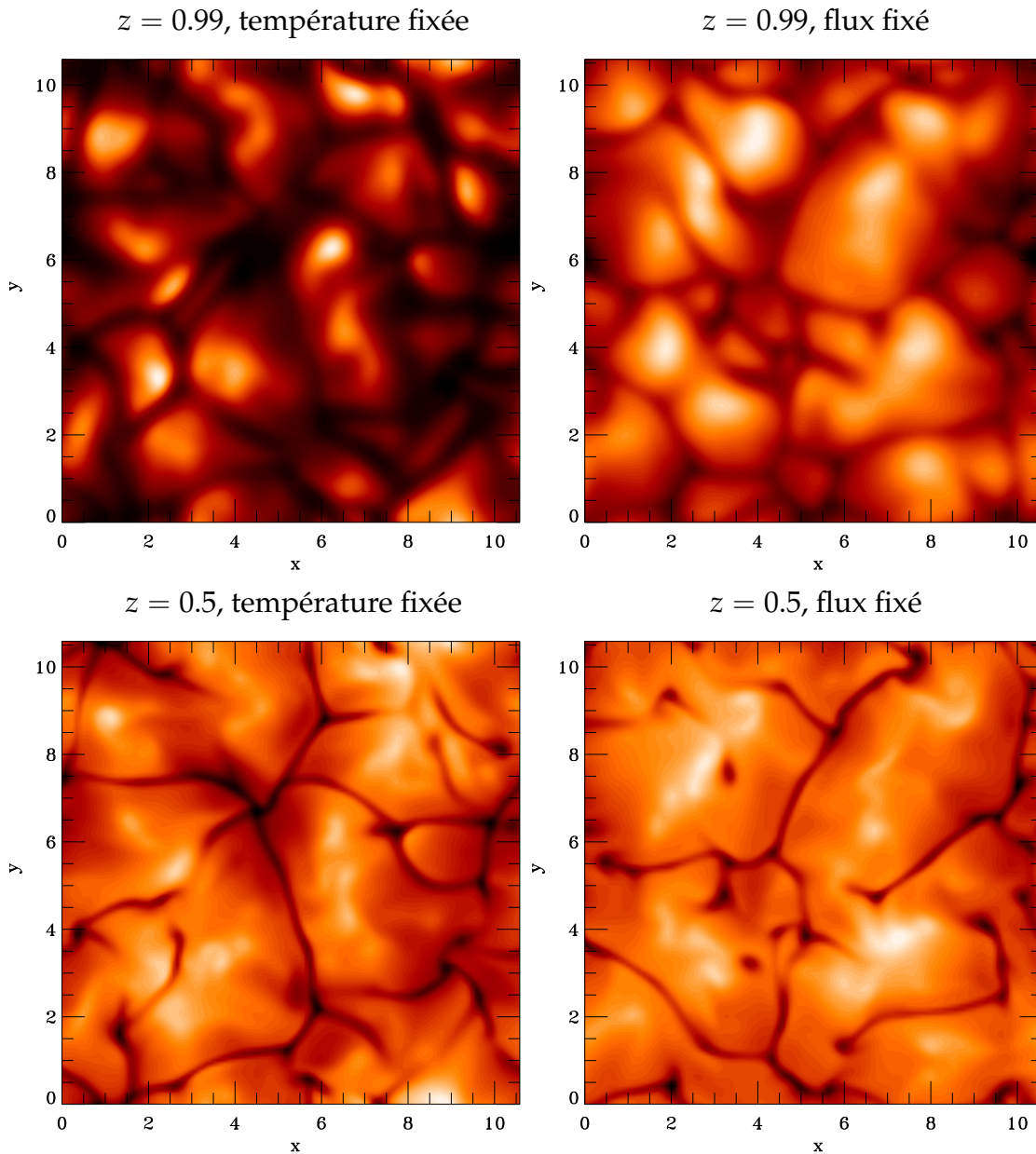


FIG. 4.15 – Comparaison entre des cartes de fluctuations de température proche de la surface ( $z = 0.99$ , en haut) et au milieu ( $z = 0.5$ , en bas) pour des simulations à rapport d'aspect 10, dans le cas d'une condition aux limites de type température fixée (à gauche) ou de flux thermique fixé (à droite) au niveau de la plaque supérieure. Dans le premier cas, l'existence de la couche limite donne une apparence visuelle de la surface dominée par les petites échelles, tandis que dans le deuxième cas, la mésoéchelle visible en  $z = 0.5$  reste très apparente en surface.

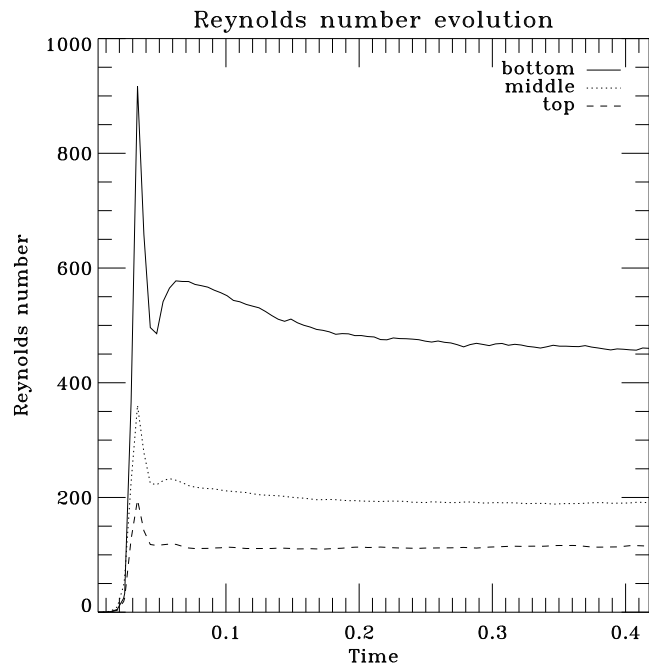


FIG. 4.17 – Évolution temporelle du nombre de Reynolds de l'équation (4.5) à trois altitudes différentes.

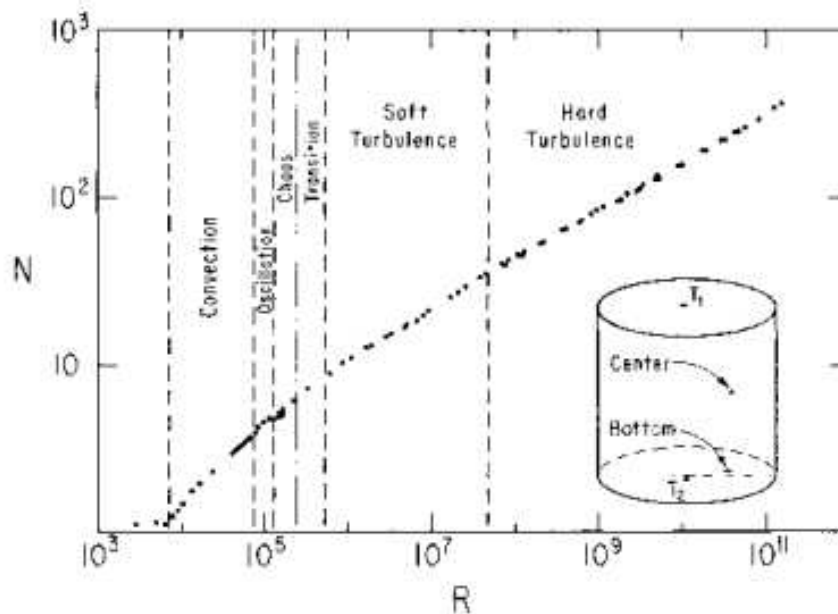


FIG. 4.18 – Transition schématique vers la convection turbulente dans l'hélium pour un rapport d'aspect de l'ordre de 1 (extrait de Heslot et al. (1987)). Selon cette classification, notre simulation se situerait au niveau du régime chaotique.

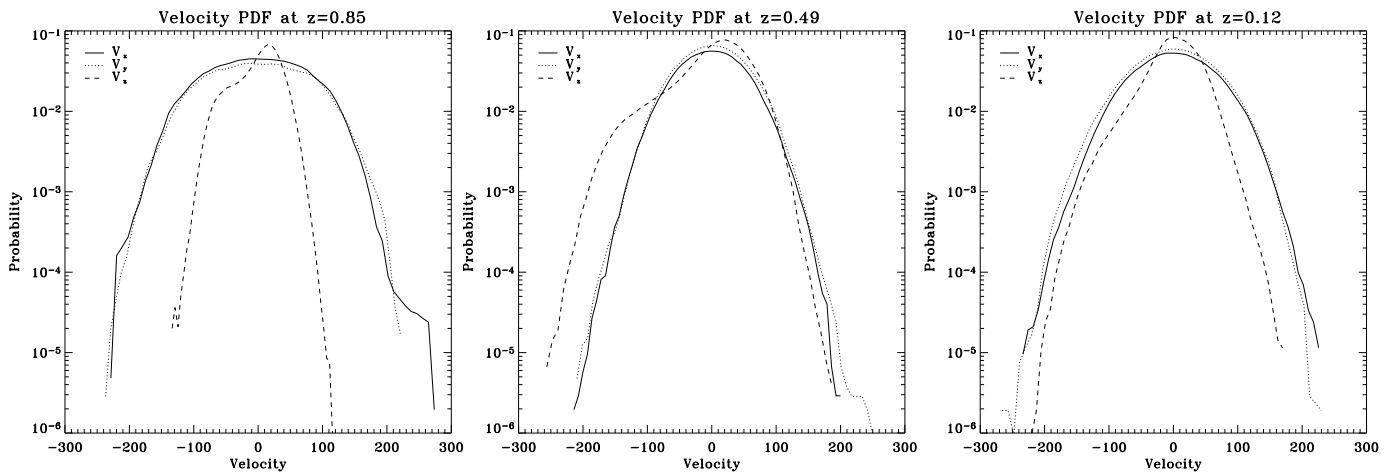


FIG. 4.19 – Fonction de densité de probabilité de la vitesse à trois altitudes différentes. Les traits plein et pointillé correspondent aux deux composantes de la vitesse horizontale et les tirets à la vitesse verticale.

Finalement, le nombre de Mach basé sur la vitesse r.m.s et la vitesse du son à chaque profondeur vaut environ 0.1 dans les zones profondes et atteint au maximum 0.15 en surface, où la vitesse du son est la plus petite. Les effets acoustiques restent donc relativement faibles dans cette simulation.

### Statistiques de l'écoulement

Pour terminer cette partie sur l'analyse de l'écoulement dans l'espace réel, regardons les statistiques turbulentes qui permettent de quantifier des phénomènes tels que l'intermittence. La fonction de densité de probabilité de la vitesse verticale (figure 4.19) près de la surface révèle à son tour l'asymétrie entre les parties montantes et descendantes de l'écoulement : la surface couverte par les panaches descendants est plus faible, ce qui explique le pic (c'est d'ailleurs une inflexion) plus faible en vitesse négative qu'en vitesse positive. D'autre part, l'intensité des panaches descendants est plus grande, ce qui se traduit par un pic de vitesses négatives situé à une valeur absolue de vitesse plus élevée que celle du pic du côté positif.

Les p.d.f. sur les dérivées ou les incréments de la vitesse sont plus révélatrices de l'intermittence de l'écoulement. Nous représentons ici les p.d.f. des trois composantes de la vorticité (figure 4.20). Celles-ci s'éloignent sensiblement d'un profil gaussien. Deux points importants sont à signaler. Tout d'abord, la p.d.f. de vorticité verticale est nettement plus semblable à celles de la vorticité horizontale au milieu de la couche que près des parois. Cette ressemblance en profondeur entre les différentes composantes de vorticité, qui était déjà plus ou moins visible sur les mosaïques de la figure 4.10, semble indiquer que l'effet des conditions

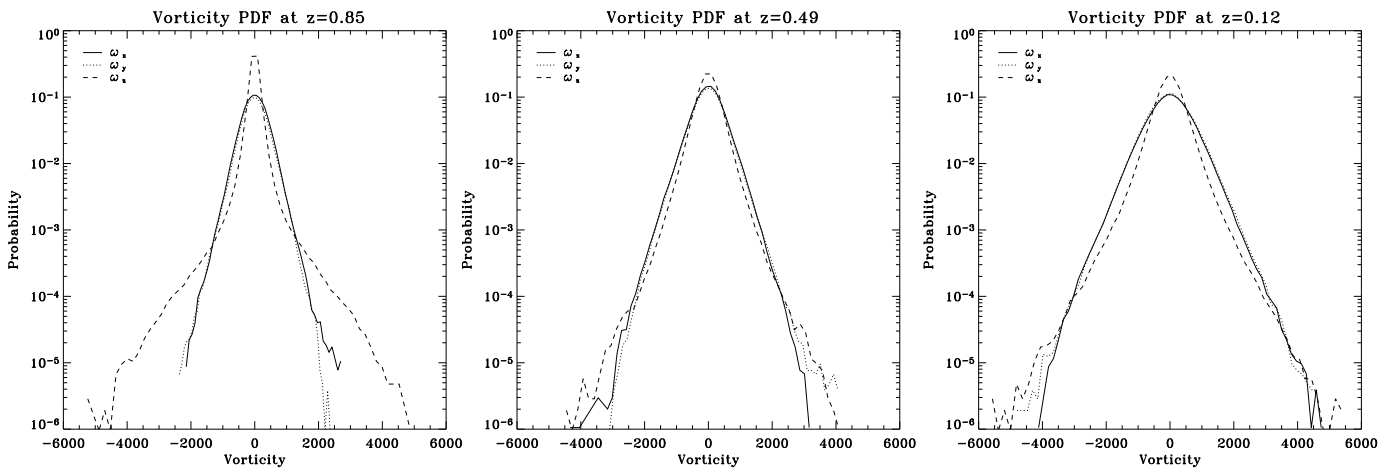


FIG. 4.20 – Fonction de densité de probabilité de la vorticité à trois altitudes différentes. Les traits plein et pointillé correspondent aux deux composantes de la vorticité horizontale et les tirets à la vorticité verticale.

aux limites est plus faible dans cette zone. La deuxième remarque concerne la forme de la p.d.f. de la vorticité verticale près du haut de la couche. Les événements de forte intensité y sont favorisés par rapport au milieu de la couche. Ils correspondent à des dipôles de vorticité intenses situés au niveau des vertex de l'écoulement (figure 4.21). Cet effet d'intensification du moment cinétique vertical dans les panaches descendants étroits avait déjà été observé par Toomre et al. (1990), et pourrait avoir des conséquences sur la structure à très grande échelle de l'écoulement (nous y reviendrons ultérieurement). Notons que cet effet d'amplification de l'intermittence en surface est également observé sur le champ magnétique dans les simulations réalisées par Emonet et Cattaneo (2001) et Cattaneo et al. (2003).

Finalement, la p.d.f. de température (figure 4.22) est assez similaire à celle observée dans des expériences de convection à nombre de Rayleigh assez faible et n'exhibe pas vraiment d'ailes exponentielles, ce qui confirme que le régime de l'écoulement n'est pas complètement turbulent.

## 4.4 Analyse dans l'espace de Fourier

Jusqu'à présent, nous nous sommes principalement intéressés aux propriétés de la turbulence dans l'espace réel. Celle-ci est caractérisée à la fois par une forte anisotropie et une forte inhomogénéité. Afin de compléter cette description, nous allons maintenant nous concentrer sur une analyse dans l'espace de Fourier et sur la description des spectres de quantité de mouvement et de température définis



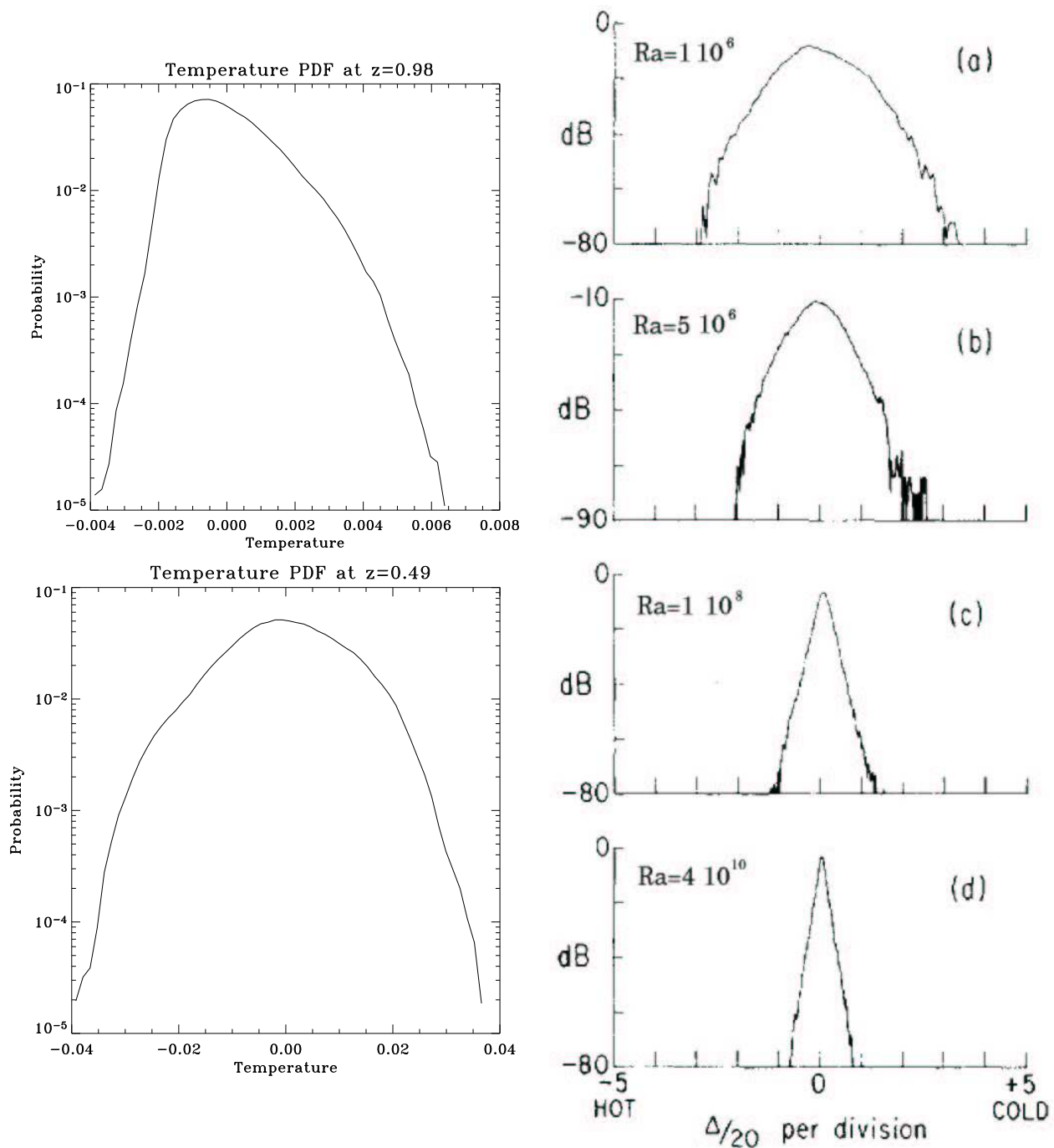


FIG. 4.22 – À gauche : fonction de densité de probabilité de la fluctuation de température près de la surface et au milieu de la couche. À droite : fonctions de densité de probabilité expérimentales pour différents nombres de Rayleigh, obtenues pour de la convection dans l'hélium (Sano et al. 1989).

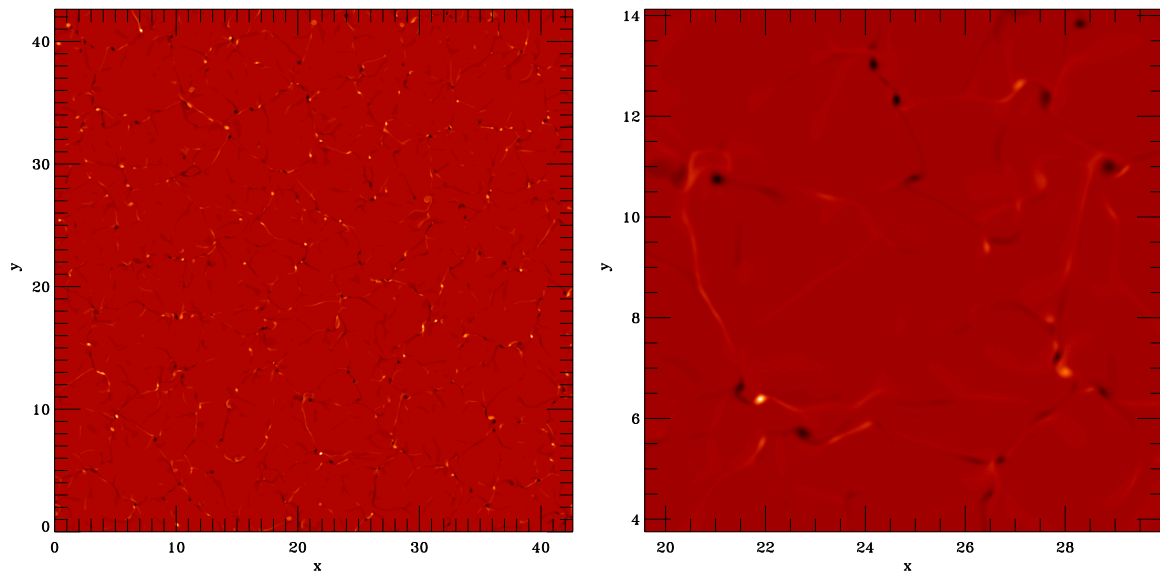


FIG. 4.21 – Cartes de l'intensité de la vorticité verticale près de la surface. À gauche : plan complet à  $z = 0.99$ . À droite : zoom sur une mésocellule délimitée par plusieurs monopôles et dipôles intenses de vorticité (autour de  $x = 25$ ,  $y = 9$ ).

au paragraphe 4.2.c. Dans le paragraphe qui suit, il sera question uniquement des spectres à une profondeur fixée calculés dans le régime stationnaire. Nous tenterons ensuite d'étudier le bilan d'énergie dans l'espace spectral afin de déterminer l'origine des mésoéchelles de la simulation.

#### 4.4.a Quelle loi de puissance pour les spectres ?

##### La théorie Bolgiano-Oboukhov (BO59)

Pour commencer, il est légitime de se demander quel type de loi de puissance devrait être observé dans une simulation de convection comme celle-ci. En particulier, une description de type Kolmogorov 41 (K41) est-elle adéquate pour un écoulement aussi anisotrope ? Nous avons déjà évoqué ce point au paragraphe 1.5.c du chapitre 1. La réponse donnée par Nordlund et al. (1997) est négative. Voyons ce qu'il en est exactement ici<sup>1</sup>.

Dans la théorie K41, l'hypothèse essentielle pour l'analyse dimensionnelle est que les propriétés de la turbulence ne dépendent que du taux de dissipation (ou

<sup>1</sup>Nous raisonnerons uniquement sur des théories pour le fluide incompressible. Passot et Pouquet (1987) ont trouvé pour le fluide compressible des corrections aux exposants de l'ordre de  $M^2$ . Le nombre de Mach dans cette simulation ne dépassant pas 0.15, cette hypothèse simplificatrice ne devrait pas poser de problème particulier ici.

de production) moyen des fluctuations de vitesse, qui vaut

$$\langle \varepsilon \rangle = \Pr \sum_{i,j} \langle (\partial_i v_j)^2 \rangle \quad (4.6)$$

dans le système d'unités utilisé. La seule possibilité offerte par l'analyse dimensionnelle est que les spectres de vitesse et d'un scalaire passif  $\theta$  soient de la forme

$$\begin{aligned} E(k) &\sim \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}, \\ E_\theta(k) &\sim \langle \varepsilon \rangle^{-1/3} \langle N \rangle k^{-5/3}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'analyse pour le scalaire passif est faite par exemple dans le livre de Tennekes et Lumley (1972), voir aussi Warhaft (2000).  $N$  a été défini auparavant dans l'équation (4.4).

Il existe une théorie intégrant les effets de la stratification et de l'activité d'un scalaire comme la température. Il s'agit de la théorie de Bolgiano et Oboukhov (Oboukhov 1959, Bolgiano 1962). Lorsque la température est active (dans un milieu stratifié de manière stable ou instable), la grandeur caractéristique du couplage dans l'équation de la quantité de mouvement doit être incorporée dans l'analyse dimensionnelle. Pour la convection dans l'approximation de Boussinesq, par exemple, le coefficient  $\alpha g$  intervient. Sinon, on peut prendre le paramètre  $G = g/\bar{T}$  où  $\bar{T}$  est la moyenne horizontale de la température à la profondeur considérée. On suppose alors que le taux de dissipation moyen des fluctuations thermique  $\langle N \rangle$  est constant (par un argument similaire à l'hypothèse de K41) et que  $\langle \varepsilon \rangle$  n'intervient plus, ce qui permet d'aboutir aux lois de puissance (dites de Bolgiano-Oboukhov) suivantes :

$$\begin{aligned} E(k) &\sim \langle N \rangle^{2/5} G^{4/5} k^{-11/5}, \\ E_\theta(k) &\sim \langle N \rangle^{4/5} G^{-2/5} k^{-7/5}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dans la théorie telle qu'elle est formulée à l'heure actuelle, il semble impossible d'obtenir un spectre en  $k^{-7/5}$  pour la température sans obtenir un spectre en  $k^{-11/5}$  pour la vitesse. Remarquons en passant que la théorie reposait initialement sur l'analyse dimensionnelle, mais que des justifications utilisant des arguments de conservation de l'entropie ont été données (Procaccia et Zeitak 1990, L'vov 1991, Yakhot 1992).

Le problème suivant est de déterminer les régions du spectre où des lois de type BO59 ou K41 devraient être observées. Dans la région du spectre de Bolgiano, il doit en principe exister un équilibre dominant entre les termes inertiels et la force d'Archimède. Le recouvrement entre les deux théories K41 et BO59 s'effectue lorsque les forces de viscosité deviennent du même ordre de grandeur que la flottabilité. On écrit alors l'égalité entre les spectres (4.7)-(4.8), ce qui permet d'obtenir l'expression de l'échelle caractéristique de recouvrement (à un facteur de l'ordre de l'unité sans dimension près), qui s'appelle l'échelle de Bolgiano

(Monin et Yaglom 1971, Benzi et al. 1998). Il vient

$$L_B(z) = \frac{\langle \varepsilon \rangle^{5/4}}{\langle N \rangle^{3/4} G^{3/2}}, \quad (4.9)$$

qui peut se mettre sous la forme (Chillá et al. 1993) sans dimension

$$L_B(z) = \frac{\text{Nu}^{1/2}}{(\text{RPr})^{1/4}}. \quad (4.10)$$

Les mouvements à des échelles plus petites que  $L_B$  sont en principe décrits par une turbulence de type K41, et ceux à grande échelle par des lois de puissance BO59.

Cette théorie a été vérifiée principalement par des expériences (voir par exemple Chillá et al. (1993)). Une expérience à faible nombre de Prandtl (Cioni et al. 1995) n'a pas permis de mettre en évidence de spectre de Bolgiano, confirmant la dépendance qualitative vis-à-vis de Pr dans l'équation (4.10). Récemment, plusieurs simulations numériques ont mis en évidence des spectres BO59 dans des domaines de rapport d'aspect de l'ordre de 1 (Calzavarini et al. 2002, Verzicco et Camussi 2003). Expérimentalement, la loi en  $k^{-7/5}$  pour la température est souvent observée mais la loi en  $k^{-11/5}$  pour la vitesse est obtenue plus rarement. Dans le travail de Verzicco et Camussi (2003) (simulation de convection à grand nombre de Rayleigh), un spectre en  $k^{-5/3}$  pour la vitesse cohabite avec un spectre en  $k^{-7/5}$  pour la température, ce qui bien évidemment pose problème à la théorie.

Le domaine d'application de la théorie BO59 (hypothèses sur les propriétés de l'écoulement, régimes d'observation) reste fort mal compris. Shraiman et Siggia (1990), Siggia (1994), par exemple, ont prétendu qu'il ne s'agissait pas d'une théorie asymptotique à grand nombre de Rayleigh. Il nous semble cependant intéressant de mentionner que les simulations à grand rapport d'aspect sont très intéressantes pour tester cette théorie, compte-tenu du critère d'échelles  $r > L_B$  donné ci-dessus.

### Application à la simulation A = 42.6

Nous avons calculé l'échelle de Kolmogorov (ou de dissipation) et de Bolgiano à partir des moyennes horizontales  $\bar{N}$  et  $\bar{\varepsilon}$  (figure 4.24) au lieu des moyennes d'ensemble  $\langle N \rangle$  et  $\langle \varepsilon \rangle$ . Dans le système d'unités choisi, rappelons que l'échelle de Kolmogorov est déterminée par

$$L_D = \left( \frac{\text{Pr}^3}{\bar{\varepsilon}} \right)^{1/4}. \quad (4.11)$$

Les résultats pour la dépendance verticale de  $L_B$  et  $L_D$  sont représentés sur la figure 4.23. À toutes les profondeurs, l'échelle de Kolmogorov est beaucoup

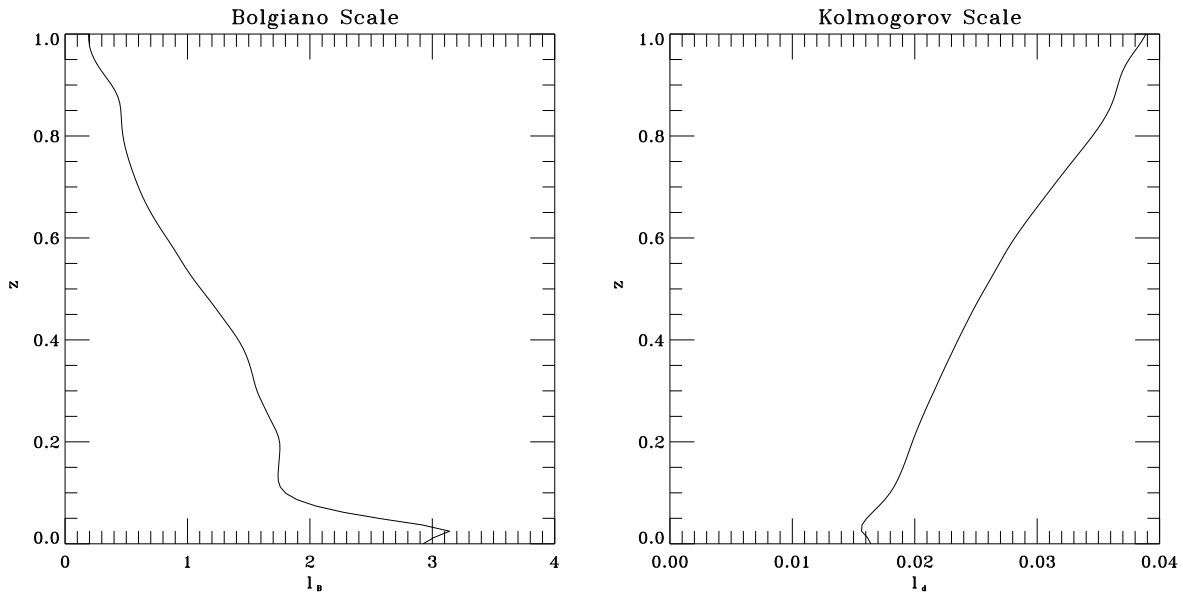


FIG. 4.23 – Échelle de Bolgiano ( $L_B$ , à gauche) et de Kolmogorov ( $L_D$ , à droite) en fonction de l'altitude, exprimées en unités de hauteur  $d$  du domaine de simulation.

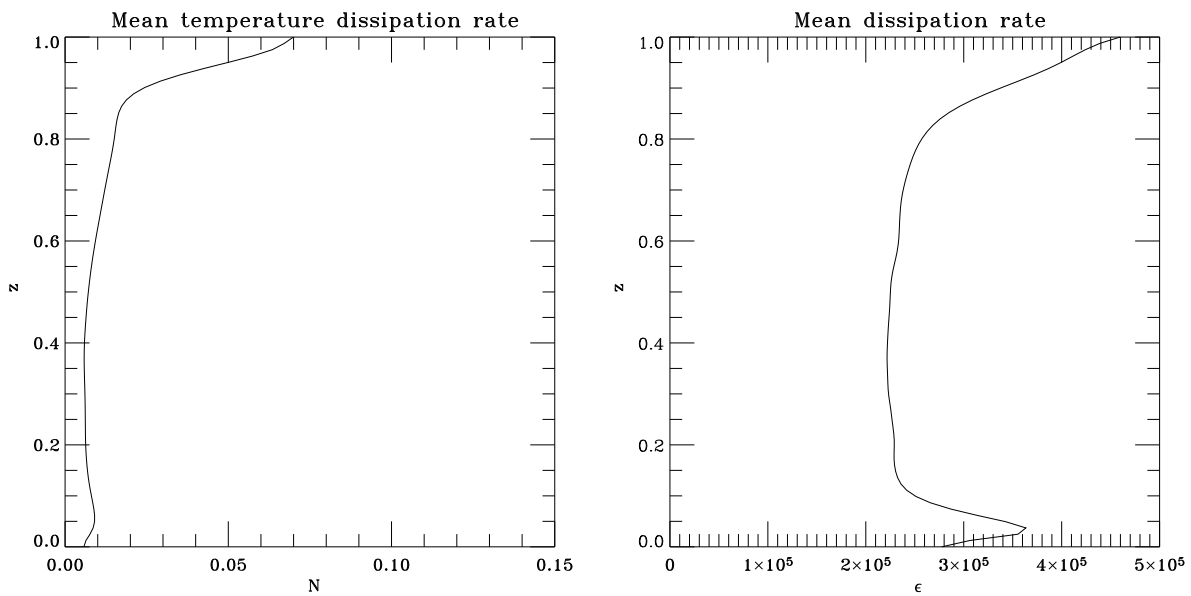


FIG. 4.24 – Taux de dissipation des fluctuations de température  $\bar{N}$  (à gauche) et des fluctuations de vitesse  $\bar{\epsilon}$  (à droite) pour la simulation de rapport d'aspect  $A = 42.6$  en fonction de l'altitude.

plus petite que l'échelle de Bolgiano. Cette dernière est elle-même petite par rapport à la dimension horizontale du domaine de simulation. Il devrait donc en principe être possible d'observer des lois de puissance de type BO59 dans cette simulation. En passant, on peut voir que l'échelle de Kolmogorov calculée ici est bien comparable à l'échelle de maille choisie dans la direction horizontale  $\Delta x = 42.6/1024 \simeq 0.04$ . Des tests utilisant moins de points et le même régime de paramètres avaient abouti à une instabilité de la simulation.

En pratique, nous avons observé que les spectres ne possédaient pas toujours de loi de puissance nette en dépit de la valeur du nombre de Reynolds et du nombre de modes relativement importants de la simulation (340 compte-tenu de la troncature à  $2/3$ ) et que les pentes observées pouvaient dépendre assez fortement de la profondeur à laquelle le spectre était calculé. La figure 4.25 représente les spectres de quantité de mouvement<sup>2</sup> et de température pris à trois altitudes différentes et multipliés par  $k^{5/3}$  ou  $k^{11/5}$  pour la quantité de mouvement et par  $k^{5/3}$  ou  $k^{7/5}$  pour la température, de telle manière que la loi de puissance se manifeste sous la forme d'un plateau. À proximité de la surface, le spectre de quantité de mouvement se rapproche de  $k^{-5/3}$ . En revanche il n'y a pas de loi apparente pour le champ de température. L'explication à cela est que la couche limite thermique fait apparaître des petites échelles autour de  $k = 40$ . Vers le milieu de la couche, en revanche, on observe une remontée du spectre de quantité de mouvement aux échelles  $10 < k < 100$ . Le spectre de température, pour sa part, est nettement mieux ajusté avec une loi en  $k^{-7/5}$  que par une loi en  $k^{-5/3}$ . Cette tendance reste visible jusqu'au bas de la couche. On retrouve là encore une certaine homogénéité pour les statistiques de la température quand on se dirige vers le bas. En revanche, le spectre de quantité de mouvement évolue vers le bas de la couche et une loi de puissance avec un exposant inférieur à  $5/3$  en valeur absolue ( $k^{-1}$  ?) est observé dans cette région.

Hormis dans la couche limite supérieure, un spectre en  $k^{-7/5}$  pour la température semble donc être réalisé sur une décade, tandis que le spectre de vitesse ne se rapproche en aucun cas de  $k^{-11/5}$ . Cette situation pourrait être semblable à celle observée par Verzicco et Camussi (2003) ou dans certaines expériences. Des simulations à grand rapport d'aspect 2D en cours de réalisation semblent montrer que pour des régimes légèrement plus turbulents ( $R = 3 \cdot 10^6$ ) avec les mêmes paramètres que dans la grande simulation, on observe toujours un spectre en  $k^{-7/5}$  pour la température mais qu'un spectre de quantité de mouvement en  $k^{-3}$ , caractéristique de la turbulence 2D, se forme pour la vitesse.

Dans tous les cas, comment un tel spectre de température peut exister sans son cousin en  $k^{-11/5}$  pour la quantité de mouvement reste une énigme pour la théorie actuelle, et des investigations plus poussées sont nécessaires. Une analyse basée sur l'*Extended Self Similarity* (ESS, voir Benzi et al. (1993, 1995)) pourrait s'avérer utile pour les simulations. Cette théorie permet en effet de découvrir des comportements autosimilaires dans des régimes peu turbulents lorsque des lois

---

<sup>2</sup>Nous n'avons pas observé de variation significative entre les spectres de vitesse et de quantité de mouvement.

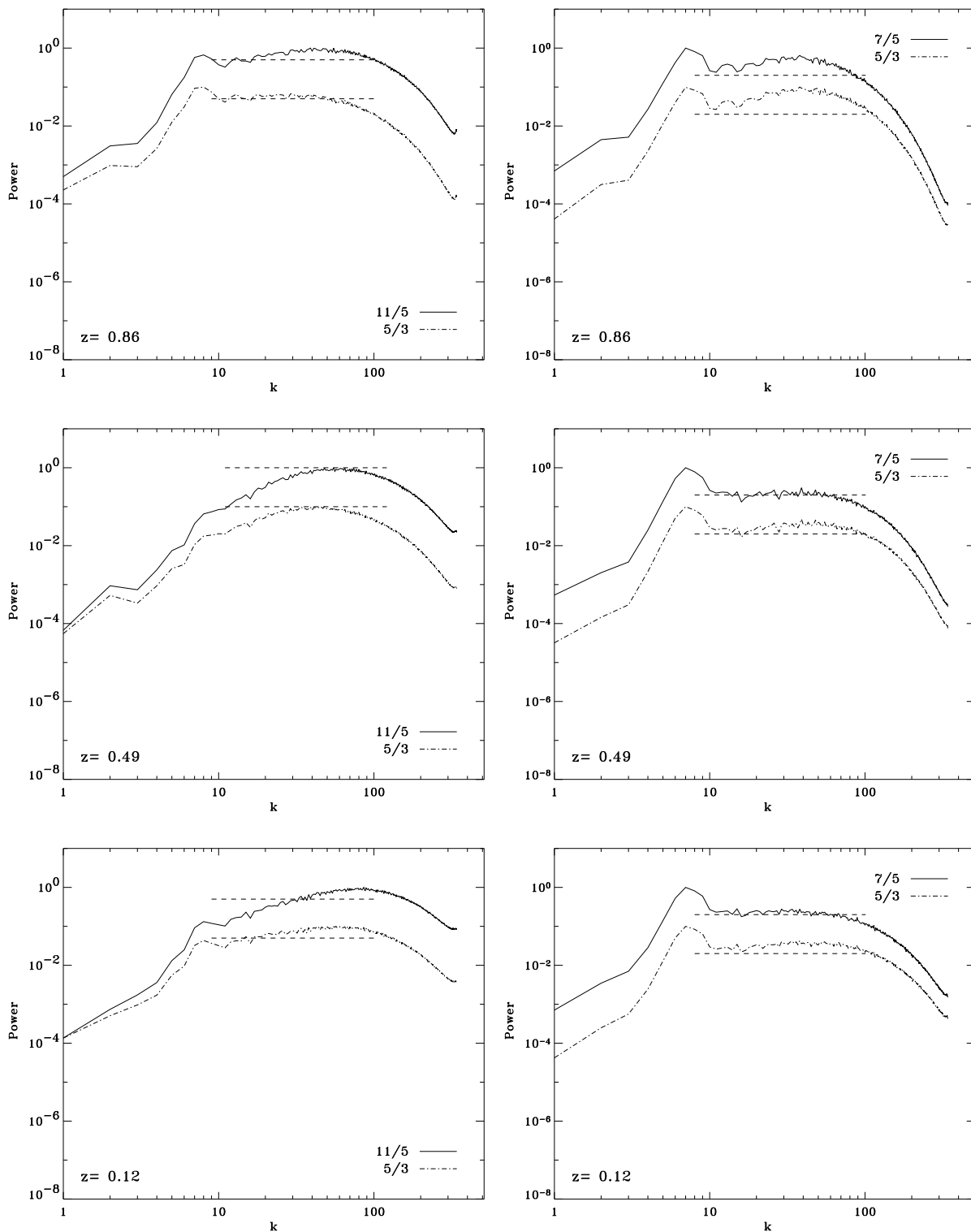


FIG. 4.25 – Spectres pour la quantité de mouvement (à gauche) et pour la température (à droite) compensés par les exposants K41 ou BO59. La profondeur à laquelle chaque spectre a été calculé augmente de haut en bas.

de puissance ne sont pas observées pour les fonctions de structure (ou de manière équivalente pour les spectres), et a déjà permis de trouver des exposants de type Bolgiano pour des expériences de convection (Benzi et al. 1994).

#### 4.4.b Dynamique et transfert non-linéaire dans l'espace spectral

Nous allons à présent revenir sur l'origine des mésoéchelles observées dans la simulation. Le paragraphe 4.3.b a permis de mettre en évidence que ces panaches s'étendaient sur toute la profondeur du domaine, contrairement aux échelles granulaires (voir aussi la figure 4.9). Au chapitre 1, nous avons également décrit les résultats de Cattaneo et al. (2001), qui avaient mis en évidence un phénomène comparable dans des simulations Boussinesq. Ils avaient simplement émis l'hypothèse d'interactions collectives entre petites échelles pour expliquer leur existence. Pour savoir si cette supposition était correcte, nous avons donc essayé d'analyser la dynamique de l'écoulement dans l'espace spectral horizontal et de mesurer les effets des termes de transfert non-linéaire au niveau des grandes échelles.

Nous partons des équations de la quantité de mouvement (équation (2.1) combinée à l'équation (2.2), chapitre 2) dont on prend la transformée de Fourier horizontale, et dont on extrait la composante solénoïdale (qui est largement dominante dans une simulation comme la nôtre où le nombre de Mach reste faible) en appliquant un opérateur de projection. L'équation obtenue est ensuite multipliée par le complexe conjugué de la composante solénoïdale de la quantité de mouvement  $(\widehat{\rho v})_k^*$  puis intégrée sur  $\Omega_k$  et  $z$ , ce qui permet d'obtenir l'équation d'évolution pour le spectre unidimensionnel solénoïdal  $E^s(k)$  :

$$\partial_t E^s(k) = T(k) + F(k) + D_v(k), \quad (4.12)$$

avec

$$T(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} (\widehat{\rho v})_k^* \cdot \widehat{\mathcal{P}} \left[ \widehat{\nabla \cdot (\rho v v)}_k \right] k \, d\Omega_k \, dz \right\}, \quad (4.13)$$

$$F(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} (\widehat{\rho v})_k^* \cdot \widehat{\mathcal{P}} \left[ \widehat{\rho}_k \Lambda e_z \right] k \, d\Omega_k \, dz \right\} \quad (4.14)$$

et

$$D_v(k) = 2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} (\widehat{\rho v})_k^* \cdot \widehat{\mathcal{P}} \left[ \Pr \widehat{\Delta v}_k + \frac{\Pr}{3} \widehat{\nabla (\nabla \cdot v)}_k \right] k \, d\Omega_k \, dz \right\}. \quad (4.15)$$

Dans les équations précédentes,  $\widehat{\mathcal{P}}$  représente l'opérateur de projection

$$\mathcal{P} \equiv \text{Id} - \nabla \Delta^{-1} \nabla. \quad (4.16)$$

agissant sur des fonctions de  $\mathbf{k}$  et  $z$ , et  $\Re$  désigne la partie réelle.  $T(k)$  représente le terme de transfert non-linéaire,  $F(k)$  est le forçage par la poussée d'Archimède, et



$D_\nu(k)$  caractérise la dissipation de l'énergie cinétique par viscosité. En appliquant une procédure similaire pour l'équation de température, on trouve que

$$\partial_t E_\theta(k) = L(k) + N(k) + D_\kappa(k) + V_\nu(k), \quad (4.17)$$

avec

$$L(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* \left( \widehat{\partial_{z_k} T} + (\gamma - 1) \overline{T} \widehat{\nabla \cdot \mathbf{v}_k} \right) k \, d\Omega_k \, dz \right\}, \quad (4.18)$$

$$N(k) = -2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* \left( \widehat{\mathbf{v} \cdot \nabla T}_k + (\gamma - 1) \overline{T} \widehat{\nabla \cdot \mathbf{v}_k} \right) k \, d\Omega_k \, dz \right\} - L(k), \quad (4.19)$$

$$D_\kappa(k) = 2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* \gamma \left( \frac{\Delta T}{\rho} \right)_k k \, d\Omega_k \, dz \right\} \quad (4.20)$$

et

$$V_\nu(k) = 2 \Re \left\{ \int_0^1 \int_{\Omega_k} \widehat{T}_k^* (\gamma - 1) C_k^2 \Pr \left( \frac{\nu}{\rho} \right)_k k \, d\Omega_k \, dz \right\}. \quad (4.21)$$

Le terme  $L(k)$  dans le membre de droite de l'équation (4.17) est présent dans la théorie linéaire et représente l'advection du profil d'entropie moyen ( $\overline{T}$  désigne la moyenne horizontale de la température à chaque profondeur).  $N(k)$ , qui correspond à l'advection de l'entropie totale moins  $L(k)$ , est un terme complètement non-linéaire. Finalement,  $D_\kappa(k)$  et  $V_\nu(k)$  sont respectivement la dissipation thermique et la projection du terme de chauffage visqueux sur la composante  $k$  de la température.

Sur la figure 4.26, nous avons représenté ces diverses grandeurs en fonction de  $k$ , moyennées sur une période au cours de laquelle on observe que les modes  $k < 12$  croissent (se reporter à la figure 4.8 pour  $t = 0.13$ ). Le forçage  $F(k)$  est le principal pourvoyeur d'énergie pour ces modes, tandis que le terme de transfert non-linéaire est toujours négatif pour ces mêmes échelles. Dans l'équation de température, c'est également le terme linéaire (lié à la suradiabaticité de l'atmosphère) qui est responsable de l'injection d'énergie aux grandes échelles, tandis que le terme non-linéaire en transfère une partie vers les petites échelles. Les petites échelles se comportent donc avant tout comme des diffuseurs turbulents qui prélèvent de l'énergie aux grandes échelles. Dans les deux équations, le bilan net aboutit à une croissance des modes  $k < 12$ .

Cette analyse montre par conséquent que l'origine des modes à grande échelle est *convective*. Elle ne provient pas d'un effet de cascade inverse ou d'interactions collectives, comme il aurait été possible d'imaginer en observant la croissance de l'échelle intégrale au cours du temps. Pour simplifier et donner une image physique du phénomène, on peut dire que les petites échelles créent un terme de « diffusion » turbulente (qui n'est pas nécessairement formellement exprimable sous

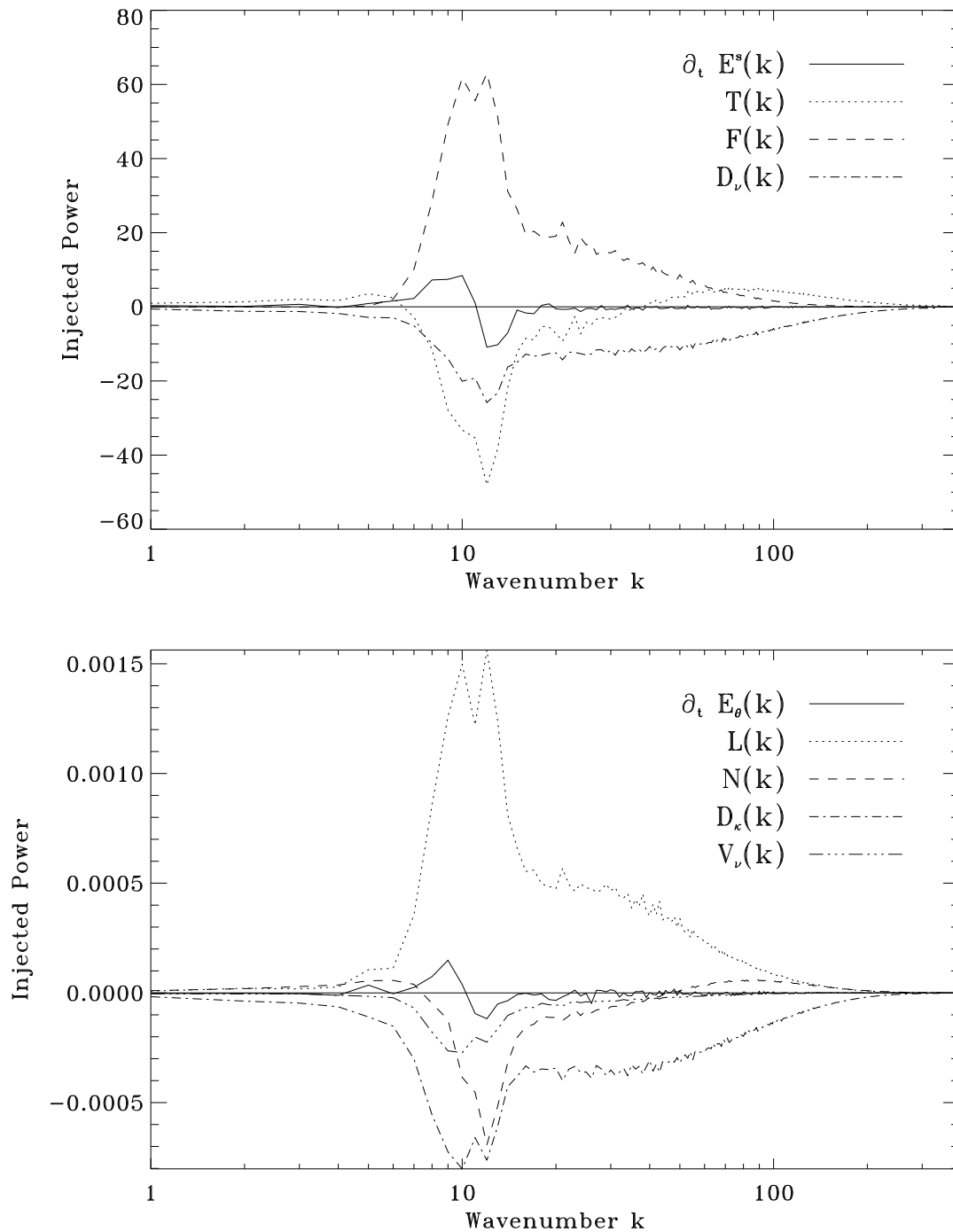


FIG. 4.26 – Représentation des différents termes des équations (4.12)-(4.17), moyennés entre  $t = 0.14$  et  $t = 0.20$ . En haut : équation (4.12). En bas : équation (4.17). La normalisation est faite par rapport aux maxima des spectres. La ligne pleine correspond à l'effet cumulé des termes de droite et représente le taux de croissance effectif  $\Gamma_{\text{eff}}$  des modes (figure 4.5) pour la normalisation choisie.

la forme d'un laplacien) qui a pour effet d'abaisser le nombre de Rayleigh effectif et donc le taux de croissance de l'instabilité convective aux grandes échelles.

Deux commentaires supplémentaires peuvent être effectués. Premièrement, nous n'avons pas pour le moment d'explication pour la valeur précise de l'échelle de saturation ( $k = 7$ ) finale. Au vu de l'équilibre entre le forçage et le transfert, il est possible par exemple que celle-ci change si le nombre de Rayleigh (et donc l'intensité de la turbulence à petite échelle) change (voir également la discussion au paragraphe 4.5.c). D'autres paramètres comme la stratification ou le nombre de Prandtl pourraient également avoir une influence sur cette valeur. Une recherche plus détaillée sur ce point et plus généralement sur les relations entre la taille des « granules » et des mésoéchelles reste à faire. Deuxièmement, la figure 4.26 montre que les termes de dissipation restent relativement importants à toutes les échelles et que l'équilibre entre les différents termes dans l'équation de la quantité de mouvement pour des modes autour de  $k = 40$  (viscosité en équilibre avec forçage) n'est pas vraiment celui attendu dans le cadre du modèle de Bolgiano. En revanche, l'équilibre entre forçage et diffusion à ces échelles dans l'équation de température semble plus conforme à ce modèle. Cette différence de comportement entre la quantité de mouvement et la température pourrait constituer une piste pour l'interprétation des résultats obtenus sur les spectres. Bon nombre de points restent cependant pour le moins obscurs à ce sujet actuellement.

## 4.5 Les simulations et la photosphère solaire

Au terme de cette analyse, nous devons nous demander comment utiliser les résultats des simulations pour le problème des grandes échelles de la convection solaire. Rappelons qu'il ne peut s'agir que d'une extrapolation des résultats obtenus dans des régimes d'écoulement « peu » turbulents à des écoulements possédant des nombre de Reynolds de l'ordre de  $10^{10}$ . Les arguments qui suivent devront donc toujours être entendus en gardant cette limite à l'esprit. Afin de créer un lien avec la surface de la photosphère où la radiation joue un rôle fondamental, il est intéressant de comparer pour commencer les résultats obtenus par l'intermédiaire de simulations de polytrophe et ceux obtenus par l'intermédiaire de simulations de convection radiative.

### 4.5.a Comparaison avec des simulations de convection radiative

Nous avons utilisé les résultats de simulations réalisées par Rieutord et al. (2002). Ces simulations de type LES prennent notamment en compte des profils d'opacité et du transfert radiatif dans l'approximation grise, utilisent des conditions de type frontière ouverte au bas de la couche et un rapport de densité de 100 entre le bas et le haut, pour un rapport d'aspect  $A = 10$  ( $30 \text{ Mm} \times 30 \text{ Mm} \times 3 \text{ Mm}$ , pour une résolution de  $315 \times 315 \times 82$ ). Si le réalisme physique de cette simulation

semble plus important, la dynamique turbulente de la simulation du polytrophe est certainement plus robuste (DNS où le nombre de Reynolds est contrôlé).

La comparaison est effectuée sur la figure 4.27. Plusieurs points importants peuvent être commentés. Tout d'abord, les deux simulations montrent que l'échelle de surface se différencie assez fortement des échelles visibles en profondeur. Des mésoéchelles apparaissent dans les deux simulations. Cependant, dans la simulation avec radiation, l'échelle caractéristique augmente visuellement avec la profondeur tandis que celle-ci reste fixe pour le polytrophe. Cet effet est probablement relié à deux facteurs :

- la stratification en densité dans la simulation polytropicque est moins importante que dans la simulation avec radiation (rapport 3 contre rapport 100) ;
- la condition de paroi ouverte est moins restrictive pour la dynamique que la condition stress-free de la simulation polytropicque.

Un autre point intéressant est qu'on observe dans les deux simulations une modulation de température aux mésoéchelles au niveau de la couche de surface. Dans la simulation avec radiation, il est possible de calculer la surface  $\tau = 1$  qui correspond à ce que nous voyons réellement. En revanche, cette représentation est impossible pour la simulation polytropicque. Pour les simulations avec transfert, on peut voir figure 4.28 que la carte d'intensité ne fait pas apparaître de mésoéchelle, contrairement à la carte de température. Ceci est lié au fait que la surface  $\tau = 1$  ne correspond pas à une profondeur constante et qu'il existe une modulation des fluctuations de température aux mésoéchelles. Cela confirme les résultats du paragraphe 4.3.b qui montraient que la physique de la couche limite de surface était très importante et qu'elle pouvait masquer complètement la dynamique plus profonde. En réalité, il semble donc que l'expérience idéalisée du polytrophe permette de capturer la physique des zones profondes mais pas celle des zones de surface de manière quantitative. Par exemple, l'existence d'un maximum important aux mésoéchelles à la surface dans le spectre de température des simulations polytropicques constitue certainement un artefact de ce modèle.

Finalement, remarquons en passant que les deux simulations font apparaître des motifs granulaires de taille similaire sur la représentation. Compte-tenu du rapport d'aspect des deux simulations, il semble donc qu'il existe un facteur d'échelle d'environ 4 entre les résultats obtenus dans chacun des cas.

#### 4.5.b Interprétation des résultats dans le cadre photosphérique

L'analyse de l'influence des conditions aux limites thermiques et la comparaison avec les simulations de convection radiative nous ont montré que la physique de la surface jouait un rôle prépondérant dans l'apparence visuelle des solutions et que le défaut de réalisme observé avec le modèle polytropicque au niveau du motif de la granulation était en grande partie lié à ce phénomène. En revanche, sous la surface où l'approximation de diffusion n'a pas de raison d'être invalidée,

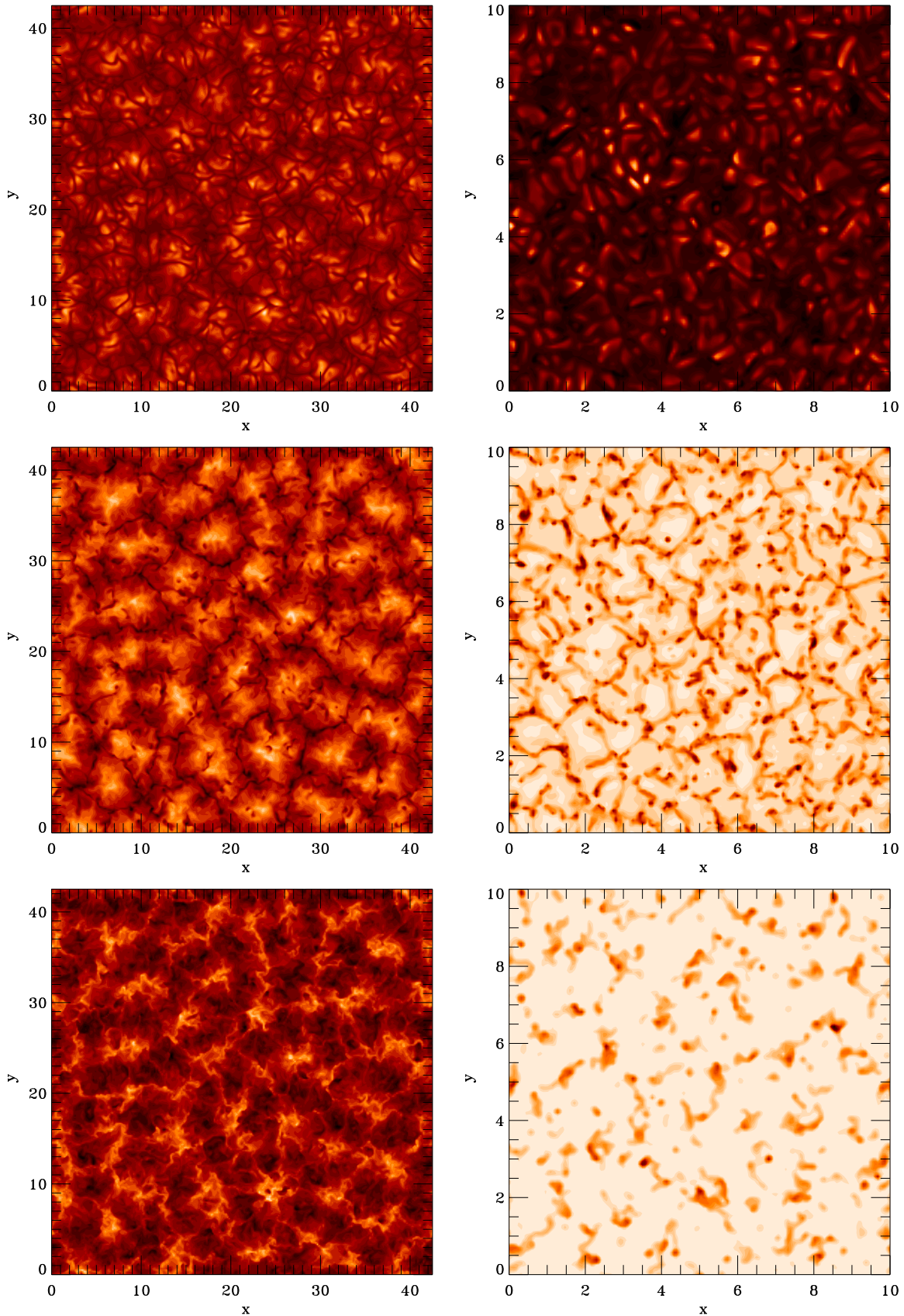


FIG. 4.27 – Comparaison entre trois coupes de température pour la simulation de polytrophe (partie gauche) et une simulation de convection radiative (Rieutord et al. 2002) avec rapport d'aspect 10 (partie droite). Images du haut :  $z = 0.99$  et à l'altitude moyenne correspondant à une opacité  $\tau = 1$ . Images du milieu : milieu de la couche. Images du bas : bas de la couche.

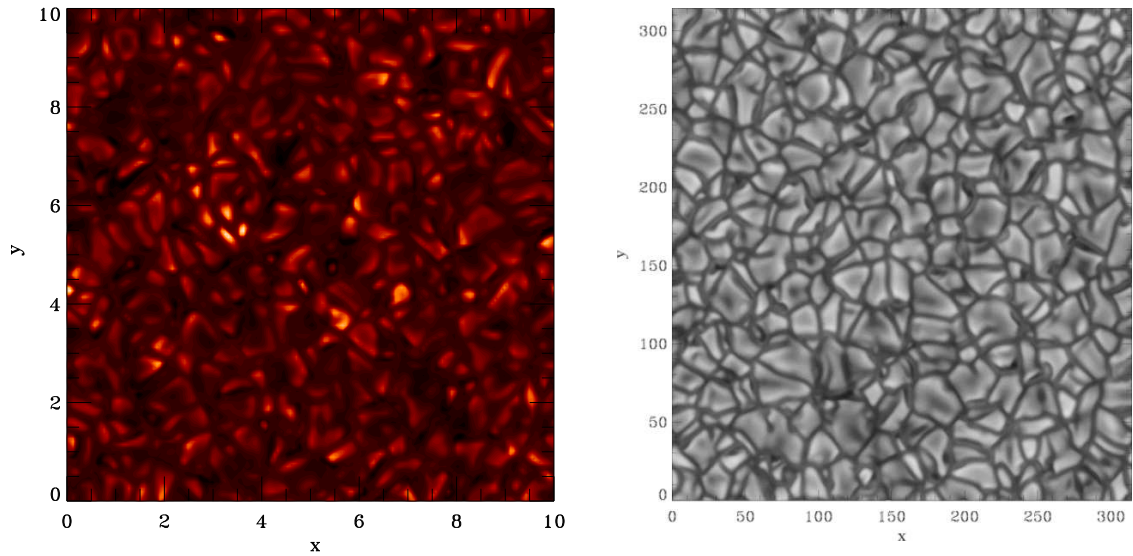


FIG. 4.28 – Comparaison entre la carte des perturbations de température (à gauche) et de l'intensité radiative (à droite) au niveau de la surface  $\tau = 1$  pour les simulations de Rieutord et al. (2002). Le système d'unités est différent sur les deux figures mais la même zone est représentée.

on peut légitimement supposer que les simulations de polytropes donneront des résultats « plus proches de la réalité ».

En dépit des possibles différences de régime d'écoulement, on peut malgré tout observer que les simulations que nous avons présentées offrent une image assez voisine de celle de la convection photosphérique. Plusieurs éléments observationnels semblent étayer les conclusions sur l'existence d'une mésoéchelle en profondeur. Il y a pour commencer l'ensemble des résultats vélocimétriques présentés au chapitre 1, qui, comme nous l'avons vu, semblent s'accorder aujourd'hui sur l'existence d'une composante mésogranulaire distincte de la granulation. Viennent ensuite les mesures récentes de champs magnétiques intraréseau (figure 4.29), qui montrent une structuration mésoéchelle du champ semblable aux simulations Boussinesq à grand rapport d'aspect de Emonet et Cattaneo (2001). Il existe également une observable photométrique faible liée à la mésogranulation, qui est l'existence de granules brillants avec une durée de vie de l'ordre de celle de la mésogranulation, autour desquels la granulation semble s'organiser. Ces granules brillants ont été étudiés par Oda (1984). La figure 4.30 reproduit un dessin de cet article ainsi qu'une carte d'intensité moyennée sur une heure, faisant ressortir ces structures. Les deux champs ont une taille similaire. Cette phénoménologie de la structuration autour de points brillants est également observée dans les simulations, qui montrent une organisation des échelles de la couche limite thermique (à courte durée de vie) autour des panaches montants associés à la mésoéchelle, de durée de vie nettement plus élevée.

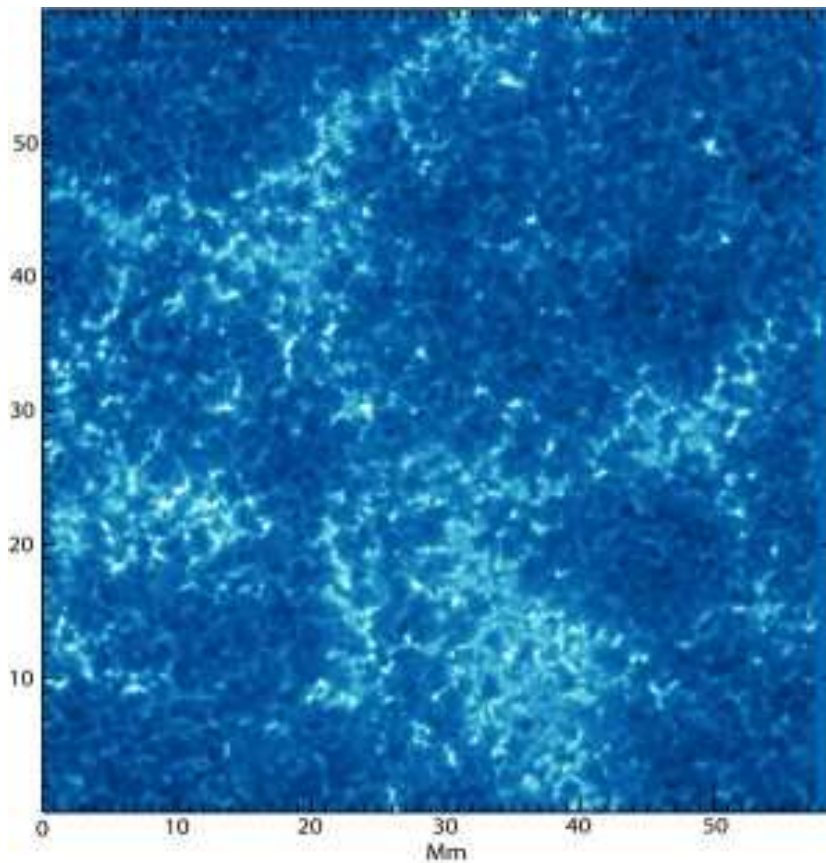


FIG. 4.29 – Carte des champs magnétiques intra-réseau obtenue dans une raie du calcium. On observe le réseau chromosphérique mais aussi une structuration du champ à des échelles plus petites, de l'ordre de 5 000 km (Berger et al. 2004).

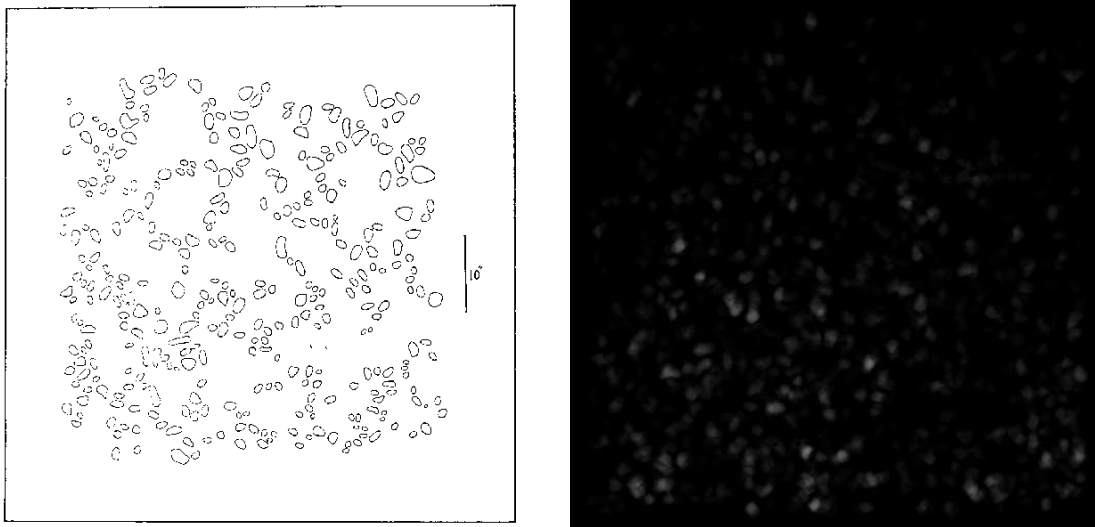


FIG. 4.30 – À gauche : Dessin tiré de Oda (1984) et illustrant la distribution mésoéchelle de granules brillants ( $10'' \simeq 7\,300$  km). À droite : un champ (de taille comparable) d'intensité moyenné sur une heure, obtenu par Thierry Roudier à partir d'observations de La Palma.

Au total, nous avons donc à notre disposition plusieurs indications qui semblent montrer qu'une dynamique convective vigoureuse sous la surface photosphérique pourrait être présente à des échelles mésogranulaires. Dans ce modèle, la granulation se présente donc comme une couverture masquant en grande partie la dynamique sous-jacente dont la manifestation principale serait l'advection du motif de la granulation. Notons qu'il n'a pas été nécessaire de recourir à l'ionisation de l'hélium pour faire apparaître deux échelles distinctes dans le modèle.

On peut pour finir évaluer les tailles caractéristiques des structures obtenues dans la simulation. Si on suppose que la granulation a une extension verticale de l'ordre de 150 km dans la réalité (l'échelle de hauteur de densité dans la photosphère) et qu'on la compare à l'épaisseur de nos granules (environ 20 % de l'épaisseur de la boîte de simulation), on aboutit à des granules de dimension horizontale 1 000 km et à des mésocellules de l'ordre de 5 000 km. L'extension horizontale du domaine de la simulation serait quant à elle d'environ 35 000 km.

#### 4.5.c Et la supergranulation ?

Avant de refermer ce chapitre, nous allons consacrer un paragraphe aux plus grandes échelles de la simulation. Un des objectifs de notre projet initial était en effet d'étudier des mécanismes possible de structuration de l'écoulement à des échelles « supergranulaires » dans l'hypothèse où elles seraient essentiellement liées à des mécanismes de surface.

Nous n'avons pas pu mettre en évidence de structure comparable à la super-



granulation. L'allure à grande échelle des spectres de la figure 4.25 ne fait apparaître aucun pic secondaire comparable à celui de la figure 1.5 du chapitre 1, bien que, d'après l'estimation de la taille du domaine réalisée auparavant, le domaine de calcul utilisé puisse en théorie contenir une structure de type supergranule. Les simulations avec radiation de Rieutord et al. (2002) étaient parvenues à un résultat identique.

Nous avons cependant pu observer l'existence de faibles structures à grande échelle principalement *non convectives*. Pour s'en rendre compte, on peut regarder le spectre de la quantité de mouvement verticale et horizontale de manière séparée (figure 4.31). Le champ de vitesse vertical, qui est normalement responsable du transport convectif, est clairement très faible aux grandes échelles comparativement au champ de vitesse horizontal. La figure 4.26 montre pour sa part que l'origine de l'énergie cinétique aux grandes échelles est en fait le terme d'interaction non-linéaire, qui est faiblement positif pour  $k < 7$ . Le champ de vitesse en surface filtré sur ces modes est représenté figure 4.32. La composante de type « supergranulaire », qui correspond principalement à une divergence horizontale non nulle, a été séparée de la composante vorticale par une décomposition de Helmholtz sur les directions spectrales horizontales. Dans la simulation, les deux composantes contiennent à peu près autant d'énergie l'une que l'autre. Il semble donc qu'il existe une possibilité pour faire passer de l'énergie des petites vers les grandes échelles dans ce système. Les interactions entre les structures vorticales à mésoéchelle, mises en évidence au paragraphe 4.3.b, comme par exemple leur déformation par l'écoulement horizontal (mécanisme de *vortex stretching*), pourraient en partie être responsable de ce transfert. Il serait cependant prématuré d'en tirer des conclusions pour l'origine d'une échelle comme la supergranulation.

Plusieurs pistes de recherche peuvent être proposées pour élaborer des simulations capables de produire de la supergranulation. Bien sûr, la première consiste à augmenter encore le rapport d'aspect afin d'autoriser des échelles toujours plus grandes. La deuxième serait d'augmenter le rapport de densité entre le haut et le bas de la couche, ou de passer à des conditions de type frontière ouverte au bas de la couche. Cependant nous avons vu que les simulations de Rieutord et al. (2002), avec un contraste de 100 en densité et ce type de conditions aux limites, ne permettaient pas non plus de faire apparaître la supergranulation.

Une autre raison pourrait être que la simulation n'a pas été poursuivie assez longtemps pour pouvoir observer le développement de très grandes échelles. En effet, s'il existait une instabilité à grande échelle de l'écoulement, celle-ci se développerait sur un temps de l'ordre du temps de relaxation thermique basé sur la taille horizontale du domaine (voir le chapitre 5). C'est une possibilité que nous ne pouvons pas exclure. Notons que dans la situation correspondant à la photosphère, les temps caractéristiques de la diffusion horizontale et de la supergranulation semblent difficiles à accorder : si on se base sur une estimation utilisant la diffusivité thermique et la taille de la supergranulation, on trouve que le temps de relaxation  $L_{sg}^2/\kappa$  est d'environ 50 jours et est donc très supérieur à la durée de

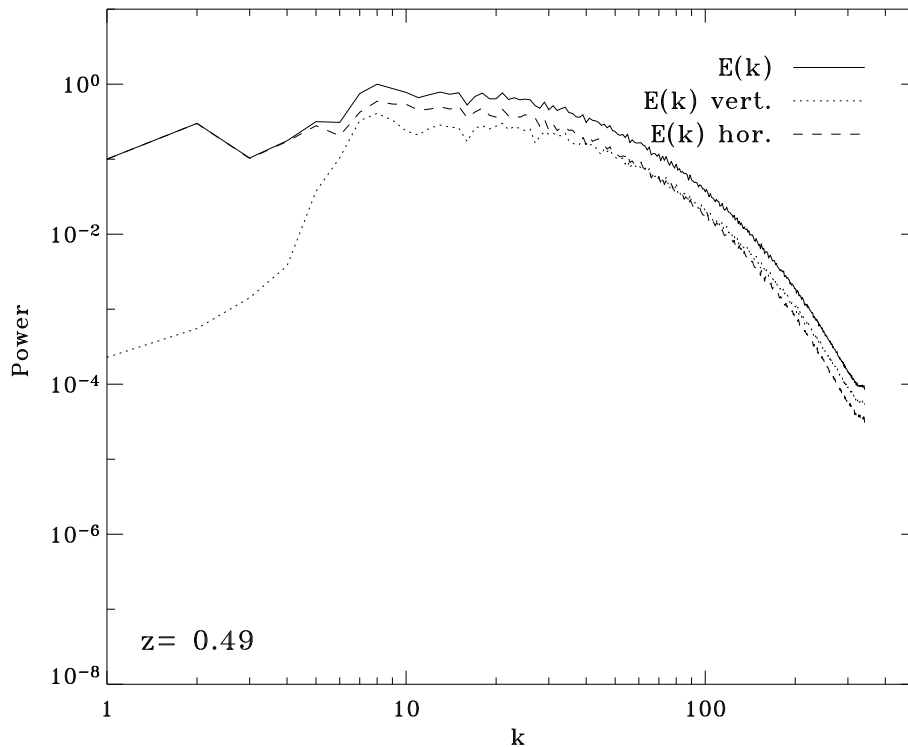


FIG. 4.31 – Spectres de la quantité de mouvement verticale et horizontale au milieu de la couche de convection, dans le régime stationnaire.

vie des supergranules.

Une possibilité extrêmement alléchante est l'inclusion du champ magnétique. Il ne s'agit pas uniquement ici de la traditionnelle remarque : « avec du champ magnétique, les résultats vont changer ». La corrélation entre le réseau chromosphérique et la supergranulation est en effet très importante, et il est possible que l'équipartition entre énergie magnétique et cinétique soit atteinte à l'échelle des supergranules (Clark et Johnson 1967). Pour un champ de 100 G au niveau des points brillants du réseau, une densité de surface de  $10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$  et la vitesse de  $350 \text{ m s}^{-1}$  pour l'écoulement supergranulaire, on obtient en effet ce résultat d'équipartition. La supergranulation pourrait donc émerger de cette saturation (cela requiert toutefois un mécanisme extérieur capable de créer du champ de vitesse à grande échelle). Nous préparons des simulations avec le rapport d'aspect nécessaire pour tester cette hypothèse. Enfin, il est possible que d'autres ingrédients physiques comme l'ionisation ou la rotation puissent avoir une importance non négligeable dans le processus de formation des supergranules.

Il est finalement possible que la supergranulation ne puisse pas du tout apparaître dans les régimes de turbulence que nous sommes actuellement capables de simuler. Seuls des modèles de sous-maille performants pourraient alors nous permettre de sortir de cette ornière. Une question importante, liée à la précédente remarque, se pose : les structures cohérentes que nous avons décrites précédem-

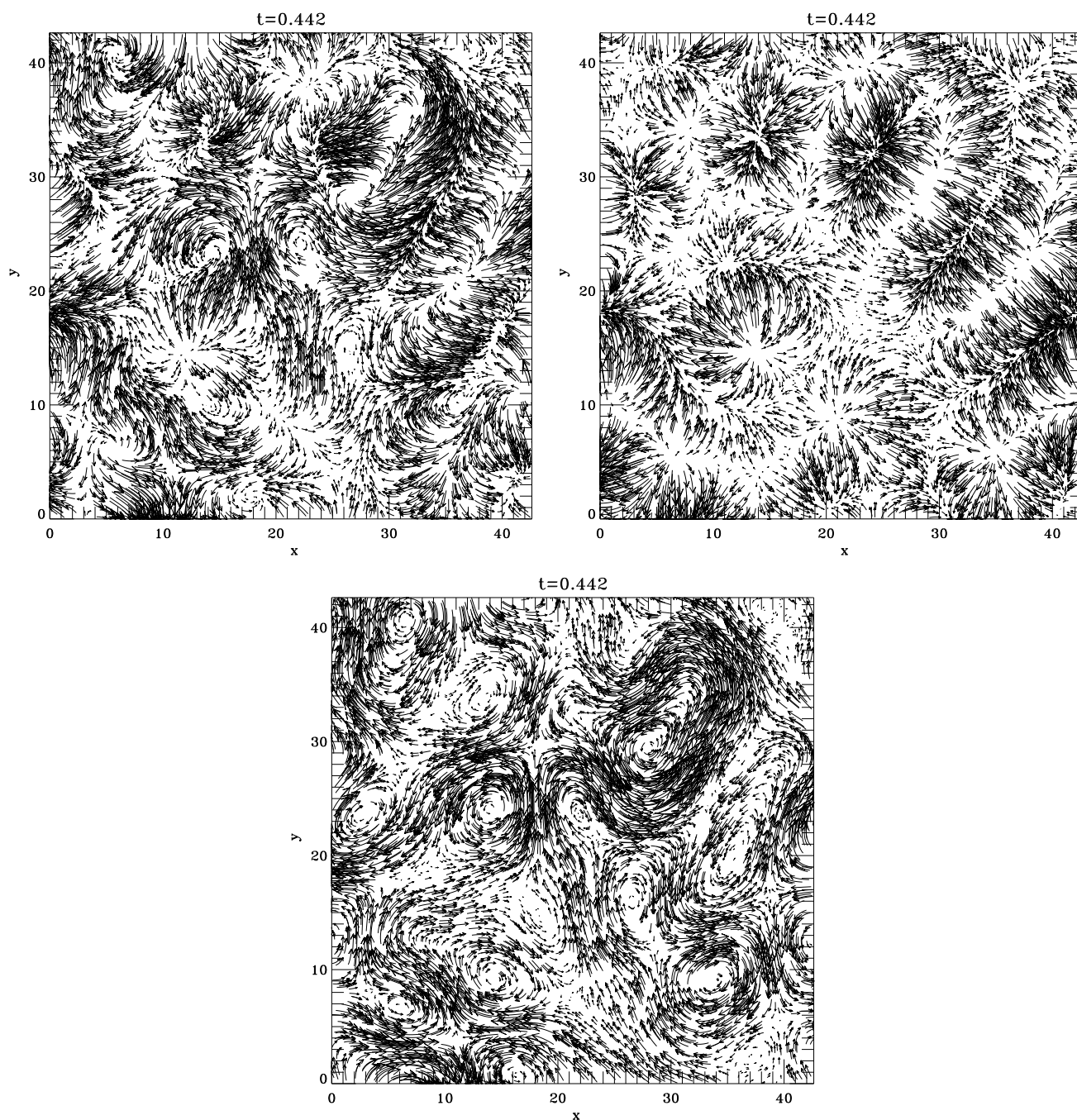


FIG. 4.32 – Représentations du champ de vitesse horizontale à la surface, filtré sur les modes  $k < 7$ . En haut à gauche : champ de vitesse total. En haut à droite : composante à divergence horizontale non nulle. En bas : composante tourbillonnaire.

ment ont été qualifiées de « mésoéchelles » parce que leur taille était comprise entre celle de la granulation et celle du domaine de simulation. Néanmoins, il semble que le transfert non-linéaire joue un rôle très important dans leur stabilisation en équilibrant le forçage convectif. Comment évoluerait leur taille pour des nombres de Rayleigh plus grands ? Le forçage (le degré d'instabilité) et le transfert seraient tous deux plus importants, et la valeur de l'échelle de saturation finale pourrait être différente. Est-il possible qu'elle atteigne l'échelle de la supergranulation si le nombre de Rayleigh est de  $10^{20}$  ? Pour poser la question différemment, les mésoéchelles observées dans notre expérience ne seraient-elles pas plutôt les « superéchelles » de cette simulation ? La structuration des champs magnétiques aux mésoéchelles observée par Emonet et Cattaneo (2001) pourrait alors être identifiée non plus avec les champs intra-réseau mais avec le réseau magnétique lui-même. Bien qu'il semble difficile d'atteindre numériquement des régimes de nombres de Rayleigh très importants, une étude du comportement de l'échelle intégrale en fonction de ce paramètre devra être menée pour tenter d'observer une tendance d'évolution.

## 4.6 Récapitulatif des résultats

Pour conclure ce long chapitre, un résumé des résultats obtenus dans nos simulations et de leurs implications pour les problèmes de la mésogranulation et de la supergranulation ne sera pas superflu :

- les simulations de polytrophe à grand rapport d'aspect font apparaître deux échelles distinctes : la première, « la granulation », correspond à une couche limite thermique et ne pénètre pas à des profondeurs supérieures à 20 % de l'épaisseur de la couche. La seconde est une mésoéchelle de taille caractéristique quatre à cinq fois plus importante que l'échelle granulaire, pour les paramètres utilisés dans la simulation ;
- l'écoulement mésoéchelle constitue l'échelle privilégiée du transport d'énergie *par convection*, ce qui infirme les hypothèses avancées par Cattaneo et al. (2001). Sa taille caractéristique est nettement distincte de la taille du domaine de simulation, ce qui signifie que son origine est très probablement physique. Pour autant, nous ne comprenons pas à l'heure actuelle le mécanisme de saturation de cette échelle à la valeur particulière obtenue dans le régime quasi-stationnaire ;
- les comparaisons avec les simulations avec radiation montrent que le défaut de réalisme (trop de grandes échelles) observé à la surface de l'atmosphère polytropique n'est pas nécessairement un problème essentiel pour l'interprétation des résultats ;

- il existe des ressemblances entre la structure de la convection polytropicque à grande échelle et celle de la convection photosphérique, en particulier l'existence de structures stables à durée de vie longue, aux mésoéchelles, que la granulation pourrait masquer en grande partie. Les simulations montrent également qu'il est possible d'obtenir deux échelles distinctes dans la convection sans avoir recours à différents degrés d'ionisation. Mais une question demeure : les mésoéchelles obtenues sont-elles les analogues de la mésogranulation ou de la supergranulation solaire pour cette simulation ?
- Les mouvements à très grande échelle dans la simulation ne peuvent pas être assimilés à des « supergranules » mais il existe un moyen de fournir de l'énergie aux très grandes échelles par l'intermédiaire d'interactions non-linéaires. La génération du champ magnétique aux petites échelles puis son advection pourrait être un élément fondamental dans la structuration de la supergranulation, à l'échelle de laquelle l'équipartition entre énergie cinétique et magnétique semble réalisée.
- nos résultats montrent que les écoulements de convection obtenus dans les simulations réalisées dans les années 1990 avec des rapports d'aspect inférieurs à 10 et des paramètres similaires aux nôtres étaient contraints par les dimensions horizontales du domaine de simulation ;
- l'utilisation de simulations à grand rapport d'aspect offre un champ d'investigation intéressant pour la théorie spectrale de Bolgiano et Oboukhov. Une étude plus approfondie reste à effectuer ;

Le développement de la partie compressible du code présenté en annexe A et la réalisation de ces simulations numériques ont constitué le cœur ce travail de thèse. Les résultats que nous avons obtenus ne sont pas encore complètement finalisés, mais les conclusions auxquelles nous avons abouti montrent que cet outil offre des perspectives très encourageantes, tant que ses limitations sont bien comprises et contrôlées lors de l'analyse.



# Mesoscale flows in large aspect ratio simulations of turbulent compressible convection

F. Rincon, F. Lignières, and M. Rieutord

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse-Tarbes, UMR CNRS 5572, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue É. Belin, 31400 Toulouse, France

Received December 17, 2004/ Accepted

**Abstract.** We present the results of a very large aspect ratio ( $A = 42.6$ ) numerical simulation of fully compressible turbulent convection in a polytropic atmosphere, and focus on the properties of large-scale flows. Mesoscale patterns dominate the turbulent energy spectrum. We show that these structures, which had already been observed in Boussinesq simulations by Cattaneo et al. (2001), have a genuine convective origin and do not result directly from collective interactions of the smaller scales of the flow, even though their growth is strongly affected by nonlinear transfers. If this result is relevant to the solar photosphere, it suggests that the dominant convective mode below the Sun's surface may be at mesoscales.

**Key words.** Sun: granulation – Convection – Turbulence

## 1. Introduction

The origin of solar photospheric flows on horizontal scales larger than granulation ( $\ell \sim 1\,000$  km) has been a puzzling problem for more than forty years, when supergranulation ( $\ell \sim 30\,000$  km) was discovered by Hart (1954) and later on confirmed by Simon & Leighton (1964). Even though recent breakthroughs in the field of supergranulation imaging have been made thanks to the emergence of local helioseismology techniques (Duvall & Gizon 2000) and the results of the MDI instrument (Hathaway et al. 2000), its origin is still unclear. The existence of an intermediate scale, mesogranulation ( $\ell \sim 8\,000$  km), is also a matter of debate (Hathaway et al. 2000; Shine et al. 2000; Rieutord et al. 2000; Lawrence et al. 2001).

Meso and supergranulation have long been believed to be due to Helium deep recombinations driving cell-like convection. This view now appears to be out of date (Rast 2003). Several numerical experiments of convection (Cattaneo et al. 1991; Stein & Nordlund 2000) at moderate aspect ratio ( $A$  is the ratio of the box width to its depth) have shown a tendency of long-lived large-scale flows to form in depth. Using large aspect ratio ( $A = 20$ ) simulations of Boussinesq convection, Cattaneo et al. (2001) have suggested that mesogranulation may result from nonlinear interactions of granules (see also Rast 2003). A large scale instability (Gama et al. 1994) of granules has also been proposed by Rieutord et al. (2000) to explain supergranulation. Local numerical simulations at  $A = 10$  (Rieutord et al. 2002) did not confirm it. DeRosa et al. (2002), using spherical simulations, have computed flows down to su-

pergranular scales. Actually, the emergence of the three distinct scales of granulation, mesogranulation, and supergranulation in the surface layers, among the observed *continuum* of scales, remains a fully open problem that still deserves much work.

In this Letter, we report new results on three-dimensional numerical simulations of fully compressible turbulent convection in a rectangular box with very large aspect ratio  $A = 42.6$ . This configuration allows us to study accurately the turbulent dynamics at horizontal scales between granulation and supergranulation, which have not been covered by previous numerical simulations. A compressible fluid is used to provide a more realistic model of photospheric convection than a Boussinesq fluid. Also, density stratification should attenuate the effect of an artificial bottom boundary (Nordlund et al. 1994).

In Sect. 2 we present our numerical setup and physical model. Section 3 is devoted to the analysis of the flow. The main consequences of the results are discussed in Sect. 4, which is followed by a short conclusion.

## 2. Numerical model and run parameters

For the purpose of our investigations we use a code designed to solve the fully compressible hydrodynamic equations for a perfect gas (*e. g.* Cattaneo et al. 1991) in cartesian geometry. Constant dynamical viscosity and thermal conductivity are assumed. A constant thermal flux is imposed at the bottom, while temperature is held fixed at the surface. The velocity field satisfies stress-free impenetrable boundary conditions. The initial state is a  $m = 1$  polytropic atmosphere ( $\gamma = 5/3$ ) with small random velocity  $v$ , temperature  $\theta$ , and density  $\rho$  perturbations. The initial density contrast between the bottom and



# Théories de champ moyen et convection à grande échelle

## 5.1 Introduction

Au cours de ce travail, nous avons à plusieurs reprises été confrontés au problème de la compréhension et de la modélisation de l'influence de mouvements turbulents à petite échelle sur des mouvements à grande échelle : aux chapitres 1 et 3, nous avons estimé grossièrement la viscosité turbulente associée à la granulation en utilisant principalement un argument dimensionnel. Au chapitre 4, nous avons ensuite calculé explicitement les effets du transfert non-linéaire sur les mésoéchelles et nous avons vu qu'ils se ramenaient qualitativement à une augmentation de la viscosité vue par celles-ci. Les mouvements aux très grandes échelles de la simulation étaient quant à eux faiblement alimentés par le terme de transfert, ce qui rendait délicate l'interprétation de cet effet.

Afin de résoudre ce problème de modélisation des petites échelles dans les écoulements astrophysiques, diverses théories de champ moyen ont été élaborées. Celles-ci permettent en principe de calculer la dynamique aux grandes échelles lorsque l'écoulement à petite échelle est connu, sans avoir pour autant à réaliser une simulation qui résoudrait simultanément ces deux gammes d'échelles. Dans l'hypothèse où il existe une *séparation d'échelle*, les équations à grande échelle sont obtenues en moyennant les équations complètes du mouvement sur une petite échelle caractéristique de la turbulence, ce qui a pour effet de faire apparaître des termes moyens quadratiques par rapport aux quantités à petite échelle. Comme nous allons le voir, l'expression formelle de ces termes est simple. En revanche, le calcul pratique des coefficients apparaissant dans l'équation moyenne peut s'avérer fort complexe.

Constatant qu'une séparation d'échelles était probablement réalisée entre la



supergranulation et la granulation solaires, nous nous sommes demandé s'il serait possible d'appliquer ces théories de champ moyen afin d'obtenir des informations sur le transport turbulent dans la photosphère solaire et l'origine de la supergranulation. Celle-ci pourrait-elle en particulier être générée par un mécanisme d'instabilité à grande échelle ?

Remarque

Quelques exemples de théories de champ moyen

- l'effet AKA et la viscosité turbulente. Ces deux effets concernent la génération et le transport de quantité de mouvement. Le premier est favorisé dans des écoulements possédant de l'hélicité (Frisch et al. 1987, Sulem et al. 1989). La seconde permet en théorie de calculer la viscosité effective liée au transport de quantité de mouvement par la turbulence à petite échelle (Krause et Rüdiger 1974, Dubrulle et Frisch 1991) ;
- l'effet  $\Lambda$ . Il est formellement identique à l'effet AKA et est invoqué pour le transport de moment cinétique dans les étoiles et les disques d'accrétion (Rüdiger 1989, Kitchatinov et al. 1994) ;
- la génération et le transport du champ magnétique : effets  $\alpha$  et  $\beta$ . (Parker 1955, Moffatt 1978). L'effet  $\alpha$  est l'analogue de l'effet AKA pour le processus de dynamo. Il est lui-aussi favorisé par des écoulements hélicitaires. L'effet  $\beta$  correspond pour sa part à la diffusion magnétique turbulente.

À cette liste, il convient de rajouter la théorie de la longueur de mélange pour le transport d'énergie par convection. Il s'agit d'une théorie totalement indépendante des précédentes d'un point de vue formel, mais qui est très utilisée dans le domaine de la structure et de l'évolution stellaires pour modéliser la contribution moyenne de la convection au transport de l'énergie.

Dans ce chapitre, nous exposons pour commencer le formalisme développé par Dubrulle et Frisch (1991) pour le calcul de viscosités turbulentes dans des écoulements simples et mettons en relation ce travail avec les problèmes des instabilités de phase observées et calculées dans le domaine de la convection d'amplitude finie. Nous présentons ensuite le travail réalisé en cours de thèse. Il s'agit principalement du développement d'un code permettant à l'heure actuelle de calculer des coefficients de viscosité turbulente suivant la méthode de Dubrulle et Frisch (1991).

La résolution du problème complet prendra de toute évidence beaucoup de temps et la contribution de ce travail est malheureusement restée très modeste. La principale difficulté rencontrée a été de parvenir à extrapoler des résultats

établis principalement pour des écoulements théoriques simples à faible nombre de Reynolds à des écoulements de convection plus proches du contexte solaire.

## 5.2 Effet AKA et viscosité turbulente

### 5.2.a Phénoménologie

Intéressons nous pour commencer aux principes généraux de dérivation des théories de champ moyen en hydrodynamique. Considérons un champ de vitesse  $v$  solution des équations complètes du mouvement. Nous supposons que  $v$  ne contient que des composantes à des échelles  $r$  inférieures à une échelle maximale  $\ell$ . Dans la suite, le symbole  $\langle \rangle$  désignera une moyenne sur l'échelle  $\ell$ , de telle sorte que  $\langle v \rangle = 0$ . Soit une perturbation de vitesse  $V$  infinitésimale à une échelle caractéristique  $L \gg \ell$ , si bien que  $\langle V \rangle \neq 0$ . Le paramètre  $\varepsilon = \ell/L \ll 1$  peut être utilisé pour faire un développement asymptotique afin d'obtenir l'équation d'évolution pour  $\langle V \rangle$ . Les champs moyens dépendent des variables dites lentes

$$\begin{aligned} X &= \varepsilon x, \\ T &= \varepsilon^n t, \end{aligned} \tag{5.1}$$

où  $n$  peut valoir 1 ou 2 selon le type d'écoulement étudié ( $n$  sera précisé un peu plus loin). Les dérivées sont alors décomposées suivant

$$\begin{aligned} \partial_i &\rightarrow \partial_i + \varepsilon \nabla_i, \\ \partial_t &\rightarrow \partial_t + \varepsilon^n \partial_T. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Notons que les opérateurs lents  $\nabla_i$  et  $\partial_T$  appliqués à des champs à petite échelle donnent zéro. Lorsque l'écoulement  $v$  est perturbé par le champ de vitesse  $V$  à grande échelle, le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  associé à l'écoulement à petite échelle

$$R_{ij} = \langle v_i v_j \rangle \tag{5.3}$$

est modifié d'une quantité

$$\delta R_{ij} = -\alpha_{ijk} V_k - \varepsilon N_{ijlm} \nabla_l V_m + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{5.4}$$

qui participe à la dynamique à grande échelle. Formellement,

$$\alpha_{ijk} = \left. \frac{\partial \langle v_i v_j \rangle}{\partial V_k} \right|_{V_k=0}. \tag{5.5}$$

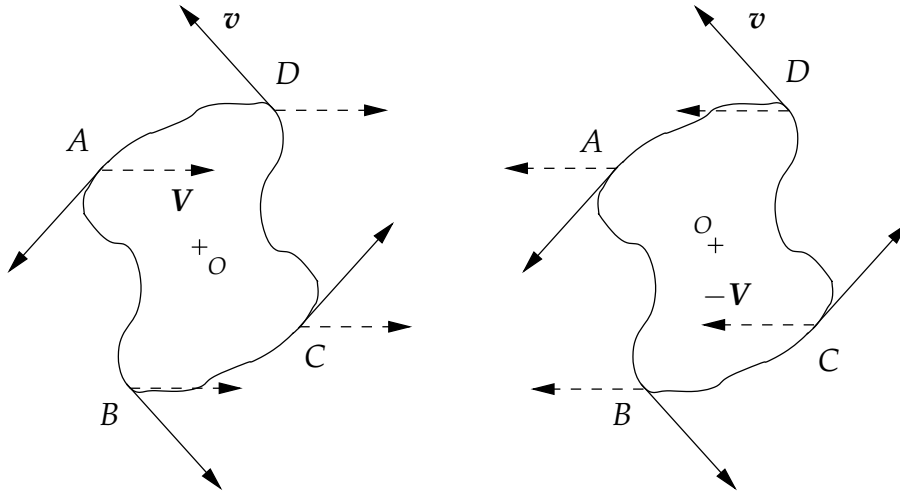


FIG. 5.1 – Disparition de l'effet AKA dans un écoulement bidimensionnel invariant par parité (on a représenté une ligne de courant). Le champ de vitesse  $v$  à petite échelle est tracé en trait plein et le champ de vitesse moyen  $V$  en tirets. La situation physique pour un champ de vitesse moyen  $V$  (figure de gauche) est rigoureusement identique du point de vue des moyennes à celle obtenue pour  $-V$  (à droite), en raison de l'invariance par parité de l'écoulement à petite échelle par rapport au point  $O$ . Par exemple, la configuration des champs de vitesse au point  $A$  pour  $V$  est identique à celle au point  $C$  pour  $-V$  et réciproquement. Les éléments du tenseur de Reynolds  $\langle v_i v_j \rangle$ , obtenus en sommant sur tous les points de l'écoulement à petite échelle, prennent donc les mêmes valeurs pour  $V$  et  $-V$ . La relation (5.5) montre alors que les coefficients  $\alpha_{ijk}$  s'annulent dans ce cas puisqu'ils sont définis comme des dérivées à l'origine de fonctions paires.

Le terme (5.5) est à l'origine de l'effet AKA. Il intervient dans l'équation de la quantité de mouvement à grande échelle à l'ordre  $\varepsilon$  ( $n = 1$  dans la définition de la variable lente en temps dans ce cas) et peut donner lieu à une instabilité à grande échelle pour des écoulements tridimensionnels (Frisch et al. 1987). Ce terme est nul notamment lorsque l'écoulement est invariant par parité, le tenseur de Reynolds étant dans ce cas une fonction paire de la perturbation à grande échelle (voir figure 5.1 et sa légende). Dans la suite, nous nous concentrerons uniquement sur des cas où ce terme est nul. L'équation d'évolution pour les perturbations à grande échelle est alors obtenue en allant à l'ordre  $\varepsilon^2$  ( $n = 2$  pour la variable de temps dans ce cas). Comme le champ de vitesse à grande échelle est supposé avoir initialement une amplitude faible, cette équation est linéaire en  $V$ . Il vient

$$\frac{\partial V_i}{\partial T} = -\nabla_i P + N_{ijlm} \nabla_j \nabla_l V_m + v \nabla_j \nabla_j V_i, \quad (5.6)$$

$P$  étant la perturbation de pression associée à  $V$ . Le coefficient  $N_{ijlm}$  caractérise le transport turbulent associé à  $v$ . Considérons pour simplifier le cas d'un

écoulement de base isotrope, pour lequel  $N_{ijlm} = N_T \delta_{im} \delta_{jl}$ . On peut chercher une relation de dispersion pour cette équation en utilisant une dépendance en  $\exp [i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \lambda T]$  pour  $V$ . Il vient

$$\lambda = -(\nu + N_T) K^2 \quad (5.7)$$

La valeur de  $N_T$  dépend de  $\nu$  et peut *a priori* être négative, positive, ou même complexe. Si  $N_T < -\nu$ , l'équation (5.7) montre que  $\lambda$  est positif et que l'écoulement à petite échelle devient instable vis-à-vis de perturbations à grande échelle (deux exemples d'instabilité de viscosité turbulente négative en deux dimensions seront donnés plus loin). La question intéressante dans le contexte de ce travail est donc de déterminer les propriétés de transport à grande échelle d'un écoulement de convection ressemblant à la granulation, qui pourrait donner lieu à une instabilité de ce type.

### 5.2.b Expression des coefficients

Le point délicat dans la théorie exposée ci-dessus se situe au niveau du calcul des coefficients  $\alpha_{ijk}$  et  $N_{ijlm}$ , qui dépendent de l'écoulement à petite échelle considéré. Krause et Rüdiger (1974) ont proposé une méthode de résolution basée sur une hypothèse de fermeture analogue à la *First Order Smoothing Approximation* utilisée en électrodynamique de champ moyen (Moffatt 1978), qui est malheureusement inadaptée à la granulation solaire car elle requiert que le nombre de Reynolds de l'écoulement à petite échelle soit très petit. Notons cependant que leurs calculs aboutissent pour la granulation solaire à l'expression

$$\nu_T = N_T + \nu \simeq N_T = \frac{L_g V_g}{3}, \quad (5.8)$$

qui est similaire à celle que nous avons utilisée aux chapitres 1 et 3.

Dubrulle et Frisch (1991) ont pour leur part proposé un formalisme pour des écoulements incompressibles périodiques dans toutes les directions, qui permet d'obtenir sans fermeture l'expression théorique rigoureuse de ces coefficients, lorsqu'un développement multi-échelles est possible. Nous reproduisons ici les grandes lignes de leur théorie, sur laquelle nous nous sommes appuyés pour commencer ce projet.

Si  $\mathbf{v}$  est une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes incompressibles, alors une perturbation  $V$  à grande échelle obéit à l'équation linéarisée

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \partial_j (v_i V_j + v_j V_i) = -\partial_i P + \nu \Delta V_i \quad (5.9)$$

et satisfait la condition d'incompressibilité

$$\partial_i V_i = 0. \quad (5.10)$$

Dans ces deux expressions, les opérateurs de différentiation contiennent à la fois les parties lentes et rapides. Pour le quadrivecteur  $(P, \mathbf{V})$ , on peut écrire formellement<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{NS}} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

L'opérateur de Navier-Stokes linéarisé  $\mathcal{L}_{\text{NS}}$  est développé en puissances de  $\varepsilon$  en utilisant l'équation (5.2) :

$$\mathcal{L}_{\text{NS}} = \mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B} + \varepsilon^2 \mathcal{C} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.12)$$

Remarquons que l'opérateur  $\mathcal{A}$  contient uniquement des dérivées sur les variables rapides  $(x, t)$  et que l'opérateur  $\mathcal{B}$  contient systématiquement des dérivées lentes et peut être réécrit sous la forme

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^i \nabla_i. \quad (5.13)$$

Le quadrivecteur  $(P, \mathbf{V})$  est pour sa part décomposé en

$$\begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0 + \varepsilon \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_1 + \varepsilon^2 \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (5.14)$$

En utilisant les équations (5.9)-(5.12)-(5.14), on obtient alors une équation pour chaque ordre en  $\varepsilon$  :

$$\mathcal{O}(1) \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0 = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon) \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_1 = -\mathcal{B} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0, \quad (5.16)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \mathcal{A} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_2 = -\mathcal{B} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_1 - \mathcal{C} \begin{bmatrix} P \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}_0. \quad (5.17)$$

Ces équations sont toutes de la forme  $\mathcal{A}\Psi = \Phi$ . Pour chacune d'entre elles une condition d'existence des solutions doit être remplie (alternative de Fredholm).  $\Phi$  doit être orthogonale à l'ensemble des solutions  $\Psi^\dagger$  du problème adjoint homogène

$$\mathcal{A}^\dagger \Psi^\dagger = \mathbf{0}, \quad (5.18)$$

pour un produit scalaire noté  $\langle \Psi^\dagger, \Phi \rangle$ . Dans le cas où l'écoulement est périodique dans toutes les directions, le noyau de  $\mathcal{A}^\dagger$  est constitué par l'ensemble des fonctions constantes, car chaque bloc non nul de l'opérateur  $\mathcal{A}^\dagger$  contient des dérivées rapides à droite. La condition précédente se résume alors à  $\langle \Phi \rangle = \mathbf{0}$ . L'équation (5.15) est satisfaite naturellement. En ce qui concerne les équations (5.16)-(5.17), la procédure aboutit respectivement aux équations pour la dynamique à

<sup>1</sup>Les expressions détaillées des opérateurs sont données dans l'article de Dubrulle et Frisch (1991).

grande échelle aux ordres  $\varepsilon$  (équation AKA) et  $\varepsilon^2$  (viscosité turbulente) et permet d'obtenir l'expression des coefficients  $\alpha_{ijk}$  et  $N_{ijlm}$ . Dans l'article de Dubrulle et Frisch (1991), il est démontré que toute fonction  $\Psi$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi = \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \Phi + \left( \text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right) \langle \Psi \rangle, \quad (5.19)$$

où  $\tilde{\mathcal{A}}$  correspond à la restriction de  $\mathcal{A}$  aux fonctions de moyenne nulle, qui est supposée inversible, et  $(\text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A}) \langle \Psi \rangle$  est une représentation du noyau. Les expressions des coefficients sont obtenues en utilisant cette dernière équation dans laquelle  $\Phi$  est remplacé par le membre de droite des équations (5.15)-(5.16)-(5.17). Il vient

$$\alpha_{ijk} = - \left\langle \mathcal{B}_{V_i V_n}^j \left( \text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right)_{V_n V_k} \right\rangle, \quad (5.20)$$

et

$$v_{ijlm} = \nu \delta_{im} \delta_{jl} + N_{ijlm} = \nu \delta_{im} \delta_{jl} + \left\langle \left[ \mathcal{B}^j \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{B}^l \left( \text{Id} - \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \mathcal{A} \right) \right]_{V_i V_m} \right\rangle. \quad (5.21)$$

Les composantes de  $\mathcal{A}$  étant connues, la détermination des coefficients se ramène alors à une série de résolutions de systèmes linéaires et de multiplications qui peuvent être réalisées numériquement.

### 5.2.c Écoulements non périodiques et instabilités de phase

La situation se complique malheureusement dramatiquement dès lors que l'hypothèse de périodicité est abandonnée (par exemple dans la direction de la gravité pour la convection entre deux plaques), parce qu'il devient nécessaire de calculer les solutions du problème adjoint homogène afin de résoudre le problème de l'alternative de Fredholm. L'existence de solutions du noyau non triviales est liée à l'existence de symétries dans le système (par exemple une invariance par translation ou une invariance galiléenne dans le cas de parois stress-free<sup>2</sup>). Cross et Newell (1984) et Newell et al. (1990) (dans un article de 65 pages !) se sont attaqués à ce problème pour la convection d'amplitude finie dans des domaines à grand rapport d'aspect. Leur analyse est basée sur un développement asymptotique légèrement différent de celui de Dubrulle et Frisch (1991), puisque l'inverse du rapport d'aspect  $\varepsilon$  sert à la fois à mesurer l'amplitude des perturbations et à faire le développement multi-échelles, alors que deux paramètres ( $\eta$  et  $\varepsilon$ ) sont utilisés dans le travail de Dubrulle et Frisch (1991). Newell et al. (1990) ont également proposé l'utilisation de la technique numérique de décomposition en valeurs singulières pour parvenir à résoudre le système linéaire singulier représenté par la matrice  $\mathcal{A}$  (problème équivalent à l'inversion de  $\tilde{\mathcal{A}}$  de Dubrulle et Frisch (1991)). Cet algorithme permet en effet de calculer directement les solutions du problème  $\mathcal{A}\Psi = \Phi_{\perp}$ , où  $\Phi_{\perp}$  est la projection du membre de droite initial  $\Phi$  perpendiculairement au noyau de  $\mathcal{A}^{\dagger}$ .

<sup>2</sup>Dans le formalisme de Dubrulle et Frisch (1991), le problème de l'invariance galiléenne ne se pose pas car l'écoulement de base est forcé.

Il est particulièrement intéressant de noter que les instabilités à grande échelle des rouleaux de convection d'amplitude finie, étudiées notamment par Pomeau et Manneville (1979), Couillet et Fauve (1985), Newell et al. (1990), sont tout à fait similaires aux instabilités de type viscosité turbulente négative. Ces instabilités de convection peuvent être mises en évidence en dérivant une équation de diffusion pour la phase  $\Theta$  d'une perturbation à grande échelle de la forme  $V = V_0 \exp [i \Theta(\mathbf{X}, T)]$ , superposée à des rouleaux de convection d'amplitude finie. Cette équation s'écrit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T} = D_{\parallel} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + D_{\perp} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2}, \quad (5.22)$$

où  $X$  est la coordonnée parallèle au vecteur d'onde des rouleaux de convection et  $Y$  est la coordonnée perpendiculaire à celui-ci (suivant l'axe des rouleaux). En utilisant l'équation (5.22), on peut voir qu'une instabilité transverse se développe (figure 5.2) lorsque le coefficient de diffusion perpendiculaire  $D_{\perp}$  devient négatif (instabilité zigzag), tandis qu'une instabilité longitudinale, appelée instabilité d'Eckhaus, se produit lorsque c'est  $D_{\parallel}$  devient négatif (figure 5.3). Il existe également une instabilité, dite variqueuse, avec une polarisation intermédiaire (Cross et Hohenberg 1993).

Il existe donc une part de théorie importante réalisée pour étudier la stabilité des écoulements de convection, qu'il faudra suivre pour généraliser le formalisme du transport turbulent proposé par Dubrulle et Frisch (1991).

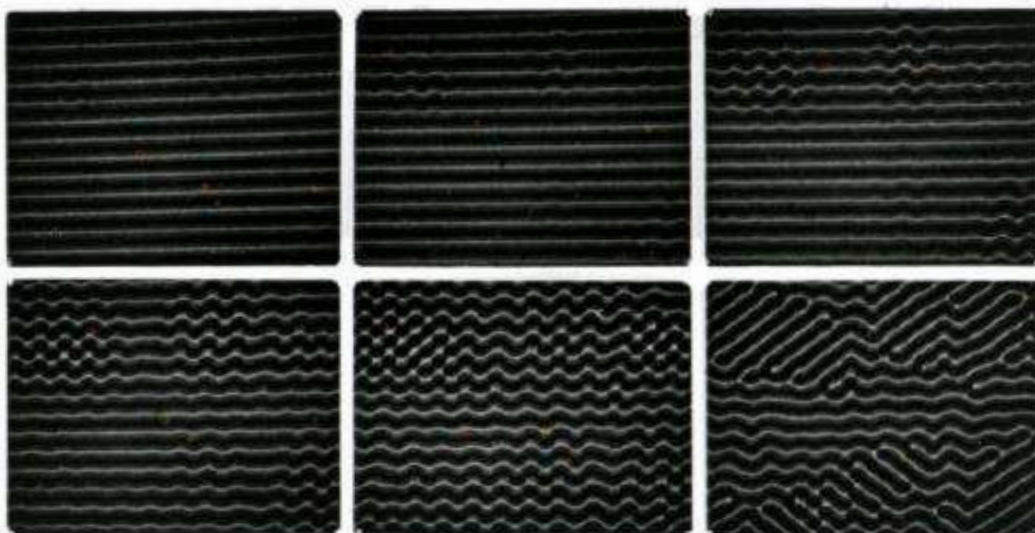


FIG. 5.2 – De gauche à droite et de haut en bas : développement d'une instabilité transverse zigzag de rouleaux de convection (origine bibliographique inconnue).

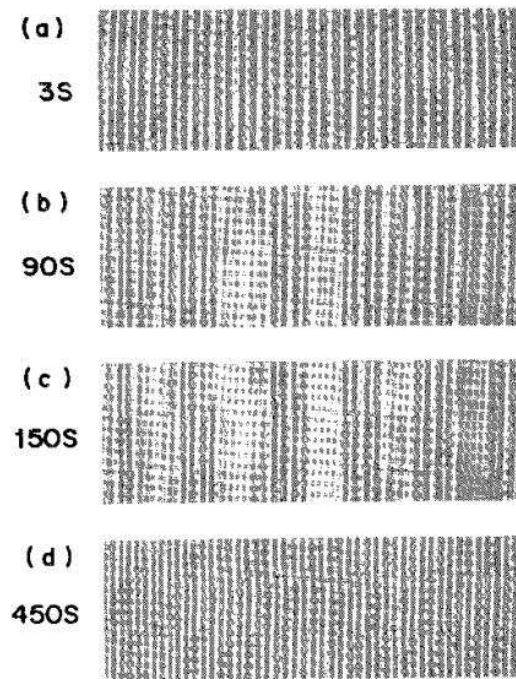


FIG. 5.3 – De haut en bas : développement de l’instabilité longitudinale d’Eckhaus pour de la convection électrohydrodynamique en rouleaux dans un cristal liquide (Lowe et Gollub 1985). Une modulation à grande échelle dans la direction périodique est observée.

## 5.3 Méthode numérique de résolution

### 5.3.a Principe général du code

Afin d’appliquer la théorie de Dubrulle et Frisch (1991), un programme permettant de résoudre les équations (5.20) et (5.21) a été développé. Celui-ci est écrit en fortran 90. Il résout des équations linéaires aux dérivées partielles en trois dimensions, du type

$$\mathcal{L}_v \Psi = b_v \quad (5.23)$$

où  $\Psi$  est un champ de vecteurs inconnu,  $\mathcal{L}_v$  est un opérateur différentiel connu qui dépend d’un champ de vecteurs  $v$  prescrit. Le vecteur membre de droite  $b_v$  est lui aussi connu et peut également dépendre de  $v$ . Nous avons opté pour une configuration géométrique similaire à celle employée dans les simulations numériques directes présentées au chapitre 4, c’est-à-dire une géométrie cartésienne avec une direction anisotrope.



Remarque | Dans ce chapitre  $x$  représente la direction verticale, et  $y$  et  $z$  les directions horizontales.

Une décomposition spectrale des champs a été adoptée dans les directions horizontales. Dans la direction verticale, nous avons choisi d'utiliser des polynômes de Chebyshev pour leurs propriétés de convergence spectrale et leur capacité à résoudre plus facilement des couches limites à proximité des parois.

### 5.3.b Disposition des données

La première étape consiste à parvenir à construire la représentation matricielle de divers opérateurs linéaires  $\mathcal{L}$  (comme  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ ) pour des écoulements stationnaires, sur la grille définie précédemment. Ces matrices dépendent des champs de vitesse à petite échelle et contiennent principalement des opérateurs d'advection de type  $v \cdot \partial$ , des termes de dérivation et des termes de multiplication simple, qu'il faut exprimer pour la méthode de projection utilisée. Les termes d'advection, comme nous allons le voir, sont particulièrement délicats à construire dans les directions spectrales. En pratique, la construction des problèmes est effectuée par l'intermédiaire d'une interface PERL.

Le vecteur  $\Psi$  de l'équation (5.23) possède  $N_c$  composantes (par exemple, pression, vitesse, température) qui s'écrivent

$$\Psi_m(x_i, K_{y_j}, K_{z_k}), \quad m = 1, \dots, N_c \quad (5.24)$$

sur la grille choisie. Dans cette expression,  $x_i$  correspond au point de collocation de Chebyshev  $i$  ( $i = 1, \dots, N_x$ ), et  $K_{y_j}$  et  $K_{z_k}$  sont deux vecteurs d'onde dans les directions horizontales. La disposition des données pour les transformées de Fourier est telle que  $j = 1, \dots, 2(N_y/2 + 1)$  et  $k = 1, \dots, N_z$ . Dans la direction  $y$ , les éléments d'indice impair correspondent aux parties réelles des composantes de Fourier et les éléments d'indice pair aux parties imaginaires pour le même vecteur d'onde. Les vecteurs d'onde  $K_{y_1}$  et  $K_{z_1}$  désignent les composantes continues dans les directions  $y$  et  $z$ . Les  $N_z/2 + 1$  premiers éléments dans la direction  $z$  correspondent aux vecteurs d'onde allant de 0 à  $N_z/2$ , et les  $N_z/2 - 1$  suivants aux vecteurs d'onde  $-N_z/2 + 1$  à  $-1$ .

Finalement,  $\Psi$  doit être stocké sous une forme unidimensionnelle pour la résolution numérique. La disposition suivante a été adoptée :



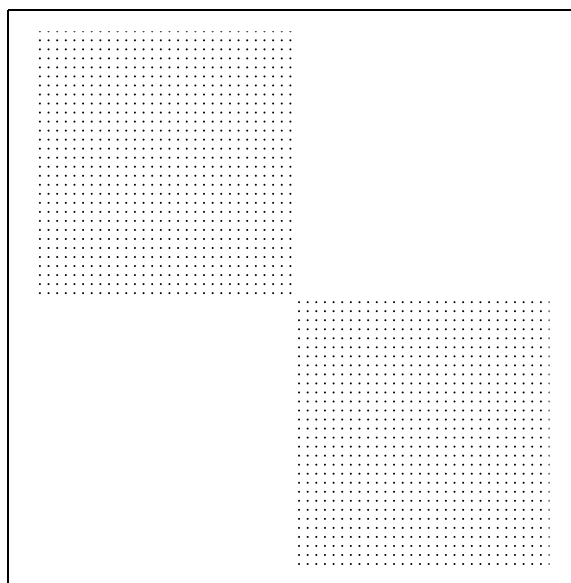


FIG. 5.4 – Représentation matricielle de l’opérateur  $\partial_x$  en Chebyshev pour  $N_x = 30$  et  $N_y = 1$  (il y a deux blocs correspondant aux parties réelle et imaginaire).

### 5.3.c Blocs matriciels

L’étape suivante concerne la disposition des opérateurs. Une dérivation dans la direction verticale consiste en des blocs  $N_x \times N_x$  diagonaux par rapport aux  $K_y$  et aux  $K_z$  (figure 5.4). Une dérivation dans la direction  $y$  ou  $z$  fait apparaître deux bandes sur et sous diagonales. Ceci est dû à l’alternance des composantes réelle et imaginaire qui sont transformées l’une dans l’autre par l’opérateur de dérivation d’ordre 1 (figure 5.5). Pour l’opérateur de dérivée seconde, la matrice est diagonale.

L’agencement des matrices est plus subtil pour les termes d’advection ou de multiplication par une fonction des variables d’espace. Dans la direction verticale, on aura simplement des éléments diagonaux contenant la valeur du champ d’advection en chaque point (absence de corrélations entre deux point  $x$  et  $x'$ ). En revanche, le fait de représenter les fonctions spectralement horizontalement fait apparaître des produits de convolution pour les termes d’advection (figure 5.6) liés à la multiplication de fonctions dans l’espace réel. Il existera donc en général des couplages entre tous les  $K_y$ , d’une part, et tous les  $K_z$ , d’autre part, pour un  $x$  donné. Malgré la complexité de la matrice à construire (liée en partie à la prise en compte de la symétrie hermitienne de la transformée de Fourier d’une fonction réelle), ceci a un avantage : mis à part le cas où l’opérateur d’advection implique une dérivée verticale (figure 5.7), les blocs d’advection sont remplis seulement très partiellement, puisqu’il n’y a pas de couplage entre différents points  $x$  et  $x'$  dans la direction verticale. Lorsque le nombre de points dans cette direction est important, il devient intéressant d’utiliser un stockage dit *sparse*, pour lequel

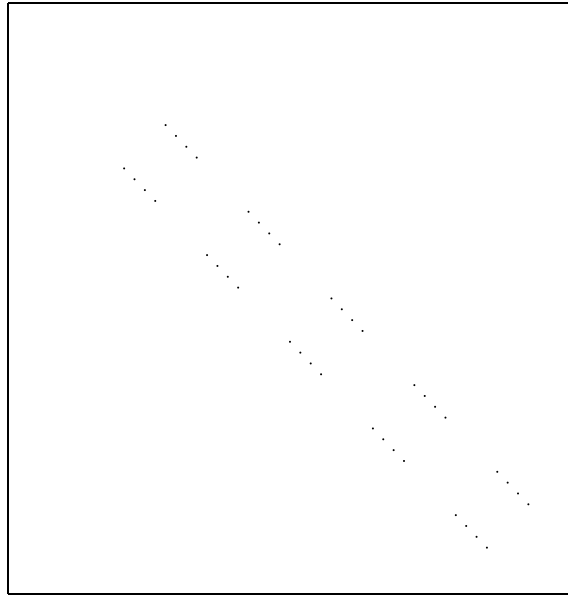


FIG. 5.5 – L'opérateur  $\partial_y$  pour  $N_x = 4$ , et  $N_y = 10$ . La composante réelle de la dérivée est calculée à partir de la composante imaginaire du champ initial. Le bloc  $(K_{y1}, K_{y1})$  est vide puisqu'il correspond au vecteur d'onde nul. La matrice n'est pas inversible et il faut se restreindre à la résolution du système sur l'espace des fonctions à moyenne nulle dans cette direction, en imposant le bloc identité sur la composante continue (non représenté ici).

seules les coordonnées des éléments non nuls de la matrice ainsi que leur valeur sont gardées en mémoire.

### 5.3.d Conditions aux limites

Dans le cas de la résolution d'un système linéaire, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites. Le problème est éludé dans les directions périodiques horizontales en imposant des blocs identité sur les composantes continues. Dans la direction verticale, toutes les lignes de la matrice correspondant aux points 1 et  $N_x$  (s'il y a plusieurs conditions aux limites) sont remplacées par des lignes contenant l'équation des conditions aux limites.

### 5.3.e Algorithmes utilisés

Une fois les matrices remplies, les problèmes de résolution de systèmes linéaires peuvent être traités par deux méthodes. La première est une méthode directe basée sur le paquet LAPACK, qui nécessite le passage en argument de la totalité de la matrice. Elle est donc restreinte aux problèmes de petite taille. La seconde méthode utilise le paquet UMFPACK, qui propose une implémentation multifrontale de la résolution de systèmes linéaires pour des matrices stockées sous

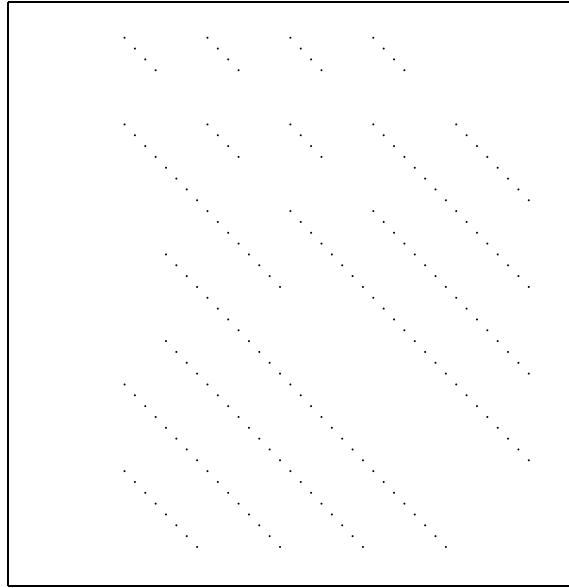


FIG. 5.6 – Représentation matricielle d'un opérateur  $v(x, y)\partial_y$  pour  $N_x = 4$ , et  $N_y = 10$ .  $v$  possède des composantes sur les quatre premiers  $K_y$ , ce qui fait apparaître des couplages pour les modes  $K_y \pm 1, K_y \pm 2, K_y \pm 3, K_y \pm 4$ . La symétrie hermitienne de la transformée de Fourier fait que le couplage avec les modes qui ont un nombre d'onde négatif est calculé en utilisant le conjugué des modes avec un nombre d'onde positif. Tous les blocs de couplage  $K_y$  sont diagonaux par rapport à la coordonnée  $x$ , ce qui rend la matrice très creuse.

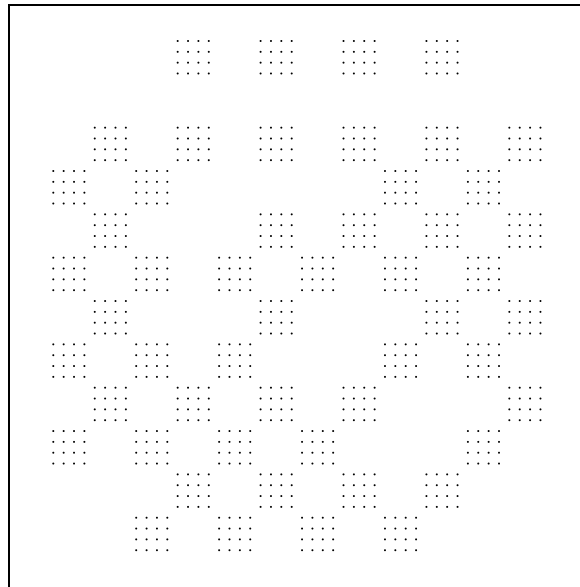


FIG. 5.7 – Une construction similaire à la précédente pour l'opérateur  $v(x, y)\partial_x$ . Cette fois-ci, la matrice est nettement plus remplie en raison de la présence d'une dérivée verticale.

forme *sparse*. Après avoir validé cette deuxième méthode par des tests comparatifs avec LAPACK à basse résolution, nous avons principalement utilisé celle-ci, car elle permet d'accéder à des résolutions plus importantes (en raison du mode de stockage) et offre des temps de calcul plus petits que LAPACK. Pour traiter des problèmes plus complexes comme ceux évoqués au paragraphe 5.2.c, il sera certainement nécessaire d'utiliser un algorithme de type décomposition en valeurs singulières.

## 5.4 Calculs de viscosités turbulentes dans des écoulements simples

Le code a pour commencer été testé en procédant à des résolutions de systèmes simples et à des multiplications dans toutes les directions, afin de valider le constructeur de matrices. Une fois ces tests réussis, nous nous sommes attaqués au problème concret du calcul de viscosités turbulentes pour trois écoulements bidimensionnels, à savoir l'écoulement de Kolmogorov, l'écoulement hexagonal simple et l'écoulement hexagonal décoré. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'aller plus loin.

### 5.4.a Écoulement de Kolmogorov

L'écoulement de Kolmogorov (figure 5.8) est le premier écoulement pour lequel une viscosité turbulente négative a été trouvée (Meshalkin et Sinai 1961, Sivashinsky 1985). Sa fonction de courant  $\psi$  est

$$\psi(y, z) = \cos z. \quad (5.26)$$

À faible nombre de Reynolds ( $Re = 1/\nu$  ici), la viscosité turbulente peut être déterminée perturbativement. Elle vaut

$$\nu_T = \nu - \frac{1}{2\nu} \quad (5.27)$$

Une instabilité à grande échelle doit donc être observée pour  $Re > \sqrt{2}$ . Ce comportement est illustré sur la figure 5.9, réalisée à partir des résultats obtenus à l'aide de notre programme.

### 5.4.b Écoulement hexagonal simple

Il n'est en général pas possible d'obtenir une expression analytique explicite pour la viscosité turbulente, à part dans des cas très simples comme celui de l'écoulement de Kolmogorov. L'écoulement hexagonal simple (figure 5.10) est un exemple d'écoulement isotrope plus compliqué, dont la fonction de courant est

$$\psi(y, z) = \cos(y - \sqrt{3}z) + \cos(y + \sqrt{3}z) + \cos 2y. \quad (5.28)$$

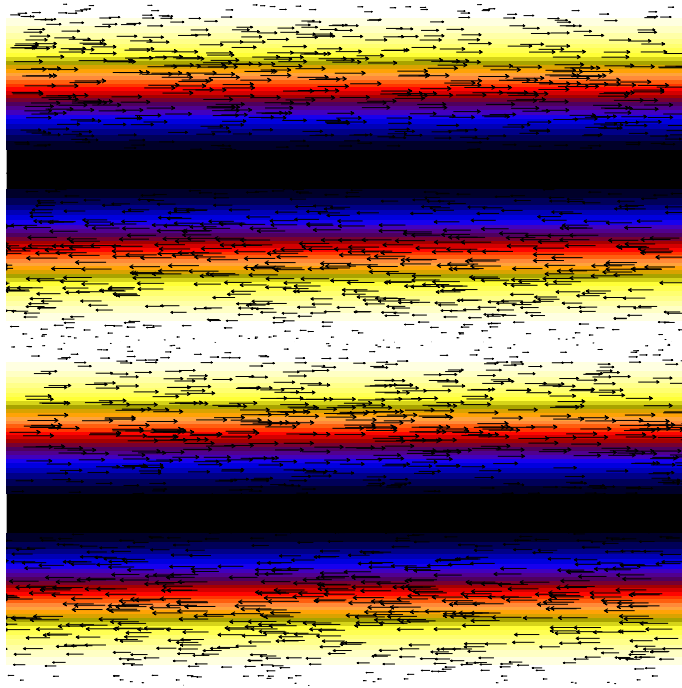


FIG. 5.8 – Champ de vitesse et carte de la vorticité pour l'écoulement de Kolmogorov. L'écoulement est périodique dans la direction  $z$  (verticale de la feuille) et infini dans la direction  $y$ .

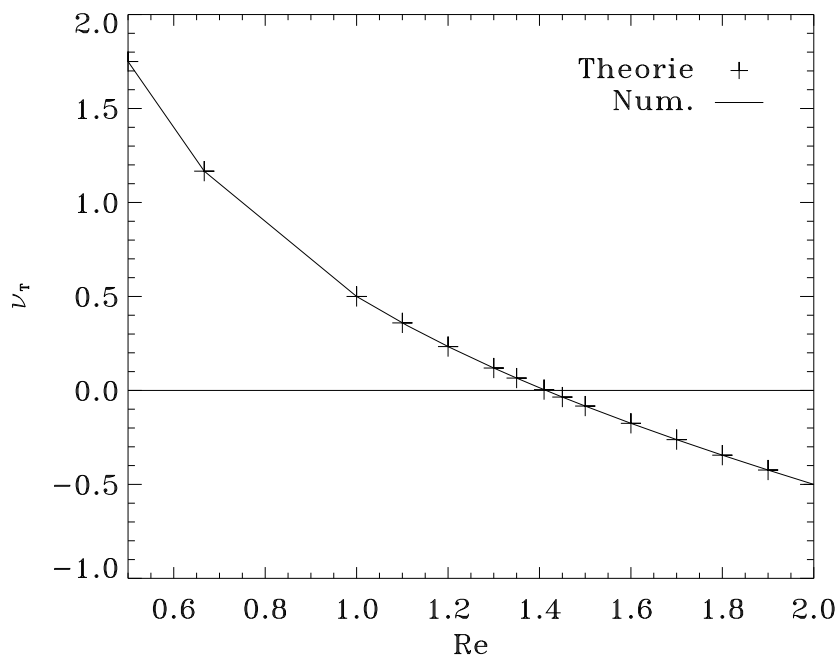


FIG. 5.9 – Calcul numérique de la viscosité turbulente de l'écoulement de Kolmogorov en fonction du nombre de Reynolds (16 modes ont été utilisés).

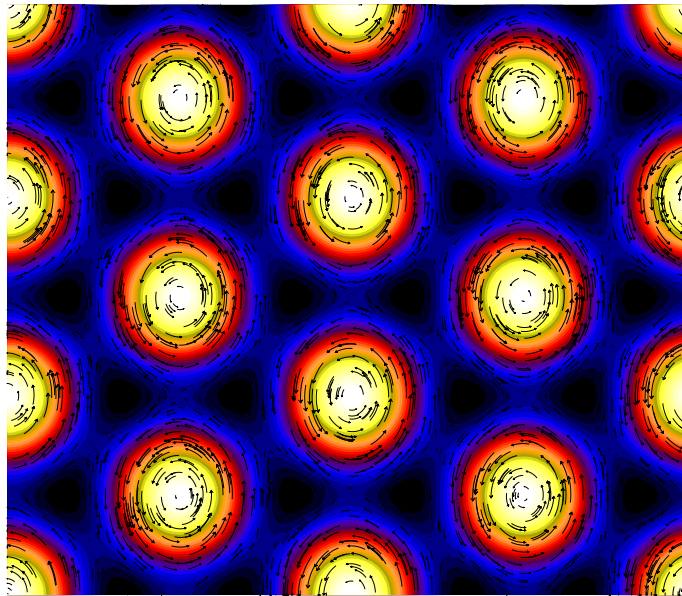


FIG. 5.10 – Champ de vitesse et carte de la vorticité pour l'écoulement hexagonal simple. L'écoulement est périodique dans les deux directions.

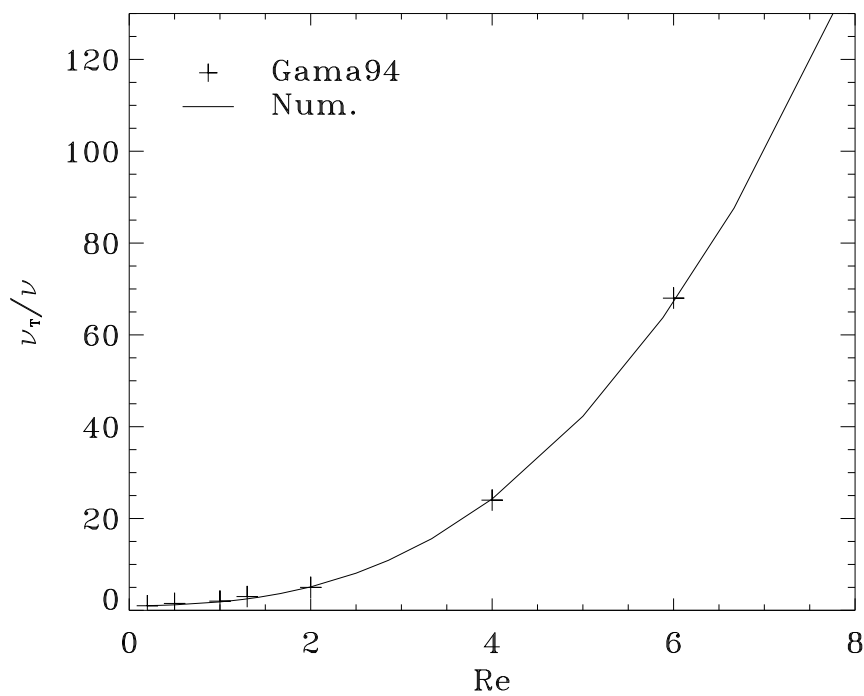


FIG. 5.11 – Calcul numérique de la viscosité turbulente (équation (5.29)) de l'écoulement hexagonal simple en fonction du nombre de Reynolds. Celle-ci est toujours positive (résultat identique à la figure 2 de l'article de Gama et al. (1994)). Une résolution  $16 \times 16$  suffit pour assurer la convergence des résultats.



La viscosité turbulente de cet écoulement est toujours positive et a été calculée par Gama et al. (1994). Le passage du formalisme de Dubrulle et Frisch (1991) à celui de Gama et al. (1994) est donné par

$$\nu_T = \nu_{2112} = \nu_{1221} = \frac{1}{2} (\nu_{1111} + \nu_{2222} - \nu_{2211} - \nu_{1212} - \nu_{2121}) \quad (5.29)$$

où l'indice 1 correspond à la direction  $y$  et l'indice 2 à la direction  $z$ . En particulier, si la viscosité turbulente est isotrope, on doit avoir

$$\nu_{1121} + \nu_{1211} - \nu_{1222} - \nu_{2221} = \nu_{2212} + \nu_{2122} - \nu_{2111} - \nu_{1112} = 0. \quad (5.30)$$

Nous avons là aussi réussi à retrouver ces résultats (figure 5.11) avec le code, ce qui a permis de valider une bonne partie de la construction numérique des matrices

### 5.4.c Écoulement hexagonal décoré

Les écoulements possédant un seul vecteur d'onde (au sens d'une norme unique), comme l'écoulement hexagonal simple, ont des viscosités turbulentes positives. Gama et al. (1994) ont donc apporté des modifications à l'écoulement hexagonal simple pour tenter d'obtenir des viscosités turbulentes négatives. L'écoulement hexagonal décoré (figure 5.12) possède cette propriété. C'est également un écoulement isotrope, dont la fonction de courant est donnée par

$$\begin{aligned} \psi(y, z) = & -\frac{1}{2} \left[ \cos 2y + \cos (y + \sqrt{3}z) + \cos (y - \sqrt{3}z) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ \cos (4y + 2\sqrt{3}z) + \cos (5y - \sqrt{3}z) + \cos (y - 3\sqrt{3}z) \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[ \cos 4y + \cos (2y + 2\sqrt{3}z) + \cos (2y - 2\sqrt{3}z) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left( \cos (4y - 2\sqrt{3}z) + \cos (5y + \sqrt{3}z) + \cos (y + 3\sqrt{3}z) \right) . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Il est particulièrement intéressant pour tester le code car il possède plusieurs composantes de Fourier, ce qui permet de voir si les blocs matriciels pour l'advection ont été correctement calculés. Les résultats obtenus sont tout à fait corrects, comme le montrent la figure 5.13 et le tableau 5.1, qui correspondent parfaitement aux résultats donnés par Gama et al. (1994) dans leur tableau 3.

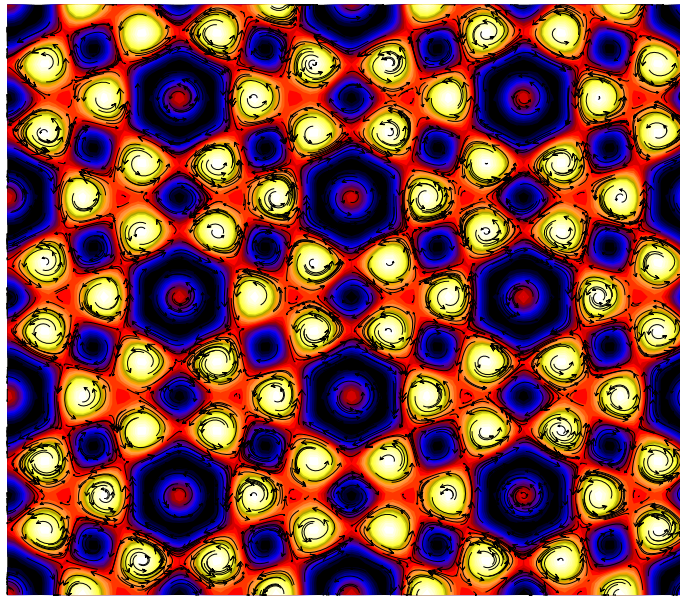


FIG. 5.12 – Champ de vitesse et carte de la vorticité pour l'écoulement hexagonal décoré. L'écoulement est périodique dans les deux directions.

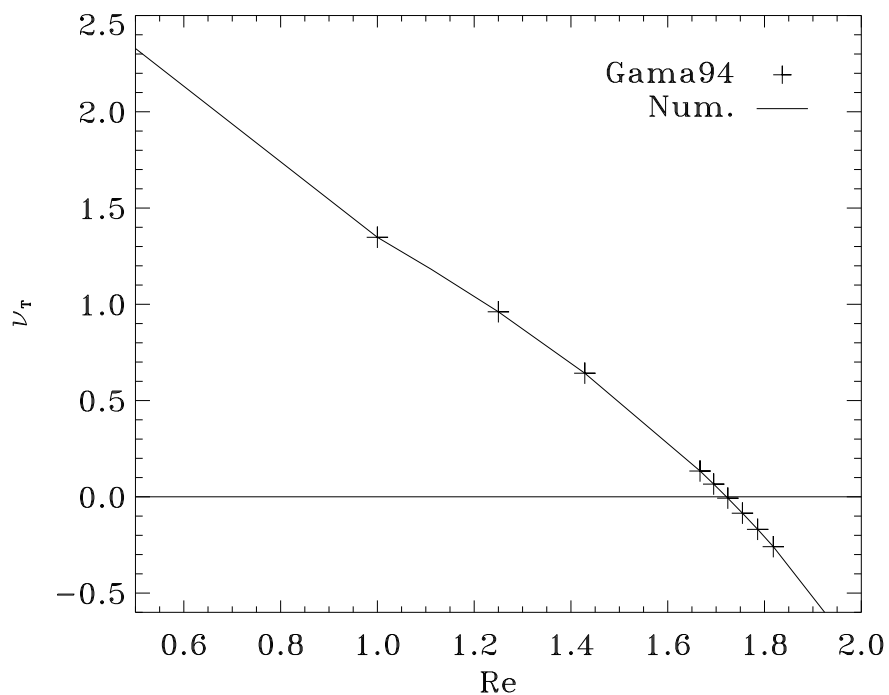


FIG. 5.13 – Viscosité turbulente de l'écoulement hexagonal décoré en fonction du nombre de Reynolds. On observe une transition  $\nu_T < 0$  et donc une instabilité à grande échelle lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement augmente. La convergence des résultats pour cet écoulement est assurée avec  $32 \times 32$  modes.

Coefficient	Valeur
$\nu_{1111}$	2.250099
$\nu_{2111}$	0.677645
$\nu_{1112}$	-1.025665
$\nu_{2112}$	1.348196
$\nu_{1121}$	-0.329628
$\nu_{2121}$	0.348196
$\nu_{1122}$	0.553705
$\nu_{2122}$	-0.677647
$\nu_{1211}$	0.677645
$\nu_{2211}$	0.553706
$\nu_{1212}$	0.348196
$\nu_{2212}$	0.329628
$\nu_{1221}$	1.348196
$\nu_{2221}$	1.025664
$\nu_{1222}$	-0.677647
$\nu_{2222}$	2.250095

TAB. 5.1 – Coefficients du tenseur de viscosité turbulente donné par l'équation (5.21) pour l'écoulement hexagonal décoré et  $\nu = 1/\text{Re} = 1$ . Pour cette valeur de  $\text{Re}$ ,  $\nu_T = \nu_{2112} = \nu_{1221}$  est positif. On peut également montrer que la viscosité de cet écoulement est isotrope, la relation (5.30) étant vérifiée.

## 5.5 Conclusions

Nous avons consacré ce chapitre à la présentation d'une approche alternative aux simulations numériques directes pour résoudre les problèmes de transport turbulent et de modélisation des petites échelles dans les écoulements turbulents. Pour aborder ce problème, un code basé sur le formalisme de la théorie de la viscosité turbulente, développé par Dubrulle et Frisch (1991), a été mis au point. Il a jusqu'à présent permis de retrouver les résultats obtenus par Gama et al. (1994) pour des écoulements bidimensionnels. Il est à noter que ces auteurs n'avaient pas utilisé *stricto sensu* le même formalisme que Dubrulle et Frisch (1991) et que leur méthode numérique était différente de la nôtre. Nos tests confirment donc rigoureusement l'expression (5.21) de Dubrulle et Frisch (1991) ainsi que les résultats (dans le domaine linéaire) de Gama et al. (1994).

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'étape suivante consistera à généraliser la théorie à des écoulements tridimensionnels non périodiques comme la convection entre deux plaques, pour lesquels la solution des problèmes adjoints posés par l'utilisation de développements asymptotiques est non triviale. Pour cela, les travaux de Cross et Newell (1984) et Newell et al. (1990) devraient

être d'une grande utilité. Une fois cette étape franchie, des résultats devraient pouvoir être obtenus pour des écoulements à petite échelle plus complexes, issus par exemple de simulations numériques directes de convection de rapport d'aspect 1. Nous avons en particulier déjà intégré la présence d'une direction anisotrope dans les configurations réalisables numériquement, ce qui devrait faciliter la recherche des solutions.

Un commentaire final sur la nature du problème à résoudre peut être fait au regard de la théorie présentée ici. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, les écoulements de base peuvent devenir instables à petite échelle. Ces instabilités se développent sur des temps beaucoup plus courts qu'une instabilité à grande échelle de type viscosité turbulente négative. Il est donc possible qu'une instabilité lente n'ait pas vraiment de sens lorsque le nombre de Reynolds est très élevé, comme c'est le cas pour la granulation. Néanmoins, l'observation de la surface solaire nous montre que le motif de la granulation est présent à tous les temps et que son comportement est plutôt « calme » en raison de la petitesse du nombre de Peclet, qui la rend thermiquement laminaire. Il n'est donc pas insensé de penser pouvoir espérer parvenir à des résultats intéressants pour la convection solaire en utilisant des théories établies pour des nombres de Reynolds modérés. Le transport turbulent garde dans tous les cas une légitimité physique, puisque ses effets sont observés à la surface solaire (par exemple, il facilite la diffusion du champ magnétique à grande échelle). Le problème essentiel reste donc, comme nous l'avons vu, de parvenir à le formaliser dans ce contexte.

Il reste bien sûr beaucoup de travail à effectuer avant d'espérer pouvoir obtenir des résultats intéressants pour les grandes échelles de la convection solaire et plus généralement pour le problème du transport turbulent en astrophysique. Il était nécessaire de commencer par des problèmes simples afin de parvenir à réaliser une construction numérique du formalisme théorique actuel de la viscosité turbulente, ce que nous avons tenté de faire ici.





# Conclusions et perspectives

La thématique centrale de ce travail était la compréhension de l'origine et de la dynamique des grandes échelles de la convection observées dans la photosphère du Soleil, à savoir la mésogranulation et la supergranulation. La modélisation de la convection photosphérique fait appel aux équations de la dynamique des fluides en milieu fortement stratifié en densité et en présence de champ magnétique. Les résultats obtenus au cours de cette étude concernent donc simultanément les domaines de la physique solaire et de la dynamique des fluides.

Pour commencer, une description et une synthèse détaillées des différentes observations de la photosphère du Soleil calme et des nombreuses simulations numériques de convection réalisées pour les comprendre ont été effectuées (chapitre 1). Cette première partie a permis de préciser la problématique associée à l'origine de la mésogranulation et de la supergranulation solaires. Nous avons en particulier mis en évidence les problèmes d'interprétation liés aux observations et avons mis l'accent sur les succès mais aussi sur les limites de résolution et les défauts de réalisme des modèles numériques actuels, qu'ils soient locaux (en géométrie cartésienne) ou globaux (en géométrie sphérique). Une question essentielle posée au terme de cette analyse a été de savoir si la mésogranulation et la supergranulation constituaient des phénomènes de surface ou si elles étaient la manifestation d'une dynamique trouvant naissance en profondeur dans la zone convective du Soleil.

Les travaux présentés dans ce document ont ensuite permis d'apporter de nouveaux éléments de réponse à cette question. Les résultats obtenus à l'aide d'un modèle théorique linéaire de convection à grande échelle utilisant des conditions aux limites effectives de type flux thermique fixé ont tout d'abord montré qu'une approche linéaire du problème de l'instabilité convective n'aboutissait pas nécessairement à des cellules d'extension horizontale comparable à l'épaisseur de la couche fluide, contrairement à ce qui est supposé dans le modèle historique de la supergranulation (chapitre 3). Une des conclusions importantes de cette étude est donc qu'il est possible d'imaginer des modèles pour lesquels les *grandes échelles horizontales de la convection* sont *générées à proximité de la surface*.

Dans la configuration étudiée, une étude approfondie de l'influence du champ magnétique et de la stratification en densité a également montré que des échelles « finies » dans la direction horizontale pouvaient se développer en présence d'un champ magnétique suffisant, alors que la théorie linéaire sans champ magnétique dans l'approximation de Boussinesq prédit une instabilité du mode correspondant à la plus grande échelle disponible du domaine considéré. Une estimation du champ magnétique moyen nécessaire à l'obtention d'échelles supergranulaires dans une couche de 5 000 km de profondeur a abouti à des valeurs comprises entre 100 G et 1 kG, qui sont compatibles avec l'intensité des champs magnétiques observés dans le réseau chromosphérique.

Le complément logique de cette étude *linéaire* a été la réalisation de simulations numériques de convection *turbulente* compressible dans un polytrope, visant à mettre en évidence des mécanismes possibles de génération d'écoulements à grande échelle à proximité de la surface de la zone de convection solaire. Au chapitre 4, nous avons présenté des résultats sans champ magnétique obtenus grâce à un code DNS de MHD compressible partiellement développé et validé au cours de la thèse en partant d'un code Boussinesq (annexe A). Afin de résoudre le problème de la simulation des échelles comprises entre la granulation et la supergranulation, le choix d'un rapport d'aspect très important a été fait dans cette expérience. Cette configuration coûteuse du point de vue numérique a permis pour la première fois d'étudier dans des simulations compressibles la dynamique de la convection à des échelles horizontales jusqu'à quarante fois plus grandes que l'épaisseur du domaine de la simulation.

Le principal résultat de ces simulations concerne le développement simultané de *structures cohérentes d'origine convective à mésoéchelle* et de structures granulaires générées dans une couche limite thermique. Une comparaison entre la simulation polytropique et une simulation de convection avec transfert radiatif a permis d'affiner l'analyse de ce résultat et de le relier qualitativement aux observations de la photosphère. Nous sommes arrivés à la conclusion que les deux échelles *distinctes* mises en évidence dans la simulation présentaient des similarités avec la mésogranulation et la granulation solaires. Nous avons alors argumenté que la mésogranulation pourrait être l'échelle dominante du transport convectif sous la surface solaire et que sa dynamique pourrait être en grande partie masquée par la physique de la couche limite thermique. Il n'a en revanche pas été possible d'observer le développement privilégié de mouvements à des échelles « supergranulaires » comparables à l'extension horizontale du domaine de simulation, mais nous avons malgré tout mis en évidence que les transferts non-linéaires permettaient d'alimenter faiblement ces modes à très grande échelle. Une autre possibilité serait que les mésoéchelles obtenues correspondent en réalité à une supergranulation pour les paramètres de la simulation.

Au début du chapitre 5, nous avons souligné que la compréhension et la modélisation du transfert non-linéaire, qui étaient au cœur des deux études précédentes, constituaient les pierres angulaires du problème des grandes échelles

de la convection dans la photosphère solaire. Après avoir constaté que l'hypothèse de séparation d'échelle pourrait être appliquée dans le cadre des interactions entre la supergranulation et la turbulence à petite échelle, nous avons donc pour terminer suggéré une nouvelle approche du problème de l'origine de la supergranulation se fondant sur les travaux théoriques de dynamique des fluides sur les théories de champ moyen de type effet AKA ou viscosité turbulente.

Au cours de cette thèse, l'étude de configurations d'écoulement inédites a abouti à des propositions d'idées nouvelles concernant la question de l'origine de la mésogranulation et de la supergranulation solaires. Le travail réalisé a également permis de confirmer, de généraliser et de préciser des résultats récents obtenus par différentes équipes. Il pose aussi de nombreuses questions : beaucoup d'efforts restent à faire pour parvenir à une description cohérente et complète de la dynamique de la convection dans la photosphère solaire. Il semble donc naturel de terminer cette synthèse par un ensemble de propositions et de directions de recherche possibles s'appuyant sur les résultats présentés dans ce document.

Du point de vue observationnel, il y a beaucoup à attendre des mesures des champs magnétiques intra-réseau dans les années à venir. Les travaux les plus récents à ce sujet indiquent que le champ magnétique est présent à toutes les échelles de la convection photosphérique, mais ses caractéristiques restent malheureusement encore mal connues aujourd'hui. En particulier, l'obtention d'observations magnétiques à haute résolution sera essentielle pour comprendre le processus de dynamo à petite échelle généré par la convection dans la photosphère.

Nous devons en parallèle suivre attentivement les progrès de l'héliosismologie locale et espérer que les résolutions offertes par cette méthode atteindront un jour l'échelle mésogranulaire pour pouvoir notamment tester les idées proposées ici. Si la détermination de la topologie des champs magnétiques photosphériques par cette technique s'avérait possible dans les années à venir, il serait également extrêmement intéressant de pouvoir regarder la structure du réseau magnétique sous la surface afin de mieux comprendre le rôle du champ magnétique dans la dynamique de la supergranulation.

Des simulations numériques semblables à celles que nous avons présentées doivent être réalisées dans des régimes de paramètres différents (stratification, nombre de Rayleigh, nombre de Prandtl, rapport d'aspect) pour clarifier les résultats obtenus. En particulier, comment les tailles des structures cohérentes et des granules varient-elles avec le nombre de Rayleigh ?

L'inclusion du champ magnétique dans les simulations, comme nous l'avons souligné au chapitre 4, sera de toute évidence une étape clé vers une description cohérente de la structure de la convection photosphérique. Se poseront à ce moment là l'ensemble des questions relatives à la dynamo, qui devront être résolues en collaboration avec des spécialistes de la question.

Un point qui n'a pas été soulevé dans ce travail mais qui mériterait une at-



tention particulière est la question du taux de rotation anormalement élevé de la supergranulation par rapport au réseau chromosphérique, et de manière plus générale la compréhension des relations entre les champs magnétiques du réseau et la structure supergranulaire. Ces problèmes ont été peu abordés du point de vue numérique, alors que leur étude est susceptible de nous fournir des informations intéressantes sur la dynamique de la supergranulation. Cependant, la mise en place du couplage entre simulations de convection photosphérique et simulations chromosphériques est vraisemblablement très difficile et nécessitera du temps. Un projet postdoctoral sur ce sujet est en cours de définition. Il devrait être réalisé en collaboration avec Tahar Amari, du groupe de MHD de l'École Polytechnique, et avec des spécialistes de la dynamo à petite échelle de l'université de Cambridge. Nous espérons qu'il offrira des perspectives intéressantes pour la compréhension de l'interface entre photosphère et chromosphère.

Du côté théorique, il est important que les tentatives d'application de théories de champ moyen au problème de la supergranulation se poursuivent. L'objectif à court terme est de dépasser les résultats obtenus pour des écoulements théoriques simples et de parvenir à estimer les propriétés de transport et les possibilités d'instabilité à grande échelle pour des écoulements à petite échelle issus de simulations numériques directes. À plus long terme, il restera à inventer une théorie satisfaisante du transport d'énergie par convection à l'échelle des étoiles...

Voilà de quoi occuper plusieurs générations d'astrophysiciens !



# Annexe A

## Méthodes numériques et tests du code de simulations directes BALAÏTOUS

*En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc : plus ça rate, plus on a de chance pour que ça marche.*

Devise Shadok particulièrement bien adaptée aux simulations numériques

### A.1 Historique et objectifs

BALAÏTOUS est un code parallèle de simulations magnétohydrodynamiques directes en trois dimensions développé pour l'étude de milieux plans anisotropes, comme les milieux stratifiés dans une direction par la gravité. Il a été initié par F. Califano et A. Mangeney dans le cadre de simulations astrophysiques et géophysiques (les méthodes numériques que nous présentons brièvement ici ont été testées par Califano (1996)). La parallélisation et les évolutions récentes du code pour les milieux incompressibles sont décrites dans deux rapports d'activité IDRIS (Lignières 1999, 2002). Le langage utilisé est du fortran 90. Un exemple de problème astrophysique traité avec cet outil (couche de mélange dans une zone radiative) peut être trouvé dans Lignières et al. (1998). Dans ce document, nous présentons le travail effectué au cours de cette thèse pour adapter ce programme au cas des milieux magnétiques *complètement compressibles* stablement ou instablement stratifiés. De tels problèmes physiques, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.4, ont été abordés du point de vue numérique dans les trente dernières années par plusieurs groupes (Cambridge, Chicago, Boulder, Copenhague). Notre premier objectif a donc été de rendre le programme compétitif vis-à-vis de ces recherches

et de le valider en reprenant une partie de ces études. Trois fils conducteurs ont été suivis :

- un souci de fiabilité des résultats ;
- un souci de performance, associé entre autres aux contraintes posées par le sujet de thèse (simulations à grand rapport d’aspect tridimensionnelles) ;
- un souci de facilité d’utilisation, afin que des problèmes variés (et il n’en manque pas lorsqu’on mélange stratification et champ magnétique !) puissent être résolus sans qu’il y ait besoin d’apporter des modifications majeures au code source, et que le code soit utilisable dans le futur au sein du groupe de dynamique des fluides astrophysiques de Toulouse. À cette fin, une documentation complète du programme a été réalisée.

Respecter simultanément ces points essentiels du cahier des charges n’est pas une tâche évidente, car bien souvent l’optimisation passe par des sacrifices au niveau de la commodité d’utilisation. Cela dit, la structure du code avant les modifications apportées au cours de ce travail était telle qu’elle permettait d’envisager sereinement la conciliation de ces deux aspects.

Une description des méthodes numériques utilisées et du fonctionnement du code ainsi qu’une présentation de l’interface réalisée en parallèle pour le traitement des résultats sont proposées. Plus de détails sont donnés dans la documentation du programme. Nous présentons également les différents tests de fiabilité et de performance effectués sur le programme.

## A.2 Fonctionnement général du code : méthodes numériques employées et parallélisation

### A.2.a Organisation des données

Les équations (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) du chapitre 2 sont résolues numériquement en faisant évoluer les variables  $v$ ,  $T$ ,  $\rho$ , et  $\mathbf{B}$  dans le temps. Dans le code ces variables sont contenues dans le tableau FF, contenant  $N_c$  champs, et de taille  $N_x \times N_y \times N_z$ .

Remarque

Comme au chapitre 5,  $N_x$  est le nombre de points dans la direction verticale. Les variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  utilisées dans le code ne correspondent pas à celles utilisées dans le système d’équations du chapitre 2.

## A.2.b Schémas numériques de différentiation spatiale

### Direction verticale

Le schéma vertical de différentiation est un schéma aux différences finies compactes d'ordre 6 ou 8 basé sur les travaux de Lele (1992). Il se situe à l'interface entre une méthode spectrale et un schéma classique de différences finies. Le principe général est de calculer une combinaison linéaire des dérivées suivant la direction verticale aux différents points de grille en fonction d'une combinaison linéaire des valeurs des fonctions en ces points. Des schémas de bords appropriés aux types de conditions aux limites (champs fixés, dérivées fixées) doivent être utilisés. On obtient alors un système linéaire inversible numériquement qui permet de calculer les dérivées spatiales dans la direction anisotrope.

Un des avantages de cette méthode est qu'elle possède une précision quasi-spectrale. La stabilité inconditionnelle du schéma a été prouvée pour l'ordre 6 dans le cas d'une équation d'advection (Carpenter et al. 1993). Du côté des inconvénients, les pas de temps requis sont plus restrictifs par rapport au cas des différences finies classiques.

- **Ordre 6**

**Dérivée première.** Le schéma intérieur pour la dérivée première s'écrit

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = \frac{a}{2\Delta x}(f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{b}{4\Delta x}(f_{i+2} - f_{i-2}), \quad (\text{A.1})$$

avec  $\alpha = 1/3$ ,  $a = 14/9$  et  $b = 1/9$ . Les schémas d'ordre 5 aux bords sont

$$f'_1 = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 a_i f_i, \quad (\text{A.2})$$

$$f'_N = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 a_i f_{N+1-i}. \quad (\text{A.3})$$

On a  $a_1 = -296/105$ ,  $a_3 = -125/8$ ,  $a_5 = -215/12$ ,  $a_7 = -25/8$ ,  $a_2 = 415/48$ ,  $a_4 = 985/48$ ,  $a_6 = 791/80$ ,  $a_8 = 145/336$ . Aux points adjacents aux bords les schémas suivants sont utilisés :

$$f'_2 = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 b_i f_i, \quad (\text{A.4})$$

$$f'_{N-1} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^8 b_i f_{N+1-i}, \quad (\text{A.5})$$

où  $b_1 = -3/16$ ,  $b_3 = 109/48$ ,  $b_5 = 115/144$ ,  $b_7 = 23/240$ ,  $b_2 = -211/180$ ,  $b_4 = -35/24$ ,  $b_6 = -1/3$ ,  $b_8 = -1/72$ . Si la dérivée est connue, les expressions aux bords deviennent

$$f'_1 = f'_{\text{bas}}, \quad (\text{A.6})$$

$$f'_N = f'_{\text{haut}}. \quad (\text{A.7})$$

**Dérivée seconde.** Pour la dérivée seconde, le schéma intérieur est

$$\beta f''_{i-1} + f''_i + \beta f''_{i+1} = \frac{aa}{(\Delta x)^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{bb}{4(\Delta x)^2} (f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}), \quad (\text{A.8})$$

avec  $\beta = 2/11$ ,  $aa = 12/11$ ,  $bb = 3/11$ . Le schéma compact d'ordre 3 suivant est appliqué aux bords :

$$f''_1 + \beta_b f''_2 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^4 aa_i f_i, \quad (\text{A.9})$$

$$f''_N + \beta_b f''_{N-1} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^4 aa_i f_{N+1-i}, \quad (\text{A.10})$$

où  $\beta_b = 11$ ,  $aa_1 = 13$ ,  $aa_2 = -27$ ,  $aa_3 = 15$ ,  $aa_4 = -1$ . Aux points adjacents aux bords, un schéma compact d'ordre 4 est utilisé :

$$\beta_{bb} f''_1 + f''_2 + \beta_{bb} f''_3 = \frac{aa_b}{(\Delta x)^2} (f_3 - 2f_2 + f_1), \quad (\text{A.11})$$

$$\beta_{bb} f''_{N-2} + f''_{N-1} + \beta_{bb} f''_N = \frac{aa_b}{(\Delta x)^2} (f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2}), \quad (\text{A.12})$$

avec  $\beta_{bb} = 1/10$ ,  $aa_b = 6/5$ . Si la dérivée est connue, on utilisera aux bords le schéma compact d'ordre 3 suivant :

$$f''_1 + 2f''_2 = -\frac{3}{\Delta x} f'_{\text{bas}} + \frac{3}{2(\Delta x)^2} (f_3 - f_1), \quad (\text{A.13})$$

$$f''_N + 2f''_{N-1} = \frac{3}{\Delta x} f'_{\text{haut}} + \frac{3}{2(\Delta x)^2} (f_{N-2} - f_N). \quad (\text{A.14})$$

- **Ordre 8**

**Dérivée première.** Dans ce cas, on prend le schéma compact d'ordre 8 pour les points intérieurs (voir Lele 1992), le schéma compact d'ordre 4 pour les points adjacents aux bords et les schémas compact d'ordre 4 suivants pour les bords.

$$f'_1 + \alpha f'_2 = \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^4 a_i f_i, \quad (\text{A.15})$$

$$f'_N + \alpha f'_{N-1} = -\frac{1}{\Delta x} \sum_{i=1}^4 a_i f_{N+1-i}, \quad (\text{A.16})$$

où  $\alpha = 3$ ,  $a_1 = -17/6$ ,  $a_2 = 3/2$ ,  $a_3 = 3/2$ ,  $a_4 = -1/6$ .

**Dérivée seconde.** Les schémas de bord s'écrivent

$$f''_1 + \alpha f''_2 = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^5 a_i f_i, \quad (\text{A.17})$$

$$f''_N + \alpha f''_{N-1} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \sum_{i=1}^5 a_i f_{N+1-i}, \quad (\text{A.18})$$

avec  $\alpha = 10$ ,  $a_1 = (11\alpha + 35)/12$ ,  $a_2 = -(5\alpha + 26)/3$ ,  $a_3 = (\alpha + 9)/2$ ,  $a_4 = (\alpha - 14)/3$ ,  $a_5 = (11 - \alpha)/12$ . Si la dérivée première est connue on utilise les schémas de bords décrits plus haut.

### Direction horizontale

Dans les directions horizontales, pour lesquelles on impose des conditions aux limites périodiques, il est intéressant d'utiliser une méthode spectrale. Celle-ci est implémentée dans BALAÏTOS par l'intermédiaire de la bibliothèque FFTW parallèle. Pour le moment la librairie FFT Cray peut aussi traiter les FFTs, mais seulement pour le cas des milieux non compressibles. L'utilisation de ces bibliothèques permet une parallélisation importante du code, indispensable pour des simulations à haute résolution. Cette parallélisation est effectuée sur une des directions horizontales. Autrement dit, chaque processeur voit seulement des tranches verticales d'atmosphère (voir figure A.1).

Dans l'espace réel, seulement  $N_{zp} = N_z/N_{\text{proc}}$  points sont vus par un processeur, et dans l'espace spectral, la répartition des données par FFTW est telle que  $N_y/N_{\text{proc}}$  modes sont visibles sur chaque processeur, tous les modes de Fourier dans l'autre direction horizontale étant visibles (il s'agit simplement d'une transposition des données lors du calcul de la FFT).

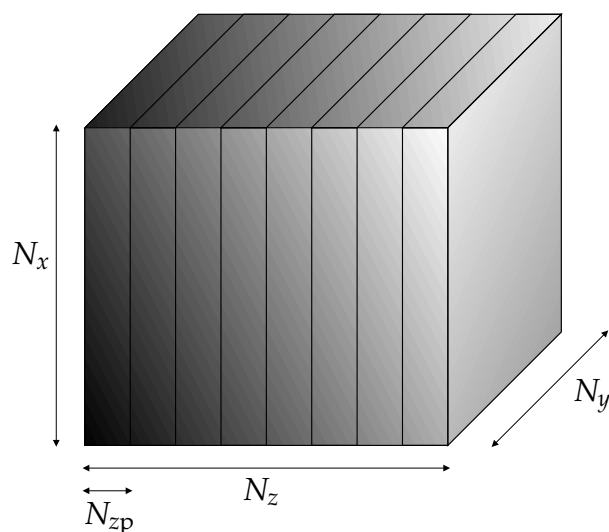


FIG. A.1 – Répartition des données de la boîte de simulation sur les différents processeurs. La parallélisation de la FFTW est effectuée en découpant des tranches de  $N_x \times N_y \times N_{zp}$  points par processeur.

### Dealiasing

Dans BALAÏTOUS, seules les dérivées sont calculées dans l'espace spectral. L'ensemble des autres opérations sur les champs se fait dans l'espace réel, y compris en ce qui concerne termes d'advection. D'autres groupes (Brummell et al. 2002) préfèrent tout calculer dans l'espace spectral et effectuer un bref passage dans l'espace réel pour le calcul des termes d'advection (qui se résument alors de simples multiplications, plus rapides et plus faciles à mettre en œuvre que des produits de convolution). Dans les deux cas, la troncation de la transformée de Fourier discrète à l'ordre  $N$ , et le calcul des termes d'advection dans l'espace réel ont pour conséquence l'apparition de modes spurieux (Canuto et al. 1988). On peut noter que les différences finies compactes agissent naturellement comme un filtre passe-bas et suppriment en grande partie ce phénomène. La situation est différente pour la partie spectrale du schéma spatial.

Un filtre de *dealiasing* a donc été implémenté pour supprimer les modes parasites qui ne respectent pas le critère d'échantillonnage de Shannon-Nyquist. En pratique, pour  $N$  modes de Fourier, seulement  $2N/3$  modes sont alors utilisables. Pour éviter une pollution du spectre (et par voie de conséquence de la solution obtenue) par les modes incorrectement résolus, on peut mettre à 0 leur amplitude à chaque pas de temps (on parle de *dealiasing* par troncation, par opposition à la technique de *dealiasing* par déphasage). Il peut être intéressant de faire des tests avec/sans *dealiasing* afin de voir si la solution sans troncation est fondamentalement différente de la solution tronquée. Si tel n'est pas le cas on a tout avantage à ne pas utiliser le *dealiasing*, car celui-ci fait augmenter la mémoire nécessaire à la simulation et surtout nécessite d'effectuer des transformées de Fourier aller et

retour supplémentaires (6 actuellement, sachant que le code dans sa version purement hydrodynamique sans *dealiasing* effectue 5 FFTs aller et 10 FFTs retour à chaque itération temporelle).

### A.2.c Schéma temporel

Le schéma temporel est un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 3 ou 4. Il s'agit d'un schéma complètement explicite, décrit dans Demuren et al. (2001). L'avantage principal de ce schéma est qu'il ne requiert qu'un faible stockage mémoire.

### A.2.d Le dilemme compressible / incompressible

Il existe une différence essentielle du point de vue numérique entre les problèmes incompressibles et compressibles, qui doit être discutée ici. Dans le cas d'un milieu incompressible, il n'existe pas d'équation d'évolution pour la densité, puisque l'équation de continuité se limite à une contrainte de divergence nulle pour la vitesse. La difficulté réside alors dans le calcul du champ de pression à chaque itération, sous la contrainte que la divergence du champ de vitesse soit nulle. Du point de vue numérique, cela passe par la résolution d'une équation de Poisson sur la pression et l'inversion d'un système linéaire. Cette étape de l'itération demande évidemment un temps de calcul important.

Au contraire, les problèmes compressibles sont munis d'une équation d'évolution en temps pour la densité, qui devient de ce point de vue une variable « comme les autres ». On pourrait donc penser que se lancer dans les simulations incompressibles est plus délicat. Évidemment, ce n'est pas complètement le cas, car l'existence de la nouvelle équation d'évolution a un coût élevé : celui du calcul de la propagation d'ondes sonores. Numériquement parlant, ce phénomène physique est à l'origine d'une réduction importante du pas de temps dans la simulation. Le calcul d'un pas de temps sera donc plus rapide dans le cas compressible, mais il faudra plus de pas de temps pour simuler le même temps physique pour échantillonner la propagation des ondes sonores correctement.

### A.2.e Interface de traitement

Avant de passer aux tests proprement dits, signalons qu'une interface de traitement et de visualisation 3D et d'analyse des données a été développée au cours de ce travail, qui est maintenant disponible avec le code. Elle a permis de réaliser les illustrations de ce manuscrit. Le développement d'un tel programme est assez laborieux car il doit prendre en compte la quantité importante de données générée par le code principal. Pour les simulations que nous avons effectuées, chaque « image » de la boîte occupe en effet quasiment 4 Go, qu'il est impossible de charger avec les PCs actuels. Il faut donc procéder à des découpages des données, et il peut dès lors s'avérer délicat de calculer certaines quantités comme des fonctions de corrélation, pour lesquelles il est nécessaire d'avoir un accès simultané à un sous-ensemble important des données totales.



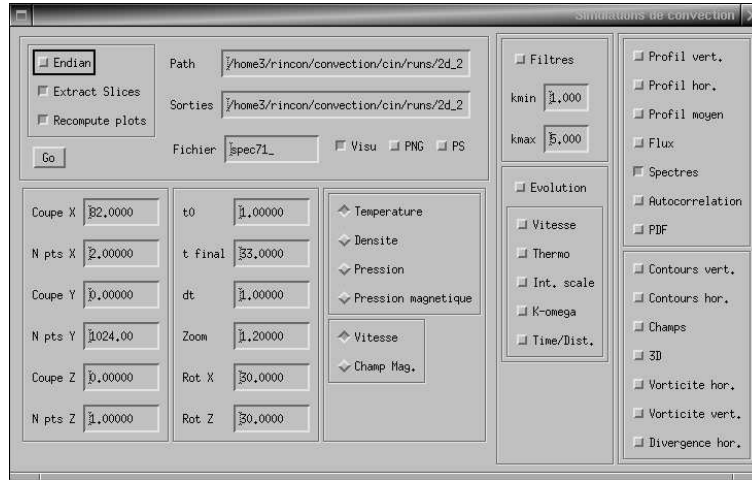


FIG. A.2 – Interface de visualisation IDL pour les simulations avec BALAITOUS.

## A.3 Tests numériques

### A.3.a Pas de temps et résolution spatiale

Le problème de la magnétoconvection en milieu compressible fait intervenir de nombreuses échelles de temps, comme en témoigne le nombre de paramètres physiques donnés au chapitre 2 : trois échelles de temps diffusifs (magnétique, thermique, visqueuse), une échelle de temps sonore, une échelle de temps alfvénique, une échelle de temps de chute libre (qui constitue l'échelle de temps dynamique la plus rapide possible). Le pas de temps choisi pour réaliser la simulation doit être inférieur à tous ces pas de temps si l'on souhaite propager l'information d'un point de grille à un autre correctement (et éviter les instabilités numériques...). On doit donc avoir

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{\Delta x^2}{\nu}, \frac{\Delta x^2}{\kappa}, \frac{\Delta x^2}{\eta}, \frac{\Delta x}{c_s}, \frac{\Delta x}{V_A}, \sqrt{\frac{\Delta x}{g}} \right\}. \quad (\text{A.19})$$

Il faut multiplier en pratique par un facteur de sécurité de l'ordre de 0.05 à 0.4 le  $\Delta t$  réel le plus contraignant pour obtenir le pas de temps numérique satisfaisant, mais ceci dépend à la fois du schéma numérique et du phénomène physique le plus difficile à résoudre temporellement. Dans le cas des ondes sonores, ce facteur est bien connu sous le nom de condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Quelques exemples tirés de Lele (1992) sont donnés dans le tableau A.1. Ces facteurs de sécurité ne donnent qu'une borne supérieure. On observe souvent que des facteurs plus contraignants doivent être adoptés. Ils peuvent en outre dépendre du type de conditions aux limites utilisées. Pour les problèmes de convection abordés dans cette thèse (différences finies compactes d'ordre 6 et

Runge-Kutta d'ordre 3), des facteurs de sécurité de 0.15 et 0.125 ont été utilisés respectivement pour les pas de temps sonore et diffusif.

Équation	RK <sub>3</sub>			RK <sub>4</sub>		
	DFC <sub>6</sub>	DFC <sub>8</sub>	FFT	DFC <sub>6</sub>	DFC <sub>8</sub>	FFT
Diffusion	0.36	0.33	0.25	0.42	0.39	0.29
Advection	0.87	0.78	0.55	1.43	1.29	0.9

TAB. A.1 – Facteurs de sécurité relatifs à divers phénomènes physiques pour les différences finies compactes, les méthodes spectrales et le schéma de Runge-Kutta (ordre 3 RK<sub>3</sub> et ordre 4 RK<sub>4</sub>). La méthode spectrale est plus contraignante que la méthode aux différences finies compactes.

Remarque

Lorsque l'échelle de temps limitante est une échelle diffusive (qui dépend des nombres de Prandtl choisis) il faut faire très attention à choisir un facteur de sécurité en accord avec le coefficient de diffusion, qui peut varier au travers de la couche de fluide si on a choisi des coefficients dynamiques constants! ( $\nu = \mu/\rho$ , et  $\rho$  est plus petit en haut de la couche qu'en bas).

### A.3.b Tests de performances et de parallélisation

Les tests ont été menés sur PC (Linux) AMD Athlon 1.5 GHz avec 1 Go de RAM, sur SGI Origin 3800 (processeurs R14000 cadencés à 500 MHz) au CINES et sur l'IBM SP4 de l'IDRIS (processeurs cadencés à 1.3 GHz). Dans tous les cas la librairie FFTW a été employée pour la partie spectrale du code (sans *dealiasing*), le schéma de différences finies compactes d'ordre 6 a été utilisé, ainsi que l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 3. Les tests 2D sont dans une direction FFT et dans l'autre différences finies compactes.

#### Comparaison de performances entre architectures

Résolution	Athlon	SGI	SP4
64×64	0.045	0.087	0.041
96×96	0.1	0.19	0.083
128×128	0.2	0.34	0.14
256×256	1.0	1.6	0.56
512×512	4.6	7.9	2.7

TAB. A.2 – Temps de calcul monoprocesseur (en secondes) d'un pas de temps pour des simulations 2D purement hydrodynamiques (5 champs).

Résolution	Athlon	SGI	SP4	Résolution	Athlon	SGI	SP4
62×64	0.042	0.084	0.04	82×32	0.028	0.057	0.038
82×64	0.058	0.111	0.053	82×64	0.059	0.11	0.053
96×64	0.066	0.129	0.062	82×96	0.088	0.16	0.073
100×64	0.069	0.132	0.064	82×128	0.11	0.22	0.083
128×64	0.095	0.16	0.083	82×256	0.25	0.45	0.15
140×64	0.098	0.185	0.089	82×512	0.61	0.92	0.31
164×64	0.115	0.218	0.11	82×1 024	1.43	2.07	0.76

TAB. A.3 – Influence des résolutions verticale (gauche) et horizontale (droite) sur le temps de calcul monoproc (en secondes) d'un pas de temps pour des simulations 2D purement hydrodynamiques. On observe une loi linéaire par rapport au nombre de points dans la direction verticale. En revanche, l'efficacité des FFTs diminue pour un grand nombre de points.

Résolution	Athlon	SGI	SP4
82×64×64	8.6	11.6	4.82
82×128×128	42.7	56.2	30
82×256×256	217	292	147

TAB. A.4 – Temps de calcul monoproc (en secondes) d'un pas de temps pour des simulations 3D purement hydrodynamiques. À noter les meilleures performances relatives du SGI par rapport au PC comparé au cas 2D.

### Efficacité de la parallélisation

Ces tests ont été menés sur SGI Origin 3800 et IBM SP4 pour des simulations 3D purement hydrodynamiques. L'efficacité de la parallélisation est donnée par

$$\eta = \frac{T_{\text{mono}}}{N_{\text{proc}} \times T_{N_{\text{proc}}}},$$

où  $T_{\text{mono}}$  est le temps réel de calcul d'un pas de temps calculé sur un unique processeur, et  $T_{N_{\text{proc}}}$  est le temps réel de calcul pour la même résolution lorsque le code est parallélisé sur  $N_{\text{proc}}$ . Les temps de calcul pour des résolutions importantes peuvent être réduits de manière directement proportionnelle au nombre de processeurs pour peu que l'efficacité de la parallélisation soit bonne. Pour la FFTW, le maximum de processeurs utilisable pour que la parallélisation soit intéressante est tel que  $N_{\text{proc}}^2 = N$ , où  $N$  est le nombre de points dans chacune des directions horizontales. Pour la résolution  $256 \times 256 \times 82$ , par exemple, l'efficacité est excellente jusqu'à 16 processeurs.

On peut voir que les PCs se prêtent bien aux simulations 2D, qui sont peu parallélisables. Enfin, la parallélisation du code semble être meilleure sur l'IBM

Résolution	$N_{\text{proc}}$	$T_{N_{\text{proc}},\text{SGI}}$ (s)	$\eta_{\text{SGI}}$	$T_{N_{\text{proc}},\text{SP4}}$	$\eta_{\text{SP4}}$
$82 \times 32 \times 32$	1	2.2	1	0.72	1
	2	1.45	0.75	0.46	0.78
	4	1.17	0.47	0.34	0.52
	8	1.24	0.22	0.47	0.19
$82 \times 64 \times 64$	1	11.6	1	4.82	1
	2	6.6	0.87	2.39	1
	4	3.7	0.78	1.18	1
	8	2.7	0.53	0.9	0.67
$82 \times 128 \times 128$	1	56.2	1	30	1
	2	29.1	0.96	15.3	0.98
	4	15.5	0.9	5.4	1.38
	8	7.5	0.93	2.8	1.34
	16	6.5	0.54	2.2	0.85
$82 \times 256 \times 256$	1	292	1	147	1
	2	142.5	1.03	66	1.1
	4	60.2	1.2	24	1.5
	8	47.8	0.76	13.5	1.35
	16	19	0.95	6.9	1.3
	32	23.9	0.38	6.2	0.74

TAB. A.5 – Efficacité de la parallélisation pour des simulations 3D purement hydrodynamiques sur Origin 3800 et IBM SP4. Les meilleures efficacités sont obtenues lorsque le nombre de points dans une direction horizontale est égal à  $N_{\text{proc}}^2$ .

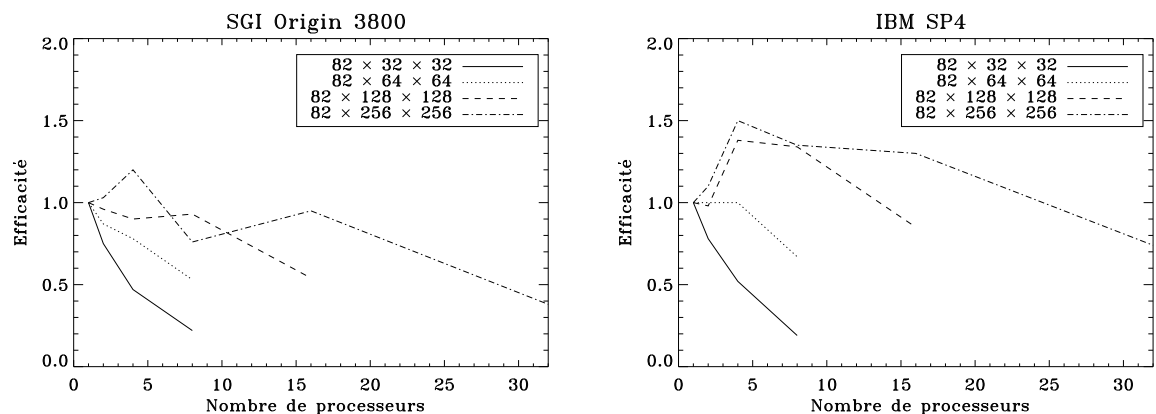


FIG. A.3 – Représentation des résultats du tableau A.5 pour SGI (à gauche) et IBM SP4 (à droite).

de l'IDRIS et les temps de calcul sont sensiblement réduits sur cette machine par rapport à l'Origin du CINES.

## A.4 Tests du code sur quelques problèmes de physique

Dans cette section, plusieurs tests sur « l'ABC » de la physique des milieux compressibles magnétisés sont présentés. En dépit de la simplicité apparente des exemples, ceux-ci constituent des vérifications importantes du bon fonctionnement du programme. Ils ont permis de débusquer divers problèmes et d'améliorer considérablement la compréhension du comportement du code.

### A.4.a Ondes sonores

La première vérification du bon fonctionnement d'un code compressible est bien sur la propagation des ondes sonores. Afin d'obtenir une validation quantitative, nous avons donc effectué ce test dans le cas d'une atmosphère isotherme en injectant dans l'atmosphère des modes propres dont les fréquences propres sont connues par ailleurs. Avant de procéder, nous devons cependant déterminer les paramètres physiques à utiliser dans le test. En effet l'équation d'onde dans un milieu stratifié est compliquée par l'existence d'ondes de gravité, et il convient de la simplifier.

#### Expression des fréquences dans le cas de l'atmosphère isotherme

Les fréquences ou pulsations caractéristiques pour ce problème, exprimées par l'intermédiaire des paramètres définis au chapitre 2, s'expriment selon

$$- N^2 = (\Lambda/H) (1 - 1/\gamma),$$

$$- \omega_c = 1/2\sqrt{(\gamma\Lambda)/H}.$$

$N$  est la fréquence de Brünt-Väisälä, et  $\omega_c$  est la pulsation de coupure des ondes acoustiques de l'atmosphère. L'équation caractéristique des oscillations adiabatiques gravito-acoustiques pour une perturbation  $\zeta$  est donnée (Lamb 1932, Les 1993) par

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_c^2 \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \zeta - N^2 c_s^2 \Delta_h \zeta = 0, \quad (\text{A.20})$$

où  $\Delta_h$  est la partie horizontale de l'opérateur laplacien. Notons que l'absence de diffusion est impossible à réaliser numériquement, si bien qu'on calcule en réalité des fréquences de modes faiblement non-adiabatiques (le temps de propagation caractéristique d'une ondes est toujours très inférieur aux temps diffusifs du système).

### Les modes acoustiques

Pour obtenir les fréquences acoustiques dans le fluide, on impose la limite haute-fréquence  $\omega^2 \gg N^2$  dans l'équation (A.20) en prenant  $H \rightarrow +\infty$ , ce qui permet de retrouver l'équation d'ondes habituelle :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \zeta - c_s^2 \Delta \zeta = 0. \quad (\text{A.21})$$

Si on prend des conditions aux limites stress-free sur la vitesse, dans la limite adiabatique, il faut imposer des ventres de température et de densité sur les parois inférieure et supérieure de la couche. En négligeant les dérivées d'ordre  $1/H$ , on obtient les solutions stationnaires en modes propres, pour une couche de rapport d'aspect 1 (Landau et Lifshitz 1971) :

$$\begin{aligned} v_z &= -A \sin(n\pi z) \cos(2m\pi x) \sin \omega t, \\ v_x &= -\frac{2m}{n} A \cos(n\pi z) \sin(2m\pi x) \sin \omega t, \\ \delta\rho &= \frac{\sqrt{n^2 + 4m^2}}{n} c_s^{-1} A \cos(n\pi z) \cos(2m\pi x) \cos \omega t, \\ \delta T &= (\gamma - 1) \delta\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

### Validation quantitative

Pour  $H = 10\,000$  et  $c_s = 400$  (en unités thermiques), la fréquence fondamentale est 63.66. On injecte initialement le mode  $n = 1, m = 2$  pour les perturbations. La période théorique (en unités sonores) est alors de  $1/\sqrt{5} = 0.447$ , vérifiable sur la figure A.4. On peut également apprécier sur cette figure la décroissance exponentielle des oscillations sur une échelle de temps (en unités sonores)  $\tau_{dec} = c_s/(5\pi^2(1 + \text{Pr})) = 4.05$ , liée à la non-adiabaticité ( $\text{Pr} = 1$ ).

## A.4.b Convection dans un polytrophe sans champ magnétique

### Principe du test

On peut obtenir directement les taux de croissance de l'instabilité convective dans un polytrophe (Gough et al. 1976) en utilisant le solveur de problèmes aux valeurs propres généralisées LSB mentionné au chapitre 3, et imposer comme condition initiale dans le programme les vecteurs propres ainsi obtenus. Le test consiste à vérifier le taux de croissance des solutions linéaires de l'instabilité lors des premiers pas de temps de la simulation.

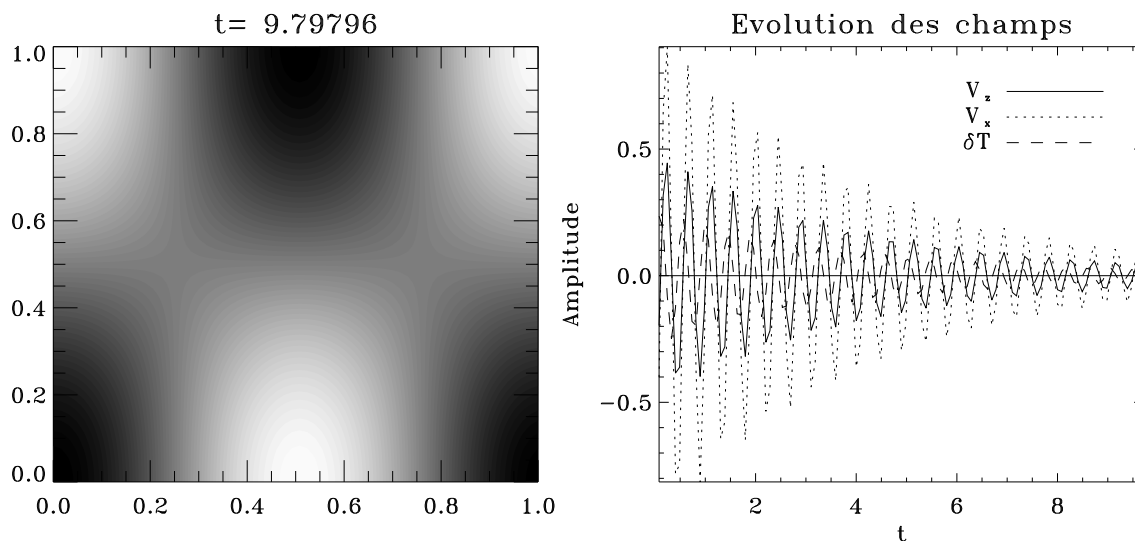


FIG. A.4 – Perturbation de température et évolution du mode propre acoustique  $n = 1, m = 2$ . La période du mode est de 0.447, exprimé en fonction de la période fondamentale de vibration (unité utilisée sur la courbe). Le rapport 2 entre l'amplitude des vitesses est celui prévu par la théorie (la perturbation de température a été multipliée par  $c_s$  sur la courbe).

### Validation quantitative

On se place dans un polytrophe  $m = 1$ , caractérisé par une température  $z_0$  en haut de la couche. Le nombre de Rayleigh au milieu de la couche est super-critique. Le vecteur d'onde horizontal est  $a = \pi$ . Le taux de croissance est  $\lambda$  (pour une dépendance des variables en  $\exp[\lambda t]$ ). Le test est effectué pour plusieurs types de conditions aux limites sur la température (T=température fixée, F=flux fixé) afin de tester la validité des schémas de bords des différences finies compactes sur les deux parois. Les conditions aux limites sur la vitesse sont stress-free. Divers nombres de Prandtl et  $z_0$  ont été utilisés pour conforter le test. Les résultats sont tout à fait satisfaisants, comme en témoigne le tableau A.6.

### A.4.c Instabilité de magnétoconvection - Overstabilité

L'overstabilité magnétique est un exemple de convection dite « double diffusive », car elle fait intervenir deux nombres de Prandtl (de fait, on devrait plutôt dire « triple diffusive ») : le nombre de Prandtl thermique, et le nombre de Prandtl magnétique. Il s'agit en fait de convection en présence d'un champ magnétique, l'intensité de celui-ci étant déterminée par le nombre de Chandrasekhar  $Q$ . Le couplage entre modes de convection et modes magnéto-acoustiques fait apparaître un régime d'oscillations lorsque le nombre de Prandtl magnétique est su-

Cond. lim.	R	$z_0$	Pr	$\lambda_{th}$	$\lambda_{sim}$
TT	5 000	0.1	1	39.95	39.94
TT	5 000	0.1	10	87.40	87.43
TT	5 000	0.01	1	36.62	36.61
TT	40 000	0.1	1	194.1	194.1
FF	5 000	0.1	10	97.8	97.8
FF	5 000	0.01	1	43.83	43.89
FF	40 000	0.1	1	203.6	203.6
FT	5 000	0.1	10	89.59	89.61
FT	5 000	0.01	1	39.72	39.50
FT	40 000	0.1	1	194.45	194.41
TF	5 000	0.1	10	96.14	96.07
TF	5 000	0.01	1	41.43	41.1
TF	40 000	0.1	1	203.36	203.37

TAB. A.6 – Taux de croissance de l’instabilité convective sans champ magnétique, donnés par la théorie linéaire et calculés par BALAÏTOUS dans diverses configurations d’atmosphère.

périeur au nombre de Prandtl thermique. Le rapport entre ces deux nombres est

$$\zeta = \frac{\eta}{\kappa} \propto \rho. \quad (\text{A.23})$$

Il dépend de la profondeur comme  $\rho$  dans le cas d’un milieu stratifié avec une conductivité thermique constante. Physiquement, pour qu’un comportement oscillant puisse se manifester, il faut que le champ magnétique diffuse moins que la température, afin que la tension magnétique des lignes de champ puisse agir comme une force de rappel sur les modes convectifs (si la diffusion magnétique est trop importante, les lignes de champ « glissent » au travers du fluide). Dans le cas où  $\zeta > 1$  partout dans le fluide, la convection ne peut apparaître que par une bifurcation stationnaire. L’étude linéaire est effectuée par Chandrasekhar (1961).

### Principe du test

L’instabilité de magnétoconvection (ou overstabilité magnétique) est un test intéressant, car elle fait intervenir à la fois les termes compressibles, magnétiques, non-linéaires, et non-adiabatiques des équations. Elle permet donc de valider simultanément le comportement du code sur plusieurs points essentiels. Le test consiste à retrouver des résultats 2D relatifs à un modèle de taches solaires (Weiss et al. 1990) sur plusieurs modes overstables de polytropes dans le régime non-linéaire. On peut calculer le taux de croissance initial de l’instabilité, la pulsation des oscillations dans le régime non-linéaire, ainsi que le flux d’énergie moyen, représenté par la moyenne temporelle du nombre de Nusselt  $\langle \text{Nu} \rangle$ . Enfin, on vérifiera la transition d’un régime périodique à un régime apériodique autour d’une



valeur critique du nombre de Rayleigh évalué au milieu de la couche. Une étude pour différents  $\zeta$  est effectuée pour tester les termes diffusifs.

### Validation quantitative

Les paramètres utilisés pour le premier test sont les suivants (Weiss et al. 1990, p. 439) :  $\gamma = 5/3$ ,  $z_o = 0.1$ ,  $m = 1$ ,  $\text{Pr} = 1$ ,  $\zeta_{mid} = 0.6$  (ou  $\text{Pr}_m = 0.909$  en bas de la couche). Le rapport d'aspect est  $4/3$  (vecteur d'onde horizontal  $a = 4.71$ ), des conditions aux limites de température fixée sont appliquées et le champ magnétique au niveau des parois est vertical. Le nombre de Chandrasekhar vaut 2 000. Pour cet ensemble de paramètres, la convection se met en place sous forme oscillante si  $R > 29\,751$  (bifurcation de Hopf) et une bifurcation fourche apparaît ensuite pour  $R = 59\,475$ . Trois simulations sont réalisées, pour  $R = 50\,000$  (régime périodique),  $R = 60\,000$  (régime de transition), et  $R = 80\,000$  (régime chaotique). L'évolution temporelle de la convection est illustrée sur la figure A.5.

Dans le deuxième test, les paramètres utilisés sont identiques, sauf  $Q = 1\,000$  et  $\zeta_{mid} = 1.2$  ( $\text{Pr}_m = 0.454$  en bas). Le nombre de Rayleigh vaut 47 000 (figure 15 de Weiss et al. (1990)). L'ensemble des résultats est résumé dans le tableau A.7.

Paramètres	Test	Weiss et al. (1990)/théorie	Simulation
$\zeta_{mid} = 0.6,$	$\tau$	48.8	48.8
$Q = 2\,000,$	$\omega$	91.9	92.3
$R = 50\,000$	$\langle \text{Nu} \rangle$	1.5	1.4
$\zeta_{mid} = 0.6,$	$\tau$	139.9	140.3
$Q = 2\,000,$	$\omega$	89.2	89.7
$R = 60\,000$	$\langle \text{Nu} \rangle$	1.8	1.78
$\zeta_{mid} = 1.2,$	$\tau$	108.1	108
$Q = 1\,000,$	$\omega$	51.8	52
$R = 47\,000$	$\langle \text{Nu} \rangle$	1.58	1.54

TAB. A.7 – Comparaison entre les résultats de Weiss et al. (1990) et la simulation avec BALAÏT<sub>O</sub>US pour le taux de croissance  $\tau$  de l'instabilité overstabile dans le régime linéaire, la pulsation dans le régime non-linéaire, et la moyenne temporelle du nombre de Nusselt  $\langle \text{Nu} \rangle$  prise en  $z = z_o$ . Un excellent accord entre les deux est obtenu.

## A.5 Conclusions

Dans cette annexe, les propriétés essentielles du programme BALAÏT<sub>O</sub>US ont été décrites. Les tests de vitesse et de parallélisation ont montré qu'une utilisa-

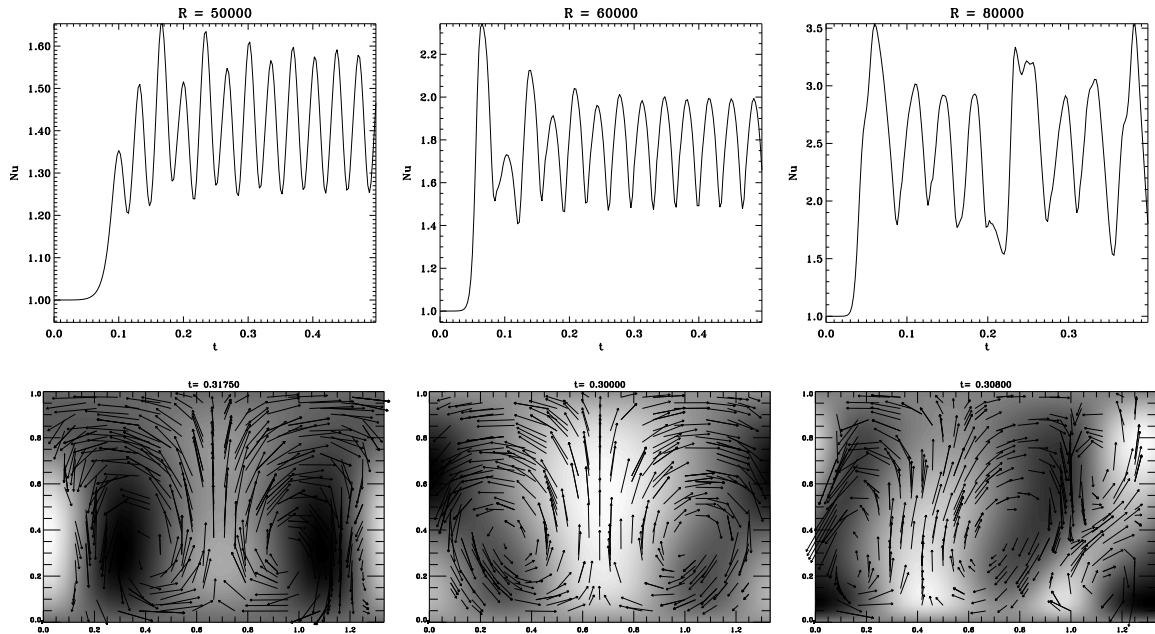


FIG. A.5 – Évolution au cours du temps du nombre de Nusselt pour les trois simulations avec  $R = 50\,000$ ,  $R = 60\,000$ , et  $R = 80\,000$ , illustrant la transition du régime périodique au régime chaotique pour  $\zeta_{mid} = 0.6$  (la valeur de  $Nu$  oscille deux fois plus rapidement que le mode lui-même). En dessous, un instantané de chacune des simulations représentant le champ de vitesses et le champ de température. À noter l’absence de symétries spatiales dans le dernier cas contrairement aux deux régimes précédents, caractéristique des transitions vers la turbulence.

tion performante du code sur des architectures parallèles était possible. Ils ont également permis de caractériser les paramètres numériques requis pour une simulation de convection à grand rapport d’aspect.

L’ensemble des tests physiques a d’autre part abouti à une vérification quantitative des aptitudes du programme à reproduire des processus fondamentaux à l’œuvre dans les milieux astrophysiques stratifiés et magnétisés (ondes sonores, ondes d’Alfvén, convection, etc.), ce qui nous permet d’envisager avec sérénité son utilisation dans le cadre de simulations plus avancées.





# Oscillations alfvéniques d'une coquille sphérique de fluide incompressible

## B.1 Introduction

### B.1.a Avant-propos

À la suite de mon stage de DEA avec Michel Rieutord, j'ai travaillé sur une deuxième thématique en parallèle de mon sujet de thèse, en coencadrant notamment le stage de DEA de Daniel Reese. Ce sujet ne présente pas de lien direct avec la convection solaire, c'est pourquoi il est présenté en marge du reste des résultats de ce manuscrit. Une partie de la résolution du problème (paragraphe B.5) a cependant été réalisée en utilisant des outils mathématiques que j'ai découverts à l'occasion de l'étude du formalisme des problèmes de viscosité turbulente. Seuls les aspects essentiels du problème et de ses implications et un aperçu relativement succinct des résultats obtenus sont présentés ici, le détail complet de cette étude ayant été publié dans deux articles (Rincon et Rieutord 2003, Reese et al. 2004).

### B.1.b Oscillations magnétiques stellaires

La motivation originale de ce travail est l'observation de pulsations stellaires fortement influencées par la présence de champs magnétiques forts. Le cas le plus caractéristique est celui des étoiles  $\alpha$ Ap, découvertes par Don Kurtz en 1978 (voir Kurtz (1990) pour une revue sur le sujet). Ces étoiles possèdent des champs magnétiques intenses (environ 1 kG soit 0.1 T) à leur surface, de géométrie principalement dipolaire. Leur axe de rotation n'est en général pas aligné avec l'axe magnétique (il existe pour cette raison les modèle dits du « pulsateur oblique »

et du « rotateur oblique »). Elles présentent des anomalies chimiques fortes aux pôles magnétiques (Balmforth et al. 2001), ce qui leur a donné le droit d'obtenir l'appellation « Ap » (étoiles de type A avec une composition chimique *particulière*). La partie « ro » signifie quant à elle *rapidly oscillating*. Ces astres oscillent en effet sur des modes acoustiques ( $p$ -modes) avec une période courte allant de 5 à 15 minutes. Cependant, au contraire des oscillations acoustiques de notre Soleil, ces pulsations sont fortement anisotropes puisqu'elles sont concentrées aux pôles magnétiques. On connaît une trentaine de ces astres aujourd'hui, mais aucune explication théorique satisfaisante ne permet pour le moment d'expliquer ce phénomène quantitativement (et en particulier de calculer précisément les fréquences d'oscillation).

Compte-tenu des contraintes observationnelles, on ne peut observer que les composantes harmoniques de bas degré  $\ell < 4$  de ces pulsations, et la plupart des modèles se sont concentrés sur ces harmoniques. Une des difficultés essentielles du problème est le couplage important entre ondes acoustiques et ondes d'Alfvén dans les couches de surface. En effet, la densité  $\gamma$  étant nettement plus faible que dans les zones internes, la vitesse d'Alfvén  $V_A = B / \sqrt{\rho \mu_0}$  peut y être très importante et devenir comparable à la vitesse des ondes acoustiques, si bien que les théories de perturbation des modes acoustiques par le champ magnétique deviennent inutilisables. Des modèles en perturbations singulières ont certes été élaborés (Biront et al. 1982, Roberts et Soward 1983, Campbell et Papaloizou 1986, Dziembowski et Goode 1996) mais la complexité mathématique du problème n'a guère permis de tirer de conclusions définitives sur la question. Les modèles les plus récents ont soit pris en compte la force de Lorentz de manière empirique (Balmforth et al. 2001), soit négligé les couplages entre harmoniques sphériques de différents degrés (Bigot et Dziembowski 2002), qui, comme nous allons le montrer, peuvent être très importants. Notons dans le travail de Lionel Bigot l'incorporation de la force centrifuge, qui joue un rôle prépondérant dans la dynamique de ces étoiles qui sont des rotateurs rapides.

L'ensemble des considérations précédentes nous a encouragés à commencer par une étude idéalisée du problème, qui permettrait d'isoler les phénomènes les plus importants entrant en jeu dans les pulsations de ces étoiles. Comme on a pu s'en rendre compte, l'incorporation simultanée de toute la complexité physique ne constitue pas une approche viable. Pour commencer, nous nous sommes donc focalisés sur le problème des oscillations alfvéniques *incompressibles* d'une coquille sphérique de plasma conducteur, en utilisant une méthode de résolution *globale, i. e.* prenant en compte un grand nombre de degrés harmoniques. Ce point est essentiel pour la modélisation rigoureuse de la force de Lorentz.

Notons que cette étude ne se rattache pas seulement au problème des étoiles roAp. D'autres étoiles pulsantes abritent en effet des champs magnétiques forts. C'est le cas par exemple de certaines naines blanches (Lou 1995). Enfin, la configuration étudiée ici peut également être utilisée comme un modèle de certains intérieurs planétaires comme celui de Jupiter (Stevenson 1983) dans lequel l'hydrogène, probablement métallisé sous l'effet de pressions gigantesques, possède

une conductivité électrique extrêmement élevée (Celliers et al. 2000) propice à la propagation quasi-adiabatique d'ondes magnétiques. Finalement, remarquons que des études similaires ont déjà été menées en géométrie cylindrique dans le cadre de l'étude des plasmas de laboratoire et des tokamaks (Kerner et al. 1986), ainsi que pour les tubes de flux magnétique dans l'atmosphère solaire (Goossens et al. 2002), et qu'il s'agit de la première tentative en géométrie sphérique.

Le paragraphe qui suit est consacré au formalisme. Les propriétés des solutions axisymétriques du problème sont présentés aux paragraphes B.3 et B.4, et une solution analytique asymptotique pour le cas des modes toroïdaux est dérivée au paragraphe B.5. Les conclusions essentielles de notre étude ainsi que ses perspectives, sont données au paragraphe B.6.

## B.2 Oscillations magnétiques en géométrie sphérique

### B.2.a Modèle et équations

#### Une étoile (très) simplifiée

Le modèle adopté est le suivant. Il s'agit de décrire la distribution d'énergie liée à la propagation d'ondes d'Alfvén *de cisaillement* (cf. paragraphe B.2.d) dans une coquille sphérique de plasma incompressible de densité  $\rho_o$ , de rayon  $R$ , et de rapport d'aspect  $\eta$ , possédant une viscosité cinématique  $\nu$  et une conductivité électrique  $\sigma_o$  constantes (figure B.1). Cette « étoile » est baignée dans un champ magnétique dipolaire  $\mathbf{B} = B_o \cdot R^3 \left( \frac{\cos\theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin\theta}{2r^3} \mathbf{e}_\theta \right)$ , où  $r$ ,  $\theta$ ,  $\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{e}_\theta$  ont leur définition usuelle en coordonnées sphériques. L'extérieur de l'étoile correspond au vide, le champ magnétique y est donc potentiel, ce qui permet de déterminer les conditions aux limites magnétiques à l'extérieur. Le cœur, quant à lui, est supposé infiniment conducteur électriquement. Des conditions aux limites de type stress-free, plus réalistes du point de vue astrophysique, sont appliquées sur la vitesse.

#### Les équations linéarisées sans dimension

La vitesse d'Alfvén caractéristique dans le plasma est  $V_A = B_o / \sqrt{\rho_o \mu_o}$ . Dans ce système, il s'agit de la seule vitesse de propagation que l'on puisse former, en absence de rotation ou de compressibilité. On peut donc procéder à une adimensionalisation des équations usuelles de la magnétohydrodynamique incompressible en prenant comme unité de longueur  $R$ ,  $V_A$  comme unité de vitesse et  $B_o$  comme unité de champ magnétique. La recherche d'ondes conduit à linéariser le système pour des perturbations (sans dimension)  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{b}$  avec des dépendances temporelles de la forme  $e^{\lambda t}$ , où  $\lambda = i\omega + \tau$  ( $\omega$  est la fréquence et  $\tau$  le taux de

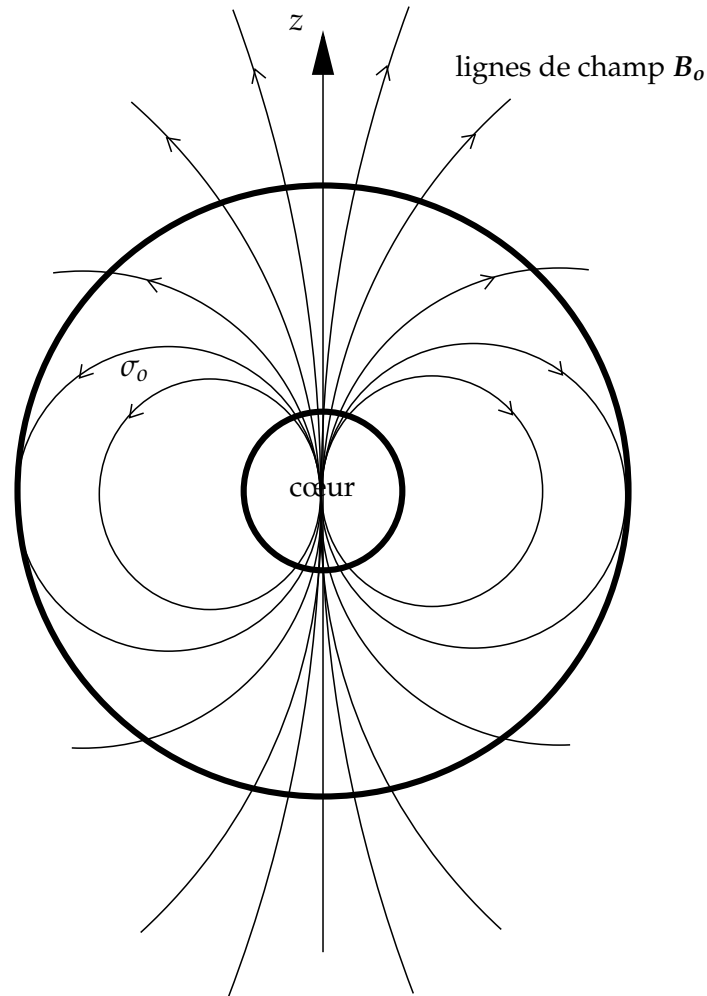


FIG. B.1 – Schéma du modèle de la coquille sphérique magnétisée.

croissance ou d'amortissement du mode, suivant son signe). L'ensemble de ces hypothèses et définitions mène au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\
 \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0, \\
 \lambda \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}) + E \nabla \times \Delta \mathbf{v}, \\
 \lambda \mathbf{b} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + E_m \Delta \mathbf{b}.
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

La première équation correspond à la propriété d'incompressibilité du fluide, la deuxième caractérise le caractère solénoïdal du champ magnétique, la troisième impose la conservation de la quantité de mouvement en présence de la force de Lorentz associée au champ magnétique, tandis que la dernière décrit l'induction magnétique. Les paramètres  $E$  et  $E_m$  correspondent aux diffusivités adimension-

nalisées<sup>1</sup> :

$$E = \frac{\nu}{RV_A}, \quad E_m = \frac{1}{\sigma_0 \mu_0 RV_A}. \quad (\text{B.2})$$

Typiquement, dans une étoile, ces deux paramètres prennent des valeurs minuscules, de l'ordre de  $10^{-13}$  pour le premier et  $10^{-8}$  pour le second. Notons dès à présent qu'il s'agit d'une des difficultés majeures de l'étude. En effet, avec les capacités numériques actuelles, on ne peut guère descendre en dessous de valeurs de l'ordre de  $10^{-6}$ , et il est par conséquent fort délicat d'extrapoler des résultats obtenus numériquement au cas stellaire. Ceci légitime donc des approches analytiques (lorsqu'elles sont possibles) comme celles données au paragraphe B.5, car elles permettent de savoir si les solutions calculées par un ordinateur sont singulières dans la limite des diffusivités nulles.

Les équations (B.1), si on leur adjoint les conditions aux limites choisies précédemment, constituent un problème aux valeurs propres généralisé, de la forme  $\mathcal{A}x = \lambda \mathcal{B}x$ , où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux opérateurs, et  $x = (v, b)$ . Les solutions recherchées sont des couples  $(\lambda, x)$ . La recherche de l'ensemble des valeurs propres solutions  $\lambda$  permet d'obtenir le spectre des ondes d'Alfvén dans ce système.

### B.2.b Décomposition harmonique des équations MHD

Afin de résoudre le problème aux valeurs propres en géométrie sphérique il est très pratique de décomposer les vecteurs  $v$  et  $b$  sur la base des harmoniques sphériques (Rieutord 1987, 1991). On a

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} u_m^{\ell} \mathbf{R}_{\ell}^m + v_m^{\ell} \mathbf{S}_{\ell}^m + w_m^{\ell} \mathbf{T}_{\ell}^m, \\ b &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_m^{\ell} \mathbf{R}_{\ell}^m + b_m^{\ell} \mathbf{S}_{\ell}^m + c_m^{\ell} \mathbf{T}_{\ell}^m, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où  $\mathbf{R}_{\ell}^m$ ,  $\mathbf{S}_{\ell}^m$ , et  $\mathbf{T}_{\ell}^m$  sont les harmoniques sphériques normalisées

$$\mathbf{R}_{\ell}^m = Y_{\ell}^m \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_{\ell}^m = r \nabla Y_{\ell}^m, \quad \mathbf{T}_{\ell}^m = r \nabla \times \mathbf{R}_{\ell}^m. \quad (\text{B.4})$$

$u_m^{\ell}$ ,  $v_m^{\ell}$ ,  $w_m^{\ell}$ ,  $a_m^{\ell}$ ,  $b_m^{\ell}$ ,  $c_m^{\ell}$  dépendent uniquement de la variable  $r$ . ( $u_m^{\ell}$ ,  $v_m^{\ell}$ ) et ( $a_m^{\ell}$ ,  $c_m^{\ell}$ ) sont des composantes poloïdales, et  $w_m^{\ell}$  et  $b_m^{\ell}$  sont des composantes toroïdales. On doit ensuite utiliser l'expression des divers opérateurs dans la base harmonique pour développer le système (B.1). L'ensemble des résultats de ce calcul est donné dans Rincon et Rieutord (2003). Notons simplement que les relations imposant la divergence nulle permettent de se débarrasser de  $v_m^{\ell}$  et  $b_m^{\ell}$  dans les calculs.

Pour résoudre le problème numériquement il est bien entendu nécessaire de le discrétiser. Le développement (B.3) assure cela pour les variables angulaires. Une

---

<sup>1</sup>la lettre  $E$  a été choisie pour des raisons historiques propres à l'équipe de dynamique des fluides astrophysiques de Toulouse.  $E$  désignant habituellement le nombre d'Ekman, le lecteur averti devinera aisément la personne à l'origine de ce choix.



discrétisation sur des polynômes de Chebyshev est effectuée dans la direction radiale. Celle-ci possède deux propriétés très importantes. Elle permet en premier lieu de mettre beaucoup de points près des bords du domaine, où des couches limites peuvent se former. Ensuite, la convergence des solutions est spectrale (la précision du calcul augmente exponentiellement avec le nombre de points utilisés), ce qui en fait une méthode robuste et précise. En pratique, on tronque les développements à  $L$  harmoniques sphériques et  $N_r$  polynômes de Chebyshev. On peut obtenir à l'heure actuelle une résolution maximale de l'ordre de 1000 harmoniques pour 400 Chebyshev (avec un seul  $m$ ), sur le ordinateur vectoriel NEC de l'IDRIS.

Le code de résolution de problèmes linéaires LSB, développé par Lorenzo Valdettaro et Michel Rieutord, permet de résoudre le problème en utilisant soit une méthode directe basée sur l'algorithme QZ calculant l'ensemble du spectre (mais avec une mauvaise précision sur les vecteurs propres), soit une méthode itérative de type Arnoldi-Chebyshev calculant un ensemble limité (mais avec une très bonne précision) de valeurs propres et de vecteurs propres autour d'un point  $\lambda = i\omega + \tau$  donné du plan complexe.

### B.2.c Symétries et classification des modes propres

Dans le problème posé, un couplage entre harmoniques sphériques est imposé par la présence du champ magnétique, qui brise la symétrie sphérique. La dépendance du champ permanent en  $\cos \theta$  couple l'harmonique  $\ell$  aux harmoniques  $\ell + 1$  et  $\ell - 1$ . Comme le champ est axisymétrique, aucun couplage entre  $m$  n'est présent (ce n'est plus le cas lorsqu'on introduit un axe de rotation incliné par rapport à l'axe magnétique (Bigot et Dziembowski 2002)). Les solutions se divisent alors en deux catégories axisymétrique ( $m = 0$ ) et non-axisymétrique ( $m \neq 0$ ). On pourra se convaincre en regardant l'annexe A de Rincon et Rieutord (2003) que pour la première catégorie, les variables poloïdales  $(u_m^\ell, a_m^\ell)$  d'une part, et toroïdales  $(w_m^\ell, c_m^\ell)$  d'autre part, sont découplées, et que le champ de vitesse et le champ magnétique ont toujours des parités opposées par rapport au plan équatorial ( $\ell$  pairs pour la vitesse,  $\ell$  impairs pour le champ magnétique ou vice-versa). Cela conduit naturellement à introduire la classification suivante pour l'ensemble des modes propres :

$$\text{Axisymétrique} \begin{cases} \mathbf{x}_\lambda = (u_0^1, a_0^2, \dots, u_0^{2\ell-1}, a_0^{2\ell}, \dots) & \text{impair poloïdal,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (a_0^1, u_0^2, \dots, a_0^{2\ell-1}, u_0^{2\ell}, \dots) & \text{pair poloïdal,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (w_0^1, c_0^2, \dots, w_0^{2\ell-1}, c_0^{2\ell}, \dots) & \text{pair toroïdal,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (c_0^1, w_0^2, \dots, c_0^{2\ell-1}, w_0^{2\ell}, \dots) & \text{impair toroïdal,} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Non-axisymétrique} \begin{cases} \mathbf{x}_\lambda = (u_m^{m+2k}, w_m^{m+2k+1}, a_m^{m+2k+1}, c_m^{m+2k}) & \text{pair,} \\ \mathbf{x}_\lambda = (u_m^{m+2k+1}, w_m^{m+2k}, a_m^{m+2k}, c_m^{m+2k+1}) & \text{impair.} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous nous contenterons ici de décrire les modes axisymétriques, les modes non axisymétriques ayant des comportements proches de l'une des deux familles poloïdale ou toroïdale (Reese et al. 2004). Auparavant, il peut être utile de rappeler les propriétés essentielles des ondes d'Alfvén.

### B.2.d Les ondes d'Alfvén en résumé

Comme leur nom l'indique, ces ondes ont été découvertes par Hannes Alfvén dans les années 1940 (*e. g.* Alfvén 1945). Elles correspondent aux vibrations des lignes de champ magnétique couplées aux vibrations du champ de vitesse. Le caractère ondulatoire est lié à la force de Lorentz, qui agit comme une force de rappel sur les éléments fluides déplacés perpendiculairement aux lignes de champs. Pour un développement en ondes planes  $\mathbf{k}$ , la relation de dispersion sans dimension est donnée par (Chandrasekhar 1961)

$$-(\lambda + E_m k^2)(\lambda + Ek^2) = k^2 \cos^2 \theta, \quad (\text{B.7})$$

où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et la ligne de champ (parallèle à  $\mathbf{B}$ ). En absence de dissipation, on a

$$\frac{\omega}{k} = \cos \theta. \quad (\text{B.8})$$

La vitesse de groupe de l'onde est alors proportionnelle à  $\cos \theta$ . Si en revanche on décide de tenir compte de la dissipation, le taux d'amortissement est donné par

$$\tau = -\frac{k^2 (E_m + E)}{2}. \quad (\text{B.9})$$

On rappelle finalement que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0$ . La relation (B.8) montre qu'il n'y a propagation que si le vecteur d'onde a une composante longitudinale et que l'énergie se propage uniquement le long de la ligne de champ. L'équation (B.9) montre quant à elle que les deux termes diffusifs jouent un rôle symétrique pour des ondes planes.

## B.3 Modes axisymétriques poloïdaux

Pour tout renseignement détaillé sur l'étude de ces modes, le lecteur intéressé pourra se référer à Rincon et Rieutord (2003).

### B.3.a Modes stationnaires

Une première famille de modes, qui a pour principale propriété  $\omega = 0$ , ne présente pas spécialement d'intérêt pour l'astérosismologie, si ce n'est qu'il s'agit d'un canal possible de dissipation d'énergie dans une étoile. Les modes appartenant à cette famille ne possèdent pas de nœuds dans la direction parallèle aux

lignes de champ, et correspondent chacun à un nombre de nœuds différent dans la direction perpendiculaire (figure B.2). Le taux d'amortissement augmente avec le nombre de nœuds, ce qui est qualitativement représentatif de la relation (B.9).

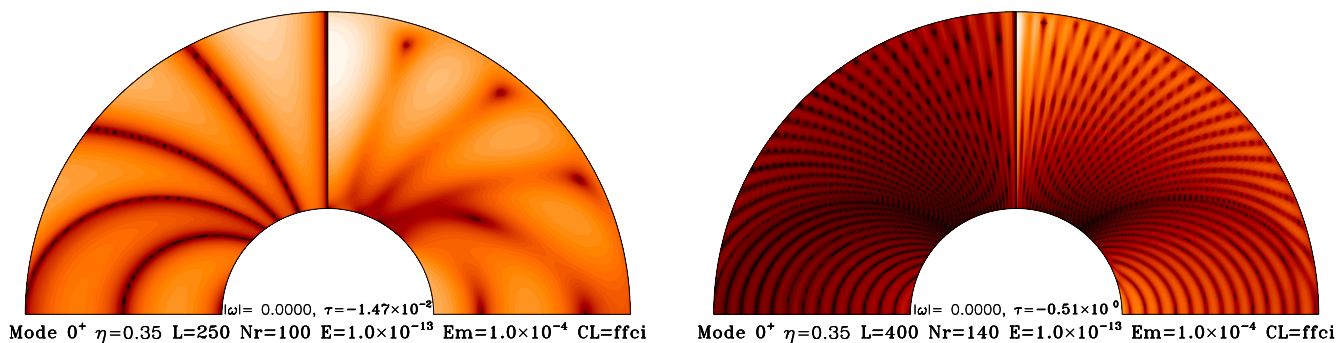


FIG. B.2 – Deux modes stationnaires avec des taux d'amortissement différents. Dans chaque cas, il s'agit d'une coupe méridionale de la coquille sphérique. Compte-tenu de la symétrie équatoriale seul l'hémisphère nord est représenté. Le quart droit correspond à l'énergie magnétique  $b^2$  et le quart gauche à la dissipation ohmique  $|\nabla \times \mathbf{b}|^2$  (échelle des couleurs logarithmique).

### B.3.b Modes oscillants

#### Spectre et propriétés générales

Lorsque  $\omega \neq 0$ , la situation devient nettement plus intéressante. Pour commencer, le spectre des valeurs propres (figure B.3) dans le plan complexe devient plus compliqué. Une double quantification est observée : la première concerne principalement la fréquence, tandis que la seconde affecte essentiellement le taux d'amortissement. Qualitativement, on trouve que la première correspond à la quantification du nombre de nœuds  $n$  des modes le long de la ligne de champ (et donc de la composante parallèle du vecteur d'onde), la seconde ressemblant à celle des modes stationnaires. Ceci est illustré par les figures B.4 et B.5.

La propriété essentielle de ces modes est qu'ils se focalisent sur les pôles, quelque soit la fréquence. La quantification du spectre par rapport aux pulsations peut alors être calculée de manière asymptotique en se plaçant sur le pôle et en utilisant une analyse de type WKB (Bender et Orzag 1978) pour  $\omega \rightarrow \infty$ . On arrive à la règle de quantification

$$\omega_n = \frac{2(2n+1)\pi}{1-\eta^4}, \quad (\text{B.10})$$

qui donne un bon accord avec les résultats numériques (tableau B.1). Enfin, l'étude du spectre harmonique (figure B.6) permet de voir que les couplages entre  $\ell$  restent très importants jusqu'à  $\ell = 60$ . Pour le mode dont le spectre est représenté

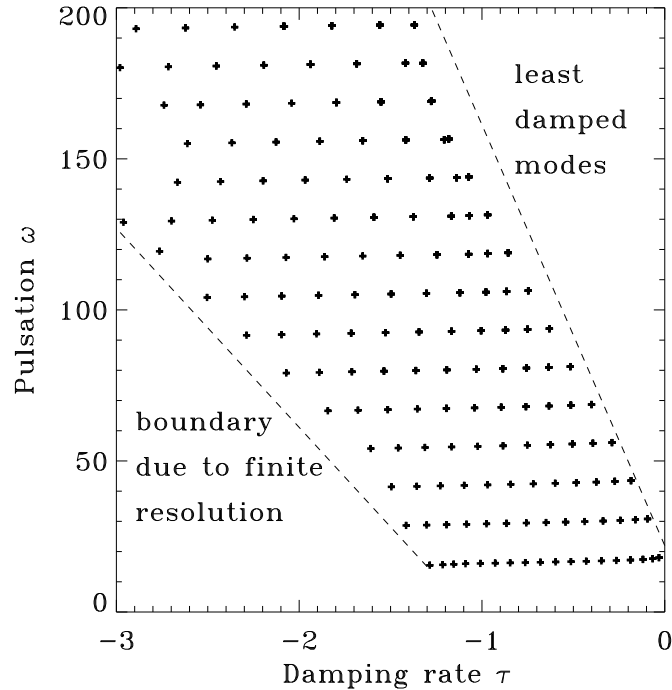


FIG. B.3 – Spectre des valeurs propres des modes poloïdaux pour  $\eta = 0.35$ ,  $E_m = 10^{-4}$ ,  $E = 10^{-13}$ . La région en bas à gauche n'est pas explorée numériquement, mais contient très certainement des valeurs propres. En revanche, il n'y a aucune valeur propre dans la région en haut à droite du spectre, ce qui est une conséquence de la relation de dispersion (B.8) et de l'équation (B.9), qui donne qualitativement  $\omega_{\max} \propto \sqrt{|\tau|}$ .

sur la figure B.6, on voit même que le maximum du spectre est obtenu pour  $\ell = 14$ , ce qui montre qu'il peut être risqué de ne pas tenir compte de ces couplages dans les modèles d'oscillations magnétiques.

### B.3.c Couches de cisaillement internes

Pour finir, on peut noter que la structure polaire des modes pour  $\ell \leq 60$  est régulière (autrement dit elle garde une largeur  $\sigma_\theta$  finie lorsque les diffusivités tendent vers 0). En revanche, les couches internes visibles sur la figure B.5 sont singulières et leur finesse complique considérablement l'étude numérique à faible diffusivité. Pour le voir, on a représenté sur la figure B.7 un mode propre pour  $\eta = 0.9$ , et le même mode en ne gardant que les composantes harmoniques de haut degré. Les couches internes deviennent alors nettement plus apparentes. Elles correspondent à des résonances associées à la fréquence du mode, le nombre de nœuds augmentant d'une unité sur chaque ligne résonante (ce qui est permis puisqu'au fur et à mesure qu'on se dirige vers l'équateur, la longueur des lignes

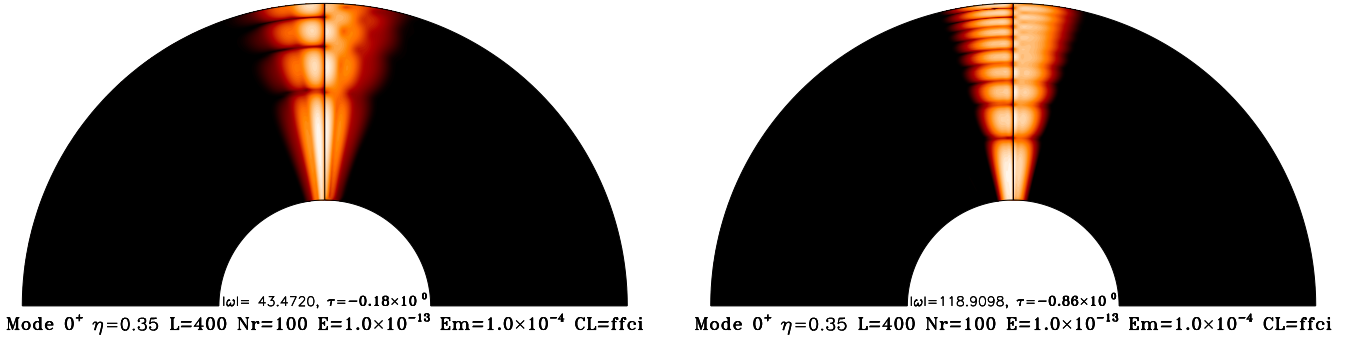


FIG. B.4 – Distribution méridionale du courant (quart gauche) et de l'énergie magnétique (quart droit) pour deux modes propres avec des pulsations différentes. Chaque mode possède un nombre de nœuds différent suivant les lignes de champ.

$n$	$\omega_n$	$\omega_{\text{num}}$
1	19.14	18.00
2	31.89	30.82
3	44.65	43.50
4	57.41	56.14
5	70.17	68.77
6	82.93	81.40
7	95.68	94.02
8	108.4	106.7
9	121.2	119.3

TAB. B.1 – Comparaison entre les pulsations obtenues dans l'approximation WKB ( $\eta = 0.35$ ) et par le numérique. Compte-tenu des hypothèses de l'approximation, il est logique que la précision relative de la solution WKB soit meilleure lorsque la pulsation est élevée.

de champ à l'intérieur de la coquille augmente).

## B.4 Modes axisymétriques toroïdaux

Les modes toroïdaux ont globalement les mêmes propriétés que leurs cousins poloïdaux. La différence essentielle entre les deux types de modes est assez bien dissimulée mais n'en est pas moins essentielle. Nous allons en effet montrer qu'ils sont singuliers dans la limite des diffusivités nulles. Leur étude est néanmoins fort instructive puisqu'elle est plus simple et que des développements analytiques

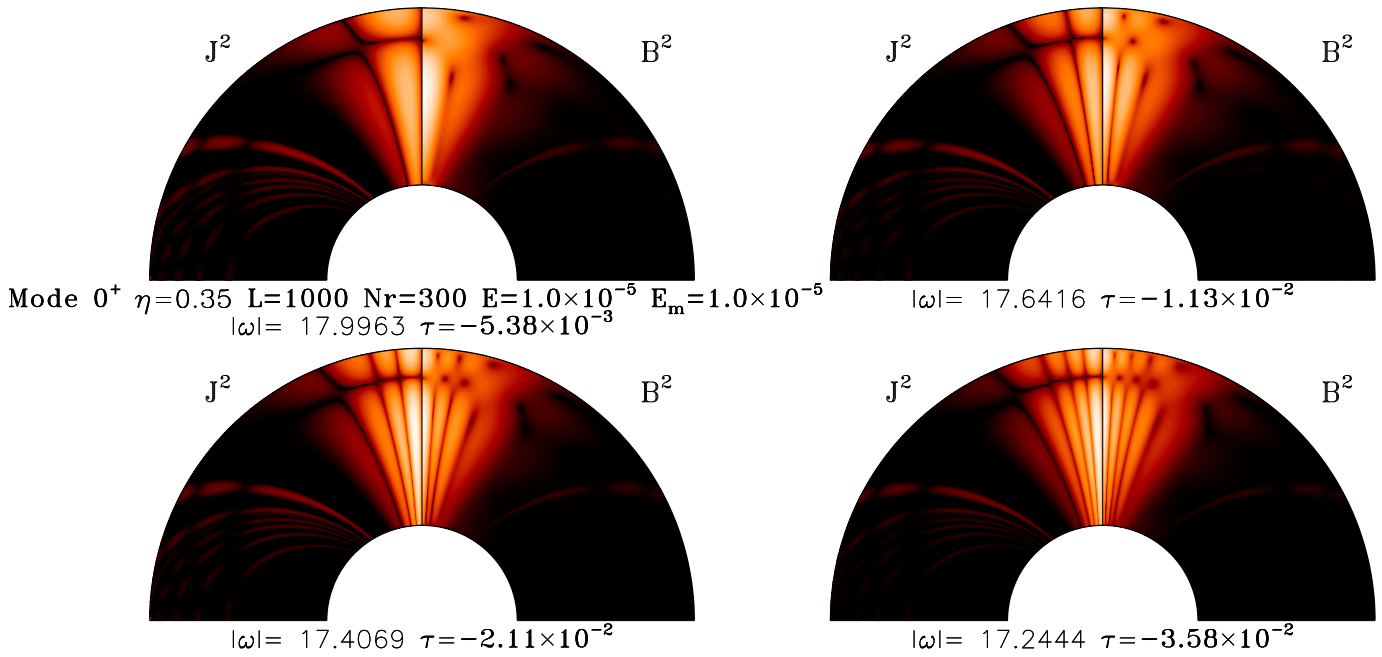


FIG. B.5 – Distribution meridionale du courant (quart gauche) et de l'énergie magnétique (quart droit) pour quatre modes propres poloïdaux possédant des pulsations similaires  $\omega \simeq 18$  mais des taux d'amortissement différents. On a utilisé ici  $E_m = E = 10^{-5}$ , 1000 harmoniques sphériques et 300 polynômes de Chebyshev, afin de faire ressortir au maximum la structure interne du mode aux alentours de  $45^\circ$ .

sont possibles. Nous allons voir au paragraphe B.5 que ces développements nous apprennent également potentiellement des choses sur le spectre des modes poloïdaux. Le lecteur intéressé trouvera tous les renseignements détaillés sur l'étude de ces modes dans Reese et al. (2004).

### B.4.a Spectre

Pour faire simple, le spectre des modes toroïdaux, donné sur la figure B.8, s'interprète essentiellement comme celui des modes poloïdaux, à savoir qu'une double quantification sur le nombre de nœuds  $n$  suivant les lignes de champ et  $q$  perpendiculairement à celles-ci est obtenue. Des représentations des vecteurs propres correspondants sont présentées dans Reese et al. (2004). Tout comme les modes poloïdaux, ces modes se concentrent aux pôles magnétiques.

### B.4.b Singularité et couches limites

On observe numériquement que la largeur caractéristique  $\sigma_\theta$  de ces modes tend vers 0 à mesure que l'on réduit la diffusivité, ce qui ne semble pas être le cas pour les modes poloïdaux. Cela signifie que leur structure est singulière. Ce

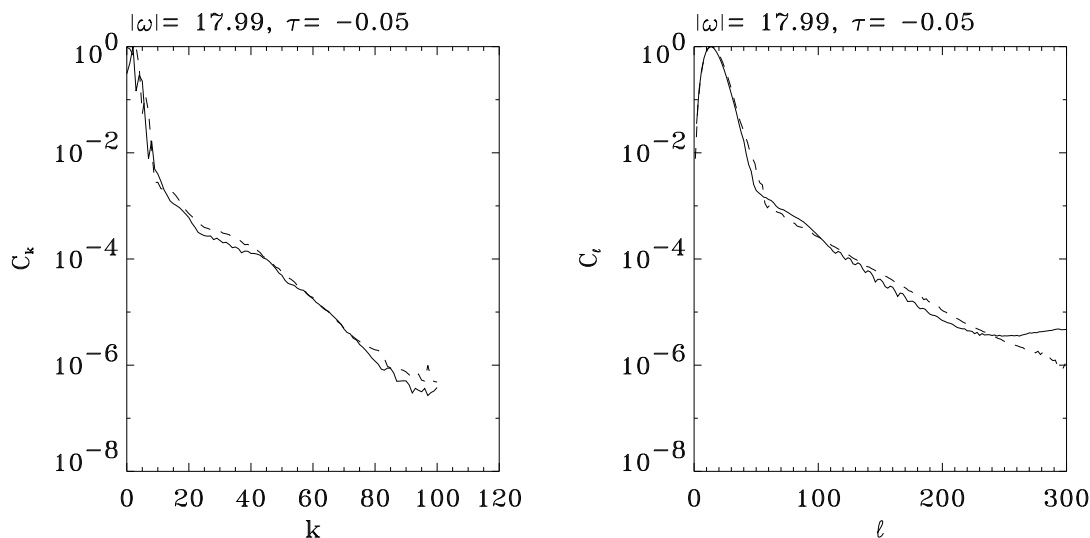


FIG. B.6 – Spectres de l'énergie magnétique (trait plein) et de la vitesse (pointillés) pour le premier mode de la figure B.5, mais lorsque  $E = E_m = 10^{-4}$ . À gauche : maximum sur toutes les harmoniques sphérique de chacun des coefficients de Chebyshev  $C_k$ . À droite : spectre harmonique, correspondant au maximum sur tous les coefficients de Chebyshev de la composante harmonique  $\ell$  (en valeur absolue). Sur ce dernier spectre, on voit nettement la composante polaire du mode ( $\ell \leq 60$ ) et la contribution des couches internes ( $\ell > 60$ ).

comportement est illustré par la figure B.9. Finalement, Daniel Reese a montré que les couches limites associées à ces modes sont des couches de Hartmann, d'épaisseur caractéristique  $\mathcal{O}(B^{-1}\sqrt{EE_m})$ , et qu'on peut modéliser par une variation exponentielle près des bords (Pothérat et al. 2002). La fabrication d'un spectre synthétique basé sur ce profil permet en effet de retrouver de manière très précise la forme du spectre en Chebyshev pour les polynômes de degré élevé, correspondant aux structures de très faible épaisseur.

## B.5 Solutions asymptotiques à faible diffusivité

Concluons cette étude par l'exposé des grandes lignes d'un développement analytique asymptotique mené conjointement avec Daniel Reese, qui permet de déterminer le comportement des modes toroïdaux à faible diffusivité. Le calcul est basé sur un développement des solutions en puissance des diffusivités et sur l'utilisation de l'alternative de Fredholm pour obtenir la solution au deuxième ordre. Pour commencer, on observe empiriquement pour  $E = E_m$  (cf. Reese et al. 2004) que la forme des valeurs propres pour les doublets  $(n, q)$  est

$$\lambda_{n,q} = \lambda_n^0 + E^{1/2}(q+1)\Lambda_n^1 + \mathcal{O}(E), \quad (\text{B.11})$$

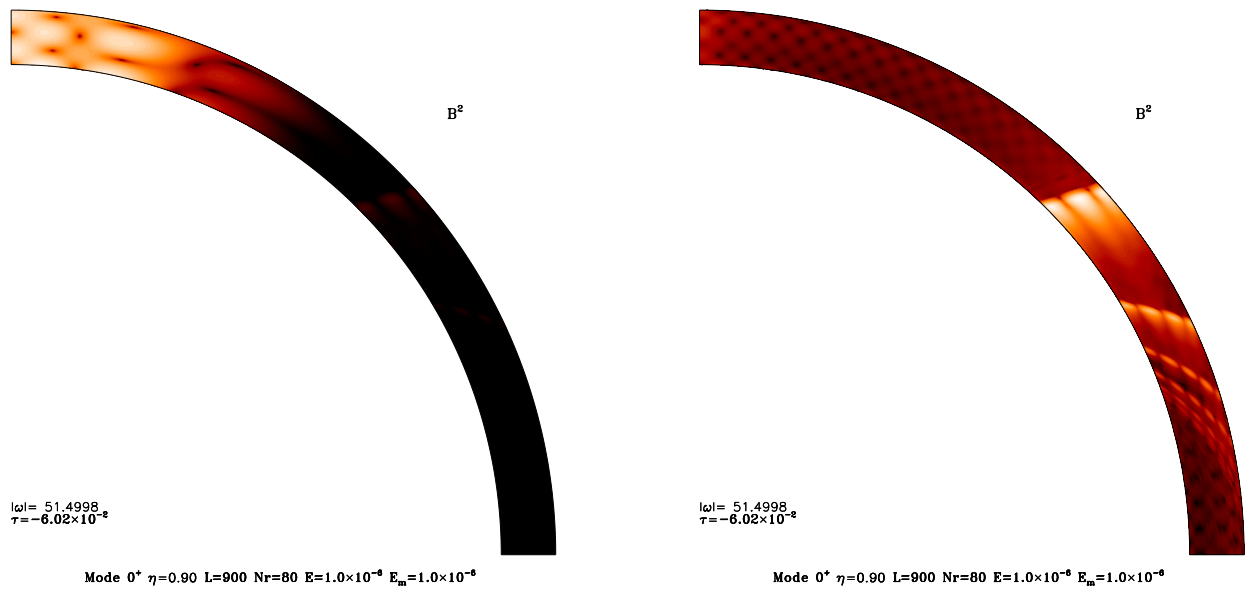


FIG. B.7 – À gauche : énergie magnétique d'un mode poloïdal  $n = 1$  dans une coquille sphérique avec  $\eta = 0.9$ . À droite : le même mode, filtré à  $\ell > 60$ , possède des lignes de champ résonantes avec un nombre de nœuds allant de 2 à 7.

où  $\lambda_n^0$  correspond à la fréquence « adiabatique » et  $\Lambda_n^1$  est un nombre complexe qui ne dépend pas de  $q$  (constant sur chaque branche horizontale). Autrement dit, il semble possible de séparer une contribution adiabatique et une contribution non-adiabatique dans la valeur propre. Il s'agit alors de trouver une justification analytique à cette expression du spectre. La quantification verticale est relativement aisée et repose essentiellement sur les mêmes idées que celles de l'analyse WKB du paragraphe B.3. En revanche, la quantification horizontale est nettement plus compliquée à obtenir.

Un point essentiel, évoqué dans le paragraphe précédent, est que la largeur des modes toroïdaux varie comme  $E^{1/4}$  lorsque les diffusivités  $E$  et  $E_m$  sont abaissées simultanément. Ceci permet de réécrire les équations grâce à un changement de variables  $(r, \nu = \sin \theta / \sqrt{r}, \varphi)$ , où  $\nu$  est la coordonnée perpendiculaire à la ligne de champ. Si on pose  $E^{1/4} = (K\varepsilon)^{1/4}$ ,  $E_m^{1/4} = (K_m\varepsilon)^{1/4}$ , et  $\hat{\nu} = \varepsilon^{-1/4}\nu$ , où  $\varepsilon$  est petit lorsque les diffusivités sont petites, et  $K$  et  $K_m$  sont des constantes, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda v &= \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}r\hat{\nu}^2\right) \left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial b}{\partial r} + \frac{3b}{2r^4}\right] + \frac{\varepsilon^{1/2}K}{r^3} \Theta[v], \\ \lambda b &= \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}r\hat{\nu}^2\right) \left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{3v}{2r^4}\right] + \frac{\varepsilon^{1/2}K_m}{r^3} \Theta[b], \end{aligned} \tag{B.12}$$



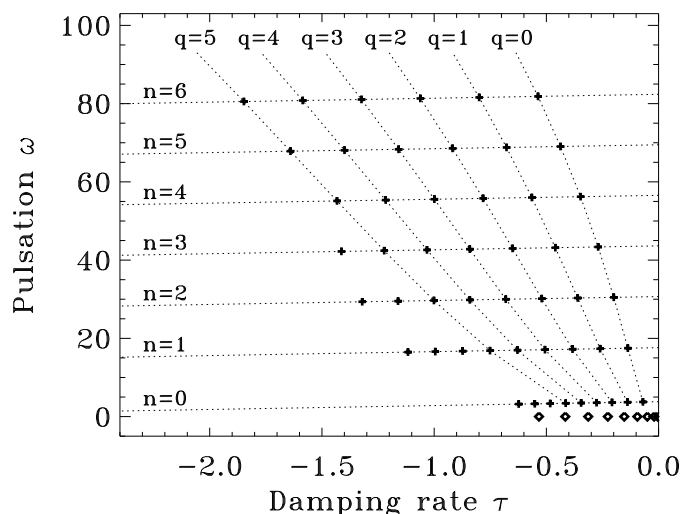


FIG. B.8 – Spectre des valeurs propres des modes toroïdaux pour  $\eta = 0.35$ ,  $E = E_m = 10^{-4}$ . L'entier  $n$  indexe le nombre de nœuds des solutions suivant la coordonnée de ligne de champ, et  $q$  le nombre de nœuds dans la direction perpendiculaire.

où

$$\Theta[b] = \frac{\partial^2 b}{\partial \hat{v}^2} + \frac{1}{\hat{v}} \frac{\partial b}{\partial \hat{v}} - \frac{b}{\hat{v}^2} \quad (\text{B.13})$$

est le seul opérateur qui dépend de  $\hat{v}$ . Un développement en puissances de  $\varepsilon$ , conduisant à une hiérarchie d'équations, s'impose naturellement au vu de l'équation (B.11) :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^0 + \varepsilon^{1/2} \lambda^1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ v &= v^0 + \varepsilon^{1/2} v^1 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ b &= b^0 + \varepsilon^{1/2} b^1 + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Au premier ordre le système obtenu ne dépend pas de la coordonnée  $\hat{v}$ , ce qui permet de trouver des expressions de la forme

$$\begin{aligned} b^0(r, \hat{v}) &= b_n^0(r) f(\hat{v}), \\ v^0(r, \hat{v}) &= v_n^0(r) f(\hat{v}), \\ \lambda^0 &= \lambda_n^0. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Les fonctions  $b_n^0(r)$  et  $v_n^0(r)$  peuvent être obtenues en faisant une analyse sur le pôle et donnent la quantification verticale. En revanche, à cet ordre, la fonction

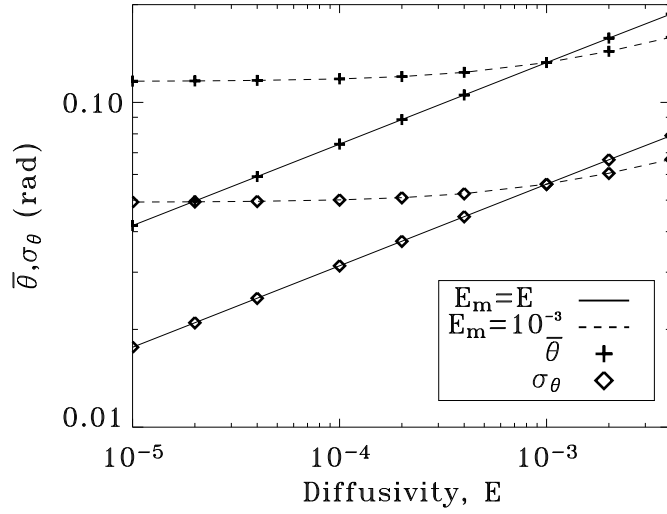


FIG. B.9 – Comportement de la largeur caractéristique  $\sigma_\theta$  et de la distance au pôle  $\bar{\theta}$  d'un mode propre. Dans le cas  $E = E_m$ , ces deux grandeurs tendent vers zéro, et la pente observée est égale à  $1/4$ .

$f(\hat{v})$  est encore indéterminée. À l'ordre 1, on a

$$\begin{aligned} \lambda_n^0 b^1 - \frac{1}{r^3} \frac{\partial v^1}{\partial r} + \frac{3v^1}{2r^4} &= -\lambda^1 b_n^0 f - \frac{\lambda_n^0 r \hat{v}^2 b_n^0 f}{2} + \frac{K_m b_n^0 \Theta[f]}{r^3}, \quad b^1(r=1, \hat{v}) = 0, \\ \lambda_n^0 v^1 - \frac{1}{r^3} \frac{\partial b^1}{\partial r} - \frac{3b^1}{2r^4} &= -\lambda^1 v_n^0 f - \frac{\lambda_n^0 r \hat{v}^2 v_n^0 f}{2} + \frac{K v_n^0 \Theta[f]}{r^3}, \quad v^1(r=\eta, \hat{v}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Formellement, ce système peut s'écrire  $\mathcal{L}_0 \Psi_1 = \mathcal{L}_1 \Psi_0$ , où  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_1$  sont deux opérateurs et  $\Psi_0$  et  $\Psi_1$  les solutions aux premiers ordres ( $\mathcal{L}_1$  contient en particulier l'opérateur  $\Theta$ ). En vertu de l'alternative de Fredholm (que l'on suppose valable pour les fonctions et opérateurs utilisés ici), une solution n'est possible que si les solutions du problème homogène pour l'adjoint  $\mathcal{L}_0^\dagger$  sont orthogonales au membre de droite. On peut noter que l'opérateur  $\mathcal{L}_0$ , qui est donné par l'équation (B.12), est auto-adjoint (c'est l'opérateur idéal de la MHD) et que les solutions du problème adjoint sont donc précisément données par l'équation (B.15). En appliquant l'alternative de Fredholm, une équation simplifiée sur la fonction  $f$  est alors obtenue :

$$-\lambda^1 \mathcal{C}_1 f - \frac{\lambda_n^0 \hat{v}^2 \mathcal{C}_2}{2} f + \mathcal{C}_3 \Theta[f] = 0. \quad (\text{B.17})$$

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  sont des constantes qui s'expriment en fonction de la norme des vecteurs propres solutions au premier ordre, qui sont calculés exactement dans Reese et al. (2004). Un nouveau changement de variables permet de transformer l'équation précédente en une équation dont les solutions sont les fonctions de Kummer

(Abramowitz et Stegun 1954). Les conditions aux limites de régularité au pôle et à l'infini, appliquées sur ces fonctions, permettent d'obtenir une quantification rigoureuse de la valeur propre  $\lambda^1$  avec un nombre quantique  $q$ , avec des fonctions propres proportionnelles aux polynômes de Legendre généralisés. On a finalement

$$\begin{aligned}\lambda_{n,q} &= \lambda_n^0 + \varepsilon^{1/2} \lambda_{n,q}^1 + \mathcal{O}(E), \\ \lambda_n^0 &= i\omega_n^0 \simeq i \frac{2(2n+1)\pi}{1-\eta^4}, \\ \lambda_{n,q}^1 &= -2(1+q)(1+i) \frac{\sqrt{\omega_n^0 C_2 C_3}}{C_1}.\end{aligned}\tag{B.18}$$

Cette solution correspond parfaitement à l'équation (B.11) qui, rappelons-le, était purement empirique. Les profils transverses (suivant la variable sphérique  $\theta$ ) de différents vecteurs propres calculés numériquement et par notre méthode sont donnés dans la figure B.10 et confirment ce bon accord.

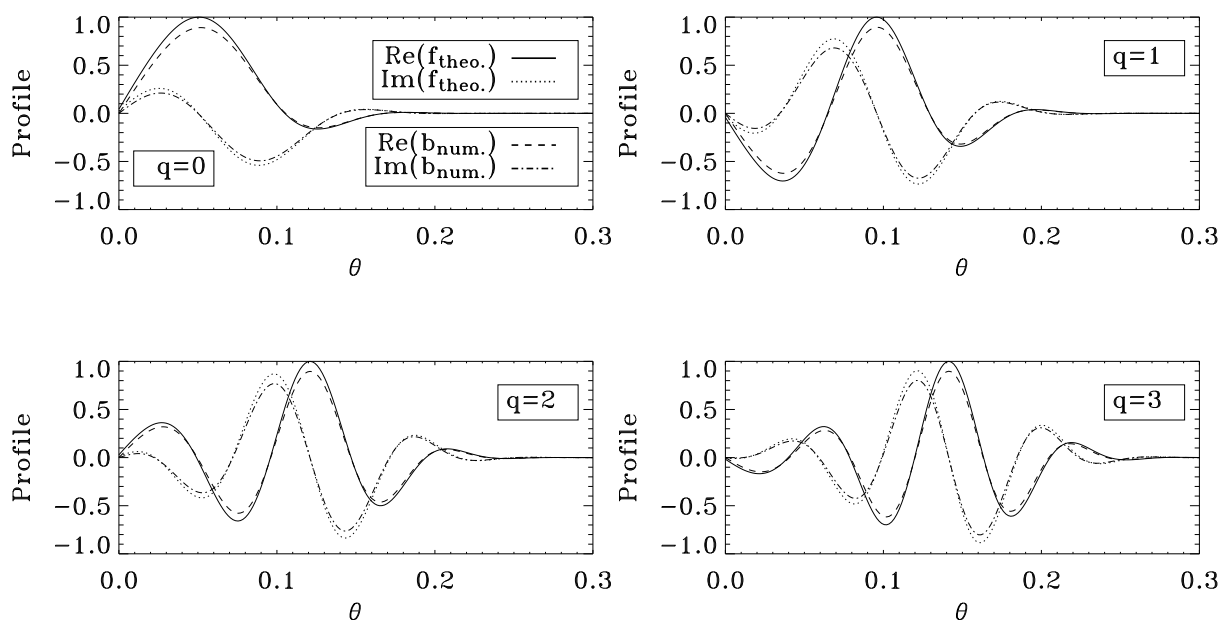


FIG. B.10 – Comparaison entre la théorie asymptotique et les résultats numériques pour des profils transverses de champ magnétique,  $r = 0.5$  et des diffusivités égales à  $4 \cdot 10^{-5}$ .

Ce développement confirme donc que la structure des modes toroïdaux est singulière. Cette différence avec le cas poloidal, fondamentale, semble due à l'absence de couplage entre lignes de champ par la pression totale dans le cas toroïdal. En effet, le gradient de pression s'annule sur la composante toroïdale des équations pour des perturbations axisymétriques, ce qui n'est pas le cas pour les autres composantes. Cependant, le mécanisme de quantification horizontale, qui

se fait par l'intermédiaire des termes diffusifs, doit être similaire pour les modes poloïdaux, les mêmes comportements de quantification étant observés pour les deux familles de modes.

## B.6 Conclusions et extensions possibles

### B.6.a Principaux résultats

Les conclusions essentielles de cette étude sont les suivantes. Les modes d'oscillation alfvéniques ont une distribution spatiale fortement anisotrope et se concentrent principalement aux pôles. Les couplages harmoniques créés par la présence d'un champ magnétique dipolaire imposent que l'on prenne en compte au moins 60 harmoniques sphériques pour obtenir la structure principale du mode pour des ondes d'Alfvén pures. Même si le spectre et la forme des modes propres magnéto-acoustiques (qui sont les modes observés dans les étoiles roAp) sont certainement très différents de ceux pour les ondes d'Alfvén pures, cet aspect précis du problème doit vraisemblablement être pris en compte dans l'étude des premiers. De manière plus générale, une étude globale (sur l'ensemble de la couche) paraît nécessaire.

Nous avons vu que les modes poloïdaux, même s'ils ressemblent fortement aux modes toroïdaux, sont fondamentalement différents de ceux-ci puisque leur structure semble rester régulière aux faibles diffusivités. Une étude analytique du spectre toroïdal, en complément des solutions numériques, a permis de montrer la singularité des modes toroïdaux et d'obtenir la dépendance de l'épaisseur de ces modes vis-à-vis des diffusivités.

### B.6.b Perspectives

L'étape suivante consiste bien entendu à prendre en compte la compressibilité du milieu afin d'obtenir le spectre des modes magnéto-acoustiques lents et rapides. Une telle étude s'avère nettement plus compliquée à la fois analytiquement et numériquement, puisque les variables  $u_m^\ell$  et  $v_m^\ell$  doivent séparément être calculées et que la variable de densité doit être rajoutée. Il y a de fortes chances pour que les solutions soient assez différentes de celles présentées ici.

Ce travail offre également des perspectives intéressantes dans le cadre de l'étude des mécanismes de chauffage à l'intérieur des planètes géantes à fort champ magnétique comme Jupiter. Un problème important, que les modèles de transfert radiatif actuels ne permettent pas de résoudre, est d'expliquer l'excès de chauffage observé aux pôles de l'atmosphère de Jupiter (Pirraglia 1984). Compte tenu de la forte conductivité de l'hydrogène à grande profondeur, il pourrait être possible de canaliser de l'énergie préférentiellement vers les pôles magnétiques par des ondes d'Alfvén. Un travail préliminaire avec R. Ouyed (Université de Calgary) semble indiquer qu'une excitation même relativement faible de

ces ondes (avec des perturbations de vitesse de l'ordre de quelques  $\text{cm s}^{-1}$ , en accord avec les estimations actuelles sur la turbulence dans l'intérieur de la planète (Starchenko et Jones 2002) est suffisante pour extraire l'énergie nécessaire au chauffage. Un tel mécanisme demande cependant une étude plus approfondie, et une modélisation de la transition de phase du plasma (par le biais d'une résolution multi-domaine du problème) reste à faire. Notons finalement que l'axe du champ magnétique de Jupiter n'est pas aligné avec l'axe de l'anisotropie calorifique (l'écart est de  $10^\circ$ , *e. g.* Rädler et Ness (1990)), et que le champ magnétique permanent possède vraisemblablement des composantes poloïdales et toroïdales non dipolaires importantes à l'intérieur, ce qui pourrait compromettre l'analyse.



# Oscillations of magnetic stars: I. Axisymmetric shear Alfvén modes of a spherical shell in a dipolar magnetic field

F. Rincon<sup>1,2</sup> and M. Rieutord<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d’Astrophysique de Toulouse, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue É. Belin, 31400 Toulouse, France

<sup>2</sup> École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d’Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

<sup>3</sup> Institut Universitaire de France

Received 15 May 2002 / Accepted 5 November 2002

**Abstract.** We carry out an investigation of axisymmetric shear Alfvén waves in a spherical layer of an incompressible resistive fluid when a strong dipolar magnetic field is applied. A decomposition on the spherical harmonics base is used to compute the eigenmodes of the system. Numerical results show that the least-damped Alfvénic modes naturally concentrate near the magnetic polar axis. These modes also show internal shear/magnetic layers associated with resonant field lines. This model is useful when modelling planetary cores sustaining a dynamo, magnetic neutron stars or to the magnetic layer of roAp stars. In this latter case, it shows that shear Alfvén waves provide a good instance of non-perturbative effects due to the strong magnetic field of such stars.

**Key words.** MHD – stars: oscillations – stars: magnetic fields – stars: chemically peculiar

## 1. Introduction

Asteroseismological observations of roAp stars over the last twenty years (Kurtz 1990) have raised the question of the understanding of the oscillations in a star when a global and permanent magnetic field is present. Non-radial oscillations of roAp stars have periods between 4 and 16 min. The observed photometric variations indicate that they are likely high-order, low-degree  $p$ -modes, perturbed by some physical process related to the presence of a permanent magnetic field, which is known to be mainly dipolar at the surface of these stars. One of the arguments in favor of this interpretation is that the oscillations can be interpreted with the so-called “oblique rotator” model of Kurtz (1990) which considers the oscillations as essentially  $\ell = 1$  modes aligned with the dipolar magnetic field of the star. Recently, Bigot & Dziembowski (2002) noticed that this alignment need not be strict and that the pulsation axis lies somewhere between the rotation and magnetic axis.

Balmforth et al. (2001) suggested that oscillations were likely to be excited near the poles of the star rather than near the equator because in the first case, the magnetic field is almost vertical and inhibits convection (in a frozen field picture), allowing some  $\kappa$ -mechanism excitation, whereas in the second case, magnetic field lines are nearly horizontal, permitting turbulent convective motions and thus preventing any

$\kappa$ -mechanism. Although this kind of separated treatment between the magnetic pole and the equator is sufficient to recover some properties of the roAp stars, Balmforth et al. (2001) acknowledge that their model has some drawbacks, mainly their neglect of the direct contribution of the Lorentz force to the momentum equation.

Other previous studies by Shibahashi (1983) and Cox (1984) made a more satisfactory treatment of the magnetic field by taking it into account explicitly in the equations. They discovered that convective overstable magneto-gravity modes could be excited at the poles of the star rather than at the equator and found that the oscillation periods of their model were comparable to those observed in roAp stars. However, as they pointed out, they only made a local analysis which is not sufficient to describe the probable global nature of roAp oscillations.

As Biront et al. (1982), Roberts & Soward (1983) and Campbell & Papaloizou (1986) explained, the study of oscillations in presence of a magnetic field is a difficult mathematical problem, since magnetic fields can be treated as small perturbations in the interiors of stars but give a major contribution to the pressure in the atmospheres, where regular perturbative methods consequently break down. Dziembowski & Goode (1996) and Bigot et al. (2000), following up the work of Roberts & Soward (1983), calculated the shift of  $p$ -modes frequencies induced by the presence of a strong dipolar magnetic field in a boundary layer approximation. They found that these shifts



## Oscillations of magnetic stars

### II. Axisymmetric toroidal and non-axisymmetric shear Alfvén modes in a spherical shell<sup>\*</sup>

D. Reese, F. Rincon, and M. Rieutord

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse et Tarbes, Observatoire Midi-Pyrénées, 14 avenue É. Belin, 31400 Toulouse, France  
e-mail: daniel.reese@ast.obs-mip.fr

Received 29 March 2004 / Accepted 16 July 2004

**Abstract.** We carry out numerical and mathematical investigations of shear Alfvén waves inside of a spherical shell filled with an incompressible conducting fluid, and bathed in a strong dipolar magnetic field. We focus on axisymmetric toroidal and non-axisymmetric modes, in continuation of a previous work by Rincon & Rieutord (2003, A&A, 398, 663). Analytical expressions are obtained for toroidal eigenmodes and their corresponding frequencies at low diffusivities. These oscillations behave like magnetic shear layers, in which the magnetic poles play a key role, and hence become singular when diffusivities vanish. It is also demonstrated that non-axisymmetric modes are split into two categories, namely poloidal or toroidal types, following similar asymptotic behaviours as their axisymmetric counterparts when the diffusivities become arbitrarily small.

**Key words.** magnetohydrodynamics (MHD) – stars: oscillations – stars: magnetic fields

#### 1. Introduction

Numerous astrophysical systems exhibit a pulsating behaviour that can be significantly influenced by the Lorentz force when a strong magnetic field is present. This may for instance be the case in neutron stars and magnetic white dwarfs (Lou 1995). Planetary cores, which are known to sustain a strong dynamo (Stevenson 1983), are also likely to fall into this category.

One of the most exciting examples of couplings between pulsation and magnetism is given by the seismological activity of roAp stars. This class of stars, discovered by Kurtz (1978), exhibits several kG (almost) dipolar magnetic fields and luminosity variations on periods ranging from 5 to 15 min. These oscillations seem to be well approximated by a single spherical harmonic  $\ell = 1$  lined up with the magnetic axis, suggesting a strong mixing between high order  $p$ -modes and Alfvénic type oscillations.

Many different models have been developed to obtain a satisfying picture of the asteroseismology of these stars. Following theoretical work by Biront et al. (1982); Roberts & Soward (1983) and Campbell & Papaloizou (1986), Dziembowski & Goode (1996) have studied acoustic star models enveloped by a layer in which magnetic effects become dominant. Using a boundary layer approximation, they came up with an outer boundary condition which was then applied for the calculation of adiabatic acoustic modes. This model has

undergone a lot of refinements in order to take into account new physical processes. The latest version, proposed by Bigot & Dziembowski (2002), incorporates the centrifugal force (a non-axisymmetric effect, since the rotational and magnetic axis are often tilted in roAp stars) and suggests that the axis of the modes is not necessarily lined up with the magnetic axis. In spite of these improvements, there are still non-negligible discrepancies between the magnetically shifted eigenfrequencies computed from these models and the observed ones, showing that the precise coupling mechanism occurring in the surface layers is likely to be more complex. An important point is that a single  $\ell$  value is sometimes assumed to be sufficient to describe the oscillations. This may not be the case, owing to the dipolar structure of the permanent magnetic field which induces a coupling between spherical harmonics thus producing a whole spectrum of  $\ell$ 's (e.g. Rincon & Rieutord 2003).

Motivated by the observation that chemical peculiarities are observed near the magnetic poles of roAp stars, Balmforth et al. (2001) have tried to determine what precise physical phenomena were occurring in the polar and equatorial regions. Since the magnetic field is almost horizontal near the equator and vertical near the poles, convection is certainly inhibited in the latter region, allowing the diffusion of different chemical elements (an excess of helium is observed on the polar caps). Oscillations triggered by a  $\kappa$ -mechanism may therefore preferentially be observed in this region. This approach stresses the importance of a global description of the eigenmodes in such stars.

<sup>\*</sup> Appendices are only available in electronic form at <http://www.edpsciences.org>





# Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. et STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 1954.
- ALFVÉN, H. Magneto-hydrodynamic waves and sunspots. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 105, p. 3–16, 1945.
- BAHNG, J. et SCHWARZSCHILD, M. Lifetime of solar granules. *Astrophys. J.*, vol. 134, p. 312, 1961.
- BALMFORTH, N. J., CUNHA, M. S., DOLEZ, N., GOUGH, D. O. et VAUCLAIR, S. On the excitation mechanism in roAp stars. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 323, p. 362–372, 2001.
- BASU, S. et ANTIA, H. M. Seismic measurement of the depth of the solar convection zone. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 287, p. 189–198, 1997.
- BECK, J. G. Large-scale solar velocities on time scales up to thirty days. *Ph.D. Thesis*, 1997.
- BECKERS, J. M. Photospheric brightness differences associated with the solar supergranulation. *Solar Phys.*, vol. 5, p. 309, 1968.
- BENDER, C. M. et ORZAG, S. A. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. Mc Graw-Hill, 1978.
- BENZI, R., CILIBERTO, S., BAUDET, C. et CHAVARRIA, G. R. On the scaling of three-dimensional homogeneous and isotropic turbulence. *Physica D*, vol. 80, p. 385–398, 1995.
- BENZI, R., CILIBERTO, S., TRIPICCIONE, R., BAUDET, C., MASSAIOLI, F. et SUCCI, S. Extended self-similarity in turbulent flows. *Phys. Rev. D*, vol. 48, p. 29, 1993.
- BENZI, R., TOSCHI, F. et TRIPICCIONE, R. On the heat transfer in Rayleigh-Bénard systems. *J. Stat. Phys.*, vol. 93, 1998.
- BENZI, R., TRIPICCIONE, R., MASSAIOLI, F., SUCCI, S. et CILIBERTO, S. On the scaling of the velocity and temperature structure functions in Rayleigh-Bénard convection. *Europhys. Lett.*, vol. 25 (5), p. 341–346, 1994.

- BERGER, T. E., ROUPPE VAN DER VOORT, L. H. M., LOFDAHL, M. G., CARLSON, M., FOSSUM, A., HANSTEEN, V. H., MARTHINUSSEN, E., TITLE, A. M. et SCHARMER, G. Observations of solar magnetic elements with 0.1" resolution. *American Astronomical Society Meeting*, vol. 204, 2004.
- BIGOT, L. et DZIEMBOWSKI, W. A. The oblique pulsator model revisited. *Astron. & Astrophys.*, vol. 391, p. 235–245, 2002.
- BIRONT, D., GOOSENS, M., COUSENS, A. et MESTEL, L. A singular perturbation approach to the effect of a weak magnetic field on stellar oscillations. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 201, p. 619–633, 1982.
- BOLGIANO, R. Structure of turbulence in stratified media. *J. Geophys. Res.*, vol. 67 (16), p. 3015, 1962.
- BRANDENBURG, A., STEIN, R. F. et NORDLUND, Å. Astrophysical convection *Geophysical and astrophysical convection 95.*, édité par FOX, P. A. et KERR, B., p. 85. Gordon and Breach Science Publishers, 2000.
- BRAY, R. J., LOUGHHEAD, R. E. et DURRANT, C. J. *The solar granulation (2nd edition)*. Cambridge and New York, Cambridge University Press, 1984.
- BRUMMELL, N. H., CLUNE, T. L. et TOOMRE, J. Penetration and overshooting in turbulent compressible convection. *Astrophys. J.*, vol. 570, p. 825–854, 2002.
- BRUMMELL, N. H., HURLBURT, N. E. et TOOMRE, J. Turbulent compressible convection with rotation. I. flow structure and evolution. *Astrophys. J.*, vol. 473, p. 494, 1996.
- BRUMMELL, N. H., HURLBURT, N. E. et TOOMRE, J. Turbulent compressible convection with rotation. II. Mean flows and differential rotation. *Astrophys. J.*, vol. 493, p. 955, 1998.
- BUSSE, F. H. et RIAHI, N. Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries. *J. Fluid Mech.*, vol. 96, p. 243–256, 1980.
- CALIFANO, F. A numerical algorithm for geophysical and astrophysical inhomogeneous fluid flows. *Comp. Phys. Comm.*, vol. 99, p. 29, 1996.
- CALZAVARINI, E., TOSCHI, F. et TRIPICCIONE, R. Evidences of Bolgiano scaling in 3D Rayleigh-Benard convection. *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 016304, 2002.
- CAMPBELL, C. G. et PAPALOIZOU, J. C. B. Stellar oscillations in the presence of a magnetic field. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 220, p. 577–591, 1986.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. et ZANG, T. A. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1988.
- CARPENTER, M., GOTTLIEB, D. et ABARBANEL, S. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. *J. Comp. Phys.*, vol. 108, p. 272–295, 1993.
- CATTANEO, F. On the effects of a weak magnetic field on turbulent transport. *Astrophys. J.*, vol. 434, p. 200–205, 1994.

- CATTANEO, F. On the origin of magnetic fields in the quiet photosphere. *Astrophys. J.*, vol. 515, p. L39–L42, 1999.
- CATTANEO, F., BRUMMELL, N. H., TOOMRE, J., MALAGOLI, A. et HURLBURT, N. E. Turbulent compressible convection. *Astrophys. J.*, vol. 370, p. 282–294, 1991.
- CATTANEO, F., EMONET, T. et WEISS, N. On the interaction between convection and magnetic fields. *Astrophys. J.*, vol. 588, p. 1183–1198, 2003.
- CATTANEO, F., HURLBURT, N. E. et TOOMRE, J. Supersonic convection. *Astrophys. J.*, vol. 349, p. L63–L66, 1990.
- CATTANEO, F., LENZ, D. et WEISS, N. On the origin of the solar mesogranulation. *Astrophys. J.*, vol. 563, p. L91–L94, 2001.
- CATTANEO, F. et VAINSHTEIN, S. I. Suppression of turbulent transport by a weak magnetic field. *Astrophys. J.*, vol. 376, p. L21–L24, 1991.
- CELLIERS, P. M., COLLINS, G. W., DA SILVA, L. B., GOLD, D. M., CAUBLE, R., WALLACE, R. J., FOORD, M. E. et HAMMEL, B. A. Shock-induced transformation of liquid deuterium into a metallic fluid. *Phys. Rev. Letters*, vol. 84, p. 5564–5567, 2000.
- CHAN, K. L. et SOFIA, S. Turbulent compressible convection in a deep atmosphere. III - Tests on the validity and limitation of the numerical approach. *Astrophys. J.*, vol. 307, p. 222–241, 1986.
- CHAN, K. L. et SOFIA, S. Turbulent compressible convection in a deep atmosphere. IV - Results of three-dimensional computations. *Astrophys. J.*, vol. 336, p. 1022–1040, 1989.
- CHAN, K. L. et SOFIA, S. Turbulent compressible convection in a deep atmosphere. V. Higher order statistical moments for a deeper case. *Astrophys. J.*, vol. 466, p. 372, 1996.
- CHAN, K. L., SOFIA, S. et WOLFF, C. L. Turbulent compressible convection in a deep atmosphere. I - Preliminary two-dimensional results. *Astrophys. J.*, vol. 263, p. 935–943, 1982.
- CHANDRASEKHAR, S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, 1961.
- CHAPMAN, C. J. et PROCTOR, M. R. E. Nonlinear Rayleigh-Benard convection between poorly conducting boundaries. *J. Fluid Mech.*, vol. 101, p. 759–782, 1980.
- CHATELIN, F. *Eigenvalues of matrices*. John Wiley, 1993.
- CHEVALIER, S. Contribution to the study of the photosphere. *Astrophys. J.*, vol. 27, p. 12, 1908.
- CHILLÁ, F., CILIBERTO, S., INNOCENTI, C. et PAMPALONI, E. Boundary layer and scaling properties in turbulent thermal convection. *Nuovo Cimento*, vol. 15D (9), p. 1229, 1993.
- CHOU, D.-Y., CHEN, C.-S., OU, K.-T. et WANG, C.-C. Power spectra of median- and small-scale solar convection. *Astrophys. J.*, vol. 396, p. 333–339, 1992.

- CHOU, D.-Y., LABONTE, B. J., BRAUN, D. C. et DUVALL, T. L. Power spectra of solar convection. *Astrophys. J.*, vol. 372, p. 314–320, 1991.
- CHRISTENSEN-DALSGAARD, J., GOUGH, D. O. et THOMPSON, M. J. The depth of the solar convection zone. *Astrophys. J.*, vol. 378, p. 413–437, 1991.
- CIONI, S., CILIBERTO, S. et SOMMERIA, J. Temperature structure functions in turbulent convection at low Prandtl number. *Europhys. Lett.*, vol. 32 (5), p. 413–418, 1995.
- CLARK, A. J. et JOHNSON, H. K. Magnetic field accumulation in supergranules. *Solar Phys.*, vol. 2, p. 433–440, 1967.
- CLUNE, T. C., ELLIOTT, J. R., MIESCH, M. S. et TOOMRE, J. Computational aspects of a code to study rotating turbulent convection in spherical shells. *Parallel Computing*, 1999.
- COULLET, P. et FAUVE, S. Propagative phase dynamics for systems with Galilean invariance. *Phys. Rev. Letters*, vol. 55, p. 2857–2859, 1985.
- CROSS, M. C. et HOHENBERG, P. C. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 65, p. 851–1112, 1993.
- CROSS, M. C. et NEWELL, A. C. Convection patterns in large aspect ratio systems. *Physica D*, vol. 10, p. 299–328, 1984.
- DEMUREN, A. O., WILSON, R. V. et CARPENTER, M. Higher-order compact schemes for numerical simulation of incompressible flows, Part I : theoretical development. *Numerical Heat Transfer*, vol. 39, p. 207–230, 2001.
- DEPASSIER, M. C. et SPIEGEL, E. A. The large-scale structure of compressible convection. *Astron. J.*, vol. 86, p. 496–512, 1981.
- DEROSA, M. Dynamics in the upper solar convection zone. *Ph.D. Thesis*, 2001.
- DEROSA, M., DUVALL, T. L. et TOOMRE, J. Near-surface flow fields deduced using correlation tracking and time-distance analyses. *Solar Phys.*, vol. 192, p. 351–361, 2000.
- DEROSA, M. L., GILMAN, P. A. et TOOMRE, J. Solar multiscale convection and rotation gradients studied in shallow spherical shells. *Astrophys. J.*, vol. 581, p. 1356–1374, 2002.
- DESLANDRES, H. C.R., vol. 129, p. 1225, 1899.
- DOMÍNGUEZ CERDEÑA, I. Evidence of mesogranulation from magnetograms of the Sun. *Astron. & Astrophys.*, vol. 412, p. L65–L68, 2003.
- DUBRULLE, B. et FRISCH, U. Eddy viscosity of parity-invariant flow. *Phys. Rev. A*, vol. 43, p. 5355–5364, 1991.
- DUVALL, T. L. et GIZON, L. Time-distance helioseismology with f Modes as a method for measurement of near-surface flows. *Solar Phys.*, vol. 192, p. 177–191, 2000.

- DUVALL, T. L., KOSOVICHEV, A. G., SCHERRER, P. H., BOGART, R. S., BUSH, R. I., DE FOREST, C., HOEKSEMA, J. T., SCHOU, J., SABA, J. L. R., TARBELL, T. D., TITLE, A. M., WOLFSON, C. J. et MILFORD, P. N. Time-distance helioseismology with the MDI instrument : initial results. *Solar Phys.*, vol. 170, p. 63–73, 1997.
- DZIEMBOWSKI, W. A. et GOODE, P. R. Magnetic effects on oscillations in roAp stars. *Astrophys. J.*, vol. 458, p. 338–346, 1996.
- EDWARDS, J. M. On the influence of the thermal and magnetic boundary conditions on the linear theory of magnetoconvection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 55, p. 1–17, 1990.
- ELLIOTT, J. R. Three-dimensional numerical simulations of compressible solar convection in cartesian geometry. *Astrophys. J.*, vol. 539, p. 469–479, 2000.
- EMONET, T. et CATTANEO, F. Small-scale photospheric fields : observational evidence and numerical simulations. *Astrophys. J.*, vol. 560, p. L197–L200, 2001.
- FRAZIER, E. N. Multi-channel magnetograph observations. II. Supergranulation. *Solar Phys.*, vol. 14, p. 89, 1970.
- FRISCH, U. *Turbulence : the legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- FRISCH, U., SHE, Z. S. et SULEM, P. L. Large-scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect. *Physica D*, vol. 28, p. 382–392, 1987.
- GAMA, S., VERGASSOLA, M. et FRISCH, U. Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow : linear and non-linear dynamics. *J. Fluid Mech.*, vol. 260, p. 95, 1994.
- GILMAN, P. A. Linear simulations of Boussinesq convection in a deep rotating spherical shell. *J. Atm. Sc.*, vol. 32, p. 1331–1352, 1975.
- GILMAN, P. A. et GLATZMAIER, G. A. Compressible convection in a rotating spherical shell. I - Anelastic equations. II - A linear anelastic model. III - Analytic model for compressible vorticity waves. *Astrophys. J. Supp. Ser.*, vol. 45, p. 335–388, 1981.
- GIZON, L., DUVALL, T. L. et SCHOU, J. Wave-like properties of solar supergranulation. *Nature*, vol. 421, p. 43–44, 2003.
- GLATZMAIER, G. A. Numerical simulations of stellar convective dynamos. I - The model and method. *J. Comp. Phys.*, vol. 55, p. 461–484, 1984.
- GOOSSENS, M., ANDRIES, J. et ASCHWANDEN, M. J. Coronal loop oscillations. An interpretation in terms of resonant absorption of quasi-mode kink oscillations. *Astron. & Astrophys.*, vol. 394, p. L39–L42, 2002.
- GOUGH, D. O., MOORE, D. R., SPIEGEL, E. A. et WEISS, N. O. Convective instability in a compressible atmosphere. II. *Astrophys. J.*, vol. 206, p. 536–542, 1976.
- GRAHAM, E. Numerical simulation of two-dimensional compressible convection. *J. Fluid Mech.*, vol. 70, p. 689–703, 1975.

GRAHAM, E. et MOORE, D. R. The onset of compressible convection. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 183, p. 617–632, 1978.

HAGENAAR, H. J., SCHRIJVER, C. J. et TITLE, A. M. The distribution of cell sizes of the solar chromospheric network. *Astrophys. J.*, vol. 481, p. 988, 1997.

HANSEN, H., LOUAPRE, D., ANTCZAK, S., MOYEN, J. Y. et D'AUTRES. De l'importance des traditions. Non publié, Lyon, 1999.

HART, A. B. Motions in the Sun at the photospheric level. IV. The equatorial rotation and possible velocity fields in the photosphere. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 114, p. 17, 1954.

HART, A. B. Motions in the Sun at the photospheric level. VI. Large-scale motions in the equatorial region. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 116, p. 38, 1956.

HATHAWAY, D. H., BECK, J. G., BOGART, R. S., BACHMANN, K. T., KHATRI, G., BETITTO, J. M., HAN, S. et RAYMOND, J. The photospheric convection spectrum. *Solar Phys.*, 2000.

HATHAWAY, D. H., BECK, J. G., HAN, S. et RAYMOND, J. Radial flows in supergranules. *Solar Phys.*, vol. 205, p. 25–38, 2002.

HERSCHEL, W. Observations tending to investigate the nature of the Sun, in order to find the causes or symptoms of its variable emission of light and heat; with remarks on the use that may possibly be drawn from solar observations. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, vol. 91, 1801.

HESLOT, F., CASTAING, B. et LIBCHABER, A. Transitions to turbulence in helium gas. *Phys. Rev. A*, vol. 36, p. 5870–5873, 1987.

HURLBURT, N. E., PROCTOR, M. R. E., WEISS, N. O. et BROWNJOHN, D. P. Nonlinear compressible magnetoconvection. I - Travelling waves and oscillations. *J. Fluid Mech.*, vol. 207, p. 587–628, 1989.

HURLBURT, N. E. et TOOMRE, J. Magnetic fields interacting with nonlinear compressible convection. *Astrophys. J.*, vol. 327, p. 920–932, 1988.

HURLBURT, N. E., TOOMRE, J. et MASSAGUER, J. M. Two-dimensional compressible convection extending over multiple scale heights. *Astrophys. J.*, vol. 282, p. 557–573, 1984.

HURLE, D., JAKEMAN, E. et PIKE, E. On the solution of the Benard problem with boundaries of finite conductivity. *Proc. R.Soc. Lond. A*, p. 469–475, 1966.

JANSSEN, J. *Ann. Obs. Astron. Paris Meudon*, vol. 1, 1896.

KELLER, C. U., DEUBNER, F.-L., EGGER, U., FLECK, B. et POVEL, H. P. On the strength of solar intra-network fields. *Astron. & Astrophys.*, vol. 286, p. 626–634, 1994.

KERNER, W., LERBINGER, K. et RIEDEL, K. Resistive Alfvén spectrum of tokamaklike configurations in straight cylindrical geometry. *Phys. Fluids*, vol. 29, p. 2975–2987, 1986.

- KIPPENHAHN, R. et WEIGERT, A. *Stellar structure and evolution*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also Astronomy and Astrophysics Library, 1994.
- KITCHATINOV, L. L., RÜDIGER, G. et KHOMENKO, G. Large-scale vortices in rotating stratified disks. *Astron. & Astrophys.*, vol. 287, p. 320–324, 1994.
- KOSOVICHEV, A. G., SCHOU, J., SCHERRER, P. H., BOGART, R. S., BUSH, R. I., HOEKSEMA, J. T., ALOISE, J., BACON, L., BURNETTE, A., DE FOREST, C., GILES, P. M., LEIBRAND, K., NIGAM, R., RUBIN, M., SCOTT, K., WILLIAMS, S. D., BASU, S., CHRISTENSEN-DALSGAARD, J., DAPPEN, W., RHODES, E. J., DUVAL, T. L., HOWE, R., THOMPSON, M. J., GOUGH, D. O., SEKII, T., TOOMRE, J., TARBELL, T. D., TITLE, A. M., MATHUR, D., MORRISON, M., SABA, J. L. R., WOLFSON, C. J., ZAYER, I. et MILFORD, P. N. Structure and rotation of the solar interior : initial results from the MDI medium-l program. *Solar Phys.*, vol. 170, p. 43–61, 1997.
- KRAUSE, F. et RÜDIGER, G. On the Reynolds stresses in mean field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence. *Astron. Nachr.*, vol. 295, p. 93–99, 1974.
- KRIJGER, J. M. et ROUDIER, T. Photospheric flows measured with TRACE II. Network formation. *Astron. & Astrophys.*, vol. 403, p. 715–723, 2003.
- KURTZ, D. W. Rapidly oscillating Ap stars. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 28, p. 607–655, 1990.
- LAMB, H. *Hydrodynamics*. Dover, 1932.
- LANDAU, L. D. et LIFSHITZ, E. M. *Mécanique des fluides*. Éditions Mir Moscou, 1971.
- LAWRENCE, J. K., CADAVID, A. C. et RUZMAIKIN, A. Mesogranulation and turbulence in photospheric flows. *Solar Phys.*, vol. 202, p. 27–39, 2001.
- LEIGHTON, R. B. The solar granulation. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 1, p. 19–40, 1963.
- LEIGHTON, R. B., NOYES, R. W. et SIMON, G. W. Velocity fields in the solar atmosphere. I. Preliminary report. *Astrophys. J.*, vol. 135, p. 474, 1962.
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, vol. 103(1), p. 16–42, 1992.
- Astrophysical fluid dynamics*, 1993. Les Houches 1987, North Holland Publishing.
- LIGNIÈRES, F. Rapport d'activité IDRIS, 1999.
- LIGNIÈRES, F. Rapport d'activité IDRIS, 2002.
- LIGNIÈRES, F., CALIFANO, F. et MANGENEY, A. Stress-driven mixed layer in a stably stratified fluid. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 88, p. 81–113, 1998.
- LIN, H. On the distribution of the solar magnetic fields. *Astrophys. J.*, vol. 446, p. 421, 1995.
- LIN, H. et KUHN, J. R. Precision IR and visible solar photometry. *Solar Phys.*, vol. 141, p. 1–26, 1992.



- LISLE, J., DEROSA, M. et TOOMRE, J. New approach to study extended evolution of supergranular flows and their advection of magnetic elements. *Solar Phys.*, vol. 197, p. 21–30, 2000.
- LIVINGSTON, W. C. et HARVEY, J. A new component of solar magnetism - The inner network fields. *Bull. Am. Astron. Soc.*, vol. 7, p. 346, 1975.
- LOU, Y. Possible oscillation modes of magnetic white dwarfs. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 275, p. L11–L15, 1995.
- LOWE, M. et GOLLUB, J. P. Pattern selection near the onset of convection : The Eckhaus instability. *Phys. Rev. Letters*, vol. 55, p. 2575–2578, 1985.
- L'VOV, V. S. Spectra of velocity and temperature fluctuations with constant entropy flux of fully developed free-convective turbulence. *Phys. Rev. Letters*, vol. 67, p. 687–690, 1991.
- MALAGOLI, A., CATTANEO, F. et BRUMMELL, N. H. Turbulent supersonic convection in three dimensions. *Astrophys. J.*, vol. 361, p. L33–L36, 1990.
- MARTIN, S. F. The identification and interaction of network, intranetwork, and ephemeral-region magnetic fields. *Solar Phys.*, vol. 117, p. 243–259, 1988.
- MASSAGUER, J. M. et ZAHN, J.-P. Cellular convection in a stratified atmosphere. *Astron. & Astrophys.*, vol. 87, p. 315–327, 1980.
- MATTHEWS, P. C., HURLBURT, N. E., PROCTOR, M. R. E. et BROWNJOHN, D. P. Compressible magnetoconvection in oblique fields - Linearized theory and simple nonlinear models. *J. Fluid Mech.*, vol. 240, p. 559–569, 1992.
- MATTHEWS, P. C., PROCTOR, M. R. E. et WEISS, N. O. Compressible magnetoconvection in three dimensions : planforms and nonlinear behaviour. *J. Fluid Mech.*, vol. 305, p. 281–305, 1995.
- MESHALKIN, L. D. et SINAI, I. Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous fluid. *Prikl. Math. Mekh.*, vol. 25 (6), p. 1140–1143, 1961.
- MOFFATT, H. K. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge, England, Cambridge University Press, 1978.
- MOFFATT, H. K., KIDA, S. et OHKITANI, K. Stretched vortices - the sinews of turbulence ; large-reynolds-number asymptotics. *J. Fluid Mech.*, vol. 259, p. 241, 1994.
- MONIN, A. S. et YAGLOM, A. M. *Statistical fluid mechanics : mechanics of turbulence*. MIT Press, 1971.
- MULLER, R., AUFFRET, H., ROUDIER, T., VIGNEAU, J., SIMON, G. W., FRANK, Z., SHINE, R. A. et TITLE, A. M. Evolution and advection of solar mesogranulation. *Nature*, vol. 356, p. 322–325, 1992.
- MURPHY, J. O. The effect of a magnetic Field on the onset of thermal convection when constant flux boundary conditions apply. *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, vol. 3, p. 164, 1977.

- NEWELL, A. C., PASSOT, T. et SOULI, M. The phase diffusion and mean drift equations for convection at finite rayleigh numbers in large containers. *J. Fluid Mech.*, vol. 220, p. 187–252, 1990.
- NORDLUND, Å. Numerical simulations of the solar granulation. I - Basic equations and methods. *Astron. & Astrophys.*, vol. 107, p. 1–10, 1982.
- NORDLUND, Å., GALSGAARD, K. et STEIN, R. F. Magnetoconvection and magnetoturbulence *Solar surface magnetic fields.*, édité par RUTTEN, R. J. et SCHRIJVER, C. J., volume 433, p. 471, NATO ASI Series, 1994.
- NORDLUND, Å., SPRUIT, H. C., LUDWIG, H.-G. et TRAMPEDACH, R. Is stellar granulation turbulence? *Astron. & Astrophys.*, vol. 328, p. 229–234, 1997.
- NOVEMBER, L. J. Measurement of geometric distortion in a turbulent atmosphere. *Appl. Optics*, vol. 25, p. 392–397, 1986.
- NOVEMBER, L. J. Inferring the depth extent of the horizontal supergranular flow. *Solar Phys.*, vol. 154, p. 1–17, 1994.
- NOVEMBER, L. J. et SIMON, G. W. Precise proper-motion measurement of solar granulation. *Astrophys. J.*, vol. 333, p. 427–442, 1988.
- NOVEMBER, L. J., TOOMRE, J., GEBBIE, K. B. et SIMON, G. W. The detection of mesogranulation on the sun. *Astrophys. J.*, vol. 245, p. L123–L126, 1981.
- OBOUKHOV, A. M. *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, vol. 125, 1959.
- ODA, N. Morphological study of the solar granulation. III - The mesogranulation. *Solar Phys.*, vol. 93, p. 243–255, 1984.
- PARKER, E. N. Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.*, vol. 122, p. 293, 1955.
- PASSOT, T. et POUQUET, A. Numerical simulation of compressible homogeneous flows in the turbulent regime. *J. Fluid Mech.*, vol. 181, p. 441–466, 1987.
- PIRRAGLIA, J. A. Meridional energy balance of Jupiter. *Icarus*, vol. 59, p. 169–176, 1984.
- PLONER, S. R. O., SOLANKI, S. K. et GADUN, A. S. Is solar mesogranulation a surface phenomenon? *Astron. & Astrophys.*, vol. 356, p. 1050–1054, 2000.
- POMEAU, Y. et MANNEVILLE, P. Stability and fluctuations of a spatially periodic convection. *J. Phys. (Paris) Lettres*, vol. 40, p. 609, 1979.
- PORTER, D. H. et WOODWARD, P. R. High-resolution simulations of compressible convection using the piecewise-parabolic method. *Astrophys. J.*, vol. 93, p. 309–349, 1994.
- POTHÉRAT, A., SOMMERIA, J. et MOREAU, R. Effective boundary conditions for magnetohydrodynamic flows with thin Hartmann layers. *Phys. Fluids*, vol. 14, p. 403–410, 2002.
- PROCACCIA, I. et ZEITAK, R. Scaling exponents in thermally driven turbulence. *Phys. Rev. A*, vol. 42, p. 821–830, 1990.

- RÄDLER, K.-H. et NESS, N. F. The symmetry properties of planetary magnetic fields. *J. Geophys. Res.*, vol. 95 (14), p. 2311–2318, 1990.
- RAST, M. P. Supergranulation : new observation, possible explanation. *ESA SP-517 : GONG+ 2002. Local and global helioseismology : the present and future*, p. 163, 2003a.
- RAST, M. P. The scales of granulation, mesogranulation, and supergranulation. *Astrophys. J.*, vol. 597, p. 1200–1210, 2003b.
- RAST, M. P., LISLE, J. P. et TOOMRE, J. The spectrum of the solar supergranulation : multiple bonwave components. *Astrophys. J.*, vol. 608, p. 1156–1166, 2004.
- RAST, M. P., NORDLUND, Å., STEIN, R. F. et TOOMRE, J. Ionization effects in three-dimensional solar granulation simulations. *Astrophys. J.*, vol. 408, p. L53–L56, 1993.
- RAST, M. P. et TOOMRE, J. Compressible convection with ionization. I. Stability, flow Asymmetries, and energy transport. *Astrophys. J.*, vol. 419, p. 224, 1993.
- REESE, D., RINCON, F. et RIEUTORD, M. Oscillations of magnetic stars : II. Axisymmetric toroidal and non-axisymmetric shear Alfvén modes in a spherical shell. *Astron. & Astrophys.*, vol. 427, p. 279–292, 2004.
- RIEUTORD, M. Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. i. Steady flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 39, p. 163–182, 1987.
- RIEUTORD, M. Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics. ii. Time periodic flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, vol. 59, p. 182–208, 1991.
- RIEUTORD, M. Introduction à la dynamique des fluides. Non publié. École d'été, Aussois, 2004.
- RIEUTORD, M., LUDWIG, H.-G., ROUDIER, T., NORDLUND, Å. et STEIN, R. F. A simulation of solar convection at supergranulation scale. *Nuovo Cimento*, vol. 25, p. 523, 2002.
- RIEUTORD, M., ROUDIER, T., MALHERBE, J. M. et RINCON, F. On mesogranulation, network formation and supergranulation. *Astron. & Astrophys.*, vol. 357, p. 1063–1072, 2000.
- RINCON, F. et RIEUTORD, M. Oscillations of magnetic stars : I. Axisymmetric shear Alfvén modes of a spherical shell in a dipolar magnetic field. *Astron. & Astrophys.*, vol. 398, p. 663–675, 2003.
- ROBERTS, A. J. An analysis of near-marginal, mildly penetrative convection with heat flux prescribed on the boundaries. *J. Fluid Mech.*, vol. 158, p. 71–93, 1985.
- ROBERTS, P. H. *An introduction to magnetohydrodynamics*. Longmans, 1967.
- ROBERTS, P. H. et SOWARD, A. M. The effect of a weak magnetic field on stellar oscillations. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 205, p. 1171–1189, 1983.

- ROUDIER, T., LIGNIERES, F., RIEUTORD, M., BRANDT, P. et MALHERBE, J. Families of fragmenting granules and their relation to meso- and supergranular flow fields. *Astron. & Astrophys.*, vol. 409, p. 299–308, 2003.
- ROUDIER, T. et MULLER, R. Relation between families of granules, mesogranules and photospheric network. *Astron. & Astrophys.*, vol. 419, p. 757–762, 2004.
- ROUDIER, T., RIEUTORD, M., MALHERBE, J. M. et VIGNEAU, J. Determination of horizontal velocity fields at the sun's surface with high spatial and temporal resolution. *Astron. & Astrophys.*, vol. 349, p. 301–311, 1999.
- RUCKLIDGE, A. M., WEISS, N. O., BROWNJOHN, D. P., MATTHEWS, P. C. et PROCTOR, M. R. E. Compressible magnetoconvection in three dimensions : pattern formation in a strongly stratified layer. *J. Fluid Mech.*, vol. 419, p. 283–323, 2002.
- RÜDIGER, G. *Differential rotation and stellar convection. Sun and the solar stars.* Berlin : Akademie Verlag, 1989.
- SANO, M., ZHONG WU, X. et LIBCHABER, A. Turbulence in helium-gas free convection. *Phys. Rev. A*, vol. 40, p. 6421–6430, 1989.
- SCHERRER, P. H., BOGART, R. S., BUSH, R. I., HOEKSEMA, J. T., KOSOVICHEV, A. G., SCHOU, J., ROSENBERG, W., SPRINGER, L., TARBELL, T. D., TITLE, A., WOLFSON, C. J., ZAYER, I. et MDI ENGINEERING TEAM. The solar oscillations investigation - Michelson Doppler Imager. *Solar Phys.*, vol. 162, p. 129–188, 1995.
- SCHRIJVER, C. J., HAGENAAR, H. J. et TITLE, A. M. On the patterns of the solar granulation and supergranulation. *Astrophys. J.*, vol. 475, p. 328, 1997.
- SHINE, R. A., SIMON, G. W. et HURLBURT, N. E. Supergranule and mesogranule evolution. *Solar Phys.*, vol. 193, p. 313–331, 2000.
- SHRAIMAN, B. I. et SIGGIA, E. D. Heat transport in high-Rayleigh-number convection. *Phys. Rev. A*, vol. 42, p. 3650–3653, 1990.
- SIGGIA, E. D. High Rayleigh number convection. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 26, p. 137–168, 1994.
- SIMON, G. W. et LEIGHTON, R. B. Velocity fields in the solar atmosphere. III. Large-scale motions, the chromospheric network, and magnetic fields. *Astrophys. J.*, vol. 140, p. 1120, 1964.
- SIMON, G. W., TITLE, A. M., TOPKA, K. P., TARBELL, T. D., SHINE, R. A., FERGUSON, S. H., ZIRIN, H. et SOUP TEAM. On the relation between photospheric flow fields and the magnetic field distribution on the solar surface. *Astrophys. J.*, vol. 327, p. 964–967, 1988.
- SIMON, G. W., TITLE, A. M. et WEISS, N. O. Modeling mesogranules and ex-ploders on the solar surface. *Astrophys. J.*, vol. 375, p. 775–788, 1991.
- SIMON, G. W. et WEISS, N. O. Simulation of large-scale flows at the solar surface. *Astrophys. J.*, vol. 345, p. 1060–1078, 1989.
- SIVASHINSKY, G. Weak turbulence in periodic flows. *Physica D*, vol. 17, p. 243–255, 1985.

- SNODGRASS, H. B. et ULRICH, R. K. Rotation of Doppler features in the solar photosphere. *Astrophys. J.*, vol. 351, p. 309–316, 1990.
- SOLANKI, S. K. Small-scale solar magnetic fields - An overview. *Space Science Reviews*, p. 1, 1993.
- SPARROW, E., GOLDSTEIN, R. et JONSSON, V. K. Thermal instability in a horizontal fluid layer : effect of boundary conditions and non-linear temperature profile. *J. Fluid Mech.*, vol. 18, p. 513–528, 1964.
- SPIEGEL, E. A. Convective instability in a compressible atmosphere. I. *Astrophys. J.*, vol. 141, p. 1068–1090, 1965.
- SPRUIT, H. C., NORDLUND, Å. et TITLE, A. M. Solar convection. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 28, p. 263–301, 1990.
- STARCHENKO, S. V. et JONES, C. A. Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors. *Icarus*, vol. 157, p. 426–435, 2002.
- STEIN, R. F. et NORDLUND, Å. Topology of convection beneath the solar surface. *Astrophys. J.*, vol. 342, p. L95–L98, 1989.
- STEIN, R. F. et NORDLUND, Å. Simulations of solar granulation. I. General properties. *Astrophys. J.*, vol. 499, p. 914–933, 1998.
- STEVENSON, D. J. Planetary magnetic fields. *Reports of Progress in Physics*, vol. 46, p. 555–557, 1983.
- STIX, M. *The Sun : an introduction*. 2nd ed. Berlin : Springer, 2002.
- STRAUS, T. et BONACCINI, D. Dynamics of the solar photosphere. I. Two-dimensional spectroscopy of mesoscale phenomena. *Astron. & Astrophys.*, vol. 324, p. 704–712, 1997.
- SULEM, P. L., SHE, Z. S., SCHOLL, H. et FRISCH, U. Generation of large-scale structures in three-dimensional flows lacking parity invariance. *J. Fluid Mech.*, vol. 205, p. 341–358, 1989.
- TAO, L., WEISS, N. O., BROWNJOHN, D. P. et PROCTOR, M. R. E. Flux separation in stellar magnetoconvection. *Astrophys. J.*, vol. 496, p. L39, 1998.
- TENNEKES, H. et LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. MIT Press, 1972.
- TITLE, A. M., TARBELL, T. D., TOPKA, K. P., FERGUSON, S. H., SHINE, R. A. et SOUP TEAM. Statistical properties of solar granulation derived from the SOUP instrument on Spacelab 2. *Astrophys. J.*, vol. 336, p. 475–494, 1989.
- TOOMRE, J., BRUMMELL, N., CATTANEO, F. et HURLBURT, N. E. Three-dimensional compressible convection at low Prandtl numbers. *Computer Phys. Communications*, vol. 59, p. 105–117, 1990.
- TOOMRE, J., GOUGH, D. O. et SPIEGEL, E. A. Time-dependent solutions of multimode convection equations. *J. Fluid Mech.*, vol. 125, p. 99–122, 1982.
- VAINSHTEIN, S., CATTANEO, F. et ROSNER, R. On magnetic diffusion in a turbulent fluid. *Bull. Am. Astron. Soc.*, vol. 23, p. 1049, 1991.

- VALDETTARO, L. et MENEGUZZI, M. Compressible MHD in spherical geometry. *Proceedings from the IAU Colloquium N. 130 - The Sun and cool stars : activity, magnetism, dynamos*. Springer-Verlag, 1990.
- VAN DER BORGHT, R. Nonlinear thermal convection in a layer with imposed energy flux. *Aus. J. Phys.*, vol. 27, p. 481–493, 1974.
- VERZICCO, R. et CAMUSSI, R. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech.*, vol. 477, p. 19–49, 2003.
- VINCENT, A. et MENEGUZZI, M. The dynamics of vorticity tubes in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, vol. 258, p. 245, 1994.
- WANG, H. Do mesogranules exist? *Solar Phys.*, vol. 123, p. 21–32, 1989.
- WANG, H. et ZIRIN, H. Study of supergranules. *Solar Phys.*, vol. 120, p. 1–17, 1989.
- WARHAFT, Z. Passive scalars in turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 32, p. 203–240, 2000.
- WEISS, N. O., BROWNJOHN, D. P., HURLBURT, N. E. et PROCTOR, M. R. E. Oscillatory convection in sunspot umbrae. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 245, p. 434–452, 1990.
- WEISS, N. O., BROWNJOHN, D. P., MATTHEWS, P. C. et PROCTOR, M. R. E. Photospheric convection in strong magnetic fields. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 283, p. 1153–1164, 1996.
- WEISS, N. O., PROCTOR, M. R. E. et BROWNJOHN, D. P. Magnetic flux separation in photospheric convection. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, vol. 337, p. 293–304, 2002.
- WORDEN, S. P. Infrared observations of supergranule temperature structure. *Solar Phys.*, vol. 45, p. 521–532, 1975a.
- WORDEN, S. P. Solar supergranulation. *Ph.D. Thesis*, 1975b.
- WORDEN, S. P. et SIMON, G. W. A study of supergranulation using a diode array magnetograph. *Solar Phys.*, vol. 46, p. 73–91, 1976.
- YAKHOT, V. 4/5 Kolmogorov law for statistically stationary turbulence : Application to high-Rayleigh-number Bénard convection. *Phys. Rev. Letters*, vol. 69, p. 769–771, 1992.
- ZWAAN, C. Elements and patterns in the solar magnetic field. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 25, p. 83–111, 1987.



# Liste des publications

## Articles publiés dans des revues à comité de lecture

1. RINCON, F., LIGNIÈRES, F. et RIEUTORD, M. Mesoscale flows in large aspect ratio simulations of turbulent compressible convection. Accepté dans *A&A*.
2. REESE, D., RINCON, F. et RIEUTORD, M. Oscillations of magnetic stars : II. Axisymmetric toroidal and non-axisymmetric shear Alfvén modes in a spherical shell. *A&A*, vol. 427, p. 279–292, 2004.
3. RINCON, F. et RIEUTORD, M. Oscillations of magnetic stars : I. Axisymmetric shear Alfvén modes of a spherical shell in a dipolar magnetic field. *A&A*, vol. 398, p. 663–675, 2003.
4. RIEUTORD, M., ROUDIER, T., MALHERBE, J.-M. et RINCON, F. On mesogranulation, network formation and supergranulation. *A&A*, vol. 357, p. 1063–1072, 2000.

## Articles soumis ou en préparation

1. RINCON, F., RIEUTORD, M. et LIGNIÈRES, F. Numerical study of turbulent compressible convection in a very large aspect ratio box. En préparation pour *J. Fluid Mech.*.
2. RINCON, F. et RIEUTORD, M. Magnetically driven transition of marginal compressible convection with a prescribed heat flux. Soumis à *Phys. Fluids*.







# Conférences, séminaires et écoles d'été

## Communications et actes de conférences

1. RINCON, F., LIGNIÈRES, F. et RIEUTORD, M. Large-scale simulations of turbulent compressible convection. Newton Institute, Cambridge (UK), Septembre 2004.
2. Numerical and theoretical models of large scale convection at the solar surface (séminaire). DAMTP, Cambridge (UK), Juin 2004.
3. RINCON, F., LIGNIÈRES, F. et RIEUTORD, M. BALAÏTOUS : un code de simulations numériques locales pour la dynamique des fluides stellaires (oral). IDRIS, Orsay, Décembre 2003.
4. RINCON, F. et RIEUTORD, M. Stability of a compressible fluid layer in a magnetic field : a simple model for supergranulation (oral). Colloque de la Société Française d'Astronomie et d'Astrophysique, Bordeaux, Juin 2003.
5. Shear Alfvén waves in planetary cores and stellar interiors? (séminaire). NORDITA, Copenhagen (DK), Novembre 2002.
6. RINCON, F. et RIEUTORD, M. A study of shear Alfvén waves in magnetic stars : the spherical shell model (poster). Asteroseismology across the HR diagram, Porto (Portugal), Juillet 2002.

## Groupes de travail et écoles d'été

1. Dynamique des fluides astrophysiques. École d'été PNPS, Aussois, Septembre 2004.
2. Stellar Convection. Groupe de travail, CIAS, Meudon, Juin 2003.
3. GDR Turbulence. Nice, Janvier 2002.
4. Theories of turbulence. École d'été, CISM, Udine (Italie), Septembre 2001.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Sommaire</b>	<b>9</b>
<b>Notations utilisées</b>	<b>11</b>
<b>Problématique générale</b>	<b>15</b>
<b>1 Observations et modèles de la photosphère solaire</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Phénoménologie de la zone convective du Soleil . . . . .	20
1.2.a Convection en profondeur . . . . .	20
1.2.b Convection photosphérique . . . . .	21
1.3 Histoire de l'observation de la dynamique photosphérique . . . . .	21
1.3.a Méthodes d'observation et d'analyse . . . . .	22
1.3.b Données relatives à la granulation . . . . .	24
1.3.c La dynamique de la supergranulation . . . . .	25
1.3.d Le problème de la mésogranulation . . . . .	27
1.3.e Magnétisme et dynamique dans la photosphère . . . . .	29
1.4 Expériences numériques sur la convection turbulente . . . . .	31
1.4.a Les pionniers . . . . .	31
1.4.b Propriétés des modèles détaillés de la granulation . . . . .	32
1.4.c Propriétés des simulations d'atmosphères polytropiques . . . . .	34
1.4.d Simulations à grands rapports d'aspects . . . . .	37
1.5 Une tentative de synthèse . . . . .	40
1.5.a Granulation solaire . . . . .	40
1.5.b Le modèle standard de la convection à la surface du Soleil . . . . .	41
1.5.c Le modèle en question : et la turbulence ? . . . . .	42
1.5.d Que nous apportent les simulations numériques ? . . . . .	44
1.6 Conclusion . . . . .	45

<b>2</b>	<b>Équations MHD dans un milieu fortement stratifié</b>	<b>47</b>
2.1	Introduction . . . . .	47
2.2	Système physique étudié . . . . .	47
2.2.a	Cadre général . . . . .	48
2.2.b	Paramètres caractéristiques . . . . .	48
2.3	Équations sans dimension . . . . .	49
2.4	Différents équilibres hydrostatiques . . . . .	49
2.4.a	Les polytropes . . . . .	50
2.4.b	L'atmosphère isotherme . . . . .	50
2.4.c	Échelles de hauteur, temps caractéristiques . . . . .	50
2.5	Conditions aux limites . . . . .	51
2.6	Définitions diverses et variées . . . . .	52
2.6.a	Nombre de Rayleigh . . . . .	52
2.6.b	Équation pour l'énergie . . . . .	52
2.6.c	Nombre de Nusselt . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Approche linéaire de la supergranulation solaire</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.2	Justification des hypothèses de l'étude . . . . .	57
3.2.a	Utilisation de diffusivités turbulentes . . . . .	57
3.2.b	Conditions aux limites sur la température . . . . .	57
3.3	Détails du modèle linéaire . . . . .	58
3.3.a	Linéarisation pour un fluide complètement compressible . . . . .	58
3.3.b	Forme anélastique . . . . .	60
3.3.c	Équation cubique dans l'approximation de Boussinesq . . . . .	61
3.4	Résultats . . . . .	62
3.4.a	Méthode numérique . . . . .	62
3.4.b	Diverses configurations . . . . .	62
3.5	Développements analytiques dans l'approximation de Boussinesq . . . . .	67
3.5.a	Résolution de l'équation cubique . . . . .	67
3.5.b	Dépendance de $R_c$ vis-à-vis de $Q$ pour $a = 0$ . . . . .	69
3.5.c	Transition vers une longueur d'onde finie . . . . .	69
3.6	Discussion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Simulations numériques à grand rapport d'aspect</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	La simulation . . . . .	77
4.2.a	Paramètres physiques et numériques . . . . .	77
4.2.b	Commentaires . . . . .	77
4.2.c	Définition des spectres . . . . .	78
4.3	Description de l'écoulement . . . . .	78
4.3.a	Évolution temporelle . . . . .	79
4.3.b	Régime quasi-stationnaire . . . . .	85
4.4	Analyse dans l'espace de Fourier . . . . .	95

4.4.a	Quelle loi de puissance pour les spectres? . . . . .	97
4.4.b	Dynamique et transfert non-linéaire dans l'espace spectral . . . . .	103
4.5	Les simulations et la photosphère solaire . . . . .	106
4.5.a	Comparaison avec la convection radiative . . . . .	106
4.5.b	Interprétation dans le cadre photosphérique . . . . .	107
4.5.c	Et la supergranulation? . . . . .	111
4.6	Récapitulatif des résultats . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Théories de champ moyen</b>	<b>119</b>
5.1	Introduction . . . . .	119
5.2	Effet AKA et viscosité turbulente . . . . .	121
5.2.a	Phénoménologie . . . . .	121
5.2.b	Expression des coefficients . . . . .	123
5.2.c	Écoulements non périodiques et instabilités de phase . . . . .	125
5.3	Méthode numérique de résolution . . . . .	127
5.3.a	Principe général du code . . . . .	127
5.3.b	Disposition des données . . . . .	128
5.3.c	Blocs matriciels . . . . .	130
5.3.d	Conditions aux limites . . . . .	131
5.3.e	Algorithmes utilisés . . . . .	131
5.4	Calculs de viscosités turbulentes dans des écoulements simples . . . . .	133
5.4.a	Écoulement de Kolmogorov . . . . .	133
5.4.b	Écoulement hexagonal simple . . . . .	133
5.4.c	Écoulement hexagonal décoré . . . . .	136
5.5	Conclusions . . . . .	138
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>A</b>	<b>Méthodes numériques et tests</b>	<b>145</b>
A.1	Historique et objectifs . . . . .	145
A.2	Fonctionnement général du code . . . . .	146
A.2.a	Organisation des données . . . . .	146
A.2.b	Schémas numériques de différentiation spatiale . . . . .	147
A.2.c	Schéma temporel . . . . .	151
A.2.d	Le dilemme compressible/ incompressible . . . . .	151
A.2.e	Interface de traitement . . . . .	151
A.3	Tests numériques . . . . .	152
A.3.a	Pas de temps et résolution spatiale . . . . .	152
A.3.b	Tests de performances et de parallélisation . . . . .	153
A.4	Tests du code sur quelques problèmes de physique . . . . .	156
A.4.a	Ondes sonores . . . . .	156
A.4.b	Convection dans un polytrophe sans champ magnétique . . . . .	157
A.4.c	Instabilité de magnétoconvection - Overstabilité . . . . .	158
A.5	Conclusions . . . . .	160

<b>B Oscillations alfvéniques d'une coquille sphérique</b>	<b>163</b>
B.1 Introduction . . . . .	163
B.1.a Avant-propos . . . . .	163
B.1.b Oscillations magnétiques stellaires . . . . .	163
B.2 Oscillations magnétiques en géométrie sphérique . . . . .	165
B.2.a Modèle et équations . . . . .	165
B.2.b Décomposition harmonique des équations MHD . . . . .	167
B.2.c Symétries et classification des modes propres . . . . .	168
B.2.d Les ondes d'Alfvén en résumé . . . . .	169
B.3 Modes axisymétriques poloïdaux . . . . .	169
B.3.a Modes stationnaires . . . . .	169
B.3.b Modes oscillants . . . . .	170
B.3.c Couches de cisaillement internes . . . . .	171
B.4 Modes axisymétriques toroïdaux . . . . .	172
B.4.a Spectre . . . . .	173
B.4.b Singularité et couches limites . . . . .	173
B.5 Solutions asymptotiques à faible diffusivité . . . . .	174
B.6 Conclusions et extensions possibles . . . . .	179
B.6.a Principaux résultats . . . . .	179
B.6.b Perspectives . . . . .	179
<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>199</b>
<b>Liste des communications</b>	<b>201</b>
<b>Table des matières</b>	<b>203</b>

