



**HAL**  
open science

# Modelisation regionale du champ magnetique terrestre

Erwan Thebault

► **To cite this version:**

Erwan Thebault. Modelisation regionale du champ magnetique terrestre. Géophysique [physics.geoph]. Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2003. Français. NNT: . tel-00008725

**HAL Id: tel-00008725**

**<https://theses.hal.science/tel-00008725>**

Submitted on 8 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Modélisation régionale du champ magnétique terrestre

## THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 17 octobre 2003

Pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Louis Pasteur – STRASBOURG I

(Spécialité géophysique)

par

Erwan Thébault

### Composition du jury

<i>Président</i>	<b>M. Jean-Louis LE MOUËL</b>
<i>Rapporteur interne</i>	<b>M. Michel CARA,</b>
<i>Rapport externe</i>	<b>M. Angelo DE SANTIS</b>
<i>Rapport externe</i>	<b>M. Dominique GIBERT</b>

<i>Directeur de thèse :</i>	<b>M. Jean-Jacques SCHOTT</b>
<i>Codirectrice de thèse :</i>	<b>Mme Mioara MANDEA</b>

---

## Résumé

Le champ magnétique terrestre, dans des régions libres de sources magnétiques, peut être exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire, solution de l'équation de Laplace. Pour des régions dont la couverture en données est particulièrement dense, la modélisation régionale est susceptible d'offrir une meilleure résolution spatiale du champ magnétique que la modélisation globale par les harmoniques sphériques (SH). Avec la méthode régionale de décomposition en harmoniques sur calottes sphériques (SCHA) développée par Haines (1985), des difficultés apparaissent lors du traitement simultané de données enregistrées à des altitudes variées. De plus, ce formalisme ne peut pas être simplement relié au formalisme global SH, nous privant ainsi de précieuses informations *a priori* sur les coefficients du modèle. Dans le présent travail, nous montrons que ces problèmes sont surmontés si SCHA est formulée comme un problème de conditions aux limites dans un cône; cône qui circonscrit la région d'étude et dont la hauteur est compatible avec l'altitude maximale contenue dans les données. Ceci nous permet d'obtenir pour la première fois des relations entre les coefficients de Gauss globaux et ceux des harmoniques locales. La reconstruction précise d'un champ global dans le cône démontre la pertinence de ces relations. De manière à anticiper le problème inverse, nous proposons des relations basées sur le concept de spectre d'énergie, et nous définissons des normes pour le champ magnétique. Ces expressions sont des outils précieux de régularisation pour des problèmes inverses mal conditionnés. Nous traitons finalement le problème inverse. Dans un premier temps, nous considérons des données uniformément distribuées et nous concluons que le modèle obtenu est conforme aux propriétés d'un champ géomagnétique. Dans un second temps, nous simulons une inversion sur un cas réel en considérant les positions des données terrestres et celles du satellite CHAMP. Par une régularisation, nous parvenons à résoudre le problème inverse dans une situation particulièrement défavorable, et nous obtenons un modèle de champ magnétique stable dans tout le volume conique.

**Mots clés:** géomagnétisme, modélisation régionale, fonctions coniques de Mehler, fonctions de Legendre.

## Abstract

The geomagnetic field above the Earth's surface in current free region may be expressed as the gradient of a scalar potential solving Laplace equation. For regions with a fairly dense coverage of data at different altitudes, a regional model ought to offer a better spatial resolution of the regional field over the volume under study than a global field expanded in Spherical Harmonics. The Spherical Cap Harmonics Analysis developed by Haines (1985) is an attractive regional modeling tool having close relationship with global Spherical Harmonics. With the Spherical Cap Harmonic Analysis (SCHA) adopted so far, difficulties arise in upward continuation of the field. It is also uneasy to establish a relationship between global and local Gauss coefficients. Indeed, such relationship would be useful for introducing prior constraint on inverse problems dealing with the estimation of local Gauss coefficients based upon a local dataset. In the present work, we show that these difficulties are overcome if the SCHA modeling is formulated as a boundary value problem in a cone bounded radially by the Earth's surface and an upper surface suitable for satellite data, and bounded laterally by a surface that encompasses a specific region of study. In particular, this new formalism can be related to Spherical Harmonics and gives sensible relationships among both sets of Gauss coefficients. The reliability of these relations is demonstrated by reconstructing the three components of a global field with a pretty good accuracy. In order to foresee the inverse problem, we also establish useful analytical relationships based on spectrum concept and magnetic energy inside a cone. This provides powerful tools for regularizing inverse problems based on real data sparsely distributed. We finally tackle the inverse problem by examining several synthetic simulations for different data distributions; from even to real sparse distributions. All results suggest that the new proposal for regional modeling is efficient. Synthetic data are well resolved and models obey to basic properties of Newtonian potentials.

**Keywords:** geomagnetism, regional modeling, conical functions, Legendre functions.

# Table des matières

Introduction générale

---

---

## Partie I L'Analyse en Harmoniques sur Calotte Sphériques (SCHA)

---

---

### Chapitre 1

#### Préliminaires

1.1	L'équation de Laplace . . . . .	3
1.2	Expression des solutions . . . . .	4
1.2.1	Equation en $r$ . . . . .	4
1.2.2	Equation en $\theta$ . . . . .	5
1.2.3	Equation en $\varphi$ . . . . .	7
1.3	A propos du potentiel . . . . .	7

### Chapitre 2

#### Le formalisme de SCHA

2.1	Fonctions de base de SCHA . . . . .	9
2.1.1	Problème de Sturm-Liouville pour les fonctions de Legendre généralisées	9
2.1.2	Intervalle de définition . . . . .	11
2.1.3	Représentations des fonctions et des harmoniques . . . . .	11
2.2	Les conditions aux limites de Haines . . . . .	14
2.2.1	Définition du problème . . . . .	14
2.2.2	Implications sur la valeurs des racines $n_k$ . . . . .	14
2.2.3	Implications sur l'orthogonalité des fonctions de Legendres généralisées.	15
2.3	Expression du champ magnétique . . . . .	16



**Chapitre 3****Considérations numériques**

3.1	Les fonctions de Legendre et leurs racines . . . . .	17
3.1.1	Le calcul en série . . . . .	18
3.1.2	La récurrence de Clenshaw . . . . .	20
3.1.3	Les développements asymptotiques . . . . .	22
3.1.4	Un algorithme stable . . . . .	23
3.1.5	Vérifications numériques et conclusions . . . . .	23
3.2	Le concept de longueur d'onde . . . . .	26
3.2.1	Longueur d'onde associée à $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$ . . . . .	27
3.2.2	Interprétations géométriques et discussions . . . . .	31

**Chapitre 4****Inversion de données avec SCHA**

4.1	Préparation de l'inversion . . . . .	35
4.1.1	Une grille quasi-régulière . . . . .	35
4.1.2	Rotation des données dans le repère de la calotte . . . . .	39
4.1.3	Ecriture du problème inverse . . . . .	40
4.2	Inversion de données synthétiques sur une surface . . . . .	41
4.2.1	Le choix des données . . . . .	41
4.2.2	Moindres carrés ordinaires . . . . .	42
4.2.3	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	45
4.2.4	Inversion par chaîne de Markov . . . . .	48
4.2.5	Commentaires sur l'inversion de données sur une surface . . . . .	54
4.3	Inversion de données mesurées à différentes altitudes . . . . .	55
4.3.1	Exemple synthétique . . . . .	55
4.3.2	Discussion générale sur la variation en altitude . . . . .	57

**Chapitre 5****Problèmes soulevés par SCHA**

5.1	Rotation des coefficients de Gauss globaux . . . . .	59
5.1.1	Résolution numérique . . . . .	61
5.1.2	Test des identités . . . . .	61
5.1.3	Comparaison des coefficients obtenus . . . . .	61
5.1.4	Vérification de l'invariance du champ . . . . .	62
5.2	Des coefficients de Gauss radialement dépendants . . . . .	62
5.3	Le problème du compromis entre les composantes horizontale et radiale . . . . .	64

---

5.4	Introduction au problème de la différentiation interne/externe . . . . .	66
-----	--	----

<b>Conclusions de la première partie</b>
--

---



---

**Partie II Proposition d'une méthode de modélisation régionale**

---



---

<b>Introduction</b>
---------------------

<b>Chapitre 6</b>
-------------------

<b>Géométrie et formalisme du nouveau problème</b>
--

6.1	Orthogonalité des gradients . . . . .	77
6.1.1	Préliminaires . . . . .	77
6.1.2	Calcul formel de la norme de $V$ . . . . .	79
6.1.3	Les conditions d'orthogonalité . . . . .	83
6.2	Résolutions des équations homogènes . . . . .	85
6.2.1	Expression du potentiel $V_2$ . . . . .	86
6.2.2	Solution du potentiel $V_1$ . . . . .	87
6.2.3	Expression finale du potentiel $V_1$ . . . . .	91
6.3	Longueur d'onde radiale . . . . .	92
6.4	Introduction aux effets de bords . . . . .	93

<b>Chapitre 7</b>
-------------------

<b>Résolution des conditions aux limites</b>
--

7.1	Les conditions de flux . . . . .	97
7.2	Relations entre le potentiel $V_1$ et un potentiel global . . . . .	99
7.3	Relations entre le potentiel $V_2$ et un potentiel global . . . . .	101
7.4	L'ambiguïté du concept d'interne et d'externe . . . . .	102
7.4.1	Une tentative pour apporter des éléments de réponse . . . . .	102

**Chapitre 8****Considérations numériques**

8.1	Les fonctions coniques de Mehler et leur évaluation . . . . .	107
8.1.1	Calcul par la récurrence de Clenshaw . . . . .	108
8.1.2	La représentation sous forme d'intégrale de Mehler-Fock . . . . .	110
8.1.3	Validation de la récurrence de Clenshaw . . . . .	112
8.2	Convergence des solutions . . . . .	112
8.2.1	Représentation des fonctions de Legendre . . . . .	113
8.2.2	Représentation des fonctions radiales . . . . .	115

**Chapitre 9****Synthèses des solutions**

9.1	Synthèse du problème <i>PI</i> . . . . .	119
9.1.1	Solutions du potentiel $V_1$ . . . . .	119
9.1.2	Solutions du potentiel $V_2$ . . . . .	121
9.1.3	Informations complémentaires . . . . .	121
9.2	Synthèse du problème <i>PII</i> . . . . .	122
9.2.1	Solutions du potentiel $V_1$ . . . . .	122
9.2.2	Solutions du potentiel $V_2$ . . . . .	123
9.2.3	Informations complémentaires . . . . .	123
9.3	Synthèse du problème <i>PIII</i> . . . . .	124
9.3.1	Solutions du potentiel $V_1$ . . . . .	124
9.3.2	Solutions du potentiel $V_2$ . . . . .	125
9.3.3	Informations complémentaires . . . . .	126
9.4	Synthèse du problème <i>PIV</i> . . . . .	126
9.4.1	Solutions du potentiel $V_1$ . . . . .	126
9.4.2	Solutions du potentiel $V_2$ . . . . .	127
9.4.3	Informations complémentaires . . . . .	128

**Chapitre 10****Reconstructions numériques d'un champ global**

10.1	Utilisation des fonctions de base du problème <i>PI</i> . . . . .	129
10.1.1	Choix du modèle et des paramètres . . . . .	130
10.1.2	Analyse des résultats . . . . .	130
10.2	Utilisation des fonctions de base du problème <i>PIII</i> . . . . .	139
10.2.1	Choix du modèle et des paramètres . . . . .	139
10.2.2	Analyse des résultats . . . . .	143

10.3	Utilisation des fonctions de base du problème PIV . . . . .	149
10.3.1	Choix du modèle et des paramètres . . . . .	149
10.3.2	Variations des résidus sur les surfaces . . . . .	149
10.3.3	Variation des résidus avec l'altitude . . . . .	149
10.3.4	Discussion générale et choix de la décomposition . . . . .	157
10.4	Accélération de la convergence à la surface terrestre . . . . .	157
10.4.1	La méthode de Fejer . . . . .	157
10.4.2	Une méthode empirique . . . . .	159

<b>Conclusions de la seconde partie</b>
---

---



---

## Partie III Informations *a priori* et problèmes inverses

---



---

<b>Introduction</b>
---------------------

<b>Chapitre 11</b>
--------------------

<b>Normes du champ magnétique</b>
-----------------------------------

11.1	Norme du champ magnétique exprimé en harmoniques globales (SH) . . . . .	169
11.1.1	Expression de la norme volumique . . . . .	169
11.1.2	Expression de la norme surfacique . . . . .	171
11.2	Normes du champ magnétique en harmoniques locales (SCHA) . . . . .	173
11.2.1	Expression de la norme volumique . . . . .	173
11.2.2	Expression de la norme surfacique . . . . .	175

<b>Chapitre 12</b>
--------------------

<b>Etudes numériques des normes</b>
-------------------------------------

12.1	Etude du spectre en harmoniques globales : ordres $m$ significatifs . . . . .	177
12.2	Développement des séries et résidu volumique total . . . . .	179
12.2.1	Expression du résidu dans le volume . . . . .	180
12.2.2	Le choix des indices de troncature. Cas synthétique. . . . .	181
12.3	Le résidu associé à chaque surface . . . . .	182

**Chapitre 13****Les normes comme outils de régularisation**

13.1 Nouvelle norme sur $\partial\Omega_\beta$ . . . . .	185
13.2 Nouvelle norme sur $\partial\Omega_{\theta_0}$ . . . . .	187
13.3 Commentaires sur les nouvelles normes . . . . .	188
13.4 Discussions sur les normes . . . . .	189

**Chapitre 14****Inversions de données uniformément réparties**

14.1 Définitions préliminaires . . . . .	191
14.1.1 Ecriture du problème inverse . . . . .	191
14.1.2 Inversion sous contrainte . . . . .	193
14.1.3 Définition de la cohérence statistique des coefficients (cas des moindres carrés ordinaires) . . . . .	193
14.2 Inversions sur données synthétiques . . . . .	194
14.2.1 Sélection des données . . . . .	194
14.2.2 Sélection des paramètres . . . . .	195
14.2.3 Inversion par moindres carrés simple . . . . .	195
14.2.4 Inversion par moindres carrés : accélération de la convergence. . . . .	200
14.3 Conclusion sur la répartition uniforme des données . . . . .	210

**Chapitre 15****Inversion de données synthétiques de répartitions réelles**

15.1 Le problème de la variation séculaire . . . . .	211
15.2 Les indices géomagnétiques . . . . .	213
15.2.1 Indice $K_p$ . . . . .	213
15.2.2 L'indice Dst . . . . .	214
15.3 Sélection des données . . . . .	214
15.4 Inversion sans contrainte . . . . .	216
15.4.1 Choix des indices de troncature . . . . .	216
15.4.2 Exemples d'interpolation dans le volume . . . . .	216
15.5 Inversion sous contrainte . . . . .	219

**Conclusion de la troisième partie**

---



---

## Conclusions générales et perspectives

---



---



---



---

## Annexes

---



---

### Annexe A

#### Produits scalaire et normes des fonctions de Legendre

A.1	Avertissement . . . . .	241
A.2	Produits scalaires et normalisations des fonctions de legendre . . . . .	242
A.2.1	Produits scalaires . . . . .	242
A.2.2	Expressions analytiques de la norme . . . . .	244

### Annexe B

#### Normalisation complète des fonctions coniques de Mehler

B.1	Fonctions coniques de Mehler de degré complexe $K_{-1/2+i\tau}^m$ . . . . .	245
B.2	Fonctions coniques de Mehler de degré nul $P_0^m$ . . . . .	249

### Annexe C

#### Les solutions du problème dans un cône semi-infini

C.1	Le problème de condition aux limites pour un cône infini . . . . .	253
C.2	Le cône infini comme limite du cône fini . . . . .	257

### Annexe D

#### Liste des notations et symboles employés



## Résumé

Le champ magnétique terrestre, dans des régions libres de sources magnétiques, peut être exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire, solution de l'équation de Laplace. Pour des régions dont la couverture en données est particulièrement dense, la modélisation régionale est susceptible d'offrir une meilleure résolution spatiale du champ magnétique que la modélisation globale par les harmoniques sphériques (SH). Avec la méthode régionale de décomposition en harmoniques sur calottes sphériques (SCHA), les difficultés apparaissent lors du traitement simultané de données enregistrées à des altitudes variées. De plus, ce formalisme ne peut pas être simplement relié au formalisme global SH, nous privant ainsi de précieuses informations *a priori* sur les coefficients du modèle. Dans le présent travail, nous montrons que ces problèmes sont surmontés si SCHA est formulée comme un problème de conditions aux limites dans un cône ; cône qui circonscrit la région d'étude et dont la hauteur est compatible avec l'altitude maximale contenue dans les données. Ceci nous permet d'obtenir pour la première fois des relations entre les coefficients de Gauss globaux et ceux des harmoniques locales. La reconstruction précise d'un champ globale dans le cône démontre la pertinence de ces relations. De manière à anticiper le problème inverse, nous proposons des relations basées sur le concept de spectre d'énergie, et nous définissons des normes pour le champ magnétique. Ces expressions sont des outils précieux de régularisation pour des problèmes inverses mal conditionnés. Nous traitons finalement le problème inverse. Dans un premier temps, nous considérons des données uniformément distribuées et nous concluons que le modèle obtenu est conforme aux propriétés d'un champ géomagnétique. Dans un second temps, nous simulons une inversion sur un cas réel en considérant les positions des données terrestres et celles du satellite CHAMP. Par une régularisation, nous parvenons à résoudre le problème inverse dans une situation particulièrement défavorable, et nous obtenons un modèle de champ magnétique stable dans tout le volume conique.

**Mots-clés:** géomagnétisme, modélisation régionale, fonctions coniques de Mehler, fonctions de Legendre.

## Abstract

The geomagnetic field above the Earth's surface in current free region may be expressed as the gradient of a scalar potential solving Laplace equation. For regions with a fairly dense coverage of data at different altitudes, a regional model ought to offer a better spatial resolution of the regional field over the volume under study than a global field expanded in Spherical Harmonics. The Spherical Cap Harmonics Analysis is an attractive regional modelling tool having close relationship with global Spherical Harmonics. With the Spherical Cap Harmonic Analysis (SCHA) adopted so far, difficulties arise in upward continuation of the field. It is also uneasy to establish a relationship between global and local Gauss coefficients. Indeed, such relationship would be useful for introducing prior constraint on inverse problems dealing with the estimation of local Gauss coefficients based upon a local dataset. In the present work, we show that these difficulties are overcome if the SCHA modelling is formulated as a boundary value problem in a cone bounded radially by the Earth's surface and an upper surface suitable for satellite data, and bounded laterally in order to encompass a specific region of study. In particular, this new



formalism can be related to Spherical Harmonics and gives sensible relationship among both sets of Gauss coefficients. The reliability of these relations is demonstrated by reconstructing the three components of a global field with a pretty good accuracy. In order to foresee the inverse problem, we also establish useful analytical relationships based on spectrum concept and magnetic energy inside a cone. This provide powerful tools for regularizing inverse problems based on real data sparsely distributed. We finally tackle the inverse problem by examining several synthetic simulations for different data distributions; from even to sparse distributions. All results suggest that the new proposal for regional modelling is efficient. Synthetic data are well resolved and models obey to basic properties of Newtonian potentials.

**Keywords:** geomagnetism, regional modelling, conical functions, Legendre functions

## Remerciements

Je voudrai tout d'abord remercier sincèrement les membres de ce jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail : M. Jean-Louis Le Mouël, M. Michel Cara, M. Dominique Gibert et M. Angelo De Santis. Leur présence à ce jury de doctorat, intimidante, m'a permis d'apprécier la portée scientifique de cette thèse et je les remercie de m'avoir encouragé à poursuivre.

En cette fin de thèse, tant attendue, je suis tout particulièrement reconnaissant envers Jean-Jacques SCHOTT. Je suis conscient du challenge qu'a du représenter ce choc des cultures entre ma tendance à l'empirisme et son implacable rigueur. Même si cette dernière notion reste encore pour moi une abstraction à laquelle ma nature désordonnée se plie difficilement, je lui dois d'avoir compris certaines notions mathématiques arides, un intérêt certain pour la géophysique et un certain dégoût pour les brouillons illisibles. J'ose croire que l'espoir m'est permis d'être un jour capable d'aborder les problèmes qui semblent inextricables avec la même aisance et le même sang froid.

En attendant ce jour, il faut bien avouer qu'une thèse est parsemée d'embûches. C'est pourquoi je tiens particulièrement à remercier ma codirectrice de thèse, Mioara Manda, pour avoir su, à chaque fois que cela fut nécessaire, sagement me conseiller et m'aider à relativiser. Le bénéfique en fut chaque fois appréciable.

Il est une personne que je voudrais également remercier pour m'avoir permis quelques moments studieux mais récréatifs : Angelo De Santis. Son accueil chaleureux à Rome constitue un point fort de ces trois années. J'y ai trouvé matière à nourrir mon penchant naturel : un immense bureau où sédimentent multitude d'articles, des discussions passionnées, une oreille patiente et un œil amusé lorsque j'exposais sans pudeur mes divagations «scientifiques».

Je m'en voudrai d'oublier mon compagnon de bureau et de pauses « café froid », Mohamed Baala, qui « vit en un jour détruit l'ouvrage de sa vie et sans dire un seul mot s'est mit à reconstruire ». Le courage exceptionnel dont il a fait preuve me laisse encore aujourd'hui perplexe.

Pourtant, malgré ce bel exemple, je n'ai pas toujours supporté l'incertitude de la situation et, heureusement, j'ai pu m'appuyer sur Mathilde, cette branche qui plie mais ne rompt pas. Est-il besoin de répéter que ma gratitude, entre autre, lui est acquise ?

Je voudrai également saluer « mes fameux grognards », ce dernier bastion d'amis d'enfance dont le nombre s'est peu à peu émoussé au fil du temps et dont la fidélité semble à toute épreuve. Ils ont su instinctivement esquiver les questions portant sur les travaux de thèse quand d'autres me chantaient sur un air lancinant « pourquoi les p'tits bateaux qui vont sur l'eau... ». Les moments passés avec eux furent donc de vrais moments de détente.

Et puis il y a la famille, mes parents, mes sœurs et mes grands-parents, qui représentèrent des soutiens de tous les instants et dont la compassion s'est incarnée lors de la soutenance de cette thèse. J'ai pu sentir les ventres se nouer et, sur certaines têtes, voir parfois les doigts chercher les cheveux déserteurs. C'est, paradoxalement, dans ces tensions palpables, mais surtout dans leur intérêt sincère pour mon travail, que j'ai puisé une grande force pendant ces trois années.

Cette thèse est donc le fruit d'un travail d'équipe, si ce n'est toujours dans les faits, elle l'est indiscutablement dans l'esprit. Comme toujours, dans ces expériences, il y a le soldat inconnu dont la contribution, plus discrète, est pourtant loin d'être négligeable. Pour lui rendre hommage en partie, je voudrai remercier Gwen et François qui, en cette fin de thèse ou tout se bouscule, ont eu la générosité de me préparer à la réinsertion de l'après thèse en me « promenant » parfois. Enfin, merci également à Armelle, Véronique, Dan et Marc pour leur disponibilité lorsque j'avais simplement besoin de discuter ou manifester mon indignation née d'un fait divers quelconque.



*«Bien qu'on ait du coeur à l'ouvrage,  
L'Art est long, et le Temps est court.»  
Charles Baudelaire - Les Fleurs du Mal*



# Introduction générale

La planète Terre, vue de l'espace ou de la surface, apparaît immobile, stable et le plus souvent paisible. Cette illusion ne relève pourtant que de la brièveté de nos observations et les images que nous en déduisons ne sont finalement qu'un instantané de phénomènes dynamiques, complexes et parfois violents qui animent notre planète. Les anciens pensaient que «*Gaïa*», la Terre, était vivante et respectaient craintivement ses colères. Il ne nous a fallu pas moins de quelques siècles d'observations et de mesures scientifiques pour reprendre conscience que le cours de notre existence n'était en rien comparable avec la violence des processus terrestres qui ponctuèrent et ponctuèrent l'histoire dynamique de la «*mère nourricière*».

C'est une fois de plus au Siècle des Lumières que l'on redécouvre en Occident l'idée d'une Terre dont l'intérieur n'est pas le siège des enfers, n'en déplaise aux autorités traditionnelles, et c'est avec l'essor de nouvelles disciplines physiques telles que la thermodynamique, qu'au *XIX<sup>ème</sup>* siècle William Hopkins proposa un modèle de Terre à trois couches ([92]). Depuis, la géophysique est née, avec son cortège de disciplines qui, toutes combinées, permirent et permettent encore une connaissance et une compréhension de plus en plus précises des phénomènes naturels et de la structure de la Terre.

La Terre est tout d'abord constituée d'une croûte reposant sur un manteau solide séparé en deux parties, supérieure et inférieure. A quelque 3000km de profondeur, vient ensuite le noyau constitué de fer liquide en fusion au milieu duquel baigne «la graine» solide. Ce noyau est, en particulier, le siège d'un important phénomène qui a certainement protégé l'émergence de la vie : le magnétisme terrestre.

Même si les carnets secrets de la planète bleue nous sont en grande partie méconnus, nous commençons maintenant à pouvoir donner un descriptif de la structure du champ magnétique et avoir une idée de ses processus dynamiques, même si Einstein prétendait avec raison au début du *XX<sup>ème</sup>* siècle que le champ magnétique terrestre d'origine interne demeure un des problèmes importants non résolus.

Pour pouvoir le comprendre, quoi de plus naturel, dans un premier temps, que de le mesurer. Ces mesures, qui sont sans doute les mesures géophysiques les plus anciennes ([59] chapitre 1, volume I), pourront ensuite être analysées par des techniques et des modèles mathématiques qui dépendront d'hypothèses sur le champ magnétique ainsi que d'observations complémentaires effectuées à la surface de la Terre. Cela présuppose donc une première appréhension de l'origine de ses différentes sources.

## Pourquoi et comment mesurer le champ magnétique terrestre ?

### Le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est riche d'échelles spatiales et de variations temporelles. Il est la superposition de deux entités que l'on distingue en premier lieu par rapport à la surface de

la Terre : le champ magnétique interne et le champ magnétique externe, dont la lutte perpétuelle avec *le vent solaire* nous protège des radiations préjudiciables à l'épanouissement de la vie. Dans le concept de champ interne on distingue le champ principal et le champ de la croûte, ou crustal ou encore parfois lithosphérique.

Le champ principal est également connu comme le «champ nucléaire» et représente 99% du champ observé à la surface du globe. Ses sources résident à plus de 2900km de profondeur. Il est engendré par des courants électriques circulant dans la partie fluide du noyau terrestre qui, eux-même, entretiennent un champ magnétique. Pour cette raison, ce processus est communément qualifié de *dynamo auto-entretenu* ([15]), dont un premier modèle, très général, fut suggéré par le célèbre physicien Larmor en 1919. Vu de l'espace, le champ magnétique principal peut être assimilé à celui d'un dipôle placé au centre de la Terre qui serait, en moyenne, parallèle à l'axe de rotation. Si le noyau était au repos, ces courants disparaîtraient en quelques dizaines de milliers d'années par effet Joule provoquant sans nul doute un effet destructeur sur la biosphère étant donné les fortes radiations auxquelles le vivant serait soumis.

Ce champ principal varie au cours du temps, sur une échelle de quelques dizaines à quelques centaines d'années : cette variation temporelle est qualifiée de «séculaire». Si, en première approximation, la variation séculaire apparaît comme régulière, il est possible de constater des changements de tendance très rapides sur une période de 1 à 2 ans. Ces «spasmes» ont été mis en évidence depuis peu et sont maintenant connus sous le nom de «secousses géomagnétiques» ou «sauts de variation séculaire» ([22]).

Le champ crustal est bien plus statique et ne trouve ses sources que dans la lithosphère épaisse de quelques dizaines de kilomètres. Ses différences majeures avec le champ principal sont d'une part ses distributions spatiales très différentes, qui n'obéissent à aucune règle précise contrairement au champ principal majoritairement dipolaire, d'autre part, ses échelles de temps plus longues, car le champ magnétique enregistré dans la croûte n'est modifié en première approximation que par des accidents géologiques, et enfin son intensité généralement très faible en comparaison du champ principal, et qui se mesure en centaines voire en dizaines de nanoteslas. En certaines régions très localisées, cette intensité peut néanmoins atteindre plusieurs milliers de nanoteslas comme à Koursk en Russie ou Kiruna en Suède par exemple ([54]). Ce champ crustal, qualifié «d'anormal», résulte de l'aimantation rémanente de certaines roches de la croûte terrestre reflétant l'histoire géologique de la région. L'étude de ce champ est très importante pour la reconstitution de l'histoire de la Terre. L'*aimantation rémanente* a, en quelque sorte, fossilisé le champ magnétique d'une manière immuable à l'échelle humaine. Or, le champ magnétique du noyau, en traversant la croûte terrestre, engendre également de l'*aimantation induite* qui pourra varier en fonction de la dérive du champ interne ; cette variation devient dès lors importante sur une période de quelques décennies. Le champ de la croûte est lui-même le résultat de contributions de caractéristiques temporelles fort distinctes et, si l'on a coutume de penser que le champ crustal est essentiellement dominé par l'aimantation rémanente, il n'est pas exclu que ce que nous mesurons à la surface terrestre puisse être le fruit d'une importante aimantation induite ([83]). Par conséquent, il n'est pas improbable que des mesures du champ, espacées de plusieurs années mais dont on a corrigé la dérive séculaire et prises à un même endroit, puissent tout de même exhiber des valeurs sensiblement différentes. La caractérisation précise du champ crustal rémanent représente donc une difficulté toujours à l'étude.

Le champ externe, quant à lui, est engendré par des courants électriques circulant dans l'ionosphère et dans la magnétosphère, couches qui caractérisent l'atmosphère au-delà d'une centaine de kilomètres ([18]). Ces courants ont des variations temporelles rapides et répondent à l'interaction entre le courant de particules en provenance du Soleil et la magnétosphère. L'amplitude de ce champ est très variable, allant de quelques nanoteslas à plusieurs milliers de nanoteslas

lors d'évènements exceptionnels majeurs liés aux éruptions solaires. Ces bouffées de particules particulièrement énergétiques prennent également le nom de *nuage magnétique*. D'autres variations temporelles, plus lentes, sont essentiellement déterminées par les mouvements de la Terre et du Soleil et obéissent de ce fait à des lois cycliques de 24h, de 27 jours et d'un an. Elles sont également déterminées par l'activité cyclique du Soleil de 11 ans et ses harmoniques (d'un point de vue magnétique, le cycle complet du soleil serait de 22 ans [74]). Les éjections de particules chargées provenant du Soleil mettent environ deux jours à nous parvenir et sont responsables, en particulier, des phénomènes très spectaculaires comme les aurores boréales et les célèbres orages magnétiques qui peuvent perturber les réseaux électriques et les communications satellites (L'un des plus célèbres étant l'orage magnétique du 12 mars 1989 qui provoqua un «*black-out*» complet au Québec). L'observation de l'activité solaire permet de prévoir ces événements mais malheureusement pas de contrecarrer leurs effets. Ces phénomènes impressionnants affectent essentiellement les régions polaires et de haute latitude.

Toutes ces différentes contributions du champ, qu'elles soient crustales, du noyau ou externes, se superposent et il n'est pas aisé de les quantifier précisément. Chaque phénomène, selon ses caractéristiques, fait appel à des techniques de représentation différentes et obéit à des lois physiques variées. Ce sera le travail du géomagnéticien spécialiste du champ externe ou du champ interne de développer des théories permettant de les distinguer, bien que la synergie entre ces deux disciplines soit fondamentale pour la compréhension du champ magnétique dans son ensemble.

Puisque nous avons une idée des différentes contributions qui interviennent dans la mesure du champ, nous pouvons chercher à les isoler, par des techniques de mesures qui nous laisseront voir les caractéristiques propres au champ interne, crustal et externe.

## Les mesures du champ magnétique

Le champ magnétique terrestre est une grandeur vectorielle dont on n'est capable de mesurer commodément les composantes que depuis quelques dizaines d'années avec l'apparition d'appareil de mesure précis tel que le fluxgate ou le magnétomètre à protons.

Le champ magnétique est habituellement repéré dans le trièdre direct  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du référentiel géodésique. Chacune de ses composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  peut ensuite être ramenée dans le repère des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . La composante  $B_x$  est horizontale et positive si son sens est vers le Nord géographique, la composante  $B_y$  est également horizontale et dirigée vers l'Est géographique, enfin, la composante  $B_z$  est verticale et positive vers le centre de la Terre.

Le champ  $\vec{B}$  n'est pas à proprement parler le champ magnétique mais l'induction et possède les dimensions du Tesla, contrairement au champ magnétique  $\vec{H}$  relié à  $\vec{B}$  par une constante  $\mu$ , la perméabilité que nous considérons constante. Nous nous conformerons à cet abus de langage en vigueur en géomagnétisme et lorsque nous parlerons du champ magnétique, il s'agira en fait de l'induction.

## Les mesures proches de la surface terrestre

Les mesures magnétiques à la surface de la Terre sont plusieurs fois centenaires. Pour l'observation en continu des variations du champ magnétique et la mise en évidence de sa dérive séculaire, on dispose d'observatoires qui enregistrent le champ magnétique à l'échelle de la seconde avec une précision très exigeante de 0,1 nanotesla. La distribution de ces observatoires est très hétérogène à la surface du globe, avec une très faible densité dans l'hémisphère sud et dans les régions de climats extrêmes. A ce titre, la France entretient 4 observatoires dans les Terres



Australes et Antarctiques Française (TAAF), dont les contributions sont très significatives étant donné le peu d'informations dont nous disposons dans ces régions ([11]). Cette distribution générale des observatoires est plus le résultat de l'histoire économique et politique propre à chaque pays que le fruit d'une concertation scientifique, et cette répartition n'est malheureusement pas optimale pour l'étude du champ magnétique. On dénombre 200 observatoires environ à la surface du globe alors que 92 répartis uniformément permettraient un résultat équivalent ; cette répartition devrait néanmoins comprendre 8 observatoires en fond de mer très coûteux ([71]). Des projets sont à l'étude malgré la difficulté de mettre en place des systèmes d'automatisation complète de mesure pour des coûts réduits. A cette première barrière vient se superposer celle du choix des emplacements idéaux de ces nouveaux observatoires ([3]).

Les observatoires permettent également d'enregistrer les variations très rapides du champ magnétique et sont indispensables à l'observation et l'estimation du champ externe qui, pour le géomagnéticien interne, vient contaminer les contributions internes du champ ; les observatoires sont donc abondamment utilisés pour la réduction des données et constituent à l'heure actuelle la seule méthode de filtrage relativement objective.

Parallèlement à ces observatoires, la plupart des pays industrialisés, dont la majorité a aujourd'hui adhéré au réseau international INTERMAGNET (INTERnational Real-time MAGnetic observatory NETWORK), disposent de stations de répétition où le champ est enregistré tous les 5 ans. La dérive séculaire étant lente, sauf cas exceptionnel de saut de variation, cet intervalle de temps est suffisant pour la mettre en évidence. Ces mesures sont faites sur le terrain et leur qualité est souvent difficile à apprécier. En revanche, leur distribution optimisée pour les études propres à chaque pays les rend indispensables à la réduction séculaire des données.

A titre d'exemple, le réseau français de stations de répétition comportait, lors de sa mise en place en 1947, 12 stations et permis de réduire certaines mesures pour l'époque 1948. Ce réseau compte actuellement 33 stations, dont 13 furent établies en 1965 lors de la prospection aéromagnétique de la France en 1965 qui amena une nette amélioration de la connaissance du champ magnétique sur notre territoire et qui sert toujours de référence ([72]). La France possède, d'autre part, un unique observatoire permanent en métropole, situé à Chambon La Forêt.

L'acquisition des données magnétiques peut se faire à terre, en mer mais aussi dans les airs. La prospection aéromagnétique est souvent encouragée car elle est comparativement moins coûteuse que la prospection terrestre. Son avantage certain sur les autres méthodes de mesure est que nous restons très proche des sources de la croûte en restant suffisamment éloigné pour éliminer les détails superficiels provenant de l'activité humaine (La prospection sur la France s'est effectuée à 3000m d'altitude). Cette méthode est très intéressante pour les études lithosphériques. D'autre part, la rapidité d'exécution des mesures les rend moins sensibles aux variations lentes du champ magnétique. Il existe pourtant une difficulté majeure : pouvoir corriger les effets perturbateurs de l'avion dont on ne connaît pas toujours la position exacte. Pour la prospection magnétique de la France, à ces deux points vinrent s'ajouter les limites instrumentales du capteur avec lequel, seules les données de l'intensité du champ purent être mesurées. Les données de la prospection magnétique de la France de 1965 sont donc des données scalaires.

D'autres données magnétiques sont recueillies depuis quelques décennies par des ballons volant à haute altitude ( $\sim 30km$ ). Ces ballons sont autonomes et sont capables de voyager sur des distances longues dont la trajectoire est gouvernée par les vents dominants, la température et les changements de pression atmosphérique ([2]).

Enfin, il existe des mesures occasionnelles du champ magnétique essentiellement effectuées pour des objectifs de prospections archéologiques et minières dont la couverture, très localisée, ne permet de mettre en relief que les très petites structures du champ magnétique.

## Les mesures satellitaires

Après les mesures terrestres et aéromagnétiques, vint l'ère de la mesure spatiale, fruit de la combinaison des efforts internationaux. Le premier satellite embarquant un magnétomètre appartient à la famille des satellites russes Spoutnik et fut lancé en 1958. Vinrent ensuite les satellites de la génération Cosmos (1964) et la série de satellites américains POGOs (Polar Orbiting Geophysical Observatories). Nous ne nous éterniserons pas sur ces différentes missions satellites, «*vénérables vestiges des premiers efforts (spatiaux) du génie humain*», dont les mesures furent entachées d'une erreur de position importante et qui ne permettaient que la mesure de l'intensité du champ, cette intensité dont Backus montra l'insuffisance pour la connaissance du champ complet ([8]). Ces données satellites permirent néanmoins la mise en évidence de l'électrojet équatorial mais leur usage pour la modélisation régionale s'est vite révélé limité ([54]).

Les exigences draconiennes concernant le repérage de la position et la précision des mesures magnétiques furent remplies pour la première fois par le satellite MAGSAT (précision de 6 nanoteslas). Cette avancée spectaculaire devait révolutionner la connaissance du champ magnétique à l'échelle globale. La mission souffrait néanmoins d'un défaut : son orbite *héliosynchrone* (toujours face au Soleil). Le champ externe agit principalement de jour et une orbite héliosynchrone entraîna que le satellite fut continuellement soumis aux particules d'origine solaire en même temps qu'il naviguait à proximité des sources ionosphériques du champ externe. Les contaminations des mesures par des contributions du champ d'origine externe étaient telles qu'elles occultaient partiellement, mais sûrement, les contributions lithosphériques, malgré une orbite favorable à l'observation de ces dernières ( $\sim 400km$  d'altitude). Les résultats de cette mission furent fort nombreux et conduisirent en particulier à l'élaboration des premiers modèles géomagnétiques fins ([17]) et à des progrès notables dans la séparation des sources nucléaires et crustales ([68]). C'est également à partir de cette mission que fut proposé pour la première fois une technique mathématique de modélisation régionale du champ magnétique exploitant des données satellites ([44]). La brièveté de la mission ne permit pas cependant d'en déduire un modèle de variation séculaire satisfaisant ([9]).

Vingt ans après le succès de MAGSAT, le satellite danois ØRSTED fut mis en service en 1999. Son magnétomètre de bord permit la mesure du champ magnétique avec une précision record de 0,3 nanotesla. De plus, contrairement à MAGSAT, son orbite n'est pas héliosynchrone et des données de nuit, moins sujette à l'influence du champ externe, peuvent être sélectionnées pour l'étude du champ magnétique d'origine interne. Malheureusement, pour la modélisation régionale, ces données sont d'un intérêt réduit. Initialement, la mission était prévue pour voyager sur une orbite basse mais son apogée a été remontée jusqu'à 865km ce qui le place par conséquent excessivement loin des sources crustales dont les contributions à cette altitude ne sont pas toujours détectables. D'autre part, malgré l'excellente qualité supposée des données, un balancement imprévu du satellite occasionne des erreurs sur chaque composante entre 1 et 7 nanoteslas selon l'orientation du repère lié au capteur ([54]).

Le lancement du satellite ØRSTED initia le début d'une nouvelle ère spatiale. Après 20 ans sans projets, de nombreux satellites ont été lancés. Parmi ces missions, l'une nous intéresse particulièrement : la mission CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) lancée en juillet 2000 à partir d'une initiative allemande et d'une collaboration danoise, française et américaine. Cette mission embarque aussi bien des magnétomètres que des accéléromètres pour la mesure des anomalies gravimétriques. Son orbite basse quasi-circulaire (de 454km d'altitude) non héliosynchrone et la qualité des données ( $\sim 0,3nT$ ) en font l'une des missions les plus prometteuses pour l'étude régionale du champ magnétique en particulier.

Aucune de ces missions satellites ne couvre les régions polaires car l'intense activité magné-

tique qui y règne diminue considérablement la durée de vie du satellite en interagissant avec le matériel informatique de bord. Ces régions sont donc soigneusement évitées et cette lacune dans les données est principalement préjudiciable à l'élaboration de modèles de champ très précis.

Nous distinguons donc les limites inhérentes à chaque type de levé et ce n'est pas un hasard si nous disposons d'une telle variété. L'utilisation simultanée de ces différents ensembles de données, prises à des périodes différentes, permet d'isoler les contributions recherchées tout en garantissant une densité de données suffisante pour les mettre en évidence. La réduction des données à une même époque ne peut se réaliser sans l'utilisation des stations de répétition qui permettent de rendre compte de la dérive naturelle du champ magnétique. Cette tâche ne peut pas être accomplie par les mesures satellites en raison de la brièveté de leur mission, de l'espacement parfois important entre deux lancements (20 ans entre MAGSAT et ØRSTED) et surtout de leur modernité qui interdit l'étude du champ sur plus d'une cinquantaine d'années au mieux. Toutes ces méthodes de mesures sont par conséquent complémentaires et ne se relaient pas l'une l'autre.

## Les méthodes de modélisation du champ magnétique

Nous disposons maintenant d'un ensemble de mesures prises à différentes périodes qui recouvrent plus ou moins uniformément la Terre en dehors des régions polaires. La première étape consistera à réduire ces données à une même date par l'utilisation de modèles de variation séculaire et à isoler la contribution qui nous intéresse. Ce travail sera réalisé à partir des données enregistrées dans les observatoires et aux stations de répétition. Même en supposant ce travail préliminaire achevé, nous ne sommes toujours pas en mesure de connaître la valeur du champ dans une région où la couverture en données est lacunaire. Le champ magnétique doit donc être modélisé de manière à pouvoir en déduire une valeur du champ en n'importe quel point du globe. Cette modélisation s'obtient par l'intermédiaire d'hypothèses physiques sur le champ magnétique terrestre.

### La modélisation globale

Nous entendons par modélisation globale, la modélisation du champ sur la sphère entière. Dans un milieu dépourvu de source, un champ magnétique  $\vec{B}$  doit vérifier les équations de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1b)$$

La première équation caractérise l'absence de densité de courant, la seconde est toujours vérifiée pour l'induction.

L'équation (1a) entraîne que dans un domaine connexe, le champ  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel  $V$  unique à une constante près, qui, d'après (1b) satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques fut proposée pour la première fois par Gauss en 1839 ([37]) sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques du potentiel scalaire  $V$  :

$$V(r, \theta, \varphi) = V^i(r, \theta, \varphi) + V^e(r, \theta, \varphi)$$

par la superposition des deux potentiels,  $V^i(r, \theta, \varphi)$  d'origine interne et  $V^e(r, \theta, \varphi)$  d'origine externe.

La contribution interne s'écrit par exemple :

$$V^i(r, \theta, \varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)) P_n^m(\theta)$$

Nous verrons formellement les développements qui conduisent du système (1) à l'expression du potentiel. Pour le moment, qu'il nous suffise de rappeler que ce développement est idéal dans le cas d'un domaine connexe de frontière sphérique.

L'écriture en harmoniques sphériques sur la sphère est particulièrement adaptée à l'élaboration de modèles géomagnétiques internationaux de référence. Leur construction est fondée sur l'utilisation des ensembles de données sur la sphère entière, ceci permet surtout de définir une base commune sur laquelle peuvent être comparés les résultats. Depuis 1965, ces modèles de référence sont publiés tous les 5 ans par l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie (AIGA ou IAGA en anglais). Les modèles définitifs sont dénommés *DGRF* (Definitive Geomagnetic Reference Field) et sont calculés à partir de toutes les données disponibles sur la période concernée. Par opposition, nous trouvons des modèles prédictifs associés à un modèle de variation séculaire pour la période à venir, les modèles *IGRF* (International Geomagnetic Reference Field). Nous ne ferons pas l'inventaire systématique des modèles globaux. Il suffira de savoir que de 1965 à nos jours, plusieurs générations de modèles *IGRF* (*DGRF*) ont vu le jour et ont bénéficié de techniques de mesures de plus en plus sophistiquées. Quoiqu'il en soit, les modèles *IGRF* ne permettent qu'une modélisation partielle du champ magnétique dont le détail le plus fin (appelé *longueur d'onde*) avoisine 4000km en raison d'une répartition des données peu homogène sur la sphère entière; comparé à la taille de la France, le détail est 4 fois plus large que la distance couvrant Brest à Strasbourg. Cette longueur d'onde est donc trop importante pour que nous puissions utiliser ces modèles à des fins régionales. Les développements d'ordres supérieurs sont rares et le plus souvent incertains en ce qui concerne les courtes longueurs d'ondes. Leur détermination promet d'être un peu moins problématique en raison de la couverture satellitaire de plus en plus abondante ([98]). Il apparaît clair cependant que les fines structures de taille inférieure, dans notre exemple, à la taille de la France, ne pourront pas être mises en évidence simplement par ce moyen avant longtemps. Nous devons donc chercher à exploiter les données de notre région en utilisant une technique propre à la modélisation magnétique régionale.

Les harmoniques sphériques ordinaires seront d'un piètre secours dans ce cas. En effet, si nous n'en considérons qu'une portion, ce formalisme mathématique perd certaines de ses propriétés (surtout l'orthogonalité) qui rendent la modélisation régionale instable voire impossible pour les longueurs d'ondes moyennes ou courtes; ceci étant d'autant plus vrai que la région est petite.

## Quelques techniques de modélisation régionale

Plusieurs méthodes, qui prennent en compte la nature du potentiel magnétique, ont été proposées pour modéliser le champ magnétique à une échelle régionale. Ces méthodes ont été appliquées majoritairement en Europe où nous disposons d'une longue tradition de mesures magnétiques. Nous proposons de faire un bref exposé des méthodes les plus classiques dont l'algèbre est de complexité croissante afin d'en définir leurs limites pour pouvoir aborder le sujet qui nous

préoccupe : la recherche d'une bonne technique de modélisation régionale permettant de tenir compte de tous les ensembles de données magnétiques, qu'ils soient terrestres, aéromagnétique ou satellitaires.

### Modélisation polynômiale de surface

La modélisation polynômiale de surface est la plus simple à mettre en oeuvre mais son cadre d'application exclut les données prises à différentes altitudes. Son formalisme est le suivant : si  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les composantes du champ magnétique que nous recherchons sur la région, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1\theta + a_2\varphi + a_3\theta^2 + a_4\varphi^2 + \dots \\ Y \sin \theta &= b_0 + b_1\theta + b_2\varphi + b_3\theta^2 + b_4\varphi^2 + \dots \\ Z &= c_0 + c_1\theta + c_2\varphi + c_3\theta + c_4\varphi + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire que chaque composante est décrite par un polynôme des coordonnées  $(\theta, \varphi)$  des données dans le référentiel géodésique où les triplets de coefficients  $(a_i, b_i, c_i)$  sont les inconnues du problème. On peut également convertir  $(\theta, \varphi)$  en  $(x, y)$  dans une cartographie locale par projection de Lambert par exemple ([72]). Outre le fait que cette formulation n'admet pas l'incorporation de données prises à différentes altitudes, nous sommes confrontés au fait que les bases de fonctions (les polynômes en  $\theta$  et  $\varphi$ ) ne sont pas orthogonales. Nous sommes donc le plus souvent limités à la recherche d'un nombre très faible de coefficients  $(a_i, b_i, c_i)$ . Pour la modélisation régionale, cette particularité est indésirable car elle limite les possibilités d'observer les petites structures du champ magnétique ([48]).

D'autre part, nous avons vu que la théorie électromagnétique stipule que le champ magnétique doit obéir à l'équation (1b), ce qui implique  $Y \sin \theta$  dans le développement précédent. Mais cette contrainte n'est que partielle car elle ignore l'équation (1a) ; par conséquent, cette modélisation ne remplit pas toutes les caractéristiques physiques d'un champ de potentiel. Certains modèles d'intensité du champ non contraints furent également proposés pour améliorer les modèles IGRF à la surface terrestre ([87]). Enfin, en pratique, cette modélisation ne permet pas de faire de prolongement vers le haut ou vers le bas. Ainsi, si l'on obtient un modèle avec les données satellites, (dont l'altitude ne peut être que moyenne) nous ne sommes pas en mesure de l'interpréter à la surface terrestre.

### Modélisation en Harmoniques Sphériques Rectangulaires (RHA)

Les hypothèses qui circonscrivent la décomposition en Harmoniques Sphériques Rectangulaires sont moins restrictives que pour la décomposition polynômiale ([4]). La portion terrestre est supposée suffisamment petite pour être assimilée à un plan, que l'on suppose ici carré de dimension  $L$ . Les données recueillies dans la région peuvent être prises à différentes altitudes proches et sont converties en coordonnées cartésiennes. La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  conduit à l'expression du potentiel sous forme d'une double série de Fourier :

$$V = \mathcal{X}_0 x + \mathcal{Y}_0 y + \mathcal{Z}_0 z + \sum_{k=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{K-1} \mathcal{X}_{kj} e^{-i\pi(kx+jy)/L} e^{d_{kj} Z}$$

où nous avons suivi les notations de Langel et Hinze ([67]). L'expression du potentiel obéit donc strictement aux propriétés d'un champ magnétique.

Les variations en altitudes sont régies par  $e^{d_{kj}Z}$  et Haines ([48]) a noté que le potentiel ainsi créé ne tend pas vers 0 quand  $z$  tend vers l'infini car les coefficients  $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0$  et  $\mathcal{Z}_0$  sont non-nuls (ceci n'est vrai que si le domaine est non borné mais en pratique, il doit l'être). Ce potentiel ne peut donc pas s'interpréter en termes de sources d'origine interne uniquement. Pour la modélisation régionale, même si ce fait est peu connu, nous verrons qu'en fait nous rencontrons fréquemment ce problème, et ceci quelle que soit la technique.

Cette représentation souffre de limitations importantes. Un premier problème est celui de l'incorporation de données prises à des altitudes disparates, par exemple des données terrestres à  $z = 0$  et des données Magsat à  $z = 400km$ , car les fonctions  $e^{\alpha z}$  ne sont pas en mesure de nous donner une variation en accord avec la décroissance naturelle d'un champ de potentiel Newtonien. Ceci est encore plus dramatique si l'on considère les données d'ØRSTED prises à  $z = 900km$ . Ce comportement entraîne donc des difficultés pour prolonger le champ magnétique vers le bas ([81]); il n'est donc pas possible de représenter le champ magnétique autre part que dans la région où les données ont été prises.

D'autres problèmes sont notamment mentionnés par Haines ([48]) et concernent plus les spécificités mathématiques de la décomposition, comme le phénomène de Gibbs en raison de la périodicité imposée au potentiel par le développement de Fourier.

On pourrait penser que l'assimilation de la région d'étude à un plan de dimension  $L$  se dégrade considérablement avec l'altitude, rendant la région de validité de plus en plus petite. Nakagawa et Yukutake ([89]) ont néanmoins montré qu'à l'altitude Magsat ( $\sim 400km$ ) une région de dimension  $L < 2000km$  était la limite de l'hypothèse; ce qui restreint l'utilité de la technique à de petites zones. L'erreur que l'on fait à mesure que l'on se rapproche des bords reste cependant difficile à quantifier, ce qui peut conduire à des incohérences dans l'interprétation des résultats. Pour des régions de la taille d'un continent comme l'Europe, ou d'un grand pays, cette méthode devient inadaptée et d'autres moyens doivent être employés.

## La décomposition en Harmoniques sur Calotte Sphérique

Quelques années après le lancement de MAGSAT, les données furent facilement disponibles et c'est dans ce contexte que Haines ([43]) proposa la décomposition en Harmoniques Sphériques sur Calotte, SCHA, (Spherical Cap Harmonic Analysis) pour l'élaboration d'un modèle régional sur le Canada puisque la méthode RHA ne permettait pas de remplir cet objectif ([44]). SCHA fut présentée à ses débuts comme le formalisme le plus proche des Harmoniques Sphériques Ordinaires employées en modélisation globale. Cette méthode avait donc pour objectif de pouvoir incorporer simultanément des ensembles de données prises à des altitudes comprises entre la surface terrestre et les altitudes satellitaires tout en respectant les équations de Maxwell. Plusieurs modèles régionaux furent proposés par cette méthode mais finalement bien peu inclurent l'ensemble des données disponibles. Quoiqu'il en soit, comparée aux méthodes précédentes, SCHA appliquée à la modélisation sur une surface donne comparativement les meilleurs résultats ([33]) et fut même utilisée récemment pour tenter de mettre en évidence une variation séculaire régionale ([63]).

## Objectifs scientifiques

Puisque cette méthode est toujours en vigueur en modélisation régionale, nous exposerons son formalisme en détail car les difficultés liées à cette technique sont loin d'être patentes et c'est par la pratique que nous en discernons les faiblesses.

Dans une première partie, nous revenons donc sur le formalisme des Harmoniques Sphériques

sur Calotte. Après avoir explicité et apporté certains compléments théoriques et numériques indispensables, nous tentons dans un premier temps d'appliquer cette méthode à un ensemble de données uniformément réparties sur une surface. La taille de la calotte sera choisie de manière à recouvrir la France métropolitaine. Des calottes sphériques d'une taille comparable ont été utilisées pour modéliser le champ magnétique en Espagne ([108]) ou en Italie ([23]), ce qui nous permettra de nous mettre dans des conditions similaires. Pour mener à bien cet objectif, nous nous attardons plus spécifiquement sur le problème inverse et sa préparation, dont les techniques seront conservées par la suite.

Nous essayons ensuite de voir si nous pouvons appliquer SCHA à un ensemble de données synthétiques uniformément réparties entre l'altitude terrestre  $u = 0km$  et l'altitude maximale des données MAGSAT ou CHAMP (l'altitude supérieure est d'environ 500km) de manière à simuler une inversion qui tienne compte de tous les ensembles de données disponibles. L'échec de cette manipulation nous amène à reconsidérer d'une manière critique certains présupposés qui accompagnent la méthode. Nous concluons à l'aide d'indices mathématiques que la méthode n'est pas viable dans un volume de hauteur importante car il existe une incertitude non quantifiable sur les modèles.

Dans une seconde partie, nous réécrivons la modélisation régionale comme un problème de conditions aux limites dans un cône fini. Après avoir distingué quatre problèmes équivalents, nous entamons leur résolution qui fait apparaître le potentiel local magnétique comme la somme de deux potentiels, dont un est analogue à celui proposé par Haines. Le second potentiel a une forme originale et nous permet d'introduire une nouvelle classe de fonctions sphériques, les fonctions coniques de Mehler. Ces fonctions sont définies et une implémentation numérique est proposée pour leur évaluation. Nous montrons d'autre part, qu'en égalant le potentiel local (ou son gradient) et le potentiel des harmoniques sphériques (ou son gradient) sur les surfaces du cône, nous vérifions certains théorèmes élémentaires de la théorie de potentiel, ce qui nous permet de reconstruire un champ magnétique en n'importe quel point du volume conique à partir de la connaissance du champ sur ses frontières.

Fort de ces relations nouvelles entre une décomposition locale et une décomposition globale, nous exploitons le lien entre les deux formalismes pour en déduire des informations précieuses sur la vitesse de convergence des solutions et l'énergie magnétique dans le cône. Ces considérations nous permettent de poursuivre la préparation d'un problème inverse et nous proposons un ensemble de normes permettant d'anticiper une éventuelle régularisation du problème inverse.

La quatrième partie est consacrée à l'inversion de données synthétiques réparties dans le cône. Un premier résultat est donné par une inversion sur des données uniformément réparties et nous fournit un élément comparatif important avec la méthode de Haines et qui penche en faveur de notre formalisme. Nous cherchons ensuite à nous mettre dans une situation réelle en prenant la position des données terrestres, aéromagnétique et satellites disponibles sur la France mais en considérant des valeurs synthétiques du champ. Nous vérifions que nous sommes capables d'inverser simultanément toutes ces données, que le résultat est conforme aux variations d'un champ de potentiel, et que le modèle obtenu est stable.

Première partie

**L'Analyse en Harmoniques sur  
Calotte Sphériques (SCHA)**





# Chapitre 1

## Préliminaires

Nous proposons de retracer les grandes étapes de la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Cette résolution peut être trouvée dans n'importe quel ouvrage traitant des équations différentielles (par exemple [114]). Les pages qui suivent constituent la base de la résolution d'un problème de conditions aux limites dans un cône et permettent de définir l'ensemble des solutions ainsi que les différents opérateurs que nous utiliserons tout au long des pages qui suivent.

### 1.1 L'équation de Laplace

Rappelons l'expression de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \quad (1.1)$$

où  $r$  est la distance radiale du centre de la terre au point d'observation,  $\theta$  la colatitute par rapport à l'axe de référence (non nécessairement confondu avec l'axe moyen de rotation de la Terre) et  $\varphi$  la longitude par rapport à un méridien d'origine arbitraire.

Nous aurons l'occasion de décomposer l'expression du Laplacien en distinguant la partie radiale de sa partie horizontale. Nous écrivons :

$$\Delta V = \Delta_r V + \Delta_H V$$

ou encore :

$$\Delta V = \Delta_r V - \frac{L^2}{r^2}$$

avec  $L^2$  l'opérateur de moment angulaire ([7]) tel que :

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Les solutions données par cette équation sont obtenues par la méthode classique de décomposition de Fourier dans laquelle on cherche des solutions de  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  séparément :

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi) \quad (1.2)$$

En substituant (1.2) dans (1.1) on trouve le triplet bien connu d'équations différentielles pour chacune des fonctions  $R(r)$ ,  $P(\theta)$  et  $\Phi(\varphi)$  :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \lambda R \quad (1.3)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + P(\theta) (\lambda \sin^2 \theta - m^2) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi) \quad (1.5)$$

L'équation différentielle (1.3) peut aussi s'écrire :

$$L_r R(r) = -\lambda R \quad (1.6)$$

avec l'opérateur :

$$L_r = -\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \quad (1.7)$$

Nous aurons l'occasion dans certains cas, de considérer les fonctions radiales  $R_p$  comme fonctions propres de l'opérateur  $L_r$  associées aux valeurs propres  $-\lambda$ .

## 1.2 Expression des solutions

### 1.2.1 Equation en r

Cette équation homogène est une équation de type Euler ([114]). Comme  $r > 0$ , on pose  $r = ae^t$  et on se ramène à une équation différentielle de second ordre à coefficients constants, dénommée équation caractéristique de (1.3), de la forme :

$$\frac{dT^2}{dt^2} + \frac{dT}{dt} - \lambda T \quad (1.8)$$

dont la forme de la solution dépend de la valeur de son discriminant  $\Delta = 1 + 4\lambda$ . En écrivant  $\lambda = n(n+1)$  on distingue différents cas selon la valeur de  $\Delta$  :

1. **Si  $\lambda > -1/4$  les valeurs de  $n$  sont réelles** et la solution radiale s'écrit :

$$\boxed{R(r) = A \left( \frac{r}{a} \right)^n + B \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1}} \quad (1.9)$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes arbitraires réelles qui dépendent de la normalisation adoptée.

2. **Si  $\lambda < -1/4$  les valeurs de  $n$  sont complexes** et la solution s'écrit :

$$R(r) = A^* \left( \frac{r}{a} \right)^{n^*} + B^* \left( \frac{a}{r} \right)^{n^*+1} \quad (1.10)$$

de la même manière que (1.9) mais avec des constantes  $A^*$  et  $B^*$  complexes et :

$$n^* = -\frac{1}{2} + i\sqrt{-\Delta}$$

On préférera cependant la notation suivante :

$$R(r) = \sqrt{\frac{a}{r}} \left( A \cos \left( \sqrt{\frac{-\Delta}{2}} \log \left( \frac{r}{a} \right) \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{-\Delta}{2}} \log \left( \frac{r}{a} \right) \right) \right) \quad (1.11)$$

où  $A$  et  $B$  sont maintenant deux constantes réelles qui dépendent des conditions aux limites.

3. Enfin il existe un dernier cas,  $\lambda = -1/4$  dont la solution est :

$$R(r) = \sqrt{\frac{a}{r}} \left( A \log \left( \frac{r}{a} \right) + B \right) \quad (1.12)$$

mais que nous n'aurons pas l'occasion de rencontrer.

Les trois formes des solutions radiales (1.9), (1.10) et (1.12) qui dépendent de l'intervalle auquel appartiennent les valeurs propres  $\lambda$  sont écrites sous leur forme la plus générale et indépendamment des conditions aux limites. Ainsi, les solutions en  $(r/a)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) peuvent ne pas être retenues comme solutions car ces fonctions divergent quand  $r \rightarrow \infty$ . Ce cas est notamment rencontré lorsque l'on impose que le potentiel  $V$  est nul en l'infini. De même on exclut les solutions de la forme  $(a/r)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) lorsque l'on fait tendre  $r \rightarrow 0$ .

#### Remarque

*En géomagnétisme, il est souvent très utile de pouvoir extraire les différentes contributions «interne» ou «externes» du champ. La définition d'interne ou d'externe se fait habituellement en relation avec l'expression de la fonction radiale et des termes  $(r/a)$  ou  $(a/r)$ ; or, pour la solution radiale (1.10) nous ne pouvons plus distinguer les deux contributions, car chaque contribution prise indépendamment est complexe. Nous reviendrons sur ce point important de discussion au chapitre 7.4.*

### 1.2.2 Equation en $\theta$

La diversité des solutions en  $\theta$  ne nous permet pas d'en faire une liste exhaustive. Chaque solution, associée à des conditions aux limites particulières, sera décrite au fur et à mesure des rencontres. Il y a cependant quelques étapes immuables permettant d'entrevoir l'allure des solutions. On écrit souvent l'équation (1.4) en faisant le changement de variable  $x = \cos \theta$  de manière à faire apparaître une équation du type Sturm-Liouville :

$$-\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right) + \frac{m^2}{1-x^2} P(x) = \lambda P(x) \quad (1.13)$$

En posant :

$$P(x) = (1+x^2)^{m/2} F(x) \quad (1.14)$$

on trouve que l'équation s'écrit alors :

$$(1-x^2) \frac{d^2 F(x)}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dF(x)}{dx} + (\lambda - m(m+1)) F(x) = 0 \quad (1.15)$$

Si enfin on réalise le changement de variable suivant :

$$t = \frac{1}{2} (1-x)$$

l'équation différentielle (1.15) devient :

$$t(1-t) \frac{d^2 F(t)}{dt^2} + (m+1)(1-2t) \frac{dF(t)}{dt} + (\lambda - m(m+1)) F(t) = 0 \quad (1.16)$$

C'est un cas particulier de l'équation hypergéométrique qui, au voisinage de 0, admet une solution développable en série entière de  $t$ , de la forme :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

En écrivant  $\lambda = n(n+1)$  un calcul montre que le facteur  $a_j$  de la récurrence s'écrit comme :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{j+1} = \frac{(j+m-n)(j+m+n+1)}{(j+1)(j+m+1)} a_j \end{cases}$$

Puisque  $\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = 1$ , cette série est absolument convergente pour  $\left| \frac{1-x}{2} \right| < 1$ , c'est à dire dans l'intervalle  $[0, \pi[$  en  $\theta$ .

En tenant compte de (1.14) on trouve donc l'expression de la solution en  $\theta$  sous la même forme :

$$\boxed{P_n^m(\cos \theta) = K_n^m \sin^m \theta F\left(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-\cos \theta}{2}\right)} \quad (1.17)$$

avec  $K_n^m$  constant de normalisation.

Cette expression formelle pourrait être qualifiée de *canonique* car est valable quelle que soit la valeur de  $n$ , réelle ou complexe. Les fonctions  $P_n^m$  ainsi définies sont les fonctions de Legendre associées et nous aurons l'occasion de proposer des méthodes d'évaluation basées sur les propriétés de récurrence des coefficients  $a_j$ .

Remarquons enfin que si l'on définit l'opérateur de Legendre  $L_m$  tel que :

$$L_m = -\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \frac{m^2}{1-x^2} \quad (1.18)$$

alors l'équation différentielle s'écrit de manière synthétique :

$$\boxed{L_m P_n^m = \underbrace{n(n+1)}_{\lambda} P_n^m} \quad (1.19)$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de  $m$ , les valeurs de  $\lambda$  peuvent être interprétées comme *les valeurs propres* de l'opérateur de Legendre. L'équation (1.13), qui est de type Sturm-Liouville, est ainsi paramétrée par  $m$  et il existera autant d'opérateur  $L_m$  que de valeurs de  $m$ . La fonction  $P_n^m$  apparaît comme la *fonction propre* associée à la valeur propre  $\lambda$ . Cette propriété, extrêmement avantageuse, sera largement exploitée dans les parties 2 et 3 ainsi que pour la recherche de la normalisation et des produits scalaires des fonctions entre elles (voir annexe A).

En toute rigueur, l'espace des solutions de l'équation (1.15) est plus vaste car il fait intervenir de manière formelle les fonctions de Legendre de deuxième espèce, les  $Q_n^m(x)$ . De la même manière que pour la solution des fonctions radiales, la forme complète des solutions est une combinaison linéaire des  $P_n^m$  et des  $Q_n^m$  de telle sorte que,

$$\Theta_n^m(x) = \alpha P_n^m(x) + \beta Q_n^m(x)$$

Nous excluons les solutions de deuxième espèce car elles tendent vers l'infini en  $x = -1$  et  $x = 1$ , c'est à dire en  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

### 1.2.3 Equation en $\varphi$

On cherche une solution pour les fonctions  $\Phi(\varphi)$  qui soit  $2\pi$ -périodique. Ceci impose que  $m$  soit entier et que les fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$  forment une base de solution pour  $m > 0$ . Donc on trouve simplement :

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes réelles. Nous adapterons sans autre discussion la solution en  $\varphi$  au cas géomagnétique et nous écrirons directement :

$$\Phi(\varphi) = G_n^m \cos(m\varphi) + H_n^m \sin(m\varphi) \quad (1.20)$$

où  $\{G_n^m, H_n^m\}$  sont les coefficients de Gauss associés à l'ordre  $m$  et au degré  $n$  (entier, réel ou complexe) et caractérisent l'amplitude de l'harmonique de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .

## 1.3 A propos du potentiel

En injectant (1.11) ou (1.10) ainsi que (1.17) et (1.20) dans (1.2), l'expression du potentiel, solution de l'équation de Laplace devient finalement :

$$V = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a R_p(r) \left( G_{n_p}^m \cos(m\varphi) + H_{n_p}^m \sin(m\varphi) \right) P_{n_p}^m(\theta) \quad (1.21)$$

Cette expression du potentiel caractérise une situation physique générale d'un Laplacien nul, les coefficients de Gauss  $G_{n_p}^m$  et  $H_{n_p}^m$  caractérisant la situation particulière d'un modèle de champ magnétique précis. Ces coefficients seront donc recherchés pour définir de manière unique un potentiel satisfaisant les observables : les données magnétiques. Nous avons changé la notation par souci de généralité. En effet l'indice  $p$  représente le dénombrement des degrés  $n$  associés à la valeur propre  $\lambda$ . Dans le développement en harmoniques sphériques ordinaires, les degrés  $n$  étant entiers, on les utilise volontiers pour indiquer la somme. Dans le cas le plus général cependant, le degré, nous l'avons dit plus haut est réel ou complexe et la somme doit être indiquée par un nombre entier distinct. D'où l'introduction d'un indice  $p$  permettant de référencer les différents degrés  $n_p$ . D'autre part, nous avons exprimé les sommes à partir de  $p = 0$  et  $m = 0$ . Là encore, il faudra distinguer le cas où  $n$  est entier (cas des harmoniques globales) pour lesquelles les fonctions de Legendre généralisées sont nulles si  $n < m$  du cas où  $n_p$  est réel ou complexe pour lesquelles ces considérations n'ont plus cours. On retiendra que le potentiel exprimé en harmoniques sphériques sur la sphère entière est un cas particulier de l'expression générale de  $V$  par (1.21). Le coefficient  $a$  en facteur permet aux coefficients de Gauss d'avoir les dimensions de l'induction  $\vec{B}$ , que nous appellons champ magnétique conformément à l'abus de langage en vigueur en géomagnétisme (lorsque les fonctions radiales sont sans dimension, ce qui pourra dépendre de leur norme).

Une notation que nous aurons souvent l'occasion de rencontrer est celle qui exprime sous forme synthétique les coefficients *internes* et *externes*. Cette notation intervient lorsque la fonction radiale est de la forme (1.9).

Si :

$$R_n(r) = A \left( \frac{r}{a} \right)^n + B \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1}$$

on peut définir ([20], Tome II, p639) :

$$R_n^c(r) = a \left( C_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} + (1 - C_n) \left( \frac{r}{a} \right)^n \right) \quad (1.22)$$

$$R_n^s(r) = a \left( S_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} + (1 - S_n) \left( \frac{r}{a} \right)^n \right) \quad (1.23)$$

avec :

$$C_n = \frac{G_n^{m,i}}{G_n^{m,i} + G_n^{m,e}}$$

$$S_n = \frac{H_n^{m,i}}{H_n^{m,i} + H_n^{m,e}}$$

Remarquons que ces définitions n'ont de sens que si  $G_n^{m,i} + G_n^{m,e} \neq 0$  ! Ce cas étant écarté,  $C_n$  et  $S_n$  n'ont aucune raison de varier entre 0 et 1 comme l'affirme Chapman qui a sans aucun doute basé ses propos uniquement sur les caractéristiques du champ magnétique terrestre global ([20]). Pour ce dernier, on a bien effectivement  $C_n$  et  $S_n$  inférieurs à 1 puisque le champ interne est prédominant.

A l'aide de ces transformations, un potentiel s'écrivant sous la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \frac{a}{r} \right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m \quad (1.24)$$

$$+ a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \frac{r}{a} \right)^{n_k} (G_{n_k}^{e,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{e,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m$$

prend l'expression condensée suivante :

$$\boxed{V(r, \theta, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( R_{n_k}^c(r) \widehat{G}_{n_k}^m \cos(m\varphi) + R_{n_k}^s(r) \widehat{H}_{n_k}^m \sin(m\varphi) \right) P_{n_k}^m} \quad (1.25)$$

avec, comme nouveaux coefficients  $\widehat{G}_{n_k}^m$  (respectivement  $\widehat{H}_{n_k}^m$ ) :

$$\widehat{G}_{n_k}^m = G_{n_k}^{m,i} + G_{n_k}^{m,e}$$

Cette transformation deviendra vite appréciable lors des manipulations algébriques parfois lourdes qu'impose l'expression du potentiel.

# Chapitre 2

## Le formalisme de SCHA

Les différentes techniques de modélisations régionales que nous avons évoquées dans les pages d'introduction sont le plus souvent limitées par leur approximation et par leur domaine d'application. Ainsi les modélisations régionales du champ magnétique par décompositions polynômiales ne permettent ni l'utilisation correcte de données prises à différentes altitudes, ni une modélisation correcte sur une région dont la surface ne peut plus être assimilée à un plan tangent à la sphère. Afin de pallier ce problème, Haines ([43]) propose une nouvelle méthode de modélisation régionale **SCHA** (*Spherical Cap Harmonic Analysis*), dont le formalisme mathématique général est très similaire à celui des harmoniques sphériques sur la sphère entière.

Nous présenterons dans un premier temps la technique proposée par Haines, les différentes fonctions impliquées dans le développement ainsi que quelques techniques de calcul permettant leur évaluation. Après avoir proposé diverses améliorations de la méthode et préparé les ingrédients nécessaires au problème inverse, nous verrons quelques exemples d'application de *SCHA* à l'inversion de données synthétiques diversement réparties, pour finalement soulever des problèmes conceptuels propres à la méthode.

### 2.1 Fonctions de base de SCHA

Dans un volume conique délimité par trois surfaces, une inférieure en  $r = a$ , une autre définie en  $r = b$  et une dernière, latérale en  $\theta = \theta_0$  le champ magnétique en l'absence de source s'écrit comme le gradient d'un potentiel  $V$ .

L'équation  $\text{div} \vec{B} = 0$  conduit à la résolution de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

dont la solution générale est donnée dans les préliminaires.

#### 2.1.1 Problème de Sturm-Liouville pour les fonctions de Legendre généralisées

Dans les discussions précédentes, les solutions qui s'expriment en fonction de la variable  $\theta$ , prennent une forme générale  $P_{n_l}^m(\cos \theta)$  de degré  $n_k$  non nécessairement entier, d'où la terminologie de *fonctions de Legendre généralisées*.

Lorsque l'on introduit une ou des conditions aux limites sur les fonctions de Legendre, on impose qu'elles s'adaptent et deviennent propres au problème particulier que l'on cherche à résoudre ; problème défini par une géométrie et des considérations physiques particulières.



De façon générale, les conditions aux limites sont des conditions de Sturm-Liouville régulières en  $\theta_0$ , inférieur à  $\pi$ , qui n'est pas un point singulier de l'équation (1.13), et une condition singulière en  $\theta = 0$ , qui est un point singulier de l'équation (1.13). La condition singulière que l'on impose est que la solution de (1.13) reste bornée en  $\theta = 0$ , ce qui écarte les fonctions de Legendre de deuxième espèce. La condition régulière s'écrit d'une manière générale, pour les fonctions de Legendre de première espèce, par :

$$\alpha P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} + \beta \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} = 0 \quad (2.1)$$

c'est à dire comme une combinaison linéaire de conditions de Dirichlet et de Neumann.

Dans les cas particuliers où  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$  on pose :

$$\frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} = 0 \quad \text{ou} \quad P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} = 0 \quad (2.2)$$

conditions qui répondent respectivement aux définitions de *conditions homogènes* de Neumann et de Dirichlet.

Conformément à la théorie de Sturm-Liouville, l'opérateur  $L_m$  défini par (1.18) est auto-adjoint sur l'espace des fonctions de classe  $C^2$  sur  $[0, \theta_0]$ , qui vérifient les conditions (2.1) ou leurs cas particuliers (2.2), pour le produit scalaire :

$$\langle f(\theta), g(\theta) \rangle_{\mathcal{L}^2([0, \theta_0])} = \int_0^{\theta_0} f(\theta) g(\theta) \sin \theta d\theta$$

Le caractère auto-adjoint de l'opérateur implique des valeurs réelles pour les valeurs propres  $\lambda_k = n_k(n_k + 1)$  dénombrées par l'indice  $k$ . Les fonctions de Legendre, fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville associées aux valeurs propres  $\lambda_k$ , forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2([0, \theta_0])$ , muni du produit scalaire défini plus haut.

Ces fonctions adoptent comme expression générale une forme en fonction hypergéométrique (1.17) et s'écrivent, dans le cas de fonctions non normées :

$$P_{n_k}^m = \frac{(-1)^m \Gamma(n_k + m + 1)}{2^m m! \Gamma(n_k - m + 1)} \sin^m \theta F \left( m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.3)$$

Cette définition est la plus largement utilisée dans les ouvrages traitant des harmoniques sphériques ([96],[51]). Il arrive cependant de les rencontrer sans le facteur  $(-1)^m$  ([55]). Ce facteur étant déterminant dans les relations de récurrence auxquelles obéissent les fonctions de Legendre, ce simple changement conduit parfois à de redoutables confusions lorsque la définition n'est pas explicitement mentionnée.

De manière à pouvoir entreprendre des comparaisons pertinentes entre les harmoniques d'ordres  $m$  et de degrés  $n_k$  différents, il est nécessaire de leur attribuer une norme sur l'intervalle de définition. Pour une comparaison directe des harmoniques, on peut préférer une normalisation complète des fonctions. En géophysique, cependant, on choisit traditionnellement la semi-norme de Schmidt ([59]) pour laquelle les fonctions de Legendre s'écrivent toujours comme (1.17) mais avec maintenant le facteur de normalisation :

$$\begin{aligned}
K_{n_k}^m &= \frac{2^{1/2}}{2^m m!} \left[ \frac{\Gamma(n_k + m + 1)}{\Gamma(n_k - m + 1)} \right]^{1/2} \quad \text{pour } m \neq 0 \\
K_{n_k}^0 &= 1 \quad \text{pour } m = 0
\end{aligned}$$

où la fonction  $\Gamma(a)$  est la fonction gamma incomplète, généralisation des fonctions factorielles dans le plan complexe.

Si cette définition en harmoniques sphériques sur la sphère apporte des propriétés intéressantes, notamment dans l'expression finale de la norme, la normalisation de Schmidt sur une calotte perd un peu de son intérêt. De manière à pouvoir restituer la méthodologie de *SCHA* dans les mêmes termes que celle de la modélisation globale et la comparer avec elle, nous adopterons cependant cette normalisation. Il n'est pas superflu de remarquer que la norme définie selon Schmidt induit des facteurs de normalisations de définitions différentes pour  $m = 0$  et  $m \neq 0$ . Néanmoins, cette définition permet lors des calculs de produits scalaires définis dans la partie 3 de faire apparaître une expression générique de la norme au carré indépendante de  $m$ .

### 2.1.2 Intervalle de définition

D'après les développements préliminaires, les fonctions de Legendre sont générées par les fonctions hypergéométriques qui s'écrivent sous la forme :

$$F \left( m - n_k, m + n_k + 1, m + 1, \underbrace{\frac{1 - \cos \theta}{2}}_x \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sin^{2j} \frac{\theta}{2} \quad (2.4)$$

Le développement en série a un rayon de convergence  $|\sin \frac{\theta}{2}| < 1$ . Le point  $\theta = \pi$  est par conséquent interdit dans ce développement. Or nous avons qualifié l'expression des fonctions de Legendre de *canonique*, donc valable quelles que soient les valeurs de  $n_k$  et de  $m$ . Les points singuliers, sur la coupure, nécessitent donc d'être définis car ils sont physiquement nécessaires. On peut montrer que, si  $n_k$  appartient à  $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ ,  $P_{n_k}^m$  se comporte comme  $\tan^m \frac{\theta}{2}$  quand  $\theta$  tend vers  $\pi$ . Or, l'expression (2.4) est valable également pour les harmoniques sphériques ordinaires qui sont définies sur la sphère entière. Les fonctions de Legendre qui sont définies sur l'intervalle  $[0, \pi]$  sont cependant solutions d'un problème de Sturm-Liouville singulier, dont les conditions aux limites sont les  $P_n^m$  bornées sur  $[0, \pi]$ . Ces conditions excluent les degrés  $n_k$  non entiers. Si  $n_k$  est entier, la série définissant les fonctions hypergéométrique se réduit à une somme finie et la question de convergence est résolue. Dans l'étude des calottes sphériques, nous n'utiliserons que des angles limites  $\theta_0$  inférieurs à  $\pi/2$ , auquel cas la série (2.4) est normalement convergente.

Cette différence de définition nous montre que les fonctions de Legendre définies avec des conditions en limites en  $\theta = \theta_0$  ( $\theta_0 < \pi$ ) n'autorisent pas la continuation du champ à l'extérieur du domaine  $[0, \theta_0]$  de définition car elles entraînent invariablement une singularité au pôle opposé de la calotte sphérique en  $\theta = \pi$ .

### 2.1.3 Représentations des fonctions et des harmoniques

#### Fonctions de Legendre

Nous avons tracé figure (2.1) différentes fonctions de Legendre de degrés  $n_k$  différents pour l'ordre  $m = 1$ . Nous avons pris comme condition à la limite  $\theta_0 = 40^\circ$  la condition homogène de

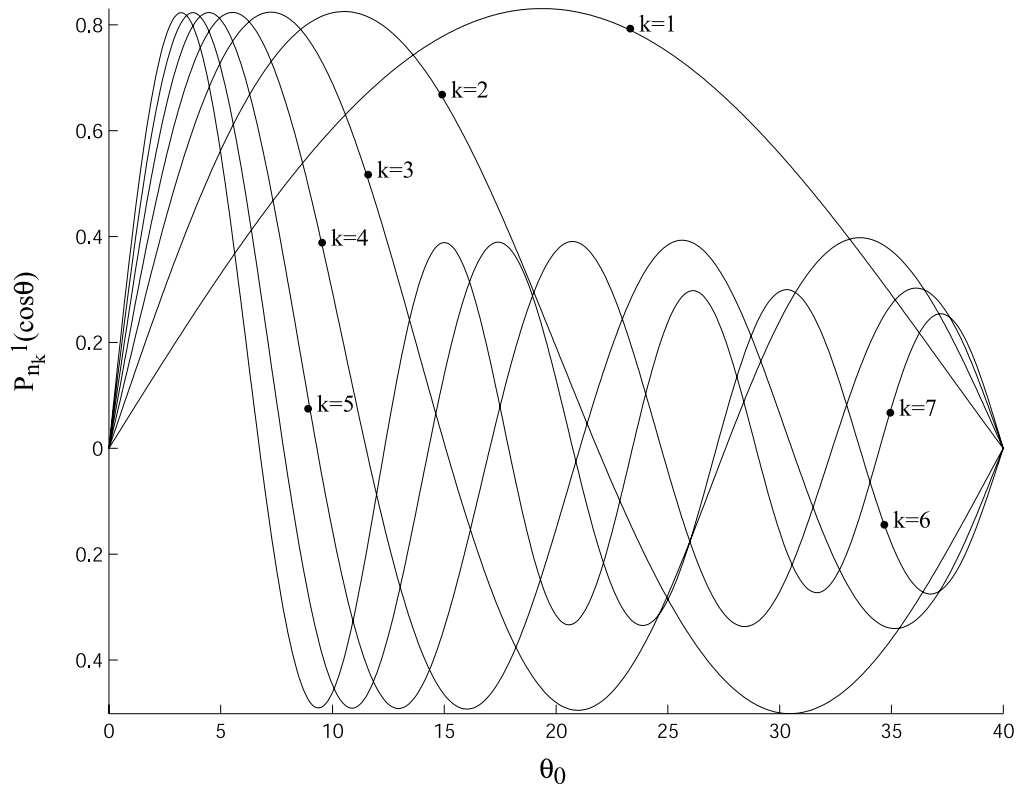


FIG. 2.1 – Fonctions généralisées de Legendre pour  $m = 1$  et  $k = 1..7$ . La figure montre le comportement des fonctions pour les racines  $n_k$  telle que les fonctions soient nulles en  $\theta_0 = 40^\circ$  (condition homogène de Dirichlet).

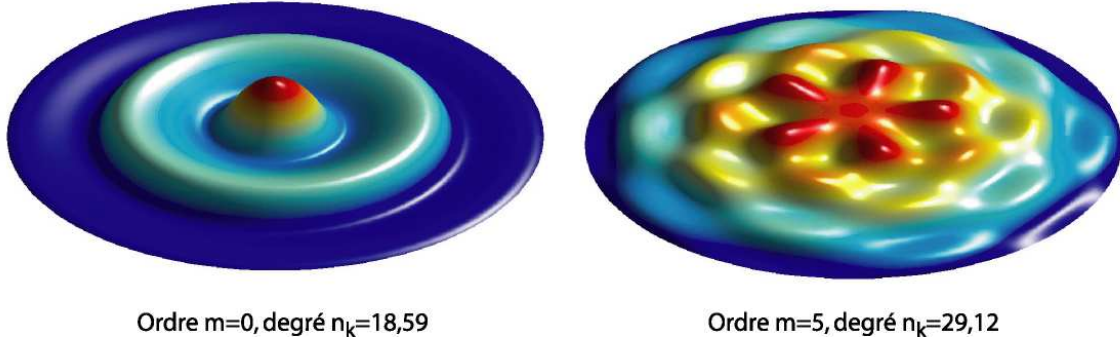


FIG. 2.2 – Représentation des harmoniques sur calotte sphériques pour  $m = 0$  et  $k = 3$  à gauche et  $m = 5$ ,  $k = 5$  à droite. Les harmoniques ont été tracées pour une calotte d’ouverture  $\theta_0 = 40^\circ$ . Le choix de l’ouverture ne modifie pas la forme générale de l’harmonique et on retrouvera le même comportement pour n’importe quelle calotte d’indices  $m$  et  $k$  identiques.

Dirichlet, soit  $P_{n_k}^m(\cos \theta_0) = 0$ . Nous constatons que ces fonctions ont  $k + 1$  racines et qu’elles décomposent l’intervalle  $[0, \theta_0]$  en  $k$  segments. Pour la définition des fonctions de Legendre par une condition homogène de Neumann, on montre qu’il y a  $k + 1$  racines sur l’intervalle  $[0, \theta_0]$  mais qu’elles décomposent l’intervalle en  $k + 1$  segments. Une remarque digne d’intérêt concerne le caractère pseudo-périodique de ces fonctions, pour  $k$  assez grand, qui justifiera de réintroduire l’idée de *longueur d’onde*.

### Harmoniques

De la même manière que pour les harmoniques sphériques sur la sphère, on peut représenter les harmoniques sur calotte sphériques d’après les définitions précédentes. Une harmonique est un élément des sommes infinies du développement en série représentant le potentiel et se définit par conséquent à  $m$  et  $k$  fixés. On représente sur la figure (2.2) deux harmoniques définies par :

$$Y_{n_k}^{c,m} = \cos(m\varphi) P_{n_k}^m(\theta) \quad (2.5)$$

l’une pour  $m = 0$  et  $k = 3$ . et l’autre pour  $m = 5$  et  $k = 5$ . Sur la figure de gauche, l’harmonique est appelée *harmonique zonale* car elle ne dépend pas de la longitude  $\varphi$ . La figure de droite montre la façon dont l’espace de la calotte est décomposé par les harmoniques sphériques. Remarquons que la décomposition est indépendante de la dimension de la calotte : quelle que soit l’ouverture de l’angle  $\theta_0$  on retrouvera le même schéma pour n’importe quelle calotte sphérique pour des indices  $m$  et  $k$  identiques, malgré des valeurs de  $n_k$  différentes. Les décompositions longitudinales nettement visibles sont en accord avec le découpage de la fonction cosinus pour l’ordre  $m = 5$ , la période étant  $2\pi/5$ . De la même façon, le choix de l’indice  $k = 3$  à gauche et  $k = 5$  à droite permet la décomposition de la colatitude  $\theta$  en  $k$  segments, nous laissant ainsi deviner, d’après la règle précédente, que les harmoniques ont été calculées à partir d’une condition homogène de Neumann. La valeur de  $n_k$  donnée sur la figure correspond à la 5<sup>ième</sup> racine de l’équation  $\left. \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0$ .

Il est important de constater que les éléments de surfaces ainsi créés ne sont pas identiques, ce qui découle tout naturellement de la pseudo-périodicité des fonctions de Legendre.

## 2.2 Les conditions aux limites de Haines

### 2.2.1 Définition du problème

Pour trouver des fonctions permettant de construire une base sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ , Haines propose les conditions aux limites suivantes ([43]) :

$$\begin{aligned} P_{n_p}^m(\cos \theta_0) &= 0 \\ \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta}(\cos \theta_0) &= 0 \end{aligned}$$

qui, avec la condition  $P_n^m(0)$  fini, définissent deux problèmes de Sturm-Liouville distincts. Les indices  $p$  et  $j$  permettent le dénombrement des racines  $n$  solutions des équations et  $p \neq j$ . Dans le formalisme de Haines, ces conditions aux limites sont écrites de telles manière que :

$$P_{n_k}^m(\cos \theta_0) = 0 \text{ pour } k - m \text{ impairs} \quad (2.7a)$$

$$\frac{dP_{n_k}^m}{d\theta}(\cos \theta_0) = 0 \text{ pour } k - m \text{ pairs} \quad (2.7b)$$

Cette dernière notation sera justifiée au chapitre 3 section 3.1.5. Les fonctions de Legendre associées,  $P_{n_k}^m$ , sont caractérisées par des degrés  $n_k(m)$  réels et des ordres  $m$  entiers. L'évaluation de ces fonctions se fera donc d'abord par la recherche des racines  $n_k$  telles que les conditions aux limites soient repérées par la parité de  $k - m$ . Par superposition, les solutions correspondant au mélange de ces deux conditions aux limite permettent de définir un potentiel  $V$  non nul et à dérivée normale également non nulle sur les bords du cône. En effet, (2.7a) implique que  $\frac{dP_{n_k}^m}{d\theta}(\cos \theta_0) \neq 0$  pour  $k - m$  impairs et (2.7b) implique  $P_{n_k}^m(\cos \theta_0) \neq 0$  pour  $k - m$  pairs car il n'est pas possible d'annuler simultanément la fonction et sa dérivée sur le bord  $\theta = \theta_0$  sans que la fonction soit identiquement nulle sur la calotte.

Cette décomposition peu orthodoxe, puisqu'elle conduit à la construction de deux bases orthogonales complètes, permet cependant de contourner la difficulté de la représentation du champ magnétique sur les bords du cône. En effet, en ayant choisit (2.7a) ou (2.7b) uniquement, nous aurions obtenu les composantes  $Y$  et  $Z$  ou la composant  $X$  du champ, définies par (2.9), nulles sur les bords de la calotte. Ceci entraîne une importante discontinuité avec le champ magnétique sur le bord ou à l'extérieur du cône. En règle générale, lorsque les fonctions modélisantes (que l'on assimile au potentiel sur la calotte ou à son gradient) n'ont pas les même conditions aux limites que les fonctions modélisées (le potentiel physique ou son gradient : le champ magnétique), la reconstruction provoque des phénomènes de bords connus sous la terminologie de *phénomènes de Gibbs* qui apparaissent quand la convergence des séries n'est pas uniforme ([47]). Le choix des conditions de Haines permet de réduire ce phénomène mais ne le supprime aucunement car d'une part la convergence des séries n'a pas été démontrée, d'autre part, l'expérience montre que les phénomènes de bords sont bien présents (Habituellement, les utilisateurs de *SCHA* masquent les effets de bords en ne considérant que la zone au centre de la calotte ; on distingue cependant des oscillation irréalistes bien visibles dans les modèles ; par exemple, De Santis ([23]) le montre pour la modélisation du champ sur l'Italie).

### 2.2.2 Implications sur la valeurs des racines $n_k$

Le choix des conditions homogènes sur la fonction de Legendre ou sur sa dérivée entraîne plusieurs propriétés intéressantes. Nous avons vu que l'opérateur  $L_m$  était auto-adjoint, ce qui

implique que les valeurs propres  $\lambda_k = n_k(n_k + 1)$  sont réelles. On peut d'autre part montrer par un raisonnement par l'absurde que les conditions aux limites sur les fonctions de Legendre par (2.7a) ou sur sa dérivée par (2.7b) entraînent nécessairement :

$$\boxed{\lambda_k \geq 0}$$

Or, nous avons écrit dans la section (1.2) que si  $\lambda_k > -1/4$  alors les degrés  $n_k$  des fonctions de Legendre sont réels et nous sommes bien dans ce cas particulier. Soit :

$$\boxed{n_k \in \mathbb{R}}$$

Une première remarque permet de plus d'affirmer que les racines  $n_k$  sont positives ou nulles. Nous pouvons en effet nous appuyer sur les propriétés des fonctions de Legendre et montrer que puisque ([96], Tome II, chap 4, equation 26) :

$$P_{n_k}^m(\theta) = P_{-n_k-1}^m(\theta)$$

alors l'espace des solutions défini par  $n_k \geq 0$  est complet.

De plus, un autre raisonnement par l'absurde, montre que les conditions (2.7a) et (2.7b) ne peuvent être vérifiées que si nous avons en plus la condition :

$$\boxed{n_k \geq m}$$

Les degrés  $n_k$  réels des fonctions de Legendre généralisées sont toujours supérieurs ou égaux aux ordres  $m$ . Remarquons que cette propriété est tout à fait similaire à celle des fonctions de Legendre associées de degrés  $n$  entiers et d'ordres  $m$  entiers ou nul.

Il est tout à fait possible de montrer en particulier que la condition sur la dérivée des fonctions de Legendre (2.7b) entraîne pour  $m = 0$  que la première racine  $n_k = 0$ . Nous garderons en mémoire ce détail important qui intervient dans la seconde partie.

### 2.2.3 Implications sur l'orthogonalité des fonctions de Legendres généralisées.

Les deux ensembles de fonctions  $P_{n_k}^m$  construits par (2.7a) ou (2.7b) forment donc chacun une base complète orthogonale au sens du produit scalaire sur  $\mathcal{L}^2([0, \theta_0])$  de sorte que :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_k}^m P_{n_{k'}}^m \sin \theta d\theta = \delta_{k,k'}$$

à l'intérieur de chaque ensemble, pour  $k - m$  impair ou pour  $k - m$  pair. En revanche, le mélange des deux bases conduit à :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_k}^m P_{n_{k'}}^m \sin \theta d\theta \neq \delta_{k,k'} \text{ pour } k - m \text{ impairs } \underline{\text{et}} \text{ pour } k' - m \text{ pairs.}$$

Par nature, le mélange des conditions aux limites conduit donc à un problème mal posé puisque ni l'orthogonalité des fonctions ni celle des gradients n'est vérifiée. Cette orthogonalité se dégrade d'autant plus que le développement du potentiel est poussé loin puisque chacune des deux bases est complète sur  $\mathcal{L}^2([0, \theta_0])$ .

On trouvera en annexe les formules générales des produits scalaires entre les différents types de fonctions de Legendre, dont quelques unes données par Haines dans son article original de 1985 présentent des erreurs typographiques, par la suite corrigées (par exemple [23]).

### 2.3 Expression du champ magnétique

L'appartenance à l'ensemble  $\mathbb{R}$  des degrés  $n_k$  impose la forme de la fonction radiale. Puisque de plus  $\lambda > -1/4$  on trouve d'après (1.9) que :

$$R(r) = A \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k} + B \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1}$$

D'où l'expression du potentiel solution :

$$\begin{aligned} V = & a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m}(t) \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m}(t) \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m(\theta) \\ & + a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k} (G_{n_k}^{e,m}(t) \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{e,m}(t) \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m(\theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où les coefficients de Gauss ont été écrits de manière générale comme dépendants du temps et où l'on a incorporé les coefficients de Gauss dits *externes* repérés par l'indice  $e$ . Pour les applications ultérieures de la première partie, sauf mention contraire, on considérera uniquement le cas statique ainsi que les coefficients de Gauss dits *internes*.

Le champ magnétique interne correspondant, gradient du potentiel  $V$ , s'écrit donc :

$$B_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} \frac{dP_{n_k(m)}^m}{d\theta} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) \quad (2.9a)$$

$$B_y = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} \frac{m}{\sin\theta} P_{n_k(m)}^m (G_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi)) \quad (2.9b)$$

$$B_z = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} (n_k(m) + 1) P_{n_k(m)}^m (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) \quad (2.9c)$$

Les développements en série donnés par Haines diffèrent dans leur indexation avec ceux que nous avons utilisés en (1.24). Rappelons que l'indice  $k$  permet avant tout le dénombrement des racines réelles  $n_k$  mais ne se confond pas avec elles en dehors du cas particulier des fonctions de Legendre associées à degrés entiers. Dans (1.24),  $k$  représente directement le numéro de la racine alors que dans (2.9) le numéro de la racine est  $k - m$ . Haines utilise une indexation qui rappelle celle employée en harmoniques sphériques. Ceci n'a absolument aucune implication sur le développement en série.

Dans la pratique, les séries infinies sont tronquées à un indice maximum  $K_{max}$  pour tout  $m$  et les coefficients de Gauss  $H_{n_k}^{i,m}$  sont indéterminés pour  $m = 0$ . Ce formalisme conduit à la définition et à la recherche dans le cas d'un problème inverse de  $N$  coefficients de Gauss ([43]) avec :

$$N = (K_{max} + 1)^2 \quad (2.10)$$

## Chapitre 3

# Considérations numériques

Les fonctions de Legendre présentent la caractéristique de devoir être évaluées numériquement plutôt que d'être calculées au moyen d'expressions analytiques. En effet, les fonctions de Legendre sont générées par les fonctions hypergéométriques qui s'expriment en termes de séries infinies. La difficulté est de pouvoir évaluer ces fonctions le plus précisément afin, bien sûr, de les représenter mais également de calculer numériquement leurs degrés  $n_k$  le plus exactement possible. Plusieurs voies de calcul sont à notre disposition, mettant en jeu des techniques numériques plus ou moins robustes et raffinées. Nous débuterons cette section par la représentation la plus simple qui consiste à calculer directement tous les termes de la série hypergéométrique. Nous nous éloignerons de plus en plus de cette solution pour aboutir à un algorithme stable et précis dont l'efficacité nous a permis de mieux comprendre la méthode *SCHA* ainsi que de faire un net progrès dans la représentation du champ sur une calotte sphérique. Notons toutefois que la liste qui suit ne s'applique qu'à la représentation des fonctions de Legendre en termes de fonctions hypergéométriques. Il n'est pas exclu que d'autres représentations, comme celles qui utilisent les formes intégrales, puissent offrir le meilleur compromis selon les cas de figures ([96], [51]).

### 3.1 Les fonctions de Legendre et leurs racines

Avant d'exposer les propriétés numériques des fonctions de Legendre et les moyens de les représenter nous devons rompre pour un temps la structure logique de l'exposé et mettre en lumière certaines particularités susceptibles de perturber l'évaluation des fonctions. Nous supposons donc pour l'instant que les fonctions de Legendre sont bien évaluées et que par conséquent leur racines  $n_k$  trouvées numériquement ont des valeurs satisfaisantes. Le point qui nous intéresse surtout ici et duquel nous tirerons une certains nombre d'explications lorsque nous évoquerons les difficultés de la modélisation par *SCHA*, concerne la variation des racines  $n_k$  en fonction de l'ouverture de l'angle  $\theta_0$ . La figure (3.1) montre l'évolution de la valeur  $n_k(m)$ , pour  $m = 1$ , pour des indices  $k$  tels que  $k - m$  soient pairs et pour des ouvertures d'angles de  $\theta_0 = 5^\circ$  à  $\theta_0 = 90^\circ$ .

Le constat est relativement simple : plus la calotte est de taille modeste, plus les racines  $n_k$  prennent des valeurs importantes. Nous verrons plus bas une expression analytique qui démontre ce comportement. Cette caractéristique aura des répercussions cruciales sur la suite, notamment pour la modélisation sur une petite calotte et le prolongement des modèles en altitude. Les racines sont également directement dépendantes de  $m$ . Au couple  $(k, \theta_0)$  fixé correspondent des valeurs de  $n_k$  croissantes avec  $m$ . Ainsi, plus que par sa géométrie, une calotte sera considérée comme petite lorsque les racines sont grandes, et large lorsque les racines sont petites. Typiquement,



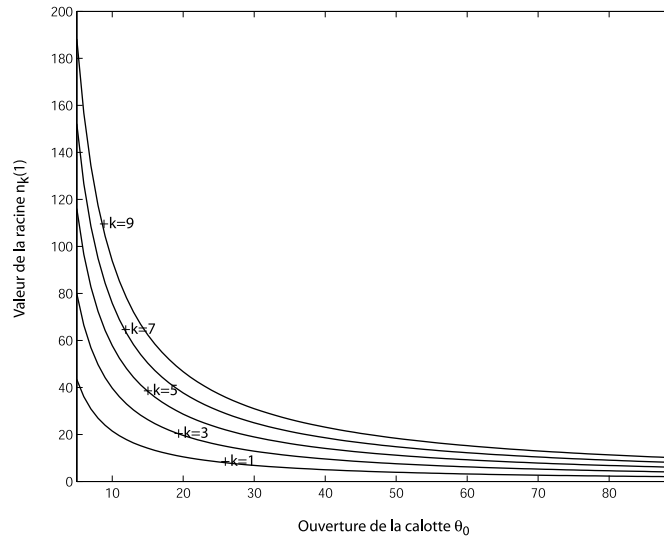


FIG. 3.1 – Variation des degrés  $n_k(m)$  pour  $m = 1$  satisfaisant les conditions aux limites (2.7b). La valeur des racines décroît quand l'ouverture  $\theta_0$  de la calotte augmente.

une calotte d'ouverture  $\theta_0 = 25^\circ$  reste petite alors qu'elle recouvre l'ensemble de l'Europe occidentale. Notons que sur la figure (3.1), la décroissance des  $n_k$  tend vers des valeurs entières lorsque  $\theta$  est au voisinage de  $\pi/2$ . Pour  $\theta = \pi/2$  l'indice  $k$  se confond avec la valeur du degré  $n_k$ ; ainsi pour les indices  $k - m$  pairs ou impaires on a  $n_k = k$  indépendant de  $m$ . Cette particularité peut sembler intéressante car la décomposition de Haines par utilisation des deux ensembles de bases de fonction permet de retrouver les harmoniques sphériques ordinaires alors que le choix d'une seule des deux bases n'aboutit qu'aux degrés  $n$  pairs ou  $n$  impairs selon le choix de la condition à la limite.

### 3.1.1 Le calcul en série

Prenons l'expression (2.4) de la série hypergéométrique avec les coefficients :

$$a_0 = 1 \quad (3.1)$$

$$a_{j+1} = \underbrace{\frac{(j+m-1)(j+m) - n_l(n_l+1)}{j(j+m)}}_{F_j} a_j \quad (3.2)$$

A notre connaissance, le calcul direct du développement en série, associé aux relations de récurrences que vérifient les fonctions de Legendre, est à la base de l'algorithme proposé par Haines ([46]) et a été repris par la suite pour la réalisation des modèles régionaux par *SCHA*. Toute la difficulté réside dans l'estimation de la fonction hypergéométrique.

Selon les valeurs de  $m$ , souvent petites et de  $n_k$  souvent grandes comparé à  $m$ , les termes  $a_j$  de la récurrence sont positifs ou négatifs. La série ainsi calculée est constituée d'arguments récursifs  $a_j$  de signes alternés de magnitudes croissantes jusqu'à ce que  $j$  soit suffisamment grand pour que le facteur de la récurrence soit tel que dans (2.4) :

$$|F_j * x| \leq 1 \quad (3.3)$$

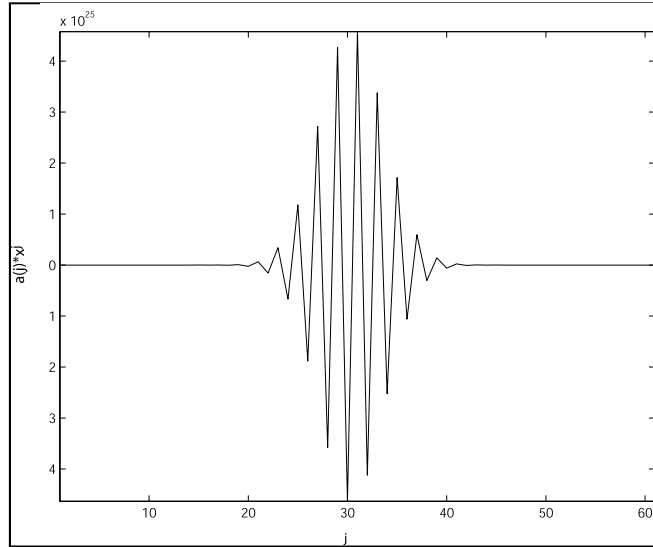


FIG. 3.2 – Les termes  $a_j x^j$  de la série exhibent des valeurs alternées importantes qui se compensent. Lorsque les degrés  $n_k$  et  $m$ , prennent des valeurs importantes (cas des petites calottes) cette compensation devient numériquement instable. Ici on a tracé les termes de la série pour une calotte d’ouverture  $\theta_0 = 25^\circ$ ,  $m = 1$  et  $n_{k(1)} = 51,664$  en  $\theta = \theta_0$ . Ce choix correspondant à la condition au limite (2.7a), la fonction hypergéométrique prend comme valeur théorique  $F(\theta_0) = 0$  alors que les termes de la série sont très importants.

Sur la figure (3.2) nous avons tracé la série des arguments de la série hypergéométrique pour une calotte de  $25^\circ$  avec  $m = 1$  et  $n_k(1) \simeq 55.2$ . On vérifie sur cette figure que la valeur des termes de la série augmente très rapidement et atteint des valeurs très importantes. Pourtant, chaque terme de la série se compense avec le suivant et la fonction hypergéométrique correspondante prend des valeurs bien plus modestes en général. Ici, en particulier,  $F \sim 10^{-9}$ , car nous avons choisi  $n_l(m, \theta_0)$  tel que la condition (2.7a) soit vérifiée.

Il existe un autre problème qui régit à lui seul la façon dont la série numérique converge. La convergence de la série peut dans certains cas requérir un nombre très important de récurrences  $j$  si  $n_k$  prend des valeurs moyennement importantes (par exemple  $n_k \sim 100$ ) avec en plus des valeurs de  $\theta$  importantes car non seulement (3.3) sera réalisée plus tardivement mais en plus  $x^j$  dans (2.4) converge plus lentement vers 0. On entrevoit dans ces problèmes numériques la difficulté croissante de représentation des fonctions de Legendre à mesure que l’on s’approche du bord de la calotte. **Or, c’est au bord du cône, en  $\theta = \theta_0$ , que la fonction doit être la mieux évaluée pour la détermination de ses racines  $n_k$ .**

Dans les modèles SCHA, on trouve des développements souvent restreints qui suggèrent que certains auteurs ont été confrontés au problème. Haines ([44]) utilise le développement le plus important rencontré dans la littérature traitant des harmoniques sur calotte. Mais le choix d’une calotte d’ouverture  $\theta_0 = 50^\circ$  entraîne que le plus grand degré  $n_k$  obtenu pour un développement  $K_{max} = 22$  est de 36,66. C’est une valeur faible de  $n_k$  qui ne pose pas de problème numérique particulier. Pour les autres modèles qui s’appliquent à des régions de la taille de l’Europe, on trouve au plus  $K_{max} = 15$  ([27]) ; pour des régions plus petites, on ne dépasse pas  $K_{max} = 10$  ([23]).

Compte tenu des considérations précédentes sur la variation des valeurs de  $n_k$  avec l'ouverture de l'angle  $\theta_0$ , ce problème est justement principalement accentué pour les très petites calottes ( $\theta_0 \leq 10$ ). Si notre objectif est de modéliser le champ sur la France ( $\theta_0 \sim 5^\circ$ ), le principe même du développement en série ne permettra même pas de développer les séries jusqu'à  $K_{max} = 10$ . Et, contrairement aux affirmations de Hwang et Chen ([55]), le calcul des fonctions hypergéométriques seules (sans constante de normalisation) pose également des problèmes numériques. Ces instabilités engendrent une dégradation des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Legendre, une non-vérification des conditions aux limites imposées et par conséquent des valeurs erronées des degrés  $n_k$ . L'idée est donc de réduire le nombre de récurrences tout en contournant le problème de la somme d'une série alternée.

### 3.1.2 La récurrence de Clenshaw

#### Formalisme

La fonction hypergéométrique est un cas idéal d'application de *la formule de récurrence de Clenshaw* ([94]) qui est un procédé dévolu à l'évaluation de fonctions développées en séries dont les termes sont récursifs..

La série (2.4) s'écrit aussi sous sa forme partielle, tronquée à  $N$ , comme :

$$F(x) = \sum_{k=0}^N c_k F_k(x)$$

avec  $c_k = 1$  et  $F_k(x) = a_k x^k$  qui obéit à la récurrence :

$$F_{k+1}(x) = \alpha(k, x) F_k(x) \quad (3.4)$$

En introduisant la suite intermédiaire suivante :

$$\begin{aligned} y_{N+2} &= y_{N+1} = 0 \\ y_k &= a(k, x) y_{k+1} + c_k \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

avec :

$$a(k, x) = \frac{(k+m)(k+m+1) - n_k(n_k+1)}{(k+1)(k+1+m)} x \quad (3.5)$$

on montre que la série hypergéométrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= y_n(F_n(x) - \alpha(n-1, x)F_{n-1}(x)) \\ &\quad + y_{n-1}(F_{n-1}(x) - \alpha(n-2, x)F_{n-2}(x)) \\ &\quad \dots \\ &\quad + y_2(F_2(x) - \alpha(1, x)F_1(x)) \\ &\quad + y_1 F_1(x) + F_0(x) \end{aligned}$$

ce qui, en vertu de (3.4), se réduit à :

$$\boxed{F(x) = y_1 F_1(x) + F_0(x)} \quad (3.6)$$

On a ainsi réduit la somme initiale à deux termes uniquement. Nous sommes à présent sûrs de l'inexistence de mauvaises compensations qui perturbent l'évaluation de la fonction hypergéométrique. Notons cependant que cette habile représentation ne nous met pas à l'abri

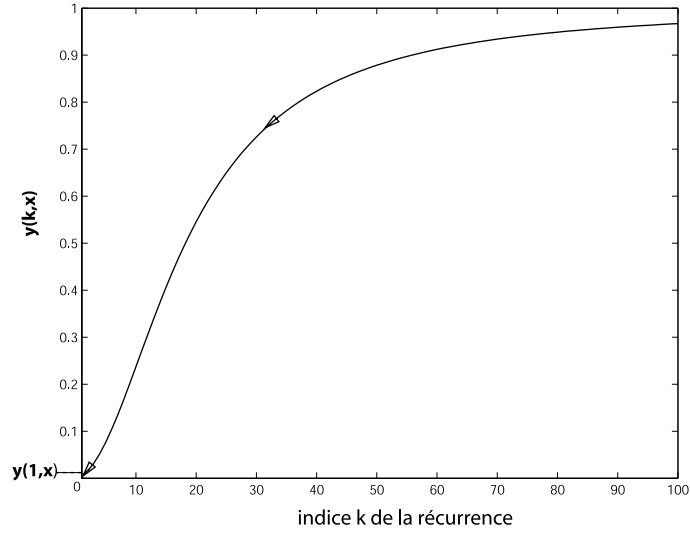


FIG. 3.3 – Evolution des termes de la récurrence descendantes  $a(k, x)$  intervenant dans le calcul de la récurrence de Clenshaw pour la même fonction hypergéométrique que celle calculée par le développement en série (figure 3.2). La valeur des coefficients tend de façon monotone vers  $a(1, x)$  avec des valeurs très satisfaisante. La fonction hypergéométrique correspondante est nulle en  $\theta = \theta_0$ .

des sempiternels *overflow* ou *underflow* numériques provenant de la multiplication de termes, l'un très grand, l'autre très petit.

On trouve en particulier :

$$F_0(x) = c_0 = 1 \quad (3.7)$$

$$F_1(x) = c_1 x = \frac{m(m+1) - n_k(n_k+1)}{m+1} x \quad (3.8)$$

Puisque la formule de Clenshaw que nous avons définie est descendante, le terme à estimer maintenant est le facteur  $y_1$ . Il sera le dernier terme de la récurrence descendante des  $y_k$ , calculés par l'intermédiaire de  $a(k, x)$  par (3.5). Ce même formalisme est utilisable pour le calcul des dérivées des fonctions de Legendre. En règle générale, la récurrence de Clenshaw peut également être utilisée pour les formules de récurrences auxquelles obéissent les fonctions de Legendre associées et semble offrir de bons résultats pour les harmoniques sphériques de degrés  $n$  et d'ordres  $m$  entiers ([53]).

## Applications

La figure (3.3) montre la variation des arguments récursifs  $y(k, x)$  qui déterminent  $y_1$  et par conséquent la valeur de la fonction hypergéométrique. Nous constatons que les calculs intermédiaires sont stables et ne suggèrent pas, étant donné leur magnitude, l'existence de problèmes numériques particuliers ; cette méthode accélère la convergence du calcul de la série. La fonction hypergéométrique calculée par (3.6), et dont les argument  $n_k$ ,  $m$  et  $\theta$  ont été choisis de manière similaire à la figure (3.2) du développement en série directe, est bien nulle au bord du cône ( $F \sim 10^{-15}$ ).

Malheureusement, même si ce procédé apporte une nette amélioration dans l'évaluation des fonctions hypergéométriques, et par conséquent dans celle des fonctions de Legendre, il n'échappe pas à la limitation numérique inhérente au produit d'un grand nombre par un très petit nombre. Dans cette technique, c'est moins le problème d'*overflow* (même s'il n'est pas exclu) que le problème d'*underflow* qui pose problème, notamment pour les petites calottes pour lesquelles  $x^j$  reste difficile à calculer. Les manifestations de ce phénomène sont plus discrètes que lors du calcul en série car d'une part il est retardé mais surtout il est moins important. Il se caractérise par de petites oscillations lors de l'évaluation des fonctions sur les bords du domaine (figure 3.4).

Une solution souvent évoquée dans les ouvrages d'analyse numérique porte sur le choix du sens, ascendant ou descendant, de la récurrence, souvent décisif pour une bonne convergence. Or, dans ce cas, les récurrences ascendantes et descendantes deviennent toutes deux instables lorsque  $\theta \rightarrow \theta_0$  pour des degrés élevés, car le problème ici est lié à la représentation des nombres en machine, et non uniquement à la façon dont converge la série.

Nous aurons l'occasion de vérifier plus loin que les limitations imposées à l'indice  $K_{max}$  conduit à des développements encore insuffisants pour représenter correctement un champ magnétique, même résiduel (dont on a retranché une tendance générale); cette remarque s'applique particulièrement pour de petites calottes sphériques. Par conséquent, le calcul des fonctions de Legendre doit être abouti le plus précisément possible et offrir une stabilité suffisamment confortable pour que nous puissions être en mesure de tester à loisir un grand nombre de configurations différentes, même extrêmes. Or, il n'est pas rare avec les développements précédents d'être confronté au problème d'évaluation des fonctions de Legendre avant même que le problème inverse devienne numériquement singulier.

### 3.1.3 Les développements asymptotiques

Lorsque l'on manipule les fonctions dites *spéciales*, on évoque inévitablement les développements asymptotiques, qui ont le mérite de transformer les séries infinies en fonctions plus élémentaires qui ne comportent qu'un nombre limité de termes.

Nous avons donc tenté de déterminer une méthode empirique permettant de basculer de la méthode de Clenshaw à l'approximation asymptotique dans les intervalles de  $\theta$  et pour des valeurs des couples  $(m, n_k)$  qui montrent des irrégularités numériques. En effet, si la méthode de Clenshaw est limitée aux degrés  $n_k$  pas trop grand devant  $m$ , l'approximation asymptotique calculée pour  $m < n_k$  est d'autant plus précise que  $m$  est petit devant  $n_k$ . Pour de petites calottes, cette approximation semble, à première vue, bien adaptée. Il est donc intéressant de pouvoir utiliser ces deux possibilités complémentaires.

Hobson ([51]) montre que la fonction de Legendre non normalisée peut être approximée à l'ordre 2 par :

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(n+m-1)}{\Gamma(n-1/2)} \left\{ \frac{\cos[(n+1/2)\theta - \pi/4 + m\pi/2]}{(2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{m^2 - 1/4}{2n \sin \theta} \cos[(n+3/2)\theta - 3\pi/4 + m\pi/2] \right\} + 0 \left( \frac{1}{n^{5/2}} \right) \quad (3.9)$$

Alterner méthode de Clenshaw et méthode asymptotique semblait être une solution attrayante, qui de plus était encouragée par bon nombre d'ouvrages traitant des fonctions de Legendre ([96], [51], [113]). Malheureusement, il ne semble pas exister de méthode empirique satisfaisante nous permettant de trouver une bonne transition entre les deux méthodes. On se trouve inévitablement confronté à des sauts dans le raccordement. Pour la fonction de Legendre,

mais surtout pour la représentation de sa dérivée, cette particularité est bien évidemment dramatique. D'autre part, on constate que la formulation asymptotique entraîne des problèmes de représentation des fonctions de Legendre en amplitude mais provoque également un léger déphasage. Ce comportement à lui seul justifie l'abandon de la technique puisqu'il interfère avec le bon déroulement de la recherche des racines  $n_k$ .

### 3.1.4 Un algorithme stable

Après une longue étude sur le calcul des séries, nous avons finalement jeté notre dévolu sur une routine proposée par F.Olver et J.M Smith ([91]) et distribuée librement. La puissance du programme repose sur l'exploitation intensive des propriétés de récurrence des fonctions de Legendre mais également sur un traitement systématique des symptômes d'*overflow* et d'*underflow*. Il devient ainsi possible de représenter les fonctions de Legendre pour des couples  $n_k$  et  $m$  élevés. Le procédé est dans son concept relativement simple mais hautement efficace ; chaque nombre  $\alpha$  dans un calcul peut s'écrire comme le produit d'un entier  $r$  par une exponentielle  $e^\omega$ , soit  $\alpha = re^\omega$ . Comme cette décomposition n'est pas unique, le programme s'adapte à la précision de la machine sur laquelle il est utilisé.

Le produit de  $\alpha$  avec un autre nombre quelconque  $\beta = r'e^{\omega'}$  sera convertit en produit de  $rr'$  et en somme de  $\omega + \omega'$ , le facteur exponentiel étant transparent dans le calcul et n'intervenant qu'en fin d'évaluation. Le prix à payer est donc un doublement du temps de calcul mais offre une amélioration sans précédent de l'évaluation des fonctions de Legendre pour un vaste intervalle des trois paramètres  $(n_k, m, \theta)$ . Remarquons que la définition des fonctions de Legendre d'Olver et Smith (qu'ils appellent les *fonctions de Ferrer*) correspond à la définition des fonctions de Legendre que nous avons adoptée (eq. 2.3). L'algorithme permet également d'évaluer les fonctions de Legendre de deuxième espèce, les fonctions  $Q_n^m(\cos\theta)$ .

La figure (3.4) met en parallèle les différentes méthodes que nous avons essayées pour le cas d'une fonction de Legendre critique. En haut de la figure, l'évaluation par la récurrence de Clenshaw devient instable, les oscillations aléatoires que l'on observe sont symptomatiques d'un problème d'*underflow* (remarquons que le problème d'*underflow* se transforme très vite en *overflow* étant donné la mauvaise estimation du terme qui assure la convergence). Nous avons construit les fonctions de telle manière qu'elles soient nulles en  $\theta_0 = 5^\circ$  et on vérifie que la récurrence de Clenshaw échoue et ne respecte pas la condition à la limite (2.7a). La représentation du centre illustre la tentative de raccordement entre la méthode de Clenshaw et la représentation asymptotique de la fonction. La zone ombrée correspond à l'angle  $\theta$  pour lequel le raccordement est effectué mais matérialise également la zone de discontinuité de la fonction. Enfin, la représentation du bas par l'algorithme d'Olver et Smith adopte un comportement que nous n'avions pas réussi à atteindre par les autres méthodes et achève de nous convaincre que cette méthode est bien la plus fiable. A notre connaissance, la proposition de cette routine pour la méthode SCHA ([105]) a déjà apporté de nettes améliorations dans les calculs de champs magnétiques régionaux par la technique SCHA (De Santis et Gaya-Pique, communication personnelle).

### 3.1.5 Vérifications numériques et conclusions

Nous disposons d'un moyen pratique de vérifier que l'algorithme d'Olver et Smith fonctionne correctement. En effet, lorsque  $m \ll n_k$  nous pouvons utiliser l'approximation asymptotique (3.9) à l'ordre 1. La condition  $P_{n_l}^m(\cos\theta_0) = 0$  conduit donc à :

$$n_l \sim \left( (2l+1) - m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2\theta_0} - \frac{1}{2} \text{ avec } l \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

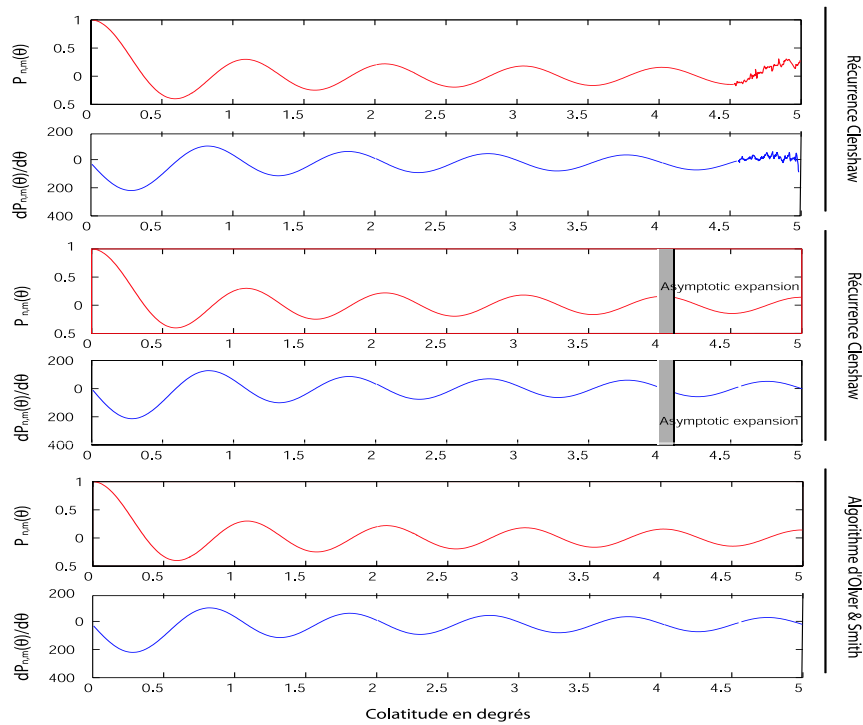


FIG. 3.4 – Différentes méthode d'évaluation des fonctions de Legendre sont représentées entre  $\theta = 0$  et  $\theta = 5^\circ$  pour l'ordre  $m = 0$  et le degré  $n_k = 206, 7$ . En haut l'accélération de la convergence de la série hypergéométrique par la méthode de Clenshaw est insuffisante à l'approche des bords de la calotte en  $\theta = 5^\circ$ ; au centre la recherche du compromis entre Clenshaw et développement asymptotique présente une discontinuité (et un léger déphasage) dans la zone grise; enfin, en bas, on illustre l'efficacité de la méthode d'Olver et Smith pour le calcul stable des fonctions de Legendre généralisées.

De plus, comme :

$$n_l + 1/2 > 0 \text{ on a } (2l + 1) - m > -1/2$$

De la même manière, la condition  $\left. \frac{dP_{n_j}^m(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0$  conduit à une expression approchée de la racine  $n_j$  :

$$n_j \sim \left( 2j - m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2\theta_0} - \frac{1}{2} \text{ avec } j \in \mathbb{N} \quad (3.11)$$

avec, comme conséquence :

$$2j - m > -1/2$$

Les expressions (3.10) et (3.11) justifient la notation de Haines qui classe les fonctions de Legendre par (2.7a) ou par (2.7b) selon la parité d'un unique indice  $k$ . Les racines prennent donc l'expression suivante :

$$\boxed{n_k \sim \left( k + \frac{1}{2} - m \right) \frac{\pi}{2\theta_0} - \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N}} \quad (3.12)$$

En outre, cet indice est tel que :

$$\boxed{k - m > -1/2}$$

donc toujours supérieur ou égal à  $m$ .

Ainsi, si nous nous plaçons dans le cas  $n_k \gg m$ , cela implique que, soit  $\pi \gg \theta_0$ , soit  $k \gg m$ . Le premier cas n'a évidemment que peu de sens mais il montre que le domaine de validité de l'expression asymptotique dépend également de la géométrie de la calotte. Le tableau (3.1) montre une bonne adéquation entre la racine calculée numériquement et celle évaluée par (3.12) pour un indice  $k = 7$  dans l'indexation de Haines (soit la 4<sup>ème</sup> racine). Quoiqu'il en soit, pour des indices  $k \gg m$ , les racines  $n_k$  deviennent indépendantes de  $m$ ; ces nombres peuvent donc être négligés dans (3.12). Cette propriété est particulièrement intéressante lorsque l'on veut associer à la fonction de Legendre une longueur d'onde. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

D'un point de vue numérique, nous sommes en droit de penser, sur la base de nos expériences précédentes, que la recherche des racines devient laborieuse à mesure que le développement augmente; certains problèmes numériques passent peut être inaperçus. Nous avons donc testé la recherche des racines pour des indices  $k$  jusqu'à 399. Des développements à ces ordres sont en pratique peu utilisés mais ils nous assurent du bon fonctionnement des procédures aux degrés inférieurs. Le tableau (3.1) présente des racines calculées pour une calotte d'ouverture  $\theta_0 = 5^\circ$  pour des indices  $k = 397$  et  $k = 399$  et leur comparaison avec leur évaluation par (3.12). La corrélation est excellente et nous disposons donc d'un algorithme d'évaluation des fonctions de Legendre (*Xdlegf*, [91]) qui couplée à une procédure de recherche des racines (*Zbrent*, [94]) nous assure le calcul très stable des fonctions généralisées.

Plusieurs remarques de détail peuvent être déduites de l'expression asymptotique. L'expression (3.12) nous permet de disposer d'un outil de diagnostic simple et efficace pour l'évaluation et la vérification des racines. En raison de la parité de  $k$ , on trouve en effet que :



<b>m=0</b>	<b>n<sub>k</sub></b>	<b>n<sub>k,asym</sub></b>	<b>k</b>
	134.62	134.50	7
		...	...
	7154.50	7154.50	397
	7190.50	7190.50	399

TAB. 3.1 – Vérification de la cohérence entre les racines calculées numériquement et l’approximation asymptotique.

$$n_{k+2} = n_k + \Delta_k \quad (3.13)$$

$$\Delta_k = \pi/\theta_0 \quad (3.14)$$

Pour  $\theta_0 = 5^\circ$ ,  $\Delta_k = 36$  et le tableau montre indéniablement que l’on retrouve cet intervalle qui témoigne du bon déroulement de la recherche des racines réelles. Les racines sont donc asymptotiquement régulièrement espacées, le pas étant inversement proportionnel à l’ouverture de la calotte.

Ce dernier point établit une règle mathématique de la variation des degrés  $n_k$  en fonction de  $\theta_0$  que nous avons trouvée de manière empirique (figure 3.1). On ne manquera pas à ce propos de remarquer qu’en  $\theta_0 = \pi/2$  on retrouve  $n_k \approx k$  rappelant de fait que les degrés tendent vers un nombre entier.

### 3.2 Le concept de longueur d’onde

Le terme de longueur d’onde manque cruellement de définition précise et l’évocation de longueur paraît même à première vue peu adaptée à la description d’une surface et des surfaces sphériques en générale. Plus que l’idée de longueur d’onde, il semble que le concept de surface d’onde soit plus pertinent.

Lorsque nous comparons le champ exprimé sur la base des harmoniques sphériques et le champ exprimé localement, une nouvelle difficulté vient se juxtaposer à la précédente ; si, en harmoniques sphériques ordinaires, une surface de la dimension d’une petite calotte correspond à ce que l’on qualifie de *petite* surface d’onde pouvant caractériser des anomalies crustales, dans le référentiel de la calotte, celle-ci représente la surface d’onde la plus élevée. Nous sommes donc de plus confrontés à un problème d’appréciation relative de la précision maximale offerte par la représentation choisie.

Nous parlerons donc de surface d’onde pour caractériser les dimensions minimales du champ magnétique que l’on cherche à décrire, et de longueur d’onde lorsque nous étudierons le problème par rapport à une seule des variables,  $\theta$  ou  $\varphi$ . La question étant de savoir si dans un cas asymptotique les deux définitions peuvent se déduire l’une de l’autre.

En raison de la pseudo-périodicité des fonctions de Legendre généralisées, que ce soit en harmoniques sphériques ordinaires ou en harmoniques sphériques sur calotte, il n’existe pas de longueur d’onde unique associée à un ordre  $m$  mais une succession de longueurs. Chaque fonction  $P_{n_k}^m$  décompose l’intervalle  $[0, \theta_0]$  en autant de segments de tailles différents qu’il y a de racines  $n_k$ .

Nous avons vu que nous pouvions approcher la fonction à l’ordre 1 par son développement asymptotique (3.9). Si notre développement nous permet de nous mettre dans la configuration

d'un développement asymptotique, c'est uniquement dans ce cas que nous pourrions définir une longueur d'onde unique.

Cette idée est à la base de la longueur d'onde définie par Haines et repose sur l'emploi de la formule (3.12), par une analogie avec la longueur d'onde  $\omega_{\min}$  minimale définie par Bullard ([16]) pour les harmoniques sphériques dans le cas où le degré entier  $n \gg m$ . La formule :

$$\lambda_{\min} \sim 360^\circ/n \quad (3.15)$$

conduit pour les harmoniques sphériques sur calotte à la simple définition ([43]) :

$$\lambda_{\min} \sim 360^\circ/n_{K \max} \quad (3.16)$$

$\omega_{\min}$  étant la longueur d'onde angulaire minimale inversement proportionnelle au degré  $n_{K \max}$  le plus important qui intervient dans le développement estimé soit à partir de (3.12) soit calculé numériquement.

Nous pouvons donc formuler une longueur mais dont la signification reste obscure. Nous ne sommes pas en mesure de dire à quoi elle correspond et quelle est son éventuelle relation avec une surface minimale à peu près standard sur toute la calotte. Nous nous proposons donc de revoir la définition de longueur d'onde.

### 3.2.1 Longueur d'onde associée à $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$

Ecrivons l'harmonique  $Y_{n_k}^{c,m}$  (2.5) comme la partie réelle de la forme complexe  $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$ , soit :

$$Y_{n_k}^{c,m} = \Re(P_{n_k}^m e^{im\varphi}) \quad (3.17)$$

et cherchons la surface d'onde associée à cet élément. Le raisonnement que nous proposons est très largement inspiré des considérations sur la longueur d'onde de Backus ([7]).

Cette discussion nécessite d'établir en premier lieu une expression asymptotique des fonctions de Legendre généralisées pour  $n_k \gg m$  moins restrictive que l'expression (3.9).

#### Nouvelle expression asymptotique des fonctions $P_{n_k}^m$

Rappelons que les fonctions de Legendre  $P_{n_k}^m$  sont solutions de l'équation de Legendre (1.4) :

$$\boxed{\frac{d^2 P_{n_k}^m(\theta)}{d^2 \theta} + \cot \theta \frac{d P_{n_k}^m(\theta)}{d \theta} + P_{n_k}^m \left( n_k(n_k + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0} \quad (3.18)$$

et que cette équation est en particulier singulière pour  $\theta = 0$ .

Pour suivre rigoureusement la méthodologie de Backus ([7]), nous exprimons cette dernière équation en fonction de  $\lambda$  défini par :

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta - \lambda_0$$

avec de plus  $\lambda_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$  et  $\theta_0$  l'ouverture de la calotte sphérique.

En posant d'autre part :

$$L = \sqrt{n_k(n_k + 1)} \quad (3.19)$$

$$\lambda_c = \cos^{-1}(m/L) \quad (3.20)$$

$$f(\lambda) = 1 - \frac{\cos^2 \lambda_c}{\cos^2(\lambda + \lambda_0)} \quad (3.21)$$

on trouve que l'équation (3.18) s'écrit maintenant en fonction de  $\lambda$  :

$$\frac{d^2 P_{n_k}^m}{d^2 \lambda} - \tan(\lambda + \lambda_0) \frac{dP_{n_k}^m}{d\lambda} + P_{n_k}^m \left( L^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

avec  $\lambda$  défini dans l'intervalle  $[0, \lambda_c - \lambda_0]$ .

Mais en utilisant successivement (3.20) et (3.21), on trouve que :

$$\left( L^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = f(\lambda) L^2 \quad (3.22)$$

et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 P_{n_k}^m}{d^2 \lambda} - \tan(\lambda + \lambda_0) \frac{dP_{n_k}^m}{d\lambda} + f(\lambda) L^2 P_{n_k}^m = 0 \quad (3.23)$$

On cherche une solution oscillante de cette équation dans l'intervalle  $\lambda \in [0, \lambda_c - \lambda_0]$  sous la forme :

$$P_{n_k}^m = e^{iL\omega(\lambda)} \quad (3.24)$$

La première déduction est que si longueur d'onde il y a, celle-ci ne pourra être définie que dans l'intervalle  $[0, \lambda_c - \lambda_0]$ , qui exclu une zone autour du pôle de la calotte sphérique. Nous pouvons d'ores et déjà prédire que nous ne pourrons pas définir de longueur ou de surface standard valable sur toute sa surface par cette méthode car l'approximation asymptotique exclue le pôle. C'est un résultat tout à fait en accord avec sa version simplifiée par l'équation (3.12). Backus ([7]) montre en effet, que la solution de l'équation différentielle est exponentielle à partir de la valeur  $\lambda_c$  (à l'approche de la singularité de l'équation de Legendre en  $\theta = 0$ ). Cette solution n'est valable que pour un angle critique  $\theta_c \neq 0$ .

En utilisant (3.24) dans (3.23) et par un développement en série, Backus montre que (3.23) admet une solution du type :

$$P_{n_k}^m(\lambda) = \frac{B}{(\cos^2(\lambda + \lambda_0) - \cos^2 \lambda_c)^{1/4}} \cos(L\omega_0(\lambda) - \beta) \quad (3.25)$$

avec :

$$\omega_0(\lambda) = \int_0^\lambda \left( 1 - \frac{m^2}{L^2 \cos^2(t + \lambda_0)} \right) dt$$

Remarquons que si nous prenons la condition  $L \gg 1$ , nous nous mettons dans la situation où :

$$n_k \gg 1$$

L'équation (3.25) n'est plus valable que dans l'intervalle  $[0, \lambda_c - \lambda_0 - \varepsilon]$  en raison du dénominateur.

En revenant à la variable  $\theta$ , étant donné que :

$$\lambda = \theta_0 - \theta, \quad \lambda + \lambda_0 = \pi/2 - \theta, \quad \lambda_c = \pi/2 - \theta_c \quad \text{et} \quad \sin \theta_c = \frac{m}{L}$$

on a en particulier  $f(\lambda)$  dans (3.21) qui s'écrit :

$$f(\theta) = 1 - \frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta}, \text{ pour } \theta \in ]\theta_c, \theta_0] \quad (3.26)$$

et la solution (3.25) devient :

$$P_{n_k}^m(\theta) = \frac{B}{(\sin^2(\theta) - \sin^2 \theta_c)^{1/4}} \cos(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta) \quad (3.27)$$

avec  $\theta \in [\theta_c + \varepsilon, \theta_0]$ , et :

$$\omega_0(\theta - \theta_0) = \int_{\theta}^{\theta_0} \left(1 - \frac{m^2}{L^2 \sin^2(t)}\right) dt \quad (3.28)$$

On obtient donc une expression asymptotique des fonctions  $P_{n_k}^m(\theta)$ . On pourrait aller plus loin en recherchant la valeur des constantes  $B$  et  $\beta$  à partir des conditions aux limites sur les fonctions par (2.7a) ou (2.7b) et en développant une expression analytique de la fonction  $\omega_0(\theta)$ . Cette démarche n'est pas nécessaire car nous ne cherchons qu'une expression générale du développement asymptotique et nous ne poursuivrons pas le calcul.

### La longueur d'onde horizontale de $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$

Nous pouvons maintenant écrire l'expression asymptotique de l'harmonique  $Y_{n_k}^{c,m}$  à partir de (3.17) sous la forme :

$$Y_{n_k}^{c,m}(\theta, \varphi) \sim \frac{B}{(\sin^2(\theta) - \sin^2 \theta_c)^{1/4}} \cos(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta) \cos(m\varphi)$$

ce qui revient à écrire :

$$Y_{n_k}^{c,m}(\theta, \varphi) \sim \frac{B}{2(\sin^2(\theta) - \sin^2 \theta_c)^{1/4}} \left( e^{i(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta + m\varphi)} + e^{-i(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta - m\varphi)} \right)$$

c'est-à-dire comme la somme de deux expressions qui rappellent un peu la somme de deux ondes progressives (à l'exception du facteur, fonction de  $\theta$ ). C'est donc par une pure analogie que nous pouvons définir une longueur d'onde spatiale.

Etant donné que la circonférence d'un cercle sur la calotte s'écrit  $C(\theta) = 2\pi a \sin \theta$ , avec  $a$  rayon terrestre, on trouve l'expression d'une longueur d'onde spatiale  $\lambda_\varphi$  :

$$\lambda_\varphi = \frac{2\pi a \sin \theta}{m} \quad (3.29)$$

D'autre part, la longueur d'onde spatiale  $\lambda_\theta$  peut être déterminée en analysant les variations de  $\omega_0(\theta_0 - \theta)$  sur une période :

$$\delta\omega_0(\theta) = \frac{\partial\omega_0(\theta)}{\partial\theta} \delta\theta$$

soit d'après (3.28), il vient :

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{L^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}}$$

donc la longueur d'onde  $\lambda_\theta$  correspondante sur la calotte, toujours avec  $a$  rayon terrestre, s'écrit en utilisant (3.19) :

$$\lambda_\theta = \frac{2\pi a}{\sqrt{n_k(n_k+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}} \quad (3.30)$$

On peut exprimer le rapport des deux longueurs d'après (3.26) dans (3.30) on trouve :

$$\frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} = \frac{m}{L \sin \theta} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta}}} \quad (3.31)$$

Ce rapport, variable permet de constater que la géométrie de la surface d'onde créée par les deux longueurs  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_\varphi$  change en fonction de la colatitude  $\theta$  avec toujours  $\theta_c > \theta$ .

Les dimensions (3.29) et (3.30) ne permettent donc pas de définir directement une longueur unique, invariante selon l'emplacement sur la calotte sphérique. Si nous voulons prendre comme longueur la diagonale de l'élément de surface, on trouve :

$$d(\theta) = \sqrt{\lambda_\varphi^2 + \lambda_\theta^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{n_k(n_k+1)}} \frac{\sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c) \sin \theta_c} \quad (3.32)$$

qui ne peut pas être utilisé comme longueur standard.

En revanche, on montre que le nombre d'onde :

$$k = \sqrt{k_\theta^2 + k_\varphi^2}$$

permet la définition d'une longueur invariante  $\lambda_k$  par :

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_\theta)^2 + (1/\lambda_\varphi)^2}}$$

et qui s'écrit explicitement sous une forme simple :

$$\lambda_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{n_k(n_k+1)}} \quad (3.33)$$

C'est cette longueur que nous pourrions enfin qualifier de *longueur d'onde* et qui représente la seule quantité standard sur la calotte (pour  $\theta > \theta_c$ ), indépendante à la fois de  $\theta$  et de  $m$  si  $n_k$  grand.

Si nous nous intéressons maintenant à l'élément de surface  $S(\theta)$  correspondant aux deux longueurs  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_\varphi$  on trouve :

$$S(\theta) = \lambda_\varphi \lambda_\theta = \frac{4\pi^2 a^2}{L^2 \sin \theta_c} \frac{\sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c)}$$

soit en écrivant simplement en fonction de  $\lambda_k$  :

$$S(\theta) = \lambda_k d(\theta) \quad (3.34)$$

et cette surface n'est pas non plus invariante sur la calotte sphérique (ou sur la sphère).

### 3.2.2 Interprétations géométriques et discussions

Le développement précédent est valable également pour les harmoniques sphériques sur la sphère mais nous parlerons ici essentiellement de la calotte sphérique (Pour la sphère, on réalisera la transformation  $\theta \equiv \pi/2 - \theta$  donc  $\sin \theta \equiv \cos \theta$  pour écrire les expressions en fonction de la latitude).

Qu'apporte donc la définition de (3.33) par rapport à (3.15) ou à son équivalent dans la calotte (3.16) ?

D'un point de vue du résultat numérique, strictement rien, puisque dans l'hypothèse  $n_k$  grand on a :

$$\sqrt{n_k(n_k + 1)} \sim n_k + 1/2$$

on trouve, si l'on écrit (3.16) en fonction du rayon  $a$ , que les deux écritures aboutissent à la même valeur.

En revanche, nous pouvons utiliser cette définition et montrer, par une interprétation géométrique, que la longueur d'onde n'est en fait qu'une abstraction et qu'il n'est le plus souvent pas possible de la visualiser directement sur la calotte ou la sphère.

La figure (3.5) montre l'interprétation géométrique de la longueur d'onde. Contrairement à l'idée que nous aurions pu nous faire de la longueur d'onde à partir de l'expression (3.16) uniquement, la longueur  $\lambda_k$  invariante définie par Backus ne correspond pas à la diagonale  $BC$  du triangle  $(ABC)$  mais plutôt à la hauteur  $AH$ .

En posant  $AB = \lambda_\theta$ ,  $AC = \lambda_\varphi$  et  $BC = d(\theta)$ , et en considérant la propriété élémentaire des triangles rectangles :

$$AH \times BC = AB \times AC$$

on trouve que la surface  $S(\theta)$  de  $(ABC)$  s'écrit :

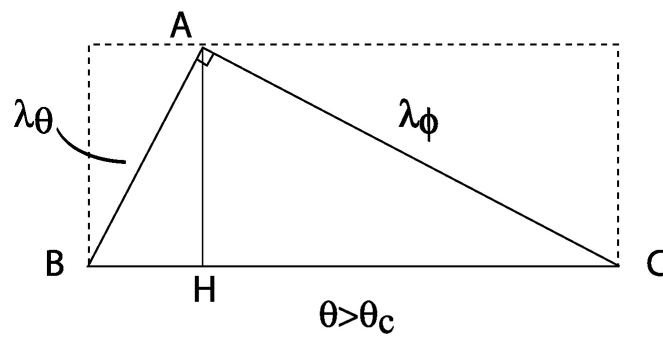
$$S(\theta) = AH \times d(\theta)$$

mais d'après (3.34) ceci revient à :

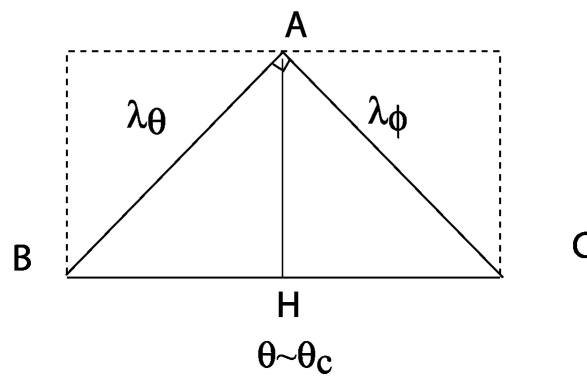
$$\boxed{\lambda_k = AH}$$

Finalement, la longueur  $\lambda_k$  ne coïncide avec la demi-diagonale du rectangle que dans le cas particulier où le triangle rectangle  $(ABC)$  est isocèle mais ceci n'arrive que lorsque  $\theta$  est proche de l'angle critique  $\theta_c$  (la limite en  $\theta$  de l'approximation asymptotique) Si l'angle  $\theta$  est proche du bord  $\theta_0$  de la calotte, alors le rapport (3.31) entraîne que  $\lambda_\theta \ll \lambda_\varphi$ . Par conséquent la longueur d'onde devient  $\lambda_k \sim \lambda_\theta$ . En dehors de ces deux cas limites,  $\lambda_k$  n'a pas de relation simple ni avec  $\lambda_\theta$  ni avec  $\lambda_\varphi$  qui permette une interprétation directe sur la calotte.

D'après (3.31), la surface d'onde est anisotrope (sauf dans le cas où le triangle rectangle est isocèle) et son anisotropie est de plus fonction de  $\theta$ . Cette anisotropie peut se quantifier par une étude systématique du rapport (3.31) que nous n'entreprendrons pas. Nous pouvons néanmoins nous appuyer sur la figure (2.2) pour constater qu'effectivement, de l'extérieur vers l'intérieur de la calotte, la forme des éléments de surface passe du rectangle avec  $\lambda_\theta \ll \lambda_\varphi$ , au carré avec  $\lambda_\varphi \sim \lambda_\theta$ , puis de nouveau à un rectangle mais de dimensions  $\lambda_\varphi \ll \lambda_\theta$ . Même si ce dernier cas n'est pas donné par l'approximation asymptotique, car les fonctions ne sont pas oscillantes pour  $\theta < \theta_c$ , il est observé si l'hypothèse  $n_k \gg m$  est mal vérifiée, soit pour des développements  $K_{max}$  et  $M_{max}$  faibles (sur la figure 2.2 on voit bien ces trois cas de figure). La définition d'une surface d'onde typique sur laquelle nous pourrions nous appuyer pour en déduire la finesse d'une modélisation semble donc bel et bien compromise.



1) Validité de l'approximation asymptotique



2) Limite de validité de l'approximation asymptotique

FIG. 3.5 – Un élément de surface correspondant à la racine  $n_k$  la plus grande sur la calotte est délimité par un rectangle de côtés  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_\varphi$  de tailles variables selon l'emplacement en  $\theta$  sur la calotte. La seule longueur invariante est  $AH$  qui est définie comme étant la longueur d'onde minimale.

Quoique nous fassions, un développement en séries tronqué à des indices  $K_{max}$  et  $M_{max}$ , révélera de moins en moins de détails à mesure que nous nous approchons des bords de la calotte.

La surface minimale peut être obtenue en recherchant le minimum de la fonction  $S(\theta)$ . A partir de (3.34) on trouve que la surface minimale s'écrit :

$$S_{\min}(\theta) = \frac{8\pi^2 a^2}{n_k(n_k + 1)}$$

et que de plus c'est un carré. Remarquons que même cette surface minimum est fonction de l'altitude de la calotte.

On pourra donc écrire dans ce cas que la longueur d'onde minimum  $\lambda_k$  à la surface terrestre s'écrit :

$$\lambda_k \sim \frac{2\sqrt{2}\pi a}{n_k}$$

Une information utile que nous pouvons en déduire est le développement  $K_{max}$  le plus compatible avec l'échantillonnage de point. Pour mener à bien l'inversion et pour limiter l'*aliasing*, le théorème de Nyquist stipule que l'échantillonnage  $l_d$ , entre deux points consécutifs, doit être tel que  $l_d \leq \lambda_k/2$ .

En utilisant (3.12) comme approximation sur les racines  $n_k$ , nous pouvons déterminer un indice  $K_{max} \gg m$  en fonction de  $l_d$  :

$$K_{max} = \left( \frac{\pi a}{l_d} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{2\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

Nous garderons à l'esprit que cette relation est indicative pour deux raisons. La première découle directement de sa formulation : c'est un nombre relié à la plus petite dimension du découpage, pas à la dimension moyenne, il n'est donc pas exclu que nous puissions prendre des développements un peu plus poussés. La seconde réside dans le choix des conditions aux limites de Haines : la non-orthogonalité des fonctions viendra en pratique contrebalancé le principe de Nyquist et nous interdira numériquement de prendre de trop grandes valeurs de  $K_{max}$ , même sur un très bon échantillonnage de points ; ce qui est en évidente contradiction avec le premier point.

Supposons des points distants d'environ  $l_d = 65km$  dans une calotte d'ouverture maximale  $\theta_0 = 5^\circ$ , on trouvera pour le développement maximum :

$$K_{max} \sim 12$$

Finalement, nous pouvons principalement conclure que le concept de longueur d'onde en harmoniques sur calotte n'est qu'une tentative pour essayer de relier l'indice  $K_{max}$  d'un développement à une dimension en kilomètres de la calotte sphérique. Lorsque nous connaissons les distances géométriques moyennes entre deux données, nous pouvons en déduire un développement maximum permis  $K_{max}$ . Or, par sa définition même par (3.35),  $K_{max}$  est relié à la plus petite surface créée par les harmoniques. Par conséquent, rechercher  $K_{max}$  revient donc à s'assurer d'un sur-échantillonnage sur la plus petite surface. Si l'échantillonnage est uniforme, le théorème de Nyquist est automatiquement vérifié pour les autres surfaces qui ont des dimensions supérieures.

Le concept de longueur d'onde est très trompeur car c'est avant tout la surface qui nous intéresse et si nous pouvons définir une longueur fixe, il n'en est rien pour la surface. Cette



caractéristique nous met en garde en particulier contre les interprétations erronées que nous pourrions donner, dans le cas d'une modélisation d'anomalie magnétique, à partir de leur répartition. Il faudra garder à l'esprit l'anisotropie inhérente à la modélisation et nous reverrons de fait régulièrement cette anisotropie dans les résidus obtenus après inversion. Nous observerons clairement l'étalement des surfaces de résidus à mesure que l'on se rapproche des bords.

## Chapitre 4

# Inversion de données avec SCHA

Pour étudier la méthodologie des harmoniques sphériques sur calotte, il convient de tester la théorie d'un point de vue numérique et de l'appliquer sur des données synthétiques parfaitement contrôlées. Dans un premier temps, il ne fallait surtout pas juxtaposer les problèmes liés à l'inversion et les problèmes numériques de calcul liés aux fonctions de Legendre. Ce premier problème ayant été résolu, nous avons voulu nous concentrer, dans ce chapitre, plus particulièrement sur la résolution et le comportement du problème inverse. Nous proposons différentes techniques d'inversion. Bien que la plupart d'entre-elles soient très classiques, elles permettent d'illustrer sous des angles différents, mais complémentaires, certaines embûches liées à la théorie des harmoniques sphériques sur calotte. Ces techniques sont d'autre part abondamment utilisées dans la partie 3, il fallait donc les définir une fois pour toute.

Dans un premier temps, nous exposons brièvement les étapes préparatoires au problème inverse dont le choix de la grille synthétique et sa construction constitueront les seules originalités ; les autres étapes font partie intégrante d'un *modus operandi* dont nous userons chaque fois qu'il s'agira d'inverser des données sur une calotte. Dans un second temps, nous traiterons le cas d'un problème synthétique par différentes méthodes d'inversions sur des données uniformément réparties .

### 4.1 Préparation de l'inversion

Compte tenu de l'intervention de deux bases orthogonales mais non orthogonales entre-elles, la matrice d'inversion est naturellement mal conditionnée. Dans un premier temps, pour atténuer les effets néfastes de cette propriété qui découle du choix des conditions aux limites, nous proposons deux points de considération. Le premier concerne la réalisation d'une grille régulière qui permettra de se rapprocher de la configuration idéale d'une répartition parfaitement uniforme sur une calotte. La même grille sera conservée pour toutes les applications ultérieures et se révélera particulièrement efficace pour le maillage de la sphère globale pour des rotations des coefficients de Gauss globaux (Voir section 5.1). Le second point concerne la manière d'organiser les matrices pour l'optimisation des calculs numériques.

#### 4.1.1 Une grille quasi-régulière

Il est bien connu qu'il est impossible de définir une grille parfaitement régulière sur une sphère. Les découpages sphériques sont habituellement réalisés par échantillonnage en  $\theta$  et  $\phi$  (latitude, longitude) directement sur la sphère. Cette méthode simple, largement utilisée, présente

néanmoins des inconvénients évidents lorsque l'on tente de construire des éléments de surfaces égales. Etant donné que le découpage que nous exposons ici n'est pas très largement connu mais qu'il présente de nets avantages pour les études synthétiques d'un champ sur la sphère entière, nous nous proposons d'en décrire ses principaux aspects.

Nous nous sommes penchés sur la méthode préconisée par Dufour ([32]). Dufour, sur la base des considérations concernant la division sphérique de Popko (1969) propose d'inclure la sphère dans un polyèdre de Romé de l'Ilse (ou hexacontaèdre rhombique). Chaque élément de base du polyèdre est tangent à la sphère en son centre (repéré par les lettres grecques sur la figure 4.1). Le maillage proposé par Dufour est une solution numérique permettant de diminuer significativement la différence entre la surface maximum et la surface minimum du maillage.

Le maillage de la grille se fait par dichotomie successive des côtés d'un losange de base, selon un ordre de découpage que l'on définit en accord avec la dimension de la surface minimum que l'on recherche sur la sphère. Le plus petit élément ainsi constitué sera triangulaire. Le premier élément est un losange, lui-même, par dichotomie de ses côtés, constitué de quatre losanges, eux-même formés par deux triangles. Si l'on définit l'élément de base comme étant à l'ordre  $N = 0$ , un calcul trivial montre que le nombre de points  $N_p$  créés à l'ordre  $N$  est :

$$N_p = (1 + 2^N)^2 \quad (4.1)$$

Ce qui représente un total de :

$$\begin{aligned} N_l &= 2^{2N} \text{ losanges} \\ N_t &= 2^{2N+1} \text{ triangles} \end{aligned}$$

### Construction numérique de la grille

Les découpages antérieurs, décrits ci-dessus, qui considèrent une graduation régulière dans le plan  $(x, y)$  montrent un rapport  $r$  entre les surfaces maximales et minimales (matérialisées sur la figure 4.2) de  $r = 1,624598$ . Une première amélioration fut proposée par Popko (1969) (La discussion est donnée par [32]). Elle consistait à subdiviser chacun des losanges en triangles sphériques sur la sphère. Il s'avère que le découpage selon Popko reste néanmoins trop proche d'un découpage régulier dans le plan projeté sur la sphère. Il souffre donc d'altérations géométriques, bien que la diminution du rapport  $r$  ait été réduite à  $r = 1.091$  ([32]). Dufour propose une solution numérique au problème. Le découpage non régulier en géométrie plane donne après projection gnomonique sur la sphère des éléments de surface quasi-identique, où le rapport  $r$  devient  $r = 1.01$ . L'erreur sur les surfaces ainsi construites ne doit donc pas dépasser 1% sur la sphère entière. C'est à notre connaissance la précision maximum à laquelle on peut découper régulièrement la sphère en surfaces équivalentes.

La figure (4.2) donne un exemple de découpage du losange  $L_1$  (figure 4.1) pour des ordres  $N = 0$  et  $N = 3$ , les éléments de surfaces correspondants étant les triangles construits lorsque l'on relie les points adjacents. Remarquons que les lignes de découpage ne sont pas des segments parallèles car, pour être régulier sur la sphère, le découpage doit être irrégulier dans le plan. Les équations des droites successives dépendent de paramètres qui n'admettent pas de solutions analytiques mais qui sont donnés numériquement par Dufour. Nous voyons distinctement qu'elles permettent de prendre en compte la distance du point au centre du losange, tangent à la sphère. Ainsi les triangles les plus éloignés du centre doivent être de surface plus importante pour minimiser la déformation due à la distance croissante du plan à la sphère lors de la projection.

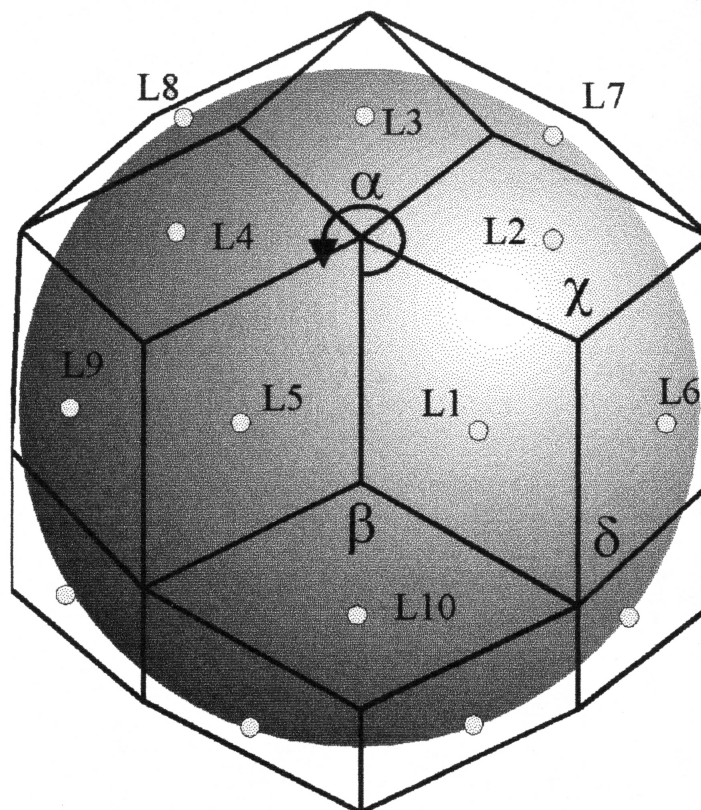


FIG. 4.1 – La sphère est incluse dans un polyèdre de Romé de l'Isle. Chaque losange qui constitue une face du polyèdre est tangent à la sphère en son centre.

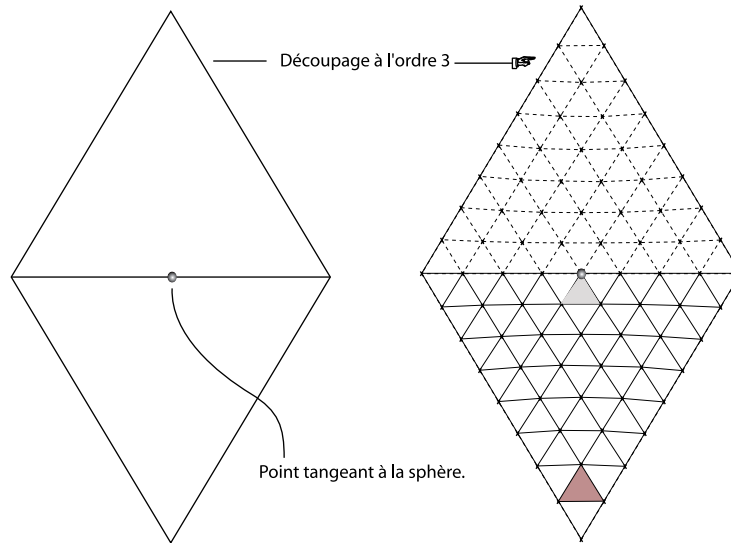


FIG. 4.2 – Construction d’un maillage en géométrie plane par la méthode de Dufour. Ce maillage irrégulier dans le plan permet, lorsqu’il est projeté sur la sphère par projection gnomonique, la construction de triangles sphériques de surfaces quasi-régulières.

L’intérêt est qu’il suffit de découper un seul losange du polyèdre de Romé de l’Isle, de le projeter sur la sphère par projection gnomonique et d’obtenir le maillage sur la sphère entière par rotations successives d’axe au sommet représenté par  $\alpha$  sur la figure (4.1). Cette opération est donc très rapide. Les éléments de base de surface sur la sphère entière seront donc maintenant des triangles sphériques de surfaces quasi-régulières. Sur la sphère entière, cela se caractérise par la construction de la figure (4.3). Les deux triangles sphériques constituant le losange de base sont matérialisés par la courbe solide. Les côtés des triangles, compte tenu des rotations sur la sphère appartiennent à deux triangles adjacents et on prendra soin de retirer cette frontière commune lors des rotations pour éviter les doublons dans le maillage.

Bien entendu, dans le cas d’une calotte sphérique le découpage de Dufour perd un peu de sa régularité car il est affecté par la coupure des losanges voisins du cercle limite  $\theta = \theta_0$ . Néanmoins, ce découpage reste plus intéressant qu’un simple maillage régulier en longitude et latitude. Le découpage de Dufour au centre de la calotte est hautement précis, et l’on pourra se contenter d’un nombre restreint de rotation selon les dimensions de cette dernière. On pourra facilement se convaincre que plus la calotte est petite, moins la différence entre la surface maximale et la surface minimale est importante, car la portion de sphère est très proche de son plan tangent.

### Distance moyenne entre deux points sur la Terre

D’après Dufour ([32], paragraphe 5) lorsque le losange de base est projeté sur la sphère son côté, d’une valeur de 0,726543 dans le plan, devient 0,65238 sur la sphère unitaire. Dufour nous donne donc la distance angulaire entre deux points de sommets consécutifs. Soit :

$$\delta = 0,65238 \text{ (soit } 37,37736^\circ) \quad (4.2)$$

Si le losange de base est décomposé à l’ordre  $N$ , alors d’après (4.1) nous avons  $2^N + 1$  points

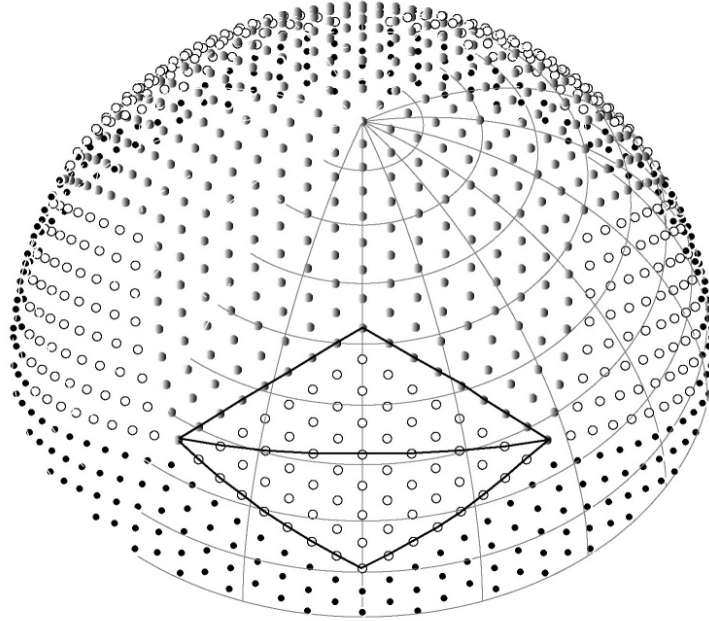


FIG. 4.3 – Après rotations successives d'un losange de base projeté sur la sphère, on obtient un maillage régulier dont l'erreur entre la surface maximale et minimale ne dépasse pas 1%.

par côté, ce qui représente  $2^N$  segments. On en déduit donc la distance sur la Terre de rayon moyen  $a \simeq 6371,2km$  :

$$\boxed{d \simeq \delta \frac{a}{2^N}} \quad (4.3)$$

Un découpage à l'ordre  $N = 6$ , par exemple, entraîne la construction d'une grille dont les points sont distants d'environ  $65km$  ; nous prendrons généralement cette distribution pour nos exemples synthétiques.

#### 4.1.2 Rotation des données dans le repère de la calotte

La première étape d'une analyse régionale est de convertir les coordonnées géocentriques des données, du repère géocentrique d'origine dans le nouveau système de coordonnées d'axe  $O_z'$ , l'axe de la calotte définie par un point  $C(\varphi_o, \theta_o)$ . Si nous repérons la position d'une donnée dans le repère géocentrique par  $(\varphi, \theta)$  avec  $\varphi$  la longitude et  $\theta$  la latitude, ses coordonnées dans le nouveau système de référence seront notées  $(\varphi_c, \theta_c)$ .

La transformation s'exprime par une rotation du type :

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

avec  $\mathcal{M}$  matrice de rotation de dimension  $3 \times 3$ .

D'autre part, en définissant le méridien  $\varphi_c = 0$  dans le repère lié à la calotte comme celui qui passe par les pôles terrestres nord et sud et le point  $C$ , centre de la calotte, la matrice  $\mathcal{M}$  s'exprime explicitement dans le repère géocentrique initial par :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'angle  $\beta$  se déduit directement de considérations simples de trigonométrie sphérique et on trouve :

$$\sin \beta = \frac{\sin(\theta_o) \sin(\varphi - \varphi_o)}{\sin(\theta_c)}$$

Il y a donc une singularité en  $\theta_c = 0$  pour le calcul des rotations et la solution est indéterminée lorsque la donnée se trouve au pôle de la calotte.

Remarquons que cette transformation nécessite la recherche préalable de l'expression des points  $(\varphi_c, \theta_c)$  dans le repère calotte correspondant aux coordonnées  $(\varphi, \theta)$  sur la sphère. Cette opération se réalise simplement par deux rotations successives sur la sphère. Notons enfin que, lors de ces rotations la composante  $Z$  du champ est invariante, la transformation étant indépendante du vecteur normal à la sphère.

De même, pour revenir à l'expression du champ magnétique dans le repère géocentrique nous utiliserons la rotation inverse, simplement donnée par  $\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-T}$ .

### 4.1.3 Ecriture du problème inverse

Etant donné la non-orthogonalité des bases de fonctions, il est judicieux de construire une matrice aussi creuse que possible et de faire en sorte que les éléments non diagonaux soient le plus proches de la diagonale principale. Bien que l'ordre importe peu dans le calcul des séries qui décrivent le champ magnétique (2.9), cette précaution s'avère bénéfique d'un point de vue numérique ([94]). Supposons que nous disposions de  $N$  observations et que nous cherchions à caractériser  $P$  paramètres du modèle. Le champ magnétique écrit par (2.9a), (2.9b) et par (2.9c) peut prendre la forme algébrique suivante :

$$\underline{d} = \mathbf{A} \underline{m}$$

avec  $\underline{d}$ , le vecteur contenant les valeurs des composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  du champ,  $\mathbf{A}$  la matrice des fonctions de  $r, \theta$  et  $\varphi$  et  $\underline{m}$  le vecteur des coefficients de Gauss  $\{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$ .

Si l'on écrit les expressions du champ magnétique (2.9) en un point  $P_i$ , défini par ses trois coordonnées  $(\varphi_i, \theta_i, r_i)$ , sous la forme :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} d_{3i-2} \\ d_{3i-1} \\ d_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{x,i} \\ B_{y,i} \\ B_{z,i} \end{bmatrix} \\
A_{3i-2,\beta} &= \left[ \left( \frac{a}{r_i} \right)^{n_k+2} \frac{dP_{n_k}^m(\theta_i)}{d\theta} \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{Bmatrix} \right]_{\beta} \text{ avec } (i = 1, \dots, N/3) \\
A_{3i-1,\beta} &= \left[ \frac{m}{\sin \theta_i} \left( \frac{a}{r_i} \right)^{n_k+2} P_{n_k}^m(\theta_i) \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi_i) \\ -\cos(m\varphi_i) \end{Bmatrix} \right]_{\beta} \text{ et } (\beta = 1 \dots P) \\
A_{3i,\beta} &= \left[ -(n_k + 1) \left( \frac{a}{r_i} \right)^{n_k+2} P_{n_k}^m(\theta_i) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{Bmatrix} \right]_{\beta} \\
\underline{m} &= \begin{bmatrix} G_{n_k=0}^0 \\ \dots \\ G_{n_k=K}^{m=K} \\ H_{n_k=K}^{m=K} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

on peut ranger les colonnes dans l'ordre des indices  $k$  croissants puis  $m$  croissants, jusqu'à l'indice de troncature  $k = K_{max}$ . Puisque la troncature implique également  $M_{max} = K_{max}$  (car  $k \geq m$  d'après les résultats de la section 3.1.5), cette écriture conduit à la construction de  $(K_{max} + 1)^2$  colonnes pour la matrice  $\mathbf{A}$  (section 2.3). D'une manière générale, les dimensions respectives des éléments algébriques sont :

$$\begin{aligned}
\dim(\underline{d}) &= 3N \times 1 \\
\dim(\mathbf{A}) &= 3N \times (K_{max} + 1)^2 \\
\dim(\underline{m}) &= (K_{max} + 1)^2 \times 1
\end{aligned}$$

Cette écriture conduit à la construction d'une matrice  $\mathbf{A}$  la plus creuse possible avec ce formalisme. Dans un cas où les données sont bien réparties, la matrice d'inversion sera diagonale par bloc en raison des propriétés d'orthogonalité des cosinus et des sinus. Cette écriture représente la situation la plus favorable pour l'inversion numérique.

## 4.2 Inversion de données synthétiques sur une surface

### 4.2.1 Le choix des données

Dans cette section, on essaye d'inverser des données synthétiques uniformément réparties sur la calotte à la surface terrestre. On considère une calotte d'ouverture  $\theta = 5^\circ$  centrée sur la France, de centre  $C = (2^\circ E, 47^\circ N)$  dans le référentiel géocentrique. Nous avons construit un jeu de données en utilisant le découpage décrit dans la section 4.1 à l'ordre 6 de telle manière que nous obtenions 236 points (le nombre de points associés à chaque ordre du découpage dépend naturellement de l'angle d'ouverture  $\theta_0$  de la calotte) et en utilisant un modèle synthétique provenant de la différence entre un modèle de CAIN ([60]) jusqu'aux degré  $n$  et ordre  $m = 50$  et un modèle IGRF de 1960. D'après la section (4.1) la distance entre deux points consécutifs est d'environ 63km.

En adaptant la routine GEOMAG du NGDC (National Geophysical Data Center) pour le calcul du champ magnétique en repère géocentrique nous pouvons construire un ensemble de



236 données vectorielles recouvrant l'ensemble de la calotte de manière quasi-uniforme pour les trois composantes du champ magnétique  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$ . Ces données sont ensuite converties dans le repère de la calotte sphérique à l'aide des transformations décrites dans la section 4.1.2.

Ce type de modèle permet de simuler le cas réel où l'on retranche un modèle global des données comme le suggère Bullard ([16]). Le choix du modèle est peu important puisque seul nous intéresse ici le comportement de l'inversion avec l'altitude. Pour faire acte de modernité, nous aurions pu prendre un modèle CMP3 ([98]) auxquels nous aurions pu retrancher un champ DGRF calculé pour la même époque ; ceci n'aurait cependant apporté aucune information supplémentaire sur la modélisation même si cela nous aurait permis de travailler sur un modèle résiduel sans doute plus réaliste que le premier. D'autre part nous aurons besoin par la suite des coefficients de Gauss et pas seulement des valeurs du champ magnétique. Ces exigences sont plus faciles à remplir avec des modèles globaux de type IGRF ou CAIN, que par le modèle CMP3 qui a été rendu publique tardivement ([99]). Nous avons donc retenu la première solution pour son aspect pratique.

L'ajout d'un bruit de loi gaussienne d'une valeur de  $5nT$  permet de simuler un ensemble de données prise au temps  $t$  avec une erreur aléatoire liée à la mesure, à l'instrumentation ou à la réduction du champ externe. Le fait de ne considérer que la différence entre deux modèles de champ globaux revient à *accélérer* la convergence en retranchant les *grandes longueurs d'onde* du champ magnétique difficilement représentables sur une portion de la sphère limitée à la taille de notre calotte. Nous avons déjà discuté de manière critique ce type de terminologie et souligné son côté trompeur (3.2.1), nous ne reviendrons donc pas sur ces points et nous nous contenterons de suivre la procédure générale préconisée par les utilisateurs des harmoniques sphériques sur calotte.

## 4.2.2 Moindres carrés ordinaires

### Méthodologie

Les composantes du champ magnétiques exprimées en (2.9) peuvent s'écrire sous forme algébrique :

$$\underline{d}_{obs} = \mathbf{A}\underline{m} + \underline{\varepsilon} \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice des fonctions de base, définies sur la calotte sphérique, écrite comme dans le paragraphe 4.1.3 ;  $\underline{m}$  les coefficients de Gauss qui caractérisent le modèle de champ que l'on cherche (i.e l'ensemble des coefficients  $\{G_{n_k}^m, H_{n_k}^m\}$ ),  $\underline{d}_{obs}$  les valeurs du champ magnétique  $B$  observées et  $\underline{\varepsilon}$  le vecteur d'erreur sur les données  $\underline{d}_{obs}$  normalement distribué, donc de moyenne nul, soit  $\underline{\varepsilon} = \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Les moindres carrés, également appelés solution de *maximum de vraisemblance*, revient à chercher les coefficients de Gauss estimés  $\underline{m}$  qui minimisent la fonctionnelle  $\Psi = \|\underline{d} - \underline{d}_{obs}\|^2$  où  $\underline{d}$  représente les composantes du *vrai* champ magnétique, par opposition avec les mesures  $\underline{d}_{obs}$  qui sont entachées d'une erreur  $\underline{\varepsilon}$ .

Si le nombre de données  $\underline{d}$  est supérieur au nombre de coefficients  $\underline{m}$ , donc si le problème est surdéterminé, la solution est trouvée classiquement par :

$$\boxed{m_{est} = (\mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{W} \underline{d}_{obs}} \quad (4.5)$$

Il est de coutume d'incorporer la matrice  $\mathbf{W}$  qui est la matrice diagonale des poids attribués aux différentes mesures. Remarquons qu'en toute rigueur, l'écriture (4.5) correspond à la fonctionnelle définie par  $\Psi = (\underline{d} - \underline{d}_{obs})^t \mathbf{W} (\underline{d} - \underline{d}_{obs})$  et que par conséquent, cela revient à changer la loi de Gauss de l'erreur  $\varepsilon_i = \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{W}_{i,i})$  pour chacune des données  $d_i$ .

Cette matrice est particulièrement adaptée lorsque l'on incorpore plusieurs ensembles de données provenant de sources d'observations différentes et qui ne possèdent pas la même précision. On attribue le plus souvent un poids plus important aux données de meilleures précisions. Par conséquent la matrice  $\mathbf{W}$  est déjà une information *a priori* que l'on incorpore à l'inversion et qui contient donc une dose de subjectivité qu'il n'est pas toujours simple de quantifier. D'autre part, le poids peut également servir à contraindre le modèle à mieux considérer un ensemble de données plutôt qu'un autre. Ainsi, par exemple, en modélisation régionale nous sommes intéressés par les données proches des sources crustales du champ magnétique car elles sont susceptibles de contenir davantage l'information que l'on cherche que les données satellites récentes, plus loin de la surface et donc des sources internes. Or, le nombre des mesures terrestres et leurs qualités restent majoritairement inférieures à ce qu'offrent les données satellites. Pourtant, on préférera leur donner plus de poids car elles contiennent l'information que l'on recherche ([107]). Ceci est encore affaire de compromis et dépend de l'application géophysique d'intérêt.

Pour les considérations synthétiques, ces discussions sont prématurées et l'on considérera un poids identique sur toutes nos données en posant  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ , la matrice identité.

### Exemple synthétique

La figure (4.4) montre le modèle obtenu après inversion par moindres carrés ordinaires du champ de *Cain* moins le *DGRF*. Le développement des séries dans le développement du potentiel et de ses composantes a été tronqué à  $K_{max} = 12$  de manière à devoir rechercher  $N = (K_{max} + 1)^2 = 169$  coefficients de Gauss. Les coefficients ainsi obtenus ont ensuite servi à calculer le problème direct sur une grille très fine, permettant de simuler une interpolation

Le choix de la troncature n'est pas arbitraire et correspond à la limite empirique du conditionnement numérique de la matrice d'inversion en regard de l'évolution de la valeur des coefficients de Gauss pour des développements d'ordres supérieurs. On ne manquera pas de remarquer la cohérence entre cette observation et la prédiction sur le développement maximum  $K_{max} = 12$  annoncé dans la section 3.2.1 pour une distance moyenne entre les données d'environ 63km. Néanmoins, même si la pratique et la théorie coïncident sur ce point, c'est probablement plus le mélange des deux bases de fonctions qui nous limite dans le développement.

Etant donné la non-orthogonalité des fonctions de base, l'ajout de coefficients dégrade de plus en plus le conditionnement de la matrice à inverser et l'inversion devient instable en l'absence de condition supplémentaire de régularisation.

Les oscillations que l'on observe sur la figure 4.4 pour chacune des composantes prouvent que le nombre de coefficients est insuffisant pour la représentation convenable d'un champ magnétique. Ceci est parfaitement visible sur les représentations des résidus où l'on observe des structures organisées très éloignées d'une répartition aléatoire caractéristique du bruit injecté dans les données. Il reste donc indubitablement du champ à modéliser, ce qui signifie que la convergence du modèle vers sa solution n'est pas suffisante.

La représentation en harmoniques sphérique sur calotte requiert un nombre théoriquement infini de termes dans les développements de champ magnétique (2.9) et la troncature  $K_{max}$  imposée par le nombre restreint de données (708 données dont 236X, 236Y et 236Z) et la non-orthogonalité des fonctions de base n'est pas adaptée. La représentation en harmoniques sur calotte pose des problèmes, liés à l'existence de la frontière  $\theta = \theta_0$ , que l'on ne rencontre pas en modélisation globale. Dans ce dernier cas, on peut choisir la troncature en appuyant le raisonnement entièrement sur des considérations de longueurs d'onde. Dans la modélisation sur calotte, le raisonnement se complique du fait que le champ que l'on modélise dérive d'un potentiel qui ne vérifie pas les mêmes conditions aux limites. Dans ce cas, nous ne pouvons

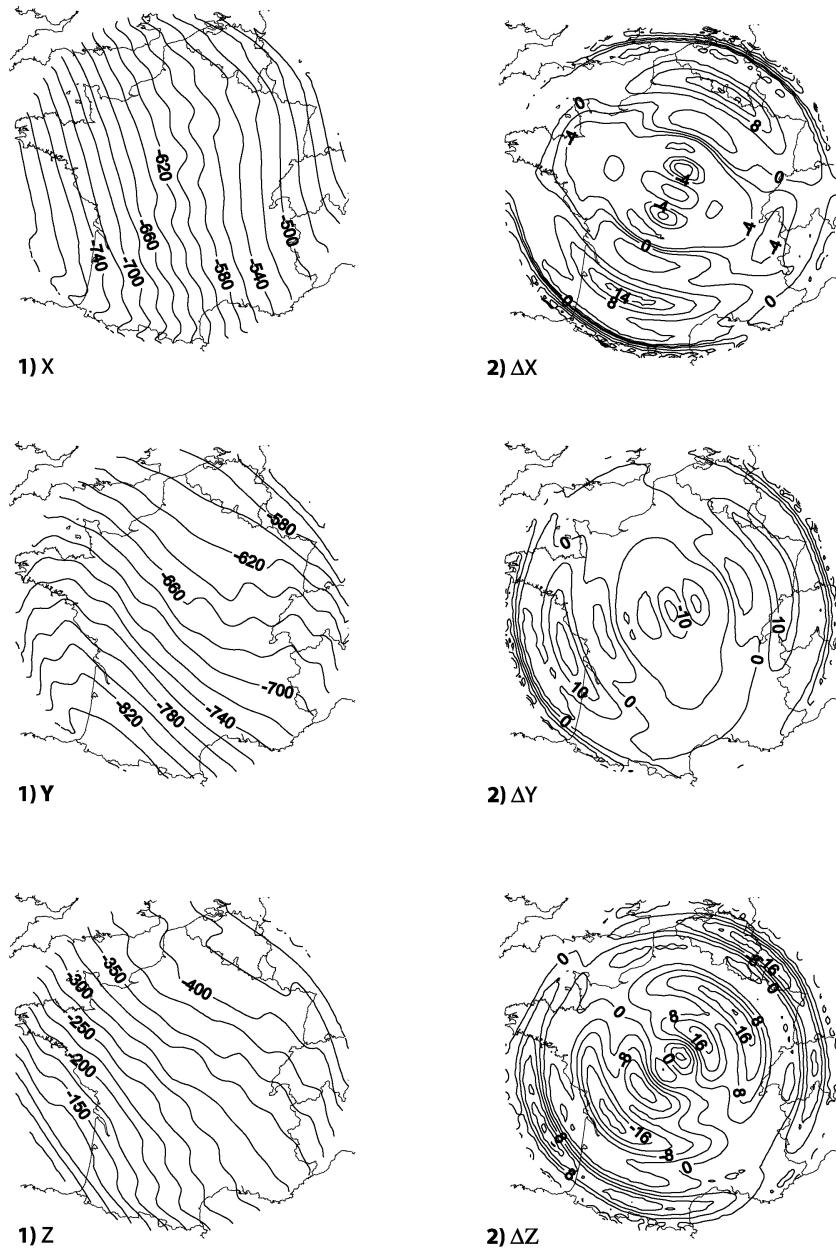


FIG. 4.4 – Modèle de champ magnétique *Cain* moins *DGRF* obtenu sur la base local des harmoniques sphériques sur calotte par inversion par moindres carrés. L'ordre du développement des fonctions de base est  $K_{max} = 12$ . Les composantes du champ magnétique (1) présentent des oscillations et les résidus (2) des structures organisées.

pas espérer une convergence uniforme, qui est celle qui intéresse le plus le modélisateur car la situation contraire favorise l'apparition *du phénomène de Gibbs* (sur lequel nous reviendrons partie 2). Avec le mélange des deux bases proposé par Haines on espère que l'accélération de la convergence l'emporte sur l'inconvénient lié à la non-orthogonalité des fonctions. L'exemple de la figure (4.4) montre, qu'avec les moindres carrés ordinaires du moins, ce procédé n'est pas suffisant, comme l'atteste d'ailleurs l'analyse de la variance estimée après inversion. La variance exhibe une valeur  $\sigma \sim 9nT$  alors qu'en toute rigueur nous aurions du retrouver une variance compatible avec le bruit de  $5nT$  incorporé dans les données. On ne manquera pas de souligner au passage l'étalement croissant des résidus nettement visible sur la figure qui est un artefact que l'on a discuté au paragraphe 3.2.1.

On peut poursuivre l'analyse en augmentant le nombre de données, et donc le nombre de coefficients de Gauss calculables. Puisque nous maîtrisons le nombre de points de mesure nous avons utilisé une grille quasi-régulière permettant de construire le champ sur la calotte en 1350 points distants de 20km environs. Il ne nous a fallu pas moins de 625 coefficients de Gauss pour atteindre la valeur théorique de  $5nT$  pour la variance estimée sur les données. Ceci nécessite dans l'écriture de Haines de pousser le développement jusqu'à l'indice  $K_{max} = 25$  et le conditionnement de la matrice est particulièrement critique. Il est clair que pour de petites calottes nous ne disposons pas d'autant de données aussi bien réparties et qu'il devient impérieux d'utiliser des méthodes d'inversion plus élaborées. La méthode d'inversion par moindres carrés n'est pas à remettre en cause mais nous devons chercher à diagnostiquer les problèmes numériques qui surviennent lorsque le nombre de paramètres que nous recherchons approche les nombres de données disponibles.

### 4.2.3 Décomposition en valeurs singulières

#### Méthodologie

Dans le cas limite où le nombre de paramètres approche le nombre de données, le problème inverse posé par les harmoniques sphériques sur calotte ne conduit à aucune solution car le déterminant du système devenant numériquement nul, la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A}$  dans (4.5) n'est plus inversible. Ce comportement pathologique est lié à la non-orthogonalité des bases de fonctions qui provoque des combinaisons linéaires entre les différents vecteurs de base de la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A}$ . Ainsi, avant même d'obtenir la non-unicité théorique de la solution, on aboutit à une instabilité dans l'inversion. Cette instabilité est nettement visible en changeant légèrement l'erreur gaussienne  $\underline{\varepsilon}$  injectée dans les données synthétiques. Dans une inversion par moindres carrés ordinaires, cela se caractérisera par une variance estimée  $\sigma$  sur les données proche de zéro, caractérisant un *overfitting*.

L'idée de la décomposition en valeurs singulières, ou décomposition de Lanczos, repose sur l'idée que toute matrice hermitienne, soit dans notre cas une matrice carrée, symétrique et positive, peut s'écrire de manière unique comme :

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$$

Dans cette version simple, où  $\mathbf{G}$  est carrée symétrique,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  ont une interprétation immédiate :  $\mathbf{U}$  est la matrice des vecteurs propres et  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i$  associées à l'opérateur  $\mathbf{G}$ . En outre  $\mathbf{U}$  est orthogonale :  $\mathbf{U}^t \mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

En considérant une matrice de poids  $\mathbf{W}$  proportionnelle à la matrice identité et en posant

$\mathbf{G} = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$  on trouve que (4.5) s'écrit maintenant :

$$\boxed{m_{est} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^t \mathbf{A}^t d_{obs}} \quad (4.6)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{G}$  est positive, et donc les valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives ou nulles.

La matrice des valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{G}$  étant diagonale elle est inversible pourvu que les termes de la diagonale  $\lambda_i$  soient non nuls. Plus prosaïquement, le système d'équation écrit sous la forme de (4.6) n'a pas de solution unique si une seule de ses valeurs propres est nulle. Numériquement, en raison des combinaisons linéaires des vecteurs de la matrice de départ  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  et des limites de la représentation des nombres en machine, on trouve que certaines valeurs de  $\lambda_i$  sont proches de la précision numérique de la machine, voire négatives (Un cas de ce genre est mentionné par Korte et Holme ([64]) qui rajoutent un léger poids  $\mathbf{W}$  arbitraire pour contourner ce problème). La décomposition en valeurs singulières offre donc un bon diagnostic de la situation et montre dans quels cas la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  est mal conditionnée. Pour ces valeurs propres mal déterminées numériquement, on posera  $1/\lambda_i = 0$  et il est tout à fait exceptionnel de constater que l'on pose par conséquent  $\infty = 0$ !

Le fait de poser à 0 une valeur propre revient à détruire les combinaisons linéaires responsables du mauvais conditionnement de la matrice d'inversion en supposant à juste titre que, puisque ces valeurs propres sont mal déterminées, la solution résultante du problème linéaire sera entachée d'une erreur non quantifiable mais qui tend le plus souvent vers l'infini. Par exemple, si la décomposition en harmoniques sphériques sur calotte souffre d'une singularité numérique, les coefficients de Gauss que nous obtiendrons, ne convergeront pas vers 0. Leur valeur augmentera en fonction du développement, ce qui est en évidente contradiction avec la convergence des séries qui modélisent le potentiel.

Le prix à payer est que le système linéaire initialement posé n'est pas tout à fait résolu dans les mêmes termes. Il en résulte donc un compromis entre la stabilité de l'inversion et une perte de résolution des données qu'il faudra établir au cas par cas ([94]). En d'autres termes, il faudra déterminer un seuil arbitraire à partir duquel on s'autorise à détruire certaines combinaisons linéaires, donc à fixer la plus petite valeur propre numériquement acceptable et se résigner à perdre de la résolution sur les données.

### Exemple synthétique

A partir des données synthétiques calculées sur une grille contenant 236 points et bruitées à  $5nT$  on cherche à déterminer le modèle de champ par une inversion par moindres carrés en exploitant les propriétés de la décomposition de Lanczos. Nous avons ainsi considéré l'inversion en incorporant 625 coefficients de Gauss qui devaient correspondre au nombre de paramètres permettant de résoudre les données moyennant une erreur de  $5nT$ . Dans un premier temps, on examine la décroissance des valeurs propres du système et on supprime celles inférieures à un certain seuil que l'on doit se fixer. Le conditionnement de la matrice est mesurable par la quantité  $C = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ . A priori, nous n'avons que peu d'arguments objectifs concernant le choix du seuil. La figure (4.5-a) montre les variations des valeurs propres normalisées (divisée par la valeur propre maximale) dans l'ordre décroissant. Il est vrai que l'on observe un coude pour lequel les valeurs propres chutent vers 0; cependant il n'est pas aisé à première vue de repérer précisément ce point d'inflexion. Dans de tels cas, on préfère se reposer sur l'examen systématique des résultats offerts par différents choix du seuil de coupure des valeurs propres. Nous avons donc essayé  $C$  tel que  $10^5 \leq C \leq 10^{18}$  et regardé la valeur de la variance estimée correspondante (sur la figure 4.5-b). Qualitativement, on constate qu'en l'absence de contrainte sur les valeurs propres, la résolution est excessivement mauvaise compte tenu de la quasi-singularité

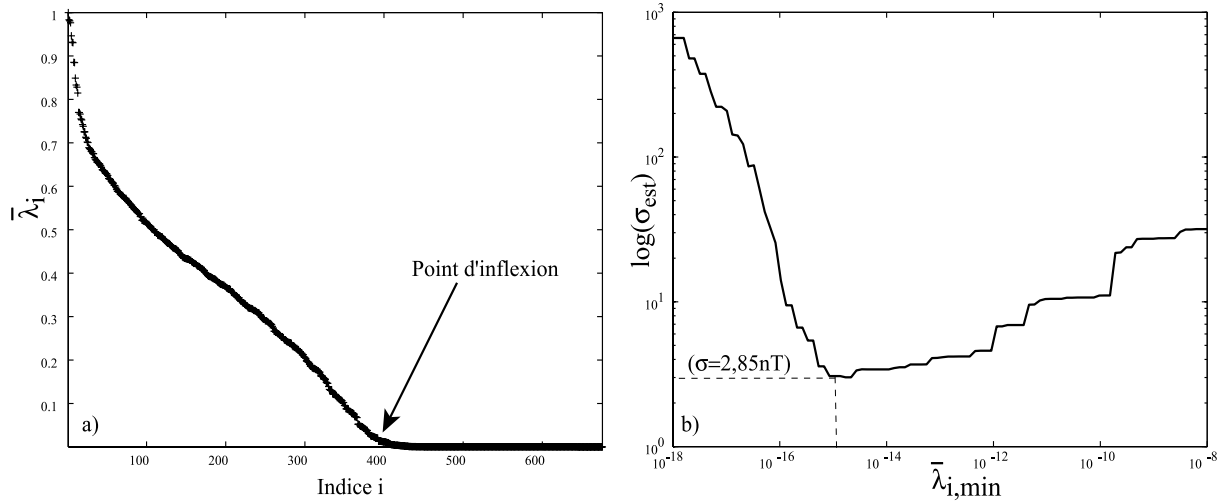


FIG. 4.5 – En *a*) on montre la décroissance des valeurs propres et la recherche du seuil pour lequel on considère  $\bar{\lambda}_i = 0$ . En *b*) on explore la valeur des résidus moyen  $\sigma_{est}$  pour différentes valeurs de  $\bar{\lambda}_{min}$  ( $C = 1/\bar{\lambda}_{min}$ ), en particulier le résidus minimum.

du déterminant. Plus nous retranchons de valeurs propres, moins le problème est numériquement difficile à calculer, ce que nous observons en premier lieu par la décroissance de  $\sigma$ . Après avoir atteint un minimum, l'augmentation de  $\sigma$  dénote la perte de résolution des données lorsque l'on retranche de plus en plus de valeurs propres. Il ne faut cependant pas se laisser abuser par ces résultats somme toute superficiels et conclure que la stabilité est obtenue pour le minimum de la courbe des résidus en fonction du seuil, car ce type d'étude ne dit rien ni sur la stabilité des coefficients, ni sur le bon déroulement numérique de la décomposition de Lanczos.

En l'occurrence, les coefficients sont très instables et varient fortement même lorsque l'on retranche les petites valeurs propres pour des seuils voisins. Ceci est indirectement visible sur la figure (4.5-b) où le minimum correspond à une variance de  $3nT$ , non de 5, démontrant que nous sommes en présence d'un cas d'*overfitting*. En traçant la valeur moyenne de l'intensité du champ modélisé sur une grille d'interpolation très fine nous constatons immédiatement que les points interpolés contiennent des valeurs aberrantes.

La décomposition en valeurs singulières possède donc quelques effets pervers qu'il faut garder à l'esprit. D'une part, en retirant les singularités numériques, la technique nous laisse croire en l'aboutissement correct d'une inversion. Or, dans certains cas, les modèles obtenus sont instables et ne peuvent pas être interpolés en tous points du domaine montrant que les valeurs propres gardées sont de valeurs numériques encore trop faibles. D'autre part, les algorithmes de décomposition en valeurs singulières apparaissent souvent comme *des boîtes noires* où l'on ne se rend compte qu'à la fin du processus des problèmes numériques engendrés par la décomposition de Lanczos elle-même. Une première vérification indispensable sera de s'assurer que le résultat du calcul de  $(\mathbf{I} - \mathbf{U}^T \mathbf{U})$  est bien nul.

La décomposition en valeurs singulières sera donc considérée comme une bonne alternative lorsque nous ne devons pas retrancher trop de valeurs propres ; dans un tel cas, seules quelques valeurs propres sont mal déterminées et l'instabilité du problème inverse peut être levée. S'il s'avère nécessaire de retrancher un grand nombre de valeurs propres, le problème résolu s'éloigne de plus en plus du problème initial et le modèle devient inexploitable en pratique, même si l'inversion est

stable. Le rejet de telle ou telle valeur propre induisant la destruction de combinaisons linéaires, il n'est pas facile d'estimer en fin de course la qualité du modèle obtenu et son éloignement du problème initialement posé.

#### 4.2.4 Inversion par chaîne de Markov

Nous avons présenté jusqu'à présent deux techniques similaires de résolution de problèmes inverses largement employées en géophysique et qui ont rapidement montré leurs limites pour la résolution des données magnétiques par le formalisme des harmoniques sur calottes sphériques.

Les différentes techniques d'inversion précédentes ont toutes montrées que dans le cas d'une répartition homogène des données sur une calotte il n'était pas possible de rechercher l'ensemble des coefficients nécessaires à la modélisation du champ à la précision requise de  $5nT$ . Puisque nous ne pouvions pas les déterminer, nous espérons pouvoir les estimer dans un sens probabiliste par une inversion par chaîne de Markov. Cette détermination n'a pas été possible pour les raisons que nous évoquons plus bas et les considérations qui suivent illustrent surtout certaines caractéristiques de SCHA que l'on peut déduire des chaînes de Markov.

#### Formulation de la chaîne de Markov

D'une manière générale, on suppose que les valeurs vraies  $\underline{m}$  des paramètres d'un modèle (4.4) se trouvent dans l'intervalle :

$$\boxed{m_{\text{inf}} \leq \underline{m} \leq m_{\text{sup}}} \quad (4.7)$$

Si nous n'avons aucune idée de ces paramètres, l'intervalle d'exploration est  $\mathbb{R}$ . En pratique, nous devons le restreindre et il représentera par conséquent une première information *a priori* sur le modèle qu'il faudra choisir de la façon la moins restrictive possible.

En considérant que les paramètres  $\underline{m}$  recherchés sont les coefficients de Gauss, on construit la chaîne de Markov de la façon suivante :

Dans le formalisme des chaînes de Markov, les paramètres  $\underline{m}$  sont considérés comme des variables aléatoires que l'on recherche par une loi de probabilité conditionnelle. Les paramètres sont déterminés à condition de connaître les données. Cette loi *a posteriori* est donnée par une loi de Bayes (1763) :

$$P_{\text{post}}(\underline{m} = \mu / \underline{d} = d_{\text{obs}}) = \frac{P(\underline{d} = d_{\text{obs}} / \underline{m} = \mu) P_{\text{prior}}(\underline{m} = \mu)}{\sum_{\mu \in \Omega} P(\underline{d} = d_{\text{obs}} / \underline{m} = \mu) P_{\text{prior}}(\underline{m} = \mu)} \quad (4.8)$$

où  $\Omega$  est le domaine discret de tous les paramètres inclus dans  $\mathbb{R}^N$  et  $N$  le nombre de paramètres. Cette expression de la loi *a posteriori* est fonction de la loi *a priori* sur les paramètres  $P_{\text{prior}}(\underline{m} = \mu)$ . Dans le contexte bayésien, la résolution du problème inverse revient à déterminer la loi *a posteriori* par une modification de la loi *a priori* en connaissant les données ([41]).

Dans notre cas, la loi *a priori* sera donnée par un échantillonnage dans l'intervalle (4.7) en supposant que chaque état discret de la variable  $m_i$  est équiprobable et que le paramètre recherché est contenu dans l'intervalle.

Le dénominateur de l'expression (4.8) requiert un nombre de calculs impossible à atteindre en pratique. Une manière élégante de contourner cette difficulté est de calculer la loi *a posteriori* comme la loi d'équilibre d'une chaîne de Markov ([88]). Cette loi d'équilibre est elle-même la limite d'une loi de transition  $P_{tr}$ . Il existe plusieurs algorithmes pour les lois de transition, notamment les algorithmes de Hasting-Métropolis et de Gibbs. Nous avons choisi l'algorithme de

Gibbs qui nécessite une discrétisation préalable des paramètres  $m_i$  dans l'intervalle d'exploration. La loi de transition s'écrit :

$$P_{tr} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right) = \frac{P_{post} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right)}{\sum_{i=1}^N P_{post} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right)} \quad (4.9)$$

et  $\underline{m}_{-i}$  représente le sous espace des paramètres  $\underline{m}$  moins le paramètre  $m_i$ . Dans le cas d'une loi *a priori*  $P_{prior}$  uniforme, la loi de transition  $P_{tr}$  est essentiellement la loi :

$$P \left( \underline{d} = \underline{d}_{obs} / \underline{m}_i = \underline{\mu}_{-i}, m_i \right)$$

Sachant que nous avons choisi une loi de Gauss pour les données, on a :

$$P_{tr} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right) = K e^{-\Psi^2 / (2\sigma^2)} \quad (4.10)$$

où

$$\Psi^2 = \|\underline{d}_{obs} - \mathbf{A}\underline{m}\|^2$$

et  $\sigma$  la variance de la loi normale de l'erreur  $\varepsilon$ . Comme notre problème est linéaire, on montre que si l'on introduit la valeur  $m_{i,\min}$  qui minimise  $\Psi^2$  par rapport au paramètre  $m_i$ , la loi conditionnelle  $P \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right)$  s'écrit :

$$P_{tr} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right) = \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha \frac{(m_i - m_{i,\min})}{2\sigma^2}} \quad (4.11)$$

avec  $\alpha = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})_{i,i}$  et :

$$m_{i,\min} = \frac{1}{(\mathbf{A}^t \mathbf{A})_{i,i}} \left[ (\mathbf{A}^t \underline{d}_{obs}) - \sum_{j=1, j \neq i}^N (\mathbf{A}^t \mathbf{A})_{i,j} m_j \right] \quad (4.12)$$

En pratique, on ne cherche pas la loi *a posteriori* complète, qui est une fonction de tous les paramètres, mais on se limite aux lois marginales de chaque paramètre et éventuellement à des lois de probabilité jointes entre deux (ou plusieurs) paramètres sélectionnés à l'avance. On peut montrer que la loi marginale est la moyenne de toutes les lois de transition pour un paramètre  $m_i$  donné.

Si l'échantillonnage du paramètre  $m_i$  est inadapté, la chaîne de Markov reste bloquée sur l'état du paramètre de l'itération précédente et l'exploration de tous les états possibles du paramètre est incomplet. Plutôt que de fixer directement les limites des intervalles, nous pouvons fixer en premier lieu un nombre  $P$  d'échantillons de la variable  $m_i$  que nous désirons. Par mesure de simplicité, ce nombre d'échantillons sera constant pour tous les paramètres. Puisque nous ne connaissons pas les bornes de l'intervalle (4.7), nous pouvons les déterminer moins arbitrairement en considérant le pas d'échantillonnage le plus cohérent avec la variance estimée par moindres carrés sur chaque paramètre. Une variance petite nous donnera un intervalle d'exploration plus petit et inversement. Comme nous nous sommes donné un nombre  $P$  d'échantillons, cette manipulation nous donnera automatiquement la valeur des encadrements  $m_{\inf}$  et  $m_{\sup}$ .



## Echantillonnage

Pour la détermination de l'échantillonnage, on peut analyser la sensibilité de la fonctionnelle  $\Psi^2$  au changement de la valeur d'un paramètre en étudiant sa courbure. Prenons  $\underline{m}_{est}$  l'ensemble des paramètres estimés par moindres carrés et  $\widehat{m}$ , l'ensemble des paramètres tels que  $\widehat{m} = \{ \underline{m}_{est, -i}, m_i \}$ . Seul le paramètre  $m_i$  est libre et prend une valeur quelconque entre  $m_{i,inf}$  et  $m_{i,sup}$ , les autres sont fixés et correspondent à leur valeur estimée par moindres carrés.

D'après Menke (1989), on trouve pour la variation de  $\Psi^2$  :

$$\Psi^2(\underline{m}_{est}) - \Psi^2(\widehat{m}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A^T A)_{j,i} (m_{i,est} - \widehat{m}_i) (m_{j,est} - \widehat{m}_j)$$

La variation de  $\Psi^2$  correspondant à la variation du paramètre  $m_i$  s'écrit donc :

$$\Psi^2(m_{i,est}) - \Psi^2(\widehat{m}_i) = (A^T A)_{i,i} (m_{i,est} - \widehat{m}_i)^2 \quad (4.13)$$

Décomposons l'espace des paramètres de la façon suivante :

$$\underline{m} = \{ \underline{m}^{k \leq K_{max}}, \underline{m}^{k > K_{max}} \}$$

C'est-à-dire en séparant les paramètres dont nous avons pu obtenir une estimation par moindres carrés ordinaires et ceux dont nous ne savons rien, car nous n'avons pas pu pousser le développement au-delà de  $K_{max}$ . On peut encadrer les coefficients  $\underline{m}^{k \leq K_{max}}$  en supposant que l'intervalle (4.7) est centré sur  $\underline{m}_{est}$ . Pour les autres,  $\underline{m}^{k > K_{max}}$ , on considère que l'intervalle est centré sur  $\underline{0}$ .

On peut donc écrire :

$$\underline{m} = \underline{m}_{est} + p \underline{\delta}_m$$

avec  $p = -P, \dots, P$  où  $2P + 1$  représente le nombre d'échantillons sur chaque paramètre, et  $\underline{\delta}_m$  le pas d'échantillonnage que l'on cherche à caractériser. On cherche à trouver  $\underline{\delta}_m$  pour que :

$$|\Psi^2(m_{i,est}) - \Psi^2(\widehat{m}_i)| < \alpha \sigma_d^2$$

avec un nombre  $\alpha$  que l'on déterminera en fonction de la largeur de l'intervalle que l'on désire explorer et  $\sigma_d$  la variance sur les données. Puisque l'inversion par moindres carrés ne permet pas d'obtenir une variance estimée proche de la variance de  $5nT$ , on prend la valeur estimée par moindres carrés. Par exemple, d'après le paragraphe 4.2.2, pour un développement  $K_{max} = 12$ , on prend  $\sigma_d \sim 9nT$ .

En particulier, nous avons :

$$\underline{m}_{inf}^{k \leq K_{max}} = \underline{m}_{est} - P \underline{\delta}_m \quad \underline{m}_{sup}^{k \leq K_{max}} = \underline{m}_{est} + P \underline{\delta}_m$$

On trouve, en prenant deux valeurs consécutives de  $\widehat{m}_i$ , distantes de  $\delta_{m,i}$ , d'après (4.13) que :

$$\Psi^2(\widehat{m}_i + \delta_{m,i}) - \Psi^2(\widehat{m}_i) = (A^T A)_{i,i} (2p + 1) \delta_{m,i}^2 \text{ et } p \geq 0$$

de même :

$$\Psi^2(\widehat{m}_i - \delta_{m,i}) - \Psi^2(\widehat{m}_i) = (A^T A)_{i,i} (1 - 2p) \delta_{m,i}^2 \text{ et } p < 0$$

soit finalement, en regroupant les deux expressions, le paramètre  $m_i$  peut être échantillonné comme :

$$m_i^{k \leq K_{\max}} = m_{i,est} + \frac{\varepsilon \sigma_d}{\sqrt{(A^T A)_{i,i}}} \frac{k}{\sqrt{|2k|+1}}, k = -P..P \quad (4.14)$$

### Exemple synthétique

Nous avons appliqué l'inversion bayésienne sur le même ensemble de données que pour les moindres carrés ou la décomposition en valeurs singulières. Dans un premier temps, nous n'avons inclus dans la chaîne Markov que les paramètres trouvés par une inversion par moindres carrés pour un développement  $K_{\max} = 12$ , dans un second temps, nous avons recherché par une inversion bayésienne les coefficients jusqu'à un développement équivalant à  $K_{\max} = 15$ . Dans cette dernière manipulation, 87 paramètres du modèles sont complètement inconnus et sont centrés sur 0 et échantillonnés dans un intervalle  $[-5nT, 5nT]$ . Empiriquement, cet intervalle est susceptible de contenir effectivement la valeur *vraie*.

Le nombre d'itérations dans la chaîne de Markov est de 1000. Chaque paramètre a été exploré 100 fois de la façon prescrite par (4.14) dans l'intervalle  $[m_{\inf}, m_{\sup}]$  et nous avons pu obtenir les loi marginales, dont nous n'avons retenu que quatre exemples pour la discussion.

**Lois marginale** Sur la figure (4.6-1) nous illustrons différents types de lois marginales, certaines comme (1-c) peuvent être multimodales, d'autres comme (1-d) peuvent être relativement unimodales, en revanche on trouve le plus souvent des courbes de probabilité du type (1-b) qui n'ont pas de caractéristiques simples. Ces courbes de probabilité sont relativement intéressantes car elles révèlent deux choses. La première est que nous ne sommes pas en mesure de déterminer les paramètres  $\underline{m}$  de la façon la plus probable car la loi marginale seule n'a aucun sens, encore moins son maximum de probabilité car il existe plusieurs maxima possibles. Ceci révèle la présence d'importantes corrélations entre certains coefficients et prendre les maxima des probabilités de chaque paramètre ne nous donne pas, loin s'en faut, la meilleure résolution du champ. On constate que les moindres carrés ont donné une valeur du paramètre qui n'est pas, en générale, la plus probable. En second lieu, nous vérifions que certains paramètres de valeur insignifiante sont néanmoins bien déterminés (courbe 1-d). Cette observation vient corroborer l'idée que la méthode du  $F$ -test séquentiel de Efronson, largement utilisée dans l'inversion par *SCHA* ([44]) est risquée. Par cette méthode, on recherche les coefficients les plus significatifs statistiquement en fixant un seuil  $F$ , arbitraire, à partir duquel on les néglige en vérifiant qu'ils n'ont pas de poids dans la modélisation du champ. Cette technique pénalise donc le plus souvent les coefficients de petites magnitudes, qui peuvent pourtant être parfaitement déterminés, comme c'est le cas ici. Draper et Smith (1998) mettent en garde contre l'utilisation du  $F$ -test pour les régressions sur des bases de polynômes et il se pourrait bien que cette restriction s'applique également aux harmoniques sphériques sur calotte. Cette illustration rejoint un scepticisme assez courant dans la littérature concernant l'inversion par la méthode *SCHA* couplée au  $F$ -test (par exemple [64]).

**Probabilité sur les composantes du champ magnétique** Puisqu'il n'est pas possible d'extraire les valeurs des paramètres qui correspondent à la meilleure résolution, il nous faut recourir à l'analyse du champ magnétique. Pour chaque itération dans la chaîne de Markov, nous pouvons récupérer la valeur du champ magnétique en chaque point d'une grille préalablement définie sur la calotte. Cette valeur est ensuite stockée dans un histogramme de valeurs. Ceci nous

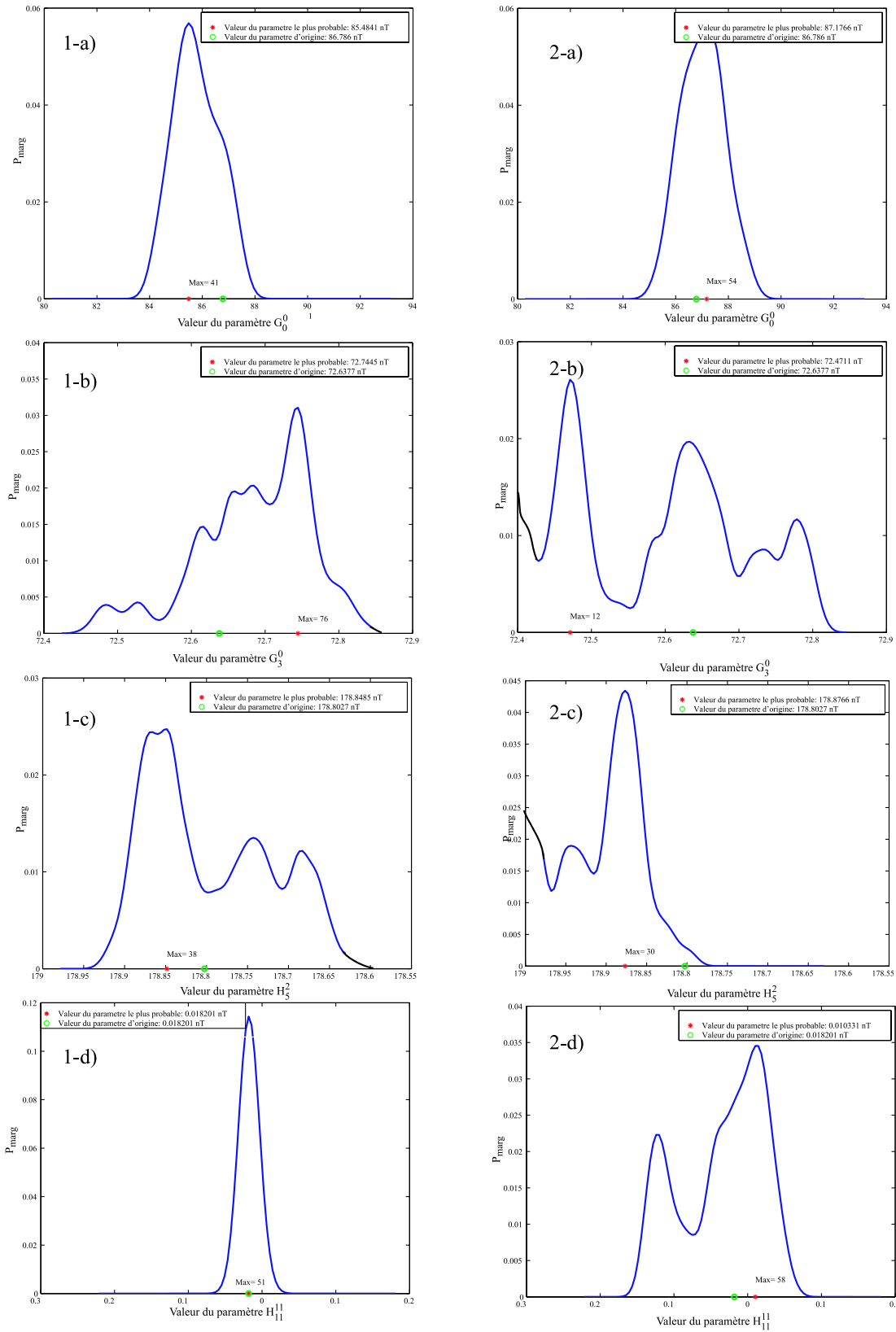


FIG. 4.6 – Exemples de probabilités marginales pour des coefficients de Gauss. Les probabilités a) sont obtenus pour  $K_{max} = 12$ , et en b) pour  $K_{max} = 15$ . Le développement influe sur la valeur des paramètres.

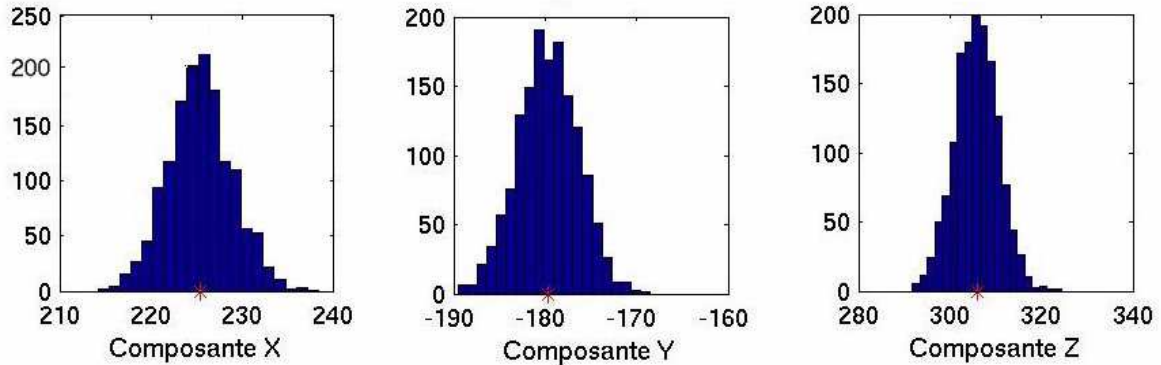


FIG. 4.7 – On montre un exemple de champ le plus probable qui peut être déterminé par une chaîne de Markov. A chaque itération sur les paramètres, la valeur du champ correspondante est classée dans un histogramme.

donne finalement une courbe de probabilité en chaque point dont il existe un unique maximum. On montre sur la figure (4.7) un exemple d’histogrammes obtenus par chaîne de Markov.

L’inconvénient certain de cette technique est que la valeur des paramètres est complètement transparente dans le résultat. Il faut donc pouvoir prévoir les coordonnées sur la calotte qui nous intéresse car le champ ne pourra plus être interpolé ultérieurement.

**Les développements supérieurs** L’objectif initial était de pouvoir déduire à partir d’un ensemble de coefficients de Gauss estimés des coefficients de Gauss non déterminés par une inversion par moindres carrés. L’inversion bayésienne ne calcule que des problèmes directs et ce problème est par conséquent inexistant. En revanche, d’autres problèmes, insolubles en pratique, surgissent. Le seul fait d’inclure des coefficients d’ordres supérieurs réorganise l’ensemble complet des coefficients de Gauss. La figure (4.6-b) illustre ce symptôme lorsque l’on ajoute 87 coefficients *a priori* inconnus. En raison des corrélations entre les paramètres, la condition *a priori* que les paramètres  $\underline{m}$  se trouvent dans l’intervalle  $m_{\text{inf}}, m_{\text{sup}}$  se vérifie de moins en moins à mesure que le développement augmente. Nous sommes donc confrontés à un réel problème quant à l’exploration de l’espace des paramètres. Les courbes (2-b) et (2-c) illustrent particulièrement ce phénomène et nous voyons distinctement qu’il reste des probabilités non nulles en dehors de l’intervalle d’exploration. Lorsque nous faisons un développement jusqu’à l’ordre  $K_{\text{max}} = 25$  presque tous les coefficients sont sortis de l’intervalle d’exploration et nous avons par conséquent perdu la seule information dont nous disposions. Le présupposé que la valeur est contenue dans un intervalle centré sur  $m_{\text{est}}$  n’est plus valable. Par conséquent, nous ne sommes plus en mesure non plus de déterminer un quelconque champ moyen comme sur la figure (4.7).

La seule manière d’éviter la discrétisation préalable des valeurs admissibles des paramètres est d’utiliser l’algorithme de Hasting-Métropolis, soit avec une loi uniforme sur un intervalle compact approprié, soit avec un algorithme de marche aléatoire. Outre le nombre d’itérations qui peut nécessiter la parallélisation du processus, l’expérience a montré que la chaîne de Markov restait souvent bloquée en raison des sauts parfois importants entre deux paramètres successifs pris au hasard et cette option a dû être abandonnée.

## Validité des chaînes de Markov

D'autres interrogations plus conceptuelles viennent se superposer aux résultats empiriques obtenus par chaîne de Markov. La première est cette contradiction entre les utilisateurs émérites des chaînes de Markov ([104]), qui préconisent cette démarche lorsque le nombre de paramètres est élevé, et le scepticisme de certains mathématiciens (D. Chauveau et M. Roussignol, 2002, communication personnelle) face à un aussi grand nombre de paramètres. D'autre part, il semblerait, toujours selon eux, que l'application des chaînes de Markov à un problème linéaire soit finalement peu utile. On préférera donc garder cette méthode pour les problèmes non-linéaires et pour inverser simultanément des données scalaires et vectorielles.

### 4.2.5 Commentaires sur l'inversion de données sur une surface

Par des techniques d'inversion sur des données réparties uniformément sur une surface, nous n'avons pas été en mesure de résoudre les données jusqu'à la précision du bruit dans les données. Le modèle final est donc incomplet et nous ne pouvons pas remplir correctement nos objectifs.

Les données magnétiques sur la région sont plus denses et parfois proches des sources crustales. Elles contiennent à la fois les grandes tendances que l'on retrouve dans un modèle global et des tendances propres à la région. On a donc coutume de retrancher ce modèle aux données de manière à faire apparaître l'anomalie du champ magnétique ([16]). Cette anomalie qui ne peut être définie que par rapport au modèle retranché n'a donc pas de signification physique concrète et ne peut, par conséquent, pas s'interpréter en termes de sources crustales uniquement. Selon la qualité du modèle global retranché qui peut varier d'une région à une autre, cette anomalie caractérisera aussi les sources du noyau non modélisées par le modèle *IGRF*. Le champ résiduel peut atteindre des valeurs nettement supérieures à celles que l'on pourrait attendre d'un champ crustal (plus de 500 nT sur l'Est de l'Asie pour l'époque 1980, [6]).

La terminologie de régionale appliquée à une modélisation de développement insuffisant est donc abusive car le développement des séries est souvent tel que l'on commence par modéliser les contributions du noyau non représentées par un modèle en harmoniques globales. Or ces contributions occultent massivement le modèle régional à proprement parler. Si le modèle *SCHA* ne converge pas assez vite, on observe des oscillations dans les résultats peu réalistes qui montrent que les données ne sont pas entièrement résolues. Un exemple extrême particulièrement parlant est donné par la modélisation de l'Asie ([6]), où on trouve en effet que la variance sur les données après inversion est de 115, 2nT pour  $X$ , 98.5nT pour  $Y$  et 110, 7nT pour  $Z$ .

Dans ce cas, la seule chose que nous puissions dire est que l'on a amélioré le modèle *IGRF* moyen sur la région mais pas que nous avons mis en lumière les structures régionales, pourtant contenues dans les données. Il est à ce titre intéressant de constater que dans les différents travaux concernant *SCHA*, l'on trouve sur les cartes d'anomalies magnétiques les oscillations caractéristiques des effets de la troncature des séries ([23], [63]). En termes d'interprétation géologique, les résultats sont peu nombreux. On trouve essentiellement des discussions sur de grandes calottes qui viennent corroborer l'existence d'anomalies déjà connues. Par exemple, De Santis et al. ([27]), Rotanova et Odintsov ([97]) s'accordent sur l'anomalie russe de Koursk que l'on distingue bien par la méthode des harmoniques sur calotte. Mais cette anomalie est l'une des plus importantes sur Terre et l'on ne se hasarde pas à discuter les anomalies de magnitudes plus faibles pourtant visibles sur les résultats car la conclusion est invariablement la même : « *much of this detail is spurious, reflecting noise in the grid averages rather than real short-wavelength features in the anomaly field* » ([27]). Pour des calottes de tailles plus petites, l'objectif se réduit souvent à la détermination d'un modèle de champ au-dessus d'une région plus précis que l'*IGRF*

([23]).

Remarquons enfin que les coefficients de Gauss de *SCHA* ne sont que dans de rares cas explicitement publiés ([27] ou [107] par exemple) car ils dépendent avant tout de la troncature des séries; une troncature à des ordres supérieurs réorganise tout l'ensemble de coefficients (cf paragraphe 4.2.4). Ils sont, et nous en sommes convaincus fort peu reproductibles si l'on change légèrement le jeu de données initiales ([6], montrent la valeur des coefficients de leur modèle et on remarque qu'à  $m$  fixé, cette valeur augmente avec le développement et la convergence de la série ne semble assurée que par sa troncature).

### 4.3 Inversion de données mesurées à différentes altitudes

La technique de *SCHA* est supposée être destinée à la représentation des trois composantes du champ magnétique et à leur interpolation dans tout l'espace limité par le cône et la calotte. Comparée aux méthodes régionales précédentes, *SCHA* apparaissait comme entièrement novatrice et répondait à un réel besoin né des récentes missions satellitaires. La nette amélioration conceptuelle de sa formulation par rapport aux techniques de modélisation antérieures, les postulats qui l'accompagnaient, comme la vérification de la divergence et du rotationnel nul dans un volume, la possibilité d'inclure des données prises à différentes altitudes, et le contexte scientifique du moment justifient pleinement l'engouement des premiers instants pour cette méthode.

Les premières études ([44]) se sont portées naturellement vers la modélisation des données disponibles sur une seule surface et furent poursuivies par la suite pour mettre en évidence le champ ([27], [33]) ou sa variation séculaire régionale dans des portions limitées du globe (par exemple, [45], [106]). Bien que les modèles de champ obtenus semblent parfois donner des résultats interprétables, il en est tout autrement pour la modélisation de la variation séculaire ([26], [64]) et on trouve finalement que peu d'exemples d'applications. De plus, pour le champ lui-même, il est vite apparu que les modèles obtenus à partir des données satellites ne pouvaient pas être prolongés à la surface terrestre ([67]) et que les modèles permettaient une interpolation entre les points de données mais pas d'extrapolation. Qu'en est-il donc si nous incorporons aux données satellites quelques données terrestres; sommes-nous en mesure d'interpoler le modèle?

La réponse à cette question manque cruellement d'expérience car on constate qu'il n'y a peu de modèles régionaux qui intègrent l'ensemble des données disponibles, à la fois terrestres, aériennes ou satellitaires ([23]). Dès les premiers instants, certains problèmes liés aux variations importantes d'altitude ont été évoqués, mais de manière timide ([44]). Il semble qu'il faille attendre une communication de Lowes pour que dans les esprits s'installe une plus forte suspicion concernant la validité de *SCHA* pour le prolongement de données. Depuis la conviction s'est installée ([67]) et à l'utilisation extensive à succéder un intérêt plus sporadique pour la méthode. L'absence d'une démonstration mathématique formelle des éventuels problèmes théoriques reste une réelle lacune, car l'interrogation n'est toujours pas levée. Nous ne sommes pas pour l'instant en mesure de formuler une démonstration satisfaisante, mais quelques arguments physiques simples couplés à un exemple synthétique réalisé dans des conditions optimales nous convaincront cependant que la méthode n'est pas viable pour la modélisation de données prises dans un volume.

#### 4.3.1 Exemple synthétique

Dans un premier temps nous avons voulu présenter un exemple synthétique du problème et tenté d'inverser des données uniformément réparties dans un volume conique d'ouverture  $\theta = \theta_0$  compris entre l'altitude terrestre  $r = 6371, 2$  et l'altitude satellitaire  $r = 6871, 2$ , altitude

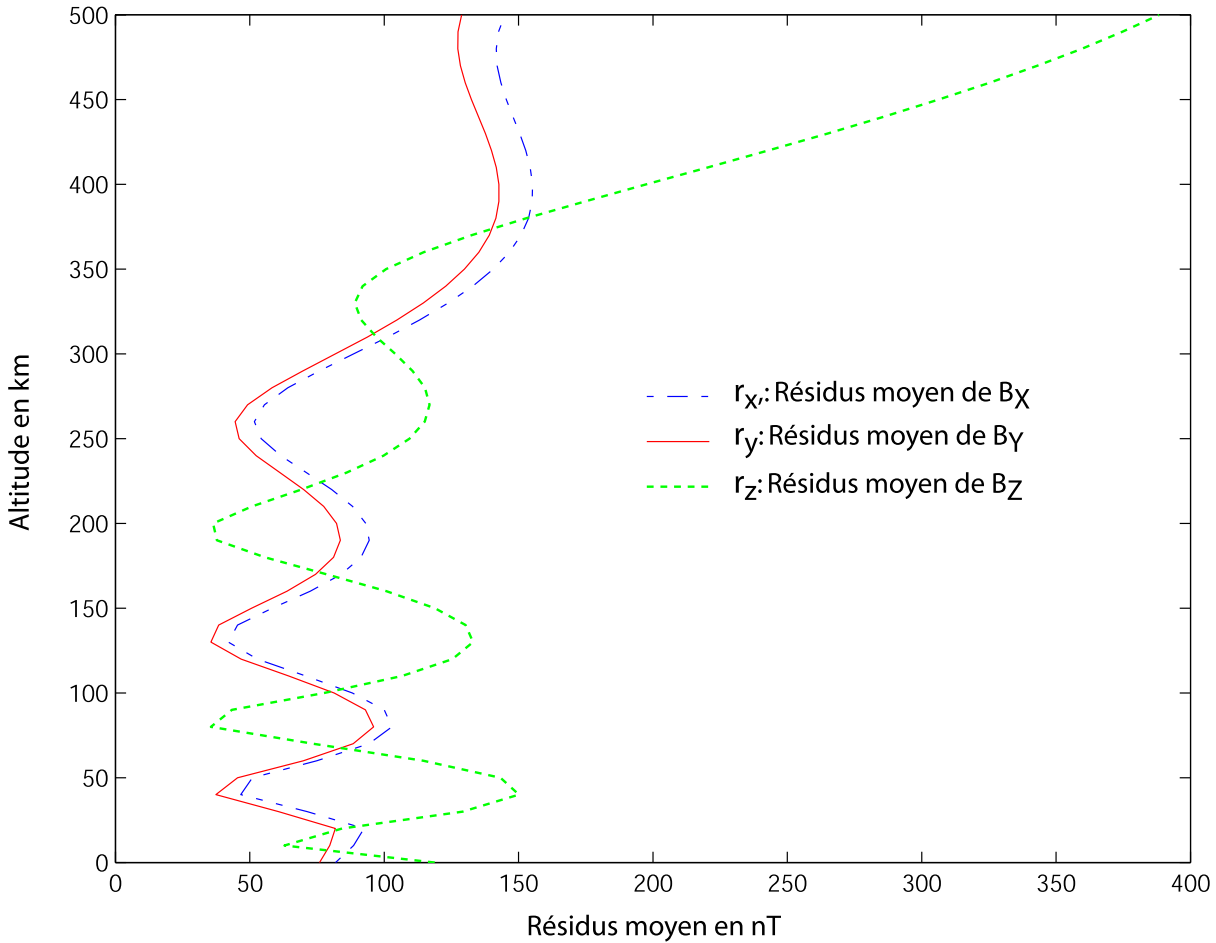


FIG. 4.8 – Variation des résidus moyens en nT pour chacune des composantes du champ magnétique. Nous observons une très nette dégradation avec l’altitude.

maximale du satellite CHAMP au-dessus de la France. La raison pour laquelle nous avons omis les altitudes supérieures, comme celles auxquelles sont prises les données du satellite ØRSTED (d’une altitude maximale au-dessus de la France de  $900\text{km}$ ), deviendra vite évidente.

La répartition homogène des données ajoutée à leur nombre nous assure que l’inversion est stable. De légers changements de la valeur du bruit injecté dans les données nous ont assurés du bon déroulement numérique de l’inversion. Le nombre de données s’élève à 1416 répartis sur 6 surfaces de 236 points échantillonnées tous les 100 km entre 0 et 500 km d’altitude. Le nombre de paramètres recherchés est de 256 ce qui correspond à un développement des séries jusqu’à  $K_{max} = 15$ .

Nous nous appuyerons sur les résultats de la figure (4.8) pour extrapoler les commentaires à n’importe quelle taille de calotte et pour des données comprises dans un intervalle en altitude quelconque. Les résidus moyens  $r_x$ ,  $r_y$  et  $r_z$ , propres à chaque composante et à chaque surface sont représentés. Dans le cas idéal, le résidu moyen total à n’importe quelle altitude  $r$  aurait pris la valeur du bruit ajouté aux données, soit  $\bar{R}(r) = 5nT$ .

En premier lieu, nous constatons que les résidus à la surface terrestre ont été largement accrus par l’insertion de données d’altitudes très différentes. On trouve en moyenne pour les

composantes  $X$  et  $Y$  du champ un résidu moyen d'environ 80 nT et 100 nT pour  $Z$  ; nous sommes très loin du résultat escompté. En comparaison de l'intensité moyenne du champ théorique sur cette surface, que l'on estime environ à  $1000nT$ , le résidu moyen  $\overline{R}$  pour les trois composantes du champ sur cette surface correspond à peu près à 10% du champ que l'on cherche à modéliser, ce qui est bien évidemment exécrable.

Entre 0 et 300 km d'altitude les résidus moyens sont quasiment constants. Le champ magnétique décroît avec l'altitude et un résidu qui ne diminue pas avec l'altitude montre que le modèle se dégrade également vers le haut. Entre 300km et 500km, la situation est très claire et est largement illustrée par l'augmentation des résidus pour chacune des composantes. Cette augmentation, couplée avec la décroissance naturelle du champ conduit à la conclusion que l'erreur de modélisation augmente démesurément.

Un constat simple s'impose donc : dans une configuration des plus favorables nous n'avons pas été en mesure de modéliser le champ magnétique lorsque les données recouvraient plusieurs altitudes.

### 4.3.2 Discussion générale sur la variation en altitude

Pour tenter de trouver une explication plausible au phénomène, on doit retourner un instant sur les variations des racines  $n_k$  avec l'ouverture du cône et aux expressions des composantes du champ magnétique sur la calotte. A titre indicatif, nous avons montré sur la figure (3.1) les racines  $n_k$  dans l'ordre croissant pour différentes tailles de calottes. Pour chaque géométrie, la reconstruction des variations naturelles d'un champ de potentiel se fait par une somme infinie des  $(a/r)^{n_k+1}$ , pour les contributions internes. Il paraît difficile cependant d'envisager la représentation de la décroissance d'un champ en  $(a/r)^l$  entier par une somme de fonctions de  $(a/r)^{n_k}$  non entier supérieurs à  $l$ , surtout lorsque ces degrés prennent des valeurs aussi importante que dans le cas d'une calotte de la taille de la France. La démonstration mathématique n'est pas aisée car il n'existe pas de relations analytiques simples entre l'angle d'ouverture  $\theta_0$  et les valeurs de  $n_k$  qui de plus dépendent de  $m$ . Nous n'avons donc pas de démonstration claire à proposer, bien que nous disposions d'arguments mathématiques forts qui appuient cette présomption. Le plus intuitif part du principe que, implicitement, les bases de fonction radiales de Haines supposent que ([24]) :

$$\sum_{l=m}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k^m \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k+1} \quad (4.15)$$

où  $a_n$  et  $a_k^m$  sont des coefficients de type Fourier que nous n'avons pas besoins d'explicitier pour le moment mais dont nous pouvons dire qu'ils doivent être indépendants de  $r$  ; les séries sont convergentes pour  $r < a$ . Rappelons qu'en théorie des harmoniques sphériques, la série infinie de gauche est un développement qui caractérise les potentiels newtoniens de sources situées à l'intérieur de la sphère  $r = a$ . Si le membre de droite n'est pas égal au développement de Legendre, alors les harmoniques sur calotte sphérique ne permettent pas de reproduire la décroissance naturelle d'un champ de potentiel.

Or il apparaît clair que le membre de droite pour de petites calottes converge beaucoup plus vite vers 0 que le membre de gauche à mesure que l'altitude augmente. De Santis voyait dans la version tronquée de cette expression l'origine des problèmes d'altitudes. Nous verrons cependant plus loin l'incohérence de l'expression des coefficients de Gauss qu'implique la construction des bases radiales selon Haines. Nous pourrions conclure que (4.15) n'est pas mathématiquement viable sur l'intervalle ouvert  $r \in [R, \infty[$ .



Il n'en reste pas moins que le membre de gauche de (4.15) puisse être approché correctement pour des données contenues dans de petits intervalles d'altitudes et pour des calottes de grande ouverture car les racines  $n_k$  varient lentement avec le développement  $k$ . Ainsi l'intervalle en altitude où (4.15) trouve une approximation raisonnable varie en fonction de la géométrie de la calotte, une grande calotte augmente le domaine de validité, une petite le diminue. Toutes ces considérations ne contredisent nullement les conclusions de Haines. Car dans son article original de 1985 ([44]) il notait l'existence de variations avec l'altitude, notamment lors des prolongements. Il considérait cependant l'erreur comme suffisamment négligeable pour affirmer que *SCHA* permettait de prolonger les données en altitude et se servait de ces conclusions pour étendre cette validité à n'importe quel type de calotte.

## Chapitre 5

# Problèmes soulevés par SCHA

Nous avons maintenant de nombreux indices concernant l'inaptitude analytique de *SCHA* à modéliser un champ magnétique et ses variations radiales. Ces indices manquent cruellement de l'appui d'une démonstration mathématique indiscutable. Compte tenu de l'interdépendance des variables  $n_k$  avec  $\theta_0$  et  $m$  nous cherchons à détecter l'incohérence qu'amène cette formulation sur l'expression analytique de certains paramètres physiques. Nous considérerons cette incohérence comme un argument suffisant pour nos conclusions.

La première partie du travail suivant n'est pas originale, car elle est largement inspirée des travaux de De Santis ([28]). Elle néanmoins mérite d'être détaillée car elle est essentielle pour la suite. Nous nous en servons pour réaliser des rotations sur les coefficients de Gauss lorsque nous changeons de système de référence sur la sphère.

La seconde partie concernant l'invariance du champ est nettement moins connue et donne des relations pertinentes entre les coefficients de Gauss *globaux* et les coefficients de Gauss *locaux* (*SCHA*). Si l'on montre que les coefficients de Gauss qui interviennent dans la décomposition en harmoniques sur calotte peuvent s'écrire comme une combinaison des coefficients de Gauss de la décomposition en harmonique ordinaire, alors, si la théorie de *SCHA* est valide, on doit être en mesure de reconstruire le modèle de champ en n'importe quel point de la calotte. L'aboutissement de la démonstration nécessite néanmoins quelques développements préliminaires.

### 5.1 Rotation des coefficients de Gauss globaux

Les coefficients de Gauss tels que nous les connaissons, par les modèles *IGRF* par exemple, sont écrits dans le référentiel géocentrique. Pour pouvoir comparer les coefficients de Gauss d'un développement en harmoniques globales et ceux d'un développement en harmoniques sur calotte, il convient de les écrire dans le même système de référence.

On cherche donc à écrire les harmoniques sphériques ordinaires exprimées en coordonnées géocentriques  $\mathcal{R}(r, \lambda, \theta)$  dans un nouveau repère centré sur le pôle de notre calotte  $\mathcal{R}(r, \Lambda, \Theta)$ .

Les harmoniques sphériques  $Y_l^m$  et  $\tilde{Y}_l^m$  (où le tilde est un symbole qui indique une rotation, voir annexe D) à un ordre  $m$  et un degré  $l$  donnés peuvent être décomposées selon leur forme en cosinus ou en sinus. Dans les deux repères  $\mathcal{R}(r, \lambda, \theta)$  et  $\mathcal{R}(r, \Lambda, \Theta)$ , elles prennent les formes respectives :

$$\begin{cases} Y_l^{c,m} = \cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta) \\ Y_l^{s,m} = \sin(m\varphi)P_l^m(\cos\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{Y}_l^{c,m} = \cos(m\Lambda)P_l^m(\cos\Theta) \\ \tilde{Y}_l^{s,m} = \sin(m\Lambda)P_l^m(\cos\Theta) \end{cases}$$

Les harmoniques sphériques ordinaires dans le repère géocentrique et dans le repère de la calotte vérifient bien entendu les mêmes conditions d'orthogonalité.

Le théorème d'expansion ([20], section 17.1) permet de représenter les harmoniques définies dans le système  $(\theta, \varphi)$  comme des combinaisons linéaires des harmoniques développées dans le système  $(\Lambda, \Theta)$ . Soit :

$$P_l^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} = \sum_{\mu=0}^l \left[ \cos(\mu\Lambda) \begin{Bmatrix} a_{l,\mu}^m \\ c_{l,\mu}^m \end{Bmatrix} + \sin(\mu\Lambda) \begin{Bmatrix} b_{l,\mu}^m \\ d_{l,\mu}^m \end{Bmatrix} \right] P_l^\mu(\cos \Theta)$$

qui exprime le fait que le sous-espace vectoriel des harmoniques de degré  $l$  donné est invariant par rotation sur la sphère. On peut donc exprimer les fonctions  $\{Y_l^c, Y_l^s\}$  par rapport à leurs homologues  $\{\tilde{Y}_l^c, \tilde{Y}_l^s\}$  avec :

$$Y_l^c = \begin{pmatrix} Y_l^{c,0} \\ Y_l^{c,m} \end{pmatrix}$$

respectivement pour  $Y_l^s, \tilde{Y}_l^c$  et  $\tilde{Y}_l^s$ .

Soit, en notation algébriques :

$$Y_l^c = A\tilde{Y}_l^c + B\tilde{Y}_l^s \quad (5.1)$$

$$Y_l^s = C\tilde{Y}_l^c + D\tilde{Y}_l^s \quad (5.2)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont les matrices de rotation constituées respectivement par les coefficients,  $a_{l,\mu}^m, b_{l,\mu}^m, c_{l,\mu}^m$  et  $d_{l,\mu}^m$ .

A partir des propriétés d'orthogonalité on peut déduire en particulier certaines propriétés des matrices de rotation essentielles pour la vérification numérique des transformations :

$$AC^T + BD^T = 0 \quad (5.3a)$$

$$AA^T + BB^T = I \quad (5.3b)$$

$$CC^T + DD^T = I \quad (5.3c)$$

Si maintenant nous écrivons le potentiel global  $V(r, \theta, \varphi)$  sous la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_l^m Y_l^{c,m} + h_l^m Y_l^{s,m}) \quad (5.4)$$

et le potentiel global dans le système  $\mathcal{R}(r, \Lambda, \Theta)$  de la même manière :

$$\tilde{V}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (\tilde{g}_l^m \tilde{Y}_l^{c,m} + \tilde{h}_l^m \tilde{Y}_l^{s,m}) \quad (5.5)$$

nous pouvons trouver l'expression des coefficients de Gauss globaux  $(g_l, h_l)$  dans le repère de la calotte. On doit donc résoudre au degré  $l$  fixé de l'harmonique, le système d'équations suivant :

$$\sum_{m=0}^l (g_l^m Y_l^{c,m} + h_l^m Y_l^{s,m}) = \sum_{\mu=0}^l (\tilde{g}_l^\mu \tilde{Y}_l^{c,\mu} + \tilde{h}_l^\mu \tilde{Y}_l^{s,\mu})$$

En utilisant les égalités (5.1) et (5.2), ceci revient à résoudre pour chaque degré  $l$  :

$$\begin{aligned} g_l &= A^T \tilde{g}_l + C^T \tilde{h}_l \\ h_l &= B^T \tilde{g}_l + D^T \tilde{h}_l \end{aligned}$$

### 5.1.1 Résolution numérique

Les coefficients de rotation,  $a_{l,\mu}^m, b_{l,\mu}^m, c_{l,\mu}^m$  et  $d_{l,\mu}^m$ , sont obtenus par régression linéaire des expressions (5.1) et (5.2). On réalise une inversion par moindres carrés ordinaires sur une grille quasi-régulière sur la sphère au sens de Dufour (section 4.1). Rappelons que ce maillage, hautement précis sur la sphère entière, nous permet d'obtenir une matrice diagonale dont l'inversion est stable.

Le choix du maillage de la grille doit être avisé et dépend du degré maximum  $n$  contenu dans les harmoniques sphériques. Nous choisissons le nombre de points (donc l'ordre du maillage) de telle sorte qu'il vérifie pleinement le théorème de Nyquist. Chaque harmonique sphérique est ainsi représentée par un échantillonnage de période au plus deux fois plus petite. A titre d'exemple, pour un modèle de type IGRF, le degré maximum étant  $n = 10$ , on trouve que la longueur d'onde minimale est de  $\lambda \sim 36^\circ$  ([16]) (soit environs 4000km) doit être échantillonnée au moins avec un pas de  $\lambda \sim 18^\circ$ . Pour un champ IGRF quelques centaines de points suffisent, en revanche la rotation des coefficients de Gauss d'un modèle plus complet de type Cain ([17]) ou CMP3 ([98]) nécessitera un pas d'échantillonnage plus fin.

### 5.1.2 Test des identités

Nous pouvons vérifier le comportement de l'inversion par moindres carrés en étudiant les deux expressions :

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &= \left| \sqrt{\sum (a_\mu^2 + b_\mu^2)} - 1 \right| \\ \delta(c, d) &= \left| \sqrt{\sum (c_\mu^2 + d_\mu^2)} - 1 \right| \end{aligned}$$

Cette vérification nous est suggérée par les relations analytiques (5.3b) et (5.3c). D'après ces deux identités, les paramètres  $\delta(a, b)$  et  $\delta(c, d)$  doivent être rigoureusement égaux à 0 si la convergence est atteinte. Numériquement, nous avons obtenu des valeurs de  $\delta < 10^{-15}$  et nous voyons pour la première fois une manifestation concrète de l'excellence du maillage de Dufour sur une sphère entière. Pour une telle précision, et pour optimiser le calcul, une grille de 472 points s'est avérée suffisante.

### 5.1.3 Comparaison des coefficients obtenus

Pour la validation des résultats, nous avons comparé la valeur de nos coefficients à ceux déjà disponibles dans la littérature ([10], [28]). La comparaison avec les coefficients proposés par De

Santis et al. ([28]) est numériquement parfaite. Il s'agissait de trouver les coefficients de Gauss dans le nouveau repère centré sur le centre de l'Europe ( $12^\circ E, 48^\circ N$ ) à partir des coefficients *DGRF1990*.

La comparaison avec la méthode de Bernard et al. (1969) est cependant nettement moins satisfaisante, et montre des erreurs allant parfois jusqu'à  $0.1nT$ . On a prit soin, comme le souligne De Santis et al. ([28]), de modifier le signe erroné de  $G_4^0$ . Etant donnée la technique à main levée employée par Bernard, nous n'avons pas dans un premier temps considéré ces erreurs importantes. Les coefficients seront validés par le calcul de l'invariance du champ.

### 5.1.4 Vérification de l'invariance du champ

Si nos coefficients sont valides, on doit pouvoir vérifier l'invariance du champ : le champ magnétique calculé sur une région précise de l'espace doit être indépendant du système de référence choisi. Nous avons donc calculé dans un premier temps le modèle *IGRF90* centré sur la France. Puis, par rotation des coefficients de Gauss dans le repère ( $2^\circ E, 48^\circ N$ ), nous avons obtenu le nouvel ensemble des coefficients de Gauss. Nous avons ensuite recalculé le champ dans le nouveau système de référence. On constate que la valeur des résidus sur la grille d'inversion est inférieure à  $10^{-11} nT$ . L'invariance du champ est donc vérifiée de manière quasi-exacte. Un dernier test enfin consiste à recalculer le champ sur une grille plus fine que la grille utilisée pour déterminer les matrices de rotation. L'erreur n'excède pas  $10^{-10} nT$  pour les différences  $\delta B_x, \delta B_y$  et  $\delta B_z$ . Une manipulation identique appliquée aux coefficients de Bernard nous convainc que nos coefficients sont plus précis.

## 5.2 Des coefficients de Gauss radialement dépendants

Les coefficients de Gauss, qu'ils soient locaux ou globaux, sont, à  $r$  fixé, les coefficients de Fourier du potentiel ou des composantes du champ dans la base des fonctions  $P_n^m(\theta) \cos(m\varphi)$  et  $P_n^m(\theta) \sin(m\varphi)$  (voir section 2.3). On sait que dans la modélisation globale ils sont indépendants de la variable  $r$ , et il est hautement souhaitable qu'il en soit de même dans la modélisation locale.

Rappelons que le problème complet aux conditions aux limites n'a pas été posé par Haines. En l'absence de ces conditions, nous proposons donc d'égaliser les potentiels écrits en harmoniques sphériques ordinaires et en harmoniques sphériques sur calotte afin de ne pas sortir du cadre des hypothèses qu'il avait lui-même fixées.

On pose, pour le potentiel global des contribution internes écrit dans le repère de la calotte :

$$\tilde{V}_g = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \left( \tilde{g}_l^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_l^m \sin(m\varphi) P_l^m(\cos\theta) \right)$$

avec  $\{\tilde{g}_l^m, \tilde{h}_l^m\}$  les coefficients de Gauss globaux transformés dans le repère calotte et  $P_l^m(\cos\theta)$  les fonctions de Legendre de degrés  $n$  et d'ordres  $m$  entiers.

D'après (2.8) le potentiel  $V_l$  écrit dans la base des harmoniques sphériques sur calotte prend l'expression :

$$V_l = a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} \left( G_{n_k}^{i,m}(t) \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m}(t) \sin(m\varphi) \right) P_{n_k}^m(\cos\theta)$$

avec  $P_{n_k}^m(\cos\theta)$  les fonctions de Legendre généralisées d'ordres  $m$  entiers mais de degrés  $n_k$  réels. On écrira pour plus de commodité  $P_{n_k}^m(\theta)$  plutôt que  $P_{n_k}^m(\cos\theta)$ .

En utilisant les propriétés des séries de Fourier, on montre que les fonctions de Legendre  $P_l^m(\theta)$  à  $m$  fixé peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des fonctions de Legendre généralisées sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$  de sorte que :

$$\boxed{P_l^m(\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} A_k^{m,l} P_{n_k}^m(\theta)} \quad (5.6)$$

Cette relation, lorsque le développement est infini, n'est pas unique en raison de la dépendance linéaire des deux familles de fonctions  $P_{n_k}^m(\theta)$  à  $m$  fixé. L'unicité n'existe que dans le cas particulier où l'on ne considère qu'une seule base de fonction et on peut montrer que le coefficient  $A_k^{m,l}$  est déterminé d'une façon unique par :

$$A_k^{m,l} = \frac{\langle P_{n_k}^m(\theta), P_l^m(\theta) \rangle_{\mathcal{L}^2([0, \theta_0])}}{\|P_{n_k}^m(\theta)\|^2} \quad (5.7)$$

Dans le cas de *SCHA* cette égalité n'est plus valable en raison de la présence des deux bases complètes de Legendre et nous devons en pratique rechercher la matrice de passage  $A_k^{m,l}$  numériquement par régression linéaire, par exemple ([29]). Ceci pourra poser d'indéfectibles problèmes numériques si le développement en  $k$  est trop important.

De plus, on peut écrire :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{l-n_k}$$

Sur une surface  $\partial\Omega_r$  de rayon  $r$  constant du domaine  $\Omega$  défini par :

$$\Omega = \{a \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$$

nous devons légitimement retrouver que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| V_l^k(r, \theta, \varphi) - \tilde{V}_g(r, \theta, \varphi) \right\|_{\partial\Omega_r}^2 = 0$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus et la relation (5.6), la convergence des potentiels au sens de la norme au carré sur  $\partial\Omega_r$  conduit, pour chaque indice  $k$ , à :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l-n_k} A_k^{m,l} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_l^m \\ \tilde{h}_l^m \end{array} \right\}} \quad (5.8)$$

Nous obtenons une expression plus générale que celle proposée par De Santis qui ne considère que le cas particulier où  $r = a$  ([29]). La matrice de passage  $A_k^{m,l}$  explicitée par (5.7) par exemple (car il y a le mélange plus compliqué du mélange des deux bases) est indépendante de  $r$ , donc le système d'expression (5.8) pour chacun des ensembles de coefficients de Gauss  $G_{n_k}^{i,m}$  et  $H_{n_k}^{i,m}$  est en opposition manifeste avec le postulat de départ de la non-dépendance des coefficients de Gauss avec l'altitude.

Nous pouvons maintenant réinterpréter les discussions du paragraphe 4.3 à la lumière de ces résultats. Nous pouvons confirmer que *SCHA*, si l'on ne tient compte que des coefficients internes (point sur lequel nous reviendrons), ne permet pas la manipulation de données prises à différentes altitudes car les coefficients de Gauss déterminés à une surface ne sont pas valables

sur une surface d'altitude différente. Ceci explique aussi les problèmes rencontrés par Haines lors des prolongements vers le haut [44]).

Si on veut obtenir à tout prix le champ calculé à la surface  $r = b$  à partir de données inversées à la surface  $r = a$ , une pratique est de manipuler les coefficients de Gauss globaux en conséquence et de les pondérer par  $(a/b)^{l-n_k}$ . On obtient alors une bien meilleure approximation qu'avec l'utilisation de coefficients de Gauss locaux uniques sur les deux surfaces  $a$  et  $b$ . Cette pratique désespérée, qui fait fi des considérations théoriques élémentaires, ne nous sauve cependant pas lorsque l'on prétend inverser des données appartenant à plus de deux surfaces. Dans ce cas, qui n'est rien d'autre que le cas pour lequel *SCHA* fut conçue, l'inversion ne peut donner qu'un compromis plus ou moins fiables selon la différence entre l'altitude minimum et l'altitude maximum contenue dans les données et l'ouverture de la calotte. Nous pouvons d'ailleurs vérifier que lorsque l'angle  $\theta_0$  augmente les racines  $n_k$  diminuent et le rapport  $(a/b)^{l-n_k}$  décroît plus lentement pour les grandes calottes. Ceci explique les résultats considérés comme corrects obtenus pour de grandes calottes sphériques (Haines).

### 5.3 Le problème du compromis entre les composantes horizontale et radiale

Nous pouvons appliquer le même raisonnement sur les composantes du champ magnétique. Dans le domaine  $\Omega$  défini plus haut, les deux représentations, globale et locale, doivent fournir les mêmes valeurs du champ.

Puisque ceci n'est pas vrai sur l'intervalle  $r \geq a$  comme nous venons de le voir, cherchons à vérifier l'équivalence du champ en  $r = a$ . Le problème sera donc résolu sur la surface  $\partial\Omega_a$  du domaine précédent. Plusieurs modèles régionaux ne considèrent qu'une seule surface pour l'application de *SCHA* et les conclusions que nous tirerons seront applicables à ces modèles (de manière qualitative, car quantitativement, les résultats sont fortement dépendants de l'ouverture de la calotte sphérique).

En tout points d'un domaine  $\partial\Omega_a$  défini par :

$$\partial\Omega_a = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$$

on cherche à obtenir les expressions des coefficients de Gauss qui vérifient l'invariance du champ.

A partir de la série (5.6), nous écrivons :

$$\boxed{\frac{dP_l^m(\theta)}{d\theta} = \sum_{k=m}^{\theta} A_k^{m,l} \frac{dP_{n_k}^m(\theta)}{d\theta}}$$

Par le principe utilisé pour les potentiels, un calcul simple montre que l'égalité des composantes  $X$  du champ en  $r = a$  conduit à la relation entre les coefficients de Gauss :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} A_k^{m,l} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_l^m \\ \tilde{h}_l^m \end{array} \right\}} \quad (5.9)$$

Cette expression est parfaitement compatible avec le système (5.8).

L'égalité des composantes  $Y$  des deux développements aboutit à la même relation. Les relations analytiques obtenues avec le potentiel et les composantes horizontales du champ sont donc

bien conformes. Ceci est à peu près évident car poser  $V_l = \tilde{V}_g$  sur  $\partial\Omega_a$ , comme nous l'avons fait dans la section (5.2), implique  $\overrightarrow{grad}_s V_l = \overrightarrow{grad}_s \tilde{V}_g$  sur  $\partial\Omega_a$ .

Le système (5.9) est donc équivalent à l'écriture :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( X_l^k - \tilde{X}_g \right) + \left( Y_l^k - \tilde{Y}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 = 0 \quad (5.10)$$

avec  $(X_l^k, Y_l^k)$  les composantes  $B_x$  et  $B_y$  du champ magnétique sur la base locale calculées pour une troncature des séries à l'indice  $k$  et  $(\tilde{X}_g, \tilde{Y}_g)$  les composantes horizontales du champ magnétique dans la base globale centrées sur le pôle de la calotte.

En revanche, en vertu de l'expression de la dérivée des fonctions radiales, l'égalité des composantes  $Z$ , après avoir écrit  $l + 1 = l - n_k + n_k + 1$ , conduit à la détermination des coefficients de Gauss locaux à partir des coefficients globaux par :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} \left( 1 + \frac{l-n_k}{n_k+1} \right) A_k^{m,l} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_l^m \\ \tilde{h}_l^m \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

De la même manière que précédemment, cette écriture est équivalente à :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( Z_l^k - \tilde{Z}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 = 0 \quad (5.12)$$

La comparaison de la forme des coefficients écrit par (5.9) et par (5.11) nous amène à conclure que les composantes horizontales et verticales du champ ne peuvent pas s'écrire en termes des même coefficients de Gauss. *SCHA* est donc, à altitude constante, un compromis entre la résolution des composantes horizontales du champ magnétique et sa composante radiale. Notons que l'éloignement des valeurs trouvées par les systèmes (5.9) et (5.11) augmente avec l'indice  $k$  du développement en raison de la croissance des  $n_k$  avec  $k$ .

Cette dernière démonstration explique *a posteriori* pourquoi, sur la figure (4.8), les résidus  $r_x$  et  $r_y$  montrent des variations d'altitude tout à fait comparables alors que le résidu  $r_z$  de la composante  $Z$  adopte un comportement tout à fait singulier.

Nous avons voulu vérifier la cohérence des expressions (5.9) et (5.11) sur un modèle synthétique. Dans un premier temps, nous avons recherché la matrice de passage permettant d'exprimer les fonctions de Legendre associées par une combinaison linéaire de fonctions de Legendre généralisées (5.6). Etant donné la non-orthogonalité des bases de fonctions sur la calotte, la matrice de passage diffère de l'expression (5.7) qui a le mérite d'être analytique et de ne poser aucun problème particulier. On préfère donc rechercher la matrice par régression linéaire ([29]). Nous avons choisit le même angle d'ouverture que dans les travaux synthétiques précédents, soit  $\theta_0 = 5^\circ$ . Un échantillonnage régulier en  $\cos \theta$  sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$  nous assure une inversion optimale et nous n'avons aucun mal à reconstituer les fonctions de Legendre associées avec une erreur maximale de  $10^{-12}$  sur l'intervalle pour un développement  $Kmax = 15$ .

Les coefficients de Gauss décrivant le modèle de la différence entre *CAIN* et *DGRF1960* peuvent être obtenus par simple différence des coefficients de chacun des modèles pour des degrés  $n$  et  $m$  similaires. Les coefficients subissent ensuite une rotation du repère géocentrique au repère calotte dont le centre  $C$  à été fixé à  $(2^\circ E, 47^\circ N)$ . Enfin, nous recherchons séparément les coefficients théoriques locaux donnés respectivement par (5.9) et par (5.11).

En utilisant la grille de Dufour (section 4.1) nous nous donnons un maillage sur lequel nous recalculons le champ magnétique exprimé sur la base local par (2.9) avec les coefficients de Gauss locaux. Nous regardons ensuite pour les trois composantes les résidus engendrés par la différence



entre le modèle original et le modèle reconstruit localement . Pour chacune des expressions, les résultats sont présentés figure (5.1).

Le constat est sans appel : si avec les relations (5.9) nous parvenons à reconstruire quasi-exactement les composantes horizontales  $X$  et  $Y$  (résidu maximum de  $0,2nT$  au centre de la calotte), la composante  $Z$  n'est pas du tout résolue. Cette remarque s'applique dans l'autre sens : lorsque nous utilisons (5.11), la composante  $Z$  est parfaitement reconstruite (résidu maximum de  $0,2nT$  sur la calotte) mais la reconstruction des composantes horizontales  $X$  et  $Y$  fait visiblement défaut.

Il est de ce fait intéressant de constater que les résidus ainsi obtenus ne sont en rien comparables aux résidus obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires qui trouve un excellent compromis malgré l'incompatibilité manifeste des coefficients de Gauss (figure 4.4) et permet par conséquent de résoudre au mieux les trois composantes simultanément.

Ce compromis n'est pas quantifiable et dépend de l'ouverture de la calotte. Nous pouvons juste affirmer que les expressions (5.9) et (5.11) coïncident uniquement lorsque les  $n_k$  sont entiers égaux à  $l$ , ce qui n'est rien d'autre que le cas de la sphère entière. Il est opportun de mentionner que Lowes semble être arrivé à une conclusion parfaitement similaire mais par des moyens dont nous ignorons malheureusement tout ([67]).

Les résolutions de (5.9) et de (5.11) séparément sont équivalentes à des minimisations de (5.10) et de (5.12) par moindres carrés ordinaires. L'excellence des résidus pour les composantes  $X$  et  $Y$  par (5.9) ou de  $Z$  par (5.11) sur la figure (5.1) ne doit donc pas nous leurrer. Même dans le cas numérique où les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont résolues avec les mêmes coefficients de Gauss, une inversion par moindres carrés ordinaires nous donnera un résidu qui vérifiera :

$$\left\| \left( X_l^k - \tilde{X}_g \right) + \left( Y_l^k - \tilde{Y}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 + \left\| \left( Z_l^k - \tilde{Z}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 < \left\| \left( X_l^k - \tilde{X}_g \right) + \left( Y_l^k - \tilde{Y}_g \right) + \left( Z_l^k - \tilde{Z}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2$$

car les gradients ne sont pas orthogonaux en vertu du choix des conditions aux limites. Une inversion numérique ne sera donc jamais aussi précise.

## 5.4 Introduction au problème de la différentiation interne/externe

Le problème de l'incohérence des expressions des coefficients de Gauss avec l'altitude peut être résolu sans révision fondamentale de *SCHA* à la stricte condition que nous nous limitons à deux altitudes distinctes. Supposons que nous n'ayons qu'un seul ensemble des deux bases de Haines, peu importe le choix de la base, alors les bases de fonctions sont orthogonales et les coefficients de Gauss ne sont plus corrélés; la matrice  $A_k^{m,l}$  de (5.6) prend la forme (5.7). Supposons maintenant que nous imposons des conditions aux limites, supérieure en  $r = b$  et inférieure en  $r = a$ , telles que les potentiels globaux et locaux soient égaux (convergent l'un vers l'autre au sens de la norme sur les surfaces des domaines  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$ ). En ne prenant que les coefficients de Gauss internes dans les bases locale et globale et en posant de plus  $b = ae^s$  pour plus de commodité, ceci conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} G_{n_k}^m &= \sum_{l=m}^{\infty} \frac{\langle P_{n_k}^m, P_l^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} \tilde{g}_l^m \\ G_{n_k}^m e^{-S(n_k+1)} &= \sum_{l=m}^{\infty} \frac{\langle P_{n_k}^m, P_l^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} \tilde{g}_l^m e^{-S(l+1)} \end{aligned}$$

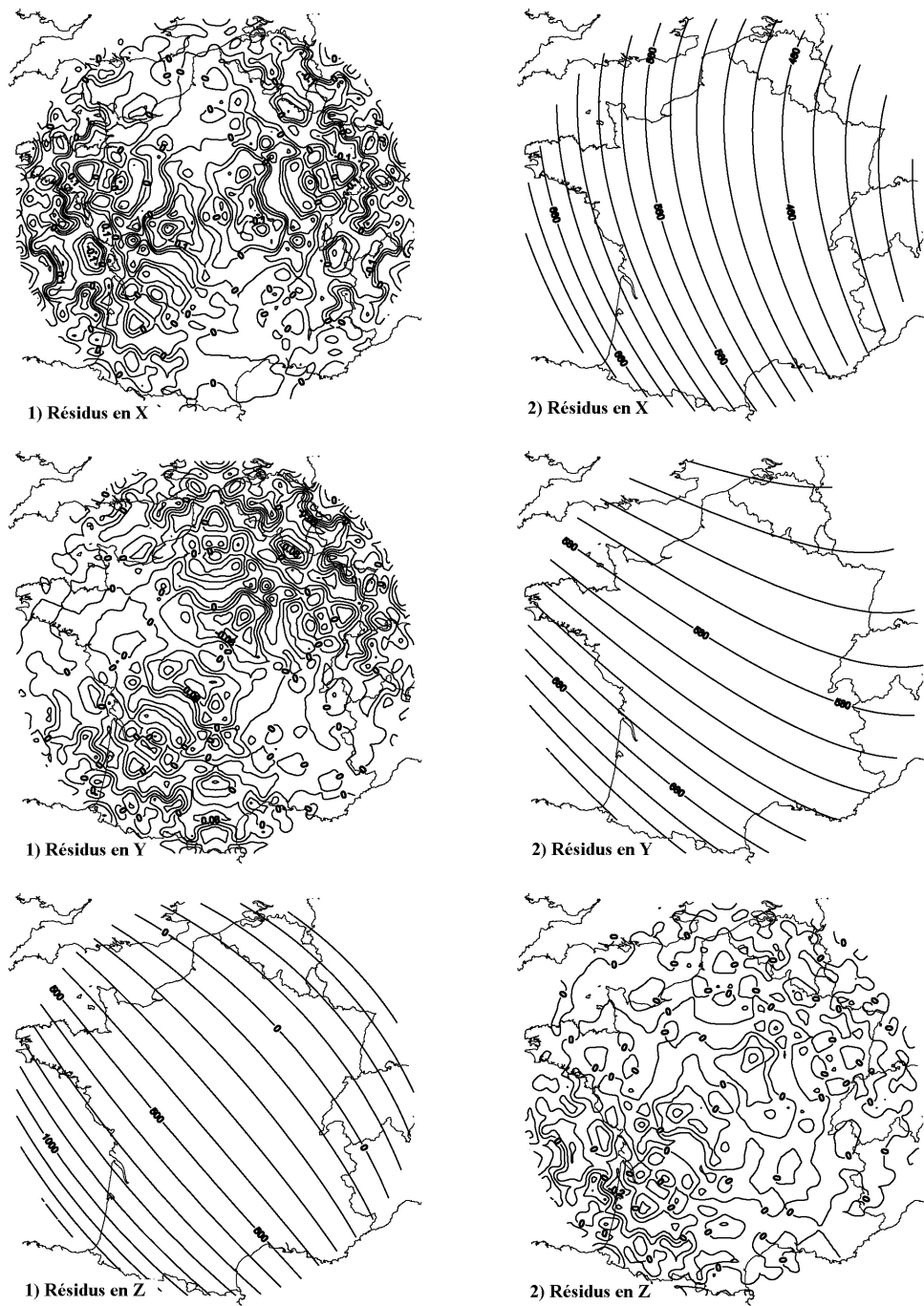


FIG. 5.1 – Résidus obtenus après différence entre modèles reconstruits en utilisant les coefficients de Gauss, par (5.9) à gauche et (5.11) à droite, et le modèle Cain-IGRF. Les deux expressions ne sont pas équivalentes pour la reconstruction des trois composantes.

Le système qui régit les coefficients  $H_{n_k}^{i,m}$  est identique. Ce système n'a de solution que pour deux valeurs particulières de  $S$ . Lorsque  $S$  tend vers l'infini le système est vérifié et cette situation ne correspond à rien d'autre qu'à l'hypothèse d'un potentiel nul à l'infini. Mais le système est également résolu pour  $S = 0$ , donc pour  $b = a$ . La résolution du système n'admet donc pas deux altitudes finies  $a$  et  $b$  différentes.

**Pour que le système puisse être résolu sur deux surfaces, il suffit d'incorporer les coefficients de Gauss que l'on qualifie d'externes** et se fixer définitivement une altitude supérieure  $b$  car les bases de fonctions radiales ne permettent pas la continuation du champ. En présence de données à plusieurs altitudes proches de  $a$  ou de  $b$ , la seule amélioration que nous pouvons faire est de réduire ces données à l'altitude limite la plus proche de manière à pouvoir utiliser le même ensemble de coefficients de Gauss. Nous pourrions penser que l'ajout des coefficients externes représente un bon compromis pour l'inversion de deux ensembles de données, l'un pris au sol, d'altitude constante, l'autre pris à une altitude satellitaire moyenne. Or, les propriétés des fonctions radiales ne permettent toujours pas de lever le compromis entre les composantes horizontales et verticales du champ même en incorporant l'ensemble complet des coefficients de Gauss. D'autre part, en dehors de ces surfaces, le champ n'aura pas la décroissance d'un champ de potentiel.

Ainsi, l'argumentation qui utilise les coefficients  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$  comme décrivant les sources externes n'a *a priori* aucun sens et l'on ne manquera pas de mentionner De Santis lorsqu'il constatait avec étonnement que l'ajout dans l'inversion de fonctions de base, qu'il qualifiait d'externe, améliorerait sensiblement la reconstruction du champ bien que ce fut en évidente contradiction avec l'origine exclusivement interne des sources : « *The case consisted of the synthesis of field values over a 16-degree cap of a dipole placed at the center of the Earth. The use of SCHA with both internal and external basis functions improved the fit with respect to the only use of internal contributions alone, in evident contradiction with the original dipolar data* » ([24] d'après les résultats de [108]).

Pour la décomposition locale, nous devons donc revoir le concept d'interne et d'externe et rechercher des bases de fonctions radiales appropriées.

# Conclusions de la première partie

Les améliorations successives des fonctions de Legendre et du maillage régulier sur la calotte permettent de s'affranchir dans un premier temps des imprécisions d'ordre numérique et de ne faire apparaître que le comportement dicté par la théorie des harmoniques sphériques sur calotte. Les études sur données synthétiques sont déterminantes puisqu'elles permettent de simuler la modélisation par *SCHA* dans un cas proche d'un idéal d'équi-répartition des données en même temps que de prévoir les difficultés liées à l'inversion. La plupart de ces techniques seront gardées par la suite et nous tenterons d'exploiter toutes les possibilités qu'elles offrent et les informations qu'elles apportent.

Pour la modélisation régionale par décomposition en harmoniques sphériques sur calotte toutes ces techniques et améliorations se sont révélées insuffisantes. Nous avons vu que *SCHA* ne donne pas de modèle de champ crustal satisfaisant que ce soit une modélisation de données réparties en volume, ou en surface uniquement, et que les techniques numériques n'étaient pas seules à mettre en cause.

Dans le cas d'une répartition de surface, plus qu'une dégradation de la représentation des composantes du champ, la formulation de *SCHA* induit un compromis inattendu entre la résolution des composantes horizontales et verticales du champ, qu'il n'est pas aisé de quantifier. La méthode des harmoniques sphériques sur calotte est donc entachée d'une erreur théorique préjudiciable à la modélisation régionale dont l'objectif principal est de mettre en évidence les structures fines du champ magnétique. Ces structures, de variations faibles de l'ordre de la dizaine de  $nT$ , pourraient être masquées par une erreur de modélisation théorique sur le modèle qui viendrait se juxtaposer aux erreurs d'instrumentation et de mesure. Il est d'ailleurs notoire de remarquer que les résultats donnés par *SCHA* viennent souvent corroborer l'existence d'une anomalie régionale connue ([97]), mais ne permettent pas de mettre en lumière de nouvelles structures car nous sommes incapables d'estimer concrètement l'erreur théorique.

Dans un deuxième temps, la modélisation de données prises dans un volume a montré qu'en réalité, la modélisation *SCHA* ne peut pas prendre en compte théoriquement des données d'altitude très différentes. Or c'est ce principal avantage qu'avait, *a priori*, ce formalisme sur les autres techniques de modélisation régionale.

Chacun de ces cas et les problèmes rencontrés ont été analysés indépendamment du choix des conditions aux limites, qu'elles aient été définies par (2.7a), par (2.7b) ou par le système (2.7) complet. L'erreur de modélisation provient donc d'un problème plus conceptuel.

A défaut d'être entièrement fautive, nous montrerons que la théorie est incomplète. A la réflexion, nous aurions pu nous y attendre car un problème de conditions aux limites complet doit admettre des conditions sur chacune des surfaces délimitant le domaine d'étude. Or rappelons que Haines n'a imposé des conditions que sur une seule des surfaces du domaine. Dans le cas d'un cône infini, les conditions aux limites sont posées sur les surfaces latérales du cône ; c'est un problème que nous trouvons résolu par exemple par Smythe ([103]). Haines, dans sa formulation, a repris les mêmes fonctions de base que celles proposées par Smythe et les a utilisées pour la

recherche d'un champ magnétique sur une surface quelconque dans le cône infini, par exemple la surface terrestre. Il apparaît très clair cependant que la simple adjonction d'une condition supplémentaire sur la surface terrestre modifie la géométrie du cône qui devient semi-infini ; le nouveau domaine d'étude contient donc une surface limite supplémentaire. Or, dans un problème de conditions aux limites, ce sont les conditions aux limites qui imposent la forme des solutions et nous montrons que la résolution de l'équation de Laplace dans un cône semi-infini avec des conditions aux limites sur chacune des surfaces conduit à l'expression d'une solution générale radicalement différente de celle d'un cône infini (voir Annexe C). Haines a donc utilisé des fonctions de bases qui ne sont pas appropriées à l'usage que l'on désire en faire en géomagnétisme.

En géomagnétisme, nous ne pouvons pas considérer le cône infini car les sources magnétiques sont partiellement contenues dans ce domaine. Nous pouvons en revanche ne considérer qu'un cône semi-infini de surface inférieure d'altitude  $r = a$ . Pour cette configuration deux points sont dignes d'être discutés.

D'une part, l'existence de courants externes, principalement localisés dans l'ionosphère et la magnétosphère, suggèrent l'ajout d'une condition supplémentaire sur une surface supérieure d'altitude  $b > a$  inférieure à l'altitude des sources. Cette hypothèse permet de rendre compte au mieux des hypothèses de divergence et du rotationnel du champ nuls dans le domaine. Le problème ainsi posé entraîne la résolution dans un cône fini qui est un cas particulier du cône semi-infini et qui ressemble bien à ce que nous désirons résoudre pour la solution d'un champ magnétique en l'absence de source à l'intérieur du domaine (voir Annexe C).

D'autre part, si nous sommes sûrs de n'avoir aucun courant externe dans les données, la résolution d'un cône infini pose néanmoins des problèmes d'implémentation numérique. Les fonctions de bases radiales sont associées à des valeurs propres continues. Par conséquent, les coefficients de Gauss correspondants sont également des fonctions continues et la modélisation ne peut se faire qu'au sens des distributions (voir Annexe C).

Pour ces deux raisons la partie suivante sera dévolue à la résolution du Laplacien dans un domaine conique fini  $\Omega$  borné par une surface latérale  $\partial\Omega_\theta$  et deux surfaces, inférieure et supérieure, respectivement dénotées  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$ .

## Deuxième partie

# Proposition d'une méthode de modélisation régionale



# Introduction

Nous venons de voir que la modélisation élaborée par Haines conduit à des difficultés, qui se sont révélées être particulièrement solubles pour de petites calottes sphériques. On se propose dans cette partie de reformuler le problème initial dans un cône fini dont les dimensions seront adaptées à la région et à la couverture en données disponibles. La géométrie du problème est maintenant fixée définitivement. En toute rigueur notre domaine devrait se limiter en altitude à la base de l'ionosphère, au-delà de laquelle règnent des courants électriques, puisque nous supposons que les sources se situent à l'extérieur du domaine d'étude. Nous gageons cependant que les contributions externes auront été retranchées par une sélection appropriée des données. Ces données seront donc susceptibles d'être résolues dans le cadre des hypothèses de divergence nulle et de rotationnel nul du champ magnétique. Ceci sera évidemment la condition sine qua non de la validité de notre modélisation et de la représentation du potentiel magnétique par des harmoniques. Ceci nous permettra d'inclure les données satellitaires dans la modélisation.

Nous avons mentionné plusieurs fois le fait que le choix des conditions aux limites régit à lui seul la forme de la solution du potentiel, rajoutons que ce choix est décisif pour la vitesse de convergence de cette solution. Nous ne pouvons donc pas poser un tel problème de façon unique, car plusieurs problèmes, liés à des conditions aux limites différentes conduisent à différentes représentations du champ. Nous nous attacherons dans un premier temps à définir quatre problèmes distincts et à retenir celui qui respecte au mieux certaines propriétés mathématiques importantes (que nous définirons le moment venu) et qui permettent l'implémentation numérique la plus favorable en vue du problème inverse.





## Chapitre 6

# Géométrie et formalisme du nouveau problème

Supposons un domaine conique  $\Omega$  délimité en haut et en bas par deux surfaces d'altitudes  $r = a$  et  $r = b$  et latéralement par une surface définie par  $\theta = \theta_0$  (figure 6.1) dont la particularité est de ne contenir aucune source de champ magnétique. Alors, on peut chercher dans  $\Omega$  un potentiel magnétique  $V$  solution de divers problèmes de conditions aux limites. Posons, par exemple, le problème suivant :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PI. a})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PI. b})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PI. c})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PI. d})$$

où  $n$  est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur. Remarquons que cette formulation impose des conditions aux limites sur les dérivées du potentiel et non sur le potentiel lui-même. Nous pouvons écrire un autre problème de conditions aux limites sous la forme :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PII. a})$$

$$V|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PII. b})$$

$$V|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PII. c})$$

$$V|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PII. d})$$

où les conditions aux limites sont sur les potentiels eux-même.

N'excluons pas toutefois des conditions aux limites mixtes, ce qui nous donne :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PIII. a})$$

$$V|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PIII. b})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PIII. c})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PIII. d})$$

ou encore :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PIV. a})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PIV. b})$$

$$V|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PIV. c})$$

$$V|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PIV. d})$$

Chacun des problèmes ainsi posés implique l'existence d'une relation supplémentaire. Les conditions aux limites  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  ne peuvent pas être complètement arbitraires car elles doivent satisfaire la condition de divergence nulle dans le domaine  $\Omega$ . Ceci se caractérise par la condition de flux nul, expression intégrale du théorème de la divergence, conformément au théorème d'Ostrogradski-Gauss dont nous rappelons les implications. Puisque :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dv_{\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n} ds_{\partial\Omega}$$

et que  $\vec{B} = \vec{\nabla}V$  alors :

$$\int_{\Omega} \Delta V dv_{\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \vec{\nabla}V \cdot \vec{n} ds_{\partial\Omega}$$

Et, puisque par construction  $\Delta V = 0$ , cela revient à :

$$\boxed{\Phi = \iint_{\partial\Omega_\theta} \frac{\partial V}{\partial n} ds_{\partial\Omega_\theta} + \iint_{\partial\Omega_a} \frac{\partial V}{\partial n} ds_{\partial\Omega_a} + \iint_{\partial\Omega_b} \frac{\partial V}{\partial n} ds_{\partial\Omega_b} = 0} \quad (6.5)$$

Lorsque l'on impose des conditions sur les limites du domaine sur les dérivées, on suppose par conséquent qu'elles remplissent les conditions de flux. En pratique, n'importe quel champ dérivant d'un potentiel qui satisfait l'équation de Laplace remplit cette condition, mais ce n'est pas forcément vrai pour des conditions aux limites,  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  quelconques.

Nous montrerons que la représentation *PI* par exemple présente le grand avantage de converger rapidement alors qu'elle soulève quelques difficultés conceptuelles liées à cette considération supplémentaire. Les représentations *PIII* et *PIV* sont à peu près équivalentes d'un point de vue théorique mais montrent des différences marquées lorsqu'il s'agit de mettre en oeuvre une modélisation numérique du champ magnétique qui exploite les données réelles du champ. Nous nous proposons donc de faire l'inventaire des avantages et des inconvénients de chacun des problèmes définis ci-dessus. Une argumentation critique nous permettra de choisir une décomposition adaptée au cas particulier d'une petite calotte sphérique. Il n'est pas superflu de remarquer que les

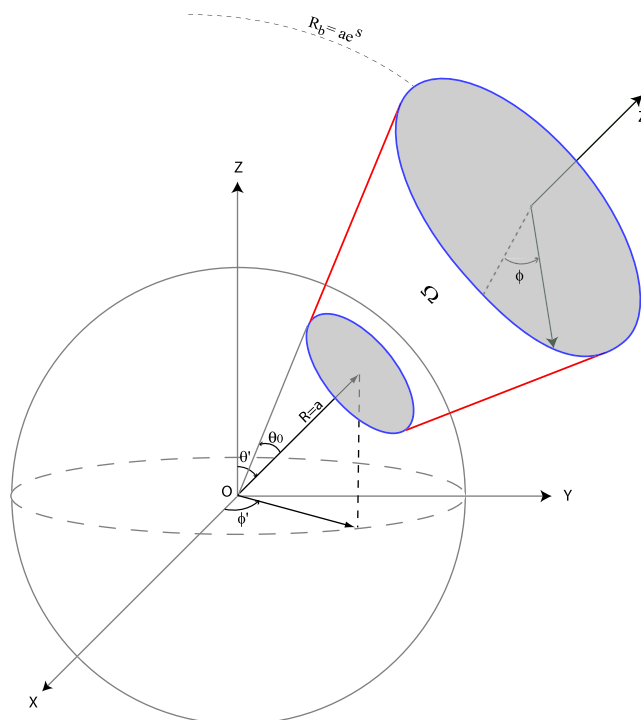


FIG. 6.1 – Représentation du domaine conique  $\Omega$  dans le repère géocentrique. A ce domaine on associe une surface fermée  $\partial\Omega$  formée par des surfaces  $r = a$  et  $r = b$  et une surface latérale  $\theta = \theta_0$ .

fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sont en pratique inconnues. La résolution d'un problème de conditions aux limites a pour but de construire des bases de fonctions générant un espace dans lequel nous exprimerons la solution. Ceci est l'objet du problème inverse que nous abordons dans la partie 3.

## 6.1 Orthogonalité des gradients

### 6.1.1 Préliminaires

Chaque problème pris indépendamment ne peut être résolu aisément que si l'on fait apparaître des conditions homogènes de Neumann ou de Dirichlet. Par exemple, on peut trouver la solution du problème  $PI$  si l'on définit deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  solutions de deux sous-problèmes

indépendants :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= F(r, \theta_0, \varphi) \end{aligned} \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = 0 \quad (6.6b)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = 0 \quad (6.6c)$$

où  $F$  satisfait la condition :  $\iint_{\partial \Omega_\theta} F ds = 0$

et de

$$\Delta V_2 = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} = 0 \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = -G_1(a, \theta, \varphi) \quad (6.7b)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = G_2(b, \theta, \varphi) \quad (6.7c)$$

où  $G_1$  et  $G_2$  vérifient :  $-\iint_{\partial \Omega_a} G_1 ds + \iint_{\partial \Omega_b} G_2 ds = 0$

En vertu du principe de superposition, le potentiel total  $V = V_1 + V_2$  sera solution du problème initial  $PI$ . Ce type de décomposition n'est pas unique et nous avons choisi ici de ne présenter que celle qui font apparaître des conditions aux limites indépendantes entre les deux sous-problèmes. Des expériences ont montré l'équivalence théorique des décompositions en deux sous-problèmes ayant des conditions dépendantes l'une de l'autre. En pratique, cela se caractérise par la recherche de  $V_1$  pour en déduire  $V_2$  mais les limites numériques ainsi que la troncature des séries infinies pose des problèmes majeurs dans la détermination de  $V_2$ .

Puisque nous travaillerons sur le champ magnétique, gradient du potentiel, plutôt que sur le potentiel lui-même, il nous importe de savoir quelle décomposition donne naissance à des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  tels que leurs gradients,  $\vec{\nabla} V_1$  et  $\vec{\nabla} V_2$ , soient orthogonaux au sens du produit scalaire sur le domaine  $\Omega$ . On définit le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} V_1 \cdot \vec{\nabla} V_2 d\Omega \quad (6.8)$$

Cette propriété d'orthogonalité présente des caractéristiques avantageuses telles que l'indépendance des coefficients de Gauss ou la construction d'un problème inverse bien posé. Nous verrons dans la troisième partie que ces propriétés permettent un contrôle quasi parfait des simulations synthétiques.

Nous cherchons pour le moment à exprimer la norme du gradient  $V = V_1 + V_2$  dans le domaine  $\Omega$  indépendamment des conditions aux limites. Soit :

$$\|\overrightarrow{\nabla V}\|^2 = \|\overrightarrow{\nabla}(V_1 + V_2)\|^2 = \langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_1 \rangle_{L^2\{\Omega\}} + \langle \overrightarrow{\nabla} V_2, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} + 2 \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega \quad (6.9)$$

Pour le développement de  $\int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega$  nous utiliserons la première identité de Green ([12]) qui permet d'exprimer ce produit scalaire par une intégrale de surface sur  $\partial\Omega$ .

L'identité s'écrit :

$$\int_{\Omega} V_2 \Delta V_1 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega \quad (6.10)$$

ou de manière parfaitement équivalente :

$$\int_{\Omega} V_1 \Delta V_2 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} V_1 \frac{\partial V_2}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega$$

D'autre part on a supposé que  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 0$  sur  $\Omega$  donc  $\langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}}$  se réduit à :

$$\langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} = \oint_{\partial\Omega} V_1 \frac{\partial V_2}{\partial n} dS \quad (6.11a)$$

soit, de manière équivalente, à :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} = \oint_{\partial\Omega} V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n} dS} \quad (6.11b)$$

### 6.1.2 Calcul formel de la norme de $V$

Nous prendrons pour  $V_1$  et  $V_2$  les expressions issues de décompositions en fonction de  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Toujours indépendamment des conditions aux limites, les deux potentiels peuvent s'écrire respectivement sous une forme compacte, que nous avons définie en préliminaires dans la première partie (équation 1.25). Donc :

$$V_1(r, \theta, \varphi) = a \sum_{p \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \underbrace{G_{n_p}^m R_p^c(r) \cos(m\varphi)}_{V_{1,c}^m} + \underbrace{H_{n_p}^m R_p^s(r) \sin(m\varphi)}_{V_{1,s}^m} \right) P_{n_p}^m(\theta) \quad (6.12)$$

et

$$V_2(r, \theta, \varphi) = a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \underbrace{G_{n_k}^m R_k^c(r) \cos(m\varphi)}_{V_{2,c}^m} + \underbrace{H_{n_k}^m R_k^s(r) \sin(m\varphi)}_{V_{2,s}^m} \right) P_{n_k}^m(\theta) \quad (6.13)$$

Dans une expression du type (6.11b), si les fonctions de bases de  $V_1$  et de  $V_2$  ne sont pas orthogonales entre-elles ; c'est-à-dire si :

$$\int_a^{ae^S} R_p(r)R_k(r)dr \neq \delta_{p,k} \quad (6.14)$$

ou si :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_p}^m(\theta)P_{n_k}^m(\theta) \sin \theta d\theta \neq \delta_{p,k} \quad (6.15)$$

avec  $\delta_{p,k}$  le delta de Kronecker, alors il est clair que le produit scalaire des potentiels sur  $L^2 \{\Omega\}$  n'est pas nul pour le produit scalaire :

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \int_{\Omega} V_1 V_2 d\Omega$$

En revanche, malgré la non-orthogonalité des fonctions, il est possible de parvenir à des propriétés d'orthogonalité sur les gradients au sens du produit scalaire défini par (6.8).

Nous chercherons tout d'abord les conditions pour lesquelles les gradients des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , issus de la décomposition des problèmes  $PI$  à  $PIV$ , sont orthogonaux. D'un point de vue du problème inverse, cette propriété est avantageuse et nous nous proposons de rechercher les conditions qui nous permettront d'établir une telle décomposition. Cette propriété n'est néanmoins pas suffisante pour pouvoir exclure les autres car nous recherchons aussi une solution qui converge rapidement et qui limite le phénomène de Gibbs.

En regard des expressions (6.12) et (6.13) et des propriétés d'orthogonalité des sinus et cosinus, nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} V_{c,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,2}^m \rangle_{L^2\{\Omega\}} &= 0 \\ \langle \vec{\nabla} V_{c,1}^m, \vec{\nabla} V_{c,2}^{m'} \rangle_{L^2\{\Omega\}} &= \delta_{m,m'} \\ \langle \vec{\nabla} V_{s,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,2}^{m'} \rangle_{L^2\{\Omega\}} &= \delta_{m,m'} \end{aligned}$$

Il suffit donc de chercher l'expression du produit scalaire à  $m$  fixé pour le gradient des potentiels partiels  $V_{c,1}^m$  et  $V_{c,2}^m$ . L'expression de  $\langle \vec{\nabla} V_{s,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,2}^m \rangle_{L^2\{\Omega\}}$  s'en déduira par analogie.

En décomposant (6.10) suivant chaque intégrale de surface on a :

$$\langle \vec{\nabla} V_{c,1}^m, \vec{\nabla} V_{c,2}^m \rangle_{\Omega} = \underbrace{\int_{\partial\theta_0} V_{c,1}^m)_{\theta_0} \frac{\partial V_{c,2}^m}{\partial \theta}}_{I_1} \frac{1}{r} ds_{\theta} - \underbrace{\int_{\partial a} V_{c,1}^m)_{a} \frac{\partial V_{c,2}^m}{\partial r}}_{I_2} ds_a + \underbrace{\int_{\partial b} V_{c,1}^m)_{b} \frac{\partial V_{c,2}^m}{\partial r}}_{I_3} ds_b \quad (6.16)$$

où les éléments de surface sont définis sur la frontière du cône par (figure 6.2) :

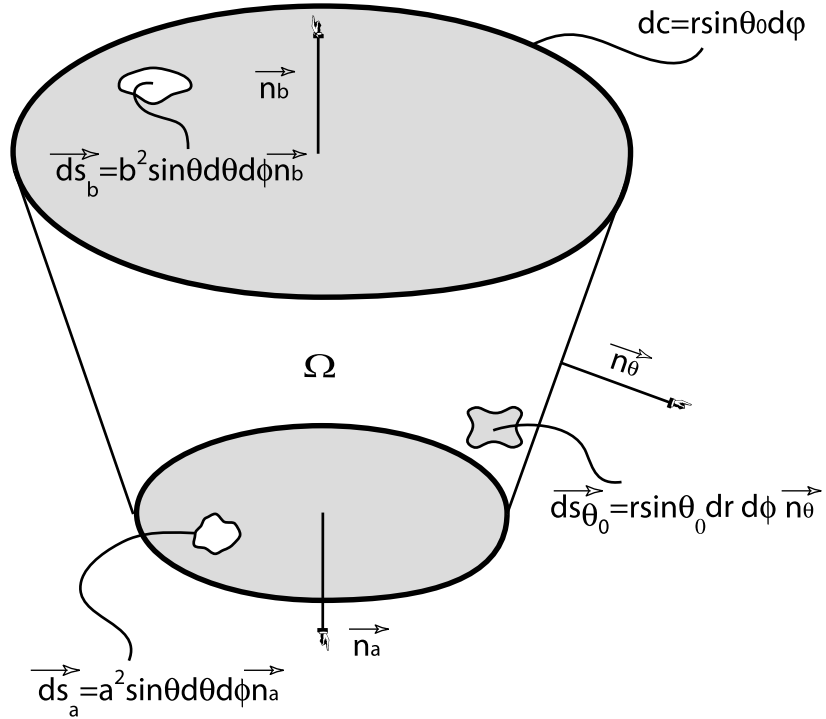


FIG. 6.2 – Représentation des différentes surfaces du cône et expressions des éléments de surface correspondants. Les éléments sont exprimés en coordonnées sphériques dans le repère du cône.

$$ds_\theta = \sin \theta_0 r dr d\varphi \quad (6.17a)$$

$$ds_a = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.17b)$$

$$ds_b = b^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.17c)$$

### Calcul de l'intégrale sur la surface $I_1$

Les propriétés d'orthogonalité (6.14), (6.15) et l'expression (6.17a) conduisent à l'expression de l'intégrale  $I_1^m(k, p)$  pour chaque triplet  $(m, k, p)$  :

$$I_1^m(k, p) = a^2 (1 + \delta_m) \pi P_{n_p}^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \sin \theta_0 \underbrace{\int_a^b R_{n_p}^c(r) R_{n_k}^c(r) dr}_{I_r}$$

Dans cette expression, nous n'avons pas gardé les coefficients de Gauss qui ne représentent que des constantes.

Or nous avons vu que les solutions radiales étaient solutions de l'équation différentielle d'Euler (voir premier chapitre). On peut donc poser pour  $R_p(r)$  et  $R_k(r)$  :

$$\mathcal{L}_r(R_p(r)) = -\lambda_p R_{n_p}^c(r) \quad (6.18a)$$

$$\mathcal{L}_r(R_k(r)) = -\lambda_k R_{n_k}^c(r) \quad (6.18b)$$



où  $\lambda_p = n_p(n_p + 1)$  et  $\lambda_k = n_k(n_k + 1)$  sont les deux ensembles de valeurs propres de l'opérateur de Sturm-Liouville  $\mathcal{L}_r$  défini par :

$$\boxed{\mathcal{L}_r(\cdot) = -\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)} \quad (6.19)$$

En multipliant (6.18a) par  $R_k(r)$ , (6.18b) par  $R_p(r)$  et en soustrayant les deux on trouve :

$$R_{n_p}^c(r) R_{n_k}^c(r) (\lambda_p - \lambda_k) = R_{n_p}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_k}^c(r)) - R_{n_k}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_p}^c(r))$$

donc l'intégrale  $I_r$  s'écrit :

$$I_r = \frac{1}{\lambda_p - \lambda_k} \left[ \int_a^b R_{n_p}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_k}^c(r)) dr - \int_a^b R_{n_k}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_p}^c(r)) dr \right]$$

Une simple intégration par partie montre, en utilisant la définition (6.19) de l'opérateur  $\mathcal{L}_r$ , que :

$$\int_a^b R_{n_p}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_k}^c(r)) dr - \int_a^b R_{n_k}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_p}^c(r)) dr = \left[ r^2 R_{n_k}^c(r) \frac{dR_{n_p}^c(r)}{dr} - r^2 R_{n_p}^c(r) \frac{dR_{n_k}^c(r)}{dr} \right]_a^b$$

et donc que :

$$I_r = \frac{1}{\lambda_p - \lambda_k} \left[ r^2 R_{n_k}^c(r) \frac{dR_{n_p}^c(r)}{dr} - r^2 R_{n_p}^c(r) \frac{dR_{n_k}^c(r)}{dr} \right]_a^b$$

et par conséquent que :

$$I_1^m(k, p) = \frac{a^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi}{\lambda_p - \lambda_k} \left( P_{n_p}^m \right)_{\theta_0} \left( \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0} \left[ r^2 R_{n_k}^c \frac{dR_{n_p}^c}{dr} - r^2 R_{n_p}^c \frac{dR_{n_k}^c}{dr} \right]_a^b \quad (6.20)$$

### Calcul des intégrales $I_2$ et $I_3$

Les intégrales  $I_2$  et  $I_3$  se calculent de la même manière. En développant explicitement  $I_2$  avec (6.17b), on montre qu' à  $m$  fixé :

$$I_2^m(k, p) = a^4 (1 + \delta_m) \pi \left( R_{n_p}^c \right)_a \left( \frac{dR_{n_k}^c}{dr} \right)_a \underbrace{\int_0^{\theta_0} P_{n_p}^m P_{n_k}^m \sin \theta d\theta}_{I_\theta}$$

L'intégrale  $I_\theta$ , produit scalaire des fonctions de Legendre, est explicitée en annexe A et sera maintes fois rencontrée. On rappelle que :

$$I_\theta = \frac{\sin \theta_0}{\lambda_p - \lambda_k} \left[ P_{n_p}^m \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \right]_0^{\theta_0}$$

ce qui conduit à :

$$I_2^m(k, p) = \frac{a^4 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi}{\lambda_p - \lambda_k} R_{n_p} \left( \frac{dR_{n_k}}{dr} \right)_a \left[ P_{n_p}^m \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \right]_0^{\theta_0} \quad (6.21)$$

et respectivement à :

$$I_3^m(k, p) = \frac{a^2 b^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi}{\lambda_p - \lambda_k} R_{n_p} \left( \frac{dR_{n_k}}{d\theta} \right)_b \left[ P_{n_p}^m \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \right]_0^{\theta_0} \quad (6.22)$$

Nous sommes donc en mesure d'exprimer le produit scalaire des gradients en remplaçant (6.20), (6.21) et (6.22) dans (6.16). Ceci conduit finalement, au triplet  $(m, k, p)$  fixé, à l'écriture du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\nabla} V_{c,p,1}^m, \vec{\nabla} V_{c,k,2}^m \right\rangle_{L^2\{\Omega\}} &= \frac{A}{\lambda_p - \lambda_k} \left( b^2 R_{n_k}^c(b) \frac{dR_{n_p}^c(b)}{dr} - a^2 R_{n_k}^c(a) \frac{dR_{n_p}^c(a)}{dr} \right) P_{n_p}^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \\ &+ \frac{A}{\lambda_p - \lambda_k} \left( a^2 R_{n_p}^c(a) \frac{dR_{n_k}^c(a)}{dr} - b^2 R_{n_p}^c(b) \frac{dR_{n_k}^c(b)}{dr} \right) P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Avec  $\lambda_p$  et  $\lambda_k$  les valeurs propres et  $A$  un élément de surface de la calotte tel que :

$$A = a^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi$$

En changeant l'indice  $c$  en  $s$  et  $(1 + \delta_m)$  en  $(1 - \delta_m)$ , on obtient l'expression de :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_{s,p,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,k,2}^m \right\rangle_{L^2\{\Omega\}}$$

Pour une expression complète, on rajoutera en facteur le produit des coefficients de Gauss  $G_{n_p}^m G_{n_k}^m$  ou  $H_{n_p}^m H_{n_k}^m$ .

### 6.1.3 Les conditions d'orthogonalité

Les conditions sur les fonctions  $R_{n_k}$ ,  $R_{n_p}$ ,  $P_{n_p}^m$ ,  $P_{n_k}^m$  ou sur leur dérivées sont homogènes d'après (6.6a), (6.6b) et (6.6c) ainsi que (6.7a), (6.7b) et (6.7c) pour les problèmes respectifs sur  $V_1$  et  $V_2$  nous permettent de ne considérer que quatre couples de conditions :

1. En prenant les conditions du problème  $PI$ , on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0} &= 0 \\ \frac{dR_{n_p}^c(a)}{dr} &= \frac{dR_{n_p}^c(b)}{dr} = 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} \neq 0$$

Le premier problème *PI* que nous avons défini ne donne pas lieu à un problème bien posé. Les gradients des deux décompositions n'étant pas orthogonaux, il existera des combinaisons linéaires entre les coefficients de Gauss des deux bases de fonctions. Ces combinaisons conduisent inéluctablement à des difficultés numériques pour la résolution du problème inverse.

2. Les conditions du deuxième problème *PII* :

$$\begin{aligned} P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} &= 0 \\ R_{n_p}^c(a) &= R_{n_p}^c(b) = 0 \end{aligned}$$

entraînent que :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} \neq 0$$

Ce qui nous amène à conclure que

**Les conditions aux limites homogènes de type Dirichlet ou Neumann uniquement entraînent la résolution d'un problème dont les gradients de potentiels ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire défini par eq. 6.8.**

3. Cependant on constate que les conditions aux limites formulées dans le problème *PIII* :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} &= 0 \\ R_{n_p}^c(a) &= R_{n_p}^c(b) = 0 \end{aligned}$$

entraînent que :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} = 0$$

Et, de même, pour le problème *PIV*, on trouve que si :

$$\begin{aligned} P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} &= 0 \\ \frac{dR_{n_p}^c(a)}{dr} &= \frac{dR_{n_p}^c(b)}{dr} = 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} = 0$$

On constate donc que parmi les solutions possibles pour les problèmes initiaux deux seulement présentent la propriété d'avoir des gradients orthogonaux. Par conséquent :

**Les conditions aux limites mixtes de type Dirichlet et Neumann ou Neumann et Dirichlet entraînent la résolution d'un problème dont les gradients des potentiels sont orthogonaux au sens du produit scalaire défini par eq. 6.8.**

## 6.2 Résolutions des équations homogènes

Nous venons de constater que le choix des conditions aux limites est l'élément clé d'un problème bien posé. Il existe cependant d'autres considérations à prendre en compte lors du choix de l'une ou l'autre des décompositions, dont l'une en particulier, est liée la vitesse de convergence des solutions. Jusqu'à présent, en l'absence des formes exactes pour les potentiels, nous ne pouvons pas quantifier les termes non-orthogonaux et nous ne pouvons pas certifier qu'ils sont d'une importance telle que le problème est numériquement mal posé. Avec les harmoniques sphériques sur calotte de Haines ([43]), par exemple, on sacrifiait l'orthogonalité au profit de la convergence. Par souci de généralité, nous nous proposons donc, dans cette partie, de résoudre chacun des problèmes *PI*, *PII*, *PIII* et *PIV* associés à leurs conditions aux limites respectives. Nous débuterons par la résolution du problème *PI* car ses conditions aux limites qui portent sur le champ magnétique sont *a priori* les plus naturelles. Les enseignements et les embûches que nous y rencontrerons seront profitables pour aplanir certaines difficultés et déduire les solutions des trois autres problèmes. Chaque problème de conditions aux limites et ses solutions feront l'objet d'une synthèse finale au chapitre 9.

Reprenons la décomposition du problème *PI* :

$$\Delta V_1 = 0 \quad (6.24a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} = F(r, \theta_0, \varphi) \quad (6.24b)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = 0 \quad (6.24c)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = 0 \quad (6.24d)$$

et :

$$\Delta V_2 = 0 \quad (6.25a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} = 0 \quad (6.25b)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = G_1(a, \theta, \varphi) \quad (6.25c)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = G_2(b, \theta, \varphi) \quad (6.25d)$$

Alors il faudra de plus que les conditions aux limites associées à chacun des deux problèmes vérifient

$$\iint_{\partial \Omega_\theta} F ds = 0 \quad (6.26)$$

pour la solution  $V_1$  et :

$$-\iint_{\partial \Omega_a} G_1 ds + \iint_{\partial \Omega_b} G_2 ds = 0 \quad (6.27)$$

pour la solution  $V_2$ . On remarquera que ces conditions de flux sur les problèmes indépendants sont beaucoup plus drastiques que la condition de flux du champ total  $-\vec{\nabla}V$ . Nous verrons que ces restrictions posent des problèmes de détermination dans les relations entre le champ global et le champ local (section 7.1). Notons que le même type de décomposition sera appliquée à chacun des problèmes *PII*, *PIII* et *PIV* avec leurs conditions aux limites respectives :

– Pour le problème *PII* on prendra :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 & \Delta V_2 &= 0 \\ V_1|_{\theta=\theta_0} &= F(r, \varphi) & \text{et} & \quad V_2|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ V_1|_{r=a} &= 0 & & \quad V_2|_{r=a} = G_1(\theta, \varphi) \\ V_1|_{r=b} &= 0 & & \quad V_2|_{r=b} = G_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.28)$$

– Pour le problème *PIII* :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 & \Delta V_2 &= 0 \\ V_1|_{\theta=\theta_0} &= F(r, \varphi) & \text{et} & \quad V_2|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= 0 & & \quad \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = G_1(\theta, \varphi) \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{r=b} &= 0 & & \quad \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=b} = G_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.29)$$

– Enfin, pour le problème *PIV* :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 & \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} &= F(r, \varphi) & \text{et} & \quad \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ V_1|_{r=a} &= 0 & & \quad V_2|_{r=a} = G_1(\theta, \varphi) \\ V_1|_{r=b} &= 0 & & \quad V_2|_{r=b} = G_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.30)$$

### 6.2.1 Expression du potentiel $V_2$

La résolution de (6.25a) associée à (6.25b) et indépendamment de (6.25c) ou de (6.25d) est maintenant bien connue. En effet, la condition sur la dérivée du potentiel imposée sur la surface  $\partial\Omega_{\theta_0}$  revient à une condition sur la dérivée des fonctions de Legendre associées. Il s'agit, dans la nomenclature de Haines, des fonctions de Legendre telles que  $k - m$  soit pair. On a déjà rencontré ces solutions dans la Partie 1 qui font intervenir les fonctions de Legendre de degrés  $n_k$  réels et d'ordres  $m$  entiers. Nous avons vu que le potentiel, en considérant l'ensemble des solutions classiquement appelées *interne* et *externe*, s'exprimait finalement :

$$\begin{aligned} V_2(r, \theta, \varphi) &= a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m \\ &\quad + a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k} (G_{n_k}^{e,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{e,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m \end{aligned} \quad (6.31)$$

Cette solution intervient dans la résolution du problème *PI* bien entendu mais aussi dans la résolution de *PIII* car la condition sur cette limite est identique pour les deux problèmes.

### Solution des autres problèmes

Les problèmes *PII* et *PIV* qui font intervenir des conditions sur le potentiel plutôt que sur sa dérivée conduisent à  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ . Nous obtenons la même expression générale (6.31) à ceci près que les racines  $n_k$  correspondent à des indices  $k - m$  impairs selon la nomenclature de Haines ([43]) et prennent donc naturellement des valeurs très différentes.

### 6.2.2 Solution du potentiel $V_1$

La solution du problème (6.24a) associée à (6.24c et 6.24d) est en revanche plus inhabituelle en géomagnétisme et fait intervenir une nouvelle classe de fonctions de Legendre. Nous nous proposons d'exposer les différentes étapes de résolution.

#### Solution radiale du potentiel $V_1$

**Définition** *Il sera utile tout au long des pages qui suivent de définir un nombre réel  $S$  tel que  $S = \log(b/a)$ . Ce nombre est un facteur géométrique sans dimension qui dépend du rapport entre  $b$ , le rayon supérieur du cône et  $a$  le rayon terrestre.*

Reprenons la solution générale de l'équation différentielle en  $r$  (équation 1.3) nous avons :

$$\boxed{-\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \lambda R(r)} \quad (6.32)$$

Cette équation, associée aux conditions aux limites (6.24c) and (6.24d), forme un problème de Sturm-Liouville qui conduit à la construction d'une base de fonctions radiales orthogonales dans l'intervalle  $[a, b]$ , pour le produit scalaire :

$$\int_a^b f \cdot g \cdot dr = \langle f, g \rangle_{[a,b]}$$

Ce dernier point est important et mérite d'être relevé. Habituellement le problème de Sturm-Liouville est obtenu par l'équation en  $\theta$  du triplet des équations différentielles. Dans le cas présent, les valeurs propres  $\lambda = n(n+1)$  sont déterminées par l'équation (6.32) qui appartient à la classe des équations différentielles d'Euler et qui, par conséquent, est transformable en équation différentielle à coefficients constants dont la solution dépend du discriminant  $\Delta$ . Rappelons que la solution en  $r$  est de la forme générale, quel que soit  $n$  :

$$R(r) = A_1 \left( \frac{r}{a} \right)^n + A_2 \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \quad (6.33)$$

Donc, en associant cette solution à (6.24c) et (6.24d), on parvient à sélectionner les valeurs de  $n$  par la résolution du système formé en égalant à zéro les dérivées radiales en  $r = a$  et  $r = b$ . Ce système s'écrit de la manière suivante :

$$nA_1 - (n+1)A_2 = 0 \quad (6.34a)$$

$$nA_1 \frac{b^{n-1}}{a^n} - (n+1)A_2 \frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} = 0 \quad (6.34b)$$

Ce système possède une solution non triviale en  $A_1$  et  $A_2$  si son déterminant est nul. Cette condition est obtenue dans deux cas de figure.

**Pemier cas** Si  $n = 0$  ou  $n = -1$  alors on trouve que la valeur propre  $\lambda = 0$ .

Dans ce cas, on voit immédiatement, d'après (6.33), que  $R(r) = R_0$  est une fonction constante, la fonction constante vérifiant bien entendu les conditions aux limites sur la dérivée.

**Deuxième cas** Si  $a^{2n+1} = b^{2n+1}$ , comme  $a \neq b$  ceci entraîne que  $n$  est complexe, du type :

$$\boxed{n = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, \text{ où } p \in \mathbb{N}^*} \quad (6.35)$$

La valeur propre associée s'écrit :

$$\boxed{\lambda = -\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2\right)}$$

Puisque la valeur propre est telle que  $\lambda < -1/4$ , l'expression des fonctions radiales indicées par un entier  $p$  est :

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ A_1 \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + A_2 \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right], \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Il reste à s'assurer que  $R'_p(a) = R'_p(b) = 0$ . Cette dernière vérification nous donne une relation entre les coefficients réels  $A_1$  et  $A_2$  et on trouve :

$$A_1 = \frac{2\pi p}{S} A_2$$

On peut donc écrire finalement l'ensemble des solutions du problème de Sturm-Liouville pour la fonction radiale :

$$R_0(r) = R_0 \quad (6.36a)$$

$$R_p(r) = A_1 \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2\pi p}{S} \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (6.36b)$$

En pratique, ces fonctions ont été normalisées telles que  $\|R_0\|^2 = \|R_p(r)\|^2 = a$

Cette solution apparaît également lors de la résolution de *PIII* dont les conditions aux limites ont été définies identiquement à celle de *PI*.

Ainsi, les problèmes *PI* et *PIII* font apparaître deux ensembles de valeurs propres pour la résolution du potentiel  $V_1$ , l'une telle que  $\lambda < -1/4$ , l'autre telle que  $\lambda = 0$ .

### Solution des autres problèmes

Dans les problèmes *PII* et *PIV*, les conditions aux limites sont sur les potentiels sur les surfaces  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$ . Ceci revient finalement à imposer une condition homogène sur les fonctions radiales  $R_p(r)$ , soit  $R_p(a) = R_p(b) = 0$ . Le système qui régit l'ensemble des valeurs propres équivalent à (6.34) devient :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 \frac{b^n}{a^n} + A_2 \frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} &= 0 \end{aligned}$$

Et on trouve comme solution un seul ensemble de valeurs propres  $\lambda < 1/4$  conduisant à la définition des degrés  $n$  complexes :

$$n = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, \text{ où } p \in \mathbb{N}^*$$

La fonction radiale s'écrit par conséquent :

$$R_p(r) = A_1 \sqrt{\frac{a}{r}} \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (6.38)$$

On remarquera pour l'anecdote que les fonctions radiales (6.38) sont mentionnées par Smythe (1950) comme étant la solution d'un cône soumis à des conditions de surface de potentiel nul. On retrouve par conséquent un résultat annoncé ([103], section 5.25).

### Solutions de la fonction en $\theta$

Nous avons vu que l'équation différentielle en  $\theta$  prenait l'expression :

$$\sin\theta \frac{1}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + k \sin^2\theta = m^2$$

et avait pour solutions les fonctions de Legendre généralisées :

$$P_n^m = \frac{(-1)^m}{2^m m!} N_n^m \sin^m\theta F\left(m-n, n+m+1, 1+m; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.39)$$

Cette forme canonique est indépendante de la valeur des degrés  $n$  et des ordres  $m$ . Le coefficient  $N_n^m$  est lié à la normalisation choisie pour ces fonctions. Les valeurs de  $n$  ayant été fixées par la résolution du problème sur la variable  $r$ , deux cas méritent d'être analysés.

**Cas  $n_p = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}$ , où  $p \in \mathbb{N}^*$**  Dans ce cas, il est immédiat de constater que les fonctions  $P_n^m$  s'écrivent aussi, selon la définition standard des fonctions de Legendre généralisées ([96], [51]) :

$$K_{-1/2+i p\pi/S}^m = \frac{(-1)^m}{2^m m!} N_p^m \sin^m\theta F\left(m + \frac{1}{2} - i\frac{p\pi}{S}, m + \frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, m + 1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.40)$$

D'autre part, en ne considérant pour l'instant que la fonction non normée, on montre que le facteur  $N_p^m$  dans ce cas prend la forme ([113]) :

$$\begin{aligned} N_p^0 &= 1 \\ N_p^m &= \frac{\Gamma(1/2 + m + ip\pi/S)}{\Gamma(1/2 - m + ip\pi/S)} = (-1)^m \prod_{j=1}^m \left( \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 + \left(\frac{2j-1}{2}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

Ces fonctions sont d'arguments complexes mais à valeurs réelles et sont connues sous le terme général de fonctions coniques. Elles ont été introduites pour la première fois par Mehler pour le cas particulier où  $m = 0$ . Nous devons l'extension de ces fonctions à  $m$  quelconque à Heine, et à Carl Neumann la preuve qu'elles sont un cas particulier des fonctions sphériques de Legendre. Ces fonctions spéciales sont assez peu communes, notamment sous leur forme généralisée à  $m$



quelconque, car «elles ne se présentent que dans un problème de Dirichlet (ou de Neumann) relatif à l'équation de Laplace où les surfaces limites comportent deux sphères concentriques, et la fonction recherchée (ou sa dérivée) devant s'annuler sur celles-ci » ([96], Tome III, chapitre IX). Nous ne manquerons pas de remarquer que cette description géométrique correspond exactement à notre cas de figure.

Nous avons suivi la notation  $K_p^m$  proposée par Robin ([96]) et adoptée par Zhurina et al. ([113]) de manière à pouvoir nous référer sans ambiguïté à ces ouvrages.

**Définition :** Pour les fonctions coniques de Mehler, on posera par la suite par commodité,  $K_p^m \equiv K_{-1/2+i\pi/S}^m$ .

Par nature, elles obéissent aux mêmes relations de récurrence que les fonctions de Legendre à degrés  $n$  réels ou entiers. Nous verrons par la suite les spécificités mathématiques de ces fonctions, leur calcul numérique et leur comportement sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Ces conclusions nous amèneront à normaliser ces fonctions sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Nous proposons les expressions de cette normalisation dans le cas de fonctions de Mehler représentées en série hypergéométrique dans l'annexe B.

**Cas  $n = 0, n = -1$**

Ces fonctions sont un peu particulières et méritent d'être reconsidérées pour appartenir à la définition des fonctions de Legendre généralisées que nous avons adoptée initialement. On peut montrer à l'aide des relations de récurrence sur les fonctions hypergéométriques ([1]) que l'expression des fonctions de Legendre généralisées (6.39) s'écrit aussi :

$$P_n^m = \frac{(-1)^m}{m!} N_n^m \tan^m \frac{\theta}{2} F\left(-n, n+1, m; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (6.41)$$

Rappelons cependant l'expression du coefficient  $N_n^m$  pour  $m \neq 0$  :

$$N_n^m = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \quad (6.42)$$

Pour la valeur  $n = 0$ , ou de manière équivalente  $n = -1$ , la définition des fonctions de Legendre (6.41) n'est plus valable en raison de la singularité de la fonction  $\Gamma(n-m+1)$ . Or, au voisinage d'un pôle  $-n_0$  (avec  $n_0 \geq 0$ ), la fonction Gamma a le comportement asymptotique suivant ([73]) :

$$\Gamma(-n_0 + u) \sim \frac{(-1)^{n_0}}{u n_0!}$$

et la fonction de Legendre pour  $-m \leq n_0 \leq -m+1$  peut être définie par :

$$P_n^m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{n+\varepsilon}^m}{\varepsilon} \quad (6.43)$$

On peut montrer d'après (6.41) et (6.42) qu'en posant  $n = n_0 + \varepsilon$  on aboutit à la propriété  $P_n^m = -P_{-n-1}^m$  au lieu de  $P_n^m = P_{-n-1}^m$ . Ceci entraîne des relations de récurrence entre les fonctions coniques de définitions différentes de celles de Robin ([96]). Afin de rester conforme aux définitions que nous avons adoptées pour les différents types de fonctions de Legendre on montre que si l'on définit  $n = n_0 - (-1)^m \varepsilon$ , pour  $-m \leq n_0 \leq -m+1$ , alors la fonction de Legendre (6.43) en tenant compte du développement asymptotique autour de  $n_0$  (6.42), s'écrit :

$$P_n^m = \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m-n)}{\Gamma(m+1)} \tan^m \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \Gamma(m+1) \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^p \Gamma(N+p+1)}{\Gamma(N-p+1)\Gamma(m+p+1)\Gamma(p+1)} \sin^{2p} \frac{\theta}{2} \right]$$

avec  $N = n$  si  $n \geq 0$  et  $N = -n - 1$  si  $n \leq -1$ .

En particulier, pour  $n = 0$  ou  $n = -1$ , la somme entre crochets disparaît et on trouve :

$$\boxed{P_0^m = P_{-1}^m = \Gamma(m) \tan^m \frac{\theta}{2}} \quad (6.44)$$

Ces fonctions ne sont pas définies pour  $m = 0$  en vertu de la singularité de la fonction  $\Gamma(0)$ . Cette particularité est dictée par la volonté de définir ces fonctions comme ayant la même définition que celle des fonctions de Legendre généralisées. Nous verrons que cette définition n'a pas d'incidence sur la modélisation et nous pouvons poser simplement  $P_0^0 = 1$ . On conclura simplement que les fonctions de Legendre associées à la valeur propre  $k = 0$  sont en fait de simples fonctions trigonométriques. En pratique, il devient vite indispensable de normaliser correctement ces fonctions. De même que pour les fonctions de Mehler, la normalisation complète est proposée en annexe B.

### Solution des autres problèmes

Pour les problèmes *PII* et *PIV*, l'ensemble des degrés  $n_p$  appartient au même ensemble des valeurs propres avec  $\lambda < 1/4$ . Ceci exclut les degrés  $n = 0$  et  $n = -1$ . Les fonctions  $P_0^m(\theta)$  ne font donc pas partie de l'espace des solutions pour ces deux problèmes.

### 6.2.3 Expression finale du potentiel $V_1$

L'équation différentielle en  $\phi$  :

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0$$

admet deux ensembles de solutions, l'un pour la valeur propre  $\lambda < -1/4$  et l'autre pour  $\lambda = 0$ .

Pour  $n = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}$ , où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n = 0$ ,  $n = -1$ , on retrouve la même forme de la solution qui s'écrit :

$$\Phi_p^m = G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi) \quad (6.45a)$$

On pourra différencier les coefficients de Gauss  $\{G_p^m, H_p^m\}$  indexés par la valeur de  $p \neq 0$  et associés aux valeurs propre  $\lambda < -1/4$  et les coefficients de Gauss  $\{G_0^m, H_0^m\}$  associés à la valeur propre  $\lambda = 0$ .

On trouve ainsi l'expression du potentiel satisfaisant le problème de Sturm-Liouville. Puisque  $V_1 = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , alors d'après (6.36a), (6.36b), (6.40) et (6.45a) on obtient finalement les solutions des problèmes respectifs.

– Pour les problèmes *PI* et *PIII* :

$$\begin{aligned}
V_1(r, \theta, \varphi) = & a \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} R_p(r) (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) K_p^m(\theta) \\
& + a \sum_{m \geq 0} R_0 (G_0^m \cos(m\varphi) + H_0^m \sin(m\varphi)) P_0^m(\theta)
\end{aligned} \tag{6.46}$$

avec les fonctions  $R_p(r)$  et  $R_0$  données par les expressions (6.36).

– Pour les problèmes *PII* et *PIV* :

$$V_1(r, \theta, \varphi) = a \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} R_p(r) (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) K_p^m(\theta) \tag{6.47}$$

avec la fonction  $R_p(r)$  donnée par l'expression (6.38).

Quelles que soient les décompositions choisies et les problèmes *PI*, *PII*, *PIII* ou *PIV*, le potentiel total dans le cône est la superposition des deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , soit  $V = V_1 + V_2$ .

**Définition :** *Lorsque nous parlerons des fonctions de bases impliquées dans le développement du potentiel  $V_1$ , nous parlerons de base de Mehler, par opposition à la base de Legendre qui fait intervenir les fonctions de Legendre dans la représentation du potentiel  $V_2$ .*

### 6.3 Longueur d'onde radiale

Il peut être commode de définir une longueur d'onde radiale pour pouvoir estimer le développement maximum qui satisfait le théorème d'échantillonnage de Nyquist. Cette longueur d'onde ne peut se définir que par rapport aux fonctions radiales  $R_p(r)$ , qu'elles soient exprimées par (6.36b) ou par (6.38) selon le problème de conditions aux limites.

Les fonctions radiales  $R_p(r)$  sont pseudo-périodiques et le concept de la longueur d'onde ne peut s'appréhender que si l'on considère une approximation asymptotique.

Prenons, par exemple, le terme en sinus de la fonction radiale qui intervient dans les deux expressions (6.36b) et (6.38). Au voisinage d'un point  $r_0$ , le logarithme admet un développement de Taylor à l'ordre 1. La fonction sinus s'écrit donc :

$$\sin\left(\frac{p\pi}{S} \log \frac{r}{a}\right) \simeq \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log \frac{r_0}{a} + \frac{\pi p}{S} \frac{\delta r}{r_0}\right)$$

Ainsi, quand  $\delta r \rightarrow \delta r + \frac{2Sr_0}{p}$  le sinus reste inchangé et nous pouvons définir une longueur d'onde par :

$$l_r = \frac{2Sr_0}{p}$$

En prenant  $r_0 \sim \frac{a+b}{2}$  comme valeur moyenne, c'est-à-dire une altitude  $r_0$  située au centre de l'intervalle de définition des fonctions radiales, on trouve simplement :

$$l_r = aS \frac{(1 + e^S)}{p}$$

Inversement, en supposant que  $l_d$  est l'altitude moyenne entre deux données consécutives, pour satisfaire le théorème de Nyquist, nous devons poser :

$$P_{max} \sim aS \frac{(1 + e^S)}{2l_d}$$

ce qui s'écrit aussi explicitement en fonction de a et b :

$$\boxed{P_{max} \sim \frac{(a+b)}{2l_d} \log\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (6.48)$$

Si l'on prend  $l_d = 10km$  et  $b = a + 500km$  par exemple on trouve  $P_{max} \sim 50$ .

Remarquons que maintenant que nous avons une définition de la longueur d'onde radiale, à l'aide de la définition de la surface d'onde du paragraphe (3.2.1) de la partie 1, nous sommes en mesure de définir un volume d'onde pour le développement complet du potentiel total  $V$ . Rappelons tout de même que ces concepts sont plutôt une vue de l'esprit et sont une tentative pour relier les développements en séries à une dimension géométrique dans le cône.

## 6.4 Introduction aux effets de bords

Revenons une dernière fois sur la décomposition de Haines. Nous avons discuté le fait que le choix, inhabituel, des conditions aux limites a pour objectif de s'affranchir du problème de la discontinuité entre le champ magnétique construit à l'intérieur de la calotte et le champ magnétique à l'extérieur. Cette discontinuité, qui révèle les différences de conditions aux limites pour le champ global et le champ local, est à la base du phénomène de Gibbs.

La continuité entre le champ magnétique à l'intérieur du cône et à l'extérieur du cône n'est pas simple à mettre en évidence. Pour qu'il y ait continuité au sens stricte du terme, il faut que le champ local et le champ global convergent *simplement* ou *uniformément* l'un vers l'autre. A notre connaissance, la convergence uniforme des bases selon Haines n'a pas été démontrée, et les tests numériques de la première partie ont montré des effets de bords assimilables à ceux de Gibbs. Ce dont nous sommes sûrs, c'est que le choix des conditions aux limites de Haines a permis de réduire ce phénomène en évitant que le champ, construit sur la calotte, ne soit nul en certaines régions ; ce choix pour les conditions aux limites évite donc les sauts importants aux éventuelles discontinuités.

Nous n'avons probablement pas non plus les bonnes propriétés de convergence et le champ est vraisemblablement plus ou moins continu en tous points des surfaces, car seule la convergence en norme est assurée. Ceci est d'autant plus vrai que les séries seront en pratiques tronquées. Nous pouvons cependant distinguer certaines régions appartenant à la surface où le champ magnétique est nul, propriétés qui résultent du choix des conditions aux limites homogènes. Dans le cas des séries infinies, qui ne sera pas rencontré en pratique, la continuité ne pourra être étudiée que par une étude formelle sur la convergence des séries et les résultats suivants ne devront pas être extrapolés.

Ecrivons dans un premier temps les composantes du champ magnétique comme la superposition des composantes de la base de Mehler et de la base de Legendre :

$$\begin{aligned}
B_x &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R_p(r) (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) \frac{dK_p^m(\cos \theta)}{d\theta}}_{B_{x,1}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( R_{n_k}^c(r) \widehat{G}_{n_k}^m \cos(m\varphi) + R_{n_k}^s(r) \widehat{H}_{n_k}^m \sin(m\varphi) \right) \frac{dP_{n_k}^m(\cos \theta)}{d\theta}}_{B_{x,2}}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned}
B_y &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{\sin \theta} R_p(r) (G_p^m \sin(m\varphi) - H_p^m \cos(m\varphi)) K_p^m(\cos \theta)}_{B_{y,1}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{\sin \theta} \left( R_{n_k}^c(r) \widehat{G}_{n_k}^m \sin(m\varphi) - R_{n_k}^s(r) \widehat{H}_{n_k}^m \cos(m\varphi) \right) P_{n_k}^m(\cos \theta)}_{B_{y,2}}
\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
B_z &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dR_p(r)}{dr} (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) K_p^m(\cos \theta)}_{B_{z,1}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{dR_{n_k}^c(r)}{dr} \widehat{G}_{n_k}^m \cos(m\varphi) + \frac{dR_{n_k}^s(r)}{dr} \widehat{H}_{n_k}^m \sin(m\varphi) \right) P_{n_k}^m(\cos \theta)}_{B_{z,2}}
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Les composantes  $B_2$  provenant du potentiel  $V_2$  ont été écrites sous leur forme compacte qui comprend aussi bien les fonctions radiales internes  $(a/r)^{n_k+1}$  que les fonctions radiales externes  $(r/a)^{n_k}$  (voir la section Préliminaires du chapitre 1).

Nous pouvons poursuivre et chercher à voir, d'une manière très simple, si chacune de nos décompositions est susceptible d'entraîner ou non un fort saut de discontinuité entre le champ à l'intérieur du cône et le champ à l'extérieur. Ceci nous donnera une première appréciation des régions du cône où la modélisation d'un champ pourra se révéler difficile dans le cas des séries tronquées.

### 1. Décomposition $PI$

- Sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  en raison des conditions aux limites on trouve que le champ magnétique est la superposition de :

$$\begin{aligned}
B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\
B_y &= B_{1,y} + B_{2,y} \\
B_z &= B_{2,z}
\end{aligned}$$

- et sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  on trouve que le champ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} \\ B_y &= B_{1,y} + B_{2,y} \\ B_z &= B_{1,z} + B_{2,z} \end{aligned}$$

Pour la décomposition *PI* nous ne constatons pas de discontinuité flagrante avec le champ à l'extérieur car les composantes du champ de la décomposition locale sont non-nulles en tous points du domaine  $\Omega$ . Cette décomposition serait donc, à première vue, moins sensible au phénomène de Gibbs. On remarquera que sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$ , la composante la moins bien représentée est la composante  $B_x$  du champ car elle n'est portée que par une seule des deux bases de fonctions, celle de Mehler. Ainsi en est-il de  $B_z$  sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  qui n'est portée que par la base de Legendre.

### 2 Décomposition *PII*

- Sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  mais pour  $\theta \neq \theta_0$  on trouve que le champ magnétique est la superposition de :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{2,x} \\ B_y &= B_{2,x} \\ B_z &= B_{1,z} + B_{2,z} \end{aligned}$$

- Sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  mais avec  $r \neq a, b$  on trouve que le champ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\ B_y &= B_{1,y} \\ B_z &= B_{1,z} \end{aligned}$$

Nous constatons donc que si  $r = a$  ou  $r = b$  en  $\theta = \theta_0$  les composantes  $B_z$  et  $B_y$  sont nulles. Nous avons donc une discontinuité entre le champ à l'intérieur et le champ à l'extérieur dans le cas des séries tronquées et cette décomposition ne permet pas de représenter le champ magnétique sur les coins du domaine conique. Nous aurons donc probablement du phénomène de Gibbs prédominant dans cette région. Remarquons les difficultés de représentations sur ces différentes surfaces où la majorité des composantes ne sont portées que par une seule des contributions  $B_1$  ou  $B_2$ . De plus, cela conduit à la définition d'un potentiel nul sur toutes les surfaces (par construction) ce qui rend la décomposition fort peu adaptée au cas du champ terrestre.

### 3 Décomposition *PIII*

- Sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  mais  $\theta \neq \theta_0$  on trouve que le champ magnétique est la superposition de :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\ B_y &= B_{1,y} + B_{2,x} \\ B_z &= B_{2,z} \end{aligned}$$

- Sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  mais  $r \neq a, b$  on trouve que le champ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\ B_y &= B_{1,y} \\ B_z &= B_{1,z} \end{aligned}$$

Donc en  $r = a, b$  et  $\theta = \theta_0$  la composante  $B_z$  est nulle. Nous aurons donc probablement une discontinuité importante sur la composante  $Z$  du champ magnétique dans le cas de développements en séries tronquées.

#### 4 Décomposition *PIV*

A l'aide des conditions aux limites fixées pour la résolution du problème *IV* nous n'avons aucune difficulté à montrer qu'en en  $r = a$  ou  $b$  et  $\theta = \theta_0$  nous sommes confrontés à une discontinuité probablement importante sur les composantes  $B_z$  et  $B_y$ .

Nous pouvons faire deux constatations. D'une part malgré la non-orthogonalité des gradients des potentiels pour la décomposition du problème *PI*, cette représentation est la seule qui permette de représenter à peu près correctement le champ en tous points du domaine, y compris sur ses frontières. Les trois autres décompositions ne permettent pas d'obtenir ce résultat. D'autre part, quel que soit le problème initial, la résolution conduit à une représentation moins bonne de l'une ou l'autre composante sur les limites du domaine conique (voire plusieurs dans le cas de *PII* et *PIV*). Cette propriété aura des répercussions importantes sur la modélisation du champ et il conviendra de choisir celle qui offre le meilleur compromis, c'est-à-dire celle qui permette l'erreur la plus minime possible sur la reconstruction du champ complet.

## Chapitre 7

# Résolution des conditions aux limites

Jusqu'à présent, nous avons cherché la forme générale des quatre problèmes de conditions aux limites dont les coefficients de Gauss  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$  et  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$ , définis dans (6.31), et  $\{G_p^m, H_p^m\}$  et  $\{G_0^m, H_0^m\}$ , définis dans (6.46) restent les inconnues du problème géophysique. Une connaissance parfaite des fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sur les surfaces du domaine  $\Omega$  résoud le problème partout à l'intérieur du cône. Nous pouvons nous servir de cette propriété pour évaluer la capacité des différentes représentations à reconstruire un champ global à l'intérieur de  $\Omega$ . Ces reconstructions du champ pourront être comparées avec un modèle global calculé dans  $\Omega$  en harmoniques sphériques ordinaires. Si l'on choisit les fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  telles qu'elles soient les contributions d'un modèle global alors les relations (6.24b), (6.25c) et (6.25d) permettent d'obtenir ce que nous cherchions lors de l'étude de *SCHA* en utilisant les base de fonctions de Haines (chapitre 5.3 de la première partie) : une relation entre les coefficients de Gauss des harmoniques sphériques et les coefficients de Gauss des harmoniques coniques. Selon la décomposition considérée, les fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  pourront correspondre soit à un potentiel global, soit aux composantes d'un champ global.

### 7.1 Les conditions de flux

Intéressons-nous au problème initial *PI* et à sa décomposition en deux sous-problèmes. Prenons, en particulier, sa condition de flux associée (6.26). Les conditions aux limites portent sur la dérivée des potentiels et la condition de flux doit être respectée par  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  qui seront dans ce cas la composante  $X$  (pour la fonction  $F$ ) sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  et les composantes  $Z$  en  $r = a$  (pour la fonction  $G_1$ ) et en  $r = b$  (pour la fonction  $G_2$ ). En développant explicitement l'expression de  $F(r, \theta_0, \varphi)$ , on montre que :

$$\iint_{\Omega_\theta} F(r, \theta_0, \varphi) d\sigma_\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} dr \int_0^{2\pi} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \sin \theta_0 d\varphi$$

Ce qui se réduit à :

$$\iint_{\Omega_\theta} F(r, \theta_0, \varphi) d\sigma_\theta = 2\pi \sin \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^0 (a - b(a/b)^{n+2})}{1+n} \frac{dP_n^0(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}$$

En écrivant  $b = ae^S$ , on conclut que l'expression du flux  $\Phi$  est :



$$\Phi = 2\pi a \sin \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^0 (1 - e^{-S(n+1)})}{n+1} \frac{dP_n^0(\theta_0)}{d\theta}$$

Donc, un champ global exprimé en harmoniques sphériques ordinaires ne satisfait pas les conditions de flux sur les surfaces du cône  $\partial\Omega_{\theta_0}$  et  $\partial\Omega_a \cup \partial\Omega_b$  prises séparément si nous décomposons le problème initial sur  $V$  en deux sous-problèmes  $V_1$  et  $V_2$  tel que nous l'avons fait sans manipulations préalables. Cette propriété est bien entendue suffisante pour affirmer qu'un champ global ne peut pas être inversé correctement en utilisant ces bases de fonctions. Dans la théorie, on dispose de deux stratégies artificielles pour contourner le problème. La première stratégie est immédiate puisqu'elle consiste à retrancher du champ initial toutes les contributions  $m = 0$ , c'est-à-dire de poser  $\tilde{g}_n^0 = 0$ .

**Remarque** *L'égalité des composantes pour les deux représentations, locale ou globale, implique qu'elles sont exprimées dans le même système de référence. Ainsi, les contributions  $m = 0$  ne sont pas les contributions  $m = 0$  d'un champ global exprimées en harmoniques sphériques dans le repère géocentrique, à moins que l'axe de la calotte ne coïncide avec le Nord géographique. On pourra s'en convaincre en regardant l'allure des transformations des coefficients de Gauss (voir paragraphe 5.1).*

L'autre stratégie est moins pénalisante puisqu'elle consiste à modifier les conditions aux limites de telle manière que le problème résolve maintenant le potentiel  $\hat{V}$ , défini par :

$$\hat{V} = \tilde{V} - U_n$$

avec  $U_n$  le potentiel d'un multipôle de degré  $n$  exprimé dans le référentiel du cône. Son expression est :

$$U_n = aC \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^0(\theta)$$

et la constante  $C$  doit être ajustée de manière à ce que la nouvelle condition au limite  $\hat{F}$  qui s'écrit :

$$\hat{F} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial(\tilde{V} - U_n)}{\partial\theta} \right)_{\theta_0}$$

soit cohérente avec la condition de flux nul sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$ . On montre que la constante s'écrit alors :

$$C = \frac{n\Phi}{2\pi a^2 (1 - e^{-S_n}) \sin \theta_0 \frac{dP_n^0(\theta_0)}{d\theta}}$$

Si les fonctions  $G_1$  et  $G_2$  dérivent du même potentiel modifié  $\tilde{V} - U_n$ , la condition (6.27) sera automatiquement remplie et donc (6.26). Cette manipulation ne s'applique pas au problème inverse car, dans ce cas, nous ne sommes pas capables d'ajuster la constante  $C$ .

Par la suite nous adoptons la méthode la plus grossière pour résoudre le problème, à savoir de ne considérer que du champ dont les contributions  $m = 0$  ont été retranchées. Ce cas de figure est bien entendu peu réaliste dans le cas d'un problème inverse sur des mesures réelles du champ magnétique où l'on ne peut ni s'affranchir de ces contributions, ni même les estimer. Nous nous servons cependant de cet exemple pour illustrer la diversité des discussions qu'il suscite et pour pouvoir mettre en parallèle la pertinence des différentes solutions obtenues jusqu'à présent pour des applications géomphysiques. Les solutions évoquées précédemment restent valables ainsi que

la procédure que nous entamons dans la section suivante, à ceci près que nous ne considérons que les ordres  $m$  supérieurs ou égaux à 1 pour la résolution de  $PI$ .

### Conditions de flux des autres problèmes

– Problème  $PII$

Les conditions aux limites du problème  $PII$  portent sur le potentiel plutôt que sur ses dérivées. Aucune contrainte n'est imposée sur le gradient des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Pour cette raison, la condition de flux est automatiquement satisfaite.

– Problèmes  $PIII$  et  $PIV$

Prenons la décomposition du problème  $PIII$  donnée par l'expression (6.29). Alors, la condition de flux devient respectivement, pour chacun des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$\iint_{\partial\Omega_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} ds = 0; \quad - \iint_{\partial\Omega_a} \frac{\partial V_2}{\partial r} ds + \iint_{\partial\Omega_b} \frac{\partial V_2}{\partial r} ds + \iint_{\partial\Omega_{\theta_0}} \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} ds = 0$$

Puisqu'aucune restriction n'est posée ni sur  $\frac{\partial V_1}{\partial \theta}$ , ni sur  $\frac{\partial V_2}{\partial r}$ , il n'y a pas de condition de flux particulière. Un raisonnement similaire s'applique pour le problème  $PIV$  et on aboutit à la même conclusion.

## 7.2 Relations entre le potentiel $V_1$ et un potentiel global

Supposons maintenant que les valeurs aux limites  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  peuvent s'exprimer en terme de composantes d'un champ global  $\tilde{B}_g$  dérivant d'un potentiel  $\tilde{V}_g$  et représenté dans le même système de référence que le champ local  $B_l$  dérivant du potentiel  $V = V_1 + V_2$ . Nous ne reviendrons pas sur les transformations nécessaires qui permettent de passer du repère géocentrique au repère calotte (voir la section 5.1 de la première partie). Nous écrirons directement :

$$\tilde{V}_g = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m(\theta) \quad (7.1)$$

où  $n$  et  $m$  sont des entiers et  $\left\{ \tilde{g}_n^m, \tilde{h}_n^m \right\}$  des coefficients de Gauss d'un modèle global exprimé dans le référentiel centré sur l'axe de la calotte (axe  $Z'$  sur la figure (6.1)).

Alors d'après (6.24b), on peut écrire :

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{V}_g}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = F(r, \theta_0, \varphi)$$

avec :

$$F(r, \theta_0, \varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) \frac{dP_n^m(\theta_0)}{d\theta} \quad (7.2)$$

Or, en vertu de l'orthogonalité des fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$ , la condition (6.24b) s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{\infty} R_p(r) \frac{dK_p^m(\theta_0)}{d\theta} \left\{ \begin{matrix} G_p^m \\ H_p^m \end{matrix} \right\} + R_0 \frac{dP_0^m(\theta_0)}{d\theta} \left\{ \begin{matrix} G_0^m \\ H_0^m \end{matrix} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \frac{dP_n^m(\theta_0)}{d\theta} \left\{ \begin{matrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{matrix} \right\} \quad (7.3)$$

Mais d'après le paragraphe 6.2.2, les fonctions  $R_0$  et  $R_p(r)$  forment une base orthogonale dans l'intervalle  $[a, b]$ . En multipliant (7.3) par  $R_p(r)$  et en intégrant sur  $[a, b]$  il vient, pour un couple  $(m, p)$ , les coefficients de Gauss locaux :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle_{[a,b]} \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 \frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.4)$$

et de la même manière, en multipliant (7.3) par  $R_0$ , on trouve que pour chaque ordre  $m$  :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} G_0^m \\ H_0^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_0\|^2 \frac{dP_0^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.5)$$

Ces relations ne sont valables que dans le cas où les conditions aux limites sont posées sur le gradient du potentiel. Soit pour les problèmes *PI* et *PIV*. Elles supposent également que  $\frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}$  soit non nulle, ce qui est vrai, et que  $\frac{dP_0^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}$  soit non nulle, ce qui est vrai sauf en  $m = 0$  car  $P_0^0 = 1$ . Par conséquent, le coefficient  $G_0^0$  est indéterminé et ceci reflète le fait que le potentiel ne peut être connu qu'à une constante près.

#### Autres solutions selon les conditions aux limites

Les problèmes *PII* et *PIII* donnent le même type de relations à ceci près que, puisque les conditions sont sur les potentiels, on pose maintenant :

$$F(r, \theta_0, \varphi) = V_1|_{\theta_0} = \tilde{V}_g \Big|_{\theta_0}$$

On trouve par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle_{[a,b]} P_n^m(\theta) \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 K_p^m(\theta) \Big|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

Ces relations valables sont communes aux deux problèmes. En revanche, on devra inclure en plus, pour le problème *PIII* :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_0^m \\ H_0^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle P_n^m(\theta) \Big|_{\theta_0}}{\|R_0\|^2 P_0^m(\theta) \Big|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

car il met en jeu, contrairement à *PII*, l'ensemble des valeurs propres  $k = 0$  puisque ses conditions sur les surfaces  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  portent sur les dérivées de la fonctions radiale. Ici, nous n'avons aucune indétermination mathématique pour ces coefficients.

$P_0^0(\theta)$  est constant et sa dérivée est nulle ; par conséquent, la composante  $X$  du champ est également nulle. De même, pour  $m = 0$ , la composante  $Y$  est nulle et enfin, puisque  $R_0$  est une constante, la composante  $Z$  est également nulle. En conclusion, même si  $G_0^0$  est mathématiquement déterminé par (7.7) il n'apporte aucune contribution à la valeur du champ.

Nous garderons d'autre part en mémoire que pour le problème *PII*, la forme de la fonction radiale est donnée par (6.38) et que les produits scalaires  $\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle$  dépendent des fonctions de bases  $R_p$  qui découlent du choix du problème initial.

### 7.3 Relations entre le potentiel $V_2$ et un potentiel global

De même pour le potentiel  $V_2$ , si  $G_1$  et  $G_2$  sont les dérivées radiales de (7.1) respectivement en  $r = a$  et  $r = b$ , c'est-à-dire :

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n+1) \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m \quad (7.8)$$

$$G_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n+1) \left( \frac{a}{b} \right)^{n+2} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m \quad (7.9)$$

alors, les conditions aux limites (6.25c) et (6.25d) donnent le système suivant :

$$- \sum_{n=m}^{\infty} (n+1) P_n^m \tilde{g}_n^m = - \sum_{k=0}^{\infty} P_{n_k}^m \left[ (n_k+1) G_{n_k}^{i,m} - n_k G_{n_k}^{e,m} \right] \quad (7.10a)$$

$$- \sum_{n=m}^{\infty} (n+1) P_n^m e^{-S(n+2)} \tilde{g}_n^m = - \sum_{k=0}^{\infty} P_{n_k}^m \left[ (n_k+1) e^{-S(n_k+1)} G_{n_k}^{i,m} - n_k e^{S(n_k-1)} G_{n_k}^{e,m} \right] \quad (7.10b)$$

Ce système est équivalent pour les coefficients  $H_{\alpha}^m$ .

Les fonctions  $\{P_{n_k}^m\}$  forment une base orthogonale sur  $[0, \theta_0]$  donc, en multipliant (7.10) par  $P_{n_k}^m$  et en intégrant sur  $[0, \theta_0]$ , il vient pour la résolution du système en  $r = a$  et  $r = b$  les solutions pour un couple  $(m, n_k)$  :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1-e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (n_k+1)(1-e^{-S(2n_k+1)})} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.11)$$

et

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1-e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 n_k (e^{S(2n_k+1)}-1)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.12)$$

Si le problème homogène a été posé tel que les racines  $n_k$  sont solutions de  $dP_{n_k}^m/d\theta|_{\theta_0} = 0$ , alors la première racine  $n_{k=0}$  est nulle pour  $m = 0$ . On a donc une indétermination sur le coefficient externe  $G_0^{e,0}$  qui illustre le fait que le potentiel ne peut être connu qu'à une constante près. Cette solution est également valable pour la résolution du problème *PIII*. Dans ce cas cependant, nous n'avons pas d'indétermination car  $n_k \neq 0$  pour  $m = 0$  puisque les conditions aux limites sur la fonction de Legendre différent, entraînant des valeurs de  $n_k$  différentes.

#### Autres solutions selon les conditions aux limites

Considérons maintenant que sur  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  les conditions  $G_1$  et  $G_2$  sont les expressions du potentiel global respectivement en  $r = a$  et  $r = b$ , c'est-à-dire :

$$G_1 = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m$$

$$G_2 = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a}{b} \right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m$$

Alors les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  dans (6.28) ou dans (6.30) entraînent que les coefficients *internes* et *externes* s'écrivent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.13)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.14)$$

Ces solutions apparaissent notamment dans les problèmes *PII* et *PIV*. Il n'y a pas d'indétermination pour ces expressions, ceci reflète bien l'unicité de la solution d'un problème de Dirichlet.

## 7.4 L'ambiguïté du concept d'interne et d'externe

On considère habituellement les coefficients  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$  comme étant des coefficients décrivant le champ d'origine interne et les coefficients  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$  comme étant des coefficients décrivant le champ externe. Puisque le potentiel global (7.1) n'a que des contributions internes, on tente souvent de le modéliser sur la décomposition locale uniquement par des coefficients de Gauss *internes*  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$ . Nous avons vu au chapitre 5.4 de la première partie qu'une telle écriture conduisait à la résolution d'un système qui n'a que deux solutions. L'une pour  $S = 0$ , solution qui nous est maintenant interdite car la résolution interdit que  $a = b$  (cf paragraphe 6.2.2) et l'autre en  $S = \infty$ , solution pour laquelle on perd le caractère discret des valeurs propres  $\lambda_p$  (voir annexe C). À l'évidence, les coefficients de Gauss *externes* doivent être inclus lorsque le domaine conique est limité vers le haut. Ce problème est d'une grande portée géophysique car il nous permet de bien distinguer les différentes structures du champ magnétique. D'autre part, en pratique nous tentons de retrancher le champ externe par un filtrage approprié sur les données, mais nous n'avons pas d'outil mathématique fiable nous permettant de nous assurer que ce procédé est suffisamment précis. Il reste donc une zone d'ombre sur le modèle obtenu car nous pouvons difficilement quantifier les différentes contributions du champ magnétique. Nous cherchons donc, dans cette section, à énoncer le problème liés au concept d'interne et d'externe en modélisation régionale. Ceci nous permet de trouver une piste pour initier une stratégie qui nous permettra, dans le future, de résoudre ce délicat problème.

### 7.4.1 Une tentative pour apporter des éléments de réponse

Le principe même du concept d'interne ou d'externe est à revoir en modélisation régionale dans un cône. En effet, on attribut traditionnellement ces qualificatifs à des sources localisées par rapport à la surface terrestre prise comme référence. En harmoniques sphériques, la surface terrestre englobe les sources internes et le concept d'interne et d'externe se réduit donc plus simplement à en-dessous et au-dessus de la surface de référence. En présence de plusieurs surfaces, même en harmoniques globales, le concept d'interne/externe devient lui-même équivoque. Par exemple, les couches atmosphériques, où circulent des courants ionosphériques, sont internes par rapport à la surface du satellite mais externes vues de la surface terrestre. Cette simple analogie nous pousse à conclure que le concept d'interne ou d'externe dans un contexte de modélisation régionale dans un volume limité latéralement n'a pas de sens s'il n'est pas redéfini. En effet,

la résolution du problème régional initial exclu la présence de source à l'intérieur du domaine de validité de la solution. Du point de vue du cône tout se trouve donc à l'extérieur, que ce soit au-dessus, en-dessous ou même sur les côtés ; nous ne pouvons en recueillir que la somme des contributions. Les fonctions de bases locales qui décrivent le champ magnétique ne sont pas valides à l'extérieur du domaine de définition  $\Omega$  et ne peuvent pas nous donner d'information directe sur la localisation des sources. Nous sommes cantonnés dans un volume dont le monde extérieur nous est inconnu.

Puisque les bases de fonctions ne peuvent pas remplir cette tâche, une possibilité pourrait être d'avoir recours au traitement du signal. En effet, le champ magnétique modélisé par les harmoniques sphériques ou coniques est unique. Cependant, étant modélisé dans un volume, il est moins sensible, lorsqu'il est calculé à la surface terrestre, aux sources externes (d'un point de vue géocentrique) que s'il était calculé à une surface d'altitude supérieure. Il doit donc être possible, par l'analyse des fréquences contenues dans le champ magnétiques à diverses altitudes, de dire si le champ dans le cône modélise certaines contributions provenant du dessus et peut être le cas échéant de les isoler. Ces considérations, dont l'importance ne doit pas être négligée, n'ont à ce jour pas trouvé d'éléments de réponse satisfaisants.

L'autre solution est d'essayer de revenir à des bases de fonctions plus compatibles avec les concepts d'interne et d'externe en modélisation globale c'est-à-dire d'essayer de retourner aux fonctions de base  $(a/r)^{l+1}$  et  $(r/a)^l$  des harmoniques sphériques ordinaires. Dans un premier temps, il convient de voir si nous sommes en droit théoriquement de le faire.

### Un théorème troublant...

Reprenons le théorème de Stockes ou théorème de la divergence que nous avons vu en (6.10) sous la forme de la première identité de Green. Considérons ensuite deux potentiels notés  $V$  et  $\tilde{V}$ . L'un est développé dans la base locale, l'autre dans la base globale. La construction d'un modèle régional, quelles que soient les conditions aux limites, a comme ambition de pouvoir finalement écrire que dans le volume conique  $\Omega$ , les deux représentations sont égales :

$$\boxed{V(\Omega) = \tilde{V}(\Omega)} \quad (7.15)$$

Nous avons vu que les décompositions précédentes, grâce aux conditions aux limites sur les frontières du domaine  $\Omega$ , permettaient d'aboutir à ce résultat ; du moins dans l'acceptation d'une égalité en norme quadratique.

Nous définirons l'espace complet par la lettre grecque  $\Xi$ . Alors on peut écrire :

$$\Xi = \Omega \cup \Psi$$

où  $\Psi$  l'espace complémentaire de  $\Omega$  (figure 7.1). Un théorème bien connu, à la base de la théorie du potentiel, nous enseigne qu'il n'existe qu'un seul potentiel global  $\tilde{V}$  dans  $\Omega$  qui vérifie l'expression (7.15). La question est de savoir si cette unicité est également valable en dehors du domaine  $\Omega$ . Pouvons-nous définir un unique potentiel  $\tilde{V}$  dans le domaine  $\Psi$  et donc dans  $\Xi$  à partir de (7.15) ? Nous trouvons la réponse par le théorème suivant ([61], Chap X, section 5) :

**Théorème** *Si  $G$  est harmonique sur un domaine  $\Xi$  et si  $G$  s'annule en tout point d'un domaine  $\Omega$  contenu dans  $\Xi$  alors  $G$  s'annule en tout point de  $\Xi$ .*

La démonstration de ce théorème est relativement simple et nous l'illustrons sur la figure 7.1. Prenons un point  $P$  dans le domaine  $\Omega$ , à l'intérieur de la boule  $B$  de rayon  $r = \alpha$  et d'origine

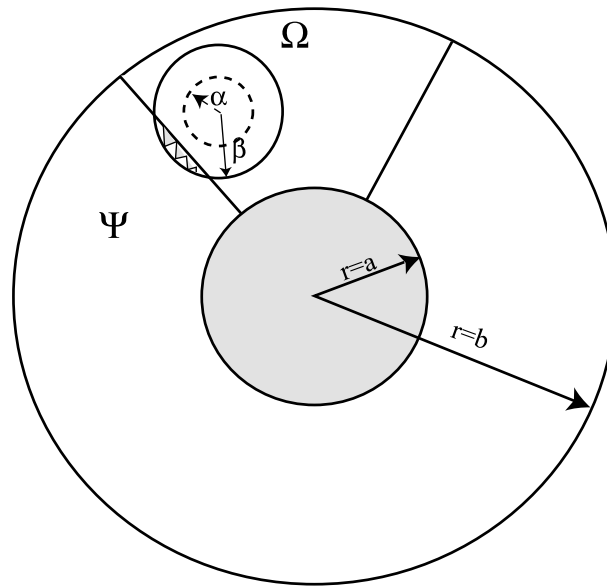


FIG. 7.1 – Le potentiel local dans le domaine  $\Omega$  est égal à un unique potentiel global. Le théorème de continuité montre que le potentiel global est alors unique (et harmonique) dans le domaine  $\Psi$ , et par conséquent également dans le domaine  $\Xi = \Psi \cup \Omega$ .

$P$ ; le potentiel  $G$  tel que  $G = V(B) - \tilde{V}(B)$  est harmonique et nul en tous points de  $B$ . Puisque c'est vrai en  $r = \alpha$ , cela est vrai pour une boule de rayon  $r = \beta$  telle que le rayon  $\beta$  coupe la surface  $\partial\Omega_\theta$  du cône. Par conséquent,  $G = 0$  également dans la zone hachurée qui appartient au domaine  $\Psi$ . En renouvelant l'opération autant de fois que nécessaire, on finit par montrer que  $G(\Psi) = 0$  donc que  $G(\Xi) = 0$ .

Nous sommes donc en présence d'un théorème de continuité qui démontre l'unicité d'un potentiel global trouvé à partir d'un potentiel local. Ceci signifie que si l'on peut mettre en oeuvre le moyen de déterminer du potentiel écrit en harmoniques sphériques à partir du potentiel local trouvé sur une région, celui-ci sera unique. Ce théorème est à première vue assez déroutant et nous ne le considérerons qu'avec circonspection car il est couramment admis qu'un champ déterminé sur une région à partir d'une modélisation régionale est propre à la région et ne donne pas lieu à un champ global unique. D'un point de vue conceptuel, on pourrait penser que le théorème précédent s'oppose à cette allégation.

### ... mais peu exploitable.

En pratique, cette affirmation accepte peu de contradiction et nous pouvons détecter au moins deux restrictions évidentes.

D'une part, les expressions des potentiels s'expriment sous forme de séries infinies et l'application du théorème, qui stipule avant tout que (7.15) soit vérifiée, ne souffre sans doute pas d'approximation, c'est une égalité au sens mathématique. Or, nous avons justement fait deux approximations; la première en tronquant les séries, la seconde, moins immédiate, en obtenant les expressions des coefficients de Gauss locaux. Ce dernier point révèle toute l'ambiguïté de ce que nous appelons égalité entre le potentiel global et le potentiel local dans le cône. Nous n'avons en effet pas égalé les potentiels en tout point, contrairement à ce qui est requis par l'expression (7.15), mais nous avons pris leurs intégrales de surface et recherché une égalité de

leurs normes. Rechercher les coefficients de Gauss par moindres carrés revient à minimiser la norme et l'approximation est similaire. L'égalité (7.15) ne peut donc être strictement vérifiée par ce moyen.

D'autre part, si le théorème est valable dans notre exemple, il devrait être possible de déterminer les coefficients de Gauss globaux à partir des coefficients de Gauss locaux numériquement, et les expressions du type (7.11) et (7.4) doivent être bijectives. L'expérience a montré que l'inversion de ces expressions permettait de retrouver dans certains cas les coefficients de Gauss globaux initiaux. En ce sens, le théorème s'est vérifié. Mais des différences minimales, simulées par un très faible bruit dans la valeur des coefficients de Gauss locaux, ont également montré que le problème est parfaitement instable.

Cette dernière manipulation vient corroborer l'idée que (7.15) n'admet pas d'approximation et n'est valable que dans le cas des convergences simples. Nous sommes donc en pratique incapables de restituer un champ global à partir d'une décomposition locale.

Nous aurions pu nous y attendre d'après la philosophie même de la modélisation régionale qui cherche à exprimer un champ de potentiel autrement que par les harmoniques sphériques qui y échouent. Si nous pouvions représenter des données régionales par les harmoniques sphériques globales, nous en déduirions l'expression d'un modèle de champ pour la sphère entière, et la modélisation régionale par d'autres techniques n'aurait pas lieu d'être entreprise.

Ce théorème mérite cependant d'être gardé en mémoire car il n'est pas insensé d'espérer obtenir une bonne approximation de l'égalité des potentiels. Si ce résultat doit être obtenu, il se fera par une exploitation des relations linéaires entre les coefficients de Gauss dans le cadre d'un problème inverse contraint par l'adjonction d'une information a priori sur le champ obtenue par des hypothèses physiques sur le champ magnétique.





## Chapitre 8

# Considérations numériques

### 8.1 Les fonctions coniques de Mehler et leur évaluation

Dans les solutions que nous venons de présenter, et maintenant que nous disposons d'un algorithme fiable pour estimer les fonctions de Legendre (paragraphe 3.1, partie 1), seules les fonctions de Mehler présentent la particularité de devoir être estimées, car les nouvelles fonctions radiales qui ne mettent en jeu que des fonctions transcendentales élémentaires, ne posent pas de problèmes numériques particuliers. En revanche, les fonctions de Mehler sont des fonctions dites *spéciales* ou *hautement transcendentales* ([35]) au même titre que les fonctions de Legendre associées et requièrent de nouvelles stratégies d'évaluation. Nous ne reviendrons pas sur les difficultés que soulève l'estimation directe des fonctions coniques par le calcul direct des séries des fonctions hypergéométrique dans (6.40) puisque ce problème a déjà été soulevé à la section 3.1.1 de la première partie.

Les fonctions de Mehler, définies pour  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $[0, \pi[$  sont des fonctions monotones strictement croissantes et positives (en réalité, le signe des fonctions de Mehler peut varier en fonction de  $m$  selon la définition adoptée). D'un point de vue numérique, il n'y a donc pas de problème particulier dû à des termes de signes opposés dans la série hypergéométrique. Nous préférons cependant utiliser la récurrence de Clenshaw qui reste un procédé robuste dans ce cas car il permet de s'affranchir du calcul des sommes même si elle ne s'avère pas absolument nécessaire. Habituellement, lorsque l'on rencontre des fonctions spéciales, on peut se référer à de nombreuses analyses concernant leur évaluation et se reposer sur le travail pré-établi d'un spécialiste de l'évaluation numérique des fonctions spéciales. En ce sens, les fonctions de Mehler ou coniques sont un cas particulier (J. Segura, communication personnelle) puisqu'il semble qu'elles ne soient rencontrées que dans de très rares cas. Il serait injuste cependant de ne pas mentionner le programme informatique du CERN ([62]) permettant d'évaluer ces fonctions uniquement pour  $m = 0$  et  $m = 1$ ; dans le cas présent il n'est donc que de peu d'utilité. C'est pourquoi nous abordons le vaste problème de l'évaluation numérique avec précaution et nous avons conscience que les solutions proposées ne paraîtront peut-être pas optimisées; elles seront considérées comme une première ébauche. Quoiqu'il en soit, la validité du calcul des fonctions de Mehler dans notre domaine d'étude a été vérifiée pour le mieux par diverses représentations, par l'utilisation intensive des tables disponibles ([113]), et par des relations de récurrence quand cela fut possible.

### 8.1.1 Calcul par la récurrence de Clenshaw

On cherche dans un premier temps à évaluer les fonctions coniques de Mehler par la récurrence de Clenshaw. La fonction hypergéométrique s'écrit sous forme d'une série infinie :

$$F\left(m + \frac{1}{2} - i\frac{p\pi}{S}, m + \frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, m + 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \sin^{2j} \frac{\theta}{2} \quad (8.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0 \\ \delta_{j+1} &= \frac{(m + 1/2 + j)^2 + (p\pi/S)^2}{(j + 1)(j + m + 1)} \delta_j \end{aligned}$$

L'expression des termes  $\delta_j$  montre que la série hypergéométrique est strictement positive et croissante sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Le rayon de convergence de la série étant  $|R| < 1$ , le domaine de définition des fonctions de Mehler est  $]0, \pi[$ . Le facteur  $\delta_j$  montre d'autre part que les fonctions de Mehler sont croissantes en  $m$  et  $p$  également. Ceci laisse deviner la difficulté de convergence de la série d'une part, mais également les problèmes numériques liés à la valeur même de la fonction hypergéométrique (8.1), génératrice des fonctions de Mehler d'autre part. A titre d'exemple, on a tracé les fonctions de Mehler pour différentes valeurs de colatitude  $\theta$ , d'argument  $\tau = p\pi/S$  et des ordres  $m = 0$  et  $m = 5$  (figure (8.1)). Nous avons dû limiter la représentation sur l'axe des ordonnées en raison des valeurs qu'atteignent les fonctions de Mehler. Les tracés ne montrent les surfaces paramétrique  $P(\theta, \tau)$  (respectivement  $dP(\theta, \tau)/d\theta$ ) que pour des valeurs inférieures ou égales à un seuil arbitraire de 6000 qui permet cependant d'esquisser les tendances générales des fonctions.

Les fonctions de Mehler peuvent atteindre des valeurs démesurées sur les bords du cône, même pour une petite ouverture d'angle de  $\theta = 5^\circ$ . Cette caractéristique est par conséquent accentuée pour la dérivée des fonctions et il devient rapidement indispensable de les normaliser correctement dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  (cf annexe B).

Dans les arguments de la fonction hypergéométrique (8.1), l'évaluation de la fonction peut être altérée par la multiplication de  $\delta_j$  qui, pour de petites valeurs de  $S$  (i.e pour un cône borné supérieurement à une basse altitude), atteint rapidement de très grandes valeurs, par  $\sin^{2j} \frac{\theta}{2}$  qui au contraire atteint de très petites valeurs. C'est notamment le cas pour l'estimation de ces fonctions pour des colatitudes proches de 0. On se trouve confronté au problème numérique classique de multiplication d'un très grand nombre par un très petit nombre. Pour un couple  $(p, m)$  donné, l'augmentation de la valeur  $\theta$  entraîne une convergence de  $\sin^{2j} \frac{\theta}{2}$  beaucoup plus lente, et nécessite un plus grand nombre de récurrences. Les termes étant tous positifs ou nuls, nous avons pu recourir au procédé classique de transformation du produit  $\delta_j \sin^{2j} \frac{\theta}{2}$  en sommes de logarithmes  $\log(\delta_j) + 2j \log(\sin \frac{\theta}{2})$  dans l'algorithme. Ceci nous a permis de retarder les effets de ces fâcheuses caractéristiques numériques.

L'estimation de la fonction hypergéométrique, malgré ces inconvénients, offre la possibilité relativement intéressante de pouvoir calculer les dérivées des fonctions indépendamment des fonctions elles-mêmes. On peut ainsi vérifier les résultats en utilisant les relations de récurrence entre les fonctions de Legendre.

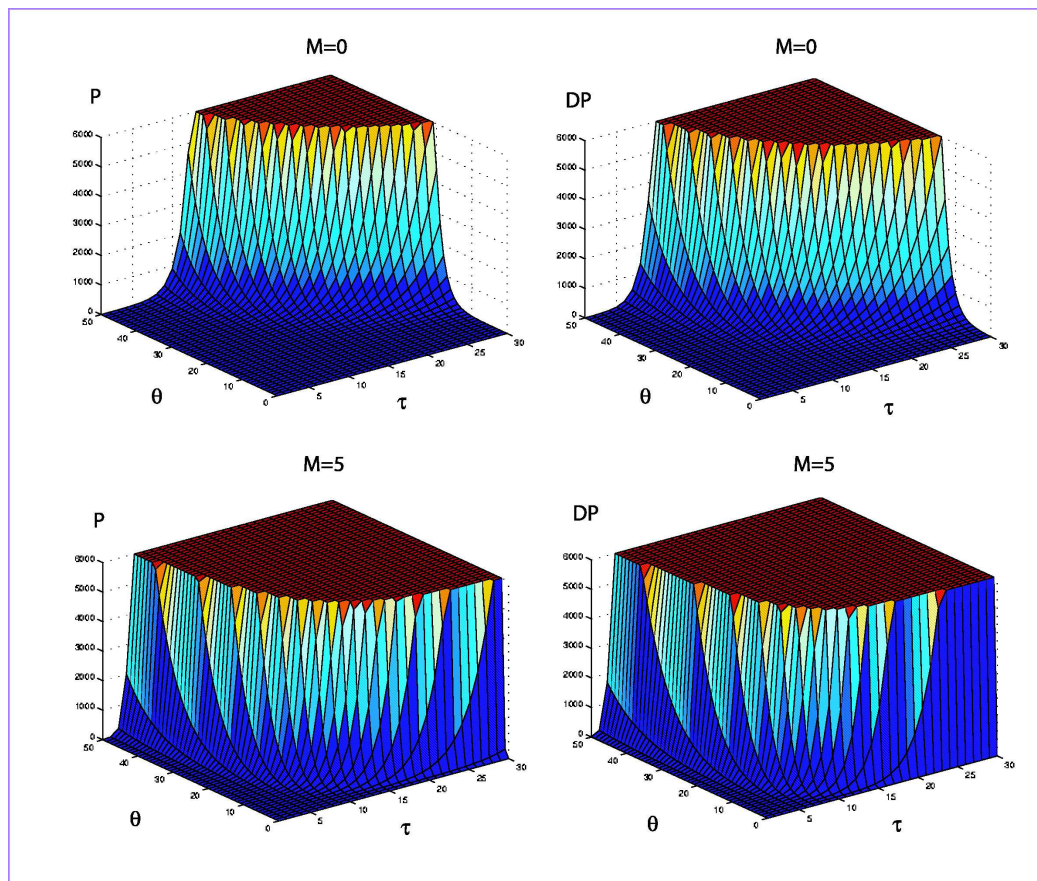


FIG. 8.1 – Les fonctions de Mehler, comme les fonctions de Legendre généralisées sont des fonctions de  $\theta$  paramétrées par les ordres  $m$  et les degrés  $n$ . On a tracé les fonctions de Mehler et leur dérivées pour  $m = 0$  et  $m = 5$  pour différents couples  $(\theta, \tau)$  où  $\tau = p\pi/S$  et tel que  $n = -1/2 + i\tau$ . On observe clairement que la fonction est croissante pour tous les paramètres et on constate en particulier que les valeurs de la fonction et de sa dérivée s'emballent pour des valeurs faibles des paramètres. Ceci illustre les caractéristiques mathématiques des fonctions de Mehler mais démontre également que normaliser ces fonctions autrement que par la normalisation de Schmidt est une impérieuse nécessité.

## 8.1.2 La représentation sous forme d'intégrale de Mehler-Fock

### Caclul intégrale

Lors des discussions sur l'évaluation des fonctions de Legendre généralisées pour  $n$  réel, nous avons mentionné l'existence d'autres représentations des fonctions, le plus souvent par intégrales. Ceci est naturellement vrai aussi pour les fonctions coniques de Mehler qui sont représentables par des intégrales de *Mehler-Fock*. Cette représentation intégrale représente un outil alternatif d'évaluation et de comparaison de nos algorithmes.

Ecrivons l'expression intégrale des fonctions coniques ([113]) :

$$K_p^m = \frac{2^{-m+1}(-1)^m}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+1/2)} \frac{N_p^m}{\sin^m \theta} \underbrace{\int_0^{\theta_0} \frac{\cosh\left(t\frac{p\pi}{S}\right)}{(2\cos t - 2\cos \theta_0)^{1/2-m}} dt}_{(8.2)}$$

On constate que le calcul numérique de l'intégrale est problématique car elle est impropre en  $t = \theta_0$ . Faisons donc le changement de variable suivant ([113]) :

$$t = 2 \sin^{-1} \left( \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi \right)$$

alors :

$$dt = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \varphi}}$$

L'intégrale  $I_{p,m}$  devient :

$$I_{p,m} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cosh\left(2p\pi/S \sin^{-1}\left(\sin \theta/2 \sin \varphi\right)\right) \sin \theta/2 \sin \varphi}{2^{1/2-m} \underbrace{\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\sin \theta/2 \sin \varphi\right)\right) - \cos \theta\right)}_R^{1/2-m} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

De plus, on montre à l'aide d'identités trigonométriques simples que :

$$R = 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta/2$$

et donc que :

$$I_{p,m} = 2^{2m} \int_0^{\pi/2} \frac{\cosh\left(2p\pi/S \sin^{-1}\left(\sin \theta/2 \sin \varphi\right)\right)}{(1 - \sin^2 \theta/2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \sin^{2m} \theta/2 \cos^{2m} \varphi d\varphi \quad (8.3)$$

En remplaçant dans (8.2) et en posant que  $\sin^m \theta = 2^m \sin^m \theta/2 \cos^m \theta/2$  on trouve que :

$$\boxed{K_p^m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\tan^m(\theta/2)}{\Gamma(m+1/2)} N_p^m \int_0^{\pi/2} \frac{\cosh(2p\pi/S(\sin(\theta/2)\sin(\beta))\cos^{2m}(\beta))}{(1-\sin^2(\theta/2)\sin^2(\beta))^{1/2}} d\beta} \quad (8.4)$$

**Remarque** Cette formulation est plus générale que celle généralement trouvée dans les travaux de Zhurina et al. ([113]) ou de Köblig ([62]), puisqu'elle est valable pour tout  $m$ . On

pourra cependant vérifier que pour  $m = 0$  et  $m = 1$  on retrouve bien les définitions de ces auteurs .

Pour  $m = 0$  et  $m = 1$  le calcul des fonctions de Mehler par la représentation intégrale ne présente pas de difficulté pour de petites valeurs de  $\pi p/S$  et de  $\theta$ . Rappelons que le facteur  $S$  a été défini comme  $S = \log(b/a)$ , avec  $a$  et  $b$  les altitudes supérieures et inférieures du cône. Pour une altitude supérieure  $b$  de l'ordre de quelques milliers de  $km$ ,  $S < 1$ . Si l'on considère par exemple l'orbite maximum du satellite ØRSTED, on peut légitimement prendre la valeur  $b = 7371$  km, ce qui donne pour  $p = 1$ ,  $\pi p/S = 21,5$ . Dans un tel cas, l'argument  $\pi p/S$  est tel que Zhurina et al. ([113]) préconisent déjà un développement asymptotique. Rapidement, nous avons des difficultés pour évaluer les fonctions par intégration numérique car l'intégrande, sous le signe intégral, varie rapidement. La représentation de Mehler-Fock est, par conséquent, limitée numériquement pour des valeurs de  $\pi p/S$  et de  $\theta$  relativement faibles, même pour des ordres  $m = 0$  et  $m = 1$ .

Il existe plusieurs méthodes pour contourner le problème tel que le développement en série du cosinus hyperbolique ([113]) ou d'autres approximations asymptotiques. Nous nous sommes néanmoins posé la question de la légitimité d'intégrer un développement déjà approché et nous ne sommes pas en mesure d'en prévoir les conséquences sur la précision des fonctions que l'on cherche à évaluer. Nous n'avons donc pas voulu nous perdre dans les différentes représentations asymptotiques ou autres développements en série, avec lesquels nous sommes invariablement confrontés au problème du choix du seuil à partir duquel la transition d'une méthode à une autre est nécessaire. De plus, les résultats peuvent différer selon les méthodes d'intégration quadratique utilisées. Il existe donc une succession d'erreur et d'approximations, variables selon la méthode utilisée, qui restent difficilement quantifiables. Remarquons enfin que le développement en série du cosinus hyperbolique nécessite d'intégrer numériquement tous les termes de la série ce qui, malgré les performances informatiques actuelles, reste très coûteux en temps de calcul. Dans ce type de manipulation, il faut le plus souvent trouver un compromis entre précision et vitesse de calcul, le plus souvent obscur s'il n'est pas décidé et vérifié au cas par cas.

### Exploitation des formules de récurrence

Le calcul direct par une intégrale est en particulier limité à des ordres  $m$  relativement bas. Nous pouvons donc essayer de tirer parti des relations de récurrence entre les fonctions de Mehler. Cette solution est intéressante, d'une part pour la vérification des de l'évaluation de la récurrence de Clenshaw à des ordres  $m > 1$ , d'autre part pour pouvoir éventuellement adapter l'algorithme d'Olver et Smith ([91]) au calcul des fonctions coniques.

Nous pouvons suivre l'exemple de Köblig ([62]) et utiliser la relation de récurrence suivante pour déduire des fonctions calculées à des ordres  $m = 0$  et  $1$ , les fonctions d'ordres  $m$  supérieurs :

$$\boxed{K_p^{m+2} + K_p^{m+1} 2(m+1) \cot \theta - \left( \left( \frac{1+2m}{2} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{S} \right)^2 \right) K_p^m = 0} \quad (8.5)$$

Cette relation de récurrence ne présente par de singularité analytique, malgré la présence de  $\cot \theta$ , car ce facteur se simplifie avec  $\tan^m(\theta/2)$  de l'expression (8.4). D'autre part, on peut trouver à partir de (8.5) une relation de récurrence sur les intégrales de Mehler-Fock (8.3) et en déduire de la même manière les intégrales de Mehler-Fock à des ordres  $m$  élevés. Il reste néanmoins, outre les problèmes de transitions avec les expressions asymptotiques, une difficulté majeure : tenter de normaliser les fonctions en utilisant le formalisme de l'expression (8.4), ou adapter le calcul de la norme à chaque type de développement utilisé relève d'une certaine

gageure. Or, l'expérience a montré que la normalisation complète des fonctions de Mehler était une condition indispensable à l'élaboration des modèles numériques dans un cône.

### 8.1.3 Validation de la récurrence de Clenshaw

Nous conservons en fin de compte la méthode de Clenshaw comme la représentation la plus objective des fonctions de Mehler car son calcul dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  reste le plus direct. Avant de normaliser complètement ces fonctions, nous nous servons de la représentation intégrale pour valider la représentation en série de Clenshaw.

Une première difficulté importante provient du choix de la quadrature utilisée pour l'intégration numérique. Nous avons utilisé dans un premier temps le panel des techniques d'intégrations quadratiques offertes par le logiciel MATLAB. Ces méthodes numériques se sont révélées très insuffisantes pour vérifier systématiquement la cohérence entre l'évaluation par la récurrence de Clenshaw et le calcul intégrale. A titre d'exemple, un jeu de paramètres pour  $m = 0$ ,  $p = 10$ , avec des paramètres géométriques pour le cône fixés à  $\theta_0 = 5^\circ$  et  $b = 6871.2$ , donne une erreur relative entre notre algorithme et l'intégration quadratique d'environ  $10^{-1}$ . Pourtant, la récurrence de Clenshaw est stable pour ces paramètres et la raison est à imputer aux routines MATLAB. W. Grandner et Gautschi ([40]) ont discuté ces déficiences et ont proposé deux routines d'intégrations numériques qui offrent une indiscutable amélioration. En utilisant ces nouvelles procédures numériques, les fonctions de Mehler ont été testées avec une précision relative de  $10^{-10}$  entre les deux méthodes, intégrale et en série, pour un jeu de tous les couples  $(p, m)$  jusqu'à  $P_{max} = 70$  et  $M_{max} = 50$ , avec  $\theta_0 = 5^\circ$  et  $b = 6871.2$  (soit  $S \sim 0,076$ ). Au delà de ces paramètres, les vérifications n'ont pas été entreprises. Après cette vérification, les fonctions de Mehler peuvent être normalisées (annexe B).

## 8.2 Convergence des solutions

Nous l'avons mentionné, les différents problèmes de conditions aux limites exposés précédemment ne sont pas équivalents numériquement ; nous le verrons plus bas analytiquement. En pratique, les séries infinies sont tronquées et leur capacité de représentation d'un champ de potentiel dépend de leur vitesse de convergence, donc des propriétés des fonctions de base. Dans la résolution de chacun des deux sous-problèmes  $V_1$  et  $V_2$ , nous avons été amenés à résoudre trois problèmes de Sturm-Liouville différents pour chacune des variables  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Les développements en séries solutions que nous avons trouvés pour les bases de fonctions sont des *développements en séries de fonctions orthogonales* qui ont des propriétés semblables aux développements de Fourier. Nous estimons donc nécessaire de rappeler quelques définitions.

Une fonction quelconque  $f(x)$ , appartenant à  $L^2\{[x_1, x_2]\}$  peut être représentée en série de fonctions orthogonales  $\varphi_n(x)$ , en admettant qu'elles constituent une base complète, de telle manière que :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (8.6)$$

L'orthogonalité des fonctions de base est donnée de manière générale par :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x) \varphi_m(x) p(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

avec  $p(x)$  la fonction poids. Par exemple, cette définition englobe les développements en séries de Fourier pour lesquels  $\varphi_n(x) = \cos(nx)$  et  $p(x) = 1$  mais aussi les séries en fonctions de Legendre associées pour lesquelles  $\varphi_n(x) \equiv P_{n_k}^m(\theta)$  et  $p(x) \equiv \sin(\theta)$ . Les coefficients  $c_n$  permettant de représenter la fonction  $f(x)$  par (8.6) s'obtiennent par :

$$c_n = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi_n(x)p(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2} \varphi_n^2(x)p(x)dx} \quad (8.7)$$

Nous allons illustrer la validité de (8.6) avec les bases de fonctions orthogonales que nous avons trouvées. La fonction  $f(x)$  pourrait être n'importe quoi, mais en pratique nous désirons vérifier que les nouvelles bases de fonctions permettent de reconstruire les bases de fonctions des harmoniques sphériques ordinaires. Si tel est le cas, nous sommes certains que notre décomposition sera adaptée pour les champs de potentiel. Nous chercherons donc à représenter d'une part les fonctions de Legendre associées (ou fonctions de Schmidt) par des séries de fonctions de Legendre généralisée, puis la dépendance radiale d'un potentiel par une série des fonctions  $R_p$ .

### 8.2.1 Représentation des fonctions de Legendre

Les fonctions de Legendre associées  $P_{n_k}^m$  forment une base orthogonale complète sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Les fonctions de Legendre ou de Schmidt  $P_l^m$  (avec  $l, m$  entiers) peuvent donc s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions de Legendre associées. On trouve, d'après (8.6) et (8.7), de façon générale, que dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  :

$$P_l^m(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle P_l^m, P_{n_k}^m \rangle}{\underbrace{\|P_{n_k}^m\|^2}_{c_k}} P_{n_k}^m(\theta) \quad (8.8)$$

Remarquons que nous avons déjà évoqué ce développement dans la première partie au chapitre 5.2. Dans la pratique, les séries sont tronquées à un certain degré  $k = K_{\max}$ . Plus la convergence est rapide, moins l'effet de la troncature doit se faire sentir et plus l'expression par les sommes partielles doivent approcher la limite. Or, la vitesse de convergence des séries dépend du choix des conditions aux limites.

La figure (8.2) illustre les reconstructions respectives de deux fonctions de Schmidt  $P_1^0$  et  $P_2^2$  selon la condition choisie avec une troncature  $K_{\max} = 15$  pour la série (8.8).

Nous vérifions donc que les fonctions de Legendre généralisées forment bien une base de fonctions sur laquelle on peut projeter les fonctions de Legendre associées. Mais nous observons également une indiscutable différence de comportement.

#### Condition homogène de Neumann sur les fonctions de Legendre généralisées.

Prenons donc :

$$\left. \frac{dP_{n_k}^m(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_0} = 0$$

Le résultat de la reconstruction est présenté sur la figure (8.2 -1a, 2a). Les fonctions de Legendre ainsi construites permettent une bonne modélisation des fonctions de Schmidt dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Avec peu de coefficients, nous avons pu reconstituer les fonctions avec une erreur négligeable.



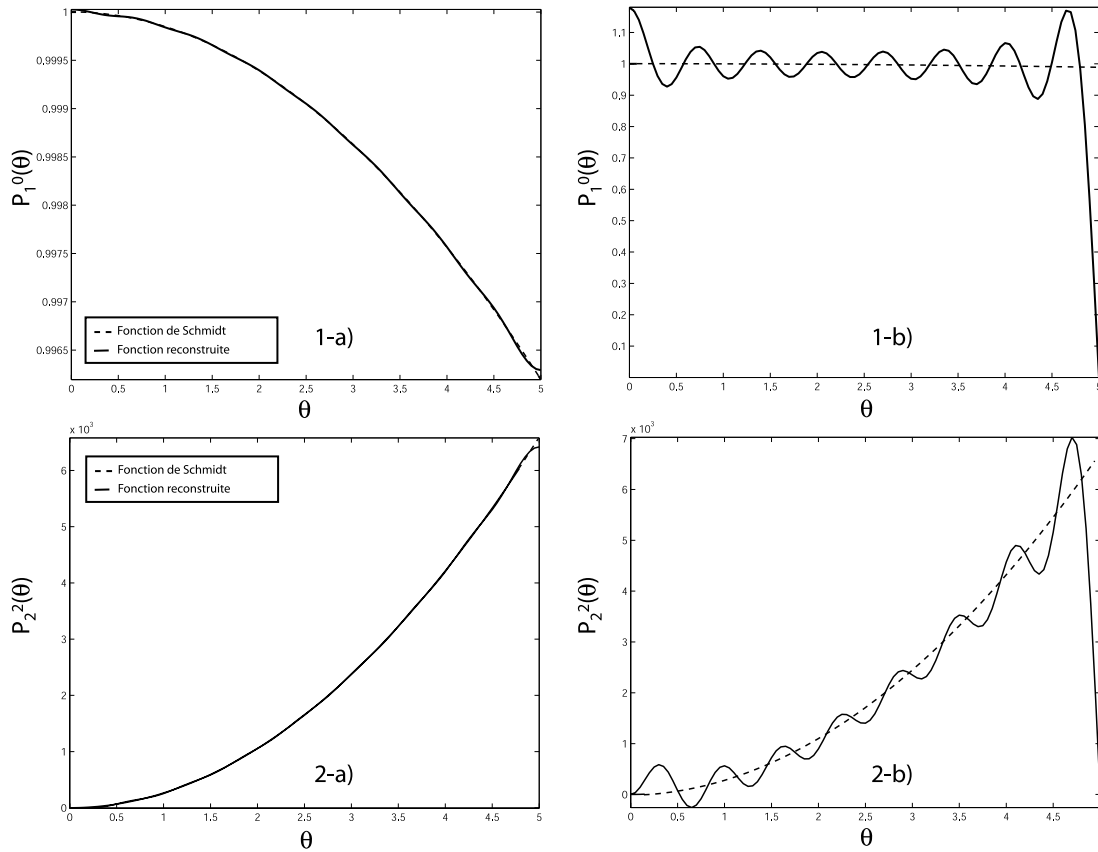


FIG. 8.2 – Les fonctions  $P_l^m$  du développement en harmoniques sphériques normées au sens de Schmidt peuvent être écrites comme une série infinie des fonctions de Legendre associées  $P_{n_k}^m$ . Selon les conditions aux limites choisies, la convergence de la série tronquée vers la solution est plus ou moins rapide. Les figures 1-a) et 2-a) donnent la reconstruction de la fonction de Schmidt avec des racines  $n_k$  telles que  $dP_{n_k}^m/d\theta = 0$  pour  $m = 0$  et  $m = 2$ . Les figures 1-b) et 2-b) représentent la reconstruction des mêmes fonctions avec les racines  $n_k$  telle que  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ . On observe clairement la non-équivalence de la reconstruction lorsque les séries sont tronquées (Noter l'échelle très différente des tracés a et b).

Seuls persistent quelques phénomènes de bords dont nous pouvons néanmoins nous débarrasser en augmentant l'ordre du développement en série dans (8.8).

### Condition homogène de Dirichlet sur les fonctions de Legendre généralisée.

Nous avons donc :

$$F_{n_k}^m(\theta_0) = 0$$

Les résultats sont présentés sur la figure (8.2-1b, 2b). Dans ce cas, la reconstruction des fonctions  $P_l^m(\theta)$  sur les bords du cône n'est pas réaliste car elles sont non-nulles en  $\theta = \theta_0$ . Avec une condition sur la fonction elle-même, on ne peut bien entendu espérer ni une convergence simple ni une convergence uniforme, mais même la convergence en norme est moins bonne.

Pour la reconstruction du champ magnétique cela affecte particulièrement les composantes  $B_{2,z}$  et  $B_{2,y}$  du champ magnétique, calculées à partir du potentiel  $V_2$  (équations 6.50 et 6.51), qui présentent *des effets de bords* prépondérants. Rappelons que c'est pour cette raison que Haines introduisit de façon peu orthodoxe les deux ensembles de conditions aux limites. Avec nos nouvelles fonctions de base, le champ magnétique sur la surface  $\partial_{\theta_0}\Omega$  sera porté entièrement par le champ partiel calculé par la base de Mehler. D'autre part, la figure (8.2) montre que la convergence est particulièrement lente, ce qui se caractérise par des oscillations relativement importantes dans tout l'intervalle  $[0, \theta_0]$  lorsque la troncature de la série  $K_{\max}$  (8.8) est insuffisante. Cette constatation suggère que même pour les zones du cône n'appartenant pas aux frontières, les contributions provenant de la base de Legendre présentent de légères distorsions lorsqu'elles impliquent les fonctions  $P_{n_k}^m(\theta)$ . Quel que soit l'ordre du développement, ce phénomène persiste. C'est un effet de Gibbs qui provient de la différence entre les conditions aux limites sur  $\partial_{\theta_0}\Omega$  des fonctions de Schmidt modélisées ( $P_l^m(\theta_0) \neq 0$ ) et des fonctions de Legendre associées modélisantes ( $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ ).

Nous attirons l'attention sur la particularité de la modélisation des fonctions de Schmidt pour  $m = 0$ . Nous ne manquerons pas de remarquer une légère augmentation de l'erreur à l'approche de  $\theta = 0$ . Cette erreur, pour chacun des développements, n'apparaît que dans la version tronquée des séries. Nous pouvons prédire néanmoins que la reconstruction du champ subira un peu plus de distorsion dans une petite région (dont la surface dépendra du développement) entourant le pôle de la calotte.

On pourra conclure par deux remarques importantes. La première est que, indépendamment du choix des conditions aux limites, la décomposition du problème initial en deux sous-problèmes entraîne forcément la dégradation de l'une ou l'autre des composantes du champ magnétique sur le bord  $\partial_{\theta_0}\Omega$  du domaine. La seconde est que le choix des conditions aux limites n'est pas équivalent d'un point de vue numérique car il donne lieu à des vitesses de convergence des séries sensiblement différentes. Une faible vitesse de convergence nécessitera un plus grand nombre de termes pour pouvoir reconstruire la fonction dans le domaine (bords exclus). Une bonne reconstruction se caractérisant par des oscillations de faible amplitude et des «effets de bords», lorsque nous ne pouvons pas nous en affranchir, proches de la limite géométrique  $\partial_{\theta_0}\Omega$ .

### 8.2.2 Représentation des fonctions radiales

La résolution du problème aux conditions aux limites nous a permis d'obtenir des fonctions radiales qui forment une base de  $L^2\{[a, b]\}$ . Les fonctions radiales des harmoniques globales, en particulier les fonctions  $(a/r)^{l+1}$  ( $l \in \mathbb{N}$ ), peuvent donc être projetées dans cette base et l'on peut reconstituer les fonctions par le développement de Fourier suivant :

$$\boxed{\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}, R_p \rangle}{\|R_p\|^2} R_p(r)} \quad (8.9)$$

Dans cette formulation, regroupant toutes les fonctions radiales, il faudra tenir compte des définitions (6.36a) et (6.36b), ou simplement (6.38) selon la représentation *PI*, *PII*, *PIII* ou *PIV* choisie.

Bien entendu, toute fonction radiale peut être projetée sur la base des  $R_p$  et les fonctions radiales décrivant le champ externe  $(r/a)^l$  avec  $l \in \mathbb{N}$  n'échappent pas à cette règle. Ce qu'il nous faut considérer c'est la capacité des nouvelles fonctions à représenter  $(a/r)^{l+1}$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) sur tout l'intervalle  $a \leq r \leq b$ .

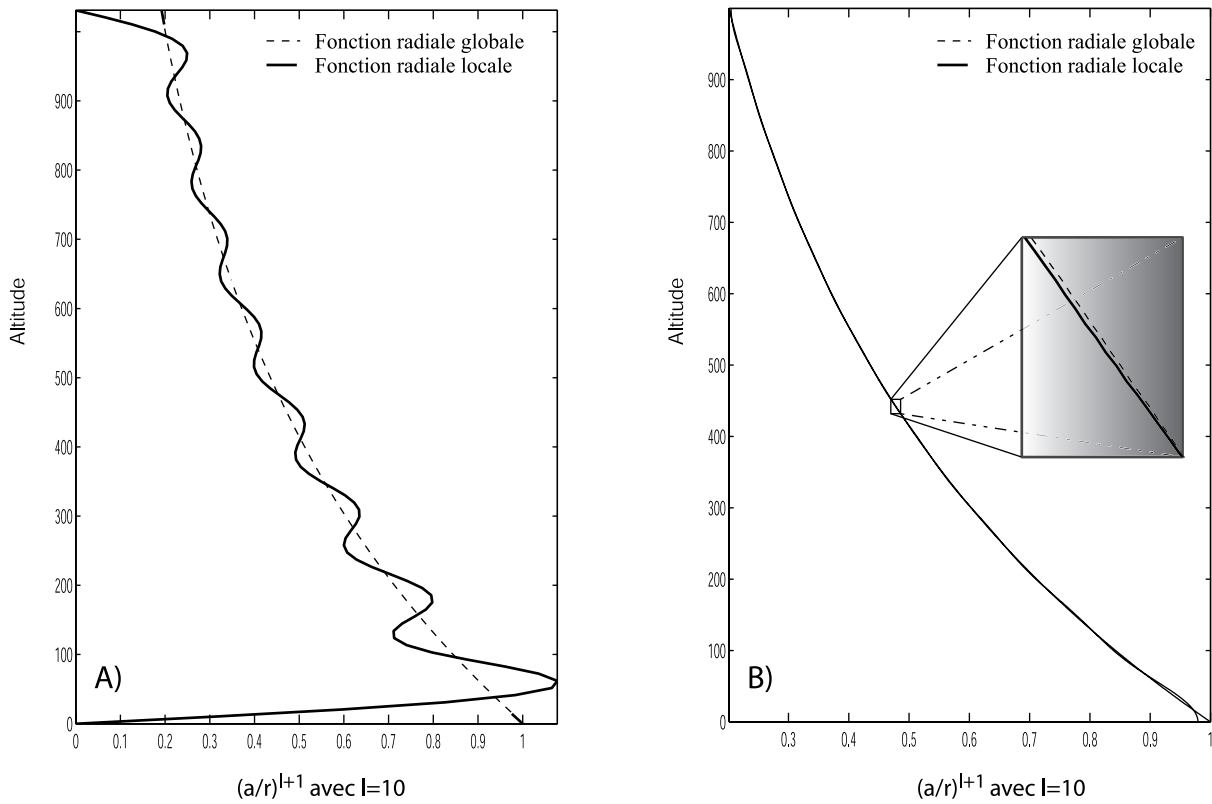


FIG. 8.3 – Les fonctions radiales des harmoniques sphériques  $(a/R)^{l+1}$  sont décomposables en séries de Fourier des fonctions local  $R_p(r)$ . Selon le choix des conditions aux limites (8.10) ou (8.11), la série de Fourier converge rapidement (en B) ou lentement (en A) vers la solution. Ceci montre cependant que le nouveau formalisme permet de tenir compte des variations naturelles d'un champ de potentiel.

La figure (8.3) montre le résultat de la reconstruction de la fonction radiale interne d'un champ exprimé en harmoniques sphériques ordinaires par la série de Fourier (8.9) tronquée à  $K_{max} = 15$ . Comme précédemment, on peut distinguer deux cas ayant ses caractéristiques propres qui découlent du choix de la condition aux limites.

### Condition homogène de Dirichlet sur la fonction radiale

En chacun des rayons  $r = a$  et  $r = b$ , nous avons posé :

$$R_p(a) = R_p(b) = 0 \quad (8.10)$$

La fonction locale  $R_p$  est donnée par la relation (6.38). On voit que cette solution converge très lentement et que le comportement de la reconstruction est irréaliste sur les surfaces inférieures et supérieures. Les effets de Gibbs sont prépondérants et suggèrent d'incorporer un nombre important de paramètres. L'utilisation de cette condition pénalise essentiellement les composantes  $B_{1,x}$  et  $B_{1,y}$  du champ magnétique, gradient du potentiel  $V_1$  (cf équations 6.49 et 6.50), sur les surfaces en  $r = a$  et  $r = b$ . Les composantes du champ magnétique total seront donc entièrement portées par la base de Legendre. De même que précédemment, on anticipe le fait que même lorsque nous aurons des contributions des bases de Mehler (toutes les altitudes  $a < r < b$ ), nous observerons des oscillations pour ces composantes, résultats de la mauvaise convergence de la série de Mehler vers sa limite.

### Condition homogène de Neumann sur la fonction radiale

Aux limites, supérieure et inférieure, du cône nous imposons que :

$$\left. \frac{dR_p(r)}{dr} \right)_{a,b} = 0 \quad (8.11)$$

La fonction radiale  $R_p(r)$  s'écrit d'après (6.36). La solution admet en particulier la fonction constante  $R_0$ . Ainsi, quels que soient  $l$  et  $r$ , la série (8.9) admet comme premier terme une constante. La convergence de la série de Fourier vers la fonction  $(a/r)^{l+1}$  est très rapide. On remarquera des effets de bords aux surfaces repérées par les altitudes  $u = 0$  et  $u = 1030km$ . Le choix de cette condition aux limites, supérieure et inférieure, du cône est particulièrement bien adapté pour les composantes  $\vec{B}_{1,x}$  et  $\vec{B}_{1,y}$  du champ magnétique dérivant du potentiel  $V_1$  (expressions 6.49 et 6.50); en revanche,  $B_{1,z} = 0$ . Aux surfaces inférieures et supérieures, la composante radiale du champ magnétique total  $\vec{B}$ , résultat de la superposition des deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , ne sera portée que par la base de Legendre. Il est donc naturel de s'attendre à une résolution moins précise de la composante  $Z$  du champ magnétique sur ces surfaces mais également à l'intérieur du cône. En raison des effets de Gibbs, la contribution des bases de Mehler y est également moins bien résolue.

### Discussions sur la convergence

Il y a donc des avantages et des inconvénients liés aux choix des conditions aux limites. Nous l'avons vu, un choix de conditions aux limites sur les dérivées impliquera une bonne représentation des fonctions radiales, donc une meilleure alternative pour la modélisation des composantes  $X$  et  $Y$  du champ magnétique, mais une dégradation plus importante de la composante  $Z$ , que

ce soit sur les bords du domaine ou à l'intérieur du domaine, car bien que dans le domaine la composante  $Z$  soit la somme des contributions individuelles  $Z_1$  et  $Z_2$ , l'une des contributions  $Z_1$  est mal déterminée.

Inversement, le choix de la condition aux limites sur la fonction nous assure une bonne représentation de la composante  $Z$  mais une détérioration des composantes  $X$  et  $Y$  dans tout le volume. À première vue, le dilemme peut être vite surmonté en argumentant que la condition sur  $R_p$  dégrade deux composantes alors que la condition sur  $dR_p/dr$  n'en dégrade qu'une seule. Avant d'adhérer à ce raisonnement trivial, il convient de vérifier si la reconstruction d'un champ magnétique montre bien, sur la base des discussions précédentes, le type d'incertitude attendue pour chacune des composantes.

Concluons enfin que ces considérations de convergence ne concernent que les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  pris de manière indépendante. Le potentiel total  $V$  sera influencé dans une certaine mesure par ces considérations, mais par sommation des deux potentiels, les effets des problèmes de convergence seront moins nets et parfois amoindris. De plus, les développements en séries peuvent être assimilés à une généralisation des développements de Fourier pour lesquels certains théorèmes d'accélération de convergence existent.

# Chapitre 9

## Synthèses des solutions

Les solutions des différents problèmes ont été énoncées au fur et à mesure de leur rencontre. Par souci de clarté, nous proposons dans les pages qui suivent une synthèse des propriétés de chaque décomposition qui permet d'avoir une vue d'ensemble. Afin de compléter les développements précédents, les coefficients résultant des produits scalaires entre fonctions sont explicités. Nous ne manquerons pas par la suite de nous appuyer sur ce résumé. On trouvera d'autre part une compilation des symboles et des notations employés en annexe D.

### 9.1 Synthèse du problème $PI$

Le potentiel  $V$ , solution générale du problème  $PI$ , est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V = V_1 + V_2$$

#### 9.1.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial\Omega_\theta} &= \tilde{X}_g(r, \theta_0, \varphi) \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_a} &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_b} &= 0\end{aligned}$$

**Les conditions homogènes**

La forme des conditions aux limites entraîne la définition des fonctions de base radiales,  $R_0$  et  $R_p(r)$ , associées respectivement aux ensembles de valeurs propres  $\lambda_p = 0$  et  $\lambda_p < -1/4$ . Pour des fonctions normalisées telles que  $\|R_0\|^2 = \|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$  on trouve :

$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{e^S - 1}} \quad (9.2a)$$

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{2}{S((2p\pi)^2 + S^2)}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2\pi p \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + S \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \quad (9.2b)$$

Les solutions radiales entraînent la définition de deux ensembles de fonctions coniques de Mehler, les fonctions  $P_0^m(\theta)$  et les fonctions  $K_p^m(\theta)$  dont les expressions sont données par (6.44) et par (6.40).

### Conditions aux limites

L'égalité, sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$ , entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques, conduit à la définition des deux ensembles de coefficients de Gauss dans la base locale pour chacun des ensembles  $\lambda_p = 0$  et  $\lambda_p < -1/4$ . En se limitant à un potentiel global qui ne contient que des termes internes, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} G_0^m \\ H_0^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_0\|^2 \frac{dP_0^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.3)$$

$$\begin{Bmatrix} G_p^m \\ H_p^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 \frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle}{\|R_0\|^2} = \frac{1 - e^{-Sn}}{n\sqrt{(e^S - 1)}} \quad (9.5)$$

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{(4p\pi)^2 (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (2p\pi)^2 + S^2 \right) \left( (n+1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.6)$$

avec  $S$  facteur lié à la géométrie du cône (section 6.2.2),  $n$  les degrés des harmoniques sphériques ordinaires et  $p$  nombre entier. Dans cette écriture du problème, le coefficient  $G_0^0$  est indéterminé; le potentiel  $V_1$  n'est donc connu qu'à une constante près.

### 9.1.2 Solutions du potentiel $V_2$

#### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} &= \widetilde{Z}_g(a, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} &= \widetilde{Z}_g(b, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

#### Solutions de l'équation homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs et supérieurs à  $m$  qui impliquent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées  $P_{n_k}^m(\theta)$ .

#### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial \Omega_a$  et  $\partial \Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les coefficients de Gauss locaux et globaux :

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{(n_k+1) \|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.8)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{n_k \|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

En particulier on montre, en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A, que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{dP_n^m(\theta_0)/d\theta}{\frac{\partial (dP_{n_k}^m(\theta_0)/d\theta)}{\partial n_k}}$$

Dans ces expressions la première racine  $n_k$  de la fonction de Legendre pour  $m = 0$  est nulle ; le coefficient externe  $G_{n_k}^{e,0}$  est indéterminé et donc le potentiel  $V_2$  n'est connu qu'à une constante près.

### 9.1.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PI* a de plus les caractéristiques suivantes :



Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite si $m > 0$
Orthogonalité des gradients	Non
Vitesse de convergence des solutions	rapide
Effets de bords	faibles en tous points
Coefficients indéterminés	$G_{p=0}^{m=0}$ et $G_{n_k}^{e,0}$

## 9.2 Synthèse du problème *PII*

Le potentiel  $V$ , solution générale du problème *PII*, est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$

$$V = V_1 + V_2$$

### 9.2.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ V_1|_{\theta=\theta_0} &= \tilde{V}_g(\theta_0, r, \varphi) \\ V_1|_{r=a} &= 0 \\ V_1|_{r=b} &= 0 \end{aligned}$$

### Résolution des équations homogène

La forme des conditions aux limites sur la fonction radiale  $R_p(r)$  conduit à la définition d'un ensemble unique de valeurs propres  $\lambda_p < -1/4$ . Le choix de la norme  $\|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$  conduit à :

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{2}{S}} \sqrt{\frac{a}{r}} \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (9.10)$$

Les solutions radiales entraînent l'introduction des fonctions coniques de Mehler  $K_p^m(\theta)$  dont l'expression est donnée par (6.40).

### Conditions aux limites

L'égalité, sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$ , entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques, conduit à la définition des coefficients de Gauss dans la base locale. En considérant un champ global interne uniquement, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle P_n^m(\theta_0)}{\|R_p(r)\|^2 K_p^m(\theta_0)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (9.11)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{p\pi (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (n+1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.12)$$

## 9.2.2 Solutions du potentiel $V_2$

### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= 0 \\ V_2|_{\partial\Omega_\theta} &= 0 \\ V_2|_{\partial\Omega_a} &= \widetilde{V}_g(a, \theta, \varphi) \\ V_2|_{\partial\Omega_b} &= \widetilde{V}_g(b, \theta, \varphi)\end{aligned}$$

### Solution de l'équation homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs et supérieurs à  $m$  qui définissent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées.

### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux :

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.15)$$

En particulier, on montre en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{P_n^m(\theta_0)}{\frac{\partial(P_{n_k}^m(\theta_0))}{\partial n_k}}$$

## 9.2.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PII* a en outre les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite
Orthogonalité des gradients	Non
Vitesse de convergence des solutions	très lente
Effets de bords	très importants, surtout sur les contours $C(a, b; \theta_0; \varphi)$
Coefficient indéterminé	aucun

### 9.3 Synthèse du problème *PIII*

Le potentiel  $V$  solution, générale du problème *PIII*, est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V = V_1 + V_2$$

#### 9.3.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ V_1|_{\partial\Omega_\theta} &= \widetilde{V}_g(r, \theta_0, \varphi) \\ \left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} &= 0 \\ \left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_b} &= 0 \end{aligned}$$

**Les conditions homogènes**

La forme des conditions aux limites entraîne la définition des fonctions de base, radiales,  $R_0$  et  $R_p(r)$  associées respectivement aux ensembles de valeurs propres  $\lambda_p = 0$  et  $\lambda_p < -1/4$ . Elles sont normalisées telles que  $\|R_0\|^2 = \|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$ , par conséquent :

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{\sqrt{e^S - 1}} & (9.17a) \\ R_p(r) &= \sqrt{\frac{2}{S((2p\pi)^2 + S^2)}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2\pi p \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + S \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \text{ et } p \in \mathbb{N}^* & (9.17b) \end{aligned}$$

Les solutions radiales entraînent la définition de deux ensembles de fonctions coniques de Mehler : les fonctions  $P_0^m(\theta)$  et les fonctions  $K_p^m(\theta)$  dont les expressions sont données par (6.44) et par (6.40).

**Conditions aux limites**

L'égalité sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$  entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques conduit à la définition de deux ensembles de coefficients de Gauss dans la base locale. En considérant un champ global interne uniquement, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_0^m \\ H_0^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle P_n^m(\theta_0)}{\|R_0\|^2 P_0^m(\theta_0)} \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (9.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle P_n^m(\theta_0)}{\|R_p(r)\|^2 K_p^m(\theta_0)} \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (9.19)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle}{\|R_0\|^2} = \frac{1 - e^{-Sn}}{n\sqrt{(e^S - 1)}} \quad (9.20)$$

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{(4p\pi)^2 (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (2\pi p)^2 + S^2 \right) \left( (n + 1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.21)$$

avec  $S$  facteur lié à la géométrie du cône (section 6.2.2),  $n$  les degrés des harmoniques sphériques ordinaires et  $p$  nombre entier. Dans cette écriture du problème, le coefficient  $G_0^0$  est indéterminé; le potentiel  $V_1$  n'est donc connu qu'à une constante près.

### 9.3.2 Solutions du potentiel $V_2$

#### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ V_2(r; \theta_0, \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_a} &= \widetilde{Z}_g(a, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_b} &= \widetilde{Z}_g(b, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

#### Solution de l'équations homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs, supérieurs à  $m$  qui impliquent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées.

#### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux :

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{(n_k+1) \|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.23)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{n_k \|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.24)$$

En particulier on montre en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{P_n^m(\theta_0)}{\frac{\partial(P_{n_k}^m(\theta_0))}{\partial n_k}}$$

### 9.3.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PIII* a, en outre, les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite
Orthogonalité des gradients	Oui
Vitesse de convergence des solutions	lente
Effets de bords	importants sur les contours $C(a, b; \theta_0; \varphi)$
Coefficient indéterminé	$G_{p=0}^{m=0}$

## 9.4 Synthèse du problème *PIV*

Le potentiel  $V$ , solution générale du problème *PIV*, est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V = V_1 + V_2$$

### 9.4.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= \tilde{X}_g(r, \theta_0, \varphi) \\ V_1|_{\partial \Omega_a} &= 0 \\ V_1|_{\partial \Omega_b} &= 0 \end{aligned}$$

**Les conditions homogènes**

La forme des conditions aux limites sur la fonction radiale  $R_p(r)$  conduit à la définition d'un ensemble unique de valeurs propres  $\lambda_p < -1/4$ . La normalisation des fonctions telles que  $\|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$  conduit à l'expression :

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{2}{S}} \sqrt{\frac{a}{r}} \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (9.26)$$

Les solutions radiales entraînent la définition de deux ensembles de fonctions coniques de Mehler  $K_p^m(\theta)$  dont les expressions sont données par par (6.40).

### Conditions aux limites

L'égalité sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$  entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques conduit à la relation entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux. En considérant un champ global interne uniquement, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} G_p^m \\ H_p^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 \frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.27)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{p\pi (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (n+1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.28)$$

avec  $S$  facteur lié à la géométrie du cône (section 6.2.2),  $n$  les degrés des harmoniques sphériques ordinaires et  $p$  nombre entier.

### 9.4.2 Solutions du potentiel $V_2$

#### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial\Omega_\theta} &= 0 \\ V_2 \Big|_{\partial\Omega_a} &= \tilde{V}_g(a, \theta, \varphi) \\ V_2 \Big|_{\partial\Omega_b} &= \tilde{V}_g(b, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

#### Solution de l'équation homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs et  $n_k \geq m$  qui définissent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées.

#### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux.

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.30)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.31)$$

En particulier on montre en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{dP_n^m(\theta)/d\theta|_{\theta_0}}{\frac{\partial(dP_{n_k}^m(\theta_0)/d\theta)}{\partial n_k}}$$

### 9.4.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PIV* a, en outre, les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite
Orthogonalité des gradients	Oui
Vitesse de convergence des solutions	lente
Effets de bords	importants sur les contours $C(a, b; \theta_0; \varphi)$
Coefficient indéterminé	$G_{p=0}^{m=0}$

# Chapitre 10

## Reconstructions numériques d'un champ global

Jusqu'à présent, nous avons considéré les expressions reliant la décomposition locale et la décomposition globale de manière formelle. Les relations entre les coefficients de Gauss locaux et globaux sont exprimées en termes de séries infinies. Nous avons entrevu les effets de la troncature des séries pour la reconstruction des harmoniques sphériques dans le domaine conique, mais nous n'avons pas jusqu'à présent pu en estimer de manière concrète les effets. Dans cette section, nous vérifions la validité de ces relations dans le cas de séries tronquées, avec un seuil de troncature pour le moment arbitraire puisque rien ne limite le développement. Ceci nous permettra d'avoir une première idée des possibilités offertes par les différentes conditions aux limites, ainsi que de vérifier si le comportement de la reconstruction sur la base locale obéit bien aux considérations sur la vitesse de convergence et sur le phénomène de Gibbs du chapitre 8.2.

En vertu d'une convergence des séries très lente dans les solutions du problème *PII* et puisque l'orthogonalité des gradients n'est pas vérifiée, nous écartons cette représentation définitivement de toutes nos considérations à venir.

Nous vérifions, dans un premier temps, que les formulations précédentes sont suffisamment performantes pour reconstruire le champ pour des troncatures raisonnables. Puis, dans un second temps, nous nous assurerons que les variations du champ reconstruit dans le cône, notamment avec l'altitude, sont bien conformes à ce que l'on attend d'un potentiel newtonien. Les différents résultats nous permettront de circonscrire les domaines d'application de chaque décomposition et d'en écarter certaines le cas échéant.

### 10.1 Utilisation des fonctions de base du problème *PI*

La décomposition *PI* soulève un problème conceptuel insurmontable, celui de ne pas admettre tous les paramètres zonaux, c'est-à-dire, d'ordre  $m = 0$  dans son développement. Pour tenter de modéliser un champ magnétique terrestre, cette méthode sera donc d'un piètre secours. Puisque nous avons vu que la décomposition du problème *PI* semblait converger rapidement, nous avons voulu tout de même vérifier cette propriété. Mais puisque d'un autre côté cette décomposition est inutile pour une modélisation de champ terrestre, nous l'avons utilisée surtout pour illustrer l'importance des coefficients de Gauss *externes* dans la reconstruction d'un champ d'origine interne uniquement. Les conclusions pourront être extrapolées aux autres décompositions et pourront être vues comme une illustration des discussions du paragraphe 7.4.



### 10.1.1 Choix du modèle et des paramètres

Pour illustrer la bonne vitesse de convergence des solutions, nous prenons un champ de type *IGRF* complet; celui de l'année 1990 par exemple. Après rotation des coefficients de Gauss d'axe  $C(2^\circ E, 47^\circ N)$  dans le repère calotte centrée sur la France (section 5.1 Partie 1), nous retranchons toutes les contributions  $m = 0$  en posant à zéro les coefficients de Gauss globaux transformés  $\tilde{g}_l^0$ .

Les paramètres géométriques du cône sont choisis conformément à la taille du territoire français et à l'altitude maximale contenue dans les données satellites. On choisit par conséquent une ouverture de la calotte de  $\theta_0 = 5^\circ$  avec comme altitude supérieure  $b = a + u_m$  avec  $a$  rayon terrestre et  $u_m$  l'élévation par rapport à la surface terrestre. Le choix d'une élévation maximale  $u_m = 1030$  km permet d'englober les données des satellites MAGSAT, CHAMP et ØRSTED.

Nous devons de plus nous fixer des indices  $P_{max}$  et  $K_{max}$  qui définiront l'ordre du développement des bases que nous calculerons. Nous prendrons aveuglément  $P_{max} = K_{max} = 17$ , qui semblent raisonnables en pratique, pour tous les ordres  $m$  de 1 à 10 en l'absence d'informations supplémentaires guidant le choix des indices.

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer les coefficients de Gauss de la base locale de Mehler  $\{G_0^m, H_0^m\}$ ,  $\{G_p^m, H_p^m\}$  par (9.3) et (9.4) et ceux de la base de Legendre  $\{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$  et  $\{G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}\}$  respectivement par (9.8) et (9.9). Ce choix nous donne théoriquement un total de 767 coefficients de Gauss parmi lesquels 20 correspondent aux coefficients  $\{G_0^m, H_0^m\}$ , 249 aux coefficients  $\{G_p^m, H_p^m\}$ , et 249 également pour chacun des ensembles de coefficients de Legendre internes  $\{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$  et de Legendre externes  $\{G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}\}$ . Cependant, étant donné leur faible magnitude, la plupart des coefficients externes semblent à première vue insignifiants et nous n'en gardons que 12. Cette manipulation nous montrera que nous ne pouvons pas retrancher impunément les coefficients externes sans dégrader la modélisation et sa variation en altitude. Le champ magnétique est ensuite reconstruit par (6.49), (6.50) et (6.51) à l'intérieur du cône sur différentes surfaces échantillonnées selon la méthode de Dufour (section 4.1, première partie) et espacées en altitude de  $10km$ .

### 10.1.2 Analyse des résultats

#### Variations des résidus sur les surfaces

Les figures (10.1), (10.2) et (10.3) montrent le résultat de la reconstruction pour différentes altitudes comprises entre  $r = a$ , le rayon terrestre et  $r = b$  le rayon supérieur du cône,  $u$  représente l'élévation par rapport à la surface terrestre.

Une constatation directe est l'extrême stabilité de la reconstruction pour les trois composantes du champ magnétique. En l'absence d'oscillations qui pourraient révéler des effets de Gibbs ou une convergence lente de la solution, nous pouvons conclure avec satisfaction que le champ a été reconstruit de manière très réaliste.

Pour s'en assurer, on trace les résidus entre la reconstruction  $\vec{B}^r$  du champ par les fonctions de bases locales et le champ réel de départ  $\vec{B}$  que montrent les figure (10.4), (10.5) et (10.6).

De manière quantitative, l'erreur de reconstruction à l'intérieur du cône sur chaque surface n'excède jamais  $5nT$  bien que nous observions distinctement une croissance des résidus à l'approche des bords latéraux du cône. Ces effets de bords sur la surface  $\partial\Omega_{\theta_0}$  proviennent de la troncature des séries et des conditions aux limites choisies. Ils sont cependant bien cantonnés près des bords de la calotte et n'affectent pas la reconstruction à l'intérieur de la calotte. La stabilité en fonction de l'altitude est assez nette et nous observons une disparition des lignes de

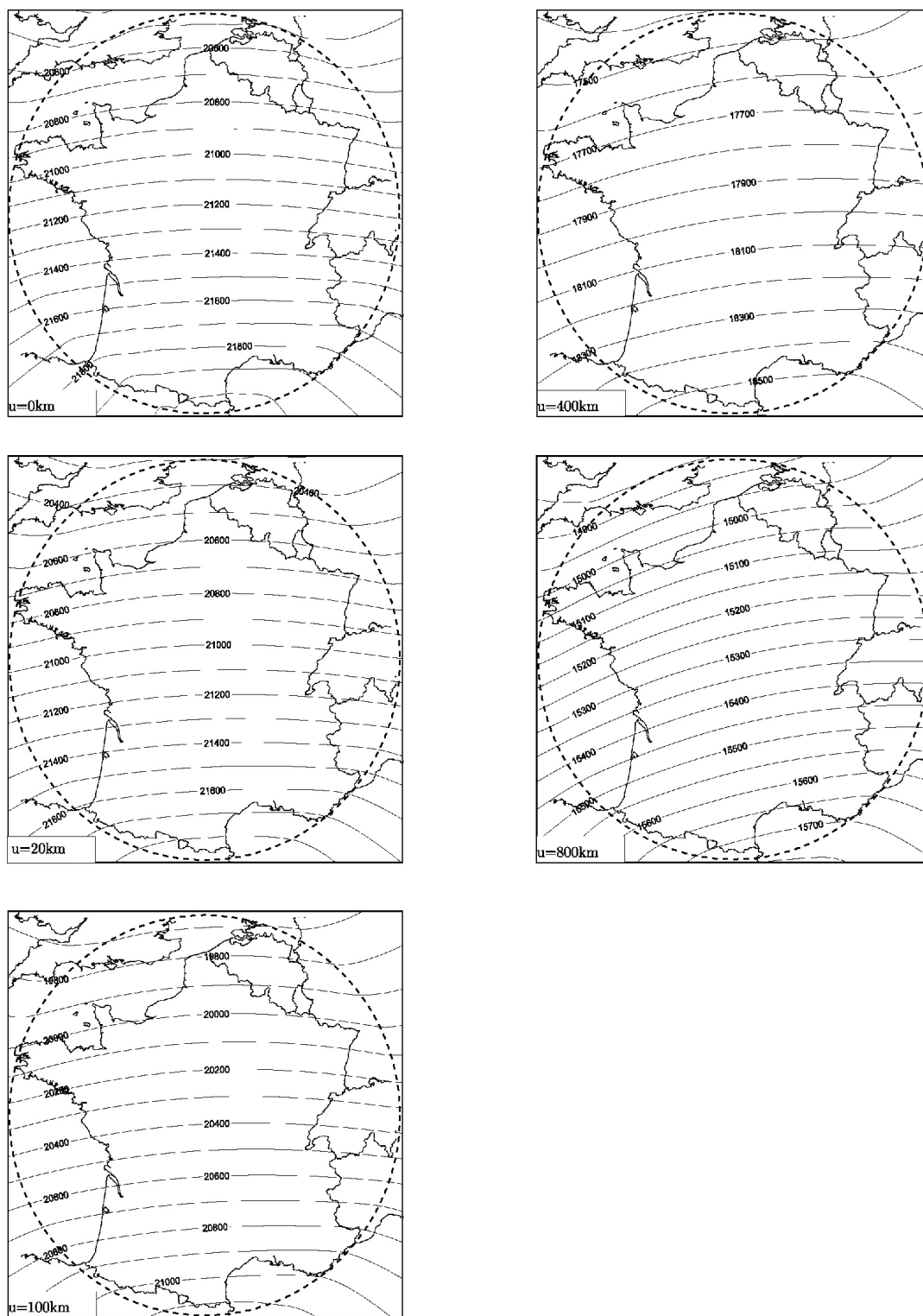


FIG. 10.1 – Composante  $X$  du champ magnétique DGRF 1990 reconstruit dans le cône centré sur la France à différentes altitudes. Pour satisfaire la condition de flux nul, l'ordre  $m = 0$  du développement a été retranché. Les valeurs du champ sont données en  $nT$ . Le cercle en pointillé matérialise les limites de la calotte sphérique.

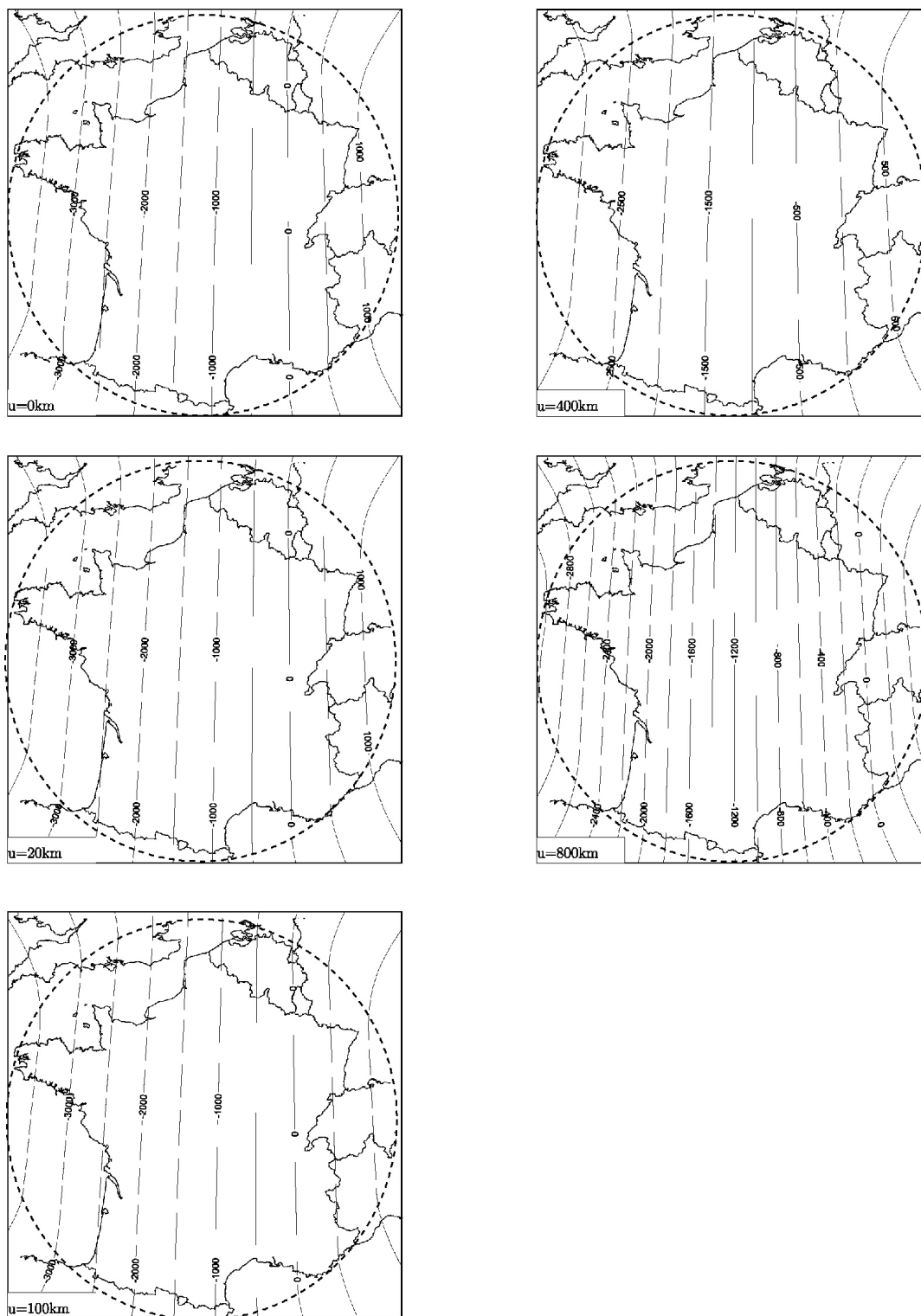


FIG. 10.2 – Composante  $Y$  du champ magnétique DGRF 1990 reconstruit dans le cône centré sur la France à différentes altitudes. Même légende que sur la figure (10.1).

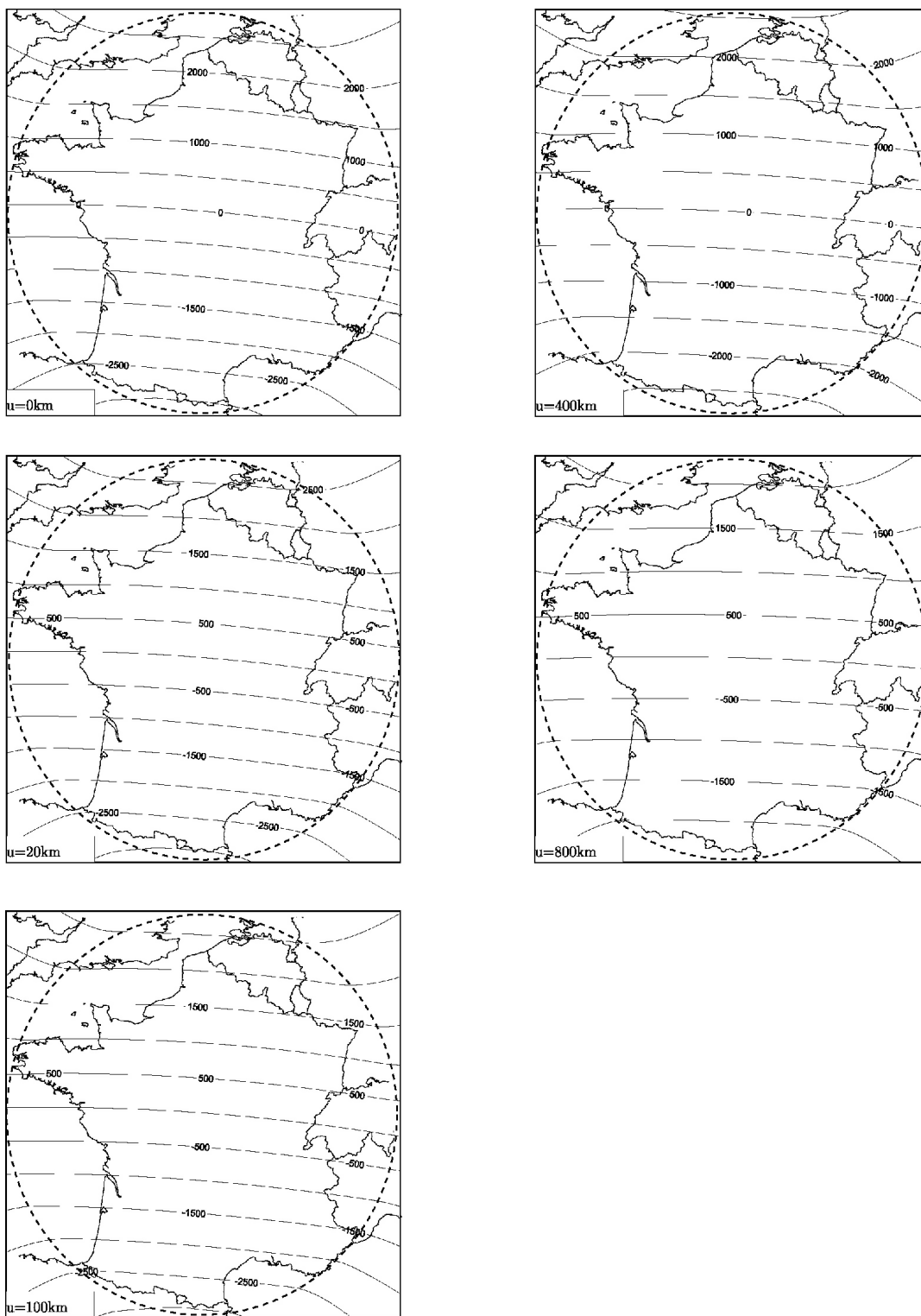


FIG. 10.3 – Composante  $Z$  du champ magnétique DGRF 1990 reconstruit dans le cône centré sur la France à différentes altitudes. Même légende que sur la figure (10.1).

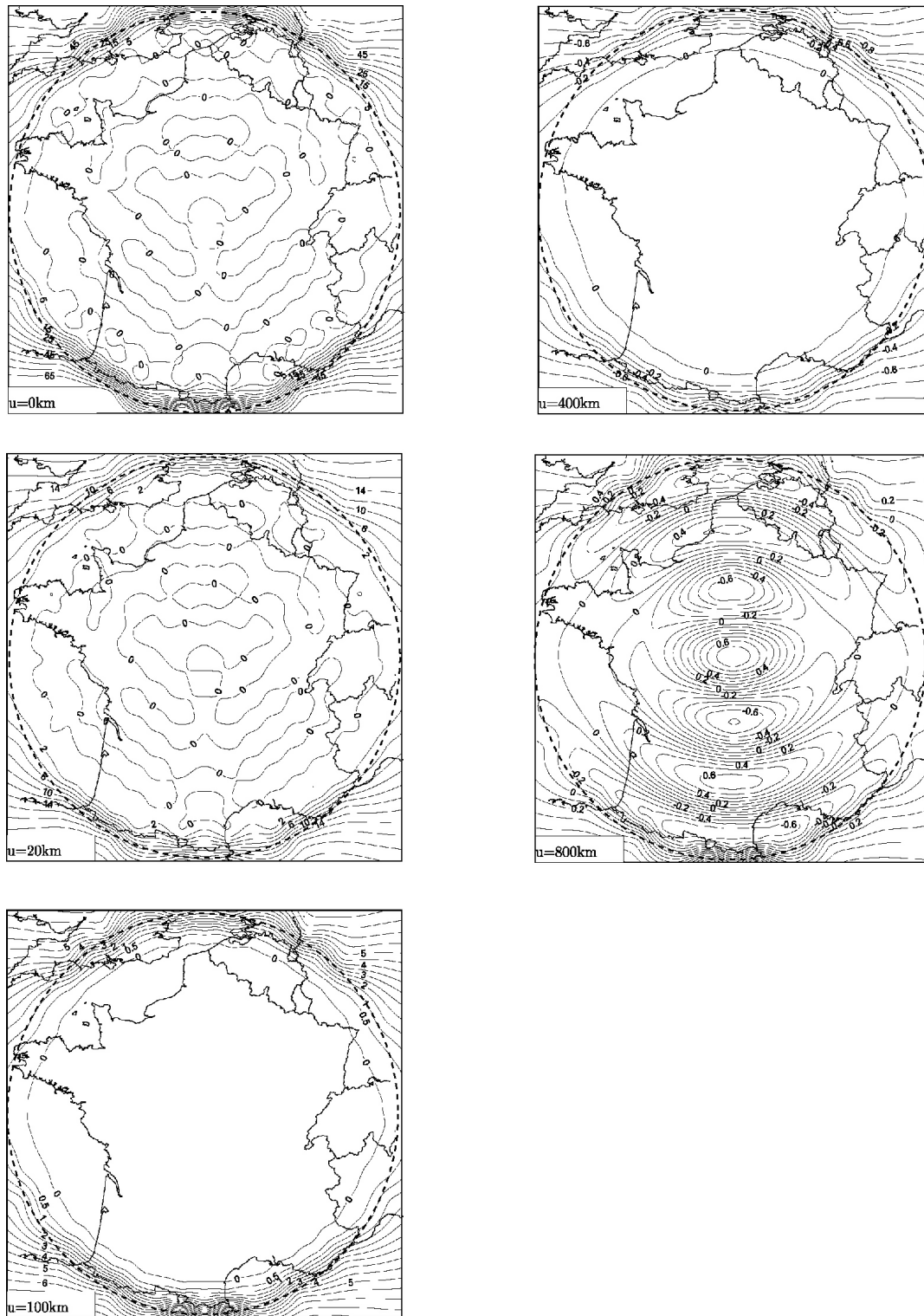


FIG. 10.4 – Résidus pour la composante  $X$  entre le champ reconstruit et le champ DGRF90 correspondant sur une calotte centrée sur la France. Plusieurs altitudes sont représentées. Les intervalles de contours sont  $5nT$ ,  $2nT$ ,  $0.5nT$ ,  $0.1nT$  et  $0.1nT$  pour les altitudes  $u = 0, 20, 100, 400$  et  $800\text{km}$ . Nous observons clairement un biais lors de l'augmentation en altitude.

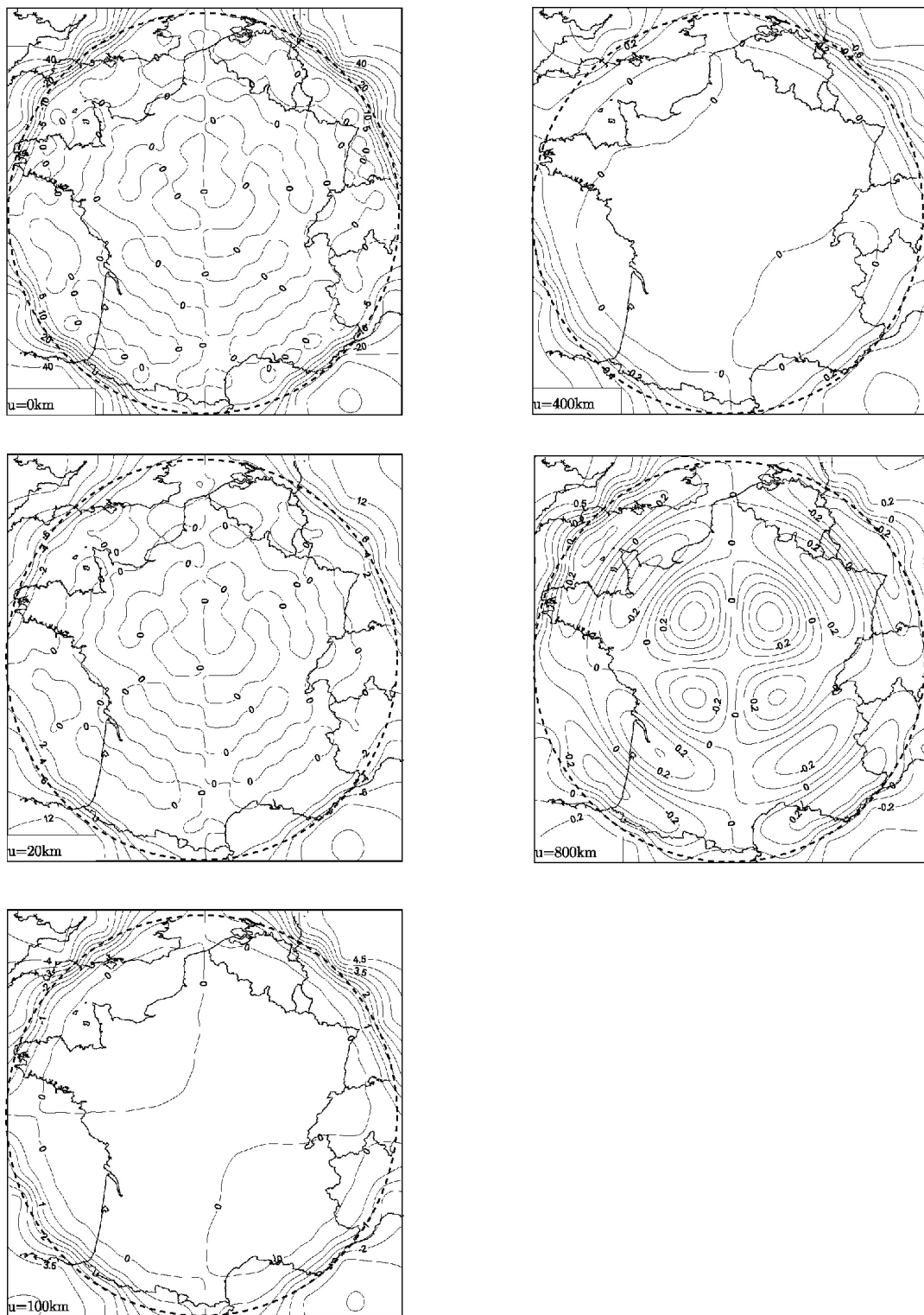


FIG. 10.5 – Résidus pour la composante  $Y$  entre le champ reconstruit et le champ DGRF90 correspondant sur une calotte centrée sur la France. Même légende que sur la figure (10.4).

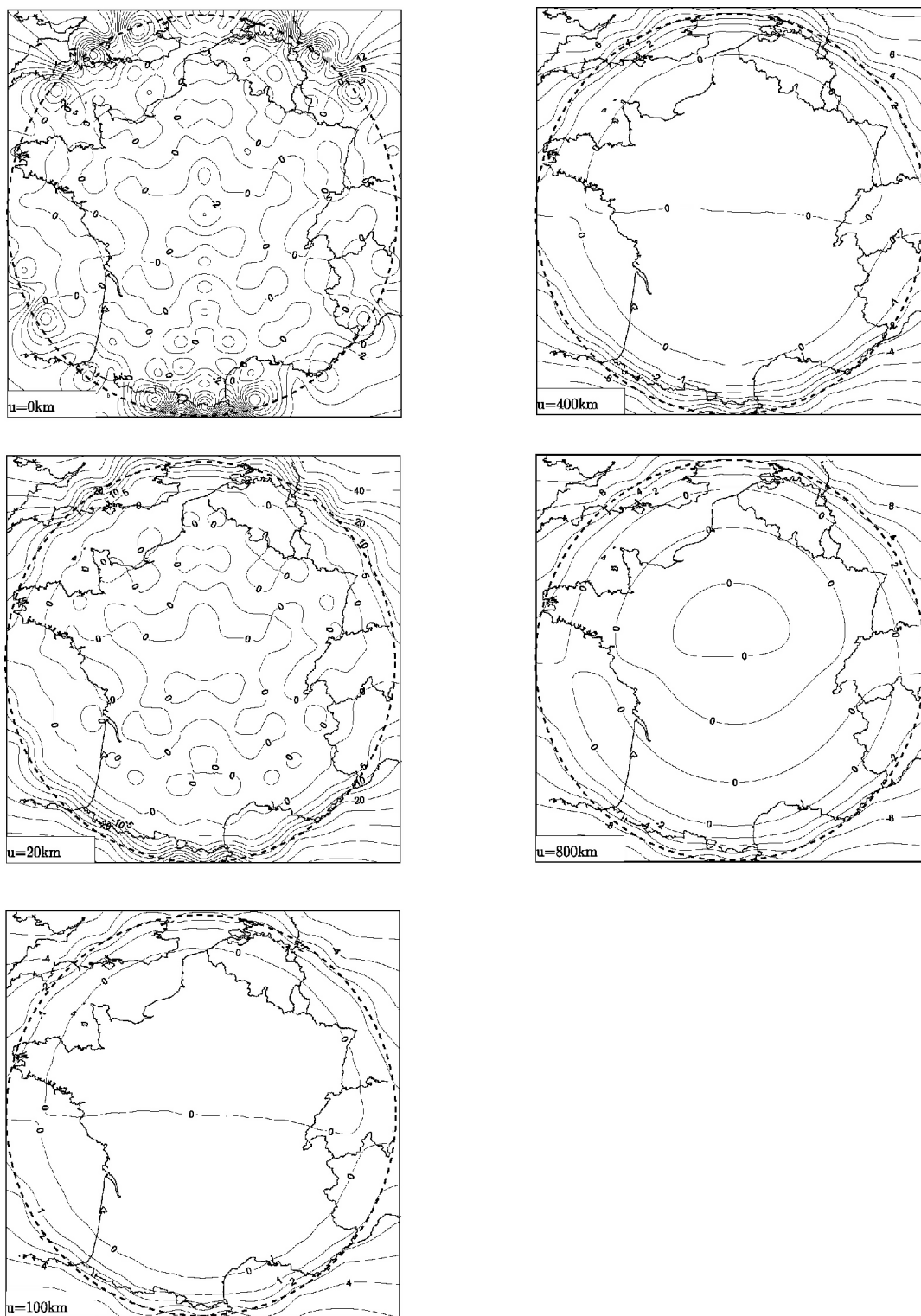


FIG. 10.6 – Résidus pour la composante  $Z$  entre le champ reconstruit et le champ DGRF90 correspondant sur une calotte centrée sur la France. Même légende que sur la figure (10.4).

contours lorsque nous nous éloignons de la surface terrestre, révélant que l'erreur de reconstruction passe sous le seuil de  $0, 2nT$ , selon la définition utilisée pour le tracé des lignes d'isovaleurs à ces altitudes (legende de la figure 10.4). Ce comportement s'explique par un éloignement croissant de la surface de reconstruction par rapport à la surface terrestre. En augmentant l'altitude nous nous éloignons des phénomènes de bords présents sur la frontière  $\partial\Omega_a$  du domaine conique  $\Omega$ .

D'une manière générale, nous avons des difficultés de représentation à l'approche des cercles  $\mathcal{C}(a, b; \theta_0, \varphi)$ . Nous avons vu que la méthode *PI* n'engendrait pas plus de phénomène de Gibbs dans une région plutôt que dans une autre ; ce phénomène ne s'explique donc que par la singularité géométrique de la frontière  $\partial\Omega$  qui présente des "coins" où les effets de bords se superposent.

Pour les besoins de la discussion nous avons retranché arbitrairement un grand nombre de coefficients externes. L'absence de ces termes provoque l'apparition de structures organisées, à mesure que l'on augmente l'altitude, et un biais dans les résidus, tous deux caractéristiques de l'insuffisance du développement.

### Variation des résidus avec l'altitudes

Plutôt que de baser nos propos sur un échantillon de surfaces, nous pouvons schématiser l'évolution de l'ajustement dans l'intervalle  $a \leq r \leq b$ . Nous avons recours sur la figure (10.7) à l'investigation systématique de la valeur du résidu moyen sur chaque surface à l'intérieur du cône.

La figure (10.7) montre la valeur du résidu moyen associé à chaque composante du champ.

Si  $N_p^{\partial\Omega_r}$  est le nombre de points sur chaque surface de rayon  $r$ , le résidu moyen en nanotesla est défini par :

$$\bar{r}_\alpha(r) = \sqrt{\frac{(B_\alpha(r) - B_\alpha^r(r))^2}{N_p^{\partial\Omega_r}}}, \text{ avec } \alpha = X, Y \text{ ou } Z \quad (10.1)$$

L'erreur moyenne totale est ensuite définie par :

$$\boxed{\bar{R}_{\partial\Omega_r}(r) = \sqrt{\bar{r}_X^2(r) + \bar{r}_Y^2(r) + \bar{r}_Z^2(r)}} \quad (10.2)$$

et correspond à l'erreur de reconstruction en nanotesla sur l'intensité du champ total sur une surface d'altitude  $r$ . Étant donné la quasi-régularité de la grille de reconstruction, cette estimation, fondée sur un échantillonnage, doit rester proche de la valeur réelle obtenue sur une grille infiniment fine, ou de la valeur donnée par un passage à la limite continue.

Le phénomène de Gibbs est omniprésent sur les surfaces, inférieure et supérieure, du domaine d'étude et nous voyons son influence sur la carte des résidus (figure 10.4, 10.5 et 10.6) à l'altitude terrestre  $u = 0\text{km}$ . L'erreur sur la surface terrestre ainsi estimée est de  $7nT$  sur les composantes  $Y$  et  $Z$  du champ magnétique et de  $12nT$  sur la composante  $Z$ . Nous en déduisons l'erreur sur l'intensité totale  $\bar{R}_{\partial\Omega_r}(a) = 15, 5nT$ . Cette valeur est essentiellement dominée par les effets de bords. C'est d'ailleurs une des limites importantes de cette analyse, et nous pourrions considérer que, d'une manière tout à fait générale, l'erreur moyenne obtenue est une majoration de l'erreur moyenne dans la zone de stabilité de la calotte.

Pour estimer l'erreur à l'intérieur du cône il suffit de retrancher les zones d'instabilités proches de la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$ . Ainsi, si l'on compare les deux champs  $B$  et  $B^r$  dans une calotte délimitée par  $\theta \leq \theta_0 - \varepsilon$ , nous trouvons pour une valeur  $\varepsilon = 0.2^\circ$ , une erreur par (10.1) de :

$$\bar{r}_X(a) \simeq 3nT \quad \bar{r}_Y(a) \simeq 2nT \quad \bar{r}_Z(a) \simeq 2nT$$



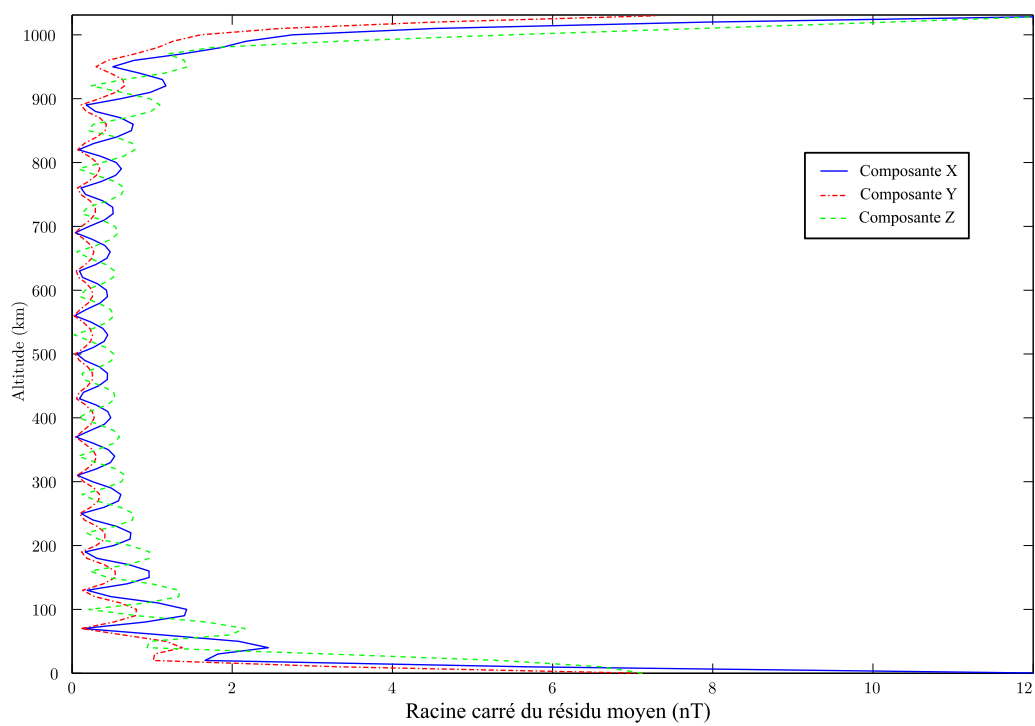


FIG. 10.7 – Evolution du résidu moyen en  $nT$  avec l'altitude pour les trois composantes obtenu par différence entre le champ magnétique reconstruit et le champ IGRF 1990 calculé pour  $m > 0$  uniquement.

Ceci conduit à une erreur sur l'intensité totale du champ par (10.2) de :

$$\overline{R}_{\partial\Omega_r}(a) \simeq 4, 1nT$$

Ces dernières valeurs sont bien plus conformes à l'allure générale des résidus à la surface terrestre et démontrent la stabilité de la reconstruction à l'intérieur du domaine conique.

On remarque l'augmentation importante des résidus à l'altitude  $u = 1030km$ . Etant donné la décroissance naturelle d'un champ de potentiel d'origine interne tel que nous l'avons considéré, l'erreur que nous observons dans la partie supérieure du cône est proportionnellement plus importante à l'erreur que nous observons dans la partie inférieure. Cette constatation est une conséquence directe de l'insuffisance des développements en série de la base externe de Legendre. En règle générale, une symétrie de la figure (10.7) par rapport à l'altitude médiane est trompeuse et doit être considérée comme révélatrice d'un développement en coefficients externes insuffisant ou, dans le cas d'un problème inverse, soit d'une mauvaise détermination des coefficients de Gauss externes, soit d'une contamination ou d'une erreur plus importante sur les données dans la région supérieure.

Les résidus obtenus sont des résidus absolus. Par conséquent, nous pouvons conclure simplement, en regard des valeurs importantes du champ magnétique à modéliser, que nous avons pu reconstruire correctement le champ à l'intérieur du cône ainsi que ses variations en altitude.

## 10.2 Utilisation des fonctions de base du problème PIII

Représentons maintenant le champ magnétique sur la base locale en utilisant les fonctions de bases du problème PIII. Etant donné la vérification du théorème sur le flux et donc l'absence de restriction sur les ordres  $m$ , toutes les contributions peuvent être représentées.

### 10.2.1 Choix du modèle et des paramètres

Nous considérons maintenant un modèle donné par la différence entre un modèle de Cain et un modèle DGRF 1960.

De la même manière que précédemment, les coefficients de Gauss globaux sont écrits dans le référentiel du cône après avoir subi une rotation d'axe  $C(2^\circ E, 47^\circ N)$ , centré sur la France, et l'angle d'ouverture de la calotte est posé à  $\theta_0 = 5^\circ$ . En revanche, nous prendrons comme altitude supérieure  $b = a + u_m$  avec  $u_m = 500km$ . Ces choix qui diffèrent de ceux de la section précédente sont décidés dans l'optique de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux de la figure (4.8) de la décomposition en harmoniques sphériques sur calotte selon Haines. Ce sont également ces paramètres géométriques que nous utiliserons pour une inversion dans la troisième partie. Notons toutefois qu'une telle altitude permet de contenir à l'intérieur du cône l'ensemble des données des satellites MAGSAT et CHAMP au-dessus de la France et n'est donc pas arbitraire.

Les coefficients de Gauss de la base locale sont trouvés à partir des relations avec les coefficients de Gauss globaux et en utilisant les fonctions de bases appropriées (section 9.3). Nous utilisons des développements pour chacun des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  limités aux indices  $P_{max} = K_{max} = 30$  pour chacun des ordres  $m$  de 0 à 50. Cette manipulation conduit à la définition de quelques 9191 coefficients de Gauss! Nous verrons cependant qu'il ne faudra pas se laisser abuser par ce nombre important et qu'il existe des alternatives pour le réduire (chapitre 12, troisième partie).

Pour cette reconstruction, nous considérerons le même développement  $K_{max}$  pour les coefficients de Gauss internes et externes puisque nous venons de constater qu'un développement insuffisant des coefficients externes pénalise la reconstruction en altitude.

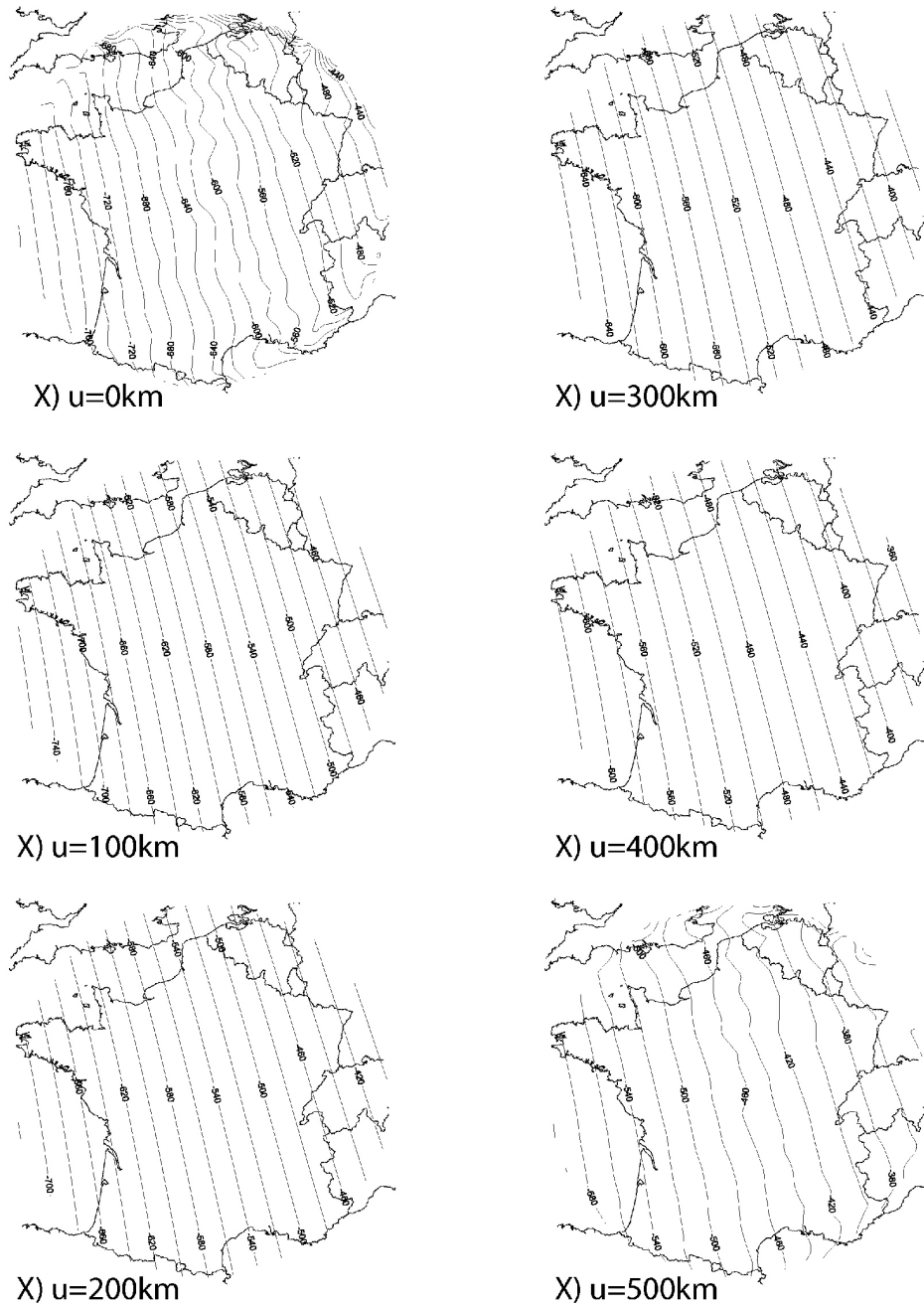


FIG. 10.8 – Reconstruction de la composante  $X$  d'un champ magnétique sur la base locale par la décomposition du problème  $PIII$  et pour des développements en série tronqués à  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Les coefficients de Gauss ont été synthétisés à partir de la différence entre un modèle de Cain 1960 et un modèle DGRF. Le tracé montre différentes reconstructions à des surfaces comprises entre  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  d'altitude.

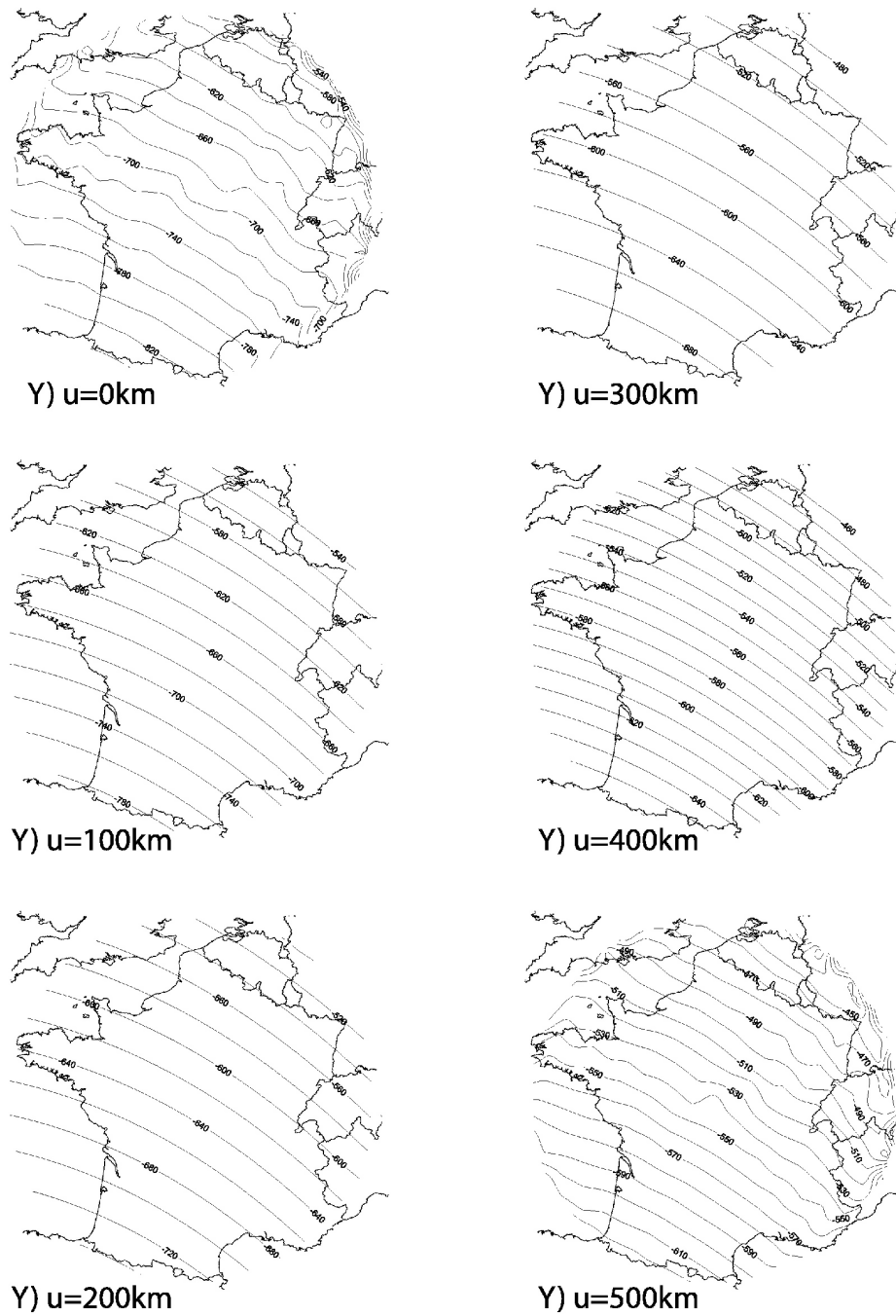


FIG. 10.9 – Reconstruction de la composante  $Y$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.8.

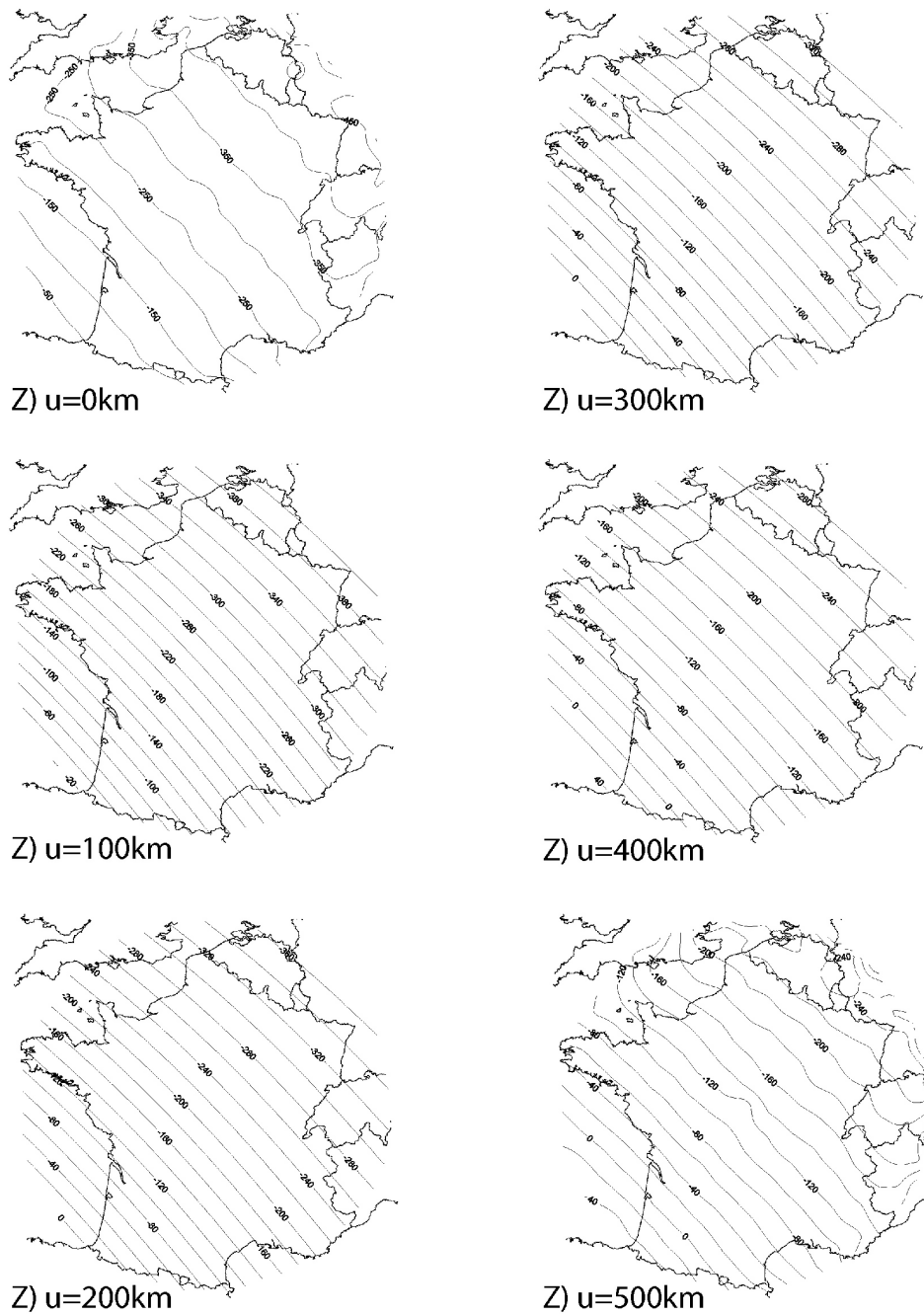


FIG. 10.10 – Reconstruction de la composante  $Z$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.8.

## 10.2.2 Analyse des résultats

### Variations des résidus sur les surfaces

Les figures (10.8), (10.9) et (10.10) montrent respectivement les résultats de la reconstruction des trois composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du champ magnétique.

Les oscillations, ainsi que les effets de bords nettement visibles sur les surfaces d'altitudes  $u = 0km$  et  $u = 500km$ , révèlent les problèmes de reconstruction du champ sur les surfaces limites du domaine dans la version tronquée des séries décrivant le champ magnétique. Néanmoins, sur ces surfaces, le comportement est tout à fait réaliste et coïncide bien avec l'allure du champ synthétique utilisé. Pour pouvoir discerner d'éventuelles différences de comportements, nous représentons figures (10.11), (10.12) et (10.13) les résidus entre les composantes du champ magnétique réel  $\vec{B}$  et le champ magnétique  $\vec{B}^r$  reconstruit dans le cône.

L'évolution des résidus avec l'altitude est tout à fait conforme à ce que nous attendions de la décomposition PIII. Les surfaces, inférieure et supérieure, sont le siège des maxima d'erreur de reconstruction, avec notamment une erreur plus importante sur la surface inférieure que sur la surface supérieure. Puisque les résidus ainsi tracés sont des résidus absolus, cette constatation rend parfaitement compte de la décroissance du champ magnétique avec l'altitude.

De façon générale, l'erreur commise n'excède jamais 5 nT au centre du cône et les erreurs de magnitudes supérieures siègent aux bords de la calotte. Cette dernière affirmation est notamment vraie pour des surfaces hors des frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du cône où l'erreur de reconstruction au centre de la calotte sphérique passe sous le seuil des 0,2nT d'après le choix des isovaleurs. Le tracé des résidus ne montre, à première vue, pas tellement de différences entre les reconstructions des composantes horizontales du champ et la reconstruction de la composante verticale du champ comme nous aurions pu nous y attendre (d'après les résultats des section 8.2.1). Or, il s'avère que les effets de bords sont plus nombreux et ne se limitent plus aux bords de la calotte. Ceci illustre que la composante  $Z$  est particulièrement difficile à représenter au voisinage du cercle en  $\theta = \theta_0$ . On ne manquera pas de constater d'autre part le léger bombement sur la composante  $Z$  au centre de la calotte qui était parfaitement prédit par l'étude sur la reconstruction de la fonction de Schmidt  $P_0^1$  (8.2.1).

### Variation des résidus avec l'altitude

Plutôt que de réaliser différentes reconstructions à différentes altitudes nous pouvons, de la même manière que précédemment, synthétiser les résultats à différentes altitudes en prenant la moyenne de l'erreur de reconstruction sur différentes surfaces échantillonnées tous les 10km en altitude. La figure (10.14) montre le résultat de cette comparaison pour les trois composantes du champ. L'analyse des résidus moyennés sur différentes surfaces laisse maintenant mieux entrevoir la différence de reconstruction entre les composantes horizontale et verticale du champ avec une erreur plus importante sur la composante  $Z$  (Ceci n'est pas toujours clair si l'on se borne à analyser les résidus absolus, ce qui est le cas ici, car ils dépendent donc avant tout de la magnitude de la composante  $Z$  comparée à  $X$  ou  $Y$ ).

En règle générale, ce type de tracé montre une erreur à la surface terrestre importante pour les décompositions qui ont une ou plusieurs composantes qui tendent vers 0 à l'approche des bords, ce qui est, rappelons le, dicté par le choix des conditions aux limites. Par conséquent, ici encore, la variation de l'erreur que nous observons est bien supérieure à l'erreur contenue dans un cône dont nous excluons les bords latéraux. Nous ne pouvons pas exclure le bord inférieur puisque nous devons tracer le champ à la surface terrestre; l'unique manœuvre acceptable est donc de regarder la décroissance de l'erreur à mesure que nous nous éloignons des bords latéraux.

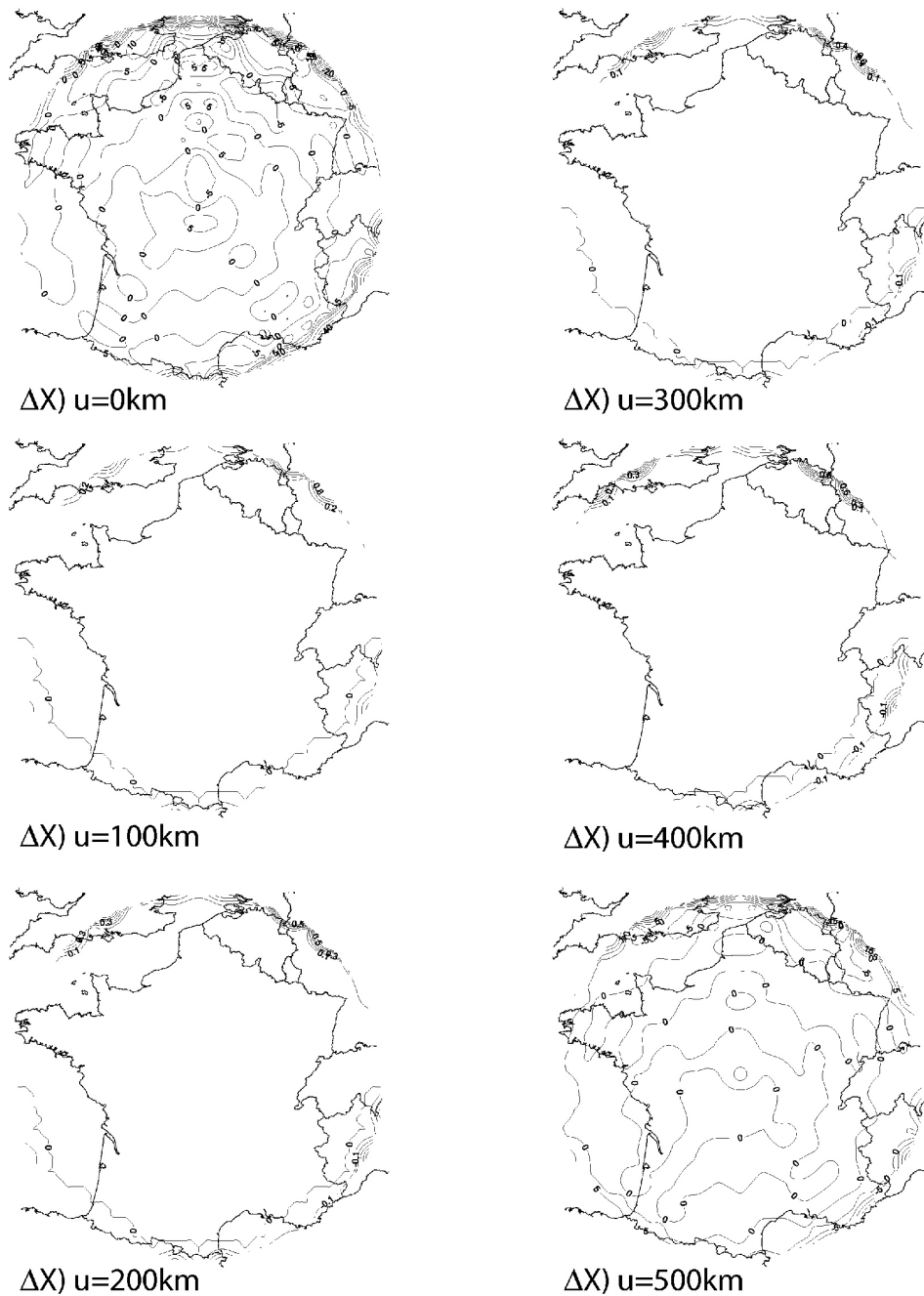


FIG. 10.11 – Résidus entre la composante  $X$  du champ magnétique calculé par un modèle Cain 1960 moins un modèle DGRF et la composante  $X$  du champ reconstruit pour des développements jusqu'aux indices de troncature  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Les lignes d'isovaleurs sont représentées tous les  $5nT$  pour les surfaces en  $u = 0km$  et  $u = 500km$  et tous les  $0,2nT$  aux autres altitudes.

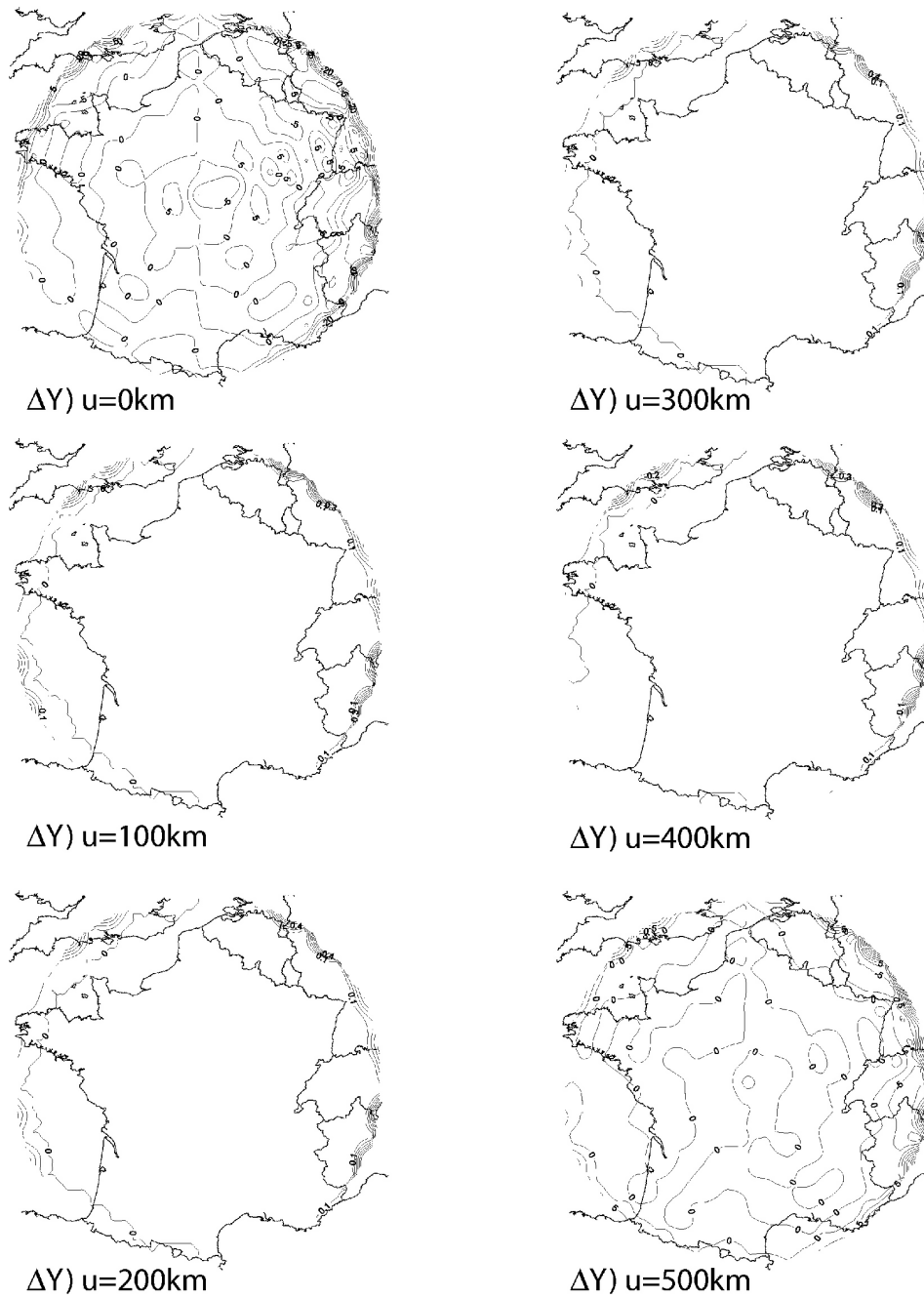


FIG. 10.12 – Résidus entre les composantes  $Y$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.11).



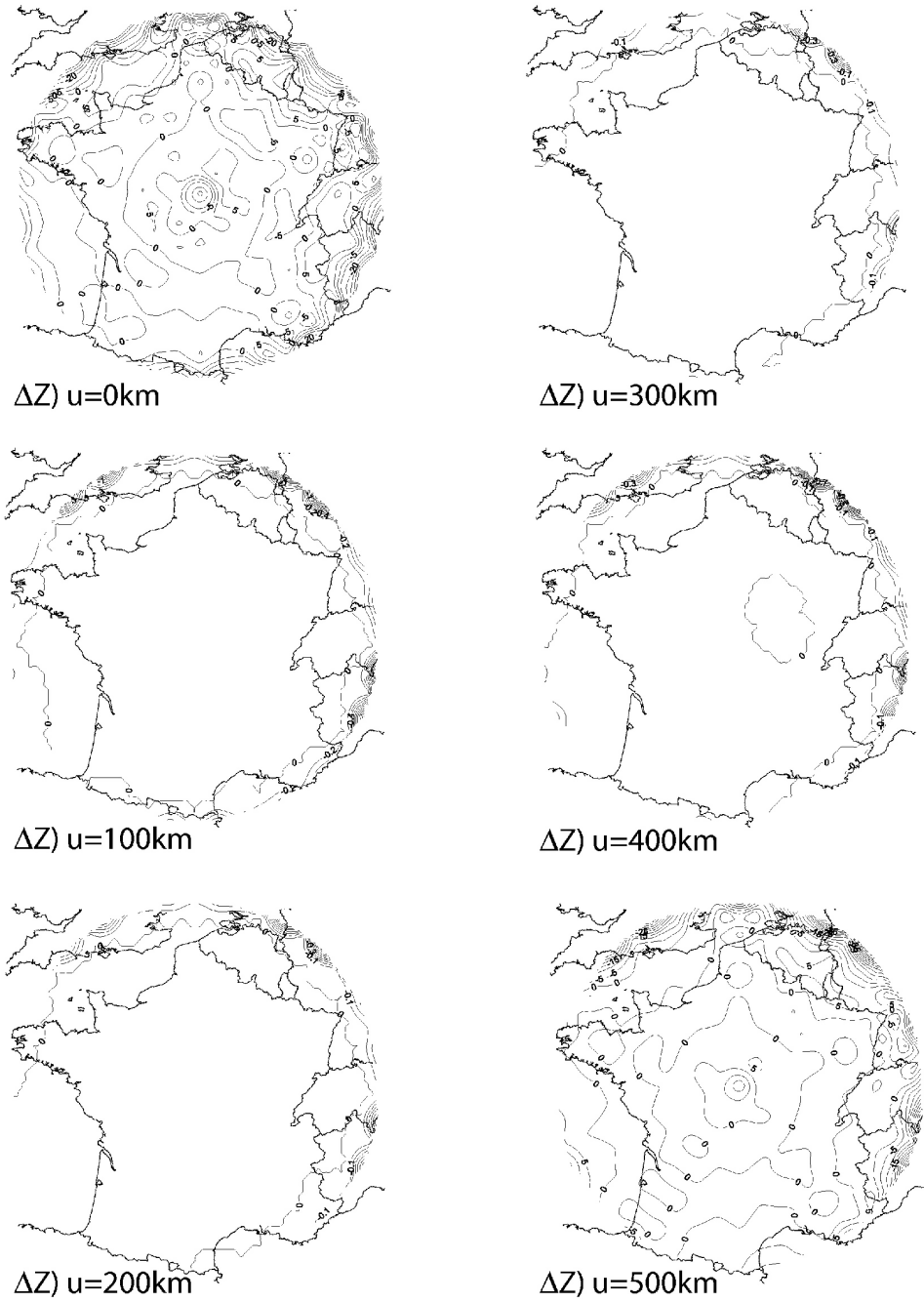


FIG. 10.13 – Résidus entre les composantes  $Z$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.11).

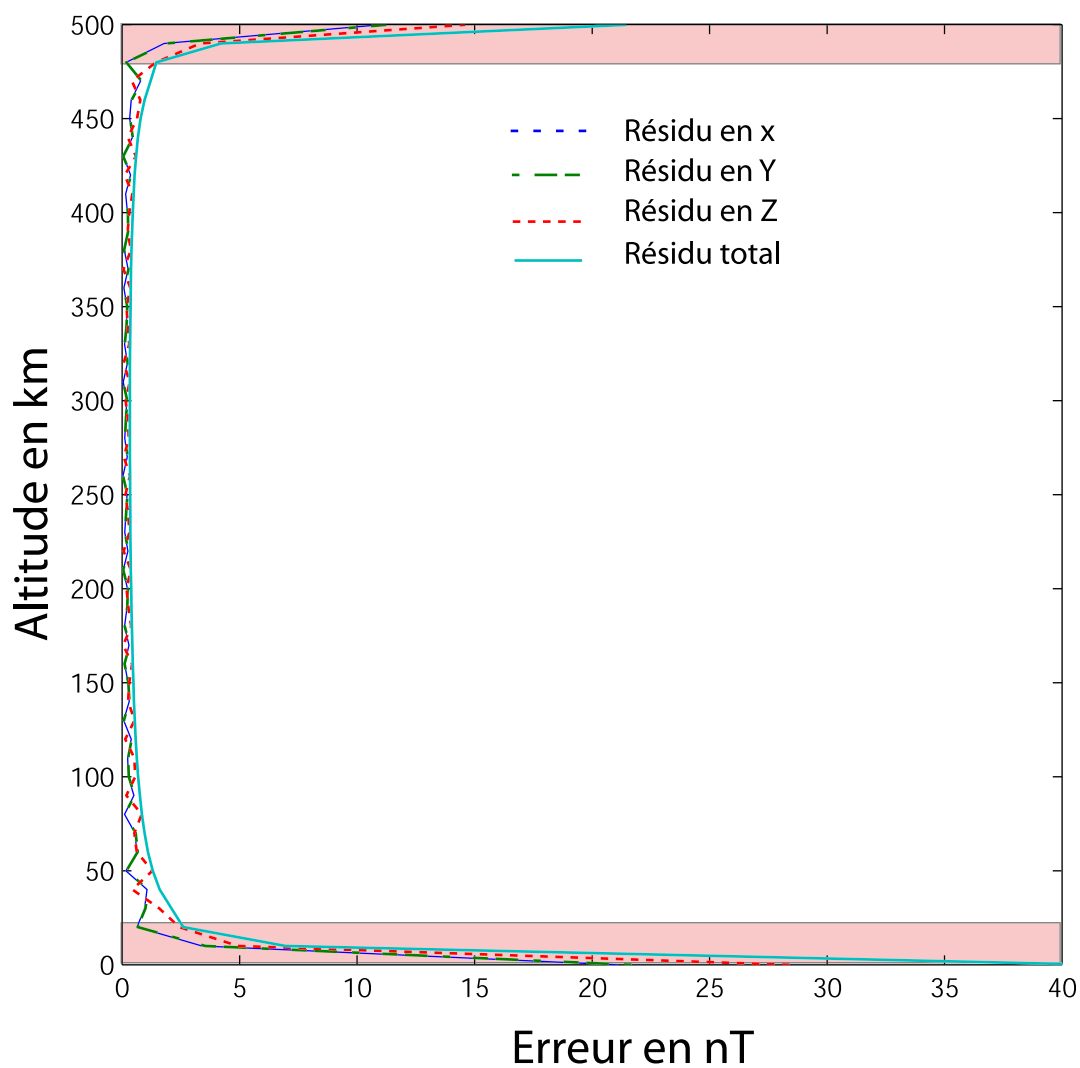


FIG. 10.14 – Représentation synthétique de l'erreur moyenne de reconstruction du champ magnétique par la méthode *PIII* pour différentes surfaces échantillonnées tous les 10 km entre les altitudes  $u = 0\text{ km}$  et  $u = 500\text{ km}$ .

Erreur $\overline{R_\Omega}$ dans $\Omega$ en nT	Erreur $\overline{R_{\partial\Omega_r}}(a)$ sur $\partial\Omega_a$ en nT	angle $\varepsilon$ en deg.
3,8	41,4	0,0
2,2	25,5	0,1
1,2	14,2	0,2
1,1	13,2	0,3
0,9	11,4	0,4
0,8	10,6	0,5

TAB. 10.1 – Variation des erreurs moyennes sur la surface terrestre et dans le volume total lorsque nous excluons des bords une couronne de largeur angulaire  $\varepsilon$

Le tableau 10.1 montre l'erreur moyenne  $\overline{R_{\partial\Omega_r}}(a)$ , définie par (10.2) lorsque nous retranchons une couronne d'angle  $\varepsilon$  près du bord de la calotte. A titre indicatif, nous présentons également la valeur de l'erreur sur l'intensité du champ total  $\overline{R_\Omega}$  en nT moyennée dans le volume et sa variation en fonction de  $\varepsilon$ . Si  $N_p^\Omega$  est le nombre total de points dans le volume, l'erreur dans le volume est définie par :

$$\overline{R_\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_p^\Omega} (B_{x,j} - B_{x,j}^r)^2 + (B_{y,j} - B_{y,j}^r)^2 + (B_{z,j} - B_{z,j}^r)^2}{N_p^\Omega}} \quad (10.3)$$

Cette définition nous permettra ultérieurement de définir l'erreur moyenne par élément de volume associée à chaque couple d'indices de troncature  $(P_{max}, K_{max})$ .

En retranchant une couronne sphérique d'ouverture de plus en plus importante, nous nous rapprochons de plus en plus de la comparaison des champs magnétiques au centre de la calotte et nous constatons une nette diminution de l'erreur. Si la variation des résidus en fonction de l'altitude est bien représentée sur la figure (10.14), les valeurs des résidus sont à interpréter en sachant que nous sommes surtout intéressés par la reconstruction d'un champ en dehors des frontières du cône. Retrancher une fine couronne (ici, nous retranchons au maximum 1/10ème de la taille de la calotte) nous permet d'espérer pouvoir résoudre le champ magnétique avec une précision moyenne de 10,5 nT à la surface terrestre pour des décompositions tronquées à  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Etant donné le nombre de coefficients que cela représente, la résolution du champ est moyennement satisfaisante. Nous introduirons des considérations permettant de réduire ce nombre de coefficients tout en améliorant la résolution par un choix plus avisé des développements. Ces aspects seront largement discutés dans la partie 3 lorsque nous quantifierons l'énergie associée à chaque ordre  $m$ .

En conclusion, nous avons pu vérifier correctement que la méthode *PIII* permettait de reconstruire un champ dans le cône sphérique. Les différents aspects de la reconstruction et les variations radiales et latérales des résidus sont bien expliquées par la façon dont les fonctions de base locales représentent les fonctions de base globales dans le cône.

## 10.3 Utilisation des fonctions de base du problème PIV

### 10.3.1 Choix du modèle et des paramètres

Nous cherchons à reconstruire le champ partiel de la différence entre un modèle de Cain 1960 et un modèle DGRF 1960 en utilisant maintenant les fonctions de bases qui interviennent dans la résolution du problème *PIV*. Les relations, qui expriment les coefficients de Gauss de la base locale à partir des coefficients de Gauss globaux, sont données dans la section (9.4). Les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du champ magnétique sont ensuite reconstruites à partir de (6.49), (6.50) et (6.51) en utilisant les fonctions de base appropriées. Pour cette décomposition, il n'existe pas de restriction sur les ordres  $m$  et nous pouvons procéder au développement de tous les ordres  $m$  aux même indices  $P_{max} = K_{max} = 30$  que précédemment.

La résolution du problème *PIV* exclue les valeurs propres  $k = 0$  pour la base de Mehler et nous n'avons plus à calculer les coefficients constants  $\{G_0^m, H_0^m\}$ . Cette différence réduit le nombre de coefficients de Gauss impliqués dans la reconstruction à 9090.

### 10.3.2 Variations des résidus sur les surfaces

Les figures (10.15), (10.16) et (10.17) donnent la reconstruction du champ magnétique pour les même altitudes que par la méthode *PIII*. Nous remarquons l'équivalence apparente de la reconstruction en dehors des frontières inférieure et supérieure du cône pour les trois composantes du champ. En revanche, la reconstruction à la surface terrestre présente bien plus de distorsions pour les composantes  $X$  et  $Y$  du champ. Pour la composante  $Z$ , la différence entre les deux méthodes est nettement moins nette. Ces comportements différents pour  $X$  et  $Y$  étaient attendus en regard des discussions sur la représentation des fonctions radiales par les méthodes *PIII* et *PIV*. Etant donné que sur les surfaces limites, inférieure et supérieure, les composantes  $X$  et  $Y$  ne sont portées que par la base de Legendre, la convergence vers la solution est beaucoup plus lente pour ces composantes.

### 10.3.3 Variation des résidus avec l'altitude

Nous pouvons quantifier les résidus par la comparaison directe du champ reconstruit et du champ réel. Cette comparaison est illustrée par les figures (10.18), (10.19) et (10.20).

Sur les différentes surfaces, les isolignes ont été choisies de manière à ce que nous puissions comparer directement les résidus entre la méthode *PIII* et la méthode *PIV*. Nous observons une tendance plus désordonnée dans les résidus. A ces degrés du développement, ces tendances n'entraînent pourtant pas de différence majeure avec la méthode *PIII* car les résidus n'excèdent pas  $0,1nT$ . Ceci montre bien l'équivalence des deux méthodes pour des développements importants mais suggère également que les reconstructions à des degrés  $P_{max}$  et  $K_{max}$  moindres est une entreprise plus délicate.

Les surfaces limites du domaine sont des zones plus critiques et les reconstructions montrent des résidus qui empiètent sur l'intérieur de la calotte et qui ne se cantonnent plus uniquement près des bords. Le tracé des résidus moyens sur des surfaces échantillonnées tous les 10km sur la figure (10.21) montre l'augmentation de l'erreur à mesure que l'on se rapproche des surfaces inférieure et supérieure. Le résidu moyen à la surface terrestre atteint une valeur de 68,32 nT pour une erreur moyenne dans le volume de 7,1 nT.

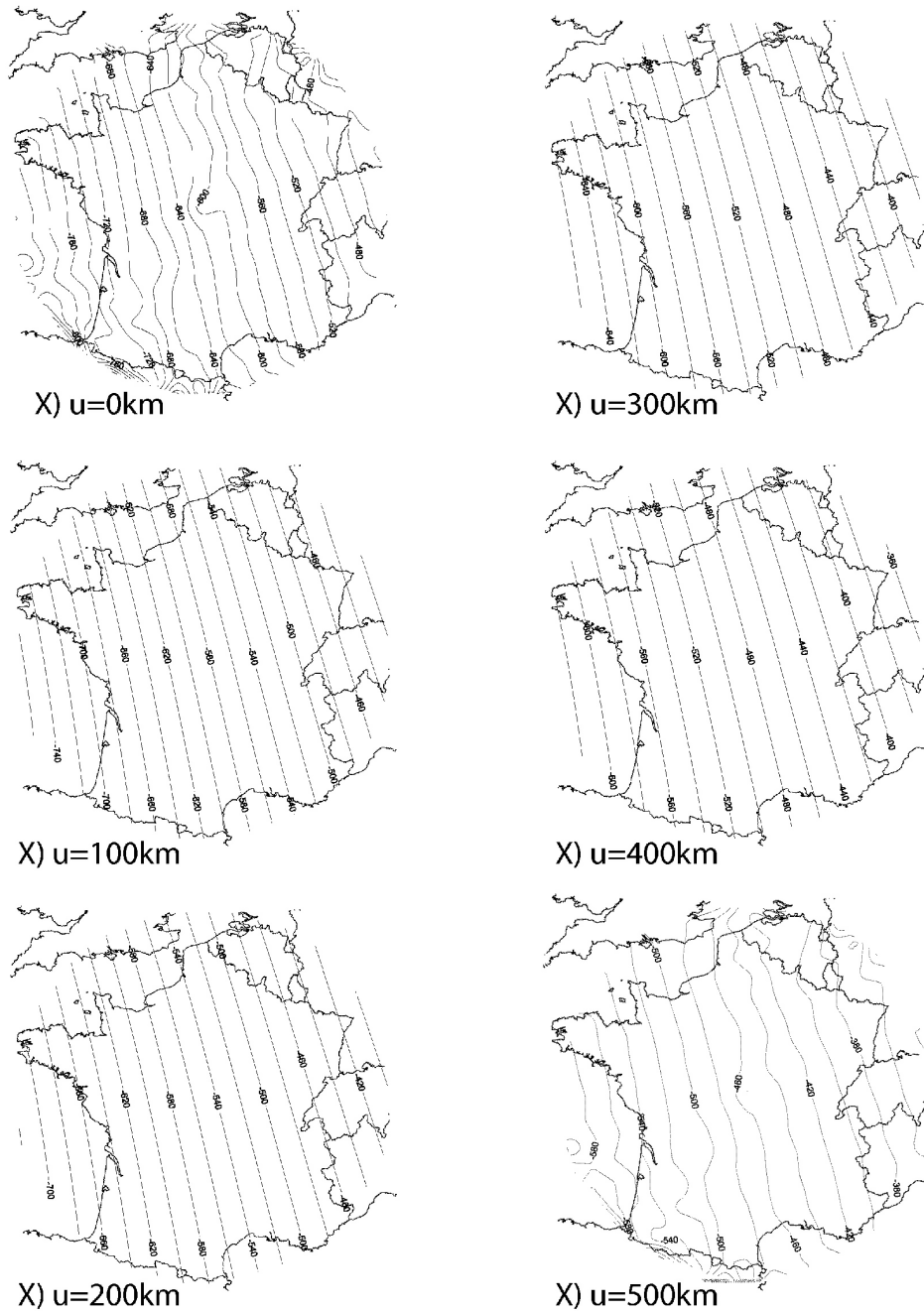


FIG. 10.15 – Reconstruction de la composante  $X$  d'un champ magnétique sur la base locale par la décomposition du problème  $PIV$  et pour des développements en série tronqués à  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Les coefficients de Gauss ont été synthétisés à partir de la différence entre un modèle de Cain 1960 et un modèle DGRF. Le tracé montre différentes reconstructions à des surfaces comprises entre  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  d'altitude.

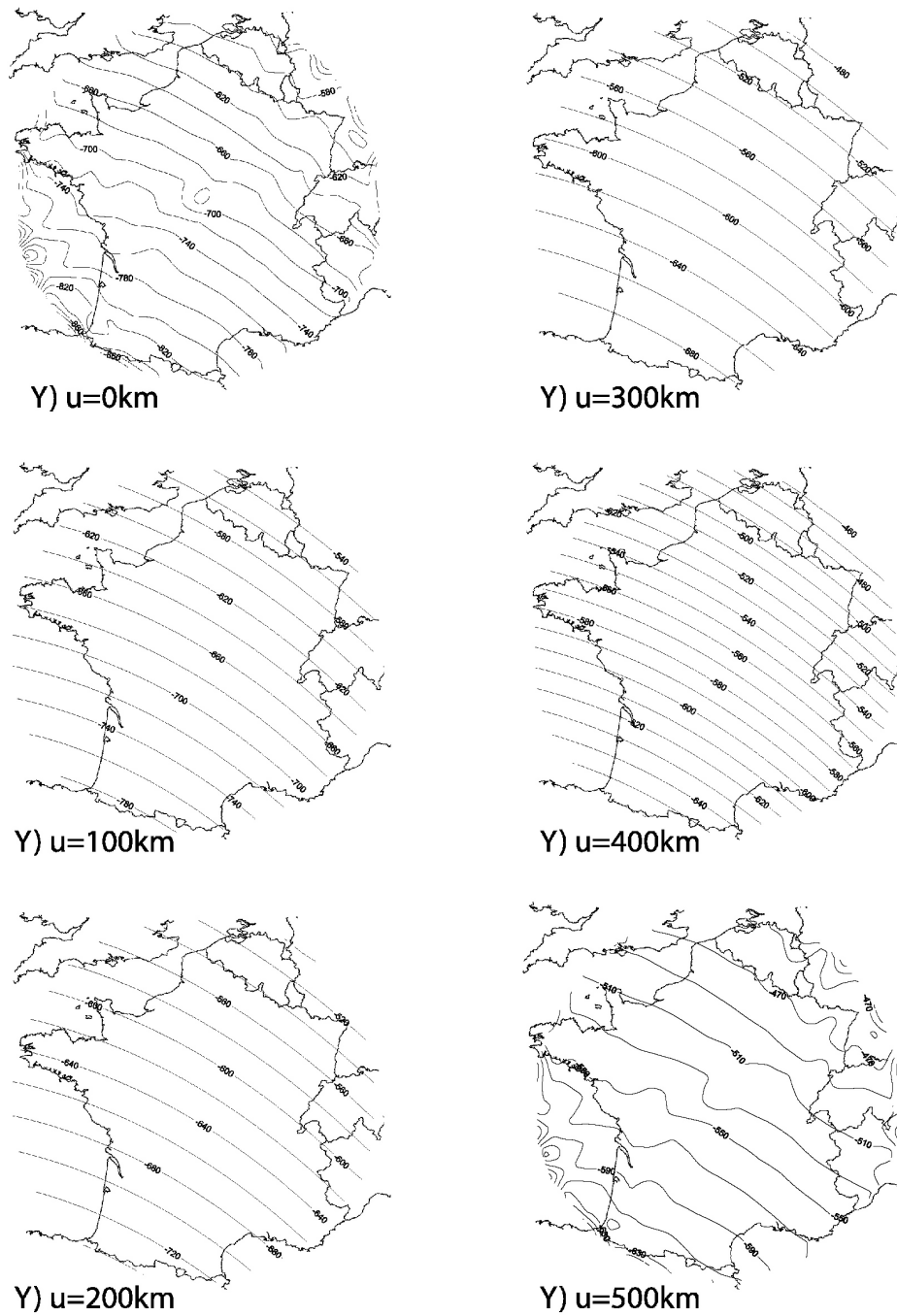


FIG. 10.16 – Reconstruction de la composante  $Y$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.15.

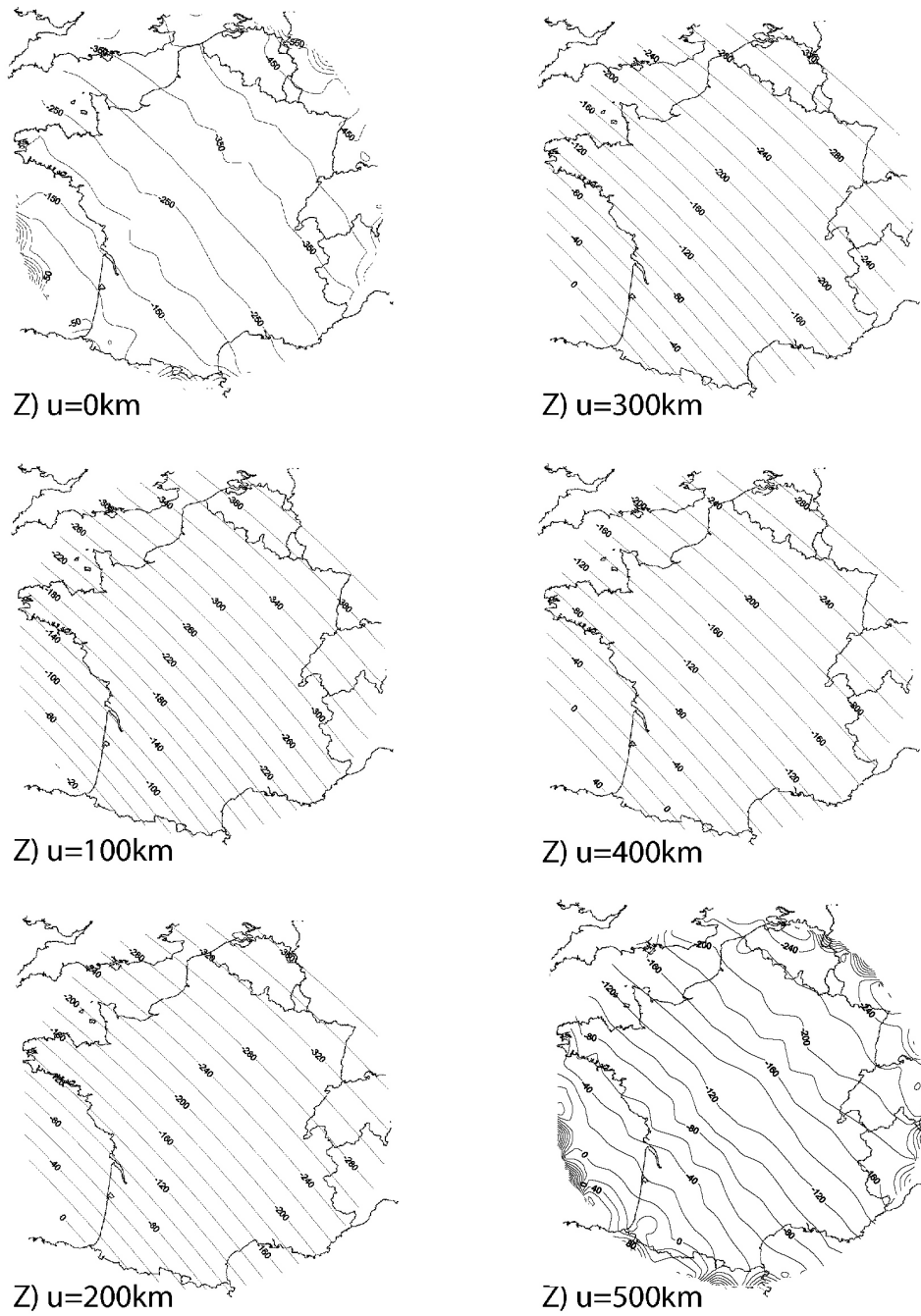


FIG. 10.17 – Reconstruction de la composante  $Z$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.15.

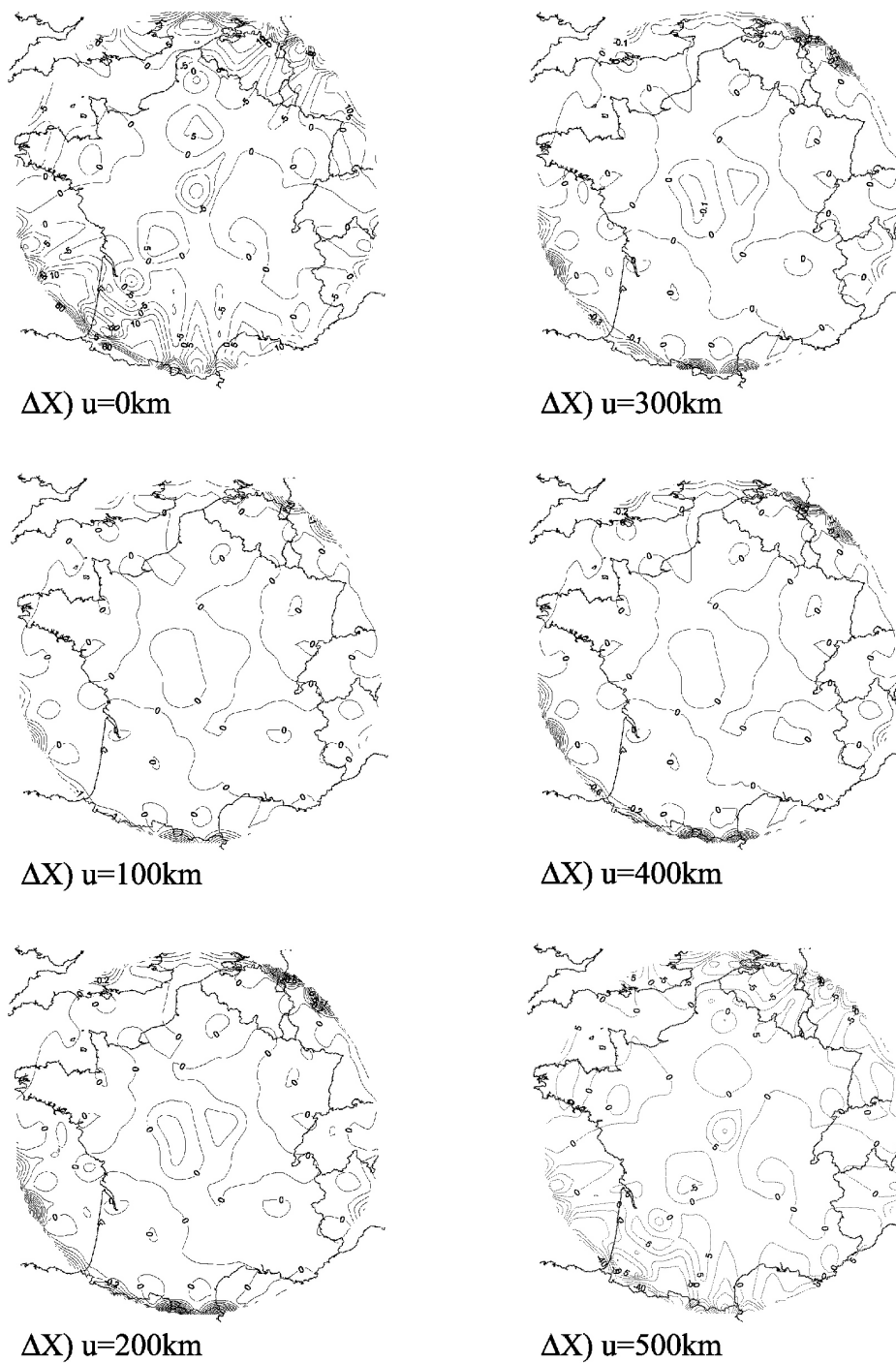


FIG. 10.18 – Résidus entre la composante  $X$  du champ magnétique calculé par un modèle Cain 1960 moins un modèle DGRF et la composante  $X$  du champ reconstruit pour des développements jusqu'aux indices de troncature  $P_{max} = K_{max} = 30$  par la méthode PIV. Les lignes d'isovaleurs sont représentées tous les  $5nT$  pour les surfaces en  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  et tous les  $0.2nT$  aux autres altitudes.



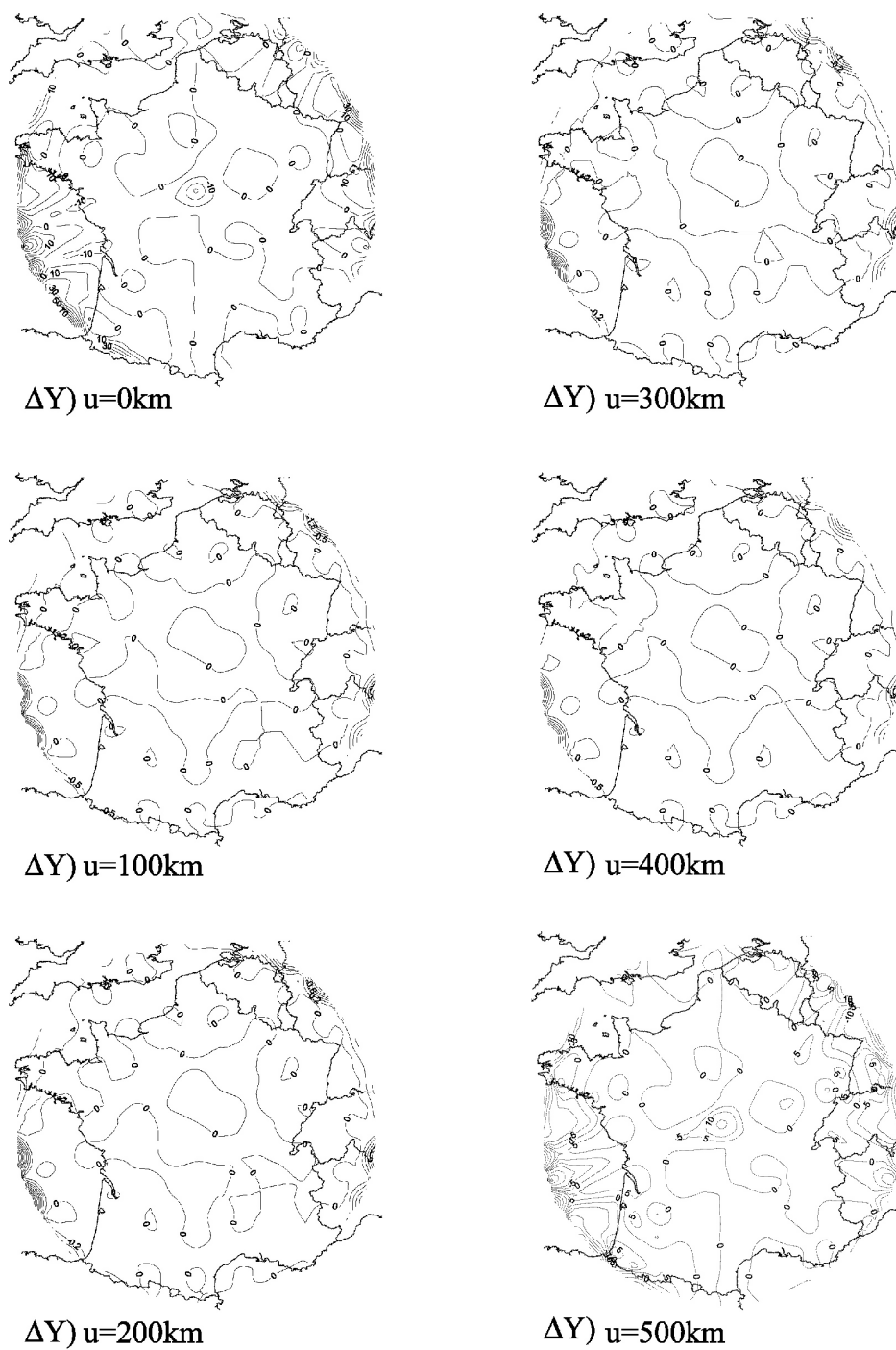


FIG. 10.19 – Résidus entre les composantes  $Y$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.18).

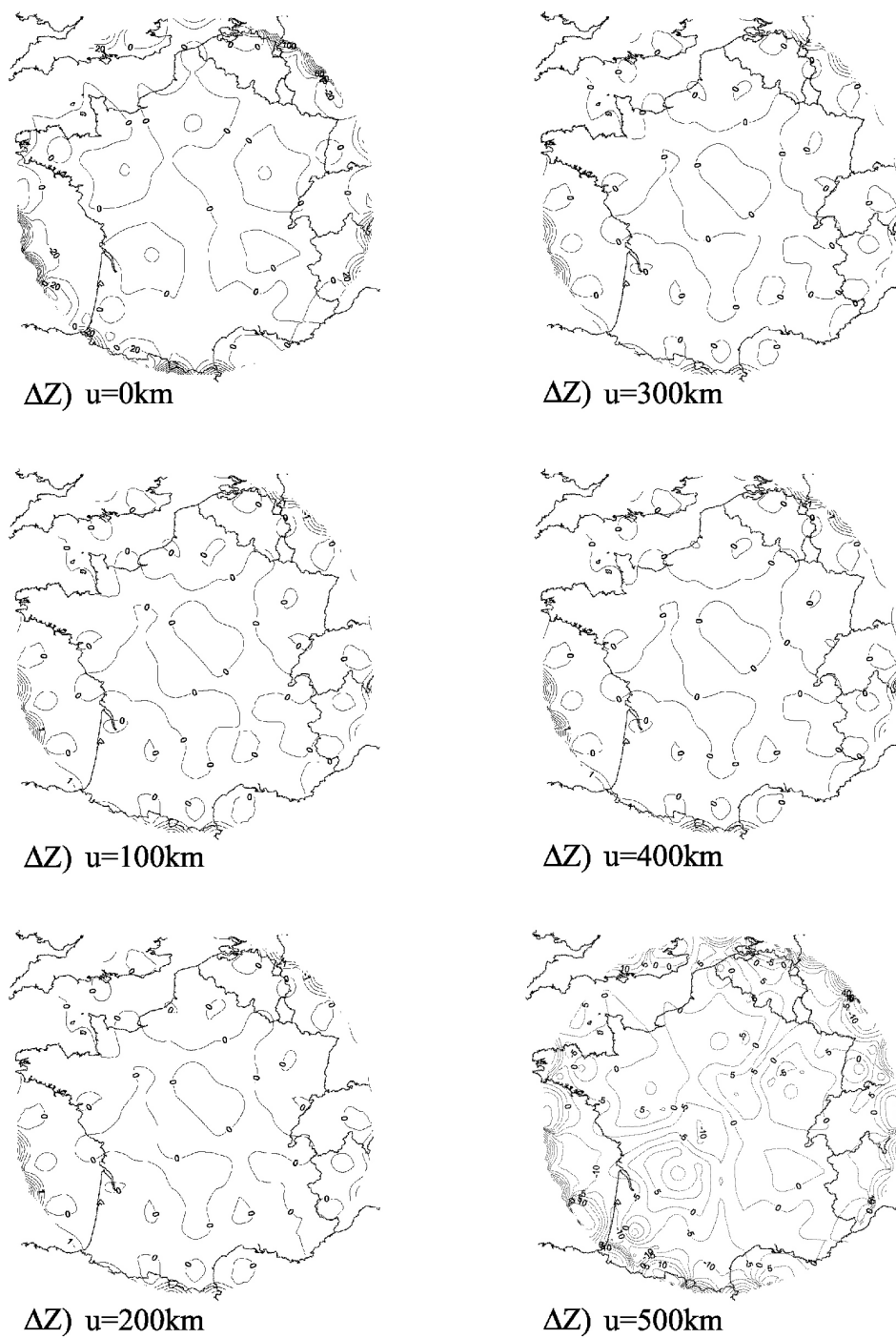


FIG. 10.20 – Résidus entre les composantes  $Z$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.18).

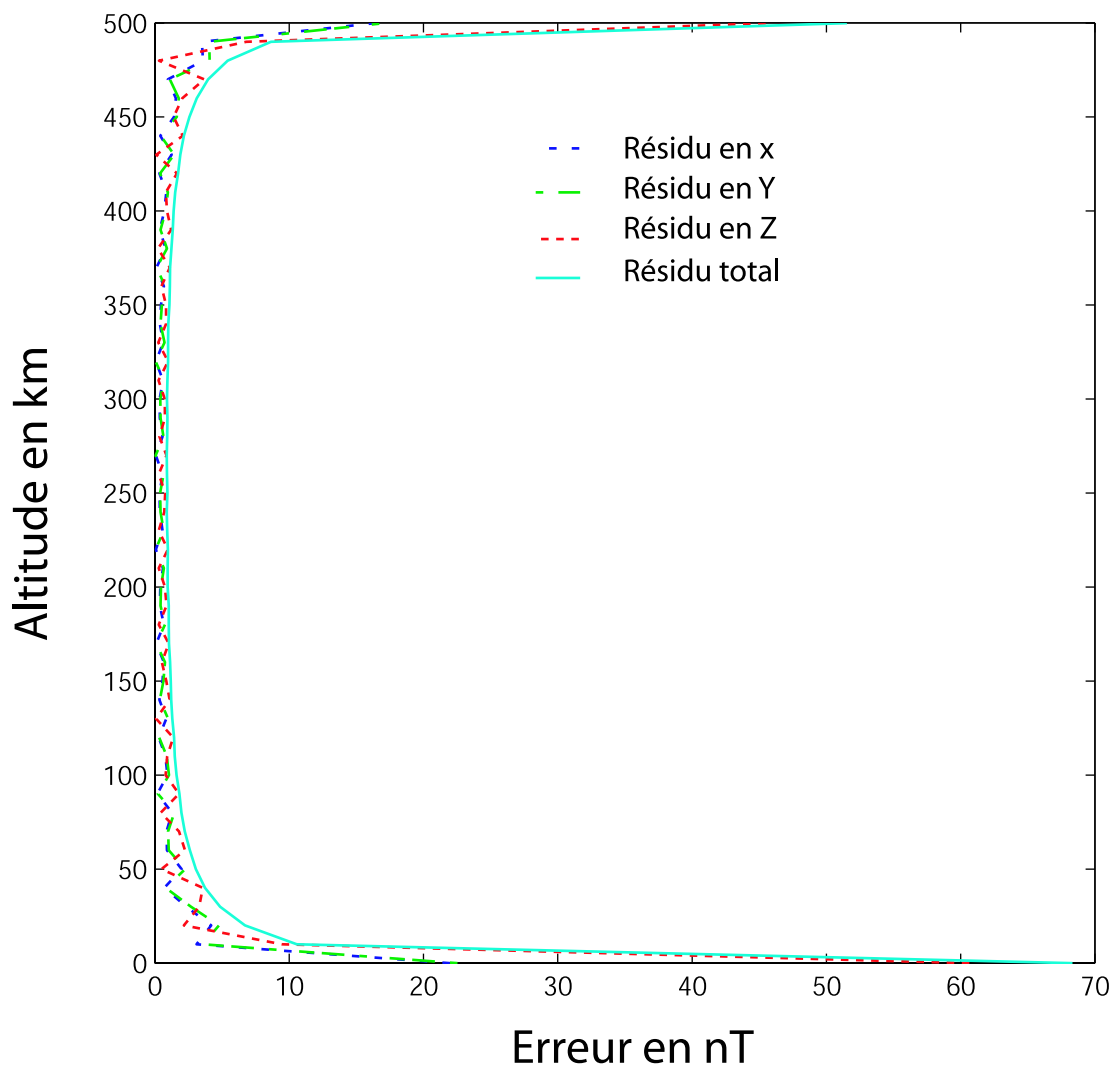


FIG. 10.21 – Représentation synthétique de l'erreur moyenne de reconstruction du champ magnétique par la méthode *PIV* pour différentes surfaces échantillonnées tous les  $10\text{km}$  entre les altitudes  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$ .

Erreur $\overline{R_\Omega}$ dans $\Omega$ en nT	Erreur $\overline{R_{\partial\Omega_r}(a)}$ sur $\partial\Omega_a$ en nT	angle $\varepsilon$ en deg.
7,1	68,3	0,0
3,1	32,0	0,1
1,7	18,0	0,2
1,5	16,7	0,3
1,3	14,3	0,4
1,2	13,4	0,5

TAB. 10.2 – Variation des erreurs moyennes sur la surface terrestre et dans le volume total lorsque nous excluons des bords une couronne de largeur angulaire  $\varepsilon$

Ici encore, les effets de bords conjugués sur toutes les surfaces contribuent à l'augmentation de la valeur du résidu moyen sur la surface ou dans le volume. Nous observons, dans le tableau 10.2, la décroissance du résidu à mesure que nous retranchons une couronne d'angle  $\varepsilon$  sur les bords. Quoi qu'il en soit, nous constatons nettement que la méthode *PIV* implique une erreur de reconstruction plus importante que la méthode *PIII* dans sa version tronquée, et pas uniquement sur la surface terrestre. Au centre du cône le résidu total est plus important par *PIV* que par *PIII* et nous voyons la manifestation de la convergence, plus lente, des fonctions radiales  $R_p(r)$  impliquées dans cette reconstruction.

Les reconstructions numériques sont en très bon accord avec ce que nous pouvions attendre de la méthode *PIV* d'après les discussions sur la vitesse de convergence des séries. L'idée que la reconstruction *PIV* dégrade davantage les composantes  $X$  et  $Y$  du champ et que, par conséquent, l'erreur est plus importante semble bien se confirmer après vérification sur ce cas synthétique.

### 10.3.4 Discussion générale et choix de la décomposition

D'après ces différents résultats, les relations entre les coefficients de Gauss locaux et globaux obtenus à partir des conditions aux limites permettent de reconstruire effectivement un champ global de manière tout à fait satisfaisante en n'importe quel point de l'intérieur du domaine. Sur ce point élémentaire, la théorie du potentiel se vérifie donc indiscutablement en considérant pourtant des développements finis.

En pratique, cependant, nous devons revoir le nombre de coefficients de Gauss à la baisse et considérer les limites de la reconstruction du champ par rapport aux développements  $P_{max}$  ou  $K_{max}$  permis par la répartition des données dans le domaine. Il nous faut, de plus, prendre en compte la région de l'espace sur laquelle le champ sera représenté et choisir la décomposition la plus précise sur cette région. Ce dernier critère nous impose pratiquement le choix de la décomposition car les fonctions de base de problème *PIV* ne permettent pas de reconstruire correctement le champ près de la surface terrestre ; or, bien naturellement, le champ magnétique terrestre y est classiquement représenté. Les solutions du problème *PIII* semblent, par conséquent, les plus adaptées mais nous garderons à l'esprit que, malgré le meilleur compromis qu'elles offrent, la surface terrestre reste l'une des régions les moins bien représentées, car elle constitue une limite géométrique du domaine de définition où divers effets de bords se superposent.

## 10.4 Accélération de la convergence à la surface terrestre

La partie 3 sera en partie dévolue à la recherche du nombre optimal de coefficients et des troncatures ( $M_{max}, P_{max}, P_{max}$ ) associées. En revanche, s'il est possible de prévoir des développements adaptés, nous ne pouvons pas mieux représenter le champ sur une surface particulière. Par conséquent, puisque nous cherchons à représenter le champ à la surface terrestre en particulier, nous devons avoir recours à des techniques d'accélération de convergence qui, seules, peuvent nous permettre mener à bien cette tâche.

### 10.4.1 La méthode de Fejer

Considérons les développements en série des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  comme une généralisation des séries de Fourier pour lesquelles certains théorèmes de convergence existent. Nous basons nos propos sur un théorème que nous devons, dans sa première formulation, à Fejer (Lanczos, 1988) :

**Théorème** Si une série infinie converge vers la somme  $s$ , alors la série est sommable par moyenne arithmétique et converge vers la même valeur de  $s$  ([110], chapitre 2, § 7.2).

Pour chacun des deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , nous sommes limités par les vitesses de convergence respectives des séries (8.8) et (8.9). Nous pouvons accélérer la convergence de ces séries en posant pour (8.8) :

$$S_{K_{\max}}(\theta) = \sum_{k=1}^{K_{\max}} \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{K_{\max}}\right)}_{Fc_k} \frac{\langle P_l^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} P_{n_k}^m(\theta) \quad (10.4)$$

et pour (8.9) :

$$S_{P_{\max}}(r) = \sum_{p=1}^{P_{\max}} \underbrace{\left(1 - \frac{p-1}{P_{\max}}\right)}_{Fc_p} \frac{\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}, R_p \rangle}{\|R_p\|^2} R_p(r) \quad (10.5)$$

où les coefficients  $Fc_k$  et  $Fc_p$  sont également appelés *facteurs de convergence*. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{K_{\max} \rightarrow \infty} S_{K_{\max}}(\theta) &= P_l^m(\theta) \\ \lim_{P_{\max} \rightarrow \infty} S_{P_{\max}}(r) &= \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \end{aligned}$$

Lorsque l'on exprime les gradients des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  en termes des séries (10.4) et (10.5) plutôt que par (8.8) et (8.9), on peut atténuer en partie les phénomènes de Gibbs. Si nous utilisons le même argument dans la reconstruction du champ, les oscillations observées à la surface terrestre seront réduites. Les propriétés de cette nouvelle formulation sont illustrées sur la figure (10.22) qui l'on peut comparer aux figures (10.8) et (10.11). Sur cette figure, seule la composante  $Z$  du champ magnétique, reconstruit à partir des fonctions de base du problème *PIII*, est représentée. Sur la surface terrestre, le champ étant porté uniquement par la base de Legendre, la composante  $Z$  converge plus lentement que  $X$  ou  $Y$  ; par conséquent, le même exercice réalisé sur  $X$  et  $Y$  présente un meilleur comportement.

La figure montre que la sommation par moyenne arithmétique (10.4) filtre les hautes fréquences. Puisqu'elle pondère les harmoniques de hauts degrés  $n_k$ , ceci conduit à la diminution de l'amplitude des petites longueurs d'onde et offre une bonne contrainte de lissage. Les petites longueurs d'onde du champ magnétique sont justement perturbées par le phénomène de Gibbs ; par conséquent, cette manipulation ne représente pas une perte d'information importante. D'autre part, nous ne le montrerons pas ici mais nous remarquons, de manière empirique, que les résidus sur la calotte avant ou après accélération de la convergence sont pratiquement identiques en moyenne. Ainsi, la technique de convergence par moyenne arithmétique n'accélère pas la convergence dans toutes les régions de l'espace. Elle redistribue les résidus à l'intérieur du cône, ce que montre nettement la figure (10.22 b). La convergence par (10.4), par exemple, réduit les résidus au centre du cône mais augmente les *effets de bords* près de la surface latérale. Les mêmes propriétés sont attribuées à l'utilisation de la série par moyenne arithmétique par (10.5). Pour cette série, les résidus sur les surfaces inférieure et supérieure du cône augmentent et seul le centre de l'intervalle  $[a, b]$  en altitude bénéficie de cette technique. Pour la représentation du champ à l'altitude terrestre, l'utilisation de (10.5) n'est donc pas pertinente.

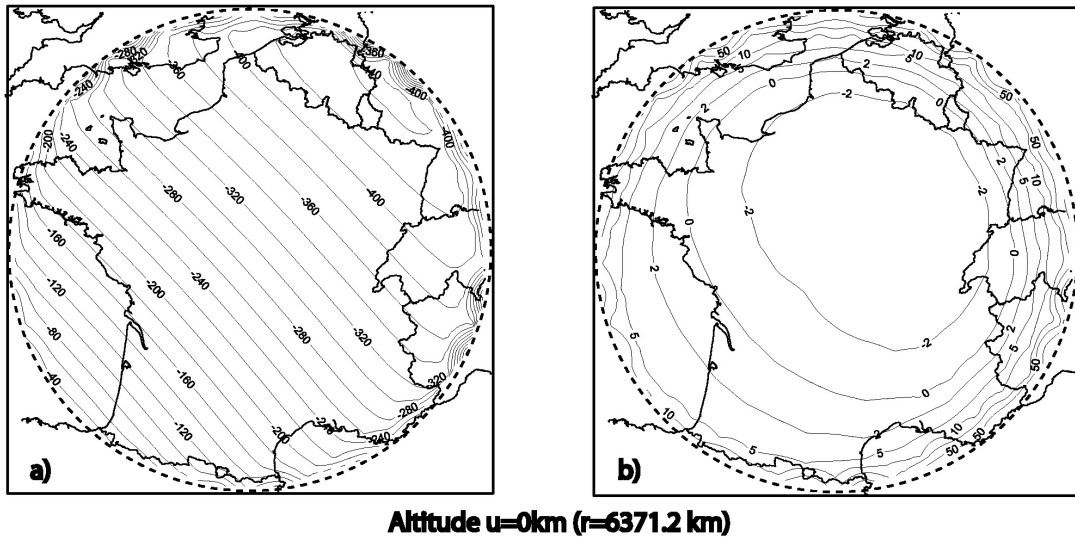


FIG. 10.22 – On accélère la convergence de la composante  $Z$  du champ reconstruit à la surface terrestre (à partir des fonctions de bases de la méthode  $P_{III}$ ) par le calcul des séries de Fejer par (10.4) et (10.5). Cela se caractérise par la disparition des oscillations au centre de la calotte et une accentuation des effets de bords (fig. a) mais provoque également un biais dans les résidus (fig. b).

L'accélération de la convergence par la méthode de Fejer permet finalement d'avoir une reconstruction du champ plus réaliste au centre du cône. Les interprétations, sur le champ ainsi calculé, seront donc moins hasardeuses ; même si l'accélération occulte une partie de l'information elle permet d'éviter de se fourvoyer dans des interprétations que pourraient suggérer les oscillations du champ, résultat du phénomène de Gibbs.

#### 10.4.2 Une méthode empirique

La méthode de Fejer provoque un biais dans les résidus et est dévolue au calcul du problème direct. Une autre méthode, qui permet d'éviter ce phénomène et d'être appliquée au problème inverse, consiste à retrancher une couronne d'ouverture angulaire  $\varepsilon$  près des bords. L'argument permettant de justifier cette pratique est simple. Si la troncature des séries est insuffisante, les points de mesures situés dans un intervalle près des bords latéraux peuvent être considérés comme des points isolés (*outliers*) en raison du phénomène de Gibbs. La méthode des harmoniques sphériques sur calotte sous forme de séries partielles ne permettra donc jamais de les résoudre précisément. Or, par analogie avec les régressions linéaires simples, un seul point isolé peut influencer de manière importante sur la détermination des paramètres si sa distance en norme par rapport au modèle est importante. Ce phénomène est intimement lié à la minimisation de la norme  $l^2$  utilisée pour la résolution du problème par moindres carrés ordinaires ([104]). Nous n'entrerons pas pour le moment dans les caractéristiques d'un problème inverse, qui sera l'objet de la prochaine partie. Nous raisonnons sur la reconstruction de la fonction de Schmidt  $P_1^0(\theta)$  par les fonctions de Legendre associées aux conditions aux limites  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$  (figure 8.2 1b).

En utilisant une discrétisation fine de la fonction  $P_1^0(\theta)$  sur l'intervalle  $[0, \theta_0 - \varepsilon]$ , on constitue

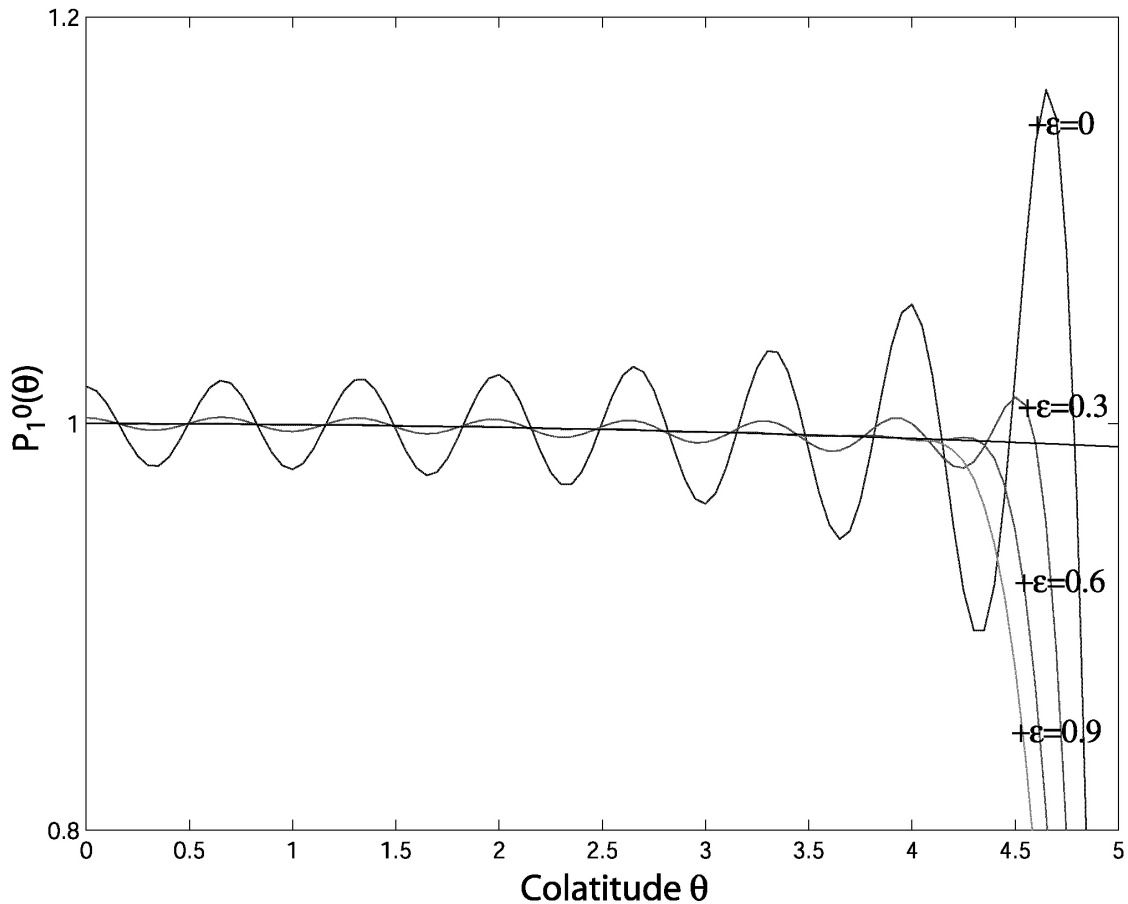


FIG. 10.23 – Par inversion d'un ensemble de valeurs de la fonction  $P_1^0$  dans l'intervalle  $[0, \theta_0 - \varepsilon]$  nous obtenons les coefficients  $c_k$  de l'expression (8.8). Retrancher une couronne d'angle  $\varepsilon$  sur les bords améliore sensiblement la résolution des données en dehors de bords.

un ensemble de données que l'on essaye de modéliser par les fonctions de Legendre généralisées d'ordre  $m = 0$  et de degrés  $n_k$ . La relation (8.8) s'écrit comme un système linéaire :

$$\underline{P}_1^0 = \mathbf{P}\underline{C}_\varepsilon \quad (10.6)$$

avec  $\underline{P}_1^0$  le vecteur des valeurs discrétisées de la fonction de Schmidt,  $\mathbf{P}$  la matrice des fonctions de Legendre généralisées et  $\underline{C}$  le vecteur des coefficients recherchés. En pratique, le vecteur des coefficients varie selon la répartition des données. *A fortiori*, en retranchant une fine couronne d'angle variable  $\varepsilon$ , l'estimation numérique de ces coefficients change, d'où la présence de l'indice  $\varepsilon$ .

En faisant varier  $\varepsilon$  entre  $0^\circ$  et  $1^\circ$ , nous trouvons les coefficients  $\underline{C}_\varepsilon$  de l'inversion par moindre carré de (10.6) à partir desquels nous recalculons les problèmes directs, que nous comparons sur la figure (10.23).

Cet artifice permet indiscutablement un gain substantiel dans la représentation des fonctions de Legendre sur l'intervalle  $\theta = [0, \theta_0 - \varepsilon]$  prouvant que le phénomène de Gibbs interfère avec la résolution des données. Remarquons de plus, que ce choix ne conduit qu'à une augmentation des résidus sur le bord de la calotte mais n'entraîne pas de biais en son centre; les fonctions

reconstruites conservent leur caractère oscillant, contrairement à celles obtenues par la méthode de Fejer.

Appliquée à l'inversion de données magnétiques, cette manipulation conduit à la dégradation du conditionnement de la matrice d'inversion. L'autre possibilité, moins brutale, consiste à appliquer un poids  $\mathbf{W}$  différent de 0 sur les données de colatitude  $\theta > \varepsilon$  (puisque ce que nous venons de réaliser consiste à associer un poids nul aux données contenues dans la couronne d'angle  $\varepsilon$ ). Cette simple manipulation conduit à un bon compromis entre l'ajustement sur les données et la stabilité de l'inversion, pour peu que nous choisissons un angle  $\varepsilon$  adapté.

On pourra objecter que la valeur des coefficients  $\underline{C}_\varepsilon$  s'éloigne de plus en plus de celle des coefficients analytiques  $\underline{C}$ , à mesure que  $\varepsilon$  augmente, car les fonctions de Legendre généralisées ne sont plus orthogonales sur  $[0, \theta_0 - \varepsilon]$  pour  $\varepsilon \neq 0$ . Les coefficients  $\underline{C}$  et  $\underline{C}_\varepsilon$  ne sont plus directement comparables et nous perdons par conséquent un élément comparatif utile pour la maîtrise du problème inverse. Cela a néanmoins peu d'importance dans le cas pratique car la résolution analytique et l'inversion sont deux problèmes différents. La résolution analytique revient à minimiser l'erreur de reconstruction lorsque les développements sont infinis et l'inversion numérique cherche à minimiser l'erreur étant donné un ensemble fini de coefficients, les deux techniques ne coïncidant que lorsque les développements permettent de négliger le reste des sommes tronquées ce qui, nous le verrons, est un cas peu rencontré en pratique.





## Conclusions de la seconde partie

En analysant quatre problèmes de conditions aux limites pour la résolution de l'équation de Laplace dans un cône fini, nous avons été en mesure de construire des bases de fonctions adaptées à la reconstruction d'un champ magnétique dans une région délimitée par le domaine  $\Omega$ . L'utilisation de conditions aux limites, sur tous les bords du domaine  $\Omega$ , nous a ensuite permis de trouver des relations analytiques entre les coefficients de Gauss du développement en harmoniques sphériques sur la sphère entière et les coefficients de Gauss du développement dans un cône fini.

Bien que trois des quatre problèmes soient formellement équivalents, la convergence de leurs solutions et leur capacité de représentation d'un champ magnétique sont intimement liées aux conditions aux limites choisies (Nous considérons le problème *PI* comme étant particulier du fait de la difficulté soulevée par la représentation des termes zonaux d'un champ). Cette première considération nous conduit à analyser le phénomène de Gibbs et à définir les régions où il intervient majoritairement. En raison de la distribution des données magnétiques terrestres, et puisque nous voulons représenter ce champ à la surface du globe, nous devons exclure les problèmes qui ne convergent pas rapidement sur cette surface. Cette condition draconienne ne sélectionne qu'une seule décomposition parmi les quatre de départ : la décomposition *PIII*. Il est intéressant de constater que la représentation du champ magnétique dans le cône par cette décomposition montre une parfaite cohérence avec les détails procurés par l'analyse des convergences. Il n'en reste pas moins que la reconstruction du champ dans le cône a montré, après comparaison avec le champ initial, des valeurs de résidus importants étant donné le développement des séries utilisées. Ce point, qui a première vue est sans issue, sera cependant levé par un examen attentif des contributions respectives de chaque indice du développement sur la reconstruction. Il deviendra vite évident que les développements et le choix des indices ne pourront pas être irréflechis, sous peine de rechercher des coefficients de Gauss de contributions négligeables et d'ignorer des coefficients de Gauss importants pour la reconstruction. Ces différents aspects pourront être discutés d'un point de vue énergétique et nous pourrons alors déterminer les meilleurs développements possibles, ainsi que l'estimation de l'erreur de reconstruction engendrée par le choix des indices de troncatures. Gardons cependant à l'esprit que le problème inverse et le problème direct sont deux procédés distincts. Ainsi, même si le problème direct semble converger lentement, absolument rien ne nous permet d'affirmer que le problème inverse ne pourra pas trouver des coefficients qui s'ajustent bien au champ magnétique, même dans le cas de troncatures sévères.



## Troisième partie

# Informations *a priori* et problèmes inverses



# Introduction

Les fonctions de base vues dans la partie précédente permettent de modéliser un champ de potentiel par l'intermédiaire de développements en séries. Jusqu'à présent, nous n'avons pas quantifié systématiquement l'erreur que nous faisons lorsque nous tronquons les séries ; nous n'avons pu la déduire que sur des exemples synthétiques particuliers. Pour pouvoir estimer ces erreurs plus précisément, nous ne pouvons plus nous contenter de la simple comparaison des valeurs du champ sur une grille de points car nous ne savons pas dans quelle mesure cette estimation concorde avec l'erreur réelle sur une grille finement interpolée. Ce travail serait de plus coûteux puisqu'il nécessite le calcul systématique du champ à des troncatures, chaque fois différentes, qu'il faut comparer au champ initial pour une myriade de distributions de points. Une façon de procéder est de passer au cas continu et de considérer la norme du champ dans le domaine d'étude. Ce domaine pourra être associé soit au volume conique, soit à une surface particulière dans le cône.

Dans un premier temps, il s'agira de formuler les normes de volume et de surface pour chacun des formalismes, celui des harmoniques sphériques ordinaires et celui des harmoniques sphériques dans le cône. Nous nous reportons chaque fois que cela est possible aux expressions bien connues en harmoniques sphériques pour valider nos expressions analytiques.

Dans un second temps, nous nous appuyons sur un exemple synthétique et un modèle de champ pour en déduire la distribution d'énergie dans un cône. La distribution d'énergie nous permet ensuite d'estimer l'erreur occasionnée par les troncatures. Ces informations seront particulièrement utiles dans l'optique d'un problème inverse et permettront d'estimer la résolution théorique du champ à laquelle nous pouvons prétendre pour un développement donné de la base locale.

Dans un troisième temps, nous discutons de l'utilité des normes pour la régularisation du problème inverse. En effet, la modélisation requiert une bonne adéquation entre le développement maximum des séries et la distance moyenne d'échantillonnage des données. En pratique, les données sont mal réparties, et le mauvais conditionnement de la matrice à inverser provoque généralement un phénomène d'aliasing. L'ajout d'une contrainte supplémentaire sur les coefficients se révèle parfois indispensable. Pour définir cette contrainte, on ajoute communément un critère de lissage dans l'inversion qui est défini le plus souvent par la minimisation de la norme du champ ([111]). A partir des expressions de la norme du champ dans le volume, ou sur chacune des surfaces, nous sommes amenés à redéfinir des normes plus compatibles avec un objectif de lissage et, par conséquent, mieux adaptées au problème inverse dans un cône fini.

Enfin, dans un quatrième temps, nous exploitons l'ensemble de ces informations pour inverser des données synthétiques diversement réparties. Si, dans le cas uniforme, nous pouvons reconstruire le champ dans tout le volume sans difficulté, dans le cas d'une répartition réelle de données nous devons faire appel à des techniques de régularisation. Nous montrons cependant que le champ modélisé est stable, interpolable dans tout le domaine et précis, malgré des conditions très défavorables.



# Chapitre 11

## Normes du champ magnétique

### 11.1 Norme du champ magnétique exprimé en harmoniques globales (SH)

Cherchons la norme dans le volume conique afin de pouvoir estimer l'énergie magnétique dans le cône associée à un champ global. Cette expression nous permettra de mettre en lumière différents aspects concernant la convergence des solutions, l'énergie associée à  $m$  quelconque ainsi qu'un outil robuste de vérification de son équivalent exprimé sur la base locale.

#### 11.1.1 Expression de la norme volumique

Nous avons défini notre domaine conique comme suit :

$$\Omega = \{0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq r \leq b\} \quad (11.1)$$

Reprenons la première identité de Green (6.11b) utilisée lors du calcul du produit scalaire entre les gradients des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Alors, en raison de  $\Delta V = 0$ , on trouve que l'énergie du champ magnétique s'écrit :

$$E_\Omega^g = \int_\Omega \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{\nabla V} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_{\partial\Omega}} \quad (11.2)$$

En toute rigueur, l'appellation d'énergie est incorrecte puisque l'énergie est reliée au produit scalaire (11.2) par un facteur  $1/(2\mu)$  où  $\mu$  est la perméabilité du milieu dans lequel baigne le champ magnétique ([59]).

L'énergie est donc calculée sur la surface fermée qui entoure  $\Omega$ , soit explicitement :

$$E_\Omega^g = \underbrace{\int_{\partial\Omega_a} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_a}}_{I_a} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_b} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_b}}_{I_b} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_{\theta_0}} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_{\theta_0}}}_{I_\theta} \quad (11.3)$$

De plus, comme le potentiel magnétique global d'origine interne s'exprime en harmoniques sphériques exprimées dans le référentiel du cône par :

$$\tilde{V}_g = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m(\theta)$$



on montre aisément, en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$  ainsi que l'expression des éléments de surface (figure 6.2), que :

$$I_a + I_b = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (n+1) \left( \tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{n+l+1} \right) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} \quad (11.4)$$

où  $\delta_{m,0}$  le delta de Kroenecker tel que :

$$\delta_{m,0} = 0, m \neq 0 \quad (11.5)$$

$$= 1, m = 0 \quad (11.6)$$

Le calcul de  $I_\theta$  est tout aussi simple et on montre que :

$$I_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{n+l+1} \right) \frac{\sin \theta_0}{n+l+1} P_n^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (11.7)$$

Finalement, l'énergie  $E_\Omega^g$  contenue dans le volume  $\Omega$  exprimée à partir des harmoniques globales s'écrit :

$$E_\Omega^g = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{n+l+1} \right) \left\{ (n+1) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} + \frac{\sin \theta_0}{n+l+1} P_n^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \right\} \quad (11.8)$$

L'expression de cette norme montre que l'on ne peut définir commodément qu'un spectre d'énergie en fonction de l'ordre  $m$ , en raison de la non-orthogonalité des fonctions de Schmidt  $P_l^m$  sur l'intervalle  $\theta = [0, \pi[$ . Cette propriété fâcheuse nous indique que le spectre d'énergie n'est pas invariant par rotation mais qu'il dépend de la localisation du cône sur la sphère. Nous verrons plus loin que nous pourrions cependant exploiter ce spectre pour en déduire des propriétés importantes sur le développement des séries de la base locale en remarquant que chaque série devra être adaptée à l'emplacement géographique du centre du cône sur la sphère.

### Remarque

On pourra vérifier que pour  $\theta \in [0, \pi]$ , cas limite où la calotte devient sphère, et pour des fonctions normées au sens de Schmidt on trouve :

$$E_\Omega^g = \sum_{m=0}^{\infty} 4\pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^{m2} + \tilde{h}_n^{m2} \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2n+1} \right) \frac{n+1}{2n+1}$$

L'énergie contenue dans une coquille sphérique peut être vue comme la différence entre les énergies contenues respectivement dans deux espaces infinis, l'un privé d'une boule de rayon  $r = a$ , l'autre d'une boule de rayon  $r = b$ . Soit :

$$E_\Omega = E_{\Omega(r \geq a)} - E_{\Omega(r \geq b)}$$

On retrouve donc bien l'expression de l'énergie dans un espace infini privé d'une boule de rayon quelconque  $r = \beta$  :

$$E_{\Omega(r \geq \beta)}^g = \sum_{m=0}^{\infty} 4\pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} (\tilde{g}_n^{m2} + \tilde{h}_n^{m2}) \left(\frac{a}{\beta}\right)^{2n+1} \frac{n+1}{2n+1}$$

au facteur  $1/2\mu$  près ([59], Volume I, Chapitre 4).

### 11.1.2 Expression de la norme surfacique

On se donne maintenant un domaine défini par :

$$\partial\Omega_\beta = \{0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r = \beta\} \quad (11.9)$$

avec  $\beta$  une altitude quelconque. La norme du champ magnétique sur le domaine peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{\nabla_s V} ds_\beta + \underbrace{\int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_r V} \cdot \overrightarrow{\nabla_r V} ds_\beta}_{I_r} \quad (11.10)$$

correspondant respectivement aux composantes horizontales et verticales du champ. On peut étendre la première identité de Green au cas surfacique ([64]). On trouve :

$$\int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{\nabla_s V} d\Omega = \underbrace{\oint_c V \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{dc}}_{I_c} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_\beta} V \Delta_H V ds_\beta}_{I_s} \quad (11.11)$$

où  $\overrightarrow{\nabla_s}$  et  $\Delta_H$  représentent respectivement les opérateurs horizontaux pour le gradient et pour le Laplacien. Dans le cas surfacique, nous n'avons pas la propriété  $\Delta_H = 0$  et ce terme doit être calculé. On trouvera explicités les éléments de surface et de contour sur la figure (6.2). On obtient :

$$\int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{\nabla_s V} d\Omega = \sin \theta_0 \int_0^{2\pi} V(\beta, \theta_0) \frac{\partial V(\beta, \theta_0)}{\partial \theta} d\varphi + \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} V(\beta) L^2 V(\beta) \sin \theta d\varphi d\theta$$

où  $L$  est l'opérateur de moment angulaire défini par :

$$L^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

et relié au Laplacien horizontal par  $\Delta_H = -L^2/r^2$  avec ici,  $r^2 = \beta^2$ .

Rappelons que les fonctions de Legendre  $P_n^m$  sont vecteurs propres de l'opérateur  $L_m$  associées à la valeur propre  $n(n+1)$  :

$$L_m P = n(n+1)P$$

avec  $n$  les degrés réels des fonctions de Legendre. L'application de  $L^2$  sur  $P_n^m$  a les mêmes propriétés, donc :

$$L^2 P_n^m = n(n+1)P_n^m$$

La conséquence est immédiate pour le calcul de  $I_s$  et on trouve :

$$I_s = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi a^2 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{a}{\beta}\right)^{n+l+2} \left(\tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m\right) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} \quad (11.12)$$

et pour  $I_r + I_c$ , un calcul élémentaire montre que :

$$I_r + I_c = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi a^2 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{\beta}\right)^{n+l+2} \left(\tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m\right) \left\{ (n+1)(l+1) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} + \sin \theta_0 P_n^m \right\}_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (11.13)$$

D'après (11.10) et (11.11),  $E_{\partial\Omega_\beta}^g = I_s + I_r + I_c$ . On trouve finalement l'expression de la norme :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi a^2 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{\beta}\right)^{n+l+2} \left(\tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m\right) \left\{ (n+1)(l+n+1) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} + \sin \theta_0 P_n^m \right\}_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (11.14)$$

### Remarques

1. Le cas particulier où  $\beta = a$  et  $\theta_0 = \pi$ , moyenné par la surface de la sphère de rayon  $r = a$ , conduit immédiatement à :

$$E_{\partial\Omega_a}^g = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \text{ avec, } R_n = \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\tilde{g}_n^{m2} + \tilde{h}_n^{m2}\right)$$

et nous retrouvons la formule du spectre du champ global associé à chaque degré  $n$  bien connu en harmoniques sphériques ordinaires ([75], [76]).

2. On vérifie sans peine, numériquement, qu'à une altitude  $\beta$  donnée on retrouve avec une bonne précision à partir de (11.8) l'expression de la norme  $E_{\partial\Omega_\beta}^g$  par différence finie :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_{\Omega(r=\beta+\varepsilon/2)} - E_{\Omega(r=\beta-\varepsilon/2)}}{\varepsilon}$$

## 11.2 Normes du champ magnétique en harmoniques locales (SCHA)

Le principe est sensiblement équivalent dans la décomposition en harmoniques sphériques sur calotte. On peut distinguer les deux même cas que pour la décomposition en harmoniques sphériques, c'est-à-dire, la définition d'une norme volumique dans  $\Omega$  d'une part, et la définition d'une norme surfacique dans  $\partial\Omega_\beta$  d'autre part. Il est cependant légitime de remarquer qu'il existe deux types de normes de surface sur le cône. L'une sur la surface  $r = \beta$ , l'autre en  $\theta = \theta_0$ . Nous avons volontairement omis la norme de surface du domaine  $\partial\Omega_{\theta_0}$  étant donné qu'il n'existe pas, à notre connaissance, d'opérateur de surface latérale de type  $L^2$  que nous avons défini plus haut ayant des propriétés conduisant à simplifier les expressions. Le développement d'une telle norme s'avère donc mal aisé à trouver, et nous verrons que l'intérêt que nous pourrions y trouver est, somme toute, très limité. Cette lacune sera en partie comblée par la définition d'une norme sur la surface  $\partial\Omega_{\theta_0}$  dans la section 13.2 du présent chapitre dont la signification ne sera plus simplement liée à l'énergie, mais qui sera utile dans des problèmes de régularisation.

### 11.2.1 Expression de la norme volumique

Prenons l'expression de la norme calculée dans le volume par (11.3). Dans le cas du développement en harmoniques locales, on a en particulier :

$$V = V_1 + V_2$$

avec  $V_1$  le potentiel exprimé avec les fonctions de base de Mehler et  $V_2$  le potentiel exprimé avec les fonctions de base de Legendre.

On cherche donc à calculer :

$$E_\Omega^l = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (V_1 + V_2) \vec{\nabla} (V_1 + V_2) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (V_1 + V_2) \vec{\nabla} (V_1 + V_2) \cdot \overrightarrow{ds_{\partial\Omega}}$$

De plus, nous avons retenu pour ces discussions après les discussion du chapitre 10 uniquement la solution du problème *PIII* dont les conditions aux limites homogènes sont :

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right)_{r=a, r=b} = 0 \quad \text{et} \quad V_2|_{\theta=\theta_0} = 0$$

Alors les intégrandes de  $I_a$ ,  $I_b$  et  $I_\theta$  dans (11.3) deviennent respectivement :

$$(V_1 + V_2)_{a,b} \left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right)_{a,b} \quad \text{pour } I_a \text{ et } I_b$$

$$\text{et } V_1|_{\theta_0} \left. \frac{\partial (V_1 + V_2)}{r \partial \theta} \right)_{\theta_0} \quad \text{pour } I_\theta$$

Et on montre, après un calcul similaire à celui du paragraphe 11.1.1, que (voir la première remarque qui suit) :

$$\begin{aligned}
E_{\Omega}^l = & \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi \left\{ a^2 \sin \theta_0 \sum_{p=0}^{\infty} (G_p^{m2} + H_p^{m2}) K_p^m(\theta_0) \frac{dK_p^m}{d\theta} \right\}_{\theta_0} \|R_p\|^2 \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{G}_{n_k}^{m2} \left( b^2 R_{n_k}^{m,c}(b) \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \right)_b - a^2 R_{n_k}^{m,c}(a) \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_a \|P_{n_k}^m\|^2 \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{H}_{n_k}^{m2} \left( b^2 R_{n_k}^{m,s}(b) \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \right)_b - a^2 R_{n_k}^{m,s}(a) \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_a \|P_{n_k}^m\|^2 \Big\}
\end{aligned}$$

où nous avons écrit le potentiel  $V_2$  sous sa forme compacte pour plus de commodité. Nous revenons à l'expression en fonction des coefficients de Gauss «internes»  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$  et «externes»  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$  en utilisant les définitions (1.22) et (1.23) en  $r = a$  et  $r = b$ . On trouve que la norme en harmoniques locales s'exprime par :

$$\begin{aligned}
E_{\Omega}^l = & \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^2 \left\{ \sin \theta_0 \sum_{p=0}^{\infty} (G_p^{m2} + H_p^{m2}) K_p^m(\theta_0) \frac{dK_p^m}{d\theta} \right\}_{\theta_0} \|R_p\|^2 \quad (11.15) \\
& + a^3 \sum_{k=0}^{\infty} (n_k + 1) \left( 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n_k+1} \right) (G_{n_k}^{i,m2} + H_{n_k}^{i,m2}) \|P_{n_k}^m\|^2 \\
& + a^3 \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left( \left(\frac{b}{a}\right)^{2n_k+1} - 1 \right) (G_{n_k}^{e,m2} + H_{n_k}^{e,m2}) \|P_{n_k}^m\|^2 \Big\}
\end{aligned}$$

### Remarques

1. L'absence de termes croisés entre les deux ensembles de bases de fonctions traduit bien évidemment les propriétés d'orthogonalité des gradients qui motiva en partie le choix de la décomposition PIII. En effet, nous aurions pu écrire :

$$\langle \vec{\nabla} V, \vec{\nabla} V \rangle_{\Omega} = \langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_1 \rangle_{\Omega} + \langle \vec{\nabla} V_2, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{\Omega} + 2 \langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{\Omega}$$

mais comme par construction  $\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{\Omega} = 0$ , la norme se réduit à :

$$\|\vec{\nabla} V\|_{\Omega}^2 = \|\vec{\nabla} V_1\|_{\Omega}^2 + \|\vec{\nabla} V_2\|_{\Omega}^2$$

qui entraîne immédiatement le résultat (11.15).

2. Nous avons mélangé dans la première somme deux ensembles de solutions correspondant à des valeurs propres différentes. Il faudra interpréter ce terme de manière suivante :

$$\begin{aligned}
p = 0, K_p^m & \equiv P_0^m \text{ et } R_0 = \text{Cste} \text{ correspondant à la valeur propre } k = 0 \\
\text{et } p \neq 0, K_p^m & \text{ et } R_p(r) \text{ correspondant aux valeurs propres } k < -1/4
\end{aligned}$$

De plus, dans cette écriture, la norme des fonctions radiales  $\|R_p\|^2 = a$ , donc la dimension de la norme  $[E_{\Omega}^g] = [L]^3 [nT]^2$  est bien respectée.

### 11.2.2 Expression de la norme surfacique

On cherche l'expression de la norme de surface locale  $E_{\partial\Omega_\beta}^l$  définie comme :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \int_{\partial\Omega_\beta} \vec{\nabla}_s (V_1 + V_2) \cdot \vec{\nabla}_s (V_1 + V_2) ds_\beta + \int_{\partial\Omega_\beta} \vec{\nabla}_r (V_1 + V_2) \cdot \vec{\nabla}_r (V_1 + V_2) ds_\beta$$

La norme de surface du champ magnétique exprimée dans la base locale se déduit de (11.10) après le calcul intermédiaire de (11.11). Etant donné la similitude de cette procédure avec celle décrite au paragraphe 11.1.2, nous passerons sous silence les différentes étapes de calcul pour nous concentrer sur le résultat final de l'énergie de surface à n'importe quelle altitude  $\beta$ , avec  $a \leq \beta \leq b$ . Un long calcul montre que :

$$\begin{aligned} E_{\partial\Omega_\beta}^l &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^2 \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} R_p(\beta) R_{p'}(\beta) (G_p^m G_{p'}^m + H_p^m H_{p'}^m) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sin \theta_0 K_p^m(\theta_0) \frac{dK_{p'}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} + \lambda_p \langle K_p^m, K_{p'}^m \rangle \right) + T_1(\beta) \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Résultat du produit scalaire entre les bases de Mehler}} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} R_p(\beta) \left( G_p^m \widehat{G}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,c}(\beta) + H_p^m \widehat{H}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,s}(\beta) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \theta_0 K_p^m(\theta_0) \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \frac{\lambda_p}{(\lambda_p - \lambda_k)} + T_2(\beta) \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Résultat du produit scalaire entre les bases de Legendre et de Mehler}} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left( \left( \widehat{G}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,c}(\beta) \right)^2 + \left( \widehat{H}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,s}(\beta) \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left( \widehat{G}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 + \left( \widehat{H}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Résultat du produit scalaire entre les bases de Legendre}} \end{aligned} \quad (11.16)$$

Nous avons voulu distinguer les termes  $T_1(\beta)$  et  $T_2(\beta)$  qui sont non nuls, en vertu des conditions aux limites, uniquement sur une surface d'altitude autre que  $\beta = a$  ou  $\beta = b$ . On donne, de manière explicite :

$$\begin{aligned} T_1(\beta) &= \beta^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{dR_p}{dr} \Big|_{\beta} \frac{dR_{p'}}{dr} \Big|_{\beta} (G_p^m G_{p'}^m + H_p^m H_{p'}^m) \langle K_p^m, K_{p'}^m \rangle \\ T_2(\beta) &= \beta^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dR_p}{dr} \Big|_{\beta} \left( G_p^m \widetilde{G}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta} + H_p^m \widetilde{H}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_{\beta} \right) \langle P_{n_k}^m, K_p^m \rangle \end{aligned}$$

Ici encore, le potentiel de la base de Legendre est écrit sous sa forme synthétique. Les notations  $\lambda_p$  et  $\lambda_k$  sont données respectivement pour les valeurs propres associées aux fonctions de base de Mehler et aux fonctions de base de Legendre.

Sur une surface  $r = \beta$  donnée, les seules fonctions de bases orthogonales sont les fonctions de Legendre. En revanche, la base de Mehler n'ayant aucune propriété d'orthogonalité, on trouve des termes croisés aussi bien entre les coefficients de Mehler qu'entre les coefficients de Legendre et les coefficients de Legendre. En effet :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^l = \left\| \vec{\nabla} V_1 + \vec{\nabla} V_2 \right\|_{\partial\Omega_a}^2 = \left\| \vec{\nabla} V_1 \right\|_{\partial\Omega_a}^2 + \left\| \vec{\nabla} V_2 \right\|_{\partial\Omega_a}^2 + 2 \left\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \right\rangle_{\partial\Omega_a} \quad (11.17)$$

mais sur la surface, on a cette fois-ci :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \right\rangle_{\partial\Omega_a} \neq 0$$

Nous voyons donc clairement que la définition de la norme surfacique telle qu'elle est donnée par (11.16) est fort peu pratique, bien qu'elle soit la norme du champ magnétique au sens strict du terme sur la surface  $r = \beta$ . Nous nous proposerons donc de n'utiliser qu'une partie de cette norme lors de l'utilisation d'une inversion avec régularisation. Par analogie, nous en déduisons d'autre part que la détermination de l'énergie de surface sur la surface latérale  $\partial\Omega_{\theta_0}$  conduit à une expression contenant aussi bien des termes croisés entre les fonctions de Legendre entre-elles, qu'entre les fonctions de Legendre et de Mehler. Par conséquent, cette norme n'est pas non plus utilisable pour la régularisation d'un problème inverse.

### Remarque

*De même que précédemment, nous avons mélangé les ensembles de valeurs propres de la base de Mehler dans l'indexation pour alléger les expressions.*

## Chapitre 12

# Etudes numériques des normes

En introduction de cette partie, nous avons annoncé le cadre dans lequel nous comptons utiliser les expressions des normes de volume et de surface. L'exploitation de ces différentes expressions donne quelques informations précieuses sur la convergence du développement local vers son homologue global, ainsi que la correspondance entre les résidus réels et les degrés de troncature. Ces informations se révéleront indispensables pour le choix des différents degrés  $P_{max}$  et  $K_{max}$  des développements et pour un diagnostic de la résolution du champ la plus fine à laquelle nous pourrions prétendre.

Dans le chapitre sur les convergences, nous avons formulé les relations linéaires existantes entre le développement dans le cône et le développement sur la sphère. Pour les besoins de la discussion, nous avons utilisé des développements importants de manière à entrevoir le comportement des reconstructions en fonction de la troncature des séries et à bien vérifier les théorèmes fondamentaux de la théorie du potentiel. Bien entendu, pour la recherche d'un modèle à partir d'un ensemble de données plus ou moins bien réparties dans le domaine, nous ne pouvons plus être aussi dispendieux car notre développement est naturellement limité par le nombre de données et leur répartition. Nous devons donc chercher à faire l'économie des paramètres dont la somme des contributions est négligeable et qui ne modélisent finalement rien d'autre que du bruit. Ceci se caractérise par l'investigation des paramètres les plus significatifs et l'adaptation du développement des séries de manière à incorporer les coefficients associés au maximum d'énergie contenu dans le spectre défini à chaque  $m$ .

### 12.1 Etude du spectre en harmoniques globales : ordres $m$ significatifs

Nous avons vu, de manière formelle (au paragraphe 11.1.1) que pour une région limitée sur la sphère, le spectre d'énergie ne pouvait être défini qu'en fonction de  $m$  et dépendait de la région centrée sur la calotte. Observons cette distribution d'énergie pour un cône d'ouverture angulaire  $\theta_0 = 5^\circ$  de centre  $C(\theta, \varphi)$  variable sur la sphère. L'altitude maximale que nous retenons est compatible avec l'altitude des données MAGSAT et CHAMP ; on pose par conséquent  $b = a + 500km$ .

Etant donné les discussions sur les convergences et la reconstruction du champ, nous travaillons avec des coefficients de Gauss globaux d'un modèle résiduel du type *CAIN1960* moins *DGRF1960* pour simuler un *detrending* tel qu'on l'encourage en modélisation régionale ([16]). Nous pouvons ensuite appliquer l'expression (11.8) et en déduire l'énergie associée à chaque ordre  $m$ . En particulier, nous avons tracé l'énergie magnétique contenue dans un cône centré sur



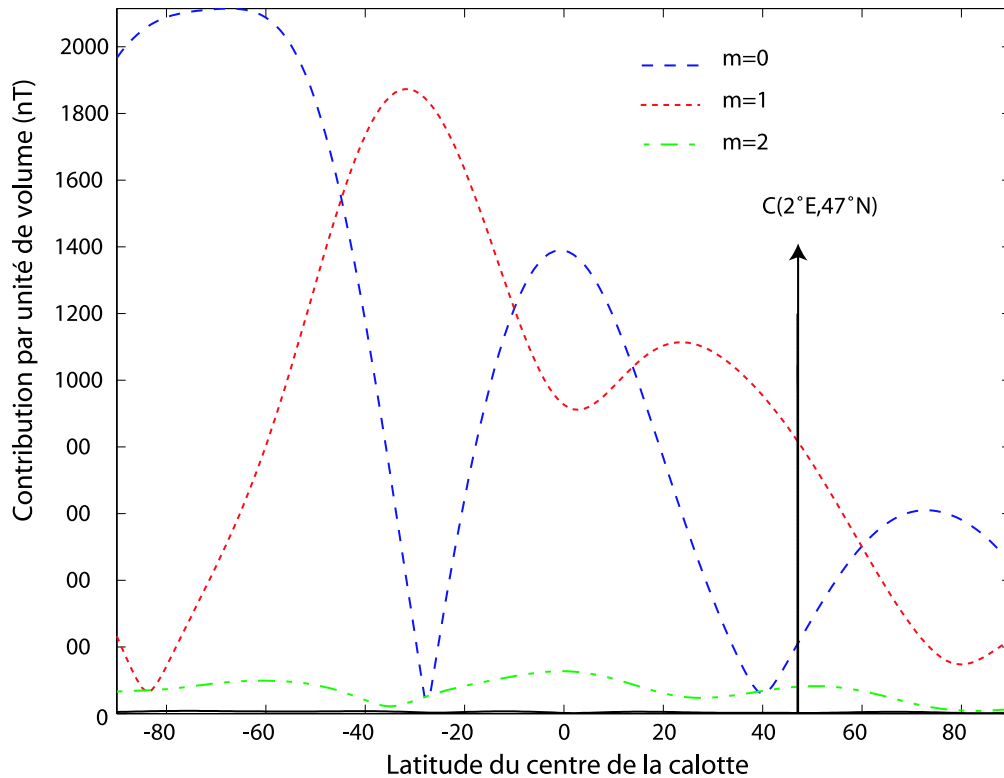


FIG. 12.1 – L'énergie magnétique dans un cône associée à chaque ordre  $m$  varie avec la latitude. La figure montre ces variations dans un cône centré sur le méridien de Paris mais de latitude variable. En règle générale, pour les zones de moyennes latitudes, l'ordre  $m = 1$  domine les autres ; en particulier l'ordre  $m = 0$ .

le méridien de Paris ( $\varphi = 2^\circ E$ ) de latitude variable.

La figure (12.1) montre très nettement que pour ce modèle résiduel, les ordres  $m = 1$  contiennent plus d'énergie que les ordres  $m = 0$  pour les zones de moyennes latitudes sur le méridien de Paris.

En particulier, sur le cône centré sur la France soit, dans le repère géocentrique, en  $C = (\theta' = 47^\circ, \varphi' = 2^\circ)$ , ayant comme propriétés :

$$\Omega = \{0 \leq \theta \leq 5^\circ, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 6371.2 \leq r \leq 6871.2\}$$

nous trouvons (figure 12.2) l'histogramme des distributions d'énergie en pourcentage de l'énergie totale ; on a également tracé à titre indicatif la répartition de l'énergie pour un modèle de champ global *DGRF*1990. Cette dernière répartition est à peu près similaire pour tous les modèle *DGRF* de 1960 à nos jours étant donné la lente dérive du champ magnétique terrestre sur cette courte période.

Une remarque immédiate est que la répartition de l'énergie, associée à chaque ordre  $m$ , est très hétérogène et est essentiellement concentrée sur les ordres  $m = 0$  et  $m = 1$  (en particulier, pour la modélisation du champ résiduel, l'ordre  $m = 1$  contribue pour 92% du champ). Il est donc légitime, dans la représentation sur la base locale, d'adapter les troncatures à l'énergie estimée à chaque ordre  $m$  de manière à prévoir un développement adapté et optimum. En regard des reconstructions réalisées dans la section 10.2 de la partie 2, on comprend que dans les

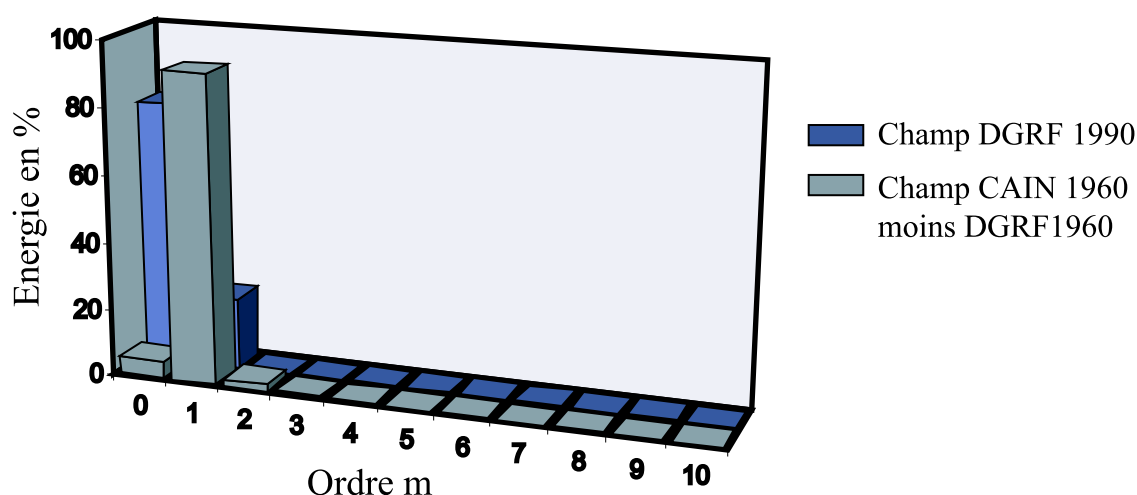


FIG. 12.2 – Spectre d’énergie associé à chaque ordre  $m$  du développement en harmoniques sphériques pour deux types de champs globaux. L’un est le modèle *DGRF*1990, l’autre le modèle résiduel de la différence entre une modèle de Cain (1960) et un modèle *DGRF* de la même année. On remarque que la répartition de l’énergie d’un champ global dans un cône centré sur la France se concentre essentiellement sur les ordre  $m = 0$  et  $m = 1$ .

développements où nous avons utilisé des séries tronquées à  $K_{max} = P_{max} = 30$ , bon nombre de coefficients modélisent des contributions du champ négligeables, alors que certains coefficients (portés par les ordres d’énergie importante) ayant une contribution significative d’un point de vue énergétique, ont été arbitrairement omis. Avec un choix de troncature plus conforme, en fonction de  $m$ , avec la répartition d’énergie, il est possible de reconstruire le champ avec une même précision mais bien moins de coefficients de Gauss.

Dans un cas réel où nous retranchons un modèle de champ aux données mesurées, nous ne sommes pas en mesure d’estimer véritablement la répartition en énergie de ce que nous cherchons à modéliser, car le reste de la différence entre un modèle et les données dépend avant tout de la façon dont les données sont approchées par le modèle que l’on retranche. Or, on sait qu’un modèle global coïncide avec les données d’une manière géographiquement variable. Quoi qu’il en soit, même dans ce cas, il est évident qu’il faudra adapter les développements à chaque ordre  $m$ . Ceci démontre que la recherche d’un modèle qui inclut des développements décroissants en fonction de  $m$ , comme on peut les trouver dans les inversions par *SCHA* selon Haines, n’a, pour cette raison, pas de justification.

## 12.2 Développement des séries et résidu volumique total

Après avoir commenté la répartition de l’énergie d’un champ, il convient d’examiner l’influence des troncatures  $P_{max}$  ou  $K_{max}$  en reconstruisant ce champ par les développements en série tronqués. En effet, puisque nous sommes en présence de deux séries, il est nécessaire d’examiner les contributions de chaque terme du potentiel pour voir si l’on peut faire l’économie de certains paramètres dont les contributions, ici encore, seront considérées comme négligeables.

### 12.2.1 Expression du résidu dans le volume

En vertu de l'orthogonalité des gradients dans le volume nous pouvons en effet déterminer un spectre d'énergie à chaque  $m$  à partir de la norme volumique du champ exprimée dans la base locale. On a :

$$\lim_{P_{\max}, K_{\max} \rightarrow \infty} E_{\Omega}^{m,l}(P_{\max}, K_{\max}) = E_{\Omega}^{m,g}$$

avec  $l$  et  $g$  les abréviations respectives pour base locale et base globale.

L'étude de la convergence en norme est très liée à la définition du spectre d'énergie dans la modélisation régionale. On peut directement comparer les deux expressions des spectres dans le cône et en déduire les résidus en associés.

En effet, la norme du développement local peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left\| \vec{\nabla}(V_1 + V_2) \right\|_{\Omega}^2 = \left\| \vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) + \vec{R}^{\infty} \right\|_{\Omega}^2$$

c'est-à-dire comme une somme partielle limitée aux développements  $P_{\max}$  et  $K_{\max}$  des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  et le reste de la somme  $R_N^{\infty}$  correspondant à l'effet de troncature.  $\vec{R}^{\infty}$  est la projection de  $\vec{\nabla}(V_1 + V_2)$  sur le sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace vectoriel fermé engendré par les bases de fonctions limitées à  $P_{\max}$  et  $K_{\max}$ .  $\vec{R}^{\infty}$  et  $\vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max}))$  sont donc orthogonaux. D'où :

$$\left\| \vec{R}^{\infty} \right\|_{\Omega}^2 = \left\| \vec{\nabla}(V_1 + V_2) \right\|_{\Omega}^2 - \left\| \vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2$$

Soit :

$$\left\| \vec{R}^{\infty} \right\|_{\Omega}^2 = \left\| \vec{\nabla}V_g \right\|_{\Omega}^2 - \left\| \vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2$$

où  $\left\| \vec{\nabla}V_g \right\|_{\Omega}^2$  est maintenant la norme du champ globale obtenue par (11.8) puisque dans le cas d'un développement infini, les deux normes calculées à partir des développements locaux ou globaux sont égales. Ainsi, pour chaque ordre  $m$ , on trouve :

$$\boxed{(\overline{R}^{m,\infty})^2 = \frac{\left\| \vec{\nabla}V_g^m \right\|_{\Omega}^2 - \left\| \vec{\nabla}(V_1^m(P_{\max}) + V_2^m(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2}{V_{\Omega}}} \quad (12.1)$$

où l'on désigne par  $\overline{R}^{m,\infty}$ , le résidu volumique dû à la troncature, pondéré par  $V_{\Omega}$ , le volume du cône.

Dans la représentation par les fonctions de base locales, l'effet de la troncature des séries induit toujours une sous-estimation de l'énergie magnétique car tous les termes sont positifs. En conséquence :

$$\left\| \vec{\nabla}V_g^m \right\|_{\Omega}^2 \geq \left\| \vec{\nabla}(V_1^m(P_{\max}) + V_2^m(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2 \quad (12.2)$$

Le résidu exprimé par (12.1) correspond au résidu moyen par unité de volume à chaque ordre  $m$ . Nous en déduisons finalement la valeur du résidu  $\overline{R}_N^{\infty}$  associé à chaque troncature qui nous intéresse, pour tous les ordres confondus et par unité de volume :

$$\boxed{\overline{R}^{\infty} = \sqrt{\sum_{m=0}^M (\overline{R}_N^{m,\infty})^2}} \quad (12.3)$$

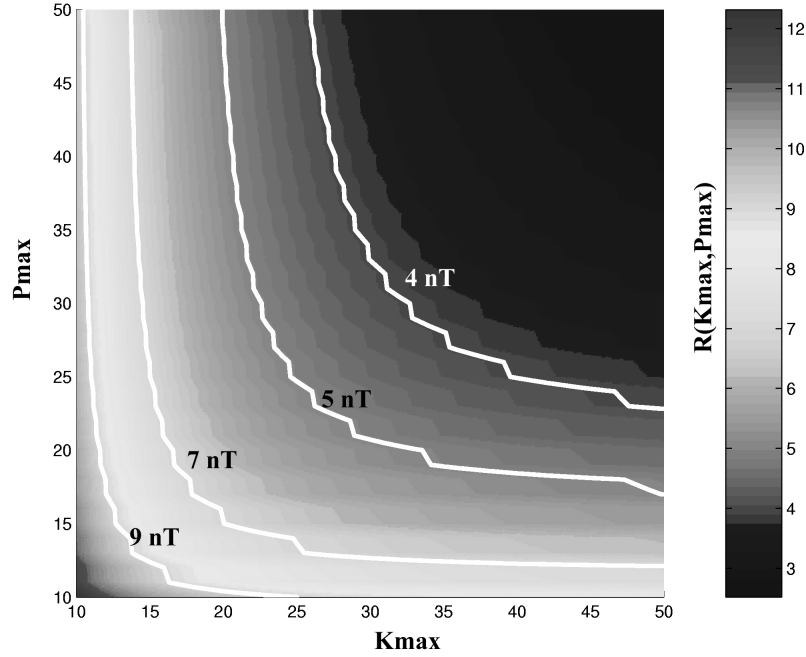


FIG. 12.3 – L’erreur moyenne en  $nT$  par élément de volume est obtenue par comparaison entre les spectres développés sur la base globale (11.8) et la base locale (11.15) pour différents degrés de troncature  $P_{max}$  et  $K_{max}$ . Différentes valeurs de l’erreur de reconstruction  $\bar{R}^\infty$  sont matérialisées par des courbes pleines pour différents couples  $(P_{max}, K_{max})$ .

### 12.2.2 Le choix des indices de troncature. Cas synthétique.

Prenons toujours un champ calculé à partir de la différence d’un modèle de Cain et d’un modèle DGRF. Le calcul des résidus moyen dans le cône est donné par les calculs intermédiaires de (11.8) et de (11.15) injectés dans l’équation (12.1). La figure (12.3) montre le résidu moyen donné par (12.1), par l’étude de la convergence de la norme locale,  $E_\Omega^l$  (11.15), vers la norme globale,  $E_\Omega^g$ , (11.8) lorsque l’on augmente les indices de troncature  $P_{max}$  et  $K_{max}$ .

Nous avons tracé directement le résidu total qui nous donnent la valeur réelle de l’erreur. A partir de la surface  $\bar{R}^\infty(P_{max}, K_{max})$  on peut déterminer les couples  $(P_{max}, K_{max})$  qui permettent de modéliser le champ avec une précision que l’on peut contrôler. Sur la figure 12.3 si nous choisissons une erreur de  $7nT$ , la courbe blanche correspondante nous donnent les différents couples possibles.

Ainsi, si l’on considère un champ avec un bruit de  $7nT$  il existe un grand choix d’indices de troncature, ce qui nous laisse plusieurs alternatives possibles en fonction de la répartition des données. Puisque, en géomagnétisme, les données sont habituellement réparties plus uniformément en surface qu’en altitude on penchera naturellement vers le choix d’un couple d’indices appartenant à la courbe blanche avec un indice du développement  $P_{max} < K_{max}$ , car c’est l’indice qui gouverne la solution sur les fonctions radiales. Nous pourrions d’autre part nous appuyer sur la distribution moyenne des données avec l’altitude pour en déduire  $P_{max}$  par (6.48) et par conséquent  $K_{max}$  sur la figure 12.3.

Ce type de choix nous permettra d'améliorer le conditionnement de la matrice d'inversion, tout en sachant la limite de résolution de notre modèle. En d'autres termes, ceci permet d'opter pour la décomposition qui limite le phénomène d'*aliasing*.

Il existe une très légère dissymétrie de la figure par rapport à la première bissectrice. On constate que la valeur du résidu moyen est légèrement plus sensible au développement  $K_{max}$  qu'au développement  $P_{max}$ . La représentation de l'énergie totale est donc tributaire du degré d'expansion de la base des fonctions de Legendre et dépendra par conséquent, lors du problème inverse, de la plus ou moins bonne répartition des données en surface. Cette propriété découle naturellement du choix de la condition à la limite latérale  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$  pour le problème de condition aux limites *PIII*.

Cette estimation donne simplement une indication sur l'erreur moyenne dans tout le volume sans distinction entre les énergies associées à chaque ordre  $m$ , seule l'énergie totale est maintenant considérée. La valeur du résidu dépend avant tout de l'intensité du champ magnétique résiduel, car nous sommes dans la configuration d'un calcul de résidu absolu. Par conséquent, en supposant qu'un modèle de *Cain* moins un modèle *DGRF* donne des magnitudes moyennes proches de celles que l'on obtiendrait en retranchant un modèle de vraies données magnétiques, on peut considérer que cette manipulation sur données synthétiques est assez réaliste. On pourrait donc objecter que le résidu de  $7nT$  est trop important, mais cette valeur moyenne n'est pas distribuée dans le cône de manière homogène (voir par exemple le paragraphe 10.2) et il va de soi que l'ensemble des effets de bords contribue pour une part très importante à la valeur de ce résidu.

Prenons d'ailleurs le couple ( $P_{max} = 30, K_{max} = 30$ ) qui nous a servi dans la reconstruction du problème *PIII*. Sur la figure (12.3), nous lisons une valeur de l'erreur moyenne  $\overline{R} \sim 4,2nT$  que nous pouvons rapprocher avec l'erreur de reconstruction estimée que nous avons trouvée d'une valeur de  $\overline{R}_{\Omega} \sim 3,8nT$  (partie 2, paragraphe 10.2). La différence entre ces deux estimations réside dans le fait que l'analyse par norme analytique considère totalement l'erreur sur les frontières, alors que l'analyse sur un échantillonnage, irrégulier près des bords, exclu naturellement une partie des effets de bords. Malgré une erreur moyenne jugée importante, nous avons pourtant constaté que le champ était bien reconstruit à l'intérieur du cône pour ce couple d'indices.

### 12.3 Le résidu associé à chaque surface

Nous venons donc de trouver un moyen d'estimer l'erreur de reconstruction moyenne dans le cône qui découle du choix des indices de troncature pour les développements de la base de Mehler et de Legendre. Cette erreur de reconstruction nous indique que la modélisation régionale ne pourra pas s'ajuster aux données dans un volume avec une précision meilleure que  $\overline{R}_{\Omega}$ . Or, la distribution de l'erreur n'est pas homogène et elle se cantonne essentiellement sur les trois surfaces qui délimitent le cône. L'estimation d'une erreur de 7 nT semble particulièrement optimiste pour les surfaces sous l'influence du phénomène de Gibbs ; au contraire, une précision de 7 nT sera largement atteinte à l'intérieur du cône.

#### Remarques préliminaires

La comparaison directe entre les normes par le développement des harmoniques sphériques (11.14) et le développement des harmoniques sur calotte (11.16) ne permet pas d'obtenir le résidu sur chaque surface. En effet, écrivons l'équivalent de (12.3) sur une surface de rayon  $r$ .

On a :

$$\delta(P_{\max}, K_{\max}) = \sqrt{\frac{\left\| \vec{\nabla} V_g \right\|_{\partial\Omega_r}^2 - \left\| \vec{\nabla} (V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\partial\Omega_r}^2}{S_{\partial\Omega_r}}} \quad (12.4)$$

On montre sur la figure (12.4) la valeur de la différence  $\delta(P_{\max}, K_{\max})$  en  $nT$  de ces deux normes, pondérée par la surface  $S_{\partial\Omega_r}$  de rayon  $r$ , et avec des indices  $P_{\max} = K_{\max} = 30$ . Le choix des indices est identique à celui utilisé dans la reconstruction du paragraphe 10.2 de la seconde partie. En comparant ce résultat avec celui de la figure (10.14) on remarquera qu'effectivement (12.4) n'est pas le résidu.

Cette expression permet en revanche de vérifier l'expression analytique (11.16) que l'on utilise dans (12.4) par la comparaison direct avec la différence entre le champ reconstruit et le champ initial sur une grille d'échantillons. La figure (12.4) montre une excellente corrélation.

### Expression du résidu par surface

Le résidu réel, par unité de surface, s'exprime par :

$$\bar{R}_{\partial\Omega_r}(P_{\max}, K_{\max}) = \sqrt{\frac{\left\| \vec{\nabla} V_g - \vec{\nabla} (V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\partial\Omega_r}^2}{S_{\partial\Omega_r}}}$$

Pour pouvoir estimer le résidu, il faut exprimer le produit scalaire entre le gradient du potentiel global et le gradient du potentiel local et cette solution n'a pas été retenue.

Nous pouvons recourir à deux autres moyens : Le premier revient à une étude de comparaison directe, sur un ensemble de valeurs du champ échantillonné uniformément sur chaque surface, entre le champ reconstruit et le champ initial ; étant donné la quasi uniformité de l'échantillonnage, cette technique présente l'intérêt de donner une valeur moyenne très réaliste en même temps que de pondérer naturellement les effets de bords (car l'échantillonnage est lacunaire sur les bords latéraux) ; c'est cette technique que nous avons employée figure (10.14) du paragraphe traitant de la reconstruction du champ. La seconde technique consiste à calculer l'énergie de surface par différence finie de l'énergie dans le volume. Ce calcul simple et précis prend néanmoins en compte les effets de bords. Le résidu obtenu est donc une majoration du résidu au centre de chaque surface. Par la suite, nous nous contenterons de l'estimation du résidu par la comparaison numérique entre le modèle synthétique et un modèle reconstruit sur une grille de points relativement dense.

La norme de surface se révèle donc parfaitement inutile pour les objectifs que nous nous sommes fixés : elle ne permet pas d'obtenir d'information sur le résidu de surface et ne permet pas non plus d'être employée comme condition régularisante de l'inversion.

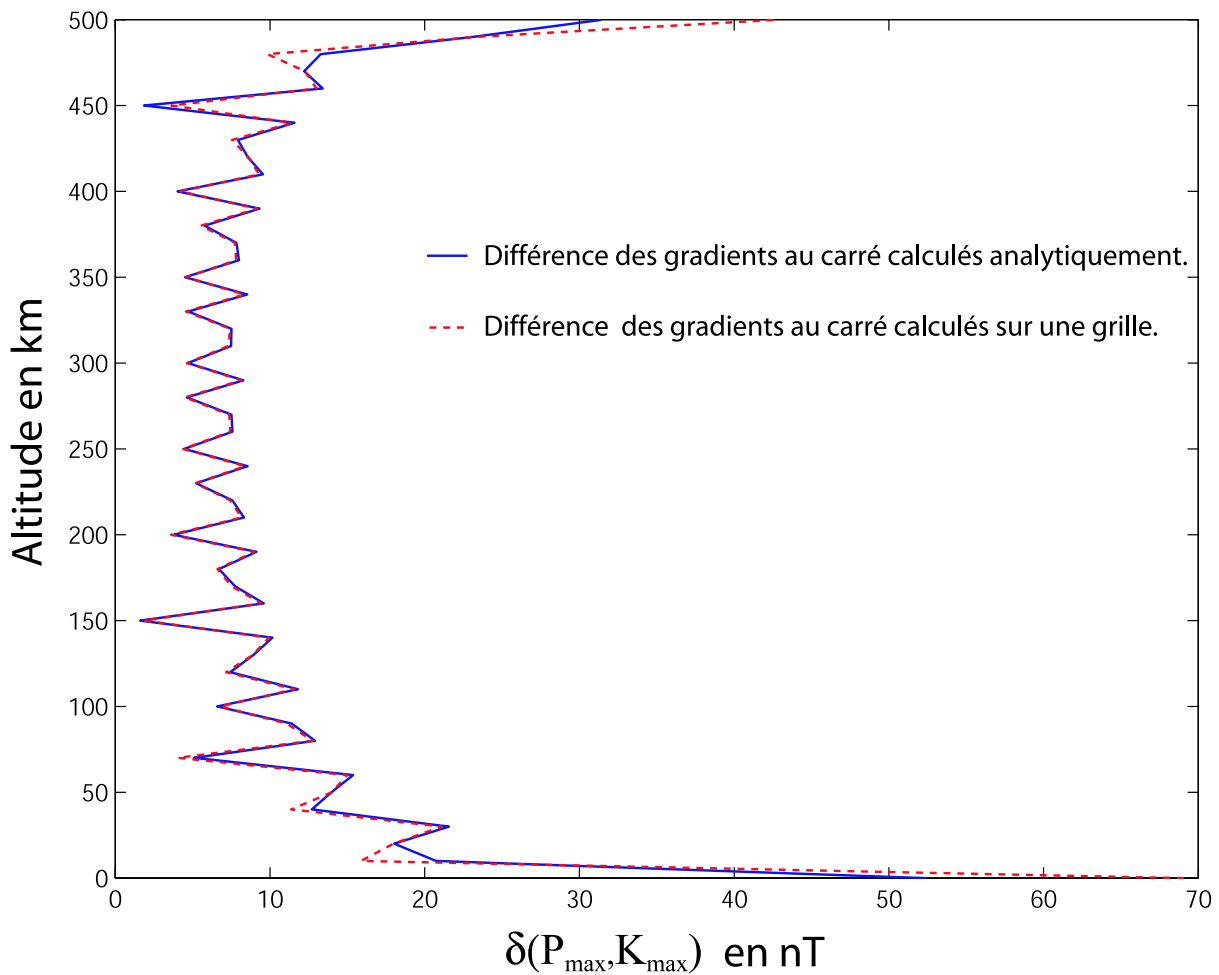


FIG. 12.4 – La courbe pleine montre le calcul de la différence entre les normes calculées en harmoniques sphériques et en harmoniques sur calotte par (12.4). La courbe pointillé montre l'excellente cohérence avec ce que l'on obtient à partir de la différence entre le champ réel et reconstruit sur une grille d'échantillonnage dans le volume. En revanche, si on compare cette figure avec la figure (10.14), on conclue que ce que l'on n'observe n'est pas le résidu réel en  $nT$ .

## Chapitre 13

# Les normes comme outils de régularisation

Le premier réflexe, lorsque nous voulons régulariser une inversion, est de considérer l'expression de la norme dans le volume car cette procédure est tout à fait similaire à ce que l'on utilise en général en harmoniques sphériques sur la sphère entière ([111]). L'exploitation de l'expression (11.15) pour une éventuelle régularisation montre néanmoins un désavantage flagrant : celui de minimiser tous les coefficients de Legendre ou de Mehler d'une manière quasiment similaire, sans différencier les coefficients associés à des valeurs propres élevées de ceux associés à de faibles valeurs propres. Or, nous recherchons avant tout la minimisation des paramètres associés aux grandes valeurs propres car leur détermination est affectée plus rapidement par la mauvaise répartition des données ; c'est ce qui caractérise l'*aliasing*. Nous proposons donc le développement de normes sur les surfaces latérale et inférieure de manière à pouvoir bénéficier des propriétés qui font défaut par l'utilisation directe de l'expression de l'énergie.

### 13.1 Nouvelle norme sur $\partial\Omega_\beta$

Revenons sur la définition de la norme surfacique (11.16). Cette définition, compte tenu de l'absence des propriétés d'orthogonalité des gradients sur une surface, conduit sous la forme algébrique à une matrice non diagonale. L'intérêt d'une régularisation est bien entendu d'améliorer le conditionnement de la matrice d'inversion en même temps que d'inclure une contrainte supplémentaire sur les paramètres que l'on recherche. Dans cette optique, l'écriture (11.16) semble bien peu adaptée. Nous pouvons cependant en déduire l'expression d'une nouvelle norme en ne considérant que les termes provenant du produit scalaire entre les bases de Legendre entres-elles.

Dans l'expression (11.16) de  $E_{\partial\Omega}^l$ , prenons la partie qui correspond aux bases de Legendre uniquement. La norme ainsi posée ne correspond nullement à l'énergie du champ magnétique sur une surface  $\partial\Omega_\beta$  mais possède des propriétés intéressantes.

Considérons donc la norme sur  $\partial\Omega_\beta$  comme la somme des normes des composantes horizontales,  $\vec{B}_{2,H}$ , et verticale,  $\vec{B}_{2,N}$ , du champ  $\vec{B}_2$  soit :

$$\left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega_\beta}^2 = \left\| \vec{B}_{2,H} \right\|_{\partial\Omega_\beta}^2 + \left\| \vec{B}_{2,N} \right\|_{\partial\Omega_\beta}^2$$

Ce qui s'écrit directement d'après (11.16) :



$$\begin{aligned} \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega\beta}^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left( \left( \tilde{G}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,c}(\beta) \right)^2 + \left( \tilde{H}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,s}(\beta) \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left( \tilde{G}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 + \left( \tilde{H}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right\} \end{aligned}$$

En développant les expressions de  $\tilde{G}_{n_k}^m$ ,  $\tilde{H}_{n_k}^m$ ,  $R_{n_k}^{m,s}(\beta)$  et  $R_{n_k}^{m,c}(\beta)$  et leurs dérivées radiales (voir définitions du paragraphe 1.3) on écrit l'expression de la norme en fonction des coefficients de Gauss locaux de la base de Legendre.

On montre, pour les fonction de  $\tilde{G}_{n_k}^m$  (respectivement pour  $\tilde{H}_{n_k}^m$ ), que :

$$\tilde{G}_{n_k}^m \left( \lambda_k R_{n_k}^{m,c} \Big|_{\beta}^2 + \beta^2 \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta}^2 \right) = (2n_k + 1) a^2 \left( (n_k + 1) \left( \frac{a}{\beta} \right)^{2(n_k+1)} (G_{n_k}^{m,i})^2 + n \left( \frac{\beta}{a} \right)^{2n_k} (G_{n_k}^{m,e})^2 \right)$$

On vérifie donc qu'à n'importe quelle altitude  $r = \beta$ , l'expression de la norme induit l'indépendance des termes  $G_{n_k}^{m,i}$  et  $G_{n_k}^{m,e}$ . En conclusion, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega\beta}^2 &= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2n_k + 1) (n_k + 1) \left( \frac{a}{\beta} \right)^{2(n_k+1)} \left( (G_{n_k}^{m,i})^2 + (H_{n_k}^{m,i})^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2n_k + 1) n_k \left( \frac{\beta}{a} \right)^{2n_k} \left( (G_{n_k}^{m,e})^2 + (H_{n_k}^{m,e})^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Puisque d'autre part, on montre que (Annexe A) :

$$\|P_{n_k}^m\|^2 = \frac{\sin \theta_0}{2n_k + 1} \left( \frac{\partial P_{n_k}^m}{\partial n} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{\partial}{\partial n} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0}$$

et que les conditions aux limites sont telles que  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega\beta}^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (n_k + 1) \left( \frac{a}{\beta} \right)^{2(n_k+1)} \left( (G_{n_k}^{m,i})^2 + (H_{n_k}^{m,i})^2 \right) \frac{\partial P_{n_k}^m}{\partial n_k} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left( \frac{\beta}{a} \right)^{2n_k} \left( (G_{n_k}^{m,e})^2 + (H_{n_k}^{m,e})^2 \right) \frac{\partial P_{n_k}^m}{\partial n_k} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right\} \pi a^2 \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (13.1)$$

Cette nouvelle expression de la norme présente le réel avantage de se représenter sous forme algébrique par une matrice diagonale. De plus, l'utilisation d'une telle norme pour les régularisations nous assure de pénaliser essentiellement les courtes longueurs d'onde en raison de la présence du facteur  $n_k$  qui augmente lorsque le développement en  $k$  augmente. Nous trouvons donc une norme qui est conforme au comportement recherché, bien qu'elle n'ait plus de relation simple avec l'énergie. Cette régularisation affectera uniquement les coefficients de la base de Legendre.

### 13.2 Nouvelle norme sur $\partial\Omega_{\theta_0}$

L'expression de la norme volumique (11.15) offre une régularisation *a priori* médiocre pour les coefficients de la base de Mehler. Nous constatons en effet l'absence explicite des valeurs propres  $\lambda_p$  dans cette expression. Nous devons donc rechercher l'expression d'une norme compatible avec l'objectif de recherche d'une contrainte de lissage et à limiter le phénomène d'*aliasing*.

De la même manière que précédemment, on cherche maintenant à déduire une norme sur la surface latérale du cône  $\partial\Omega_{\theta_0}$  d'ouverture  $\theta_0$  comprise entre les sphères de rayons  $a$  et  $b$ .

On cherche maintenant à exprimer :

$$\|\vec{B}_1\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = \|\vec{B}_{1,H}\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 + \|\vec{B}_{1,N}\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2$$

Considérons tout d'abord la norme déduite du produit scalaire suivant :

$$\langle \vec{B}_1, \vec{B}'_1 \rangle_{\partial\Omega_{\theta_0}} = \frac{1}{\pi \sin \theta_0 (b^2 - a^2)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{\partial V'_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_0} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \frac{\partial V'_1}{\partial \varphi} \right) r^2 \sin \theta_0 dr d\varphi \quad (13.2)$$

**Remarque :** Notons que  $r^2 \sin \theta dr d\varphi$  n'est pas l'élément de surface  $\partial s_{\Omega_{\theta_0}}$  mais l'élément de surface pondéré par  $r$  (voir figure 6.2).

L'ajout d'un poids au produit scalaire est une conséquence directe de l'absence de propriété de l'opérateur radial  $L_r$ , défini par 6.19, sur cette surface.

Calculons dans un premier temps :

$$I_1 = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{\partial V'_1}{\partial r} r^2 \sin \theta_0 dr d\varphi$$

En vertu de l'orthogonalité des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  le calcul se réduit à  $m$  fixé :

$$I_1^m = \pi (1 + \delta_{m,0}) a^2 \sin \theta_0 K_p^m(\theta_0) K_{p'}^m(\theta_0) G_p^m G_{p'}^m \int_a^b \frac{dR_p}{dr} \frac{dR_{p'}}{dr} r^2 dr$$

L'expression est analogue pour les coefficients  $H_p^m$ .

Or une simple intégration par partie montre que :

$$\int_a^b \frac{dR_p}{dr} \frac{dR_{p'}}{dr} r^2 dr = \left[ r^2 \frac{dR_p}{dr} R_{p'} \right]_a^b - \int_a^b R_p \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{p'}}{dr} \right) dr$$

Quelle que soit la condition à la limite supérieure et inférieure du domaine, choisie pour les fonctions radiales, le premier terme est nul. Nous voyons donc ici clairement le bénéfice de l'ajout d'un poids  $w = r$  dans le calcul du produit scalaire. En effet, l'intégrale se calcule très simplement en se remémorant que les fonctions  $R_p$  sont les fonctions propres de l'opérateur  $L_r$  et  $\lambda$  leurs valeurs propres (voir préliminaires). Nous pouvons donc exploiter l'orthogonalité des fonctions radiales et on trouve que  $I_1^m$  s'écrit simplement à  $m$  et  $p$  fixé :

$$I_1^{m,p} = (1 + \delta_{m,0}) \pi a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 \lambda_p (K_p^m G_p^m)^2$$

avec  $\lambda_p$ , la valeur propre qui dépend de la fonction radiale considérée. (Rappelons que pour  $p = 0$ ,  $\lambda_p = 0$  si l'on choisit les fonctions radiales définies par  $dR_p/dr)_{a,b} = 0$ ). L'expression est identique pour les coefficients  $H_p^m$ .

De même pour le calcul de :

$$I_2 = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \frac{\partial V_1'}{\partial \varphi} dr d\varphi$$

il vient, en vertu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et des fonctions radiales respectivement sur les intervalles  $[0, 2\pi]$  et  $[a, b]$  à  $(p, m)$  fixés :

$$I_2^{m,p} = (1 + \delta_{m,0}) \pi a \|Rp\|^2 \frac{m^2}{\sin \theta_0} (K_p^m G_p^m)^2$$

Finalement, on trouve la norme des composantes horizontales (13.2) à  $p$  et  $m$  fixés :

$$\left\| \vec{B}_{1,H}^{m,p} \right\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_{m,0}) \pi \left( \lambda_p + \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0} \right) K_p^{m2} \left( (G_p^m)^2 + (H_p^m)^2 \right) \quad (13.3)$$

De même on trouve la norme des composantes verticales :

$$\left\| \vec{B}_{1,N}^{m,p} \right\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_{m,0}) \pi \left( \frac{dK_p^m}{d\theta} \right)^2 \left( (G_p^m)^2 + (H_p^m)^2 \right) \quad (13.4)$$

Soit finalement :

$$\left\| \vec{B}_1 \right\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_{m,0}) \pi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \left( \lambda_p + \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0} \right) K_p^{m2} + \left( \frac{dK_p^m}{d\theta} \right)^2 \right\} (G_p^{m2} + H_p^{m2}) \quad (13.5)$$

Cette norme permettra de remplir des conditions de régularisation sur les coefficients de la base de Mehler uniquement.

Nous sommes donc arrivés à l'expression d'une norme explicitement fonction de la valeur propre  $\lambda_p$ . Les conséquences en seront une pondération plus importante des coefficients associés à des valeurs propres importantes. Une telle régularisation sur la surface latérale semble donc bien appropriée et représente bien une contrainte de lissage. On remarquera au passage l'extrême simplicité de sa formulation qui exclut les problèmes numériques.

### 13.3 Commentaires sur les nouvelles normes

Nous venons de trouver des expressions de normes, éloignées de la définition liée à l'énergie magnétique de surface. Cependant, nous pouvons souligner deux points intéressants.

D'une part, on peut montrer que la norme dans le cône est reliée à (13.1) et (13.5) de la façon suivante :

$$E_{\Omega}^l = \int_0^{\theta_0} \left\| \vec{B}_1 \right\|_{\partial\Omega_{\theta}}^2 d\theta + \int_a^b \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega_r}^2 dr$$

Les deux normes remplissent donc à peu près la même fonction que la norme volumique : la minimisation de ces normes sur les surfaces aura comme conséquence la minimisation du champ dans tout le volume.

Le second point est d'avoir pu obtenir deux expressions qui contraignent le champ magnétique proportionnellement au degré du développement des séries. Ces deux expressions nous permettront de mieux pénaliser les coefficients associés aux grandes valeurs propres qui sont moins bien déterminés.

Par conséquent, les définitions de ces normes quelque peu atypiques ont des propriétés tout à fait cohérentes avec un objectif de minimisation de l'énergie dans tout le volume, préférentiellement associée aux grandes valeurs propres.

## 13.4 Discussions sur les normes

Nous avons vu que le développement en harmoniques sphériques peut être étudié, dans une certaine mesure, de la même manière que celui des harmoniques sphériques ordinaires. A partir des équivalences d'écriture, nous en déduisons une somme d'informations qui nous permet d'anticiper le comportement de la modélisation sur une région particulière. Mais ces équivalences d'écritures mettent également en relief les problèmes et certaines ambiguïtés qui apparaissent lorsque nous raisonnons uniquement par analogie avec les harmoniques sphériques.

D'une part, nous pouvons discuter un des effet du procédé que Bullard appelle le detrending (retranchement d'une tendance générale) et qui permet de limiter l'effet de Gibbs. Lors des différents travaux réalisés à partir de la méthode des harmoniques sphériques sur calotte de Haines, les auteurs ont successivement discuté le fait que, malgré le retranchement d'un champ global, il reste de grandes longueurs d'ondes de taille plus grande que la taille de la région d'étude (par exemple : [24]). Ces longueurs d'ondes (avec toutes les réserves que ce concept entraîne d'après le paragraphe 3.2.1 de la première partie) ont souvent été pointées du doigt pour expliquer les oscillations visibles dans les modèles obtenus. Certes, il reste du champ qui ne pourra être modélisé que par un plus long développement en série que s'il ne restait que des contributions de sources régionales. Mais l'important est qu'en fait l'expression (11.8) montre que la longueur d'onde n'est pas le seul facteur déterminant, car si l'on raisonne en terme d'énergie, la troncature dans les séries en  $m$  est également importante. Sur la sphère entière, le champ complet est majoritairement dipolaire, nous pouvons donc nous permettre des développements décroissants en fonction de  $m$ . Sur la calotte, après avoir retranché une tendance, nous n'avons plus ce type de géométrie pour le champ résiduel. Par conséquent, en modélisation régionale, si l'on veut prévoir un développement en adéquation avec l'énergie magnétique contenue dans le cône il n'y a aucune justification pour tronquer les séries de manière équivalente pour chaque ordre  $m$ .

D'autre part, les définitions des normes en harmoniques sphériques sur la sphère ont des propriétés très avantageuses et peuvent être directement utilisées pour la régularisation des problèmes inverses. Ces normes sont, dans ce cas, liées à l'énergie magnétique et ont une interprétation simple. En décomposition locale, nous perdons bon nombre de ces propriétés et nous devons redéfinir un système complet de normes qui nous permettent de répondre aux nécessités d'une bonne régularisation (essentiellement celle du filtrage des «hautes fréquences»).

Nous avons donc pu extraire de l'expression des normes plusieurs enseignements. Le fait que la nouvelle décomposition locale soit directement reliée à la décomposition globale par des conditions aux limites permet en effet de simuler les effets des troncatures des séries d'une manière réaliste. Ces simulations donnent un moyen de quantifier la résolution maximale à laquelle

peut prétendre un développement en série tronqué dans la base locale. Elles nous informent par conséquent des différentes combinaisons possibles pour les couples d'indices de troncatures qui permettront de résoudre les données avec une limite de modélisation adaptée à l'erreur de mesure de ces données contiennent.

## Chapitre 14

# Inversions de données uniformément réparties

Nous entreprenons, dans ce chapitre, des inversions par moindres carrés sur des données synthétiques uniformément réparties dans le volume conique. L'objectif d'une telle étude est de vérifier que nous retrouvons bien les propriétés du champ magnétique et les caractéristiques propres à la modélisation régionales, que nous avons entrevues au chapitre 10.2 de la seconde partie. En particulier, nous cherchons à comparer les coefficients de Gauss estimés à ceux obtenus théoriquement par les relations analytiques avec les coefficients globaux. Nous profiterons, de plus, des conditions très favorables de répartitions des données pour expérimenter une stratégie basique pour accélérer la convergence des solutions du champ et nous pourrons vérifier son effet sur la proximité entre les coefficients du problème ainsi résolu et ceux du modèle théorique.

### 14.1 Définitions préliminaires

#### 14.1.1 Ecriture du problème inverse

Ecrivons explicitement les expressions du champ magnétique. En reprenant les formes compactes (6.49), (6.50) et (6.51) et en développant les termes d'après les notations des préliminaires (Partie 1, section 1), on écrit :

$$\begin{aligned} X = & \frac{a}{r} \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P(m)} R_p(r) \frac{dK_p^m}{d\theta} \{G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)\} \\ & + \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \{G_{n_k}^{m,i} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{m,i} \sin(m\varphi)\} \\ & + \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k-1} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \{G_{n_k}^{m,e} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{m,e} \sin(m\varphi)\} \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{a}{r} \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P(m)} R_p(r) \frac{K_p^m}{\sin \theta} \{G_p^m \sin(m\varphi) - H_p^m \cos(m\varphi)\} \\
&+ \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \frac{P_{n_k}^m}{\sin \theta} \{G_{n_k}^{m,i} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,i} \cos(m\varphi)\} \\
&+ \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k-1} \frac{P_{n_k}^m}{\sin \theta} \{G_{n_k}^{m,e} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,e} \cos(m\varphi)\}
\end{aligned} \tag{14.2}$$

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P(m)} \frac{dR_p(r)}{dr} K_p^m \{G_p^m \sin(m\varphi) - H_p^m \cos(m\varphi)\} \\
&+ \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} (n_k + 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} P_{n_k}^m \{G_{n_k}^{m,i} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,i} \cos(m\varphi)\} \\
&- \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} n_k \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k-1} P_{n_k}^m \{G_{n_k}^{m,e} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,e} \cos(m\varphi)\}
\end{aligned} \tag{14.3}$$

D'après les discussions du paragraphe 12.1, nous avons écrit les séries en fonction d'indices  $K$  et  $P$  dépendants de  $m$ . Pour  $p = 0$ , cas particulier d'une valeur propre nulle, interviennent les fonctions particulières  $R_0$ , constante, la fonction  $P_0^m$  et les coefficients de Gauss  $G_0^m$  (et  $H_m^0$ ).

Ecrivons le problème direct sous la forme :

$$\underline{d}_{obs} = \mathbf{A}\underline{\gamma} + \underline{\varepsilon} \tag{14.4}$$

et appelons  $\gamma_\beta^1$ , les paramètres de la base de Mehler, tels que :

$$\gamma_p^1 = \{G_p^m, H_p^m\}$$

$\gamma_\beta^{2,i}$ , les paramètres de la base de Legendre internes, tels que :

$$\gamma_k^{2,i} = \{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$$

et  $\gamma_\beta^{2,e}$ , les paramètres de la base de Legendre externes, tels que :

$$\gamma_k^{2,e} = \{G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}\}$$

On peut écrire l'ensemble des paramètres sous la forme :

$$\underline{\gamma} = \left\{ \left( \gamma_p^1 \right), \left( \gamma_k^{2,i} \right), \left( \gamma_k^{2,e} \right) \right\}^t$$

Posons d'autre part que :

$$d_{obs,3i-2} = X \quad d_{obs,3i-1} = Y \quad d_{obs,3i} = Z$$

Si on appelle  $D$  le nombre de données, alors  $\{i = 1, \dots, D/3\}$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  est organisée avec  $m$  croissant :

$$\begin{aligned}
A_{3i-2,\beta} &= R_p(r) \frac{adK_p^m(\theta_i)}{rd\theta} \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix}, \frac{dP_{n_k}^m(\theta_i)}{d\theta} \begin{bmatrix} (\frac{a}{r_i})^{n_k+2} \\ (\frac{r}{a})^{n_k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix} \\
A_{3i-1,\beta} &= \frac{aR_p(r)}{r} \frac{mK_p^m(\theta_i)}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin(m\varphi_i) \\ -\cos(m\varphi_i) \end{bmatrix}, \frac{mP_{n_k}^m(\theta_i)}{\sin\theta_i} \begin{bmatrix} (\frac{a}{r_i})^{n_k+2} \\ (\frac{r}{a})^{n_k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(m\varphi_i) \\ -\cos(m\varphi_i) \end{bmatrix} \\
A_{3i,\beta} &= \frac{dR_p(r)}{dr} K_p^m(\theta_i) \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix}, P_{n_k}^m(\theta_i) \begin{bmatrix} -(n_k+1)(\frac{a}{r_i})^{n_k+2} \\ n_k(\frac{a}{r_i})^{n_k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La résolution des paramètres  $\underline{\gamma}_{est}$  est donnée par :

$$\underline{\gamma}_{est} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \underline{d}_{obs} \quad (14.5)$$

Nous considérerons un poids identique pour toutes les données.

### 14.1.2 Inversion sous contrainte

Dans le cas d'une inversion sous contrainte, on cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$\Psi = \Psi_d + \Psi_e$$

avec :

$$\Psi_d = \|\underline{d} - \underline{d}_{obs}\|^2$$

Et  $\Psi_e$ , une condition supplémentaire de régularisation telle que :

$$\Psi_e = \beta E^2$$

avec  $\beta$  un facteur d'amortissement qu'il convient d'ajuster. Dans notre cas, nous imposerons que la norme du champ magnétique soit minimale. D'après (11.15) par exemple, l'énergie  $E$  peut s'écrire sous la forme algébrique :

$$E^2 = \underline{\gamma}^T \mathbf{\Lambda} \underline{\gamma}$$

avec  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice des fonctions de bases, que nous avons choisie diagonale, et dont l'expression dépend du choix de l'énergie à minimiser, énergie de surface ou de volume.

Les équations normales qui donnent les paramètres estimés sont :

$$\boxed{\underline{\gamma}_{est} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \beta \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{A}^t \underline{d}_{obs}} \quad (14.6)$$

### 14.1.3 Définition de la cohérence statistique des coefficients (cas des moindres carrés ordinaires)

Dans la seconde partie, nous avons considéré uniquement le problème direct. La résolution des conditions aux limites nous permet de connaître les coefficients de Gauss théoriques locaux qui modélisent dans le cône le même champ que nous venons d'échantillonner sur une grille. Appelons  $\underline{\gamma}_{th}$  le vecteur des coefficients théoriques que l'on obtient par les relations (9.18), (9.4), (9.8) et (9.9).

Les coefficients,  $\underline{\gamma}_{est}$ , estimés par inversion coïncident rarement avec leurs vraies valeurs car elles sont des variables aléatoires. Dans le cas idéal où les données  $\underline{d}_{obs}$  suivent la loi  $\underline{d}_{obs} = \underline{d}_{th} + \underline{\varepsilon}$ ,



où  $\underline{\varepsilon}$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de matrice de covariance  $\sigma_d^2 I$  et  $\underline{d}_{th}$  les valeurs théoriques du champ, la variance  $\sigma_{\gamma_i}^2$  sur le paramètre  $\gamma_{est,i}$  s'écrit :

$$\sigma_{\gamma_{est,i}}^2 = \sigma_d^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{i,i}^{-1}$$

avec  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  la matrice de covariance.

Puisque nous connaissons la variance des paramètres, nous pouvons en déduire un intervalle de confiance pour chacun des paramètres estimés par moindres carrés. La probabilité pour que le coefficient théorique  $\gamma_{i,th}$  soit dans un intervalle centré sur  $\gamma_{i,est}$  et tel que :

$$\gamma_{est,i} - \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \leq \gamma_{i,th} \leq \gamma_{est,i} + \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2}$$

s'écrit ([38]) :

$$P \left\{ \gamma_{est,i} - \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \leq \gamma_{i,th} \leq \gamma_{est,i} + \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$

La fonction  $\mathcal{Z}_{1-\alpha}$  est la loi normale réduite (ou loi de Gauss  $\mathcal{N}(0, 1)$ ).

Pour estimer la proximité du modèle estimé au modèle théorique, nous pouvons définir une probabilité  $1 - \alpha$  et vérifier si les paramètres théoriques sont contenus dans l'intervalle de confiance à  $1 - \alpha$ , des paramètres estimés. Nous cherchons, par la suite, à savoir si les coefficients estimés permettent d'encadrer le coefficient théorique à 95%. Si les coefficients théoriques sont bien dans l'intervalle, alors on doit avoir :

$$-\mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \leq \left( \frac{\gamma_{i,th} - \gamma_{est,i}}{\sigma_{\gamma_{est,i}}} \right) \leq \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \quad (14.7)$$

Pour une probabilité  $P = 95\%$ , on a  $1 - \alpha/2 = 0.975$  et à l'aide d'une table statistique, on trouve que  $\mathcal{Z}_{0.975} = 1.96$ .

## 14.2 Inversions sur données synthétiques

### 14.2.1 Sélection des données

Nous proposons de réaliser l'inversion par moindres carrés ordinaires en deux temps. Dans un premier temps, nous cherchons un ensemble restreint de coefficients en tirant parti des considérations sur la répartition d'énergie. On adaptera les indices de troncature des séries,  $P(M)$  et  $K(M)$ , selon l'énergie contenue dans les ordres  $m$  correspondants. Dans un second temps, nous cherchons le même ensemble de coefficients mais en retirant les données proches des contours du cône  $C(a, \theta_0, \varphi)$  et  $C(b, \theta_0, \varphi)$ . Nous vérifions que nous pouvons accélérer la convergence par ce simple moyen, déjà proposé section 10.4 de la seconde partie.

Prenons comme données  $\underline{d}_{obs}$  des valeurs synthétiques calculées par la différence entre un modèle de Cain et un modèle DGRF. Les données sont réparties uniformément sur 6 surfaces d'altitudes comprises entre  $r = a$  et  $r = a + 500km$ . Une grille d'échantillonnage comporte 236 points par surface, ce qui nous donne un total de 1416 données. La configuration est identique à celle du paragraphe 4.3 de la première partie, qui considérait une inversion avec les bases de fonctions SCHA selon Haines. Les résultats fournis par les deux formalismes seront par conséquent directement comparables. Les données sont de plus bruitées à  $\sigma_d = 5nT$ , et  $\underline{\varepsilon} = \mathcal{N}(0, \sigma_d^2)$ .

### 14.2.2 Sélection des paramètres

Pour se mettre dans une situation comparable avec le résultat de l'inversion par le formalisme des harmoniques sur calotte selon Haines, on choisit un ensemble de 256 coefficients de Gauss, nombre de coefficients utilisé pour réaliser la figure (4.8) de la première partie. Les développements aux indices  $P_{max}$  et  $K_{max}$  ont été adaptés selon l'énergie portée par les ordres  $m$  d'après le paragraphe 12.1. Nous avons pris, par conséquent, l'ensemble suivant des troncatures :

$$\begin{array}{rcccccc} M = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(M) = K(M) & 10 & 15 & 8 & 4 & 3 & 3 \end{array} \quad (14.8)$$

Les contributions des ordres  $m > 5$  ont donc été négligées et sont supposées être de magnitudes comparables à celle du bruit injecté dans les données.

### 14.2.3 Inversion par moindres carrés simple

#### Variance estimée

Les données synthétiques sont inversées à l'aide d'un algorithme par moindres carrés ordinaires. A l'aide d'une décomposition en valeurs singulières, nous vérifions que cette répartition des données n'occasionne aucune singularité numérique. Le rapport entre la valeur propre maximale et minimale de la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  dans (14.5) est de  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \sim 44$ . Le conditionnement de la matrice d'inversion est donc excellent et le bénéfice des propriétés d'orthogonalité des fonctions de bases est nettement appréciable. L'inversion par moindres carrés nous permet d'obtenir un écart type estimé sur les données de  $\sigma_d^{est} \sim 19$  nT. La valeur importante de cet écart type ne doit pas nous leurrer car elle inclue les effets de Gibbs, qui peuvent être vus comme une erreur sur le modèle théorique, surtout aux surfaces inférieure et supérieure.

Le modèle obtenu étant stable, il est interpolable en tous points, notamment en altitude. Par conséquent, les résidus étant théoriquement moins élevés au centre du cône, la prise en compte de davantage de surfaces d'échantillonnages, dans ces régions, contribue à la décroissance du résidu total. Pour en avoir une première idée, on décompose l'écart-type estimé sur les données, d'après les surfaces d'échantillonnage on trouve :

$$\begin{array}{rcccccc} u \text{ en km} & 0 & 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \\ \sigma_d^{est}(u) \text{ en nT} & 16,4 & 2,3 & 2,1 & 2,0 & 2,2 & 8,3 \end{array}$$

Puisque l'écart type est proportionnel au résidu, nous voyons que le résidu total est donc nettement dominé par les résidus aux surfaces inférieure et supérieure. Au centre du cône, le résidu est tout à fait satisfaisant.

#### Interpolation en altitude

Le champ obtenu est calculé, par le calcul du problème direct, entre les surfaces terrestre et supérieure pour des altitudes distantes de 10km. Les grilles d'échantillonnage de surface sont également raffinées. De ce fait, la distribution des points de données est différente de la configuration utilisée pour l'inversion. Les valeurs du champ sont ensuite directement comparées avec le modèle global utilisé pour construire l'ensemble des données synthétiques. On montre sur la figure (14.1) la différence entre les deux champs.

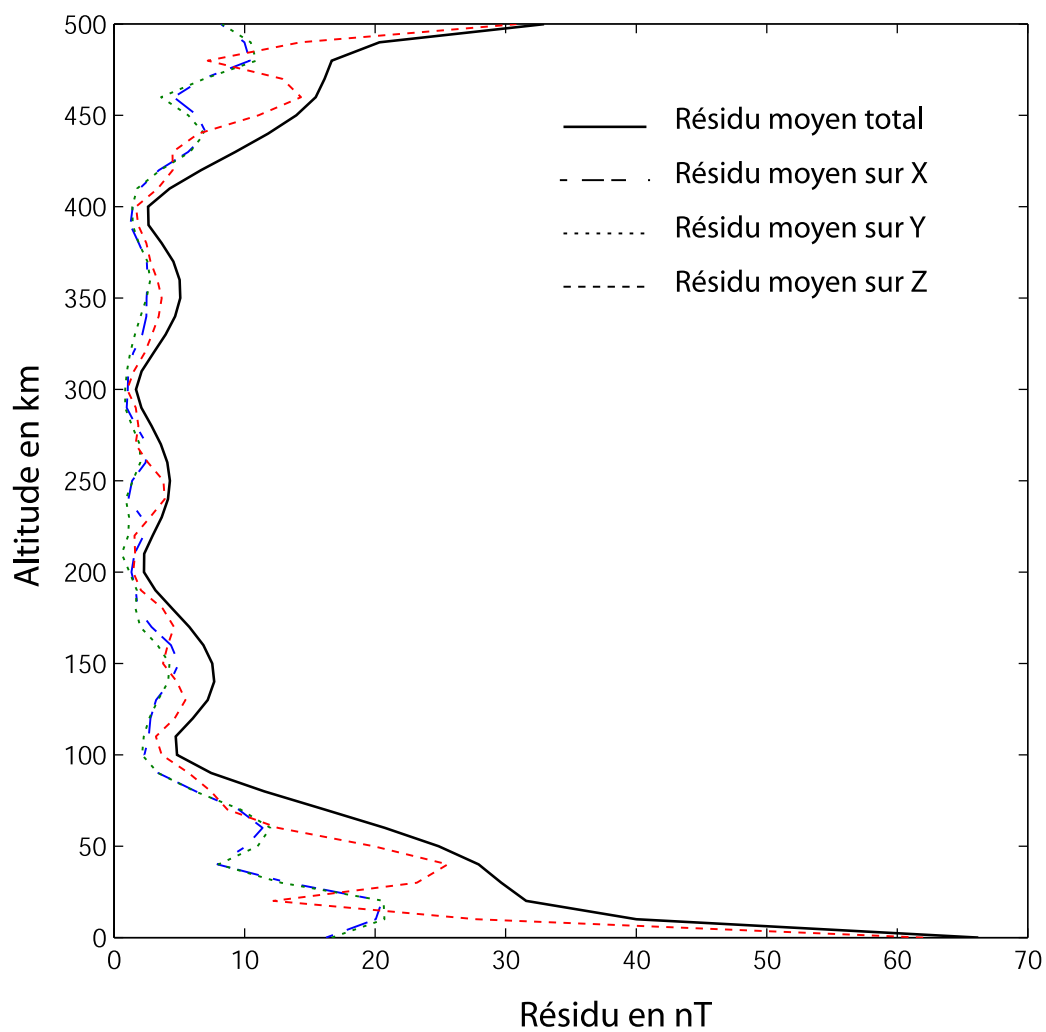


FIG. 14.1 – Résidus moyens de surface entre le modèle obtenu par inversion sur un échantillonnage et le modèle synthétique.

En utilisant les formules (10.3) et (10.2) on peut estimer le résidu moyen dans le volume  $\overline{R}_\Omega$  et à la surface terrestre,  $\overline{R}_{\partial\Omega}$ . On trouve respectivement :

$$\overline{R}_\Omega = 9,3nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega} = 62,2nT$$

Remarquons que ce résidu estimé sur un échantillon de points est proche de celui que l'on peut lire sur la figure (12.3). En revanche, le résidu de surface est important, et ceci pour les trois composantes du champ. Néanmoins, si l'on se concentre sur l'allure des résidus et leurs variations en altitude, on vérifie qu'ils décroissent jusqu'à la surface médiane du domaine, moins dominée par les effets de bords. De plus, la décroissance générale, surfaces inférieure et supérieure exclues, a bien l'allure d'une variation en altitude d'un potentiel newtonien. Cette dernière caractéristique et la valeur du résidu moyen nous poussent à conclure que le modèle est bien plus acceptable que celui obtenu avec SCHA selon Haines dans les mêmes conditions (voir figure 4.8 de la partie 1).

### Interpolation sur la surface terrestre

Même si l'allure générale de l'interpolation en altitude laisse supposer que le champ est correctement modélisé, nous ne savons toujours pas si la représentation à la surface terrestre est réaliste, d'autant moins que le résidu de surface  $\overline{R}_{\partial\Omega}$  est élevé. Résolvons donc le problème direct sur une grille fine à la surface terrestre  $r = a$  pour les trois composantes du champ. Nous comparerons ensuite le champ modélisé avec le champ synthétique réel.

La figure (14.2) montre le résultat de cette manipulation et suggère deux types de commentaires. Tout d'abord, comme nous nous y attendions, le phénomène de Gibbs prédomine sur la surface inférieure du cône. Les oscillations altèrent en partie le comportement réaliste du champ magnétique. Le modèle est cependant, du point de vue de l'interpolation, satisfaisant puisque nous n'avons, à aucun endroit à l'intérieur de la surface, de valeurs aberrantes. Par des techniques d'accélération de convergence, nous sommes donc susceptibles d'extraire l'information pertinente de ce modèle.

Le second commentaire concerne l'allure des résidus qui laisse penser que les oscillations sont essentiellement le résultat de la mauvaise convergence des solutions de la base de Legendre. Deux indices appuient cette conclusion : le premier concerne l'augmentation des résidus au pôle de la calotte pour la composante  $Z$ . Cette augmentation a été anticipée par les discussions du paragraphe 8.2.1 de la seconde partie. De plus, si l'on suit un chemin  $S(\varphi = 0, \theta, r = a)$ , le long du méridien zéro de la calotte pour la composante  $Y$  du champ par exemple, l'allure du résidu sur ce parcours nous rappelle le comportement oscillant de la reconstruction des fonctions de Schmidt. Nous avons donc bon espoir, en utilisant le subterfuge qui consiste à retrancher une fine couronne sur les bords des surfaces inférieure et supérieure, d'accélérer la convergence au centre de la calotte.

### Cohérence statistique des coefficients

Attardons-nous un instant sur l'ensemble des 256 coefficients de Gauss estimés et cherchons à savoir si un intervalle de confiance à 95% encadre leurs valeurs théoriques. On utilise pour ce faire la définition (14.7) et on rappelle que pour un intervalle de confiance à 95%, la fonction statistique est égale à  $Z_{1-\alpha/2} = 1,96$ .

La figure (14.3) montre que 89% des coefficients de Gauss ont été estimés avec un intervalle de confiance qui contient les valeurs théoriques à 95%. Les coefficients de l'inversion et du problème théorique concordent donc majoritairement. Lors de l'inversion par moindres carrés ordinaires,

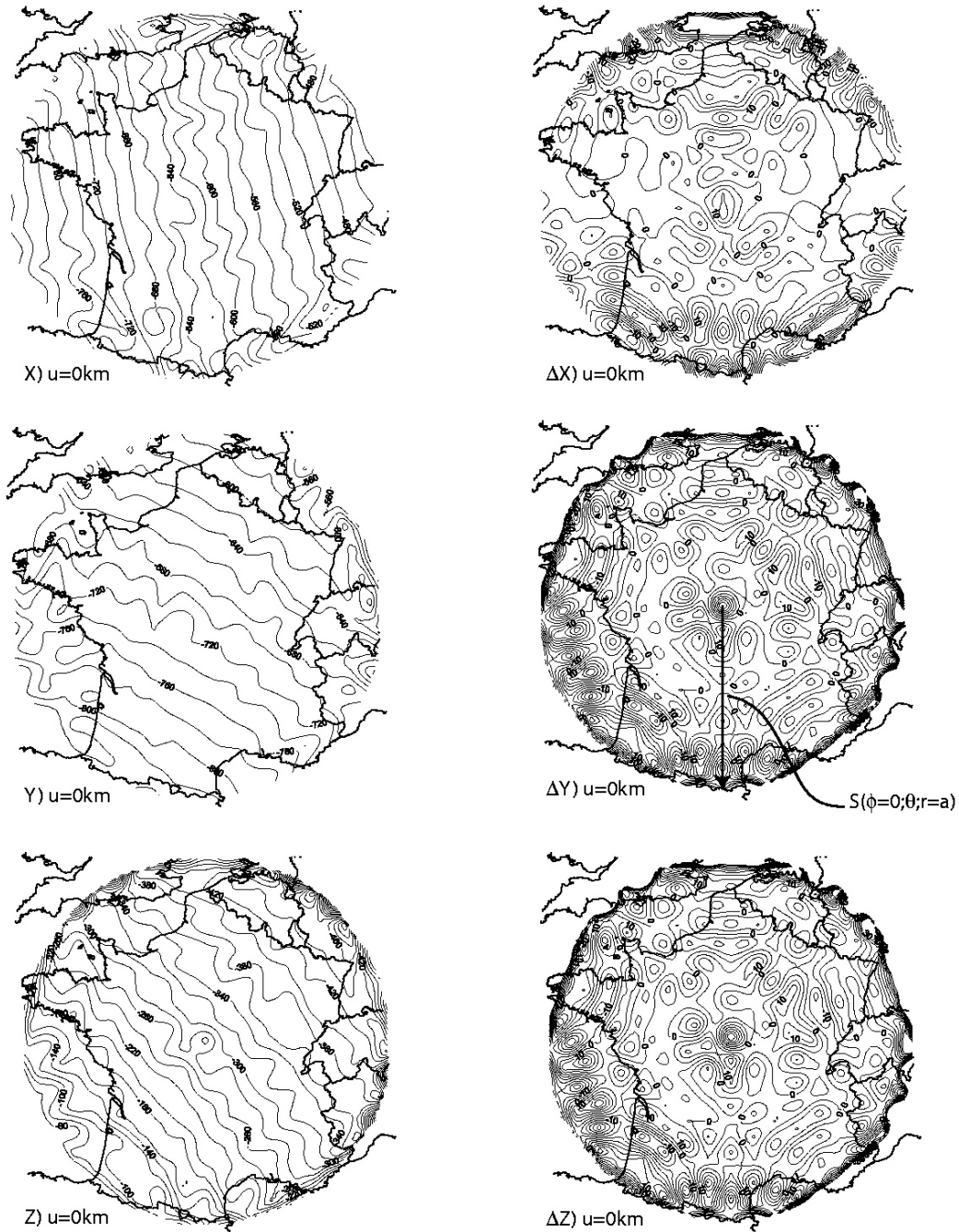


FIG. 14.2 – Modèle de champ synthétique obtenu par inversion par moindres carrés. On observe les oscillations caractéristiques du phénomène de Gibbs et les résidus sont relativement importants. Les lignes de contours représentent des intervalles de  $5\text{nT}$ .

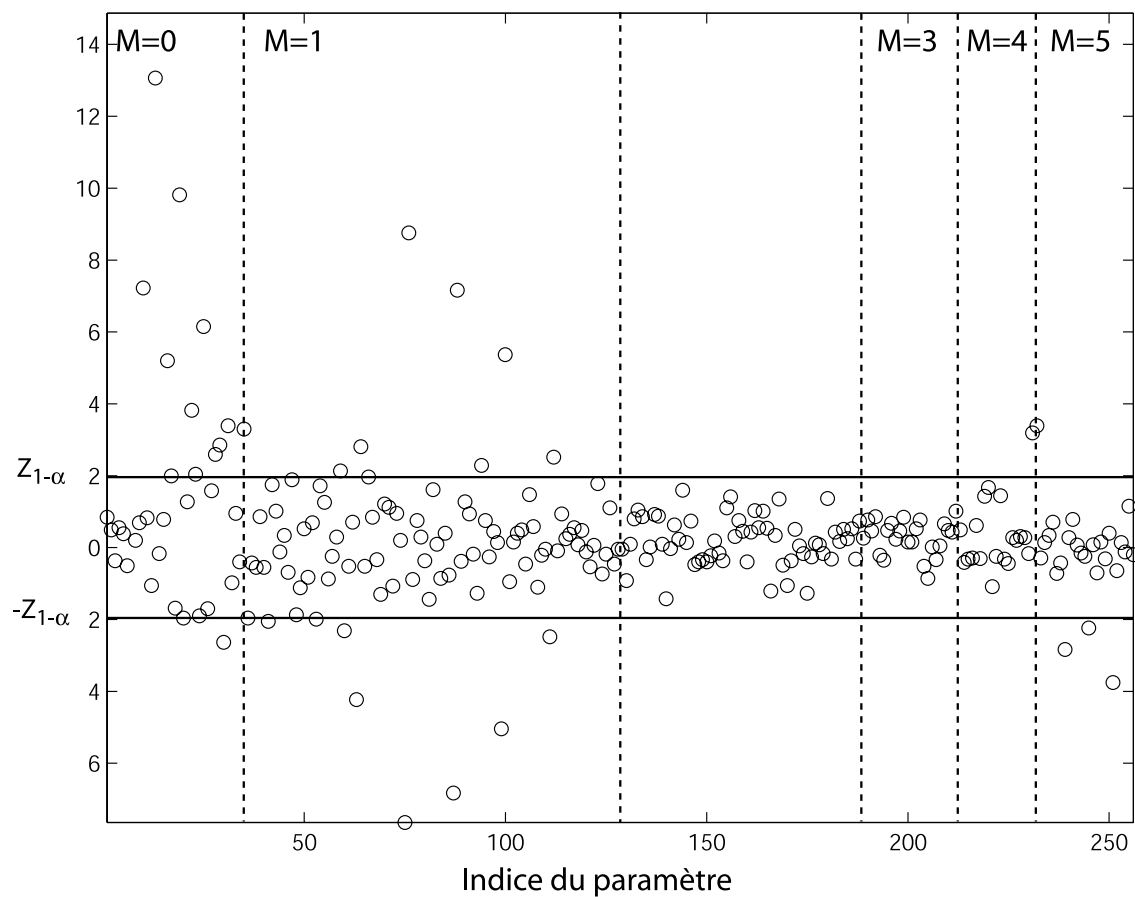


FIG. 14.3 – Comparaison statistique entre les coefficients de Gauss théoriques et les coefficients de Gauss estimés. Les points contenus entre les droites horizontales montrent les coefficients théoriques contenus dans l'intervalle d'incertitude des coefficients estimés.

les bases de coefficients ont été organisées à  $m$  croissant. On remarque par conséquent que les coefficients à l'extérieur de l'intervalle de confiance sont essentiellement portés par les ordres  $m = 0$  ou  $m = 1$ . Cette remarque, lorsqu'elle est mise en parallèle avec les considérations énergétiques, nous laisse entendre que les troncatures pour les ordres  $m = 0$  et  $m = 1$  sont insuffisantes pour que le problème inverse et le problème direct théorique puissent être complètement équivalents. L'inversion s'adapte par conséquent au mieux à l'ensemble des coefficients recherchés. Cette affirmation sera plus amplement vérifiée au paragraphe suivant.

#### 14.2.4 Inversion par moindres carrés : accélération de la convergence.

Considérons maintenant le même ensemble de données précédent mais retranchons-lui, aux bords, une fine couronne d'angle  $\varepsilon = 0.3^\circ$ , uniquement aux altitudes  $r = a$  et  $r = a + 500\text{km}$ . Cet expédient permet d'exclure les discontinuités topologiques que sont les *coins* du cône, siège de la superposition d'oscillations. Nous aurions pu tout aussi bien choisir d'agrandir l'angle d'ouverture  $\theta_0$  de la calotte. D'un point de vue de la modélisation du champ, ces options sont équivalentes. Néanmoins, changer les paramètres du cône, revient à changer les valeurs de coefficients théoriques (ou estimés) et pour les besoins comparatifs de la discussion, nous avons choisi une géométrie fixée une fois pour toute. Par rapport à l'ensemble complet des données synthétiques, cette manipulation revient à retrancher seulement 90 données parmi les 1416 de départ.

#### Variance estimée

De la même manière que précédemment, on vérifie à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières que le conditionnement numérique de la matrice d'inversion est satisfaisant. On trouve que le rapport entre les deux valeurs propres maximale et minimale équivaut à  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \sim 71$ . Par rapport au conditionnement de la matrice de la section 14.2.3, nous avons légèrement dégradé le conditionnement.

On trouve maintenant que l'écart type estimé sur les données est de  $\sigma_d^{est} \sim 5,7$  nT et on peut le répartir en altitude de la façon suivante :

$u$ en km	0	100	200	300	400	500
$\sigma_d^{est}(u)$ en nT	3,06	2,2	2,1	2,1	2,0	2,3

Même si à première vue, cette manipulation a amélioré la variance totale sur les données il semble, d'après les résultats du paragraphe 14.2.3, que les valeurs de  $\sigma_d^{est}(u)$  diffèrent essentiellement aux surfaces inférieure et supérieure. Il convient donc de vérifier, d'une part le comportement de l'interpolation en altitude et, d'autre part, celui de l'interpolation sur une surface pour vérifier si la manœuvre que nous venons de réaliser constitue véritablement un gain dans la représentation du champ.

#### Interpolation en altitude

On réalise toujours la même comparaison entre le champ modélisé et le champ synthétique connu. Les surfaces d'interpolation sont échantillonnées tous les 10km entre les altitudes terrestre et supérieure. Par rapport au paragraphe (14.2.3), la comparaison s'effectue en dehors de la couronne retranchée lors de l'inversion.

En utilisant les formules (10.3) et (10.2) on peut estimer le résidu moyen dans le volume  $\overline{R}_\Omega$  et à la surface terrestre,  $\overline{R}_{\partial\Omega}$ . On trouve respectivement :

$$\overline{R}_\Omega = 2nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega} = 10,8nT$$

Cette fois-ci, le résidu volumique est nettement inférieur à celui qui est estimé sur la figure (12.3) pour des indices de troncature posés à  $K_{max} = P_{max} = 15$ . Cette différence s'explique simplement par l'exclusion des bords latéraux. De même à la surface terrestre, le fait de retrancher la couronne permet d'atteindre la précision de  $10,8nT$  en moyenne sur la surface inférieure. Etant donné que ces valeurs ne sont pas directement comparables avec les résultats du paragraphe 14.2.3, nous traçons, sur la figure (14.4), le résidu que nous aurions obtenu en retranchant une couronne d'angle  $\varepsilon$  pour la comparaison du champ modélisé et du champ synthétique. Nous pouvons ainsi mieux apprécier les bénéfices qu'apporte l'exclusion d'une fine couronne sur les bords.

Les résultats montrés sur la figure nous poussent à la conclusion suivante : lorsque nous retranchons une fine couronne d'angle  $\varepsilon$ , qui inclue la discontinuité topologique, nous améliorons l'ajustement des données au centre de la calotte. En comparant le résidu moyen total et le résidu moyen de l'inversion «ordinaire», dans l'intervalle  $\theta_0 - \varepsilon$  nous avons gagné environ  $15nT$  de précision. Cela se fait au détriment de la modélisation du champ près des bords, mais dans le cas du paragraphe 14.2.3 comme ici, cette zone est, de toute évidence, inexploitable. Vérifions maintenant visuellement que nous n'avons rien perdu de la qualité de modélisation, grâce à une interpolation sur différentes surfaces.

### Interpolation sur la surface terrestre

L'option, qui consiste à retrancher une couronne sur la surface latérale en  $r = a$  et  $r = b$ , est préférée pour le moment à l'inversion «ordinaire» pour représenter le champ à différentes altitudes. On présente donc sur les figures (14.5), (14.6) et (14.7) le champ interpolé à différentes altitudes et sur des grilles de points fines. D'autre part, les figures (14.8), (14.9) et (14.10) montrent la différence avec le champ synthétique aux altitudes correspondantes.

Lors de l'interpolation du champ à la surface terrestre, pour les trois composantes, les oscillations ont été réduites par rapport à ce que l'on observe sur la figure (14.2). D'une manière générale, nous gagnons en précision dans tout le volume conique et malgré le faible nombre de coefficients nous pouvons modéliser correctement le champ. Par rapport à une méthode de convergence de type Fejer (section 10.4, partie 2), les résidus ne sont pas biaisés et nous vérifions toujours les mêmes caractéristiques propres à la modélisation dans un cône. En particulier, le bombement au pôle de la calotte en  $r = a$  et  $r = a + 500km$  est nettement visible sur la figure (14.10) des résidus de la composante  $Z$ . D'un point de vue quantitatif, l'amplitude des résidus ne dépasse pas  $5nT$  au centre de la calotte sur les frontières supérieure et inférieure ; au centre du cône, le résidu pour les trois composantes du champ est inférieur à  $2nT$ .

### Cohérence statistique des coefficients

De la même manière que précédemment, on vérifie si les coefficients théoriques appartiennent à l'intervalle de confiance des coefficients estimés à 95%. On applique de la même manière la relation (14.7) dont les résultats sont représentés sur la figure (14.11).

Cette figure soulève divers points de discussion. D'une part, nous constatons que les données proches de la discontinuité topologique ont une influence certaine sur la détermination des coefficients de Gauss. La distribution des points autour de l'intervalle de confiance nous indique que les coefficients sont différents de ceux obtenus par (14.3). Nous n'avons plus que 64% des coefficients théoriques qui appartiennent à l'intervalle. D'autre part, ce sont, une fois encore, les ordres  $m = 0$  et  $m = 1$  qui présentent un comportement singulier.



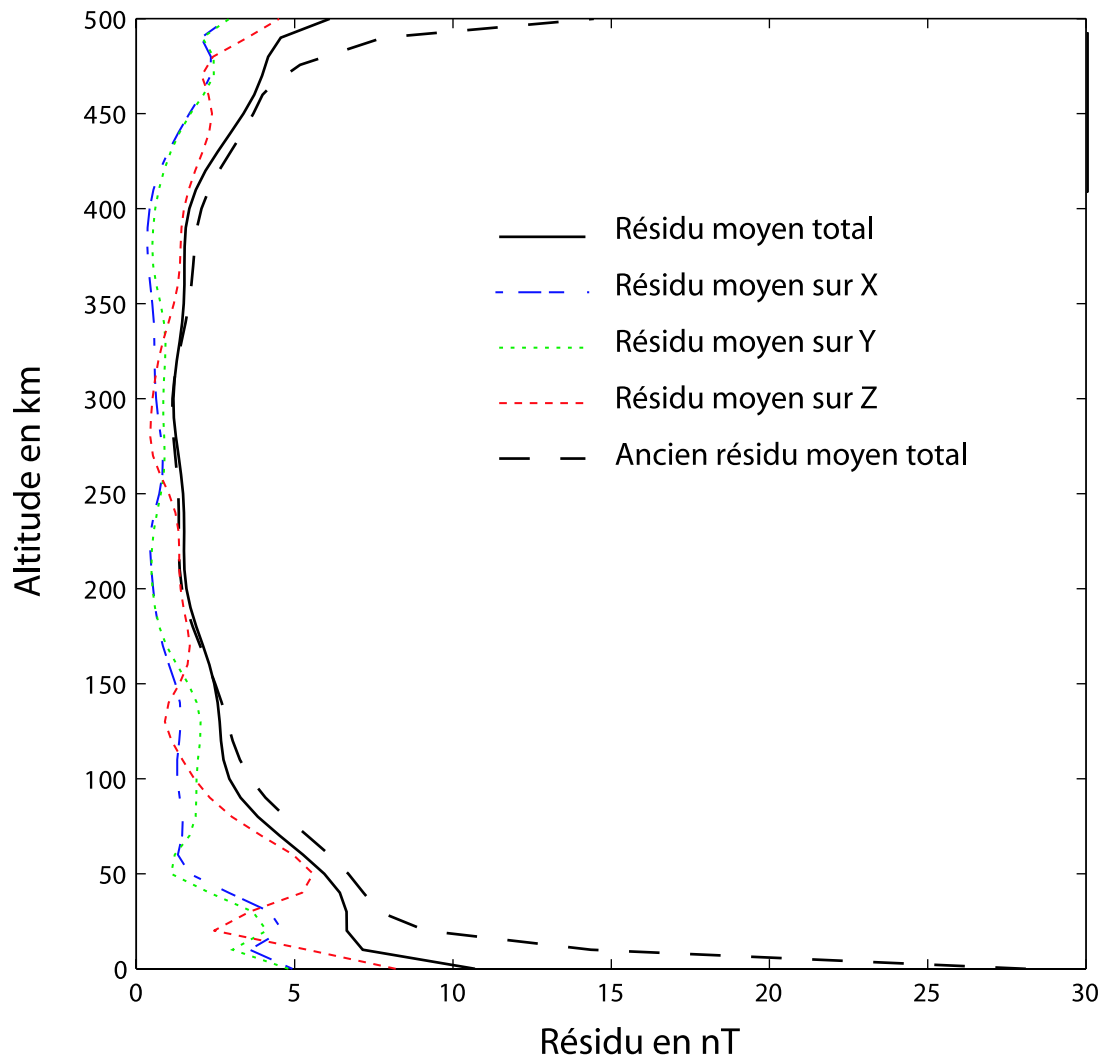


FIG. 14.4 – Interpolation du modèle obtenu par inversion en retranchant une couronne d'angle  $\varepsilon = 0.3^\circ$  aux surfaces terrestre et supérieure. A titre indicatif, on donne la courbe du résidu de surface moyen obtenu avec le modèle qui considère l'ensemble complet des données.

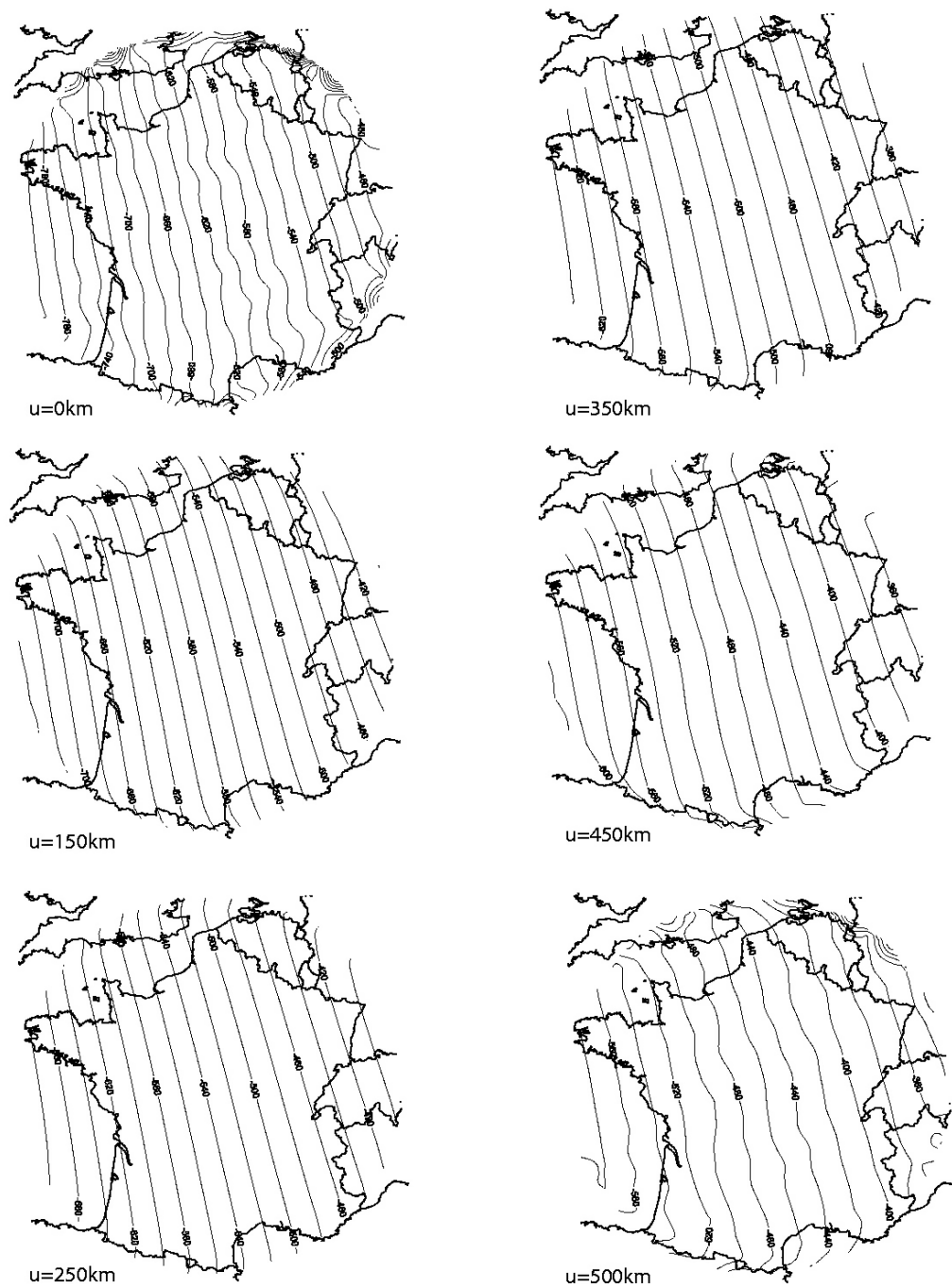


FIG. 14.5 – Interpolation de la composante  $X$  du champ modélisé à différentes altitudes. Les oscillations ont été nettement réduites en  $r = a$  par le retranchement d'une couronne d'angle  $\varepsilon = 0,3^\circ$  sur cette surface (voir figure 14.2).

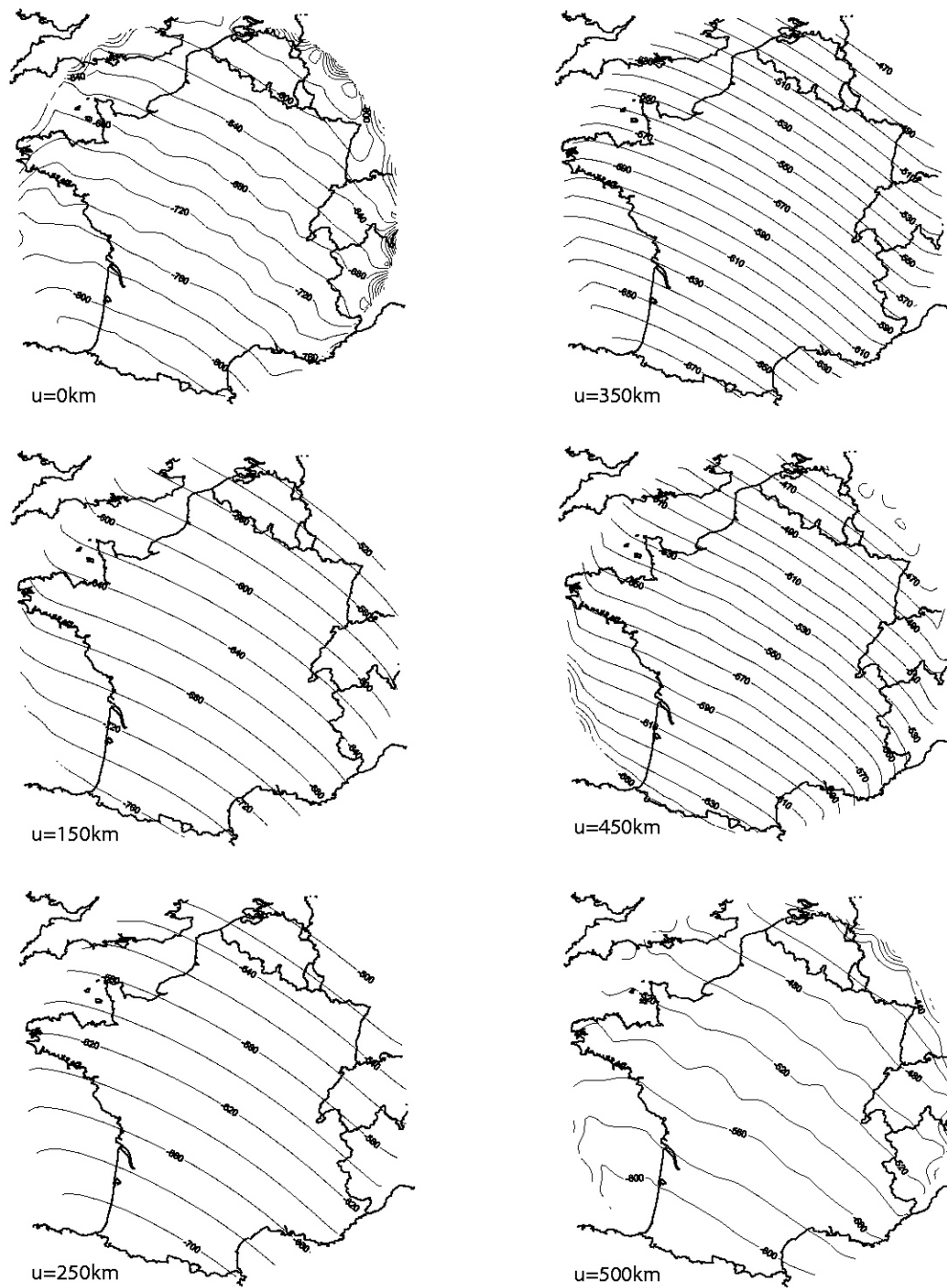


FIG. 14.6 – Composante Y du champ modélisé. Les tracés montrent une interpolation dans tout le volume  $\Omega$  du cône. (voir légende de la figure 14.5)

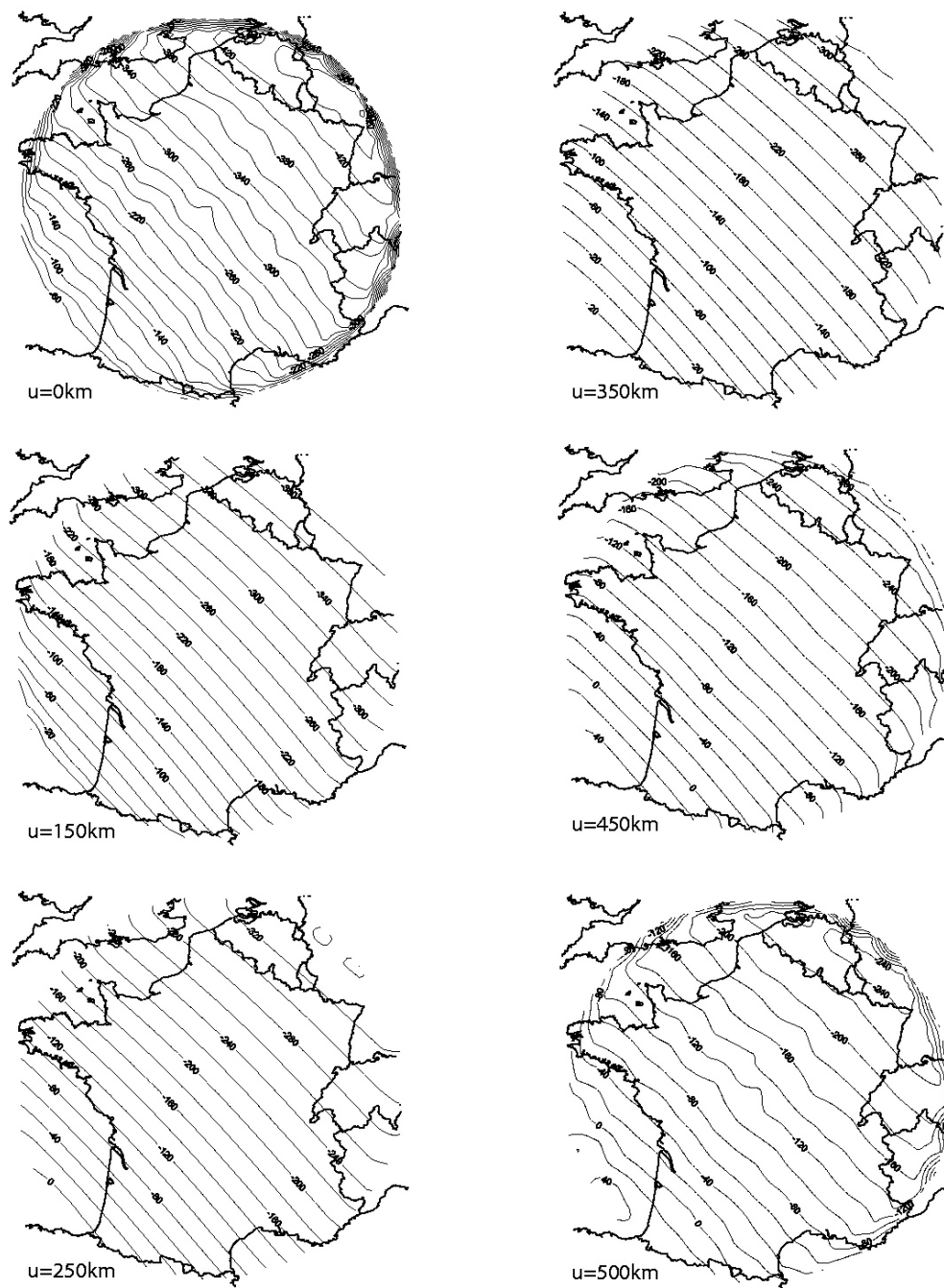


FIG. 14.7 – Composante  $Z$  du champ modélisé. Les tracés montrent une interpolation dans tout le volume  $\Omega$  du cône. (voir légende de la figure 14.5)

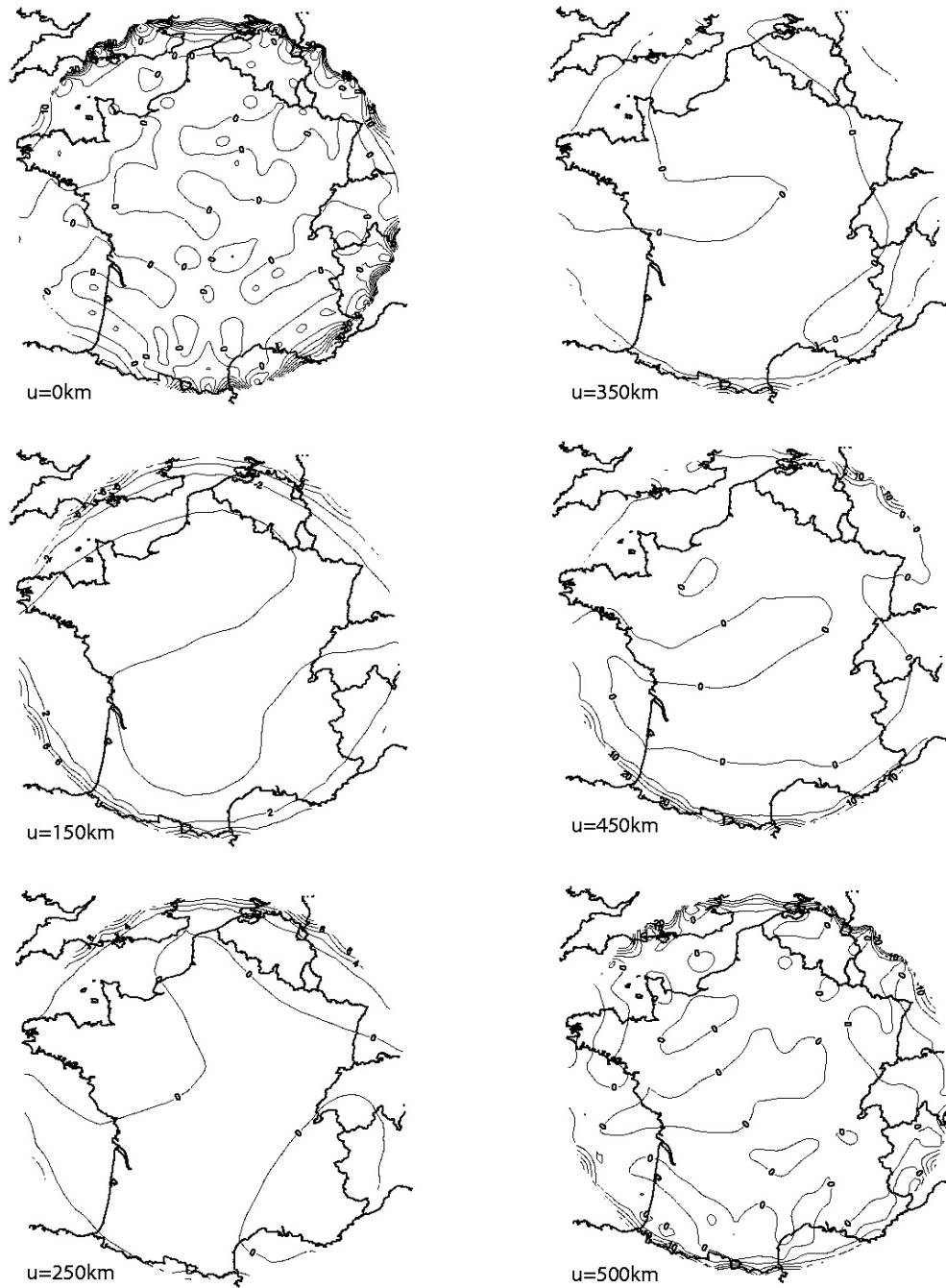


FIG. 14.8 – Résidus entre la composante  $X$  modélisé et le champ synthétique réel. Les intervalles de contours sont de  $5\text{nT}$  en  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  et de  $2\text{nT}$  ailleurs.

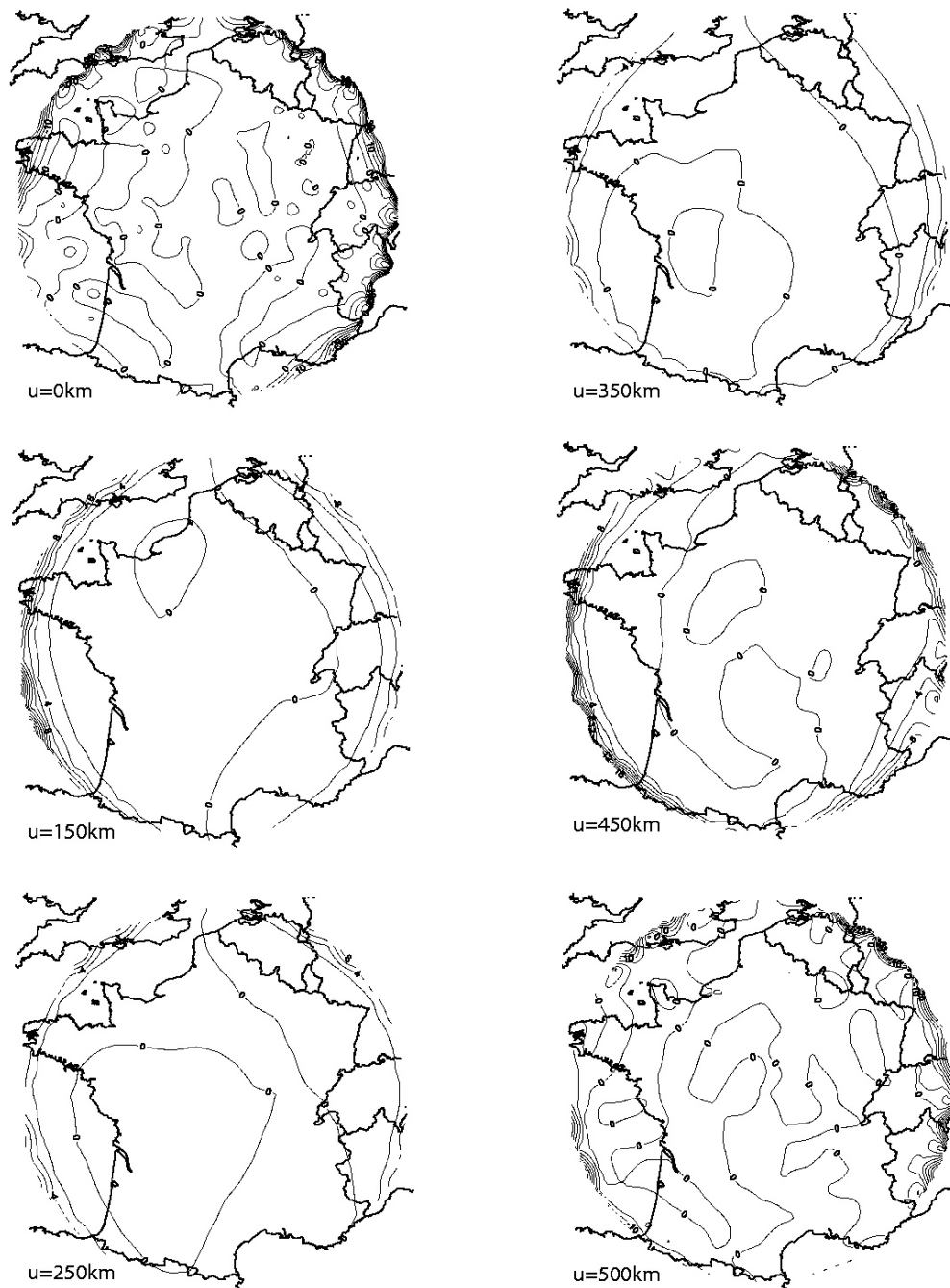


FIG. 14.9 – Résidus entre la composante  $Y$  du modèle et le champ synthétique (voir légende de la figure 14.8).

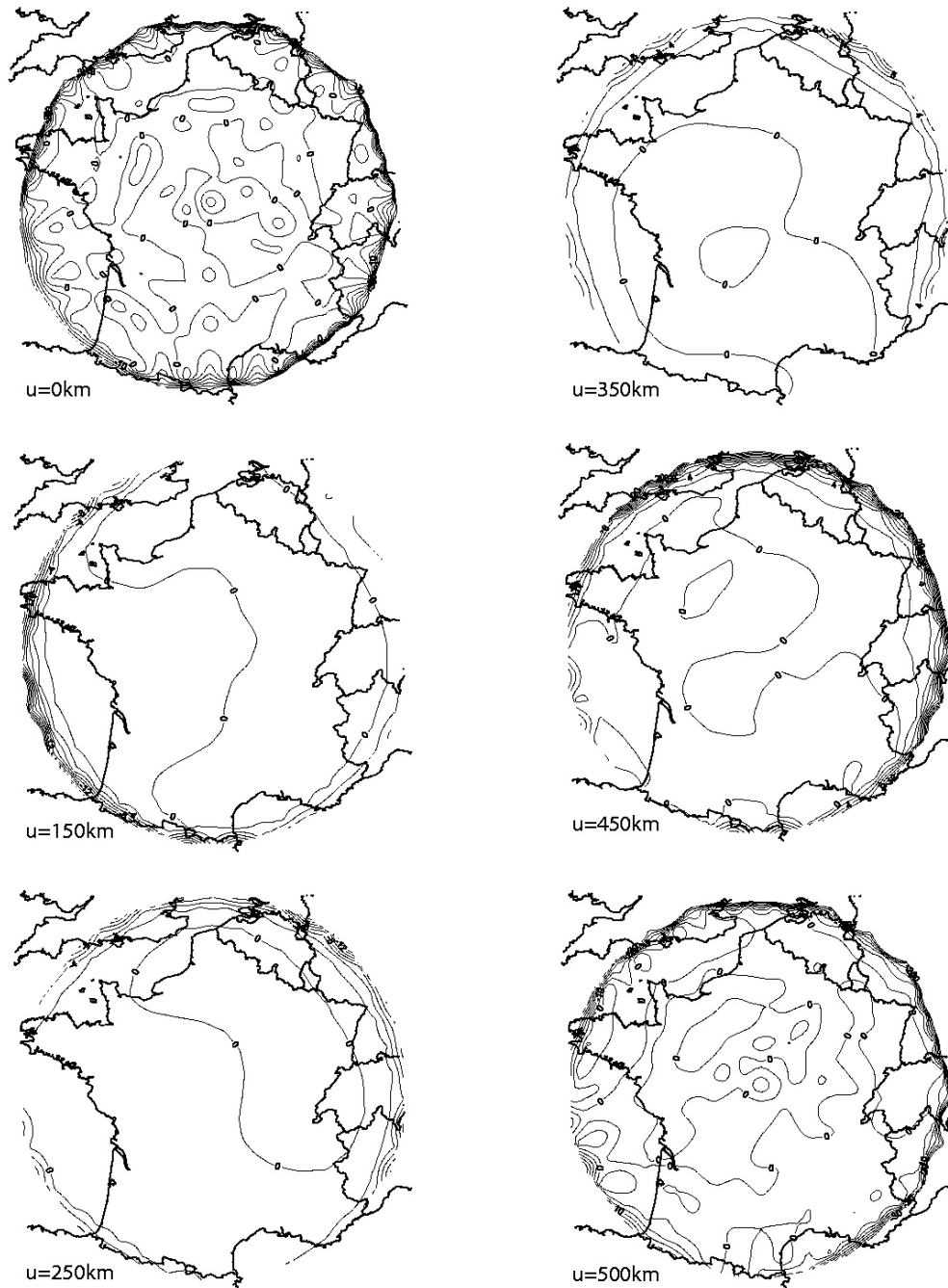


FIG. 14.10 – Résidus entre la composante  $Z$  modélisée et le champ synthétique (voir légende de la figure 14.8)

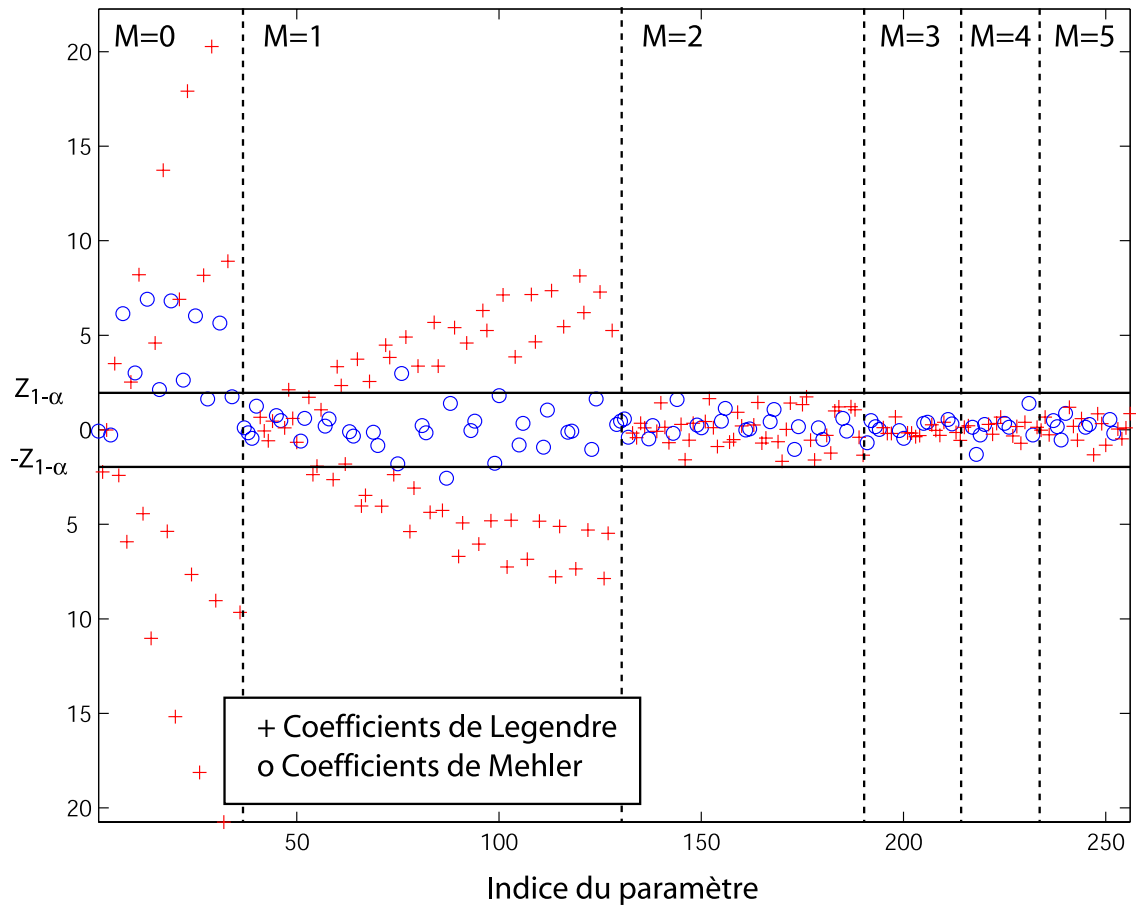


FIG. 14.11 – Cohérence statistique entre les coefficients de Gauss estimés et les coefficients théoriques. Le fait de retrancher une couronne libre les coefficients de Gauss de la base de Legendre.



Dans le cas d'une répartition uniforme de données, en raison des précautions prises pour la construction du maillage (paragraphe 4.1, partie 1), nous pouvons considérer que nous n'avons aucune corrélation entre les coefficients de Gauss. De plus, l'angle  $\varepsilon$  de la couronne est suffisamment petit pour supposer que les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Legendre ne sont pas affectées outre mesure, d'autant moins que seules la surface terrestre et la surface supérieure sont concernées par cette mesure. La condition de «bord exclu» (retranchement des points  $\theta > \varepsilon$ ) ne modifie par conséquent pas fondamentalement les propriétés de la matrice d'inversion. La raison de cette différence est à imputer vraisemblablement à la condition de Dirichlet imposée aux fonctions de Legendre en  $\theta = \theta_0$ . Sur la figure, nous avons distingué les coefficients de la base de Mehler des coefficients de la base de Legendre. Nous vérifions indiscutablement cette hypothèse puisque seuls les coefficients de Legendre sont affectés par la condition de «bord exclu». En fait, il n'est pas illégitime de penser que, libres de toute contrainte sur les bords, ces coefficients s'adaptent au mieux à l'énergie magnétique contenue au centre de la calotte. L'allure générale à  $m$  fixé suggère de plus que ce sont les coefficients associés à des indices  $k$  grands qui s'ajustent préférentiellement. Par conséquent, cette méthode pénalise essentiellement les courtes longueurs d'onde, les grandes tendances restent relativement inchangées. Nous retrouvons ici, une fois de plus, le fait que la base des fonctions de Legendre converge lentement et, de ce point de vue, retrancher un bord revient bien à accélérer la convergence de la solution.

### 14.3 Conclusion sur la répartition uniforme des données

Le formalisme des harmoniques coniques permet de modéliser le champ magnétique dans tout le volume ; nous venons de le vérifier sur des exemples synthétiques d'inversion. Dans le cas de données uniformément réparties, nous avons été en mesure de comparer statistiquement, de manière satisfaisante, les coefficients estimés par l'inversion et les coefficients théoriques. Même si les solutions du potentiel convergent lentement en théorie, nous constatons avec satisfaction que le problème inverse permet d'obtenir un modèle qui s'ajuste très bien aux données si l'on retranche les discontinuités topologiques du cône. D'autre part, l'orthogonalité des gradients nous permet de construire une matrice d'inversion quasi-diagonale, ce qui, par rapport au formalisme de Haines, évite les problèmes numériques pour des développements élevés et les corrélations entre les coefficients de Gauss. Dans une situation similaire à celle employée pour tester les bases de fonctions de Haines, nous avons obtenu incontestablement des résultats plus satisfaisants, que ce soit sur l'ajustement des données ou le comportement de l'interpolation dans un volume, qui respecte bien les propriétés des potentiels newtoniens.

Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de nous mettre dans une situation très proche du cas réel d'une inversion sur des données mesurées du champ magnétique.

## Chapitre 15

# Inversion de données synthétiques de répartitions réelles

Nous proposons dans ce chapitre de traiter un cas proche du cas réel en considérant la position exacte des données sur la France. Nous ne retenons pour les considérations qui suivent que les données du satellite CHAMP, les données terrestres et aéromagnétiques. Ceci nous permettra de traiter un exemple particulièrement défavorable de problème inverse, où les données ne sont contenues que dans des régions très localisées du volume conique. Nous pourrions ainsi tester la robustesse des modèles obtenus par le formalisme des harmoniques coniques par des interpolations en altitudes ou en surface et par des comparaisons statistiques sur les coefficients. Les manipulations qui suivent ont comme objectif de pouvoir être appliquée sur les données réelles du champ dans un cône centré sur la France et nous nous mettons par conséquent dans des conditions similaires, notamment pour la sélection des données magnétiques.

### 15.1 Le problème de la variation séculaire

Notre objectif était d'utiliser simultanément les données scalaires du levé aéromagnétique sur la France et l'ensemble des données vectorielles provenant des missions des satellites CHAMP et MAGSAT (nous partons du principe que ØRSTED ne distingue pas les sources crustales car son orbite est élevée). Pour l'étude du champ magnétique sur la France, l'exploitation des données de la prospection aéromagnétique est indispensable car c'est le seul ensemble de données qui offre une couverture complète du territoire français proche de la surface terrestre ; en revanche, cet ensemble de données est vieux de 40 ans et ne contient que des données scalaires du champ. D'un autre côté, nous disposons des données des satellites MAGSAT, prises en 1980 et CHAMP, qui bénéficie des innovations technologiques les plus récentes. Nous disposons ainsi d'une couverture, entre les altitudes 350 et 500km environ, très complète pour les périodes 1980 et 1999 à 2001. Mais le champ magnétique dérive et pour mettre en évidence des contributions lithosphériques, nous devons réduire les jeux de données prises sur ces différentes périodes de temps à une même époque en modélisant la variation séculaire. Cette tâche est spécialement ardue dans le cas de notre proposition de modélisation régionale par le formalisme que nous avons décrit dans la partie 2. En effet, si la méthode est susceptible de modéliser correctement le champ magnétique dans un volume, elle nécessite surtout d'avoir une répartition relativement homogène de données, au moins sur les frontières du domaine. Or, les stations de répétition sont à la surface terrestre et l'extrapolation d'un modèle de variation séculaire dans le volume complet ne peut se faire que par une inversion sous contrainte ou par l'ajout d'une information a priori qui peut se révéler

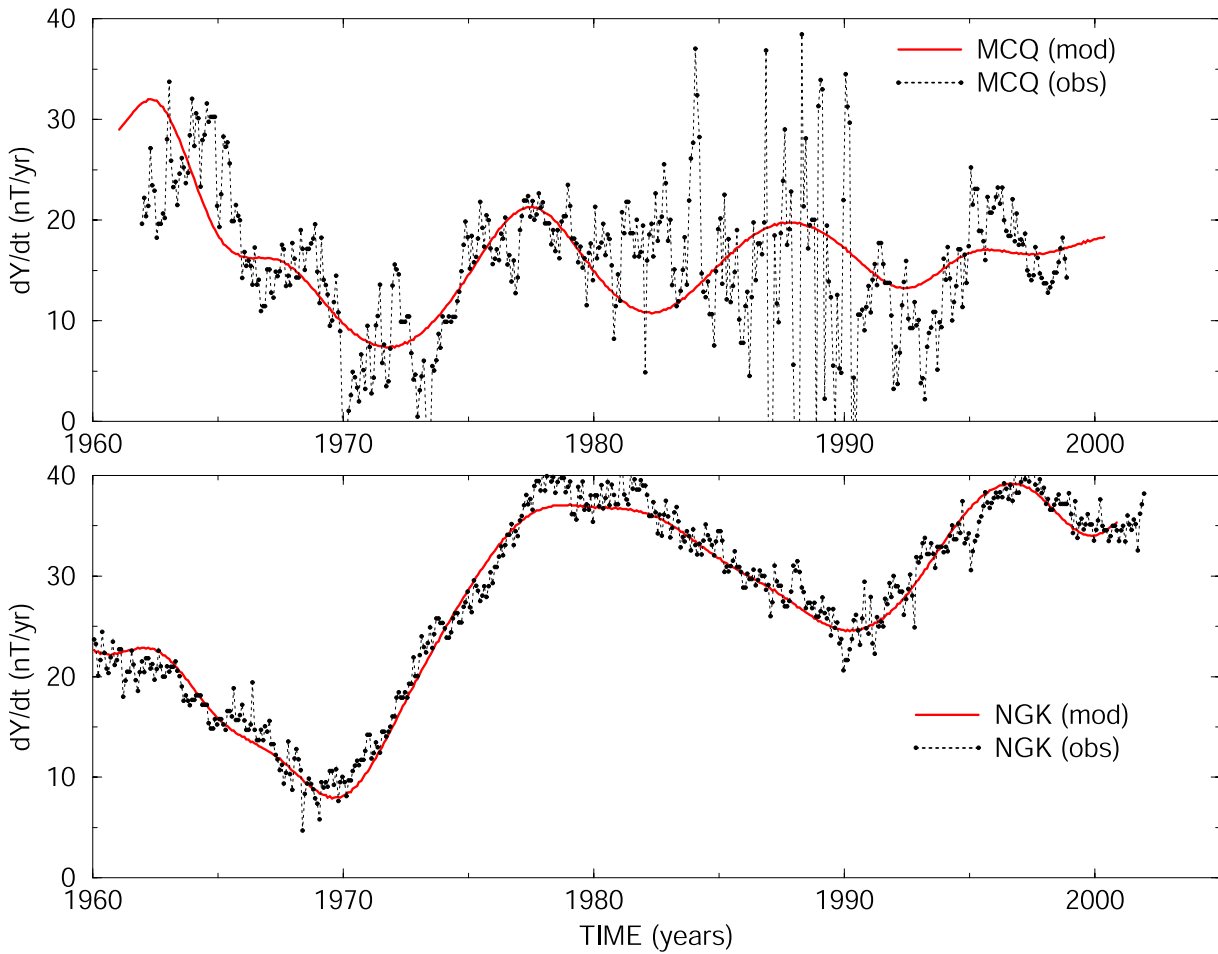


FIG. 15.1 – Différence entre le modèle de variation séculaire de Sabaka et al. (2003) et les mesures réalisées aux observatoires de Macquarie (haut) et de Niemegek (bas). Les courbes représentent deux exemples extrêmes d’ajustements.

prédominante.

Dans une première tentative d’inversion de la variation séculaire, nous avons utilisé le réseau des 33 stations de répétition française au sol. Nous avons ensuite retranché aux données un modèle global de variation séculaire de type IGRF pour chaque année considérée. Cette différence constitue l’anomalie de variation séculaire par rapport au modèle global. Puisque l’intensité du champ décroît avec l’altitude, et que l’anomalie est relativement faible (20 nT environ), nous avons supposé qu’à l’altitude supérieure du cône elle pouvait être considérée comme nulle sur toute la surface. Nous avons donc pu couvrir deux surfaces du cône. Sur la surface latérale, nous n’avons pas de données et nous ne sommes pas autorisés à faire ce type d’hypothèse. Par conséquent, nous avons cherché, lors de l’inversion, à minimiser également l’énergie magnétique dans le cône pour contraindre cette surface. Les résultats obtenus ne sont satisfaisants qu’aux surfaces inférieure et supérieure mais l’interpolation à l’intérieur du domaine n’est pas toujours réaliste. La modélisation de la variation séculaire par les harmoniques sur cône nécessite une attention toute particulière et requiert de nouvelles stratégies et des moyens que nous ne sommes pas en mesure de proposer pour le moment.

L'utilisation des modèles de variation séculaire du type IGRF est brutale car il reste environ 30nT de différence et la modélisation régionale sera inévitablement biaisée. Pour des ensembles de données pris sur de plus courtes périodes que la notre, une alternative possible pourrait être d'utiliser le modèle CM3 de variation séculaire de Sabaka et al. (2003). Ce modèle devra cependant être vérifié avec précaution car si, dans certaines régions du globe, le modèle semble bien s'ajuster aux données des observatoires magnétiques, dans d'autre, l'ajustement est insuffisant pour pouvoir entreprendre des études de champs régionaux précises. La figure montre deux cas extrêmes de la comparaison entre les données enregistrées aux observatoires magnétique et le modèle CM3. En haut, la comparaison est réalisée à l'observatoire de Macquarie (MCQ) en Australie, et en bas, à celui de Niemegk (NGK) en Allemagne. En particulier, le modèle de Sabaka et al. (2003) s'ajuste exceptionnellement bien aux données de l'observatoire de Niemegk. S'il s'ajuste moins bien aux données de l'observatoire australien, la raison est à attribuer vraisemblablement au faible nombre d'observatoires dans l'hémisphère sud. Cette comparaison est, strictement parlant, insuffisante car elle ignore le gradient de la variation régionale. Sur la France, par exemple, la différence de variation séculaire entre l'observatoire de Chambon-La-Forêt et les stations de répétition atteint 10nT/an ([36]). Il faudrait par conséquent réaliser le même exercice sur les ensembles de données de chacune des stations de répétition. Dans certaines régions du globe, comme en Europe de l'Ouest par exemple, cette solution pourrait bien, néanmoins, représenter le meilleur compromis.

## 15.2 Les indices géomagnétiques

Les perturbations géomagnétiques peuvent être surveillées par les observatoires magnétiques au sol enregistrant les trois composantes de champ magnétique. Il existe une variété importante d'indices magnétiques dont certains, en particulier, sont utiles pour la modélisation du champ aux basses ou aux moyennes latitudes.

### 15.2.1 Indice $K_p$

L'indice global  $K_p$  (« *planetarische Kennziffer* »=index planétaire) est défini comme la valeur moyenne des niveaux de perturbations des deux composantes horizontales du champ magnétique observées dans 13 observatoires (dont un seul dans l'hémisphère Sud). Ces perturbations sont dues, comme on sait, aux interactions entre le champ magnétique terrestre et les particules d'origine solaire. Chaque niveau d'activité de la classification est en relation quasi logarithmique avec l'amplitude de la perturbation. Les indices mesurés toutes les trois heures permettent de discriminer les véritables perturbations du champ géomagnétique des variations produites par les courants ionosphériques. L'indice  $K_p$  répertorie 28 niveaux d'activité classés de 1 à 9 comme suit :

$K_p$	0o	0+	1-	1o	1+	2-	2o	2+	...	8o	8+	9-	9o
$nT$	0	4	6	8	10	12	14	18	...	414	472	600	800

Les données terrestres et satellitaires enregistrent donc ces variations qui doivent être filtrées le plus précisément possible pour pouvoir rendre compte au mieux des contributions internes uniquement. Cette classification peut être reliée à l'échelle des variations en nT du champ magnétique. Notons que cette classification nécessite un certain délai avant d'être parfaitement validée. C'est pourquoi nous n'avons gardé pour les données de CHAMP, par exemple, que l'ensemble des données couvrant la période 2001 et 2002 pour lesquelles ces indices sont disponibles, les données postérieures étant en cours de traitement (M. Roharic, IPGP, communication personnelle).

### 15.2.2 L'indice Dst

L'indice Dst (« Disturbed Storm time ») est exprimé en nanoteslas et est basé sur la valeur moyenne de la composante horizontale du champ magnétique terrestre mesuré d'heure en heure dans quatre observatoires géomagnétiques proches de l'équateur magnétique. Cet indice est utilisé pour la détection du commencement des orages magnétiques (« sudden storm commencement »). Si l'ensemble des données restantes, après le filtrage des indices  $K_p$ , offre une couverture suffisante, on pourra utiliser cet indice pour restreindre un peu plus les variations admises du champ.

## 15.3 Sélection des données

Les données nous ont été fournies par Mioara Manda de l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP) après sélection et retrait des points de mesures erronés. Pour ce qui est des données satellitaires, nous avons bénéficié du traitement préliminaire des données effectué par Mihai Roharic au laboratoire de géomagnétisme de l'IPGP et nous n'avons jamais eu à traiter les données brutes ; seul le filtrage selon l'activité magnétique restait à entreprendre.

Nous avons retenu comme ensemble de données satellites, les enregistrements du satellite CHAMP pour une ouverture de la calotte de  $\theta = 5^\circ$ . L'altitude supérieure du cône a été fixée conformément à l'altitude maximum contenue dans les données. L'orbite de CHAMP est quasi-circulaire, l'altitude minimale au-dessus de la France est de  $390\text{km}$  environ et l'altitude supérieure, de  $450\text{km}$ . Pour éviter les phénomènes de bords, on fixe l'altitude supérieure du cône à  $u = 500\text{km}$ . Le rayon supérieur  $b$  du cône est par conséquent arrondi à  $b = 6871\text{km}$ .

Nous ne considérerons ici que des problèmes linéaires ; par conséquent, les données aéromagnétiques, sont supposées vectorielles et on transforme leurs positions des coordonnées Lambert II étendu aux coordonnées géocentriques.

Enfin, nous prendrons comme données terrestres, les positions des 33 stations de répétition françaises et celle de l'observatoire de Chambon-la-Forêt.

Pour simuler une inversion dans un cas réel, nous filtrons les données sur la base des indices d'activité magnétique. Etant donné les considérations sur les indices  $K_p$  et Dst, l'idéal serait de pouvoir contrôler parfaitement les variations acceptables du champ magnétique et ne retenir que celles qui coïncident avec un bruit sur les données de  $5nT$ . En pratique, la sélection qui vérifie une erreur de  $5nT$  est trop drastique et le jeu de donnée est tel que nous devons faire un compromis entre la couverture des données et la précision admise pour le modèle. Les tests numériques réalisés, suggèrent de ne prendre que les indices  $K_p$  inférieurs à  $2o$ . L'erreur acceptable est donc de  $14nT$  ; et on choisira préférentiellement des indices Dst inférieurs ou égaux à cette valeur.

Le champ synthétique provenant de la différence entre un modèle de Cain et un modèle IGRF est ensuite calculé sur ces positions et ces données synthétiques sont bruitées à  $5nT$ . Nous avons donc un ensemble de 1901 données satellites, qui additionnées à 1419 données aéromagnétiques (nous ne prenons qu'un sous-ensemble du jeu complet des données aéromagnétiques) et aux 34 données terrestres forment un ensemble de 3354 données dans le cône. On montre sur la figure (15.2) leur répartition dans le volume. On ne manquera pas de remarquer la grande disparité dans la distribution des données sélectionnées, notamment en altitude, où la densité de données est nulle entre les surfaces d'élévation  $u = 4\text{km}$  et  $u = 350\text{km}$ . Notons que l'incorporation des données provenant du satellite MAGSAT, mais surtout d'ØRSTED, entraîne une répartition bien meilleure des données dans le volume. En effet, les altitudes ØRSTED permettent d'inclure un ensemble de données à des altitudes différentes de celles de CHAMP ou de MAGSAT ; la couverture en altitude est par conséquent plus homogène.

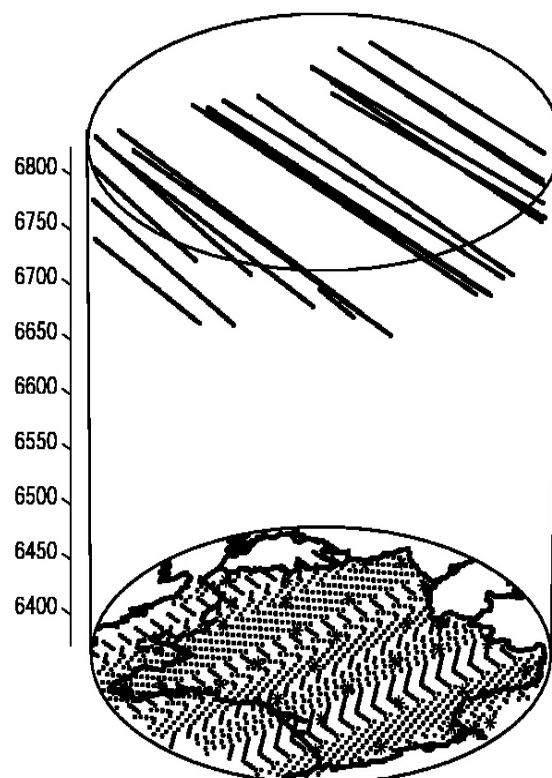


FIG. 15.2 – Distribution des données satellitaires et terrestres sélectionnées dans le volume conique au-dessus de la France.

## 15.4 Inversion sans contrainte

### 15.4.1 Choix des indices de troncature

Dans cette section, on entreprend une inversion par moindres carrés ordinaires sur les 3354 données sélectionnées. Nous retranchons les données contenues dans une couronne proche des discontinuités topologiques. Puisque nous ne savons pas, a priori, quels sont les ordres  $M$  les plus significatifs d'un point de vue de l'énergie, nous n'adaptions pas les différentes troncatures selon  $M$ . On choisit l'ensemble suivant d'indices  $P_{max}$  et  $K_{max}$  pour le développement de chacune des séries :

$$P_{max} = 10 \quad K_{max} = 15 \quad \text{et} \quad M_{max} = 5$$

D'après le chapitre précédent, ce choix des indices est susceptible de nous permettre de modéliser le champ magnétique synthétisé.

### 15.4.2 Exemples d'interpolation dans le volume

Nous utilisons un algorithme de moindres carrés ordinaires avec préconditionnement. Cette manipulation permet de limiter les problèmes numériques des produits de matrice d'une part et d'inversion d'autre part. La décomposition en valeurs singulières nous donne le conditionnement de la matrice d'inversion par le rapport des valeurs propres maximale et minimale de la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . On trouve que  $\lambda_{max}/\lambda_{min} \sim 580000$ . Numériquement, la matrice n'est pas singulière mais le conditionnement est tel qu'il laisse présager d'importantes corrélations entre les coefficients ou des coefficients très mal déterminés.

On trouve un écart-type estimé sur les données de  $\sigma_d^{est} \sim 5,0 \text{ nT}$ . Cette valeur coïncide à peu près avec celle obtenue au paragraphe 14.2.3, elle est surtout égale au bruit des données. Traçons l'interpolation en altitude dans le volume, ceci nous permettra de voir l'évolution des résidus et d'avoir une idée du comportement de l'inversion, notamment dans les régions où les données sont absentes. La figure (15.3) montre le résultat de cette comparaison, parallèlement, on trouve grâce aux expressions (10.3) et (10.2) des valeurs estimées du résidu  $\overline{R}_\Omega$  dans le volume et du résidu  $\overline{R}_{\partial\Omega}$  à la surface terrestre :

$$\overline{R}_\Omega = 47,8nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega} = 95,3,2nT$$

Ces valeurs exécrables laissent supposer que la modélisation a échoué : la figure (15.3) montre que le modèle s'ajuste aux régions couvertes par les données mais que l'interpolation entre les altitudes  $u = 4km$  et  $u = 400km$ , de même que l'extrapolation au-delà de l'altitude  $u = 450km$  sont irréalistes. Pourtant, en rognant la calotte d'un angle  $\varepsilon = 2^\circ$  près des bords et en réalisant la même comparaison sur les champs, les résidus moyen chutent respectivement à :

$$\overline{R}_\Omega(\theta \leq \theta_0 - \varepsilon) = 8,0nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega}(\theta \leq \theta_0 - \varepsilon) = 2,2nT$$

L'information pertinente semble donc être contenue dans le modèle, mais la figure (15.3) ne laisse rien envisager sur ce point. On peut vérifier que les résidus sont majoritairement dominés par des effets de bords en considérant les interpolations de surface. Nous avons choisi, à titre d'exemple, de ne représenter que la composante  $X$  aux altitudes  $u = 0km$ ,  $u = 200km$  et  $u = 500km$ . La raison du choix de l'altitude de 200km est justifiée par l'observation du bombement dans cette région, siège du maximum des résidus.

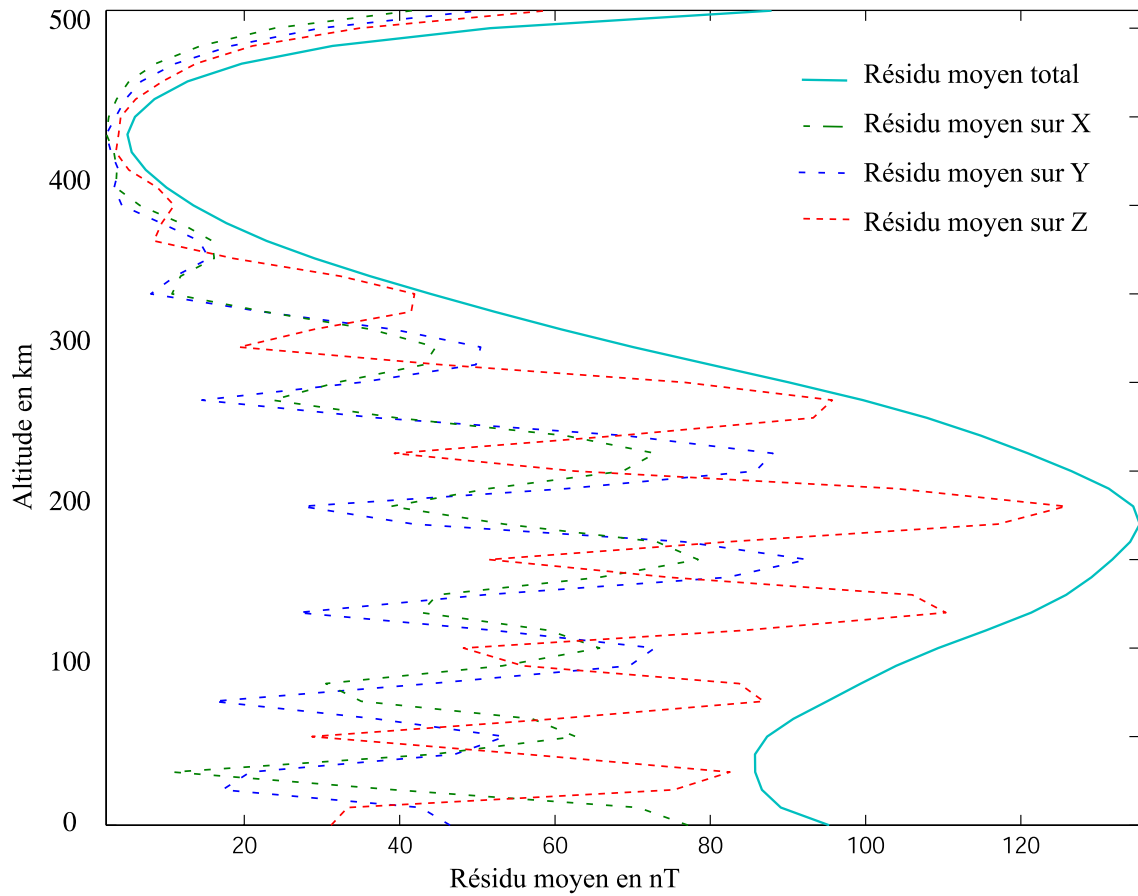


FIG. 15.3 – Résidus en altitude par comparaison entre le modèle obtenu par moindres carrés ordinaires interpolé et le modèle réel. Aucune condition de régularisation n'a été imposée dans l'inversion.



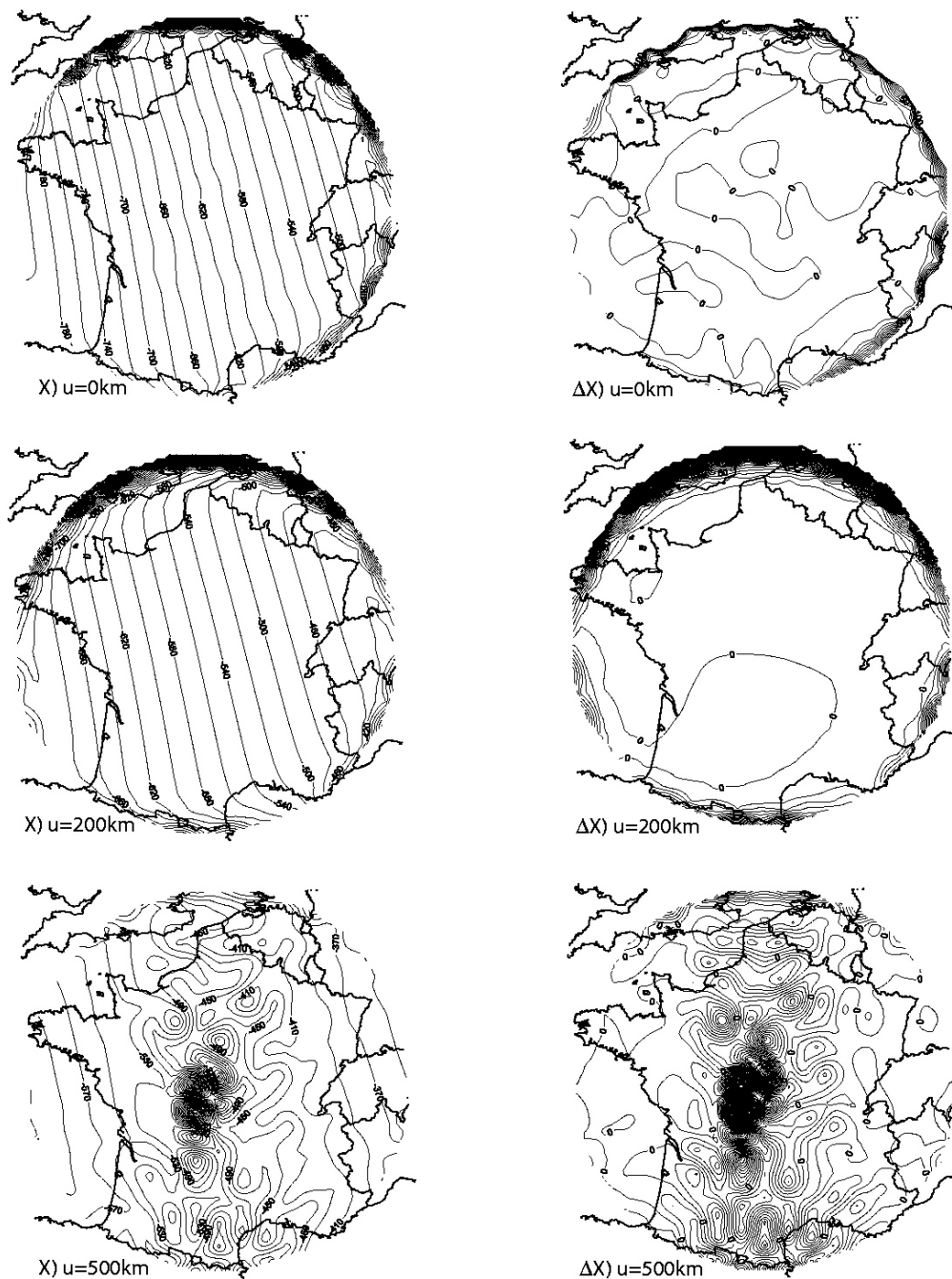


FIG. 15.4 – Nous présentons trois exemples de la composante  $X$  modélisée aux altitudes terrestres,  $u = 200 \text{ km}$  et  $u = 500 \text{ km}$ . Les isolignes pour les résidus sont espacées de  $10 \text{ nT}$ . Si le modèle est largement dominé par des effets de bords aux altitudes  $u = 0$  et  $u = 200 \text{ km}$ , l'allure du champ en  $u = 500 \text{ km}$  ne peut pas être simplement attribuée aux effets de bords.

En comparant l'interpolation de surface (figure 15.4) avec les distributions de la figure (15.2), on vérifie que les régions où les données sont absentes sont mal représentées. Ceci se caractérise par les oscillations proches de la frontière entre la France et la Belgique, par exemple. De même, à la surface supérieure, on remarque la présence de singularités situées dans une zone en dehors des trajectoires du satellite CHAMP. En revanche, d'un certain point de vue, l'inversion est satisfaisante car nous vérifions que le champ entre les régions comprises entre  $u = 4km$  et  $u = 350km$  a été interpolé de manière acceptable au centre de la calotte. La valeur des résidus est donc majoritairement due aux effets de bords et une inversion sous contrainte pourra pallier cet effet.

Rappelons que la décomposition en harmoniques locales entraîne des contributions de la base de Legendre nulle en  $\theta_0$  pour les composantes  $Y$  et  $Z$  du champ. Par conséquent, les effets de bords circulaires proviennent principalement d'une mauvaise estimation des coefficients de Gauss de la base de Mehler. Ces effets sont bien expliqués par les variations des fonctions coniques en fonction de  $\theta$ . Puisque ces fonctions sont monotones et croissantes, une mauvaise détermination des coefficients de Mehler affecte particulièrement le champ à l'approche des bords.

## 15.5 Inversion sous contrainte

Nous reprenons le même ensemble de données que dans le paragraphe précédent et nous cherchons à déterminer les mêmes coefficients de Gauss. La différence avec la solution par moindres carrés ordinaires est que nous utilisons maintenant une régularisation donnée par l'expression de l'énergie volumique dans le cône. D'une manière générale, ce type d'inversion sous contrainte porte le nom de *régularisation de Tikhonov* ([39]). Les paramètres estimés seront maintenant trouvés en résolvant l'expression (14.6).

### Solution de norme volumique minimale

Une des difficultés majeures d'une inversion sous-contrainte est d'estimer au mieux le facteur d'amortissement  $\lambda$  dans (14.6). Ce critère de régularisation se révèle crucial pour inverser correctement les données et il existe des méthodes variées pour sa sélection. Un facteur d'amortissement trop important minimise l'énergie d'une manière telle, que les données ne seront plus ajustées par le modèle, et un facteur trop faible n'a aucun effet. La méthode la plus populaire, en géophysique, est celle du critère de la courbe en  $L$ , qui montre la valeur du logarithme de l'énergie en fonction du logarithme du facteur d'amortissement (par exemple Korte et Holmes (2002) utilisent cette technique). Le facteur  $\lambda$  sélectionné dans ce type d'étude est celui qui correspond au maximum de courbure. Nous avons essayé plusieurs techniques de détermination de  $\lambda$  dont celle de la courbe en  $L$ ; toutes ont donné un résultat différent pour la sélection de  $\lambda$  et nous avons préféré adopter une stratégie.

Dans notre cas, nous disposons d'un atout supplémentaire, celui de maîtriser le problème direct et de connaître exactement l'énergie magnétique contenue dans le cône. D'après le chapitre 12 (eq. 12.2), l'énergie volumique calculée par les bases locales doit être inférieure à l'énergie volumique calculée par les harmoniques sphériques pour des séries tronquées. Plutôt que de choisir le maximum de courbure sur la courbe en  $L$ , nous avons sélectionné le facteur d'amortissement qui donne la première valeur de l'énergie inférieure à l'énergie globale contenue dans le cône. On trouve dans ce cas :

$$\lambda \sim 1,510^{-10}$$

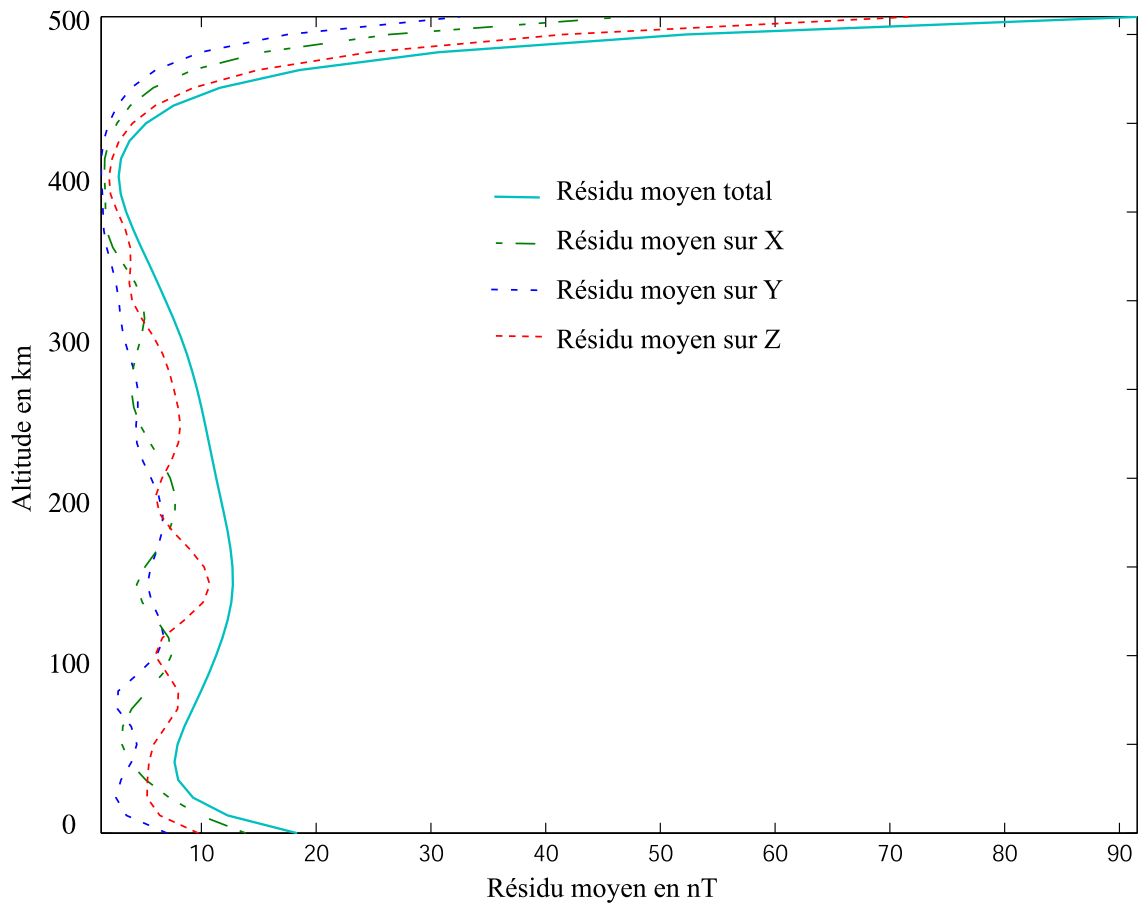


FIG. 15.5 – Résidus moyens par surface avec l'altitude obtenus par la comparaison du modèle de champ et le champ théorique. Comparés à la figure (15.3), les résidus dans la zone centrale ont été amortis.

L'inversion sous contrainte nous donne un écart-type estimé sur les données de  $\sigma_d^{est} \sim 5,0$ . Comparé au paragraphe précédent, cet écart-type n'est pas différent ; par conséquent, nous n'avons rien perdu statistiquement sur l'ajustement des données. En revanche, la figure (15.5), qui montre l'évolution des résidus avec l'altitude, nous indique que nous avons clairement réduit les effets de bords ainsi que le résidu à la surface terrestre.

En revanche, la valeur du résidu sur la surface supérieure est absolument inchangée et laisse craindre que le modèle ne soit pas extrapolable entre les altitudes  $u = 450\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$ , c'est-à-dire au-dessus des trajectoires du satellite. La résolution du problème direct à l'altitude supérieure nous donne un champ qui, globalement, ne diffère en rien de celui tracé sur la figure (15.4).

La dernière option que nous pouvons proposer est de réduire le nombre de paramètres de Gauss car les minimisations d'énergie pour résoudre ce problème représentent des conditions trop draconiennes : si nous parvenons à nous défaire des points singuliers à la surface supérieure en augmentant le facteur  $\lambda$ , ceci se fait au détriment de l'ajustement des données dans tout le volume. Or en dehors des surfaces proches de cette limite, la modélisation est satisfaisante.

Nous pouvons distinguer facilement les coefficients responsables des valeurs aberrantes. A la surface supérieure, les contributions de Legendre internes et de Mehler sont faibles, pour

ces dernières, elles sont même nulles pour la composante  $Z$ , or les valeurs aberrantes sont bien présentes. Nos soupçons se portent donc naturellement sur les coefficients de Legendre dits *externes*. Cet état de fait est finalement assez moral car si nous ne disposons que de peu de données dans le volume, la théorie du potentiel nous impose d'avoir au moins des données bien réparties en surface. Pour la surface inférieure, cette condition est vérifiée, pour la surface latérale elle ne l'est pas mais la condition d'amortissement a permis de résoudre en partie ce problème, pour la surface supérieure, nous n'avons aucune donnée car cette surface est distante de 50km de la plus haute trajectoire du satellite CHAMP. De plus, la minimisation de la norme volumique est inefficace.

Avec un choix de troncatures suivant :

$$P_{max} = 10 \quad K_{max}^{interne} = 15 \quad K_{max}^{interne} = 6 \quad \text{et} \quad M_{max} = 5$$

couplé à une inversion avec une condition de norme minimum, nous sommes capable de modéliser le champ à cette altitude. Ces troncatures correspondent à la recherche de 267 coefficients de Gauss. L'écart type estimé par l'inversion est de  $\sigma_d^{est} \sim 5,7nT$ . Le fait de retirer certains coefficients externes a augmenté la valeur de l'écart-type et nous avons par conséquent perdu sur l'ajustement des données. Cette manipulation se fait surtout au détriment de la convergence des solutions sur la surface supérieure. En effet, au paragraphe 10.1 de la seconde partie, nous avons vérifié que les conséquences principales liées au retrait des coefficients de Gauss externes sont la présence d'oscillations dans la représentation du champ sur la limite supérieure et des résidus biaisés.

Sur les figures (15.6), (15.7) et (15.8), nous constatons que les valeurs aberrantes ont bien disparues. En contre-partie, nous avons des oscillations dans la représentation du champ. Ces comportements sont donc bien conforme à ceux prédits par l'expérience et la théorie. Le point surtout intéressant est que nous avons pu modéliser un champ malgré une distribution de données défavorable (voir figure 15.2), et ceci dans tout le volume. La modélisation permet à la fois une interpolation du champ entre  $u = 0km$  et  $u = 350km$  et dans une certaine mesure son extrapolation dans la zone  $u > 450km$ . Pour s'en convaincre une dernière fois, nous avons recours à l'étude des résidus sur différentes surfaces. Les figures (15.9), (15.10) et (15.11) montrent à la fois que le champ est modélisé avec une précision meilleure que 10nT dans tout le volume et que l'absence des coefficients externes se manifeste bien par des structures résiduelles organisées à la surface limite supérieure.

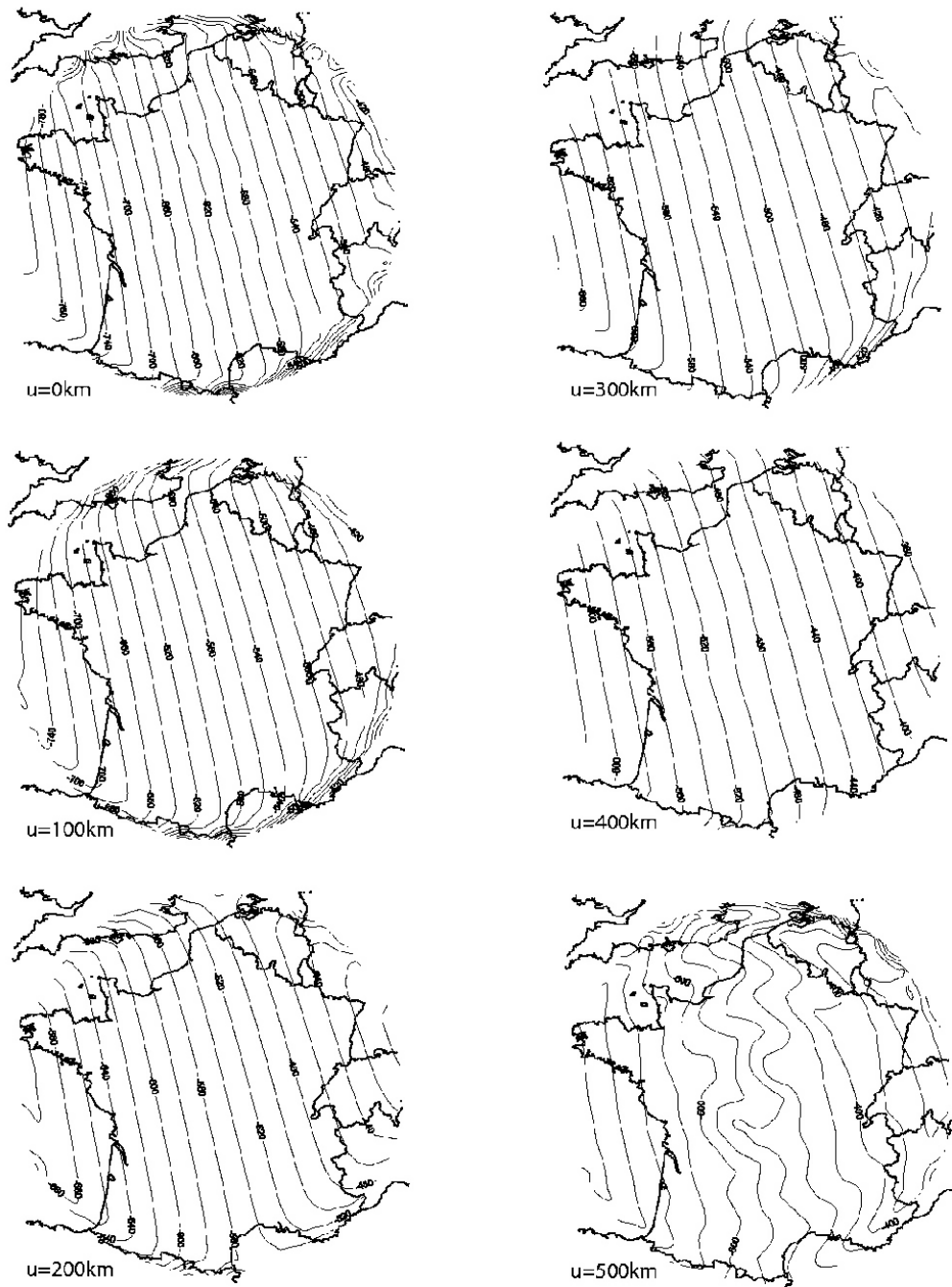


FIG. 15.6 – Modélisation de la composante  $X$  du champ à diverses altitudes. Les effets de bords ont été atténués par une minimisation de l'énergie, et les valeurs aberrantes en négligeant les coefficients externes d'indices  $k > 6$ . Cette dernière manipulation explique les oscillations visibles à l'altitude  $u = 500\text{km}$ .

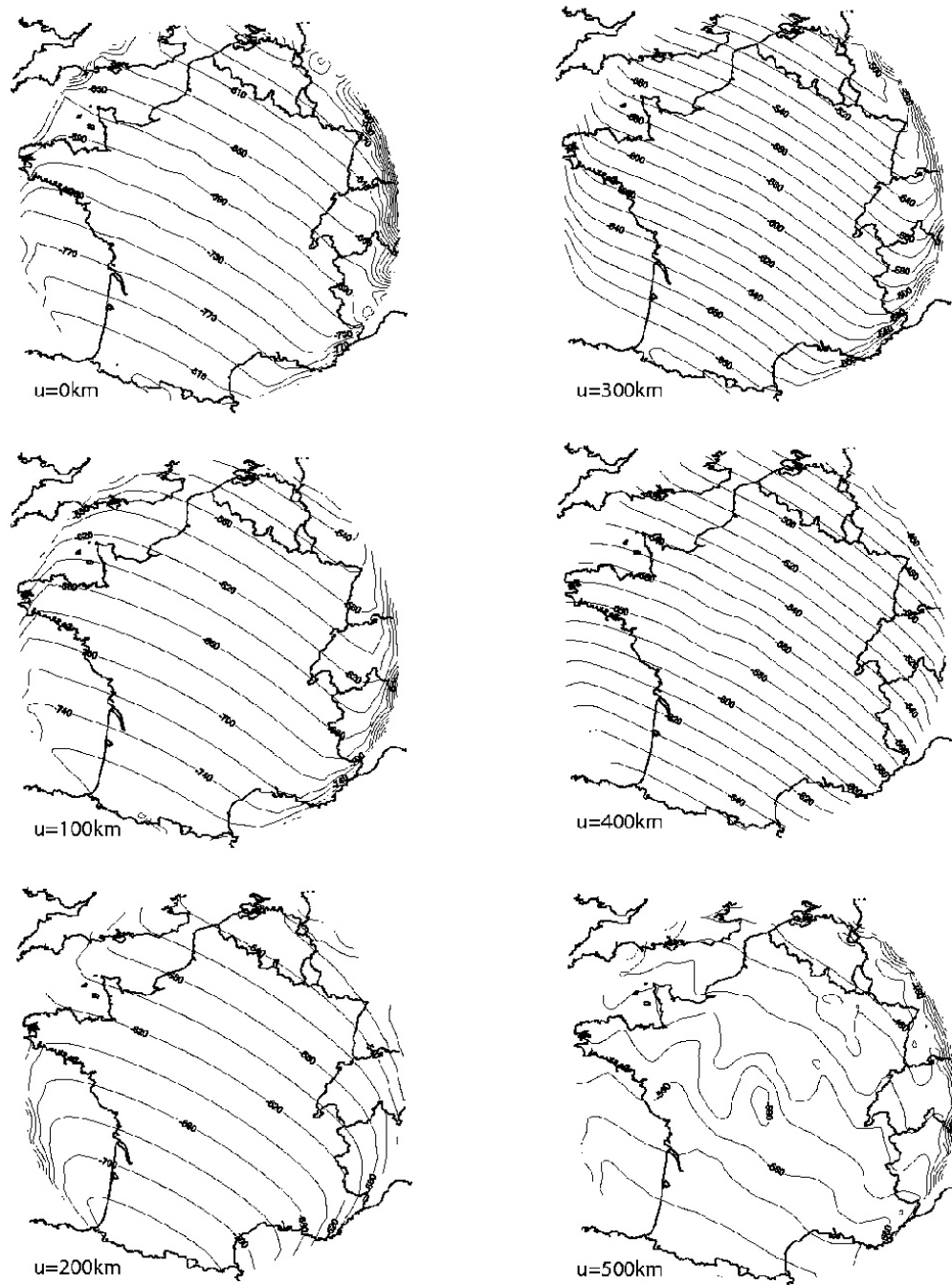


FIG. 15.7 – Composante Y du champ modélisé à partir d’une répartition réelle de données. Voir légende la figure 15.6.

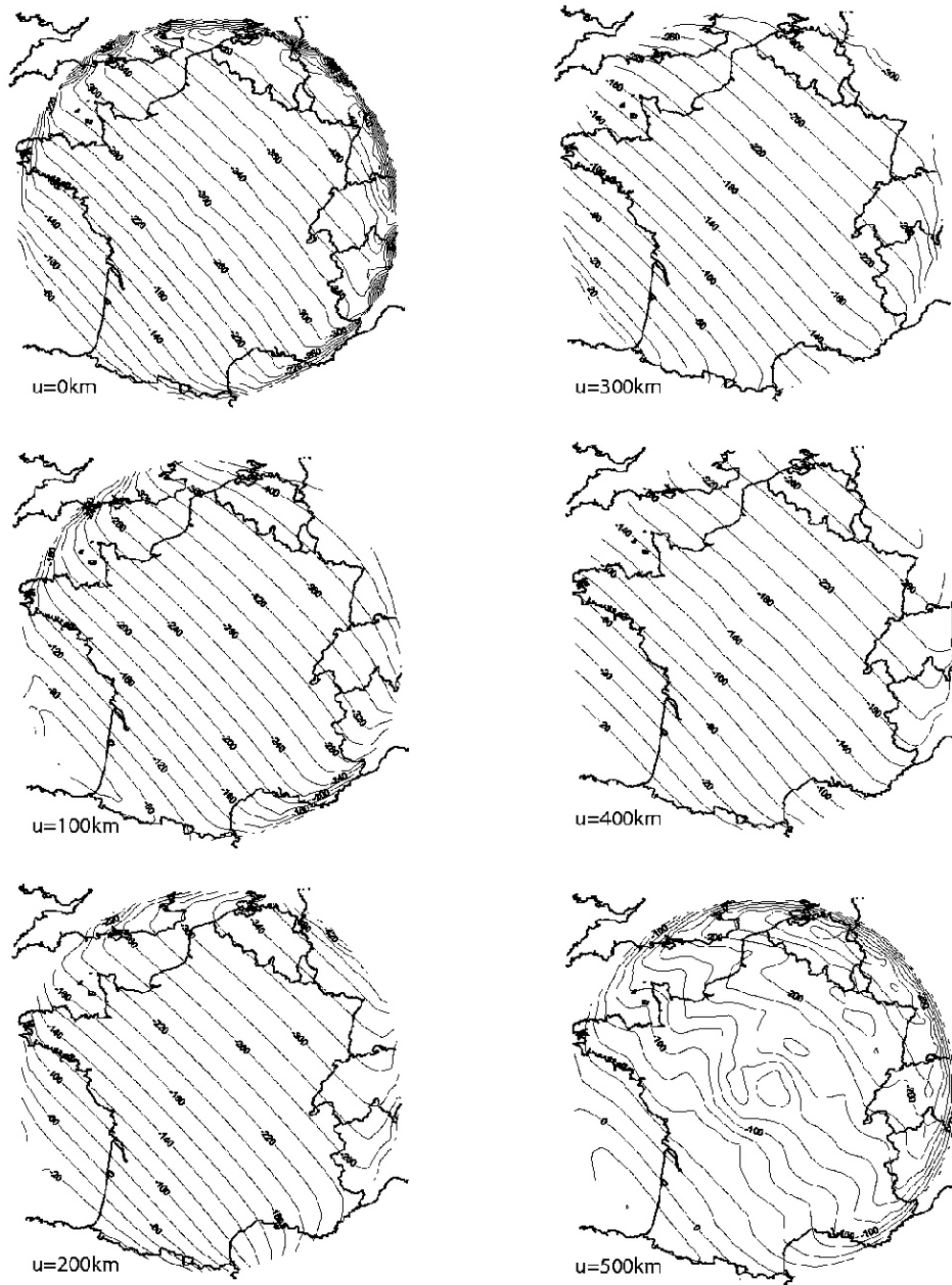


FIG. 15.8 – Composante Z du champ modélisé à partir d'une répartition réelle de données. Voir légende la figure 15.6.

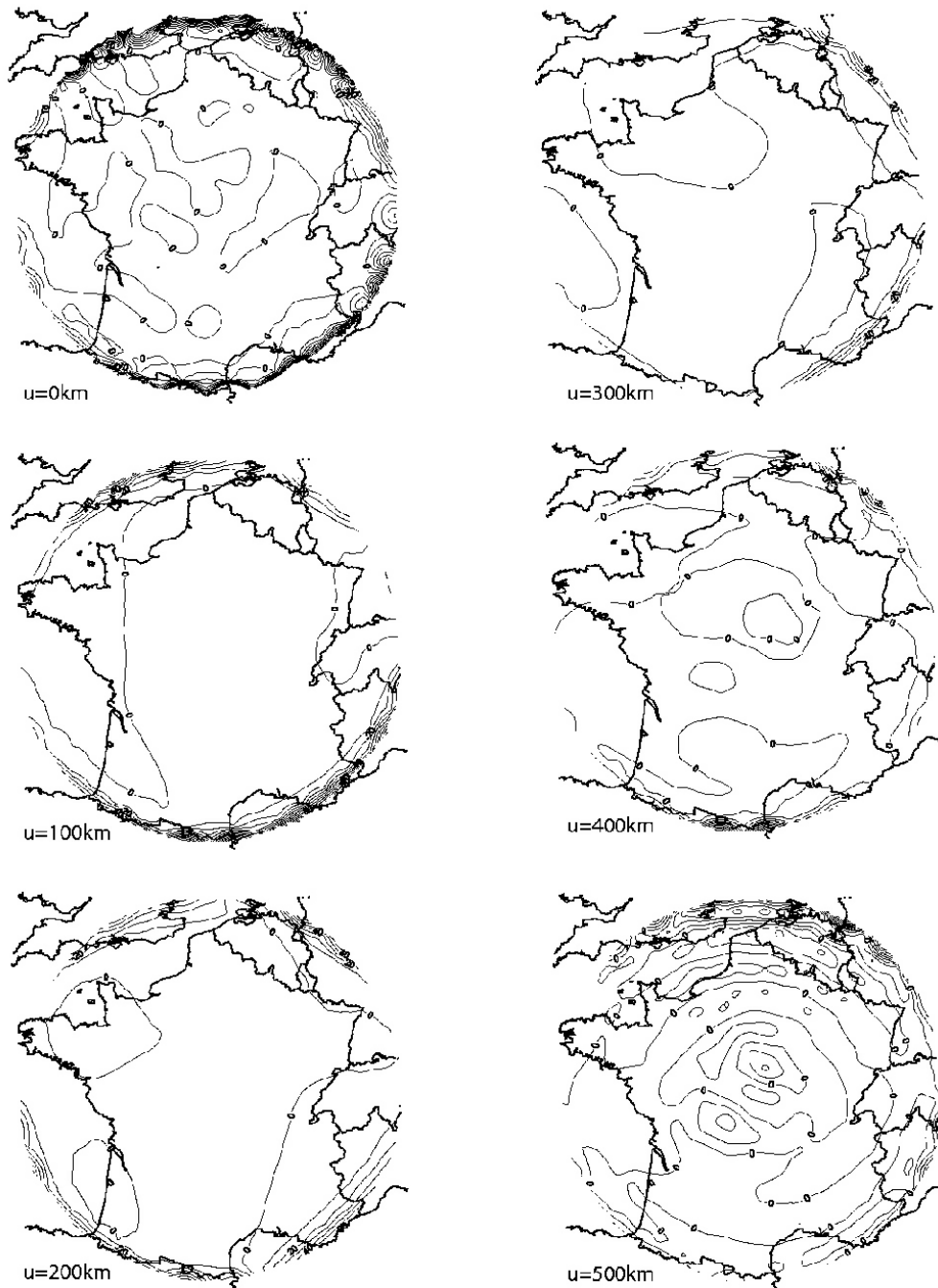


FIG. 15.9 – Résidus entre la composante  $X$  du champ modélisé et le champ synthétique réel. Les lignes de contours représentent des écarts de  $10\text{nT}$ . Remarquons l'apparition de structures organisées en  $u = 500\text{km}$ . Ces structures s'expliquent par une insuffisance dans le développement de la base de Legendre externe.



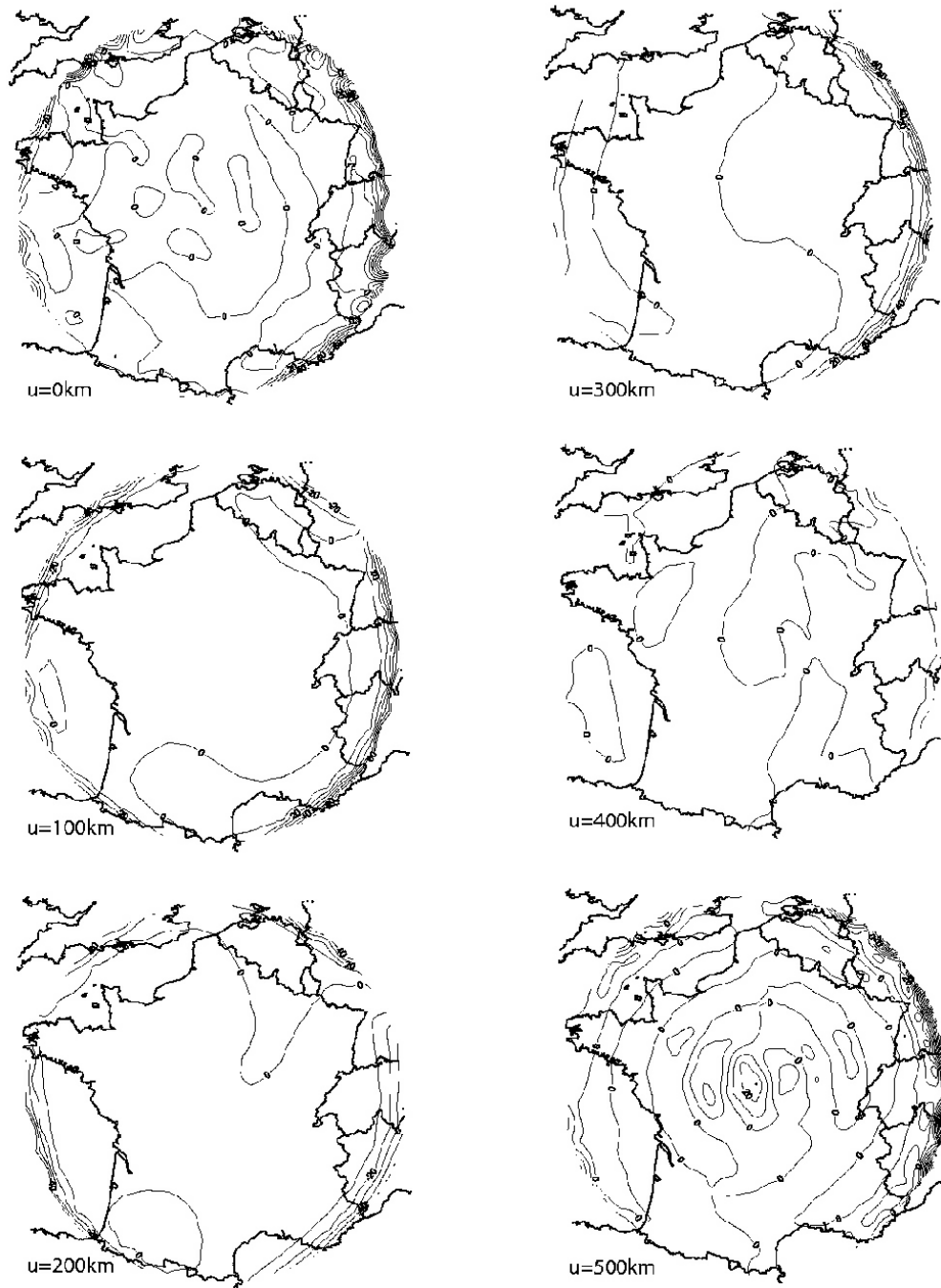


FIG. 15.10 – Résidus entre la composante  $Y$  du champ modélisé et le champ synthétique réel. Les lignes de contours représentent des écarts de 10nT. Voir légende de la figure (15.9).

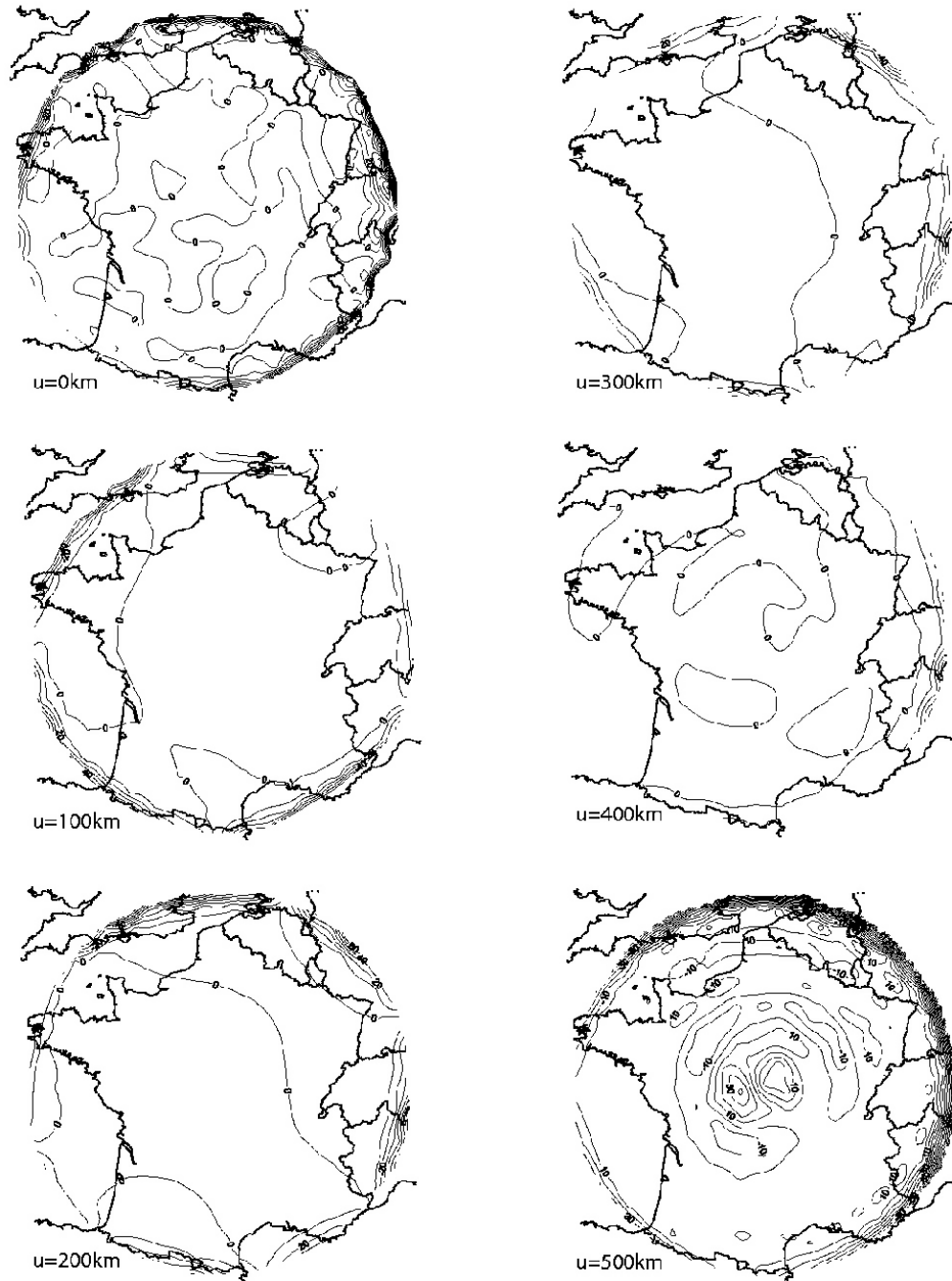


FIG. 15.11 – Résidu entre la composante  $Z$  du champ modélisé et le champ synthétique réel. Les lignes de contours représentent des écarts de 10nT. Voir légende de la figure (15.9).



## Conclusion de la troisième partie

Dans un premier chapitre, nous continuons certaines considérations théoriques en vue de la préparation du problème inverse. Les expressions obtenues nous permettent de comparer les énergies dans le volume exprimées en harmoniques sphériques et en harmoniques sur calotte. En particulier nous avons été amenés à conclure que les développements des séries aux ordres  $m$  devaient être adaptés à la position de la calotte sur la sphère.

Sur la base de ces considérations théoriques, nous entreprenons l'écriture du problème inverse et les choix des troncatures respectives pour les bases de Legendre et de Mehler. Par différents types d'inversion par moindres carrés sur des données réparties diversement dans le volume, nous vérifions que le formalisme des harmoniques dans un cône est apte à modéliser un champ magnétique. Dans un premier temps, nous utilisons une répartition uniforme de données dans le volume de manière à réaliser des études comparatives avec le formalisme de Haines. Ces comparaisons ont montré la supériorité des harmoniques dans un cône aussi bien d'un point de vue de la précision de la résolution que des variations du champ avec l'altitude.

Pour des applications pratiques, les conclusions les plus intéressantes portent sur la différence entre le nombre de coefficients de Gauss théoriquement nécessaire à la représentation d'un champ magnétique et le nombre de coefficients effectivement estimés par inversion. Avec finalement peu de coefficients, nous avons été en mesure de montrer que l'ajustement par moindres carrés pouvait être accéléré par des méthodes très simples comme de s'affranchir des discontinuités topologiques du cône. Ceci a permis de mettre en évidence l'existence d'une erreur sur le modèle liée à la géométrie du domaine. Les résultats de cette expérience ont, en particulier, montré que le problème résolu par moindres carrés s'éloignait finalement du problème théorique (voir commentaires de la figure 14.11), ce qui explique cette différence entre les nombres des coefficients de Gauss théoriques et estimés. Nous avons également été régulièrement confrontés au problème de la reconstruction du champ sur les bords latéraux du domaine. Ces problèmes sont toujours omniprésents et nous pourrions, au mieux les repousser vers les frontières lorsque le nombre de données de surface sera suffisant, au pire agrandir l'angle d'ouverture de la calotte; nous ne sommes donc pas totalement démunis.

Nous avons ensuite entrepris d'utiliser la répartition de données réelles, préalablement soigneusement sélectionnées. Une inversion par moindres carrés simples n'a pas donné de résultat vraiment satisfaisant et nous avons dû avoir recours à une inversion sous contrainte de norme volumique minimale. Cette méthode a considérablement réduit les effets de bords latéraux en contraignant essentiellement les coefficients de Mehler. Nous n'avons pu réduire les problèmes de valeurs aberrantes sur la surface externe qu'en renonçant à certains paramètres du modèle. Malgré tout ceci, le champ est finalement modélisé avec un écart type de 6nT contre 5nT de bruit injecté dans les données. Les compromis que nous avons fait sont donc largement acceptables et les comparaisons avec le champ synthétique dans le cône ont montré que nous ne dépassions jamais 10nT d'erreur au centre de la calotte.



# Conclusions générales et perspectives



Dans une première partie, nous avons approfondi, d'un point de vue numérique, la théorie des harmoniques sphériques sur calotte proposée par Haines (1985) dans l'objectif de pouvoir modéliser le champ magnétique sur une région du globe à partir des données distribuées à des altitudes diverses. Nous avons pris soin d'éliminer les imprécisions numériques dans le calcul des fonctions de Legendre généralisées grâce à l'implémentation de l'algorithme d'Olver et Smith (1983), et par conséquent dans le calcul des degrés  $n$ . En effet, une partie des difficultés communément rencontrées dans l'utilisation de la méthode SCHA provient de l'insuffisance du développement des séries, d'où la nécessité de conserver la précision de calcul pour des fonctions de degré  $n$  élevés. Nous avons vu que ces degrés croissent d'autant plus vite que les calottes sont de tailles réduites et les petites calottes bénéficient en priorité de cette amélioration. Après nous être affranchis de la plupart des problèmes numériques, nous avons entrepris de résoudre le problème inverse dans le cas d'une répartition idéale des données. Les premiers résultats, obtenus par moindres carrés ordinaires, n'ont pas été concluants et nous avons tenté d'autres stratégies d'inversion dont la décomposition en valeurs singulières et la méthode des chaînes de Markov. La première technique a mis en évidence que le problème inverse était mal posé : en raison de la non-orthogonalité des bases de fonctions la matrice d'inversion devient rapidement singulière et nous avons été confrontés au problème du choix du seuil de la valeur propre minimale acceptable. La seconde technique a essentiellement montré les importantes corrélations entre les coefficients de Gauss du modèle et le fait que certains coefficients de petites valeurs pouvaient être bien déterminés. Cette dernière conclusion vient corroborer l'idée que la sélection des paramètres par le  $F$ -test séquentiel de Efron est une entreprise douteuse lorsque appliquée à SCHA, et nous avons renoncé à cette technique, comme d'autres auteurs l'ont fait avant nous (Par exemple : [64]). Pour essayer d'isoler l'origine de ces problèmes, nous avons concentré notre attention sur la répartition des données la plus compatible avec l'ordre du développement des séries. Nous avons été amenés à étudier plus en détail la notion de longueur d'onde. Au cours de cette pérégrination, nous avons pu constater que la longueur d'onde était elle-même un concept difficilement interprétable directement sur la calotte, et si elle représente une tentative pour optimiser les développements en séries selon la densité des données, elle n'a que peu de relation avec les découpages géométriques de la calotte.

Les diverses techniques d'inversion ne nous ont donc pas permis de modéliser un champ synthétique, ne serait-ce que sur une surface, et nos soupçons se sont alors portés sur la validité même de la formulation des harmoniques sphériques sur calotte. Pour mettre en évidence, empiriquement, les failles de la méthode, nous avons réalisé ensuite une inversion de données réparties uniformément dans un volume. Cette situation devait être celle pour laquelle SCHA était dévolue, et nos résultats sur un exemple démontrent que cet objectif ne peut être atteint. Bien sûr, SCHA a, par le passé, donné des résultats exploitables (par exemple : [44]) mais ce fut dans le cas de calotte de taille importante et l'imprécision du champ modélisé, même si elle n'est pas quantifiable précisément, est manifestement importante. Des arguments plus théoriques, mais qui ne constituent pas une démonstration, sont ensuite proposés et soulignent des incohérences dans la formulation. Nous montrons notamment que les coefficients de Gauss sont fonctions de  $r$ , ce qui explique les problèmes d'interpolation en altitude, et que les composantes horizontales et verticales du champ ne semblent pas pouvoir être résolues avec les mêmes ensembles de coefficients de Gauss, ce qui explique les limites rencontrées lors de l'inversion sur une surface uniquement. L'écriture d'un problème sur-déterminé, les améliorations numériques et la construction d'une grille d'échantillonnage restent cependant les ingrédients immuables pour une inversion régionale et nous les avons amplement exploités par la suite.

Dans une seconde partie, nous avons écrit le formalisme des harmoniques sur calotte comme un problème de conditions aux limites dans un cône. Partant du principe que différents pro-



blèmes de conditions aux limites pouvaient être équivalents, nous avons exploré quatre types de problèmes de conditions aux limites qui mettent en jeu des conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann ou mixtes. Ces études préliminaires formelles, nous ont conduit à la définition de deux problèmes parmi les quatre donnant lieu à des gradients de potentiels orthogonaux. Cette propriété, très importante pour le problème inverse, n'a pas été jugée suffisante pour exclure d'emblée les solutions restantes et nous avons résolu chacun des quatre problèmes sur la base d'un seul d'entre eux. Nous avons obtenu par la résolution du premier problème deux types de bases de fonctions dont l'une est identique à la base proposée par Haines. La seconde, en revanche, est tout à fait inhabituelle en géomagnétisme et fait intervenir les fonctions coniques de Mehler et les nouvelles fonctions radiales sont solutions d'un problème de Sturm-Liouville. Elles forment par conséquent une base orthogonale sur laquelle les fonctions  $(a/r)^n$  ou  $(r/a)^n$  avec  $n$  entier, qui régissent les variations d'un potentiel avec l'altitude, s'expriment aisément. A ce titre, le nouveau formalisme est susceptible effectivement de représenter un champ magnétique et ses variations en altitude dans un volume.

Nous avons surtout concentré notre attention sur les aspects théoriques du nouveau formalisme et nous avons pu obtenir, pour la première fois, une relation analytique entre les harmoniques sphériques ordinaires et les harmoniques dans le cône. Cette relation nous a fourni les expressions reliant les coefficients de Gauss de la base locale à ceux de la base globale des harmoniques sphériques. Partant de ces relations, nous avons pu reconstruire avec une bonne précision un champ magnétique dans le cône.

Ces constats, sur la représentation du champ et sur de la vitesse de convergence des solutions, mis en parallèle avec la distribution habituelle des données magnétique, nous ont autorisés à sélectionner définitivement la formulation la plus commode en vue d'une inversion.

Dans une troisième partie, nous avons préparé et résolu le problème inverse. Dans un premier temps, nous avons exploité tous les bénéfices que nous pouvions tirer de la comparaison entre les formalismes local et global dans un cône. Cette comparaison aboutit notamment à la définition de spectre d'énergie en fonction de l'ordre  $m$ ; définition qui permet de mettre en relief que les troncatures des séries du développement local doivent être adaptées à l'énergie portée par les ordres  $m$ . Alors qu'en modélisation globale, on a une relation simple entre le degré  $n$  et l'ordre  $m$  ( $m \leq n$ ), qui est liée à la relation entre les harmoniques sphériques et le groupe des rotations sur la sphère, on perd complètement cette notion sur un cône. D'une manière générale, pour un ordre  $m$  donné, le choix de la troncature en  $n$  dépend de considérations telles que, la longueur d'onde minimale résolue par les données, la réduction du phénomène de Gibbs et l'énergie associée à chaque harmonique. En termes mathématiques, il faut, dans chaque application, trouver un recouvrement adapté pour les séries doubles en  $m$  et  $k$ . Cette remarque constitue un premier pas vers l'évaluation des paramètres de Gauss qui sont les plus significatifs et elle trouve particulièrement son intérêt dans la résolution d'un problème inverse sur des données mal réparties.

Nous pouvons, de même qu'en harmoniques sphériques ordinaires, définir des normes du champ magnétique pour des régularisations d'un problème inverse mal posé. Ces normes peuvent être envisagées de différentes manières. Nous avons, tout d'abord, considéré les normes classiques de volume et de surface, puis, d'après leurs expressions nous avons été amenés à définir de nouvelles normes, moins simplement liées à l'énergie, mais dont les propriétés sont plus conformes, de notre point de vue, à la pénalisation des coefficients associés aux courtes longueurs d'onde.

Nous considérons enfin différents exemples de problèmes inverses. Dans un premier temps, nous traitons le cas de données synthétiques uniformément réparties dans le cône. Cela nous permet à la fois de vérifier que les coefficients estimés par inversion sont statistiquement cohérents avec les coefficients théoriques, et d'illustrer les qualités des modèles obtenus dans ces cas. Nous

en déduisons des conclusions utiles à une simulation synthétique sur l'inversion de données réelles. Dans l'exemple traité, les données sont filtrées et sélectionnées selon un protocole assez standard basé sur les indices d'activité magnétique, et nous incluons aux données terrestres uniquement les données du satellite CHAMP. Nous nous sommes donc placés dans une configuration défavorable pour la répartition des données. Pourtant, les résultats sont plutôt encourageants et l'inversion sur la base des harmoniques dans le cône a montré que nous pouvions inverser ces données sans difficultés majeures. De légères conditions « régularisantes » sur l'énergie nous ont permis de contraindre l'inversion et d'obtenir des modèles de champs synthétiques qui, confrontés au modèle synthétique réel, se sont montrés tout à fait réalistes.

## Problèmes non résolus et perspectives

Le formalisme que nous proposons nécessite des développements théoriques complémentaires. Pour ce qui est de l'application géophysique à proprement parler, l'essentiel des ingrédients est d'ores et déjà disponible.

Les caractéristiques géométriques du cône utilisées pour les expériences synthétiques sont celles d'un cône centré sur la France, les jeux de données proviennent des campagnes aéromagnétiques et des missions satellites. La différence principale avec la situation que nous avons traitée est que, les données aéromagnétiques étant des données scalaires, le problème inverse n'est normalement pas linéaire. Le problème inverse peut néanmoins, dans ce cas, être linéarisé de manière relativement simple et nous ne sommes plus confrontés alors qu'au délicat problème de l'élimination de la variation séculaire. Pour ce qui est des sources externes, nous en retranchons la majeure partie par une sélection appropriée sur les données. Si nous admettons que le modèle de Sabaka et al. (2003), qui couvre la période de 1960 à 2000, est de précision acceptable, alors la modélisation du champ magnétique sur la France pourrait bien représenter une perspective d'avenir proche, du moins sous une forme imparfaite. Rappelons que, pour les besoins de la discussion, nous n'avons utilisé que les données du satellite CHAMP. L'utilisation combinée des ensembles de données MAGSAT, CHAMP et ØRSTED améliore substantiellement la répartition générale des données dans le volume.

Enfin, n'excluons pas la modélisation du champ de gravité qui, au même titre que le champ magnétique, est un champ de potentiel. En adaptant le formalisme au potentiel de gravité, nous pourrions l'appliquer à des études gravimétriques. La mention de cette dernière possibilité est surtout importante depuis que la géophysique dispose de données gravimétriques prises aux altitudes satellitaires, grâce notamment aux missions CHAMP (lancée en juillet 2000), GRACE (lancée en mars 2002) ou encore la mission prochaine GOCE (prévue pour 2005). De plus, par la nature même du champ de gravité, les problèmes de sources externes s'excluent d'eux-mêmes.

D'un point de vue plus théorique, il conviendrait de démontrer formellement l'inadéquation de la théorie de Haines. Nous avons quelques pistes sérieuses qui permettraient d'aboutir à une démonstration, comme l'étude du principe variationnel en utilisant SCHA par exemple. Quelques résultats préliminaires semblent montrer que l'écriture d'une fonctionnelle pour le problème inverse en utilisant les bases de fonctions de Haines dans un volume peut, bien sûr être minimisée, mais ne peut pas être nulle.

Concernant le nouveau formalisme, les problèmes non résolus sont pléthoriques. Les deux majeures concernent le phénomène de Gibbs et la différentiation des sources internes et externes.

Pour ce qui est du phénomène de Gibbs, nous n'avons pas pu fournir, pour le moment, de démonstration sérieuse sur le type de convergence, simple ou uniforme, des bases de fonctions. Lorsque le phénomène aura été proprement caractérisé, nous pourrions nous appuyer sur des

théorèmes mathématiques existants et des procédures bien balisées pour tenter de nous en affranchir. Cet objectif ne pourra être rempli que par une étude sur le type de convergence des séries qui décrivent le champ magnétique total. Si, pour les fonctions de base radiales, nous pouvons nous ramener à un cas proche des séries de Fourier, pour les fonctions de Legendre, leur expression canonique est telle que le type de convergence n'est pas simple à distinguer. Dans l'attente d'un tel développement, et pour minimiser son effet dans une inversion, nous avons proposé une solution simple qui consistait à retrancher les discontinuités topologiques du cône. Pour plus de rigueur, nous pourrions éventuellement nous reposer sur la stratégie d'une modélisation en deux temps. Nous avons montré que deux des décompositions donnent lieu à des gradients orthogonaux et qui ont des vitesses de convergences différentes pour chacune des bases de fonctions. En modélisant les données à l'aide d'une première décomposition et en modélisant par la suite les résidus avec la seconde, nous pourrions, peut-être, limiter significativement ce phénomène.

Un autre problème non résolu fondamental concerne la différenciation entre les sources d'origines externes et d'origines internes. Dans la modélisation régionale, telle que nous l'avons écrite, ces considérations ne peuvent plus être déduites simplement des fonctions de bases radiales du champ. Même si ce problème apparaît comme nouveau, nous pouvons sans complexe nous risquer à prétendre qu'il était déjà préexistant dans l'écriture de SCHA selon Haines (1985). Par conséquent, cette caractéristique n'est pas propre à notre formalisme. La cause de cette difficulté est sans doute à attribuer à la présence d'une limite latérale au domaine, limite qui n'existe pas en harmoniques sphériques. Nous n'avons pas d'idée précise sur ce point et nous ne pouvons envisager, en premier lieu, que des techniques propres au traitement du signal pour espérer faire cette distinction. Selon une idée des plus élémentaires, le champ d'origine interne décroît avec l'altitude, par conséquent, une croissance inattendue du champ à l'approche de l'altitude supérieure serait capable de nous indiquer que nous sommes en présence de contributions externes. Une solution moins subjective serait peut être de considérer le cône complémentaire au cône de la représentation régionale de manière. Dans ce cas, la sphère serait complètement incluse dans les deux cônes et, d'un point de vue topologique, le concept d'interne et d'externe redeviendrait plus facile à appréhender en l'absence de frontières latérales. Bien entendu, les développements pour réaliser cette étude lèvent de nouvelles difficultés, notamment dans le calcul des fonctions coniques pour des ouvertures de cônes aussi importantes.

La mention de cet obstacle nous permet de faire la digression suivante : Si nous pouvions traiter le cas particulier d'un cône d'ouverture  $\theta_0 = 90^\circ$ , assimilable à une demi-coquille sphérique, nous pourrions faire la jonction entre les harmoniques sphériques et les harmoniques dans un cône. Il serait intéressant en effet, d'un point de vue théorique, de pouvoir vérifier que la limite de la modélisation régionale est bien la modélisation globale.

Enfin, il serait judicieux de poursuivre des investigations sur les méthodes d'inversion, notamment pour résoudre des données en  $r=a$  uniquement car, si cette méthode est dévolue à l'analyse d'un champ dans un volume, nous sommes confrontées naturellement au problème de données réparties sur une surface uniquement. A première vue, la modélisation d'une telle distribution, par exemple la modélisation régionale de la variation séculaire, reste hasardeuse en l'absence d'information supplémentaire.

# Annexes



## Introduction

Les fonctions de Legendre généralisées sont une extension des fonctions de Legendre à des degrés  $n$  et ordres  $m$  quelconques. Leurs définitions sont variables et leurs représentations multiples selon leurs arguments et leur domaine de définition. Ainsi, sous la terminologie de fonctions de Legendre associées trouvons-nous des fonctions aux comportements radicalement différents. Leur appartenance à la même famille se justifie par certaines propriétés mathématiques similaires et par leurs fonctions génératrices identiques; en fait, nous avons vu qu'elles étaient solutions de la même équation différentielle. Les fonctions de Legendre font partie de la classe des *fonctions spéciales* (autrement appelées *fonctions hautement transcendentales*), nombreuses sont donc les propriétés qui les caractérisent. En contrepartie, ces fonctions sont souvent lourdes à manipuler, notamment si l'on cherche à définir une norme de type  $L^2$  pour ces fonctions. Pour réduire de manière significative un certain nombre de problèmes numériques nous proposons le développement de la normalisation complète pour les fonctions coniques de Mehler.

Le secteur de recherche en évaluation numérique des fonctions spéciales est très actif car les difficultés qu'elles soulèvent sont largement consensuelles. Certains numériciens *philanthropes* (J. Segura,...) proposent ponctuellement de nouveaux algorithmes ou de nouvelles optimisations numériques pour l'estimation d'une très grande variété de fonctions spéciales. Ces algorithmes sont souvent dans le domaine public et accessibles sur internet. La terminologie mathématique est omniprésente et est indissociable des fonctions de Legendre qui font, par nature, appel à une grande diversité de fonctions. La sobriété dans la terminologie n'est pas de mise car elle nous prive des découvertes numériques les plus récentes. On ne sera donc pas surpris de trouver dans les pages qui suivent des fonctions aux noms exotiques tels que *Lerch* ou *digamma*.

C'est parfois cette diversité de représentation qui pose la difficulté d'une formulation générale des équations régissant les fonctions de Legendre. Comme nous le verrons par la suite, même les relations de récurrence doivent par moment être remaniées selon la fonction de Legendre que l'on cherche à exprimer, selon sa définition, la représentation que l'on a adoptée, ou son intervalle d'application.



# Annexe A

## Produits scalaire et normes des fonctions de Legendre

### A.1 Avertissement

Pour manier convenablement les fonctions de Legendre il est utile de pouvoir exploiter l'ensemble des relations de récurrence qui existent. Nous avons régulièrement utilisé ces relations de récurrence qui offrent un excellent outil pour les vérifications numériques. Elles sont donc souvent essentielles. Cependant, outre les erreurs typographiques qu'elles génèrent parfois dans les publications, elles souffrent souvent d'une disparité de définition qui rendent certaines relations de récurrence obsolètes. Chaque discipline ayant ses habitudes et ses modes de représentation propres, le choix de leur définition est rarement mentionné. La moindre différence de définition entraîne une réaction en chaîne sur toutes les propriétés qui en découlent et dont on oublie parfois l'origine et il faut souvent faire preuve de circonspection.

Prenons la définition des fonctions de Legendre de Robin (1959) :

$$P_n^m = \frac{(-1)^m \Gamma(n+m+1)}{2^m m! \Gamma(n-m+1)} \sin^m \theta F(m-n, n+m+1, 1+m; \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (\text{A.1})$$

Cette expression provient directement de la définition des fonctions de Legendre associées par les polynômes de Legendre en utilisant la formule de Rodrigues :

$$P_n^m = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta^m} \quad (\text{A.2})$$

Cette définition est par ailleurs similaire à celle de Hobson (1965) et par conséquent également à la définition proposée par Haines. Remarquons cependant qu'elle diffère de celle de Cheinway et Hwang (1997) ou de W. Bosch (2000) qui utilisent :

$$P_n^m = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta^m} \quad (\text{A.3})$$

Ces différences sont fondamentales lorsque l'on cherche à exploiter les relations de récurrence. Ainsi par (A.1), on a :

$$\frac{dP_n^m}{d\theta} = m \cot(\theta) P_n^m + P_n^{m+1}$$

mais par (A.3) on trouve :



$$\frac{dP_n^m}{d\theta} = -m \cot(\theta) P_n^m + P_n^{m+1}$$

Pour notre part, nous utilisons l'algorithme d'Olver et Smith pour le calcul des fonctions de Legendre de degrés réels. La définition n'est pas explicite mais on montre néanmoins que la définition d'Olver et Smith pour les *fonctions de Ferrer* est :

$$P_n^m = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left( \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right)^{m/2} F \left( -n, n+1, 1-m; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Cette définition est équivalent à celle utilisée par Robin (1959) dans (A.1). Par souci de clareté et de cohérence, cette définition sera adoptée pour les fonctions de Legendre et de Mehler pour la représentation en fonctions hypergénométriques.

## A.2 Produits scalaires et normalisations des fonctions de Legendre

Nous prendrons les fonctions de Legendre généralisées dans leur acceptation la plus générale. Cette définition embrasse aussi bien les fonctions de Legendre à degrés réels que les fonctions coniques de Mehler à degrés complexes. Les développements suivants supposeront que les degrés  $n$  appartiennent à l'espace complexe  $\mathbb{C}$ . La seule restriction étant que l'ordre  $m$  soit entier. Nous nous appuierons sur des résultats bien connus, exempts d'erreurs typographiques (par exemple, [55] et [29]).

### A.2.1 Produits scalaires

En reprenant les étapes de la résolution du Laplacien on trouve, après séparation des variables, que les  $P_n^m(\cos\theta)$  satisfont l'équation différentielle :

$$\frac{d}{d\cos\theta} \left[ (1-\cos^2\theta) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\cos\theta} \right] - \frac{m^2}{1-\cos^2\theta} P_n^m(\cos\theta) = -n(n+1) P_n^m(\cos\theta)$$

En faisant le changement de variable  $\mu = \cos\theta$ , on obtient la forme usuelle de l'équation de Sturm-Liouville :

$$-\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \right] + \frac{m^2}{1-\mu^2} P_n^m(\mu) = n(n+1) P_n^m(\mu) \quad (\text{A.4})$$

Nous poserons d'autre part, l'opérateur de Legendre  $L_m$  que nous avons déjà rencontré (voir section préliminaire du premier chapitre) :

$$L_m = -\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] + \frac{m^2}{1-\mu^2} \quad (\text{A.5})$$

donc pour deux degrés  $n_i, n_j$  et à  $m$  fixé, l'équation (A.4) s'écrit respectivement :

$$L_m(P_{n_i}^m) = n_i(n_i+1) P_{n_i}^m(\mu) \quad (\text{A.6a})$$

$$L_m(P_{n_j}^m) = n_j(n_j+1) P_{n_j}^m(\mu) \quad (\text{A.6b})$$

En multipliant (A.6a) par  $P_{n_j}^m(\mu)$  et (A.6b) par  $P_{n_i}^m(\mu)$  et en soustrayant on trouve :

$$P_{n_j}^m(\mu)L_m(P_{n_i}^m) - P_{n_i}^m(\mu)L_m(P_{n_j}^m) = (n_i(n_i + 1) - n_j(n_j + 1))P_{n_i}^m(\mu)P_{n_j}^m(\mu)$$

On peut ensuite intégrer cette équation sur l'intervalle  $\mu \in [\mu_0, 1]$

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_j}^m(\mu)L_m(P_{n_i}^m) - P_{n_i}^m(\mu)L_m(P_{n_j}^m)d\mu = (n_i(n_i + 1) - n_j(n_j + 1)) \int_{\mu_0}^1 P_{n_i}^m(\mu)P_{n_j}^m(\mu)d\mu \quad (\text{A.7})$$

Or on montre, en utilisant explicitement l'expression de l'opérateur  $L_m$  (eq. A.5), que :

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_j}^m(\mu)L_m(P_{n_i}^m) - P_{n_i}^m(\mu)L_m(P_{n_j}^m)d\mu = \left[ (1 - \mu_0)^2 \left( \frac{dP_{n_j}^m}{d\mu} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\mu} P_{n_j}^m \right) \right]_{\mu_0}^1$$

et donc d'après (eq. A.7) :

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_i}^m(\mu)P_{n_j}^m(\mu)d\mu = \frac{1}{(n_i(n_i+1) - n_j(n_j+1))} \left[ (1 - \mu_0)^2 \left( \frac{dP_{n_j}^m}{d\mu} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\mu} P_{n_j}^m \right) \right]_{\mu_0}^1$$

Cette expression est tout à fait générale, on peut maintenant considérer le résultat selon les espaces auxquels appartiennent les degrés  $n_j$  et  $n_k$ .

**Si**  $n_l, n_j \in \mathbb{R}$

En revenant à la variable  $\theta$  on trouve simplement que :

$$\boxed{\int_0^{\theta_0} P_{n_i}^m(\cos \theta)P_{n_j}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{n_i(n_i+1) - n_j(n_j+1)} \left( \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} P_{n_j}^m \right)_{\theta_0}} \quad (\text{A.8})$$

Remarquons, comme il l'a déjà été spécifié (De Santis et al. [29]) que le signe du membre de droite de l'équation diffère de celui donné par Haines (1985).

**Supposons**  $n_j \in \mathbb{R}$  **mais**  $n_i = -1/2 + i\tau \in \mathbb{C}$

Cette solution apparaît dans le cas du produit scalaire des fonctions de Legendre avec les fonctions de Mehler. Ce produit scalaire n'entre pas directement en jeu dans les quatre décompositions du problème initial mais à l'intérieur du calcul des gradients du potentiel et dans le calcul des normes. Il peut également s'avérer utile pour certaines vérifications numériques. En changeant de formalisme pour les fonctions de Mehler, pour garder la notation de Robin (1959) et de Zhurina et al. (1963), on trouve que (A.8) s'écrit , étant donné que :

$$n_i(n_i + 1) = - \left( \tau^2 + \frac{1}{4} \right)$$

de la façon suivante :

$$\boxed{\int_0^{\theta_0} K_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta)P_{n_j}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = - \frac{\sin \theta_0}{(\tau^2 + \frac{1}{4}) + n_j(n_j+1)} \left( K_{-1/2+i\tau}^m \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta} - P_{n_j}^m \frac{dK_{-1/2+i\tau}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0}} \quad (\text{A.9})$$

**Supposons**  $n_j = -1/2 + i\alpha$  **et**  $n_i = -1/2 + i\tau$

Alors (eq. A.8) devient :

$$\int_0^{\theta_0} K_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) K_{-1/2+i\alpha}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{\alpha^2 - \tau^2} \left( K_{-1/2+i\tau}^m \frac{dK_{-1/2+i\alpha}^m}{d\theta} - K_{-1/2+i\alpha}^m \frac{dK_{-1/2+i\tau}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0} \quad (\text{A.10})$$

### A.2.2 Expressions analytiques de la norme

On ne peut pas définir directement la norme des expressions (eq. A.8) et (eq. A.10) en raison de la singularité du dénominateur lorsque les deux degrés sont identiques. On peut néanmoins appliquer la règle de l'Hospital sur le membre de droite de ces relations.

Soit si :

$$f = \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} P_{n_j}^m$$

et

$$g = n_i(n_i + 1) - n_j(n_j + 1)$$

alors :

$$\lim_{j \rightarrow i} \frac{f}{g} = \lim_{j \rightarrow i} \frac{\partial f / \partial n_i}{\partial g / \partial n_j}$$

et donc pour respectivement (eq. A.8) et (A.10) on trouve :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_i}^m(\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{2n_i + 1} \left( \frac{\partial P_{n_i}^m}{\partial n_i} \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} - \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} P_{n_i}^m \right)_{\theta_0} \quad (\text{A.11})$$

De même pour les fonctions de Mehler on obtient :

$$\int_0^{\theta_0} K_{\tau}^{m^2} \sin \theta . d\theta = \frac{\sin \theta_0}{2\tau} \left[ \frac{dK_{\tau}^m}{d\theta} \frac{\partial K_{\tau}^m}{\partial \tau} - K_{\tau}^m \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dK_{\tau}^m}{d\theta} \right]_{\theta_0} \quad (\text{A.12})$$

L'expression de ces normes, analytiques, suggèrent que nous soyons en mesure de calculer explicitement les dérivées partielles en  $\tau$  des fonctions de Mehler. On pourrait choisir de calculer cette expression par différence finie qui semble offrir une approximation suffisante de la norme. Cette option est acceptable pour les fonctions de Legendre généralisées de degrés  $n$  réels en raison, d'une part de leur valeur généralement faible en  $\theta_0$ , d'autre part parce que le choix des conditions aux limites nous affranchit de la soustraction. En revanche, elle devient rapidement instable et trop imprécise pour être appliquée aux fonction de Mehler en raison de leur grande magnitude et de la soustraction des deux membres entre corchets dont aucun ne s'annule en  $\theta_0$ . Nous avons donc suivi l'option qui consiste à calculer analytiquement les expressions des dérivées partielles en  $\tau$ , ceci est l'objet de l'annexe suivante.

## Annexe B

# Normalisation complète des fonctions coniques de Mehler

### B.1 Fonctions coniques de Mehler de degré complexe $K_{-1/2+i\tau}^m$

L'étude des fonctions de Mehler a montré que leur comportement était très sensible à l'ouverture de l'angle de la calotte. Pour tenter d'améliorer le conditionnement de la matrice d'inversion il est indispensable de normaliser ces fonctions. Ceci nous permettra d'obtenir des coefficients de Gauss locaux en fonction des coefficients de Gauss globaux libres d'une erreur de précision numérique importante d'une part, et d'éviter la multiplication d'un nombre très petit (le coefficient de Gauss) avec un nombre très grand (la fonction conique) lors du calcul du problème direct d'autre part. Nous cherchons donc à normaliser complètement ces fonctions dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  et  $\theta_0 < \pi$ .

**Définition :** *Pour simplifier la représentation, on travaillera sur une variable  $\tau$  plutôt que sur l'indice  $p$  en gardant à l'esprit que l'un et l'autre sont liés par cette simple relation :  $\tau = p\pi/S$ . De plus, on préfère écrire  $K_\tau^m$  plutôt que  $K_{-1/2+i\tau}^m$  pour simplifier la lecture des expressions.*

Utilisons la formule (A.12) de l'annexe précédente. On cherche en premier lieu à réduire cette expression sous une forme plus appropriée. Prenons comme expression de la dérivée, l'expression de Robin ([96], Tome I, chap II) et simplifions l'expression. La relation de récurrence :

$$\frac{dK_\tau^m}{d\theta} = m \cot \theta K_\tau^m + K_\tau^{m+1}$$

nous donne l'expression de la dérivée partielle en fonction de  $\tau$  :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dK_\tau^m}{d\theta} = m \cot \theta \frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau^m + \frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau^{m+1}$$

et en remplaçant dans l'expression (A.12) on obtient l'expression analytique suivante de la norme  $N_{\tau,\tau}$  :

$$N_{\tau,\tau} = \frac{\sin \theta_0}{2\tau} \left[ K_\tau^m \frac{\partial K_\tau^{m+1}}{\partial \tau} - K_\tau^{m+1} \frac{\partial K_\tau^m}{\partial \tau} \right]_{\theta_0} \quad (\text{B.1})$$

Cette expression sera celle qui retiendra notre attention pour le calcul détaillé de la norme. Nous avons choisit au chapitre 3 de la seconde partie, la représentation des fonctions de Mehler sous forme de séries hypergéométriques. On peut écrire la fonction de Mehler sous forme compacte :

$$K_\tau^m(\theta) = C_m(\theta)R_\tau^m F_\tau^m(\theta) \quad (\text{B.2})$$

en posant :

$$C_m(\theta) = \frac{\sin^m \theta}{2^m m!} \quad (\text{B.3a})$$

$$R_\tau^m = \frac{\Gamma(1/2 + m + i\tau)}{\Gamma(1/2 - m + i\tau)} \quad (\text{B.3b})$$

$$F_\tau^m(\theta) = F(m - 1/2 + i\tau, m + 1/2 + i\tau, m + 1, \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (\text{B.3c})$$

En écrivant (B.1), avec (B.2), on trouve :

$$K_\tau^m \frac{\partial K_\tau^{m+1}}{\partial \tau} = C_m C_{m+1} R_\tau^m F_\tau^m \left[ R_\tau^{m'} F_\tau^m + R_\tau^m F_\tau^{m'} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$K_\tau^{m+1} \frac{\partial K_\tau^m}{\partial \tau} = C_m C_{m+1} R_\tau^{m+1} F_\tau^{m+1} \left[ R_\tau^{m+1'} F_\tau^{m+1} + R_\tau^{m+1} F_\tau^{m+1'} \right] \quad (\text{B.5})$$

Le calcul de la norme passe donc par les calculs intermédiaires des dérivées partielles en  $\tau$  des fonctions  $R_\tau^m$  et des fonctions hypergéométriques  $F_\tau^m$ .

### Dérivée partielle des fonctions $R_\tau^m$ par rapport à $\tau$

On a :

$$R_\tau^m = \frac{\Gamma(1/2 + m + i\tau)}{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}$$

et posons  $z = 1/2 - m + i\tau$  alors :

$$R_z^m = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \quad (\text{B.6})$$

donc :

$$\frac{dR_z^m}{dz} = \frac{\Gamma'(z + 2m)\Gamma(z) - \Gamma(z + 2m)\Gamma'(z)}{\Gamma(z)^2}$$

ce qui permet d'écrire,

$$R_z^m{}' = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \left\{ \frac{\Gamma'(z + 2m)}{\Gamma(z + 2m)} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right\}$$

avec  $\Gamma'(z) = d\Gamma(z)/dz$ .

Les fonctions  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  sont les *fonctions digamma* ([1]) définies si  $\Gamma(z)$  est analytique. On sait ([73]) que  $\Gamma(z)$  est analytique  $\forall z \notin \{-\mathbb{N}\}$ . En écrivant explicitement la variable complexe  $z = 1/2 - m + i\tau$  on vérifie que  $\Gamma(z)$  est analytique pour tout  $m$ . On peut donc écrire :

$$R_z^{\prime m} = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \{ \psi(z + 2m) - \psi(z) \}$$

Prenons maintenant la relation de récurrence des fonctions digamma suivante ([1]) :

$$\psi(z + 2m) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + z}$$

alors on obtient :

$$R_z^{\prime m} = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + z}$$

qui se transforme d'après (B.6) en :

$$R_z^{\prime m} = R_z^m \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + z}$$

et en revenant à la variable  $\tau$  on montre que :

$$R_\tau^{\prime m} = iR_\tau^m \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + 1/2 - m + i\tau}$$

Remarquons, et on peut le prouver aisément, que la partie réelle de la série en  $k$ , doit être nulle pour que  $R_\tau^{\prime m}$  soit réelle. Soit finalement :

$$R_\tau^{\prime m} = R_\tau^m \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\tau}{(k + 1/2 - m)^2 + \tau^2} \tag{B.7}$$

Pour la suite du développement, on notera :

$$A_m = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\tau}{(k + 1/2 - m)^2 + \tau^2}$$

En revenant à l'expression générale de  $N_{\tau,\tau}$  et en remplaçant dans (B.4) et (B.5) les dérivées  $R_\tau^{\prime m}$  calculées par (B.7), on écrit :

$$N_{\tau,\tau} = C_m C_{m+1} R_\tau^m R_\tau^{m+1} \left\{ F_\tau^{m+1} F_\tau^m (A_{m+1} - A_m) + F_\tau^m F_\tau^{\prime m+1} - F_\tau^{m+1} F_\tau^{\prime m} \right\} \tag{B.8}$$

En définissant  $\delta_m = A_{m+1} - A_m$  on montre que la différence des deux séries se réduit à une série décomposable en une série symétrique plus un terme. On conclut finalement que :

$$\delta_m = \frac{2\tau}{[(m+1/2)^2 + \tau^2]}$$

Il reste maintenant à exprimer les fonctions hypergéométriques ainsi que leurs dérivées par rapport à  $\tau$ .

### Dérivées des fonctions hypergéométriques par rapport à $\tau$

La dérivée partielle des fonctions hypergéométriques s'écrit :

$$\frac{\partial F_n^m}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2+i\tau)_k (m-1/2+i\tau)_k \sin^{2k} \theta/2}{(m+1)_k k!}$$

ici,  $(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$  est le *symbole de Pochhammer* ([1]).

De manière identique à (B.6), on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (m+1/2+i\tau)_k = (m+1/2+i\tau)_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2+i\tau+j}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (m+1/2-i\tau)_k = -(m+1/2-i\tau)_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2-i\tau+j}$$

donc :

$$\frac{\partial F_n^m}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2+i\tau)_k (m-1/2+i\tau)_k \sin^{2k} \theta/2}{(m+1)_k k!} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2+i\tau+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2-i\tau+j} \right)$$

d'où le résultat final par réduction au même dénominateur :

$$\frac{\partial F_n^m}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2+i\tau)_k (m-1/2+i\tau)_k \sin^{2k} \theta/2}{(m+1)_k k!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2\tau}{(m+1/2+j)^2 + \tau^2} \quad (\text{B.9})$$

Nous n'avons pas trouvé de technique de calcul pour simplifier (B.8) à partir de (B.9). On notera donc par conséquent :

$$\boxed{H_\tau^m = F_\tau^{m+1} F_\tau^m \delta_m + F_\tau^m \frac{\partial F_\tau^{m+1}}{\partial \tau} - F_\tau^{m+1} \frac{\partial F_\tau^m}{\partial \tau}} \quad (\text{B.10})$$

Numériquement, l'algorithme prévoit une vérification systématique du signe du terme entre accolade de (B.8).  $N_{\tau,\tau}$  étant la norme au carré, la relation (B.10) doit être positive. Cette expression de  $H_\tau^m$  par (B.10) n'est pas très satisfaisante mais nous n'avons pas pu nous affranchir des sommes, sources d'éventuelles erreurs numériques (notamment la soustraction).

### Écriture de la fonction de Mehler normée

On a, d'après (B.2), l'expression de la fonction conique non normée à  $\tau$  et  $m$  donnés. On se propose de donner l'expression de la fonction conique avec une normalisation complète, grâce à un facteur  $A_\tau$  approprié, telle que :

$$\int_0^{\theta_0} A_\tau^2 (K_\tau^m)^2 d\theta = A_\tau^2 N_\tau = 1$$

Donc  $A_\tau$ , le coefficient de normalisation, doit être tel que  $A_\tau = N_\tau^{-1/2}$ .

En écrivant l'expression de  $N_\tau$  par l'équation (B.8) et en remarquant de plus que :

$$\begin{aligned} C_m C_{m+1} &= \frac{\sin \theta_0}{2(m+1)} C_m^2 \\ R_\tau^m R_\tau^{m+1} &= (\tau^2 + (m - 1/2)^2) R_\tau^{m^2} \end{aligned}$$

On trouve que :

$$N_{\tau,\tau} = \frac{\sin^{2(m+1)} \theta_0}{4(m+1)\tau} (\tau^2 + (m - 1/2)^2) R_\tau^{m^2} C_m^2 H_\tau^m$$

$H_\tau^m$  ayant été définie en (B.10). Ceci nous permet d'écrire :

$$A_\tau^m = 2 \sqrt{\left( \frac{(m+1)\tau}{((\tau^2 + (m - 1/2)^2) H_\tau^m)} \right) \frac{R_\tau^m C_m}{\sin^{m+1} \theta_0}} \quad (\text{B.11})$$

soit finalement :

$$\boxed{K_\tau^m(\theta) = 2 \sqrt{\left( \frac{(m+1)\tau}{((\tau^2 + (m - 1/2)^2) H_\tau^m)} \right) \frac{\sin^m \theta}{\sin^{m+1} \theta_0} F(m - 1/2 + i\tau, m + 1/2 + i\tau, m + 1, \sin^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Fonctions coniques de Mehler de degré nul $P_0^m$

Nous avons vu que les fonctions  $P_0^m$  étaient réductibles à une forme trigonométrique simple :

$$P_0^m(\theta) = \Gamma(m) \tan^m \frac{\theta}{2} \quad (\text{B.13})$$

On peut considérer ces fonctions comme faisant partie des fonctions de Mehler. Elles sont également positives et monotones croissantes et nous les avons définies de manière à ce qu'elles respectent les propriétés générales des fonctions de Legendre (voir paragraphe 6.2.2).

Cherchons le scalaire  $A_m$  tel que :

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{\theta_0} P_0^{m^2} \sin \theta \cdot d\theta}} \quad (\text{B.14})$$

et notons :

$$I_m = \int_0^{\theta_0} P_0^{m^2} \sin \theta d\theta$$

Nous nous proposons de calculer explicitement cette intégrale.



**Calcul de l'intégrale  $I_m$** 

D'après (B.13),  $I_m$  s'écrit aussi :

$$I_m = \int_0^{\theta_0} \tan^{2m} \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta$$

En utilisant l'identité trigonométrique  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ , l'expression devient :

$$I_m = 2 \int_0^{\theta_0} \frac{\sin^{2m+1} \theta/2}{\cos^{2m-1} \theta/2} d\theta \quad (\text{B.15})$$

Cette formulation a l'avantage de pouvoir être développée par une formule de récurrence. En effet, de façon générale ([95]) :

$$\int_0^{x_0} \frac{\sin^{m'} x}{\cos^n x} dx = -\frac{\sin^{m'-1} x_0}{(m'-n) \cos^{n-1} x_0} + \frac{m'-1}{m'-n} \int_0^{x_0} \frac{\sin^{m'-2} x}{\cos^n x} dx$$

Donc, en remplaçant  $\begin{cases} m' = 2m + 1 \\ n = 2m - 1 \\ x = \theta/2 \end{cases}$  on trouve dans notre cas :

$$I_m = -2 \frac{\sin^{2m} \theta_0/2}{\cos^{2(m-1)} \theta_0/2} + 2m \int_0^{\theta_0} \tan^{2m-1} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (\text{B.16})$$

Définissons maintenant l'intégrale  $J_m$  telle que :

$$J_m = \int_0^{\theta_0} \tan^{2m-1} \frac{\theta}{2} d\theta$$

**Calcul de l'intégrale  $J_m$** 

Pour calculer l'intégrale  $J_m$  on fait le changement de variable suivant :

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{soit} \quad \theta = 2 \arctan u$$

et donc :

$$J_m = \int_0^{\theta_0} \tan^{2m-1} \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \int_0^{u_0} \frac{u^{2m-1}}{1+u^2} du \quad (\text{B.17})$$

Le calcul de l'intégrale en fonction de  $u$  se fait par division polynomiale en remarquant que :

$$\frac{u^{2m-1}}{1+u^2} = u^{2m-3} - \left[ u^{2m-5} - \left[ \dots - \left[ u - \frac{u}{1+u^2} \right] \right] \right]$$

On montre finalement que :

$$\frac{u^{2m-1}}{1+u^2} = (-1)^{m+1} \left[ \frac{u}{1+u^2} + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j u^{2j-1} \right]$$

L'expression peut être intégrée sans difficulté terme à terme puisque la série est finie. On peut écrire après intégration :

$$J_m = (-1)^{m+1} \left[ \ln(1+u_0^2) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j} u_0^{2j} \right]$$

Si on insère cette expression dans (B.16) on obtient :

$$I_m = -2 \frac{\sin^{2m} \theta_0/2}{\cos^{2(m-1)} \theta_0/2} + 2(-1)^{m+1} m \left[ \ln(1 + \tan^2 \frac{\theta_0}{2}) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j} \tan^{2j} \frac{\theta_0}{2} \right]$$

Cette expression est numériquement difficile à calculer précisément.  $I_m$  étant la norme au carré, son signe doit être positif. Ce test montre certaines instabilités numériques dans le calcul. On doit donc poursuivre le développement en revenant à la variable  $u$ , pour plus de simplicité dans les expressions. Le développement en série de  $\ln(1+u_0^2)$  permet d'écrire  $I_m$  sous la forme suivante :

$$I_m = -2u_0^{2m} \cos \theta_0/2 + 2m(-1)^{m+2} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} u_0^{2j}$$

Remarquons ensuite que :

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} u_0^{2j} = u_0^{2m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+m} u_0^{2j}$$

On peut définir les *fonctions Lerch-phi* ([35]) comme :

$$\mathcal{L}\varphi(z, \alpha, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+v)^\alpha} \tag{B.18}$$

qui sont une généralisation des sommes de Riemann. Alors, en terme des *fonctions de Lerch*, l'expression (B.19) devient, par rapport à la variable  $\theta_0$  :

$$I_m = 2 \tan^{2m} \frac{\theta_0}{2} [m\mathcal{L}\varphi(-\tan^2 \theta_0/2, 1, m) - \cos^2 \theta_0/2] \tag{B.19}$$

Cette expression de la norme est maintenant plus stable à calculer. Ainsi  $A_m$  (B.14) devient :

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m) \tan^m \frac{\theta_0}{2} \sqrt{2 [m\mathcal{L}\varphi(-\tan^2 \theta_0/2, 1, m) - \cos^2 \theta_0/2]}} \tag{B.20}$$

En conséquence, la fonction  $P_0^m$  (B.13) complètement normalisée s'écrit :

$$P_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}} \text{ pour } m = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$P_0^m = \left( \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right)^m \frac{1}{\sqrt{2[m\mathcal{L}\varphi(-\tan^2 \theta_0/2, 1, m) - \cos^2 \theta_0/2]}} \text{ pour } m > 0 \quad (\text{B.22})$$

## Annexe C

# Les solutions du problème dans un cône semi-infini

Les résultats analytiques présentés dans cette annexe ont été produits par Jean-Philippe Hoffbeck, stagiaire à l'Institut de Physique du Globe de Strasbourg en 2002.

### C.1 Le problème de condition aux limites pour un cône infini

Considérons le domaine  $\Omega$  non borné suivant :

$$\Omega = \{a \leq r, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

et le problème de condition aux limites défini par :

$$\Delta V = 0 \tag{C.1a}$$

$$V|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = F|_{\partial\Omega_{\theta_0}} \tag{C.1b}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = G|_{\partial\Omega_a} \tag{C.1c}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta, \varphi) = 0 \tag{C.1d}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = 0 \tag{C.1e}$$

Dans ce cas également, il existe plusieurs problèmes de conditions aux limites ; nous n'avons gardé que celui qui se rapproche de la décomposition *PIII* dans le cas d'un cône fini. Remarquons que le problème mixte conduit à l'absence de condition particulière pour les fonctions  $F$  et  $G$  liée à la condition de flux nul.

Décomposons le problème initial sur  $V$  en deux sous-problèmes sur  $V_1$  et  $V_2$ , qui possède maintenant tout deux des conditions aux limites partiellement homogènes :

$$V = V_1 + V_2 \tag{C.2}$$

On cherche donc à résoudre séparément les deux problèmes de conditions aux limites suivants :

$$\begin{array}{lcl}
\Delta V_1 = 0 & & \Delta V_2 = 0 \\
V_1|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = F|_{\partial\Omega_{\theta_0}} & & V_2|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = 0 \\
\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = 0 & + & \left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = G|_{\partial\Omega_a} \\
\lim_{r \rightarrow \infty} V_1(r, \theta, \varphi) = 0 & & \lim_{r \rightarrow \infty} V_2(r, \theta, \varphi) = 0 \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = 0 & & \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V_2(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = 0
\end{array}$$

## Résolution du problème pour $V_2$

Remarquons que dans l'écriture (C.1) les conditions aux limites infinies sont sur les fonctions radiales. Par conséquent, les solutions du sous-problème que nous avons appelé  $V_2$  dans les pages qui précèdent et qui impliquent des conditions homogènes sur la surface latérale  $\partial\Omega_{\theta_0}$  restent fondamentalement inchangées. Nous retrouvons que les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont réelles positives, ce qui entraînent des racines  $n_k$  réelles, positives et supérieures à  $m$  (voir chapitre 2) pour les fonctions de Legendre associées.

D'où la solution suivant de  $V_2$  :

$$V_2 = a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m(\theta)$$

La différence majeure avec les problèmes que nous avons résolus dans la partie 2 pour le cas du cône fini réside dans la condition à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2(r, \theta, \varphi) = 0$$

qui exclue les fonctions radiales  $\frac{r}{a}$ . Par conséquent la contribution habituellement qualifiée d'*externe* est inexistante.

La condition à la limite :

$$\left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = G|_{\partial\Omega_a}$$

permet d'exprimer la relation entre les coefficients de Gauss de la base local et les coefficients de Gauss des harmoniques globales. Il suffit de poser que  $G|_{\partial\Omega_a} = \tilde{B}_z(a, \theta, \varphi)$ , c'est-à-dire, la composante  $Z$  d'un champ magnétique exprimé en harmoniques sphériques ordinaires à la surface  $r = a$ . Rappelons que les formalismes locaux doivent être exprimés dans le même repère. On trouve d'après les résultats de la section 7.3 que :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{(n_k+1) \|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}$$

avec en particulier, étant donné la condition  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ , l'expression (Annexe A) :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{P_n^m(\theta_0)}{\frac{\partial(P_{n_k}^m(\theta_0))}{\partial n_k}}$$

Dans cette formulation le potentiel  $V_2$  est parfaitement connu, en particulier il n'y a pas de constante indéterminée.

## Résolution du problème sur $V_1$

La forme générale de la solution est donnée par la résolution de l'équation différentielle sur la fonction  $R(r)$ . Nous avons vu que pour la valeur propre  $\lambda \neq -1/4$ , l'expression générale de la fonction radiale s'écrivait,

$$R(r) = B \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + A \left(\frac{r}{a}\right)^n$$

Si l'on souhaite que  $R'(r = a) = 0$  on trouve en particulier que :

$$nA = (n + 1) B$$

si de plus on incorpore la condition  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dR(r)}{dr} = 0$  on trouve que les degrés  $n$  doivent nécessairement être complexes. Donc

$$\lambda = n(n + 1) < -1/4$$

avec  $n$  du type :

$$n = -\frac{1}{2} + iy, \quad y \in \mathbb{R}^*$$

et il suffit de prendre  $y \in \mathbb{R}^{*,+}$  pour que l'espace des solutions soit complet.

La solution du cône infini présente donc une différence fondamentale avec le cône fini. En l'absence de conditions à la limite supérieure, nous ne pouvons plus obtenir un ensemble discret de valeurs propres mais un ensemble continu.

En utilisant l'expression générale des fonctions radiales pour la valeur propre  $\lambda < -1/4$  (voir chapitre 1), on trouve finalement :

$$R_y(r) = C \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2y \cos\left(y \ln \frac{r}{a}\right) + \sin\left(y \ln \frac{r}{a}\right) \right], \quad y \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

avec  $C$  constante réelle de normalisation, que nous poserons égale à 1 pour le moment. Les fonctions radiales peuvent donc être vues comme des fonctions à deux variables et ne sont plus simplement paramétrées.

Cette caractéristique entraîne que l'expression du potentiel  $V_1$  solution s'écrit maintenant :

$$V_1 = a \sum_{m=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} R_y(r) (G_y^m \cos(m\varphi) + H_y^m \sin(m\varphi)) K_y^m(\cos \theta) \quad (\text{C.4})$$

où les coefficients de Gauss  $\{G_y^m, H_y^m\}$  et les fonctions coniques de Mehler  $K_y^m(\cos \theta)$  sont maintenant des fonctions continues de  $y$ .

Remarquons l'analogie avec le cas du cône semi-infini traité dans le cas du problème *PIII* si l'on passe à la limite infinie.

Ces fonctions forment bien une base sur l'intervalle  $r \geq a$  et nous pouvons le montrer en calculant le produit scalaire des fonctions  $R_y(r)$  au sens des distributions.

### Orthogonalité des fonctions radiales

Cherchons l'expression du produit scalaire :

$$I = \int_a^{\infty} R_y(r) R_{y'}(r) dr$$

En remplaçant  $R_y(r)$  et  $R_{y'}(r)$  par leurs expressions respectives (C.3), on trouve, après changement de variable  $u = \ln \frac{r}{a}$  que :

$$I = a \left[ \left( y + \frac{1}{2i} \right) \left( y' + \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{i(y+y')u} du + \left( y + \frac{1}{2i} \right) \left( y' - \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{i(y-y')u} du \right] \\ + a \left[ \left( y - \frac{1}{2i} \right) \left( y' + \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{i(y'-y)u} du + \left( y - \frac{1}{2i} \right) \left( y' - \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{-i(y+y')u} du \right]$$

Or, on remarque que la transformée de Fourier de la fonction  $\mathcal{Y}$  de Heaviside au sens des distributions s'écrit justement :

$$F(\mathcal{Y}(y)) = \int_{u=0}^{\infty} e^{-iyu} du$$

et est égale à :

$$F[\mathcal{Y}(y)] = \pi \delta(y) - i \mathbf{vp} \left( \frac{1}{y} \right)$$

Les expressions de chacune des intégrales d'exponentielles font donc intervenir deux types de termes, les fonctions  $\delta$  de Dirac et des termes en valeur principale  $\mathbf{vp}$ .

Si nous nous intéressons en premier lieu aux termes de Dirac, on trouve que puisque  $y, y' > 0$ , les termes  $\delta(y+y')$  et  $\delta(-y-y')$  sont nuls. De plus, en utilisant le fait que la fonction de Dirac est paire, les termes restants, fonctions de  $\delta(y-y')$  et  $\delta(-y+y')$ , se réduisent à :

$$a\pi \left[ \left( y - \frac{1}{2i} \right) \left( y' + \frac{1}{2i} \right) \delta(-y+y') + \left( y + \frac{1}{2i} \right) \left( y' - \frac{1}{2i} \right) \delta(y-y') \right] = 2\pi a \left( yy' + \frac{1}{4} \right) \delta(y-y')$$

Les termes en valeur principale  $\mathbf{vp}$  quand à eux s'annulent car la fonction  $\mathbf{vp}$  est impaire et de plus  $\mathbf{vp} \left( \frac{1}{y} \right) = 1$ .

Finalement, pour  $y, y' > 0$  le produit scalaire  $I$  au sens des distributions s'écrit :

$$\int_a^{\infty} R_y(r) R_{y'}(r) dr = 2\pi a \left( yy' + \frac{1}{4} \right) \delta(y-y') \quad (\text{C.5})$$

On peut d'autre part montrer que les fonctions  $R_y(r)$  forment bien une base complète capable, en particulier, de représenter les fonctions  $\left( \frac{a}{r} \right)^\alpha$  du développement global (dans le cas d'un cône

infini,  $\alpha > -1/2$  uniquement) en vérifiant l'égalité de Bessel-Parseval. Un long calcul montre en effet que :

$$\int_{y \in \mathbb{R}^+} \left( \int_{r=a}^{\infty} \frac{R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^\alpha}{\|R_y(r)\|} dr \right)^2 dy = \int_a^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\alpha} dr \quad (\text{C.6})$$

avec en particulier :

$$\int_{r=a}^{\infty} R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^\alpha dr = \frac{2a\alpha y}{(\alpha + 1/2)^2 + y^2} \quad (\text{C.7})$$

Nous utiliserons ces expressions par la suite.

## Résolution des conditions aux limites

On obtient à nouveau les coefficients de Gauss de la base locale  $\{G_y^m, H_y^m\}$  grâce aux conditions aux limites. Dans la condition :

$$V_1|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = F|_{\partial\Omega_{\theta_0}}$$

on pose que  $F$  est un potentiel écrit en harmoniques sphériques ordinaires,  $F|_{\partial\Omega_{\theta_0}} \equiv \tilde{V}_g(r, \theta_0, \varphi)$ .

En égalant les expressions de  $\tilde{V}_g(r, \theta_0, \varphi)$  et  $V_1$ , donnée par (C.4), sur le bord  $\partial\Omega_{\theta_0}$ , on peut multiplier chacun des membres de l'égalité par  $R_{y'}(r)$ , pour  $y'$  réel positif quelconque et bénéficier des propriétés d'orthogonalité (C.5) des fonctions radiales en intégrant sur  $[a, \infty[$ .

D'une manière formelle, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_y^m \\ H_y^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{P_n^m(\theta_0)}{K_y^m(\theta_0)} \frac{1}{\|R_y(r)\|^2} \int_{r=a}^{\infty} R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} dr \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (\text{C.8})$$

avec, d'après (C.5) :

$$\|R_y(r)\|^2 = 2\pi a (y^2 + 1/4)$$

et d'après (C.7) :

$$\int_{r=a}^{\infty} \frac{R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}}{\|R_y(r)\|^2} dr = \frac{(n+1)y}{\pi (y^2 + 1/4) \left[ (n+1/2)^2 + y^2 \right]} \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Le cône infini comme limite du cône fini

Nous cherchons maintenant à vérifier que le formalisme du cône infini correspond bien à la limite du cône fini. Nous avons constaté plusieurs analogies avec les expressions le problème *PIII* du cône fini, que ce soit pour les fonctions radiales (C.3) ou pour les produits scalaires (C.7) et (C.9). Il y a cependant une différence notable. Dans l'expression des solutions pour le cône infini nous n'avons vu à aucun moment apparaître la valeur propre  $\lambda = 0$ . Nous n'avons donc pas de contributions provenant de la fonction constante  $R_0$ . Montrons tout de même que



la solution du problème *PIII* tend vers la solution du cône infini lorsque le rayon de la surface supérieure augmente.

Rappelons que les fonctions radiales dans le cas discret sont normalisées de sorte que  $\|R_p(r)\|^2 = a$ . D'autre part, nous avons vu que dans le cas du cône fini la fonction  $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$  s'exprimait par (??), somme de deux termes, relatifs aux valeurs propres  $\lambda = 0$  et  $\lambda < -1/4$  respectivement.

En développant explicitement les expressions, on trouve que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} &= \frac{e^{-S}}{n(1-e^{-S})} (1-e^{-Sn}) \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{S} \frac{p\pi/S}{(p\pi/S)^2+1/4} \frac{(n+1)(1-(-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{((n+1/2)^2+(p\pi/S)^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2\pi p}{S} \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Rappelons que le facteur géométrique  $S$  est défini comme  $S = \log(b/a)$ . Donc :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-S}}{n(1-e^{-S})} (1-e^{-Sn}) = 0 \quad (\text{C.11})$$

D'autre part, en multipliant par  $\pi$  le numérateur et le dénominateur du terme restant on trouve,

$$\boxed{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{p\pi/S(n+1)(1-(-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{((p\pi/S)^2+1/4)((n+1/2)^2+(p\pi/S)^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2\pi p}{S} \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right]}_D \frac{\pi}{S}} \quad (\text{C.12})$$

En faisant tendre  $S$  vers l'infini, on constate que la somme dépend de la variable  $\frac{p\pi}{S}$  uniquement et du pas d'échantillonnage constant  $\frac{\pi}{S}$  infiniment fin. La somme sur  $p$  peut donc s'écrire en une intégrale sur  $x$  (variable continue correspondant à  $\pi p/S$ ) et on en conclut :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} D = \frac{1}{\pi} \int_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{x}{x^2+1/4} \frac{(n+1)}{((n+1/2)^2+x^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2x \cos\left(x \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(x \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] dx \quad (\text{C.13})$$

En normalisant maintenant les fonction  $\|R_y(r)\|^2 = a$ , on trouve que (C.3) devient :

$$R_y(r) = \frac{1}{\sqrt{1/4+y^2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2y \cos\left(y \ln \frac{r}{a}\right) + \sin\left(y \ln \frac{r}{a}\right) \right]$$

donc (C.9) s'écrit maintenant :

$$\int_{r=a}^{\infty} \frac{R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}}{\|R_y(r)\|^2} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(n+1)y}{\sqrt{(y^2+1/4)} \left[ (n+1/2)^2+y^2 \right]}$$

Par conséquent on trouve que :

$$\boxed{\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{y \in \mathbb{R}^+} \frac{y}{y^2+1/4} \frac{(n+1)}{((n+1/2)^2+y^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2x \cos\left(y \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(y \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] dy} \quad (\text{C.14})$$

On ne manquera pas de remarquer la similitude entre (C.10) et (C.14) qui montre que le développement du cas continu représente bien la limite du cas discret.

## Conclusion

Le développement analytique dans un cône infini montre que l'ensemble des valeurs propres de la base de Mehler est maintenant non dénombrable. L'absence de valeurs propres discrètes entraîne la définition de coefficients de Gauss sous forme de fonctions réelles continues. Cette particularité représente l'obstacle le plus important à la mise en oeuvre numérique de cette approche et à son application pour l'inversion de données magnétique. C'est pourquoi, même en ne considérant que des contributions internes uniquement nous ne discutons dans les chapitres qui précèdent que des problèmes de conditions aux limites dans des cônes finis, pour lesquels les valeurs propres trouvées sont bien discrètes. Nous avons pu en particulier constater que la limite du cône fini, lorsque l'altitude supérieure du cône tend vers l'infini, permettait de retrouver les solutions du cône infini. On n'aura aucun mal à se convaincre cependant que la mise en oeuvre numérique d'un tel formalisme est en pratique insurmontable.

Nous pouvons rapprocher cette démonstration de quelques résultats empiriques rencontrés lors des travaux dans différents cônes finis de tailles différentes. Lorsque nous cherchons à modéliser un champ dans deux cônes, l'un de rayon supérieur  $b = c$ , l'autre de rayon supérieur  $b > c$ , nous observons distinctement que la contribution associée à la fonction radiale constante diminue en fonction de l'altitude, ceci s'explique maintenant par (C.11). Dans le même temps, pour garder une même précision de représentation dans le cône tel que  $b > c$ , le nombre de coefficients de Gauss associés aux valeurs propres  $\lambda < -1/4$  doit être augmenté. Étant donné que le pas d'échantillonnage  $\pi/S$  dans (C.12) s'affine à mesure que le rayon  $b$  augmente (car  $S = \log(b/a)$ ), la série des coefficients de Gauss converge plus lentement vers 0. Par conséquent, la troncature doit donc se faire à un indice  $P_{max}$  plus important. Ceci permet d'illustrer en particulier, certains résultats liés aux variations géométriques du cône.



# Annexe D

## Liste des notations et symboles employés

### Liste des symboles et notations

#### Symboles

$\tilde{\phantom{x}}$  : Le tilda signifie que la variable est exprimée dans un référentiel terrestre dont l'axe Z coïncide avec l'axe de la calotte sphérique.

$\hat{\phantom{x}}$  : Ce symbole sur les coefficients de Gauss signifie qu'ils sont exprimés sous leur forme compacte (voir section 1.3).

$\beta$  : Altitude quelconque en  $km$  comprise entre  $r = a$  et  $r = b$ .

$\delta_m$  : delta de Kronecker

$\theta$  : Colatitude dans le référentiel de la calotte sphérique.

$\theta_0$  : Angle constant qui définit l'ouverture de la calotte sphérique.

$\lambda_k$  : Valeurs propres des fonctions de Legendre généralisées  $P_{n_k}^m$ .

$\lambda_p$  : Valeurs propres des fonctions radiales  $R_p(r)$ .

$\Gamma(\alpha)$  : Fonction gamma incomplète avec  $\alpha$  réel ( $\alpha \neq -1, -2, \dots$ ).

$\Delta$  : Discriminant d'une équation caractéristique.

$\Omega$  : Domaine conique ou Volume du domaine conique.

$\partial\Omega_{a,b,\beta}$  : Domaine de surface radiale du domaine conique  $\Omega$ .

$\partial\Omega_{\theta_0}$  : Domaine de surface latérale du domaine conique  $\Omega$ .

#### Notations

$a$  : Rayon terrestre moyen  $a \sim 6371, 2km$

$b$  : Rayon de la surface supérieure du cône.

$K_p^m(\theta)$  : Fonction conique de Mehler.

$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  : Fonction hypergéométrique.

$g_n^m, h_n^m$  : Coefficients de Gauss globaux écrits dans le repère géocentrique.

$\tilde{g}_n^m, \tilde{h}_n^m$  : Coefficients de Gauss globaux écrits dans le repère centré sur la calotte sphérique.

$G_p^m, H_p^m$  : Coefficients de Gauss de la base de Mehler pour les fonction radiales  $R_p(r)$ .

$G_0^m, H_0^m$  : Coefficients de Gauss de la base de Mehler pour les fonction radiales  $R_0(r)$ .

$G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}$  : Coefficients de Gauss de Legendre pour les fonctions radiales  $(a/r)^{n_k+1}$  dites «internes».

$G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}$  : Coefficients de Gauss de Legendre pour les fonctions radiales  $(r/a)^{n_k}$  dites «externes».

$k$  : Nombre entier dénombrant les valeurs propres des fonctions de Legendre  $P_{n_k}^m(\theta)$ .

$l$  ou  $n$  : Degré entier des fonctions de Legendre.

$\mathcal{L}^2([a, b])$  : Espace de Hilbert muni d'un produit scalaire dans l'intervalle  $[a, b]$ .

$L^2$  : Opérateur de moment angulaire.

$L_m$  : Opérateur de Legendre.

$m$  : ordre entier des fonctions de Legendre

$n_k$  : degré réel des fonctions de Legendre repéré par l'indice entier  $k$ .

$p$  : nombre dénombrant les valeur propres des fonctions radiales  $R_p(r)$ .

$P_l^m(\theta)$  : fonction de Legendre associée des harmoniques sphériques ordinaire normalisée au sens de Schmidt avec  $l$  et  $m$  entiers.

$P_{n_k}^m(\theta)$  : fonction de Legendre généralisée d'ordre  $m$  entier et de degré  $n_k$  réel.

$R_p(r)$  : Fonctions radiales. Fonctions propres d'un problème de Sturm-Liouville associées aux valeurs propres  $\lambda_p$ .

$\overline{R_\Omega}$  : Erreur moyenne de l'intensité du champ total dans tout le volume  $\Omega$  exprimée en nT.

$\overline{R_{\partial\Omega_r}(\beta)}$  : Erreur moyenne de l'intensité du champ total sur une surface sphérique d'altitude  $\beta$  exprimée en nT.

$S$  : nombre sans dimension dont la valeur dépend de l'altitude inférieure  $a$  et supérieure  $b$  du domaine  $\Omega$  et tel que  $S = \log(b/a)$ .

$u$  : élévation en kilomètre par rapport à la surface terrestre.

# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1965.
- [2] J. Achache, Y. Cohen, and G. Unal. The french program of circumterrestrial magnetic surveys using stratospheric balloons. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 72 :97–101, 1991.
- [3] M. Alexandrescu, C. Ha Duyen, and J-L. Le Mouél. Geographical distribution of magnetic observatories and field modelling. *J. Geomag. Geoelec.*, 46 :891–901, 1994.
- [4] L.R. Allredge. Rectangular Harmonic Analysis applied to the geomagnetic field. *J. Geophys. Res*, 86(B4) :3021–3026, April 1981.
- [5] R. L. Allredge. Core and crustal fields. *J. Geophys. Res*, 88(B2) :1229–1234, 1983.
- [6] Z.-C An, D.-H Tan, Y.-F Xu, V.P. Golovkov, N. M. Rotanova, and T. N. Bondar. Spherical Cap Harmonic Analysis of the geomagnetic field over Asia. *J. Geomag. Geoelec.*, 46 :789–795, 1994.
- [7] G. Backus, R. Parker, and C. Constable. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, 1996.
- [8] G. E. Backus. Non-uniqueness of the external field determined by surface intensity measurement. *J. Geophys. Res*, 75 :6339–6341, 1970.
- [9] D. R. Barraclough. A comparison of satellite and observatory estimates of geomagnetic secular variation. *J. Geophys. Res*, 90(B3) :2523–2526, 1985.
- [10] J. Bernard, J-C. Kosik, G. Laval, R. Pellat, and J.-P. Philippon. Représentation optimale du potentiel géomagnétique dans le repère d’un dipole décentré, incliné. *Ann. Géophys.*, 25(2) :659–665, 1969.
- [11] J. Bitterly, M. Alexandrescu, J.-J. Schott, and J. Vassal. Contribution de la France à l’observation du champ magnétique terrestre. Technical report, CNFGG-Rapport quadrienal, 1995-1998.
- [12] R. J. Blakely. *potential theory in gravity and magnetic applications*. cambridge university press, 1996.
- [13] J. Bloxham, D. Gubbins, and A. Jackson. Geomagnetic secular variation. *Phil. Trans R. Soc. Lond.*, A 329 :415–502, 1989.
- [14] W. Bosch. On the computation of derivatives of Legendre functions. *Phys. Chem. Earth*, 25(9-11) :655–659, 2000.
- [15] C.E. Bullard. The stability of a homopolar dynamo. *Pro. Cambridge Phil. Soc.*, 51 :744–760, 1955.
- [16] E. C. Bullard. The removal of trend from magnetic surveys. *Earth Plan. Scien. Lett.*, 2 :293–300, 1967.

- [17] J.C. Cain, Z. wang, C. Kluth, and D.R. Schmitz. Derivation of a geomagnetic model to  $n=63$ . *Geophys. J. Int.*, 97(431-441), 1989.
- [18] H. Wallace Campbell. *Introduction to geomagnetic fields*. Cambridge University Press, 1997.
- [19] P. Cantini, E. Pinna, and I. Marson. A comparison of surface magnetic data and MAGSAT data over Italy and its surroundings. *Phys. Chem. Earth*, 24(5) :449–454, 1999.
- [20] S. Chapman and J. Bartels. *Geomagnetism*, volume I et II. Oxford Press, 1940.
- [21] P. Christian Hansen. Regularization tools : A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms*, 6 :1–35, 1994.
- [22] V. Courtillot, J. Ducruix, and J.-L. Le Mouél. Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. *C. R. Hebd. Séances Acad.*, 87(série D) :1095–1098, 1978.
- [23] A. De Santis, O. Battelli, and D.J. Kerridge. Spherical Cap Harmonic Analysis applied to regional field modelling for Italy. *J. Geomag. Geoelec.*, 42 :1019–1036, 1990.
- [24] A. De Santis and C. Falcone. Spherical cap models of laplacian potentials and general fields. *Geodetic Theory Today*, pages 141–150, 1995.
- [25] A. De Santis, C. Falcone, and J. M. Torta. Simple additional constraints on regional models of the geomagnetic secular variation field. *Phys. Earth Plan. Int.*, 97 :15–21, 1996.
- [26] A. De Santis, C. Falcone, and J.M. Torta. SHA vs SCHA for modelling secular variation in a small region such as Italy. *J. Geomag. Geoelec.*, 49 :359–371, 1997.
- [27] A. De Santis, D.J. Kerridge, and D.R. Barraclough. A Spherical Cap Harmonic Analysis model of the crustal magnetic anomaly field in Europe observed by Magsat. *Geomagnetism and Palaeomagnetism*, 261 :1–17, 1989.
- [28] A. De Santis, J.M. Torta, and C. Falcone. A simple approach to the transformation of spherical harmonic models under coordinate system rotation. *Geophys. J. Int.*, 126 :263–270, 1996.
- [29] A. De Santis, J.M. Torta, and F.J. Lowes. Spherical Cap harmonics revisited and their relationship to Ordinary Spherical Harmonics. *Phys. Chem. Earth*, 24(11-12) :935–941, 1999.
- [30] C. Demetrescu, M. Andreescu, and T. Nestianu. Induction model for the secular variation of the geomagnetic field in Europe. *Phys. Earth Plan. Int.*, 50 :261–271, 1988.
- [31] N.R. Draper and H. Smith. *Applied regression analysis*. Wiley-Intersciences, third edition, 1998.
- [32] H.M Dufour. A proposal for a unique quasi-regular grid on a sphere. *Manuscripta geodetica*, 16 :267–273, 1991.
- [33] Z. Düzgüt and S. R. C. Malin. Assessment of regional geomagnetic field modelling methods using a standard data set : Spherical Cap Harmonic Analysis. *Geophys. J. Int.*, 141 :829–831, 2000.
- [34] U. Engels and N. Olsen. Computation of magnetic fields within source region of ionospheric and magnetospheric currents. *J. Atm. Solar. Terr. Physiq*, 60 :1585–1592, 1998.
- [35] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Higher transcendental functions*, volume I. Mc Graw Hill, New-York, 1953.

- 
- [36] A. Galdeano, V. Courtillot, and J.-L. Le Mouél. La cartographie magnétique de la France au 1er juillet 1978. *Ann. Géophys.*, 36(1) :85–106, 1980.
- [37] C.F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen vereins im jahre 1836,...,1841*. Göttingen und Leipzig.
- [38] I. N. Gibra. *Probability and Statistical Inference for Scientists and Engineers*. Prentice-Hall, 1973.
- [39] G. H. Golub and U. von Matt. Tikhonov regularization for large scale problems. Technical report, Workshop on Scientific Computing, 1997.
- [40] W. Grander and W. Gautschi. Adapted quadrature revisited. *BIT*, 40(1) :84–101, 2000.
- [41] H. Grandis, M. Menvielle, and M. Roussignol. Bayesian inversion with Markov chains-i. the magnetotelluric one-dimensional case. *Geophys. J. Int.*, 138 :757–768, 1999.
- [42] D. Gubbins. Geomagnetic field analysis-i. stochastic inversion. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 73 :641–652, 1983.
- [43] G. V. Haines. Spherical Cap Harmonic Analysis. *J. Geophys. Res*, 90 :2593–2598, 1985a.
- [44] G. V. Haines. Magsat vertical field anomalies above 40°n from Spherical Cap Harmonic Analysis. *J. Geophys. Res*, 90(B3) :2593–2598, 1985b.
- [45] G. V. Haines. Spherical Cap Harmonic Analysis of geomagnetic secular variation over Canada 1960-1983. *J. Geophys. Res*, 90(B14) :12563–12574, 1985c.
- [46] G. V. Haines. Computer programs for Spherical Cap Harmonic Analysis of potential and general fields. *Comput. and Geosc.*, 14(4) :413–447, 1988.
- [47] G. V. Haines. Modelling by series expansions : a discussion. *J. Geomag. Geoelec.*, 42 :1037–1049, 1990.
- [48] G. V. Haines. Regional magnetic field modelling : a review. *J. Geomag. Geoelec.*, 42 :1001–1018, 1990.
- [49] G. V. Haines. Modelling geomagnetic secular variation by main-field differences. *Geophys. J. Int.*, 114 :490–500, 1993.
- [50] G. V. Haines and J. M. Torta. Determination of equivalent current sources from spherical cap harmonic models of geomagnetic field variations. *Geophys. J. Int.*, 118 :499–514, 1994.
- [51] E.W Hobson. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Chelsea Publishing Co., New York, second reprint edition, 1965.
- [52] R. Holme and A. Jackson. The cause and treatment of anisotropic errors in near-Earth geomagnetic data. *Phys. Earth Plan. Int.*, 103 :375–388, 1997.
- [53] S. A. Holmes and W. E. Featherstone. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 76 :279–299, 2002.
- [54] G. Hulot and M. Mandea. Observation, modélisation et interprétation du champ géomagnétique à l'échelle spatiale. *IPGP Internal publication*, 1998.
- [55] C. Hwang and S.K. Chen. Fully normalized Spherical Cap Harmonics : application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophys. J. Int.*, 129 :450–460, 1997.
- [56] D. D. Jackson. Most squares inversion. *J. Geophys. Res.*, 81(5) :1027–1030, 1976.
- [57] D. D. Jackson. The use of a priori data to resolve non-uniqueness in linear inversion. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 57 :137–157, 1979.



- [58] D. D. Jackson and M. Matsu'ura. A Bayesian approach to non linear inversion. *J. Geophys. Res*, 90(B1) :581–591, 1985.
- [59] J. A. Jacobs. *Geomagnetism*, volume 1,2,3,4. Academic Press, 1987.
- [60] D. C. Jensen and J. C. Cain. An interim geomagnetic field. *J. Geophys. Res*, 67 :3568, 1962.
- [61] O. D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Dover, New York, 1953.
- [62] K.S Köblich. A program for computing the conical functions of the first kind  $P_{-1/2+it}^m(z)$  for  $m = 0$  and  $m = 1$ . *Computer Physics Communication*, 23 :51–61, 1981.
- [63] M. Korte and V. Haak. Modelling european magnetic repeat station and survey data by SCHA in search of time-varying anomalies. *Phys. Earth Plan. Int.*, 122 :205–220, 2000.
- [64] M. Korte and R. Holme. Regularisation of spherical cap harmonics. *Geophys. J. Int.*, 153(1) :253–262, 2003.
- [65] R. A Langel. Introduction to the special issue : a perspective on Magsat results. *J. Geophys. Res*, 90(B3) :2441–2444, 1985.
- [66] R. A. Langel, T. J. Sabaka, R. T. Baldwin, and J. A. Conrad. The near Earth magnetic field from magnetospheric and quiet-day ionospheric sources and how it is modeled. *Phys. Earth Plan. Int.*, 98 :235–267, 1996.
- [67] R.A Langel and W.J Hintz. *The magnetic field of the Earth's lithosphere*. cambridge university Press, 1998.
- [68] B. Langlais. Les champs magnétiques de la Terre et de Mars : apport de stellites Oersted et Mars Global Surveyor. Th&egravese de doctorat de l'Institut de Physique du Globe de Paris, 2001.
- [69] B. Langlais and M. Mandea. An IGRF candidate main geomagnetic field model for epoch 2000 and a secular variation model for 2000-2005. *Earths Plan. Spac.*, 52 :1137–1148, 1999.
- [70] B. Langlais and M. Mandea. Use of Oersted scalar data in evaluation the pre-Oersted main field candidate models for the IGRF 2000. *Earths Plan. Spac.*, 52 :1167–1170, 2000.
- [71] C. Larroque and J. Virieux. *Physique de la Terre Solide*. Géosciences. Gordon and Breach, 2001.
- [72] J.L Le Mouel. Sur la distribution des éléments magnétiques en France. Th&egravese de doctorat de l'Université de Paris, 1969.
- [73] N.N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications*. Dover Publication, New York, 1972.
- [74] J. Lilensten and J. Bornarel. *Sous les feux du Soleil*. Collection Grenoble Sciences. EDP science, 2001.
- [75] F. J. Lowes. Mean-square values on sphere of spherical harmonic vector fields. *J. Geophys. Res*, 71 :2179, 1966.
- [76] F. J. Lowes. Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 36 :717–730, 1974.
- [77] F. J. Lowes. The explanation of some covariances, associated with the Backus effect, in the Orsted model (9/99). *Phys. Earth Plan. Int.*, 135 :93–96, 2003.
- [78] F. J. Lowes, T. Bondar, V. P. Golovkov, B. Langlais, S. Macmillan, and M. Mandea. Evaluation of the candidate main field model for the IGRF 2000 derived from preliminary Orsted data. *Earths Plan. Spac.*, 52 :1183–1186, 2000.

- 
- [79] F.J. Lowes. Orthogonality and mean squares of vector fields given by spherical harmonic potentials. *Geophys. J. Int.*, 136 :781–783, 1999. Research note.
- [80] F.J. Lowes, A. De Santis, and B. Duka. A discussion of the uniqueness of a Laplacian potential when given only partial information on a sphere. *Geophys. J. Int.*, 121 :579–584, 1995.
- [81] S. R. C. Malin, Z. Düzgit, and N. Baydemir. Rectangular Harmonic Analysis revisited. *J. Geophys. Res.*, 101(B12) :28205–28209, 1996.
- [82] M. Mareschal and M. Menvielle. On the use of the K indices to define maximum external contributions to MAGSAT at mid-latitudes. *Phys. Earth Plan. Int.*, 43 :199–204, 1986.
- [83] S. Maus and V. Haak. Is the long wavelength crustal magnetic field dominated by induced or by remanent magnetisation. *J. Ind. Geophys. Union*, 2002.
- [84] S. Maus, K. Hemant, M. Rother, and H. Lühr. "Mapping the lithospheric magnetic field from CHAMP Scalar and vector magnetic data" in *CHAMP mission results I*, pages 269–274. Springer, 2002.
- [85] M.A. Meju. *Geophysical Data Analysis : Understanding Inverse Problem Theory and Practice*, volume 6 of *Course Notes Series*. S.N Domenica Editor, society of exploration geophysicists edition, 1994.
- [86] W. Menke. *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*, volume 45 of *International Geophysics Series*. Academic Press, New York, second edition, 1989.
- [87] F. Molina and A. De Santis. Considerations and proposal for a best utilisation of IGRF over areas including a geomagnetic observatory. *Phys. Earth Plan. Int.*, 48 :379–385, 1987.
- [88] K. Mosegaard and A. Tarantola. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *J. Geophys. Res.*, 100(12) :12431–12447, 1995.
- [89] I. Nakagawa, T. Yukutake, and N. Fukushima. Extraction of magnetic anomalies of crustal origin from Magsat data over the area of the Japanese islands. *J. Geophys. Res.*, 90(B3) :2609–2615, 1985.
- [90] N. Olsen, T. Moretto, and E. Friis-christensen. New approaches to explore the Earth's magnetic field. *J. Geodynamics*, 33 :29–41, 2002.
- [91] F.W.J. Olver and J.M. Smith. Associated Legendre functions on the cut. *Journal of Computational Physics*, 51 :502–518, 1983.
- [92] J.-P. Poirier. *Les profondeurs de la Terre*. cahiers des sciences de l'Univers. Masson, 1991.
- [93] David L. Powers. *Boundary value problems*. Academic Press, fourth edition, 1999.
- [94] W.H. Press, S.A. Teulolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, New York, second edition, 1992.
- [95] L. Rade and B. Westergren. *Mathematics Handbook*. Studenlitteratur, Sweden, fourth edition, 1998.
- [96] L. Robin. *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales*, volume I-III. Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [97] N. M. Rotanova and S. D. Odintsov. Model of the MAGSAT magnetic anomaly field over Europe using Spherical Cap Harmonic Analysis. *Phys. Chem. Earth*, 24(5) :455–459, 1999.
- [98] T. J. Sabaka, N. Olsen, and R. A. Langel. A Comprehensive Model of the near-Earth magnetic field : Phase 3. Nasa/tm-2000-209894, NASA, 2000.

- 
- [99] T. J. Sabaka, N. Olsen, and R. A. Langel. A comprehensive model of the quiet-time near-earth magnetic field : Phase 3. *Geophys. J. Int.*, 151 :32–68, 2002.
- [100] A. De Santis, M. Chiappini, J. M. Torta, and R. R. B. von Frese. Development of an improved geomagnetic reference field of Antarctica. *Annali di Geofisica*, 42(2) :265–270, 1999.
- [101] J.-J. Schott, M. Roussignol, M. Menvielle, and F. R. Nomenjahanary. Bayesian inversion with Markov Chains-ii. the one-dimensional DC multilayer case. *Geophys. J. Int.*, 138 :769–783, 1999.
- [102] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1965.
- [103] W. R. Smythe. *Static and Dynamic Electricity*. Mc Graw-Hill Book Company, second edition, 1950.
- [104] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory*. Elsevier, Amsterdam, deuxième édition, 1994.
- [105] E. Thébaud, J.J. Schott, and M. Manda. Geomagnetic field modelling on small spherical caps. *Communication at EGS XXVII general assembly*, EGS02-1-04673(SE6.07-1WE2A003), 2002. Nice, France.
- [106] J. M. Torta, A. De Santis, M. Chiappini, and R. R. B. von Frese. A model of the secular change of the geomagnetic field for Antarctica. *Tectonophysics*, 347 :179–187, 2002.
- [107] J. M. Torta, A. Garcia, and A. De Santis. A geomagnetic reference field for Spain at 1990. *J. Geomag. Geoelec.*, 45 :573–588, 1993.
- [108] J.M. Torta, A. Garcia, J.J. Curto, and A. De Santis. New representation of geomagnetic secular variation over restricted regions by means of Spherical Cap Harmonic Analysis : application to the case of Spain. *Phys. Earth Plan. Int.*, 74 :209–217, 1992.
- [109] D. W. Vasco. Degeneracy, singularity and multiple solutions in geophysical inversion. *Geophys. J. Int.*, 113 :434–448, 1993.
- [110] J. S. Walker. *Fourier Analysis*. Oxford University Press, 1988.
- [111] K. A. Whaler and D. Gubbins. Spherical Harmonic Analysis of the geomagnetic field : an example of a linear inverse problem. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 65 :645–693, 1981.
- [112] P. Xu. Truncated SVD method for discrete linear ill-posed problems. *Geophys. J. Int.*, 135 :505–514, 1998.
- [113] M.I. Zhurina and L. N. Karmazina. *Tables and Formulae for the spherical functions  $P_{-1/2+i\tau}^m(z)$* . Pergamon Press, New York, 1966.
- [114] D. Zwillinger. *Handbook of differential equations*. Academic Press, New York, 1989.

## Remerciements

Je voudrai tout d'abord remercier sincèrement les membres de ce jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail : M. Jean-Louis Le Mouël, M. Michel Cara, M. Dominique Gibert et M. Angelo De Santis. Leur présence à ce jury de doctorat, intimidante, m'a permis d'apprécier la portée scientifique de cette thèse et je les remercie de m'avoir encouragé à poursuivre.

En cette fin de thèse, tant attendue, je suis tout particulièrement reconnaissant envers Jean-Jacques SCHOTT. Je suis conscient du challenge qu'a du représenter ce choc des cultures entre ma tendance à l'empirisme et son implacable rigueur. Même si cette dernière notion reste encore pour moi une abstraction à laquelle ma nature désordonnée se plie difficilement, je lui dois d'avoir compris certaines notions mathématiques arides, un intérêt certain pour la géophysique et un certain dégoût pour les brouillons illisibles. J'ose croire que l'espoir m'est permis d'être un jour capable d'aborder les problèmes qui semblent inextricables avec la même aisance et le même sang froid.

En attendant ce jour, il faut bien avouer qu'une thèse est parsemée d'embûches. C'est pourquoi je tiens particulièrement à remercier ma codirectrice de thèse, Mioara Manda, pour avoir su, à chaque fois que cela fut nécessaire, sagement me conseiller et m'aider à relativiser. Le bénéfice en fut chaque fois appréciable.

Il est une personne que je voudrais également remercier pour m'avoir permis quelques moments studieux mais récréatifs : Angelo De Santis. Son accueil chaleureux à Rome constitue un point fort de ces trois années. J'y ai trouvé matière à nourrir mon penchant naturel : un immense bureau où sédimentent multitude d'articles, des discussions passionnées, une oreille patiente et un œil amusé lorsque j'exposais sans pudeur mes divagations «scientifiques».

Je m'en voudrai d'oublier mon compagnon de bureau et de pauses « café froid », Mohamed Baala, qui « vit en un jour détruit l'ouvrage de sa vie et sans dire un seul mot s'est mit à reconstruire ». Le courage exceptionnel dont il a fait preuve me laisse encore aujourd'hui perplexe.

Pourtant, malgré ce bel exemple, je n'ai pas toujours supporté l'incertitude de la situation et, heureusement, j'ai pu m'appuyer sur Mathilde, cette branche qui plie mais ne rompt pas. Est-il besoin de répéter que ma gratitude, entre autre, lui est acquise ?

Je voudrai également saluer « mes fameux grognards », ce dernier bastion d'amis d'enfance dont le nombre s'est peu à peu émoussé au fil du temps et dont la fidélité semble à toute épreuve. Ils ont su instinctivement esquiver les questions portant sur les travaux de thèse quand d'autres me chantaient sur un air lancinant « pourquoi les p'tits bateaux qui vont sur l'eau... ». Les moments passés avec eux furent donc de vrais moments de détente.

Et puis il y a la famille, mes parents, mes sœurs et mes grands-parents, qui représentèrent des soutiens de tous les instants et dont la compassion s'est incarnée lors de la soutenance de cette thèse. J'ai pu sentir les ventres se nouer et, sur certaines têtes, voir parfois les doigts chercher les cheveux déserteurs. C'est, paradoxalement, dans ces tensions palpables, mais surtout dans leur intérêt sincère pour mon travail, que j'ai puisé une grande force pendant ces trois années.

Cette thèse est donc le fruit d'un travail d'équipe, si ce n'est toujours dans les faits, elle l'est indiscutablement dans l'esprit. Comme toujours, dans ces expériences, il y a le soldat inconnu dont la contribution, plus discrète, est pourtant loin d'être négligeable. Pour lui rendre hommage en partie, je voudrai remercier Gwen et François qui, en cette fin de thèse ou tout se bouscule, ont eu la générosité de me préparer à la réinsertion de l'après thèse en me « promenant » parfois. Enfin, merci également à Armelle, Véronique, Dan et Marc pour leur disponibilité lorsque j'avais simplement besoin de discuter ou manifester mon indignation née d'un fait divers quelconque.



*«Bien qu'on ait du coeur à l'ouvrage,  
L'Art est long, et le Temps est court.»  
Charles Baudelaire - Les Fleurs du Mal*



# Introduction générale

La planète Terre, vue de l'espace ou de la surface, apparaît immobile, stable et le plus souvent paisible. Cette illusion ne relève pourtant que de la brièveté de nos observations et les images que nous en déduisons ne sont finalement qu'un instantané de phénomènes dynamiques, complexes et parfois violents qui animent notre planète. Les anciens pensaient que «*Gaïa*», la Terre, était vivante et respectaient craintivement ses colères. Il ne nous a fallu pas moins de quelques siècles d'observations et de mesures scientifiques pour reprendre conscience que le cours de notre existence n'était en rien comparable avec la violence des processus terrestres qui ponctuèrent et ponctuèrent l'histoire dynamique de la «*mère nourricière*».

C'est une fois de plus au Siècle des Lumières que l'on redécouvre en Occident l'idée d'une Terre dont l'intérieur n'est pas le siège des enfers, n'en déplaise aux autorités traditionnelles, et c'est avec l'essor de nouvelles disciplines physiques telles que la thermodynamique, qu'au *XIX<sup>ème</sup>* siècle William Hopkins proposa un modèle de Terre à trois couches ([92]). Depuis, la géophysique est née, avec son cortège de disciplines qui, toutes combinées, permirent et permettent encore une connaissance et une compréhension de plus en plus précises des phénomènes naturels et de la structure de la Terre.

La Terre est tout d'abord constituée d'une croûte reposant sur un manteau solide séparé en deux parties, supérieure et inférieure. A quelque 3000km de profondeur, vient ensuite le noyau constitué de fer liquide en fusion au milieu duquel baigne «la graine» solide. Ce noyau est, en particulier, le siège d'un important phénomène qui a certainement protégé l'émergence de la vie : le magnétisme terrestre.

Même si les carnets secrets de la planète bleue nous sont en grande partie méconnus, nous commençons maintenant à pouvoir donner un descriptif de la structure du champ magnétique et avoir une idée de ses processus dynamiques, même si Einstein prétendait avec raison au début du *XX<sup>ème</sup>* siècle que le champ magnétique terrestre d'origine interne demeure un des problèmes importants non résolus.

Pour pouvoir le comprendre, quoi de plus naturel, dans un premier temps, que de le mesurer. Ces mesures, qui sont sans doute les mesures géophysiques les plus anciennes ([59] chapitre 1, volume I), pourront ensuite être analysées par des techniques et des modèles mathématiques qui dépendront d'hypothèses sur le champ magnétique ainsi que d'observations complémentaires effectuées à la surface de la Terre. Cela présuppose donc une première appréhension de l'origine de ses différentes sources.

## Pourquoi et comment mesurer le champ magnétique terrestre ?

### Le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est riche d'échelles spatiales et de variations temporelles. Il est la superposition de deux entités que l'on distingue en premier lieu par rapport à la surface de



la Terre : le champ magnétique interne et le champ magnétique externe, dont la lutte perpétuelle avec *le vent solaire* nous protège des radiations préjudiciables à l'épanouissement de la vie. Dans le concept de champ interne on distingue le champ principal et le champ de la croûte, ou crustal ou encore parfois lithosphérique.

Le champ principal est également connu comme le «champ nucléaire» et représente 99% du champ observé à la surface du globe. Ses sources résident à plus de 2900km de profondeur. Il est engendré par des courants électriques circulant dans la partie fluide du noyau terrestre qui, eux-même, entretiennent un champ magnétique. Pour cette raison, ce processus est communément qualifié de *dynamo auto-entretenu* ([15]), dont un premier modèle, très général, fut suggéré par le célèbre physicien Larmor en 1919. Vu de l'espace, le champ magnétique principal peut être assimilé à celui d'un dipôle placé au centre de la Terre qui serait, en moyenne, parallèle à l'axe de rotation. Si le noyau était au repos, ces courants disparaîtraient en quelques dizaines de milliers d'années par effet Joule provoquant sans nul doute un effet destructeur sur la biosphère étant donné les fortes radiations auxquelles le vivant serait soumis.

Ce champ principal varie au cours du temps, sur une échelle de quelques dizaines à quelques centaines d'années : cette variation temporelle est qualifiée de «séculaire». Si, en première approximation, la variation séculaire apparaît comme régulière, il est possible de constater des changements de tendance très rapides sur une période de 1 à 2 ans. Ces «spasmes» ont été mis en évidence depuis peu et sont maintenant connus sous le nom de «secousses géomagnétiques» ou «sauts de variation séculaire» ([22]).

Le champ crustal est bien plus statique et ne trouve ses sources que dans la lithosphère épaisse de quelques dizaines de kilomètres. Ses différences majeures avec le champ principal sont d'une part ses distributions spatiales très différentes, qui n'obéissent à aucune règle précise contrairement au champ principal majoritairement dipolaire, d'autre part, ses échelles de temps plus longues, car le champ magnétique enregistré dans la croûte n'est modifié en première approximation que par des accidents géologiques, et enfin son intensité généralement très faible en comparaison du champ principal, et qui se mesure en centaines voire en dizaines de nanoteslas. En certaines régions très localisées, cette intensité peut néanmoins atteindre plusieurs milliers de nanoteslas comme à Koursk en Russie ou Kiruna en Suède par exemple ([54]). Ce champ crustal, qualifié «d'anormal», résulte de l'aimantation rémanente de certaines roches de la croûte terrestre reflétant l'histoire géologique de la région. L'étude de ce champ est très importante pour la reconstitution de l'histoire de la Terre. L'*aimantation rémanente* a, en quelque sorte, fossilisé le champ magnétique d'une manière immuable à l'échelle humaine. Or, le champ magnétique du noyau, en traversant la croûte terrestre, engendre également de l'*aimantation induite* qui pourra varier en fonction de la dérive du champ interne ; cette variation devient dès lors importante sur une période de quelques décennies. Le champ de la croûte est lui-même le résultat de contributions de caractéristiques temporelles fort distinctes et, si l'on a coutume de penser que le champ crustal est essentiellement dominé par l'aimantation rémanente, il n'est pas exclu que ce que nous mesurons à la surface terrestre puisse être le fruit d'une importante aimantation induite ([83]). Par conséquent, il n'est pas improbable que des mesures du champ, espacées de plusieurs années mais dont on a corrigé la dérive séculaire et prises à un même endroit, puissent tout de même exhiber des valeurs sensiblement différentes. La caractérisation précise du champ crustal rémanent représente donc une difficulté toujours à l'étude.

Le champ externe, quant à lui, est engendré par des courants électriques circulant dans l'ionosphère et dans la magnétosphère, couches qui caractérisent l'atmosphère au-delà d'une centaine de kilomètres ([18]). Ces courants ont des variations temporelles rapides et répondent à l'interaction entre le courant de particules en provenance du Soleil et la magnétosphère. L'amplitude de ce champ est très variable, allant de quelques nanoteslas à plusieurs milliers de nanoteslas

lors d'évènements exceptionnels majeurs liés aux éruptions solaires. Ces bouffées de particules particulièrement énergétiques prennent également le nom de *nuage magnétique*. D'autres variations temporelles, plus lentes, sont essentiellement déterminées par les mouvements de la Terre et du Soleil et obéissent de ce fait à des lois cycliques de 24h, de 27 jours et d'un an. Elles sont également déterminées par l'activité cyclique du Soleil de 11 ans et ses harmoniques (d'un point de vue magnétique, le cycle complet du soleil serait de 22 ans [74]). Les éjections de particules chargées provenant du Soleil mettent environ deux jours à nous parvenir et sont responsables, en particulier, des phénomènes très spectaculaires comme les aurores boréales et les célèbres orages magnétiques qui peuvent perturber les réseaux électriques et les communications satellites (L'un des plus célèbres étant l'orage magnétique du 12 mars 1989 qui provoqua un «*black-out*» complet au Québec). L'observation de l'activité solaire permet de prévoir ces événements mais malheureusement pas de contrecarrer leurs effets. Ces phénomènes impressionnants affectent essentiellement les régions polaires et de haute latitude.

Toutes ces différentes contributions du champ, qu'elles soient crustales, du noyau ou externes, se superposent et il n'est pas aisé de les quantifier précisément. Chaque phénomène, selon ses caractéristiques, fait appel à des techniques de représentation différentes et obéit à des lois physiques variées. Ce sera le travail du géomagnéticien spécialiste du champ externe ou du champ interne de développer des théories permettant de les distinguer, bien que la synergie entre ces deux disciplines soit fondamentale pour la compréhension du champ magnétique dans son ensemble.

Puisque nous avons une idée des différentes contributions qui interviennent dans la mesure du champ, nous pouvons chercher à les isoler, par des techniques de mesures qui nous laisseront voir les caractéristiques propres au champ interne, crustal et externe.

## Les mesures du champ magnétique

Le champ magnétique terrestre est une grandeur vectorielle dont on n'est capable de mesurer commodément les composantes que depuis quelques dizaines d'années avec l'apparition d'appareil de mesure précis tel que le fluxgate ou le magnétomètre à protons.

Le champ magnétique est habituellement repéré dans le trièdre direct  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du référentiel géodésique. Chacune de ses composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  peut ensuite être ramenée dans le repère des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . La composante  $B_x$  est horizontale et positive si son sens est vers le Nord géographique, la composante  $B_y$  est également horizontale et dirigée vers l'Est géographique, enfin, la composante  $B_z$  est verticale et positive vers le centre de la Terre.

Le champ  $\vec{B}$  n'est pas à proprement parler le champ magnétique mais l'induction et possède les dimensions du Tesla, contrairement au champ magnétique  $\vec{H}$  relié à  $\vec{B}$  par une constante  $\mu$ , la perméabilité que nous considérons constante. Nous nous conformerons à cet abus de langage en vigueur en géomagnétisme et lorsque nous parlerons du champ magnétique, il s'agira en fait de l'induction.

## Les mesures proches de la surface terrestre

Les mesures magnétiques à la surface de la Terre sont plusieurs fois centenaires. Pour l'observation en continu des variations du champ magnétique et la mise en évidence de sa dérive séculaire, on dispose d'observatoires qui enregistrent le champ magnétique à l'échelle de la seconde avec une précision très exigeante de 0,1 nanotesla. La distribution de ces observatoires est très hétérogène à la surface du globe, avec une très faible densité dans l'hémisphère sud et dans les régions de climats extrêmes. A ce titre, la France entretient 4 observatoires dans les Terres

Australes et Antarctiques Française (TAAF), dont les contributions sont très significatives étant donné le peu d'informations dont nous disposons dans ces régions ([11]). Cette distribution générale des observatoires est plus le résultat de l'histoire économique et politique propre à chaque pays que le fruit d'une concertation scientifique, et cette répartition n'est malheureusement pas optimale pour l'étude du champ magnétique. On dénombre 200 observatoires environ à la surface du globe alors que 92 répartis uniformément permettraient un résultat équivalent ; cette répartition devrait néanmoins comprendre 8 observatoires en fond de mer très coûteux ([71]). Des projets sont à l'étude malgré la difficulté de mettre en place des systèmes d'automatisation complète de mesure pour des coûts réduits. A cette première barrière vient se superposer celle du choix des emplacements idéaux de ces nouveaux observatoires ([3]).

Les observatoires permettent également d'enregistrer les variations très rapides du champ magnétique et sont indispensables à l'observation et l'estimation du champ externe qui, pour le géomagnéticien interne, vient contaminer les contributions internes du champ ; les observatoires sont donc abondamment utilisés pour la réduction des données et constituent à l'heure actuelle la seule méthode de filtrage relativement objective.

Parallèlement à ces observatoires, la plupart des pays industrialisés, dont la majorité a aujourd'hui adhéré au réseau international INTERMAGNET (INTERnational Real-time MAGnetic observatory NETWORK), disposent de stations de répétition où le champ est enregistré tous les 5 ans. La dérive séculaire étant lente, sauf cas exceptionnel de saut de variation, cet intervalle de temps est suffisant pour la mettre en évidence. Ces mesures sont faites sur le terrain et leur qualité est souvent difficile à apprécier. En revanche, leur distribution optimisée pour les études propres à chaque pays les rend indispensables à la réduction séculaire des données.

A titre d'exemple, le réseau français de stations de répétition comportait, lors de sa mise en place en 1947, 12 stations et permis de réduire certaines mesures pour l'époque 1948. Ce réseau compte actuellement 33 stations, dont 13 furent établies en 1965 lors de la prospection aéromagnétique de la France en 1965 qui amena une nette amélioration de la connaissance du champ magnétique sur notre territoire et qui sert toujours de référence ([72]). La France possède, d'autre part, un unique observatoire permanent en métropole, situé à Chambon La Forêt.

L'acquisition des données magnétiques peut se faire à terre, en mer mais aussi dans les airs. La prospection aéromagnétique est souvent encouragée car elle est comparativement moins coûteuse que la prospection terrestre. Son avantage certain sur les autres méthodes de mesure est que nous restons très proche des sources de la croûte en restant suffisamment éloigné pour éliminer les détails superficiels provenant de l'activité humaine (La prospection sur la France s'est effectuée à 3000m d'altitude). Cette méthode est très intéressante pour les études lithosphériques. D'autre part, la rapidité d'exécution des mesures les rend moins sensibles aux variations lentes du champ magnétique. Il existe pourtant une difficulté majeure : pouvoir corriger les effets perturbateurs de l'avion dont on ne connaît pas toujours la position exacte. Pour la prospection magnétique de la France, à ces deux points vinrent s'ajouter les limites instrumentales du capteur avec lequel, seules les données de l'intensité du champ purent être mesurées. Les données de la prospection magnétique de la France de 1965 sont donc des données scalaires.

D'autres données magnétiques sont recueillies depuis quelques décennies par des ballons volant à haute altitude ( $\sim 30km$ ). Ces ballons sont autonomes et sont capables de voyager sur des distances longues dont la trajectoire est gouvernée par les vents dominants, la température et les changements de pression atmosphérique ([2]).

Enfin, il existe des mesures occasionnelles du champ magnétique essentiellement effectuées pour des objectifs de prospections archéologiques et minières dont la couverture, très localisée, ne permet de mettre en relief que les très petites structures du champ magnétique.

## Les mesures satellitaires

Après les mesures terrestres et aéromagnétiques, vint l'ère de la mesure spatiale, fruit de la combinaison des efforts internationaux. Le premier satellite embarquant un magnétomètre appartient à la famille des satellites russes Spoutnik et fut lancé en 1958. Vinrent ensuite les satellites de la génération Cosmos (1964) et la série de satellites américains POGOs (Polar Orbiting Geophysical Observatories). Nous ne nous éterniserons pas sur ces différentes missions satellites, «*vénérables vestiges des premiers efforts (spatiaux) du génie humain*», dont les mesures furent entachées d'une erreur de position importante et qui ne permettaient que la mesure de l'intensité du champ, cette intensité dont Backus montra l'insuffisance pour la connaissance du champ complet ([8]). Ces données satellites permirent néanmoins la mise en évidence de l'électrojet équatorial mais leur usage pour la modélisation régionale s'est vite révélé limité ([54]).

Les exigences draconiennes concernant le repérage de la position et la précision des mesures magnétiques furent remplies pour la première fois par le satellite MAGSAT (précision de 6 nanoteslas). Cette avancée spectaculaire devait révolutionner la connaissance du champ magnétique à l'échelle globale. La mission souffrait néanmoins d'un défaut : son orbite *héliosynchrone* (toujours face au Soleil). Le champ externe agit principalement de jour et une orbite héliosynchrone entraîna que le satellite fut continuellement soumis aux particules d'origine solaire en même temps qu'il naviguait à proximité des sources ionosphériques du champ externe. Les contaminations des mesures par des contributions du champ d'origine externe étaient telles qu'elles occultaient partiellement, mais sûrement, les contributions lithosphériques, malgré une orbite favorable à l'observation de ces dernières ( $\sim 400km$  d'altitude). Les résultats de cette mission furent fort nombreux et conduisirent en particulier à l'élaboration des premiers modèles géomagnétiques fins ([17]) et à des progrès notables dans la séparation des sources nucléaires et crustales ([68]). C'est également à partir de cette mission que fut proposé pour la première fois une technique mathématique de modélisation régionale du champ magnétique exploitant des données satellites ([44]). La brièveté de la mission ne permit pas cependant d'en déduire un modèle de variation séculaire satisfaisant ([9]).

Vingt ans après le succès de MAGSAT, le satellite danois ØRSTED fut mis en service en 1999. Son magnétomètre de bord permit la mesure du champ magnétique avec une précision record de 0,3 nanotesla. De plus, contrairement à MAGSAT, son orbite n'est pas héliosynchrone et des données de nuit, moins sujette à l'influence du champ externe, peuvent être sélectionnées pour l'étude du champ magnétique d'origine interne. Malheureusement, pour la modélisation régionale, ces données sont d'un intérêt réduit. Initialement, la mission était prévue pour voyager sur une orbite basse mais son apogée a été remontée jusqu'à 865km ce qui le place par conséquent excessivement loin des sources crustales dont les contributions à cette altitude ne sont pas toujours détectables. D'autre part, malgré l'excellente qualité supposée des données, un balancement imprévu du satellite occasionne des erreurs sur chaque composante entre 1 et 7 nanoteslas selon l'orientation du repère lié au capteur ([54]).

Le lancement du satellite ØRSTED initia le début d'une nouvelle ère spatiale. Après 20 ans sans projets, de nombreux satellites ont été lancés. Parmi ces missions, l'une nous intéresse particulièrement : la mission CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) lancée en juillet 2000 à partir d'une initiative allemande et d'une collaboration danoise, française et américaine. Cette mission embarque aussi bien des magnétomètres que des accéléromètres pour la mesure des anomalies gravimétriques. Son orbite basse quasi-circulaire (de 454km d'altitude) non héliosynchrone et la qualité des données ( $\sim 0,3nT$ ) en font l'une des missions les plus prometteuses pour l'étude régionale du champ magnétique en particulier.

Aucune de ces missions satellites ne couvre les régions polaires car l'intense activité magné-

tique qui y règne diminue considérablement la durée de vie du satellite en interagissant avec le matériel informatique de bord. Ces régions sont donc soigneusement évitées et cette lacune dans les données est principalement préjudiciable à l'élaboration de modèles de champ très précis.

Nous distinguons donc les limites inhérentes à chaque type de levé et ce n'est pas un hasard si nous disposons d'une telle variété. L'utilisation simultanée de ces différents ensembles de données, prises à des périodes différentes, permet d'isoler les contributions recherchées tout en garantissant une densité de données suffisante pour les mettre en évidence. La réduction des données à une même époque ne peut se réaliser sans l'utilisation des stations de répétition qui permettent de rendre compte de la dérive naturelle du champ magnétique. Cette tâche ne peut pas être accomplie par les mesures satellites en raison de la brièveté de leur mission, de l'espacement parfois important entre deux lancements (20 ans entre MAGSAT et ØRSTED) et surtout de leur modernité qui interdit l'étude du champ sur plus d'une cinquantaine d'années au mieux. Toutes ces méthodes de mesures sont par conséquent complémentaires et ne se relaient pas l'une l'autre.

## Les méthodes de modélisation du champ magnétique

Nous disposons maintenant d'un ensemble de mesures prises à différentes périodes qui recouvrent plus ou moins uniformément la Terre en dehors des régions polaires. La première étape consistera à réduire ces données à une même date par l'utilisation de modèles de variation séculaire et à isoler la contribution qui nous intéresse. Ce travail sera réalisé à partir des données enregistrées dans les observatoires et aux stations de répétition. Même en supposant ce travail préliminaire achevé, nous ne sommes toujours pas en mesure de connaître la valeur du champ dans une région où la couverture en données est lacunaire. Le champ magnétique doit donc être modélisé de manière à pouvoir en déduire une valeur du champ en n'importe quel point du globe. Cette modélisation s'obtient par l'intermédiaire d'hypothèses physiques sur le champ magnétique terrestre.

### La modélisation globale

Nous entendons par modélisation globale, la modélisation du champ sur la sphère entière. Dans un milieu dépourvu de source, un champ magnétique  $\vec{B}$  doit vérifier les équations de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1b)$$

La première équation caractérise l'absence de densité de courant, la seconde est toujours vérifiée pour l'induction.

L'équation (1a) entraîne que dans un domaine connexe, le champ  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel  $V$  unique à une constante près, qui, d'après (1b) satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques fut proposée pour la première fois par Gauss en 1839 ([37]) sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques du potentiel scalaire  $V$  :

$$V(r, \theta, \varphi) = V^i(r, \theta, \varphi) + V^e(r, \theta, \varphi)$$

par la superposition des deux potentiels,  $V^i(r, \theta, \varphi)$  d'origine interne et  $V^e(r, \theta, \varphi)$  d'origine externe.

La contribution interne s'écrit par exemple :

$$V^i(r, \theta, \varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (g_n^m \cos(m\varphi) + h_n^m \sin(m\varphi)) P_n^m(\theta)$$

Nous verrons formellement les développements qui conduisent du système (1) à l'expression du potentiel. Pour le moment, qu'il nous suffise de rappeler que ce développement est idéal dans le cas d'un domaine connexe de frontière sphérique.

L'écriture en harmoniques sphériques sur la sphère est particulièrement adaptée à l'élaboration de modèles géomagnétiques internationaux de référence. Leur construction est fondée sur l'utilisation des ensembles de données sur la sphère entière, ceci permet surtout de définir une base commune sur laquelle peuvent être comparés les résultats. Depuis 1965, ces modèles de référence sont publiés tous les 5 ans par l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie (AIGA ou IAGA en anglais). Les modèles définitifs sont dénommés *DGRF* (Definitive Geomagnetic Reference Field) et sont calculés à partir de toutes les données disponibles sur la période concernée. Par opposition, nous trouvons des modèles prédictifs associés à un modèle de variation séculaire pour la période à venir, les modèles *IGRF* (International Geomagnetic Reference Field). Nous ne ferons pas l'inventaire systématique des modèles globaux. Il suffira de savoir que de 1965 à nos jours, plusieurs générations de modèles *IGRF* (*DGRF*) ont vu le jour et ont bénéficié de techniques de mesures de plus en plus sophistiquées. Quoiqu'il en soit, les modèles *IGRF* ne permettent qu'une modélisation partielle du champ magnétique dont le détail le plus fin (appelé *longueur d'onde*) avoisine 4000km en raison d'une répartition des données peu homogène sur la sphère entière; comparé à la taille de la France, le détail est 4 fois plus large que la distance couvrant Brest à Strasbourg. Cette longueur d'onde est donc trop importante pour que nous puissions utiliser ces modèles à des fins régionales. Les développements d'ordres supérieurs sont rares et le plus souvent incertains en ce qui concerne les courtes longueurs d'ondes. Leur détermination promet d'être un peu moins problématique en raison de la couverture satellitaire de plus en plus abondante ([98]). Il apparaît clair cependant que les fines structures de taille inférieure, dans notre exemple, à la taille de la France, ne pourront pas être mises en évidence simplement par ce moyen avant longtemps. Nous devons donc chercher à exploiter les données de notre région en utilisant une technique propre à la modélisation magnétique régionale.

Les harmoniques sphériques ordinaires seront d'un piètre secours dans ce cas. En effet, si nous n'en considérons qu'une portion, ce formalisme mathématique perd certaines de ses propriétés (surtout l'orthogonalité) qui rendent la modélisation régionale instable voire impossible pour les longueurs d'ondes moyennes ou courtes; ceci étant d'autant plus vrai que la région est petite.

## Quelques techniques de modélisation régionale

Plusieurs méthodes, qui prennent en compte la nature du potentiel magnétique, ont été proposées pour modéliser le champ magnétique à une échelle régionale. Ces méthodes ont été appliquées majoritairement en Europe où nous disposons d'une longue tradition de mesures magnétiques. Nous proposons de faire un bref exposé des méthodes les plus classiques dont l'algèbre est de complexité croissante afin d'en définir leurs limites pour pouvoir aborder le sujet qui nous

préoccupe : la recherche d'une bonne technique de modélisation régionale permettant de tenir compte de tous les ensembles de données magnétiques, qu'ils soient terrestres, aéromagnétique ou satellitaires.

### Modélisation polynômiale de surface

La modélisation polynômiale de surface est la plus simple à mettre en oeuvre mais son cadre d'application exclut les données prises à différentes altitudes. Son formalisme est le suivant : si  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les composantes du champ magnétique que nous recherchons sur la région, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1\theta + a_2\varphi + a_3\theta^2 + a_4\varphi^2 + \dots \\ Y \sin \theta &= b_0 + b_1\theta + b_2\varphi + b_3\theta^2 + b_4\varphi^2 + \dots \\ Z &= c_0 + c_1\theta + c_2\varphi + c_3\theta + c_4\varphi + \dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire que chaque composante est décrite par un polynôme des coordonnées  $(\theta, \varphi)$  des données dans le référentiel géodésique où les triplets de coefficients  $(a_i, b_i, c_i)$  sont les inconnues du problème. On peut également convertir  $(\theta, \varphi)$  en  $(x, y)$  dans une cartographie locale par projection de Lambert par exemple ([72]). Outre le fait que cette formulation n'admet pas l'incorporation de données prises à différentes altitudes, nous sommes confrontés au fait que les bases de fonctions (les polynômes en  $\theta$  et  $\varphi$ ) ne sont pas orthogonales. Nous sommes donc le plus souvent limités à la recherche d'un nombre très faible de coefficients  $(a_i, b_i, c_i)$ . Pour la modélisation régionale, cette particularité est indésirable car elle limite les possibilités d'observer les petites structures du champ magnétique ([48]).

D'autre part, nous avons vu que la théorie électromagnétique stipule que le champ magnétique doit obéir à l'équation (1b), ce qui implique  $Y \sin \theta$  dans le développement précédent. Mais cette contrainte n'est que partielle car elle ignore l'équation (1a) ; par conséquent, cette modélisation ne remplit pas toutes les caractéristiques physiques d'un champ de potentiel. Certains modèles d'intensité du champ non contraints furent également proposés pour améliorer les modèles IGRF à la surface terrestre ([87]). Enfin, en pratique, cette modélisation ne permet pas de faire de prolongement vers le haut ou vers le bas. Ainsi, si l'on obtient un modèle avec les données satellites, (dont l'altitude ne peut être que moyenne) nous ne sommes pas en mesure de l'interpréter à la surface terrestre.

### Modélisation en Harmoniques Sphériques Rectangulaires (RHA)

Les hypothèses qui circonscrivent la décomposition en Harmoniques Sphériques Rectangulaires sont moins restrictives que pour la décomposition polynômiale ([4]). La portion terrestre est supposée suffisamment petite pour être assimilée à un plan, que l'on suppose ici carré de dimension  $L$ . Les données recueillies dans la région peuvent être prises à différentes altitudes proches et sont converties en coordonnées cartésiennes. La résolution de l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  conduit à l'expression du potentiel sous forme d'une double série de Fourier :

$$V = \mathcal{X}_0x + \mathcal{Y}_0y + \mathcal{Z}_0z + \sum_{k=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{K-1} \mathcal{X}_{kj} e^{-i\pi(kx+jy)/L} e^{d_{kj}Z}$$

où nous avons suivi les notations de Langel et Hinze ([67]). L'expression du potentiel obéit donc strictement aux propriétés d'un champ magnétique.

Les variations en altitudes sont régies par  $e^{d_{kj}Z}$  et Haines ([48]) a noté que le potentiel ainsi créé ne tend pas vers 0 quand  $z$  tend vers l'infini car les coefficients  $\mathcal{X}_0, \mathcal{Y}_0$  et  $\mathcal{Z}_0$  sont non-nuls (ceci n'est vrai que si le domaine est non borné mais en pratique, il doit l'être). Ce potentiel ne peut donc pas s'interpréter en termes de sources d'origine interne uniquement. Pour la modélisation régionale, même si ce fait est peu connu, nous verrons qu'en fait nous rencontrons fréquemment ce problème, et ceci quelle que soit la technique.

Cette représentation souffre de limitations importantes. Un premier problème est celui de l'incorporation de données prises à des altitudes disparates, par exemple des données terrestres à  $z = 0$  et des données Magsat à  $z = 400km$ , car les fonctions  $e^{\alpha z}$  ne sont pas en mesure de nous donner une variation en accord avec la décroissance naturelle d'un champ de potentiel Newtonien. Ceci est encore plus dramatique si l'on considère les données d'ØRSTED prises à  $z = 900km$ . Ce comportement entraîne donc des difficultés pour prolonger le champ magnétique vers le bas ([81]); il n'est donc pas possible de représenter le champ magnétique autre part que dans la région où les données ont été prises.

D'autres problèmes sont notamment mentionnés par Haines ([48]) et concernent plus les spécificités mathématiques de la décomposition, comme le phénomène de Gibbs en raison de la périodicité imposée au potentiel par le développement de Fourier.

On pourrait penser que l'assimilation de la région d'étude à un plan de dimension  $L$  se dégrade considérablement avec l'altitude, rendant la région de validité de plus en plus petite. Nakagawa et Yukutake ([89]) ont néanmoins montré qu'à l'altitude Magsat ( $\sim 400km$ ) une région de dimension  $L < 2000km$  était la limite de l'hypothèse; ce qui restreint l'utilité de la technique à de petites zones. L'erreur que l'on fait à mesure que l'on se rapproche des bords reste cependant difficile à quantifier, ce qui peut conduire à des incohérences dans l'interprétation des résultats. Pour des régions de la taille d'un continent comme l'Europe, ou d'un grand pays, cette méthode devient inadaptée et d'autres moyens doivent être employés.

## La décomposition en Harmoniques sur Calotte Sphérique

Quelques années après le lancement de MAGSAT, les données furent facilement disponibles et c'est dans ce contexte que Haines ([43]) proposa la décomposition en Harmoniques Sphériques sur Calotte, SCHA, (Spherical Cap Harmonic Analysis) pour l'élaboration d'un modèle régional sur le Canada puisque la méthode RHA ne permettait pas de remplir cet objectif ([44]). SCHA fut présentée à ses débuts comme le formalisme le plus proche des Harmoniques Sphériques Ordinaires employées en modélisation globale. Cette méthode avait donc pour objectif de pouvoir incorporer simultanément des ensembles de données prises à des altitudes comprises entre la surface terrestre et les altitudes satellitaires tout en respectant les équations de Maxwell. Plusieurs modèles régionaux furent proposés par cette méthode mais finalement bien peu inclurent l'ensemble des données disponibles. Quoiqu'il en soit, comparée aux méthodes précédentes, SCHA appliquée à la modélisation sur une surface donne comparativement les meilleurs résultats ([33]) et fut même utilisée récemment pour tenter de mettre en évidence une variation séculaire régionale ([63]).

## Objectifs scientifiques

Puisque cette méthode est toujours en vigueur en modélisation régionale, nous exposerons son formalisme en détail car les difficultés liées à cette technique sont loin d'être patentes et c'est par la pratique que nous en discernons les faiblesses.

Dans une première partie, nous revenons donc sur le formalisme des Harmoniques Sphériques



sur Calotte. Après avoir explicité et apporté certains compléments théoriques et numériques indispensables, nous tentons dans un premier temps d'appliquer cette méthode à un ensemble de données uniformément réparties sur une surface. La taille de la calotte sera choisie de manière à recouvrir la France métropolitaine. Des calottes sphériques d'une taille comparable ont été utilisées pour modéliser le champ magnétique en Espagne ([108]) ou en Italie ([23]), ce qui nous permettra de nous mettre dans des conditions similaires. Pour mener à bien cet objectif, nous nous attardons plus spécifiquement sur le problème inverse et sa préparation, dont les techniques seront conservées par la suite.

Nous essayons ensuite de voir si nous pouvons appliquer SCHA à un ensemble de données synthétiques uniformément réparties entre l'altitude terrestre  $u = 0km$  et l'altitude maximale des données MAGSAT ou CHAMP (l'altitude supérieure est d'environ 500km) de manière à simuler une inversion qui tienne compte de tous les ensembles de données disponibles. L'échec de cette manipulation nous amène à reconsidérer d'une manière critique certains présupposés qui accompagnent la méthode. Nous concluons à l'aide d'indices mathématiques que la méthode n'est pas viable dans un volume de hauteur importante car il existe une incertitude non quantifiable sur les modèles.

Dans une seconde partie, nous réécrivons la modélisation régionale comme un problème de conditions aux limites dans un cône fini. Après avoir distingué quatre problèmes équivalents, nous entamons leur résolution qui fait apparaître le potentiel local magnétique comme la somme de deux potentiels, dont un est analogue à celui proposé par Haines. Le second potentiel a une forme originale et nous permet d'introduire une nouvelle classe de fonctions sphériques, les fonctions coniques de Mehler. Ces fonctions sont définies et une implémentation numérique est proposée pour leur évaluation. Nous montrons d'autre part, qu'en égalant le potentiel local (ou son gradient) et le potentiel des harmoniques sphériques (ou son gradient) sur les surfaces du cône, nous vérifions certains théorèmes élémentaires de la théorie de potentiel, ce qui nous permet de reconstruire un champ magnétique en n'importe quel point du volume conique à partir de la connaissance du champ sur ses frontières.

Fort de ces relations nouvelles entre une décomposition locale et une décomposition globale, nous exploitons le lien entre les deux formalismes pour en déduire des informations précieuses sur la vitesse de convergence des solutions et l'énergie magnétique dans le cône. Ces considérations nous permettent de poursuivre la préparation d'un problème inverse et nous proposons un ensemble de normes permettant d'anticiper une éventuelle régularisation du problème inverse.

La quatrième partie est consacrée à l'inversion de données synthétiques réparties dans le cône. Un premier résultat est donné par une inversion sur des données uniformément réparties et nous fournit un élément comparatif important avec la méthode de Haines et qui penche en faveur de notre formalisme. Nous cherchons ensuite à nous mettre dans une situation réelle en prenant la position des données terrestres, aéromagnétique et satellites disponibles sur la France mais en considérant des valeurs synthétiques du champ. Nous vérifions que nous sommes capables d'inverser simultanément toutes ces données, que le résultat est conforme aux variations d'un champ de potentiel, et que le modèle obtenu est stable.

Première partie

**L'Analyse en Harmoniques sur  
Calotte Sphériques (SCHA)**



# Chapitre 1

## Préliminaires

Nous proposons de retracer les grandes étapes de la résolution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Cette résolution peut être trouvée dans n'importe quel ouvrage traitant des équations différentielles (par exemple [114]). Les pages qui suivent constituent la base de la résolution d'un problème de conditions aux limites dans un cône et permettent de définir l'ensemble des solutions ainsi que les différents opérateurs que nous utiliserons tout au long des pages qui suivent.

### 1.1 L'équation de Laplace

Rappelons l'expression de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques :

$$\Delta V = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \quad (1.1)$$

où  $r$  est la distance radiale du centre de la terre au point d'observation,  $\theta$  la colatitute par rapport à l'axe de référence (non nécessairement confondu avec l'axe moyen de rotation de la Terre) et  $\varphi$  la longitude par rapport à un méridien d'origine arbitraire.

Nous aurons l'occasion de décomposer l'expression du Laplacien en distinguant la partie radiale de sa partie horizontale. Nous écrivons :

$$\Delta V = \Delta_r V + \Delta_H V$$

ou encore :

$$\Delta V = \Delta_r V - \frac{L^2}{r^2}$$

avec  $L^2$  l'opérateur de moment angulaire ([7]) tel que :

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Les solutions données par cette équation sont obtenues par la méthode classique de décomposition de Fourier dans laquelle on cherche des solutions de  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  séparément :

$$V(r, \theta, \varphi) = R(r)P(\theta)\Phi(\varphi) \quad (1.2)$$

En substituant (1.2) dans (1.1) on trouve le triplet bien connu d'équations différentielles pour chacune des fonctions  $R(r)$ ,  $P(\theta)$  et  $\Phi(\varphi)$  :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \lambda R \quad (1.3)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} \right) + P(\theta) (\lambda \sin^2 \theta - m^2) = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \Phi(\varphi) \quad (1.5)$$

L'équation différentielle (1.3) peut aussi s'écrire :

$$L_r R(r) = -\lambda R \quad (1.6)$$

avec l'opérateur :

$$L_r = -\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \quad (1.7)$$

Nous aurons l'occasion dans certains cas, de considérer les fonctions radiales  $R_p$  comme fonctions propres de l'opérateur  $L_r$  associées aux valeurs propres  $-\lambda$ .

## 1.2 Expression des solutions

### 1.2.1 Equation en r

Cette équation homogène est une équation de type Euler ([114]). Comme  $r > 0$ , on pose  $r = ae^t$  et on se ramène à une équation différentielle de second ordre à coefficients constants, dénommée équation caractéristique de (1.3), de la forme :

$$\frac{dT^2}{dt^2} + \frac{dT}{dt} - \lambda T \quad (1.8)$$

dont la forme de la solution dépend de la valeur de son discriminant  $\Delta = 1 + 4\lambda$ . En écrivant  $\lambda = n(n+1)$  on distingue différents cas selon la valeur de  $\Delta$  :

1. **Si  $\lambda > -1/4$  les valeurs de  $n$  sont réelles** et la solution radiale s'écrit :

$$\boxed{R(r) = A \left( \frac{r}{a} \right)^n + B \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1}} \quad (1.9)$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes arbitraires réelles qui dépendent de la normalisation adoptée.

2. **Si  $\lambda < -1/4$  les valeurs de  $n$  sont complexes** et la solution s'écrit :

$$R(r) = A^* \left( \frac{r}{a} \right)^{n^*} + B^* \left( \frac{a}{r} \right)^{n^*+1} \quad (1.10)$$

de la même manière que (1.9) mais avec des constantes  $A^*$  et  $B^*$  complexes et :

$$n^* = -\frac{1}{2} + i\sqrt{-\Delta}$$

On préférera cependant la notation suivante :

$$R(r) = \sqrt{\frac{a}{r}} \left( A \cos \left( \sqrt{\frac{-\Delta}{2}} \log \left( \frac{r}{a} \right) \right) + B \cos \left( \sqrt{\frac{-\Delta}{2}} \log \left( \frac{r}{a} \right) \right) \right) \quad (1.11)$$

où  $A$  et  $B$  sont maintenant deux constantes réelles qui dépendent des conditions aux limites.

3. Enfin il existe un dernier cas,  $\lambda = -1/4$  dont la solution est :

$$R(r) = \sqrt{\frac{a}{r}} \left( A \log \left( \frac{r}{a} \right) + B \right) \quad (1.12)$$

mais que nous n'aurons pas l'occasion de rencontrer.

Les trois formes des solutions radiales (1.9), (1.10) et (1.12) qui dépendent de l'intervalle auquel appartiennent les valeurs propres  $\lambda$  sont écrites sous leur forme la plus générale et indépendamment des conditions aux limites. Ainsi, les solutions en  $(r/a)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) peuvent ne pas être retenues comme solutions car ces fonctions divergent quand  $r \rightarrow \infty$ . Ce cas est notamment rencontré lorsque l'on impose que le potentiel  $V$  est nul en l'infini. De même on exclut les solutions de la forme  $(a/r)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) lorsque l'on fait tendre  $r \rightarrow 0$ .

#### Remarque

*En géomagnétisme, il est souvent très utile de pouvoir extraire les différentes contributions «interne» ou «externes» du champ. La définition d'interne ou d'externe se fait habituellement en relation avec l'expression de la fonction radiale et des termes  $(r/a)$  ou  $(a/r)$ ; or, pour la solution radiale (1.10) nous ne pouvons plus distinguer les deux contributions, car chaque contribution prise indépendamment est complexe. Nous reviendrons sur ce point important de discussion au chapitre 7.4.*

### 1.2.2 Equation en $\theta$

La diversité des solutions en  $\theta$  ne nous permet pas d'en faire une liste exhaustive. Chaque solution, associée à des conditions aux limites particulières, sera décrite au fur et à mesure des rencontres. Il y a cependant quelques étapes immuables permettant d'entrevoir l'allure des solutions. On écrit souvent l'équation (1.4) en faisant le changement de variable  $x = \cos \theta$  de manière à faire apparaître une équation du type Sturm-Liouville :

$$-\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right) + \frac{m^2}{1-x^2} P(x) = \lambda P(x) \quad (1.13)$$

En posant :

$$P(x) = (1+x^2)^{m/2} F(x) \quad (1.14)$$

on trouve que l'équation s'écrit alors :

$$(1-x^2) \frac{d^2 F(x)}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dF(x)}{dx} + (\lambda - m(m+1)) F(x) = 0 \quad (1.15)$$

Si enfin on réalise le changement de variable suivant :

$$t = \frac{1}{2} (1-x)$$

l'équation différentielle (1.15) devient :

$$t(1-t) \frac{d^2 F(t)}{dt^2} + (m+1)(1-2t) \frac{dF(t)}{dt} + (\lambda - m(m+1)) F(t) = 0 \quad (1.16)$$

C'est un cas particulier de l'équation hypergéométrique qui, au voisinage de 0, admet une solution développable en série entière de  $t$ , de la forme :

$$F(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$$

En écrivant  $\lambda = n(n+1)$  un calcul montre que le facteur  $a_j$  de la récurrence s'écrit comme :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{j+1} = \frac{(j+m-n)(j+m+n+1)}{(j+1)(j+m+1)} a_j \end{cases}$$

Puisque  $\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = 1$ , cette série est absolument convergente pour  $\left| \frac{1-x}{2} \right| < 1$ , c'est à dire dans l'intervalle  $[0, \pi[$  en  $\theta$ .

En tenant compte de (1.14) on trouve donc l'expression de la solution en  $\theta$  sous la même forme :

$$\boxed{P_n^m(\cos \theta) = K_n^m \sin^m \theta F\left(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-\cos \theta}{2}\right)} \quad (1.17)$$

avec  $K_n^m$  constant de normalisation.

Cette expression formelle pourrait être qualifiée de *canonique* car est valable quelle que soit la valeur de  $n$ , réelle ou complexe. Les fonctions  $P_n^m$  ainsi définies sont les fonctions de Legendre associées et nous aurons l'occasion de proposer des méthodes d'évaluation basées sur les propriétés de récurrence des coefficients  $a_j$ .

Remarquons enfin que si l'on définit l'opérateur de Legendre  $L_m$  tel que :

$$L_m = -\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} \right) + \frac{m^2}{1-x^2} \quad (1.18)$$

alors l'équation différentielle s'écrit de manière synthétique :

$$\boxed{L_m P_n^m = \underbrace{n(n+1)}_{\lambda} P_n^m} \quad (1.19)$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de  $m$ , les valeurs de  $\lambda$  peuvent être interprétées comme *les valeurs propres* de l'opérateur de Legendre. L'équation (1.13), qui est de type Sturm-Liouville, est ainsi paramétrée par  $m$  et il existera autant d'opérateur  $L_m$  que de valeurs de  $m$ . La fonction  $P_n^m$  apparaît comme la *fonction propre* associée à la valeur propre  $\lambda$ . Cette propriété, extrêmement avantageuse, sera largement exploitée dans les parties 2 et 3 ainsi que pour la recherche de la normalisation et des produits scalaires des fonctions entre elles (voir annexe A).

En toute rigueur, l'espace des solutions de l'équation (1.15) est plus vaste car il fait intervenir de manière formelle les fonctions de Legendre de deuxième espèce, les  $Q_n^m(x)$ . De la même manière que pour la solution des fonctions radiales, la forme complète des solutions est une combinaison linéaire des  $P_n^m$  et des  $Q_n^m$  de telle sorte que,

$$\Theta_n^m(x) = \alpha P_n^m(x) + \beta Q_n^m(x)$$

Nous excluons les solutions de deuxième espèce car elles tendent vers l'infini en  $x = -1$  et  $x = 1$ , c'est à dire en  $\theta = 0$  ou  $\pi$ .

### 1.2.3 Equation en $\varphi$

On cherche une solution pour les fonctions  $\Phi(\varphi)$  qui soit  $2\pi$ -périodique. Ceci impose que  $m$  soit entier et que les fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$  forment une base de solution pour  $m > 0$ . Donc on trouve simplement :

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi) + B \sin(m\varphi)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes réelles. Nous adapterons sans autre discussion la solution en  $\varphi$  au cas géomagnétique et nous écrirons directement :

$$\Phi(\varphi) = G_n^m \cos(m\varphi) + H_n^m \sin(m\varphi) \quad (1.20)$$

où  $\{G_n^m, H_n^m\}$  sont les coefficients de Gauss associés à l'ordre  $m$  et au degré  $n$  (entier, réel ou complexe) et caractérisent l'amplitude de l'harmonique de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .

## 1.3 A propos du potentiel

En injectant (1.11) ou (1.10) ainsi que (1.17) et (1.20) dans (1.2), l'expression du potentiel, solution de l'équation de Laplace devient finalement :

$$V = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a R_p(r) \left( G_{n_p}^m \cos(m\varphi) + H_{n_p}^m \sin(m\varphi) \right) P_{n_p}^m(\theta) \quad (1.21)$$

Cette expression du potentiel caractérise une situation physique générale d'un Laplacien nul, les coefficients de Gauss  $G_{n_p}^m$  et  $H_{n_p}^m$  caractérisant la situation particulière d'un modèle de champ magnétique précis. Ces coefficients seront donc recherchés pour définir de manière unique un potentiel satisfaisant les observables : les données magnétiques. Nous avons changé la notation par souci de généralité. En effet l'indice  $p$  représente le dénombrement des degrés  $n$  associés à la valeur propre  $\lambda$ . Dans le développement en harmoniques sphériques ordinaires, les degrés  $n$  étant entiers, on les utilise volontiers pour indiquer la somme. Dans le cas le plus général cependant, le degré, nous l'avons dit plus haut est réel ou complexe et la somme doit être indiquée par un nombre entier distinct. D'où l'introduction d'un indice  $p$  permettant de référencer les différents degrés  $n_p$ . D'autre part, nous avons exprimé les sommes à partir de  $p = 0$  et  $m = 0$ . Là encore, il faudra distinguer le cas où  $n$  est entier (cas des harmoniques globales) pour lesquelles les fonctions de Legendre généralisées sont nulles si  $n < m$  du cas où  $n_p$  est réel ou complexe pour lesquelles ces considérations n'ont plus cours. On retiendra que le potentiel exprimé en harmoniques sphériques sur la sphère entière est un cas particulier de l'expression générale de  $V$  par (1.21). Le coefficient  $a$  en facteur permet aux coefficients de Gauss d'avoir les dimensions de l'induction  $\vec{B}$ , que nous appellons champ magnétique conformément à l'abus de langage en vigueur en géomagnétisme (lorsque les fonctions radiales sont sans dimension, ce qui pourra dépendre de leur norme).

Une notation que nous aurons souvent l'occasion de rencontrer est celle qui exprime sous forme synthétique les coefficients *internes* et *externes*. Cette notation intervient lorsque la fonction radiale est de la forme (1.9).

Si :

$$R_n(r) = A \left( \frac{r}{a} \right)^n + B \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1}$$

on peut définir ([20], Tome II, p639) :



$$R_n^c(r) = a \left( C_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} + (1 - C_n) \left( \frac{r}{a} \right)^n \right) \quad (1.22)$$

$$R_n^s(r) = a \left( S_n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} + (1 - S_n) \left( \frac{r}{a} \right)^n \right) \quad (1.23)$$

avec :

$$C_n = \frac{G_n^{m,i}}{G_n^{m,i} + G_n^{m,e}}$$

$$S_n = \frac{H_n^{m,i}}{H_n^{m,i} + H_n^{m,e}}$$

Remarquons que ces définitions n'ont de sens que si  $G_n^{m,i} + G_n^{m,e} \neq 0$  ! Ce cas étant écarté,  $C_n$  et  $S_n$  n'ont aucune raison de varier entre 0 et 1 comme l'affirme Chapman qui a sans aucun doute basé ses propos uniquement sur les caractéristiques du champ magnétique terrestre global ([20]). Pour ce dernier, on a bien effectivement  $C_n$  et  $S_n$  inférieurs à 1 puisque le champ interne est prédominant.

A l'aide de ces transformations, un potentiel s'écrivant sous la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \frac{a}{r} \right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m \quad (1.24)$$

$$+ a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \frac{r}{a} \right)^{n_k} (G_{n_k}^{e,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{e,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m$$

prend l'expression condensée suivante :

$$\boxed{V(r, \theta, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( R_{n_k}^c(r) \widehat{G}_{n_k}^m \cos(m\varphi) + R_{n_k}^s(r) \widehat{H}_{n_k}^m \sin(m\varphi) \right) P_{n_k}^m} \quad (1.25)$$

avec, comme nouveaux coefficients  $\widehat{G}_{n_k}^m$  (respectivement  $\widehat{H}_{n_k}^m$ ) :

$$\widehat{G}_{n_k}^m = G_{n_k}^{m,i} + G_{n_k}^{m,e}$$

Cette transformation deviendra vite appréciable lors des manipulations algébriques parfois lourdes qu'impose l'expression du potentiel.

# Chapitre 2

## Le formalisme de SCHA

Les différentes techniques de modélisations régionales que nous avons évoquées dans les pages d'introduction sont le plus souvent limitées par leur approximation et par leur domaine d'application. Ainsi les modélisations régionales du champ magnétique par décompositions polynômiales ne permettent ni l'utilisation correcte de données prises à différentes altitudes, ni une modélisation correcte sur une région dont la surface ne peut plus être assimilée à un plan tangent à la sphère. Afin de pallier ce problème, Haines ([43]) propose une nouvelle méthode de modélisation régionale **SCHA** (*Spherical Cap Harmonic Analysis*), dont le formalisme mathématique général est très similaire à celui des harmoniques sphériques sur la sphère entière.

Nous présenterons dans un premier temps la technique proposée par Haines, les différentes fonctions impliquées dans le développement ainsi que quelques techniques de calcul permettant leur évaluation. Après avoir proposé diverses améliorations de la méthode et préparé les ingrédients nécessaires au problème inverse, nous verrons quelques exemples d'application de *SCHA* à l'inversion de données synthétiques diversement réparties, pour finalement soulever des problèmes conceptuels propres à la méthode.

### 2.1 Fonctions de base de SCHA

Dans un volume conique délimité par trois surfaces, une inférieure en  $r = a$ , une autre définie en  $r = b$  et une dernière, latérale en  $\theta = \theta_0$  le champ magnétique en l'absence de source s'écrit comme le gradient d'un potentiel  $V$ .

L'équation  $\text{div} \vec{B} = 0$  conduit à la résolution de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

dont la solution générale est donnée dans les préliminaires.

#### 2.1.1 Problème de Sturm-Liouville pour les fonctions de Legendre généralisées

Dans les discussions précédentes, les solutions qui s'expriment en fonction de la variable  $\theta$ , prennent une forme générale  $P_{n_l}^m(\cos \theta)$  de degré  $n_k$  non nécessairement entier, d'où la terminologie de *fonctions de Legendre généralisées*.

Lorsque l'on introduit une ou des conditions aux limites sur les fonctions de Legendre, on impose qu'elles s'adaptent et deviennent propres au problème particulier que l'on cherche à résoudre ; problème défini par une géométrie et des considérations physiques particulières.

De façon générale, les conditions aux limites sont des conditions de Sturm-Liouville régulières en  $\theta_0$ , inférieur à  $\pi$ , qui n'est pas un point singulier de l'équation (1.13), et une condition singulière en  $\theta = 0$ , qui est un point singulier de l'équation (1.13). La condition singulière que l'on impose est que la solution de (1.13) reste bornée en  $\theta = 0$ , ce qui écarte les fonctions de Legendre de deuxième espèce. La condition régulière s'écrit d'une manière générale, pour les fonctions de Legendre de première espèce, par :

$$\alpha P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} + \beta \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} = 0 \quad (2.1)$$

c'est à dire comme une combinaison linéaire de conditions de Dirichlet et de Neumann.

Dans les cas particuliers où  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$  on pose :

$$\frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} = 0 \quad \text{ou} \quad P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} = 0 \quad (2.2)$$

conditions qui répondent respectivement aux définitions de *conditions homogènes* de Neumann et de Dirichlet.

Conformément à la théorie de Sturm-Liouville, l'opérateur  $L_m$  défini par (1.18) est auto-adjoint sur l'espace des fonctions de classe  $C^2$  sur  $[0, \theta_0]$ , qui vérifient les conditions (2.1) ou leurs cas particuliers (2.2), pour le produit scalaire :

$$\langle f(\theta), g(\theta) \rangle_{\mathcal{L}^2([0, \theta_0])} = \int_0^{\theta_0} f(\theta) g(\theta) \sin \theta d\theta$$

Le caractère auto-adjoint de l'opérateur implique des valeurs réelles pour les valeurs propres  $\lambda_k = n_k(n_k + 1)$  dénombrées par l'indice  $k$ . Les fonctions de Legendre, fonctions propres de l'opérateur de Sturm-Liouville associées aux valeurs propres  $\lambda_k$ , forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert  $\mathcal{L}^2([0, \theta_0])$ , muni du produit scalaire défini plus haut.

Ces fonctions adoptent comme expression générale une forme en fonction hypergéométrique (1.17) et s'écrivent, dans le cas de fonctions non normées :

$$P_{n_k}^m = \frac{(-1)^m \Gamma(n_k + m + 1)}{2^m m! \Gamma(n_k - m + 1)} \sin^m \theta F \left( m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.3)$$

Cette définition est la plus largement utilisée dans les ouvrages traitant des harmoniques sphériques ([96],[51]). Il arrive cependant de les rencontrer sans le facteur  $(-1)^m$  ([55]). Ce facteur étant déterminant dans les relations de récurrence auxquelles obéissent les fonctions de Legendre, ce simple changement conduit parfois à de redoutables confusions lorsque la définition n'est pas explicitement mentionnée.

De manière à pouvoir entreprendre des comparaisons pertinentes entre les harmoniques d'ordres  $m$  et de degrés  $n_k$  différents, il est nécessaire de leur attribuer une norme sur l'intervalle de définition. Pour une comparaison directe des harmoniques, on peut préférer une normalisation complète des fonctions. En géophysique, cependant, on choisit traditionnellement la semi-norme de Schmidt ([59]) pour laquelle les fonctions de Legendre s'écrivent toujours comme (1.17) mais avec maintenant le facteur de normalisation :

$$K_{n_k}^m = \frac{2^{1/2}}{2^m m!} \left[ \frac{\Gamma(n_k + m + 1)}{\Gamma(n_k - m + 1)} \right]^{1/2} \quad \text{pour } m \neq 0$$

$$K_{n_k}^0 = 1 \quad \text{pour } m = 0$$

où la fonction  $\Gamma(a)$  est la fonction gamma incomplète, généralisation des fonctions factorielles dans le plan complexe.

Si cette définition en harmoniques sphériques sur la sphère apporte des propriétés intéressantes, notamment dans l'expression finale de la norme, la normalisation de Schmidt sur une calotte perd un peu de son intérêt. De manière à pouvoir restituer la méthodologie de *SCHA* dans les mêmes termes que celle de la modélisation globale et la comparer avec elle, nous adopterons cependant cette normalisation. Il n'est pas superflu de remarquer que la norme définie selon Schmidt induit des facteurs de normalisations de définitions différentes pour  $m = 0$  et  $m \neq 0$ . Néanmoins, cette définition permet lors des calculs de produits scalaires définis dans la partie 3 de faire apparaître une expression générique de la norme au carré indépendante de  $m$ .

### 2.1.2 Intervalle de définition

D'après les développements préliminaires, les fonctions de Legendre sont générées par les fonctions hypergéométriques qui s'écrivent sous la forme :

$$F \left( m - n_k, m + n_k + 1, m + 1, \underbrace{\frac{1 - \cos \theta}{2}}_x \right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sin^{2j} \frac{\theta}{2} \quad (2.4)$$

Le développement en série a un rayon de convergence  $|\sin \frac{\theta}{2}| < 1$ . Le point  $\theta = \pi$  est par conséquent interdit dans ce développement. Or nous avons qualifié l'expression des fonctions de Legendre de *canonique*, donc valable quelles que soient les valeurs de  $n_k$  et de  $m$ . Les points singuliers, sur la coupure, nécessitent donc d'être définis car ils sont physiquement nécessaires. On peut montrer que, si  $n_k$  appartient à  $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ ,  $P_{n_k}^m$  se comporte comme  $\tan^m \frac{\theta}{2}$  quand  $\theta$  tend vers  $\pi$ . Or, l'expression (2.4) est valable également pour les harmoniques sphériques ordinaires qui sont définies sur la sphère entière. Les fonctions de Legendre qui sont définies sur l'intervalle  $[0, \pi]$  sont cependant solutions d'un problème de Sturm-Liouville singulier, dont les conditions aux limites sont les  $P_n^m$  bornées sur  $[0, \pi]$ . Ces conditions excluent les degrés  $n_k$  non entiers. Si  $n_k$  est entier, la série définissant les fonctions hypergéométrique se réduit à une somme finie et la question de convergence est résolue. Dans l'étude des calottes sphériques, nous n'utiliserons que des angles limites  $\theta_0$  inférieurs à  $\pi/2$ , auquel cas la série (2.4) est normalement convergente.

Cette différence de définition nous montre que les fonctions de Legendre définies avec des conditions en limites en  $\theta = \theta_0$  ( $\theta_0 < \pi$ ) n'autorisent pas la continuation du champ à l'extérieur du domaine  $[0, \theta_0]$  de définition car elles entraînent invariablement une singularité au pôle opposé de la calotte sphérique en  $\theta = \pi$ .

### 2.1.3 Représentations des fonctions et des harmoniques

#### Fonctions de Legendre

Nous avons tracé figure (2.1) différentes fonctions de Legendre de degrés  $n_k$  différents pour l'ordre  $m = 1$ . Nous avons pris comme condition à la limite  $\theta_0 = 40^\circ$  la condition homogène de

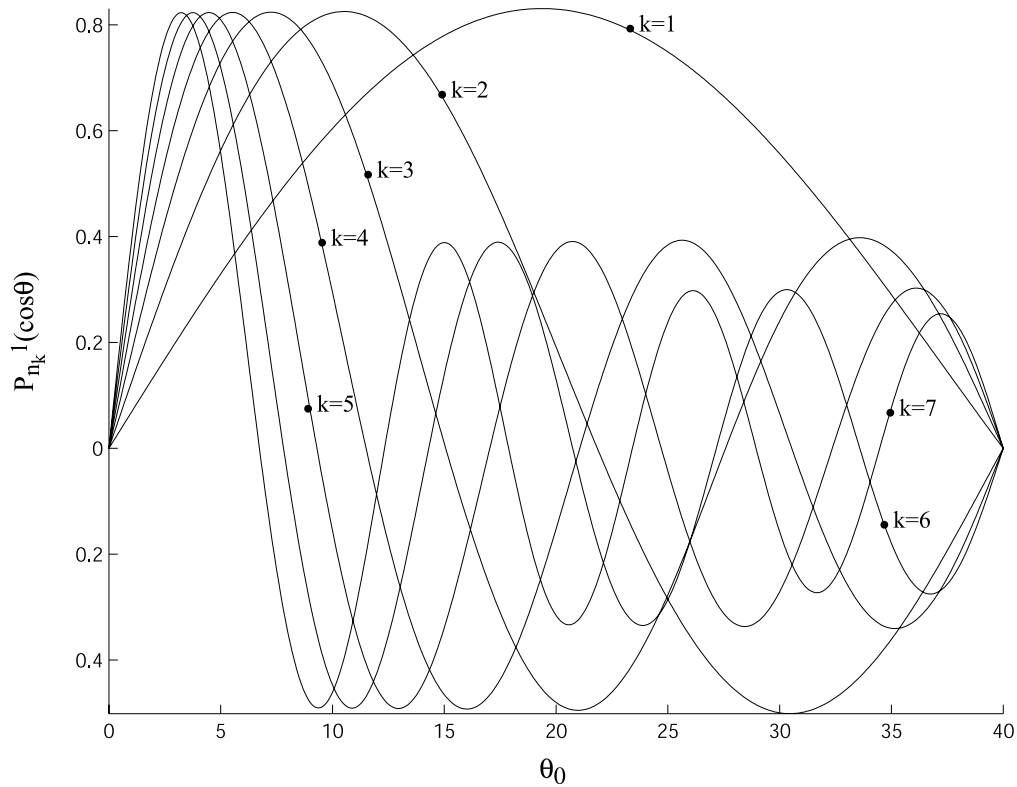


FIG. 2.1 – Fonctions généralisées de Legendre pour  $m = 1$  et  $k = 1..7$ . La figure montre le comportement des fonctions pour les racines  $n_k$  telle que les fonctions soient nulles en  $\theta_0 = 40^\circ$  (condition homogène de Dirichlet).

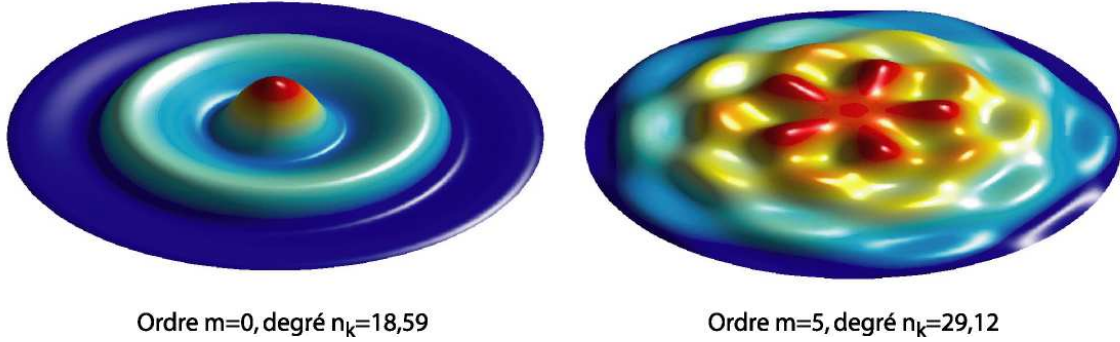


FIG. 2.2 – Représentation des harmoniques sur calotte sphériques pour  $m = 0$  et  $k = 3$  à gauche et  $m = 5$ ,  $k = 5$  à droite. Les harmoniques ont été tracées pour une calotte d'ouverture  $\theta_0 = 40^\circ$ . Le choix de l'ouverture ne modifie pas la forme générale de l'harmonique et on retrouvera le même comportement pour n'importe quelle calotte d'indices  $m$  et  $k$  identiques.

Dirichlet, soit  $P_{n_k}^m(\cos \theta_0) = 0$ . Nous constatons que ces fonctions ont  $k + 1$  racines et qu'elles décomposent l'intervalle  $[0, \theta_0]$  en  $k$  segments. Pour la définition des fonctions de Legendre par une condition homogène de Neumann, on montre qu'il y a  $k + 1$  racines sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$  mais qu'elles décomposent l'intervalle en  $k + 1$  segments. Une remarque digne d'intérêt concerne le caractère pseudo-périodique de ces fonctions, pour  $k$  assez grand, qui justifiera de réintroduire l'idée de *longueur d'onde*.

### Harmoniques

De la même manière que pour les harmoniques sphériques sur la sphère, on peut représenter les harmoniques sur calotte sphériques d'après les définitions précédentes. Une harmonique est un élément des sommes infinies du développement en série représentant le potentiel et se définit par conséquent à  $m$  et  $k$  fixés. On représente sur la figure (2.2) deux harmoniques définies par :

$$Y_{n_k}^{c,m} = \cos(m\varphi) P_{n_k}^m(\theta) \quad (2.5)$$

l'une pour  $m = 0$  et  $k = 3$ . et l'autre pour  $m = 5$  et  $k = 5$ . Sur la figure de gauche, l'harmonique est appelée *harmonique zonale* car elle ne dépend pas de la longitude  $\varphi$ . La figure de droite montre la façon dont l'espace de la calotte est décomposé par les harmoniques sphériques. Remarquons que la décomposition est indépendante de la dimension de la calotte : quelle que soit l'ouverture de l'angle  $\theta_0$  on retrouvera le même schéma pour n'importe quelle calotte sphérique pour des indices  $m$  et  $k$  identiques, malgré des valeurs de  $n_k$  différentes. Les décompositions longitudinales nettement visibles sont en accord avec le découpage de la fonction cosinus pour l'ordre  $m = 5$ , la période étant  $2\pi/5$ . De la même façon, le choix de l'indice  $k = 3$  à gauche et  $k = 5$  à droite permet la décomposition de la colatitude  $\theta$  en  $k$  segments, nous laissant ainsi deviner, d'après la règle précédente, que les harmoniques ont été calculées à partir d'une condition homogène de Neumann. La valeur de  $n_k$  donnée sur la figure correspond à la 5<sup>ième</sup> racine de l'équation  $\left. \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0$ .

Il est important de constater que les éléments de surfaces ainsi créés ne sont pas identiques, ce qui découle tout naturellement de la pseudo-périodicité des fonctions de Legendre.

## 2.2 Les conditions aux limites de Haines

### 2.2.1 Définition du problème

Pour trouver des fonctions permettant de construire une base sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ , Haines propose les conditions aux limites suivantes ([43]) :

$$\begin{aligned} P_{n_p}^m(\cos \theta_0) &= 0 \\ \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta}(\cos \theta_0) &= 0 \end{aligned}$$

qui, avec la condition  $P_n^m(0)$  fini, définissent deux problèmes de Sturm-Liouville distincts. Les indices  $p$  et  $j$  permettent le dénombrement des racines  $n$  solutions des équations et  $p \neq j$ . Dans le formalisme de Haines, ces conditions aux limites sont écrites de telles manière que :

$$P_{n_k}^m(\cos \theta_0) = 0 \text{ pour } k - m \text{ impairs} \quad (2.7a)$$

$$\frac{dP_{n_k}^m}{d\theta}(\cos \theta_0) = 0 \text{ pour } k - m \text{ pairs} \quad (2.7b)$$

Cette dernière notation sera justifiée au chapitre 3 section 3.1.5. Les fonctions de Legendre associées,  $P_{n_k}^m$ , sont caractérisées par des degrés  $n_k(m)$  réels et des ordres  $m$  entiers. L'évaluation de ces fonctions se fera donc d'abord par la recherche des racines  $n_k$  telles que les conditions aux limites soient repérées par la parité de  $k - m$ . Par superposition, les solutions correspondant au mélange de ces deux conditions aux limite permettent de définir un potentiel  $V$  non nul et à dérivée normale également non nulle sur les bords du cône. En effet, (2.7a) implique que  $\frac{dP_{n_k}^m}{d\theta}(\cos \theta_0) \neq 0$  pour  $k - m$  impairs et (2.7b) implique  $P_{n_k}^m(\cos \theta_0) \neq 0$  pour  $k - m$  pairs car il n'est pas possible d'annuler simultanément la fonction et sa dérivée sur le bord  $\theta = \theta_0$  sans que la fonction soit identiquement nulle sur la calotte.

Cette décomposition peu orthodoxe, puisqu'elle conduit à la construction de deux bases orthogonales complètes, permet cependant de contourner la difficulté de la représentation du champ magnétique sur les bords du cône. En effet, en ayant choisit (2.7a) ou (2.7b) uniquement, nous aurions obtenu les composantes  $Y$  et  $Z$  ou la composant  $X$  du champ, définies par (2.9), nulles sur les bords de la calotte. Ceci entraîne une importante discontinuité avec le champ magnétique sur le bord ou à l'extérieur du cône. En règle générale, lorsque les fonctions modélisantes (que l'on assimile au potentiel sur la calotte ou à son gradient) n'ont pas les même conditions aux limites que les fonctions modélisées (le potentiel physique ou son gradient : le champ magnétique), la reconstruction provoque des phénomènes de bords connus sous la terminologie de *phénomènes de Gibbs* qui apparaissent quand la convergence des séries n'est pas uniforme ([47]). Le choix des conditions de Haines permet de réduire ce phénomène mais ne le supprime aucunement car d'une part la convergence des séries n'a pas été démontrée, d'autre part, l'expérience montre que les phénomènes de bords sont bien présents (Habituellement, les utilisateurs de *SCHA* masquent les effets de bords en ne considérant que la zone au centre de la calotte ; on distingue cependant des oscillation irréalistes bien visibles dans les modèles ; par exemple, De Santis ([23]) le montre pour la modélisation du champ sur l'Italie).

### 2.2.2 Implications sur la valeurs des racines $n_k$

Le choix des conditions homogènes sur la fonction de Legendre ou sur sa dérivée entraîne plusieurs propriétés intéressantes. Nous avons vu que l'opérateur  $L_m$  était auto-adjoint, ce qui

implique que les valeurs propres  $\lambda_k = n_k(n_k + 1)$  sont réelles. On peut d'autre part montrer par un raisonnement par l'absurde que les conditions aux limites sur les fonctions de Legendre par (2.7a) ou sur sa dérivée par (2.7b) entraînent nécessairement :

$$\boxed{\lambda_k \geq 0}$$

Or, nous avons écrit dans la section (1.2) que si  $\lambda_k > -1/4$  alors les degrés  $n_k$  des fonctions de Legendre sont réels et nous sommes bien dans ce cas particulier. Soit :

$$\boxed{n_k \in \mathbb{R}}$$

Une première remarque permet de plus d'affirmer que les racines  $n_k$  sont positives ou nulles. Nous pouvons en effet nous appuyer sur les propriétés des fonctions de Legendre et montrer que puisque ([96], Tome II, chap 4, equation 26) :

$$P_{n_k}^m(\theta) = P_{-n_k-1}^m(\theta)$$

alors l'espace des solutions défini par  $n_k \geq 0$  est complet.

De plus, un autre raisonnement par l'absurde, montre que les conditions (2.7a) et (2.7b) ne peuvent être vérifiées que si nous avons en plus la condition :

$$\boxed{n_k \geq m}$$

Les degrés  $n_k$  réels des fonctions de Legendre généralisées sont toujours supérieurs ou égaux aux ordres  $m$ . Remarquons que cette propriété est tout à fait similaire à celle des fonctions de Legendre associées de degrés  $n$  entiers et d'ordres  $m$  entiers ou nul.

Il est tout à fait possible de montrer en particulier que la condition sur la dérivée des fonctions de Legendre (2.7b) entraîne pour  $m = 0$  que la première racine  $n_k = 0$ . Nous garderons en mémoire ce détail important qui intervient dans la seconde partie.

### 2.2.3 Implications sur l'orthogonalité des fonctions de Legendres généralisées.

Les deux ensembles de fonctions  $P_{n_k}^m$  construits par (2.7a) ou (2.7b) forment donc chacun une base complète orthogonale au sens du produit scalaire sur  $\mathcal{L}^2([0, \theta_0])$  de sorte que :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_k}^m P_{n_{k'}}^m \sin \theta d\theta = \delta_{k,k'}$$

à l'intérieur de chaque ensemble, pour  $k - m$  impair ou pour  $k - m$  pair. En revanche, le mélange des deux bases conduit à :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_k}^m P_{n_{k'}}^m \sin \theta d\theta \neq \delta_{k,k'} \text{ pour } k - m \text{ impairs } \underline{\text{et}} \text{ pour } k' - m \text{ pairs.}$$

Par nature, le mélange des conditions aux limites conduit donc à un problème mal posé puisque ni l'orthogonalité des fonctions ni celle des gradients n'est vérifiée. Cette orthogonalité se dégrade d'autant plus que le développement du potentiel est poussé loin puisque chacune des deux bases est complète sur  $\mathcal{L}^2([0, \theta_0])$ .

On trouvera en annexe les formules générales des produits scalaires entre les différents types de fonctions de Legendre, dont quelques unes données par Haines dans son article original de 1985 présentent des erreurs typographiques, par la suite corrigées (par exemple [23]).



### 2.3 Expression du champ magnétique

L'appartenance à l'ensemble  $\mathbb{R}$  des degrés  $n_k$  impose la forme de la fonction radiale. Puisque de plus  $\lambda > -1/4$  on trouve d'après (1.9) que :

$$R(r) = A \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k} + B \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1}$$

D'où l'expression du potentiel solution :

$$\begin{aligned} V = & a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m}(t) \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m}(t) \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m(\theta) \\ & + a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k} (G_{n_k}^{e,m}(t) \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{e,m}(t) \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m(\theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

où les coefficients de Gauss ont été écrits de manière générale comme dépendants du temps et où l'on a incorporé les coefficients de Gauss dits *externes* repérés par l'indice  $e$ . Pour les applications ultérieures de la première partie, sauf mention contraire, on considérera uniquement le cas statique ainsi que les coefficients de Gauss dits *internes*.

Le champ magnétique interne correspondant, gradient du potentiel  $V$ , s'écrit donc :

$$B_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} \frac{dP_{n_k(m)}^m}{d\theta} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) \quad (2.9a)$$

$$B_y = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} \frac{m}{\sin\theta} P_{n_k(m)}^m (G_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi)) \quad (2.9b)$$

$$B_z = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k(m)+2} (n_k(m) + 1) P_{n_k(m)}^m (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) \quad (2.9c)$$

Les développements en série donnés par Haines diffèrent dans leur indexation avec ceux que nous avons utilisés en (1.24). Rappelons que l'indice  $k$  permet avant tout le dénombrement des racines réelles  $n_k$  mais ne se confond pas avec elles en dehors du cas particulier des fonctions de Legendre associées à degrés entiers. Dans (1.24),  $k$  représente directement le numéro de la racine alors que dans (2.9) le numéro de la racine est  $k - m$ . Haines utilise une indexation qui rappelle celle employée en harmoniques sphériques. Ceci n'a absolument aucune implication sur le développement en série.

Dans la pratique, les séries infinies sont tronquées à un indice maximum  $K_{max}$  pour tout  $m$  et les coefficients de Gauss  $H_{n_k}^{i,m}$  sont indéterminés pour  $m = 0$ . Ce formalisme conduit à la définition et à la recherche dans le cas d'un problème inverse de  $N$  coefficients de Gauss ([43]) avec :

$$N = (K_{max} + 1)^2 \quad (2.10)$$

## Chapitre 3

# Considérations numériques

Les fonctions de Legendre présentent la caractéristique de devoir être évaluées numériquement plutôt que d'être calculées au moyen d'expressions analytiques. En effet, les fonctions de Legendre sont générées par les fonctions hypergéométriques qui s'expriment en termes de séries infinies. La difficulté est de pouvoir évaluer ces fonctions le plus précisément afin, bien sûr, de les représenter mais également de calculer numériquement leurs degrés  $n_k$  le plus exactement possible. Plusieurs voies de calcul sont à notre disposition, mettant en jeu des techniques numériques plus ou moins robustes et raffinées. Nous débuterons cette section par la représentation la plus simple qui consiste à calculer directement tous les termes de la série hypergéométrique. Nous nous éloignerons de plus en plus de cette solution pour aboutir à un algorithme stable et précis dont l'efficacité nous a permis de mieux comprendre la méthode *SCHA* ainsi que de faire un net progrès dans la représentation du champ sur une calotte sphérique. Notons toutefois que la liste qui suit ne s'applique qu'à la représentation des fonctions de Legendre en termes de fonctions hypergéométriques. Il n'est pas exclu que d'autres représentations, comme celles qui utilisent les formes intégrales, puissent offrir le meilleur compromis selon les cas de figures ([96], [51]).

### 3.1 Les fonctions de Legendre et leurs racines

Avant d'exposer les propriétés numériques des fonctions de Legendre et les moyens de les représenter nous devons rompre pour un temps la structure logique de l'exposé et mettre en lumière certaines particularités susceptibles de perturber l'évaluation des fonctions. Nous supposons donc pour l'instant que les fonctions de Legendre sont bien évaluées et que par conséquent leur racines  $n_k$  trouvées numériquement ont des valeurs satisfaisantes. Le point qui nous intéresse surtout ici et duquel nous tirerons une certains nombre d'explications lorsque nous évoquerons les difficultés de la modélisation par *SCHA*, concerne la variation des racines  $n_k$  en fonction de l'ouverture de l'angle  $\theta_0$ . La figure (3.1) montre l'évolution de la valeur  $n_k(m)$ , pour  $m = 1$ , pour des indices  $k$  tels que  $k - m$  soient pairs et pour des ouvertures d'angles de  $\theta_0 = 5^\circ$  à  $\theta_0 = 90^\circ$ .

Le constat est relativement simple : plus la calotte est de taille modeste, plus les racines  $n_k$  prennent des valeurs importantes. Nous verrons plus bas une expression analytique qui démontre ce comportement. Cette caractéristique aura des répercussions cruciales sur la suite, notamment pour la modélisation sur une petite calotte et le prolongement des modèles en altitude. Les racines sont également directement dépendantes de  $m$ . Au couple  $(k, \theta_0)$  fixé correspondent des valeurs de  $n_k$  croissantes avec  $m$ . Ainsi, plus que par sa géométrie, une calotte sera considérée comme petite lorsque les racines sont grandes, et large lorsque les racines sont petites. Typiquement,

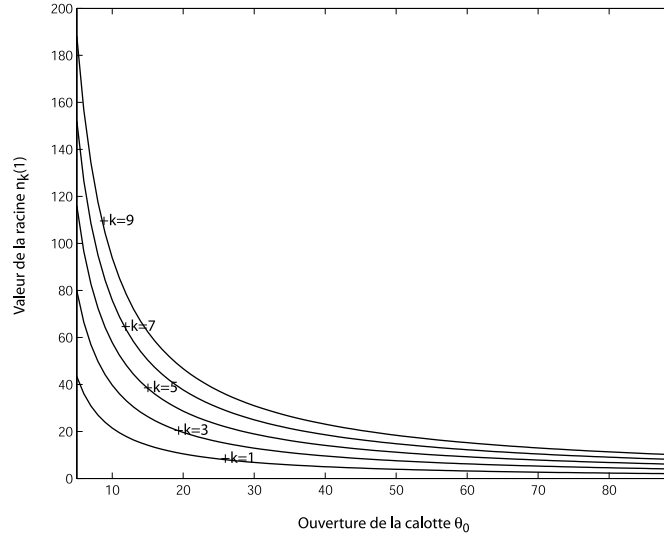


FIG. 3.1 – Variation des degrés  $n_k(m)$  pour  $m = 1$  satisfaisant les conditions aux limites (2.7b). La valeur des racines décroît quand l'ouverture  $\theta_0$  de la calotte augmente.

une calotte d'ouverture  $\theta_0 = 25^\circ$  reste petite alors qu'elle recouvre l'ensemble de l'Europe occidentale. Notons que sur la figure (3.1), la décroissance des  $n_k$  tend vers des valeurs entières lorsque  $\theta$  est au voisinage de  $\pi/2$ . Pour  $\theta = \pi/2$  l'indice  $k$  se confond avec la valeur du degré  $n_k$ ; ainsi pour les indices  $k - m$  pairs ou impaires on a  $n_k = k$  indépendant de  $m$ . Cette particularité peut sembler intéressante car la décomposition de Haines par utilisation des deux ensembles de bases de fonction permet de retrouver les harmoniques sphériques ordinaires alors que le choix d'une seule des deux bases n'aboutit qu'aux degrés  $n$  pairs ou  $n$  impairs selon le choix de la condition à la limite.

### 3.1.1 Le calcul en série

Prenons l'expression (2.4) de la série hypergéométrique avec les coefficients :

$$a_0 = 1 \quad (3.1)$$

$$a_{j+1} = \underbrace{\frac{(j+m-1)(j+m) - n_l(n_l+1)}{j(j+m)}}_{F_j} a_j \quad (3.2)$$

A notre connaissance, le calcul direct du développement en série, associé aux relations de récurrences que vérifient les fonctions de Legendre, est à la base de l'algorithme proposé par Haines ([46]) et a été repris par la suite pour la réalisation des modèles régionaux par *SCHA*. Toute la difficulté réside dans l'estimation de la fonction hypergéométrique.

Selon les valeurs de  $m$ , souvent petites et de  $n_k$  souvent grandes comparé à  $m$ , les termes  $a_j$  de la récurrence sont positifs ou négatifs. La série ainsi calculée est constituée d'arguments récursifs  $a_j$  de signes alternés de magnitudes croissantes jusqu'à ce que  $j$  soit suffisamment grand pour que le facteur de la récurrence soit tel que dans (2.4) :

$$|F_j * x| \leq 1 \quad (3.3)$$

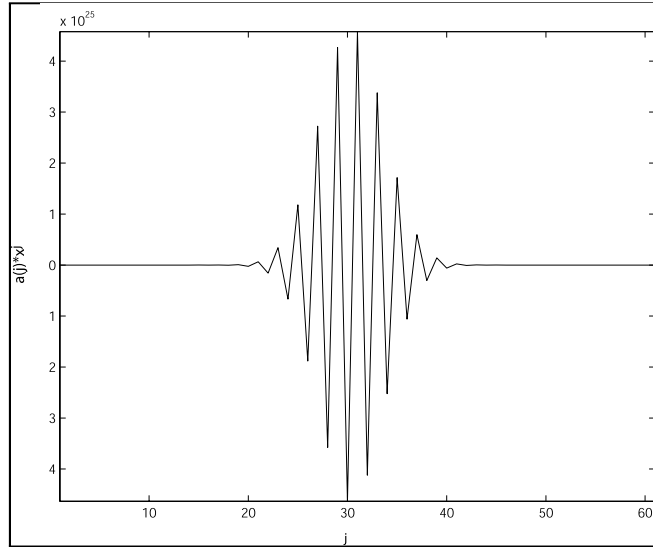


FIG. 3.2 – Les termes  $a_j x^j$  de la série exhibent des valeurs alternées importantes qui se compensent. Lorsque les degrés  $n_k$  et  $m$ , prennent des valeurs importantes (cas des petites calottes) cette compensation devient numériquement instable. Ici on a tracé les termes de la série pour une calotte d’ouverture  $\theta_0 = 25^\circ$ ,  $m = 1$  et  $n_{k(1)} = 51,664$  en  $\theta = \theta_0$ . Ce choix correspondant à la condition au limite (2.7a), la fonction hypergéométrique prend comme valeur théorique  $F(\theta_0) = 0$  alors que les termes de la série sont très importants.

Sur la figure (3.2) nous avons tracé la série des arguments de la série hypergéométrique pour une calotte de  $25^\circ$  avec  $m = 1$  et  $n_k(1) \simeq 55.2$ . On vérifie sur cette figure que la valeur des termes de la série augmente très rapidement et atteint des valeurs très importantes. Pourtant, chaque terme de la série se compense avec le suivant et la fonction hypergéométrique correspondante prend des valeurs bien plus modestes en général. Ici, en particulier,  $F \sim 10^{-9}$ , car nous avons choisi  $n_l(m, \theta_0)$  tel que la condition (2.7a) soit vérifiée.

Il existe un autre problème qui régit à lui seul la façon dont la série numérique converge. La convergence de la série peut dans certains cas requérir un nombre très important de récurrences  $j$  si  $n_k$  prend des valeurs moyennement importantes (par exemple  $n_k \sim 100$ ) avec en plus des valeurs de  $\theta$  importantes car non seulement (3.3) sera réalisée plus tardivement mais en plus  $x^j$  dans (2.4) converge plus lentement vers 0. On entrevoit dans ces problèmes numériques la difficulté croissante de représentation des fonctions de Legendre à mesure que l’on s’approche du bord de la calotte. **Or, c’est au bord du cône, en  $\theta = \theta_0$ , que la fonction doit être la mieux évaluée pour la détermination de ses racines  $n_k$ .**

Dans les modèles SCHA, on trouve des développements souvent restreints qui suggèrent que certains auteurs ont été confrontés au problème. Haines ([44]) utilise le développement le plus important rencontré dans la littérature traitant des harmoniques sur calotte. Mais le choix d’une calotte d’ouverture  $\theta_0 = 50^\circ$  entraîne que le plus grand degré  $n_k$  obtenu pour un développement  $K_{max} = 22$  est de 36,66. C’est une valeur faible de  $n_k$  qui ne pose pas de problème numérique particulier. Pour les autres modèles qui s’appliquent à des régions de la taille de l’Europe, on trouve au plus  $K_{max} = 15$  ([27]) ; pour des régions plus petites, on ne dépasse pas  $K_{max} = 10$  ([23]).

Compte tenu des considérations précédentes sur la variation des valeurs de  $n_k$  avec l'ouverture de l'angle  $\theta_0$ , ce problème est justement principalement accentué pour les très petites calottes ( $\theta_0 \leq 10$ ). Si notre objectif est de modéliser le champ sur la France ( $\theta_0 \sim 5^\circ$ ), le principe même du développement en série ne permettra même pas de développer les séries jusqu'à  $K_{max} = 10$ . Et, contrairement aux affirmations de Hwang et Chen ([55]), le calcul des fonctions hypergéométriques seules (sans constante de normalisation) pose également des problèmes numériques. Ces instabilités engendrent une dégradation des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Legendre, une non-vérification des conditions aux limites imposées et par conséquent des valeurs erronées des degrés  $n_k$ . L'idée est donc de réduire le nombre de récurrences tout en contournant le problème de la somme d'une série alternée.

### 3.1.2 La récurrence de Clenshaw

#### Formalisme

La fonction hypergéométrique est un cas idéal d'application de *la formule de récurrence de Clenshaw* ([94]) qui est un procédé dévolu à l'évaluation de fonctions développées en séries dont les termes sont récursifs..

La série (2.4) s'écrit aussi sous sa forme partielle, tronquée à  $N$ , comme :

$$F(x) = \sum_{k=0}^N c_k F_k(x)$$

avec  $c_k = 1$  et  $F_k(x) = a_k x^k$  qui obéit à la récurrence :

$$F_{k+1}(x) = \alpha(k, x) F_k(x) \quad (3.4)$$

En introduisant la suite intermédiaire suivante :

$$\begin{aligned} y_{N+2} &= y_{N+1} = 0 \\ y_k &= a(k, x) y_{k+1} + c_k \quad k = 1, \dots, N \end{aligned}$$

avec :

$$a(k, x) = \frac{(k+m)(k+m+1) - n_k(n_k+1)}{(k+1)(k+1+m)} x \quad (3.5)$$

on montre que la série hypergéométrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= y_n(F_n(x) - \alpha(n-1, x)F_{n-1}(x)) \\ &\quad + y_{n-1}(F_{n-1}(x) - \alpha(n-2, x)F_{n-2}(x)) \\ &\quad \dots \\ &\quad + y_2(F_2(x) - \alpha(1, x)F_1(x)) \\ &\quad + y_1 F_1(x) + F_0(x) \end{aligned}$$

ce qui, en vertu de (3.4), se réduit à :

$$\boxed{F(x) = y_1 F_1(x) + F_0(x)} \quad (3.6)$$

On a ainsi réduit la somme initiale à deux termes uniquement. Nous sommes à présent sûrs de l'inexistence de mauvaises compensations qui perturbent l'évaluation de la fonction hypergéométrique. Notons cependant que cette habile représentation ne nous met pas à l'abri

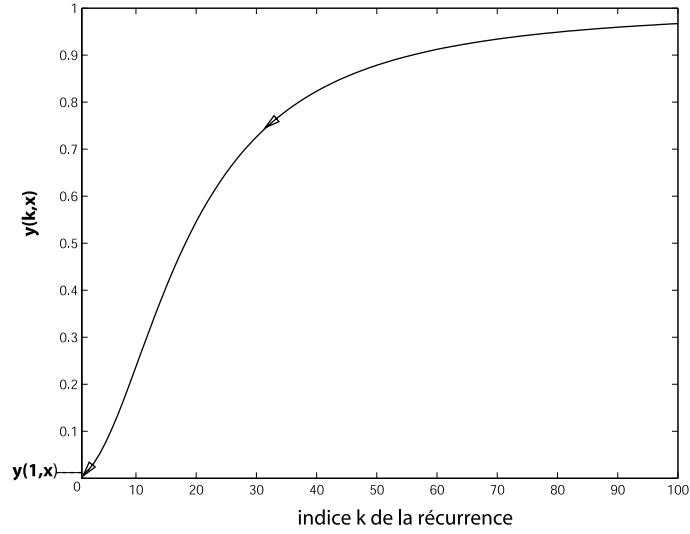


FIG. 3.3 – Evolution des termes de la récurrence descendantes  $a(k, x)$  intervenant dans le calcul de la récurrence de Clenshaw pour la même fonction hypergéométrique que celle calculée par le développement en série (figure 3.2). La valeur des coefficients tend de façon monotone vers  $a(1, x)$  avec des valeurs très satisfaisante. La fonction hypergéométrique correspondante est nulle en  $\theta = \theta_0$ .

des sempiternels *overflow* ou *underflow* numériques provenant de la multiplication de termes, l'un très grand, l'autre très petit.

On trouve en particulier :

$$F_0(x) = c_0 = 1 \quad (3.7)$$

$$F_1(x) = c_1 x = \frac{m(m+1) - n_k(n_k+1)}{m+1} x \quad (3.8)$$

Puisque la formule de Clenshaw que nous avons définie est descendante, le terme à estimer maintenant est le facteur  $y_1$ . Il sera le dernier terme de la récurrence descendante des  $y_k$ , calculés par l'intermédiaire de  $a(k, x)$  par (3.5). Ce même formalisme est utilisable pour le calcul des dérivées des fonctions de Legendre. En règle générale, la récurrence de Clenshaw peut également être utilisée pour les formules de récurrences auxquelles obéissent les fonctions de Legendre associées et semble offrir de bons résultats pour les harmoniques sphériques de degrés  $n$  et d'ordres  $m$  entiers ([53]).

## Applications

La figure (3.3) montre la variation des arguments récursifs  $y(k, x)$  qui déterminent  $y_1$  et par conséquent la valeur de la fonction hypergéométrique. Nous constatons que les calculs intermédiaires sont stables et ne suggèrent pas, étant donné leur magnitude, l'existence de problèmes numériques particuliers ; cette méthode accélère la convergence du calcul de la série. La fonction hypergéométrique calculée par (3.6), et dont les argument  $n_k$ ,  $m$  et  $\theta$  ont été choisis de manière similaire à la figure (3.2) du développement en série directe, est bien nulle au bord du cône ( $F \sim 10^{-15}$ ).

Malheureusement, même si ce procédé apporte une nette amélioration dans l'évaluation des fonctions hypergéométriques, et par conséquent dans celle des fonctions de Legendre, il n'échappe pas à la limitation numérique inhérente au produit d'un grand nombre par un très petit nombre. Dans cette technique, c'est moins le problème d'*overflow* (même s'il n'est pas exclu) que le problème d'*underflow* qui pose problème, notamment pour les petites calottes pour lesquelles  $x^j$  reste difficile à calculer. Les manifestations de ce phénomène sont plus discrètes que lors du calcul en série car d'une part il est retardé mais surtout il est moins important. Il se caractérise par de petites oscillations lors de l'évaluation des fonctions sur les bords du domaine (figure 3.4).

Une solution souvent évoquée dans les ouvrages d'analyse numérique porte sur le choix du sens, ascendant ou descendant, de la récurrence, souvent décisif pour une bonne convergence. Or, dans ce cas, les récurrences ascendantes et descendantes deviennent toutes deux instables lorsque  $\theta \rightarrow \theta_0$  pour des degrés élevés, car le problème ici est lié à la représentation des nombres en machine, et non uniquement à la façon dont converge la série.

Nous aurons l'occasion de vérifier plus loin que les limitations imposées à l'indice  $K_{max}$  conduit à des développements encore insuffisants pour représenter correctement un champ magnétique, même résiduel (dont on a retranché une tendance générale); cette remarque s'applique particulièrement pour de petites calottes sphériques. Par conséquent, le calcul des fonctions de Legendre doit être abouti le plus précisément possible et offrir une stabilité suffisamment confortable pour que nous puissions être en mesure de tester à loisir un grand nombre de configurations différentes, même extrêmes. Or, il n'est pas rare avec les développements précédents d'être confronté au problème d'évaluation des fonctions de Legendre avant même que le problème inverse devienne numériquement singulier.

### 3.1.3 Les développements asymptotiques

Lorsque l'on manipule les fonctions dites *spéciales*, on évoque inévitablement les développements asymptotiques, qui ont le mérite de transformer les séries infinies en fonctions plus élémentaires qui ne comportent qu'un nombre limité de termes.

Nous avons donc tenté de déterminer une méthode empirique permettant de basculer de la méthode de Clenshaw à l'approximation asymptotique dans les intervalles de  $\theta$  et pour des valeurs des couples  $(m, n_k)$  qui montrent des irrégularités numériques. En effet, si la méthode de Clenshaw est limitée aux degrés  $n_k$  pas trop grand devant  $m$ , l'approximation asymptotique calculée pour  $m < n_k$  est d'autant plus précise que  $m$  est petit devant  $n_k$ . Pour de petites calottes, cette approximation semble, à première vue, bien adaptée. Il est donc intéressant de pouvoir utiliser ces deux possibilités complémentaires.

Hobson ([51]) montre que la fonction de Legendre non normalisée peut être approximée à l'ordre 2 par :

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma(n+m-1)}{\Gamma(n-1/2)} \left\{ \frac{\cos[(n+1/2)\theta - \pi/4 + m\pi/2]}{(2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{m^2 - 1/4}{2n \sin \theta} \cos[(n+3/2)\theta - 3\pi/4 + m\pi/2] \right\} + 0 \left( \frac{1}{n^{5/2}} \right) \quad (3.9)$$

Alterner méthode de Clenshaw et méthode asymptotique semblait être une solution attrayante, qui de plus était encouragée par bon nombre d'ouvrages traitant des fonctions de Legendre ([96], [51], [113]). Malheureusement, il ne semble pas exister de méthode empirique satisfaisante nous permettant de trouver une bonne transition entre les deux méthodes. On se trouve inévitablement confronté à des sauts dans le raccordement. Pour la fonction de Legendre,

mais surtout pour la représentation de sa dérivée, cette particularité est bien évidemment dramatique. D'autre part, on constate que la formulation asymptotique entraîne des problèmes de représentation des fonctions de Legendre en amplitude mais provoque également un léger déphasage. Ce comportement à lui seul justifie l'abandon de la technique puisqu'il interfère avec le bon déroulement de la recherche des racines  $n_k$ .

### 3.1.4 Un algorithme stable

Après une longue étude sur le calcul des séries, nous avons finalement jeté notre dévolu sur une routine proposée par F.Olver et J.M Smith ([91]) et distribuée librement. La puissance du programme repose sur l'exploitation intensive des propriétés de récurrence des fonctions de Legendre mais également sur un traitement systématique des symptômes d'*overflow* et d'*underflow*. Il devient ainsi possible de représenter les fonctions de Legendre pour des couples  $n_k$  et  $m$  élevés. Le procédé est dans son concept relativement simple mais hautement efficace ; chaque nombre  $\alpha$  dans un calcul peut s'écrire comme le produit d'un entier  $r$  par une exponentielle  $e^\omega$ , soit  $\alpha = re^\omega$ . Comme cette décomposition n'est pas unique, le programme s'adapte à la précision de la machine sur laquelle il est utilisé.

Le produit de  $\alpha$  avec un autre nombre quelconque  $\beta = r'e^{\omega'}$  sera convertit en produit de  $rr'$  et en somme de  $\omega + \omega'$ , le facteur exponentiel étant transparent dans le calcul et n'intervenant qu'en fin d'évaluation. Le prix à payer est donc un doublement du temps de calcul mais offre une amélioration sans précédent de l'évaluation des fonctions de Legendre pour un vaste intervalle des trois paramètres  $(n_k, m, \theta)$ . Remarquons que la définition des fonctions de Legendre d'Olver et Smith (qu'ils appellent les *fonctions de Ferrer*) correspond à la définition des fonctions de Legendre que nous avons adoptée (eq. 2.3). L'algorithme permet également d'évaluer les fonctions de Legendre de deuxième espèce, les fonctions  $Q_n^m(\cos\theta)$ .

La figure (3.4) met en parallèle les différentes méthodes que nous avons essayées pour le cas d'une fonction de Legendre critique. En haut de la figure, l'évaluation par la récurrence de Clenshaw devient instable, les oscillations aléatoires que l'on observe sont symptomatiques d'un problème d'*underflow* (remarquons que le problème d'*underflow* se transforme très vite en *overflow* étant donné la mauvaise estimation du terme qui assure la convergence). Nous avons construit les fonctions de telle manière qu'elles soient nulles en  $\theta_0 = 5^\circ$  et on vérifie que la récurrence de Clenshaw échoue et ne respecte pas la condition à la limite (2.7a). La représentation du centre illustre la tentative de raccordement entre la méthode de Clenshaw et la représentation asymptotique de la fonction. La zone ombrée correspond à l'angle  $\theta$  pour lequel le raccordement est effectué mais matérialise également la zone de discontinuité de la fonction. Enfin, la représentation du bas par l'algorithme d'Olver et Smith adopte un comportement que nous n'avions pas réussi à atteindre par les autres méthodes et achève de nous convaincre que cette méthode est bien la plus fiable. A notre connaissance, la proposition de cette routine pour la méthode SCHA ([105]) a déjà apporté de nettes améliorations dans les calculs de champs magnétiques régionaux par la technique SCHA (De Santis et Gaya-Pique, communication personnelle).

### 3.1.5 Vérifications numériques et conclusions

Nous disposons d'un moyen pratique de vérifier que l'algorithme d'Olver et Smith fonctionne correctement. En effet, lorsque  $m \ll n_k$  nous pouvons utiliser l'approximation asymptotique (3.9) à l'ordre 1. La condition  $P_{n_l}^m(\cos\theta_0) = 0$  conduit donc à :

$$n_l \sim \left( (2l + 1) - m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2\theta_0} - \frac{1}{2} \text{ avec } l \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$



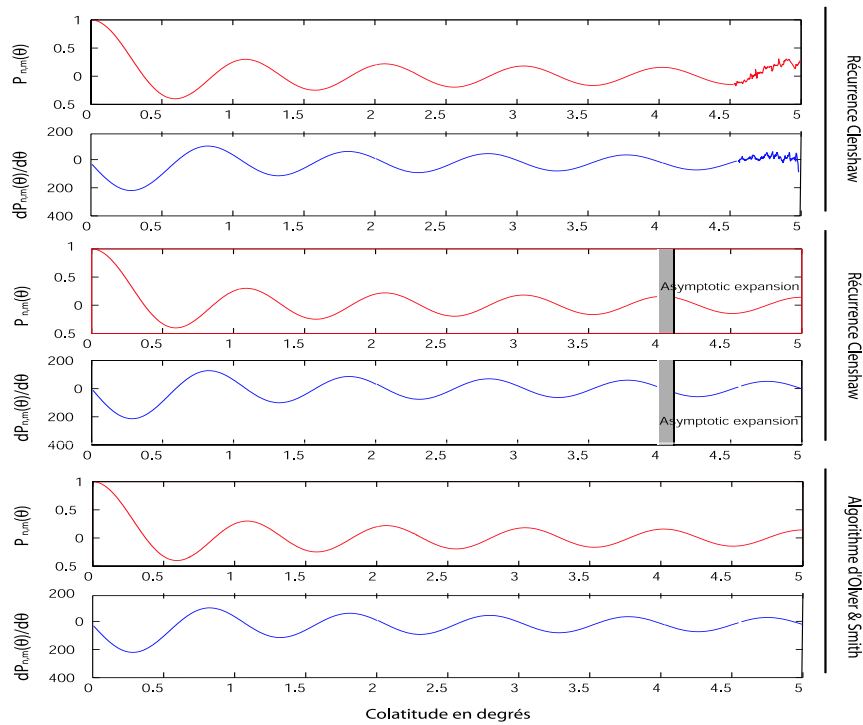


FIG. 3.4 – Différentes méthode d'évaluation des fonctions de Legendre sont représentées entre  $\theta = 0$  et  $\theta = 5^\circ$  pour l'ordre  $m = 0$  et le degré  $n_k = 206, 7$ . En haut l'accélération de la convergence de la série hypergéométrique par la méthode de Clenshaw est insuffisante à l'approche des bords de la calotte en  $\theta = 5^\circ$  ; au centre la recherche du compromis entre Clenshaw et développement asymptotique présente une discontinuité (et un léger déphasage) dans la zone grise ; enfin, en bas, on illustre l'efficacité de la méthode d'Olver et Smith pour le calcul stable des fonctions de Legendre généralisées.

De plus, comme :

$$n_l + 1/2 > 0 \text{ on a } (2l + 1) - m > -1/2$$

De la même manière, la condition  $\left. \frac{dP_{n_j}^m(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0$  conduit à une expression approchée de la racine  $n_j$  :

$$n_j \sim \left( 2j - m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2\theta_0} - \frac{1}{2} \text{ avec } j \in \mathbb{N} \quad (3.11)$$

avec, comme conséquence :

$$2j - m > -1/2$$

Les expressions (3.10) et (3.11) justifient la notation de Haines qui classe les fonctions de Legendre par (2.7a) ou par (2.7b) selon la parité d'un unique indice  $k$ . Les racines prennent donc l'expression suivante :

$$\boxed{n_k \sim \left( k + \frac{1}{2} - m \right) \frac{\pi}{2\theta_0} - \frac{1}{2}, k \in \mathbb{N}} \quad (3.12)$$

En outre, cet indice est tel que :

$$\boxed{k - m > -1/2}$$

donc toujours supérieur ou égal à  $m$ .

Ainsi, si nous nous plaçons dans le cas  $n_k \gg m$ , cela implique que, soit  $\pi \gg \theta_0$ , soit  $k \gg m$ . Le premier cas n'a évidemment que peu de sens mais il montre que le domaine de validité de l'expression asymptotique dépend également de la géométrie de la calotte. Le tableau (3.1) montre une bonne adéquation entre la racine calculée numériquement et celle évaluée par (3.12) pour un indice  $k = 7$  dans l'indexation de Haines (soit la 4<sup>ème</sup> racine). Quoiqu'il en soit, pour des indices  $k \gg m$ , les racines  $n_k$  deviennent indépendantes de  $m$ ; ces nombres peuvent donc être négligés dans (3.12). Cette propriété est particulièrement intéressante lorsque l'on veut associer à la fonction de Legendre une longueur d'onde. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

D'un point de vue numérique, nous sommes en droit de penser, sur la base de nos expériences précédentes, que la recherche des racines devient laborieuse à mesure que le développement augmente; certains problèmes numériques passent peut être inaperçus. Nous avons donc testé la recherche des racines pour des indices  $k$  jusqu'à 399. Des développements à ces ordres sont en pratique peu utilisés mais ils nous assurent du bon fonctionnement des procédures aux degrés inférieurs. Le tableau (3.1) présente des racines calculées pour une calotte d'ouverture  $\theta_0 = 5^\circ$  pour des indices  $k = 397$  et  $k = 399$  et leur comparaison avec leur évaluation par (3.12). La corrélation est excellente et nous disposons donc d'un algorithme d'évaluation des fonctions de Legendre (*Xdlegf*, [91]) qui couplée à une procédure de recherche des racines (*Zbrent*, [94]) nous assure le calcul très stable des fonctions généralisées.

Plusieurs remarques de détail peuvent être déduites de l'expression asymptotique. L'expression (3.12) nous permet de disposer d'un outil de diagnostic simple et efficace pour l'évaluation et la vérification des racines. En raison de la parité de  $k$ , on trouve en effet que :

<b>m=0</b>	<b>n<sub>k</sub></b>	<b>n<sub>k,asym</sub></b>	<b>k</b>
	134.62	134.50	7
		...	...
	7154.50	7154.50	397
	7190.50	7190.50	399

TAB. 3.1 – Vérification de la cohérence entre les racines calculées numériquement et l’approximation asymptotique.

$$n_{k+2} = n_k + \Delta_k \quad (3.13)$$

$$\Delta_k = \pi/\theta_0 \quad (3.14)$$

Pour  $\theta_0 = 5^\circ$ ,  $\Delta_k = 36$  et le tableau montre indéniablement que l’on retrouve cet intervalle qui témoigne du bon déroulement de la recherche des racines réelles. Les racines sont donc asymptotiquement régulièrement espacées, le pas étant inversement proportionnel à l’ouverture de la calotte.

Ce dernier point établit une règle mathématique de la variation des degrés  $n_k$  en fonction de  $\theta_0$  que nous avons trouvée de manière empirique (figure 3.1). On ne manquera pas à ce propos de remarquer qu’en  $\theta_0 = \pi/2$  on retrouve  $n_k \approx k$  rappelant de fait que les degrés tendent vers un nombre entier.

### 3.2 Le concept de longueur d’onde

Le terme de longueur d’onde manque cruellement de définition précise et l’évocation de longueur paraît même à première vue peu adaptée à la description d’une surface et des surfaces sphériques en générale. Plus que l’idée de longueur d’onde, il semble que le concept de surface d’onde soit plus pertinent.

Lorsque nous comparons le champ exprimé sur la base des harmoniques sphériques et le champ exprimé localement, une nouvelle difficulté vient se juxtaposer à la précédente ; si, en harmoniques sphériques ordinaires, une surface de la dimension d’une petite calotte correspond à ce que l’on qualifie de *petite* surface d’onde pouvant caractériser des anomalies crustales, dans le référentiel de la calotte, celle-ci représente la surface d’onde la plus élevée. Nous sommes donc de plus confrontés à un problème d’appréciation relative de la précision maximale offerte par la représentation choisie.

Nous parlerons donc de surface d’onde pour caractériser les dimensions minimales du champ magnétique que l’on cherche à décrire, et de longueur d’onde lorsque nous étudierons le problème par rapport à une seule des variables,  $\theta$  ou  $\varphi$ . La question étant de savoir si dans un cas asymptotique les deux définitions peuvent se déduire l’une de l’autre.

En raison de la pseudo-périodicité des fonctions de Legendre généralisées, que ce soit en harmoniques sphériques ordinaires ou en harmoniques sphériques sur calotte, il n’existe pas de longueur d’onde unique associée à un ordre  $m$  mais une succession de longueurs. Chaque fonction  $P_{n_k}^m$  décompose l’intervalle  $[0, \theta_0]$  en autant de segments de tailles différents qu’il y a de racines  $n_k$ .

Nous avons vu que nous pouvions approcher la fonction à l’ordre 1 par son développement asymptotique (3.9). Si notre développement nous permet de nous mettre dans la configuration

d'un développement asymptotique, c'est uniquement dans ce cas que nous pourrions définir une longueur d'onde unique.

Cette idée est à la base de la longueur d'onde définie par Haines et repose sur l'emploi de la formule (3.12), par une analogie avec la longueur d'onde  $\omega_{\min}$  minimale définie par Bullard ([16]) pour les harmoniques sphériques dans le cas où le degré entier  $n \gg m$ . La formule :

$$\lambda_{\min} \sim 360^\circ/n \quad (3.15)$$

conduit pour les harmoniques sphériques sur calotte à la simple définition ([43]) :

$$\lambda_{\min} \sim 360^\circ/n_{K \max} \quad (3.16)$$

$\omega_{\min}$  étant la longueur d'onde angulaire minimale inversement proportionnelle au degré  $n_{K \max}$  le plus important qui intervient dans le développement estimé soit à partir de (3.12) soit calculé numériquement.

Nous pouvons donc formuler une longueur mais dont la signification reste obscure. Nous ne sommes pas en mesure de dire à quoi elle correspond et quelle est son éventuelle relation avec une surface minimale à peu près standard sur toute la calotte. Nous nous proposons donc de revoir la définition de longueur d'onde.

### 3.2.1 Longueur d'onde associée à $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$

Ecrivons l'harmonique  $Y_{n_k}^{c,m}$  (2.5) comme la partie réelle de la forme complexe  $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$ , soit :

$$Y_{n_k}^{c,m} = \Re(P_{n_k}^m e^{im\varphi}) \quad (3.17)$$

et cherchons la surface d'onde associée à cet élément. Le raisonnement que nous proposons est très largement inspiré des considérations sur la longueur d'onde de Backus ([7]).

Cette discussion nécessite d'établir en premier lieu une expression asymptotique des fonctions de Legendre généralisées pour  $n_k \gg m$  moins restrictive que l'expression (3.9).

#### Nouvelle expression asymptotique des fonctions $P_{n_k}^m$

Rappelons que les fonctions de Legendre  $P_{n_k}^m$  sont solutions de l'équation de Legendre (1.4) :

$$\boxed{\frac{d^2 P_{n_k}^m(\theta)}{d^2 \theta} + \cot \theta \frac{d P_{n_k}^m(\theta)}{d \theta} + P_{n_k}^m \left( n_k(n_k + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0} \quad (3.18)$$

et que cette équation est en particulier singulière pour  $\theta = 0$ .

Pour suivre rigoureusement la méthodologie de Backus ([7]), nous exprimons cette dernière équation en fonction de  $\lambda$  défini par :

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta - \lambda_0$$

avec de plus  $\lambda_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$  et  $\theta_0$  l'ouverture de la calotte sphérique.

En posant d'autre part :

$$L = \sqrt{n_k(n_k + 1)} \quad (3.19)$$

$$\lambda_c = \cos^{-1}(m/L) \quad (3.20)$$

$$f(\lambda) = 1 - \frac{\cos^2 \lambda_c}{\cos^2(\lambda + \lambda_0)} \quad (3.21)$$

on trouve que l'équation (3.18) s'écrit maintenant en fonction de  $\lambda$  :

$$\frac{d^2 P_{n_k}^m}{d^2 \lambda} - \tan(\lambda + \lambda_0) \frac{dP_{n_k}^m}{d\lambda} + P_{n_k}^m \left( L^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0$$

avec  $\lambda$  défini dans l'intervalle  $[0, \lambda_c - \lambda_0]$ .

Mais en utilisant successivement (3.20) et (3.21), on trouve que :

$$\left( L^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = f(\lambda) L^2 \quad (3.22)$$

et l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2 P_{n_k}^m}{d^2 \lambda} - \tan(\lambda + \lambda_0) \frac{dP_{n_k}^m}{d\lambda} + f(\lambda) L^2 P_{n_k}^m = 0 \quad (3.23)$$

On cherche une solution oscillante de cette équation dans l'intervalle  $\lambda \in [0, \lambda_c - \lambda_0]$  sous la forme :

$$P_{n_k}^m = e^{iL\omega(\lambda)} \quad (3.24)$$

La première déduction est que si longueur d'onde il y a, celle-ci ne pourra être définie que dans l'intervalle  $[0, \lambda_c - \lambda_0]$ , qui exclu une zone autour du pôle de la calotte sphérique. Nous pouvons d'ores et déjà prédire que nous ne pourrons pas définir de longueur ou de surface standard valable sur toute sa surface par cette méthode car l'approximation asymptotique exclue le pôle. C'est un résultat tout à fait en accord avec sa version simplifiée par l'équation (3.12). Backus ([7]) montre en effet, que la solution de l'équation différentielle est exponentielle à partir de la valeur  $\lambda_c$  (à l'approche de la singularité de l'équation de Legendre en  $\theta = 0$ ). Cette solution n'est valable que pour un angle critique  $\theta_c \neq 0$ .

En utilisant (3.24) dans (3.23) et par un développement en série, Backus montre que (3.23) admet une solution du type :

$$P_{n_k}^m(\lambda) = \frac{B}{(\cos^2(\lambda + \lambda_0) - \cos^2 \lambda_c)^{1/4}} \cos(L\omega_0(\lambda) - \beta) \quad (3.25)$$

avec :

$$\omega_0(\lambda) = \int_0^\lambda \left( 1 - \frac{m^2}{L^2 \cos^2(t + \lambda_0)} \right) dt$$

Remarquons que si nous prenons la condition  $L \gg 1$ , nous nous mettons dans la situation où :

$$n_k \gg 1$$

L'équation (3.25) n'est plus valable que dans l'intervalle  $[0, \lambda_c - \lambda_0 - \varepsilon]$  en raison du dénominateur.

En revenant à la variable  $\theta$ , étant donné que :

$$\lambda = \theta_0 - \theta, \quad \lambda + \lambda_0 = \pi/2 - \theta, \quad \lambda_c = \pi/2 - \theta_c \quad \text{et} \quad \sin \theta_c = \frac{m}{L}$$

on a en particulier  $f(\lambda)$  dans (3.21) qui s'écrit :

$$f(\theta) = 1 - \frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta}, \text{ pour } \theta \in ]\theta_c, \theta_0] \quad (3.26)$$

et la solution (3.25) devient :

$$P_{n_k}^m(\theta) = \frac{B}{(\sin^2(\theta) - \sin^2 \theta_c)^{1/4}} \cos(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta) \quad (3.27)$$

avec  $\theta \in [\theta_c + \varepsilon, \theta_0]$ , et :

$$\omega_0(\theta - \theta_0) = \int_{\theta}^{\theta_0} \left(1 - \frac{m^2}{L^2 \sin^2(t)}\right) dt \quad (3.28)$$

On obtient donc une expression asymptotique des fonctions  $P_{n_k}^m(\theta)$ . On pourrait aller plus loin en recherchant la valeur des constantes  $B$  et  $\beta$  à partir des conditions aux limites sur les fonctions par (2.7a) ou (2.7b) et en développant une expression analytique de la fonction  $\omega_0(\theta)$ . Cette démarche n'est pas nécessaire car nous ne cherchons qu'une expression générale du développement asymptotique et nous ne poursuivrons pas le calcul.

### La longueur d'onde horizontale de $P_{n_k}^m e^{im\varphi}$

Nous pouvons maintenant écrire l'expression asymptotique de l'harmonique  $Y_{n_k}^{c,m}$  à partir de (3.17) sous la forme :

$$Y_{n_k}^{c,m}(\theta, \varphi) \sim \frac{B}{(\sin^2(\theta) - \sin^2 \theta_c)^{1/4}} \cos(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta) \cos(m\varphi)$$

ce qui revient à écrire :

$$Y_{n_k}^{c,m}(\theta, \varphi) \sim \frac{B}{2(\sin^2(\theta) - \sin^2 \theta_c)^{1/4}} \left( e^{i(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta + m\varphi)} + e^{-i(L\omega_0(\theta_0 - \theta) - \beta - m\varphi)} \right)$$

c'est-à-dire comme la somme de deux expressions qui rappellent un peu la somme de deux ondes progressives (à l'exception du facteur, fonction de  $\theta$ ). C'est donc par une pure analogie que nous pouvons définir une longueur d'onde spatiale.

Etant donné que la circonférence d'un cercle sur la calotte s'écrit  $C(\theta) = 2\pi a \sin \theta$ , avec  $a$  rayon terrestre, on trouve l'expression d'une longueur d'onde spatiale  $\lambda_\varphi$  :

$$\lambda_\varphi = \frac{2\pi a \sin \theta}{m} \quad (3.29)$$

D'autre part, la longueur d'onde spatiale  $\lambda_\theta$  peut être déterminée en analysant les variations de  $\omega_0(\theta_0 - \theta)$  sur une période :

$$\delta\omega_0(\theta) = \frac{\partial\omega_0(\theta)}{\partial\theta} \delta\theta$$

soit d'après (3.28), il vient :

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{L^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}}$$

donc la longueur d'onde  $\lambda_\theta$  correspondante sur la calotte, toujours avec  $a$  rayon terrestre, s'écrit en utilisant (3.19) :

$$\lambda_\theta = \frac{2\pi a}{\sqrt{n_k(n_k+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}} \quad (3.30)$$

On peut exprimer le rapport des deux longueurs d'après (3.26) dans (3.30) on trouve :

$$\frac{\lambda_\theta}{\lambda_\varphi} = \frac{m}{L \sin \theta} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_c}{\sin^2 \theta}}} \quad (3.31)$$

Ce rapport, variable permet de constater que la géométrie de la surface d'onde créée par les deux longueurs  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_\varphi$  change en fonction de la colatitude  $\theta$  avec toujours  $\theta_c > \theta$ .

Les dimensions (3.29) et (3.30) ne permettent donc pas de définir directement une longueur unique, invariante selon l'emplacement sur la calotte sphérique. Si nous voulons prendre comme longueur la diagonale de l'élément de surface, on trouve :

$$d(\theta) = \sqrt{\lambda_\varphi^2 + \lambda_\theta^2} = \frac{2\pi a}{\sqrt{n_k(n_k+1)}} \frac{\sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c) \sin \theta_c} \quad (3.32)$$

qui ne peut pas être utilisé comme longueur standard.

En revanche, on montre que le nombre d'onde :

$$k = \sqrt{k_\theta^2 + k_\varphi^2}$$

permet la définition d'une longueur invariante  $\lambda_k$  par :

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{(1/\lambda_\theta)^2 + (1/\lambda_\varphi)^2}}$$

et qui s'écrit explicitement sous une forme simple :

$$\lambda_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{n_k(n_k+1)}} \quad (3.33)$$

C'est cette longueur que nous pourrions enfin qualifier de *longueur d'onde* et qui représente la seule quantité standard sur la calotte (pour  $\theta > \theta_c$ ), indépendante à la fois de  $\theta$  et de  $m$  si  $n_k$  grand.

Si nous nous intéressons maintenant à l'élément de surface  $S(\theta)$  correspondant aux deux longueurs  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_\varphi$  on trouve :

$$S(\theta) = \lambda_\varphi \lambda_\theta = \frac{4\pi^2 a^2}{L^2 \sin \theta_c} \frac{\sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_c)}$$

soit en écrivant simplement en fonction de  $\lambda_k$  :

$$S(\theta) = \lambda_k d(\theta) \quad (3.34)$$

et cette surface n'est pas non plus invariante sur la calotte sphérique (ou sur la sphère).

### 3.2.2 Interprétations géométriques et discussions

Le développement précédent est valable également pour les harmoniques sphériques sur la sphère mais nous parlerons ici essentiellement de la calotte sphérique (Pour la sphère, on réalisera la transformation  $\theta \equiv \pi/2 - \theta$  donc  $\sin \theta \equiv \cos \theta$  pour écrire les expressions en fonction de la latitude).

Qu'apporte donc la définition de (3.33) par rapport à (3.15) ou à son équivalent dans la calotte (3.16) ?

D'un point de vue du résultat numérique, strictement rien, puisque dans l'hypothèse  $n_k$  grand on a :

$$\sqrt{n_k(n_k + 1)} \sim n_k + 1/2$$

on trouve, si l'on écrit (3.16) en fonction du rayon  $a$ , que les deux écritures aboutissent à la même valeur.

En revanche, nous pouvons utiliser cette définition et montrer, par une interprétation géométrique, que la longueur d'onde n'est en fait qu'une abstraction et qu'il n'est le plus souvent pas possible de la visualiser directement sur la calotte ou la sphère.

La figure (3.5) montre l'interprétation géométrique de la longueur d'onde. Contrairement à l'idée que nous aurions pu nous faire de la longueur d'onde à partir de l'expression (3.16) uniquement, la longueur  $\lambda_k$  invariante définie par Backus ne correspond pas à la diagonale  $BC$  du triangle  $(ABC)$  mais plutôt à la hauteur  $AH$ .

En posant  $AB = \lambda_\theta$ ,  $AC = \lambda_\varphi$  et  $BC = d(\theta)$ , et en considérant la propriété élémentaire des triangles rectangles :

$$AH \times BC = AB \times AC$$

on trouve que la surface  $S(\theta)$  de  $(ABC)$  s'écrit :

$$S(\theta) = AH \times d(\theta)$$

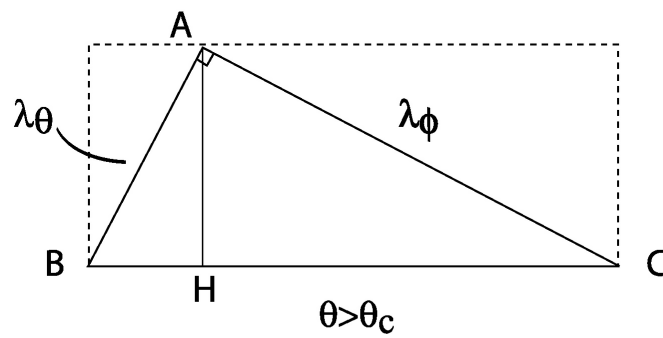
mais d'après (3.34) ceci revient à :

$$\boxed{\lambda_k = AH}$$

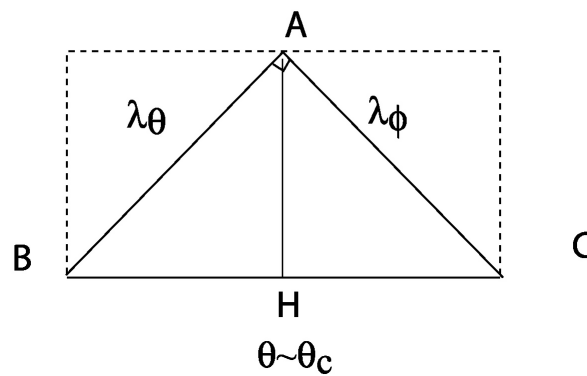
Finalement, la longueur  $\lambda_k$  ne coïncide avec la demi-diagonale du rectangle que dans le cas particulier où le triangle rectangle  $(ABC)$  est isocèle mais ceci n'arrive que lorsque  $\theta$  est proche de l'angle critique  $\theta_c$  (la limite en  $\theta$  de l'approximation asymptotique) Si l'angle  $\theta$  est proche du bord  $\theta_0$  de la calotte, alors le rapport (3.31) entraîne que  $\lambda_\theta \ll \lambda_\varphi$ . Par conséquent la longueur d'onde devient  $\lambda_k \sim \lambda_\theta$ . En dehors de ces deux cas limites,  $\lambda_k$  n'a pas de relation simple ni avec  $\lambda_\theta$  ni avec  $\lambda_\varphi$  qui permette une interprétation directe sur la calotte.

D'après (3.31), la surface d'onde est anisotrope (sauf dans le cas où le triangle rectangle est isocèle) et son anisotropie est de plus fonction de  $\theta$ . Cette anisotropie peut se quantifier par une étude systématique du rapport (3.31) que nous n'entreprendrons pas. Nous pouvons néanmoins nous appuyer sur la figure (2.2) pour constater qu'effectivement, de l'extérieur vers l'intérieur de la calotte, la forme des éléments de surface passe du rectangle avec  $\lambda_\theta \ll \lambda_\varphi$ , au carré avec  $\lambda_\varphi \sim \lambda_\theta$ , puis de nouveau à un rectangle mais de dimensions  $\lambda_\varphi \ll \lambda_\theta$ . Même si ce dernier cas n'est pas donné par l'approximation asymptotique, car les fonctions ne sont pas oscillantes pour  $\theta < \theta_c$ , il est observé si l'hypothèse  $n_k \gg m$  est mal vérifiée, soit pour des développements  $K_{max}$  et  $M_{max}$  faibles (sur la figure 2.2 on voit bien ces trois cas de figure). La définition d'une surface d'onde typique sur laquelle nous pourrions nous appuyer pour en déduire la finesse d'une modélisation semble donc bel et bien compromise.





1) Validité de l'approximation asymptotique



2) Limite de validité de l'approximation asymptotique

FIG. 3.5 – Un élément de surface correspondant à la racine  $n_k$  la plus grande sur la calotte est délimité par un rectangle de côtés  $\lambda_\theta$  et  $\lambda_\varphi$  de tailles variables selon l'emplacement en  $\theta$  sur la calotte. La seule longueur invariante est  $AH$  qui est définie comme étant la longueur d'onde minimale.

Quoique nous fassions, un développement en séries tronqué à des indices  $K_{max}$  et  $M_{max}$ , révélera de moins en moins de détails à mesure que nous nous approchons des bords de la calotte.

La surface minimale peut être obtenue en recherchant le minimum de la fonction  $S(\theta)$ . A partir de (3.34) on trouve que la surface minimale s'écrit :

$$S_{\min}(\theta) = \frac{8\pi^2 a^2}{n_k(n_k + 1)}$$

et que de plus c'est un carré. Remarquons que même cette surface minimum est fonction de l'altitude de la calotte.

On pourra donc écrire dans ce cas que la longueur d'onde minimum  $\lambda_k$  à la surface terrestre s'écrit :

$$\lambda_k \sim \frac{2\sqrt{2}\pi a}{n_k}$$

Une information utile que nous pouvons en déduire est le développement  $K_{max}$  le plus compatible avec l'échantillonnage de point. Pour mener à bien l'inversion et pour limiter l'*aliasing*, le théorème de Nyquist stipule que l'échantillonnage  $l_d$ , entre deux points consécutifs, doit être tel que  $l_d \leq \lambda_k/2$ .

En utilisant (3.12) comme approximation sur les racines  $n_k$ , nous pouvons déterminer un indice  $K_{max} \gg m$  en fonction de  $l_d$  :

$$K_{max} = \left( \frac{\pi a}{l_d} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{2\theta_0}{\pi} - \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

Nous garderons à l'esprit que cette relation est indicative pour deux raisons. La première découle directement de sa formulation : c'est un nombre relié à la plus petite dimension du découpage, pas à la dimension moyenne, il n'est donc pas exclu que nous puissions prendre des développements un peu plus poussés. La seconde réside dans le choix des conditions aux limites de Haines : la non-orthogonalité des fonctions viendra en pratique contrebalancé le principe de Nyquist et nous interdira numériquement de prendre de trop grandes valeurs de  $K_{max}$ , même sur un très bon échantillonnage de points ; ce qui est en évidente contradiction avec le premier point.

Supposons des points distants d'environ  $l_d = 65km$  dans une calotte d'ouverture maximale  $\theta_0 = 5^\circ$ , on trouvera pour le développement maximum :

$$K_{max} \sim 12$$

Finalement, nous pouvons principalement conclure que le concept de longueur d'onde en harmoniques sur calotte n'est qu'une tentative pour essayer de relier l'indice  $K_{max}$  d'un développement à une dimension en kilomètres de la calotte sphérique. Lorsque nous connaissons les distances géométriques moyennes entre deux données, nous pouvons en déduire un développement maximum permis  $K_{max}$ . Or, par sa définition même par (3.35),  $K_{max}$  est relié à la plus petite surface créée par les harmoniques. Par conséquent, rechercher  $K_{max}$  revient donc à s'assurer d'un sur-échantillonnage sur la plus petite surface. Si l'échantillonnage est uniforme, le théorème de Nyquist est automatiquement vérifié pour les autres surfaces qui ont des dimensions supérieures.

Le concept de longueur d'onde est très trompeur car c'est avant tout la surface qui nous intéresse et si nous pouvons définir une longueur fixe, il n'en est rien pour la surface. Cette

caractéristique nous met en garde en particulier contre les interprétations erronées que nous pourrions donner, dans le cas d'une modélisation d'anomalie magnétique, à partir de leur répartition. Il faudra garder à l'esprit l'anisotropie inhérente à la modélisation et nous reverrons de fait régulièrement cette anisotropie dans les résidus obtenus après inversion. Nous observerons clairement l'étalement des surfaces de résidus à mesure que l'on se rapproche des bords.

## Chapitre 4

# Inversion de données avec SCHA

Pour étudier la méthodologie des harmoniques sphériques sur calotte, il convient de tester la théorie d'un point de vue numérique et de l'appliquer sur des données synthétiques parfaitement contrôlées. Dans un premier temps, il ne fallait surtout pas juxtaposer les problèmes liés à l'inversion et les problèmes numériques de calcul liés aux fonctions de Legendre. Ce premier problème ayant été résolu, nous avons voulu nous concentrer, dans ce chapitre, plus particulièrement sur la résolution et le comportement du problème inverse. Nous proposons différentes techniques d'inversion. Bien que la plupart d'entre-elles soient très classiques, elles permettent d'illustrer sous des angles différents, mais complémentaires, certaines embûches liées à la théorie des harmoniques sphériques sur calotte. Ces techniques sont d'autre part abondamment utilisées dans la partie 3, il fallait donc les définir une fois pour toute.

Dans un premier temps, nous exposons brièvement les étapes préparatoires au problème inverse dont le choix de la grille synthétique et sa construction constitueront les seules originalités ; les autres étapes font partie intégrante d'un *modus operandi* dont nous userons chaque fois qu'il s'agira d'inverser des données sur une calotte. Dans un second temps, nous traiterons le cas d'un problème synthétique par différentes méthodes d'inversions sur des données uniformément réparties .

### 4.1 Préparation de l'inversion

Compte tenu de l'intervention de deux bases orthogonales mais non orthogonales entre-elles, la matrice d'inversion est naturellement mal conditionnée. Dans un premier temps, pour atténuer les effets néfastes de cette propriété qui découle du choix des conditions aux limites, nous proposons deux points de considération. Le premier concerne la réalisation d'une grille régulière qui permettra de se rapprocher de la configuration idéale d'une répartition parfaitement uniforme sur une calotte. La même grille sera conservée pour toutes les applications ultérieures et se révèlera particulièrement efficace pour le maillage de la sphère globale pour des rotations des coefficients de Gauss globaux (Voir section 5.1). Le second point concerne la manière d'organiser les matrices pour l'optimisation des calculs numériques.

#### 4.1.1 Une grille quasi-régulière

Il est bien connu qu'il est impossible de définir une grille parfaitement régulière sur une sphère. Les découpages sphériques sont habituellement réalisés par échantillonnage en  $\theta$  et  $\phi$  (latitude, longitude) directement sur la sphère. Cette méthode simple, largement utilisée, présente

néanmoins des inconvénients évidents lorsque l'on tente de construire des éléments de surfaces égales. Etant donné que le découpage que nous exposons ici n'est pas très largement connu mais qu'il présente de nets avantages pour les études synthétiques d'un champ sur la sphère entière, nous nous proposons d'en décrire ses principaux aspects.

Nous nous sommes penchés sur la méthode préconisée par Dufour ([32]). Dufour, sur la base des considérations concernant la division sphérique de Popko (1969) propose d'inclure la sphère dans un polyèdre de Romé de l'Isle (ou hexacontaèdre rhombique). Chaque élément de base du polyèdre est tangent à la sphère en son centre (repéré par les lettres grecques sur la figure 4.1). Le maillage proposé par Dufour est une solution numérique permettant de diminuer significativement la différence entre la surface maximum et la surface minimum du maillage.

Le maillage de la grille se fait par dichotomie successive des côtés d'un losange de base, selon un ordre de découpage que l'on définit en accord avec la dimension de la surface minimum que l'on recherche sur la sphère. Le plus petit élément ainsi constitué sera triangulaire. Le premier élément est un losange, lui-même, par dichotomie de ses côtés, constitué de quatre losanges, eux-même formés par deux triangles. Si l'on définit l'élément de base comme étant à l'ordre  $N = 0$ , un calcul trivial montre que le nombre de points  $N_p$  créés à l'ordre  $N$  est :

$$N_p = (1 + 2^N)^2 \quad (4.1)$$

Ce qui représente un total de :

$$\begin{aligned} N_l &= 2^{2N} \text{ losanges} \\ N_t &= 2^{2N+1} \text{ triangles} \end{aligned}$$

### Construction numérique de la grille

Les découpages antérieurs, décrits ci-dessus, qui considèrent une graduation régulière dans le plan  $(x, y)$  montrent un rapport  $r$  entre les surfaces maximales et minimales (matérialisées sur la figure 4.2) de  $r = 1,624598$ . Une première amélioration fut proposée par Popko (1969) (La discussion est donnée par [32]). Elle consistait à subdiviser chacun des losanges en triangles sphériques sur la sphère. Il s'avère que le découpage selon Popko reste néanmoins trop proche d'un découpage régulier dans le plan projeté sur la sphère. Il souffre donc d'altérations géométriques, bien que la diminution du rapport  $r$  ait été réduite à  $r = 1.091$  ([32]). Dufour propose une solution numérique au problème. Le découpage non régulier en géométrie plane donne après projection gnomonique sur la sphère des éléments de surface quasi-identique, où le rapport  $r$  devient  $r = 1.01$ . L'erreur sur les surfaces ainsi construites ne doit donc pas dépasser 1% sur la sphère entière. C'est à notre connaissance la précision maximum à laquelle on peut découper régulièrement la sphère en surfaces équivalentes.

La figure (4.2) donne un exemple de découpage du losange  $L_1$  (figure 4.1) pour des ordres  $N = 0$  et  $N = 3$ , les éléments de surfaces correspondants étant les triangles construits lorsque l'on relie les points adjacents. Remarquons que les lignes de découpage ne sont pas des segments parallèles car, pour être régulier sur la sphère, le découpage doit être irrégulier dans le plan. Les équations des droites successives dépendent de paramètres qui n'admettent pas de solutions analytiques mais qui sont donnés numériquement par Dufour. Nous voyons distinctement qu'elles permettent de prendre en compte la distance du point au centre du losange, tangent à la sphère. Ainsi les triangles les plus éloignés du centre doivent être de surface plus importante pour minimiser la déformation due à la distance croissante du plan à la sphère lors de la projection.

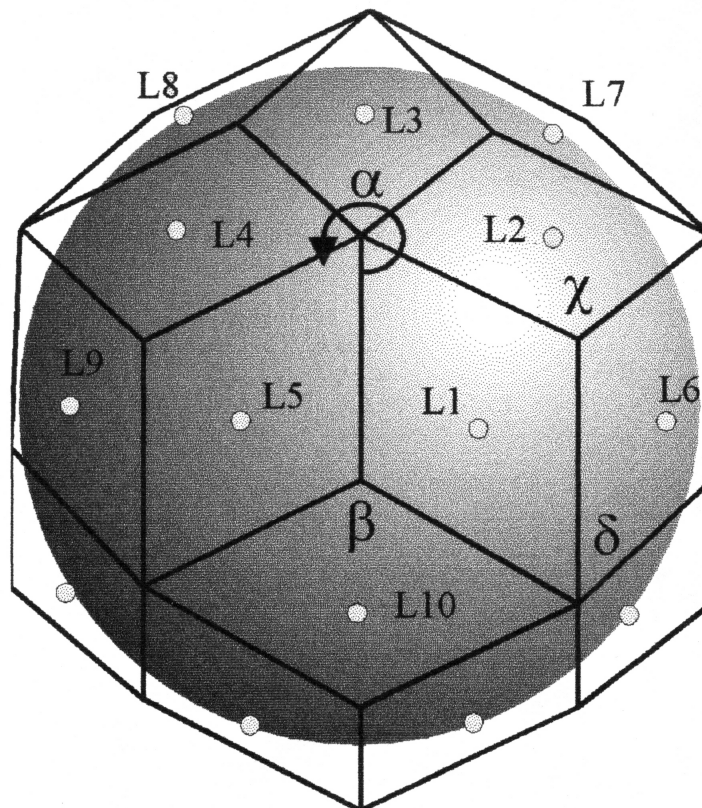


FIG. 4.1 – La sphère est incluse dans un polyèdre de Romé de l'Isle. Chaque losange qui constitue une face du polyèdre est tangent à la sphère en son centre.

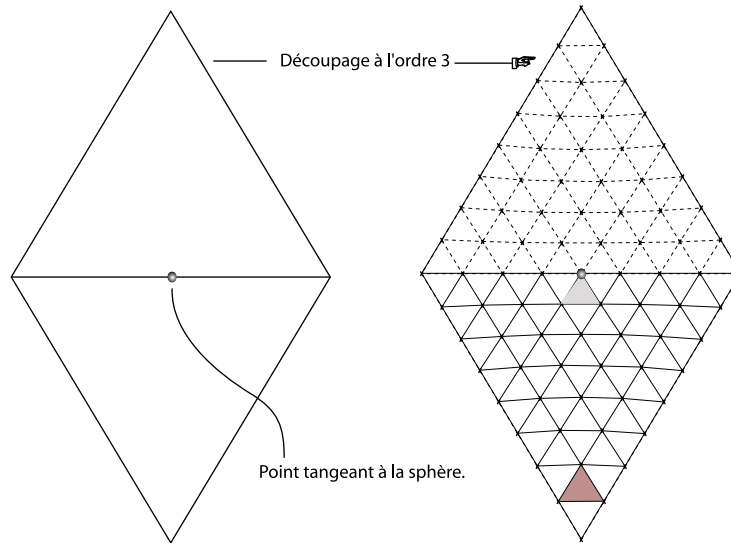


FIG. 4.2 – Construction d’un maillage en géométrie plane par la méthode de Dufour. Ce maillage irrégulier dans le plan permet, lorsqu’il est projeté sur la sphère par projection gnomonique, la construction de triangles sphériques de surfaces quasi-régulières.

L’intérêt est qu’il suffit de découper un seul losange du polyèdre de Romé de l’Isle, de le projeter sur la sphère par projection gnomonique et d’obtenir le maillage sur la sphère entière par rotations successives d’axe au sommet représenté par  $\alpha$  sur la figure (4.1). Cette opération est donc très rapide. Les éléments de base de surface sur la sphère entière seront donc maintenant des triangles sphériques de surfaces quasi-régulières. Sur la sphère entière, cela se caractérise par la construction de la figure (4.3). Les deux triangles sphériques constituant le losange de base sont matérialisés par la courbe solide. Les côtés des triangles, compte tenu des rotations sur la sphère appartiennent à deux triangles adjacents et on prendra soin de retirer cette frontière commune lors des rotations pour éviter les doublons dans le maillage.

Bien entendu, dans le cas d’une calotte sphérique le découpage de Dufour perd un peu de sa régularité car il est affecté par la coupure des losanges voisins du cercle limite  $\theta = \theta_0$ . Néanmoins, ce découpage reste plus intéressant qu’un simple maillage régulier en longitude et latitude. Le découpage de Dufour au centre de la calotte est hautement précis, et l’on pourra se contenter d’un nombre restreint de rotation selon les dimensions de cette dernière. On pourra facilement se convaincre que plus la calotte est petite, moins la différence entre la surface maximale et la surface minimale est importante, car la portion de sphère est très proche de son plan tangent.

### Distance moyenne entre deux points sur la Terre

D’après Dufour ([32], paragraphe 5) lorsque le losange de base est projeté sur la sphère son côté, d’une valeur de 0,726543 dans le plan, devient 0,65238 sur la sphère unitaire. Dufour nous donne donc la distance angulaire entre deux points de sommets consécutifs. Soit :

$$\delta = 0,65238 \text{ (soit } 37,37736^\circ) \quad (4.2)$$

Si le losange de base est décomposé à l’ordre  $N$ , alors d’après (4.1) nous avons  $2^N + 1$  points

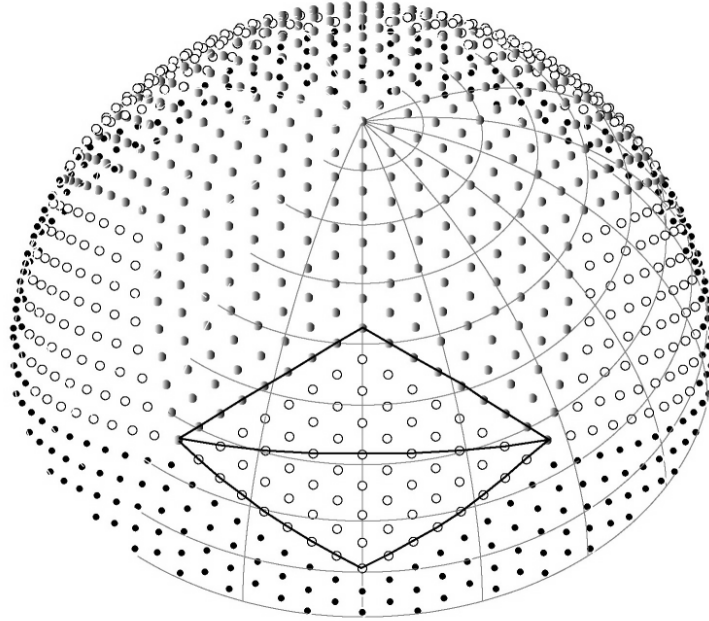


FIG. 4.3 – Après rotations successives d'un losange de base projeté sur la sphère, on obtient un maillage régulier dont l'erreur entre la surface maximale et minimale ne dépasse pas 1%.

par côté, ce qui représente  $2^N$  segments. On en déduit donc la distance sur la Terre de rayon moyen  $a \simeq 6371,2km$  :

$$\boxed{d \simeq \delta \frac{a}{2^N}} \quad (4.3)$$

Un découpage à l'ordre  $N = 6$ , par exemple, entraîne la construction d'une grille dont les points sont distants d'environ  $65km$  ; nous prendrons généralement cette distribution pour nos exemples synthétiques.

#### 4.1.2 Rotation des données dans le repère de la calotte

La première étape d'une analyse régionale est de convertir les coordonnées géocentriques des données, du repère géocentrique d'origine dans le nouveau système de coordonnées d'axe  $O_z'$ , l'axe de la calotte définie par un point  $C(\varphi_o, \theta_o)$ . Si nous repérons la position d'une donnée dans le repère géocentrique par  $(\varphi, \theta)$  avec  $\varphi$  la longitude et  $\theta$  la latitude, ses coordonnées dans le nouveau système de référence seront notées  $(\varphi_c, \theta_c)$ .

La transformation s'exprime par une rotation du type :

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

avec  $\mathcal{M}$  matrice de rotation de dimension  $3 \times 3$ .



D'autre part, en définissant le méridien  $\varphi_c = 0$  dans le repère lié à la calotte comme celui qui passe par les pôles terrestres nord et sud et le point  $C$ , centre de la calotte, la matrice  $\mathcal{M}$  s'exprime explicitement dans le repère géocentrique initial par :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'angle  $\beta$  se déduit directement de considérations simples de trigonométrie sphérique et on trouve :

$$\sin \beta = \frac{\sin(\theta_o) \sin(\varphi - \varphi_o)}{\sin(\theta_c)}$$

Il y a donc une singularité en  $\theta_c = 0$  pour le calcul des rotations et la solution est indéterminée lorsque la donnée se trouve au pôle de la calotte.

Remarquons que cette transformation nécessite la recherche préalable de l'expression des points  $(\varphi_c, \theta_c)$  dans le repère calotte correspondant aux coordonnées  $(\varphi, \theta)$  sur la sphère. Cette opération se réalise simplement par deux rotations successives sur la sphère. Notons enfin que, lors de ces rotations la composante  $Z$  du champ est invariante, la transformation étant indépendante du vecteur normal à la sphère.

De même, pour revenir à l'expression du champ magnétique dans le repère géocentrique nous utiliserons la rotation inverse, simplement donnée par  $\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{M}^{-T}$ .

### 4.1.3 Ecriture du problème inverse

Etant donné la non-orthogonalité des bases de fonctions, il est judicieux de construire une matrice aussi creuse que possible et de faire en sorte que les éléments non diagonaux soient le plus proches de la diagonale principale. Bien que l'ordre importe peu dans le calcul des séries qui décrivent le champ magnétique (2.9), cette précaution s'avère bénéfique d'un point de vue numérique ([94]). Supposons que nous disposions de  $N$  observations et que nous cherchions à caractériser  $P$  paramètres du modèle. Le champ magnétique écrit par (2.9a), (2.9b) et par (2.9c) peut prendre la forme algébrique suivante :

$$\underline{d} = \mathbf{A} \underline{m}$$

avec  $\underline{d}$ , le vecteur contenant les valeurs des composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  du champ,  $\mathbf{A}$  la matrice des fonctions de  $r, \theta$  et  $\varphi$  et  $\underline{m}$  le vecteur des coefficients de Gauss  $\{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$ .

Si l'on écrit les expressions du champ magnétique (2.9) en un point  $P_i$ , défini par ses trois coordonnées  $(\varphi_i, \theta_i, r_i)$ , sous la forme :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} d_{3i-2} \\ d_{3i-1} \\ d_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{x,i} \\ B_{y,i} \\ B_{z,i} \end{bmatrix} \\
A_{3i-2,\beta} &= \left[ \left( \frac{a}{r_i} \right)^{n_k+2} \frac{dP_{n_k}^m(\theta_i)}{d\theta} \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{Bmatrix} \right]_{\beta} \text{ avec } (i = 1, \dots, N/3) \\
A_{3i-1,\beta} &= \left[ \frac{m}{\sin \theta_i} \left( \frac{a}{r_i} \right)^{n_k+2} P_{n_k}^m(\theta_i) \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi_i) \\ -\cos(m\varphi_i) \end{Bmatrix} \right]_{\beta} \text{ et } (\beta = 1 \dots P) \\
A_{3i,\beta} &= \left[ -(n_k + 1) \left( \frac{a}{r_i} \right)^{n_k+2} P_{n_k}^m(\theta_i) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{Bmatrix} \right]_{\beta} \\
\underline{m} &= \begin{bmatrix} G_{n_k=0}^0 \\ \dots \\ G_{n_k=K}^{m=K} \\ H_{n_k=K}^{m=K} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

on peut ranger les colonnes dans l'ordre des indices  $k$  croissants puis  $m$  croissants, jusqu'à l'indice de troncature  $k = K_{max}$ . Puisque la troncature implique également  $M_{max} = K_{max}$  (car  $k \geq m$  d'après les résultats de la section 3.1.5), cette écriture conduit à la construction de  $(K_{max} + 1)^2$  colonnes pour la matrice  $\mathbf{A}$  (section 2.3). D'une manière générale, les dimensions respectives des éléments algébriques sont :

$$\begin{aligned}
\dim(\underline{d}) &= 3N \times 1 \\
\dim(\mathbf{A}) &= 3N \times (K_{max} + 1)^2 \\
\dim(\underline{m}) &= (K_{max} + 1)^2 \times 1
\end{aligned}$$

Cette écriture conduit à la construction d'une matrice  $\mathbf{A}$  la plus creuse possible avec ce formalisme. Dans un cas où les données sont bien réparties, la matrice d'inversion sera diagonale par bloc en raison des propriétés d'orthogonalité des cosinus et des sinus. Cette écriture représente la situation la plus favorable pour l'inversion numérique.

## 4.2 Inversion de données synthétiques sur une surface

### 4.2.1 Le choix des données

Dans cette section, on essaye d'inverser des données synthétiques uniformément réparties sur la calotte à la surface terrestre. On considère une calotte d'ouverture  $\theta = 5^\circ$  centrée sur la France, de centre  $C = (2^\circ E, 47^\circ N)$  dans le référentiel géocentrique. Nous avons construit un jeu de données en utilisant le découpage décrit dans la section 4.1 à l'ordre 6 de telle manière que nous obtenions 236 points (le nombre de points associés à chaque ordre du découpage dépend naturellement de l'angle d'ouverture  $\theta_0$  de la calotte) et en utilisant un modèle synthétique provenant de la différence entre un modèle de CAIN ([60]) jusqu'aux degré  $n$  et ordre  $m = 50$  et un modèle IGRF de 1960. D'après la section (4.1) la distance entre deux points consécutifs est d'environ 63km.

En adaptant la routine GEOMAG du NGDC (National Geophysical Data Center) pour le calcul du champ magnétique en repère géocentrique nous pouvons construire un ensemble de

236 données vectorielles recouvrant l'ensemble de la calotte de manière quasi-uniforme pour les trois composantes du champ magnétique  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$ . Ces données sont ensuite converties dans le repère de la calotte sphérique à l'aide des transformations décrites dans la section 4.1.2.

Ce type de modèle permet de simuler le cas réel où l'on retranche un modèle global des données comme le suggère Bullard ([16]). Le choix du modèle est peu important puisque seul nous intéresse ici le comportement de l'inversion avec l'altitude. Pour faire acte de modernité, nous aurions pu prendre un modèle CMP3 ([98]) auxquels nous aurions pu retrancher un champ DGRF calculé pour la même époque ; ceci n'aurait cependant apporté aucune information supplémentaire sur la modélisation même si cela nous aurait permis de travailler sur un modèle résiduel sans doute plus réaliste que le premier. D'autre part nous aurons besoin par la suite des coefficients de Gauss et pas seulement des valeurs du champ magnétique. Ces exigences sont plus faciles à remplir avec des modèles globaux de type IGRF ou CAIN, que par le modèle CMP3 qui a été rendu publique tardivement ([99]). Nous avons donc retenu la première solution pour son aspect pratique.

L'ajout d'un bruit de loi gaussienne d'une valeur de  $5nT$  permet de simuler un ensemble de données prise au temps  $t$  avec une erreur aléatoire liée à la mesure, à l'instrumentation ou à la réduction du champ externe. Le fait de ne considérer que la différence entre deux modèles de champ globaux revient à *accélérer* la convergence en retranchant les *grandes longueurs d'onde* du champ magnétique difficilement représentables sur une portion de la sphère limitée à la taille de notre calotte. Nous avons déjà discuté de manière critique ce type de terminologie et souligné son côté trompeur (3.2.1), nous ne reviendrons donc pas sur ces points et nous nous contenterons de suivre la procédure générale préconisée par les utilisateurs des harmoniques sphériques sur calotte.

## 4.2.2 Moindres carrés ordinaires

### Méthodologie

Les composantes du champ magnétiques exprimées en (2.9) peuvent s'écrire sous forme algébrique :

$$\underline{d}_{obs} = \mathbf{A}\underline{m} + \underline{\varepsilon} \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{A}$  est la matrice des fonctions de base, définies sur la calotte sphérique, écrite comme dans le paragraphe 4.1.3 ;  $\underline{m}$  les coefficients de Gauss qui caractérisent le modèle de champ que l'on cherche (i.e l'ensemble des coefficients  $\{G_{n_k}^m, H_{n_k}^m\}$ ),  $\underline{d}_{obs}$  les valeurs du champ magnétique  $B$  observées et  $\underline{\varepsilon}$  le vecteur d'erreur sur les données  $\underline{d}_{obs}$  normalement distribué, donc de moyenne nul, soit  $\underline{\varepsilon} = \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Les moindres carrés, également appelés solution de *maximum de vraisemblance*, revient à chercher les coefficients de Gauss estimés  $\underline{m}$  qui minimisent la fonctionnelle  $\Psi = \|\underline{d} - \underline{d}_{obs}\|^2$  où  $\underline{d}$  représente les composantes du *vrai* champ magnétique, par opposition avec les mesures  $\underline{d}_{obs}$  qui sont entachées d'une erreur  $\underline{\varepsilon}$ .

Si le nombre de données  $\underline{d}$  est supérieur au nombre de coefficients  $\underline{m}$ , donc si le problème est surdéterminé, la solution est trouvée classiquement par :

$$\boxed{m_{est} = (\mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{W} \underline{d}_{obs}} \quad (4.5)$$

Il est de coutume d'incorporer la matrice  $\mathbf{W}$  qui est la matrice diagonale des poids attribués aux différentes mesures. Remarquons qu'en toute rigueur, l'écriture (4.5) correspond à la fonctionnelle définie par  $\Psi = (\underline{d} - \underline{d}_{obs})^t \mathbf{W} (\underline{d} - \underline{d}_{obs})$  et que par conséquent, cela revient à changer la loi de Gauss de l'erreur  $\varepsilon_i = \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{W}_{i,i})$  pour chacune des données  $d_i$ .

Cette matrice est particulièrement adaptée lorsque l'on incorpore plusieurs ensembles de données provenant de sources d'observations différentes et qui ne possèdent pas la même précision. On attribue le plus souvent un poids plus important aux données de meilleures précisions. Par conséquent la matrice  $\mathbf{W}$  est déjà une information *a priori* que l'on incorpore à l'inversion et qui contient donc une dose de subjectivité qu'il n'est pas toujours simple de quantifier. D'autre part, le poids peut également servir à contraindre le modèle à mieux considérer un ensemble de données plutôt qu'un autre. Ainsi, par exemple, en modélisation régionale nous sommes intéressés par les données proches des sources crustales du champ magnétique car elles sont susceptibles de contenir davantage l'information que l'on cherche que les données satellites récentes, plus loin de la surface et donc des sources internes. Or, le nombre des mesures terrestres et leurs qualités restent majoritairement inférieures à ce qu'offrent les données satellites. Pourtant, on préférera leur donner plus de poids car elles contiennent l'information que l'on recherche ([107]). Ceci est encore affaire de compromis et dépend de l'application géophysique d'intérêt.

Pour les considérations synthétiques, ces discussions sont prématurées et l'on considérera un poids identique sur toutes nos données en posant  $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ , la matrice identité.

### Exemple synthétique

La figure (4.4) montre le modèle obtenu après inversion par moindres carrés ordinaires du champ de *Cain* moins le *DGRF*. Le développement des séries dans le développement du potentiel et de ses composantes a été tronqué à  $K_{max} = 12$  de manière à devoir rechercher  $N = (K_{max} + 1)^2 = 169$  coefficients de Gauss. Les coefficients ainsi obtenus ont ensuite servi à calculer le problème direct sur une grille très fine, permettant de simuler une interpolation

Le choix de la troncature n'est pas arbitraire et correspond à la limite empirique du conditionnement numérique de la matrice d'inversion en regard de l'évolution de la valeur des coefficients de Gauss pour des développements d'ordres supérieurs. On ne manquera pas de remarquer la cohérence entre cette observation et la prédiction sur le développement maximum  $K_{max} = 12$  annoncé dans la section 3.2.1 pour une distance moyenne entre les données d'environ 63km. Néanmoins, même si la pratique et la théorie coïncident sur ce point, c'est probablement plus le mélange des deux bases de fonctions qui nous limite dans le développement.

Etant donné la non-orthogonalité des fonctions de base, l'ajout de coefficients dégrade de plus en plus le conditionnement de la matrice à inverser et l'inversion devient instable en l'absence de condition supplémentaire de régularisation.

Les oscillations que l'on observe sur la figure 4.4 pour chacune des composantes prouvent que le nombre de coefficients est insuffisant pour la représentation convenable d'un champ magnétique. Ceci est parfaitement visible sur les représentations des résidus où l'on observe des structures organisées très éloignées d'une répartition aléatoire caractéristique du bruit injecté dans les données. Il reste donc indubitablement du champ à modéliser, ce qui signifie que la convergence du modèle vers sa solution n'est pas suffisante.

La représentation en harmoniques sphérique sur calotte requiert un nombre théoriquement infini de termes dans les développements de champ magnétique (2.9) et la troncature  $K_{max}$  imposée par le nombre restreint de données (708 données dont 236X, 236Y et 236Z) et la non-orthogonalité des fonctions de base n'est pas adaptée. La représentation en harmoniques sur calotte pose des problèmes, liés à l'existence de la frontière  $\theta = \theta_0$ , que l'on ne rencontre pas en modélisation globale. Dans ce dernier cas, on peut choisir la troncature en appuyant le raisonnement entièrement sur des considérations de longueurs d'onde. Dans la modélisation sur calotte, le raisonnement se complique du fait que le champ que l'on modélise dérive d'un potentiel qui ne vérifie pas les mêmes conditions aux limites. Dans ce cas, nous ne pouvons

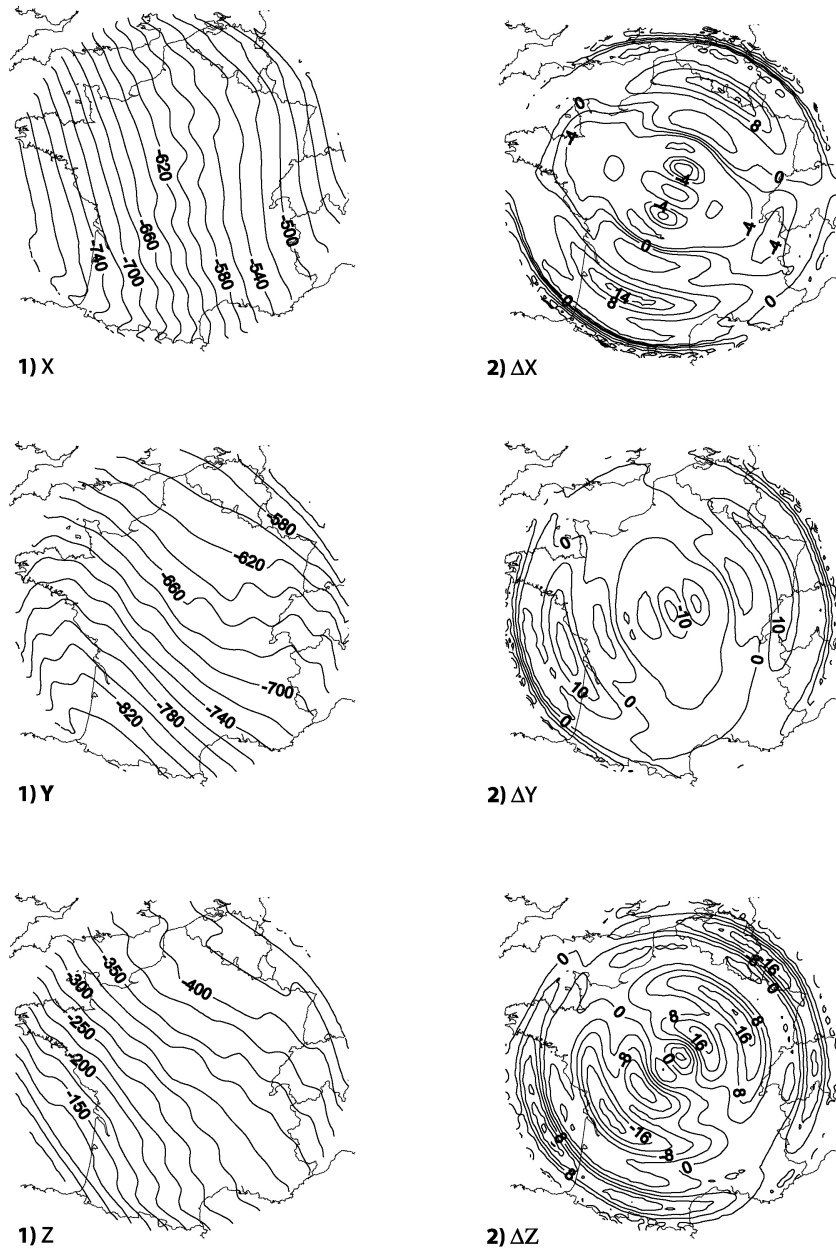


FIG. 4.4 – Modèle de champ magnétique *Cain* moins *DGRF* obtenu sur la base local des harmoniques sphériques sur calotte par inversion par moindres carrés. L'ordre du développement des fonctions de base est  $K_{max} = 12$ . Les composantes du champ magnétique (1) présentent des oscillations et les résidus (2) des structures organisées.

pas espérer une convergence uniforme, qui est celle qui intéresse le plus le modélisateur car la situation contraire favorise l'apparition *du phénomène de Gibbs* (sur lequel nous reviendrons partie 2). Avec le mélange des deux bases proposé par Haines on espère que l'accélération de la convergence l'emporte sur l'inconvénient lié à la non-orthogonalité des fonctions. L'exemple de la figure (4.4) montre, qu'avec les moindres carrés ordinaires du moins, ce procédé n'est pas suffisant, comme l'atteste d'ailleurs l'analyse de la variance estimée après inversion. La variance exhibe une valeur  $\sigma \sim 9nT$  alors qu'en toute rigueur nous aurions du retrouver une variance compatible avec le bruit de  $5nT$  incorporé dans les données. On ne manquera pas de souligner au passage l'étalement croissant des résidus nettement visible sur la figure qui est un artefact que l'on a discuté au paragraphe 3.2.1.

On peut poursuivre l'analyse en augmentant le nombre de données, et donc le nombre de coefficients de Gauss calculables. Puisque nous maîtrisons le nombre de points de mesure nous avons utilisé une grille quasi-régulière permettant de construire le champ sur la calotte en 1350 points distants de 20km environs. Il ne nous a fallu pas moins de 625 coefficients de Gauss pour atteindre la valeur théorique de  $5nT$  pour la variance estimée sur les données. Ceci nécessite dans l'écriture de Haines de pousser le développement jusqu'à l'indice  $K_{max} = 25$  et le conditionnement de la matrice est particulièrement critique. Il est clair que pour de petites calottes nous ne disposons pas d'autant de données aussi bien réparties et qu'il devient impérieux d'utiliser des méthodes d'inversion plus élaborées. La méthode d'inversion par moindres carrés n'est pas à remettre en cause mais nous devons chercher à diagnostiquer les problèmes numériques qui surviennent lorsque le nombre de paramètres que nous recherchons approche les nombres de données disponibles.

### 4.2.3 Décomposition en valeurs singulières

#### Méthodologie

Dans le cas limite où le nombre de paramètres approche le nombre de données, le problème inverse posé par les harmoniques sphériques sur calotte ne conduit à aucune solution car le déterminant du système devenant numériquement nul, la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A}$  dans (4.5) n'est plus inversible. Ce comportement pathologique est lié à la non-orthogonalité des bases de fonctions qui provoque des combinaisons linéaires entre les différents vecteurs de base de la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A}$ . Ainsi, avant même d'obtenir la non-unicité théorique de la solution, on aboutit à une instabilité dans l'inversion. Cette instabilité est nettement visible en changeant légèrement l'erreur gaussienne  $\underline{\varepsilon}$  injectée dans les données synthétiques. Dans une inversion par moindres carrés ordinaires, cela se caractérisera par une variance estimée  $\sigma$  sur les données proche de zéro, caractérisant un *overfitting*.

L'idée de la décomposition en valeurs singulières, ou décomposition de Lanczos, repose sur l'idée que toute matrice hermitienne, soit dans notre cas une matrice carrée, symétrique et positive, peut s'écrire de manière unique comme :

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$$

Dans cette version simple, où  $\mathbf{G}$  est carrée symétrique,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  ont une interprétation immédiate :  $\mathbf{U}$  est la matrice des vecteurs propres et  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_i$  associées à l'opérateur  $\mathbf{G}$ . En outre  $\mathbf{U}$  est orthogonale :  $\mathbf{U}^t \mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

En considérant une matrice de poids  $\mathbf{W}$  proportionnelle à la matrice identité et en posant

$\mathbf{G} = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$  on trouve que (4.5) s'écrit maintenant :

$$\boxed{m_{est} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^t \mathbf{A}^t d_{obs}} \quad (4.6)$$

Dans ce cas,  $\mathbf{G}$  est positive, et donc les valeurs propres  $\lambda_i$  sont positives ou nulles.

La matrice des valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{G}$  étant diagonale elle est inversible pourvu que les termes de la diagonale  $\lambda_i$  soient non nuls. Plus prosaïquement, le système d'équation écrit sous la forme de (4.6) n'a pas de solution unique si une seule de ses valeurs propres est nulle. Numériquement, en raison des combinaisons linéaires des vecteurs de la matrice de départ  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  et des limites de la représentation des nombres en machine, on trouve que certaines valeurs de  $\lambda_i$  sont proches de la précision numérique de la machine, voire négatives (Un cas de ce genre est mentionné par Korte et Holme ([64]) qui rajoutent un léger poids  $\mathbf{W}$  arbitraire pour contourner ce problème). La décomposition en valeurs singulières offre donc un bon diagnostic de la situation et montre dans quels cas la matrice  $\mathbf{A}^t \mathbf{A}$  est mal conditionnée. Pour ces valeurs propres mal déterminées numériquement, on posera  $1/\lambda_i = 0$  et il est tout à fait exceptionnel de constater que l'on pose par conséquent  $\infty = 0$ !

Le fait de poser à 0 une valeur propre revient à détruire les combinaisons linéaires responsables du mauvais conditionnement de la matrice d'inversion en supposant à juste titre que, puisque ces valeurs propres sont mal déterminées, la solution résultante du problème linéaire sera entachée d'une erreur non quantifiable mais qui tend le plus souvent vers l'infini. Par exemple, si la décomposition en harmoniques sphériques sur calotte souffre d'une singularité numérique, les coefficients de Gauss que nous obtiendrons, ne convergeront pas vers 0. Leur valeur augmentera en fonction du développement, ce qui est en évidente contradiction avec la convergence des séries qui modélisent le potentiel.

Le prix à payer est que le système linéaire initialement posé n'est pas tout à fait résolu dans les mêmes termes. Il en résulte donc un compromis entre la stabilité de l'inversion et une perte de résolution des données qu'il faudra établir au cas par cas ([94]). En d'autres termes, il faudra déterminer un seuil arbitraire à partir duquel on s'autorise à détruire certaines combinaisons linéaires, donc à fixer la plus petite valeur propre numériquement acceptable et se résigner à perdre de la résolution sur les données.

### Exemple synthétique

A partir des données synthétiques calculées sur une grille contenant 236 points et bruitées à  $5nT$  on cherche à déterminer le modèle de champ par une inversion par moindres carrés en exploitant les propriétés de la décomposition de Lanczos. Nous avons ainsi considéré l'inversion en incorporant 625 coefficients de Gauss qui devaient correspondre au nombre de paramètres permettant de résoudre les données moyennant une erreur de  $5nT$ . Dans un premier temps, on examine la décroissance des valeurs propres du système et on supprime celles inférieures à un certain seuil que l'on doit se fixer. Le conditionnement de la matrice est mesurable par la quantité  $C = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ . A priori, nous n'avons que peu d'arguments objectifs concernant le choix du seuil. La figure (4.5-a) montre les variations des valeurs propres normalisées (divisée par la valeur propre maximale) dans l'ordre décroissant. Il est vrai que l'on observe un coude pour lequel les valeurs propres chutent vers 0; cependant il n'est pas aisé à première vue de repérer précisément ce point d'inflexion. Dans de tels cas, on préfère se reposer sur l'examen systématique des résultats offerts par différents choix du seuil de coupure des valeurs propres. Nous avons donc essayé  $C$  tel que  $10^5 \leq C \leq 10^{18}$  et regardé la valeur de la variance estimée correspondante (sur la figure 4.5-b). Qualitativement, on constate qu'en l'absence de contrainte sur les valeurs propres, la résolution est excessivement mauvaise compte tenu de la quasi-singularité

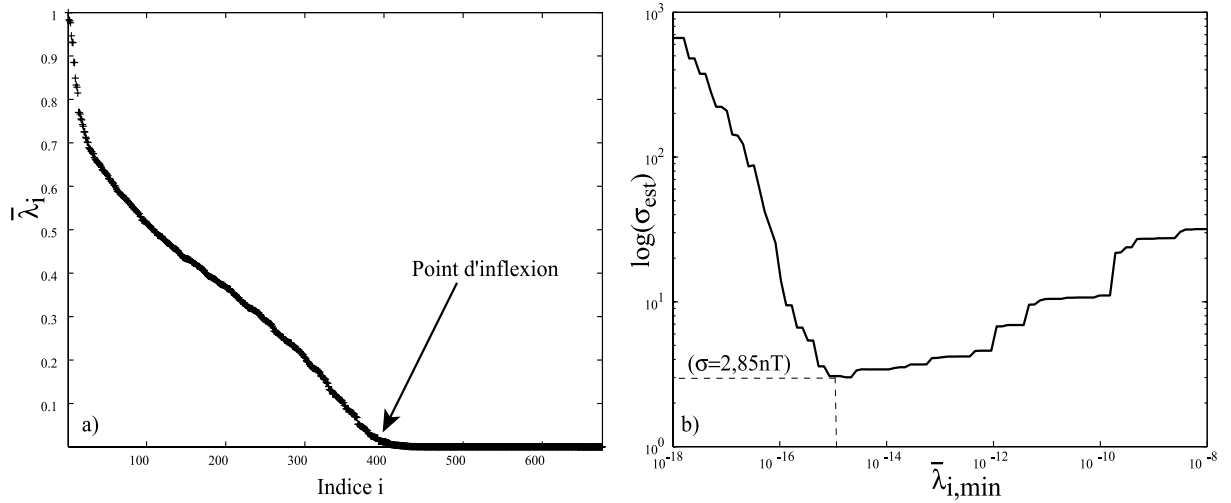


FIG. 4.5 – En *a*) on montre la décroissance des valeurs propres et la recherche du seuil pour lequel on considère  $\bar{\lambda}_i = 0$ . En *b*) on explore la valeur des résidus moyen  $\sigma_{est}$  pour différentes valeurs de  $\bar{\lambda}_{min}$  ( $C = 1/\bar{\lambda}_{min}$ ), en particulier le résidus minimum.

du déterminant. Plus nous retranchons de valeurs propres, moins le problème est numériquement difficile à calculer, ce que nous observons en premier lieu par la décroissance de  $\sigma$ . Après avoir atteint un minimum, l'augmentation de  $\sigma$  dénote la perte de résolution des données lorsque l'on retranche de plus en plus de valeurs propres. Il ne faut cependant pas se laisser abuser par ces résultats somme toute superficiels et conclure que la stabilité est obtenue pour le minimum de la courbe des résidus en fonction du seuil, car ce type d'étude ne dit rien ni sur la stabilité des coefficients, ni sur le bon déroulement numérique de la décomposition de Lanczos.

En l'occurrence, les coefficients sont très instables et varient fortement même lorsque l'on retranche les petites valeurs propres pour des seuils voisins. Ceci est indirectement visible sur la figure (4.5-b) où le minimum correspond à une variance de  $3nT$ , non de 5, démontrant que nous sommes en présence d'un cas d'*overfitting*. En traçant la valeur moyenne de l'intensité du champ modélisé sur une grille d'interpolation très fine nous constatons immédiatement que les points interpolés contiennent des valeurs aberrantes.

La décomposition en valeurs singulières possède donc quelques effets pervers qu'il faut garder à l'esprit. D'une part, en retirant les singularités numériques, la technique nous laisse croire en l'aboutissement correct d'une inversion. Or, dans certains cas, les modèles obtenus sont instables et ne peuvent pas être interpolés en tous points du domaine montrant que les valeurs propres gardées sont de valeurs numériques encore trop faibles. D'autre part, les algorithmes de décomposition en valeurs singulières apparaissent souvent comme *des boîtes noires* où l'on ne se rend compte qu'à la fin du processus des problèmes numériques engendrés par la décomposition de Lanczos elle-même. Une première vérification indispensable sera de s'assurer que le résultat du calcul de  $(\mathbf{I} - \mathbf{U}^T \mathbf{U})$  est bien nul.

La décomposition en valeurs singulières sera donc considérée comme une bonne alternative lorsque nous ne devons pas retrancher trop de valeurs propres ; dans un tel cas, seules quelques valeurs propres sont mal déterminées et l'instabilité du problème inverse peut être levée. S'il s'avère nécessaire de retrancher un grand nombre de valeurs propres, le problème résolu s'éloigne de plus en plus du problème initial et le modèle devient inexploitable en pratique, même si l'inversion est



stable. Le rejet de telle ou telle valeur propre induisant la destruction de combinaisons linéaires, il n'est pas facile d'estimer en fin de course la qualité du modèle obtenu et son éloignement du problème initialement posé.

#### 4.2.4 Inversion par chaîne de Markov

Nous avons présenté jusqu'à présent deux techniques similaires de résolution de problèmes inverses largement employées en géophysique et qui ont rapidement montré leurs limites pour la résolution des données magnétiques par le formalisme des harmoniques sur calottes sphériques.

Les différentes techniques d'inversion précédentes ont toutes montrées que dans le cas d'une répartition homogène des données sur une calotte il n'était pas possible de rechercher l'ensemble des coefficients nécessaires à la modélisation du champ à la précision requise de  $5nT$ . Puisque nous ne pouvions pas les déterminer, nous espérons pouvoir les estimer dans un sens probabiliste par une inversion par chaîne de Markov. Cette détermination n'a pas été possible pour les raisons que nous évoquons plus bas et les considérations qui suivent illustrent surtout certaines caractéristiques de SCHA que l'on peut déduire des chaînes de Markov.

#### Formulation de la chaîne de Markov

D'une manière générale, on suppose que les valeurs vraies  $\underline{m}$  des paramètres d'un modèle (4.4) se trouvent dans l'intervalle :

$$\boxed{m_{\text{inf}} \leq \underline{m} \leq m_{\text{sup}}} \quad (4.7)$$

Si nous n'avons aucune idée de ces paramètres, l'intervalle d'exploration est  $\mathbb{R}$ . En pratique, nous devons le restreindre et il représentera par conséquent une première information *a priori* sur le modèle qu'il faudra choisir de la façon la moins restrictive possible.

En considérant que les paramètres  $\underline{m}$  recherchés sont les coefficients de Gauss, on construit la chaîne de Markov de la façon suivante :

Dans le formalisme des chaînes de Markov, les paramètres  $\underline{m}$  sont considérés comme des variables aléatoires que l'on recherche par une loi de probabilité conditionnelle. Les paramètres sont déterminés à condition de connaître les données. Cette loi *a posteriori* est donnée par une loi de Bayes (1763) :

$$P_{\text{post}}(\underline{m} = \mu / \underline{d} = d_{\text{obs}}) = \frac{P(\underline{d} = d_{\text{obs}} / \underline{m} = \mu) P_{\text{prior}}(\underline{m} = \mu)}{\sum_{\mu \in \Omega} P(\underline{d} = d_{\text{obs}} / \underline{m} = \mu) P_{\text{prior}}(\underline{m} = \mu)} \quad (4.8)$$

où  $\Omega$  est le domaine discret de tous les paramètres inclus dans  $\mathbb{R}^N$  et  $N$  le nombre de paramètres. Cette expression de la loi *a posteriori* est fonction de la loi *a priori* sur les paramètres  $P_{\text{prior}}(\underline{m} = \mu)$ . Dans le contexte bayésien, la résolution du problème inverse revient à déterminer la loi *a posteriori* par une modification de la loi *a priori* en connaissant les données ([41]).

Dans notre cas, la loi *a priori* sera donnée par un échantillonnage dans l'intervalle (4.7) en supposant que chaque état discret de la variable  $m_i$  est équiprobable et que le paramètre recherché est contenu dans l'intervalle.

Le dénominateur de l'expression (4.8) requiert un nombre de calculs impossible à atteindre en pratique. Une manière élégante de contourner cette difficulté est de calculer la loi *a posteriori* comme la loi d'équilibre d'une chaîne de Markov ([88]). Cette loi d'équilibre est elle-même la limite d'une loi de transition  $P_{tr}$ . Il existe plusieurs algorithmes pour les lois de transition, notamment les algorithmes de Hasting-Métropolis et de Gibbs. Nous avons choisi l'algorithme de

Gibbs qui nécessite une discrétisation préalable des paramètres  $m_i$  dans l'intervalle d'exploration. La loi de transition s'écrit :

$$P_{tr} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right) = \frac{P_{post} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right)}{\sum_{i=1}^N P_{post} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right)} \quad (4.9)$$

et  $\underline{m}_{-i}$  représente le sous espace des paramètres  $\underline{m}$  moins le paramètre  $m_i$ . Dans le cas d'une loi *a priori*  $P_{prior}$  uniforme, la loi de transition  $P_{tr}$  est essentiellement la loi :

$$P \left( \underline{d} = \underline{d}_{obs} / \underline{m}_i = \underline{\mu}_{-i}, m_i \right)$$

Sachant que nous avons choisi une loi de Gauss pour les données, on a :

$$P_{tr} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right) = K e^{-\Psi^2 / (2\sigma^2)} \quad (4.10)$$

où

$$\Psi^2 = \|\underline{d}_{obs} - \mathbf{A}\underline{m}\|^2$$

et  $\sigma$  la variance de la loi normale de l'erreur  $\varepsilon$ . Comme notre problème est linéaire, on montre que si l'on introduit la valeur  $m_{i,\min}$  qui minimise  $\Psi^2$  par rapport au paramètre  $m_i$ , la loi conditionnelle  $P \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right)$  s'écrit :

$$P_{tr} \left( m_i, \underline{m}_{-i} \right) = \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha \frac{(m_i - m_{i,\min})}{2\sigma^2}} \quad (4.11)$$

avec  $\alpha = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})_{i,i}$  et :

$$m_{i,\min} = \frac{1}{(\mathbf{A}^t \mathbf{A})_{i,i}} \left[ (\mathbf{A}^t \underline{d}_{obs}) - \sum_{j=1, j \neq i}^N (\mathbf{A}^t \mathbf{A})_{i,j} m_j \right] \quad (4.12)$$

En pratique, on ne cherche pas la loi *a posteriori* complète, qui est une fonction de tous les paramètres, mais on se limite aux lois marginales de chaque paramètre et éventuellement à des lois de probabilité jointes entre deux (ou plusieurs) paramètres sélectionnés à l'avance. On peut montrer que la loi marginale est la moyenne de toutes les lois de transition pour un paramètre  $m_i$  donné.

Si l'échantillonnage du paramètre  $m_i$  est inadapté, la chaîne de Markov reste bloquée sur l'état du paramètre de l'itération précédente et l'exploration de tous les états possibles du paramètre est incomplet. Plutôt que de fixer directement les limites des intervalles, nous pouvons fixer en premier lieu un nombre  $P$  d'échantillons de la variable  $m_i$  que nous désirons. Par mesure de simplicité, ce nombre d'échantillons sera constant pour tous les paramètres. Puisque nous ne connaissons pas les bornes de l'intervalle (4.7), nous pouvons les déterminer moins arbitrairement en considérant le pas d'échantillonnage le plus cohérent avec la variance estimée par moindres carrés sur chaque paramètre. Une variance petite nous donnera un intervalle d'exploration plus petit et inversement. Comme nous nous sommes donné un nombre  $P$  d'échantillons, cette manipulation nous donnera automatiquement la valeur des encadrements  $m_{\inf}$  et  $m_{\sup}$ .

## Echantillonnage

Pour la détermination de l'échantillonnage, on peut analyser la sensibilité de la fonctionnelle  $\Psi^2$  au changement de la valeur d'un paramètre en étudiant sa courbure. Prenons  $\underline{m}_{est}$  l'ensemble des paramètres estimés par moindres carrés et  $\widehat{m}$ , l'ensemble des paramètres tels que  $\widehat{m} = \{ \underline{m}_{est, -i}, m_i \}$ . Seul le paramètre  $m_i$  est libre et prend une valeur quelconque entre  $m_{i,inf}$  et  $m_{i,sup}$ , les autres sont fixés et correspondent à leur valeur estimée par moindres carrés.

D'après Menke (1989), on trouve pour la variation de  $\Psi^2$  :

$$\Psi^2(\underline{m}_{est}) - \Psi^2(\widehat{m}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (A^T A)_{j,i} (m_{i,est} - \widehat{m}_i) (m_{j,est} - \widehat{m}_j)$$

La variation de  $\Psi^2$  correspondant à la variation du paramètre  $m_i$  s'écrit donc :

$$\Psi^2(m_{i,est}) - \Psi^2(\widehat{m}_i) = (A^T A)_{i,i} (m_{i,est} - \widehat{m}_i)^2 \quad (4.13)$$

Décomposons l'espace des paramètres de la façon suivante :

$$\underline{m} = \{ \underline{m}^{k \leq K_{max}}, \underline{m}^{k > K_{max}} \}$$

C'est-à-dire en séparant les paramètres dont nous avons pu obtenir une estimation par moindres carrés ordinaires et ceux dont nous ne savons rien, car nous n'avons pas pu pousser le développement au-delà de  $K_{max}$ . On peut encadrer les coefficients  $\underline{m}^{k \leq K_{max}}$  en supposant que l'intervalle (4.7) est centré sur  $\underline{m}_{est}$ . Pour les autres,  $\underline{m}^{k > K_{max}}$ , on considère que l'intervalle est centré sur  $\underline{0}$ .

On peut donc écrire :

$$\underline{m} = \underline{m}_{est} + p \underline{\delta}_m$$

avec  $p = -P, \dots, P$  où  $2P + 1$  représente le nombre d'échantillons sur chaque paramètre, et  $\underline{\delta}_m$  le pas d'échantillonnage que l'on cherche à caractériser. On cherche à trouver  $\underline{\delta}_m$  pour que :

$$|\Psi^2(m_{i,est}) - \Psi^2(\widehat{m}_i)| < \alpha \sigma_d^2$$

avec un nombre  $\alpha$  que l'on déterminera en fonction de la largeur de l'intervalle que l'on désire explorer et  $\sigma_d$  la variance sur les données. Puisque l'inversion par moindres carrés ne permet pas d'obtenir une variance estimée proche de la variance de  $5nT$ , on prend la valeur estimée par moindres carrés. Par exemple, d'après le paragraphe 4.2.2, pour un développement  $K_{max} = 12$ , on prend  $\sigma_d \sim 9nT$ .

En particulier, nous avons :

$$\underline{m}_{inf}^{k \leq K_{max}} = \underline{m}_{est} - P \underline{\delta}_m \quad \underline{m}_{sup}^{k \leq K_{max}} = \underline{m}_{est} + P \underline{\delta}_m$$

On trouve, en prenant deux valeurs consécutives de  $\widehat{m}_i$ , distantes de  $\delta_{m,i}$ , d'après (4.13) que :

$$\Psi^2(\widehat{m}_i + \delta_{m,i}) - \Psi^2(\widehat{m}_i) = (A^T A)_{i,i} (2p + 1) \delta_{m,i}^2 \text{ et } p \geq 0$$

de même :

$$\Psi^2(\widehat{m}_i - \delta_{m,i}) - \Psi^2(\widehat{m}_i) = (A^T A)_{i,i} (1 - 2p) \delta_{m,i}^2 \text{ et } p < 0$$

soit finalement, en regroupant les deux expressions, le paramètre  $m_i$  peut être échantillonné comme :

$$m_i^{k \leq K_{\max}} = m_{i,est} + \frac{\varepsilon \sigma_d}{\sqrt{(A^T A)_{i,i}}} \frac{k}{\sqrt{|2k|+1}}, k = -P..P \quad (4.14)$$

### Exemple synthétique

Nous avons appliqué l'inversion bayésienne sur le même ensemble de données que pour les moindres carrés ou la décomposition en valeurs singulières. Dans un premier temps, nous n'avons inclus dans la chaîne Markov que les paramètres trouvés par une inversion par moindres carrés pour un développement  $K_{\max} = 12$ , dans un second temps, nous avons recherché par une inversion bayésienne les coefficients jusqu'à un développement équivalant à  $K_{\max} = 15$ . Dans cette dernière manipulation, 87 paramètres du modèles sont complètement inconnus et sont centrés sur 0 et échantillonnés dans un intervalle  $[-5nT, 5nT]$ . Empiriquement, cet intervalle est susceptible de contenir effectivement la valeur *vraie*.

Le nombre d'itérations dans la chaîne de Markov est de 1000. Chaque paramètre a été exploré 100 fois de la façon prescrite par (4.14) dans l'intervalle  $[m_{\inf}, m_{\sup}]$  et nous avons pu obtenir les loi marginales, dont nous n'avons retenu que quatre exemples pour la discussion.

**Lois marginale** Sur la figure (4.6-1) nous illustrons différents types de lois marginales, certaines comme (1-c) peuvent être multimodales, d'autres comme (1-d) peuvent être relativement unimodales, en revanche on trouve le plus souvent des courbes de probabilité du type (1-b) qui n'ont pas de caractéristiques simples. Ces courbes de probabilité sont relativement intéressantes car elles révèlent deux choses. La première est que nous ne sommes pas en mesure de déterminer les paramètres  $\underline{m}$  de la façon la plus probable car la loi marginale seule n'a aucun sens, encore moins son maximum de probabilité car il existe plusieurs maxima possibles. Ceci révèle la présence d'importantes corrélations entre certains coefficients et prendre les maxima des probabilités de chaque paramètre ne nous donne pas, loin s'en faut, la meilleure résolution du champ. On constate que les moindres carrés ont donné une valeur du paramètre qui n'est pas, en générale, la plus probable. En second lieu, nous vérifions que certains paramètres de valeur insignifiante sont néanmoins bien déterminés (courbe 1-d). Cette observation vient corroborer l'idée que la méthode du  $F$ -test séquentiel de Efroymsou, largement utilisée dans l'inversion par *SCHA* ([44]) est risquée. Par cette méthode, on recherche les coefficients les plus significatifs statistiquement en fixant un seuil  $F$ , arbitraire, à partir duquel on les néglige en vérifiant qu'ils n'ont pas de poids dans la modélisation du champ. Cette technique pénalise donc le plus souvent les coefficients de petites magnitudes, qui peuvent pourtant être parfaitement déterminés, comme c'est le cas ici. Draper et Smith (1998) mettent en garde contre l'utilisation du  $F$ -test pour les régressions sur des bases de polynômes et il se pourrait bien que cette restriction s'applique également aux harmoniques sphériques sur calotte. Cette illustration rejoint un scepticisme assez courant dans la littérature concernant l'inversion par la méthode *SCHA* couplée au  $F$ -test (par exemple [64]).

**Probabilité sur les composantes du champ magnétique** Puisqu'il n'est pas possible d'extraire les valeurs des paramètres qui correspondent à la meilleure résolution, il nous faut recourir à l'analyse du champ magnétique. Pour chaque itération dans la chaîne de Markov, nous pouvons récupérer la valeur du champ magnétique en chaque point d'une grille préalablement définie sur la calotte. Cette valeur est ensuite stockée dans un histogramme de valeurs. Ceci nous

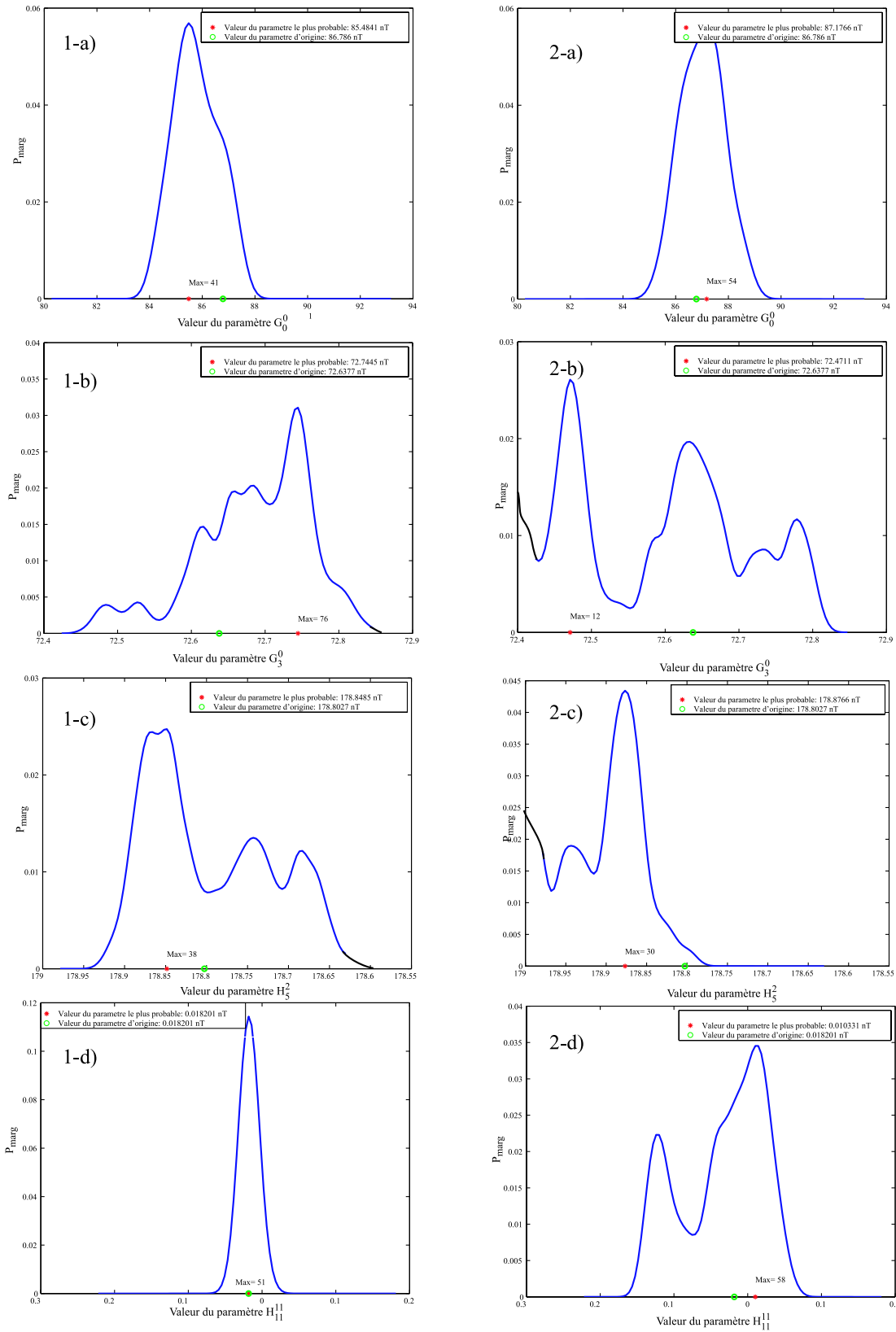


FIG. 4.6 – Exemples de probabilités marginales pour des coefficients de Gauss. Les probabilités a) sont obtenus pour  $K_{max} = 12$ , et en b) pour  $K_{max} = 15$ . Le développement influe sur la valeur des paramètres.

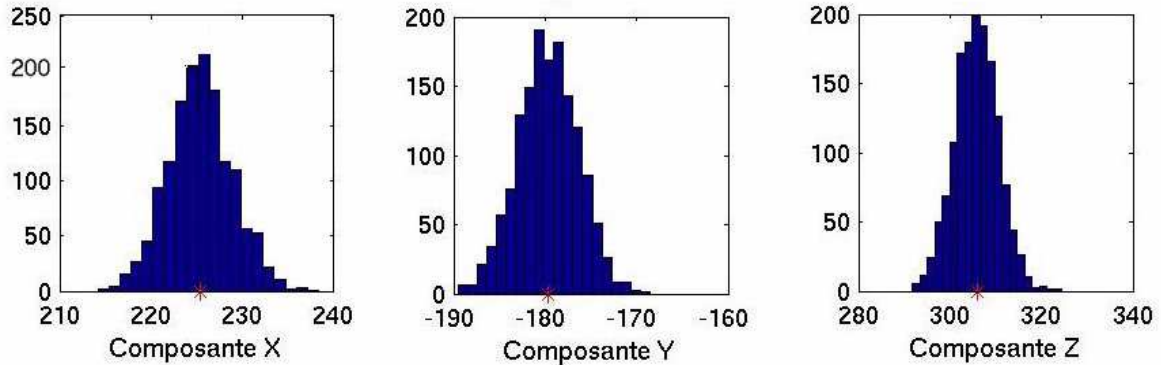


FIG. 4.7 – On montre un exemple de champ le plus probable qui peut être déterminé par une chaîne de Markov. A chaque itération sur les paramètres, la valeur du champ correspondante est classée dans un histogramme.

donne finalement une courbe de probabilité en chaque point dont il existe un unique maximum. On montre sur la figure (4.7) un exemple d’histogrammes obtenus par chaîne de Markov.

L’inconvénient certain de cette technique est que la valeur des paramètres est complètement transparente dans le résultat. Il faut donc pouvoir prévoir les coordonnées sur la calotte qui nous intéresse car le champ ne pourra plus être interpolé ultérieurement.

**Les développements supérieurs** L’objectif initial était de pouvoir déduire à partir d’un ensemble de coefficients de Gauss estimés des coefficients de Gauss non déterminés par une inversion par moindres carrés. L’inversion bayésienne ne calcule que des problèmes directs et ce problème est par conséquent inexistant. En revanche, d’autres problèmes, insolubles en pratique, surgissent. Le seul fait d’inclure des coefficients d’ordres supérieurs réorganise l’ensemble complet des coefficients de Gauss. La figure (4.6-b) illustre ce symptôme lorsque l’on ajoute 87 coefficients *a priori* inconnus. En raison des corrélations entre les paramètres, la condition *a priori* que les paramètres  $\underline{m}$  se trouvent dans l’intervalle  $m_{\text{inf}}, m_{\text{sup}}$  se vérifie de moins en moins à mesure que le développement augmente. Nous sommes donc confrontés à un réel problème quant à l’exploration de l’espace des paramètres. Les courbes (2-b) et (2-c) illustrent particulièrement ce phénomène et nous voyons distinctement qu’il reste des probabilités non nulles en dehors de l’intervalle d’exploration. Lorsque nous faisons un développement jusqu’à l’ordre  $K_{\text{max}} = 25$  presque tous les coefficients sont sortis de l’intervalle d’exploration et nous avons par conséquent perdu la seule information dont nous disposions. Le présupposé que la valeur est contenue dans un intervalle centré sur  $m_{\text{est}}$  n’est plus valable. Par conséquent, nous ne sommes plus en mesure non plus de déterminer un quelconque champ moyen comme sur la figure (4.7).

La seule manière d’éviter la discrétisation préalable des valeurs admissibles des paramètres est d’utiliser l’algorithme de Hasting-Métropolis, soit avec une loi uniforme sur un intervalle compact approprié, soit avec un algorithme de marche aléatoire. Outre le nombre d’itérations qui peut nécessiter la parallélisation du processus, l’expérience a montré que la chaîne de Markov restait souvent bloquée en raison des sauts parfois importants entre deux paramètres successifs pris au hasard et cette option a dû être abandonnée.

## Validité des chaînes de Markov

D'autres interrogations plus conceptuelles viennent se superposer aux résultats empiriques obtenus par chaîne de Markov. La première est cette contradiction entre les utilisateurs émérites des chaînes de Markov ([104]), qui préconisent cette démarche lorsque le nombre de paramètres est élevé, et le scepticisme de certains mathématiciens (D. Chauveau et M. Roussignol, 2002, communication personnelle) face à un aussi grand nombre de paramètres. D'autre part, il semblerait, toujours selon eux, que l'application des chaînes de Markov à un problème linéaire soit finalement peu utile. On préférera donc garder cette méthode pour les problèmes non-linéaires et pour inverser simultanément des données scalaires et vectorielles.

### 4.2.5 Commentaires sur l'inversion de données sur une surface

Par des techniques d'inversion sur des données réparties uniformément sur une surface, nous n'avons pas été en mesure de résoudre les données jusqu'à la précision du bruit dans les données. Le modèle final est donc incomplet et nous ne pouvons pas remplir correctement nos objectifs.

Les données magnétiques sur la région sont plus denses et parfois proches des sources crustales. Elles contiennent à la fois les grandes tendances que l'on retrouve dans un modèle global et des tendances propres à la région. On a donc coutume de retrancher ce modèle aux données de manière à faire apparaître l'anomalie du champ magnétique ([16]). Cette anomalie qui ne peut être définie que par rapport au modèle retranché n'a donc pas de signification physique concrète et ne peut, par conséquent, pas s'interpréter en termes de sources crustales uniquement. Selon la qualité du modèle global retranché qui peut varier d'une région à une autre, cette anomalie caractérisera aussi les sources du noyau non modélisées par le modèle *IGRF*. Le champ résiduel peut atteindre des valeurs nettement supérieures à celles que l'on pourrait attendre d'un champ crustal (plus de 500 nT sur l'Est de l'Asie pour l'époque 1980, [6]).

La terminologie de régionale appliquée à une modélisation de développement insuffisant est donc abusive car le développement des séries est souvent tel que l'on commence par modéliser les contributions du noyau non représentées par un modèle en harmoniques globales. Or ces contributions occultent massivement le modèle régional à proprement parler. Si le modèle *SCHA* ne converge pas assez vite, on observe des oscillations dans les résultats peu réalistes qui montrent que les données ne sont pas entièrement résolues. Un exemple extrême particulièrement parlant est donné par la modélisation de l'Asie ([6]), où on trouve en effet que la variance sur les données après inversion est de 115, 2nT pour  $X$ , 98.5nT pour  $Y$  et 110, 7nT pour  $Z$ .

Dans ce cas, la seule chose que nous puissions dire est que l'on a amélioré le modèle *IGRF* moyen sur la région mais pas que nous avons mis en lumière les structures régionales, pourtant contenues dans les données. Il est à ce titre intéressant de constater que dans les différents travaux concernant *SCHA*, l'on trouve sur les cartes d'anomalies magnétiques les oscillations caractéristiques des effets de la troncature des séries ([23], [63]). En termes d'interprétation géologique, les résultats sont peu nombreux. On trouve essentiellement des discussions sur de grandes calottes qui viennent corroborer l'existence d'anomalies déjà connues. Par exemple, De Santis et al. ([27]), Rotanova et Odintsov ([97]) s'accordent sur l'anomalie russe de Koursk que l'on distingue bien par la méthode des harmoniques sur calotte. Mais cette anomalie est l'une des plus importantes sur Terre et l'on ne se hasarde pas à discuter les anomalies de magnitudes plus faibles pourtant visibles sur les résultats car la conclusion est invariablement la même : «*much of this detail is spurious, reflecting noise in the grid averages rather than real short-wavelength features in the anomaly field*» ([27]). Pour des calottes de tailles plus petites, l'objectif se réduit souvent à la détermination d'un modèle de champ au-dessus d'une région plus précis que l'*IGRF*

([23]).

Remarquons enfin que les coefficients de Gauss de *SCHA* ne sont que dans de rares cas explicitement publiés ([27] ou [107] par exemple) car ils dépendent avant tout de la troncature des séries; une troncature à des ordres supérieurs réorganise tout l'ensemble de coefficients (cf paragraphe 4.2.4). Ils sont, et nous en sommes convaincus fort peu reproductibles si l'on change légèrement le jeu de données initiales ([6], montrent la valeur des coefficients de leur modèle et on remarque qu'à  $m$  fixé, cette valeur augmente avec le développement et la convergence de la série ne semble assurée que par sa troncature).

### 4.3 Inversion de données mesurées à différentes altitudes

La technique de *SCHA* est supposée être destinée à la représentation des trois composantes du champ magnétique et à leur interpolation dans tout l'espace limité par le cône et la calotte. Comparée aux méthodes régionales précédentes, *SCHA* apparaissait comme entièrement novatrice et répondait à un réel besoin né des récentes missions satellitaires. La nette amélioration conceptuelle de sa formulation par rapport aux techniques de modélisation antérieures, les postulats qui l'accompagnaient, comme la vérification de la divergence et du rotationnel nul dans un volume, la possibilité d'inclure des données prises à différentes altitudes, et le contexte scientifique du moment justifient pleinement l'engouement des premiers instants pour cette méthode.

Les premières études ([44]) se sont portées naturellement vers la modélisation des données disponibles sur une seule surface et furent poursuivies par la suite pour mettre en évidence le champ ([27], [33]) ou sa variation séculaire régionale dans des portions limitées du globe (par exemple, [45], [106]). Bien que les modèles de champ obtenus semblent parfois donner des résultats interprétables, il en est tout autrement pour la modélisation de la variation séculaire ([26], [64]) et on trouve finalement que peu d'exemples d'applications. De plus, pour le champ lui-même, il est vite apparu que les modèles obtenus à partir des données satellites ne pouvaient pas être prolongés à la surface terrestre ([67]) et que les modèles permettaient une interpolation entre les points de données mais pas d'extrapolation. Qu'en est-il donc si nous incorporons aux données satellites quelques données terrestres; sommes-nous en mesure d'interpoler le modèle?

La réponse à cette question manque cruellement d'expérience car on constate qu'il n'y a peu de modèles régionaux qui intègrent l'ensemble des données disponibles, à la fois terrestres, aériennes ou satellitaires ([23]). Dès les premiers instants, certains problèmes liés aux variations importantes d'altitude ont été évoqués, mais de manière timide ([44]). Il semble qu'il faille attendre une communication de Lowes pour que dans les esprits s'installe une plus forte suspicion concernant la validité de *SCHA* pour le prolongement de données. Depuis la conviction s'est installée ([67]) et à l'utilisation extensive à succéder un intérêt plus sporadique pour la méthode. L'absence d'une démonstration mathématique formelle des éventuels problèmes théoriques reste une réelle lacune, car l'interrogation n'est toujours pas levée. Nous ne sommes pas pour l'instant en mesure de formuler une démonstration satisfaisante, mais quelques arguments physiques simples couplés à un exemple synthétique réalisé dans des conditions optimales nous convaincront cependant que la méthode n'est pas viable pour la modélisation de données prises dans un volume.

#### 4.3.1 Exemple synthétique

Dans un premier temps nous avons voulu présenter un exemple synthétique du problème et tenté d'inverser des données uniformément réparties dans un volume conique d'ouverture  $\theta = \theta_0$  compris entre l'altitude terrestre  $r = 6371, 2$  et l'altitude satellitaire  $r = 6871, 2$ , altitude



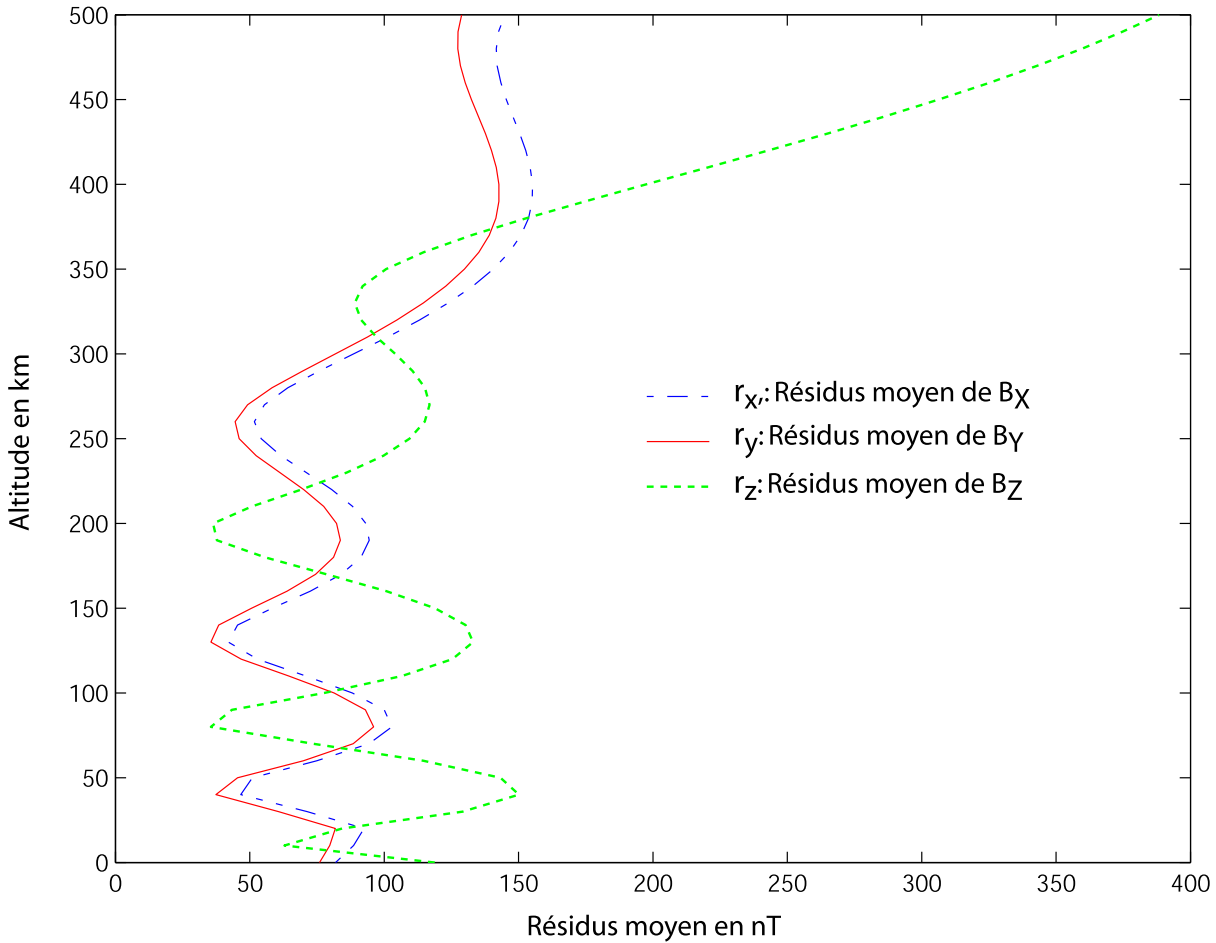


FIG. 4.8 – Variation des résidus moyens en nT pour chacune des composantes du champ magnétique. Nous observons une très nette dégradation avec l'altitude.

maximale du satellite CHAMP au-dessus de la France. La raison pour laquelle nous avons omis les altitudes supérieures, comme celles auxquelles sont prises les données du satellite ØRSTED (d'une altitude maximale au-dessus de la France de  $900\text{km}$ ), deviendra vite évidente.

La répartition homogène des données ajoutée à leur nombre nous assure que l'inversion est stable. De légers changements de la valeur du bruit injecté dans les données nous ont assurés du bon déroulement numérique de l'inversion. Le nombre de données s'élève à 1416 répartis sur 6 surfaces de 236 points échantillonnées tous les 100 km entre 0 et 500 km d'altitude. Le nombre de paramètres recherchés est de 256 ce qui correspond à un développement des séries jusqu'à  $K_{max} = 15$ .

Nous nous appuyerons sur les résultats de la figure (4.8) pour extrapoler les commentaires à n'importe quelle taille de calotte et pour des données comprises dans un intervalle en altitude quelconque. Les résidus moyens  $r_x$ ,  $r_y$  et  $r_z$ , propres à chaque composante et à chaque surface sont représentés. Dans le cas idéal, le résidu moyen total à n'importe quelle altitude  $r$  aurait pris la valeur du bruit ajouté aux données, soit  $\bar{R}(r) = 5nT$ .

En premier lieu, nous constatons que les résidus à la surface terrestre ont été largement accrus par l'insertion de données d'altitudes très différentes. On trouve en moyenne pour les

composantes  $X$  et  $Y$  du champ un résidu moyen d'environ 80 nT et 100 nT pour  $Z$  ; nous sommes très loin du résultat escompté. En comparaison de l'intensité moyenne du champ théorique sur cette surface, que l'on estime environ à  $1000nT$ , le résidu moyen  $\overline{R}$  pour les trois composantes du champ sur cette surface correspond à peu près à 10% du champ que l'on cherche à modéliser, ce qui est bien évidemment exécrable.

Entre 0 et 300 km d'altitude les résidus moyens sont quasiment constants. Le champ magnétique décroît avec l'altitude et un résidu qui ne diminue pas avec l'altitude montre que le modèle se dégrade également vers le haut. Entre 300km et 500km, la situation est très claire et est largement illustrée par l'augmentation des résidus pour chacune des composantes. Cette augmentation, couplée avec la décroissance naturelle du champ conduit à la conclusion que l'erreur de modélisation augmente démesurément.

Un constat simple s'impose donc : dans une configuration des plus favorables nous n'avons pas été en mesure de modéliser le champ magnétique lorsque les données recouvraient plusieurs altitudes.

### 4.3.2 Discussion générale sur la variation en altitude

Pour tenter de trouver une explication plausible au phénomène, on doit retourner un instant sur les variations des racines  $n_k$  avec l'ouverture du cône et aux expressions des composantes du champ magnétique sur la calotte. A titre indicatif, nous avons montré sur la figure (3.1) les racines  $n_k$  dans l'ordre croissant pour différentes tailles de calottes. Pour chaque géométrie, la reconstruction des variations naturelles d'un champ de potentiel se fait par une somme infinie des  $(a/r)^{n_k+1}$ , pour les contributions internes. Il paraît difficile cependant d'envisager la représentation de la décroissance d'un champ en  $(a/r)^l$  entier par une somme de fonctions de  $(a/r)^{n_k}$  non entier supérieurs à  $l$ , surtout lorsque ces degrés prennent des valeurs aussi importante que dans le cas d'une calotte de la taille de la France. La démonstration mathématique n'est pas aisée car il n'existe pas de relations analytiques simples entre l'angle d'ouverture  $\theta_0$  et les valeurs de  $n_k$  qui de plus dépendent de  $m$ . Nous n'avons donc pas de démonstration claire à proposer, bien que nous disposions d'arguments mathématiques forts qui appuient cette présomption. Le plus intuitif part du principe que, implicitement, les bases de fonction radiales de Haines supposent que ([24]) :

$$\sum_{l=m}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_k^m \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k+1} \quad (4.15)$$

où  $a_n$  et  $a_k^m$  sont des coefficients de type Fourier que nous n'avons pas besoins d'explicitier pour le moment mais dont nous pouvons dire qu'ils doivent être indépendants de  $r$  ; les séries sont convergentes pour  $r < a$ . Rappelons qu'en théorie des harmoniques sphériques, la série infinie de gauche est un développement qui caractérise les potentiels newtoniens de sources situées à l'intérieur de la sphère  $r = a$ . Si le membre de droite n'est pas égal au développement de Legendre, alors les harmoniques sur calotte sphérique ne permettent pas de reproduire la décroissance naturelle d'un champ de potentiel.

Or il apparaît clair que le membre de droite pour de petites calottes converge beaucoup plus vite vers 0 que le membre de gauche à mesure que l'altitude augmente. De Santis voyait dans la version tronquée de cette expression l'origine des problèmes d'altitudes. Nous verrons cependant plus loin l'incohérence de l'expression des coefficients de Gauss qu'implique la construction des bases radiales selon Haines. Nous pourrions conclure que (4.15) n'est pas mathématiquement viable sur l'intervalle ouvert  $r \in [R, \infty[$ .

Il n'en reste pas moins que le membre de gauche de (4.15) puisse être approché correctement pour des données contenues dans de petits intervalles d'altitudes et pour des calottes de grande ouverture car les racines  $n_k$  varient lentement avec le développement  $k$ . Ainsi l'intervalle en altitude où (4.15) trouve une approximation raisonnable varie en fonction de la géométrie de la calotte, une grande calotte augmente le domaine de validité, une petite le diminue. Toutes ces considérations ne contredisent nullement les conclusions de Haines. Car dans son article original de 1985 ([44]) il notait l'existence de variations avec l'altitude, notamment lors des prolongements. Il considérait cependant l'erreur comme suffisamment négligeable pour affirmer que *SCHA* permettait de prolonger les données en altitude et se servait de ces conclusions pour étendre cette validité à n'importe quel type de calotte.

## Chapitre 5

# Problèmes soulevés par SCHA

Nous avons maintenant de nombreux indices concernant l'inaptitude analytique de *SCHA* à modéliser un champ magnétique et ses variations radiales. Ces indices manquent cruellement de l'appui d'une démonstration mathématique indiscutable. Compte tenu de l'interdépendance des variables  $n_k$  avec  $\theta_0$  et  $m$  nous cherchons à détecter l'incohérence qu'amène cette formulation sur l'expression analytique de certains paramètres physiques. Nous considérerons cette incohérence comme un argument suffisant pour nos conclusions.

La première partie du travail suivant n'est pas originale, car elle est largement inspirée des travaux de De Santis ([28]). Elle néanmoins mérite d'être détaillée car elle est essentielle pour la suite. Nous nous en servons pour réaliser des rotations sur les coefficients de Gauss lorsque nous changeons de système de référence sur la sphère.

La seconde partie concernant l'invariance du champ est nettement moins connue et donne des relations pertinentes entre les coefficients de Gauss *globaux* et les coefficients de Gauss *locaux* (*SCHA*). Si l'on montre que les coefficients de Gauss qui interviennent dans la décomposition en harmoniques sur calotte peuvent s'écrire comme une combinaison des coefficients de Gauss de la décomposition en harmonique ordinaire, alors, si la théorie de *SCHA* est valide, on doit être en mesure de reconstruire le modèle de champ en n'importe quel point de la calotte. L'aboutissement de la démonstration nécessite néanmoins quelques développements préliminaires.

### 5.1 Rotation des coefficients de Gauss globaux

Les coefficients de Gauss tels que nous les connaissons, par les modèles *IGRF* par exemple, sont écrits dans le référentiel géocentrique. Pour pouvoir comparer les coefficients de Gauss d'un développement en harmoniques globales et ceux d'un développement en harmoniques sur calotte, il convient de les écrire dans le même système de référence.

On cherche donc à écrire les harmoniques sphériques ordinaires exprimées en coordonnées géocentriques  $\mathcal{R}(r, \lambda, \theta)$  dans un nouveau repère centré sur le pôle de notre calotte  $\mathcal{R}(r, \Lambda, \Theta)$ .

Les harmoniques sphériques  $Y_l^m$  et  $\tilde{Y}_l^m$  (où le tilde est un symbole qui indique une rotation, voir annexe D) à un ordre  $m$  et un degré  $l$  donnés peuvent être décomposées selon leur forme en cosinus ou en sinus. Dans les deux repères  $\mathcal{R}(r, \lambda, \theta)$  et  $\mathcal{R}(r, \Lambda, \Theta)$ , elles prennent les formes respectives :

$$\begin{cases} Y_l^{c,m} = \cos(m\varphi)P_l^m(\cos\theta) \\ Y_l^{s,m} = \sin(m\varphi)P_l^m(\cos\theta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tilde{Y}_l^{c,m} = \cos(m\Lambda)P_l^m(\cos\Theta) \\ \tilde{Y}_l^{s,m} = \sin(m\Lambda)P_l^m(\cos\Theta) \end{cases}$$

Les harmoniques sphériques ordinaires dans le repère géocentrique et dans le repère de la calotte vérifient bien entendu les mêmes conditions d'orthogonalité.

Le théorème d'expansion ([20], section 17.1) permet de représenter les harmoniques définies dans le système  $(\theta, \varphi)$  comme des combinaisons linéaires des harmoniques développées dans le système  $(\Lambda, \Theta)$ . Soit :

$$P_l^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} = \sum_{\mu=0}^l \left[ \cos(\mu\Lambda) \begin{Bmatrix} a_{l,\mu}^m \\ c_{l,\mu}^m \end{Bmatrix} + \sin(\mu\Lambda) \begin{Bmatrix} b_{l,\mu}^m \\ d_{l,\mu}^m \end{Bmatrix} \right] P_l^\mu(\cos \Theta)$$

qui exprime le fait que le sous-espace vectoriel des harmoniques de degré  $l$  donné est invariant par rotation sur la sphère. On peut donc exprimer les fonctions  $\{Y_l^c, Y_l^s\}$  par rapport à leurs homologues  $\{\tilde{Y}_l^c, \tilde{Y}_l^s\}$  avec :

$$Y_l^c = \begin{pmatrix} Y_l^{c,0} \\ Y_l^{c,m} \end{pmatrix}$$

respectivement pour  $Y_l^s, \tilde{Y}_l^c$  et  $\tilde{Y}_l^s$ .

Soit, en notation algébriques :

$$Y_l^c = A\tilde{Y}_l^c + B\tilde{Y}_l^s \quad (5.1)$$

$$Y_l^s = C\tilde{Y}_l^c + D\tilde{Y}_l^s \quad (5.2)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  sont les matrices de rotation constituées respectivement par les coefficients,  $a_{l,\mu}^m, b_{l,\mu}^m, c_{l,\mu}^m$  et  $d_{l,\mu}^m$ .

A partir des propriétés d'orthogonalité on peut déduire en particulier certaines propriétés des matrices de rotation essentielles pour la vérification numérique des transformations :

$$AC^T + BD^T = 0 \quad (5.3a)$$

$$AA^T + BB^T = I \quad (5.3b)$$

$$CC^T + DD^T = I \quad (5.3c)$$

Si maintenant nous écrivons le potentiel global  $V(r, \theta, \varphi)$  sous la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (g_l^m Y_l^{c,m} + h_l^m Y_l^{s,m}) \quad (5.4)$$

et le potentiel global dans le système  $\mathcal{R}(r, \Lambda, \Theta)$  de la même manière :

$$\tilde{V}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=1}^L \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l (\tilde{g}_l^m \tilde{Y}_l^{c,m} + \tilde{h}_l^m \tilde{Y}_l^{s,m}) \quad (5.5)$$

nous pouvons trouver l'expression des coefficients de Gauss globaux  $(g_l, h_l)$  dans le repère de la calotte. On doit donc résoudre au degré  $l$  fixé de l'harmonique, le système d'équations suivant :

$$\sum_{m=0}^l (g_l^m Y_l^{c,m} + h_l^m Y_l^{s,m}) = \sum_{\mu=0}^l (\tilde{g}_l^\mu \tilde{Y}_l^{c,\mu} + \tilde{h}_l^\mu \tilde{Y}_l^{s,\mu})$$

En utilisant les égalités (5.1) et (5.2), ceci revient à résoudre pour chaque degré  $l$  :

$$\begin{aligned} g_l &= A^T \tilde{g}_l + C^T \tilde{h}_l \\ h_l &= B^T \tilde{g}_l + D^T \tilde{h}_l \end{aligned}$$

### 5.1.1 Résolution numérique

Les coefficients de rotation,  $a_{l,\mu}^m, b_{l,\mu}^m, c_{l,\mu}^m$  et  $d_{l,\mu}^m$ , sont obtenus par régression linéaire des expressions (5.1) et (5.2). On réalise une inversion par moindres carrés ordinaires sur une grille quasi-régulière sur la sphère au sens de Dufour (section 4.1). Rappelons que ce maillage, hautement précis sur la sphère entière, nous permet d'obtenir une matrice diagonale dont l'inversion est stable.

Le choix du maillage de la grille doit être avisé et dépend du degré maximum  $n$  contenu dans les harmoniques sphériques. Nous choisissons le nombre de points (donc l'ordre du maillage) de telle sorte qu'il vérifie pleinement le théorème de Nyquist. Chaque harmonique sphérique est ainsi représentée par un échantillonnage de période au plus deux fois plus petite. A titre d'exemple, pour un modèle de type IGRF, le degré maximum étant  $n = 10$ , on trouve que la longueur d'onde minimale est de  $\lambda \sim 36^\circ$  ([16]) (soit environs 4000km) doit être échantillonnée au moins avec un pas de  $\lambda \sim 18^\circ$ . Pour un champ IGRF quelques centaines de points suffisent, en revanche la rotation des coefficients de Gauss d'un modèle plus complet de type Cain ([17]) ou CMP3 ([98]) nécessitera un pas d'échantillonnage plus fin.

### 5.1.2 Test des identités

Nous pouvons vérifier le comportement de l'inversion par moindres carrés en étudiant les deux expressions :

$$\begin{aligned} \delta(a, b) &= \left| \sqrt{\sum (a_\mu^2 + b_\mu^2)} - 1 \right| \\ \delta(c, d) &= \left| \sqrt{\sum (c_\mu^2 + d_\mu^2)} - 1 \right| \end{aligned}$$

Cette vérification nous est suggérée par les relations analytiques (5.3b) et (5.3c). D'après ces deux identités, les paramètres  $\delta(a, b)$  et  $\delta(c, d)$  doivent être rigoureusement égaux à 0 si la convergence est atteinte. Numériquement, nous avons obtenu des valeurs de  $\delta < 10^{-15}$  et nous voyons pour la première fois une manifestation concrète de l'excellence du maillage de Dufour sur une sphère entière. Pour une telle précision, et pour optimiser le calcul, une grille de 472 points s'est avérée suffisante.

### 5.1.3 Comparaison des coefficients obtenus

Pour la validation des résultats, nous avons comparé la valeur de nos coefficients à ceux déjà disponibles dans la littérature ([10], [28]). La comparaison avec les coefficients proposés par De

Santis et al. ([28]) est numériquement parfaite. Il s'agissait de trouver les coefficients de Gauss dans le nouveau repère centré sur le centre de l'Europe ( $12^\circ E, 48^\circ N$ ) à partir des coefficients *DGRF1990*.

La comparaison avec la méthode de Bernard et al. (1969) est cependant nettement moins satisfaisante, et montre des erreurs allant parfois jusqu'à  $0.1nT$ . On a prit soin, comme le souligne De Santis et al. ([28]), de modifier le signe erroné de  $G_4^0$ . Etant donnée la technique à main levée employée par Bernard, nous n'avons pas dans un premier temps considéré ces erreurs importantes. Les coefficients seront validés par le calcul de l'invariance du champ.

### 5.1.4 Vérification de l'invariance du champ

Si nos coefficients sont valides, on doit pouvoir vérifier l'invariance du champ : le champ magnétique calculé sur une région précise de l'espace doit être indépendant du système de référence choisi. Nous avons donc calculé dans un premier temps le modèle *IGRF90* centré sur la France. Puis, par rotation des coefficients de Gauss dans le repère ( $2^\circ E, 48^\circ N$ ), nous avons obtenu le nouvel ensemble des coefficients de Gauss. Nous avons ensuite recalculé le champ dans le nouveau système de référence. On constate que la valeur des résidus sur la grille d'inversion est inférieure à  $10^{-11} nT$ . L'invariance du champ est donc vérifiée de manière quasi-exacte. Un dernier test enfin consiste à recalculer le champ sur une grille plus fine que la grille utilisée pour déterminer les matrices de rotation. L'erreur n'excède pas  $10^{-10} nT$  pour les différences  $\delta B_x, \delta B_y$  et  $\delta B_z$ . Une manipulation identique appliquée aux coefficients de Bernard nous convainc que nos coefficients sont plus précis.

## 5.2 Des coefficients de Gauss radialement dépendants

Les coefficients de Gauss, qu'ils soient locaux ou globaux, sont, à  $r$  fixé, les coefficients de Fourier du potentiel ou des composantes du champ dans la base des fonctions  $P_n^m(\theta) \cos(m\varphi)$  et  $P_n^m(\theta) \sin(m\varphi)$  (voir section 2.3). On sait que dans la modélisation globale ils sont indépendants de la variable  $r$ , et il est hautement souhaitable qu'il en soit de même dans la modélisation locale.

Rappelons que le problème complet aux conditions aux limites n'a pas été posé par Haines. En l'absence de ces conditions, nous proposons donc d'égaliser les potentiels écrits en harmoniques sphériques ordinaires et en harmoniques sphériques sur calotte afin de ne pas sortir du cadre des hypothèses qu'il avait lui-même fixées.

On pose, pour le potentiel global des contribution internes écrit dans le repère de la calotte :

$$\tilde{V}_g = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \left( \tilde{g}_l^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_l^m \sin(m\varphi) P_l^m(\cos\theta) \right)$$

avec  $\{\tilde{g}_l^m, \tilde{h}_l^m\}$  les coefficients de Gauss globaux transformés dans le repère calotte et  $P_l^m(\cos\theta)$  les fonctions de Legendre de degrés  $n$  et d'ordres  $m$  entiers.

D'après (2.8) le potentiel  $V_l$  écrit dans la base des harmoniques sphériques sur calotte prend l'expression :

$$V_l = a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} \left( G_{n_k}^{i,m}(t) \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m}(t) \sin(m\varphi) \right) P_{n_k}^m(\cos\theta)$$

avec  $P_{n_k}^m(\cos\theta)$  les fonctions de Legendre généralisées d'ordres  $m$  entiers mais de degrés  $n_k$  réels. On écrira pour plus de commodité  $P_{n_k}^m(\theta)$  plutôt que  $P_{n_k}^m(\cos\theta)$ .

En utilisant les propriétés des séries de Fourier, on montre que les fonctions de Legendre  $P_l^m(\theta)$  à  $m$  fixé peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires des fonctions de Legendre généralisées sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$  de sorte que :

$$\boxed{P_l^m(\theta) = \sum_{k=m}^{\infty} A_k^{m,l} P_{n_k}^m(\theta)} \quad (5.6)$$

Cette relation, lorsque le développement est infini, n'est pas unique en raison de la dépendance linéaire des deux familles de fonctions  $P_{n_k}^m(\theta)$  à  $m$  fixé. L'unicité n'existe que dans le cas particulier où l'on ne considère qu'une seule base de fonction et on peut montrer que le coefficient  $A_k^{m,l}$  est déterminé d'une façon unique par :

$$A_k^{m,l} = \frac{\langle P_{n_k}^m(\theta), P_l^m(\theta) \rangle_{\mathcal{L}^2([0, \theta_0])}}{\|P_{n_k}^m(\theta)\|^2} \quad (5.7)$$

Dans le cas de *SCHA* cette égalité n'est plus valable en raison de la présence des deux bases complètes de Legendre et nous devons en pratique rechercher la matrice de passage  $A_k^{m,l}$  numériquement par régression linéaire, par exemple ([29]). Ceci pourra poser d'indéfectibles problèmes numériques si le développement en  $k$  est trop important.

De plus, on peut écrire :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} = \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{l-n_k}$$

Sur une surface  $\partial\Omega_r$  de rayon  $r$  constant du domaine  $\Omega$  défini par :

$$\Omega = \{a \leq r \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$$

nous devons légitimement retrouver que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| V_l^k(r, \theta, \varphi) - \tilde{V}_g(r, \theta, \varphi) \right\|_{\partial\Omega_r}^2 = 0$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus et la relation (5.6), la convergence des potentiels au sens de la norme au carré sur  $\partial\Omega_r$  conduit, pour chaque indice  $k$ , à :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l-n_k} A_k^{m,l} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_l^m \\ \tilde{h}_l^m \end{array} \right\}} \quad (5.8)$$

Nous obtenons une expression plus générale que celle proposée par De Santis qui ne considère que le cas particulier où  $r = a$  ([29]). La matrice de passage  $A_k^{m,l}$  explicitée par (5.7) par exemple (car il y a le mélange plus compliqué du mélange des deux bases) est indépendante de  $r$ , donc le système d'expression (5.8) pour chacun des ensembles de coefficients de Gauss  $G_{n_k}^{i,m}$  et  $H_{n_k}^{i,m}$  est en opposition manifeste avec le postulat de départ de la non-dépendance des coefficients de Gauss avec l'altitude.

Nous pouvons maintenant réinterpréter les discussions du paragraphe 4.3 à la lumière de ces résultats. Nous pouvons confirmer que *SCHA*, si l'on ne tient compte que des coefficients internes (point sur lequel nous reviendrons), ne permet pas la manipulation de données prises à différentes altitudes car les coefficients de Gauss déterminés à une surface ne sont pas valables



sur une surface d'altitude différente. Ceci explique aussi les problèmes rencontrés par Haines lors des prolongements vers le haut [44]).

Si on veut obtenir à tout prix le champ calculé à la surface  $r = b$  à partir de données inversées à la surface  $r = a$ , une pratique est de manipuler les coefficients de Gauss globaux en conséquence et de les pondérer par  $(a/b)^{l-n_k}$ . On obtient alors une bien meilleure approximation qu'avec l'utilisation de coefficients de Gauss locaux uniques sur les deux surfaces  $a$  et  $b$ . Cette pratique désespérée, qui fait fi des considérations théoriques élémentaires, ne nous sauve cependant pas lorsque l'on prétend inverser des données appartenant à plus de deux surfaces. Dans ce cas, qui n'est rien d'autre que le cas pour lequel *SCHA* fut conçue, l'inversion ne peut donner qu'un compromis plus ou moins fiables selon la différence entre l'altitude minimum et l'altitude maximum contenue dans les données et l'ouverture de la calotte. Nous pouvons d'ailleurs vérifier que lorsque l'angle  $\theta_0$  augmente les racines  $n_k$  diminuent et le rapport  $(a/b)^{l-n_k}$  décroît plus lentement pour les grandes calottes. Ceci explique les résultats considérés comme corrects obtenus pour de grandes calottes sphériques (Haines).

### 5.3 Le problème du compromis entre les composantes horizontale et radiale

Nous pouvons appliquer le même raisonnement sur les composantes du champ magnétique. Dans le domaine  $\Omega$  défini plus haut, les deux représentations, globale et locale, doivent fournir les mêmes valeurs du champ.

Puisque ceci n'est pas vrai sur l'intervalle  $r \geq a$  comme nous venons de le voir, cherchons à vérifier l'équivalence du champ en  $r = a$ . Le problème sera donc résolu sur la surface  $\partial\Omega_a$  du domaine précédent. Plusieurs modèles régionaux ne considèrent qu'une seule surface pour l'application de *SCHA* et les conclusions que nous tirerons seront applicables à ces modèles (de manière qualitative, car quantitativement, les résultats sont fortement dépendants de l'ouverture de la calotte sphérique).

En tout points d'un domaine  $\partial\Omega_a$  défini par :

$$\partial\Omega_a = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \theta_0\}$$

on cherche à obtenir les expressions des coefficients de Gauss qui vérifient l'invariance du champ.

A partir de la série (5.6), nous écrivons :

$$\boxed{\frac{dP_l^m(\theta)}{d\theta} = \sum_{k=m}^{\theta} A_k^{m,l} \frac{dP_{n_k}^m(\theta)}{d\theta}}$$

Par le principe utilisé pour les potentiels, un calcul simple montre que l'égalité des composantes  $X$  du champ en  $r = a$  conduit à la relation entre les coefficients de Gauss :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} A_k^{m,l} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_l^m \\ \tilde{h}_l^m \end{array} \right\}} \quad (5.9)$$

Cette expression est parfaitement compatible avec le système (5.8).

L'égalité des composantes  $Y$  des deux développements aboutit à la même relation. Les relations analytiques obtenues avec le potentiel et les composantes horizontales du champ sont donc

bien conformes. Ceci est à peu près évident car poser  $V_l = \tilde{V}_g$  sur  $\partial\Omega_a$ , comme nous l'avons fait dans la section (5.2), implique  $\overrightarrow{grad}_s V_l = \overrightarrow{grad}_s \tilde{V}_g$  sur  $\partial\Omega_a$ .

Le système (5.9) est donc équivalent à l'écriture :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( X_l^k - \tilde{X}_g \right) + \left( Y_l^k - \tilde{Y}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 = 0 \quad (5.10)$$

avec  $(X_l^k, Y_l^k)$  les composantes  $B_x$  et  $B_y$  du champ magnétique sur la base locale calculées pour une troncature des séries à l'indice  $k$  et  $(\tilde{X}_g, \tilde{Y}_g)$  les composantes horizontales du champ magnétique dans la base globale centrées sur le pôle de la calotte.

En revanche, en vertu de l'expression de la dérivée des fonctions radiales, l'égalité des composantes  $Z$ , après avoir écrit  $l + 1 = l - n_k + n_k + 1$ , conduit à la détermination des coefficients de Gauss locaux à partir des coefficients globaux par :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{l=m}^{\infty} \left( 1 + \frac{l-n_k}{n_k+1} \right) A_k^{m,l} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_l^m \\ \tilde{h}_l^m \end{array} \right\} \quad (5.11)$$

De la même manière que précédemment, cette écriture est équivalente à :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( Z_l^k - \tilde{Z}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 = 0 \quad (5.12)$$

La comparaison de la forme des coefficients écrit par (5.9) et par (5.11) nous amène à conclure que les composantes horizontales et verticales du champ ne peuvent pas s'écrire en termes des même coefficients de Gauss. *SCHA* est donc, à altitude constante, un compromis entre la résolution des composantes horizontales du champ magnétique et sa composante radiale. Notons que l'éloignement des valeurs trouvées par les systèmes (5.9) et (5.11) augmente avec l'indice  $k$  du développement en raison de la croissance des  $n_k$  avec  $k$ .

Cette dernière démonstration explique *a posteriori* pourquoi, sur la figure (4.8), les résidus  $r_x$  et  $r_y$  montrent des variations d'altitude tout à fait comparables alors que le résidu  $r_z$  de la composante  $Z$  adopte un comportement tout à fait singulier.

Nous avons voulu vérifier la cohérence des expressions (5.9) et (5.11) sur un modèle synthétique. Dans un premier temps, nous avons recherché la matrice de passage permettant d'exprimer les fonctions de Legendre associées par une combinaison linéaire de fonctions de Legendre généralisées (5.6). Etant donné la non-orthogonalité des bases de fonctions sur la calotte, la matrice de passage diffère de l'expression (5.7) qui a le mérite d'être analytique et de ne poser aucun problème particulier. On préfère donc rechercher la matrice par régression linéaire ([29]). Nous avons choisit le même angle d'ouverture que dans les travaux synthétiques précédents, soit  $\theta_0 = 5^\circ$ . Un échantillonnage régulier en  $\cos \theta$  sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$  nous assure une inversion optimale et nous n'avons aucun mal à reconstituer les fonctions de Legendre associées avec une erreur maximale de  $10^{-12}$  sur l'intervalle pour un développement  $Kmax = 15$ .

Les coefficients de Gauss décrivant le modèle de la différence entre *CAIN* et *DGRF1960* peuvent être obtenus par simple différence des coefficients de chacun des modèles pour des degrés  $n$  et  $m$  similaires. Les coefficients subissent ensuite une rotation du repère géocentrique au repère calotte dont le centre  $C$  à été fixé à  $(2^\circ E, 47^\circ N)$ . Enfin, nous recherchons séparément les coefficients théoriques locaux donnés respectivement par (5.9) et par (5.11).

En utilisant la grille de Dufour (section 4.1) nous nous donnons un maillage sur lequel nous recalculons le champ magnétique exprimé sur la base local par (2.9) avec les coefficients de Gauss locaux. Nous regardons ensuite pour les trois composantes les résidus engendrés par la différence

entre le modèle original et le modèle reconstruit localement . Pour chacune des expressions, les résultats sont présentés figure (5.1).

Le constat est sans appel : si avec les relations (5.9) nous parvenons à reconstruire quasi-exactement les composantes horizontales  $X$  et  $Y$  (résidu maximum de  $0,2nT$  au centre de la calotte), la composante  $Z$  n'est pas du tout résolue. Cette remarque s'applique dans l'autre sens : lorsque nous utilisons (5.11), la composante  $Z$  est parfaitement reconstruite (résidu maximum de  $0,2nT$  sur la calotte) mais la reconstruction des composantes horizontales  $X$  et  $Y$  fait visiblement défaut.

Il est de ce fait intéressant de constater que les résidus ainsi obtenus ne sont en rien comparables aux résidus obtenus par la méthode des moindres carrés ordinaires qui trouve un excellent compromis malgré l'incompatibilité manifeste des coefficients de Gauss (figure 4.4) et permet par conséquent de résoudre au mieux les trois composantes simultanément.

Ce compromis n'est pas quantifiable et dépend de l'ouverture de la calotte. Nous pouvons juste affirmer que les expressions (5.9) et (5.11) coïncident uniquement lorsque les  $n_k$  sont entiers égaux à  $l$ , ce qui n'est rien d'autre que le cas de la sphère entière. Il est opportun de mentionner que Lowes semble être arrivé à une conclusion parfaitement similaire mais par des moyens dont nous ignorons malheureusement tout ([67]).

Les résolutions de (5.9) et de (5.11) séparément sont équivalentes à des minimisations de (5.10) et de (5.12) par moindres carrés ordinaires. L'excellence des résidus pour les composantes  $X$  et  $Y$  par (5.9) ou de  $Z$  par (5.11) sur la figure (5.1) ne doit donc pas nous leurrer. Même dans le cas numérique où les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont résolues avec les mêmes coefficients de Gauss, une inversion par moindres carrés ordinaires nous donnera un résidu qui vérifiera :

$$\left\| \left( X_l^k - \tilde{X}_g \right) + \left( Y_l^k - \tilde{Y}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 + \left\| \left( Z_l^k - \tilde{Z}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2 < \left\| \left( X_l^k - \tilde{X}_g \right) + \left( Y_l^k - \tilde{Y}_g \right) + \left( Z_l^k - \tilde{Z}_g \right) \right\|_{\partial\Omega_a}^2$$

car les gradients ne sont pas orthogonaux en vertu du choix des conditions aux limites. Une inversion numérique ne sera donc jamais aussi précise.

## 5.4 Introduction au problème de la différentiation interne/externe

Le problème de l'incohérence des expressions des coefficients de Gauss avec l'altitude peut être résolu sans révision fondamentale de *SCHA* à la stricte condition que nous nous limitons à deux altitudes distinctes. Supposons que nous n'ayons qu'un seul ensemble des deux bases de Haines, peu importe le choix de la base, alors les bases de fonctions sont orthogonales et les coefficients de Gauss ne sont plus corrélés; la matrice  $A_k^{m,l}$  de (5.6) prend la forme (5.7). Supposons maintenant que nous imposons des conditions aux limites, supérieure en  $r = b$  et inférieure en  $r = a$ , telles que les potentiels globaux et locaux soient égaux (convergent l'un vers l'autre au sens de la norme sur les surfaces des domaines  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$ ). En ne prenant que les coefficients de Gauss internes dans les bases locale et globale et en posant de plus  $b = ae^s$  pour plus de commodité, ceci conduit à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} G_{n_k}^m &= \sum_{l=m}^{\infty} \frac{\langle P_{n_k}^m, P_l^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} \tilde{g}_l^m \\ G_{n_k}^m e^{-S(n_k+1)} &= \sum_{l=m}^{\infty} \frac{\langle P_{n_k}^m, P_l^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} \tilde{g}_l^m e^{-S(l+1)} \end{aligned}$$

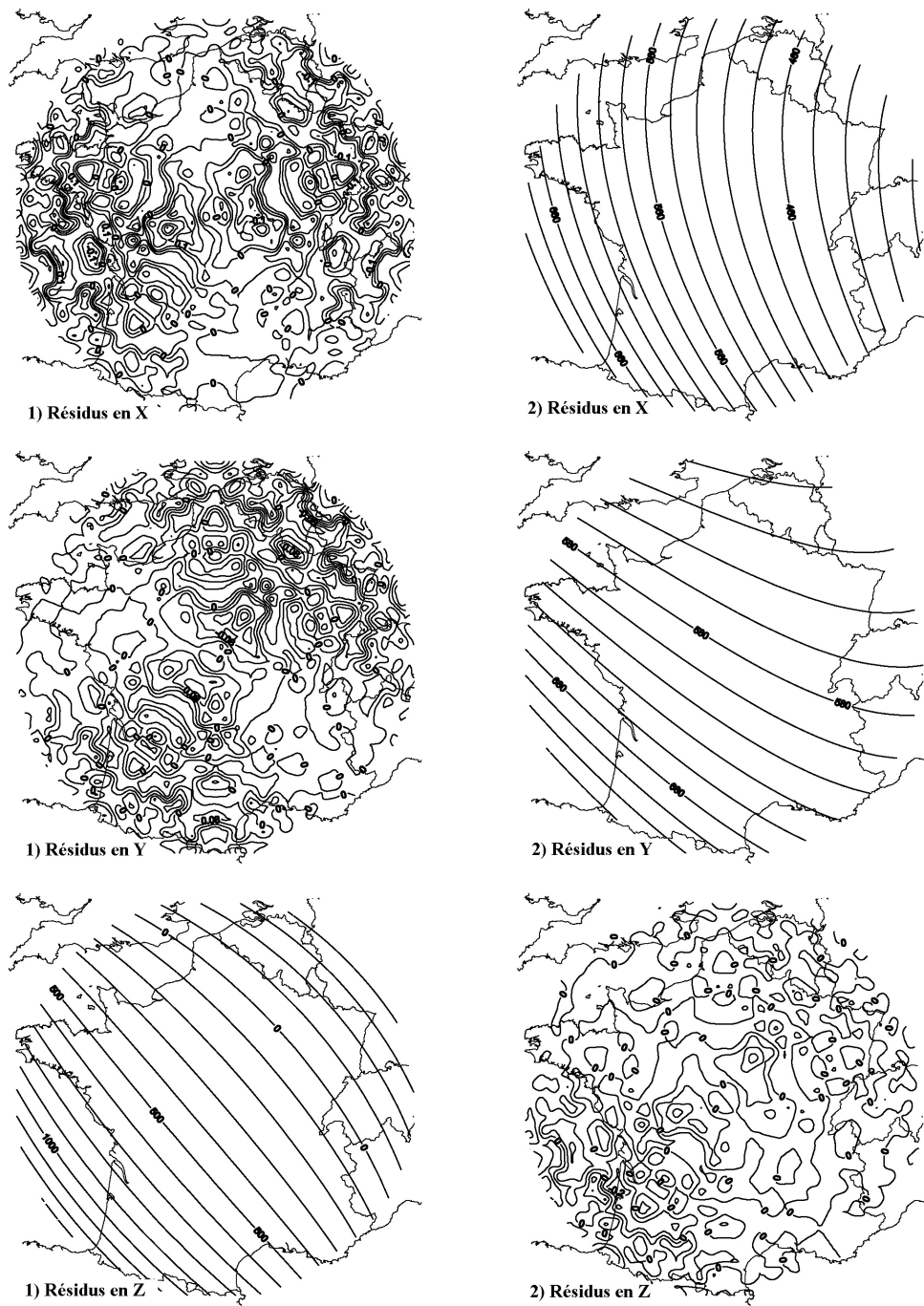


FIG. 5.1 – Résidus obtenus après différence entre modèles reconstruits en utilisant les coefficients de Gauss, par (5.9) à gauche et (5.11) à droite, et le modèle Cain-IGRF. Les deux expressions ne sont pas équivalentes pour la reconstruction des trois composantes.

Le système qui régit les coefficients  $H_{n_k}^{i,m}$  est identique. Ce système n'a de solution que pour deux valeurs particulières de  $S$ . Lorsque  $S$  tend vers l'infini le système est vérifié et cette situation ne correspond à rien d'autre qu'à l'hypothèse d'un potentiel nul à l'infini. Mais le système est également résolu pour  $S = 0$ , donc pour  $b = a$ . La résolution du système n'admet donc pas deux altitudes finies  $a$  et  $b$  différentes.

**Pour que le système puisse être résolu sur deux surfaces, il suffit d'incorporer les coefficients de Gauss que l'on qualifie d'externes** et se fixer définitivement une altitude supérieure  $b$  car les bases de fonctions radiales ne permettent pas la continuation du champ. En présence de données à plusieurs altitudes proches de  $a$  ou de  $b$ , la seule amélioration que nous pouvons faire est de réduire ces données à l'altitude limite la plus proche de manière à pouvoir utiliser le même ensemble de coefficients de Gauss. Nous pourrions penser que l'ajout des coefficients externes représente un bon compromis pour l'inversion de deux ensembles de données, l'un pris au sol, d'altitude constante, l'autre pris à une altitude satellitaire moyenne. Or, les propriétés des fonctions radiales ne permettent toujours pas de lever le compromis entre les composantes horizontales et verticales du champ même en incorporant l'ensemble complet des coefficients de Gauss. D'autre part, en dehors de ces surfaces, le champ n'aura pas la décroissance d'un champ de potentiel.

Ainsi, l'argumentation qui utilise les coefficients  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$  comme décrivant les sources externes n'a *a priori* aucun sens et l'on ne manquera pas de mentionner De Santis lorsqu'il constatait avec étonnement que l'ajout dans l'inversion de fonctions de base, qu'il qualifiait d'externe, améliorerait sensiblement la reconstruction du champ bien que ce fut en évidente contradiction avec l'origine exclusivement interne des sources : « *The case consisted of the synthesis of field values over a 16-degree cap of a dipole placed at the center of the Earth. The use of SCHA with both internal and external basis functions improved the fit with respect to the only use of internal contributions alone, in evident contradiction with the original dipolar data* » ([24] d'après les résultats de [108]).

Pour la décomposition locale, nous devons donc revoir le concept d'interne et d'externe et rechercher des bases de fonctions radiales appropriées.

# Conclusions de la première partie

Les améliorations successives des fonctions de Legendre et du maillage régulier sur la calotte permettent de s'affranchir dans un premier temps des imprécisions d'ordre numérique et de ne faire apparaître que le comportement dicté par la théorie des harmoniques sphériques sur calotte. Les études sur données synthétiques sont déterminantes puisqu'elles permettent de simuler la modélisation par *SCHA* dans un cas proche d'un idéal d'équi-répartition des données en même temps que de prévoir les difficultés liées à l'inversion. La plupart de ces techniques seront gardées par la suite et nous tenterons d'exploiter toutes les possibilités qu'elles offrent et les informations qu'elles apportent.

Pour la modélisation régionale par décomposition en harmoniques sphériques sur calotte toutes ces techniques et améliorations se sont révélées insuffisantes. Nous avons vu que *SCHA* ne donne pas de modèle de champ crustal satisfaisant que ce soit une modélisation de données réparties en volume, ou en surface uniquement, et que les techniques numériques n'étaient pas seules à mettre en cause.

Dans le cas d'une répartition de surface, plus qu'une dégradation de la représentation des composantes du champ, la formulation de *SCHA* induit un compromis inattendu entre la résolution des composantes horizontales et verticales du champ, qu'il n'est pas aisé de quantifier. La méthode des harmoniques sphériques sur calotte est donc entachée d'une erreur théorique préjudiciable à la modélisation régionale dont l'objectif principal est de mettre en évidence les structures fines du champ magnétique. Ces structures, de variations faibles de l'ordre de la dizaine de  $nT$ , pourraient être masquées par une erreur de modélisation théorique sur le modèle qui viendrait se juxtaposer aux erreurs d'instrumentation et de mesure. Il est d'ailleurs notoire de remarquer que les résultats donnés par *SCHA* viennent souvent corroborer l'existence d'une anomalie régionale connue ([97]), mais ne permettent pas de mettre en lumière de nouvelles structures car nous sommes incapables d'estimer concrètement l'erreur théorique.

Dans un deuxième temps, la modélisation de données prises dans un volume a montré qu'en réalité, la modélisation *SCHA* ne peut pas prendre en compte théoriquement des données d'altitude très différentes. Or c'est ce principal avantage qu'avait, *a priori*, ce formalisme sur les autres techniques de modélisation régionale.

Chacun de ces cas et les problèmes rencontrés ont été analysés indépendamment du choix des conditions aux limites, qu'elles aient été définies par (2.7a), par (2.7b) ou par le système (2.7) complet. L'erreur de modélisation provient donc d'un problème plus conceptuel.

A défaut d'être entièrement fautive, nous montrerons que la théorie est incomplète. A la réflexion, nous aurions pu nous y attendre car un problème de conditions aux limites complet doit admettre des conditions sur chacune des surfaces délimitant le domaine d'étude. Or rappelons que Haines n'a imposé des conditions que sur une seule des surfaces du domaine. Dans le cas d'un cône infini, les conditions aux limites sont posées sur les surfaces latérales du cône ; c'est un problème que nous trouvons résolu par exemple par Smythe ([103]). Haines, dans sa formulation, a repris les mêmes fonctions de base que celles proposées par Smythe et les a utilisées pour la

recherche d'un champ magnétique sur une surface quelconque dans le cône infini, par exemple la surface terrestre. Il apparaît très clair cependant que la simple adjonction d'une condition supplémentaire sur la surface terrestre modifie la géométrie du cône qui devient semi-infini ; le nouveau domaine d'étude contient donc une surface limite supplémentaire. Or, dans un problème de conditions aux limites, ce sont les conditions aux limites qui imposent la forme des solutions et nous montrons que la résolution de l'équation de Laplace dans un cône semi-infini avec des conditions aux limites sur chacune des surfaces conduit à l'expression d'une solution générale radicalement différente de celle d'un cône infini (voir Annexe C). Haines a donc utilisé des fonctions de bases qui ne sont pas appropriées à l'usage que l'on désire en faire en géomagnétisme.

En géomagnétisme, nous ne pouvons pas considérer le cône infini car les sources magnétiques sont partiellement contenues dans ce domaine. Nous pouvons en revanche ne considérer qu'un cône semi-infini de surface inférieure d'altitude  $r = a$ . Pour cette configuration deux points sont dignes d'être discutés.

D'une part, l'existence de courants externes, principalement localisés dans l'ionosphère et la magnétosphère, suggèrent l'ajout d'une condition supplémentaire sur une surface supérieure d'altitude  $b > a$  inférieure à l'altitude des sources. Cette hypothèse permet de rendre compte au mieux des hypothèses de divergence et du rotationnel du champ nuls dans le domaine. Le problème ainsi posé entraîne la résolution dans un cône fini qui est un cas particulier du cône semi-infini et qui ressemble bien à ce que nous désirons résoudre pour la solution d'un champ magnétique en l'absence de source à l'intérieur du domaine (voir Annexe C).

D'autre part, si nous sommes sûrs de n'avoir aucun courant externe dans les données, la résolution d'un cône infini pose néanmoins des problèmes d'implémentation numérique. Les fonctions de bases radiales sont associées à des valeurs propres continues. Par conséquent, les coefficients de Gauss correspondants sont également des fonctions continues et la modélisation ne peut se faire qu'au sens des distributions (voir Annexe C).

Pour ces deux raisons la partie suivante sera dévolue à la résolution du Laplacien dans un domaine conique fini  $\Omega$  borné par une surface latérale  $\partial\Omega_\theta$  et deux surfaces, inférieure et supérieure, respectivement dénotées  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$ .

## Deuxième partie

# Proposition d'une méthode de modélisation régionale





# Introduction

Nous venons de voir que la modélisation élaborée par Haines conduit à des difficultés, qui se sont révélées être particulièrement solubles pour de petites calottes sphériques. On se propose dans cette partie de reformuler le problème initial dans un cône fini dont les dimensions seront adaptées à la région et à la couverture en données disponibles. La géométrie du problème est maintenant fixée définitivement. En toute rigueur notre domaine devrait se limiter en altitude à la base de l'ionosphère, au-delà de laquelle règnent des courants électriques, puisque nous supposons que les sources se situent à l'extérieur du domaine d'étude. Nous gageons cependant que les contributions externes auront été retranchées par une sélection appropriée des données. Ces données seront donc susceptibles d'être résolues dans le cadre des hypothèses de divergence nulle et de rotationnel nul du champ magnétique. Ceci sera évidemment la condition sine qua non de la validité de notre modélisation et de la représentation du potentiel magnétique par des harmoniques. Ceci nous permettra d'inclure les données satellitaires dans la modélisation.

Nous avons mentionné plusieurs fois le fait que le choix des conditions aux limites régit à lui seul la forme de la solution du potentiel, rajoutons que ce choix est décisif pour la vitesse de convergence de cette solution. Nous ne pouvons donc pas poser un tel problème de façon unique, car plusieurs problèmes, liés à des conditions aux limites différentes conduisent à différentes représentations du champ. Nous nous attacherons dans un premier temps à définir quatre problèmes distincts et à retenir celui qui respecte au mieux certaines propriétés mathématiques importantes (que nous définirons le moment venu) et qui permettent l'implémentation numérique la plus favorable en vue du problème inverse.



## Chapitre 6

# Géométrie et formalisme du nouveau problème

Supposons un domaine conique  $\Omega$  délimité en haut et en bas par deux surfaces d'altitudes  $r = a$  et  $r = b$  et latéralement par une surface définie par  $\theta = \theta_0$  (figure 6.1) dont la particularité est de ne contenir aucune source de champ magnétique. Alors, on peut chercher dans  $\Omega$  un potentiel magnétique  $V$  solution de divers problèmes de conditions aux limites. Posons, par exemple, le problème suivant :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PI. a})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PI. b})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PI. c})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PI. d})$$

où  $n$  est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur. Remarquons que cette formulation impose des conditions aux limites sur les dérivées du potentiel et non sur le potentiel lui-même. Nous pouvons écrire un autre problème de conditions aux limites sous la forme :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PII. a})$$

$$V|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PII. b})$$

$$V|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PII. c})$$

$$V|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PII. d})$$

où les conditions aux limites sont sur les potentiels eux-même.

N'excluons pas toutefois des conditions aux limites mixtes, ce qui nous donne :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PIII. a})$$

$$V|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PIII. b})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PIII. c})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PIII. d})$$

ou encore :

$$\Delta V = 0 \quad (\text{PIV. a})$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega_\theta} = F(r, \varphi) \quad (\text{PIV. b})$$

$$V|_{\partial\Omega_a} = G_1(\theta, \varphi) \quad (\text{PIV. c})$$

$$V|_{\partial\Omega_b} = G_2(\theta, \varphi) \quad (\text{PIV. d})$$

Chacun des problèmes ainsi posés implique l'existence d'une relation supplémentaire. Les conditions aux limites  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  ne peuvent pas être complètement arbitraires car elles doivent satisfaire la condition de divergence nulle dans le domaine  $\Omega$ . Ceci se caractérise par la condition de flux nul, expression intégrale du théorème de la divergence, conformément au théorème d'Ostrogradski-Gauss dont nous rappelons les implications. Puisque :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dv_{\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n} ds_{\partial\Omega}$$

et que  $\vec{B} = \vec{\nabla}V$  alors :

$$\int_{\Omega} \Delta V dv_{\Omega} = \oint_{\partial\Omega} \vec{\nabla}V \cdot \vec{n} ds_{\partial\Omega}$$

Et, puisque par construction  $\Delta V = 0$ , cela revient à :

$$\boxed{\Phi = \iint_{\partial\Omega_\theta} \frac{\partial V}{\partial n} ds_{\partial\Omega_\theta} + \iint_{\partial\Omega_a} \frac{\partial V}{\partial n} ds_{\partial\Omega_a} + \iint_{\partial\Omega_b} \frac{\partial V}{\partial n} ds_{\partial\Omega_b} = 0} \quad (6.5)$$

Lorsque l'on impose des conditions sur les limites du domaine sur les dérivées, on suppose par conséquent qu'elles remplissent les conditions de flux. En pratique, n'importe quel champ dérivant d'un potentiel qui satisfait l'équation de Laplace remplit cette condition, mais ce n'est pas forcément vrai pour des conditions aux limites,  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  quelconques.

Nous montrerons que la représentation *PI* par exemple présente le grand avantage de converger rapidement alors qu'elle soulève quelques difficultés conceptuelles liées à cette considération supplémentaire. Les représentations *PIII* et *PIV* sont à peu près équivalentes d'un point de vue théorique mais montrent des différences marquées lorsqu'il s'agit de mettre en oeuvre une modélisation numérique du champ magnétique qui exploite les données réelles du champ. Nous nous proposons donc de faire l'inventaire des avantages et des inconvénients de chacun des problèmes définis ci-dessus. Une argumentation critique nous permettra de choisir une décomposition adaptée au cas particulier d'une petite calotte sphérique. Il n'est pas superflu de remarquer que les

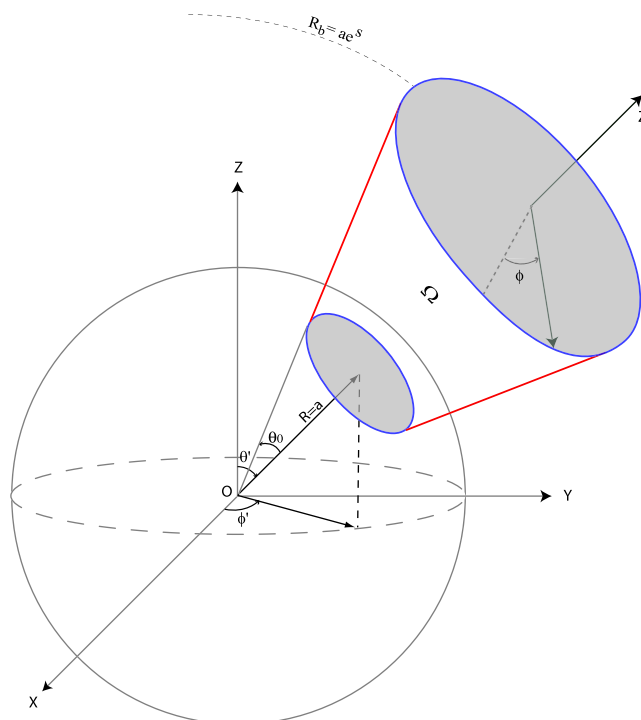


FIG. 6.1 – Représentation du domaine conique  $\Omega$  dans le repère géocentrique. A ce domaine on associe une surface fermée  $\partial\Omega$  formée par des surfaces  $r = a$  et  $r = b$  et une surface latérale  $\theta = \theta_0$ .

fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sont en pratique inconnues. La résolution d'un problème de conditions aux limites a pour but de construire des bases de fonctions générant un espace dans lequel nous exprimerons la solution. Ceci est l'objet du problème inverse que nous abordons dans la partie 3.

## 6.1 Orthogonalité des gradients

### 6.1.1 Préliminaires

Chaque problème pris indépendamment ne peut être résolu aisément que si l'on fait apparaître des conditions homogènes de Neumann ou de Dirichlet. Par exemple, on peut trouver la solution du problème  $PI$  si l'on définit deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  solutions de deux sous-problèmes

indépendants :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= F(r, \theta_0, \varphi) \end{aligned} \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = 0 \quad (6.6b)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = 0 \quad (6.6c)$$

où  $F$  satisfait la condition :  $\iint_{\partial \Omega_\theta} F ds = 0$

et de

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = -G_1(a, \theta, \varphi) \quad (6.7b)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = G_2(b, \theta, \varphi) \quad (6.7c)$$

où  $G_1$  et  $G_2$  vérifient :  $-\iint_{\partial \Omega_a} G_1 ds + \iint_{\partial \Omega_b} G_2 ds = 0$

En vertu du principe de superposition, le potentiel total  $V = V_1 + V_2$  sera solution du problème initial  $PI$ . Ce type de décomposition n'est pas unique et nous avons choisi ici de ne présenter que celle qui font apparaître des conditions aux limites indépendantes entre les deux sous-problèmes. Des expériences ont montré l'équivalence théorique des décompositions en deux sous-problèmes ayant des conditions dépendantes l'une de l'autre. En pratique, cela se caractérise par la recherche de  $V_1$  pour en déduire  $V_2$  mais les limites numériques ainsi que la troncature des séries infinies pose des problèmes majeurs dans la détermination de  $V_2$ .

Puisque nous travaillerons sur le champ magnétique, gradient du potentiel, plutôt que sur le potentiel lui-même, il nous importe de savoir quelle décomposition donne naissance à des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  tels que leurs gradients,  $\vec{\nabla} V_1$  et  $\vec{\nabla} V_2$ , soient orthogonaux au sens du produit scalaire sur le domaine  $\Omega$ . On définit le produit scalaire de la façon suivante :

$$\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} V_1 \cdot \vec{\nabla} V_2 d\Omega \quad (6.8)$$

Cette propriété d'orthogonalité présente des caractéristiques avantageuses telles que l'indépendance des coefficients de Gauss ou la construction d'un problème inverse bien posé. Nous verrons dans la troisième partie que ces propriétés permettent un contrôle quasi parfait des simulations synthétiques.

Nous cherchons pour le moment à exprimer la norme du gradient  $V = V_1 + V_2$  dans le domaine  $\Omega$  indépendamment des conditions aux limites. Soit :

$$\|\overrightarrow{\nabla V}\|^2 = \|\overrightarrow{\nabla}(V_1 + V_2)\|^2 = \langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_1 \rangle_{L^2\{\Omega\}} + \langle \overrightarrow{\nabla} V_2, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} + 2 \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega \quad (6.9)$$

Pour le développement de  $\int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega$  nous utiliserons la première identité de Green ([12]) qui permet d'exprimer ce produit scalaire par une intégrale de surface sur  $\partial\Omega$ .

L'identité s'écrit :

$$\int_{\Omega} V_2 \Delta V_1 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega \quad (6.10)$$

ou de manière parfaitement équivalente :

$$\int_{\Omega} V_1 \Delta V_2 d\Omega = \oint_{\partial\Omega} V_1 \frac{\partial V_2}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} V_1 \cdot \overrightarrow{\nabla} V_2 d\Omega$$

D'autre part on a supposé que  $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 0$  sur  $\Omega$  donc  $\langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}}$  se réduit à :

$$\langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} = \oint_{\partial\Omega} V_1 \frac{\partial V_2}{\partial n} dS \quad (6.11a)$$

soit, de manière équivalente, à :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\nabla} V_1, \overrightarrow{\nabla} V_2 \rangle_{L^2\{\Omega\}} = \oint_{\partial\Omega} V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n} dS} \quad (6.11b)$$

### 6.1.2 Calcul formel de la norme de $V$

Nous prendrons pour  $V_1$  et  $V_2$  les expressions issues de décompositions en fonction de  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Toujours indépendamment des conditions aux limites, les deux potentiels peuvent s'écrire respectivement sous une forme compacte, que nous avons définie en préliminaires dans la première partie (équation 1.25). Donc :

$$V_1(r, \theta, \varphi) = a \sum_{p \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \underbrace{G_{n_p}^m R_p^c(r) \cos(m\varphi)}_{V_{1,c}^m} + \underbrace{H_{n_p}^m R_p^s(r) \sin(m\varphi)}_{V_{1,s}^m} \right) P_{n_p}^m(\theta) \quad (6.12)$$

et

$$V_2(r, \theta, \varphi) = a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \underbrace{G_{n_k}^m R_k^c(r) \cos(m\varphi)}_{V_{2,c}^m} + \underbrace{H_{n_k}^m R_k^s(r) \sin(m\varphi)}_{V_{2,s}^m} \right) P_{n_k}^m(\theta) \quad (6.13)$$



Dans une expression du type (6.11b), si les fonctions de bases de  $V_1$  et de  $V_2$  ne sont pas orthogonales entre-elles ; c'est-à-dire si :

$$\int_a^{ae^S} R_p(r)R_k(r)dr \neq \delta_{p,k} \quad (6.14)$$

ou si :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_p}^m(\theta)P_{n_k}^m(\theta) \sin \theta d\theta \neq \delta_{p,k} \quad (6.15)$$

avec  $\delta_{p,k}$  le delta de Kronecker, alors il est clair que le produit scalaire des potentiels sur  $L^2 \{\Omega\}$  n'est pas nul pour le produit scalaire :

$$\langle V_1, V_2 \rangle = \int_{\Omega} V_1 V_2 d\Omega$$

En revanche, malgré la non-orthogonalité des fonctions, il est possible de parvenir à des propriétés d'orthogonalité sur les gradients au sens du produit scalaire défini par (6.8).

Nous chercherons tout d'abord les conditions pour lesquelles les gradients des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , issus de la décomposition des problèmes  $PI$  à  $PIV$ , sont orthogonaux. D'un point de vue du problème inverse, cette propriété est avantageuse et nous nous proposons de rechercher les conditions qui nous permettront d'établir une telle décomposition. Cette propriété n'est néanmoins pas suffisante pour pouvoir exclure les autres car nous recherchons aussi une solution qui converge rapidement et qui limite le phénomène de Gibbs.

En regard des expressions (6.12) et (6.13) et des propriétés d'orthogonalité des sinus et cosinus, nous avons les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla} V_{c,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,2}^m \rangle_{L^2\{\Omega\}} &= 0 \\ \langle \vec{\nabla} V_{c,1}^m, \vec{\nabla} V_{c,2}^{m'} \rangle_{L^2\{\Omega\}} &= \delta_{m,m'} \\ \langle \vec{\nabla} V_{s,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,2}^{m'} \rangle_{L^2\{\Omega\}} &= \delta_{m,m'} \end{aligned}$$

Il suffit donc de chercher l'expression du produit scalaire à  $m$  fixé pour le gradient des potentiels partiels  $V_{c,1}^m$  et  $V_{c,2}^m$ . L'expression de  $\langle \vec{\nabla} V_{s,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,2}^m \rangle_{L^2\{\Omega\}}$  s'en déduira par analogie.

En décomposant (6.10) suivant chaque intégrale de surface on a :

$$\langle \vec{\nabla} V_{c,1}^m, \vec{\nabla} V_{c,2}^m \rangle_{\Omega} = \underbrace{\int_{\partial\theta_0} V_{c,1}^m)_{\theta_0} \frac{\partial V_{c,2}^m}{\partial \theta}}_{I_1} \frac{1}{r} ds_{\theta} - \underbrace{\int_{\partial a} V_{c,1}^m)_{a} \frac{\partial V_{c,2}^m}{\partial r}}_{I_2} ds_a + \underbrace{\int_{\partial b} V_{c,1}^m)_{b} \frac{\partial V_{c,2}^m}{\partial r}}_{I_3} ds_b \quad (6.16)$$

où les éléments de surface sont définis sur la frontière du cône par (figure 6.2) :

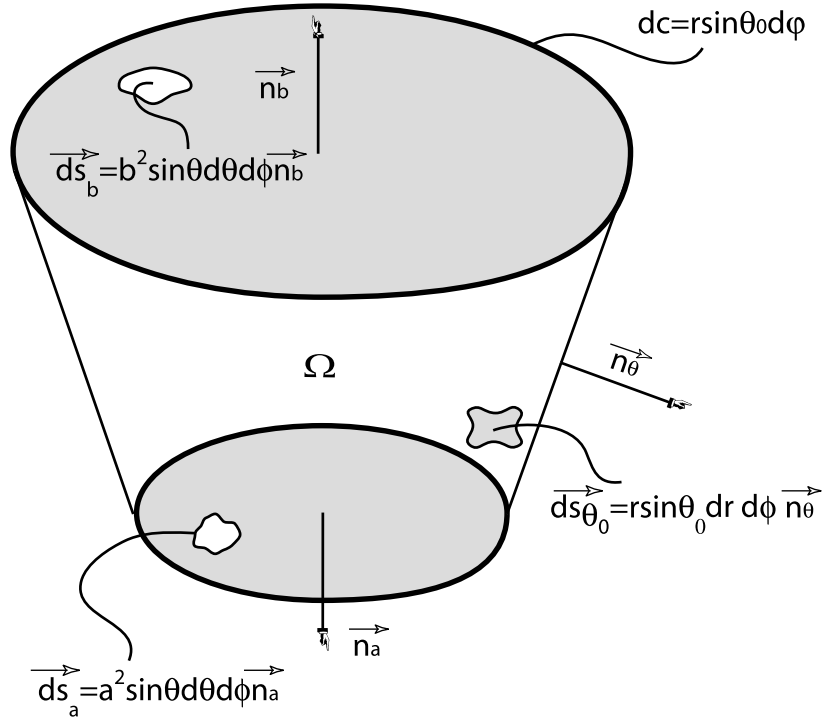


FIG. 6.2 – Représentation des différentes surfaces du cône et expressions des éléments de surface correspondants. Les éléments sont exprimés en coordonnées sphériques dans le repère du cône.

$$ds_\theta = \sin \theta_0 r dr d\varphi \quad (6.17a)$$

$$ds_a = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.17b)$$

$$ds_b = b^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (6.17c)$$

### Calcul de l'intégrale sur la surface $I_1$

Les propriétés d'orthogonalité (6.14), (6.15) et l'expression (6.17a) conduisent à l'expression de l'intégrale  $I_1^m(k, p)$  pour chaque triplet  $(m, k, p)$  :

$$I_1^m(k, p) = a^2 (1 + \delta_m) \pi P_{n_p}^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \sin \theta_0 \underbrace{\int_a^b R_{n_p}^c(r) R_{n_k}^c(r) dr}_{I_r}$$

Dans cette expression, nous n'avons pas gardé les coefficients de Gauss qui ne représentent que des constantes.

Or nous avons vu que les solutions radiales étaient solutions de l'équation différentielle d'Euler (voir premier chapitre). On peut donc poser pour  $R_p(r)$  et  $R_k(r)$  :

$$\mathcal{L}_r(R_p(r)) = -\lambda_p R_{n_p}^c(r) \quad (6.18a)$$

$$\mathcal{L}_r(R_k(r)) = -\lambda_k R_{n_k}^c(r) \quad (6.18b)$$

où  $\lambda_p = n_p(n_p + 1)$  et  $\lambda_k = n_k(n_k + 1)$  sont les deux ensembles de valeurs propres de l'opérateur de Sturm-Liouville  $\mathcal{L}_r$  défini par :

$$\boxed{\mathcal{L}_r(\cdot) = -\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right)} \quad (6.19)$$

En multipliant (6.18a) par  $R_k(r)$ , (6.18b) par  $R_p(r)$  et en soustrayant les deux on trouve :

$$R_{n_p}^c(r) R_{n_k}^c(r) (\lambda_p - \lambda_k) = R_{n_p}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_k}^c(r)) - R_{n_k}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_p}^c(r))$$

donc l'intégrale  $I_r$  s'écrit :

$$I_r = \frac{1}{\lambda_p - \lambda_k} \left[ \int_a^b R_{n_p}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_k}^c(r)) dr - \int_a^b R_{n_k}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_p}^c(r)) dr \right]$$

Une simple intégration par partie montre, en utilisant la définition (6.19) de l'opérateur  $\mathcal{L}_r$ , que :

$$\int_a^b R_{n_p}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_k}^c(r)) dr - \int_a^b R_{n_k}^c(r) \mathcal{L}_r(R_{n_p}^c(r)) dr = \left[ r^2 R_{n_k}^c(r) \frac{dR_{n_p}^c(r)}{dr} - r^2 R_{n_p}^c(r) \frac{dR_{n_k}^c(r)}{dr} \right]_a^b$$

et donc que :

$$I_r = \frac{1}{\lambda_p - \lambda_k} \left[ r^2 R_{n_k}^c(r) \frac{dR_{n_p}^c(r)}{dr} - r^2 R_{n_p}^c(r) \frac{dR_{n_k}^c(r)}{dr} \right]_a^b$$

et par conséquent que :

$$I_1^m(k, p) = \frac{a^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi}{\lambda_p - \lambda_k} \left( P_{n_p}^m \right)_{\theta_0} \left( \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0} \left[ r^2 R_{n_k}^c \frac{dR_{n_p}^c}{dr} - r^2 R_{n_p}^c \frac{dR_{n_k}^c}{dr} \right]_a^b \quad (6.20)$$

### Calcul des intégrales $I_2$ et $I_3$

Les intégrales  $I_2$  et  $I_3$  se calculent de la même manière. En développant explicitement  $I_2$  avec (6.17b), on montre qu' à  $m$  fixé :

$$I_2^m(k, p) = a^4 (1 + \delta_m) \pi \left( R_{n_p}^c \right)_a \left( \frac{dR_{n_k}^c}{dr} \right)_a \underbrace{\int_0^{\theta_0} P_{n_p}^m P_{n_k}^m \sin \theta d\theta}_{I_\theta}$$

L'intégrale  $I_\theta$ , produit scalaire des fonctions de Legendre, est explicitée en annexe A et sera maintes fois rencontrée. On rappelle que :

$$I_\theta = \frac{\sin \theta_0}{\lambda_p - \lambda_k} \left[ P_{n_p}^m \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \right]_0^{\theta_0}$$

ce qui conduit à :

$$I_2^m(k, p) = \frac{a^4 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi}{\lambda_p - \lambda_k} R_{n_p} \left( \frac{dR_{n_k}}{dr} \right)_a \left[ P_{n_p}^m \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \right]_0^{\theta_0} \quad (6.21)$$

et respectivement à :

$$I_3^m(k, p) = \frac{a^2 b^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi}{\lambda_p - \lambda_k} R_{n_p} \left( \frac{dR_{n_k}}{d\theta} \right)_b \left[ P_{n_p}^m \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \right]_0^{\theta_0} \quad (6.22)$$

Nous sommes donc en mesure d'exprimer le produit scalaire des gradients en remplaçant (6.20), (6.21) et (6.22) dans (6.16). Ceci conduit finalement, au triplet  $(m, k, p)$  fixé, à l'écriture du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\nabla} V_{c,p,1}^m, \vec{\nabla} V_{c,k,2}^m \right\rangle_{L^2\{\Omega\}} &= \frac{A}{\lambda_p - \lambda_k} \left( b^2 R_{n_k}^c(b) \frac{dR_{n_p}^c(b)}{dr} - a^2 R_{n_k}^c(a) \frac{dR_{n_p}^c(a)}{dr} \right) P_{n_p}^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \\ &+ \frac{A}{\lambda_p - \lambda_k} \left( a^2 R_{n_p}^c(a) \frac{dR_{n_k}^c(a)}{dr} - b^2 R_{n_p}^c(b) \frac{dR_{n_k}^c(b)}{dr} \right) P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} \frac{dP_{n_p}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Avec  $\lambda_p$  et  $\lambda_k$  les valeurs propres et  $A$  un élément de surface de la calotte tel que :

$$A = a^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_m) \pi$$

En changeant l'indice  $c$  en  $s$  et  $(1 + \delta_m)$  en  $(1 - \delta_m)$ , on obtient l'expression de :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_{s,p,1}^m, \vec{\nabla} V_{s,k,2}^m \right\rangle_{L^2\{\Omega\}}$$

Pour une expression complète, on rajoutera en facteur le produit des coefficients de Gauss  $G_{n_p}^m G_{n_k}^m$  ou  $H_{n_p}^m H_{n_k}^m$ .

### 6.1.3 Les conditions d'orthogonalité

Les conditions sur les fonctions  $R_{n_k}$ ,  $R_{n_p}$ ,  $P_{n_p}^m$ ,  $P_{n_k}^m$  ou sur leur dérivées sont homogènes d'après (6.6a), (6.6b) et (6.6c) ainsi que (6.7a), (6.7b) et (6.7c) pour les problèmes respectifs sur  $V_1$  et  $V_2$  nous permettent de ne considérer que quatre couples de conditions :

1. En prenant les conditions du problème  $PI$ , on a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0} &= 0 \\ \frac{dR_{n_p}^c(a)}{dr} &= \frac{dR_{n_p}^c(b)}{dr} = 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} \neq 0$$

Le premier problème *PI* que nous avons défini ne donne pas lieu à un problème bien posé. Les gradients des deux décompositions n'étant pas orthogonaux, il existera des combinaisons linéaires entre les coefficients de Gauss des deux bases de fonctions. Ces combinaisons conduisent inéluctablement à des difficultés numériques pour la résolution du problème inverse.

2. Les conditions du deuxième problème *PII* :

$$\begin{aligned} P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} &= 0 \\ R_{n_p}^c(a) &= R_{n_p}^c(b) = 0 \end{aligned}$$

entraînent que :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} \neq 0$$

Ce qui nous amène à conclure que

**Les conditions aux limites homogènes de type Dirichlet ou Neumann uniquement entraînent la résolution d'un problème dont les gradients de potentiels ne sont pas orthogonaux au sens du produit scalaire défini par eq. 6.8.**

3. Cependant on constate que les conditions aux limites formulées dans le problème *PIII* :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} &= 0 \\ R_{n_p}^c(a) &= R_{n_p}^c(b) = 0 \end{aligned}$$

entraînent que :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} = 0$$

Et, de même, pour le problème *PIV*, on trouve que si :

$$\begin{aligned} P_{n_k}^m \Big|_{\theta_0} &= 0 \\ \frac{dR_{n_p}^c(a)}{dr} &= \frac{dR_{n_p}^c(b)}{dr} = 0 \end{aligned}$$

alors :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1^m, \vec{\nabla} V_2^m \right\rangle_{\Omega} = 0$$

On constate donc que parmi les solutions possibles pour les problèmes initiaux deux seulement présentent la propriété d'avoir des gradients orthogonaux. Par conséquent :

**Les conditions aux limites mixtes de type Dirichlet et Neumann ou Neumann et Dirichlet entraînent la résolution d'un problème dont les gradients des potentiels sont orthogonaux au sens du produit scalaire défini par eq. 6.8.**

## 6.2 Résolutions des équations homogènes

Nous venons de constater que le choix des conditions aux limites est l'élément clé d'un problème bien posé. Il existe cependant d'autres considérations à prendre en compte lors du choix de l'une ou l'autre des décompositions, dont l'une en particulier, est liée la vitesse de convergence des solutions. Jusqu'à présent, en l'absence des formes exactes pour les potentiels, nous ne pouvons pas quantifier les termes non-orthogonaux et nous ne pouvons pas certifier qu'ils sont d'une importance telle que le problème est numériquement mal posé. Avec les harmoniques sphériques sur calotte de Haines ([43]), par exemple, on sacrifiait l'orthogonalité au profit de la convergence. Par souci de généralité, nous nous proposons donc, dans cette partie, de résoudre chacun des problèmes  $PI$ ,  $PII$ ,  $PIII$  et  $PIV$  associés à leurs conditions aux limites respectives. Nous débuterons par la résolution du problème  $PI$  car ses conditions aux limites qui portent sur le champ magnétique sont *a priori* les plus naturelles. Les enseignements et les embûches que nous y rencontrerons seront profitables pour aplanir certaines difficultés et déduire les solutions des trois autres problèmes. Chaque problème de conditions aux limites et ses solutions feront l'objet d'une synthèse finale au chapitre 9.

Reprenons la décomposition du problème  $PI$  :

$$\Delta V_1 = 0 \quad (6.24a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} = F(r, \theta_0, \varphi) \quad (6.24b)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = 0 \quad (6.24c)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = 0 \quad (6.24d)$$

et :

$$\Delta V_2 = 0 \quad (6.25a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} = 0 \quad (6.25b)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} = G_1(a, \theta, \varphi) \quad (6.25c)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} = G_2(b, \theta, \varphi) \quad (6.25d)$$

Alors il faudra de plus que les conditions aux limites associées à chacun des deux problèmes vérifient

$$\iint_{\partial \Omega_\theta} F ds = 0 \quad (6.26)$$

pour la solution  $V_1$  et :

$$-\iint_{\partial \Omega_a} G_1 ds + \iint_{\partial \Omega_b} G_2 ds = 0 \quad (6.27)$$

pour la solution  $V_2$ . On remarquera que ces conditions de flux sur les problèmes indépendants sont beaucoup plus drastiques que la condition de flux du champ total  $-\vec{\nabla}V$ . Nous verrons que ces restrictions posent des problèmes de détermination dans les relations entre le champ global et le champ local (section 7.1). Notons que le même type de décomposition sera appliquée à chacun des problèmes *PII*, *PIII* et *PIV* avec leurs conditions aux limites respectives :

– Pour le problème *PII* on prendra :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 & \Delta V_2 &= 0 \\ V_1|_{\theta=\theta_0} &= F(r, \varphi) & \text{et} & \quad V_2|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ V_1|_{r=a} &= 0 & & \quad V_2|_{r=a} = G_1(\theta, \varphi) \\ V_1|_{r=b} &= 0 & & \quad V_2|_{r=b} = G_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.28)$$

– Pour le problème *PIII* :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 & \Delta V_2 &= 0 \\ V_1|_{\theta=\theta_0} &= F(r, \varphi) & \text{et} & \quad V_2|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{r=a} &= 0 & & \quad \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = G_1(\theta, \varphi) \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{r=b} &= 0 & & \quad \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=b} = G_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.29)$$

– Enfin, pour le problème *PIV* :

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 & \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} &= F(r, \varphi) & \text{et} & \quad \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0 \\ V_1|_{r=a} &= 0 & & \quad V_2|_{r=a} = G_1(\theta, \varphi) \\ V_1|_{r=b} &= 0 & & \quad V_2|_{r=b} = G_2(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.30)$$

### 6.2.1 Expression du potentiel $V_2$

La résolution de (6.25a) associée à (6.25b) et indépendamment de (6.25c) ou de (6.25d) est maintenant bien connue. En effet, la condition sur la dérivée du potentiel imposée sur la surface  $\partial\Omega_{\theta_0}$  revient à une condition sur la dérivée des fonctions de Legendre associées. Il s'agit, dans la nomenclature de Haines, des fonctions de Legendre telles que  $k - m$  soit pair. On a déjà rencontré ces solutions dans la Partie 1 qui font intervenir les fonctions de Legendre de degrés  $n_k$  réels et d'ordres  $m$  entiers. Nous avons vu que le potentiel, en considérant l'ensemble des solutions classiquement appelées *interne* et *externe*, s'exprimait finalement :

$$\begin{aligned} V_2(r, \theta, \varphi) &= a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m \\ &\quad + a \sum_{k \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k} (G_{n_k}^{e,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{e,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m \end{aligned} \quad (6.31)$$

Cette solution intervient dans la résolution du problème *PI* bien entendu mais aussi dans la résolution de *PIII* car la condition sur cette limite est identique pour les deux problèmes.

### Solution des autres problèmes

Les problèmes *PII* et *PIV* qui font intervenir des conditions sur le potentiel plutôt que sur sa dérivée conduisent à  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ . Nous obtenons la même expression générale (6.31) à ceci près que les racines  $n_k$  correspondent à des indices  $k - m$  impairs selon la nomenclature de Haines ([43]) et prennent donc naturellement des valeurs très différentes.

### 6.2.2 Solution du potentiel $V_1$

La solution du problème (6.24a) associée à (6.24c et 6.24d) est en revanche plus inhabituelle en géomagnétisme et fait intervenir une nouvelle classe de fonctions de Legendre. Nous nous proposons d'exposer les différentes étapes de résolution.

#### Solution radiale du potentiel $V_1$

**Définition** *Il sera utile tout au long des pages qui suivent de définir un nombre réel  $S$  tel que  $S = \log(b/a)$ . Ce nombre est un facteur géométrique sans dimension qui dépend du rapport entre  $b$ , le rayon supérieur du cône et  $a$  le rayon terrestre.*

Reprenons la solution générale de l'équation différentielle en  $r$  (équation 1.3) nous avons :

$$\boxed{-\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) = \lambda R(r)} \quad (6.32)$$

Cette équation, associée aux conditions aux limites (6.24c) and (6.24d), forme un problème de Sturm-Liouville qui conduit à la construction d'une base de fonctions radiales orthogonales dans l'intervalle  $[a, b]$ , pour le produit scalaire :

$$\int_a^b f \cdot g \cdot dr = \langle f, g \rangle_{[a,b]}$$

Ce dernier point est important et mérite d'être relevé. Habituellement le problème de Sturm-Liouville est obtenu par l'équation en  $\theta$  du triplet des équations différentielles. Dans le cas présent, les valeurs propres  $\lambda = n(n+1)$  sont déterminées par l'équation (6.32) qui appartient à la classe des équations différentielles d'Euler et qui, par conséquent, est transformable en équation différentielle à coefficients constants dont la solution dépend du discriminant  $\Delta$ . Rappelons que la solution en  $r$  est de la forme générale, quel que soit  $n$  :

$$R(r) = A_1 \left( \frac{r}{a} \right)^n + A_2 \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \quad (6.33)$$

Donc, en associant cette solution à (6.24c) et (6.24d), on parvient à sélectionner les valeurs de  $n$  par la résolution du système formé en égalant à zéro les dérivées radiales en  $r = a$  et  $r = b$ . Ce système s'écrit de la manière suivante :

$$nA_1 - (n+1)A_2 = 0 \quad (6.34a)$$

$$nA_1 \frac{b^{n-1}}{a^n} - (n+1)A_2 \frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} = 0 \quad (6.34b)$$

Ce système possède une solution non triviale en  $A_1$  et  $A_2$  si son déterminant est nul. Cette condition est obtenue dans deux cas de figure.



**Pemier cas** Si  $n = 0$  ou  $n = -1$  alors on trouve que la valeur propre  $\lambda = 0$ .

Dans ce cas, on voit immédiatement, d'après (6.33), que  $R(r) = R_0$  est une fonction constante, la fonction constante vérifiant bien entendu les conditions aux limites sur la dérivée.

**Deuxième cas** Si  $a^{2n+1} = b^{2n+1}$ , comme  $a \neq b$  ceci entraîne que  $n$  est complexe, du type :

$$\boxed{n = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, \text{ où } p \in \mathbb{N}^*} \quad (6.35)$$

La valeur propre associée s'écrit :

$$\boxed{\lambda = -\left(\frac{1}{4} + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2\right)}$$

Puisque la valeur propre est telle que  $\lambda < -1/4$ , l'expression des fonctions radiales indicées par un entier  $p$  est :

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ A_1 \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + A_2 \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right], \quad p \in \mathbb{N}^*$$

Il reste à s'assurer que  $R'_p(a) = R'_p(b) = 0$ . Cette dernière vérification nous donne une relation entre les coefficients réels  $A_1$  et  $A_2$  et on trouve :

$$A_1 = \frac{2\pi p}{S} A_2$$

On peut donc écrire finalement l'ensemble des solutions du problème de Sturm-Liouville pour la fonction radiale :

$$R_0(r) = R_0 \quad (6.36a)$$

$$R_p(r) = A_1 \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2\pi p}{S} \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (6.36b)$$

En pratique, ces fonctions ont été normalisées telles que  $\|R_0\|^2 = \|R_p(r)\|^2 = a$

Cette solution apparaît également lors de la résolution de *PIII* dont les conditions aux limites ont été définies identiquement à celle de *PI*.

Ainsi, les problèmes *PI* et *PIII* font apparaître deux ensembles de valeurs propres pour la résolution du potentiel  $V_1$ , l'une telle que  $\lambda < -1/4$ , l'autre telle que  $\lambda = 0$ .

### Solution des autres problèmes

Dans les problèmes *PII* et *PIV*, les conditions aux limites sont sur les potentiels sur les surfaces  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$ . Ceci revient finalement à imposer une condition homogène sur les fonctions radiales  $R_p(r)$ , soit  $R_p(a) = R_p(b) = 0$ . Le système qui régit l'ensemble des valeurs propres équivalent à (6.34) devient :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ A_1 \frac{b^n}{a^n} + A_2 \frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} &= 0 \end{aligned}$$

Et on trouve comme solution un seul ensemble de valeurs propres  $\lambda < 1/4$  conduisant à la définition des degrés  $n$  complexes :

$$n = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, \text{ où } p \in \mathbb{N}^*$$

La fonction radiale s'écrit par conséquent :

$$R_p(r) = A_1 \sqrt{\frac{a}{r}} \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (6.38)$$

On remarquera pour l'anecdote que les fonctions radiales (6.38) sont mentionnées par Smythe (1950) comme étant la solution d'un cône soumis à des conditions de surface de potentiel nul. On retrouve par conséquent un résultat annoncé ([103], section 5.25).

### Solutions de la fonction en $\theta$

Nous avons vu que l'équation différentielle en  $\theta$  prenait l'expression :

$$\sin\theta \frac{1}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dP}{d\theta} \right) + k \sin^2\theta = m^2$$

et avait pour solutions les fonctions de Legendre généralisées :

$$P_n^m = \frac{(-1)^m}{2^m m!} N_n^m \sin^m\theta F\left(m-n, n+m+1, 1+m; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.39)$$

Cette forme canonique est indépendante de la valeur des degrés  $n$  et des ordres  $m$ . Le coefficient  $N_n^m$  est lié à la normalisation choisie pour ces fonctions. Les valeurs de  $n$  ayant été fixées par la résolution du problème sur la variable  $r$ , deux cas méritent d'être analysés.

**Cas  $n_p = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}$ , où  $p \in \mathbb{N}^*$**  Dans ce cas, il est immédiat de constater que les fonctions  $P_n^m$  s'écrivent aussi, selon la définition standard des fonctions de Legendre généralisées ([96], [51]) :

$$K_{-1/2+i p\pi/S}^m = \frac{(-1)^m}{2^m m!} N_p^m \sin^m\theta F\left(m + \frac{1}{2} - i\frac{p\pi}{S}, m + \frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, m + 1; \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.40)$$

D'autre part, en ne considérant pour l'instant que la fonction non normée, on montre que le facteur  $N_p^m$  dans ce cas prend la forme ([113]) :

$$\begin{aligned} N_p^0 &= 1 \\ N_p^m &= \frac{\Gamma(1/2 + m + ip\pi/S)}{\Gamma(1/2 - m + ip\pi/S)} = (-1)^m \prod_{j=1}^m \left( \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 + \left(\frac{2j-1}{2}\right)^2 \right) \end{aligned}$$

Ces fonctions sont d'arguments complexes mais à valeurs réelles et sont connues sous le terme général de fonctions coniques. Elles ont été introduites pour la première fois par Mehler pour le cas particulier où  $m = 0$ . Nous devons l'extension de ces fonctions à  $m$  quelconque à Heine, et à Carl Neumann la preuve qu'elles sont un cas particulier des fonctions sphériques de Legendre. Ces fonctions spéciales sont assez peu communes, notamment sous leur forme généralisée à  $m$

quelconque, car «elles ne se présentent que dans un problème de Dirichlet (ou de Neumann) relatif à l'équation de Laplace où les surfaces limites comportent deux sphères concentriques, et la fonction recherchée (ou sa dérivée) devant s'annuler sur celles-ci » ([96], Tome III, chapitre IX). Nous ne manquerons pas de remarquer que cette description géométrique correspond exactement à notre cas de figure.

Nous avons suivi la notation  $K_p^m$  proposée par Robin ([96]) et adoptée par Zhurina et al. ([113]) de manière à pouvoir nous référer sans ambiguïté à ces ouvrages.

**Définition :** Pour les fonctions coniques de Mehler, on posera par la suite par commodité,  $K_p^m \equiv K_{-1/2+i\pi/S}^m$ .

Par nature, elles obéissent aux mêmes relations de récurrence que les fonctions de Legendre à degrés  $n$  réels ou entiers. Nous verrons par la suite les spécificités mathématiques de ces fonctions, leur calcul numérique et leur comportement sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Ces conclusions nous amèneront à normaliser ces fonctions sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Nous proposons les expressions de cette normalisation dans le cas de fonctions de Mehler représentées en série hypergéométrique dans l'annexe B.

### Cas $n = 0, n = -1$

Ces fonctions sont un peu particulières et méritent d'être reconsidérées pour appartenir à la définition des fonctions de Legendre généralisées que nous avons adoptée initialement. On peut montrer à l'aide des relations de récurrence sur les fonctions hypergéométriques ([1]) que l'expression des fonctions de Legendre généralisées (6.39) s'écrit aussi :

$$P_n^m = \frac{(-1)^m}{m!} N_n^m \tan^m \frac{\theta}{2} F\left(-n, n+1, m; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (6.41)$$

Rappelons cependant l'expression du coefficient  $N_n^m$  pour  $m \neq 0$  :

$$N_n^m = \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \quad (6.42)$$

Pour la valeur  $n = 0$ , ou de manière équivalente  $n = -1$ , la définition des fonctions de Legendre (6.41) n'est plus valable en raison de la singularité de la fonction  $\Gamma(n-m+1)$ . Or, au voisinage d'un pôle  $-n_0$  (avec  $n_0 \geq 0$ ), la fonction Gamma a le comportement asymptotique suivant ([73]) :

$$\Gamma(-n_0 + u) \sim \frac{(-1)^{n_0}}{u n_0!}$$

et la fonction de Legendre pour  $-m \leq n_0 \leq -m+1$  peut être définie par :

$$P_n^m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P_{n+\varepsilon}^m}{\varepsilon} \quad (6.43)$$

On peut montrer d'après (6.41) et (6.42) qu'en posant  $n = n_0 + \varepsilon$  on aboutit à la propriété  $P_n^m = -P_{-n-1}^m$  au lieu de  $P_n^m = P_{-n-1}^m$ . Ceci entraîne des relations de récurrence entre les fonctions coniques de définitions différentes de celles de Robin ([96]). Afin de rester conforme aux définitions que nous avons adoptées pour les différents types de fonctions de Legendre on montre que si l'on définit  $n = n_0 - (-1)^m \varepsilon$ , pour  $-m \leq n_0 \leq -m+1$ , alors la fonction de Legendre (6.43) en tenant compte du développement asymptotique autour de  $n_0$  (6.42), s'écrit :

$$P_n^m = \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m-n)}{\Gamma(m+1)} \tan^m \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \Gamma(m+1) \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^p \Gamma(N+p+1)}{\Gamma(N-p+1)\Gamma(m+p+1)\Gamma(p+1)} \sin^{2p} \frac{\theta}{2} \right]$$

avec  $N = n$  si  $n \geq 0$  et  $N = -n - 1$  si  $n \leq -1$ .

En particulier, pour  $n = 0$  ou  $n = -1$ , la somme entre crochets disparaît et on trouve :

$$\boxed{P_0^m = P_{-1}^m = \Gamma(m) \tan^m \frac{\theta}{2}} \quad (6.44)$$

Ces fonctions ne sont pas définies pour  $m = 0$  en vertu de la singularité de la fonction  $\Gamma(0)$ . Cette particularité est dictée par la volonté de définir ces fonctions comme ayant la même définition que celle des fonctions de Legendre généralisées. Nous verrons que cette définition n'a pas d'incidence sur la modélisation et nous pouvons poser simplement  $P_0^0 = 1$ . On conclura simplement que les fonctions de Legendre associées à la valeur propre  $k = 0$  sont en fait de simples fonctions trigonométriques. En pratique, il devient vite indispensable de normaliser correctement ces fonctions. De même que pour les fonctions de Mehler, la normalisation complète est proposée en annexe B.

### Solution des autres problèmes

Pour les problèmes *PII* et *PIV*, l'ensemble des degrés  $n_p$  appartient au même ensemble des valeurs propres avec  $\lambda < 1/4$ . Ceci exclut les degrés  $n = 0$  et  $n = -1$ . Les fonctions  $P_0^m(\theta)$  ne font donc pas partie de l'espace des solutions pour ces deux problèmes.

### 6.2.3 Expression finale du potentiel $V_1$

L'équation différentielle en  $\phi$  :

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0$$

admet deux ensembles de solutions, l'un pour la valeur propre  $\lambda < -1/4$  et l'autre pour  $\lambda = 0$ .

Pour  $n = -\frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}$ , où  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $n = 0$ ,  $n = -1$ , on retrouve la même forme de la solution qui s'écrit :

$$\Phi_p^m = G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi) \quad (6.45a)$$

On pourra différencier les coefficients de Gauss  $\{G_p^m, H_p^m\}$  indexés par la valeur de  $p \neq 0$  et associés aux valeurs propre  $\lambda < -1/4$  et les coefficients de Gauss  $\{G_0^m, H_0^m\}$  associés à la valeur propre  $\lambda = 0$ .

On trouve ainsi l'expression du potentiel satisfaisant le problème de Sturm-Liouville. Puisque  $V_1 = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , alors d'après (6.36a), (6.36b), (6.40) et (6.45a) on obtient finalement les solutions des problèmes respectifs.

– Pour les problèmes *PI* et *PIII* :

$$\begin{aligned}
V_1(r, \theta, \varphi) = & a \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} R_p(r) (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) K_p^m(\theta) \\
& + a \sum_{m \geq 0} R_0 (G_0^m \cos(m\varphi) + H_0^m \sin(m\varphi)) P_0^m(\theta)
\end{aligned} \tag{6.46}$$

avec les fonctions  $R_p(r)$  et  $R_0$  données par les expressions (6.36).

– Pour les problèmes *PII* et *PIV* :

$$V_1(r, \theta, \varphi) = a \sum_{p \geq 1} \sum_{m \geq 0} R_p(r) (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) K_p^m(\theta) \tag{6.47}$$

avec la fonction  $R_p(r)$  donnée par l'expression (6.38).

Quelles que soient les décompositions choisies et les problèmes *PI*, *PII*, *PIII* ou *PIV*, le potentiel total dans le cône est la superposition des deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , soit  $V = V_1 + V_2$ .

**Définition :** *Lorsque nous parlerons des fonctions de bases impliquées dans le développement du potentiel  $V_1$ , nous parlerons de base de Mehler, par opposition à la base de Legendre qui fait intervenir les fonctions de Legendre dans la représentation du potentiel  $V_2$ .*

### 6.3 Longueur d'onde radiale

Il peut être commode de définir une longueur d'onde radiale pour pouvoir estimer le développement maximum qui satisfait le théorème d'échantillonnage de Nyquist. Cette longueur d'onde ne peut se définir que par rapport aux fonctions radiales  $R_p(r)$ , qu'elles soient exprimées par (6.36b) ou par (6.38) selon le problème de conditions aux limites.

Les fonctions radiales  $R_p(r)$  sont pseudo-périodiques et le concept de la longueur d'onde ne peut s'appréhender que si l'on considère une approximation asymptotique.

Prenons, par exemple, le terme en sinus de la fonction radiale qui intervient dans les deux expressions (6.36b) et (6.38). Au voisinage d'un point  $r_0$ , le logarithme admet un développement de Taylor à l'ordre 1. La fonction sinus s'écrit donc :

$$\sin\left(\frac{p\pi}{S} \log \frac{r}{a}\right) \simeq \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log \frac{r_0}{a} + \frac{\pi p}{S} \frac{\delta r}{r_0}\right)$$

Ainsi, quand  $\delta r \rightarrow \delta r + \frac{2Sr_0}{p}$  le sinus reste inchangé et nous pouvons définir une longueur d'onde par :

$$l_r = \frac{2Sr_0}{p}$$

En prenant  $r_0 \sim \frac{a+b}{2}$  comme valeur moyenne, c'est-à-dire une altitude  $r_0$  située au centre de l'intervalle de définition des fonctions radiales, on trouve simplement :

$$l_r = aS \frac{(1 + e^S)}{p}$$

Inversement, en supposant que  $l_d$  est l'altitude moyenne entre deux données consécutives, pour satisfaire le théorème de Nyquist, nous devons poser :

$$P_{max} \sim aS \frac{(1 + e^S)}{2l_d}$$

ce qui s'écrit aussi explicitement en fonction de a et b :

$$\boxed{P_{max} \sim \frac{(a+b)}{2l_d} \log\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (6.48)$$

Si l'on prend  $l_d = 10km$  et  $b = a + 500km$  par exemple on trouve  $P_{max} \sim 50$ .

Remarquons que maintenant que nous avons une définition de la longueur d'onde radiale, à l'aide de la définition de la surface d'onde du paragraphe (3.2.1) de la partie 1, nous sommes en mesure de définir un volume d'onde pour le développement complet du potentiel total  $V$ . Rappelons tout de même que ces concepts sont plutôt une vue de l'esprit et sont une tentative pour relier les développements en séries à une dimension géométrique dans le cône.

## 6.4 Introduction aux effets de bords

Revenons une dernière fois sur la décomposition de Haines. Nous avons discuté le fait que le choix, inhabituel, des conditions aux limites a pour objectif de s'affranchir du problème de la discontinuité entre le champ magnétique construit à l'intérieur de la calotte et le champ magnétique à l'extérieur. Cette discontinuité, qui révèle les différences de conditions aux limites pour le champ global et le champ local, est à la base du phénomène de Gibbs.

La continuité entre le champ magnétique à l'intérieur du cône et à l'extérieur du cône n'est pas simple à mettre en évidence. Pour qu'il y ait continuité au sens stricte du terme, il faut que le champ local et le champ global convergent *simplement* ou *uniformément* l'un vers l'autre. A notre connaissance, la convergence uniforme des bases selon Haines n'a pas été démontrée, et les tests numériques de la première partie ont montré des effets de bords assimilables à ceux de Gibbs. Ce dont nous sommes sûrs, c'est que le choix des conditions aux limites de Haines a permis de réduire ce phénomène en évitant que le champ, construit sur la calotte, ne soit nul en certaines régions ; ce choix pour les conditions aux limites évite donc les sauts importants aux éventuelles discontinuités.

Nous n'avons probablement pas non plus les bonnes propriétés de convergence et le champ est vraisemblablement plus ou moins continu en tous points des surfaces, car seule la convergence en norme est assurée. Ceci est d'autant plus vrai que les séries seront en pratiques tronquées. Nous pouvons cependant distinguer certaines régions appartenant à la surface où le champ magnétique est nul, propriétés qui résultent du choix des conditions aux limites homogènes. Dans le cas des séries infinies, qui ne sera pas rencontré en pratique, la continuité ne pourra être étudiée que par une étude formelle sur la convergence des séries et les résultats suivants ne devront pas être extrapolés.

Ecrivons dans un premier temps les composantes du champ magnétique comme la superposition des composantes de la base de Mehler et de la base de Legendre :

$$\begin{aligned}
B_x &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R_p(r) (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) \frac{dK_p^m(\cos \theta)}{d\theta}}_{B_{x,1}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( R_{n_k}^c(r) \widehat{G}_{n_k}^m \cos(m\varphi) + R_{n_k}^s(r) \widehat{H}_{n_k}^m \sin(m\varphi) \right) \frac{dP_{n_k}^m(\cos \theta)}{d\theta}}_{B_{x,2}}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\begin{aligned}
B_y &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{\sin \theta} R_p(r) (G_p^m \sin(m\varphi) - H_p^m \cos(m\varphi)) K_p^m(\cos \theta)}_{B_{y,1}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{\sin \theta} \left( R_{n_k}^c(r) \widehat{G}_{n_k}^m \sin(m\varphi) - R_{n_k}^s(r) \widehat{H}_{n_k}^m \cos(m\varphi) \right) P_{n_k}^m(\cos \theta)}_{B_{y,2}}
\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
B_z &= \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dR_p(r)}{dr} (G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)) K_p^m(\cos \theta)}_{B_{z,1}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{dR_{n_k}^c(r)}{dr} \widehat{G}_{n_k}^m \cos(m\varphi) + \frac{dR_{n_k}^s(r)}{dr} \widehat{H}_{n_k}^m \sin(m\varphi) \right) P_{n_k}^m(\cos \theta)}_{B_{z,2}}
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Les composantes  $B_2$  provenant du potentiel  $V_2$  ont été écrites sous leur forme compacte qui comprend aussi bien les fonctions radiales internes  $(a/r)^{n_k+1}$  que les fonctions radiales externes  $(r/a)^{n_k}$  (voir la section Préliminaires du chapitre 1).

Nous pouvons poursuivre et chercher à voir, d'une manière très simple, si chacune de nos décompositions est susceptible d'entraîner ou non un fort saut de discontinuité entre le champ à l'intérieur du cône et le champ à l'extérieur. Ceci nous donnera une première appréciation des régions du cône où la modélisation d'un champ pourra se révéler difficile dans le cas des séries tronquées.

### 1. Décomposition $PI$

- Sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  en raison des conditions aux limites on trouve que le champ magnétique est la superposition de :

$$\begin{aligned}
B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\
B_y &= B_{1,y} + B_{2,y} \\
B_z &= B_{2,z}
\end{aligned}$$

- et sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  on trouve que le champ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} \\ B_y &= B_{1,y} + B_{2,y} \\ B_z &= B_{1,z} + B_{2,z} \end{aligned}$$

Pour la décomposition *PI* nous ne constatons pas de discontinuité flagrante avec le champ à l'extérieur car les composantes du champ de la décomposition locale sont non-nulles en tous points du domaine  $\Omega$ . Cette décomposition serait donc, à première vue, moins sensible au phénomène de Gibbs. On remarquera que sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$ , la composante la moins bien représentée est la composante  $B_x$  du champ car elle n'est portée que par une seule des deux bases de fonctions, celle de Mehler. Ainsi en est-il de  $B_z$  sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  qui n'est portée que par la base de Legendre.

### 2 Décomposition *PII*

- Sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  mais pour  $\theta \neq \theta_0$  on trouve que le champ magnétique est la superposition de :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{2,x} \\ B_y &= B_{2,x} \\ B_z &= B_{1,z} + B_{2,z} \end{aligned}$$

- Sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  mais avec  $r \neq a, b$  on trouve que le champ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\ B_y &= B_{1,y} \\ B_z &= B_{1,z} \end{aligned}$$

Nous constatons donc que si  $r = a$  ou  $r = b$  en  $\theta = \theta_0$  les composantes  $B_z$  et  $B_y$  sont nulles. Nous avons donc une discontinuité entre le champ à l'intérieur et le champ à l'extérieur dans le cas des séries tronquées et cette décomposition ne permet pas de représenter le champ magnétique sur les coins du domaine conique. Nous aurons donc probablement du phénomène de Gibbs prédominant dans cette région. Remarquons les difficultés de représentations sur ces différentes surfaces où la majorité des composantes ne sont portées que par une seule des contributions  $B_1$  ou  $B_2$ . De plus, cela conduit à la définition d'un potentiel nul sur toutes les surfaces (par construction) ce qui rend la décomposition fort peu adaptée au cas du champ terrestre.

### 3 Décomposition *PIII*

- Sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  mais  $\theta \neq \theta_0$  on trouve que le champ magnétique est la superposition de :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\ B_y &= B_{1,y} + B_{2,x} \\ B_z &= B_{2,z} \end{aligned}$$

- Sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  mais  $r \neq a, b$  on trouve que le champ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} B_x &= B_{1,x} + B_{2,x} \\ B_y &= B_{1,y} \\ B_z &= B_{1,z} \end{aligned}$$

Donc en  $r = a, b$  et  $\theta = \theta_0$  la composante  $B_z$  est nulle. Nous aurons donc probablement une discontinuité importante sur la composante  $Z$  du champ magnétique dans le cas de développements en séries tronquées.



#### 4 Décomposition *PIV*

A l'aide des conditions aux limites fixées pour la résolution du problème *IV* nous n'avons aucune difficulté à montrer qu'en en  $r = a$  ou  $b$  et  $\theta = \theta_0$  nous sommes confrontés à une discontinuité probablement importante sur les composantes  $B_z$  et  $B_y$ .

Nous pouvons faire deux constatations. D'une part malgré la non-orthogonalité des gradients des potentiels pour la décomposition du problème *PI*, cette représentation est la seule qui permette de représenter à peu près correctement le champ en tous points du domaine, y compris sur ses frontières. Les trois autres décompositions ne permettent pas d'obtenir ce résultat. D'autre part, quel que soit le problème initial, la résolution conduit à une représentation moins bonne de l'une ou l'autre composante sur les limites du domaine conique (voire plusieurs dans le cas de *PII* et *PIV*). Cette propriété aura des répercussions importantes sur la modélisation du champ et il conviendra de choisir celle qui offre le meilleur compromis, c'est-à-dire celle qui permette l'erreur la plus minime possible sur la reconstruction du champ complet.

## Chapitre 7

# Résolution des conditions aux limites

Jusqu'à présent, nous avons cherché la forme générale des quatre problèmes de conditions aux limites dont les coefficients de Gauss  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$  et  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$ , définis dans (6.31), et  $\{G_p^m, H_p^m\}$  et  $\{G_0^m, H_0^m\}$ , définis dans (6.46) restent les inconnues du problème géophysique. Une connaissance parfaite des fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  sur les surfaces du domaine  $\Omega$  résoud le problème partout à l'intérieur du cône. Nous pouvons nous servir de cette propriété pour évaluer la capacité des différentes représentations à reconstruire un champ global à l'intérieur de  $\Omega$ . Ces reconstructions du champ pourront être comparées avec un modèle global calculé dans  $\Omega$  en harmoniques sphériques ordinaires. Si l'on choisit les fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  telles qu'elles soient les contributions d'un modèle global alors les relations (6.24b), (6.25c) et (6.25d) permettent d'obtenir ce que nous cherchions lors de l'étude de *SCHA* en utilisant les base de fonctions de Haines (chapitre 5.3 de la première partie) : une relation entre les coefficients de Gauss des harmoniques sphériques et les coefficients de Gauss des harmoniques coniques. Selon la décomposition considérée, les fonctions  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  pourront correspondre soit à un potentiel global, soit aux composantes d'un champ global.

### 7.1 Les conditions de flux

Intéressons-nous au problème initial *PI* et à sa décomposition en deux sous-problèmes. Prenons, en particulier, sa condition de flux associée (6.26). Les conditions aux limites portent sur la dérivée des potentiels et la condition de flux doit être respectée par  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  qui seront dans ce cas la composante  $X$  (pour la fonction  $F$ ) sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$  et les composantes  $Z$  en  $r = a$  (pour la fonction  $G_1$ ) et en  $r = b$  (pour la fonction  $G_2$ ). En développant explicitement l'expression de  $F(r, \theta_0, \varphi)$ , on montre que :

$$\iint_{\Omega_\theta} F(r, \theta_0, \varphi) d\sigma_\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_a^b \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} dr \int_0^{2\pi} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \sin \theta_0 d\varphi$$

Ce qui se réduit à :

$$\iint_{\Omega_\theta} F(r, \theta_0, \varphi) d\sigma_\theta = 2\pi \sin \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^0 (a - b(a/b)^{n+2})}{1+n} \frac{dP_n^0(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}$$

En écrivant  $b = ae^S$ , on conclut que l'expression du flux  $\Phi$  est :

$$\Phi = 2\pi a \sin \theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{g}_n^0 (1 - e^{-S(n+1)})}{n+1} \frac{dP_n^0(\theta_0)}{d\theta}$$

Donc, un champ global exprimé en harmoniques sphériques ordinaires ne satisfait pas les conditions de flux sur les surfaces du cône  $\partial\Omega_{\theta_0}$  et  $\partial\Omega_a \cup \partial\Omega_b$  prises séparément si nous décomposons le problème initial sur  $V$  en deux sous-problèmes  $V_1$  et  $V_2$  tel que nous l'avons fait sans manipulations préalables. Cette propriété est bien entendue suffisante pour affirmer qu'un champ global ne peut pas être inversé correctement en utilisant ces bases de fonctions. Dans la théorie, on dispose de deux stratégies artificielles pour contourner le problème. La première stratégie est immédiate puisqu'elle consiste à retrancher du champ initial toutes les contributions  $m = 0$ , c'est-à-dire de poser  $\tilde{g}_n^0 = 0$ .

**Remarque** *L'égalité des composantes pour les deux représentations, locale ou globale, implique qu'elles sont exprimées dans le même système de référence. Ainsi, les contributions  $m = 0$  ne sont pas les contributions  $m = 0$  d'un champ global exprimées en harmoniques sphériques dans le repère géocentrique, à moins que l'axe de la calotte ne coïncide avec le Nord géographique. On pourra s'en convaincre en regardant l'allure des transformations des coefficients de Gauss (voir paragraphe 5.1).*

L'autre stratégie est moins pénalisante puisqu'elle consiste à modifier les conditions aux limites de telle manière que le problème résolve maintenant le potentiel  $\hat{V}$ , défini par :

$$\hat{V} = \tilde{V} - U_n$$

avec  $U_n$  le potentiel d'un multipôle de degré  $n$  exprimé dans le référentiel du cône. Son expression est :

$$U_n = aC \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n^0(\theta)$$

et la constante  $C$  doit être ajustée de manière à ce que la nouvelle condition au limite  $\hat{F}$  qui s'écrit :

$$\hat{F} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial(\tilde{V} - U_n)}{\partial\theta} \right)_{\theta_0}$$

soit cohérente avec la condition de flux nul sur la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$ . On montre que la constante s'écrit alors :

$$C = \frac{n\Phi}{2\pi a^2 (1 - e^{-S_n}) \sin \theta_0 \frac{dP_n^0(\theta_0)}{d\theta}}$$

Si les fonctions  $G_1$  et  $G_2$  dérivent du même potentiel modifié  $\tilde{V} - U_n$ , la condition (6.27) sera automatiquement remplie et donc (6.26). Cette manipulation ne s'applique pas au problème inverse car, dans ce cas, nous ne sommes pas capables d'ajuster la constante  $C$ .

Par la suite nous adoptons la méthode la plus grossière pour résoudre le problème, à savoir de ne considérer que du champ dont les contributions  $m = 0$  ont été retranchées. Ce cas de figure est bien entendu peu réaliste dans le cas d'un problème inverse sur des mesures réelles du champ magnétique où l'on ne peut ni s'affranchir de ces contributions, ni même les estimer. Nous nous servons cependant de cet exemple pour illustrer la diversité des discussions qu'il suscite et pour pouvoir mettre en parallèle la pertinence des différentes solutions obtenues jusqu'à présent pour des applications géomphysiques. Les solutions évoquées précédemment restent valables ainsi que

la procédure que nous entamons dans la section suivante, à ceci près que nous ne considérons que les ordres  $m$  supérieurs ou égaux à 1 pour la résolution de  $PI$ .

### Conditions de flux des autres problèmes

– Problème  $PII$

Les conditions aux limites du problème  $PII$  portent sur le potentiel plutôt que sur ses dérivées. Aucune contrainte n'est imposée sur le gradient des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Pour cette raison, la condition de flux est automatiquement satisfaite.

– Problèmes  $PIII$  et  $PIV$

Prenons la décomposition du problème  $PIII$  donnée par l'expression (6.29). Alors, la condition de flux devient respectivement, pour chacun des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$\iint_{\partial\Omega_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} ds = 0; \quad - \iint_{\partial\Omega_a} \frac{\partial V_2}{\partial r} ds + \iint_{\partial\Omega_b} \frac{\partial V_2}{\partial r} ds + \iint_{\partial\Omega_{\theta_0}} \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} ds = 0$$

Puisqu'aucune restriction n'est posée ni sur  $\frac{\partial V_1}{\partial \theta}$ , ni sur  $\frac{\partial V_2}{\partial r}$ , il n'y a pas de condition de flux particulière. Un raisonnement similaire s'applique pour le problème  $PIV$  et on aboutit à la même conclusion.

## 7.2 Relations entre le potentiel $V_1$ et un potentiel global

Supposons maintenant que les valeurs aux limites  $F$ ,  $G_1$  et  $G_2$  peuvent s'exprimer en terme de composantes d'un champ global  $\tilde{B}_g$  dérivant d'un potentiel  $\tilde{V}_g$  et représenté dans le même système de référence que le champ local  $B_l$  dérivant du potentiel  $V = V_1 + V_2$ . Nous ne reviendrons pas sur les transformations nécessaires qui permettent de passer du repère géocentrique au repère calotte (voir la section 5.1 de la première partie). Nous écrirons directement :

$$\tilde{V}_g = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m(\theta) \quad (7.1)$$

où  $n$  et  $m$  sont des entiers et  $\left\{ \tilde{g}_n^m, \tilde{h}_n^m \right\}$  des coefficients de Gauss d'un modèle global exprimé dans le référentiel centré sur l'axe de la calotte (axe  $Z'$  sur la figure (6.1)).

Alors d'après (6.24b), on peut écrire :

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{V}_g}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = F(r, \theta_0, \varphi)$$

avec :

$$F(r, \theta_0, \varphi) = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) \frac{dP_n^m(\theta_0)}{d\theta} \quad (7.2)$$

Or, en vertu de l'orthogonalité des fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$ , la condition (6.24b) s'écrit :

$$\sum_{p=1}^{\infty} R_p(r) \frac{dK_p^m(\theta_0)}{d\theta} \left\{ \begin{matrix} G_p^m \\ H_p^m \end{matrix} \right\} + R_0 \frac{dP_0^m(\theta_0)}{d\theta} \left\{ \begin{matrix} G_0^m \\ H_0^m \end{matrix} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \frac{dP_n^m(\theta_0)}{d\theta} \left\{ \begin{matrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{matrix} \right\} \quad (7.3)$$

Mais d'après le paragraphe 6.2.2, les fonctions  $R_0$  et  $R_p(r)$  forment une base orthogonale dans l'intervalle  $[a, b]$ . En multipliant (7.3) par  $R_p(r)$  et en intégrant sur  $[a, b]$  il vient, pour un couple  $(m, p)$ , les coefficients de Gauss locaux :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle_{[a,b]} \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 \frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.4)$$

et de la même manière, en multipliant (7.3) par  $R_0$ , on trouve que pour chaque ordre  $m$  :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} G_0^m \\ H_0^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_0\|^2 \frac{dP_0^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.5)$$

Ces relations ne sont valables que dans le cas où les conditions aux limites sont posées sur le gradient du potentiel. Soit pour les problèmes *PI* et *PIV*. Elles supposent également que  $\frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}$  soit non nulle, ce qui est vrai, et que  $\frac{dP_0^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}$  soit non nulle, ce qui est vrai sauf en  $m = 0$  car  $P_0^0 = 1$ . Par conséquent, le coefficient  $G_0^0$  est indéterminé et ceci reflète le fait que le potentiel ne peut être connu qu'à une constante près.

#### Autres solutions selon les conditions aux limites

Les problèmes *PII* et *PIII* donnent le même type de relations à ceci près que, puisque les conditions sont sur les potentiels, on pose maintenant :

$$F(r, \theta_0, \varphi) = V_1|_{\theta_0} = \tilde{V}_g \Big|_{\theta_0}$$

On trouve par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle_{[a,b]} P_n^m(\theta)|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 K_p^m(\theta)|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

Ces relations valables sont communes aux deux problèmes. En revanche, on devra inclure en plus, pour le problème *PIII* :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_0^m \\ H_0^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle P_n^m(\theta)|_{\theta_0}}{\|R_0\|^2 P_0^m(\theta)|_{\theta_0}} \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

car il met en jeu, contrairement à *PII*, l'ensemble des valeurs propres  $k = 0$  puisque ses conditions sur les surfaces  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  portent sur les dérivées de la fonctions radiale. Ici, nous n'avons aucune indétermination mathématique pour ces coefficients.

$P_0^0(\theta)$  est constant et sa dérivée est nulle ; par conséquent, la composante  $X$  du champ est également nulle. De même, pour  $m = 0$ , la composante  $Y$  est nulle et enfin, puisque  $R_0$  est une constante, la composante  $Z$  est également nulle. En conclusion, même si  $G_0^0$  est mathématiquement déterminé par (7.7) il n'apporte aucune contribution à la valeur du champ.

Nous garderons d'autre part en mémoire que pour le problème *PII*, la forme de la fonction radiale est donnée par (6.38) et que les produits scalaires  $\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle$  dépendent des fonctions de bases  $R_p$  qui découlent du choix du problème initial.

### 7.3 Relations entre le potentiel $V_2$ et un potentiel global

De même pour le potentiel  $V_2$ , si  $G_1$  et  $G_2$  sont les dérivées radiales de (7.1) respectivement en  $r = a$  et  $r = b$ , c'est-à-dire :

$$G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n+1) \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m \quad (7.8)$$

$$G_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n+1) \left( \frac{a}{b} \right)^{n+2} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m \quad (7.9)$$

alors, les conditions aux limites (6.25c) et (6.25d) donnent le système suivant :

$$- \sum_{n=m}^{\infty} (n+1) P_n^m \tilde{g}_n^m = - \sum_{k=0}^{\infty} P_{n_k}^m \left[ (n_k+1) G_{n_k}^{i,m} - n_k G_{n_k}^{e,m} \right] \quad (7.10a)$$

$$- \sum_{n=m}^{\infty} (n+1) P_n^m e^{-S(n+2)} \tilde{g}_n^m = - \sum_{k=0}^{\infty} P_{n_k}^m \left[ (n_k+1) e^{-S(n_k+1)} G_{n_k}^{i,m} - n_k e^{S(n_k-1)} G_{n_k}^{e,m} \right] \quad (7.10b)$$

Ce système est équivalent pour les coefficients  $H_{\alpha}^m$ .

Les fonctions  $\{P_{n_k}^m\}$  forment une base orthogonale sur  $[0, \theta_0]$  donc, en multipliant (7.10) par  $P_{n_k}^m$  et en intégrant sur  $[0, \theta_0]$ , il vient pour la résolution du système en  $r = a$  et  $r = b$  les solutions pour un couple  $(m, n_k)$  :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1-e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (n_k+1)(1-e^{-S(2n_k+1)})} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.11)$$

et

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1-e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 n_k (e^{S(2n_k+1)}-1)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}} \quad (7.12)$$

Si le problème homogène a été posé tel que les racines  $n_k$  sont solutions de  $dP_{n_k}^m/d\theta|_{\theta_0} = 0$ , alors la première racine  $n_{k=0}$  est nulle pour  $m = 0$ . On a donc une indétermination sur le coefficient externe  $G_0^{e,0}$  qui illustre le fait que le potentiel ne peut être connu qu'à une constante près. Cette solution est également valable pour la résolution du problème *PIII*. Dans ce cas cependant, nous n'avons pas d'indétermination car  $n_k \neq 0$  pour  $m = 0$  puisque les conditions aux limites sur la fonction de Legendre différent, entraînant des valeurs de  $n_k$  différentes.

#### Autres solutions selon les conditions aux limites

Considérons maintenant que sur  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  les conditions  $G_1$  et  $G_2$  sont les expressions du potentiel global respectivement en  $r = a$  et  $r = b$ , c'est-à-dire :

$$G_1 = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m$$

$$G_2 = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a}{b} \right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m$$

Alors les conditions aux limites sur  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  dans (6.28) ou dans (6.30) entraînent que les coefficients *internes* et *externes* s'écrivent maintenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.13)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (7.14)$$

Ces solutions apparaissent notamment dans les problèmes *PII* et *PIV*. Il n'y a pas d'indétermination pour ces expressions, ceci reflète bien l'unicité de la solution d'un problème de Dirichlet.

## 7.4 L'ambiguïté du concept d'interne et d'externe

On considère habituellement les coefficients  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$  comme étant des coefficients décrivant le champ d'origine interne et les coefficients  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$  comme étant des coefficients décrivant le champ externe. Puisque le potentiel global (7.1) n'a que des contributions internes, on tente souvent de le modéliser sur la décomposition locale uniquement par des coefficients de Gauss *internes*  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$ . Nous avons vu au chapitre 5.4 de la première partie qu'une telle écriture conduisait à la résolution d'un système qui n'a que deux solutions. L'une pour  $S = 0$ , solution qui nous est maintenant interdite car la résolution interdit que  $a = b$  (cf paragraphe 6.2.2) et l'autre en  $S = \infty$ , solution pour laquelle on perd le caractère discret des valeurs propres  $\lambda_p$  (voir annexe C). À l'évidence, les coefficients de Gauss *externes* doivent être inclus lorsque le domaine conique est limité vers le haut. Ce problème est d'une grande portée géophysique car il nous permet de bien distinguer les différentes structures du champ magnétique. D'autre part, en pratique nous tentons de retrancher le champ externe par un filtrage approprié sur les données, mais nous n'avons pas d'outil mathématique fiable nous permettant de nous assurer que ce procédé est suffisamment précis. Il reste donc une zone d'ombre sur le modèle obtenu car nous pouvons difficilement quantifier les différentes contributions du champ magnétique. Nous cherchons donc, dans cette section, à énoncer le problème lié au concept d'interne et d'externe en modélisation régionale. Ceci nous permet de trouver une piste pour initier une stratégie qui nous permettra, dans le future, de résoudre ce délicat problème.

### 7.4.1 Une tentative pour apporter des éléments de réponse

Le principe même du concept d'interne ou d'externe est à revoir en modélisation régionale dans un cône. En effet, on attribut traditionnellement ces qualificatifs à des sources localisées par rapport à la surface terrestre prise comme référence. En harmoniques sphériques, la surface terrestre englobe les sources internes et le concept d'interne et d'externe se réduit donc plus simplement à en-dessous et au-dessus de la surface de référence. En présence de plusieurs surfaces, même en harmoniques globales, le concept d'interne/externe devient lui-même équivoque. Par exemple, les couches atmosphériques, où circulent des courants ionosphériques, sont internes par rapport à la surface du satellite mais externes vues de la surface terrestre. Cette simple analogie nous pousse à conclure que le concept d'interne ou d'externe dans un contexte de modélisation régionale dans un volume limité latéralement n'a pas de sens s'il n'est pas redéfini. En effet,

la résolution du problème régional initial exclu la présence de source à l'intérieur du domaine de validité de la solution. Du point de vue du cône tout se trouve donc à l'extérieur, que ce soit au-dessus, en-dessous ou même sur les côtés ; nous ne pouvons en recueillir que la somme des contributions. Les fonctions de bases locales qui décrivent le champ magnétique ne sont pas valides à l'extérieur du domaine de définition  $\Omega$  et ne peuvent pas nous donner d'information directe sur la localisation des sources. Nous sommes cantonnés dans un volume dont le monde extérieur nous est inconnu.

Puisque les bases de fonctions ne peuvent pas remplir cette tâche, une possibilité pourrait être d'avoir recours au traitement du signal. En effet, le champ magnétique modélisé par les harmoniques sphériques ou coniques est unique. Cependant, étant modélisé dans un volume, il est moins sensible, lorsqu'il est calculé à la surface terrestre, aux sources externes (d'un point de vue géocentrique) que s'il était calculé à une surface d'altitude supérieure. Il doit donc être possible, par l'analyse des fréquences contenues dans le champ magnétiques à diverses altitudes, de dire si le champ dans le cône modélise certaines contributions provenant du dessus et peut être le cas échéant de les isoler. Ces considérations, dont l'importance ne doit pas être négligée, n'ont à ce jour pas trouvé d'éléments de réponse satisfaisants.

L'autre solution est d'essayer de revenir à des bases de fonctions plus compatibles avec les concepts d'interne et d'externe en modélisation globale c'est-à-dire d'essayer de retourner aux fonctions de base  $(a/r)^{l+1}$  et  $(r/a)^l$  des harmoniques sphériques ordinaires. Dans un premier temps, il convient de voir si nous sommes en droit théoriquement de le faire.

### Un théorème troublant...

Reprenons le théorème de Stockes ou théorème de la divergence que nous avons vu en (6.10) sous la forme de la première identité de Green. Considérons ensuite deux potentiels notés  $V$  et  $\tilde{V}$ . L'un est développé dans la base locale, l'autre dans la base globale. La construction d'un modèle régional, quelles que soient les conditions aux limites, a comme ambition de pouvoir finalement écrire que dans le volume conique  $\Omega$ , les deux représentations sont égales :

$$\boxed{V(\Omega) = \tilde{V}(\Omega)} \quad (7.15)$$

Nous avons vu que les décompositions précédentes, grâce aux conditions aux limites sur les frontières du domaine  $\Omega$ , permettaient d'aboutir à ce résultat ; du moins dans l'acceptation d'une égalité en norme quadratique.

Nous définirons l'espace complet par la lettre grecque  $\Xi$ . Alors on peut écrire :

$$\Xi = \Omega \cup \Psi$$

où  $\Psi$  l'espace complémentaire de  $\Omega$  (figure 7.1). Un théorème bien connu, à la base de la théorie du potentiel, nous enseigne qu'il n'existe qu'un seul potentiel global  $\tilde{V}$  dans  $\Omega$  qui vérifie l'expression (7.15). La question est de savoir si cette unicité est également valable en dehors du domaine  $\Omega$ . Pouvons-nous définir un unique potentiel  $\tilde{V}$  dans le domaine  $\Psi$  et donc dans  $\Xi$  à partir de (7.15) ? Nous trouvons la réponse par le théorème suivant ([61], Chap X, section 5) :

**Théorème** *Si  $G$  est harmonique sur un domaine  $\Xi$  et si  $G$  s'annule en tout point d'un domaine  $\Omega$  contenu dans  $\Xi$  alors  $G$  s'annule en tout point de  $\Xi$ .*

La démonstration de ce théorème est relativement simple et nous l'illustrons sur la figure 7.1. Prenons un point  $P$  dans le domaine  $\Omega$ , à l'intérieur de la boule  $B$  de rayon  $r = \alpha$  et d'origine



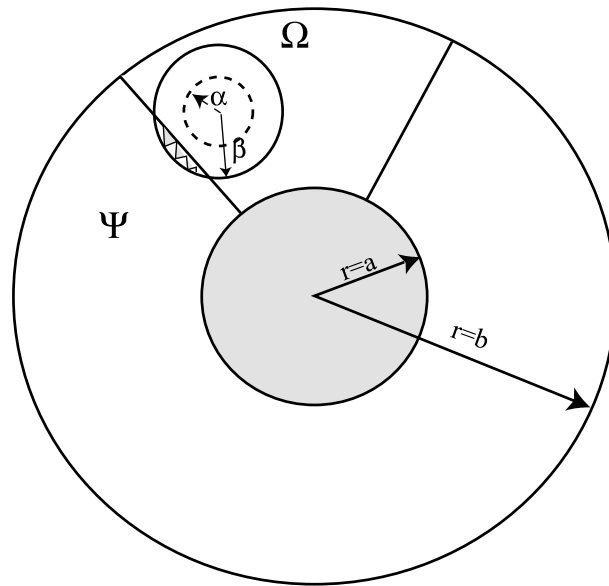


FIG. 7.1 – Le potentiel local dans le domaine  $\Omega$  est égal à un unique potentiel global. Le théorème de continuité montre que le potentiel global est alors unique (et harmonique) dans le domaine  $\Psi$ , et par conséquent également dans le domaine  $\Xi = \Psi \cup \Omega$ .

$P$ ; le potentiel  $G$  tel que  $G = V(B) - \tilde{V}(B)$  est harmonique et nul en tous points de  $B$ . Puisque c'est vrai en  $r = \alpha$ , cela est vrai pour une boule de rayon  $r = \beta$  telle que le rayon  $\beta$  coupe la surface  $\partial\Omega_\theta$  du cône. Par conséquent,  $G = 0$  également dans la zone hachurée qui appartient au domaine  $\Psi$ . En renouvelant l'opération autant de fois que nécessaire, on finit par montrer que  $G(\Psi) = 0$  donc que  $G(\Xi) = 0$ .

Nous sommes donc en présence d'un théorème de continuité qui démontre l'unicité d'un potentiel global trouvé à partir d'un potentiel local. Ceci signifie que si l'on peut mettre en oeuvre le moyen de déterminer du potentiel écrit en harmoniques sphériques à partir du potentiel local trouvé sur une région, celui-ci sera unique. Ce théorème est à première vue assez déroutant et nous ne le considérerons qu'avec circonspection car il est couramment admis qu'un champ déterminé sur une région à partir d'une modélisation régionale est propre à la région et ne donne pas lieu à un champ global unique. D'un point de vue conceptuel, on pourrait penser que le théorème précédent s'oppose à cette allégation.

### ... mais peu exploitable.

En pratique, cette affirmation accepte peu de contradiction et nous pouvons détecter au moins deux restrictions évidentes.

D'une part, les expressions des potentiels s'expriment sous forme de séries infinies et l'application du théorème, qui stipule avant tout que (7.15) soit vérifiée, ne souffre sans doute pas d'approximation, c'est une égalité au sens mathématique. Or, nous avons justement fait deux approximations; la première en tronquant les séries, la seconde, moins immédiate, en obtenant les expressions des coefficients de Gauss locaux. Ce dernier point révèle toute l'ambiguïté de ce que nous appelons égalité entre le potentiel global et le potentiel local dans le cône. Nous n'avons en effet pas égalé les potentiels en tout point, contrairement à ce qui est requis par l'expression (7.15), mais nous avons pris leurs intégrales de surface et recherché une égalité de

leurs normes. Rechercher les coefficients de Gauss par moindres carrés revient à minimiser la norme et l'approximation est similaire. L'égalité (7.15) ne peut donc être strictement vérifiée par ce moyen.

D'autre part, si le théorème est valable dans notre exemple, il devrait être possible de déterminer les coefficients de Gauss globaux à partir des coefficients de Gauss locaux numériquement, et les expressions du type (7.11) et (7.4) doivent être bijectives. L'expérience a montré que l'inversion de ces expressions permettait de retrouver dans certains cas les coefficients de Gauss globaux initiaux. En ce sens, le théorème s'est vérifié. Mais des différences minimales, simulées par un très faible bruit dans la valeur des coefficients de Gauss locaux, ont également montré que le problème est parfaitement instable.

Cette dernière manipulation vient corroborer l'idée que (7.15) n'admet pas d'approximation et n'est valable que dans le cas des convergences simples. Nous sommes donc en pratique incapables de restituer un champ global à partir d'une décomposition locale.

Nous aurions pu nous y attendre d'après la philosophie même de la modélisation régionale qui cherche à exprimer un champ de potentiel autrement que par les harmoniques sphériques qui y échouent. Si nous pouvions représenter des données régionales par les harmoniques sphériques globales, nous en déduirions l'expression d'un modèle de champ pour la sphère entière, et la modélisation régionale par d'autres techniques n'aurait pas lieu d'être entreprise.

Ce théorème mérite cependant d'être gardé en mémoire car il n'est pas insensé d'espérer obtenir une bonne approximation de l'égalité des potentiels. Si ce résultat doit être obtenu, il se fera par une exploitation des relations linéaires entre les coefficients de Gauss dans le cadre d'un problème inverse contraint par l'adjonction d'une information a priori sur le champ obtenue par des hypothèses physiques sur le champ magnétique.



## Chapitre 8

# Considérations numériques

### 8.1 Les fonctions coniques de Mehler et leur évaluation

Dans les solutions que nous venons de présenter, et maintenant que nous disposons d'un algorithme fiable pour estimer les fonctions de Legendre (paragraphe 3.1, partie 1), seules les fonctions de Mehler présentent la particularité de devoir être estimées, car les nouvelles fonctions radiales qui ne mettent en jeu que des fonctions transcendentales élémentaires, ne posent pas de problèmes numériques particuliers. En revanche, les fonctions de Mehler sont des fonctions dites *spéciales* ou *hautement transcendentales* ([35]) au même titre que les fonctions de Legendre associées et requièrent de nouvelles stratégies d'évaluation. Nous ne reviendrons pas sur les difficultés que soulève l'estimation directe des fonctions coniques par le calcul direct des séries des fonctions hypergéométrique dans (6.40) puisque ce problème a déjà été soulevé à la section 3.1.1 de la première partie.

Les fonctions de Mehler, définies pour  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $[0, \pi[$  sont des fonctions monotones strictement croissantes et positives (en réalité, le signe des fonctions de Mehler peut varier en fonction de  $m$  selon la définition adoptée). D'un point de vue numérique, il n'y a donc pas de problème particulier dû à des termes de signes opposés dans la série hypergéométrique. Nous préférons cependant utiliser la récurrence de Clenshaw qui reste un procédé robuste dans ce cas car il permet de s'affranchir du calcul des sommes même si elle ne s'avère pas absolument nécessaire. Habituellement, lorsque l'on rencontre des fonctions spéciales, on peut se référer à de nombreuses analyses concernant leur évaluation et se reposer sur le travail pré-établi d'un spécialiste de l'évaluation numérique des fonctions spéciales. En ce sens, les fonctions de Mehler ou coniques sont un cas particulier (J. Segura, communication personnelle) puisqu'il semble qu'elles ne soient rencontrées que dans de très rares cas. Il serait injuste cependant de ne pas mentionner le programme informatique du CERN ([62]) permettant d'évaluer ces fonctions uniquement pour  $m = 0$  et  $m = 1$ ; dans le cas présent il n'est donc que de peu d'utilité. C'est pourquoi nous abordons le vaste problème de l'évaluation numérique avec précaution et nous avons conscience que les solutions proposées ne paraîtront peut-être pas optimisées; elles seront considérées comme une première ébauche. Quoiqu'il en soit, la validité du calcul des fonctions de Mehler dans notre domaine d'étude a été vérifiée pour le mieux par diverses représentations, par l'utilisation intensive des tables disponibles ([113]), et par des relations de récurrence quand cela fut possible.

### 8.1.1 Calcul par la récurrence de Clenshaw

On cherche dans un premier temps à évaluer les fonctions coniques de Mehler par la récurrence de Clenshaw. La fonction hypergéométrique s'écrit sous forme d'une série infinie :

$$F\left(m + \frac{1}{2} - i\frac{p\pi}{S}, m + \frac{1}{2} + i\frac{p\pi}{S}, m + 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \sin^{2j} \frac{\theta}{2} \quad (8.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0 \\ \delta_{j+1} &= \frac{(m + 1/2 + j)^2 + (p\pi/S)^2}{(j + 1)(j + m + 1)} \delta_j \end{aligned}$$

L'expression des termes  $\delta_j$  montre que la série hypergéométrique est strictement positive et croissante sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Le rayon de convergence de la série étant  $|R| < 1$ , le domaine de définition des fonctions de Mehler est  $]0, \pi[$ . Le facteur  $\delta_j$  montre d'autre part que les fonctions de Mehler sont croissantes en  $m$  et  $p$  également. Ceci laisse deviner la difficulté de convergence de la série d'une part, mais également les problèmes numériques liés à la valeur même de la fonction hypergéométrique (8.1), génératrice des fonctions de Mehler d'autre part. A titre d'exemple, on a tracé les fonctions de Mehler pour différentes valeurs de colatitude  $\theta$ , d'argument  $\tau = p\pi/S$  et des ordres  $m = 0$  et  $m = 5$  (figure (8.1)). Nous avons dû limiter la représentation sur l'axe des ordonnées en raison des valeurs qu'atteignent les fonctions de Mehler. Les tracés ne montrent les surfaces paramétrique  $P(\theta, \tau)$  (respectivement  $dP(\theta, \tau)/d\theta$ ) que pour des valeurs inférieures ou égales à un seuil arbitraire de 6000 qui permet cependant d'esquisser les tendances générales des fonctions.

Les fonctions de Mehler peuvent atteindre des valeurs démesurées sur les bords du cône, même pour une petite ouverture d'angle de  $\theta = 5^\circ$ . Cette caractéristique est par conséquent accentuée pour la dérivée des fonctions et il devient rapidement indispensable de les normaliser correctement dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  (cf annexe B).

Dans les arguments de la fonction hypergéométrique (8.1), l'évaluation de la fonction peut être altérée par la multiplication de  $\delta_j$  qui, pour de petites valeurs de  $S$  (i.e pour un cône borné supérieurement à une basse altitude), atteint rapidement de très grandes valeurs, par  $\sin^{2j} \frac{\theta}{2}$  qui au contraire atteint de très petites valeurs. C'est notamment le cas pour l'estimation de ces fonctions pour des colatitudes proches de 0. On se trouve confronté au problème numérique classique de multiplication d'un très grand nombre par un très petit nombre. Pour un couple  $(p, m)$  donné, l'augmentation de la valeur  $\theta$  entraîne une convergence de  $\sin^{2j} \frac{\theta}{2}$  beaucoup plus lente, et nécessite un plus grand nombre de récurrences. Les termes étant tous positifs ou nuls, nous avons pu recourir au procédé classique de transformation du produit  $\delta_j \sin^{2j} \frac{\theta}{2}$  en sommes de logarithmes  $\log(\delta_j) + 2j \log(\sin \frac{\theta}{2})$  dans l'algorithme. Ceci nous a permis de retarder les effets de ces fâcheuses caractéristiques numériques.

L'estimation de la fonction hypergéométrique, malgré ces inconvénients, offre la possibilité relativement intéressante de pouvoir calculer les dérivées des fonctions indépendamment des fonctions elles-mêmes. On peut ainsi vérifier les résultats en utilisant les relations de récurrence entre les fonctions de Legendre.

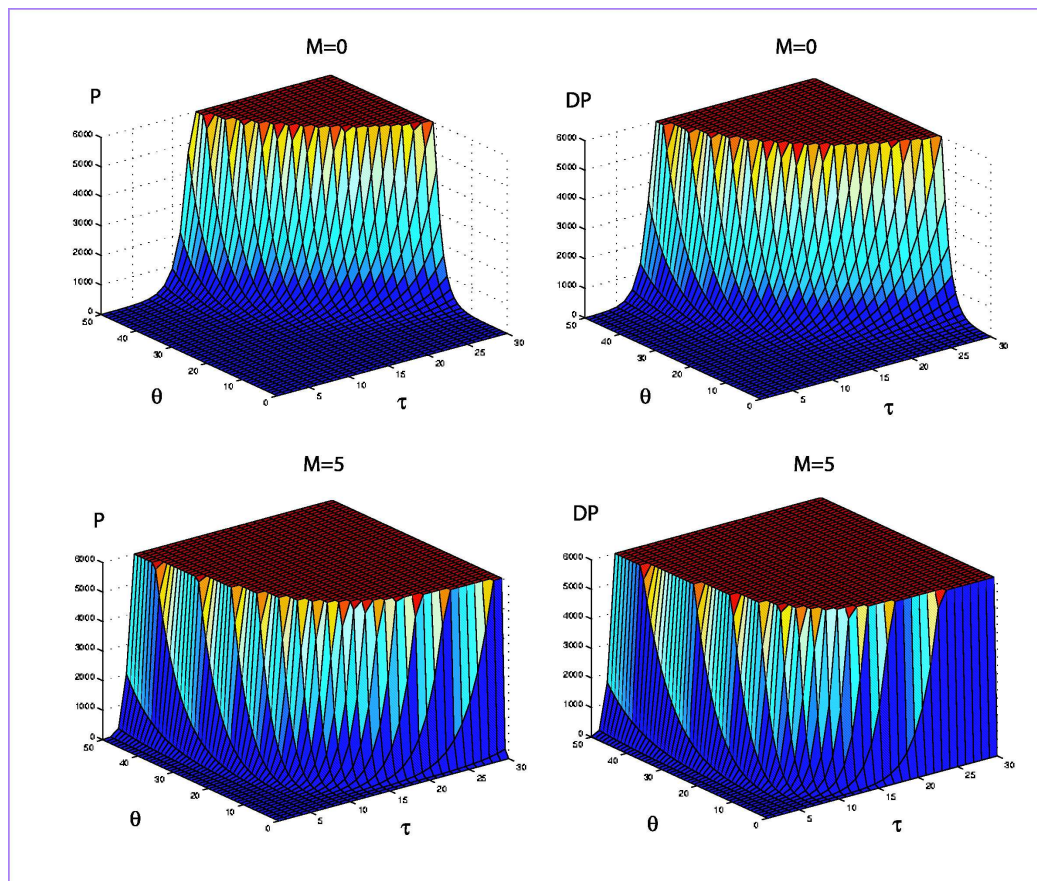


FIG. 8.1 – Les fonctions de Mehler, comme les fonctions de Legendre généralisées sont des fonctions de  $\theta$  paramétrées par les ordres  $m$  et les degrés  $n$ . On a tracé les fonctions de Mehler et leur dérivées pour  $m = 0$  et  $m = 5$  pour différents couples  $(\theta, \tau)$  où  $\tau = p\pi/S$  et tel que  $n = -1/2 + i\tau$ . On observe clairement que la fonction est croissante pour tous les paramètres et on constate en particulier que les valeurs de la fonction et de sa dérivée s'emballent pour des valeurs faibles des paramètres. Ceci illustre les caractéristiques mathématiques des fonctions de Mehler mais démontre également que normaliser ces fonctions autrement que par la normalisation de Schmidt est une impérieuse nécessité.

## 8.1.2 La représentation sous forme d'intégrale de Mehler-Fock

### Caclul intégrale

Lors des discussions sur l'évaluation des fonctions de Legendre généralisées pour  $n$  réel, nous avons mentionné l'existence d'autres représentations des fonctions, le plus souvent par intégrales. Ceci est naturellement vrai aussi pour les fonctions coniques de Mehler qui sont représentables par des intégrales de *Mehler-Fock*. Cette représentation intégrale représente un outil alternatif d'évaluation et de comparaison de nos algorithmes.

Ecrivons l'expression intégrale des fonctions coniques ([113]) :

$$K_p^m = \frac{2^{-m+1}(-1)^m}{\sqrt{\pi}\Gamma(m+1/2)} \frac{N_p^m}{\sin^m \theta} \underbrace{\int_0^{\theta_0} \frac{\cosh\left(t\frac{p\pi}{S}\right)}{(2\cos t - 2\cos \theta_0)^{1/2-m}} dt}_{(8.2)}$$

On constate que le calcul numérique de l'intégrale est problématique car elle est impropre en  $t = \theta_0$ . Faisons donc le changement de variable suivant ([113]) :

$$t = 2 \sin^{-1} \left( \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi \right)$$

alors :

$$dt = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \varphi}}$$

L'intégrale  $I_{p,m}$  devient :

$$I_{p,m} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cosh\left(2p\pi/S \sin^{-1}\left(\sin \theta/2 \sin \varphi\right)\right) \sin \theta/2 \sin \varphi}{2^{1/2-m} \underbrace{\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\sin \theta/2 \sin \varphi\right)\right) - \cos \theta\right)}_R^{1/2-m} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

De plus, on montre à l'aide d'identités trigonométriques simples que :

$$R = 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta/2$$

et donc que :

$$I_{p,m} = 2^{2m} \int_0^{\pi/2} \frac{\cosh\left(2p\pi/S \sin^{-1}\left(\sin \theta/2 \sin \varphi\right)\right) \sin^{2m} \theta/2 \cos^{2m} \varphi}{(1 - \sin^2 \theta/2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} d\varphi \quad (8.3)$$

En remplaçant dans (8.2) et en posant que  $\sin^m \theta = 2^m \sin^m \theta/2 \cos^m \theta/2$  on trouve que :

$$\boxed{K_p^m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\tan^m(\theta/2)}{\Gamma(m+1/2)} N_p^m \int_0^{\pi/2} \frac{\cosh(2p\pi/S(\sin(\theta/2)\sin(\beta))\cos^{2m}(\beta))}{(1-\sin^2(\theta/2)\sin^2(\beta))^{1/2}} d\beta} \quad (8.4)$$

**Remarque** Cette formulation est plus générale que celle généralement trouvée dans les travaux de Zhurina et al. ([113]) ou de Köblig ([62]), puisqu'elle est valable pour tout  $m$ . On

pourra cependant vérifier que pour  $m = 0$  et  $m = 1$  on retrouve bien les définitions de ces auteurs .

Pour  $m = 0$  et  $m = 1$  le calcul des fonctions de Mehler par la représentation intégrale ne présente pas de difficulté pour de petites valeurs de  $\pi p/S$  et de  $\theta$ . Rappelons que le facteur  $S$  a été défini comme  $S = \log(b/a)$ , avec  $a$  et  $b$  les altitudes supérieures et inférieures du cône. Pour une altitude supérieure  $b$  de l'ordre de quelques milliers de  $km$ ,  $S < 1$ . Si l'on considère par exemple l'orbite maximum du satellite ØRSTED, on peut légitimement prendre la valeur  $b = 7371$  km, ce qui donne pour  $p = 1$ ,  $\pi p/S = 21,5$ . Dans un tel cas, l'argument  $\pi p/S$  est tel que Zhurina et al. ([113]) préconisent déjà un développement asymptotique. Rapidement, nous avons des difficultés pour évaluer les fonctions par intégration numérique car l'intégrande, sous le signe intégral, varie rapidement. La représentation de Mehler-Fock est, par conséquent, limitée numériquement pour des valeurs de  $\pi p/S$  et de  $\theta$  relativement faibles, même pour des ordres  $m = 0$  et  $m = 1$ .

Il existe plusieurs méthodes pour contourner le problème tel que le développement en série du cosinus hyperbolique ([113]) ou d'autres approximations asymptotiques. Nous nous sommes néanmoins posé la question de la légitimité d'intégrer un développement déjà approché et nous ne sommes pas en mesure d'en prévoir les conséquences sur la précision des fonctions que l'on cherche à évaluer. Nous n'avons donc pas voulu nous perdre dans les différentes représentations asymptotiques ou autres développements en série, avec lesquels nous sommes invariablement confrontés au problème du choix du seuil à partir duquel la transition d'une méthode à une autre est nécessaire. De plus, les résultats peuvent différer selon les méthodes d'intégration quadratique utilisées. Il existe donc une succession d'erreur et d'approximations, variables selon la méthode utilisée, qui restent difficilement quantifiables. Remarquons enfin que le développement en série du cosinus hyperbolique nécessite d'intégrer numériquement tous les termes de la série ce qui, malgré les performances informatiques actuelles, reste très coûteux en temps de calcul. Dans ce type de manipulation, il faut le plus souvent trouver un compromis entre précision et vitesse de calcul, le plus souvent obscur s'il n'est pas décidé et vérifié au cas par cas.

### Exploitation des formules de récurrence

Le calcul direct par une intégrale est en particulier limité à des ordres  $m$  relativement bas. Nous pouvons donc essayer de tirer parti des relations de récurrence entre les fonctions de Mehler. Cette solution est intéressante, d'une part pour la vérification des de l'évaluation de la récurrence de Clenshaw à des ordres  $m > 1$ , d'autre part pour pouvoir éventuellement adapter l'algorithme d'Olver et Smith ([91]) au calcul des fonctions coniques.

Nous pouvons suivre l'exemple de Köblig ([62]) et utiliser la relation de récurrence suivante pour déduire des fonctions calculées à des ordres  $m = 0$  et  $1$ , les fonctions d'ordres  $m$  supérieurs :

$$\boxed{K_p^{m+2} + K_p^{m+1} 2(m+1) \cot \theta - \left( \left( \frac{1+2m}{2} \right)^2 + \left( \frac{p\pi}{S} \right)^2 \right) K_p^m = 0} \quad (8.5)$$

Cette relation de récurrence ne présente par de singularité analytique, malgré la présence de  $\cot \theta$ , car ce facteur se simplifie avec  $\tan^m(\theta/2)$  de l'expression (8.4). D'autre part, on peut trouver à partir de (8.5) une relation de récurrence sur les intégrales de Mehler-Fock (8.3) et en déduire de la même manière les intégrales de Mehler-Fock à des ordres  $m$  élevés. Il reste néanmoins, outre les problèmes de transitions avec les expressions asymptotiques, une difficulté majeure : tenter de normaliser les fonctions en utilisant le formalisme de l'expression (8.4), ou adapter le calcul de la norme à chaque type de développement utilisé relève d'une certaine



gageure. Or, l'expérience a montré que la normalisation complète des fonctions de Mehler était une condition indispensable à l'élaboration des modèles numériques dans un cône.

### 8.1.3 Validation de la récurrence de Clenshaw

Nous conservons en fin de compte la méthode de Clenshaw comme la représentation la plus objective des fonctions de Mehler car son calcul dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  reste le plus direct. Avant de normaliser complètement ces fonctions, nous nous servons de la représentation intégrale pour valider la représentation en série de Clenshaw.

Une première difficulté importante provient du choix de la quadrature utilisée pour l'intégration numérique. Nous avons utilisé dans un premier temps le panel des techniques d'intégrations quadratiques offertes par le logiciel MATLAB. Ces méthodes numériques se sont révélées très insuffisantes pour vérifier systématiquement la cohérence entre l'évaluation par la récurrence de Clenshaw et le calcul intégrale. A titre d'exemple, un jeu de paramètres pour  $m = 0$ ,  $p = 10$ , avec des paramètres géométriques pour le cône fixés à  $\theta_0 = 5^\circ$  et  $b = 6871.2$ , donne une erreur relative entre notre algorithme et l'intégration quadratique d'environ  $10^{-1}$ . Pourtant, la récurrence de Clenshaw est stable pour ces paramètres et la raison est à imputer aux routines MATLAB. W. Grandner et Gautschi ([40]) ont discuté ces déficiences et ont proposé deux routines d'intégrations numériques qui offrent une indiscutable amélioration. En utilisant ces nouvelles procédures numériques, les fonctions de Mehler ont été testées avec une précision relative de  $10^{-10}$  entre les deux méthodes, intégrale et en série, pour un jeu de tous les couples  $(p, m)$  jusqu'à  $P_{max} = 70$  et  $M_{max} = 50$ , avec  $\theta_0 = 5^\circ$  et  $b = 6871.2$  (soit  $S \sim 0,076$ ). Au delà de ces paramètres, les vérifications n'ont pas été entreprises. Après cette vérification, les fonctions de Mehler peuvent être normalisées (annexe B).

## 8.2 Convergence des solutions

Nous l'avons mentionné, les différents problèmes de conditions aux limites exposés précédemment ne sont pas équivalents numériquement ; nous le verrons plus bas analytiquement. En pratique, les séries infinies sont tronquées et leur capacité de représentation d'un champ de potentiel dépend de leur vitesse de convergence, donc des propriétés des fonctions de base. Dans la résolution de chacun des deux sous-problèmes  $V_1$  et  $V_2$ , nous avons été amenés à résoudre trois problèmes de Sturm-Liouville différents pour chacune des variables  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ . Les développements en séries solutions que nous avons trouvés pour les bases de fonctions sont des *développements en séries de fonctions orthogonales* qui ont des propriétés semblables aux développements de Fourier. Nous estimons donc nécessaire de rappeler quelques définitions.

Une fonction quelconque  $f(x)$ , appartenant à  $L^2\{[x_1, x_2]\}$  peut être représentée en série de fonctions orthogonales  $\varphi_n(x)$ , en admettant qu'elles constituent une base complète, de telle manière que :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (8.6)$$

L'orthogonalité des fonctions de base est donnée de manière générale par :

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(x) \varphi_m(x) p(x) dx = 0, \quad n \neq m$$

avec  $p(x)$  la fonction poids. Par exemple, cette définition englobe les développements en séries de Fourier pour lesquels  $\varphi_n(x) = \cos(nx)$  et  $p(x) = 1$  mais aussi les séries en fonctions de Legendre associées pour lesquelles  $\varphi_n(x) \equiv P_{n_k}^m(\theta)$  et  $p(x) \equiv \sin(\theta)$ . Les coefficients  $c_n$  permettant de représenter la fonction  $f(x)$  par (8.6) s'obtiennent par :

$$c_n = \frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)\varphi_n(x)p(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2} \varphi_n^2(x)p(x)dx} \quad (8.7)$$

Nous allons illustrer la validité de (8.6) avec les bases de fonctions orthogonales que nous avons trouvées. La fonction  $f(x)$  pourrait être n'importe quoi, mais en pratique nous désirons vérifier que les nouvelles bases de fonctions permettent de reconstruire les bases de fonctions des harmoniques sphériques ordinaires. Si tel est le cas, nous sommes certains que notre décomposition sera adaptée pour les champs de potentiel. Nous chercherons donc à représenter d'une part les fonctions de Legendre associées (ou fonctions de Schmidt) par des séries de fonctions de Legendre généralisée, puis la dépendance radiale d'un potentiel par une série des fonctions  $R_p$ .

### 8.2.1 Représentation des fonctions de Legendre

Les fonctions de Legendre associées  $P_{n_k}^m$  forment une base orthogonale complète sur l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Les fonctions de Legendre ou de Schmidt  $P_l^m$  (avec  $l, m$  entiers) peuvent donc s'écrire comme combinaison linéaire des fonctions de Legendre associées. On trouve, d'après (8.6) et (8.7), de façon générale, que dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  :

$$P_l^m(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle P_l^m, P_{n_k}^m \rangle}{\underbrace{\|P_{n_k}^m\|^2}_{c_k}} P_{n_k}^m(\theta) \quad (8.8)$$

Remarquons que nous avons déjà évoqué ce développement dans la première partie au chapitre 5.2. Dans la pratique, les séries sont tronquées à un certain degré  $k = K_{\max}$ . Plus la convergence est rapide, moins l'effet de la troncature doit se faire sentir et plus l'expression par les sommes partielles doivent approcher la limite. Or, la vitesse de convergence des séries dépend du choix des conditions aux limites.

La figure (8.2) illustre les reconstructions respectives de deux fonctions de Schmidt  $P_1^0$  et  $P_2^2$  selon la condition choisie avec une troncature  $K_{\max} = 15$  pour la série (8.8).

Nous vérifions donc que les fonctions de Legendre généralisées forment bien une base de fonctions sur laquelle on peut projeter les fonctions de Legendre associées. Mais nous observons également une indiscutable différence de comportement.

#### Condition homogène de Neumann sur les fonctions de Legendre généralisées.

Prenons donc :

$$\left. \frac{dP_{n_k}^m(\theta)}{d\theta} \right)_{\theta_0} = 0$$

Le résultat de la reconstruction est présenté sur la figure (8.2 -1a, 2a). Les fonctions de Legendre ainsi construites permettent une bonne modélisation des fonctions de Schmidt dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$ . Avec peu de coefficients, nous avons pu reconstituer les fonctions avec une erreur négligeable.

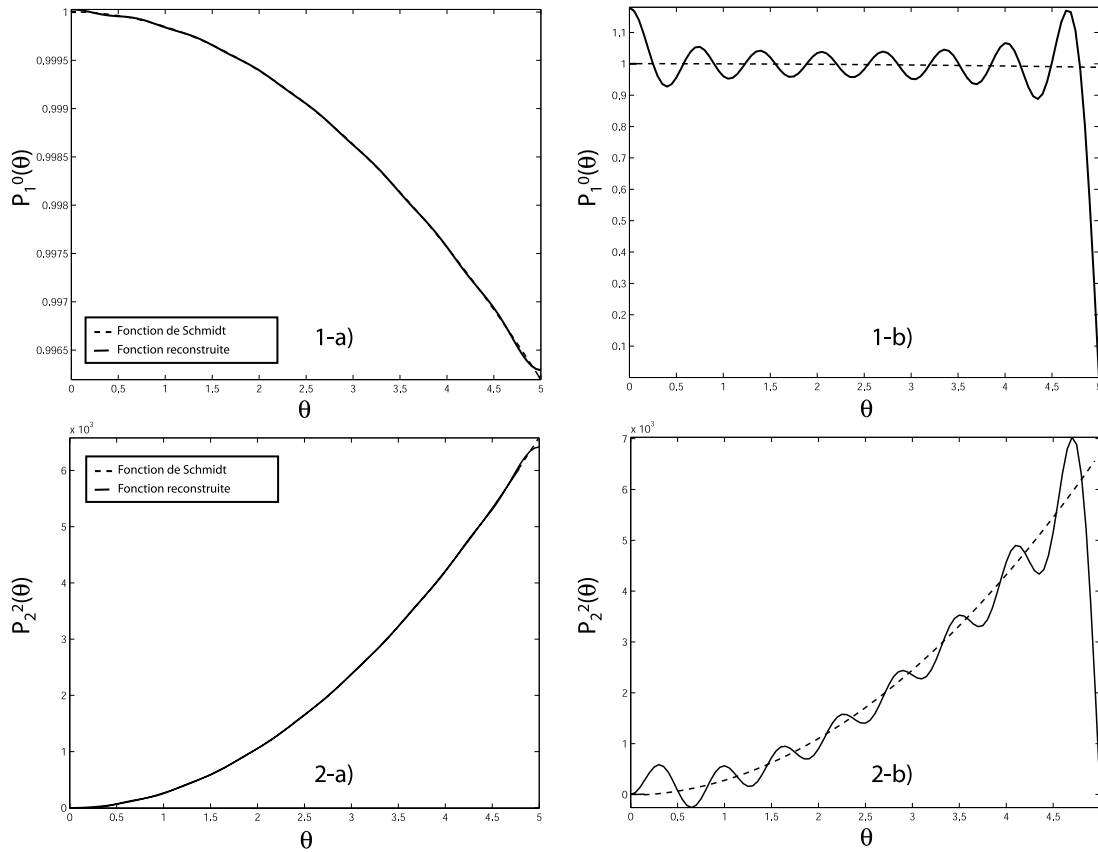


FIG. 8.2 – Les fonctions  $P_l^m$  du développement en harmoniques sphériques normées au sens de Schmidt peuvent être écrites comme une série infinie des fonctions de Legendre associées  $P_{n_k}^m$ . Selon les conditions aux limites choisies, la convergence de la série tronquée vers la solution est plus ou moins rapide. Les figures 1-a) et 2-a) donnent la reconstruction de la fonction de Schmidt avec des racines  $n_k$  telles que  $dP_{n_k}^m/d\theta = 0$  pour  $m = 0$  et  $m = 2$ . Les figures 1-b) et 2-b) représentent la reconstruction des mêmes fonctions avec les racines  $n_k$  telle que  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ . On observe clairement la non-équivalence de la reconstruction lorsque les séries sont tronquées (Noter l'échelle très différente des tracés a et b).

Seuls persistent quelques phénomènes de bords dont nous pouvons néanmoins nous débarrasser en augmentant l'ordre du développement en série dans (8.8).

### Condition homogène de Dirichlet sur les fonctions de Legendre généralisée.

Nous avons donc :

$$F_{n_k}^m(\theta_0) = 0$$

Les résultats sont présentés sur la figure (8.2-1b, 2b). Dans ce cas, la reconstruction des fonctions  $P_l^m(\theta)$  sur les bords du cône n'est pas réaliste car elles sont non-nulles en  $\theta = \theta_0$ . Avec une condition sur la fonction elle-même, on ne peut bien entendu espérer ni une convergence simple ni une convergence uniforme, mais même la convergence en norme est moins bonne.

Pour la reconstruction du champ magnétique cela affecte particulièrement les composantes  $B_{2,z}$  et  $B_{2,y}$  du champ magnétique, calculées à partir du potentiel  $V_2$  (équations 6.50 et 6.51), qui présentent *des effets de bords* prépondérants. Rappelons que c'est pour cette raison que Haines introduisit de façon peu orthodoxe les deux ensembles de conditions aux limites. Avec nos nouvelles fonctions de base, le champ magnétique sur la surface  $\partial_{\theta_0}\Omega$  sera porté entièrement par le champ partiel calculé par la base de Mehler. D'autre part, la figure (8.2) montre que la convergence est particulièrement lente, ce qui se caractérise par des oscillations relativement importantes dans tout l'intervalle  $[0, \theta_0]$  lorsque la troncature de la série  $K_{\max}$  (8.8) est insuffisante. Cette constatation suggère que même pour les zones du cône n'appartenant pas aux frontières, les contributions provenant de la base de Legendre présentent de légères distorsions lorsqu'elles impliquent les fonctions  $P_{n_k}^m(\theta)$ . Quel que soit l'ordre du développement, ce phénomène persiste. C'est un effet de Gibbs qui provient de la différence entre les conditions aux limites sur  $\partial_{\theta_0}\Omega$  des fonctions de Schmidt modélisées ( $P_l^m(\theta_0) \neq 0$ ) et des fonctions de Legendre associées modélisantes ( $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ ).

Nous attirons l'attention sur la particularité de la modélisation des fonctions de Schmidt pour  $m = 0$ . Nous ne manquerons pas de remarquer une légère augmentation de l'erreur à l'approche de  $\theta = 0$ . Cette erreur, pour chacun des développements, n'apparaît que dans la version tronquée des séries. Nous pouvons prédire néanmoins que la reconstruction du champ subira un peu plus de distorsion dans une petite région (dont la surface dépendra du développement) entourant le pôle de la calotte.

On pourra conclure par deux remarques importantes. La première est que, indépendamment du choix des conditions aux limites, la décomposition du problème initial en deux sous-problèmes entraîne forcément la dégradation de l'une ou l'autre des composantes du champ magnétique sur le bord  $\partial_{\theta_0}\Omega$  du domaine. La seconde est que le choix des conditions aux limites n'est pas équivalent d'un point de vue numérique car il donne lieu à des vitesses de convergence des séries sensiblement différentes. Une faible vitesse de convergence nécessitera un plus grand nombre de termes pour pouvoir reconstruire la fonction dans le domaine (bords exclus). Une bonne reconstruction se caractérisant par des oscillations de faible amplitude et des «effets de bords», lorsque nous ne pouvons pas nous en affranchir, proches de la limite géométrique  $\partial_{\theta_0}\Omega$ .

### 8.2.2 Représentation des fonctions radiales

La résolution du problème aux conditions aux limites nous a permis d'obtenir des fonctions radiales qui forment une base de  $L^2\{[a, b]\}$ . Les fonctions radiales des harmoniques globales, en particulier les fonctions  $(a/r)^{l+1}$  ( $l \in \mathbb{N}$ ), peuvent donc être projetées dans cette base et l'on peut reconstituer les fonctions par le développement de Fourier suivant :

$$\boxed{\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}, R_p \rangle}{\|R_p\|^2} R_p(r)} \quad (8.9)$$

Dans cette formulation, regroupant toutes les fonctions radiales, il faudra tenir compte des définitions (6.36a) et (6.36b), ou simplement (6.38) selon la représentation *PI*, *PII*, *PIII* ou *PIV* choisie.

Bien entendu, toute fonction radiale peut être projetée sur la base des  $R_p$  et les fonctions radiales décrivant le champ externe  $(r/a)^l$  avec  $l \in \mathbb{N}$  n'échappent pas à cette règle. Ce qu'il nous faut considérer c'est la capacité des nouvelles fonctions à représenter  $(a/r)^{l+1}$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) sur tout l'intervalle  $a \leq r \leq b$ .

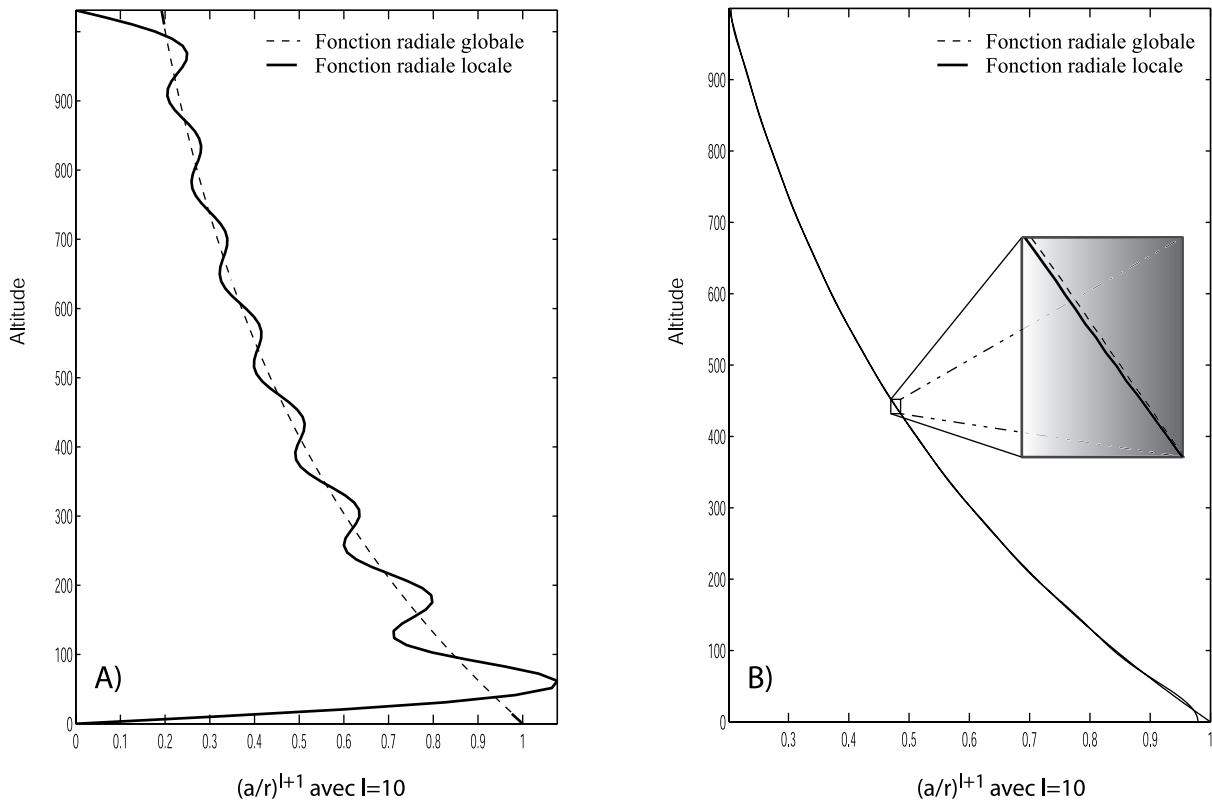


FIG. 8.3 – Les fonctions radiales des harmoniques sphériques  $(a/R)^{l+1}$  sont décomposables en séries de Fourier des fonctions local  $R_p(r)$ . Selon le choix des conditions aux limites (8.10) ou (8.11), la série de Fourier converge rapidement (en B) ou lentement (en A) vers la solution. Ceci montre cependant que le nouveau formalisme permet de tenir compte des variations naturelles d'un champ de potentiel.

La figure (8.3) montre le résultat de la reconstruction de la fonction radiale interne d'un champ exprimé en harmoniques sphériques ordinaires par la série de Fourier (8.9) tronquée à  $K_{max} = 15$ . Comme précédemment, on peut distinguer deux cas ayant ses caractéristiques propres qui découlent du choix de la condition aux limites.

### Condition homogène de Dirichlet sur la fonction radiale

En chacun des rayons  $r = a$  et  $r = b$ , nous avons posé :

$$R_p(a) = R_p(b) = 0 \quad (8.10)$$

La fonction locale  $R_p$  est donnée par la relation (6.38). On voit que cette solution converge très lentement et que le comportement de la reconstruction est irréaliste sur les surfaces inférieures et supérieures. Les effets de Gibbs sont prépondérants et suggèrent d'incorporer un nombre important de paramètres. L'utilisation de cette condition pénalise essentiellement les composantes  $B_{1,x}$  et  $B_{1,y}$  du champ magnétique, gradient du potentiel  $V_1$  (cf équations 6.49 et 6.50), sur les surfaces en  $r = a$  et  $r = b$ . Les composantes du champ magnétique total seront donc entièrement portées par la base de Legendre. De même que précédemment, on anticipe le fait que même lorsque nous aurons des contributions des bases de Mehler (toutes les altitudes  $a < r < b$ ), nous observerons des oscillations pour ces composantes, résultats de la mauvaise convergence de la série de Mehler vers sa limite.

### Condition homogène de Neumann sur la fonction radiale

Aux limites, supérieure et inférieure, du cône nous imposons que :

$$\left. \frac{dR_p(r)}{dr} \right|_{a,b} = 0 \quad (8.11)$$

La fonction radiale  $R_p(r)$  s'écrit d'après (6.36). La solution admet en particulier la fonction constante  $R_0$ . Ainsi, quels que soient  $l$  et  $r$ , la série (8.9) admet comme premier terme une constante. La convergence de la série de Fourier vers la fonction  $(a/r)^{l+1}$  est très rapide. On remarquera des effets de bords aux surfaces repérées par les altitudes  $u = 0$  et  $u = 1030km$ . Le choix de cette condition aux limites, supérieure et inférieure, du cône est particulièrement bien adapté pour les composantes  $\vec{B}_{1,x}$  et  $\vec{B}_{1,y}$  du champ magnétique dérivant du potentiel  $V_1$  (expressions 6.49 et 6.50); en revanche,  $B_{1,z} = 0$ . Aux surfaces inférieures et supérieures, la composante radiale du champ magnétique total  $\vec{B}$ , résultat de la superposition des deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , ne sera portée que par la base de Legendre. Il est donc naturel de s'attendre à une résolution moins précise de la composante  $Z$  du champ magnétique sur ces surfaces mais également à l'intérieur du cône. En raison des effets de Gibbs, la contribution des bases de Mehler y est également moins bien résolue.

### Discussions sur la convergence

Il y a donc des avantages et des inconvénients liés aux choix des conditions aux limites. Nous l'avons vu, un choix de conditions aux limites sur les dérivées impliquera une bonne représentation des fonctions radiales, donc une meilleure alternative pour la modélisation des composantes  $X$  et  $Y$  du champ magnétique, mais une dégradation plus importante de la composante  $Z$ , que

ce soit sur les bords du domaine ou à l'intérieur du domaine, car bien que dans le domaine la composante  $Z$  soit la somme des contributions individuelles  $Z_1$  et  $Z_2$ , l'une des contributions  $Z_1$  est mal déterminée.

Inversement, le choix de la condition aux limites sur la fonction nous assure une bonne représentation de la composante  $Z$  mais une détérioration des composantes  $X$  et  $Y$  dans tout le volume. À première vue, le dilemme peut être vite surmonté en argumentant que la condition sur  $R_p$  dégrade deux composantes alors que la condition sur  $dR_p/dr$  n'en dégrade qu'une seule. Avant d'adhérer à ce raisonnement trivial, il convient de vérifier si la reconstruction d'un champ magnétique montre bien, sur la base des discussions précédentes, le type d'incertitude attendue pour chacune des composantes.

Concluons enfin que ces considérations de convergence ne concernent que les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  pris de manière indépendante. Le potentiel total  $V$  sera influencé dans une certaine mesure par ces considérations, mais par sommation des deux potentiels, les effets des problèmes de convergence seront moins nets et parfois amoindris. De plus, les développements en séries peuvent être assimilés à une généralisation des développements de Fourier pour lesquels certains théorèmes d'accélération de convergence existent.

# Chapitre 9

## Synthèses des solutions

Les solutions des différents problèmes ont été énoncées au fur et à mesure de leur rencontre. Par souci de clarté, nous proposons dans les pages qui suivent une synthèse des propriétés de chaque décomposition qui permet d'avoir une vue d'ensemble. Afin de compléter les développements précédents, les coefficients résultant des produits scalaires entre fonctions sont explicités. Nous ne manquerons pas par la suite de nous appuyer sur ce résumé. On trouvera d'autre part une compilation des symboles et des notations employés en annexe D.

### 9.1 Synthèse du problème $PI$

Le potentiel  $V$ , solution générale du problème  $PI$ , est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V = V_1 + V_2$$

#### 9.1.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned}\Delta V_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= \tilde{X}_g(r, \theta_0, \varphi) \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} &= 0 \\ \frac{\partial V_1}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} &= 0\end{aligned}$$

**Les conditions homogènes**

La forme des conditions aux limites entraîne la définition des fonctions de base radiales,  $R_0$  et  $R_p(r)$ , associées respectivement aux ensembles de valeurs propres  $\lambda_p = 0$  et  $\lambda_p < -1/4$ . Pour des fonctions normalisées telles que  $\|R_0\|^2 = \|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$  on trouve :



$$R_0 = \frac{1}{\sqrt{e^S - 1}} \quad (9.2a)$$

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{2}{S((2p\pi)^2 + S^2)}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2\pi p \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + S \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \quad (9.2b)$$

Les solutions radiales entraînent la définition de deux ensembles de fonctions coniques de Mehler, les fonctions  $P_0^m(\theta)$  et les fonctions  $K_p^m(\theta)$  dont les expressions sont données par (6.44) et par (6.40).

### Conditions aux limites

L'égalité, sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$ , entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques, conduit à la définition des deux ensembles de coefficients de Gauss dans la base locale pour chacun des ensembles  $\lambda_p = 0$  et  $\lambda_p < -1/4$ . En se limitant à un potentiel global qui ne contient que des termes internes, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} G_0^m \\ H_0^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_0\|^2 \frac{dP_0^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.3)$$

$$\begin{Bmatrix} G_p^m \\ H_p^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 \frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle}{\|R_0\|^2} = \frac{1 - e^{-Sn}}{n\sqrt{(e^S - 1)}} \quad (9.5)$$

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{(4p\pi)^2 (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (2p\pi)^2 + S^2 \right) \left( (n+1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.6)$$

avec  $S$  facteur lié à la géométrie du cône (section 6.2.2),  $n$  les degrés des harmoniques sphériques ordinaires et  $p$  nombre entier. Dans cette écriture du problème, le coefficient  $G_0^0$  est indéterminé; le potentiel  $V_1$  n'est donc connu qu'à une constante près.

### 9.1.2 Solutions du potentiel $V_2$

#### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_a} &= \widetilde{Z}_g(a, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial \Omega_b} &= \widetilde{Z}_g(b, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

#### Solutions de l'équation homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs et supérieurs à  $m$  qui impliquent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées  $P_{n_k}^m(\theta)$ .

#### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial \Omega_a$  et  $\partial \Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les coefficients de Gauss locaux et globaux :

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{(n_k+1) \|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.8)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{n_k \|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

En particulier on montre, en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A, que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{dP_n^m(\theta_0)/d\theta}{\frac{\partial (dP_{n_k}^m(\theta_0)/d\theta)}{\partial n_k}}$$

Dans ces expressions la première racine  $n_k$  de la fonction de Legendre pour  $m = 0$  est nulle ; le coefficient externe  $G_{n_k}^{e,0}$  est indéterminé et donc le potentiel  $V_2$  n'est connu qu'à une constante près.

### 9.1.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PI* a de plus les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite si $m > 0$
Orthogonalité des gradients	Non
Vitesse de convergence des solutions	rapide
Effets de bords	faibles en tous points
Coefficients indéterminés	$G_{p=0}^{m=0}$ et $G_{n_k}^{e,0}$

## 9.2 Synthèse du problème *PII*

Le potentiel  $V$ , solution générale du problème *PII*, est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$

$$V = V_1 + V_2$$

### 9.2.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ V_1|_{\theta=\theta_0} &= \tilde{V}_g(\theta_0, r, \varphi) \\ V_1|_{r=a} &= 0 \\ V_1|_{r=b} &= 0 \end{aligned}$$

### Résolution des équations homogène

La forme des conditions aux limites sur la fonction radiale  $R_p(r)$  conduit à la définition d'un ensemble unique de valeurs propres  $\lambda_p < -1/4$ . Le choix de la norme  $\|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$  conduit à :

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{2}{S}} \sqrt{\frac{a}{r}} \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (9.10)$$

Les solutions radiales entraînent l'introduction des fonctions coniques de Mehler  $K_p^m(\theta)$  dont l'expression est donnée par (6.40).

### Conditions aux limites

L'égalité, sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$ , entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques, conduit à la définition des coefficients de Gauss dans la base locale. En considérant un champ global interne uniquement, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle P_n^m(\theta_0)}{\|R_p(r)\|^2 K_p^m(\theta_0)} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (9.11)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{p\pi (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (n+1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.12)$$

## 9.2.2 Solutions du potentiel $V_2$

### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned}\Delta V_2 &= 0 \\ V_2|_{\partial\Omega_\theta} &= 0 \\ V_2|_{\partial\Omega_a} &= \widetilde{V}_g(a, \theta, \varphi) \\ V_2|_{\partial\Omega_b} &= \widetilde{V}_g(b, \theta, \varphi)\end{aligned}$$

### Solution de l'équation homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs et supérieurs à  $m$  qui définissent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées.

### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux :

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.14)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.15)$$

En particulier, on montre en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{P_n^m(\theta_0)}{\frac{\partial(P_{n_k}^m(\theta_0))}{\partial n_k}}$$

## 9.2.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PII* a en outre les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite
Orthogonalité des gradients	Non
Vitesse de convergence des solutions	très lente
Effets de bords	très importants, surtout sur les contours $C(a, b; \theta_0; \varphi)$
Coefficient indéterminé	aucun

### 9.3 Synthèse du problème *PIII*

Le potentiel  $V$  solution, générale du problème *PIII*, est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V = V_1 + V_2$$

#### 9.3.1 Solutions du potentiel $V_1$

##### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ V_1|_{\partial\Omega_\theta} &= \widetilde{V}_g(r, \theta_0, \varphi) \\ \left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} &= 0 \\ \left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_b} &= 0 \end{aligned}$$

##### Les conditions homogènes

La forme des conditions aux limites entraîne la définition des fonctions de base, radiales,  $R_0$  et  $R_p(r)$  associées respectivement aux ensembles de valeurs propres  $\lambda_p = 0$  et  $\lambda_p < -1/4$ . Elles sont normalisées telles que  $\|R_0\|^2 = \|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$ , par conséquent :

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{\sqrt{e^S - 1}} & (9.17a) \\ R_p(r) &= \sqrt{\frac{2}{S((2p\pi)^2 + S^2)}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2\pi p \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + S \sin\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] \text{ et } p \in \mathbb{N}^* & (9.17b) \end{aligned}$$

Les solutions radiales entraînent la définition de deux ensembles de fonctions coniques de Mehler : les fonctions  $P_0^m(\theta)$  et les fonctions  $K_p^m(\theta)$  dont les expressions sont données par (6.44) et par (6.40).

##### Conditions aux limites

L'égalité sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$  entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques conduit à la définition de deux ensembles de coefficients de Gauss dans la base locale. En considérant un champ global interne uniquement, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_0^m \\ H_0^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle P_n^m(\theta_0)}{\|R_0\|^2 P_0^m(\theta_0)} \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (9.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} G_p^m \\ H_p^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle P_n^m(\theta_0)}{\|R_p(r)\|^2 K_p^m(\theta_0)} \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (9.19)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_0 \right\rangle}{\|R_0\|^2} = \frac{1 - e^{-Sn}}{n\sqrt{(e^S - 1)}} \quad (9.20)$$

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{(4p\pi)^2 (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (2\pi p)^2 + S^2 \right) \left( (n + 1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.21)$$

avec  $S$  facteur lié à la géométrie du cône (section 6.2.2),  $n$  les degrés des harmoniques sphériques ordinaires et  $p$  nombre entier. Dans cette écriture du problème, le coefficient  $G_0^0$  est indéterminé; le potentiel  $V_1$  n'est donc connu qu'à une constante près.

### 9.3.2 Solutions du potentiel $V_2$

#### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ V_2(r; \theta_0, \varphi) &= 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_a} &= \widetilde{Z}_g(a, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{\partial\Omega_b} &= \widetilde{Z}_g(b, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

#### Solution de l'équations homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs, supérieurs à  $m$  qui impliquent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées.

#### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux :

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{(n_k+1) \|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.23)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{n_k \|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \widetilde{g}_n^m \\ \widetilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.24)$$

En particulier on montre en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A que :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{P_n^m(\theta_0)}{\frac{\partial(P_{n_k}^m(\theta_0))}{\partial n_k}}$$

### 9.3.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PIII* a, en outre, les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite
Orthogonalité des gradients	Oui
Vitesse de convergence des solutions	lente
Effets de bords	importants sur les contours $C(a, b; \theta_0; \varphi)$
Coefficient indéterminé	$G_{p=0}^{m=0}$

## 9.4 Synthèse du problème *PIV*

Le potentiel  $V$ , solution générale du problème *PIV*, est la somme de deux sous-problèmes ayant comme solutions les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  :

$$V = V_1 + V_2$$

### 9.4.1 Solutions du potentiel $V_1$

**Problème de conditions aux limites**

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \Big|_{\partial \Omega_\theta} &= \tilde{X}_g(r, \theta_0, \varphi) \\ V_1|_{\partial \Omega_a} &= 0 \\ V_1|_{\partial \Omega_b} &= 0 \end{aligned}$$

**Les conditions homogènes**

La forme des conditions aux limites sur la fonction radiale  $R_p(r)$  conduit à la définition d'un ensemble unique de valeurs propres  $\lambda_p < -1/4$ . La normalisation des fonctions telles que  $\|R_p(r)\|^2 = a$  dans l'intervalle  $a \leq r \leq ae^S$  conduit à l'expression :

$$R_p(r) = \sqrt{\frac{2}{S}} \sqrt{\frac{a}{r}} \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \quad (9.26)$$

Les solutions radiales entraînent la définition de deux ensembles de fonctions coniques de Mehler  $K_p^m(\theta)$  dont les expressions sont données par par (6.40).

### Conditions aux limites

L'égalité sur la limite  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$  entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques conduit à la relation entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux. En considérant un champ global interne uniquement, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} G_p^m \\ H_p^m \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}}{\|R_p(r)\|^2 \frac{dK_p^m(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta_0}} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.27)$$

avec en particulier, étant donné la normalisation choisie pour les fonctions radiales :

$$\frac{\left\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, R_p(r) \right\rangle}{\|R_p(r)\|^2} = \frac{p\pi (1 - (-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{S \left( (n+1/2)^2 + \left(\frac{p\pi}{S}\right)^2 \right)} \quad (9.28)$$

avec  $S$  facteur lié à la géométrie du cône (section 6.2.2),  $n$  les degrés des harmoniques sphériques ordinaires et  $p$  nombre entier.

### 9.4.2 Solutions du potentiel $V_2$

#### Problème de conditions aux limites

$$\begin{aligned} \Delta V_2 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \Big|_{\partial\Omega_\theta} &= 0 \\ V_2 \Big|_{\partial\Omega_a} &= \tilde{V}_g(a, \theta, \varphi) \\ V_2 \Big|_{\partial\Omega_b} &= \tilde{V}_g(b, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

#### Solution de l'équation homogène

La forme des conditions aux limites entraîne des degrés  $n_k$  réels, positifs et  $n_k \geq m$  qui définissent par conséquent les fonctions de Legendre généralisées.

#### Conditions aux limites

L'égalité entre le développement local et un développement en harmoniques sphériques sur les frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du domaine  $\Omega$  conduit à la relation suivante entre les deux ensembles de coefficients de Gauss locaux et globaux.

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.30)$$

$$\begin{Bmatrix} G_{n_k}^{e,m} \\ H_{n_k}^{e,m} \end{Bmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{S(n_k-n)})}{\|P_{n_k}^m\|^2 (e^{S(2n_k+1)} - 1)} \begin{Bmatrix} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{Bmatrix} \quad (9.31)$$

En particulier on montre en utilisant les expressions du produit scalaire et de la norme d'après l'annexe A que :



$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{dP_n^m(\theta)/d\theta|_{\theta_0}}{\frac{\partial(dP_{n_k}^m(\theta_0)/d\theta)}{\partial n_k}}$$

### 9.4.3 Informations complémentaires

Le champ magnétique construit dans le cône à partir de la décomposition *PIV* a, en outre, les caractéristiques suivantes :

Caractéristique	Condition
Condition de flux	Satisfaite
Orthogonalité des gradients	Oui
Vitesse de convergence des solutions	lente
Effets de bords	importants sur les contours $C(a, b; \theta_0; \varphi)$
Coefficient indéterminé	$G_{p=0}^{m=0}$

# Chapitre 10

## Reconstructions numériques d'un champ global

Jusqu'à présent, nous avons considéré les expressions reliant la décomposition locale et la décomposition globale de manière formelle. Les relations entre les coefficients de Gauss locaux et globaux sont exprimées en termes de séries infinies. Nous avons entrevu les effets de la troncature des séries pour la reconstruction des harmoniques sphériques dans le domaine conique, mais nous n'avons pas jusqu'à présent pu en estimer de manière concrète les effets. Dans cette section, nous vérifions la validité de ces relations dans le cas de séries tronquées, avec un seuil de troncature pour le moment arbitraire puisque rien ne limite le développement. Ceci nous permettra d'avoir une première idée des possibilités offertes par les différentes conditions aux limites, ainsi que de vérifier si le comportement de la reconstruction sur la base locale obéit bien aux considérations sur la vitesse de convergence et sur le phénomène de Gibbs du chapitre 8.2.

En vertu d'une convergence des séries très lente dans les solutions du problème *PII* et puisque l'orthogonalité des gradients n'est pas vérifiée, nous écartons cette représentation définitivement de toutes nos considérations à venir.

Nous vérifions, dans un premier temps, que les formulations précédentes sont suffisamment performantes pour reconstruire le champ pour des troncatures raisonnables. Puis, dans un second temps, nous nous assurerons que les variations du champ reconstruit dans le cône, notamment avec l'altitude, sont bien conformes à ce que l'on attend d'un potentiel newtonien. Les différents résultats nous permettront de circonscrire les domaines d'application de chaque décomposition et d'en écarter certaines le cas échéant.

### 10.1 Utilisation des fonctions de base du problème *PI*

La décomposition *PI* soulève un problème conceptuel insurmontable, celui de ne pas admettre tous les paramètres zonaux, c'est-à-dire, d'ordre  $m = 0$  dans son développement. Pour tenter de modéliser un champ magnétique terrestre, cette méthode sera donc d'un piètre secours. Puisque nous avons vu que la décomposition du problème *PI* semblait converger rapidement, nous avons voulu tout de même vérifier cette propriété. Mais puisque d'un autre côté cette décomposition est inutile pour une modélisation de champ terrestre, nous l'avons utilisée surtout pour illustrer l'importance des coefficients de Gauss *externes* dans la reconstruction d'un champ d'origine interne uniquement. Les conclusions pourront être extrapolées aux autres décompositions et pourront être vues comme une illustration des discussions du paragraphe 7.4.

### 10.1.1 Choix du modèle et des paramètres

Pour illustrer la bonne vitesse de convergence des solutions, nous prenons un champ de type *IGRF* complet; celui de l'année 1990 par exemple. Après rotation des coefficients de Gauss d'axe  $C(2^\circ E, 47^\circ N)$  dans le repère calotte centrée sur la France (section 5.1 Partie 1), nous retranchons toutes les contributions  $m = 0$  en posant à zéro les coefficients de Gauss globaux transformés  $\tilde{g}_l^0$ .

Les paramètres géométriques du cône sont choisis conformément à la taille du territoire français et à l'altitude maximale contenue dans les données satellites. On choisit par conséquent une ouverture de la calotte de  $\theta_0 = 5^\circ$  avec comme altitude supérieure  $b = a + u_m$  avec  $a$  rayon terrestre et  $u_m$  l'élévation par rapport à la surface terrestre. Le choix d'une élévation maximale  $u_m = 1030$  km permet d'englober les données des satellites MAGSAT, CHAMP et ØRSTED.

Nous devons de plus nous fixer des indices  $P_{max}$  et  $K_{max}$  qui définiront l'ordre du développement des bases que nous calculerons. Nous prendrons aveuglément  $P_{max} = K_{max} = 17$ , qui semblent raisonnables en pratique, pour tous les ordres  $m$  de 1 à 10 en l'absence d'informations supplémentaires guidant le choix des indices.

Nous sommes maintenant en mesure d'exprimer les coefficients de Gauss de la base locale de Mehler  $\{G_0^m, H_0^m\}$ ,  $\{G_p^m, H_p^m\}$  par (9.3) et (9.4) et ceux de la base de Legendre  $\{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$  et  $\{G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}\}$  respectivement par (9.8) et (9.9). Ce choix nous donne théoriquement un total de 767 coefficients de Gauss parmi lesquels 20 correspondent aux coefficients  $\{G_0^m, H_0^m\}$ , 249 aux coefficients  $\{G_p^m, H_p^m\}$ , et 249 également pour chacun des ensembles de coefficients de Legendre internes  $\{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$  et de Legendre externes  $\{G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}\}$ . Cependant, étant donné leur faible magnitude, la plupart des coefficients externes semblent à première vue insignifiants et nous n'en gardons que 12. Cette manipulation nous montrera que nous ne pouvons pas retrancher impunément les coefficients externes sans dégrader la modélisation et sa variation en altitude. Le champ magnétique est ensuite reconstruit par (6.49), (6.50) et (6.51) à l'intérieur du cône sur différentes surfaces échantillonnées selon la méthode de Dufour (section 4.1, première partie) et espacées en altitude de  $10km$ .

### 10.1.2 Analyse des résultats

#### Variations des résidus sur les surfaces

Les figures (10.1), (10.2) et (10.3) montrent le résultat de la reconstruction pour différentes altitudes comprises entre  $r = a$ , le rayon terrestre et  $r = b$  le rayon supérieur du cône,  $u$  représente l'élévation par rapport à la surface terrestre.

Une constatation directe est l'extrême stabilité de la reconstruction pour les trois composantes du champ magnétique. En l'absence d'oscillations qui pourraient révéler des effets de Gibbs ou une convergence lente de la solution, nous pouvons conclure avec satisfaction que le champ a été reconstruit de manière très réaliste.

Pour s'en assurer, on trace les résidus entre la reconstruction  $\vec{B}^r$  du champ par les fonctions de bases locales et le champ réel de départ  $\vec{B}$  que montrent les figure (10.4), (10.5) et (10.6).

De manière quantitative, l'erreur de reconstruction à l'intérieur du cône sur chaque surface n'excède jamais  $5nT$  bien que nous observions distinctement une croissance des résidus à l'approche des bords latéraux du cône. Ces effets de bords sur la surface  $\partial\Omega_{\theta_0}$  proviennent de la troncature des séries et des conditions aux limites choisies. Ils sont cependant bien cantonnés près des bords de la calotte et n'affectent pas la reconstruction à l'intérieur de la calotte. La stabilité en fonction de l'altitude est assez nette et nous observons une disparition des lignes de

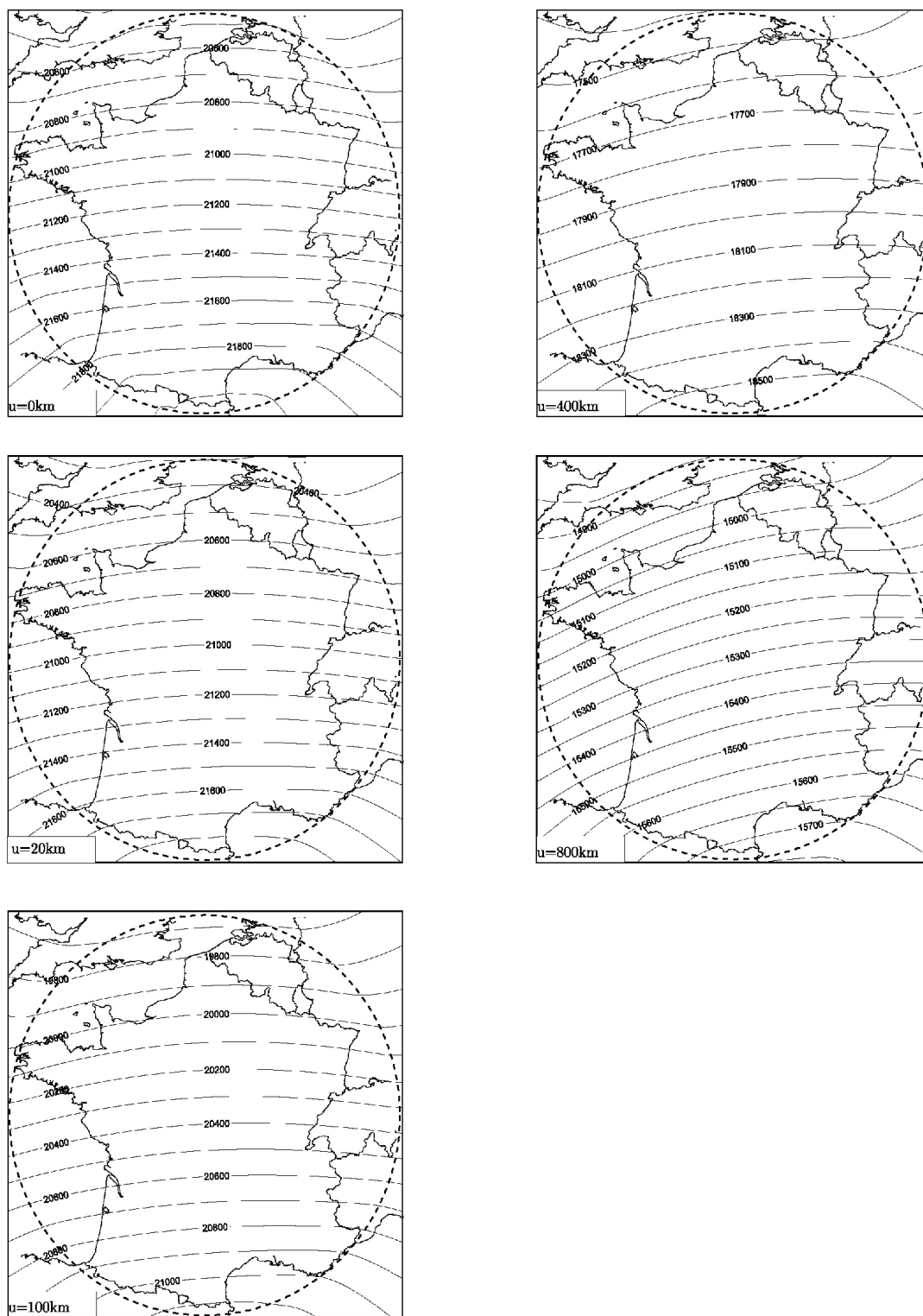


FIG. 10.1 – Composante  $X$  du champ magnétique DGRF 1990 reconstruit dans le cône centré sur la France à différentes altitudes. Pour satisfaire la condition de flux nul, l'ordre  $m = 0$  du développement a été retranché. Les valeurs du champ sont données en  $nT$ . Le cercle en pointillé matérialise les limites de la calotte sphérique.

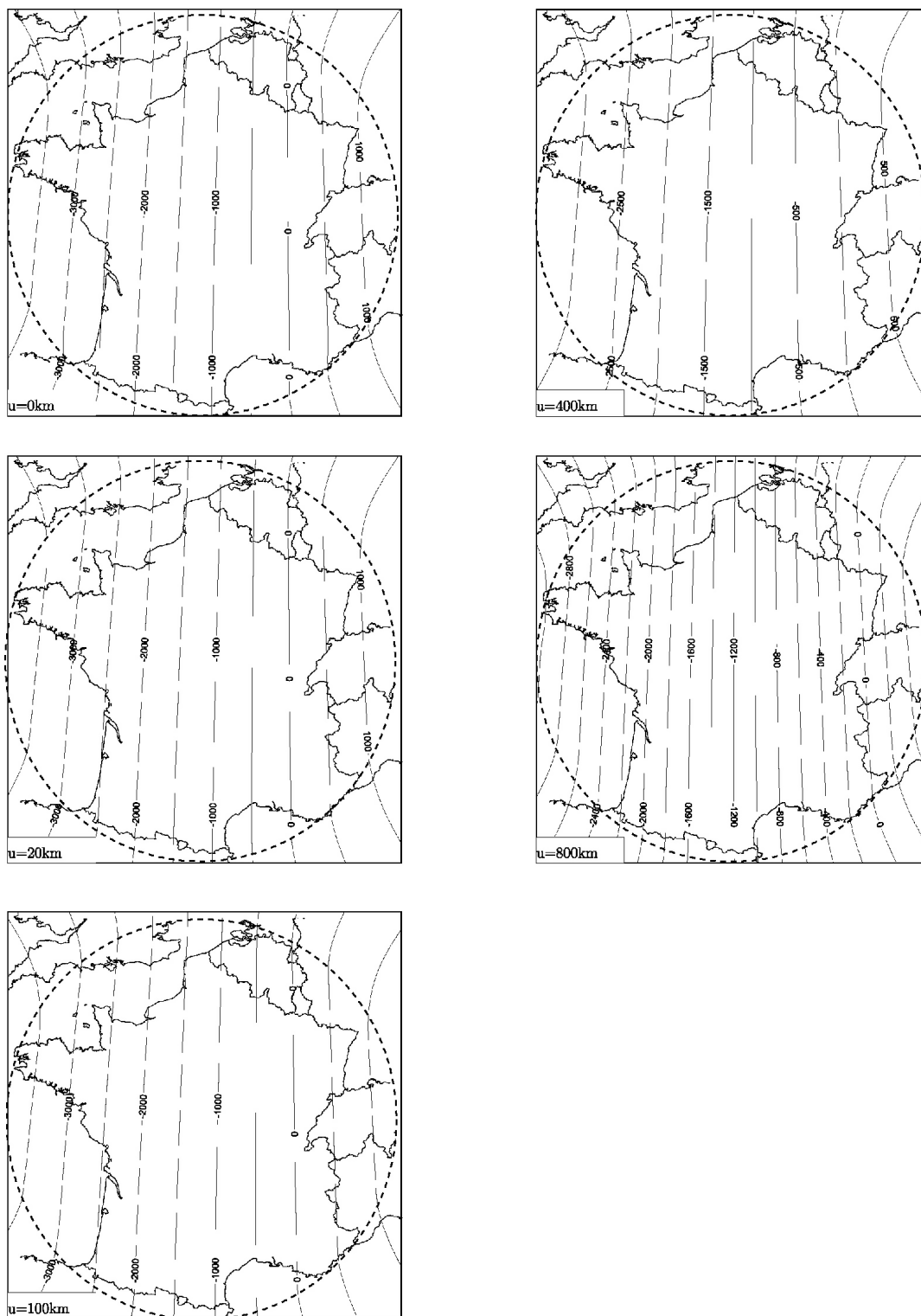


FIG. 10.2 – Composante  $Y$  du champ magnétique DGRF 1990 reconstruit dans le cône centré sur la France à différentes altitudes. Même légende que sur la figure (10.1).

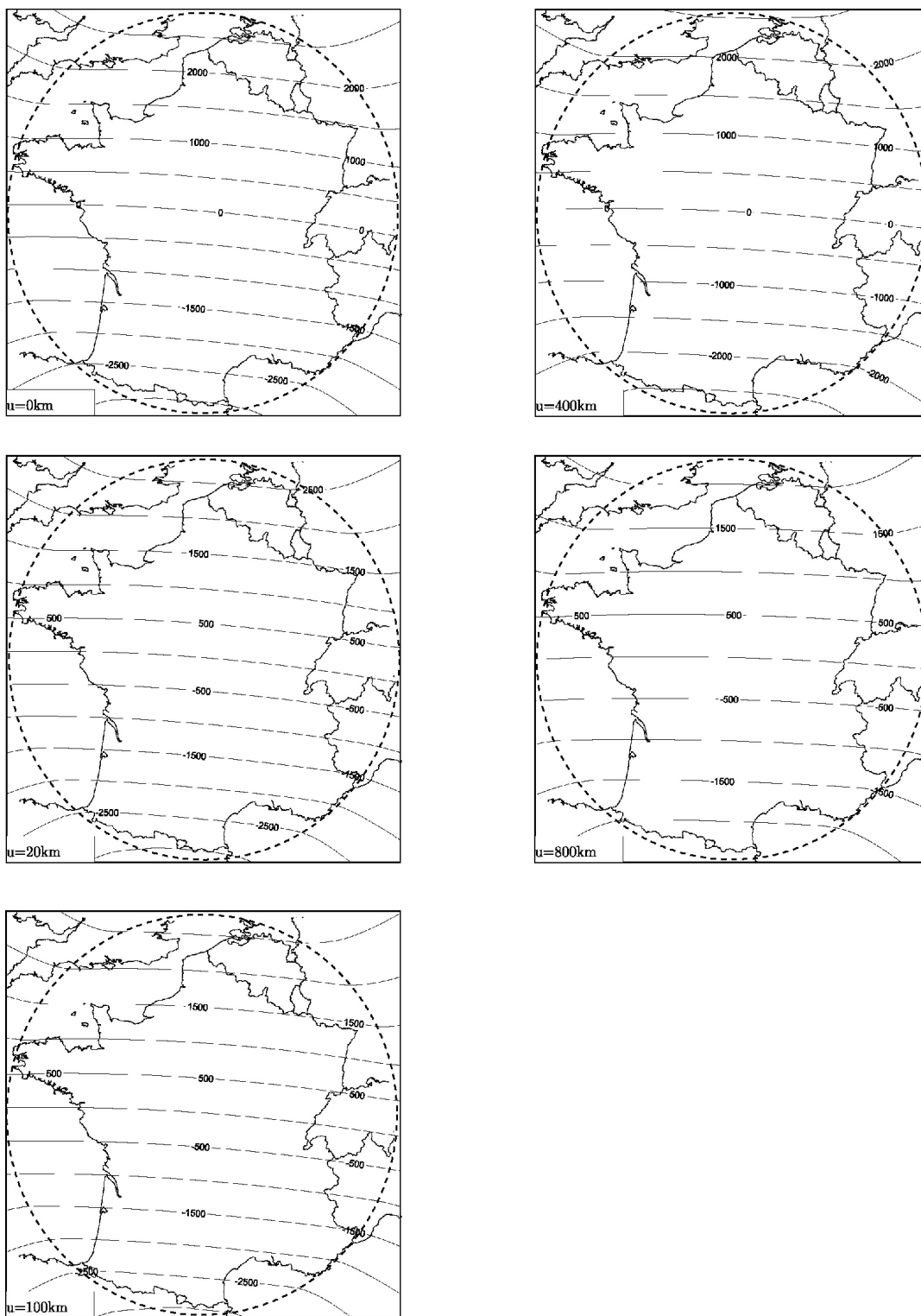


FIG. 10.3 – Composante  $Z$  du champ magnétique DGRF 1990 reconstruit dans le cône centré sur la France à différentes altitudes. Même légende que sur la figure (10.1).

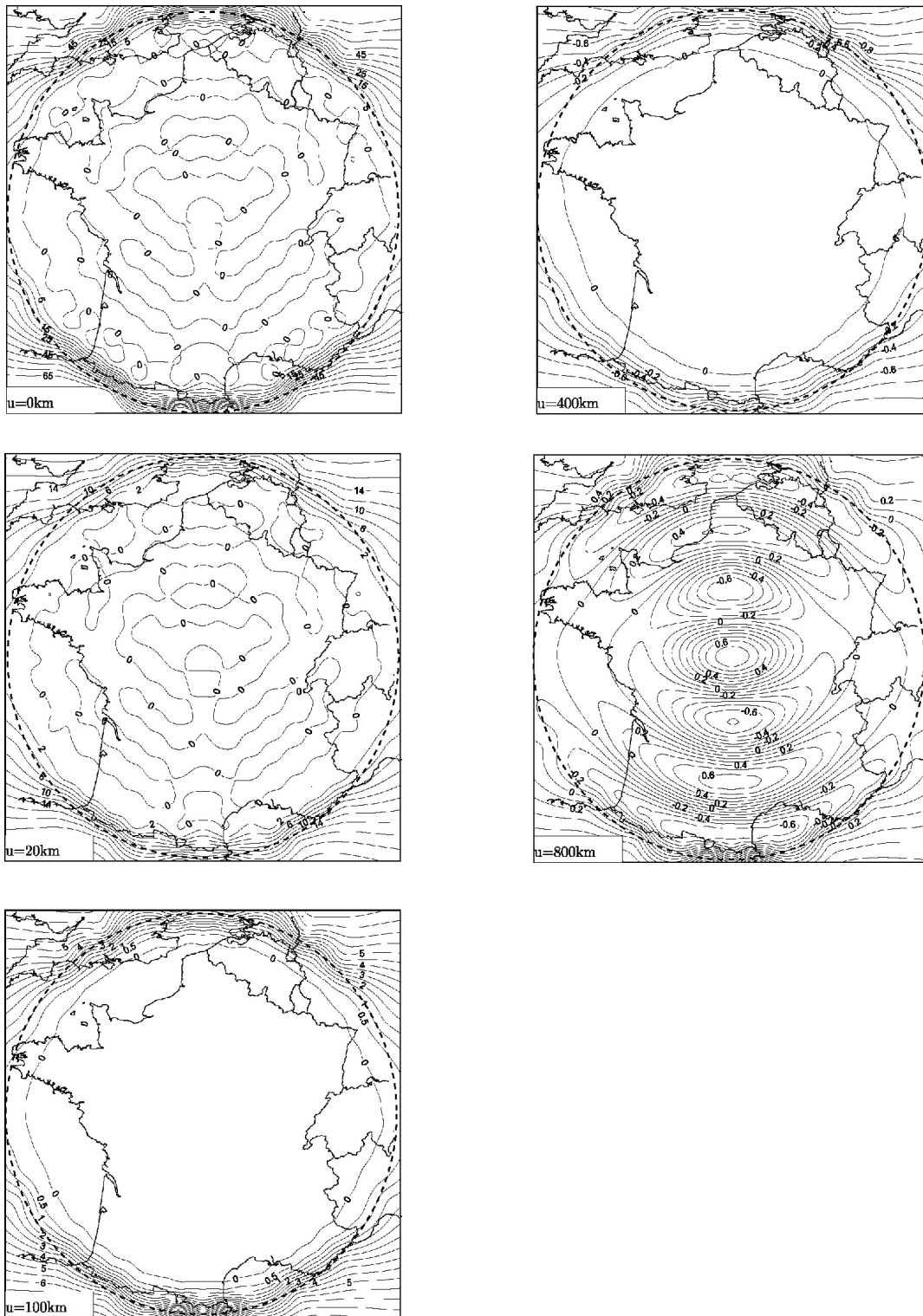


FIG. 10.4 – Résidus pour la composante  $X$  entre le champ reconstruit et le champ DGRF90 correspondant sur une calotte centrée sur la France. Plusieurs altitudes sont représentées. Les intervalles de contours sont  $5nT$ ,  $2nT$ ,  $0.5nT$ ,  $0.1nT$  et  $0.1nT$  pour les altitudes  $u = 0, 20, 100, 400$  et  $800\text{km}$ . Nous observons clairement un biais lors de l'augmentation en altitude.

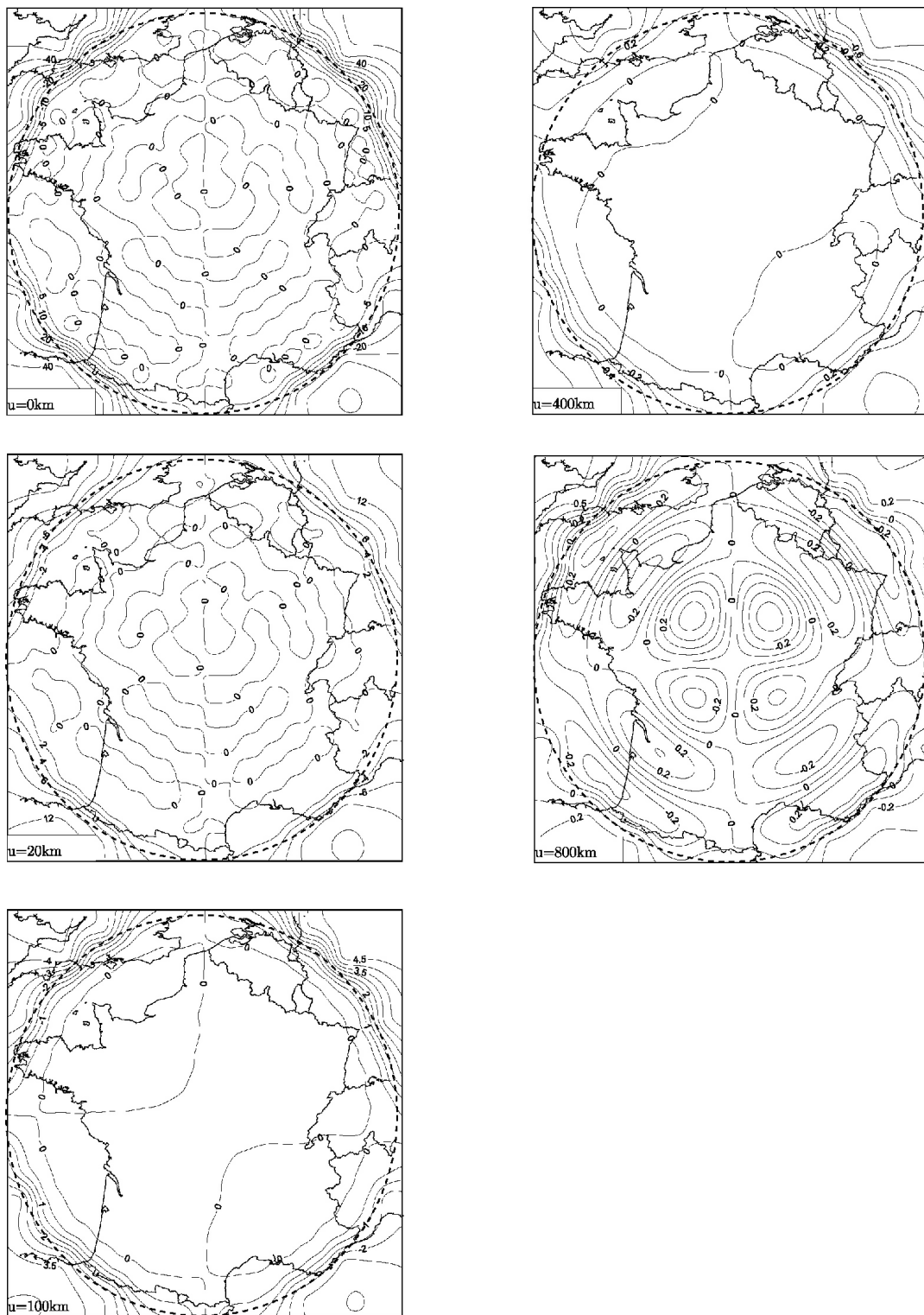


FIG. 10.5 – Résidus pour la composante  $Y$  entre le champ reconstruit et le champ DGRF90 correspondant sur une calotte centrée sur la France. Même légende que sur la figure (10.4).



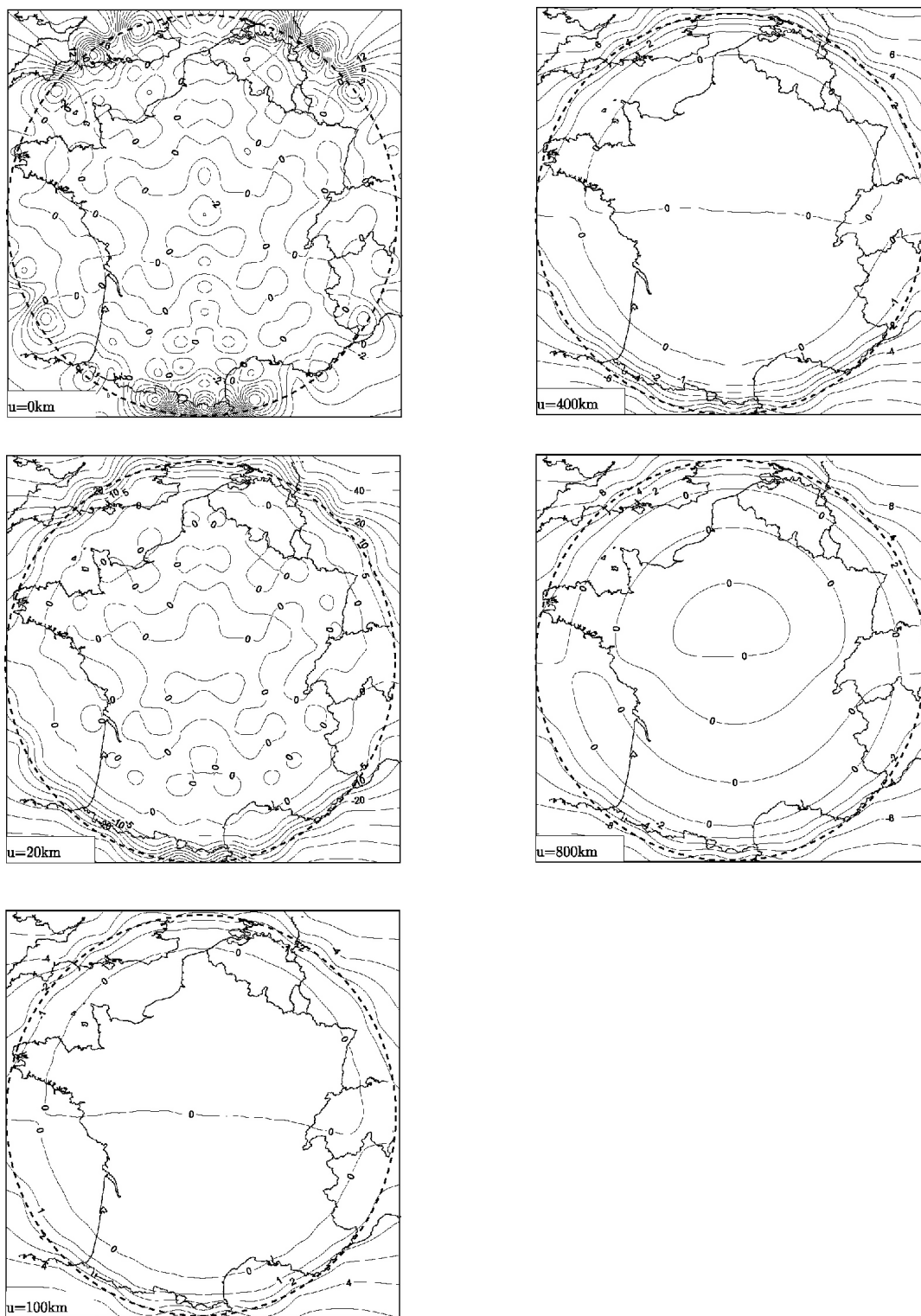


FIG. 10.6 – Résidus pour la composante  $Z$  entre le champ reconstruit et le champ DGRF90 correspondant sur une calotte centrée sur la France. Même légende que sur la figure (10.4).

contours lorsque nous nous éloignons de la surface terrestre, révélant que l'erreur de reconstruction passe sous le seuil de  $0, 2nT$ , selon la définition utilisée pour le tracé des lignes d'isovaleurs à ces altitudes (legende de la figure 10.4). Ce comportement s'explique par un éloignement croissant de la surface de reconstruction par rapport à la surface terrestre. En augmentant l'altitude nous nous éloignons des phénomènes de bords présents sur la frontière  $\partial\Omega_a$  du domaine conique  $\Omega$ .

D'une manière générale, nous avons des difficultés de représentation à l'approche des cercles  $\mathcal{C}(a, b; \theta_0, \varphi)$ . Nous avons vu que la méthode *PI* n'engendrait pas plus de phénomène de Gibbs dans une région plutôt que dans une autre ; ce phénomène ne s'explique donc que par la singularité géométrique de la frontière  $\partial\Omega$  qui présente des "coins" où les effets de bords se superposent.

Pour les besoins de la discussion nous avons retranché arbitrairement un grand nombre de coefficients externes. L'absence de ces termes provoque l'apparition de structures organisées, à mesure que l'on augmente l'altitude, et un biais dans les résidus, tous deux caractéristiques de l'insuffisance du développement.

### Variation des résidus avec l'altitudes

Plutôt que de baser nos propos sur un échantillon de surfaces, nous pouvons schématiser l'évolution de l'ajustement dans l'intervalle  $a \leq r \leq b$ . Nous avons recours sur la figure (10.7) à l'investigation systématique de la valeur du résidu moyen sur chaque surface à l'intérieur du cône.

La figure (10.7) montre la valeur du résidu moyen associé à chaque composante du champ.

Si  $N_p^{\partial\Omega_r}$  est le nombre de points sur chaque surface de rayon  $r$ , le résidu moyen en nanotesla est défini par :

$$\bar{r}_\alpha(r) = \sqrt{\frac{(B_\alpha(r) - B_\alpha^r(r))^2}{N_p^{\partial\Omega_r}}}, \text{ avec } \alpha = X, Y \text{ ou } Z \quad (10.1)$$

L'erreur moyenne totale est ensuite définie par :

$$\boxed{\bar{R}_{\partial\Omega_r}(r) = \sqrt{\bar{r}_X^2(r) + \bar{r}_Y^2(r) + \bar{r}_Z^2(r)}} \quad (10.2)$$

et correspond à l'erreur de reconstruction en nanotesla sur l'intensité du champ total sur une surface d'altitude  $r$ . Étant donné la quasi-régularité de la grille de reconstruction, cette estimation, fondée sur un échantillonnage, doit rester proche de la valeur réelle obtenue sur une grille infiniment fine, ou de la valeur donnée par un passage à la limite continue.

Le phénomène de Gibbs est omniprésent sur les surfaces, inférieure et supérieure, du domaine d'étude et nous voyons son influence sur la carte des résidus (figure 10.4, 10.5 et 10.6) à l'altitude terrestre  $u = 0\text{km}$ . L'erreur sur la surface terrestre ainsi estimée est de  $7nT$  sur les composantes  $Y$  et  $Z$  du champ magnétique et de  $12nT$  sur la composante  $X$ . Nous en déduisons l'erreur sur l'intensité totale  $\bar{R}_{\partial\Omega_r}(a) = 15, 5nT$ . Cette valeur est essentiellement dominée par les effets de bords. C'est d'ailleurs une des limites importantes de cette analyse, et nous pourrions considérer que, d'une manière tout à fait générale, l'erreur moyenne obtenue est une majoration de l'erreur moyenne dans la zone de stabilité de la calotte.

Pour estimer l'erreur à l'intérieur du cône il suffit de retrancher les zones d'instabilités proches de la frontière  $\partial\Omega_{\theta_0}$ . Ainsi, si l'on compare les deux champs  $B$  et  $B^r$  dans une calotte délimitée par  $\theta \leq \theta_0 - \varepsilon$ , nous trouvons pour une valeur  $\varepsilon = 0.2^\circ$ , une erreur par (10.1) de :

$$\bar{r}_X(a) \simeq 3nT \quad \bar{r}_Y(a) \simeq 2nT \quad \bar{r}_Z(a) \simeq 2nT$$

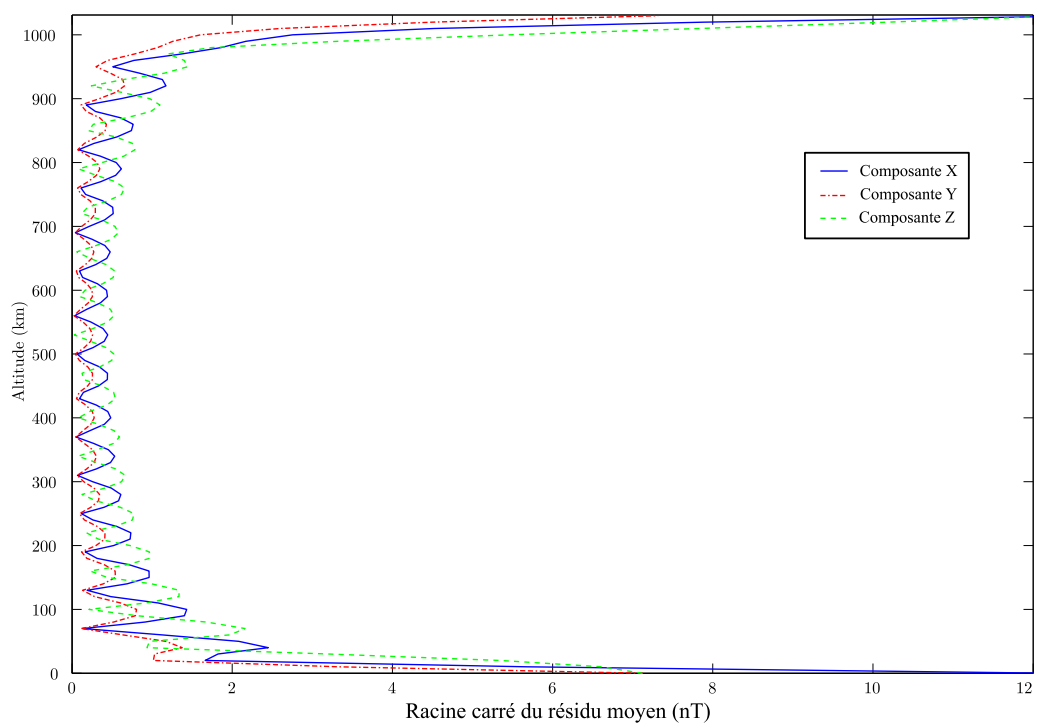


FIG. 10.7 – Evolution du résidu moyen en  $nT$  avec l'altitude pour les trois composantes obtenu par différence entre le champ magnétique reconstruit et le champ IGRF 1990 calculé pour  $m > 0$  uniquement.

Ceci conduit à une erreur sur l'intensité totale du champ par (10.2) de :

$$\overline{R}_{\partial\Omega_r}(a) \simeq 4,1nT$$

Ces dernières valeurs sont bien plus conformes à l'allure générale des résidus à la surface terrestre et démontrent la stabilité de la reconstruction à l'intérieur du domaine conique.

On remarque l'augmentation importante des résidus à l'altitude  $u = 1030km$ . Etant donné la décroissance naturelle d'un champ de potentiel d'origine interne tel que nous l'avons considéré, l'erreur que nous observons dans la partie supérieure du cône est proportionnellement plus importante à l'erreur que nous observons dans la partie inférieure. Cette constatation est une conséquence directe de l'insuffisance des développements en série de la base externe de Legendre. En règle générale, une symétrie de la figure (10.7) par rapport à l'altitude médiane est trompeuse et doit être considérée comme révélatrice d'un développement en coefficients externes insuffisant ou, dans le cas d'un problème inverse, soit d'une mauvaise détermination des coefficients de Gauss externes, soit d'une contamination ou d'une erreur plus importante sur les données dans la région supérieure.

Les résidus obtenus sont des résidus absolus. Par conséquent, nous pouvons conclure simplement, en regard des valeurs importantes du champ magnétique à modéliser, que nous avons pu reconstruire correctement le champ à l'intérieur du cône ainsi que ses variations en altitude.

## 10.2 Utilisation des fonctions de base du problème PIII

Représentons maintenant le champ magnétique sur la base locale en utilisant les fonctions de bases du problème PIII. Etant donné la vérification du théorème sur le flux et donc l'absence de restriction sur les ordres  $m$ , toutes les contributions peuvent être représentées.

### 10.2.1 Choix du modèle et des paramètres

Nous considérons maintenant un modèle donné par la différence entre un modèle de Cain et un modèle DGRF 1960.

De la même manière que précédemment, les coefficients de Gauss globaux sont écrits dans le référentiel du cône après avoir subi une rotation d'axe  $C(2^\circ E, 47^\circ N)$ , centré sur la France, et l'angle d'ouverture de la calotte est posé à  $\theta_0 = 5^\circ$ . En revanche, nous prendrons comme altitude supérieure  $b = a + u_m$  avec  $u_m = 500km$ . Ces choix qui diffèrent de ceux de la section précédente sont décidés dans l'optique de pouvoir comparer les résultats obtenus avec ceux de la figure (4.8) de la décomposition en harmoniques sphériques sur calotte selon Haines. Ce sont également ces paramètres géométriques que nous utiliserons pour une inversion dans la troisième partie. Notons toutefois qu'une telle altitude permet de contenir à l'intérieur du cône l'ensemble des données des satellites MAGSAT et CHAMP au-dessus de la France et n'est donc pas arbitraire.

Les coefficients de Gauss de la base locale sont trouvés à partir des relations avec les coefficients de Gauss globaux et en utilisant les fonctions de bases appropriées (section 9.3). Nous utilisons des développements pour chacun des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  limités aux indices  $P_{max} = K_{max} = 30$  pour chacun des ordres  $m$  de 0 à 50. Cette manipulation conduit à la définition de quelques 9191 coefficients de Gauss! Nous verrons cependant qu'il ne faudra pas se laisser abuser par ce nombre important et qu'il existe des alternatives pour le réduire (chapitre 12, troisième partie).

Pour cette reconstruction, nous considérerons le même développement  $K_{max}$  pour les coefficients de Gauss internes et externes puisque nous venons de constater qu'un développement insuffisant des coefficients externes pénalise la reconstruction en altitude.

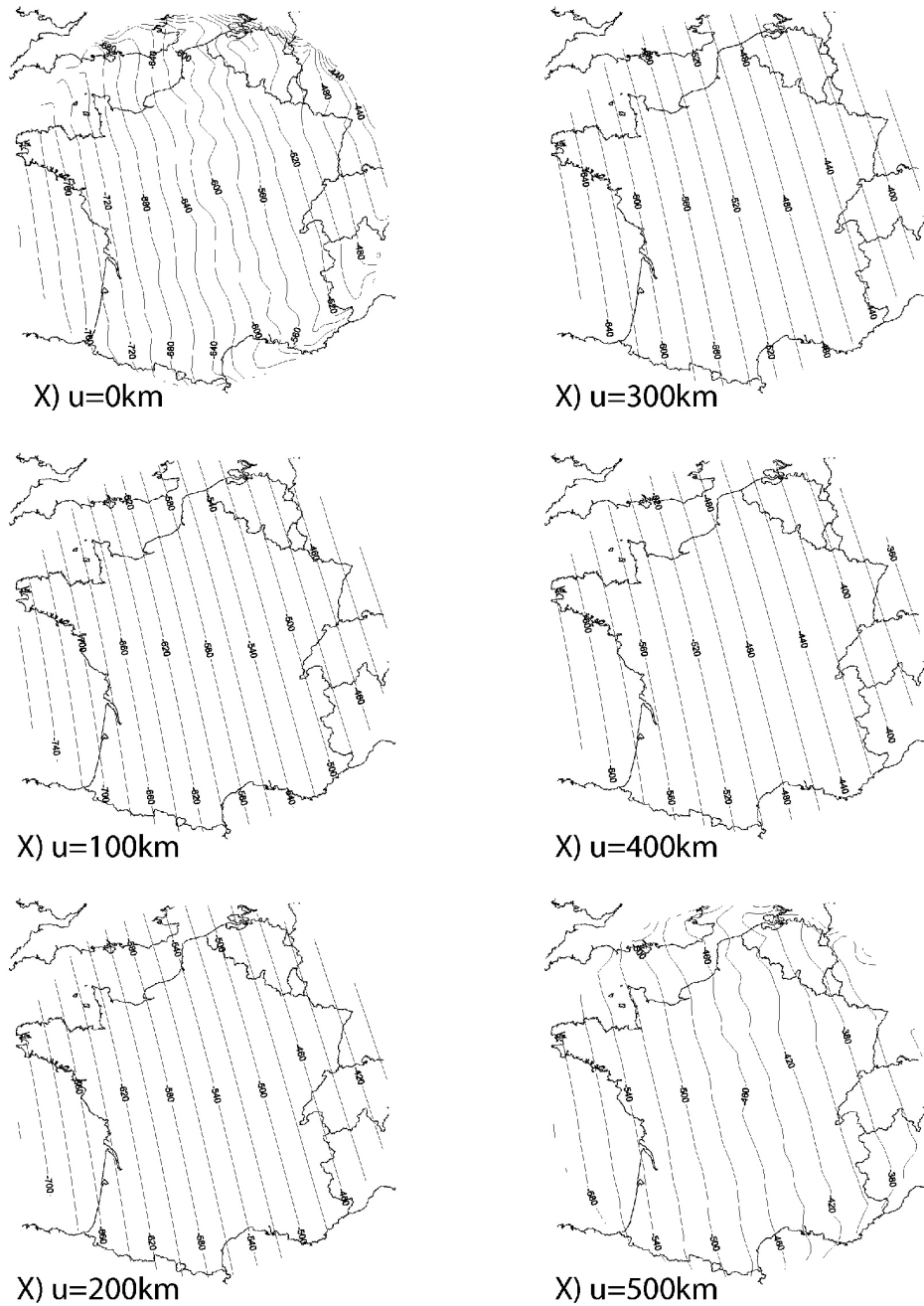


FIG. 10.8 – Reconstruction de la composante  $X$  d'un champ magnétique sur la base locale par la décomposition du problème  $PIII$  et pour des développements en série tronqués à  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Les coefficients de Gauss ont été synthétisés à partir de la différence entre un modèle de Cain 1960 et un modèle DGRF. Le tracé montre différentes reconstructions à des surfaces comprises entre  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  d'altitude.

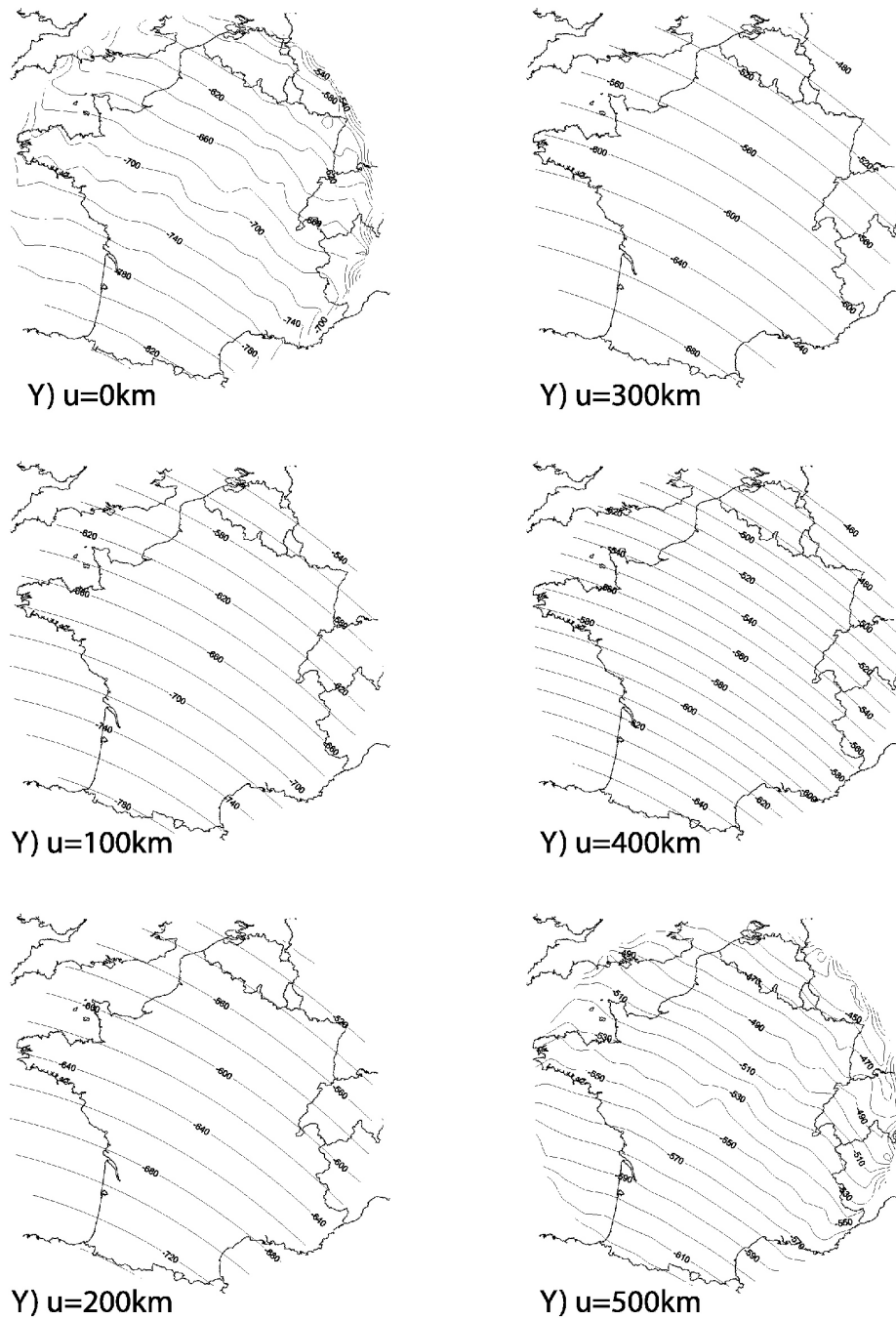


FIG. 10.9 – Reconstruction de la composante  $Y$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.8.

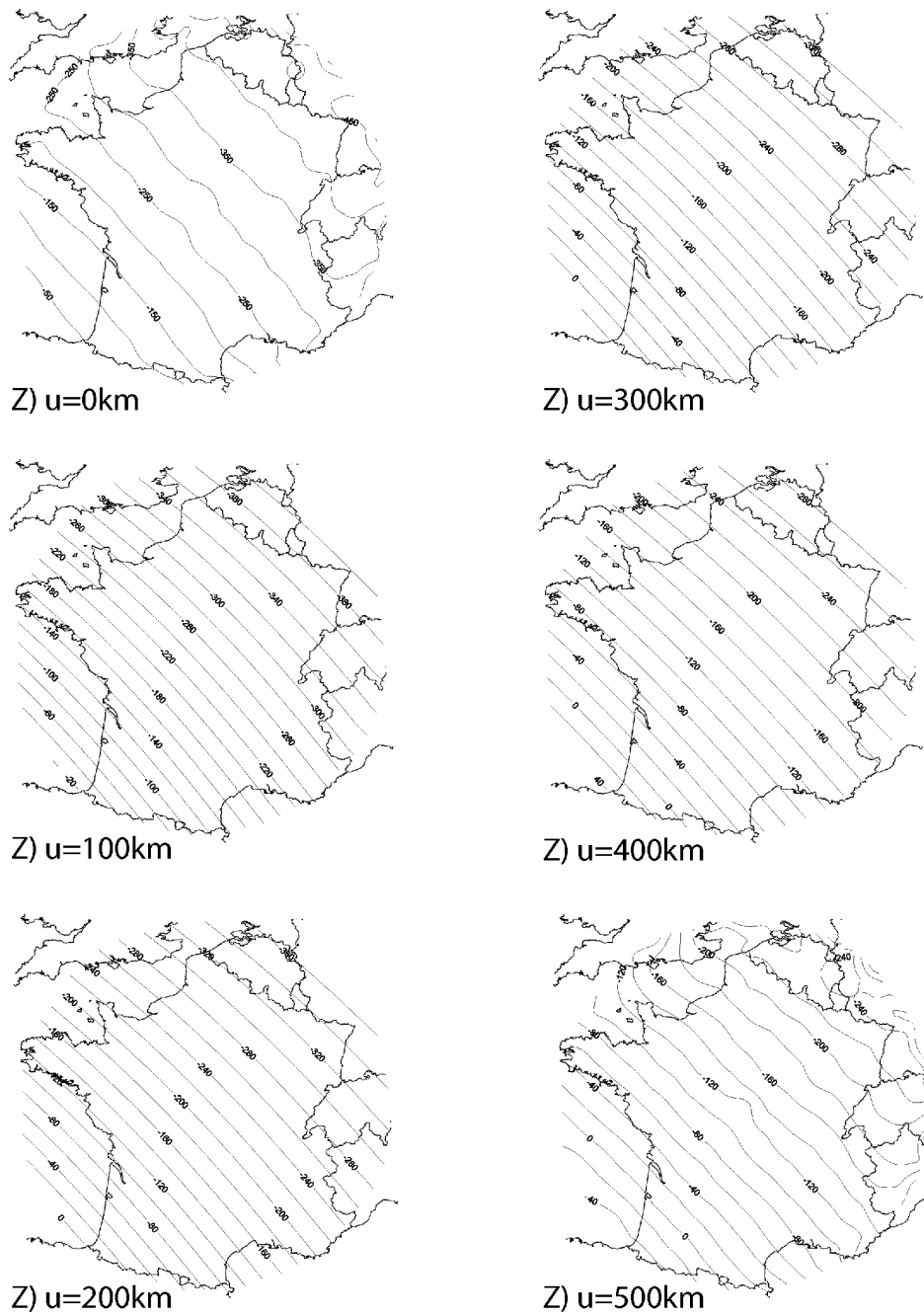


FIG. 10.10 – Reconstruction de la composante  $Z$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.8.

## 10.2.2 Analyse des résultats

### Variations des résidus sur les surfaces

Les figures (10.8), (10.9) et (10.10) montrent respectivement les résultats de la reconstruction des trois composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du champ magnétique.

Les oscillations, ainsi que les effets de bords nettement visibles sur les surfaces d'altitudes  $u = 0km$  et  $u = 500km$ , révèlent les problèmes de reconstruction du champ sur les surfaces limites du domaine dans la version tronquée des séries décrivant le champ magnétique. Néanmoins, sur ces surfaces, le comportement est tout à fait réaliste et coïncide bien avec l'allure du champ synthétique utilisé. Pour pouvoir discerner d'éventuelles différences de comportements, nous représentons figures (10.11), (10.12) et (10.13) les résidus entre les composantes du champ magnétique réel  $\vec{B}$  et le champ magnétique  $\vec{B}^r$  reconstruit dans le cône.

L'évolution des résidus avec l'altitude est tout à fait conforme à ce que nous attendions de la décomposition PIII. Les surfaces, inférieure et supérieure, sont le siège des maxima d'erreur de reconstruction, avec notamment une erreur plus importante sur la surface inférieure que sur la surface supérieure. Puisque les résidus ainsi tracés sont des résidus absolus, cette constatation rend parfaitement compte de la décroissance du champ magnétique avec l'altitude.

De façon générale, l'erreur commise n'excède jamais 5 nT au centre du cône et les erreurs de magnitudes supérieures siègent aux bords de la calotte. Cette dernière affirmation est notamment vraie pour des surfaces hors des frontières  $\partial\Omega_a$  et  $\partial\Omega_b$  du cône où l'erreur de reconstruction au centre de la calotte sphérique passe sous le seuil des 0,2nT d'après le choix des isovaleurs. Le tracé des résidus ne montre, à première vue, pas tellement de différences entre les reconstructions des composantes horizontales du champ et la reconstruction de la composante verticale du champ comme nous aurions pu nous y attendre (d'après les résultats des section 8.2.1). Or, il s'avère que les effets de bords sont plus nombreux et ne se limitent plus aux bords de la calotte. Ceci illustre que la composante  $Z$  est particulièrement difficile à représenter au voisinage du cercle en  $\theta = \theta_0$ . On ne manquera pas de constater d'autre part le léger bombement sur la composante  $Z$  au centre de la calotte qui était parfaitement prédit par l'étude sur la reconstruction de la fonction de Schmidt  $P_0^1$  (8.2.1).

### Variation des résidus avec l'altitude

Plutôt que de réaliser différentes reconstructions à différentes altitudes nous pouvons, de la même manière que précédemment, synthétiser les résultats à différentes altitudes en prenant la moyenne de l'erreur de reconstruction sur différentes surfaces échantillonnées tous les 10km en altitude. La figure (10.14) montre le résultat de cette comparaison pour les trois composantes du champ. L'analyse des résidus moyennés sur différentes surfaces laisse maintenant mieux entrevoir la différence de reconstruction entre les composantes horizontale et verticale du champ avec une erreur plus importante sur la composante  $Z$  (Ceci n'est pas toujours clair si l'on se borne à analyser les résidus absolus, ce qui est le cas ici, car ils dépendent donc avant tout de la magnitude de la composante  $Z$  comparée à  $X$  ou  $Y$ ).

En règle générale, ce type de tracé montre une erreur à la surface terrestre importante pour les décompositions qui ont une ou plusieurs composantes qui tendent vers 0 à l'approche des bords, ce qui est, rappelons le, dicté par le choix des conditions aux limites. Par conséquent, ici encore, la variation de l'erreur que nous observons est bien supérieure à l'erreur contenue dans un cône dont nous excluons les bords latéraux. Nous ne pouvons pas exclure le bord inférieur puisque nous devons tracer le champ à la surface terrestre; l'unique manœuvre acceptable est donc de regarder la décroissance de l'erreur à mesure que nous nous éloignons des bords latéraux.



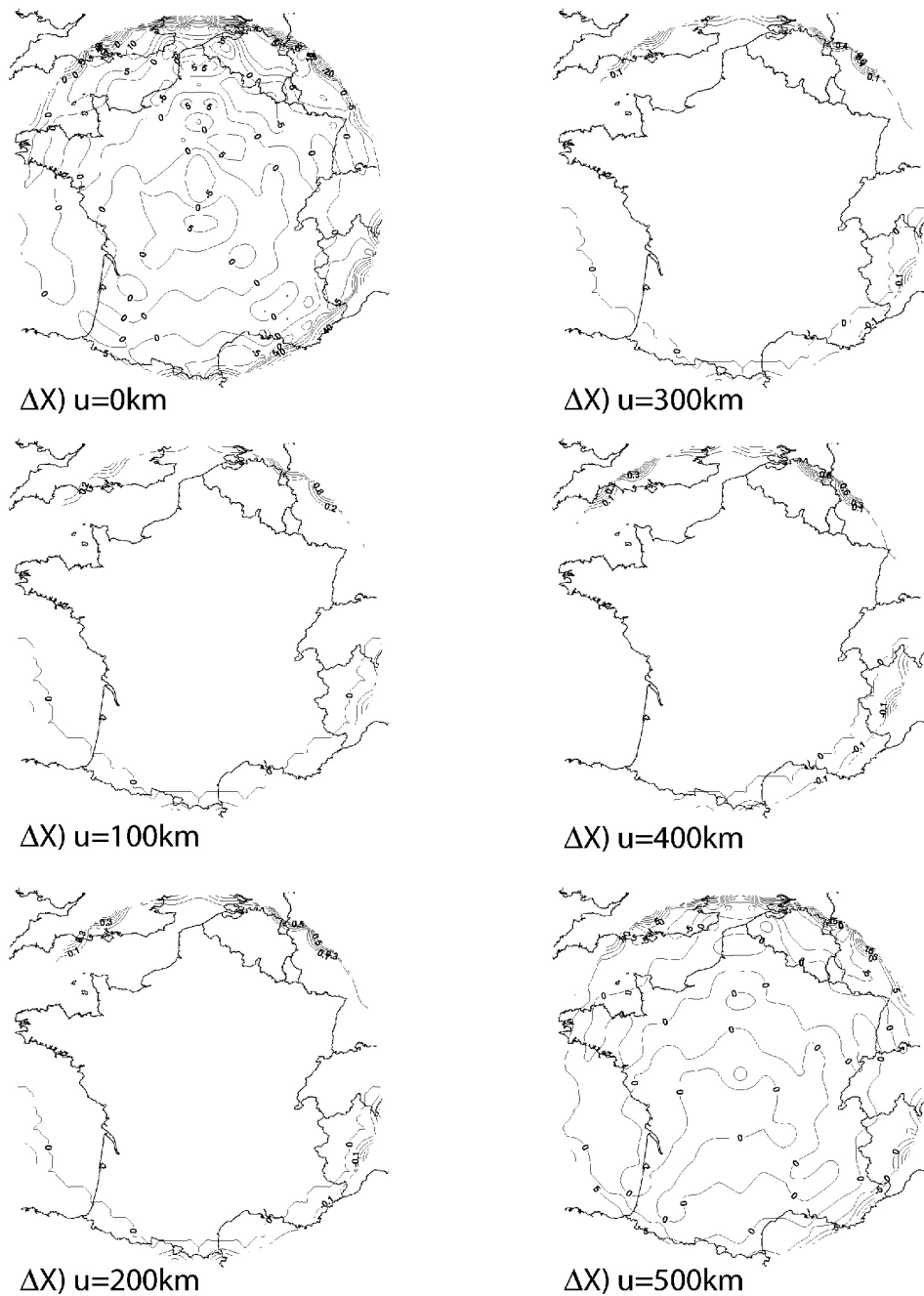


FIG. 10.11 – Résidus entre la composante  $X$  du champ magnétique calculé par un modèle Cain 1960 moins un modèle DGRF et la composante  $X$  du champ reconstruit pour des développements jusqu'aux indices de troncature  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Les lignes d'isovaleurs sont représentées tous les  $5nT$  pour les surfaces en  $u = 0km$  et  $u = 500km$  et tous les  $0,2nT$  aux autres altitudes.

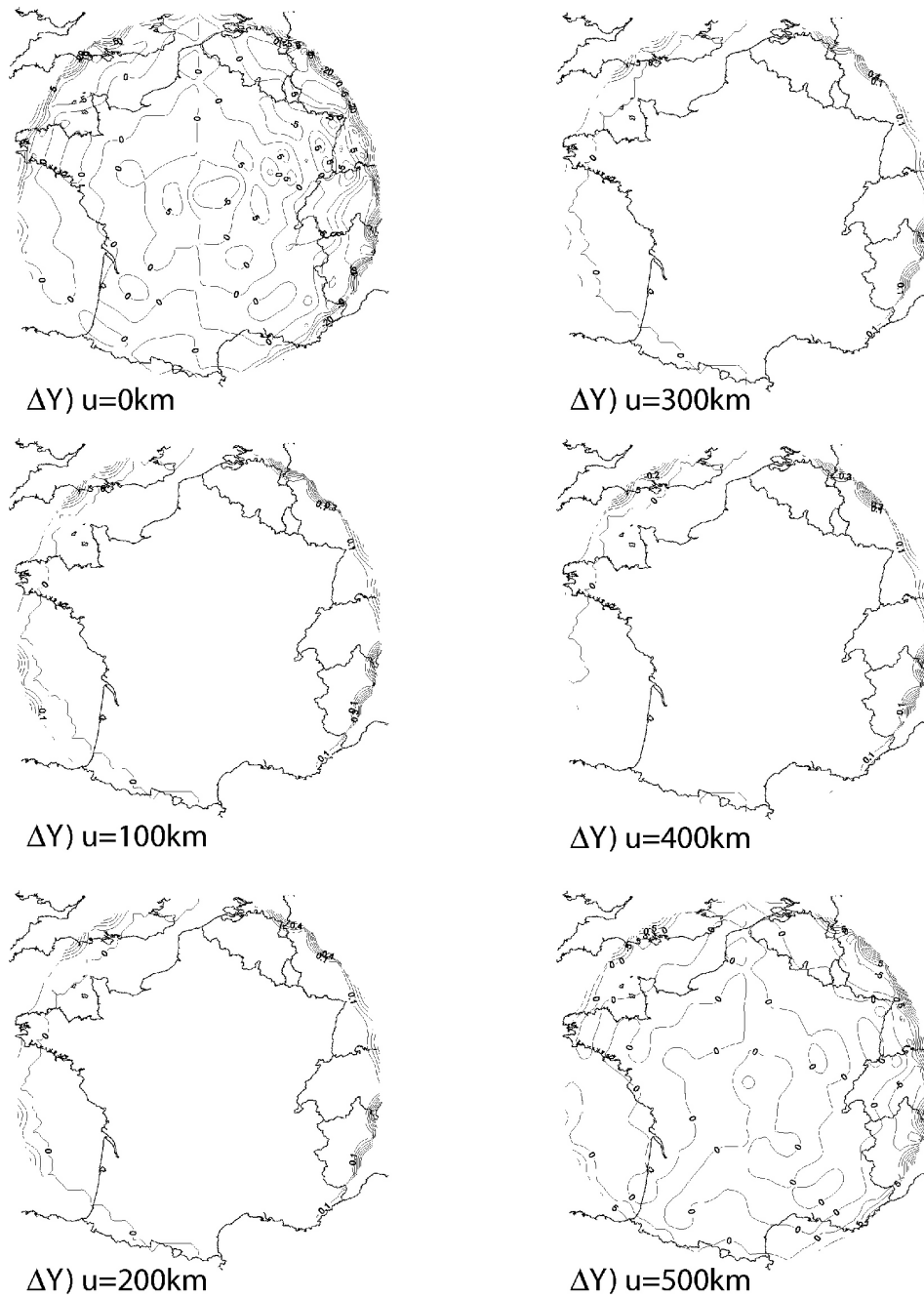


FIG. 10.12 – Résidus entre les composantes  $Y$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.11).

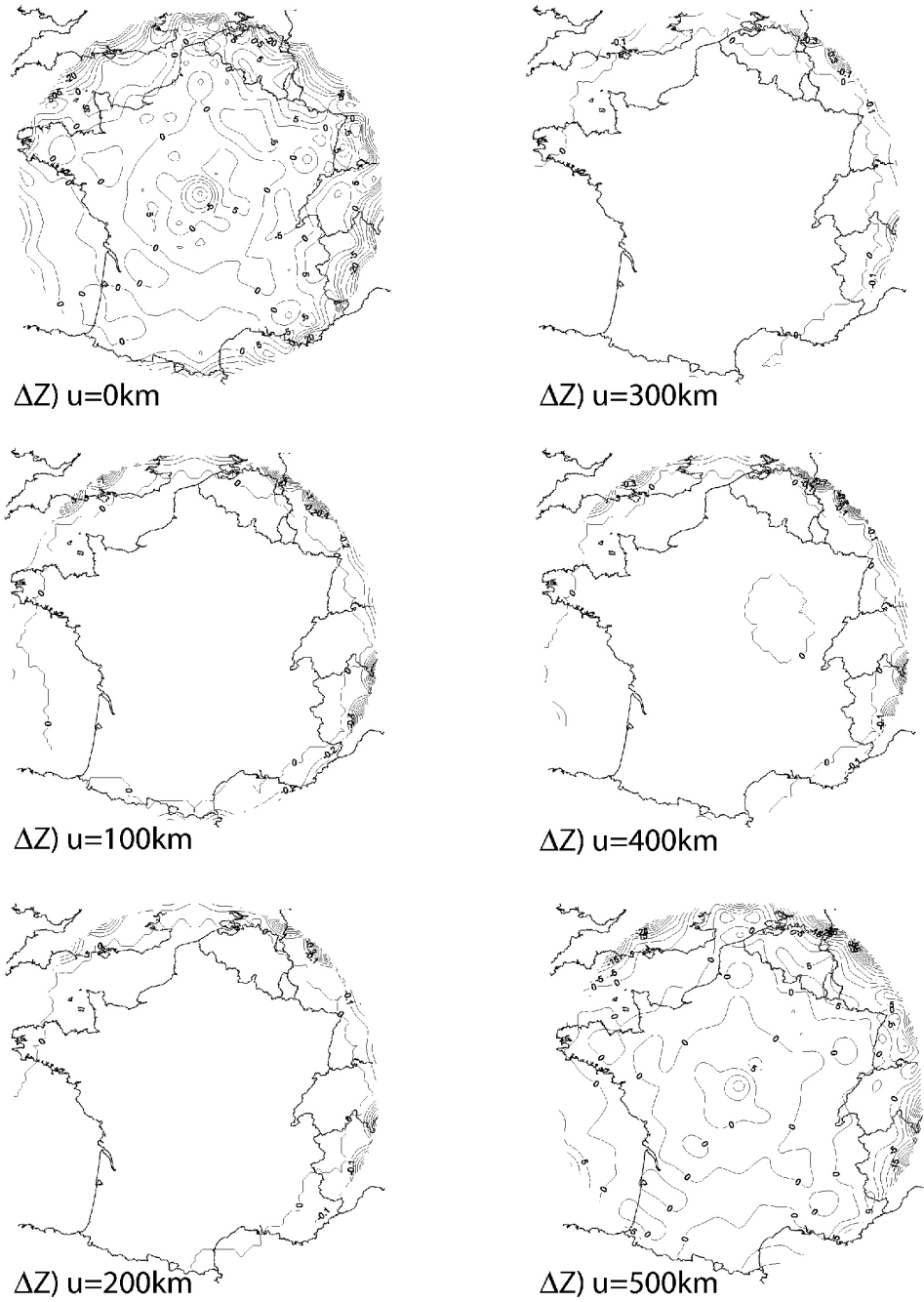


FIG. 10.13 – Résidus entre les composantes  $Z$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.11).

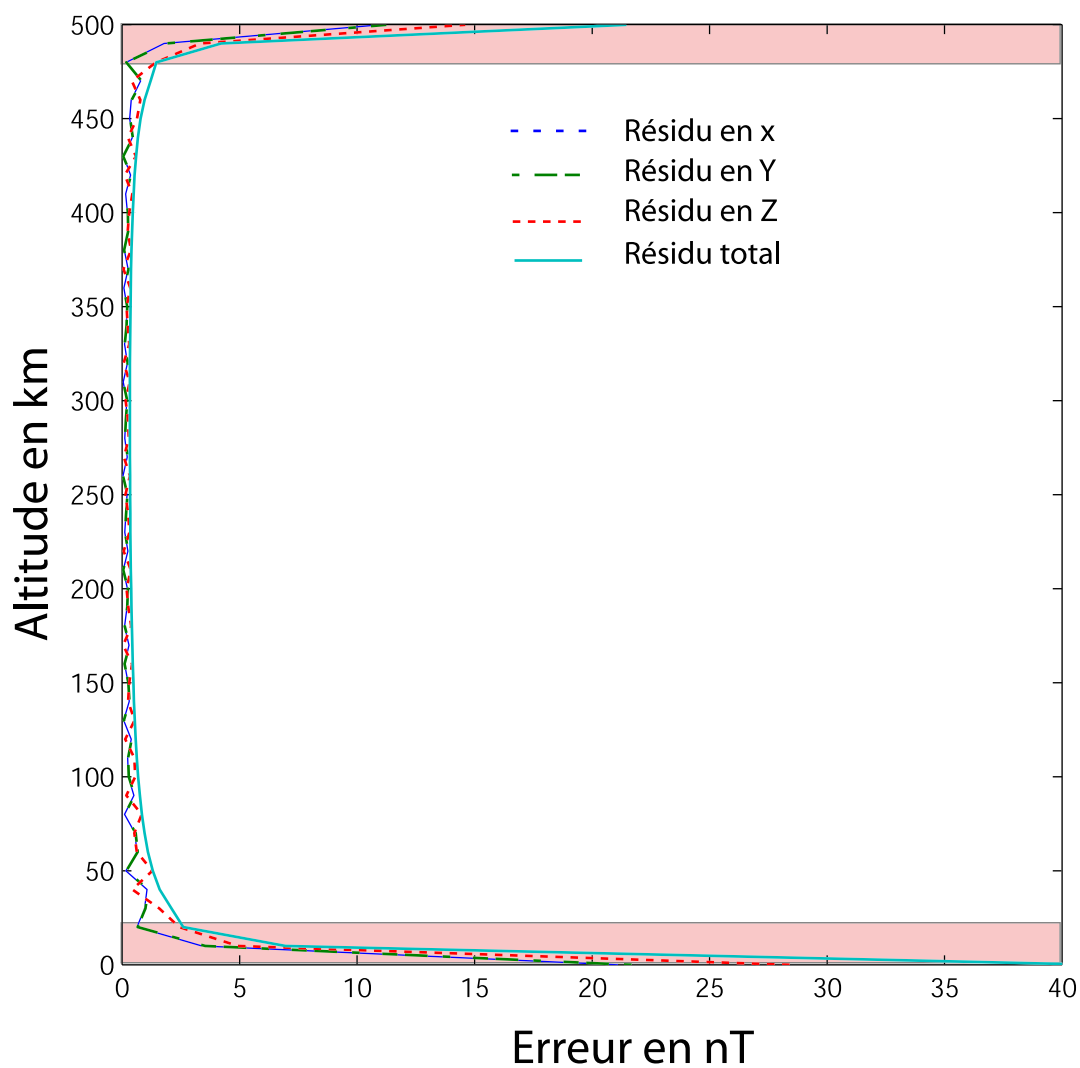


FIG. 10.14 – Représentation synthétique de l'erreur moyenne de reconstruction du champ magnétique par la méthode *PIII* pour différentes surfaces échantillonnées tous les 10 km entre les altitudes  $u = 0 \text{ km}$  et  $u = 500 \text{ km}$ .

Erreur $\overline{R_\Omega}$ dans $\Omega$ en nT	Erreur $\overline{R_{\partial\Omega_r}}(a)$ sur $\partial\Omega_a$ en nT	angle $\varepsilon$ en deg.
3,8	41,4	0,0
2,2	25,5	0,1
1,2	14,2	0,2
1,1	13,2	0,3
0,9	11,4	0,4
0,8	10,6	0,5

TAB. 10.1 – Variation des erreurs moyennes sur la surface terrestre et dans le volume total lorsque nous excluons des bords une couronne de largeur angulaire  $\varepsilon$

Le tableau 10.1 montre l'erreur moyenne  $\overline{R_{\partial\Omega_r}}(a)$ , définie par (10.2) lorsque nous retranchons une couronne d'angle  $\varepsilon$  près du bord de la calotte. A titre indicatif, nous présentons également la valeur de l'erreur sur l'intensité du champ total  $\overline{R_\Omega}$  en nT moyennée dans le volume et sa variation en fonction de  $\varepsilon$ . Si  $N_p^\Omega$  est le nombre total de points dans le volume, l'erreur dans le volume est définie par :

$$\overline{R_\Omega} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N_p^\Omega} (B_{x,j} - B_{x,j}^r)^2 + (B_{y,j} - B_{y,j}^r)^2 + (B_{z,j} - B_{z,j}^r)^2}{N_p^\Omega}} \quad (10.3)$$

Cette définition nous permettra ultérieurement de définir l'erreur moyenne par élément de volume associée à chaque couple d'indices de troncature  $(P_{max}, K_{max})$ .

En retranchant une couronne sphérique d'ouverture de plus en plus importante, nous nous rapprochons de plus en plus de la comparaison des champs magnétiques au centre de la calotte et nous constatons une nette diminution de l'erreur. Si la variation des résidus en fonction de l'altitude est bien représentée sur la figure (10.14), les valeurs des résidus sont à interpréter en sachant que nous sommes surtout intéressés par la reconstruction d'un champ en dehors des frontières du cône. Retrancher une fine couronne (ici, nous retranchons au maximum 1/10ème de la taille de la calotte) nous permet d'espérer pouvoir résoudre le champ magnétique avec une précision moyenne de 10,5 nT à la surface terrestre pour des décompositions tronquées à  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Etant donné le nombre de coefficients que cela représente, la résolution du champ est moyennement satisfaisante. Nous introduirons des considérations permettant de réduire ce nombre de coefficients tout en améliorant la résolution par un choix plus avisé des développements. Ces aspects seront largement discutés dans la partie 3 lorsque nous quantifierons l'énergie associée à chaque ordre  $m$ .

En conclusion, nous avons pu vérifier correctement que la méthode *PIII* permettait de reconstruire un champ dans le cône sphérique. Les différents aspects de la reconstruction et les variations radiales et latérales des résidus sont bien expliquées par la façon dont les fonctions de base locales représentent les fonctions de base globales dans le cône.

## 10.3 Utilisation des fonctions de base du problème PIV

### 10.3.1 Choix du modèle et des paramètres

Nous cherchons à reconstruire le champ partiel de la différence entre un modèle de Cain 1960 et un modèle DGRF 1960 en utilisant maintenant les fonctions de bases qui interviennent dans la résolution du problème *PIV*. Les relations, qui expriment les coefficients de Gauss de la base locale à partir des coefficients de Gauss globaux, sont données dans la section (9.4). Les composantes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  du champ magnétique sont ensuite reconstruites à partir de (6.49), (6.50) et (6.51) en utilisant les fonctions de base appropriées. Pour cette décomposition, il n'existe pas de restriction sur les ordres  $m$  et nous pouvons procéder au développement de tous les ordres  $m$  aux même indices  $P_{max} = K_{max} = 30$  que précédemment.

La résolution du problème *PIV* exclue les valeurs propres  $k = 0$  pour la base de Mehler et nous n'avons plus à calculer les coefficients constants  $\{G_0^m, H_0^m\}$ . Cette différence réduit le nombre de coefficients de Gauss impliqués dans la reconstruction à 9090.

### 10.3.2 Variations des résidus sur les surfaces

Les figures (10.15), (10.16) et (10.17) donnent la reconstruction du champ magnétique pour les même altitudes que par la méthode *PIII*. Nous remarquons l'équivalence apparente de la reconstruction en dehors des frontières inférieure et supérieure du cône pour les trois composantes du champ. En revanche, la reconstruction à la surface terrestre présente bien plus de distorsions pour les composantes  $X$  et  $Y$  du champ. Pour la composante  $Z$ , la différence entre les deux méthodes est nettement moins nette. Ces comportements différents pour  $X$  et  $Y$  étaient attendus en regard des discussions sur la représentation des fonctions radiales par les méthodes *PIII* et *PIV*. Etant donné que sur les surfaces limites, inférieure et supérieure, les composantes  $X$  et  $Y$  ne sont portées que par la base de Legendre, la convergence vers la solution est beaucoup plus lente pour ces composantes.

### 10.3.3 Variation des résidus avec l'altitude

Nous pouvons quantifier les résidus par la comparaison directe du champ reconstruit et du champ réel. Cette comparaison est illustrée par les figures (10.18), (10.19) et (10.20).

Sur les différentes surfaces, les isolignes ont été choisies de manière à ce que nous puissions comparer directement les résidus entre la méthode *PIII* et la méthode *PIV*. Nous observons une tendance plus désordonnée dans les résidus. A ces degrés du développement, ces tendances n'entraînent pourtant pas de différence majeure avec la méthode *PIII* car les résidus n'excèdent pas  $0,1nT$ . Ceci montre bien l'équivalence des deux méthodes pour des développements importants mais suggère également que les reconstructions à des degrés  $P_{max}$  et  $K_{max}$  moindres est une entreprise plus délicate.

Les surfaces limites du domaine sont des zones plus critiques et les reconstructions montrent des résidus qui empiètent sur l'intérieur de la calotte et qui ne se cantonnent plus uniquement près des bords. Le tracé des résidus moyens sur des surfaces échantillonnées tous les 10km sur la figure (10.21) montre l'augmentation de l'erreur à mesure que l'on se rapproche des surfaces inférieure et supérieure. Le résidu moyen à la surface terrestre atteint une valeur de 68,32 nT pour une erreur moyenne dans le volume de 7,1 nT.

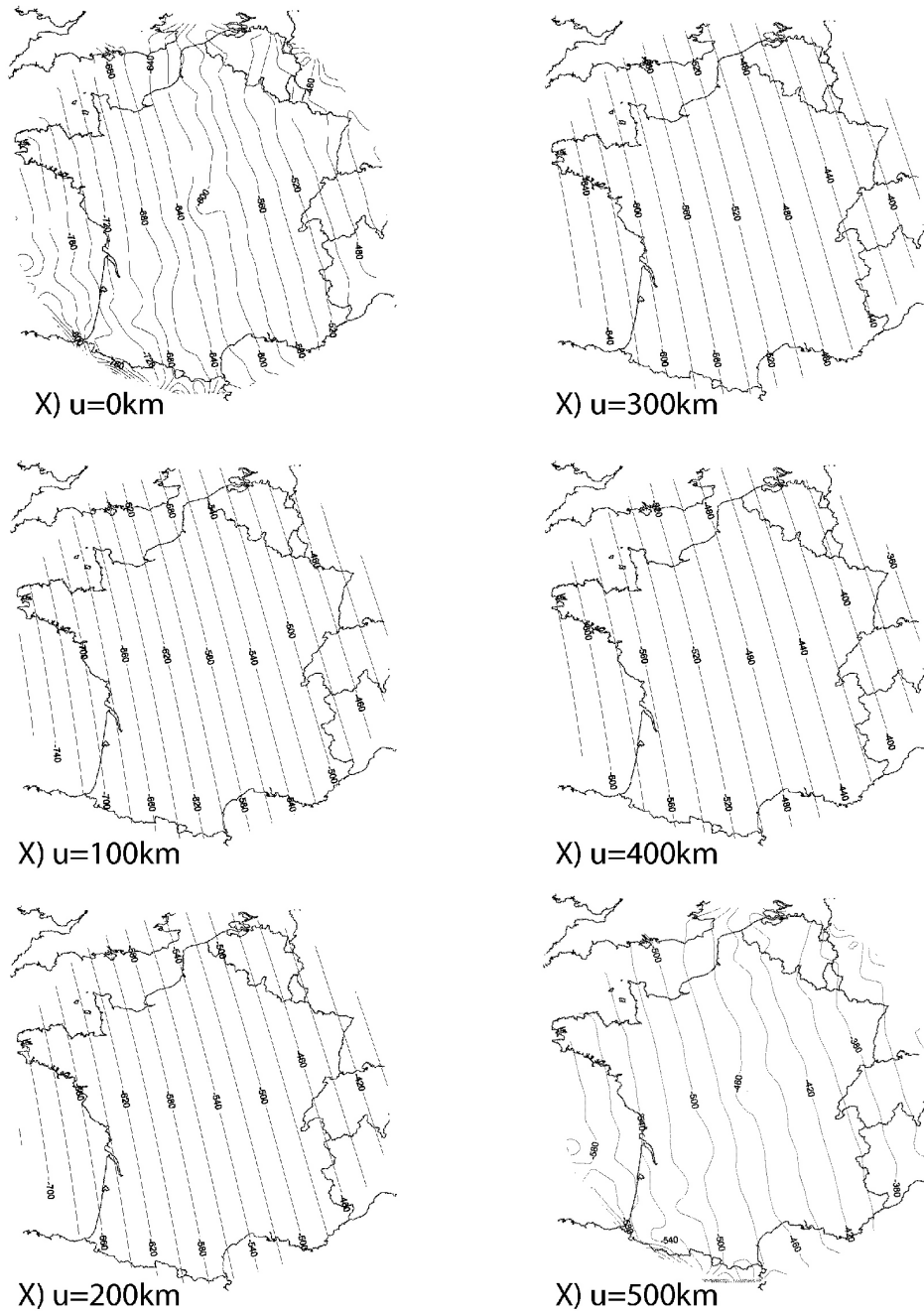


FIG. 10.15 – Reconstruction de la composante  $X$  d'un champ magnétique sur la base locale par la décomposition du problème  $PIV$  et pour des développements en série tronqués à  $P_{max} = K_{max} = 30$ . Les coefficients de Gauss ont été synthétisés à partir de la différence entre un modèle de Cain 1960 et un modèle DGRF. Le tracé montre différentes reconstructions à des surfaces comprises entre  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  d'altitude.

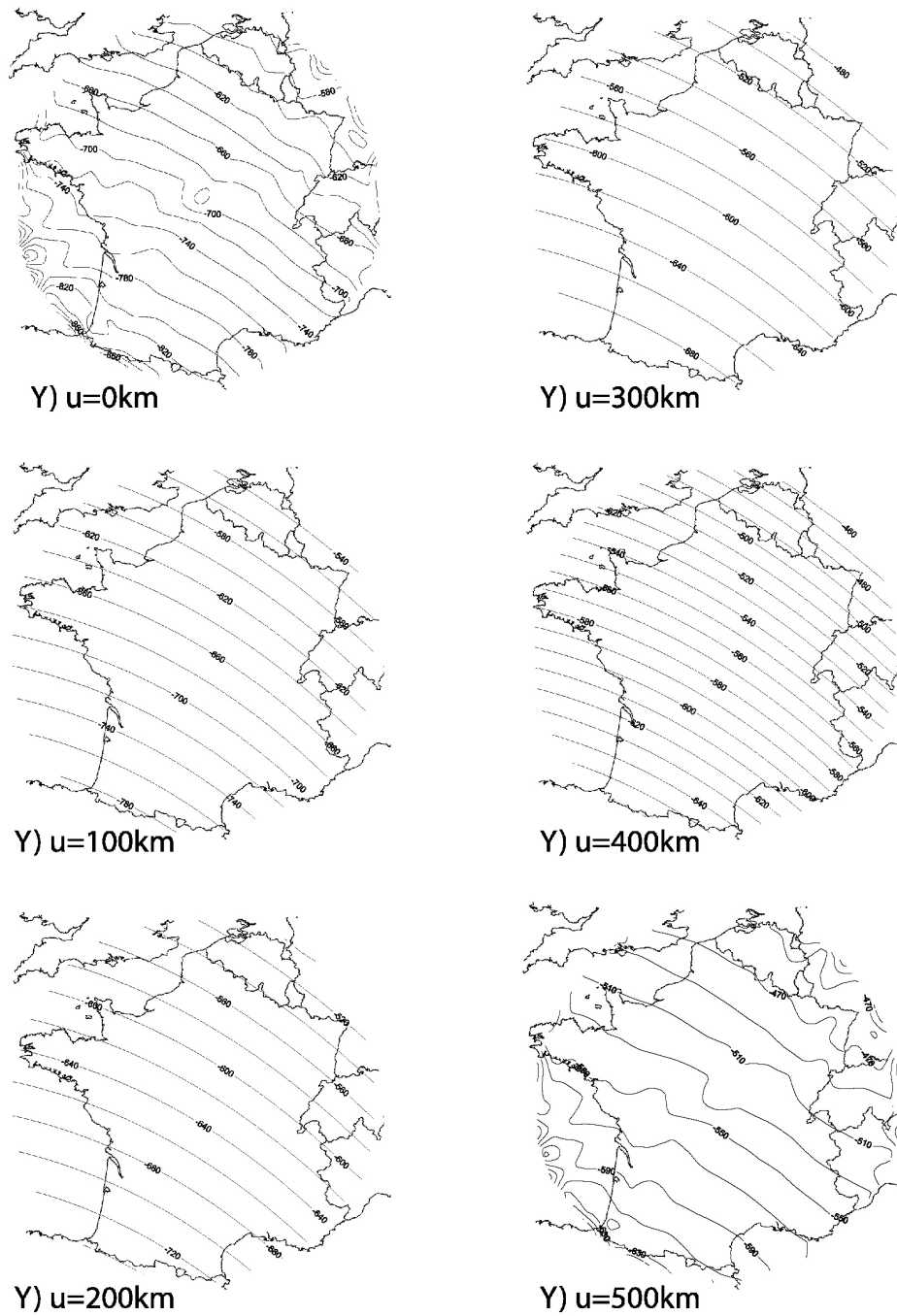


FIG. 10.16 – Reconstruction de la composante  $Y$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.15.



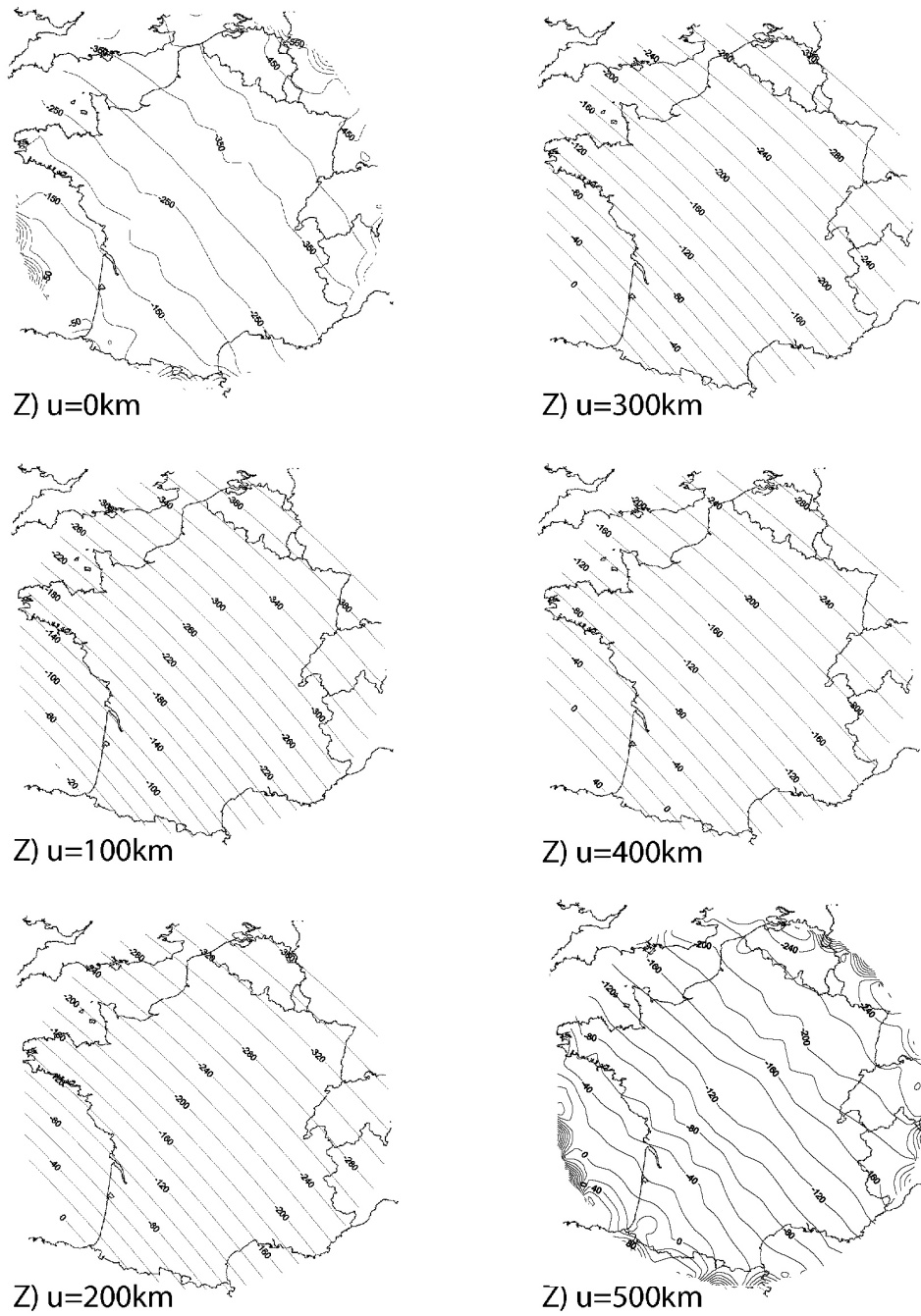


FIG. 10.17 – Reconstruction de la composante  $Z$  du champ magnétique. Même légende que pour la figure 10.15.

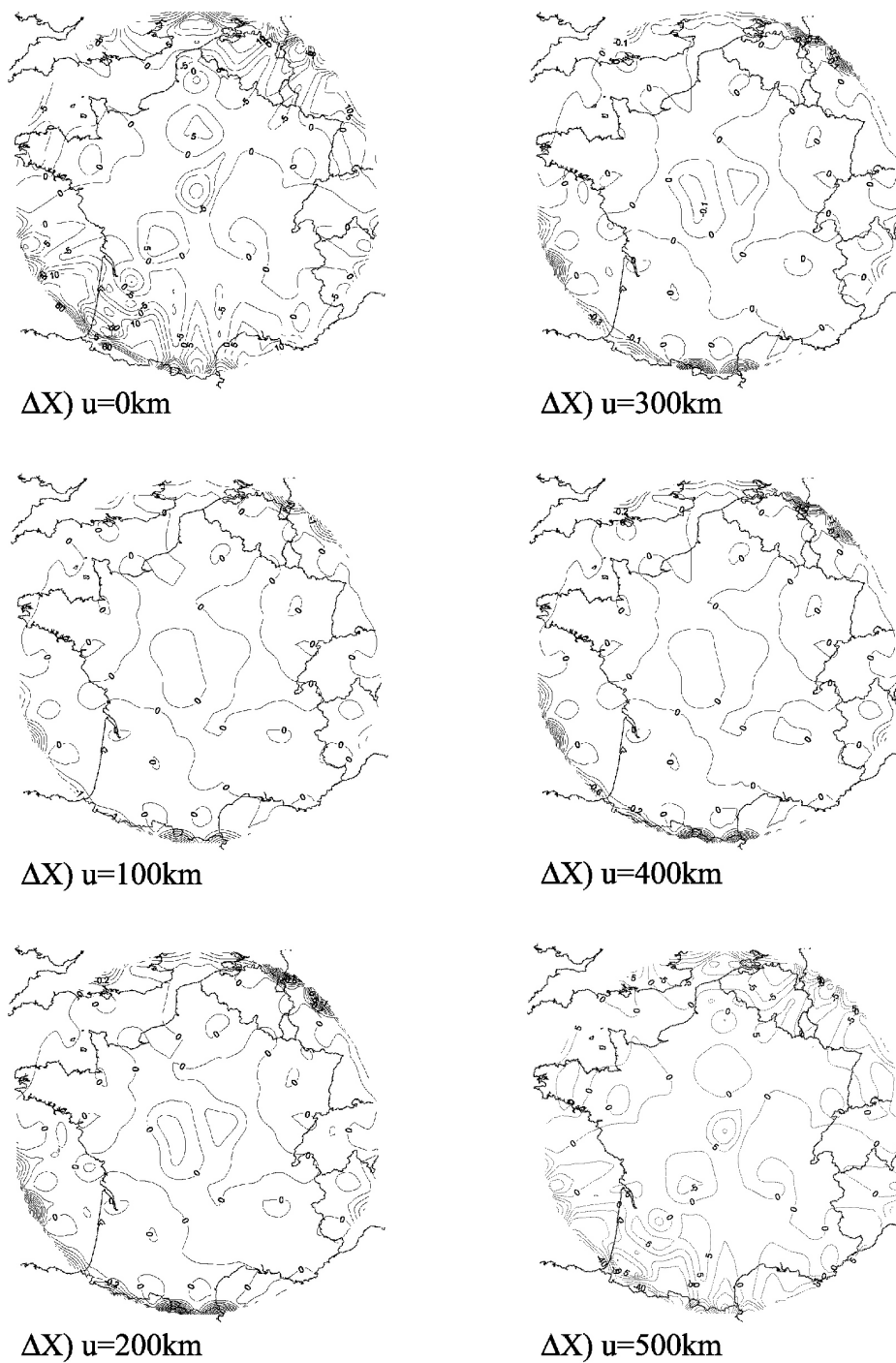


FIG. 10.18 – Résidus entre la composante  $X$  du champ magnétique calculé par un modèle Cain 1960 moins un modèle DGRF et la composante  $X$  du champ reconstruit pour des développements jusqu'aux indices de troncature  $P_{max} = K_{max} = 30$  par la méthode PIV. Les lignes d'isovaleurs sont représentées tous les  $5nT$  pour les surfaces en  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  et tous les  $0.2nT$  aux autres altitudes.

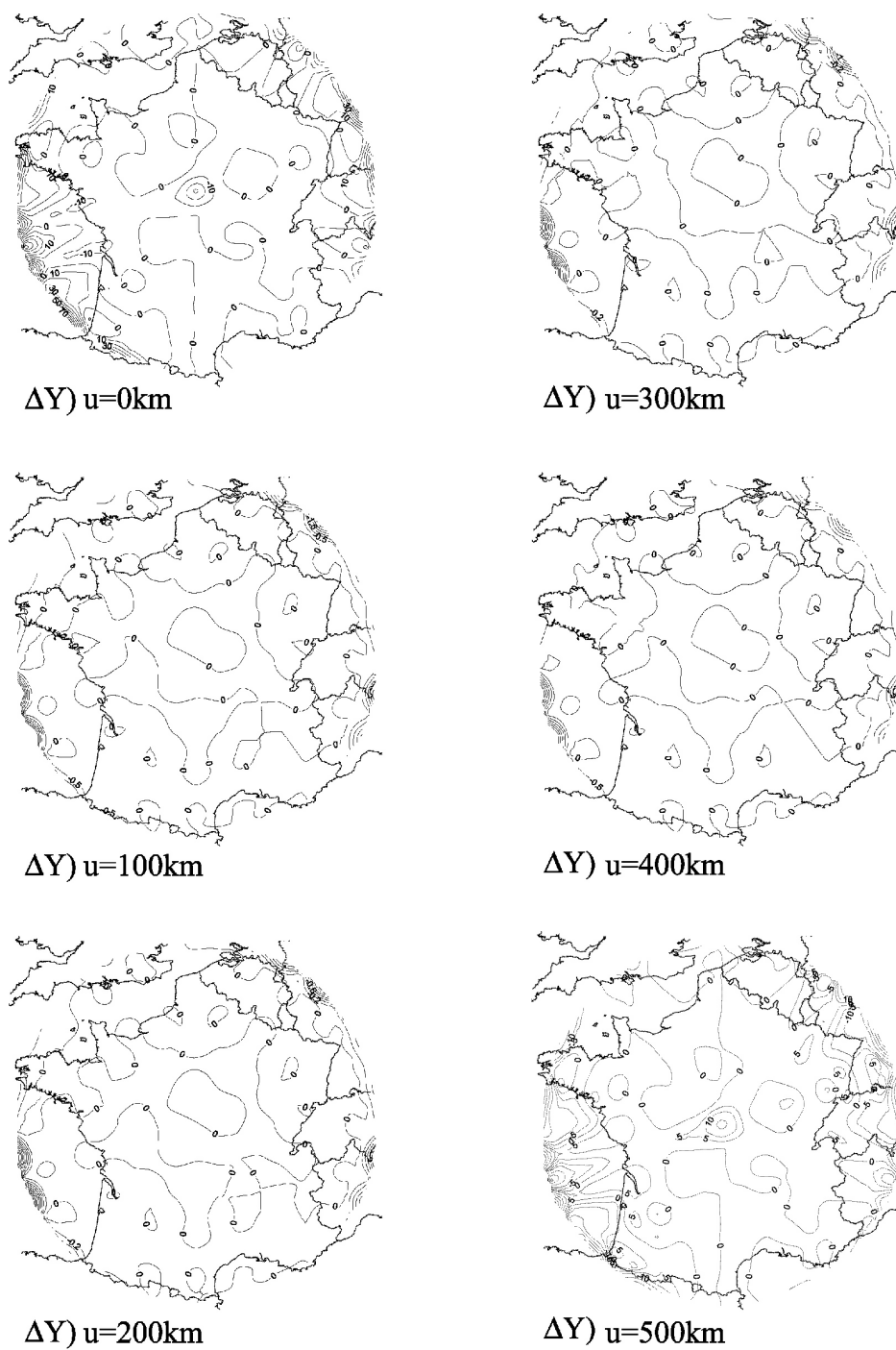


FIG. 10.19 – Résidus entre les composantes  $Y$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.18).

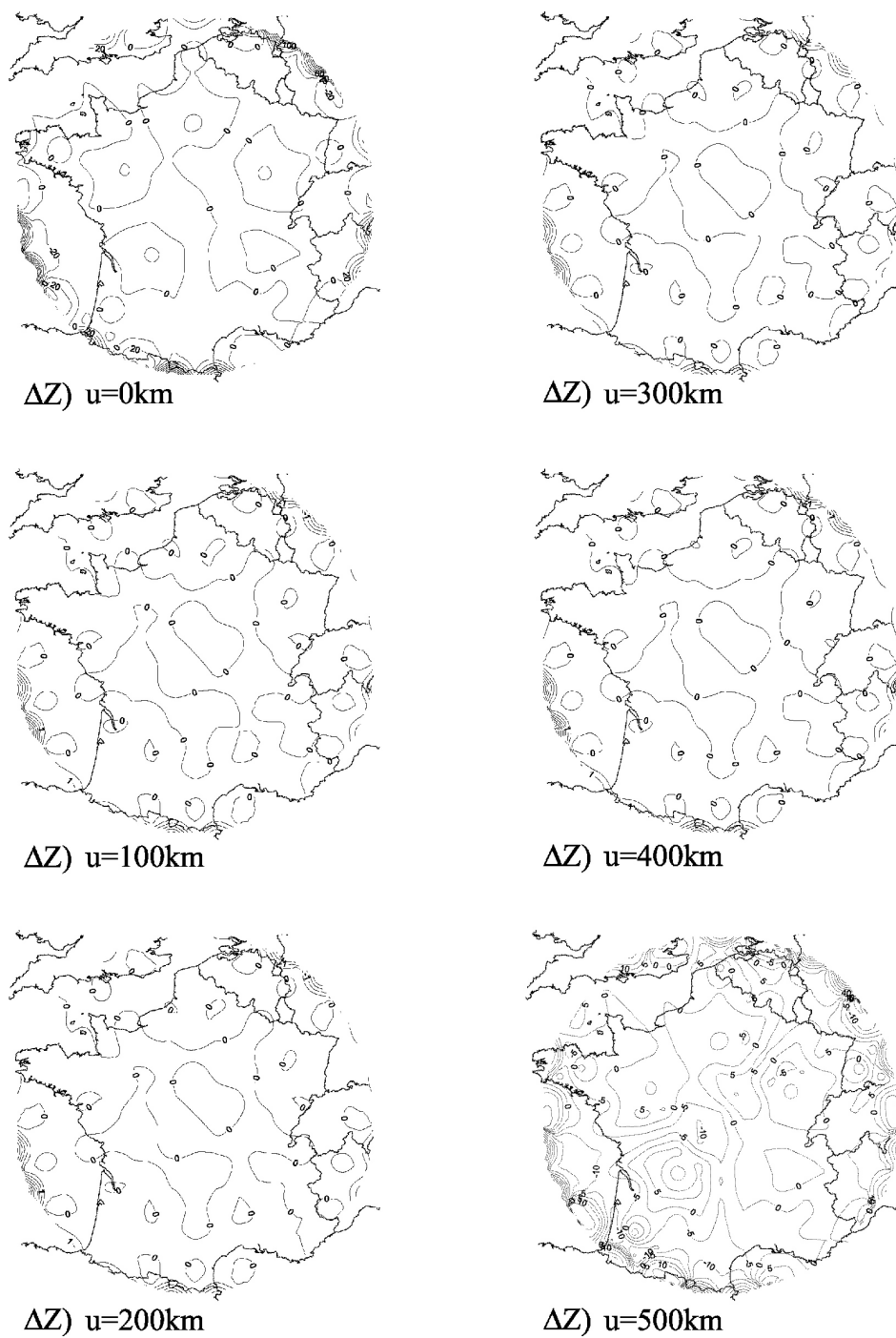


FIG. 10.20 – Résidus entre les composantes  $Z$  du champ réel et du champ reconstruit. Mêmes légende et contours que sur la figure (10.18).

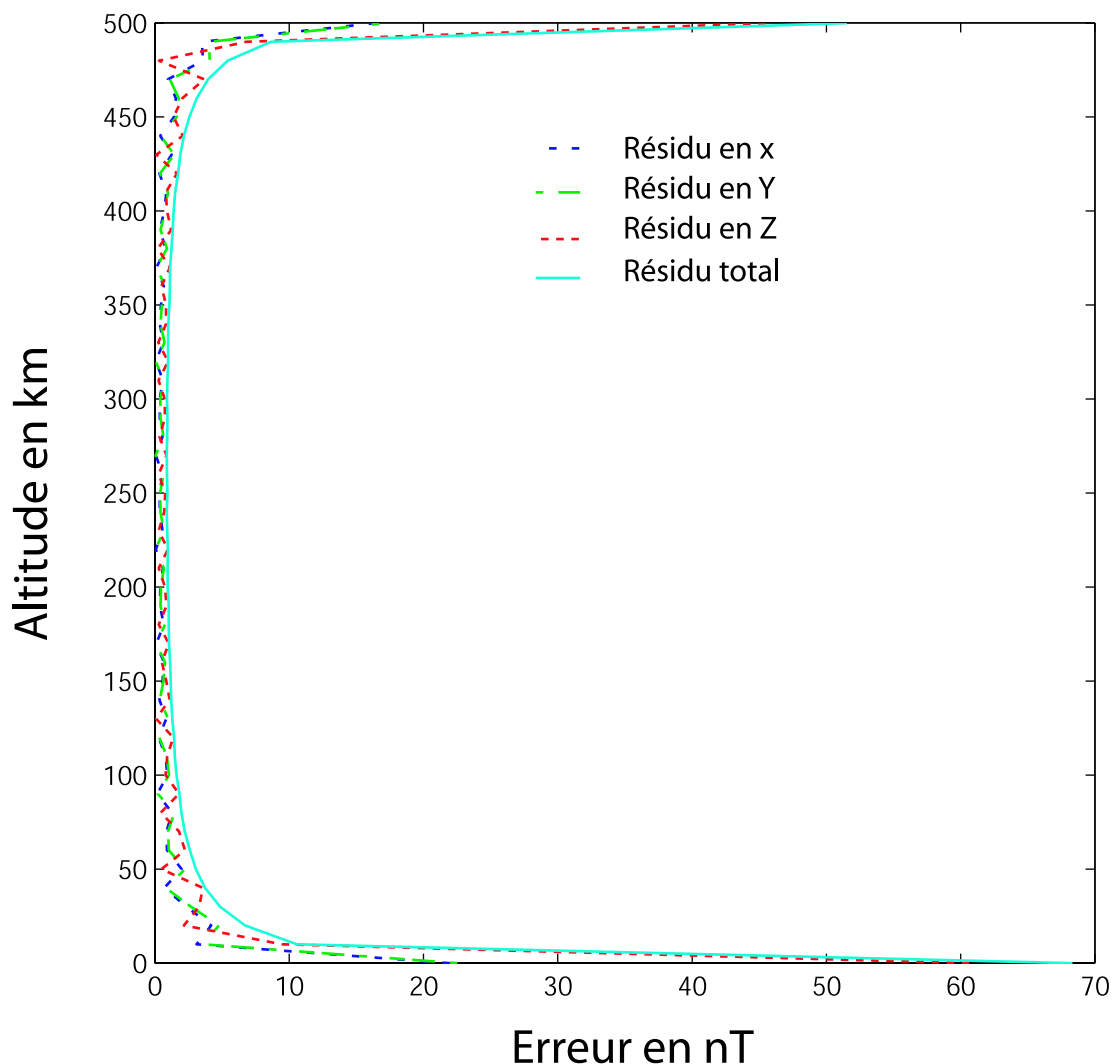


FIG. 10.21 – Représentation synthétique de l'erreur moyenne de reconstruction du champ magnétique par la méthode *PIV* pour différentes surfaces échantillonnées tous les  $10\text{km}$  entre les altitudes  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$ .

Erreur $\overline{R_\Omega}$ dans $\Omega$ en nT	Erreur $\overline{R_{\partial\Omega_r}(a)}$ sur $\partial\Omega_a$ en nT	angle $\varepsilon$ en deg.
7,1	68,3	0,0
3,1	32,0	0,1
1,7	18,0	0,2
1,5	16,7	0,3
1,3	14,3	0,4
1,2	13,4	0,5

TAB. 10.2 – Variation des erreurs moyennes sur la surface terrestre et dans le volume total lorsque nous excluons des bords une couronne de largeur angulaire  $\varepsilon$

Ici encore, les effets de bords conjugués sur toutes les surfaces contribuent à l'augmentation de la valeur du résidu moyen sur la surface ou dans le volume. Nous observons, dans le tableau 10.2, la décroissance du résidu à mesure que nous retranchons une couronne d'angle  $\varepsilon$  sur les bords. Quoi qu'il en soit, nous constatons nettement que la méthode *PIV* implique une erreur de reconstruction plus importante que la méthode *PIII* dans sa version tronquée, et pas uniquement sur la surface terrestre. Au centre du cône le résidu total est plus important par *PIV* que par *PIII* et nous voyons la manifestation de la convergence, plus lente, des fonctions radiales  $R_p(r)$  impliquées dans cette reconstruction.

Les reconstructions numériques sont en très bon accord avec ce que nous pouvions attendre de la méthode *PIV* d'après les discussions sur la vitesse de convergence des séries. L'idée que la reconstruction *PIV* dégrade davantage les composantes  $X$  et  $Y$  du champ et que, par conséquent, l'erreur est plus importante semble bien se confirmer après vérification sur ce cas synthétique.

### 10.3.4 Discussion générale et choix de la décomposition

D'après ces différents résultats, les relations entre les coefficients de Gauss locaux et globaux obtenus à partir des conditions aux limites permettent de reconstruire effectivement un champ global de manière tout à fait satisfaisante en n'importe quel point de l'intérieur du domaine. Sur ce point élémentaire, la théorie du potentiel se vérifie donc indiscutablement en considérant pourtant des développements finis.

En pratique, cependant, nous devons revoir le nombre de coefficients de Gauss à la baisse et considérer les limites de la reconstruction du champ par rapport aux développements  $P_{max}$  ou  $K_{max}$  permis par la répartition des données dans le domaine. Il nous faut, de plus, prendre en compte la région de l'espace sur laquelle le champ sera représenté et choisir la décomposition la plus précise sur cette région. Ce dernier critère nous impose pratiquement le choix de la décomposition car les fonctions de base de problème *PIV* ne permettent pas de reconstruire correctement le champ près de la surface terrestre ; or, bien naturellement, le champ magnétique terrestre y est classiquement représenté. Les solutions du problème *PIII* semblent, par conséquent, les plus adaptées mais nous garderons à l'esprit que, malgré le meilleur compromis qu'elles offrent, la surface terrestre reste l'une des régions les moins bien représentées, car elle constitue une limite géométrique du domaine de définition où divers effets de bords se superposent.

## 10.4 Accélération de la convergence à la surface terrestre

La partie 3 sera en partie dévolue à la recherche du nombre optimal de coefficients et des troncatures ( $M_{max}, P_{max}, P_{max}$ ) associées. En revanche, s'il est possible de prévoir des développements adaptés, nous ne pouvons pas mieux représenter le champ sur une surface particulière. Par conséquent, puisque nous cherchons à représenter le champ à la surface terrestre en particulier, nous devons avoir recours à des techniques d'accélération de convergence qui, seules, peuvent nous permettre mener à bien cette tâche.

### 10.4.1 La méthode de Fejer

Considérons les développements en série des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  comme une généralisation des séries de Fourier pour lesquelles certains théorèmes de convergence existent. Nous basons nos propos sur un théorème que nous devons, dans sa première formulation, à Fejer (Lanczos, 1988) :

**Théorème** Si une série infinie converge vers la somme  $s$ , alors la série est sommable par moyenne arithmétique et converge vers la même valeur de  $s$  ([110], chapitre 2, § 7.2).

Pour chacun des deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , nous sommes limités par les vitesses de convergence respectives des séries (8.8) et (8.9). Nous pouvons accélérer la convergence de ces séries en posant pour (8.8) :

$$S_{K_{\max}}(\theta) = \sum_{k=1}^{K_{\max}} \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{K_{\max}}\right)}_{Fc_k} \frac{\langle P_l^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} P_{n_k}^m(\theta) \quad (10.4)$$

et pour (8.9) :

$$S_{P_{\max}}(r) = \sum_{p=1}^{P_{\max}} \underbrace{\left(1 - \frac{p-1}{P_{\max}}\right)}_{Fc_p} \frac{\langle \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}, R_p \rangle}{\|R_p\|^2} R_p(r) \quad (10.5)$$

où les coefficients  $Fc_k$  et  $Fc_p$  sont également appelés *facteurs de convergence*. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{K_{\max} \rightarrow \infty} S_{K_{\max}}(\theta) &= P_l^m(\theta) \\ \lim_{P_{\max} \rightarrow \infty} S_{P_{\max}}(r) &= \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \end{aligned}$$

Lorsque l'on exprime les gradients des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  en termes des séries (10.4) et (10.5) plutôt que par (8.8) et (8.9), on peut atténuer en partie les phénomènes de Gibbs. Si nous utilisons le même argument dans la reconstruction du champ, les oscillations observées à la surface terrestre seront réduites. Les propriétés de cette nouvelle formulation sont illustrées sur la figure (10.22) qui l'on peut comparer aux figures (10.8) et (10.11). Sur cette figure, seule la composante  $Z$  du champ magnétique, reconstruit à partir des fonctions de base du problème *PIII*, est représentée. Sur la surface terrestre, le champ étant porté uniquement par la base de Legendre, la composante  $Z$  converge plus lentement que  $X$  ou  $Y$  ; par conséquent, le même exercice réalisé sur  $X$  et  $Y$  présente un meilleur comportement.

La figure montre que la sommation par moyenne arithmétique (10.4) filtre les hautes fréquences. Puisqu'elle pondère les harmoniques de hauts degrés  $n_k$ , ceci conduit à la diminution de l'amplitude des petites longueurs d'onde et offre une bonne contrainte de lissage. Les petites longueurs d'onde du champ magnétique sont justement perturbées par le phénomène de Gibbs ; par conséquent, cette manipulation ne représente pas une perte d'information importante. D'autre part, nous ne le montrerons pas ici mais nous remarquons, de manière empirique, que les résidus sur la calotte avant ou après accélération de la convergence sont pratiquement identiques en moyenne. Ainsi, la technique de convergence par moyenne arithmétique n'accélère pas la convergence dans toutes les régions de l'espace. Elle redistribue les résidus à l'intérieur du cône, ce que montre nettement la figure (10.22 b). La convergence par (10.4), par exemple, réduit les résidus au centre du cône mais augmente les *effets de bords* près de la surface latérale. Les mêmes propriétés sont attribuées à l'utilisation de la série par moyenne arithmétique par (10.5). Pour cette série, les résidus sur les surfaces inférieure et supérieure du cône augmentent et seul le centre de l'intervalle  $[a, b]$  en altitude bénéficie de cette technique. Pour la représentation du champ à l'altitude terrestre, l'utilisation de (10.5) n'est donc pas pertinente.

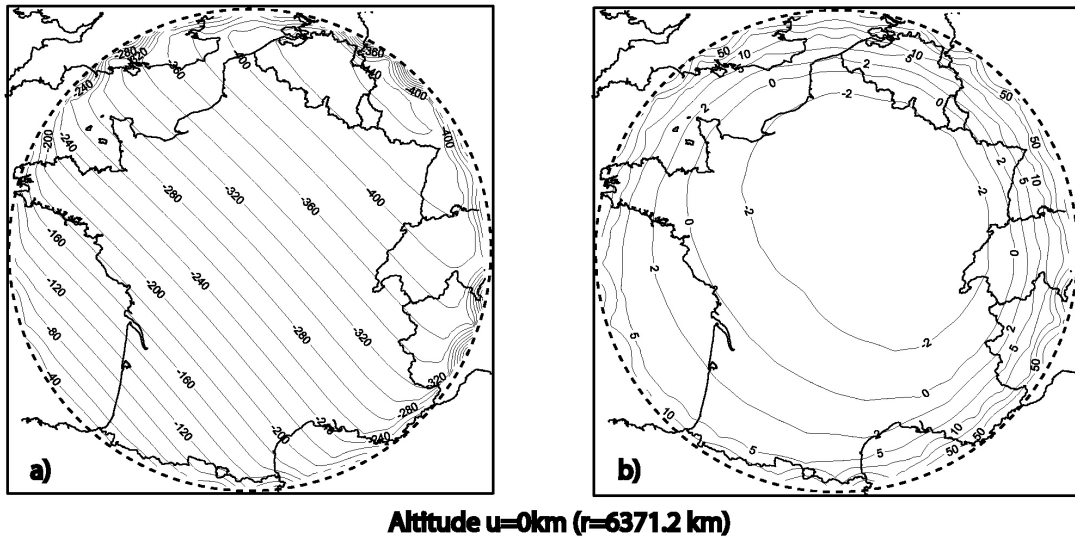


FIG. 10.22 – On accélère la convergence de la composante  $Z$  du champ reconstruit à la surface terrestre (à partir des fonctions de bases de la méthode  $P_{III}$ ) par le calcul des séries de Fejer par (10.4) et (10.5). Cela se caractérise par la disparition des oscillations au centre de la calotte et une accentuation des effets de bords (fig. a) mais provoque également un biais dans les résidus (fig. b).

L'accélération de la convergence par la méthode de Fejer permet finalement d'avoir une reconstruction du champ plus réaliste au centre du cône. Les interprétations, sur le champ ainsi calculé, seront donc moins hasardeuses ; même si l'accélération occulte une partie de l'information elle permet d'éviter de se fourvoyer dans des interprétations que pourraient suggérer les oscillations du champ, résultat du phénomène de Gibbs.

#### 10.4.2 Une méthode empirique

La méthode de Fejer provoque un biais dans les résidus et est dévolue au calcul du problème direct. Une autre méthode, qui permet d'éviter ce phénomène et d'être appliquée au problème inverse, consiste à retrancher une couronne d'ouverture angulaire  $\varepsilon$  près des bords. L'argument permettant de justifier cette pratique est simple. Si la troncature des séries est insuffisante, les points de mesures situés dans un intervalle près des bords latéraux peuvent être considérés comme des points isolés (*outliers*) en raison du phénomène de Gibbs. La méthode des harmoniques sphériques sur calotte sous forme de séries partielles ne permettra donc jamais de les résoudre précisément. Or, par analogie avec les régressions linéaires simples, un seul point isolé peut influencer de manière importante sur la détermination des paramètres si sa distance en norme par rapport au modèle est importante. Ce phénomène est intimement lié à la minimisation de la norme  $l^2$  utilisée pour la résolution du problème par moindres carrés ordinaires ([104]). Nous n'entrerons pas pour le moment dans les caractéristiques d'un problème inverse, qui sera l'objet de la prochaine partie. Nous raisonnons sur la reconstruction de la fonction de Schmidt  $P_1^0(\theta)$  par les fonctions de Legendre associées aux conditions aux limites  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$  (figure 8.2 1b).

En utilisant une discrétisation fine de la fonction  $P_1^0(\theta)$  sur l'intervalle  $[0, \theta_0 - \varepsilon]$ , on constitue



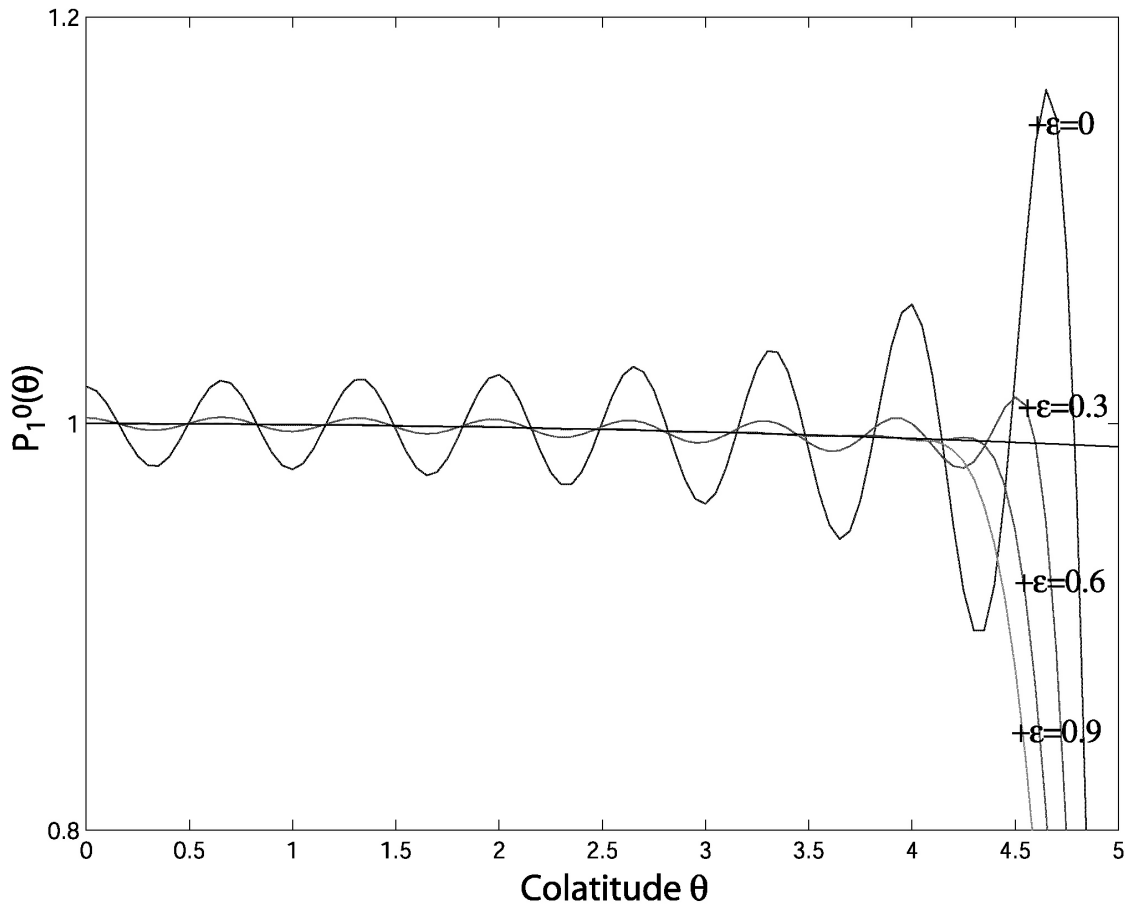


FIG. 10.23 – Par inversion d'un ensemble de valeurs de la fonction  $P_1^0$  dans l'intervalle  $[0, \theta_0 - \varepsilon]$  nous obtenons les coefficients  $c_k$  de l'expression (8.8). Retrancher une couronne d'angle  $\varepsilon$  sur les bords améliore sensiblement la résolution des données en dehors de bords.

un ensemble de données que l'on essaye de modéliser par les fonctions de Legendre généralisées d'ordre  $m = 0$  et de degrés  $n_k$ . La relation (8.8) s'écrit comme un système linéaire :

$$\underline{P}_1^0 = \mathbf{P}\underline{C}_\varepsilon \quad (10.6)$$

avec  $\underline{P}_1^0$  le vecteur des valeurs discrétisées de la fonction de Schmidt,  $\mathbf{P}$  la matrice des fonctions de Legendre généralisées et  $\underline{C}$  le vecteur des coefficients recherchés. En pratique, le vecteur des coefficients varie selon la répartition des données. *A fortiori*, en retranchant une fine couronne d'angle variable  $\varepsilon$ , l'estimation numérique de ces coefficients change, d'où la présence de l'indice  $\varepsilon$ .

En faisant varier  $\varepsilon$  entre  $0^\circ$  et  $1^\circ$ , nous trouvons les coefficients  $\underline{C}_\varepsilon$  de l'inversion par moindre carré de (10.6) à partir desquels nous recalculons les problèmes directs, que nous comparons sur la figure (10.23).

Cet artifice permet indiscutablement un gain substantiel dans la représentation des fonctions de Legendre sur l'intervalle  $\theta = [0, \theta_0 - \varepsilon]$  prouvant que le phénomène de Gibbs interfère avec la résolution des données. Remarquons de plus, que ce choix ne conduit qu'à une augmentation des résidus sur le bord de la calotte mais n'entraîne pas de biais en son centre; les fonctions

reconstruites conservent leur caractère oscillant, contrairement à celles obtenues par la méthode de Fejer.

Appliquée à l'inversion de données magnétiques, cette manipulation conduit à la dégradation du conditionnement de la matrice d'inversion. L'autre possibilité, moins brutale, consiste à appliquer un poids  $\mathbf{W}$  différent de 0 sur les données de colatitude  $\theta > \varepsilon$  (puisque ce que nous venons de réaliser consiste à associer un poids nul aux données contenues dans la couronne d'angle  $\varepsilon$ ). Cette simple manipulation conduit à un bon compromis entre l'ajustement sur les données et la stabilité de l'inversion, pour peu que nous choissions un angle  $\varepsilon$  adapté.

On pourra objecter que la valeur des coefficients  $\underline{C}_\varepsilon$  s'éloigne de plus en plus de celle des coefficients analytiques  $\underline{C}$ , à mesure que  $\varepsilon$  augmente, car les fonctions de Legendre généralisées ne sont plus orthogonales sur  $[0, \theta_0 - \varepsilon]$  pour  $\varepsilon \neq 0$ . Les coefficients  $\underline{C}$  et  $\underline{C}_\varepsilon$  ne sont plus directement comparables et nous perdons par conséquent un élément comparatif utile pour la maîtrise du problème inverse. Cela a néanmoins peu d'importance dans le cas pratique car la résolution analytique et l'inversion sont deux problèmes différents. La résolution analytique revient à minimiser l'erreur de reconstruction lorsque les développements sont infinis et l'inversion numérique cherche à minimiser l'erreur étant donné un ensemble fini de coefficients, les deux techniques ne coïncidant que lorsque les développements permettent de négliger le reste des sommes tronquées ce qui, nous le verrons, est un cas peu rencontré en pratique.



## Conclusions de la seconde partie

En analysant quatre problèmes de conditions aux limites pour la résolution de l'équation de Laplace dans un cône fini, nous avons été en mesure de construire des bases de fonctions adaptées à la reconstruction d'un champ magnétique dans une région délimitée par le domaine  $\Omega$ . L'utilisation de conditions aux limites, sur tous les bords du domaine  $\Omega$ , nous a ensuite permis de trouver des relations analytiques entre les coefficients de Gauss du développement en harmoniques sphériques sur la sphère entière et les coefficients de Gauss du développement dans un cône fini.

Bien que trois des quatre problèmes soient formellement équivalents, la convergence de leurs solutions et leur capacité de représentation d'un champ magnétique sont intimement liées aux conditions aux limites choisies (Nous considérons le problème *PI* comme étant particulier du fait de la difficulté soulevée par la représentation des termes zonaux d'un champ). Cette première considération nous conduit à analyser le phénomène de Gibbs et à définir les régions où il intervient majoritairement. En raison de la distribution des données magnétiques terrestres, et puisque nous voulons représenter ce champ à la surface du globe, nous devons exclure les problèmes qui ne convergent pas rapidement sur cette surface. Cette condition draconienne ne sélectionne qu'une seule décomposition parmi les quatre de départ : la décomposition *PIII*. Il est intéressant de constater que la représentation du champ magnétique dans le cône par cette décomposition montre une parfaite cohérence avec les détails procurés par l'analyse des convergences. Il n'en reste pas moins que la reconstruction du champ dans le cône a montré, après comparaison avec le champ initial, des valeurs de résidus importants étant donné le développement des séries utilisées. Ce point, qui a première vue est sans issue, sera cependant levé par un examen attentif des contributions respectives de chaque indice du développement sur la reconstruction. Il deviendra vite évident que les développements et le choix des indices ne pourront pas être irréflechis, sous peine de rechercher des coefficients de Gauss de contributions négligeables et d'ignorer des coefficients de Gauss importants pour la reconstruction. Ces différents aspects pourront être discutés d'un point de vue énergétique et nous pourrons alors déterminer les meilleurs développements possibles, ainsi que l'estimation de l'erreur de reconstruction engendrée par le choix des indices de troncatures. Gardons cependant à l'esprit que le problème inverse et le problème direct sont deux procédés distincts. Ainsi, même si le problème direct semble converger lentement, absolument rien ne nous permet d'affirmer que le problème inverse ne pourra pas trouver des coefficients qui s'ajustent bien au champ magnétique, même dans le cas de troncatures sévères.



## Troisième partie

# Informations *a priori* et problèmes inverses



# Introduction

Les fonctions de base vues dans la partie précédente permettent de modéliser un champ de potentiel par l'intermédiaire de développements en séries. Jusqu'à présent, nous n'avons pas quantifié systématiquement l'erreur que nous faisons lorsque nous tronquons les séries ; nous n'avons pu la déduire que sur des exemples synthétiques particuliers. Pour pouvoir estimer ces erreurs plus précisément, nous ne pouvons plus nous contenter de la simple comparaison des valeurs du champ sur une grille de points car nous ne savons pas dans quelle mesure cette estimation concorde avec l'erreur réelle sur une grille finement interpolée. Ce travail serait de plus coûteux puisqu'il nécessite le calcul systématique du champ à des troncatures, chaque fois différentes, qu'il faut comparer au champ initial pour une myriade de distributions de points. Une façon de procéder est de passer au cas continu et de considérer la norme du champ dans le domaine d'étude. Ce domaine pourra être associé soit au volume conique, soit à une surface particulière dans le cône.

Dans un premier temps, il s'agira de formuler les normes de volume et de surface pour chacun des formalismes, celui des harmoniques sphériques ordinaires et celui des harmoniques sphériques dans le cône. Nous nous reportons chaque fois que cela est possible aux expressions bien connues en harmoniques sphériques pour valider nos expressions analytiques.

Dans un second temps, nous nous appuyons sur un exemple synthétique et un modèle de champ pour en déduire la distribution d'énergie dans un cône. La distribution d'énergie nous permet ensuite d'estimer l'erreur occasionnée par les troncatures. Ces informations seront particulièrement utiles dans l'optique d'un problème inverse et permettront d'estimer la résolution théorique du champ à laquelle nous pouvons prétendre pour un développement donné de la base locale.

Dans un troisième temps, nous discutons de l'utilité des normes pour la régularisation du problème inverse. En effet, la modélisation requiert une bonne adéquation entre le développement maximum des séries et la distance moyenne d'échantillonnage des données. En pratique, les données sont mal réparties, et le mauvais conditionnement de la matrice à inverser provoque généralement un phénomène d'aliasing. L'ajout d'une contrainte supplémentaire sur les coefficients se révèle parfois indispensable. Pour définir cette contrainte, on ajoute communément un critère de lissage dans l'inversion qui est défini le plus souvent par la minimisation de la norme du champ ([111]). A partir des expressions de la norme du champ dans le volume, ou sur chacune des surfaces, nous sommes amenés à redéfinir des normes plus compatibles avec un objectif de lissage et, par conséquent, mieux adaptées au problème inverse dans un cône fini.

Enfin, dans un quatrième temps, nous exploitons l'ensemble de ces informations pour inverser des données synthétiques diversement réparties. Si, dans le cas uniforme, nous pouvons reconstruire le champ dans tout le volume sans difficulté, dans le cas d'une répartition réelle de données nous devons faire appel à des techniques de régularisation. Nous montrons cependant que le champ modélisé est stable, interpolable dans tout le domaine et précis, malgré des conditions très défavorables.





# Chapitre 11

## Normes du champ magnétique

### 11.1 Norme du champ magnétique exprimé en harmoniques globales (SH)

Cherchons la norme dans le volume conique afin de pouvoir estimer l'énergie magnétique dans le cône associée à un champ global. Cette expression nous permettra de mettre en lumière différents aspects concernant la convergence des solutions, l'énergie associée à  $m$  quelconque ainsi qu'un outil robuste de vérification de son équivalent exprimé sur la base locale.

#### 11.1.1 Expression de la norme volumique

Nous avons défini notre domaine conique comme suit :

$$\Omega = \{0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq r \leq b\} \quad (11.1)$$

Reprenons la première identité de Green (6.11b) utilisée lors du calcul du produit scalaire entre les gradients des potentiels  $V_1$  et  $V_2$ . Alors, en raison de  $\Delta V = 0$ , on trouve que l'énergie du champ magnétique s'écrit :

$$E_{\Omega}^g = \int_{\Omega} \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{\nabla V} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_{\partial\Omega}} \quad (11.2)$$

En toute rigueur, l'appellation d'énergie est incorrecte puisque l'énergie est reliée au produit scalaire (11.2) par un facteur  $1/(2\mu)$  où  $\mu$  est la perméabilité du milieu dans lequel baigne le champ magnétique ([59]).

L'énergie est donc calculée sur la surface fermée qui entoure  $\Omega$ , soit explicitement :

$$E_{\Omega}^g = \underbrace{\int_{\partial\Omega_a} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_a}}_{I_a} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_b} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_b}}_{I_b} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_{\theta_0}} V \overrightarrow{\nabla V} \cdot \overrightarrow{ds_{\theta_0}}}_{I_{\theta}} \quad (11.3)$$

De plus, comme le potentiel magnétique global d'origine interne s'exprime en harmoniques sphériques exprimées dans le référentiel du cône par :

$$\tilde{V}_g = a \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \left( \tilde{g}_n^m \cos(m\varphi) + \tilde{h}_n^m \sin(m\varphi) \right) P_n^m(\theta)$$

on montre aisément, en utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions  $\cos(m\varphi)$  et  $\sin(m\varphi)$  ainsi que l'expression des éléments de surface (figure 6.2), que :

$$I_a + I_b = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (n+1) \left( \tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{n+l+1} \right) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} \quad (11.4)$$

où  $\delta_{m,0}$  le delta de Kroenecker tel que :

$$\delta_{m,0} = 0, m \neq 0 \quad (11.5)$$

$$= 1, m = 0 \quad (11.6)$$

Le calcul de  $I_\theta$  est tout aussi simple et on montre que :

$$I_\theta = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{n+l+1} \right) \frac{\sin \theta_0}{n+l+1} P_n^m)_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (11.7)$$

Finalement, l'énergie  $E_\Omega^g$  contenue dans le volume  $\Omega$  exprimée à partir des harmoniques globales s'écrit :

$$E_\Omega^g = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{n+l+1} \right) \left\{ (n+1) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} + \frac{\sin \theta_0}{n+l+1} P_n^m)_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \right\} \quad (11.8)$$

L'expression de cette norme montre que l'on ne peut définir commodément qu'un spectre d'énergie en fonction de l'ordre  $m$ , en raison de la non-orthogonalité des fonctions de Schmidt  $P_l^m$  sur l'intervalle  $\theta = [0, \pi[$ . Cette propriété fâcheuse nous indique que le spectre d'énergie n'est pas invariant par rotation mais qu'il dépend de la localisation du cône sur la sphère. Nous verrons plus loin que nous pourrions cependant exploiter ce spectre pour en déduire des propriétés importantes sur le développement des séries de la base locale en remarquant que chaque série devra être adaptée à l'emplacement géographique du centre du cône sur la sphère.

### Remarque

On pourra vérifier que pour  $\theta \in [0, \pi]$ , cas limite où la calotte devient sphère, et pour des fonctions normées au sens de Schmidt on trouve :

$$E_\Omega^g = \sum_{m=0}^{\infty} 4\pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} \left( \tilde{g}_n^{m2} + \tilde{h}_n^{m2} \right) \left( 1 - \left( \frac{a}{b} \right)^{2n+1} \right) \frac{n+1}{2n+1}$$

L'énergie contenue dans une coquille sphérique peut être vue comme la différence entre les énergies contenues respectivement dans deux espaces infinis, l'un privé d'une boule de rayon  $r = a$ , l'autre d'une boule de rayon  $r = b$ . Soit :

$$E_\Omega = E_{\Omega(r \geq a)} - E_{\Omega(r \geq b)}$$

On retrouve donc bien l'expression de l'énergie dans un espace infini privé d'une boule de rayon quelconque  $r = \beta$  :

$$E_{\Omega(r \geq \beta)}^g = \sum_{m=0}^{\infty} 4\pi a^3 \sum_{n=m}^{\infty} (\tilde{g}_n^{m2} + \tilde{h}_n^{m2}) \left(\frac{a}{\beta}\right)^{2n+1} \frac{n+1}{2n+1}$$

au facteur  $1/2\mu$  près ([59], Volume I, Chapitre 4).

### 11.1.2 Expression de la norme surfacique

On se donne maintenant un domaine défini par :

$$\partial\Omega_\beta = \{0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, r = \beta\} \quad (11.9)$$

avec  $\beta$  une altitude quelconque. La norme du champ magnétique sur le domaine peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{\nabla_s V} ds_\beta + \underbrace{\int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_r V} \cdot \overrightarrow{\nabla_r V} ds_\beta}_{I_r} \quad (11.10)$$

correspondant respectivement aux composantes horizontales et verticales du champ. On peut étendre la première identité de Green au cas surfacique ([64]). On trouve :

$$\int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{\nabla_s V} d\Omega = \underbrace{\oint_c V \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{dc}}_{I_c} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_\beta} V \Delta_H V ds_\beta}_{I_s} \quad (11.11)$$

où  $\overrightarrow{\nabla_s}$  et  $\Delta_H$  représentent respectivement les opérateurs horizontaux pour le gradient et pour le Laplacien. Dans le cas surfacique, nous n'avons pas la propriété  $\Delta_H = 0$  et ce terme doit être calculé. On trouvera explicités les éléments de surface et de contour sur la figure (6.2). On obtient :

$$\int_{\partial\Omega_\beta} \overrightarrow{\nabla_s V} \cdot \overrightarrow{\nabla_s V} d\Omega = \sin \theta_0 \int_0^{2\pi} V(\beta, \theta_0) \frac{\partial V(\beta, \theta_0)}{\partial \theta} d\varphi + \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} V(\beta) L^2 V(\beta) \sin \theta d\varphi d\theta$$

où  $L$  est l'opérateur de moment angulaire défini par :

$$L^2 = - \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

et relié au Laplacien horizontal par  $\Delta_H = -L^2/r^2$  avec ici,  $r^2 = \beta^2$ .

Rappelons que les fonctions de Legendre  $P_n^m$  sont vecteurs propres de l'opérateur  $L_m$  associées à la valeur propre  $n(n+1)$  :

$$L_m P = n(n+1)P$$

avec  $n$  les degrés réels des fonctions de Legendre. L'application de  $L^2$  sur  $P_n^m$  a les mêmes propriétés, donc :

$$L^2 P_n^m = n(n+1)P_n^m$$

La conséquence est immédiate pour le calcul de  $I_s$  et on trouve :

$$I_s = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi a^2 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{a}{\beta}\right)^{n+l+2} \left(\tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m\right) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} \quad (11.12)$$

et pour  $I_r + I_c$ , un calcul élémentaire montre que :

$$I_r + I_c = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi a^2 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{\beta}\right)^{n+l+2} \left(\tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m\right) \left\{ (n+1)(l+1) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} + \sin \theta_0 P_n^m \right\}_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (11.13)$$

D'après (11.10) et (11.11),  $E_{\partial\Omega_\beta}^g = I_s + I_r + I_c$ . On trouve finalement l'expression de la norme :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi a^2 \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \left(\frac{a}{\beta}\right)^{n+l+2} \left(\tilde{g}_n^m \tilde{g}_l^m + \tilde{h}_n^m \tilde{h}_l^m\right) \left\{ (n+1)(l+n+1) \langle P_n^m, P_l^m \rangle_{\theta_0} + \sin \theta_0 P_n^m \right\}_{\theta_0} \frac{dP_l^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \quad (11.14)$$

### Remarques

1. Le cas particulier où  $\beta = a$  et  $\theta_0 = \pi$ , moyenné par la surface de la sphère de rayon  $r = a$ , conduit immédiatement à :

$$E_{\partial\Omega_a}^g = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \text{ avec, } R_n = \sum_{m=0}^n (n+1) \left(\tilde{g}_n^{m2} + \tilde{h}_n^{m2}\right)$$

et nous retrouvons la formule du spectre du champ global associé à chaque degré  $n$  bien connu en harmoniques sphériques ordinaires ([75], [76]).

2. On vérifie sans peine, numériquement, qu'à une altitude  $\beta$  donnée on retrouve avec une bonne précision à partir de (11.8) l'expression de la norme  $E_{\partial\Omega_\beta}^g$  par différence finie :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_{\Omega(r=\beta+\varepsilon/2)} - E_{\Omega(r=\beta-\varepsilon/2)}}{\varepsilon}$$

## 11.2 Normes du champ magnétique en harmoniques locales (SCHA)

Le principe est sensiblement équivalent dans la décomposition en harmoniques sphériques sur calotte. On peut distinguer les deux même cas que pour la décomposition en harmoniques sphériques, c'est-à-dire, la définition d'une norme volumique dans  $\Omega$  d'une part, et la définition d'une norme surfacique dans  $\partial\Omega_\beta$  d'autre part. Il est cependant légitime de remarquer qu'il existe deux types de normes de surface sur le cône. L'une sur la surface  $r = \beta$ , l'autre en  $\theta = \theta_0$ . Nous avons volontairement omis la norme de surface du domaine  $\partial\Omega_{\theta_0}$  étant donné qu'il n'existe pas, à notre connaissance, d'opérateur de surface latérale de type  $L^2$  que nous avons défini plus haut ayant des propriétés conduisant à simplifier les expressions. Le développement d'une telle norme s'avère donc mal aisé à trouver, et nous verrons que l'intérêt que nous pourrions y trouver est, somme toute, très limité. Cette lacune sera en partie comblée par la définition d'une norme sur la surface  $\partial\Omega_{\theta_0}$  dans la section 13.2 du présent chapitre dont la signification ne sera plus simplement liée à l'énergie, mais qui sera utile dans des problèmes de régularisation.

### 11.2.1 Expression de la norme volumique

Prenons l'expression de la norme calculée dans le volume par (11.3). Dans le cas du développement en harmoniques locales, on a en particulier :

$$V = V_1 + V_2$$

avec  $V_1$  le potentiel exprimé avec les fonctions de base de Mehler et  $V_2$  le potentiel exprimé avec les fonctions de base de Legendre.

On cherche donc à calculer :

$$E_\Omega^l = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (V_1 + V_2) \vec{\nabla} (V_1 + V_2) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (V_1 + V_2) \vec{\nabla} (V_1 + V_2) \cdot \overrightarrow{ds_{\partial\Omega}}$$

De plus, nous avons retenu pour ces discussions après les discussion du chapitre 10 uniquement la solution du problème *PIII* dont les conditions aux limites homogènes sont :

$$\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right)_{r=a, r=b} = 0 \quad \text{et} \quad V_2|_{\theta=\theta_0} = 0$$

Alors les intégrandes de  $I_a$ ,  $I_b$  et  $I_\theta$  dans (11.3) deviennent respectivement :

$$(V_1 + V_2)_{a,b} \left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right)_{a,b} \quad \text{pour } I_a \text{ et } I_b$$

$$\text{et } V_1|_{\theta_0} \left. \frac{\partial (V_1 + V_2)}{r \partial \theta} \right)_{\theta_0} \quad \text{pour } I_\theta$$

Et on montre, après un calcul similaire à celui du paragraphe 11.1.1, que (voir la première remarque qui suit) :

$$\begin{aligned}
E_{\Omega}^l = & \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi \left\{ a^2 \sin \theta_0 \sum_{p=0}^{\infty} (G_p^{m2} + H_p^{m2}) K_p^m(\theta_0) \frac{dK_p^m}{d\theta} \right\}_{\theta_0} \|R_p\|^2 \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{G}_{n_k}^{m2} \left( b^2 R_{n_k}^{m,c}(b) \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \right)_b - a^2 R_{n_k}^{m,c}(a) \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_a \|P_{n_k}^m\|^2 \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{H}_{n_k}^{m2} \left( b^2 R_{n_k}^{m,s}(b) \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \right)_b - a^2 R_{n_k}^{m,s}(a) \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_a \|P_{n_k}^m\|^2 \Big\}
\end{aligned}$$

où nous avons écrit le potentiel  $V_2$  sous sa forme compacte pour plus de commodité. Nous revenons à l'expression en fonction des coefficients de Gauss «internes»  $\{G_{n_k}^{i,m}, H_{n_k}^{i,m}\}$  et «externes»  $\{G_{n_k}^{e,m}, H_{n_k}^{e,m}\}$  en utilisant les définitions (1.22) et (1.23) en  $r = a$  et  $r = b$ . On trouve que la norme en harmoniques locales s'exprime par :

$$\begin{aligned}
E_{\Omega}^l = & \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^2 \left\{ \sin \theta_0 \sum_{p=0}^{\infty} (G_p^{m2} + H_p^{m2}) K_p^m(\theta_0) \frac{dK_p^m}{d\theta} \right\}_{\theta_0} \|R_p\|^2 \quad (11.15) \\
& + a^3 \sum_{k=0}^{\infty} (n_k + 1) \left( 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n_k+1} \right) (G_{n_k}^{i,m2} + H_{n_k}^{i,m2}) \|P_{n_k}^m\|^2 \\
& + a^3 \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left( \left(\frac{b}{a}\right)^{2n_k+1} - 1 \right) (G_{n_k}^{e,m2} + H_{n_k}^{e,m2}) \|P_{n_k}^m\|^2 \Big\}
\end{aligned}$$

### Remarques

1. L'absence de termes croisés entre les deux ensembles de bases de fonctions traduit bien évidemment les propriétés d'orthogonalité des gradients qui motiva en partie le choix de la décomposition PIII. En effet, nous aurions pu écrire :

$$\langle \vec{\nabla} V, \vec{\nabla} V \rangle_{\Omega} = \langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_1 \rangle_{\Omega} + \langle \vec{\nabla} V_2, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{\Omega} + 2 \langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{\Omega}$$

mais comme par construction  $\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \rangle_{\Omega} = 0$ , la norme se réduit à :

$$\|\vec{\nabla} V\|_{\Omega}^2 = \|\vec{\nabla} V_1\|_{\Omega}^2 + \|\vec{\nabla} V_2\|_{\Omega}^2$$

qui entraîne immédiatement le résultat (11.15).

2. Nous avons mélangé dans la première somme deux ensembles de solutions correspondant à des valeurs propres différentes. Il faudra interpréter ce terme de manière suivante :

$$\begin{aligned}
p = 0, K_p^m & \equiv P_0^m \text{ et } R_0 = \text{Cste} \text{ correspondant à la valeur propre } k = 0 \\
\text{et } p \neq 0, K_p^m & \text{ et } R_p(r) \text{ correspondant aux valeurs propres } k < -1/4
\end{aligned}$$

De plus, dans cette écriture, la norme des fonctions radiales  $\|R_p\|^2 = a$ , donc la dimension de la norme  $[E_{\Omega}^g] = [L]^3 [nT]^2$  est bien respectée.

### 11.2.2 Expression de la norme surfacique

On cherche l'expression de la norme de surface locale  $E_{\partial\Omega_\beta}^l$  définie comme :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^g = \int_{\partial\Omega_\beta} \vec{\nabla}_s (V_1 + V_2) \cdot \vec{\nabla}_s (V_1 + V_2) ds_\beta + \int_{\partial\Omega_\beta} \vec{\nabla}_r (V_1 + V_2) \cdot \vec{\nabla}_r (V_1 + V_2) ds_\beta$$

La norme de surface du champ magnétique exprimée dans la base locale se déduit de (11.10) après le calcul intermédiaire de (11.11). Etant donné la similitude de cette procédure avec celle décrite au paragraphe 11.1.2, nous passerons sous silence les différentes étapes de calcul pour nous concentrer sur le résultat final de l'énergie de surface à n'importe quelle altitude  $\beta$ , avec  $a \leq \beta \leq b$ . Un long calcul montre que :

$$\begin{aligned} E_{\partial\Omega_\beta}^l &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a^2 \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} R_p(\beta) R_{p'}(\beta) (G_p^m G_{p'}^m + H_p^m H_{p'}^m) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sin \theta_0 K_p^m(\theta_0) \frac{dK_{p'}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} + \lambda_p \langle K_p^m, K_{p'}^m \rangle \right) + T_1(\beta) \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Résultat du produit scalaire entre les bases de Mehler}} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi a \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} R_p(\beta) \left( G_p^m \widehat{G}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,c}(\beta) + H_p^m \widehat{H}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,s}(\beta) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \theta_0 K_p^m(\theta_0) \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \Big|_{\theta_0} \frac{\lambda_p}{(\lambda_p - \lambda_k)} + T_2(\beta) \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Résultat du produit scalaire entre les bases de Legendre et de Mehler}} \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left( \left( \widehat{G}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,c}(\beta) \right)^2 + \left( \widehat{H}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,s}(\beta) \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left( \widehat{G}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 + \left( \widehat{H}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Résultat du produit scalaire entre les bases de Legendre}} \end{aligned} \quad (11.16)$$

Nous avons voulu distinguer les termes  $T_1(\beta)$  et  $T_2(\beta)$  qui sont non nuls, en vertu des conditions aux limites, uniquement sur une surface d'altitude autre que  $\beta = a$  ou  $\beta = b$ . On donne, de manière explicite :

$$\begin{aligned} T_1(\beta) &= \beta^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{dR_p}{dr} \Big|_{\beta} \frac{dR_{p'}}{dr} \Big|_{\beta} (G_p^m G_{p'}^m + H_p^m H_{p'}^m) \langle K_p^m, K_{p'}^m \rangle \\ T_2(\beta) &= \beta^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dR_p}{dr} \Big|_{\beta} \left( G_p^m \widetilde{G}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta} + H_p^m \widetilde{H}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_{\beta} \right) \langle P_{n_k}^m, K_p^m \rangle \end{aligned}$$

Ici encore, le potentiel de la base de Legendre est écrit sous sa forme synthétique. Les notations  $\lambda_p$  et  $\lambda_k$  sont données respectivement pour les valeurs propres associées aux fonctions de base de Mehler et aux fonctions de base de Legendre.



Sur une surface  $r = \beta$  donnée, les seules fonctions de bases orthogonales sont les fonctions de Legendre. En revanche, la base de Mehler n'ayant aucune propriété d'orthogonalité, on trouve des termes croisés aussi bien entre les coefficients de Mehler qu'entre les coefficients de Legendre et les coefficients de Legendre. En effet :

$$E_{\partial\Omega_\beta}^l = \left\| \vec{\nabla} V_1 + \vec{\nabla} V_2 \right\|_{\partial\Omega_a}^2 = \left\| \vec{\nabla} V_1 \right\|_{\partial\Omega_a}^2 + \left\| \vec{\nabla} V_2 \right\|_{\partial\Omega_a}^2 + 2 \left\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \right\rangle_{\partial\Omega_a} \quad (11.17)$$

mais sur la surface, on a cette fois-ci :

$$\left\langle \vec{\nabla} V_1, \vec{\nabla} V_2 \right\rangle_{\partial\Omega_a} \neq 0$$

Nous voyons donc clairement que la définition de la norme surfacique telle qu'elle est donnée par (11.16) est fort peu pratique, bien qu'elle soit la norme du champ magnétique au sens strict du terme sur la surface  $r = \beta$ . Nous nous proposerons donc de n'utiliser qu'une partie de cette norme lors de l'utilisation d'une inversion avec régularisation. Par analogie, nous en déduisons d'autre part que la détermination de l'énergie de surface sur la surface latérale  $\partial\Omega_{\theta_0}$  conduit à une expression contenant aussi bien des termes croisés entre les fonctions de Legendre entre-elles, qu'entre les fonctions de Legendre et de Mehler. Par conséquent, cette norme n'est pas non plus utilisable pour la régularisation d'un problème inverse.

### Remarque

*De même que précédemment, nous avons mélangé les ensembles de valeurs propres de la base de Mehler dans l'indexation pour alléger les expressions.*

## Chapitre 12

# Etudes numériques des normes

En introduction de cette partie, nous avons annoncé le cadre dans lequel nous comptions utiliser les expressions des normes de volume et de surface. L'exploitation de ces différentes expressions donne quelques informations précieuses sur la convergence du développement local vers son homologue global, ainsi que la correspondance entre les résidus réels et les degrés de troncature. Ces informations se révéleront indispensables pour le choix des différents degrés  $P_{max}$  et  $K_{max}$  des développements et pour un diagnostic de la résolution du champ la plus fine à laquelle nous pourrions prétendre.

Dans le chapitre sur les convergences, nous avons formulé les relations linéaires existantes entre le développement dans le cône et le développement sur la sphère. Pour les besoins de la discussion, nous avons utilisé des développements importants de manière à entrevoir le comportement des reconstructions en fonction de la troncature des séries et à bien vérifier les théorèmes fondamentaux de la théorie du potentiel. Bien entendu, pour la recherche d'un modèle à partir d'un ensemble de données plus ou moins bien réparties dans le domaine, nous ne pouvons plus être aussi dispendieux car notre développement est naturellement limité par le nombre de données et leur répartition. Nous devons donc chercher à faire l'économie des paramètres dont la somme des contributions est négligeable et qui ne modélisent finalement rien d'autre que du bruit. Ceci se caractérise par l'investigation des paramètres les plus significatifs et l'adaptation du développement des séries de manière à incorporer les coefficients associés au maximum d'énergie contenu dans le spectre défini à chaque  $m$ .

### 12.1 Etude du spectre en harmoniques globales : ordres $m$ significatifs

Nous avons vu, de manière formelle (au paragraphe 11.1.1) que pour une région limitée sur la sphère, le spectre d'énergie ne pouvait être défini qu'en fonction de  $m$  et dépendait de la région centrée sur la calotte. Observons cette distribution d'énergie pour un cône d'ouverture angulaire  $\theta_0 = 5^\circ$  de centre  $C(\theta, \varphi)$  variable sur la sphère. L'altitude maximale que nous retenons est compatible avec l'altitude des données MAGSAT et CHAMP ; on pose par conséquent  $b = a + 500km$ .

Etant donné les discussions sur les convergences et la reconstruction du champ, nous travaillons avec des coefficients de Gauss globaux d'un modèle résiduel du type *CAIN1960* moins *DGRF1960* pour simuler un *detrending* tel qu'on l'encourage en modélisation régionale ([16]). Nous pouvons ensuite appliquer l'expression (11.8) et en déduire l'énergie associée à chaque ordre  $m$ . En particulier, nous avons tracé l'énergie magnétique contenue dans un cône centré sur

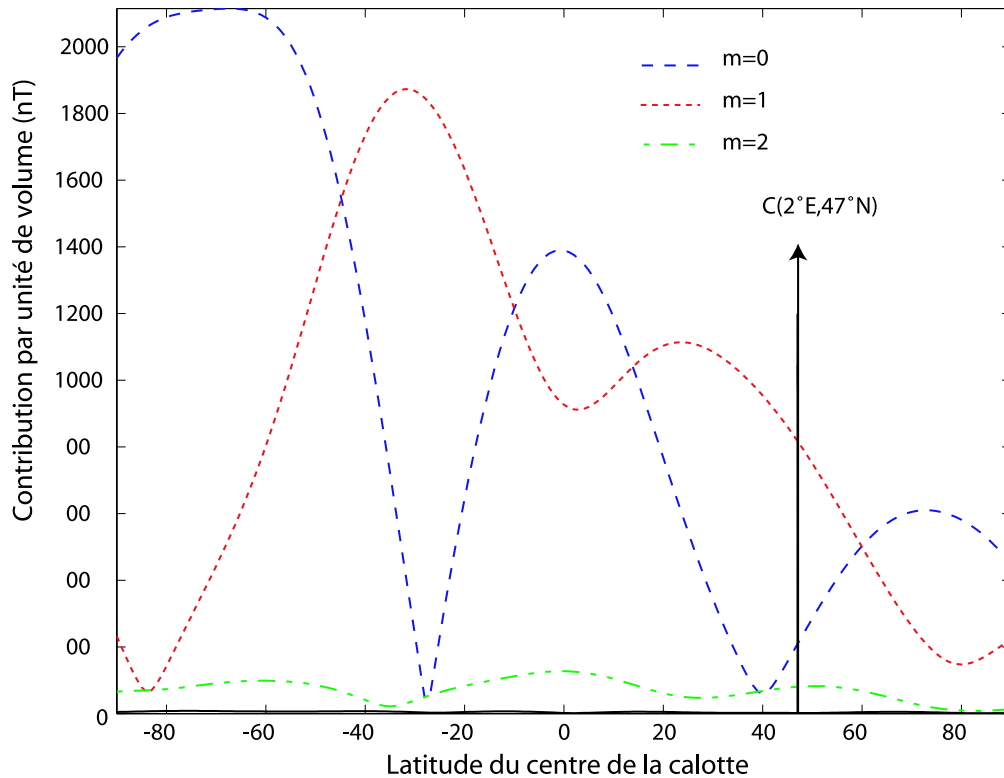


FIG. 12.1 – L'énergie magnétique dans un cône associée à chaque ordre  $m$  varie avec la latitude. La figure montre ces variations dans un cône centré sur le méridien de Paris mais de latitude variable. En règle générale, pour les zones de moyennes latitudes, l'ordre  $m = 1$  domine les autres ; en particulier l'ordre  $m = 0$ .

le méridien de Paris ( $\varphi = 2^\circ E$ ) de latitude variable.

La figure (12.1) montre très nettement que pour ce modèle résiduel, les ordres  $m = 1$  contiennent plus d'énergie que les ordres  $m = 0$  pour les zones de moyennes latitudes sur le méridien de Paris.

En particulier, sur le cône centré sur la France soit, dans le repère géocentrique, en  $C = (\theta' = 47^\circ, \varphi' = 2^\circ)$ , ayant comme propriétés :

$$\Omega = \{0 \leq \theta \leq 5^\circ, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 6371.2 \leq r \leq 6871.2\}$$

nous trouvons (figure 12.2) l'histogramme des distributions d'énergie en pourcentage de l'énergie totale ; on a également tracé à titre indicatif la répartition de l'énergie pour un modèle de champ global *DGRF*1990. Cette dernière répartition est à peu près similaire pour tous les modèle *DGRF* de 1960 à nos jours étant donné la lente dérive du champ magnétique terrestre sur cette courte période.

Une remarque immédiate est que la répartition de l'énergie, associée à chaque ordre  $m$ , est très hétérogène et est essentiellement concentrée sur les ordres  $m = 0$  et  $m = 1$  (en particulier, pour la modélisation du champ résiduel, l'ordre  $m = 1$  contribue pour 92% du champ). Il est donc légitime, dans la représentation sur la base locale, d'adapter les troncatures à l'énergie estimée à chaque ordre  $m$  de manière à prévoir un développement adapté et optimum. En regard des reconstructions réalisées dans la section 10.2 de la partie 2, on comprend que dans les

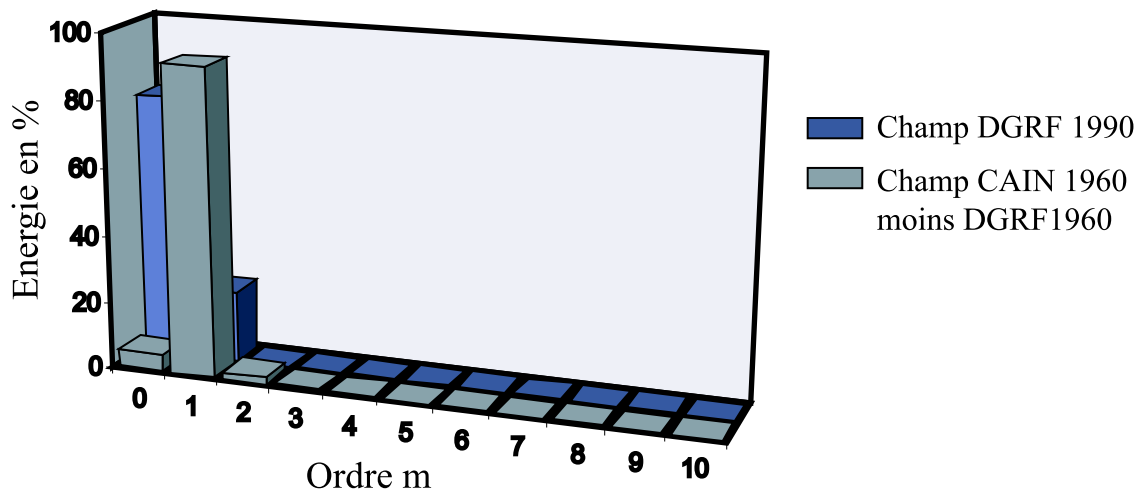


FIG. 12.2 – Spectre d’énergie associé à chaque ordre  $m$  du développement en harmoniques sphériques pour deux types de champs globaux. L’un est le modèle *DGRF*1990, l’autre le modèle résiduel de la différence entre une modèle de Cain (1960) et un modèle *DGRF* de la même année. On remarque que la répartition de l’énergie d’un champ global dans un cône centré sur la France se concentre essentiellement sur les ordre  $m = 0$  et  $m = 1$ .

développements où nous avons utilisé des séries tronquées à  $K_{max} = P_{max} = 30$ , bon nombre de coefficients modélisent des contributions du champ négligeables, alors que certains coefficients (portés par les ordres d’énergie importante) ayant une contribution significative d’un point de vue énergétique, ont été arbitrairement omis. Avec un choix de troncature plus conforme, en fonction de  $m$ , avec la répartition d’énergie, il est possible de reconstruire le champ avec une même précision mais bien moins de coefficients de Gauss.

Dans un cas réel où nous retranchons un modèle de champ aux données mesurées, nous ne sommes pas en mesure d’estimer véritablement la répartition en énergie de ce que nous cherchons à modéliser, car le reste de la différence entre un modèle et les données dépend avant tout de la façon dont les données sont approchées par le modèle que l’on retranche. Or, on sait qu’un modèle global coïncide avec les données d’une manière géographiquement variable. Quoi qu’il en soit, même dans ce cas, il est évident qu’il faudra adapter les développements à chaque ordre  $m$ . Ceci démontre que la recherche d’un modèle qui inclut des développements décroissants en fonction de  $m$ , comme on peut les trouver dans les inversions par *SCHA* selon Haines, n’a, pour cette raison, pas de justification.

## 12.2 Développement des séries et résidu volumique total

Après avoir commenté la répartition de l’énergie d’un champ, il convient d’examiner l’influence des troncatures  $P_{max}$  ou  $K_{max}$  en reconstruisant ce champ par les développements en série tronqués. En effet, puisque nous sommes en présence de deux séries, il est nécessaire d’examiner les contributions de chaque terme du potentiel pour voir si l’on peut faire l’économie de certains paramètres dont les contributions, ici encore, seront considérées comme négligeables.

### 12.2.1 Expression du résidu dans le volume

En vertu de l'orthogonalité des gradients dans le volume nous pouvons en effet déterminer un spectre d'énergie à chaque  $m$  à partir de la norme volumique du champ exprimée dans la base locale. On a :

$$\lim_{P_{\max}, K_{\max} \rightarrow \infty} E_{\Omega}^{m,l}(P_{\max}, K_{\max}) = E_{\Omega}^{m,g}$$

avec  $l$  et  $g$  les abréviations respectives pour base locale et base globale.

L'étude de la convergence en norme est très liée à la définition du spectre d'énergie dans la modélisation régionale. On peut directement comparer les deux expressions des spectres dans le cône et en déduire les résidus en associés.

En effet, la norme du développement local peut s'écrire de la manière suivante :

$$\left\| \vec{\nabla}(V_1 + V_2) \right\|_{\Omega}^2 = \left\| \vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) + \vec{R}^{\infty} \right\|_{\Omega}^2$$

c'est-à-dire comme une somme partielle limitée aux développements  $P_{\max}$  et  $K_{\max}$  des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  et le reste de la somme  $R_N^{\infty}$  correspondant à l'effet de troncature.  $\vec{R}^{\infty}$  est la projection de  $\vec{\nabla}(V_1 + V_2)$  sur le sous-espace vectoriel orthogonal au sous-espace vectoriel fermé engendré par les bases de fonctions limitées à  $P_{\max}$  et  $K_{\max}$ .  $\vec{R}^{\infty}$  et  $\vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max}))$  sont donc orthogonaux. D'où :

$$\left\| \vec{R}^{\infty} \right\|_{\Omega}^2 = \left\| \vec{\nabla}(V_1 + V_2) \right\|_{\Omega}^2 - \left\| \vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2$$

Soit :

$$\left\| \vec{R}^{\infty} \right\|_{\Omega}^2 = \left\| \vec{\nabla}V_g \right\|_{\Omega}^2 - \left\| \vec{\nabla}(V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2$$

où  $\left\| \vec{\nabla}V_g \right\|_{\Omega}^2$  est maintenant la norme du champ globale obtenue par (11.8) puisque dans le cas d'un développement infini, les deux normes calculées à partir des développements locaux ou globaux sont égales. Ainsi, pour chaque ordre  $m$ , on trouve :

$$\boxed{(\overline{R}^{m,\infty})^2 = \frac{\left\| \vec{\nabla}V_g^m \right\|_{\Omega}^2 - \left\| \vec{\nabla}(V_1^m(P_{\max}) + V_2^m(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2}{V_{\Omega}}} \quad (12.1)$$

où l'on désigne par  $\overline{R}^{m,\infty}$ , le résidu volumique dû à la troncature, pondéré par  $V_{\Omega}$ , le volume du cône.

Dans la représentation par les fonctions de base locales, l'effet de la troncature des séries induit toujours une sous-estimation de l'énergie magnétique car tous les termes sont positifs. En conséquence :

$$\left\| \vec{\nabla}V_g^m \right\|_{\Omega}^2 \geq \left\| \vec{\nabla}(V_1^m(P_{\max}) + V_2^m(K_{\max})) \right\|_{\Omega}^2 \quad (12.2)$$

Le résidu exprimé par (12.1) correspond au résidu moyen par unité de volume à chaque ordre  $m$ . Nous en déduisons finalement la valeur du résidu  $\overline{R}_N^{\infty}$  associé à chaque troncature qui nous intéresse, pour tous les ordres confondus et par unité de volume :

$$\boxed{\overline{R}^{\infty} = \sqrt{\sum_{m=0}^M (\overline{R}_N^{m,\infty})^2}} \quad (12.3)$$

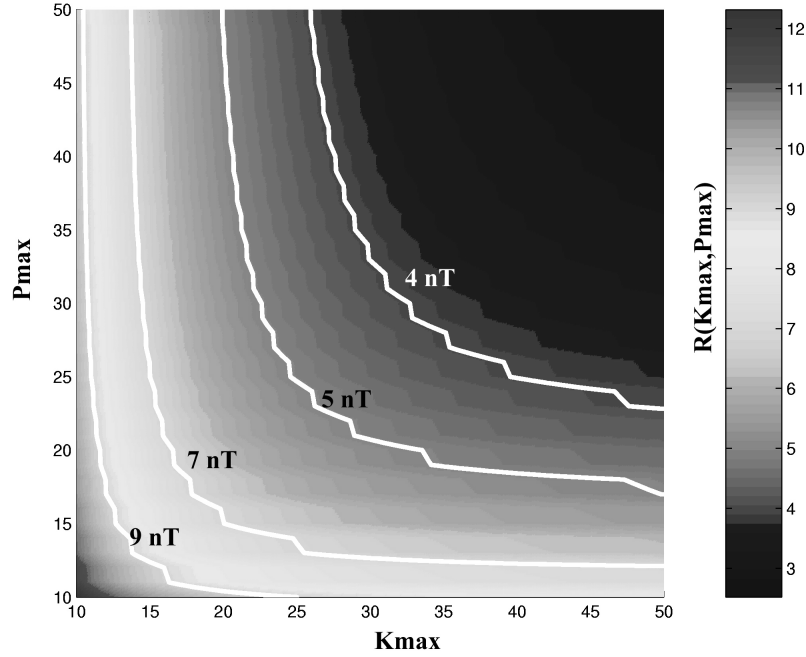


FIG. 12.3 – L’erreur moyenne en  $nT$  par élément de volume est obtenue par comparaison entre les spectres développés sur la base globale (11.8) et la base locale (11.15) pour différents degrés de troncature  $P_{max}$  et  $K_{max}$ . Différentes valeurs de l’erreur de reconstruction  $\bar{R}^\infty$  sont matérialisées par des courbes pleines pour différents couples  $(P_{max}, K_{max})$ .

### 12.2.2 Le choix des indices de troncature. Cas synthétique.

Prenons toujours un champ calculé à partir de la différence d’un modèle de Cain et d’un modèle DGRF. Le calcul des résidus moyen dans le cône est donné par les calculs intermédiaires de (11.8) et de (11.15) injectés dans l’équation (12.1). La figure (12.3) montre le résidu moyen donné par (12.1), par l’étude de la convergence de la norme locale,  $E_\Omega^l$  (11.15), vers la norme globale,  $E_\Omega^g$ , (11.8) lorsque l’on augmente les indices de troncature  $P_{max}$  et  $K_{max}$ .

Nous avons tracé directement le résidu total qui nous donnent la valeur réelle de l’erreur. A partir de la surface  $\bar{R}^\infty(P_{max}, K_{max})$  on peut déterminer les couples  $(P_{max}, K_{max})$  qui permettent de modéliser le champ avec une précision que l’on peut contrôler. Sur la figure 12.3 si nous choisissons une erreur de  $7nT$ , la courbe blanche correspondante nous donnent les différents couples possibles.

Ainsi, si l’on considère un champ avec un bruit de  $7nT$  il existe un grand choix d’indices de troncature, ce qui nous laisse plusieurs alternatives possibles en fonction de la répartition des données. Puisque, en géomagnétisme, les données sont habituellement réparties plus uniformément en surface qu’en altitude on penchera naturellement vers le choix d’un couple d’indices appartenant à la courbe blanche avec un indice du développement  $P_{max} < K_{max}$ , car c’est l’indice qui gouverne la solution sur les fonctions radiales. Nous pourrions d’autre part nous appuyer sur la distribution moyenne des données avec l’altitude pour en déduire  $P_{max}$  par (6.48) et par conséquent  $K_{max}$  sur la figure 12.3.

Ce type de choix nous permettra d'améliorer le conditionnement de la matrice d'inversion, tout en sachant la limite de résolution de notre modèle. En d'autres termes, ceci permet d'opter pour la décomposition qui limite le phénomène d'*aliasing*.

Il existe une très légère dissymétrie de la figure par rapport à la première bissectrice. On constate que la valeur du résidu moyen est légèrement plus sensible au développement  $K_{max}$  qu'au développement  $P_{max}$ . La représentation de l'énergie totale est donc tributaire du degré d'expansion de la base des fonctions de Legendre et dépendra par conséquent, lors du problème inverse, de la plus ou moins bonne répartition des données en surface. Cette propriété découle naturellement du choix de la condition à la limite latérale  $\partial\Omega_{\theta_0}$  du domaine  $\Omega$  pour le problème de condition aux limites *PIII*.

Cette estimation donne simplement une indication sur l'erreur moyenne dans tout le volume sans distinction entre les énergies associées à chaque ordre  $m$ , seule l'énergie totale est maintenant considérée. La valeur du résidu dépend avant tout de l'intensité du champ magnétique résiduel, car nous sommes dans la configuration d'un calcul de résidu absolu. Par conséquent, en supposant qu'un modèle de *Cain* moins un modèle *DGRF* donne des magnitudes moyennes proches de celles que l'on obtiendrait en retranchant un modèle de vraies données magnétiques, on peut considérer que cette manipulation sur données synthétiques est assez réaliste. On pourrait donc objecter que le résidu de  $7nT$  est trop important, mais cette valeur moyenne n'est pas distribuée dans le cône de manière homogène (voir par exemple le paragraphe 10.2) et il va de soi que l'ensemble des effets de bords contribue pour une part très importante à la valeur de ce résidu.

Prenons d'ailleurs le couple ( $P_{max} = 30, K_{max} = 30$ ) qui nous a servi dans la reconstruction du problème *PIII*. Sur la figure (12.3), nous lisons une valeur de l'erreur moyenne  $\overline{R} \sim 4,2nT$  que nous pouvons rapprocher avec l'erreur de reconstruction estimée que nous avons trouvée d'une valeur de  $\overline{R}_{\Omega} \sim 3,8nT$  (partie 2, paragraphe 10.2). La différence entre ces deux estimations réside dans le fait que l'analyse par norme analytique considère totalement l'erreur sur les frontières, alors que l'analyse sur un échantillonnage, irrégulier près des bords, exclu naturellement une partie des effets de bords. Malgré une erreur moyenne jugée importante, nous avons pourtant constaté que le champ était bien reconstruit à l'intérieur du cône pour ce couple d'indices.

### 12.3 Le résidu associé à chaque surface

Nous venons donc de trouver un moyen d'estimer l'erreur de reconstruction moyenne dans le cône qui découle du choix des indices de troncature pour les développements de la base de Mehler et de Legendre. Cette erreur de reconstruction nous indique que la modélisation régionale ne pourra pas s'ajuster aux données dans un volume avec une précision meilleure que  $\overline{R}_{\Omega}$ . Or, la distribution de l'erreur n'est pas homogène et elle se cantonne essentiellement sur les trois surfaces qui délimitent le cône. L'estimation d'une erreur de 7 nT semble particulièrement optimiste pour les surfaces sous l'influence du phénomène de Gibbs ; au contraire, une précision de 7 nT sera largement atteinte à l'intérieur du cône.

#### Remarques préliminaires

La comparaison directe entre les normes par le développement des harmoniques sphériques (11.14) et le développement des harmoniques sur calotte (11.16) ne permet pas d'obtenir le résidu sur chaque surface. En effet, écrivons l'équivalent de (12.3) sur une surface de rayon  $r$ .

On a :

$$\delta(P_{\max}, K_{\max}) = \sqrt{\frac{\left\| \vec{\nabla} V_g \right\|_{\partial\Omega_r}^2 - \left\| \vec{\nabla} (V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\partial\Omega_r}^2}{S_{\partial\Omega_r}}} \quad (12.4)$$

On montre sur la figure (12.4) la valeur de la différence  $\delta(P_{\max}, K_{\max})$  en  $nT$  de ces deux normes, pondérée par la surface  $S_{\partial\Omega_r}$  de rayon  $r$ , et avec des indices  $P_{\max} = K_{\max} = 30$ . Le choix des indices est identique à celui utilisé dans la reconstruction du paragraphe 10.2 de la seconde partie. En comparant ce résultat avec celui de la figure (10.14) on remarquera qu'effectivement (12.4) n'est pas le résidu.

Cette expression permet en revanche de vérifier l'expression analytique (11.16) que l'on utilise dans (12.4) par la comparaison direct avec la différence entre le champ reconstruit et le champ initial sur une grille d'échantillons. La figure (12.4) montre une excellente corrélation.

### Expression du résidu par surface

Le résidu réel, par unité de surface, s'exprime par :

$$\bar{R}_{\partial\Omega_r}(P_{\max}, K_{\max}) = \sqrt{\frac{\left\| \vec{\nabla} V_g - \vec{\nabla} (V_1(P_{\max}) + V_2(K_{\max})) \right\|_{\partial\Omega_r}^2}{S_{\partial\Omega_r}}}$$

Pour pouvoir estimer le résidu, il faut exprimer le produit scalaire entre le gradient du potentiel global et le gradient du potentiel local et cette solution n'a pas été retenue.

Nous pouvons recourir à deux autres moyens : Le premier revient à une étude de comparaison directe, sur un ensemble de valeurs du champ échantillonné uniformément sur chaque surface, entre le champ reconstruit et le champ initial ; étant donné la quasi uniformité de l'échantillonnage, cette technique présente l'intérêt de donner une valeur moyenne très réaliste en même temps que de pondérer naturellement les effets de bords (car l'échantillonnage est lacunaire sur les bords latéraux) ; c'est cette technique que nous avons employée figure (10.14) du paragraphe traitant de la reconstruction du champ. La seconde technique consiste à calculer l'énergie de surface par différence finie de l'énergie dans le volume. Ce calcul simple et précis prend néanmoins en compte les effets de bords. Le résidu obtenu est donc une majoration du résidu au centre de chaque surface. Par la suite, nous nous contenterons de l'estimation du résidu par la comparaison numérique entre le modèle synthétique et un modèle reconstruit sur une grille de points relativement dense.

La norme de surface se révèle donc parfaitement inutile pour les objectifs que nous nous sommes fixés : elle ne permet pas d'obtenir d'information sur le résidu de surface et ne permet pas non plus d'être employée comme condition régularisante de l'inversion.



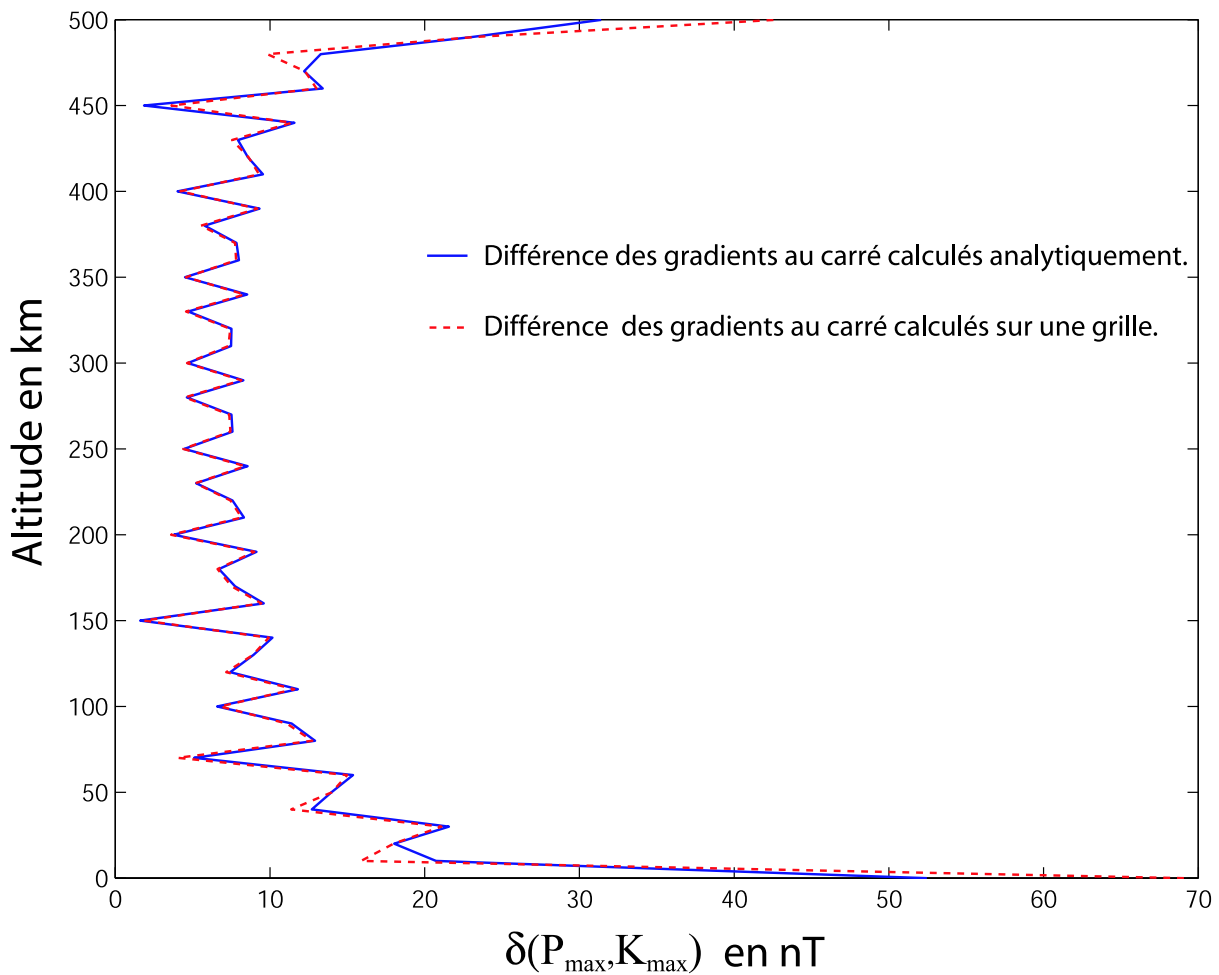


FIG. 12.4 – La courbe pleine montre le calcul de la différence entre les normes calculées en harmoniques sphériques et en harmoniques sur calotte par (12.4). La courbe pointillé montre l'excellente cohérence avec ce que l'on obtient à partir de la différence entre le champ réel et reconstruit sur une grille d'échantillonnage dans le volume. En revanche, si on compare cette figure avec la figure (10.14), on conclue que ce que l'on n'observe n'est pas le résidu réel en  $nT$ .

## Chapitre 13

# Les normes comme outils de régularisation

Le premier réflexe, lorsque nous voulons régulariser une inversion, est de considérer l'expression de la norme dans le volume car cette procédure est tout à fait similaire à ce que l'on utilise en général en harmoniques sphériques sur la sphère entière ([111]). L'exploitation de l'expression (11.15) pour une éventuelle régularisation montre néanmoins un désavantage flagrant : celui de minimiser tous les coefficients de Legendre ou de Mehler d'une manière quasiment similaire, sans différencier les coefficients associés à des valeurs propres élevées de ceux associés à de faibles valeurs propres. Or, nous recherchons avant tout la minimisation des paramètres associés aux grandes valeurs propres car leur détermination est affectée plus rapidement par la mauvaise répartition des données ; c'est ce qui caractérise l'*aliasing*. Nous proposons donc le développement de normes sur les surfaces latérale et inférieure de manière à pouvoir bénéficier des propriétés qui font défaut par l'utilisation directe de l'expression de l'énergie.

### 13.1 Nouvelle norme sur $\partial\Omega_\beta$

Revenons sur la définition de la norme surfacique (11.16). Cette définition, compte tenu de l'absence des propriétés d'orthogonalité des gradients sur une surface, conduit sous la forme algébrique à une matrice non diagonale. L'intérêt d'une régularisation est bien entendu d'améliorer le conditionnement de la matrice d'inversion en même temps que d'inclure une contrainte supplémentaire sur les paramètres que l'on recherche. Dans cette optique, l'écriture (11.16) semble bien peu adaptée. Nous pouvons cependant en déduire l'expression d'une nouvelle norme en ne considérant que les termes provenant du produit scalaire entre les bases de Legendre entres-elles.

Dans l'expression (11.16) de  $E_{\partial\Omega}^l$ , prenons la partie qui correspond aux bases de Legendre uniquement. La norme ainsi posée ne correspond nullement à l'énergie du champ magnétique sur une surface  $\partial\Omega_\beta$  mais possède des propriétés intéressantes.

Considérons donc la norme sur  $\partial\Omega_\beta$  comme la somme des normes des composantes horizontales,  $\vec{B}_{2,H}$ , et verticale,  $\vec{B}_{2,N}$ , du champ  $\vec{B}_2$  soit :

$$\left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega_\beta}^2 = \left\| \vec{B}_{2,H} \right\|_{\partial\Omega_\beta}^2 + \left\| \vec{B}_{2,N} \right\|_{\partial\Omega_\beta}^2$$

Ce qui s'écrit directement d'après (11.16) :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega\beta}^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_{m,0}) \pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left( \left( \tilde{G}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,c}(\beta) \right)^2 + \left( \tilde{H}_{n_k}^m R_{n_k}^{m,s}(\beta) \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left( \left( \tilde{G}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 + \left( \tilde{H}_{n_k}^m \frac{dR_{n_k}^{m,s}}{dr} \Big|_{\beta} \right)^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right\} \end{aligned}$$

En développant les expressions de  $\tilde{G}_{n_k}^m$ ,  $\tilde{H}_{n_k}^m$ ,  $R_{n_k}^{m,s}(\beta)$  et  $R_{n_k}^{m,c}(\beta)$  et leurs dérivées radiales (voir définitions du paragraphe 1.3) on écrit l'expression de la norme en fonction des coefficients de Gauss locaux de la base de Legendre.

On montre, pour les fonction de  $\tilde{G}_{n_k}^m$  (respectivement pour  $\tilde{H}_{n_k}^m$ ), que :

$$\tilde{G}_{n_k}^m \left( \lambda_k R_{n_k}^{m,c} \Big|_{\beta}^2 + \beta^2 \frac{dR_{n_k}^{m,c}}{dr} \Big|_{\beta}^2 \right) = (2n_k + 1) a^2 \left( (n_k + 1) \left( \frac{a}{\beta} \right)^{2(n_k+1)} (G_{n_k}^{m,i})^2 + n \left( \frac{\beta}{a} \right)^{2n_k} (G_{n_k}^{m,e})^2 \right)$$

On vérifie donc qu'à n'importe quelle altitude  $r = \beta$ , l'expression de la norme induit l'indépendance des termes  $G_{n_k}^{m,i}$  et  $G_{n_k}^{m,e}$ . En conclusion, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega\beta}^2 &= a^2 \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \pi \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2n_k + 1) (n_k + 1) \left( \frac{a}{\beta} \right)^{2(n_k+1)} \left( (G_{n_k}^{m,i})^2 + (H_{n_k}^{m,i})^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2n_k + 1) n_k \left( \frac{\beta}{a} \right)^{2n_k} \left( (G_{n_k}^{m,e})^2 + (H_{n_k}^{m,e})^2 \right) \|P_{n_k}^m\|^2 \right\} \end{aligned}$$

Puisque d'autre part, on montre que (Annexe A) :

$$\|P_{n_k}^m\|^2 = \frac{\sin \theta_0}{2n_k + 1} \left( \frac{\partial P_{n_k}^m}{\partial n} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} - P_{n_k}^m \frac{\partial}{\partial n} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0}$$

et que les conditions aux limites sont telles que  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega\beta}^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \delta_m) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (n_k + 1) \left( \frac{a}{\beta} \right)^{2(n_k+1)} \left( (G_{n_k}^{m,i})^2 + (H_{n_k}^{m,i})^2 \right) \frac{\partial P_{n_k}^m}{\partial n_k} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left( \frac{\beta}{a} \right)^{2n_k} \left( (G_{n_k}^{m,e})^2 + (H_{n_k}^{m,e})^2 \right) \frac{\partial P_{n_k}^m}{\partial n_k} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \right\} \pi a^2 \sin \theta_0 \end{aligned} \quad (13.1)$$

Cette nouvelle expression de la norme présente le réel avantage de se représenter sous forme algébrique par une matrice diagonale. De plus, l'utilisation d'une telle norme pour les régularisations nous assure de pénaliser essentiellement les courtes longueurs d'onde en raison de la présence du facteur  $n_k$  qui augmente lorsque le développement en  $k$  augmente. Nous trouvons donc une norme qui est conforme au comportement recherché, bien qu'elle n'ait plus de relation simple avec l'énergie. Cette régularisation affectera uniquement les coefficients de la base de Legendre.

### 13.2 Nouvelle norme sur $\partial\Omega_{\theta_0}$

L'expression de la norme volumique (11.15) offre une régularisation *a priori* médiocre pour les coefficients de la base de Mehler. Nous constatons en effet l'absence explicite des valeurs propres  $\lambda_p$  dans cette expression. Nous devons donc rechercher l'expression d'une norme compatible avec l'objectif de recherche d'une contrainte de lissage et à limiter le phénomène d'*aliasing*.

De la même manière que précédemment, on cherche maintenant à déduire une norme sur la surface latérale du cône  $\partial\Omega_{\theta_0}$  d'ouverture  $\theta_0$  comprise entre les sphères de rayons  $a$  et  $b$ .

On cherche maintenant à exprimer :

$$\|\vec{B}_1\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = \|\vec{B}_{1,H}\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 + \|\vec{B}_{1,N}\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2$$

Considérons tout d'abord la norme déduite du produit scalaire suivant :

$$\langle \vec{B}_1, \vec{B}'_1 \rangle_{\partial\Omega_{\theta_0}} = \frac{1}{\pi \sin \theta_0 (b^2 - a^2)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{\partial V'_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta_0} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \frac{\partial V'_1}{\partial \varphi} \right) r^2 \sin \theta_0 dr d\varphi \quad (13.2)$$

**Remarque :** Notons que  $r^2 \sin \theta dr d\varphi$  n'est pas l'élément de surface  $\partial s_{\Omega_{\theta_0}}$  mais l'élément de surface pondéré par  $r$  (voir figure 6.2).

L'ajout d'un poids au produit scalaire est une conséquence directe de l'absence de propriété de l'opérateur radial  $L_r$ , défini par 6.19, sur cette surface.

Calculons dans un premier temps :

$$I_1 = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{\partial V'_1}{\partial r} r^2 \sin \theta_0 dr d\varphi$$

En vertu de l'orthogonalité des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  le calcul se réduit à  $m$  fixé :

$$I_1^m = \pi (1 + \delta_{m,0}) a^2 \sin \theta_0 K_p^m(\theta_0) K_{p'}^m(\theta_0) G_p^m G_{p'}^m \int_a^b \frac{dR_p}{dr} \frac{dR_{p'}}{dr} r^2 dr$$

L'expression est analogue pour les coefficients  $H_p^m$ .

Or une simple intégration par partie montre que :

$$\int_a^b \frac{dR_p}{dr} \frac{dR_{p'}}{dr} r^2 dr = \left[ r^2 \frac{dR_p}{dr} R_{p'} \right]_a^b - \int_a^b R_p \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR_{p'}}{dr} \right) dr$$

Quelle que soit la condition à la limite supérieure et inférieure du domaine, choisie pour les fonctions radiales, le premier terme est nul. Nous voyons donc ici clairement le bénéfice de l'ajout d'un poids  $w = r$  dans le calcul du produit scalaire. En effet, l'intégrale se calcule très simplement en se remémorant que les fonctions  $R_p$  sont les fonctions propres de l'opérateur  $L_r$  et  $\lambda$  leurs valeurs propres (voir préliminaires). Nous pouvons donc exploiter l'orthogonalité des fonctions radiales et on trouve que  $I_1^m$  s'écrit simplement à  $m$  et  $p$  fixé :

$$I_1^{m,p} = (1 + \delta_{m,0}) \pi a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 \lambda_p (K_p^m G_p^m)^2$$

avec  $\lambda_p$ , la valeur propre qui dépend de la fonction radiale considérée. (Rappelons que pour  $p = 0$ ,  $\lambda_p = 0$  si l'on choisit les fonctions radiales définies par  $dR_p/dr)_{a,b} = 0$ ). L'expression est identique pour les coefficients  $H_p^m$ .

De même pour le calcul de :

$$I_2 = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \frac{\partial V_1'}{\partial \varphi} dr d\varphi$$

il vient, en vertu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et des fonctions radiales respectivement sur les intervalles  $[0, 2\pi]$  et  $[a, b]$  à  $(p, m)$  fixés :

$$I_2^{m,p} = (1 + \delta_{m,0}) \pi a \|Rp\|^2 \frac{m^2}{\sin \theta_0} (K_p^m G_p^m)^2$$

Finalement, on trouve la norme des composantes horizontales (13.2) à  $p$  et  $m$  fixés :

$$\left\| \vec{B}_{1,H}^{m,p} \right\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_{m,0}) \pi \left( \lambda_p + \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0} \right) K_p^{m2} \left( (G_p^m)^2 + (H_p^m)^2 \right) \quad (13.3)$$

De même on trouve la norme des composantes verticales :

$$\left\| \vec{B}_{1,N}^{m,p} \right\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_{m,0}) \pi \left( \frac{dK_p^m}{d\theta} \right)^2 \left( (G_p^m)^2 + (H_p^m)^2 \right) \quad (13.4)$$

Soit finalement :

$$\left\| \vec{B}_1 \right\|_{\partial\Omega_{\theta_0}}^2 = a \|Rp\|^2 \sin \theta_0 (1 + \delta_{m,0}) \pi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \left( \lambda_p + \frac{m^2}{\sin^2 \theta_0} \right) K_p^{m2} + \left( \frac{dK_p^m}{d\theta} \right)^2 \right\} (G_p^{m2} + H_p^{m2}) \quad (13.5)$$

Cette norme permettra de remplir des conditions de régularisation sur les coefficients de la base de Mehler uniquement.

Nous sommes donc arrivés à l'expression d'une norme explicitement fonction de la valeur propre  $\lambda_p$ . Les conséquences en seront une pondération plus importante des coefficients associés à des valeurs propres importantes. Une telle régularisation sur la surface latérale semble donc bien appropriée et représente bien une contrainte de lissage. On remarquera au passage l'extrême simplicité de sa formulation qui exclut les problèmes numériques.

### 13.3 Commentaires sur les nouvelles normes

Nous venons de trouver des expressions de normes, éloignées de la définition liée à l'énergie magnétique de surface. Cependant, nous pouvons souligner deux points intéressants.

D'une part, on peut montrer que la norme dans le cône est reliée à (13.1) et (13.5) de la façon suivante :

$$E_{\Omega}^l = \int_0^{\theta_0} \left\| \vec{B}_1 \right\|_{\partial\Omega_{\theta}}^2 d\theta + \int_a^b \left\| \vec{B}_2 \right\|_{\partial\Omega_r}^2 dr$$

Les deux normes remplissent donc à peu près la même fonction que la norme volumique : la minimisation de ces normes sur les surfaces aura comme conséquence la minimisation du champ dans tout le volume.

Le second point est d'avoir pu obtenir deux expressions qui contraignent le champ magnétique proportionnellement au degré du développement des séries. Ces deux expressions nous permettront de mieux pénaliser les coefficients associés aux grandes valeurs propres qui sont moins bien déterminés.

Par conséquent, les définitions de ces normes quelque peu atypiques ont des propriétés tout à fait cohérentes avec un objectif de minimisation de l'énergie dans tout le volume, préférentiellement associée aux grandes valeurs propres.

## 13.4 Discussions sur les normes

Nous avons vu que le développement en harmoniques sphériques peut être étudié, dans une certaine mesure, de la même manière que celui des harmoniques sphériques ordinaires. À partir des équivalences d'écriture, nous en déduisons une somme d'informations qui nous permet d'anticiper le comportement de la modélisation sur une région particulière. Mais ces équivalences d'écritures mettent également en relief les problèmes et certaines ambiguïtés qui apparaissent lorsque nous raisonnons uniquement par analogie avec les harmoniques sphériques.

D'une part, nous pouvons discuter un des effets du procédé que Bullard appelle le detrending (retranchement d'une tendance générale) et qui permet de limiter l'effet de Gibbs. Lors des différents travaux réalisés à partir de la méthode des harmoniques sphériques sur calotte de Haines, les auteurs ont successivement discuté le fait que, malgré le retranchement d'un champ global, il reste de grandes longueurs d'ondes de taille plus grande que la taille de la région d'étude (par exemple : [24]). Ces longueurs d'ondes (avec toutes les réserves que ce concept entraîne d'après le paragraphe 3.2.1 de la première partie) ont souvent été pointées du doigt pour expliquer les oscillations visibles dans les modèles obtenus. Certes, il reste du champ qui ne pourra être modélisé que par un plus long développement en série que s'il ne restait que des contributions de sources régionales. Mais l'important est qu'en fait l'expression (11.8) montre que la longueur d'onde n'est pas le seul facteur déterminant, car si l'on raisonne en terme d'énergie, la troncature dans les séries en  $m$  est également importante. Sur la sphère entière, le champ complet est majoritairement dipolaire, nous pouvons donc nous permettre des développements décroissants en fonction de  $m$ . Sur la calotte, après avoir retranché une tendance, nous n'avons plus ce type de géométrie pour le champ résiduel. Par conséquent, en modélisation régionale, si l'on veut prévoir un développement en adéquation avec l'énergie magnétique contenue dans le cône il n'y a aucune justification pour tronquer les séries de manière équivalente pour chaque ordre  $m$ .

D'autre part, les définitions des normes en harmoniques sphériques sur la sphère ont des propriétés très avantageuses et peuvent être directement utilisées pour la régularisation des problèmes inverses. Ces normes sont, dans ce cas, liées à l'énergie magnétique et ont une interprétation simple. En décomposition locale, nous perdons bon nombre de ces propriétés et nous devons redéfinir un système complet de normes qui nous permettent de répondre aux nécessités d'une bonne régularisation (essentiellement celle du filtrage des «hautes fréquences»).

Nous avons donc pu extraire de l'expression des normes plusieurs enseignements. Le fait que la nouvelle décomposition locale soit directement reliée à la décomposition globale par des conditions aux limites permet en effet de simuler les effets des troncatures des séries d'une manière réaliste. Ces simulations donnent un moyen de quantifier la résolution maximale à laquelle

peut prétendre un développement en série tronqué dans la base locale. Elles nous informent par conséquent des différentes combinaisons possibles pour les couples d'indices de troncatures qui permettront de résoudre les données avec une limite de modélisation adaptée à l'erreur de mesure ce ces données contiennent.

## Chapitre 14

# Inversions de données uniformément réparties

Nous entreprenons, dans ce chapitre, des inversions par moindres carrés sur des données synthétiques uniformément réparties dans le volume conique. L'objectif d'une telle étude est de vérifier que nous retrouvons bien les propriétés du champ magnétique et les caractéristiques propres à la modélisation régionales, que nous avons entrevues au chapitre 10.2 de la seconde partie. En particulier, nous cherchons à comparer les coefficients de Gauss estimés à ceux obtenus théoriquement par les relations analytiques avec les coefficients globaux. Nous profiterons, de plus, des conditions très favorables de répartitions des données pour expérimenter une stratégie basique pour accélérer la convergence des solutions du champ et nous pourrons vérifier son effet sur la proximité entre les coefficients du problème ainsi résolu et ceux du modèle théorique.

### 14.1 Définitions préliminaires

#### 14.1.1 Ecriture du problème inverse

Ecrivons explicitement les expressions du champ magnétique. En reprenant les formes compactes (6.49), (6.50) et (6.51) et en développant les termes d'après les notations des préliminaires (Partie 1, section 1), on écrit :

$$\begin{aligned} X = & \frac{a}{r} \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P(m)} R_p(r) \frac{dK_p^m}{d\theta} \{G_p^m \cos(m\varphi) + H_p^m \sin(m\varphi)\} \\ & + \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \{G_{n_k}^{m,i} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{m,i} \sin(m\varphi)\} \\ & + \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k-1} \frac{dP_{n_k}^m}{d\theta} \{G_{n_k}^{m,e} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{m,e} \sin(m\varphi)\} \end{aligned} \quad (14.1)$$



$$\begin{aligned}
Y &= \frac{a}{r} \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P(m)} R_p(r) \frac{K_p^m}{\sin \theta} \{G_p^m \sin(m\varphi) - H_p^m \cos(m\varphi)\} \\
&+ \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \frac{P_{n_k}^m}{\sin \theta} \{G_{n_k}^{m,i} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,i} \cos(m\varphi)\} \\
&+ \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k-1} \frac{P_{n_k}^m}{\sin \theta} \{G_{n_k}^{m,e} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,e} \cos(m\varphi)\}
\end{aligned} \tag{14.2}$$

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P(m)} \frac{dR_p(r)}{dr} K_p^m \{G_p^m \sin(m\varphi) - H_p^m \cos(m\varphi)\} \\
&+ \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} (n_k + 1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} P_{n_k}^m \{G_{n_k}^{m,i} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,i} \cos(m\varphi)\} \\
&- \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{K(m)} n_k \left(\frac{r}{a}\right)^{n_k-1} P_{n_k}^m \{G_{n_k}^{m,e} \sin(m\varphi) - H_{n_k}^{m,e} \cos(m\varphi)\}
\end{aligned} \tag{14.3}$$

D'après les discussions du paragraphe 12.1, nous avons écrit les séries en fonction d'indices  $K$  et  $P$  dépendants de  $m$ . Pour  $p = 0$ , cas particulier d'une valeur propre nulle, interviennent les fonctions particulières  $R_0$ , constante, la fonction  $P_0^m$  et les coefficients de Gauss  $G_0^m$  (et  $H_m^0$ ).

Ecrivons le problème direct sous la forme :

$$\underline{d}_{obs} = \mathbf{A}\underline{\gamma} + \underline{\varepsilon} \tag{14.4}$$

et appelons  $\gamma_\beta^1$ , les paramètres de la base de Mehler, tels que :

$$\gamma_p^1 = \{G_p^m, H_p^m\}$$

$\gamma_\beta^{2,i}$ , les paramètres de la base de Legendre internes, tels que :

$$\gamma_k^{2,i} = \{G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}\}$$

et  $\gamma_\beta^{2,e}$ , les paramètres de la base de Legendre externes, tels que :

$$\gamma_k^{2,e} = \{G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}\}$$

On peut écrire l'ensemble des paramètres sous la forme :

$$\underline{\gamma} = \left\{ \left( \gamma_p^1 \right), \left( \gamma_k^{2,i} \right), \left( \gamma_k^{2,e} \right) \right\}^t$$

Posons d'autre part que :

$$d_{obs,3i-2} = X \quad d_{obs,3i-1} = Y \quad d_{obs,3i} = Z$$

Si on appelle  $D$  le nombre de données, alors  $\{i = 1, \dots, D/3\}$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  est organisée avec  $m$  croissant :

$$\begin{aligned}
A_{3i-2,\beta} &= R_p(r) \frac{adK_p^m(\theta_i)}{rd\theta} \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix}, \frac{dP_{n_k}^m(\theta_i)}{d\theta} \begin{bmatrix} (\frac{a}{r_i})^{n_k+2} \\ (\frac{r}{a})^{n_k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix} \\
A_{3i-1,\beta} &= \frac{aR_p(r)}{r} \frac{mK_p^m(\theta_i)}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \sin(m\varphi_i) \\ -\cos(m\varphi_i) \end{bmatrix}, \frac{mP_{n_k}^m(\theta_i)}{\sin\theta_i} \begin{bmatrix} (\frac{a}{r_i})^{n_k+2} \\ (\frac{r}{a})^{n_k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(m\varphi_i) \\ -\cos(m\varphi_i) \end{bmatrix} \\
A_{3i,\beta} &= \frac{dR_p(r)}{dr} K_p^m(\theta_i) \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix}, P_{n_k}^m(\theta_i) \begin{bmatrix} -(n_k+1)(\frac{a}{r_i})^{n_k+2} \\ n_k(\frac{a}{r_i})^{n_k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(m\varphi_i) \\ \sin(m\varphi_i) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La résolution des paramètres  $\underline{\gamma}_{est}$  est donnée par :

$$\underline{\gamma}_{est} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \underline{d}_{obs} \quad (14.5)$$

Nous considérerons un poids identique pour toutes les données.

### 14.1.2 Inversion sous contrainte

Dans le cas d'un inversion sous contrainte, on cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$\Psi = \Psi_d + \Psi_e$$

avec :

$$\Psi_d = \|\underline{d} - \underline{d}_{obs}\|^2$$

Et  $\Psi_e$ , une condition supplémentaire de régularisation telle que :

$$\Psi_e = \beta E^2$$

avec  $\beta$  un facteur d'amortissement qu'il convient d'ajuster. Dans notre cas, nous imposerons que la norme du champ magnétique soit minimale. D'après (11.15) par exemple, l'énergie  $E$  peut s'écrire sous la forme algébrique :

$$E^2 = \underline{\gamma}^T \mathbf{\Lambda} \underline{\gamma}$$

avec  $\mathbf{\Lambda}$  la matrice des fonctions de bases, que nous avons choisie diagonale, et dont l'expression dépend du choix de l'énergie à minimiser, énergie de surface ou de volume.

Les équations normales qui donnent les paramètres estimés sont :

$$\boxed{\underline{\gamma}_{est} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \beta \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{A}^t \underline{d}_{obs}} \quad (14.6)$$

### 14.1.3 Définition de la cohérence statistique des coefficients (cas des moindres carrés ordinaires)

Dans la seconde partie, nous avons considéré uniquement le problème direct. La résolution des conditions aux limites nous permet de connaître les coefficients de Gauss théoriques locaux qui modélisent dans le cône le même champ que nous venons d'échantillonner sur une grille. Appelons  $\underline{\gamma}_{th}$  le vecteur des coefficients théoriques que l'on obtient par les relations (9.18), (9.4), (9.8) et (9.9).

Les coefficients,  $\underline{\gamma}_{est}$ , estimés par inversion coïncident rarement avec leurs vraies valeurs car elles sont des variables aléatoires. Dans le cas idéal où les données  $\underline{d}_{obs}$  suivent la loi  $\underline{d}_{obs} = \underline{d}_{th} + \underline{\varepsilon}$ ,

où  $\underline{\varepsilon}$  est une variable aléatoire gaussienne centrée de matrice de covariance  $\sigma_d^2 I$  et  $\underline{d}_{th}$  les valeurs théoriques du champ, la variance  $\sigma_{\gamma_i}^2$  sur le paramètre  $\gamma_{est,i}$  s'écrit :

$$\sigma_{\gamma_{est,i}}^2 = \sigma_d^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{i,i}^{-1}$$

avec  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  la matrice de covariance.

Puisque nous connaissons la variance des paramètres, nous pouvons en déduire un intervalle de confiance pour chacun des paramètres estimés par moindres carrés. La probabilité pour que le coefficient théorique  $\gamma_{i,th}$  soit dans un intervalle centré sur  $\gamma_{i,est}$  et tel que :

$$\gamma_{est,i} - \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \leq \gamma_{i,th} \leq \gamma_{est,i} + \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2}$$

s'écrit ([38]) :

$$P \left\{ \gamma_{est,i} - \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \leq \gamma_{i,th} \leq \gamma_{est,i} + \sigma_{\gamma_{est,i}} \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$

La fonction  $\mathcal{Z}_{1-\alpha}$  est la loi normale réduite (ou loi de Gauss  $\mathcal{N}(0, 1)$ ).

Pour estimer la proximité du modèle estimé au modèle théorique, nous pouvons définir une probabilité  $1 - \alpha$  et vérifier si les paramètres théoriques sont contenus dans l'intervalle de confiance à  $1 - \alpha$ , des paramètres estimés. Nous cherchons, par la suite, à savoir si les coefficients estimés permettent d'encadrer le coefficient théorique à 95%. Si les coefficients théoriques sont bien dans l'intervalle, alors on doit avoir :

$$-\mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \leq \left( \frac{\gamma_{i,th} - \gamma_{est,i}}{\sigma_{\gamma_{est,i}}} \right) \leq \mathcal{Z}_{1-\alpha/2} \quad (14.7)$$

Pour une probabilité  $P = 95\%$ , on a  $1 - \alpha/2 = 0.975$  et à l'aide d'une table statistique, on trouve que  $\mathcal{Z}_{0.975} = 1.96$ .

## 14.2 Inversions sur données synthétiques

### 14.2.1 Sélection des données

Nous proposons de réaliser l'inversion par moindres carrés ordinaires en deux temps. Dans un premier temps, nous cherchons un ensemble restreint de coefficients en tirant parti des considérations sur la répartition d'énergie. On adaptera les indices de troncature des séries,  $P(M)$  et  $K(M)$ , selon l'énergie contenue dans les ordres  $m$  correspondants. Dans un second temps, nous cherchons le même ensemble de coefficients mais en retirant les données proches des contours du cône  $C(a, \theta_0, \varphi)$  et  $C(b, \theta_0, \varphi)$ . Nous vérifions que nous pouvons accélérer la convergence par ce simple moyen, déjà proposé section 10.4 de la seconde partie.

Prenons comme données  $\underline{d}_{obs}$  des valeurs synthétiques calculées par la différence entre un modèle de Cain et un modèle DGRF. Les données sont réparties uniformément sur 6 surfaces d'altitudes comprises entre  $r = a$  et  $r = a + 500km$ . Une grille d'échantillonnage comporte 236 points par surface, ce qui nous donne un total de 1416 données. La configuration est identique à celle du paragraphe 4.3 de la première partie, qui considérait une inversion avec les bases de fonctions SCHA selon Haines. Les résultats fournis par les deux formalismes seront par conséquent directement comparables. Les données sont de plus bruitées à  $\sigma_d = 5nT$ , et  $\underline{\varepsilon} = \mathcal{N}(0, \sigma_d^2)$ .

### 14.2.2 Sélection des paramètres

Pour se mettre dans une situation comparable avec le résultat de l'inversion par le formalisme des harmoniques sur calotte selon Haines, on choisit un ensemble de 256 coefficients de Gauss, nombre de coefficients utilisé pour réaliser la figure (4.8) de la première partie. Les développements aux indices  $P_{max}$  et  $K_{max}$  ont été adaptés selon l'énergie portée par les ordres  $m$  d'après le paragraphe 12.1. Nous avons pris, par conséquent, l'ensemble suivant des troncatures :

$$\begin{array}{rcccccc} M = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(M) = K(M) & 10 & 15 & 8 & 4 & 3 & 3 \end{array} \quad (14.8)$$

Les contributions des ordres  $m > 5$  ont donc été négligées et sont supposées être de magnitudes comparables à celle du bruit injecté dans les données.

### 14.2.3 Inversion par moindres carrés simple

#### Variance estimée

Les données synthétiques sont inversées à l'aide d'un algorithme par moindres carrés ordinaires. A l'aide d'une décomposition en valeurs singulières, nous vérifions que cette répartition des données n'occasionne aucune singularité numérique. Le rapport entre la valeur propre maximale et minimale de la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  dans (14.5) est de  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \sim 44$ . Le conditionnement de la matrice d'inversion est donc excellent et le bénéfice des propriétés d'orthogonalité des fonctions de bases est nettement appréciable. L'inversion par moindres carrés nous permet d'obtenir un écart type estimé sur les données de  $\sigma_d^{est} \sim 19$  nT. La valeur importante de cet écart type ne doit pas nous leurrer car elle inclue les effets de Gibbs, qui peuvent être vus comme une erreur sur le modèle théorique, surtout aux surfaces inférieure et supérieure.

Le modèle obtenu étant stable, il est interpolable en tous points, notamment en altitude. Par conséquent, les résidus étant théoriquement moins élevés au centre du cône, la prise en compte de davantage de surfaces d'échantillonnages, dans ces régions, contribue à la décroissance du résidu total. Pour en avoir une première idée, on décompose l'écart-type estimé sur les données, d'après les surfaces d'échantillonnage on trouve :

$$\begin{array}{rcccccc} u \text{ en km} & 0 & 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \\ \sigma_d^{est}(u) \text{ en nT} & 16,4 & 2,3 & 2,1 & 2,0 & 2,2 & 8,3 \end{array}$$

Puisque l'écart type est proportionnel au résidu, nous voyons que le résidu total est donc nettement dominé par les résidus aux surfaces inférieure et supérieure. Au centre du cône, le résidu est tout à fait satisfaisant.

#### Interpolation en altitude

Le champ obtenu est calculé, par le calcul du problème direct, entre les surfaces terrestre et supérieure pour des altitudes distantes de 10km. Les grilles d'échantillonnage de surface sont également raffinées. De ce fait, la distribution des points de données est différente de la configuration utilisée pour l'inversion. Les valeurs du champ sont ensuite directement comparées avec le modèle global utilisé pour construire l'ensemble des données synthétiques. On montre sur la figure (14.1) la différence entre les deux champs.

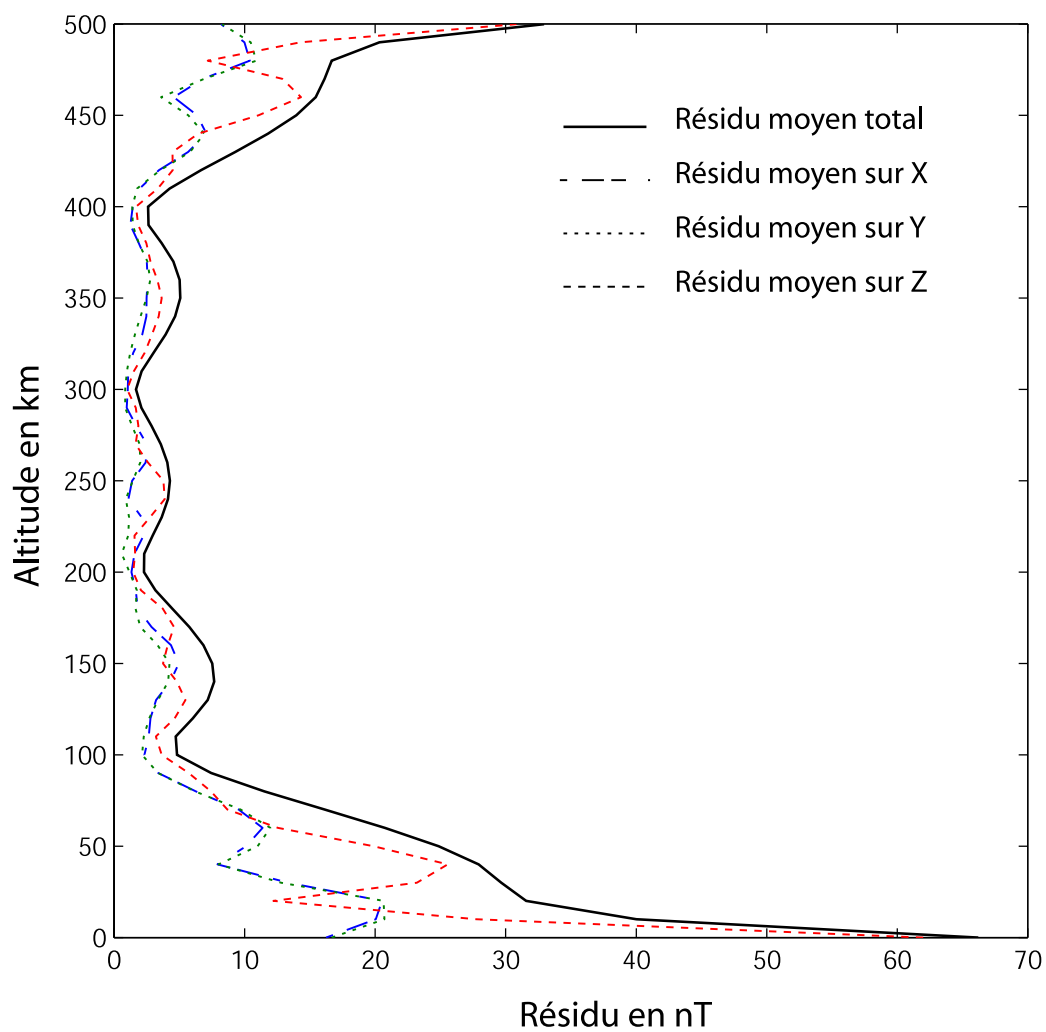


FIG. 14.1 – Résidus moyens de surface entre le modèle obtenu par inversion sur un échantillonnage et le modèle synthétique.

En utilisant les formules (10.3) et (10.2) on peut estimer le résidu moyen dans le volume  $\overline{R}_\Omega$  et à la surface terrestre,  $\overline{R}_{\partial\Omega}$ . On trouve respectivement :

$$\overline{R}_\Omega = 9,3nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega} = 62,2nT$$

Remarquons que ce résidu estimé sur un échantillon de points est proche de celui que l'on peut lire sur la figure (12.3). En revanche, le résidu de surface est important, et ceci pour les trois composantes du champ. Néanmoins, si l'on se concentre sur l'allure des résidus et leurs variations en altitude, on vérifie qu'ils décroissent jusqu'à la surface médiane du domaine, moins dominée par les effets de bords. De plus, la décroissance générale, surfaces inférieure et supérieure exclues, a bien l'allure d'une variation en altitude d'un potentiel newtonien. Cette dernière caractéristique et la valeur du résidu moyen nous poussent à conclure que le modèle est bien plus acceptable que celui obtenu avec SCHA selon Haines dans les mêmes conditions (voir figure 4.8 de la partie 1).

### Interpolation sur la surface terrestre

Même si l'allure générale de l'interpolation en altitude laisse supposer que le champ est correctement modélisé, nous ne savons toujours pas si la représentation à la surface terrestre est réaliste, d'autant moins que le résidu de surface  $\overline{R}_{\partial\Omega}$  est élevé. Résolvons donc le problème direct sur une grille fine à la surface terrestre  $r = a$  pour les trois composantes du champ. Nous comparerons ensuite le champ modélisé avec le champ synthétique réel.

La figure (14.2) montre le résultat de cette manipulation et suggère deux types de commentaires. Tout d'abord, comme nous nous y attendions, le phénomène de Gibbs prédomine sur la surface inférieure du cône. Les oscillations altèrent en partie le comportement réaliste du champ magnétique. Le modèle est cependant, du point de vue de l'interpolation, satisfaisant puisque nous n'avons, à aucun endroit à l'intérieur de la surface, de valeurs aberrantes. Par des techniques d'accélération de convergence, nous sommes donc susceptibles d'extraire l'information pertinente de ce modèle.

Le second commentaire concerne l'allure des résidus qui laisse penser que les oscillations sont essentiellement le résultat de la mauvaise convergence des solutions de la base de Legendre. Deux indices appuient cette conclusion : le premier concerne l'augmentation des résidus au pôle de la calotte pour la composante  $Z$ . Cette augmentation a été anticipée par les discussions du paragraphe 8.2.1 de la seconde partie. De plus, si l'on suit un chemin  $S(\varphi = 0, \theta, r = a)$ , le long du méridien zéro de la calotte pour la composante  $Y$  du champ par exemple, l'allure du résidu sur ce parcours nous rappelle le comportement oscillant de la reconstruction des fonctions de Schmidt. Nous avons donc bon espoir, en utilisant le subterfuge qui consiste à retrancher une fine couronne sur les bords des surfaces inférieure et supérieure, d'accélérer la convergence au centre de la calotte.

### Cohérence statistique des coefficients

Attardons-nous un instant sur l'ensemble des 256 coefficients de Gauss estimés et cherchons à savoir si un intervalle de confiance à 95% encadre leurs valeurs théoriques. On utilise pour ce faire la définition (14.7) et on rappelle que pour un intervalle de confiance à 95%, la fonction statistique est égale à  $Z_{1-\alpha/2} = 1,96$ .

La figure (14.3) montre que 89% des coefficients de Gauss ont été estimés avec un intervalle de confiance qui contient les valeurs théoriques à 95%. Les coefficients de l'inversion et du problème théorique concordent donc majoritairement. Lors de l'inversion par moindres carrés ordinaires,

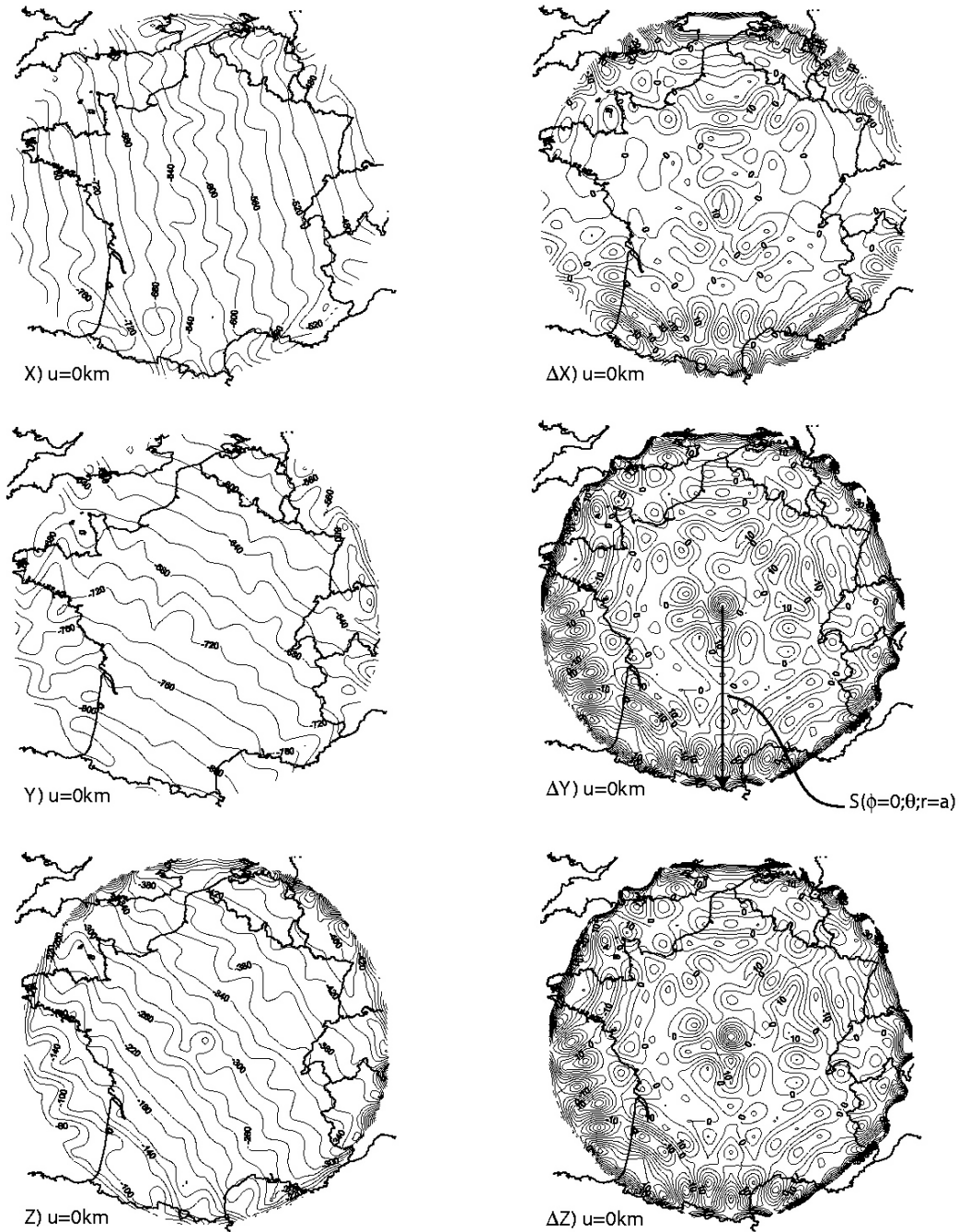


FIG. 14.2 – Modèle de champ synthétique obtenu par inversion par moindres carrés. On observe les oscillations caractéristiques du phénomène de Gibbs et les résidus sont relativement importants. Les lignes de contours représentent des intervalles de  $5nT$ .

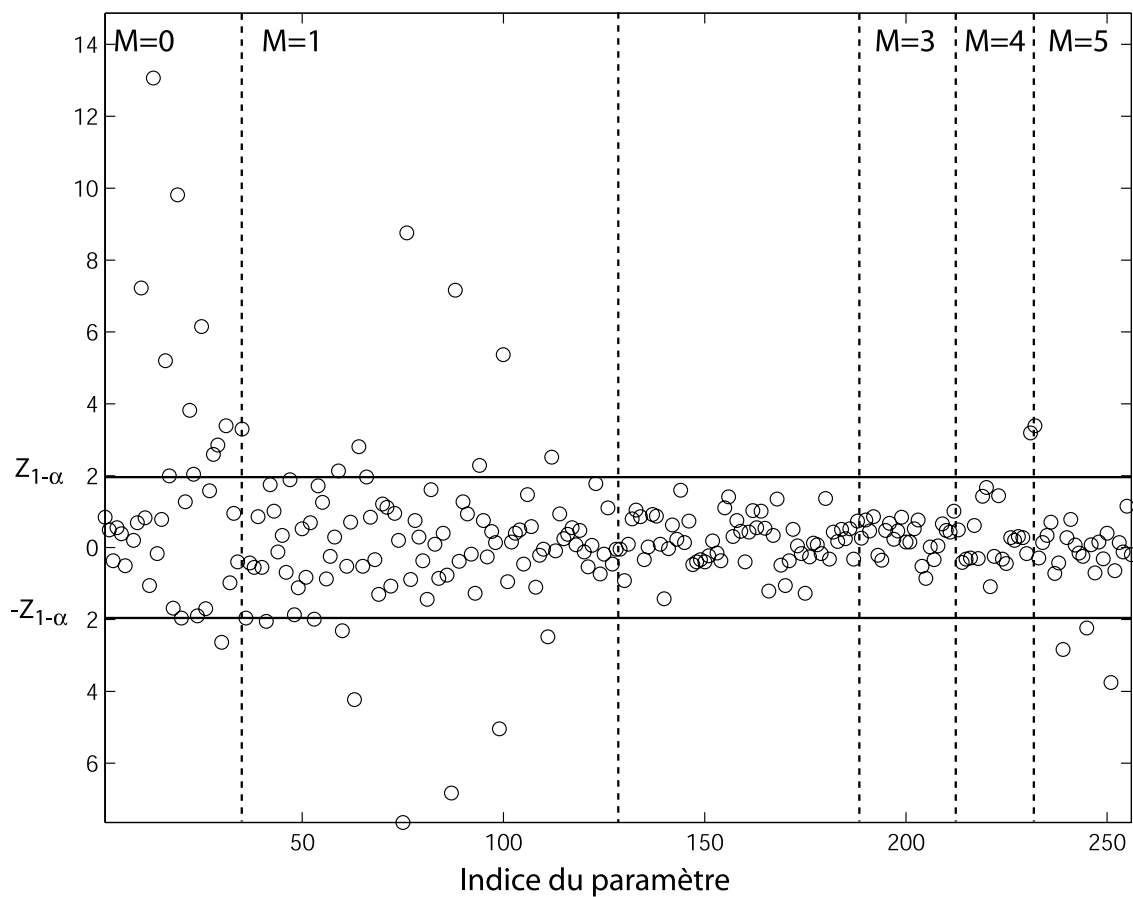


FIG. 14.3 – Comparaison statistique entre les coefficients de Gauss théoriques et les coefficients de Gauss estimés. Les points contenus entre les droites horizontales montrent les coefficients théoriques contenus dans l'intervalle d'incertitude des coefficients estimés.



les bases de coefficients ont été organisées à  $m$  croissant. On remarque par conséquent que les coefficients à l'extérieur de l'intervalle de confiance sont essentiellement portés par les ordres  $m = 0$  ou  $m = 1$ . Cette remarque, lorsqu'elle est mise en parallèle avec les considérations énergétiques, nous laisse entendre que les troncatures pour les ordres  $m = 0$  et  $m = 1$  sont insuffisantes pour que le problème inverse et le problème direct théorique puissent être complètement équivalents. L'inversion s'adapte par conséquent au mieux à l'ensemble des coefficients recherchés. Cette affirmation sera plus amplement vérifiée au paragraphe suivant.

#### 14.2.4 Inversion par moindres carrés : accélération de la convergence.

Considérons maintenant le même ensemble de données précédent mais retranchons-lui, aux bords, une fine couronne d'angle  $\varepsilon = 0.3^\circ$ , uniquement aux altitudes  $r = a$  et  $r = a + 500\text{km}$ . Cet expédient permet d'exclure les discontinuités topologiques que sont les *coins* du cône, siège de la superposition d'oscillations. Nous aurions pu tout aussi bien choisir d'agrandir l'angle d'ouverture  $\theta_0$  de la calotte. D'un point de vue de la modélisation du champ, ces options sont équivalentes. Néanmoins, changer les paramètres du cône, revient à changer les valeurs de coefficients théoriques (ou estimés) et pour les besoins comparatifs de la discussion, nous avons choisi une géométrie fixée une fois pour toute. Par rapport à l'ensemble complet des données synthétiques, cette manipulation revient à retrancher seulement 90 données parmi les 1416 de départ.

#### Variance estimée

De la même manière que précédemment, on vérifie à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières que le conditionnement numérique de la matrice d'inversion est satisfaisant. On trouve que le rapport entre les deux valeurs propres maximale et minimale équivaut à  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \sim 71$ . Par rapport au conditionnement de la matrice de la section 14.2.3, nous avons légèrement dégradé le conditionnement.

On trouve maintenant que l'écart type estimé sur les données est de  $\sigma_d^{est} \sim 5,7$  nT et on peut le répartir en altitude de la façon suivante :

$u$ en km	0	100	200	300	400	500
$\sigma_d^{est}(u)$ en nT	3,06	2,2	2,1	2,1	2,0	2,3

Même si à première vue, cette manipulation a amélioré la variance totale sur les données il semble, d'après les résultats du paragraphe 14.2.3, que les valeurs de  $\sigma_d^{est}(u)$  diffèrent essentiellement aux surfaces inférieure et supérieure. Il convient donc de vérifier, d'une part le comportement de l'interpolation en altitude et, d'autre part, celui de l'interpolation sur une surface pour vérifier si la manœuvre que nous venons de réaliser constitue véritablement un gain dans la représentation du champ.

#### Interpolation en altitude

On réalise toujours la même comparaison entre le champ modélisé et le champ synthétique connu. Les surfaces d'interpolation sont échantillonnées tous les 10km entre les altitudes terrestre et supérieure. Par rapport au paragraphe (14.2.3), la comparaison s'effectue en dehors de la couronne retranchée lors de l'inversion.

En utilisant les formules (10.3) et (10.2) on peut estimer le résidu moyen dans le volume  $\overline{R}_\Omega$  et à la surface terrestre,  $\overline{R}_{\partial\Omega}$ . On trouve respectivement :

$$\overline{R}_\Omega = 2nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega} = 10,8nT$$

Cette fois-ci, le résidu volumique est nettement inférieur à celui qui est estimé sur la figure (12.3) pour des indices de troncature posés à  $K_{max} = P_{max} = 15$ . Cette différence s'explique simplement par l'exclusion des bords latéraux. De même à la surface terrestre, le fait de retrancher la couronne permet d'atteindre la précision de  $10,8nT$  en moyenne sur la surface inférieure. Etant donné que ces valeurs ne sont pas directement comparables avec les résultats du paragraphe 14.2.3, nous traçons, sur la figure (14.4), le résidu que nous aurions obtenu en retranchant une couronne d'angle  $\varepsilon$  pour la comparaison du champ modélisé et du champ synthétique. Nous pouvons ainsi mieux apprécier les bénéfices qu'apporte l'exclusion d'une fine couronne sur les bords.

Les résultats montrés sur la figure nous poussent à la conclusion suivante : lorsque nous retranchons une fine couronne d'angle  $\varepsilon$ , qui inclue la discontinuité topologique, nous améliorons l'ajustement des données au centre de la calotte. En comparant le résidu moyen total et le résidu moyen de l'inversion «ordinaire», dans l'intervalle  $\theta_0 - \varepsilon$  nous avons gagné environ  $15nT$  de précision. Cela se fait au détriment de la modélisation du champ près des bords, mais dans le cas du paragraphe 14.2.3 comme ici, cette zone est, de toute évidence, inexploitable. Vérifions maintenant visuellement que nous n'avons rien perdu de la qualité de modélisation, grâce à une interpolation sur différentes surfaces.

### Interpolation sur la surface terrestre

L'option, qui consiste à retrancher une couronne sur la surface latérale en  $r = a$  et  $r = b$ , est préférée pour le moment à l'inversion «ordinaire» pour représenter le champ à différentes altitudes. On présente donc sur les figures (14.5), (14.6) et (14.7) le champ interpolé à différentes altitudes et sur des grilles de points fines. D'autre part, les figures (14.8), (14.9) et (14.10) montrent la différence avec le champ synthétique aux altitudes correspondantes.

Lors de l'interpolation du champ à la surface terrestre, pour les trois composantes, les oscillations ont été réduites par rapport à ce que l'on observe sur la figure (14.2). D'une manière générale, nous gagnons en précision dans tout le volume conique et malgré le faible nombre de coefficients nous pouvons modéliser correctement le champ. Par rapport à une méthode de convergence de type Fejer (section 10.4, partie 2), les résidus ne sont pas biaisés et nous vérifions toujours les mêmes caractéristiques propres à la modélisation dans un cône. En particulier, le bombement au pôle de la calotte en  $r = a$  et  $r = a + 500km$  est nettement visible sur la figure (14.10) des résidus de la composante  $Z$ . D'un point de vue quantitatif, l'amplitude des résidus ne dépasse pas  $5nT$  au centre de la calotte sur les frontières supérieure et inférieure ; au centre du cône, le résidu pour les trois composantes du champ est inférieur à  $2nT$ .

### Cohérence statistique des coefficients

De la même manière que précédemment, on vérifie si les coefficients théoriques appartiennent à l'intervalle de confiance des coefficients estimés à 95%. On applique de la même manière la relation (14.7) dont les résultats sont représentés sur la figure (14.11).

Cette figure soulève divers points de discussion. D'une part, nous constatons que les données proches de la discontinuité topologique ont une influence certaine sur la détermination des coefficients de Gauss. La distribution des points autour de l'intervalle de confiance nous indique que les coefficients sont différents de ceux obtenus par (14.3). Nous n'avons plus que 64% des coefficients théoriques qui appartiennent à l'intervalle. D'autre part, ce sont, une fois encore, les ordres  $m = 0$  et  $m = 1$  qui présentent un comportement singulier.

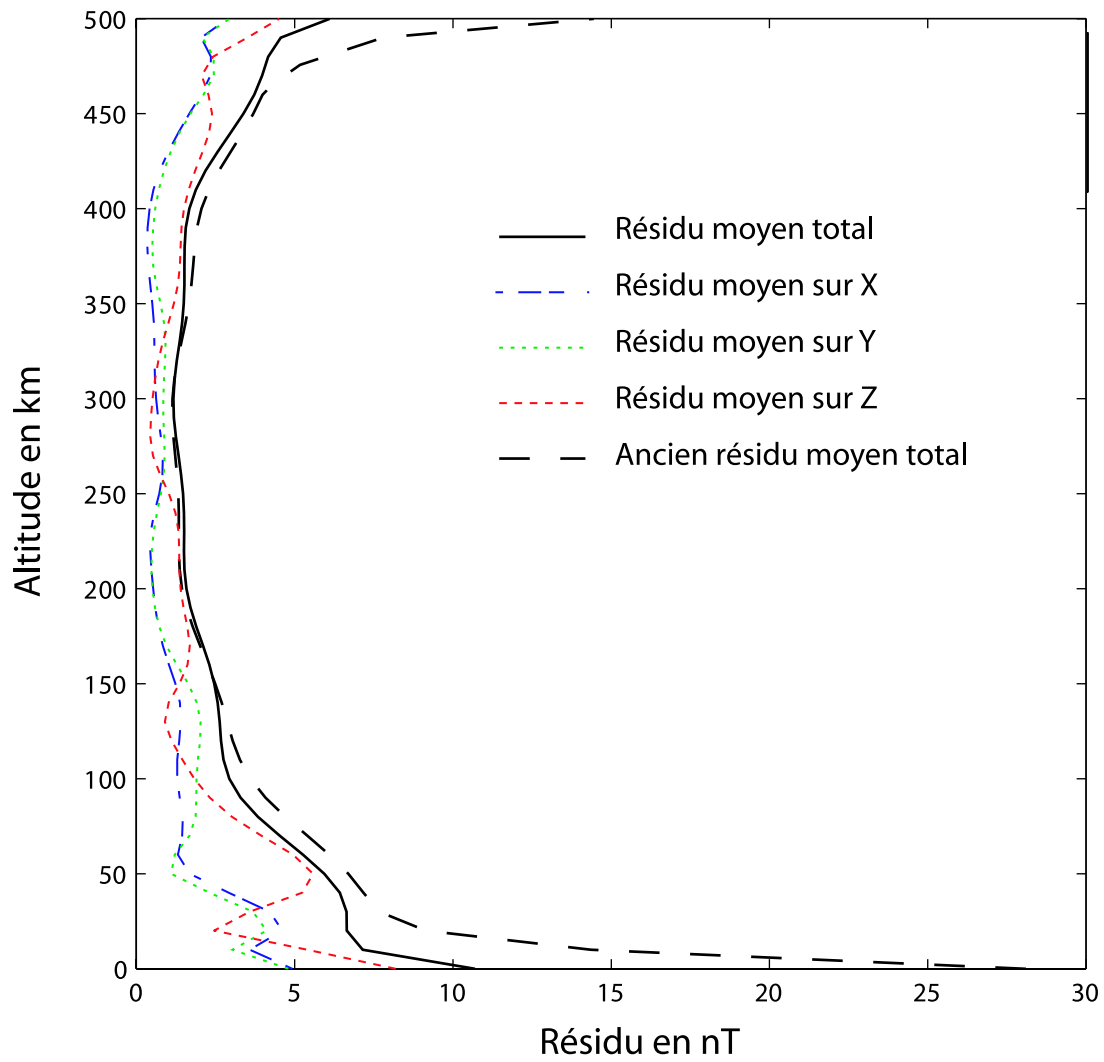


FIG. 14.4 – Interpolation du modèle obtenu par inversion en retranchant une couronne d'angle  $\varepsilon = 0.3^\circ$  aux surfaces terrestre et supérieure. A titre indicatif, on donne la courbe du résidu de surface moyen obtenu avec le modèle qui considère l'ensemble complet des données.

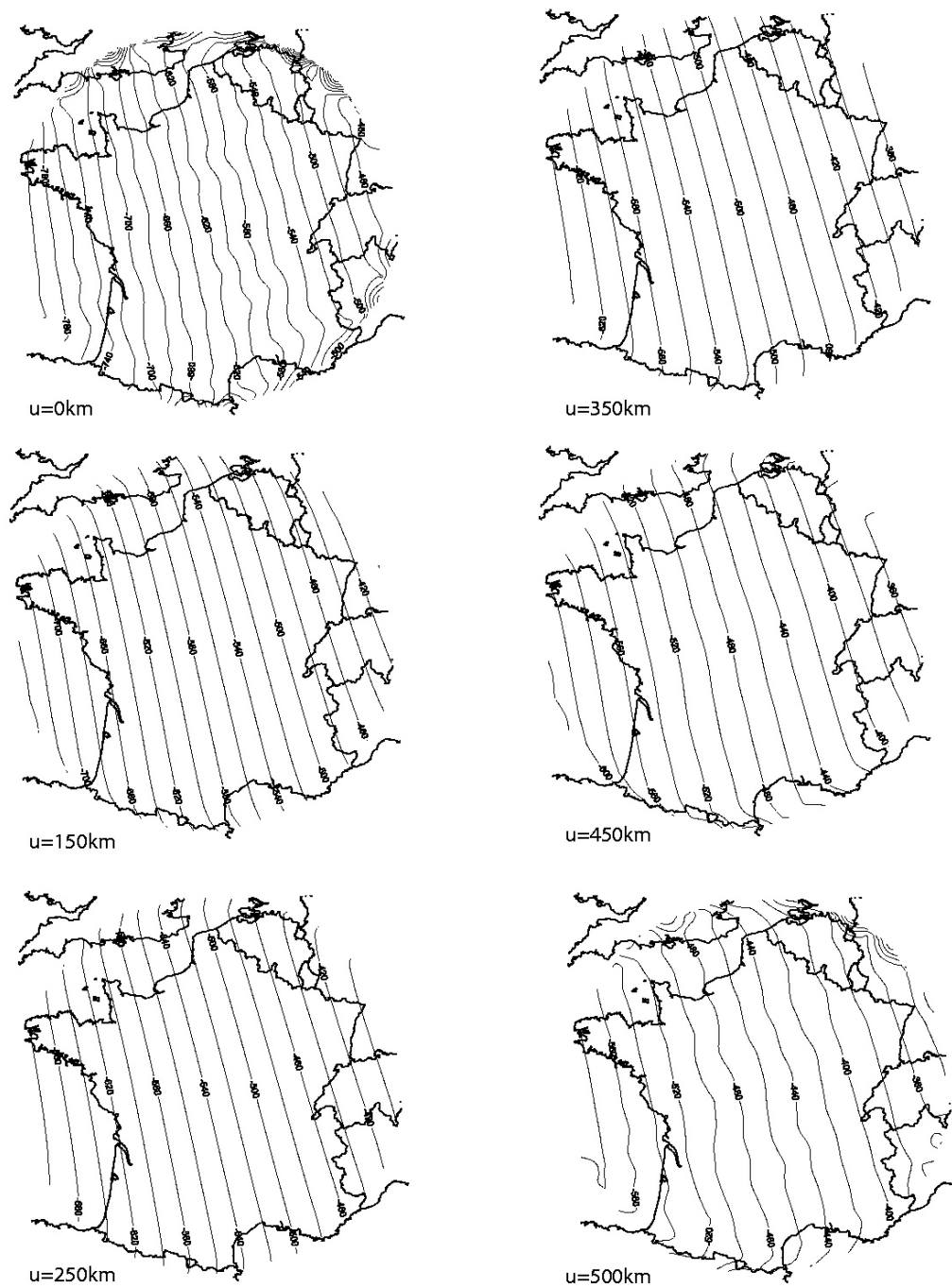


FIG. 14.5 – Interpolation de la composante  $X$  du champ modélisé à différentes altitudes. Les oscillations ont été nettement réduites en  $r = a$  par le retranchement d'une couronne d'angle  $\varepsilon = 0,3^\circ$  sur cette surface (voir figure 14.2).

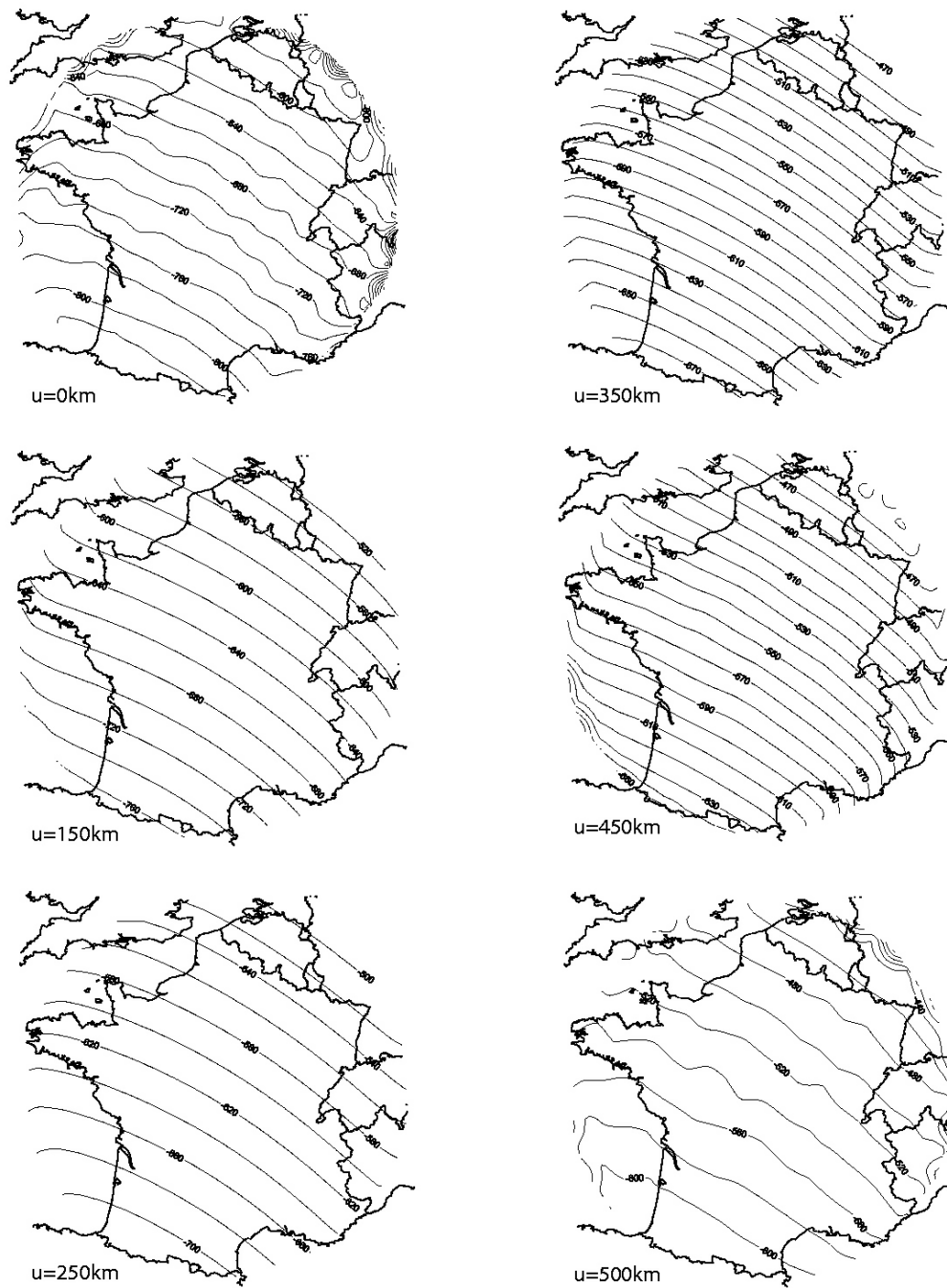


FIG. 14.6 – Composante Y du champ modélisé. Les tracés montrent une interpolation dans tout le volume  $\Omega$  du cône. (voir légende de la figure 14.5)

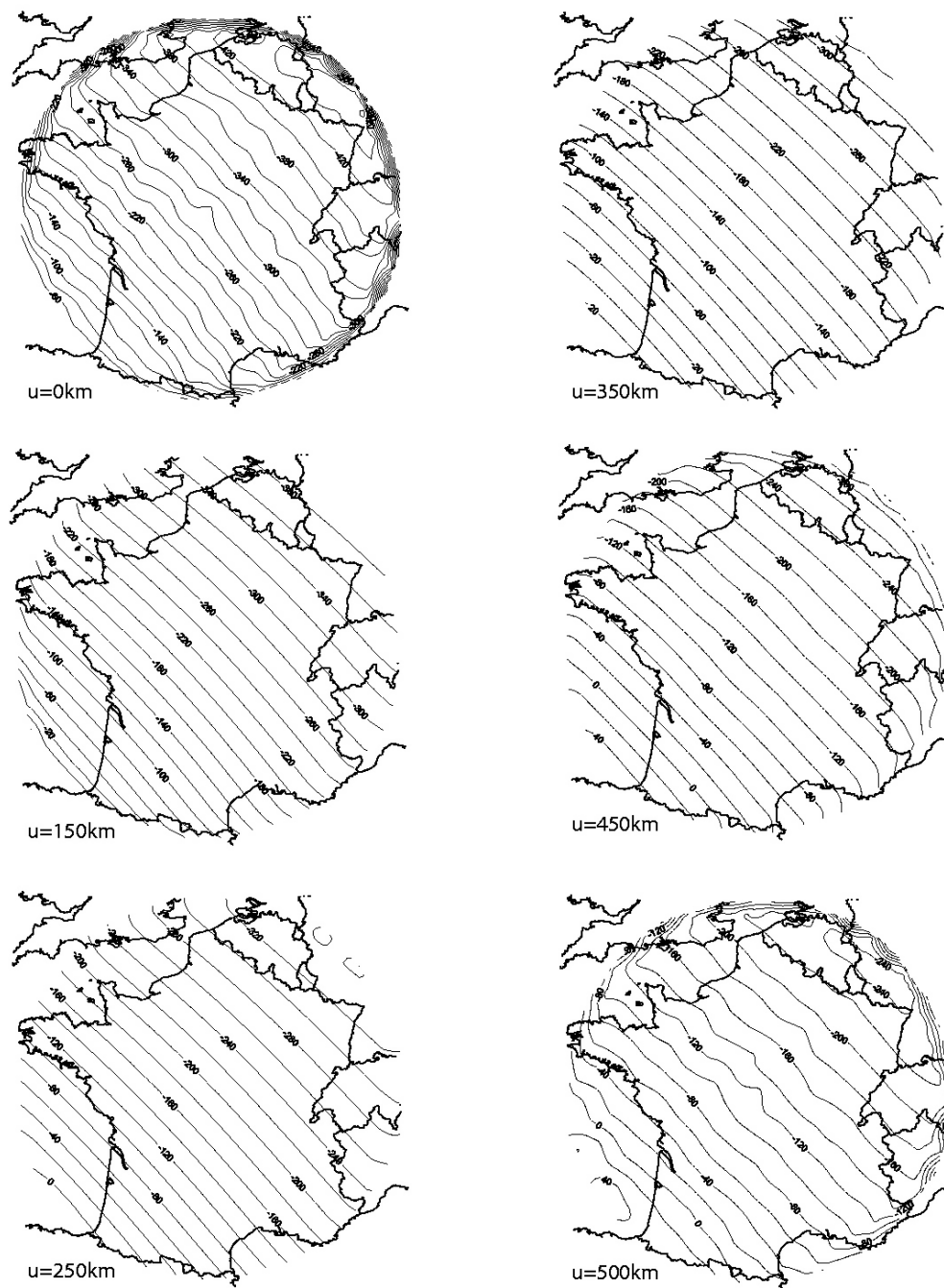


FIG. 14.7 – Composante  $Z$  du champ modélisé. Les tracés montrent une interpolation dans tout le volume  $\Omega$  du cône. (voir légende de la figure 14.5)

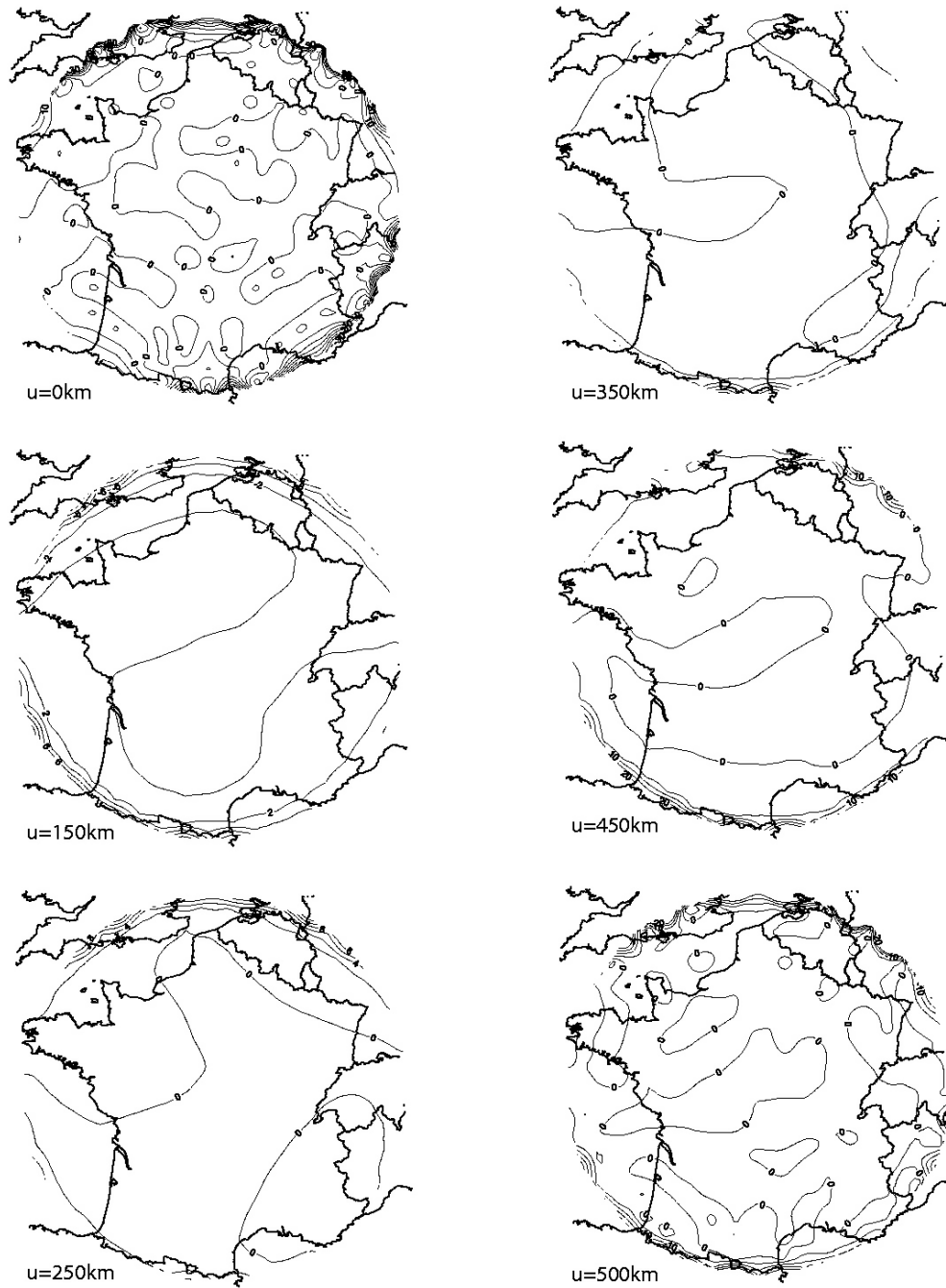


FIG. 14.8 – Résidus entre la composante  $X$  modélisé et le champ synthétique réel. Les intervalles de contours sont de  $5\text{nT}$  en  $u = 0\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$  et de  $2\text{nT}$  ailleurs.

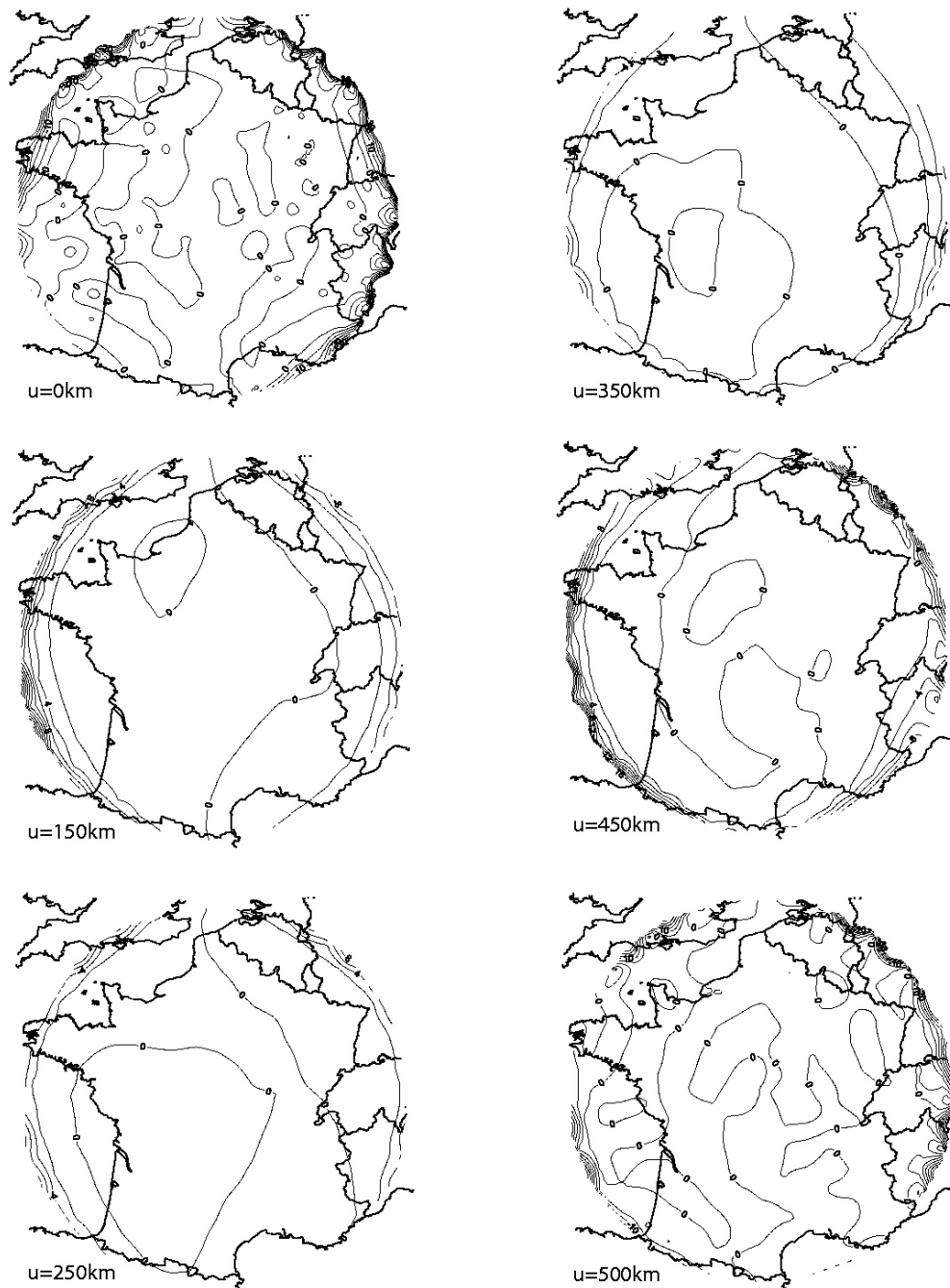


FIG. 14.9 – Résidus entre la composante  $Y$  du modèle et le champ synthétique (voir légende de la figure 14.8).



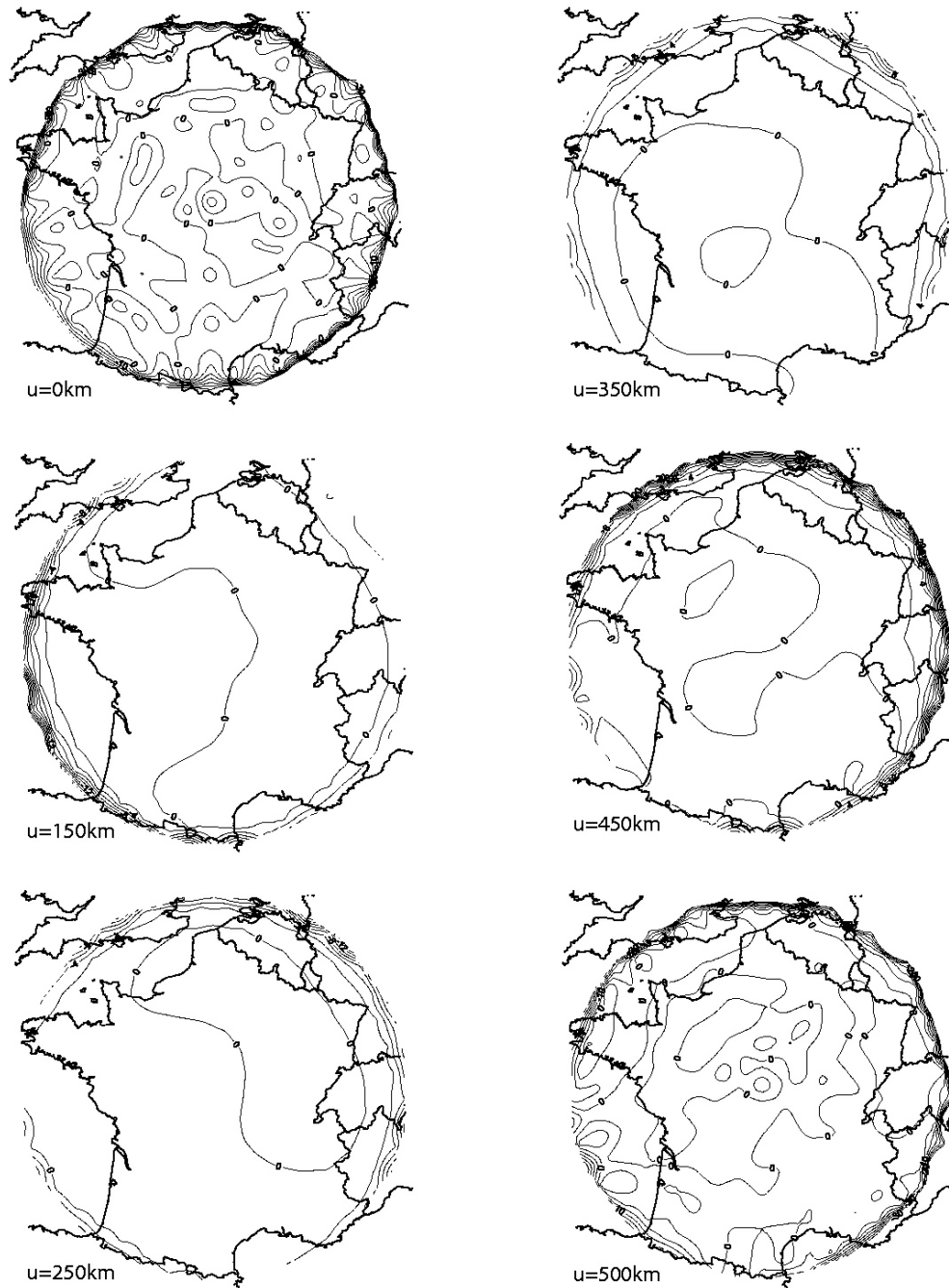


FIG. 14.10 – Résidus entre la composante  $Z$  modélisée et le champ synthétique (voir légende de la figure 14.8)

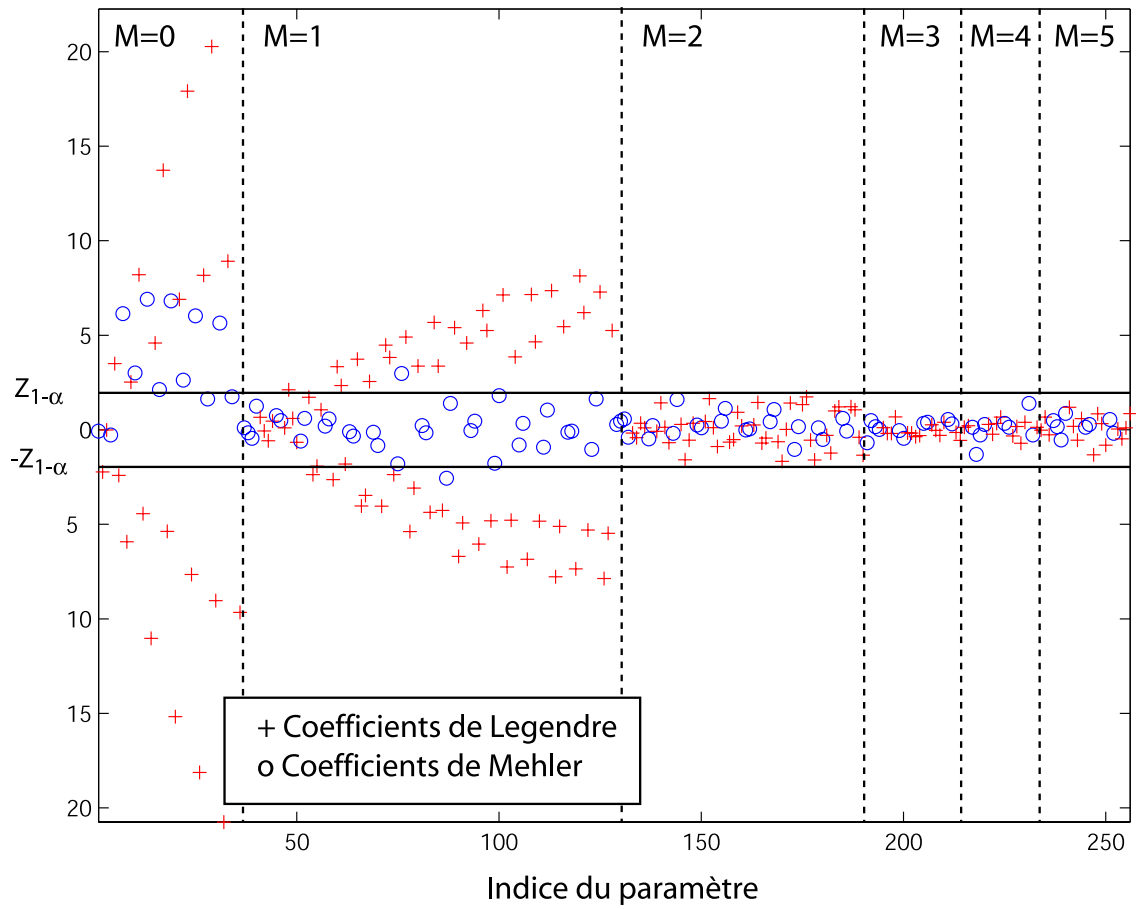


FIG. 14.11 – Cohérence statistique entre les coefficients de Gauss estimés et les coefficients théoriques. Le fait de retrancher une couronne libre les coefficients de Gauss de la base de Legendre.

Dans le cas d'une répartition uniforme de données, en raison des précautions prises pour la construction du maillage (paragraphe 4.1, partie 1), nous pouvons considérer que nous n'avons aucune corrélation entre les coefficients de Gauss. De plus, l'angle  $\varepsilon$  de la couronne est suffisamment petit pour supposer que les propriétés d'orthogonalité des fonctions de Legendre ne sont pas affectées outre mesure, d'autant moins que seules la surface terrestre et la surface supérieure sont concernées par cette mesure. La condition de «bord exclu» (retranchement des points  $\theta > \varepsilon$ ) ne modifie par conséquent pas fondamentalement les propriétés de la matrice d'inversion. La raison de cette différence est à imputer vraisemblablement à la condition de Dirichlet imposée aux fonctions de Legendre en  $\theta = \theta_0$ . Sur la figure, nous avons distingué les coefficients de la base de Mehler des coefficients de la base de Legendre. Nous vérifions indiscutablement cette hypothèse puisque seuls les coefficients de Legendre sont affectés par la condition de «bord exclu». En fait, il n'est pas illégitime de penser que, libres de toute contrainte sur les bords, ces coefficients s'adaptent au mieux à l'énergie magnétique contenue au centre de la calotte. L'allure générale à  $m$  fixé suggère de plus que ce sont les coefficients associés à des indices  $k$  grands qui s'ajustent préférentiellement. Par conséquent, cette méthode pénalise essentiellement les courtes longueurs d'onde, les grandes tendances restent relativement inchangées. Nous retrouvons ici, une fois de plus, le fait que la base des fonctions de Legendre converge lentement et, de ce point de vue, retrancher un bord revient bien à accélérer la convergence de la solution.

### 14.3 Conclusion sur la répartition uniforme des données

Le formalisme des harmoniques coniques permet de modéliser le champ magnétique dans tout le volume ; nous venons de le vérifier sur des exemples synthétiques d'inversion. Dans le cas de données uniformément réparties, nous avons été en mesure de comparer statistiquement, de manière satisfaisante, les coefficients estimés par l'inversion et les coefficients théoriques. Même si les solutions du potentiel convergent lentement en théorie, nous constatons avec satisfaction que le problème inverse permet d'obtenir un modèle qui s'ajuste très bien aux données si l'on retranche les discontinuités topologiques du cône. D'autre part, l'orthogonalité des gradients nous permet de construire une matrice d'inversion quasi-diagonale, ce qui, par rapport au formalisme de Haines, évite les problèmes numériques pour des développements élevés et les corrélations entre les coefficients de Gauss. Dans une situation similaire à celle employée pour tester les bases de fonctions de Haines, nous avons obtenu incontestablement des résultats plus satisfaisants, que ce soit sur l'ajustement des données ou le comportement de l'interpolation dans un volume, qui respecte bien les propriétés des potentiels newtoniens.

Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de nous mettre dans une situation très proche du cas réel d'une inversion sur des données mesurées du champ magnétique.

## Chapitre 15

# Inversion de données synthétiques de répartitions réelles

Nous proposons dans ce chapitre de traiter un cas proche du cas réel en considérant la position exacte des données sur la France. Nous ne retenons pour les considérations qui suivent que les données du satellite CHAMP, les données terrestres et aéromagnétiques. Ceci nous permettra de traiter un exemple particulièrement défavorable de problème inverse, où les données ne sont contenues que dans des régions très localisées du volume conique. Nous pourrions ainsi tester la robustesse des modèles obtenus par le formalisme des harmoniques coniques par des interpolations en altitudes ou en surface et par des comparaisons statistiques sur les coefficients. Les manipulations qui suivent ont comme objectif de pouvoir être appliquée sur les données réelles du champ dans un cône centré sur la France et nous nous mettons par conséquent dans des conditions similaires, notamment pour la sélection des données magnétiques.

### 15.1 Le problème de la variation séculaire

Notre objectif était d'utiliser simultanément les données scalaires du levé aéromagnétique sur la France et l'ensemble des données vectorielles provenant des missions des satellites CHAMP et MAGSAT (nous partons du principe que ØRSTED ne distingue pas les sources crustales car son orbite est élevée). Pour l'étude du champ magnétique sur la France, l'exploitation des données de la prospection aéromagnétique est indispensable car c'est le seul ensemble de données qui offre une couverture complète du territoire français proche de la surface terrestre ; en revanche, cet ensemble de données est vieux de 40 ans et ne contient que des données scalaires du champ. D'un autre côté, nous disposons des données des satellites MAGSAT, prises en 1980 et CHAMP, qui bénéficie des innovations technologiques les plus récentes. Nous disposons ainsi d'une couverture, entre les altitudes 350 et 500km environ, très complète pour les périodes 1980 et 1999 à 2001. Mais le champ magnétique dérive et pour mettre en évidence des contributions lithosphériques, nous devons réduire les jeux de données prises sur ces différentes périodes de temps à une même époque en modélisant la variation séculaire. Cette tâche est spécialement ardue dans le cas de notre proposition de modélisation régionale par le formalisme que nous avons décrit dans la partie 2. En effet, si la méthode est susceptible de modéliser correctement le champ magnétique dans un volume, elle nécessite surtout d'avoir une répartition relativement homogène de données, au moins sur les frontières du domaine. Or, les stations de répétition sont à la surface terrestre et l'extrapolation d'un modèle de variation séculaire dans le volume complet ne peut se faire que par une inversion sous contrainte ou par l'ajout d'une information a priori qui peut se révéler

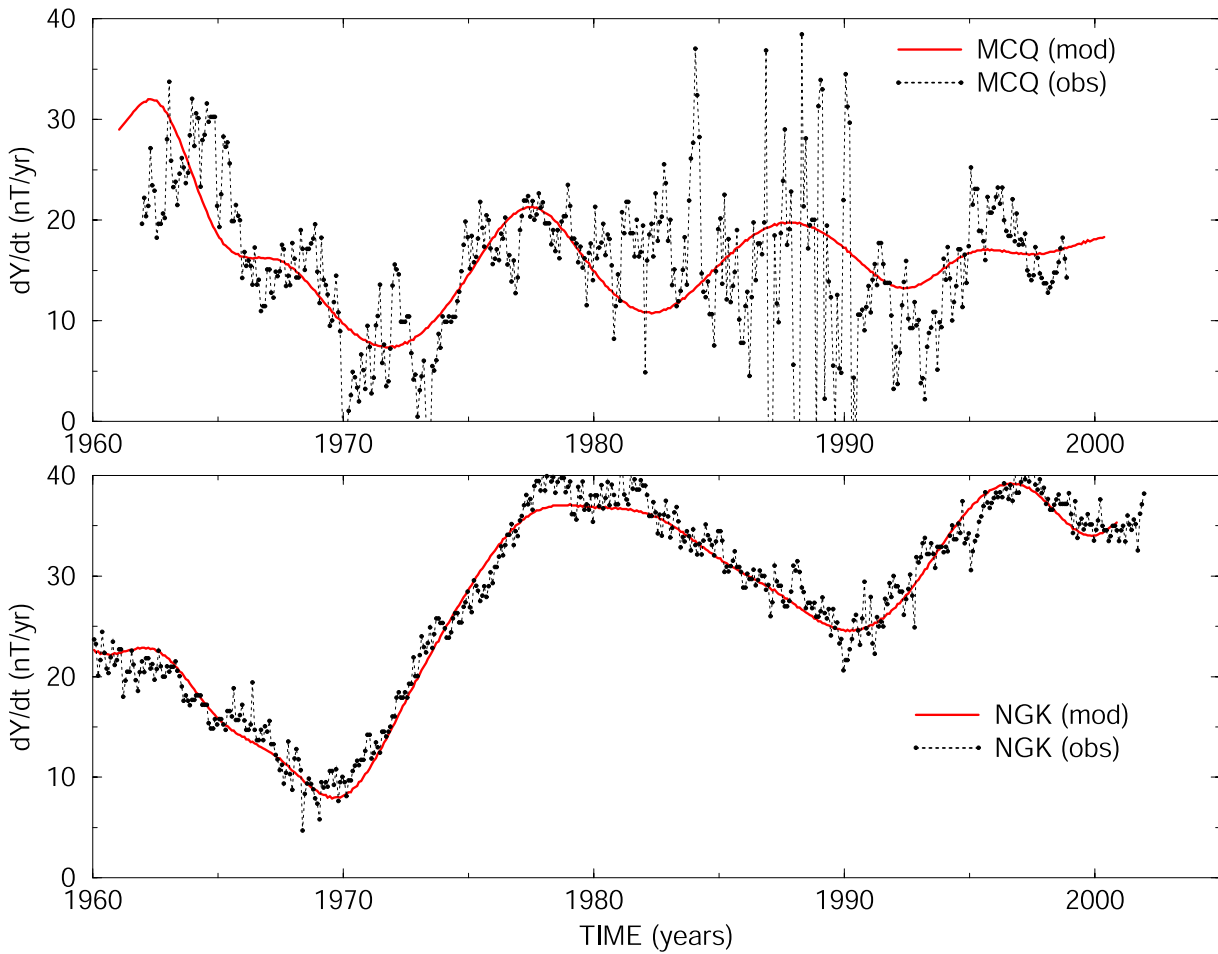


FIG. 15.1 – Différence entre le modèle de variation séculaire de Sabaka et al. (2003) et les mesures réalisées aux observatoires de Macquarie (haut) et de Niemegek (bas). Les courbes représentent deux exemples extrêmes d’ajustements.

prédominante.

Dans une première tentative d’inversion de la variation séculaire, nous avons utilisé le réseau des 33 stations de répétition française au sol. Nous avons ensuite retranché aux données un modèle global de variation séculaire de type IGRF pour chaque année considérée. Cette différence constitue l’anomalie de variation séculaire par rapport au modèle global. Puisque l’intensité du champ décroît avec l’altitude, et que l’anomalie est relativement faible (20 nT environ), nous avons supposé qu’à l’altitude supérieure du cône elle pouvait être considérée comme nulle sur toute la surface. Nous avons donc pu couvrir deux surfaces du cône. Sur la surface latérale, nous n’avons pas de données et nous ne sommes pas autorisés à faire ce type d’hypothèse. Par conséquent, nous avons cherché, lors de l’inversion, à minimiser également l’énergie magnétique dans le cône pour contraindre cette surface. Les résultats obtenus ne sont satisfaisants qu’aux surfaces inférieure et supérieure mais l’interpolation à l’intérieur du domaine n’est pas toujours réaliste. La modélisation de la variation séculaire par les harmoniques sur cône nécessite une attention toute particulière et requiert de nouvelles stratégies et des moyens que nous ne sommes pas en mesure de proposer pour le moment.

L'utilisation des modèles de variation séculaire du type IGRF est brutale car il reste environ 30nT de différence et la modélisation régionale sera inévitablement biaisée. Pour des ensembles de données pris sur de plus courtes périodes que la notre, une alternative possible pourrait être d'utiliser le modèle CM3 de variation séculaire de Sabaka et al. (2003). Ce modèle devra cependant être vérifié avec précaution car si, dans certaines régions du globe, le modèle semble bien s'ajuster aux données des observatoires magnétiques, dans d'autre, l'ajustement est insuffisant pour pouvoir entreprendre des études de champs régionaux précises. La figure montre deux cas extrêmes de la comparaison entre les données enregistrées aux observatoires magnétique et le modèle CM3. En haut, la comparaison est réalisée à l'observatoire de Macquarie (MCQ) en Australie, et en bas, à celui de Niemegk (NGK) en Allemagne. En particulier, le modèle de Sabaka et al. (2003) s'ajuste exceptionnellement bien aux données de l'observatoire de Niemegk. S'il s'ajuste moins bien aux données de l'observatoire australien, la raison est à attribuer vraisemblablement au faible nombre d'observatoires dans l'hémisphère sud. Cette comparaison est, strictement parlant, insuffisante car elle ignore le gradient de la variation régionale. Sur la France, par exemple, la différence de variation séculaire entre l'observatoire de Chambon-La-Forêt et les stations de répétition atteint 10nT/an ([36]). Il faudrait par conséquent réaliser le même exercice sur les ensembles de données de chacune des stations de répétition. Dans certaines régions du globe, comme en Europe de l'Ouest par exemple, cette solution pourrait bien, néanmoins, représenter le meilleur compromis.

## 15.2 Les indices géomagnétiques

Les perturbations géomagnétiques peuvent être surveillées par les observatoires magnétiques au sol enregistrant les trois composantes de champ magnétique. Il existe une variété importante d'indices magnétiques dont certains, en particulier, sont utiles pour la modélisation du champ aux basses ou aux moyennes latitudes.

### 15.2.1 Indice $K_p$

L'indice global  $K_p$  (« *planetarische Kennziffer* »=index planétaire) est défini comme la valeur moyenne des niveaux de perturbations des deux composantes horizontales du champ magnétique observées dans 13 observatoires (dont un seul dans l'hémisphère Sud). Ces perturbations sont dues, comme on sait, aux interactions entre le champ magnétique terrestre et les particules d'origine solaire. Chaque niveau d'activité de la classification est en relation quasi logarithmique avec l'amplitude de la perturbation. Les indices mesurés toutes les trois heures permettent de discriminer les véritables perturbations du champ géomagnétique des variations produites par les courants ionosphériques. L'indice  $K_p$  répertorie 28 niveaux d'activité classés de 1 à 9 comme suit :

$K_p$	0o	0+	1-	1o	1+	2-	2o	2+	...	8o	8+	9-	9o
$nT$	0	4	6	8	10	12	14	18	...	414	472	600	800

Les données terrestres et satellitaires enregistrent donc ces variations qui doivent être filtrées le plus précisément possible pour pouvoir rendre compte au mieux des contributions internes uniquement. Cette classification peut être reliée à l'échelle des variations en nT du champ magnétique. Notons que cette classification nécessite un certain délai avant d'être parfaitement validée. C'est pourquoi nous n'avons gardé pour les données de CHAMP, par exemple, que l'ensemble des données couvrant la période 2001 et 2002 pour lesquelles ces indices sont disponibles, les données postérieures étant en cours de traitement (M. Roharic, IPGP, communication personnelle).

### 15.2.2 L'indice Dst

L'indice Dst (« Disturbed Storm time ») est exprimé en nanoteslas et est basé sur la valeur moyenne de la composante horizontale du champ magnétique terrestre mesuré d'heure en heure dans quatre observatoires géomagnétiques proches de l'équateur magnétique. Cet indice est utilisé pour la détection du commencement des orages magnétiques (« sudden storm commencement »). Si l'ensemble des données restantes, après le filtrage des indices  $K_p$ , offre une couverture suffisante, on pourra utiliser cet indice pour restreindre un peu plus les variations admises du champ.

## 15.3 Sélection des données

Les données nous ont été fournies par Mioara Manda de l'Institut de Physique du Globe de Paris (IPGP) après sélection et retrait des points de mesures erronés. Pour ce qui est des données satellitaires, nous avons bénéficié du traitement préliminaire des données effectué par Mihai Roharic au laboratoire de géomagnétisme de l'IPGP et nous n'avons jamais eu à traiter les données brutes ; seul le filtrage selon l'activité magnétique restait à entreprendre.

Nous avons retenu comme ensemble de données satellites, les enregistrements du satellite CHAMP pour une ouverture de la calotte de  $\theta = 5^\circ$ . L'altitude supérieure du cône a été fixée conformément à l'altitude maximum contenue dans les données. L'orbite de CHAMP est quasi-circulaire, l'altitude minimale au-dessus de la France est de  $390\text{km}$  environ et l'altitude supérieure, de  $450\text{km}$ . Pour éviter les phénomènes de bords, on fixe l'altitude supérieure du cône à  $u = 500\text{km}$ . Le rayon supérieur  $b$  du cône est par conséquent arrondi à  $b = 6871\text{km}$ .

Nous ne considérerons ici que des problèmes linéaires ; par conséquent, les données aéromagnétiques, sont supposées vectorielles et on transforme leurs positions des coordonnées Lambert II étendu aux coordonnées géocentriques.

Enfin, nous prendrons comme données terrestres, les positions des 33 stations de répétition françaises et celle de l'observatoire de Chambon-la-Forêt.

Pour simuler une inversion dans un cas réel, nous filtrons les données sur la base des indices d'activité magnétique. Etant donné les considérations sur les indices  $K_p$  et Dst, l'idéal serait de pouvoir contrôler parfaitement les variations acceptables du champ magnétique et ne retenir que celles qui coïncident avec un bruit sur les données de  $5nT$ . En pratique, la sélection qui vérifie une erreur de  $5nT$  est trop drastique et le jeu de donnée est tel que nous devons faire un compromis entre la couverture des données et la précision admise pour le modèle. Les tests numériques réalisés, suggèrent de ne prendre que les indices  $K_p$  inférieurs à  $2o$ . L'erreur acceptable est donc de  $14nT$  ; et on choisira préférentiellement des indices Dst inférieurs ou égaux à cette valeur.

Le champ synthétique provenant de la différence entre un modèle de Cain et un modèle IGRF est ensuite calculé sur ces positions et ces données synthétiques sont bruitées à  $5nT$ . Nous avons donc un ensemble de 1901 données satellites, qui additionnées à 1419 données aéromagnétiques (nous ne prenons qu'un sous-ensemble du jeu complet des données aéromagnétiques) et aux 34 données terrestres forment un ensemble de 3354 données dans le cône. On montre sur la figure (15.2) leur répartition dans le volume. On ne manquera pas de remarquer la grande disparité dans la distribution des données sélectionnées, notamment en altitude, où la densité de données est nulle entre les surfaces d'élévation  $u = 4\text{km}$  et  $u = 350\text{km}$ . Notons que l'incorporation des données provenant du satellite MAGSAT, mais surtout d'ØRSTED, entraîne une répartition bien meilleure des données dans le volume. En effet, les altitudes ØRSTED permettent d'inclure un ensemble de données à des altitudes différentes de celles de CHAMP ou de MAGSAT ; la couverture en altitude est par conséquent plus homogène.

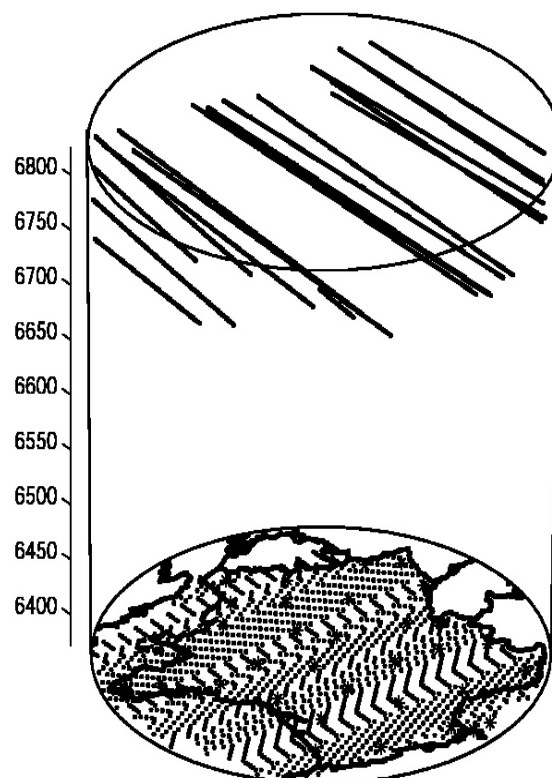


FIG. 15.2 – Distribution des données satellitaires et terrestres sélectionnées dans le volume conique au-dessus de la France.



## 15.4 Inversion sans contrainte

### 15.4.1 Choix des indices de troncature

Dans cette section, on entreprend une inversion par moindres carrés ordinaires sur les 3354 données sélectionnées. Nous retranchons les données contenues dans une couronne proche des discontinuités topologiques. Puisque nous ne savons pas, a priori, quels sont les ordres  $M$  les plus significatifs d'un point de vue de l'énergie, nous n'adaptions pas les différentes troncatures selon  $M$ . On choisit l'ensemble suivant d'indices  $P_{max}$  et  $K_{max}$  pour le développement de chacune des séries :

$$P_{max} = 10 \quad K_{max} = 15 \quad \text{et} \quad M_{max} = 5$$

D'après le chapitre précédent, ce choix des indices est susceptible de nous permettre de modéliser le champ magnétique synthétisé.

### 15.4.2 Exemples d'interpolation dans le volume

Nous utilisons un algorithme de moindres carrés ordinaires avec préconditionnement. Cette manipulation permet de limiter les problèmes numériques des produits de matrice d'une part et d'inversion d'autre part. La décomposition en valeurs singulières nous donne le conditionnement de la matrice d'inversion par le rapport des valeurs propres maximale et minimale de la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . On trouve que  $\lambda_{max}/\lambda_{min} \sim 580000$ . Numériquement, la matrice n'est pas singulière mais le conditionnement est tel qu'il laisse présager d'importantes corrélations entre les coefficients ou des coefficients très mal déterminés.

On trouve un écart-type estimé sur les données de  $\sigma_d^{est} \sim 5,0 \text{ nT}$ . Cette valeur coïncide à peu près avec celle obtenue au paragraphe 14.2.3, elle est surtout égale au bruit des données. Traçons l'interpolation en altitude dans le volume, ceci nous permettra de voir l'évolution des résidus et d'avoir une idée du comportement de l'inversion, notamment dans les régions où les données sont absentes. La figure (15.3) montre le résultat de cette comparaison, parallèlement, on trouve grâce aux expressions (10.3) et (10.2) des valeurs estimées du résidu  $\overline{R}_\Omega$  dans le volume et du résidu  $\overline{R}_{\partial\Omega}$  à la surface terrestre :

$$\overline{R}_\Omega = 47,8nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega} = 95,3,2nT$$

Ces valeurs exécrables laissent supposer que la modélisation a échoué : la figure (15.3) montre que le modèle s'ajuste aux régions couvertes par les données mais que l'interpolation entre les altitudes  $u = 4km$  et  $u = 400km$ , de même que l'extrapolation au-delà de l'altitude  $u = 450km$  sont irréalistes. Pourtant, en rognant la calotte d'un angle  $\varepsilon = 2^\circ$  près des bords et en réalisant la même comparaison sur les champs, les résidus moyen chutent respectivement à :

$$\overline{R}_\Omega(\theta \leq \theta_0 - \varepsilon) = 8,0nT \quad \text{et} \quad \overline{R}_{\partial\Omega}(\theta \leq \theta_0 - \varepsilon) = 2,2nT$$

L'information pertinente semble donc être contenue dans le modèle, mais la figure (15.3) ne laisse rien envisager sur ce point. On peut vérifier que les résidus sont majoritairement dominés par des effets de bords en considérant les interpolations de surface. Nous avons choisi, à titre d'exemple, de ne représenter que la composante  $X$  aux altitudes  $u = 0km$ ,  $u = 200km$  et  $u = 500km$ . La raison du choix de l'altitude de 200km est justifiée par l'observation du bombement dans cette région, siège du maximum des résidus.

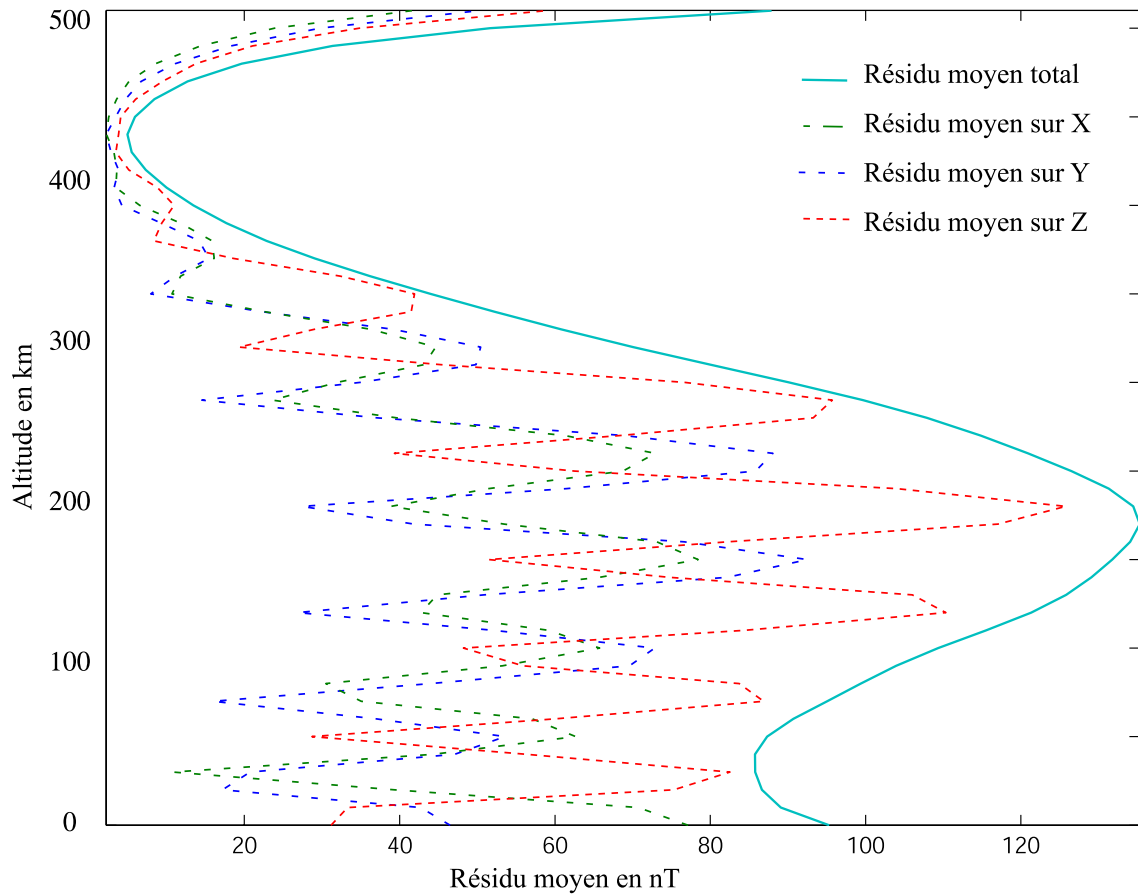


FIG. 15.3 – Résidus en altitude par comparaison entre le modèle obtenu par moindres carrés ordinaires interpolé et le modèle réel. Aucune condition de régularisation n'a été imposée dans l'inversion.

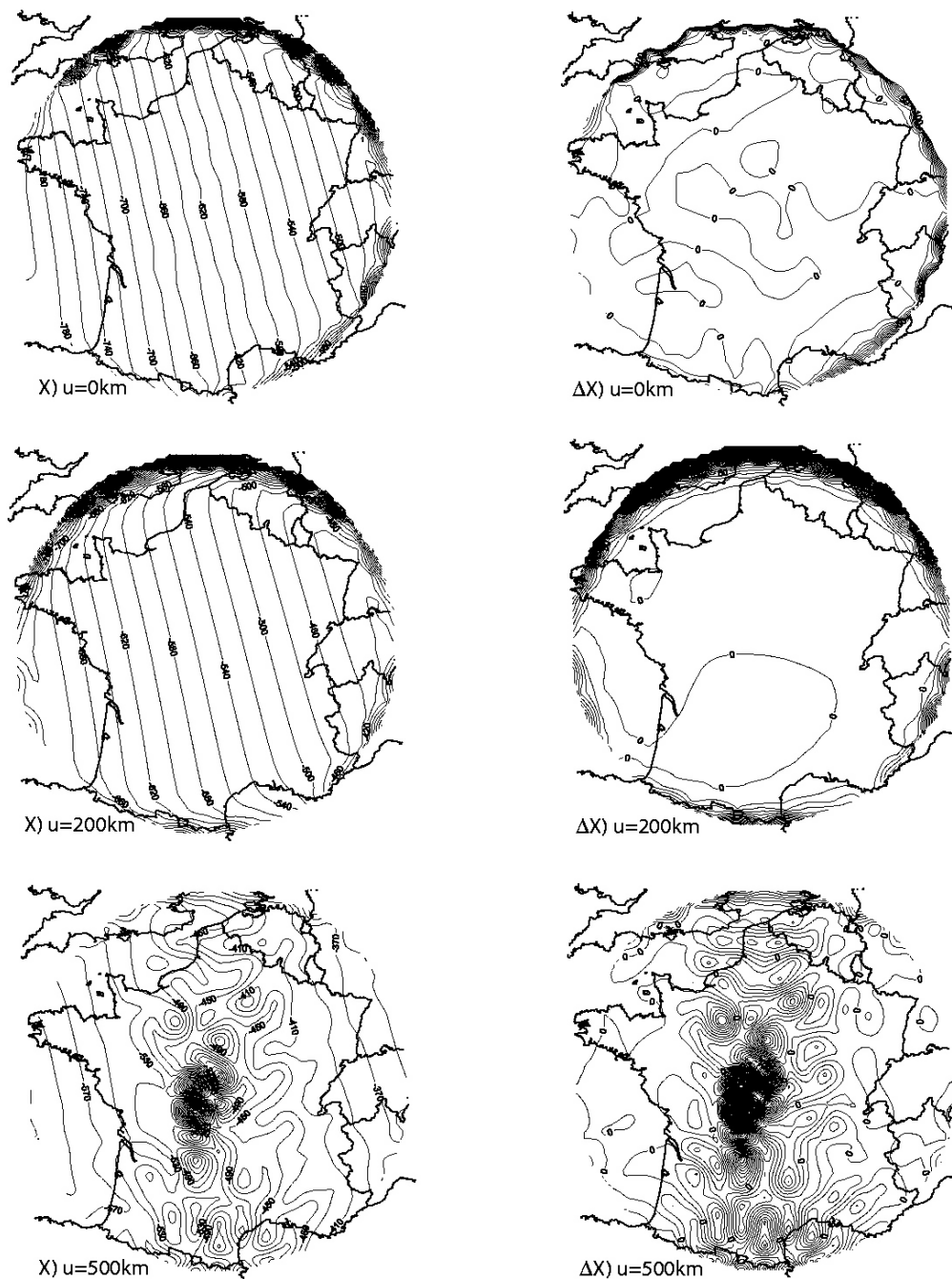


FIG. 15.4 – Nous présentons trois exemples de la composante  $X$  modélisée aux altitudes terrestres,  $u = 200$  km et  $u = 500$  km. Les isolignes pour les résidus sont espacées de 10 nT. Si le modèle est largement dominé par des effets de bords aux altitudes  $u = 0$  et  $u = 200$  km, l'allure du champ en  $u = 500$  km ne peut pas être simplement attribuée aux effets de bords.

En comparant l'interpolation de surface (figure 15.4) avec les distributions de la figure (15.2), on vérifie que les régions où les données sont absentes sont mal représentées. Ceci se caractérise par les oscillations proches de la frontière entre la France et la Belgique, par exemple. De même, à la surface supérieure, on remarque la présence de singularités situées dans une zone en dehors des trajectoires du satellite CHAMP. En revanche, d'un certain point de vue, l'inversion est satisfaisante car nous vérifions que le champ entre les régions comprises entre  $u = 4km$  et  $u = 350km$  a été interpolé de manière acceptable au centre de la calotte. La valeur des résidus est donc majoritairement due aux effets de bords et une inversion sous contrainte pourra pallier cet effet.

Rappelons que la décomposition en harmoniques locales entraîne des contributions de la base de Legendre nulle en  $\theta_0$  pour les composantes  $Y$  et  $Z$  du champ. Par conséquent, les effets de bords circulaires proviennent principalement d'une mauvaise estimation des coefficients de Gauss de la base de Mehler. Ces effets sont bien expliqués par les variations des fonctions coniques en fonction de  $\theta$ . Puisque ces fonctions sont monotones et croissantes, une mauvaise détermination des coefficients de Mehler affecte particulièrement le champ à l'approche des bords.

## 15.5 Inversion sous contrainte

Nous reprenons le même ensemble de données que dans le paragraphe précédent et nous cherchons à déterminer les mêmes coefficients de Gauss. La différence avec la solution par moindres carrés ordinaires est que nous utilisons maintenant une régularisation donnée par l'expression de l'énergie volumique dans le cône. D'une manière générale, ce type d'inversion sous contrainte porte le nom de *régularisation de Tikhonov* ([39]). Les paramètres estimés seront maintenant trouvés en résolvant l'expression (14.6).

### Solution de norme volumique minimale

Une des difficultés majeures d'une inversion sous-contrainte est d'estimer au mieux le facteur d'amortissement  $\lambda$  dans (14.6). Ce critère de régularisation se révèle crucial pour inverser correctement les données et il existe des méthodes variées pour sa sélection. Un facteur d'amortissement trop important minimise l'énergie d'une manière telle, que les données ne seront plus ajustées par le modèle, et un facteur trop faible n'a aucun effet. La méthode la plus populaire, en géophysique, est celle du critère de la courbe en  $L$ , qui montre la valeur du logarithme de l'énergie en fonction du logarithme du facteur d'amortissement (par exemple Korte et Holmes (2002) utilisent cette technique). Le facteur  $\lambda$  sélectionné dans ce type d'étude est celui qui correspond au maximum de courbure. Nous avons essayé plusieurs techniques de détermination de  $\lambda$  dont celle de la courbe en  $L$ ; toutes ont donné un résultat différent pour la sélection de  $\lambda$  et nous avons préféré adopter une stratégie.

Dans notre cas, nous disposons d'un atout supplémentaire, celui de maîtriser le problème direct et de connaître exactement l'énergie magnétique contenue dans le cône. D'après le chapitre 12 (eq. 12.2), l'énergie volumique calculée par les bases locales doit être inférieure à l'énergie volumique calculée par les harmoniques sphériques pour des séries tronquées. Plutôt que de choisir le maximum de courbure sur la courbe en  $L$ , nous avons sélectionné le facteur d'amortissement qui donne la première valeur de l'énergie inférieure à l'énergie globale contenue dans le cône. On trouve dans ce cas :

$$\lambda \sim 1,510^{-10}$$

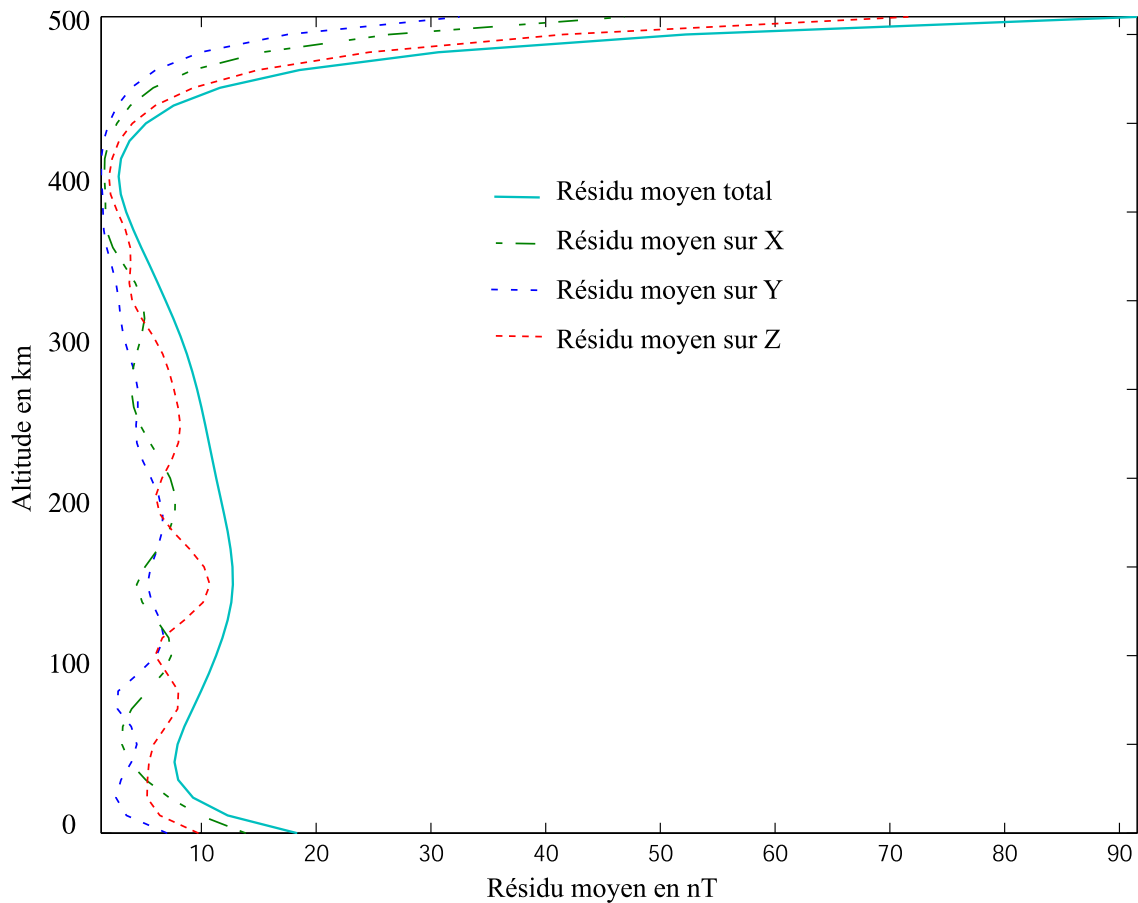


FIG. 15.5 – Résidus moyens par surface avec l'altitude obtenus par la comparaison du modèle de champ et le champ théorique. Comparés à la figure (15.3), les résidus dans la zone centrale ont été amortis.

L'inversion sous contrainte nous donne un écart-type estimé sur les données de  $\sigma_d^{est} \sim 5,0$ . Comparé au paragraphe précédent, cet écart-type n'est pas différent ; par conséquent, nous n'avons rien perdu statistiquement sur l'ajustement des données. En revanche, la figure (15.5), qui montre l'évolution des résidus avec l'altitude, nous indique que nous avons clairement réduit les effets de bords ainsi que le résidu à la surface terrestre.

En revanche, la valeur du résidu sur la surface supérieure est absolument inchangée et laisse craindre que le modèle ne soit pas extrapolable entre les altitudes  $u = 450\text{km}$  et  $u = 500\text{km}$ , c'est-à-dire au-dessus des trajectoires du satellite. La résolution du problème direct à l'altitude supérieure nous donne un champ qui, globalement, ne diffère en rien de celui tracé sur la figure (15.4).

La dernière option que nous pouvons proposer est de réduire le nombre de paramètres de Gauss car les minimisations d'énergie pour résoudre ce problème représentent des conditions trop draconiennes : si nous parvenons à nous défaire des points singuliers à la surface supérieure en augmentant le facteur  $\lambda$ , ceci se fait au détriment de l'ajustement des données dans tout le volume. Or en dehors des surfaces proches de cette limite, la modélisation est satisfaisante.

Nous pouvons distinguer facilement les coefficients responsables des valeurs aberrantes. A la surface supérieure, les contributions de Legendre internes et de Mehler sont faibles, pour

ces dernières, elles sont même nulles pour la composante  $Z$ , or les valeurs aberrantes sont bien présentes. Nos soupçons se portent donc naturellement sur les coefficients de Legendre dits *externes*. Cet état de fait est finalement assez moral car si nous ne disposons que de peu de données dans le volume, la théorie du potentiel nous impose d'avoir au moins des données bien réparties en surface. Pour la surface inférieure, cette condition est vérifiée, pour la surface latérale elle ne l'est pas mais la condition d'amortissement a permis de résoudre en partie ce problème, pour la surface supérieure, nous n'avons aucune donnée car cette surface est distante de 50km de la plus haute trajectoire du satellite CHAMP. De plus, la minimisation de la norme volumique est inefficace.

Avec un choix de troncatures suivant :

$$P_{max} = 10 \quad K_{max}^{interne} = 15 \quad K_{max}^{interne} = 6 \quad \text{et} \quad M_{max} = 5$$

couplé à une inversion avec une condition de norme minimum, nous sommes capable de modéliser le champ à cette altitude. Ces troncatures correspondent à la recherche de 267 coefficients de Gauss. L'écart type estimé par l'inversion est de  $\sigma_d^{est} \sim 5,7nT$ . Le fait de retirer certains coefficients externes a augmenté la valeur de l'écart-type et nous avons par conséquent perdu sur l'ajustement des données. Cette manipulation se fait surtout au détriment de la convergence des solutions sur la surface supérieure. En effet, au paragraphe 10.1 de la seconde partie, nous avons vérifié que les conséquences principales liées au retrait des coefficients de Gauss externes sont la présence d'oscillations dans la représentation du champ sur la limite supérieure et des résidus biaisés.

Sur les figures (15.6), (15.7) et (15.8), nous constatons que les valeurs aberrantes ont bien disparues. En contre-partie, nous avons des oscillations dans la représentation du champ. Ces comportements sont donc bien conforme à ceux prédits par l'expérience et la théorie. Le point surtout intéressant est que nous avons pu modéliser un champ malgré une distribution de données défavorable (voir figure 15.2), et ceci dans tout le volume. La modélisation permet à la fois une interpolation du champ entre  $u = 0km$  et  $u = 350km$  et dans une certaine mesure son extrapolation dans la zone  $u > 450km$ . Pour s'en convaincre une dernière fois, nous avons recours à l'étude des résidus sur différentes surfaces. Les figures (15.9), (15.10) et (15.11) montrent à la fois que le champ est modélisé avec une précision meilleure que 10nT dans tout le volume et que l'absence des coefficients externes se manifeste bien par des structures résiduelles organisées à la surface limite supérieure.

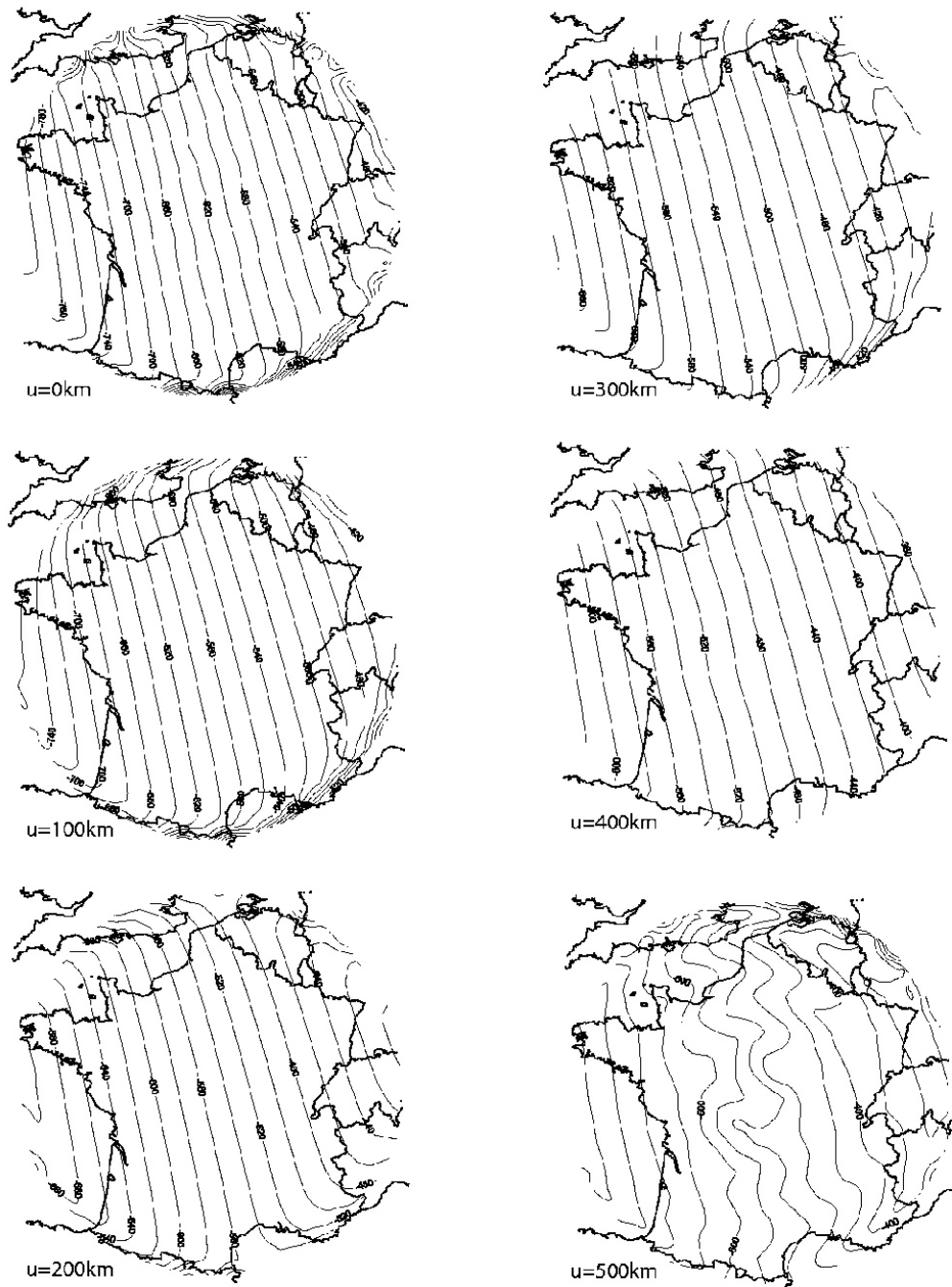


FIG. 15.6 – Modélisation de la composante  $X$  du champ à diverses altitudes. Les effets de bords ont été atténués par une minimisation de l'énergie, et les valeurs aberrantes en négligeant les coefficients externes d'indices  $k > 6$ . Cette dernière manipulation explique les oscillations visibles à l'altitude  $u = 500\text{km}$ .

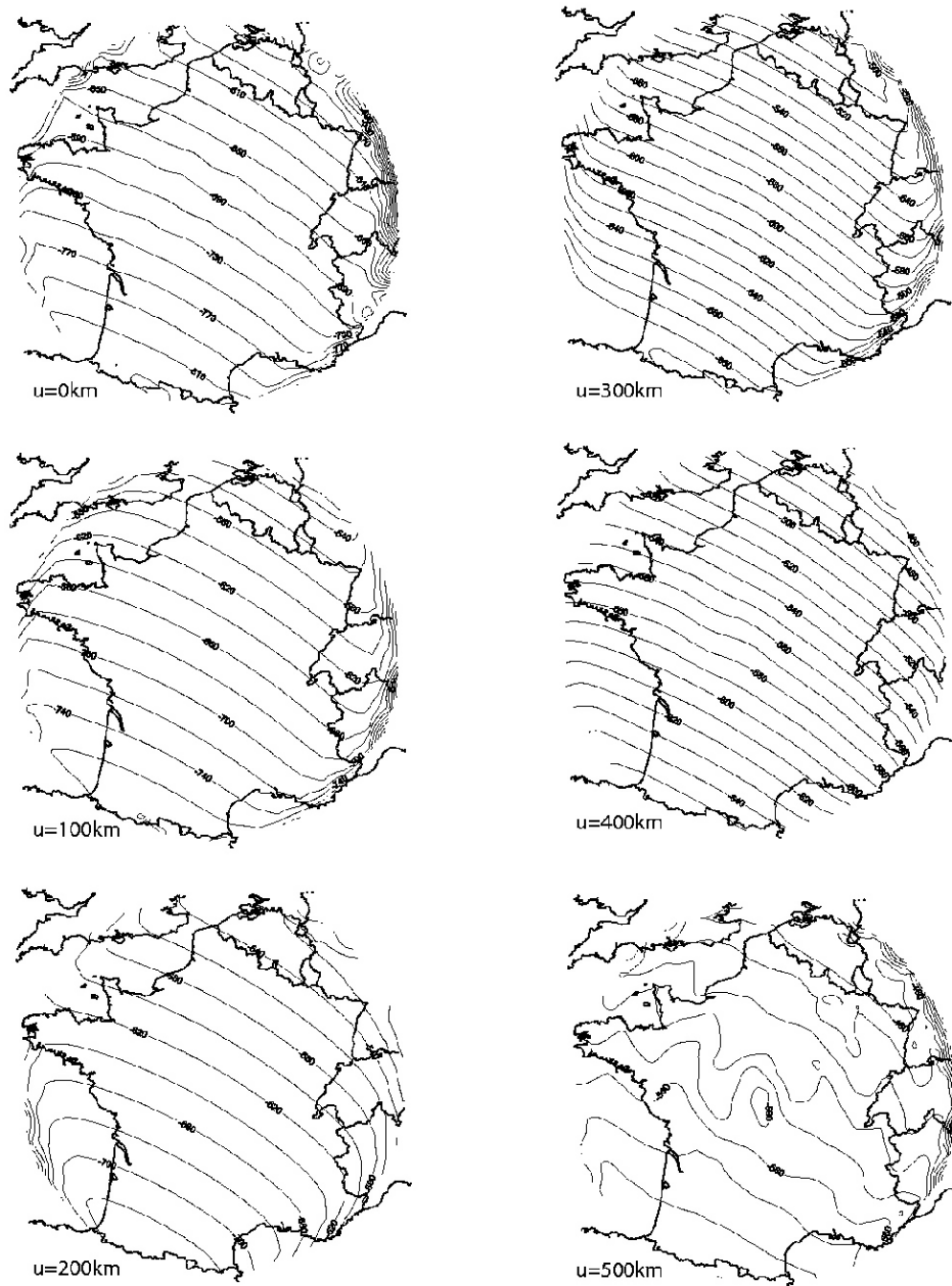


FIG. 15.7 – Composante Y du champ modélisé à partir d’une répartition réelle de données. Voir légende la figure 15.6.



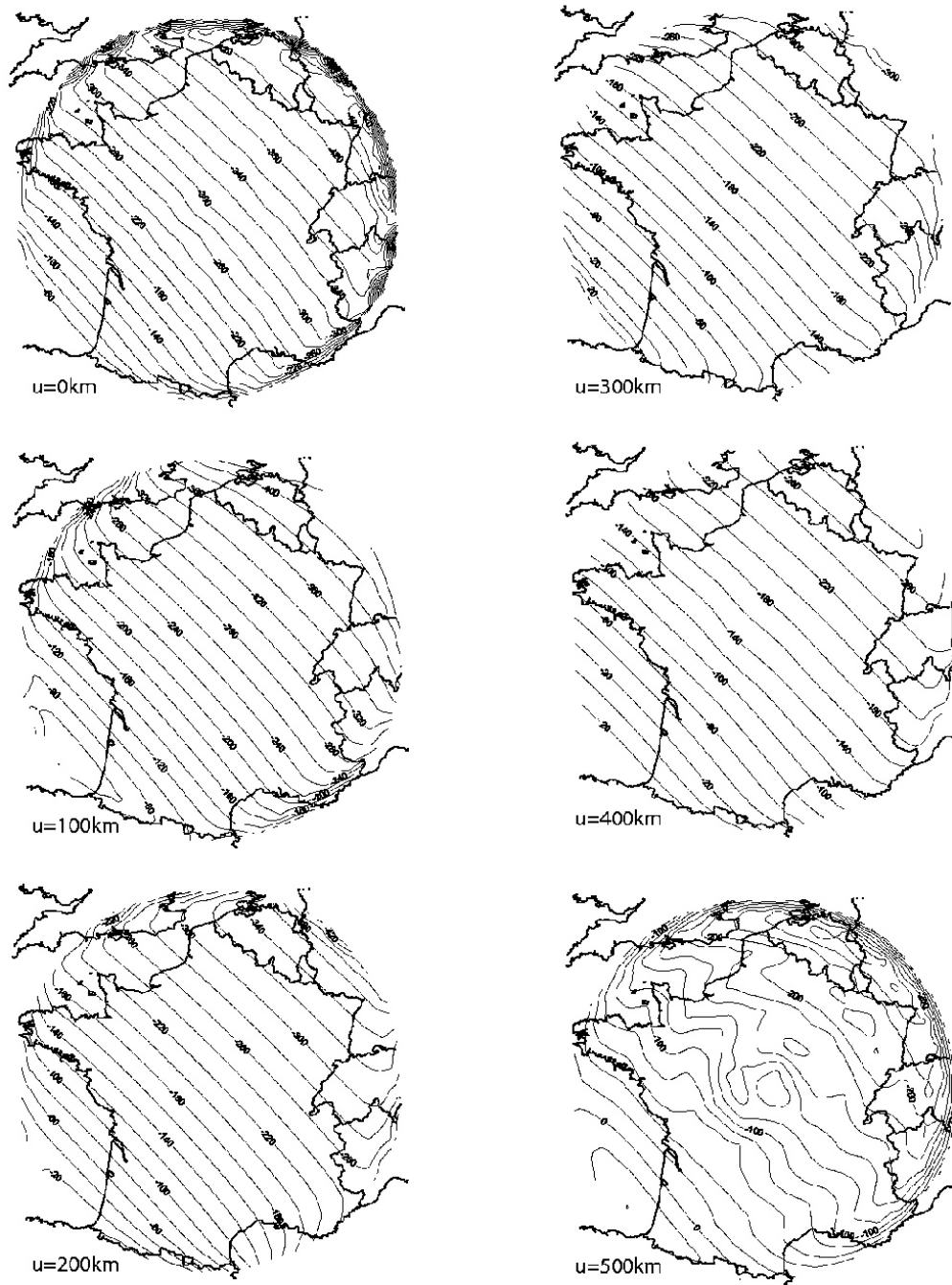


FIG. 15.8 – Composante  $Z$  du champ modélisé à partir d'une répartition réelle de données. Voir légende la figure 15.6.

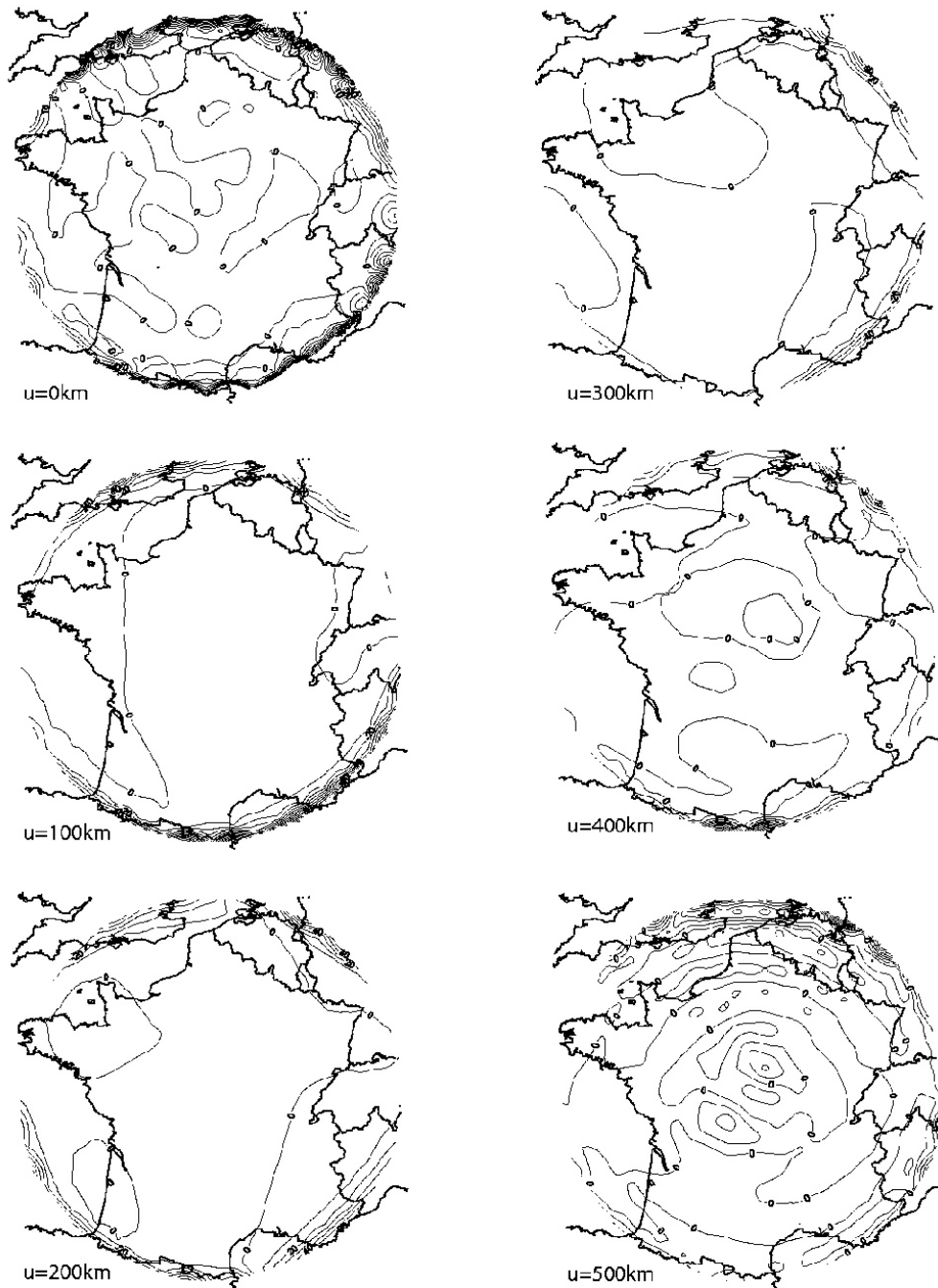


FIG. 15.9 – Résidus entre la composante  $X$  du champ modélisé et le champ synthétique réel. Les lignes de contours représentent des écarts de  $10\text{nT}$ . Remarquons l'apparition de structures organisées en  $u = 500\text{km}$ . Ces structures s'expliquent par une insuffisance dans le développement de la base de Legendre externe.

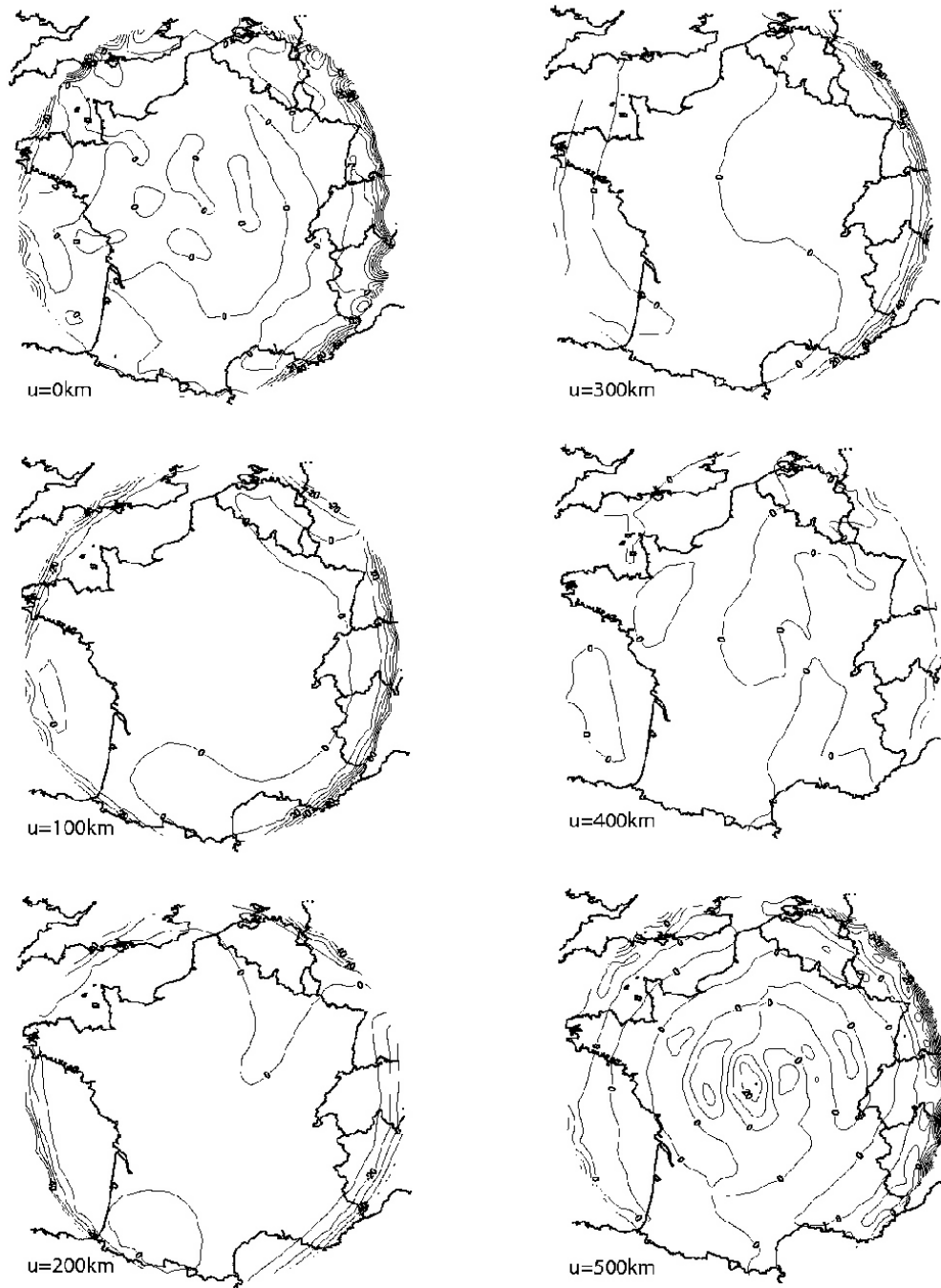


FIG. 15.10 – Résidus entre la composante  $Y$  du champ modélisé et le champ synthétique réel. Les lignes de contours représentent des écarts de 10nT. Voir légende de la figure (15.9).

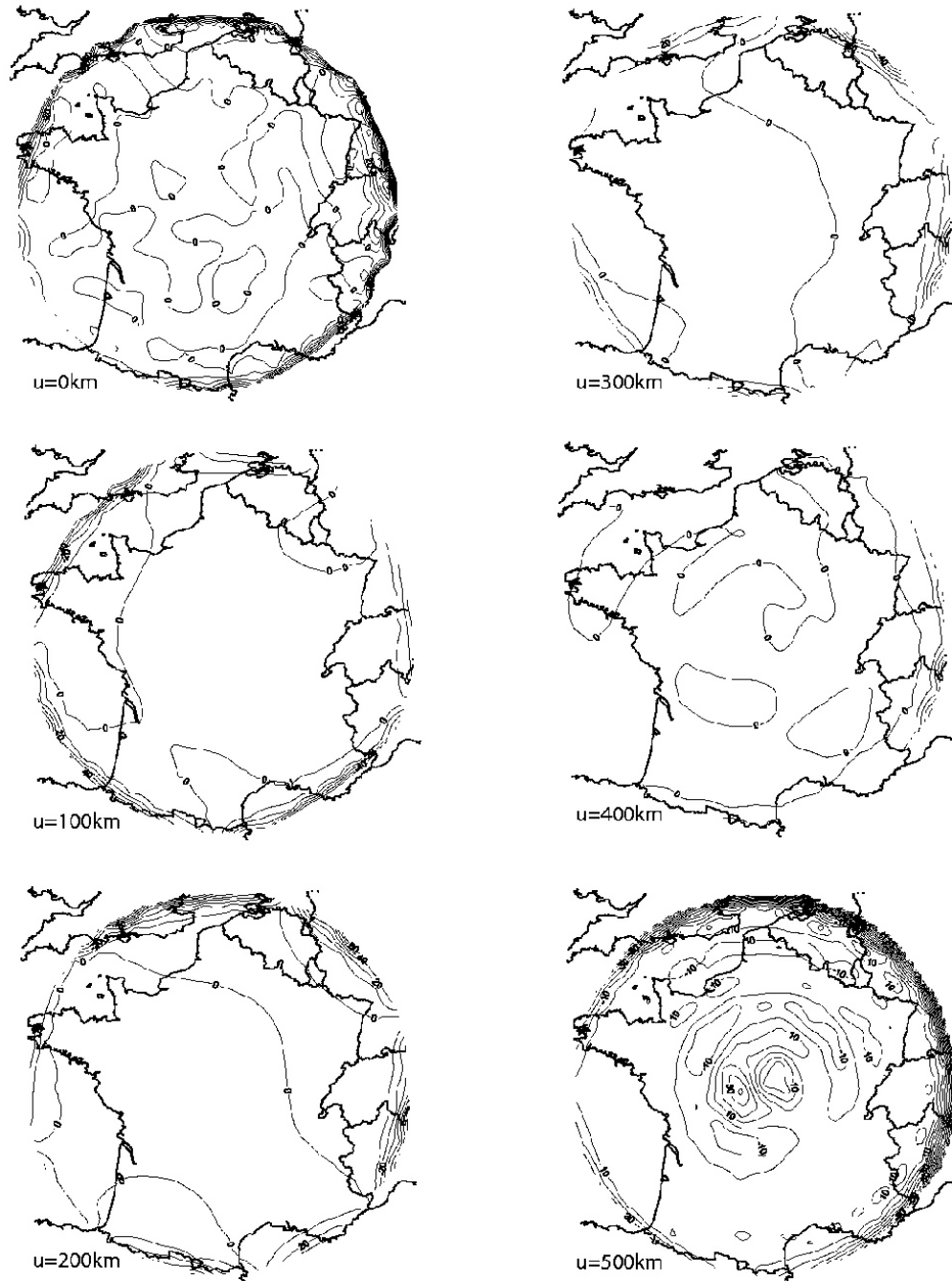


FIG. 15.11 – Résidu entre la composante  $Z$  du champ modélisé et le champ synthétique réel. Les lignes de contours représentent des écarts de 10nT. Voir légende de la figure (15.9).



# Conclusion de la troisième partie

Dans un premier chapitre, nous continuons certaines considérations théoriques en vue de la préparation du problème inverse. Les expressions obtenues nous permettent de comparer les énergies dans le volume exprimées en harmoniques sphériques et en harmoniques sur calotte. En particulier nous avons été amenés à conclure que les développements des séries aux ordres  $m$  devaient être adaptés à la position de la calotte sur la sphère.

Sur la base de ces considérations théoriques, nous entreprenons l'écriture du problème inverse et les choix des troncatures respectives pour les bases de Legendre et de Mehler. Par différents types d'inversion par moindres carrés sur des données réparties diversement dans le volume, nous vérifions que le formalisme des harmoniques dans un cône est apte à modéliser un champ magnétique. Dans un premier temps, nous utilisons une répartition uniforme de données dans le volume de manière à réaliser des études comparatives avec le formalisme de Haines. Ces comparaisons ont montré la supériorité des harmoniques dans un cône aussi bien d'un point de vue de la précision de la résolution que des variations du champ avec l'altitude.

Pour des applications pratiques, les conclusions les plus intéressantes portent sur la différence entre le nombre de coefficients de Gauss théoriquement nécessaire à la représentation d'un champ magnétique et le nombre de coefficients effectivement estimés par inversion. Avec finalement peu de coefficients, nous avons été en mesure de montrer que l'ajustement par moindres carrés pouvait être accéléré par des méthodes très simples comme de s'affranchir des discontinuités topologiques du cône. Ceci a permis de mettre en évidence l'existence d'une erreur sur le modèle liée à la géométrie du domaine. Les résultats de cette expérience ont, en particulier, montré que le problème résolu par moindres carrés s'éloignait finalement du problème théorique (voir commentaires de la figure 14.11), ce qui explique cette différence entre les nombres des coefficients de Gauss théoriques et estimés. Nous avons également été régulièrement confrontés au problème de la reconstruction du champ sur les bords latéraux du domaine. Ces problèmes sont toujours omniprésents et nous pourrions, au mieux les repousser vers les frontières lorsque le nombre de données de surface sera suffisant, au pire agrandir l'angle d'ouverture de la calotte; nous ne sommes donc pas totalement démunis.

Nous avons ensuite entrepris d'utiliser la répartition de données réelles, préalablement soigneusement sélectionnées. Une inversion par moindres carrés simples n'a pas donné de résultat vraiment satisfaisant et nous avons dû avoir recours à une inversion sous contrainte de norme volumique minimale. Cette méthode a considérablement réduit les effets de bords latéraux en contraignant essentiellement les coefficients de Mehler. Nous n'avons pu réduire les problèmes de valeurs aberrantes sur la surface externe qu'en renonçant à certains paramètres du modèle. Malgré tout ceci, le champ est finalement modélisé avec un écart type de 6nT contre 5nT de bruit injecté dans les données. Les compromis que nous avons fait sont donc largement acceptables et les comparaisons avec le champ synthétique dans le cône ont montré que nous ne dépassions jamais 10nT d'erreur au centre de la calotte.



# Conclusions générales et perspectives





Dans une première partie, nous avons approfondi, d'un point de vue numérique, la théorie des harmoniques sphériques sur calotte proposée par Haines (1985) dans l'objectif de pouvoir modéliser le champ magnétique sur une région du globe à partir des données distribuées à des altitudes diverses. Nous avons pris soin d'éliminer les imprécisions numériques dans le calcul des fonctions de Legendre généralisées grâce à l'implémentation de l'algorithme d'Olver et Smith (1983), et par conséquent dans le calcul des degrés  $n$ . En effet, une partie des difficultés communément rencontrées dans l'utilisation de la méthode SCHA provient de l'insuffisance du développement des séries, d'où la nécessité de conserver la précision de calcul pour des fonctions de degré  $n$  élevés. Nous avons vu que ces degrés croissent d'autant plus vite que les calottes sont de tailles réduites et les petites calottes bénéficient en priorité de cette amélioration. Après nous être affranchis de la plupart des problèmes numériques, nous avons entrepris de résoudre le problème inverse dans le cas d'une répartition idéale des données. Les premiers résultats, obtenus par moindres carrés ordinaires, n'ont pas été concluants et nous avons tenté d'autres stratégies d'inversion dont la décomposition en valeurs singulières et la méthode des chaînes de Markov. La première technique a mis en évidence que le problème inverse était mal posé : en raison de la non-orthogonalité des bases de fonctions la matrice d'inversion devient rapidement singulière et nous avons été confrontés au problème du choix du seuil de la valeur propre minimale acceptable. La seconde technique a essentiellement montré les importantes corrélations entre les coefficients de Gauss du modèle et le fait que certains coefficients de petites valeurs pouvaient être bien déterminés. Cette dernière conclusion vient corroborer l'idée que la sélection des paramètres par le  $F$ -test séquentiel de Efron est une entreprise douteuse lorsque appliquée à SCHA, et nous avons renoncé à cette technique, comme d'autres auteurs l'ont fait avant nous (Par exemple : [64]). Pour essayer d'isoler l'origine de ces problèmes, nous avons concentré notre attention sur la répartition des données la plus compatible avec l'ordre du développement des séries. Nous avons été amenés à étudier plus en détail la notion de longueur d'onde. Au cours de cette pérégrination, nous avons pu constater que la longueur d'onde était elle-même un concept difficilement interprétable directement sur la calotte, et si elle représente une tentative pour optimiser les développements en séries selon la densité des données, elle n'a que peu de relation avec les découpages géométriques de la calotte.

Les diverses techniques d'inversion ne nous ont donc pas permis de modéliser un champ synthétique, ne serait-ce que sur une surface, et nos soupçons se sont alors portés sur la validité même de la formulation des harmoniques sphériques sur calotte. Pour mettre en évidence, empiriquement, les failles de la méthode, nous avons réalisé ensuite une inversion de données réparties uniformément dans un volume. Cette situation devait être celle pour laquelle SCHA était dévolue, et nos résultats sur un exemple démontrent que cet objectif ne peut être atteint. Bien sûr, SCHA a, par le passé, donné des résultats exploitables (par exemple : [44]) mais ce fut dans le cas de calotte de taille importante et l'imprécision du champ modélisé, même si elle n'est pas quantifiable précisément, est manifestement importante. Des arguments plus théoriques, mais qui ne constituent pas une démonstration, sont ensuite proposés et soulignent des incohérences dans la formulation. Nous montrons notamment que les coefficients de Gauss sont fonctions de  $r$ , ce qui explique les problèmes d'interpolation en altitude, et que les composantes horizontales et verticales du champ ne semblent pas pouvoir être résolues avec les mêmes ensembles de coefficients de Gauss, ce qui explique les limites rencontrées lors de l'inversion sur une surface uniquement. L'écriture d'un problème sur-déterminé, les améliorations numériques et la construction d'une grille d'échantillonnage restent cependant les ingrédients immuables pour une inversion régionale et nous les avons amplement exploités par la suite.

Dans une seconde partie, nous avons écrit le formalisme des harmoniques sur calotte comme un problème de conditions aux limites dans un cône. Partant du principe que différents pro-

blèmes de conditions aux limites pouvaient être équivalents, nous avons exploré quatre types de problèmes de conditions aux limites qui mettent en jeu des conditions aux limites de Dirichlet, de Neumann ou mixtes. Ces études préliminaires formelles, nous ont conduit à la définition de deux problèmes parmi les quatre donnant lieu à des gradients de potentiels orthogonaux. Cette propriété, très importante pour le problème inverse, n'a pas été jugée suffisante pour exclure d'emblée les solutions restantes et nous avons résolu chacun des quatre problèmes sur la base d'un seul d'entre eux. Nous avons obtenu par la résolution du premier problème deux types de bases de fonctions dont l'une est identique à la base proposée par Haines. La seconde, en revanche, est tout à fait inhabituelle en géomagnétisme et fait intervenir les fonctions coniques de Mehler et les nouvelles fonctions radiales sont solutions d'un problème de Sturm-Liouville. Elles forment par conséquent une base orthogonale sur laquelle les fonctions  $(a/r)^n$  ou  $(r/a)^n$  avec  $n$  entier, qui régissent les variations d'un potentiel avec l'altitude, s'expriment aisément. A ce titre, le nouveau formalisme est susceptible effectivement de représenter un champ magnétique et ses variations en altitude dans un volume.

Nous avons surtout concentré notre attention sur les aspects théoriques du nouveau formalisme et nous avons pu obtenir, pour la première fois, une relation analytique entre les harmoniques sphériques ordinaires et les harmoniques dans le cône. Cette relation nous a fourni les expressions reliant les coefficients de Gauss de la base locale à ceux de la base globale des harmoniques sphériques. Partant de ces relations, nous avons pu reconstruire avec une bonne précision un champ magnétique dans le cône.

Ces constats, sur la représentation du champ et sur de la vitesse de convergence des solutions, mis en parallèle avec la distribution habituelle des données magnétique, nous ont autorisés à sélectionner définitivement la formulation la plus commode en vue d'une inversion.

Dans une troisième partie, nous avons préparé et résolu le problème inverse. Dans un premier temps, nous avons exploité tous les bénéfices que nous pouvions tirer de la comparaison entre les formalismes local et global dans un cône. Cette comparaison aboutit notamment à la définition de spectre d'énergie en fonction de l'ordre  $m$ ; définition qui permet de mettre en relief que les troncatures des séries du développement local doivent être adaptées à l'énergie portée par les ordres  $m$ . Alors qu'en modélisation globale, on a une relation simple entre le degré  $n$  et l'ordre  $m$  ( $m \leq n$ ), qui est liée à la relation entre les harmoniques sphériques et le groupe des rotations sur la sphère, on perd complètement cette notion sur un cône. D'une manière générale, pour un ordre  $m$  donné, le choix de la troncature en  $n$  dépend de considérations telles que, la longueur d'onde minimale résolue par les données, la réduction du phénomène de Gibbs et l'énergie associée à chaque harmonique. En termes mathématiques, il faut, dans chaque application, trouver un recouvrement adapté pour les séries doubles en  $m$  et  $k$ . Cette remarque constitue un premier pas vers l'évaluation des paramètres de Gauss qui sont les plus significatifs et elle trouve particulièrement son intérêt dans la résolution d'un problème inverse sur des données mal réparties.

Nous pouvons, de même qu'en harmoniques sphériques ordinaires, définir des normes du champ magnétique pour des régularisations d'un problème inverse mal posé. Ces normes peuvent être envisagées de différentes manières. Nous avons, tout d'abord, considéré les normes classiques de volume et de surface, puis, d'après leurs expressions nous avons été amenés à définir de nouvelles normes, moins simplement liées à l'énergie, mais dont les propriétés sont plus conformes, de notre point de vue, à la pénalisation des coefficients associés aux courtes longueurs d'onde.

Nous considérons enfin différents exemples de problèmes inverses. Dans un premier temps, nous traitons le cas de données synthétiques uniformément réparties dans le cône. Cela nous permet à la fois de vérifier que les coefficients estimés par inversion sont statistiquement cohérents avec les coefficients théoriques, et d'illustrer les qualités des modèles obtenus dans ces cas. Nous

en déduisons des conclusions utiles à une simulation synthétique sur l'inversion de données réelles. Dans l'exemple traité, les données sont filtrées et sélectionnées selon un protocole assez standard basé sur les indices d'activité magnétique, et nous incluons aux données terrestres uniquement les données du satellite CHAMP. Nous nous sommes donc placés dans une configuration défavorable pour la répartition des données. Pourtant, les résultats sont plutôt encourageants et l'inversion sur la base des harmoniques dans le cône a montré que nous pouvions inverser ces données sans difficultés majeures. De légères conditions « régularisantes » sur l'énergie nous ont permis de contraindre l'inversion et d'obtenir des modèles de champs synthétiques qui, confrontés au modèle synthétique réel, se sont montrés tout à fait réalistes.

## Problèmes non résolus et perspectives

Le formalisme que nous proposons nécessite des développements théoriques complémentaires. Pour ce qui est de l'application géophysique à proprement parler, l'essentiel des ingrédients est d'ores et déjà disponible.

Les caractéristiques géométriques du cône utilisées pour les expériences synthétiques sont celles d'un cône centré sur la France, les jeux de données proviennent des campagnes aéromagnétiques et des missions satellites. La différence principale avec la situation que nous avons traitée est que, les données aéromagnétiques étant des données scalaires, le problème inverse n'est normalement pas linéaire. Le problème inverse peut néanmoins, dans ce cas, être linéarisé de manière relativement simple et nous ne sommes plus confrontés alors qu'au délicat problème de l'élimination de la variation séculaire. Pour ce qui est des sources externes, nous en retranchons la majeure partie par une sélection appropriée sur les données. Si nous admettons que le modèle de Sabaka et al. (2003), qui couvre la période de 1960 à 2000, est de précision acceptable, alors la modélisation du champ magnétique sur la France pourrait bien représenter une perspective d'avenir proche, du moins sous une forme imparfaite. Rappelons que, pour les besoins de la discussion, nous n'avons utilisé que les données du satellite CHAMP. L'utilisation combinée des ensembles de données MAGSAT, CHAMP et ØRSTED améliore substantiellement la répartition générale des données dans le volume.

Enfin, n'excluons pas la modélisation du champ de gravité qui, au même titre que le champ magnétique, est un champ de potentiel. En adaptant le formalisme au potentiel de gravité, nous pourrions l'appliquer à des études gravimétriques. La mention de cette dernière possibilité est surtout importante depuis que la géophysique dispose de données gravimétriques prises aux altitudes satellitaires, grâce notamment aux missions CHAMP (lancée en juillet 2000), GRACE (lancée en mars 2002) ou encore la mission prochaine GOCE (prévue pour 2005). De plus, par la nature même du champ de gravité, les problèmes de sources externes s'excluent d'eux-mêmes.

D'un point de vue plus théorique, il conviendrait de démontrer formellement l'inadéquation de la théorie de Haines. Nous avons quelques pistes sérieuses qui permettraient d'aboutir à une démonstration, comme l'étude du principe variationnel en utilisant SCHA par exemple. Quelques résultats préliminaires semblent montrer que l'écriture d'une fonctionnelle pour le problème inverse en utilisant les bases de fonctions de Haines dans un volume peut, bien sûr être minimisée, mais ne peut pas être nulle.

Concernant le nouveau formalisme, les problèmes non résolus sont pléthoriques. Les deux majeures concernent le phénomène de Gibbs et la différentiation des sources internes et externes.

Pour ce qui est du phénomène de Gibbs, nous n'avons pas pu fournir, pour le moment, de démonstration sérieuse sur le type de convergence, simple ou uniforme, des bases de fonctions. Lorsque le phénomène aura été proprement caractérisé, nous pourrions nous appuyer sur des

théorèmes mathématiques existants et des procédures bien balisées pour tenter de nous en affranchir. Cet objectif ne pourra être rempli que par une étude sur le type de convergence des séries qui décrivent le champ magnétique total. Si, pour les fonctions de base radiales, nous pouvons nous ramener à un cas proche des séries de Fourier, pour les fonctions de Legendre, leur expression canonique est telle que le type de convergence n'est pas simple à distinguer. Dans l'attente d'un tel développement, et pour minimiser son effet dans une inversion, nous avons proposé une solution simple qui consistait à retrancher les discontinuités topologiques du cône. Pour plus de rigueur, nous pourrions éventuellement nous reposer sur la stratégie d'une modélisation en deux temps. Nous avons montré que deux des décompositions donnent lieu à des gradients orthogonaux et qui ont des vitesses de convergences différentes pour chacune des bases de fonctions. En modélisant les données à l'aide d'une première décomposition et en modélisant par la suite les résidus avec la seconde, nous pourrions, peut-être, limiter significativement ce phénomène.

Un autre problème non résolu fondamental concerne la différenciation entre les sources d'origines externes et d'origines internes. Dans la modélisation régionale, telle que nous l'avons écrite, ces considérations ne peuvent plus être déduites simplement des fonctions de bases radiales du champ. Même si ce problème apparaît comme nouveau, nous pouvons sans complexe nous risquer à prétendre qu'il était déjà préexistant dans l'écriture de SCHA selon Haines (1985). Par conséquent, cette caractéristique n'est pas propre à notre formalisme. La cause de cette difficulté est sans doute à attribuer à la présence d'une limite latérale au domaine, limite qui n'existe pas en harmoniques sphériques. Nous n'avons pas d'idée précise sur ce point et nous ne pouvons envisager, en premier lieu, que des techniques propres au traitement du signal pour espérer faire cette distinction. Selon une idée des plus élémentaires, le champ d'origine interne décroît avec l'altitude, par conséquent, une croissance inattendue du champ à l'approche de l'altitude supérieure serait capable de nous indiquer que nous sommes en présence de contributions externes. Une solution moins subjective serait peut être de considérer le cône complémentaire au cône de la représentation régionale de manière. Dans ce cas, la sphère serait complètement incluse dans les deux cônes et, d'un point de vue topologique, le concept d'interne et d'externe redeviendrait plus facile à appréhender en l'absence de frontières latérales. Bien entendu, les développements pour réaliser cette étude lèvent de nouvelles difficultés, notamment dans le calcul des fonctions coniques pour des ouvertures de cônes aussi importantes.

La mention de cet obstacle nous permet de faire la digression suivante : Si nous pouvions traiter le cas particulier d'un cône d'ouverture  $\theta_0 = 90^\circ$ , assimilable à une demi-coquille sphérique, nous pourrions faire la jonction entre les harmoniques sphériques et les harmoniques dans un cône. Il serait intéressant en effet, d'un point de vue théorique, de pouvoir vérifier que la limite de la modélisation régionale est bien la modélisation globale.

Enfin, il serait judicieux de poursuivre des investigations sur les méthodes d'inversion, notamment pour résoudre des données en  $r=a$  uniquement car, si cette méthode est dévolue à l'analyse d'un champ dans un volume, nous sommes confrontées naturellement au problème de données réparties sur une surface uniquement. A première vue, la modélisation d'une telle distribution, par exemple la modélisation régionale de la variation séculaire, reste hasardeuse en l'absence d'information supplémentaire.

# Annexes



## Introduction

Les fonctions de Legendre généralisées sont une extension des fonctions de Legendre à des degrés  $n$  et ordres  $m$  quelconques. Leurs définitions sont variables et leurs représentations multiples selon leurs arguments et leur domaine de définition. Ainsi, sous la terminologie de fonctions de Legendre associées trouvons-nous des fonctions aux comportements radicalement différents. Leur appartenance à la même famille se justifie par certaines propriétés mathématiques similaires et par leurs fonctions génératrices identiques; en fait, nous avons vu qu'elles étaient solutions de la même équation différentielle. Les fonctions de Legendre font partie de la classe des *fonctions spéciales* (autrement appelées *fonctions hautement transcendentales*), nombreuses sont donc les propriétés qui les caractérisent. En contrepartie, ces fonctions sont souvent lourdes à manipuler, notamment si l'on cherche à définir une norme de type  $L^2$  pour ces fonctions. Pour réduire de manière significative un certain nombre de problèmes numériques nous proposons le développement de la normalisation complète pour les fonctions coniques de Mehler.

Le secteur de recherche en évaluation numérique des fonctions spéciales est très actif car les difficultés qu'elles soulèvent sont largement consensuelles. Certains numériciens *philanthropes* (J. Segura,...) proposent ponctuellement de nouveaux algorithmes ou de nouvelles optimisations numériques pour l'estimation d'une très grande variété de fonctions spéciales. Ces algorithmes sont souvent dans le domaine public et accessibles sur internet. La terminologie mathématique est omniprésente et est indissociable des fonctions de Legendre qui font, par nature, appel à une grande diversité de fonctions. La sobriété dans la terminologie n'est pas de mise car elle nous prive des découvertes numériques les plus récentes. On ne sera donc pas surpris de trouver dans les pages qui suivent des fonctions aux noms exotiques tels que *Lerch* ou *digamma*.

C'est parfois cette diversité de représentation qui pose la difficulté d'une formulation générale des équations régissant les fonctions de Legendre. Comme nous le verrons par la suite, même les relations de récurrence doivent par moment être remaniées selon la fonction de Legendre que l'on cherche à exprimer, selon sa définition, la représentation que l'on a adoptée, ou son intervalle d'application.





# Annexe A

## Produits scalaire et normes des fonctions de Legendre

### A.1 Avertissement

Pour manier convenablement les fonctions de Legendre il est utile de pouvoir exploiter l'ensemble des relations de récurrence qui existent. Nous avons régulièrement utilisé ces relations de récurrence qui offrent un excellent outil pour les vérifications numériques. Elles sont donc souvent essentielles. Cependant, outre les erreurs typographiques qu'elles génèrent parfois dans les publications, elles souffrent souvent d'une disparité de définition qui rendent certaines relations de récurrence obsolètes. Chaque discipline ayant ses habitudes et ses modes de représentation propres, le choix de leur définition est rarement mentionné. La moindre différence de définition entraîne une réaction en chaîne sur toutes les propriétés qui en découlent et dont on oublie parfois l'origine et il faut souvent faire preuve de circonspection.

Prenons la définition des fonctions de Legendre de Robin (1959) :

$$P_n^m = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)} \sin^m \theta F(m-n, n+m+1, 1+m; \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (\text{A.1})$$

Cette expression provient directement de la définition des fonctions de Legendre associées par les polynômes de Legendre en utilisant la formule de Rodrigues :

$$P_n^m = (-1)^m \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta^m} \quad (\text{A.2})$$

Cette définition est par ailleurs similaire à celle de Hobson (1965) et par conséquent également à la définition proposée par Haines. Remarquons cependant qu'elle diffère de celle de Cheinway et Hwang (1997) ou de W. Bosch (2000) qui utilisent :

$$P_n^m = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d \cos \theta^m} \quad (\text{A.3})$$

Ces différences sont fondamentales lorsque l'on cherche à exploiter les relations de récurrence. Ainsi par (A.1), on a :

$$\frac{dP_n^m}{d\theta} = m \cot(\theta) P_n^m + P_n^{m+1}$$

mais par (A.3) on trouve :

$$\frac{dP_n^m}{d\theta} = -m \cot(\theta) P_n^m + P_n^{m+1}$$

Pour notre part, nous utilisons l'algorithme d'Olver et Smith pour le calcul des fonctions de Legendre de degrés réels. La définition n'est pas explicite mais on montre néanmoins que la définition d'Olver et Smith pour les *fonctions de Ferrer* est :

$$P_n^m = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left( \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right)^{m/2} F \left( -n, n+1, 1-m; \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Cette définition est équivalent à celle utilisée par Robin (1959) dans (A.1). Par souci de clareté et de cohérence, cette définition sera adoptée pour les fonctions de Legendre et de Mehler pour la représentation en fonctions hypergométriques.

## A.2 Produits scalaires et normalisations des fonctions de Legendre

Nous prendrons les fonctions de Legendre généralisées dans leur acceptation la plus générale. Cette définition embrasse aussi bien les fonctions de Legendre à degrés réels que les fonctions coniques de Mehler à degrés complexes. Les développements suivants supposeront que les degrés  $n$  appartiennent à l'espace complexe  $\mathbb{C}$ . La seule restriction étant que l'ordre  $m$  soit entier. Nous nous appuyerons sur des résultats bien connus, exempts d'erreurs typographiques (par exemple, [55] et [29]).

### A.2.1 Produits scalaires

En reprenant les étapes de la résolution du Laplacien on trouve, après séparation des variables, que les  $P_n^m(\cos\theta)$  satisfont l'équation différentielle :

$$\frac{d}{d\cos\theta} \left[ (1-\cos^2\theta) \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\cos\theta} \right] - \frac{m^2}{1-\cos^2\theta} P_n^m(\cos\theta) = -n(n+1) P_n^m(\cos\theta)$$

En faisant le changement de variable  $\mu = \cos\theta$ , on obtient la forme usuelle de l'équation de Sturm-Liouville :

$$-\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \right] + \frac{m^2}{1-\mu^2} P_n^m(\mu) = n(n+1) P_n^m(\mu) \quad (\text{A.4})$$

Nous poserons d'autre part, l'opérateur de Legendre  $L_m$  que nous avons déjà rencontré (voir section préliminaire du premier chapitre) :

$$L_m = -\frac{d}{d\mu} \left[ (1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] + \frac{m^2}{1-\mu^2} \quad (\text{A.5})$$

donc pour deux degrés  $n_i, n_j$  et à  $m$  fixé, l'équation (A.4) s'écrit respectivement :

$$L_m(P_{n_i}^m) = n_i(n_i+1) P_{n_i}^m(\mu) \quad (\text{A.6a})$$

$$L_m(P_{n_j}^m) = n_j(n_j+1) P_{n_j}^m(\mu) \quad (\text{A.6b})$$

En multipliant (A.6a) par  $P_{n_j}^m(\mu)$  et (A.6b) par  $P_{n_i}^m(\mu)$  et en soustrayant on trouve :

$$P_{n_j}^m(\mu)L_m(P_{n_i}^m) - P_{n_i}^m(\mu)L_m(P_{n_j}^m) = (n_i(n_i + 1) - n_j(n_j + 1))P_{n_i}^m(\mu)P_{n_j}^m(\mu)$$

On peut ensuite intégrer cette équation sur l'intervalle  $\mu \in [\mu_0, 1]$

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_j}^m(\mu)L_m(P_{n_i}^m) - P_{n_i}^m(\mu)L_m(P_{n_j}^m)d\mu = (n_i(n_i + 1) - n_j(n_j + 1)) \int_{\mu_0}^1 P_{n_i}^m(\mu)P_{n_j}^m(\mu)d\mu \quad (\text{A.7})$$

Or on montre, en utilisant explicitement l'expression de l'opérateur  $L_m$  (eq. A.5), que :

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_j}^m(\mu)L_m(P_{n_i}^m) - P_{n_i}^m(\mu)L_m(P_{n_j}^m)d\mu = \left[ (1 - \mu_0)^2 \left( \frac{dP_{n_j}^m}{d\mu} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\mu} P_{n_j}^m \right) \right]_{\mu_0}^1$$

et donc d'après (eq. A.7) :

$$\int_{\mu_0}^1 P_{n_i}^m(\mu)P_{n_j}^m(\mu)d\mu = \frac{1}{(n_i(n_i+1) - n_j(n_j+1))} \left[ (1 - \mu_0)^2 \left( \frac{dP_{n_j}^m}{d\mu} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\mu} P_{n_j}^m \right) \right]_{\mu_0}^1$$

Cette expression est tout à fait générale, on peut maintenant considérer le résultat selon les espaces auxquels appartiennent les degrés  $n_j$  et  $n_k$ .

**Si**  $n_l, n_j \in \mathbb{R}$

En revenant à la variable  $\theta$  on trouve simplement que :

$$\boxed{\int_0^{\theta_0} P_{n_i}^m(\cos \theta)P_{n_j}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{n_i(n_i+1) - n_j(n_j+1)} \left( \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} P_{n_j}^m \right)_{\theta_0}} \quad (\text{A.8})$$

Remarquons, comme il l'a déjà été spécifié (De Santis et al. [29]) que le signe du membre de droite de l'équation diffère de celui donné par Haines (1985).

**Supposons**  $n_j \in \mathbb{R}$  **mais**  $n_i = -1/2 + i\tau \in \mathbb{C}$

Cette solution apparaît dans le cas du produit scalaire des fonctions de Legendre avec les fonctions de Mehler. Ce produit scalaire n'entre pas directement en jeu dans les quatre décompositions du problème initial mais à l'intérieur du calcul des gradients du potentiel et dans le calcul des normes. Il peut également s'avérer utile pour certaines vérifications numériques. En changeant de formalisme pour les fonctions de Mehler, pour garder la notation de Robin (1959) et de Zhurina et al. (1963), on trouve que (A.8) s'écrit , étant donné que :

$$n_i(n_i + 1) = - \left( \tau^2 + \frac{1}{4} \right)$$

de la façon suivante :

$$\boxed{\int_0^{\theta_0} K_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta)P_{n_j}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = - \frac{\sin \theta_0}{(\tau^2 + \frac{1}{4}) + n_j(n_j+1)} \left( K_{-1/2+i\tau}^m \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta} - P_{n_j}^m \frac{dK_{-1/2+i\tau}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0}} \quad (\text{A.9})$$

**Supposons**  $n_j = -1/2 + i\alpha$  **et**  $n_i = -1/2 + i\tau$

Alors (eq. A.8) devient :

$$\int_0^{\theta_0} K_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) K_{-1/2+i\alpha}^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{\alpha^2 - \tau^2} \left( K_{-1/2+i\tau}^m \frac{dK_{-1/2+i\alpha}^m}{d\theta} - K_{-1/2+i\alpha}^m \frac{dK_{-1/2+i\tau}^m}{d\theta} \right)_{\theta_0} \quad (\text{A.10})$$

### A.2.2 Expressions analytiques de la norme

On ne peut pas définir directement la norme des expressions (eq. A.8) et (eq. A.10) en raison de la singularité du dénominateur lorsque les deux degrés sont identiques. On peut néanmoins appliquer la règle de l'Hospital sur le membre de droite de ces relations.

Soit si :

$$f = \frac{dP_{n_j}^m}{d\theta} P_{n_i}^m - \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} P_{n_j}^m$$

et

$$g = n_i(n_i + 1) - n_j(n_j + 1)$$

alors :

$$\lim_{j \rightarrow i} \frac{f}{g} = \lim_{j \rightarrow i} \frac{\partial f / \partial n_i}{\partial g / \partial n_j}$$

et donc pour respectivement (eq. A.8) et (A.10) on trouve :

$$\int_0^{\theta_0} P_{n_i}^m(\cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{2n_i + 1} \left( \frac{\partial P_{n_i}^m}{\partial n_i} \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} - \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{dP_{n_i}^m}{d\theta} P_{n_i}^m \right)_{\theta_0} \quad (\text{A.11})$$

De même pour les fonctions de Mehler on obtient :

$$\int_0^{\theta_0} K_{\tau}^{m^2} \sin \theta . d\theta = \frac{\sin \theta_0}{2\tau} \left[ \frac{dK_{\tau}^m}{d\theta} \frac{\partial K_{\tau}^m}{\partial \tau} - K_{\tau}^m \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dK_{\tau}^m}{d\theta} \right]_{\theta_0} \quad (\text{A.12})$$

L'expression de ces normes, analytiques, suggèrent que nous soyons en mesure de calculer explicitement les dérivées partielles en  $\tau$  des fonctions de Mehler. On pourrait choisir de calculer cette expression par différence finie qui semble offrir une approximation suffisante de la norme. Cette option est acceptable pour les fonctions de Legendre généralisées de degrés  $n$  réels en raison, d'une part de leur valeur généralement faible en  $\theta_0$ , d'autre part parce que le choix des conditions aux limites nous affranchit de la soustraction. En revanche, elle devient rapidement instable et trop imprécise pour être appliquée aux fonction de Mehler en raison de leur grande magnitude et de la soustraction des deux membres entre corchets dont aucun ne s'annule en  $\theta_0$ . Nous avons donc suivi l'option qui consiste à calculer analytiquement les expressions des dérivées partielles en  $\tau$ , ceci est l'objet de l'annexe suivante.

## Annexe B

# Normalisation complète des fonctions coniques de Mehler

### B.1 Fonctions coniques de Mehler de degré complexe $K_{-1/2+i\tau}^m$

L'étude des fonctions de Mehler a montré que leur comportement était très sensible à l'ouverture de l'angle de la calotte. Pour tenter d'améliorer le conditionnement de la matrice d'inversion il est indispensable de normaliser ces fonctions. Ceci nous permettra d'obtenir des coefficients de Gauss locaux en fonction des coefficients de Gauss globaux libres d'une erreur de précision numérique importante d'une part, et d'éviter la multiplication d'un nombre très petit (le coefficient de Gauss) avec un nombre très grand (la fonction conique) lors du calcul du problème direct d'autre part. Nous cherchons donc à normaliser complètement ces fonctions dans l'intervalle  $[0, \theta_0]$  et  $\theta_0 < \pi$ .

**Définition :** *Pour simplifier la représentation, on travaillera sur une variable  $\tau$  plutôt que sur l'indice  $p$  en gardant à l'esprit que l'un et l'autre sont liés par cette simple relation :  $\tau = p\pi/S$ . De plus, on préfère écrire  $K_\tau^m$  plutôt que  $K_{-1/2+i\tau}^m$  pour simplifier la lecture des expressions.*

Utilisons la formule (A.12) de l'annexe précédente. On cherche en premier lieu à réduire cette expression sous une forme plus appropriée. Prenons comme expression de la dérivée, l'expression de Robin ([96], Tome I, chap II) et simplifions l'expression. La relation de récurrence :

$$\frac{dK_\tau^m}{d\theta} = m \cot \theta K_\tau^m + K_\tau^{m+1}$$

nous donne l'expression de la dérivée partielle en fonction de  $\tau$  :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{dK_\tau^m}{d\theta} = m \cot \theta \frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau^m + \frac{\partial}{\partial \tau} K_\tau^{m+1}$$

et en remplaçant dans l'expression (A.12) on obtient l'expression analytique suivante de la norme  $N_{\tau,\tau}$  :

$$N_{\tau,\tau} = \frac{\sin \theta_0}{2\tau} \left[ K_\tau^m \frac{\partial K_\tau^{m+1}}{\partial \tau} - K_\tau^{m+1} \frac{\partial K_\tau^m}{\partial \tau} \right]_{\theta_0} \quad (\text{B.1})$$

Cette expression sera celle qui retiendra notre attention pour le calcul détaillé de la norme. Nous avons choisit au chapitre 3 de la seconde partie, la représentation des fonctions de Mehler sous forme de séries hypergéométriques. On peut écrire la fonction de Mehler sous forme compacte :

$$K_\tau^m(\theta) = C_m(\theta)R_\tau^m F_\tau^m(\theta) \quad (\text{B.2})$$

en posant :

$$C_m(\theta) = \frac{\sin^m \theta}{2^m m!} \quad (\text{B.3a})$$

$$R_\tau^m = \frac{\Gamma(1/2 + m + i\tau)}{\Gamma(1/2 - m + i\tau)} \quad (\text{B.3b})$$

$$F_\tau^m(\theta) = F(m - 1/2 + i\tau, m + 1/2 + i\tau, m + 1, \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad (\text{B.3c})$$

En écrivant (B.1), avec (B.2), on trouve :

$$K_\tau^m \frac{\partial K_\tau^{m+1}}{\partial \tau} = C_m C_{m+1} R_\tau^m F_\tau^m \left[ R_\tau^{m'} F_\tau^m + R_\tau^m F_\tau^{m'} \right] \quad (\text{B.4})$$

$$K_\tau^{m+1} \frac{\partial K_\tau^m}{\partial \tau} = C_m C_{m+1} R_\tau^{m+1} F_\tau^{m+1} \left[ R_\tau^{m+1'} F_\tau^{m+1} + R_\tau^{m+1} F_\tau^{m+1'} \right] \quad (\text{B.5})$$

Le calcul de la norme passe donc par les calculs intermédiaires des dérivées partielles en  $\tau$  des fonctions  $R_\tau^m$  et des fonctions hypergéométriques  $F_\tau^m$ .

### Dérivée partielle des fonctions $R_\tau^m$ par rapport à $\tau$

On a :

$$R_\tau^m = \frac{\Gamma(1/2 + m + i\tau)}{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}$$

et posons  $z = 1/2 - m + i\tau$  alors :

$$R_z^m = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \quad (\text{B.6})$$

donc :

$$\frac{dR_z^m}{dz} = \frac{\Gamma'(z + 2m)\Gamma(z) - \Gamma(z + 2m)\Gamma'(z)}{\Gamma(z)^2}$$

ce qui permet d'écrire,

$$R_z^m{}' = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \left\{ \frac{\Gamma'(z + 2m)}{\Gamma(z + 2m)} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right\}$$

avec  $\Gamma'(z) = d\Gamma(z)/dz$ .

Les fonctions  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  sont les *fonctions digamma* ([1]) définies si  $\Gamma(z)$  est analytique. On sait ([73]) que  $\Gamma(z)$  est analytique  $\forall z \notin \{-\mathbb{N}\}$ . En écrivant explicitement la variable complexe  $z = 1/2 - m + i\tau$  on vérifie que  $\Gamma(z)$  est analytique pour tout  $m$ . On peut donc écrire :

$$R_z^{\prime m} = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \{\psi(z + 2m) - \psi(z)\}$$

Prenons maintenant la relation de récurrence des fonctions digamma suivante ([1]) :

$$\psi(z + 2m) = \psi(z) + \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + z}$$

alors on obtient :

$$R_z^{\prime m} = \frac{\Gamma(z + 2m)}{\Gamma(z)} \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + z}$$

qui se transforme d'après (B.6) en :

$$R_z^{\prime m} = R_z^m \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + z}$$

et en revenant à la variable  $\tau$  on montre que :

$$R_\tau^{\prime m} = iR_\tau^m \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{1}{k + 1/2 - m + i\tau}$$

Remarquons, et on peut le prouver aisément, que la partie réelle de la série en  $k$ , doit être nulle pour que  $R_\tau^{\prime m}$  soit réelle. Soit finalement :

$$R_\tau^{\prime m} = R_\tau^m \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\tau}{(k + 1/2 - m)^2 + \tau^2} \tag{B.7}$$

Pour la suite du développement, on notera :

$$A_m = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\tau}{(k + 1/2 - m)^2 + \tau^2}$$

En revenant à l'expression générale de  $N_{\tau,\tau}$  et en remplaçant dans (B.4) et (B.5) les dérivées  $R_\tau^{\prime m}$  calculées par (B.7), on écrit :

$$N_{\tau,\tau} = C_m C_{m+1} R_\tau^m R_\tau^{m+1} \left\{ F_\tau^{m+1} F_\tau^m (A_{m+1} - A_m) + F_\tau^m F_\tau^{\prime m+1} - F_\tau^{m+1} F_\tau^{\prime m} \right\} \tag{B.8}$$

En définissant  $\delta_m = A_{m+1} - A_m$  on montre que la différence des deux séries se réduit à une série décomposable en une série symétrique plus un terme. On conclut finalement que :

$$\delta_m = \frac{2\tau}{[(m+1/2)^2 + \tau^2]}$$

Il reste maintenant à exprimer les fonctions hypergéométriques ainsi que leurs dérivées par rapport à  $\tau$ .



### Dérivées des fonctions hypergéométriques par rapport à $\tau$

La dérivée partielle des fonctions hypergéométriques s'écrit :

$$\frac{\partial F_n^m}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2+i\tau)_k (m-1/2+i\tau)_k \sin^{2k} \theta/2}{(m+1)_k k!}$$

ici,  $(\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$  est le *symbole de Pochhammer* ([1]).

De manière identique à (B.6), on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (m+1/2+i\tau)_k = (m+1/2+i\tau)_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2+i\tau+j}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (m+1/2-i\tau)_k = -(m+1/2-i\tau)_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2-i\tau+j}$$

donc :

$$\frac{\partial F_n^m}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2+i\tau)_k (m-1/2+i\tau)_k \sin^{2k} \theta/2}{(m+1)_k k!} \left( \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2+i\tau+j} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{m+1/2-i\tau+j} \right)$$

d'où le résultat final par réduction au même dénominateur :

$$\frac{\partial F_n^m}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+1/2+i\tau)_k (m-1/2+i\tau)_k \sin^{2k} \theta/2}{(m+1)_k k!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2\tau}{(m+1/2+j)^2 + \tau^2} \quad (\text{B.9})$$

Nous n'avons pas trouvé de technique de calcul pour simplifier (B.8) à partir de (B.9). On notera donc par conséquent :

$$\boxed{H_\tau^m = F_\tau^{m+1} F_\tau^m \delta_m + F_\tau^m \frac{\partial F_\tau^{m+1}}{\partial \tau} - F_\tau^{m+1} \frac{\partial F_\tau^m}{\partial \tau}} \quad (\text{B.10})$$

Numériquement, l'algorithme prévoit une vérification systématique du signe du terme entre accolade de (B.8).  $N_{\tau,\tau}$  étant la norme au carré, la relation (B.10) doit être positive. Cette expression de  $H_\tau^m$  par (B.10) n'est pas très satisfaisante mais nous n'avons pas pu nous affranchir des sommes, sources d'éventuelles erreurs numériques (notamment la soustraction).

### Écriture de la fonction de Mehler normée

On a, d'après (B.2), l'expression de la fonction conique non normée à  $\tau$  et  $m$  donnés. On se propose de donner l'expression de la fonction conique avec une normalisation complète, grâce à un facteur  $A_\tau$  approprié, telle que :

$$\int_0^{\theta_0} A_\tau^2 (K_\tau^m)^2 d\theta = A_\tau^2 N_\tau = 1$$

Donc  $A_\tau$ , le coefficient de normalisation, doit être tel que  $A_\tau = N_\tau^{-1/2}$ .

En écrivant l'expression de  $N_\tau$  par l'équation (B.8) et en remarquant de plus que :

$$\begin{aligned} C_m C_{m+1} &= \frac{\sin \theta_0}{2(m+1)} C_m^2 \\ R_\tau^m R_\tau^{m+1} &= (\tau^2 + (m - 1/2)^2) R_\tau^{m^2} \end{aligned}$$

On trouve que :

$$N_{\tau,\tau} = \frac{\sin^{2(m+1)} \theta_0}{4(m+1)\tau} (\tau^2 + (m - 1/2)^2) R_\tau^{m^2} C_m^2 H_\tau^m$$

$H_\tau^m$  ayant été définie en (B.10). Ceci nous permet d'écrire :

$$A_\tau^m = 2\sqrt{\left(\frac{(m+1)\tau}{((\tau^2 + (m - 1/2)^2) H_\tau^m)}\right) \frac{R_\tau^m C_m}{\sin^{m+1} \theta_0}} \quad (\text{B.11})$$

soit finalement :

$$\boxed{K_\tau^m(\theta) = 2\sqrt{\left(\frac{(m+1)\tau}{((\tau^2 + (m - 1/2)^2) H_\tau^m)}\right) \frac{\sin^m \theta}{\sin^{m+1} \theta_0} F(m - 1/2 + i\tau, m + 1/2 + i\tau, m + 1, \sin^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (\text{B.12})$$

## B.2 Fonctions coniques de Mehler de degré nul $P_0^m$

Nous avons vu que les fonctions  $P_0^m$  étaient réductibles à une forme trigonométrique simple :

$$P_0^m(\theta) = \Gamma(m) \tan^m \frac{\theta}{2} \quad (\text{B.13})$$

On peut considérer ces fonctions comme faisant partie des fonctions de Mehler. Elles sont également positives et monotones croissantes et nous les avons définies de manière à ce qu'elles respectent les propriétés générales des fonctions de Legendre (voir paragraphe 6.2.2).

Cherchons le scalaire  $A_m$  tel que :

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{\theta_0} P_0^{m^2} \sin \theta \cdot d\theta}} \quad (\text{B.14})$$

et notons :

$$I_m = \int_0^{\theta_0} P_0^{m^2} \sin \theta d\theta$$

Nous nous proposons de calculer explicitement cette intégrale.

**Calcul de l'intégrale  $I_m$** 

D'après (B.13),  $I_m$  s'écrit aussi :

$$I_m = \int_0^{\theta_0} \tan^{2m} \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta$$

En utilisant l'identité trigonométrique  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ , l'expression devient :

$$I_m = 2 \int_0^{\theta_0} \frac{\sin^{2m+1} \theta/2}{\cos^{2m-1} \theta/2} d\theta \quad (\text{B.15})$$

Cette formulation a l'avantage de pouvoir être développée par une formule de récurrence. En effet, de façon générale ([95]) :

$$\int_0^{x_0} \frac{\sin^{m'} x}{\cos^n x} dx = -\frac{\sin^{m'-1} x_0}{(m'-n) \cos^{n-1} x_0} + \frac{m'-1}{m'-n} \int_0^{x_0} \frac{\sin^{m'-2} x}{\cos^n x} dx$$

Donc, en remplaçant  $\begin{cases} m' = 2m + 1 \\ n = 2m - 1 \\ x = \theta/2 \end{cases}$  on trouve dans notre cas :

$$I_m = -2 \frac{\sin^{2m} \theta_0/2}{\cos^{2(m-1)} \theta_0/2} + 2m \int_0^{\theta_0} \tan^{2m-1} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (\text{B.16})$$

Définissons maintenant l'intégrale  $J_m$  telle que :

$$J_m = \int_0^{\theta_0} \tan^{2m-1} \frac{\theta}{2} d\theta$$

**Calcul de l'intégrale  $J_m$** 

Pour calculer l'intégrale  $J_m$  on fait le changement de variable suivant :

$$u = \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{soit} \quad \theta = 2 \arctan u$$

et donc :

$$J_m = \int_0^{\theta_0} \tan^{2m-1} \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \int_0^{u_0} \frac{u^{2m-1}}{1+u^2} du \quad (\text{B.17})$$

Le calcul de l'intégrale en fonction de  $u$  se fait par division polynomiale en remarquant que :

$$\frac{u^{2m-1}}{1+u^2} = u^{2m-3} - \left[ u^{2m-5} - \left[ \dots - \left[ u - \frac{u}{1+u^2} \right] \right] \right]$$

On montre finalement que :

$$\frac{u^{2m-1}}{1+u^2} = (-1)^{m+1} \left[ \frac{u}{1+u^2} + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j u^{2j-1} \right]$$

L'expression peut être intégrée sans difficulté terme à terme puisque la série est finie. On peut écrire après intégration :

$$J_m = (-1)^{m+1} \left[ \ln(1+u_0^2) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j} u_0^{2j} \right]$$

Si on insère cette expression dans (B.16) on obtient :

$$I_m = -2 \frac{\sin^{2m} \theta_0/2}{\cos^{2(m-1)} \theta_0/2} + 2(-1)^{m+1} m \left[ \ln(1 + \tan^2 \frac{\theta_0}{2}) + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(-1)^j}{j} \tan^{2j} \frac{\theta_0}{2} \right]$$

Cette expression est numériquement difficile à calculer précisément.  $I_m$  étant la norme au carré, son signe doit être positif. Ce test montre certaines instabilités numériques dans le calcul. On doit donc poursuivre le développement en revenant à la variable  $u$ , pour plus de simplicité dans les expressions. Le développement en série de  $\ln(1+u_0^2)$  permet d'écrire  $I_m$  sous la forme suivante :

$$I_m = -2u_0^{2m} \cos \theta_0/2 + 2m(-1)^{m+2} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} u_0^{2j}$$

Remarquons ensuite que :

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} u_0^{2j} = u_0^{2m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+m} u_0^{2j}$$

On peut définir les *fonctions Lerch-phi* ([35]) comme :

$$\mathcal{L}\varphi(z, \alpha, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+v)^\alpha} \tag{B.18}$$

qui sont une généralisation des sommes de Riemann. Alors, en terme des *fonctions de Lerch*, l'expression (B.19) devient, par rapport à la variable  $\theta_0$  :

$$I_m = 2 \tan^{2m} \frac{\theta_0}{2} [m\mathcal{L}\varphi(-\tan^2 \theta_0/2, 1, m) - \cos^2 \theta_0/2] \tag{B.19}$$

Cette expression de la norme est maintenant plus stable à calculer. Ainsi  $A_m$  (B.14) devient :

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(m) \tan^m \frac{\theta_0}{2} \sqrt{2 [m\mathcal{L}\varphi(-\tan^2 \theta_0/2, 1, m) - \cos^2 \theta_0/2]}} \tag{B.20}$$

En conséquence, la fonction  $P_0^m$  (B.13) complètement normalisée s'écrit :

$$P_0^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \theta_0}} \text{ pour } m = 0 \quad (\text{B.21})$$

$$P_0^m = \left( \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right)^m \frac{1}{\sqrt{2[m\mathcal{L}\varphi(-\tan^2 \theta_0/2, 1, m) - \cos^2 \theta_0/2]}} \text{ pour } m > 0 \quad (\text{B.22})$$

## Annexe C

# Les solutions du problème dans un cône semi-infini

Les résultats analytiques présentés dans cette annexe ont été produits par Jean-Philippe Hoffbeck, stagiaire à l'Institut de Physique du Globe de Strasbourg en 2002.

### C.1 Le problème de condition aux limites pour un cône infini

Considérons le domaine  $\Omega$  non borné suivant :

$$\Omega = \{a \leq r, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

et le problème de condition aux limites défini par :

$$\Delta V = 0 \tag{C.1a}$$

$$V|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = F|_{\partial\Omega_{\theta_0}} \tag{C.1b}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = G|_{\partial\Omega_a} \tag{C.1c}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta, \varphi) = 0 \tag{C.1d}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = 0 \tag{C.1e}$$

Dans ce cas également, il existe plusieurs problèmes de conditions aux limites ; nous n'avons gardé que celui qui se rapproche de la décomposition *PIII* dans le cas d'un cône fini. Remarquons que le problème mixte conduit à l'absence de condition particulière pour les fonctions  $F$  et  $G$  liée à la condition de flux nul.

Décomposons le problème initial sur  $V$  en deux sous-problèmes sur  $V_1$  et  $V_2$ , qui possède maintenant tout deux des conditions aux limites partiellement homogènes :

$$V = V_1 + V_2 \tag{C.2}$$

On cherche donc à résoudre séparément les deux problèmes de conditions aux limites suivants :

$$\begin{array}{lcl}
\Delta V_1 = 0 & & \Delta V_2 = 0 \\
V_1|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = F|_{\partial\Omega_{\theta_0}} & & V_2|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = 0 \\
\left. \frac{\partial V_1}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = 0 & + & \left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = G|_{\partial\Omega_a} \\
\lim_{r \rightarrow \infty} V_1(r, \theta, \varphi) = 0 & & \lim_{r \rightarrow \infty} V_2(r, \theta, \varphi) = 0 \\
\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = 0 & & \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial V_2(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = 0
\end{array}$$

## Résolution du problème pour $V_2$

Remarquons que dans l'écriture (C.1) les conditions aux limites infinies sont sur les fonctions radiales. Par conséquent, les solutions du sous-problème que nous avons appelé  $V_2$  dans les pages qui précèdent et qui impliquent des conditions homogènes sur la surface latérale  $\partial\Omega_{\theta_0}$  restent fondamentalement inchangées. Nous retrouvons que les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont réelles positives, ce qui entraînent des racines  $n_k$  réelles, positives et supérieures à  $m$  (voir chapitre 2) pour les fonctions de Legendre associées.

D'où la solution suivant de  $V_2$  :

$$V_2 = a \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} (G_{n_k}^{i,m} \cos(m\varphi) + H_{n_k}^{i,m} \sin(m\varphi)) P_{n_k}^m(\theta)$$

La différence majeure avec les problèmes que nous avons résolus dans la partie 2 pour le cas du cône fini réside dans la condition à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_2(r, \theta, \varphi) = 0$$

qui exclue les fonctions radiales  $\frac{r}{a}$ . Par conséquent la contribution habituellement qualifiée d'*externe* est inexistante.

La condition à la limite :

$$\left. \frac{\partial V_2}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_a} = G|_{\partial\Omega_a}$$

permet d'exprimer la relation entre les coefficients de Gauss de la base local et les coefficients de Gauss des harmoniques globales. Il suffit de poser que  $G|_{\partial\Omega_a} = \tilde{B}_z(a, \theta, \varphi)$ , c'est-à-dire, la composante  $Z$  d'un champ magnétique exprimé en harmoniques sphériques ordinaires à la surface  $r = a$ . Rappelons que les formalismes locaux doivent être exprimés dans le même repère. On trouve d'après les résultats de la section 7.3 que :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{n_k}^{i,m} \\ H_{n_k}^{i,m} \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n+1) \langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle (1 - e^{-S(n+n_k+1)})}{(n_k+1) \|P_{n_k}^m\|^2 (1 - e^{-S(2n_k+1)})} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\}$$

avec en particulier, étant donné la condition  $P_{n_k}^m(\theta_0) = 0$ , l'expression (Annexe A) :

$$\frac{\langle P_n^m, P_{n_k}^m \rangle}{\|P_{n_k}^m\|^2} = \frac{2n_k + 1}{n(n+1) - n_k(n_k+1)} \frac{P_n^m(\theta_0)}{\frac{\partial(P_{n_k}^m(\theta_0))}{\partial n_k}}$$

Dans cette formulation le potentiel  $V_2$  est parfaitement connu, en particulier il n'y a pas de constante indéterminée.

## Résolution du problème sur $V_1$

La forme générale de la solution est donnée par la résolution de l'équation différentielle sur la fonction  $R(r)$ . Nous avons vu que pour la valeur propre  $\lambda \neq -1/4$ , l'expression générale de la fonction radiale s'écrivait,

$$R(r) = B \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + A \left(\frac{r}{a}\right)^n$$

Si l'on souhaite que  $R'(r = a) = 0$  on trouve en particulier que :

$$nA = (n + 1) B$$

si de plus on incorpore la condition  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dR(r)}{dr} = 0$  on trouve que les degrés  $n$  doivent nécessairement être complexes. Donc

$$\lambda = n(n + 1) < -1/4$$

avec  $n$  du type :

$$n = -\frac{1}{2} + iy, \quad y \in \mathbb{R}^*$$

et il suffit de prendre  $y \in \mathbb{R}^{*,+}$  pour que l'espace des solutions soit complet.

La solution du cône infini présente donc une différence fondamentale avec le cône fini. En l'absence de conditions à la limite supérieure, nous ne pouvons plus obtenir un ensemble discret de valeurs propres mais un ensemble continu.

En utilisant l'expression générale des fonctions radiales pour la valeur propre  $\lambda < -1/4$  (voir chapitre 1), on trouve finalement :

$$R_y(r) = C \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2y \cos\left(y \ln \frac{r}{a}\right) + \sin\left(y \ln \frac{r}{a}\right) \right], \quad y \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

avec  $C$  constante réelle de normalisation, que nous poserons égale à 1 pour le moment. Les fonctions radiales peuvent donc être vues comme des fonctions à deux variables et ne sont plus simplement paramétrées.

Cette caractéristique entraîne que l'expression du potentiel  $V_1$  solution s'écrit maintenant :

$$V_1 = a \sum_{m=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} R_y(r) (G_y^m \cos(m\varphi) + H_y^m \sin(m\varphi)) K_y^m(\cos \theta) \quad (\text{C.4})$$

où les coefficients de Gauss  $\{G_y^m, H_y^m\}$  et les fonctions coniques de Mehler  $K_y^m(\cos \theta)$  sont maintenant des fonctions continues de  $y$ .

Remarquons l'analogie avec le cas du cône semi-infini traité dans le cas du problème *PIII* si l'on passe à la limite infinie.

Ces fonctions forment bien une base sur l'intervalle  $r \geq a$  et nous pouvons le montrer en calculant le produit scalaire des fonctions  $R_y(r)$  au sens des distributions.



### Orthogonalité des fonctions radiales

Cherchons l'expression du produit scalaire :

$$I = \int_a^{\infty} R_y(r) R_{y'}(r) dr$$

En remplaçant  $R_y(r)$  et  $R_{y'}(r)$  par leurs expressions respectives (C.3), on trouve, après changement de variable  $u = \ln \frac{r}{a}$  que :

$$I = a \left[ \left( y + \frac{1}{2i} \right) \left( y' + \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{i(y+y')u} du + \left( y + \frac{1}{2i} \right) \left( y' - \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{i(y-y')u} du \right] \\ + a \left[ \left( y - \frac{1}{2i} \right) \left( y' + \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{i(y'-y)u} du + \left( y - \frac{1}{2i} \right) \left( y' - \frac{1}{2i} \right) \int_{u=0}^{\infty} e^{-i(y+y')u} du \right]$$

Or, on remarque que la transformée de Fourier de la fonction  $\mathcal{Y}$  de Heaviside au sens des distributions s'écrit justement :

$$F(\mathcal{Y}(y)) = \int_{u=0}^{\infty} e^{-iyu} du$$

et est égale à :

$$F[\mathcal{Y}(y)] = \pi \delta(y) - i \mathbf{vp} \left( \frac{1}{y} \right)$$

Les expressions de chacune des intégrales d'exponentielles font donc intervenir deux types de termes, les fonctions  $\delta$  de Dirac et des termes en valeur principale  $\mathbf{vp}$ .

Si nous nous intéressons en premier lieu aux termes de Dirac, on trouve que puisque  $y, y' > 0$ , les termes  $\delta(y+y')$  et  $\delta(-y-y')$  sont nuls. De plus, en utilisant le fait que la fonction de Dirac est paire, les termes restants, fonctions de  $\delta(y-y')$  et  $\delta(-y+y')$ , se réduisent à :

$$a\pi \left[ \left( y - \frac{1}{2i} \right) \left( y' + \frac{1}{2i} \right) \delta(-y+y') + \left( y + \frac{1}{2i} \right) \left( y' - \frac{1}{2i} \right) \delta(y-y') \right] = 2\pi a \left( yy' + \frac{1}{4} \right) \delta(y-y')$$

Les termes en valeur principale  $\mathbf{vp}$  quand à eux s'annulent car la fonction  $\mathbf{vp}$  est impaire et de plus  $\mathbf{vp} \left( \frac{1}{y} \right) = 1$ .

Finalement, pour  $y, y' > 0$  le produit scalaire  $I$  au sens des distributions s'écrit :

$$\int_a^{\infty} R_y(r) R_{y'}(r) dr = 2\pi a \left( yy' + \frac{1}{4} \right) \delta(y-y') \quad (\text{C.5})$$

On peut d'autre part montrer que les fonctions  $R_y(r)$  forment bien une base complète capable, en particulier, de représenter les fonctions  $\left( \frac{a}{r} \right)^\alpha$  du développement global (dans le cas d'un cône

infini,  $\alpha > -1/2$  uniquement) en vérifiant l'égalité de Bessel-Parseval. Un long calcul montre en effet que :

$$\int_{y \in \mathbb{R}^+} \left( \int_{r=a}^{\infty} \frac{R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^\alpha}{\|R_y(r)\|} dr \right)^2 dy = \int_a^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\alpha} dr \quad (\text{C.6})$$

avec en particulier :

$$\int_{r=a}^{\infty} R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^\alpha dr = \frac{2a\alpha y}{(\alpha + 1/2)^2 + y^2} \quad (\text{C.7})$$

Nous utiliserons ces expressions par la suite.

## Résolution des conditions aux limites

On obtient à nouveau les coefficients de Gauss de la base locale  $\{G_y^m, H_y^m\}$  grâce aux conditions aux limites. Dans la condition :

$$V_1|_{\partial\Omega_{\theta_0}} = F|_{\partial\Omega_{\theta_0}}$$

on pose que  $F$  est un potentiel écrit en harmoniques sphériques ordinaires,  $F|_{\partial\Omega_{\theta_0}} \equiv \tilde{V}_g(r, \theta_0, \varphi)$ .

En égalant les expressions de  $\tilde{V}_g(r, \theta_0, \varphi)$  et  $V_1$ , donnée par (C.4), sur le bord  $\partial\Omega_{\theta_0}$ , on peut multiplier chacun des membres de l'égalité par  $R_{y'}(r)$ , pour  $y'$  réel positif quelconque et bénéficier des propriétés d'orthogonalité (C.5) des fonctions radiales en intégrant sur  $[a, \infty[$ .

D'une manière formelle, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} G_y^m \\ H_y^m \end{array} \right\} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{P_n^m(\theta_0)}{K_y^m(\theta_0)} \frac{1}{\|R_y(r)\|^2} \int_{r=a}^{\infty} R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} dr \left\{ \begin{array}{c} \tilde{g}_n^m \\ \tilde{h}_n^m \end{array} \right\} \quad (\text{C.8})$$

avec, d'après (C.5) :

$$\|R_y(r)\|^2 = 2\pi a (y^2 + 1/4)$$

et d'après (C.7) :

$$\int_{r=a}^{\infty} \frac{R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}}{\|R_y(r)\|^2} dr = \frac{(n+1)y}{\pi (y^2 + 1/4) \left[ (n+1/2)^2 + y^2 \right]} \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Le cône infini comme limite du cône fini

Nous cherchons maintenant à vérifier que le formalisme du cône infini correspond bien à la limite du cône fini. Nous avons constaté plusieurs analogies avec les expressions le problème *PIII* du cône fini, que ce soit pour les fonctions radiales (C.3) ou pour les produits scalaires (C.7) et (C.9). Il y a cependant une différence notable. Dans l'expression des solutions pour le cône infini nous n'avons vu à aucun moment apparaître la valeur propre  $\lambda = 0$ . Nous n'avons donc pas de contributions provenant de la fonction constante  $R_0$ . Montrons tout de même que

la solution du problème *PIII* tend vers la solution du cône infini lorsque le rayon de la surface supérieure augmente.

Rappelons que les fonctions radiales dans le cas discret sont normalisées de sorte que  $\|R_p(r)\|^2 = a$ . D'autre part, nous avons vu que dans le cas du cône fini la fonction  $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$  s'exprimait par (??), somme de deux termes, relatifs aux valeurs propres  $\lambda = 0$  et  $\lambda < -1/4$  respectivement.

En développant explicitement les expressions, on trouve que :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = \frac{e^{-S}}{n(1-e^{-S})} (1-e^{-Sn}) \quad (\text{C.10})$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{S} \frac{p\pi/S}{(p\pi/S)^2+1/4} \frac{(n+1)(1-(-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{((n+1/2)^2+(p\pi/S)^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2\pi p}{S} \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right]$$

Rappelons que le facteur géométrique  $S$  est défini comme  $S = \log(b/a)$ . Donc :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-S}}{n(1-e^{-S})} (1-e^{-Sn}) = 0 \quad (\text{C.11})$$

D'autre part, en multipliant par  $\pi$  le numérateur et le dénominateur du terme restant on trouve,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{p\pi/S(n+1)(1-(-1)^p e^{-S(n+1/2)})}{((p\pi/S)^2+1/4)((n+1/2)^2+(p\pi/S)^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ \frac{2\pi p}{S} \cos\left(\frac{p\pi}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi p}{S} \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right]}_D \frac{\pi}{S} \quad (\text{C.12})$$

En faisant tendre  $S$  vers l'infini, on constate que la somme dépend de la variable  $\frac{p\pi}{S}$  uniquement et du pas d'échantillonnage constant  $\frac{\pi}{S}$  infiniment fin. La somme sur  $p$  peut donc s'écrire en une intégrale sur  $x$  (variable continue correspondant à  $\pi p/S$ ) et on en conclut :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} D = \frac{1}{\pi} \int_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{x}{x^2+1/4} \frac{(n+1)}{((n+1/2)^2+x^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2x \cos\left(x \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(x \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] dx \quad (\text{C.13})$$

En normalisant maintenant les fonction  $\|R_y(r)\|^2 = a$ , on trouve que (C.3) devient :

$$R_y(r) = \frac{1}{\sqrt{1/4+y^2}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2y \cos\left(y \ln \frac{r}{a}\right) + \sin\left(y \ln \frac{r}{a}\right) \right]$$

donc (C.9) s'écrit maintenant :

$$\int_{r=a}^{\infty} \frac{R_y(r) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}}{\|R_y(r)\|^2} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(n+1)y}{\sqrt{(y^2+1/4)} \left[ (n+1/2)^2+y^2 \right]}$$

Par conséquent on trouve que :

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{y \in \mathbb{R}^+} \frac{y}{y^2+1/4} \frac{(n+1)}{((n+1/2)^2+y^2)} \sqrt{\frac{a}{r}} \left[ 2x \cos\left(y \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) + \sin\left(y \log\left(\frac{r}{a}\right)\right) \right] dy \quad (\text{C.14})$$

On ne manquera pas de remarquer la similitude entre (C.10) et (C.14) qui montre que le développement du cas continu représente bien la limite du cas discret.

## Conclusion

Le développement analytique dans un cône infini montre que l'ensemble des valeurs propres de la base de Mehler est maintenant non dénombrable. L'absence de valeurs propres discrètes entraîne la définition de coefficients de Gauss sous forme de fonctions réelles continues. Cette particularité représente l'obstacle le plus important à la mise en oeuvre numérique de cette approche et à son application pour l'inversion de données magnétique. C'est pourquoi, même en ne considérant que des contributions internes uniquement nous ne discutons dans les chapitres qui précèdent que des problèmes de conditions aux limites dans des cônes finis, pour lesquels les valeurs propres trouvées sont bien discrètes. Nous avons pu en particulier constater que la limite du cône fini, lorsque l'altitude supérieure du cône tend vers l'infini, permettait de retrouver les solutions du cône infini. On n'aura aucun mal à se convaincre cependant que la mise en oeuvre numérique d'un tel formalisme est en pratique insurmontable.

Nous pouvons rapprocher cette démonstration de quelques résultats empiriques rencontrés lors des travaux dans différents cônes finis de tailles différentes. Lorsque nous cherchons à modéliser un champ dans deux cônes, l'un de rayon supérieur  $b = c$ , l'autre de rayon supérieur  $b > c$ , nous observons distinctement que la contribution associée à la fonction radiale constante diminue en fonction de l'altitude, ceci s'explique maintenant par (C.11). Dans le même temps, pour garder une même précision de représentation dans le cône tel que  $b > c$ , le nombre de coefficients de Gauss associés aux valeurs propres  $\lambda < -1/4$  doit être augmenté. Étant donné que le pas d'échantillonnage  $\pi/S$  dans (C.12) s'affine à mesure que le rayon  $b$  augmente (car  $S = \log(b/a)$ ), la série des coefficients de Gauss converge plus lentement vers 0. Par conséquent, la troncature doit donc se faire à un indice  $P_{max}$  plus important. Ceci permet d'illustrer en particulier, certains résultats liés aux variations géométriques du cône.



# Annexe D

## Liste des notations et symboles employés

### Liste des symboles et notations

#### Symboles

$\tilde{\phantom{x}}$  : Le tilda signifie que la variable est exprimée dans un référentiel terrestre dont l'axe Z coïncide avec l'axe de la calotte sphérique.

$\hat{\phantom{x}}$  : Ce symbole sur les coefficients de Gauss signifie qu'ils sont exprimés sous leur forme compacte (voir section 1.3).

$\beta$  : Altitude quelconque en  $km$  comprise entre  $r = a$  et  $r = b$ .

$\delta_m$  : delta de Kronecker

$\theta$  : Colatitude dans le référentiel de la calotte sphérique.

$\theta_0$  : Angle constant qui définit l'ouverture de la calotte sphérique.

$\lambda_k$  : Valeurs propres des fonctions de Legendre généralisées  $P_{n_k}^m$ .

$\lambda_p$  : Valeurs propres des fonctions radiales  $R_p(r)$ .

$\Gamma(\alpha)$  : Fonction gamma incomplète avec  $\alpha$  réel ( $\alpha \neq -1, -2, \dots$ ).

$\Delta$  : Discriminant d'une équation caractéristique.

$\Omega$  : Domaine conique ou Volume du domaine conique.

$\partial\Omega_{a,b,\beta}$  : Domaine de surface radiale du domaine conique  $\Omega$ .

$\partial\Omega_{\theta_0}$  : Domaine de surface latérale du domaine conique  $\Omega$ .

#### Notations

$a$  : Rayon terrestre moyen  $a \sim 6371, 2km$

$b$  : Rayon de la surface supérieure du cône.

$K_p^m(\theta)$  : Fonction conique de Mehler.

$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  : Fonction hypergéométrique.

$g_n^m, h_n^m$  : Coefficients de Gauss globaux écrits dans le repère géocentrique.

$\tilde{g}_n^m, \tilde{h}_n^m$  : Coefficients de Gauss globaux écrits dans le repère centré sur la calotte sphérique.

$G_p^m, H_p^m$  : Coefficients de Gauss de la base de Mehler pour les fonction radiales  $R_p(r)$ .

$G_0^m, H_0^m$  : Coefficients de Gauss de la base de Mehler pour les fonction radiales  $R_0(r)$ .

$G_{n_k}^{m,i}, H_{n_k}^{m,i}$  : Coefficients de Gauss de Legendre pour les fonctions radiales  $(a/r)^{n_k+1}$  dites «internes».

$G_{n_k}^{m,e}, H_{n_k}^{m,e}$  : Coefficients de Gauss de Legendre pour les fonctions radiales  $(r/a)^{n_k}$  dites «externes».

$k$  : Nombre entier dénombrant les valeurs propres des fonctions de Legendre  $P_{n_k}^m(\theta)$ .

$l$  ou  $n$  : Degré entier des fonctions de Legendre.

$\mathcal{L}^2([a, b])$  : Espace de Hilbert muni d'un produit scalaire dans l'intervalle  $[a, b]$ .

$L^2$  : Opérateur de moment angulaire.

$L_m$  : Opérateur de Legendre.

$m$  : ordre entier des fonctions de Legendre

$n_k$  : degré réel des fonctions de Legendre repéré par l'indice entier  $k$ .

$p$  : nombre dénombrant les valeur propres des fonctions radiales  $R_p(r)$ .

$P_l^m(\theta)$  : fonction de Legendre associée des harmoniques sphériques ordinaire normalisée au sens de Schmidt avec  $l$  et  $m$  entiers.

$P_{n_k}^m(\theta)$  : fonction de Legendre généralisée d'ordre  $m$  entier et de degré  $n_k$  réel.

$R_p(r)$  : Fonctions radiales. Fonctions propres d'un problème de Sturm-Liouville associées aux valeurs propres  $\lambda_p$ .

$\overline{R_\Omega}$  : Erreur moyenne de l'intensité du champ total dans tout le volume  $\Omega$  exprimée en nT.

$\overline{R_{\partial\Omega_r}(\beta)}$  : Erreur moyenne de l'intensité du champ total sur une surface sphérique d'altitude  $\beta$  exprimée en nT.

$S$  : nombre sans dimension dont la valeur dépend de l'altitude inférieure  $a$  et supérieure  $b$  du domaine  $\Omega$  et tel que  $S = \log(b/a)$ .

$u$  : élévation en kilomètre par rapport à la surface terrestre.

# Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1965.
- [2] J. Achache, Y. Cohen, and G. Unal. The french program of circumterrestrial magnetic surveys using stratospheric balloons. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 72 :97–101, 1991.
- [3] M. Alexandrescu, C. Ha Duyen, and J-L. Le Mouél. Geographical distribution of magnetic observatories and field modelling. *J. Geomag. Geoelec.*, 46 :891–901, 1994.
- [4] L.R. Allredge. Rectangular Harmonic Analysis applied to the geomagnetic field. *J. Geophys. Res*, 86(B4) :3021–3026, April 1981.
- [5] R. L. Allredge. Core and crustal fields. *J. Geophys. Res*, 88(B2) :1229–1234, 1983.
- [6] Z.-C An, D.-H Tan, Y.-F Xu, V.P. Golovkov, N. M. Rotanova, and T. N. Bondar. Spherical Cap Harmonic Analysis of the geomagnetic field over Asia. *J. Geomag. Geoelec.*, 46 :789–795, 1994.
- [7] G. Backus, R. Parker, and C. Constable. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge University Press, 1996.
- [8] G. E. Backus. Non-uniqueness of the external field determined by surface intensity measurement. *J. Geophys. Res*, 75 :6339–6341, 1970.
- [9] D. R. Barraclough. A comparison of satellite and observatory estimates of geomagnetic secular variation. *J. Geophys. Res*, 90(B3) :2523–2526, 1985.
- [10] J. Bernard, J-C. Kosik, G. Laval, R. Pellat, and J.-P. Philippon. Représentation optimale du potentiel géomagnétique dans le repère d’un dipole décentré, incliné. *Ann. Géophys.*, 25(2) :659–665, 1969.
- [11] J. Bitterly, M. Alexandrescu, J.-J. Schott, and J. Vassal. Contribution de la France à l’observation du champ magnétique terrestre. Technical report, CNFGG-Rapport quadriennal, 1995-1998.
- [12] R. J. Blakely. *potential theory in gravity and magnetic applications*. cambridge university press, 1996.
- [13] J. Bloxham, D. Gubbins, and A. Jackson. Geomagnetic secular variation. *Phil. Trans R. Soc. Lond.*, A 329 :415–502, 1989.
- [14] W. Bosch. On the computation of derivatives of Legendre functions. *Phys. Chem. Earth*, 25(9-11) :655–659, 2000.
- [15] C.E. Bullard. The stability of a homopolar dynamo. *Pro. Cambridge Phil. Soc.*, 51 :744–760, 1955.
- [16] E. C. Bullard. The removal of trend from magnetic surveys. *Earth Plan. Scien. Lett.*, 2 :293–300, 1967.



- [17] J.C. Cain, Z. wang, C. Kluth, and D.R. Schmitz. Derivation of a geomagnetic model to  $n=63$ . *Geophys. J. Int.*, 97(431-441), 1989.
- [18] H. Wallace Campbell. *Introduction to geomagnetic fields*. Cambridge University Press, 1997.
- [19] P. Cantini, E. Pinna, and I. Marson. A comparison of surface magnetic data and MAGSAT data over Italy and its surroundings. *Phys. Chem. Earth*, 24(5) :449–454, 1999.
- [20] S. Chapman and J. Bartels. *Geomagnetism*, volume I et II. Oxford Press, 1940.
- [21] P. Christian Hansen. Regularization tools : A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms*, 6 :1–35, 1994.
- [22] V. Courtillot, J. Ducruix, and J.-L. Le Mouél. Sur une accélération récente de la variation séculaire du champ magnétique terrestre. *C. R. Hebd. Séances Acad.*, 87(série D) :1095–1098, 1978.
- [23] A. De Santis, O. Battelli, and D.J. Kerridge. Spherical Cap Harmonic Analysis applied to regional field modelling for Italy. *J. Geomag. Geoelec.*, 42 :1019–1036, 1990.
- [24] A. De Santis and C. Falcone. Spherical cap models of laplacian potentials and general fields. *Geodetic Theory Today*, pages 141–150, 1995.
- [25] A. De Santis, C. Falcone, and J. M. Torta. Simple additional constraints on regional models of the geomagnetic secular variation field. *Phys. Earth Plan. Int.*, 97 :15–21, 1996.
- [26] A. De Santis, C. Falcone, and J.M. Torta. SHA vs SCHA for modelling secular variation in a small region such as Italy. *J. Geomag. Geoelec.*, 49 :359–371, 1997.
- [27] A. De Santis, D.J. Kerridge, and D.R. Barraclough. A Spherical Cap Harmonic Analysis model of the crustal magnetic anomaly field in Europe observed by Magsat. *Geomagnetism and Palaeomagnetism*, 261 :1–17, 1989.
- [28] A. De Santis, J.M. Torta, and C. Falcone. A simple approach to the transformation of spherical harmonic models under coordinate system rotation. *Geophys. J. Int.*, 126 :263–270, 1996.
- [29] A. De Santis, J.M. Torta, and F.J. Lowes. Spherical Cap harmonics revisited and their relationship to Ordinary Spherical Harmonics. *Phys. Chem. Earth*, 24(11-12) :935–941, 1999.
- [30] C. Demetrescu, M. Andreescu, and T. Nestianu. Induction model for the secular variation of the geomagnetic field in Europe. *Phys. Earth Plan. Int.*, 50 :261–271, 1988.
- [31] N.R. Draper and H. Smith. *Applied regression analysis*. Wiley-Intersciences, third edition, 1998.
- [32] H.M Dufour. A proposal for a unique quasi-regular grid on a sphere. *Manuscripta geodetica*, 16 :267–273, 1991.
- [33] Z. Düzgüt and S. R. C. Malin. Assessment of regional geomagnetic field modelling methods using a standard data set : Spherical Cap Harmonic Analysis. *Geophys. J. Int.*, 141 :829–831, 2000.
- [34] U. Engels and N. Olsen. Computation of magnetic fields within source region of ionospheric and magnetospheric currents. *J. Atm. Solar. Terr. Physiq*, 60 :1585–1592, 1998.
- [35] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Higher transcendental functions*, volume I. Mc Graw Hill, New-York, 1953.

- 
- [36] A. Galdeano, V. Courtillot, and J.-L. Le Mouél. La cartographie magnétique de la France au 1er juillet 1978. *Ann. Géophys.*, 36(1) :85–106, 1980.
- [37] C.F. Gauss and W. Weber. *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen vereins im jahre 1836,...,1841*. Göttingen und Leipzig.
- [38] I. N. Gibra. *Probability and Statistical Inference for Scientists and Engineers*. Prentice-Hall, 1973.
- [39] G. H. Golub and U. von Matt. Tikhonov regularization for large scale problems. Technical report, Workshop on Scientific Computing, 1997.
- [40] W. Grander and W. Gautschi. Adapted quadrature revisited. *BIT*, 40(1) :84–101, 2000.
- [41] H. Grandis, M. Menvielle, and M. Roussignol. Bayesian inversion with Markov chains-i. the magnetotelluric one-dimensional case. *Geophys. J. Int.*, 138 :757–768, 1999.
- [42] D. Gubbins. Geomagnetic field analysis-i. stochastic inversion. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 73 :641–652, 1983.
- [43] G. V. Haines. Spherical Cap Harmonic Analysis. *J. Geophys. Res*, 90 :2593–2598, 1985a.
- [44] G. V. Haines. Magsat vertical field anomalies above 40°n from Spherical Cap Harmonic Analysis. *J. Geophys. Res*, 90(B3) :2593–2598, 1985b.
- [45] G. V. Haines. Spherical Cap Harmonic Analysis of geomagnetic secular variation over Canada 1960-1983. *J. Geophys. Res*, 90(B14) :12563–12574, 1985c.
- [46] G. V. Haines. Computer programs for Spherical Cap Harmonic Analysis of potential and general fields. *Comput. and Geosc.*, 14(4) :413–447, 1988.
- [47] G. V. Haines. Modelling by series expansions : a discussion. *J. Geomag. Geoelec.*, 42 :1037–1049, 1990.
- [48] G. V. Haines. Regional magnetic field modelling : a review. *J. Geomag. Geoelec.*, 42 :1001–1018, 1990.
- [49] G. V. Haines. Modelling geomagnetic secular variation by main-field differences. *Geophys. J. Int.*, 114 :490–500, 1993.
- [50] G. V. Haines and J. M. Torta. Determination of equivalent current sources from spherical cap harmonic models of geomagnetic field variations. *Geophys. J. Int.*, 118 :499–514, 1994.
- [51] E.W Hobson. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Chelsea Publishing Co., New York, second reprint edition, 1965.
- [52] R. Holme and A. Jackson. The cause and treatment of anisotropic errors in near-Earth geomagnetic data. *Phys. Earth Plan. Int.*, 103 :375–388, 1997.
- [53] S. A. Holmes and W. E. Featherstone. A unified approach to the Clenshaw summation and the recursive computation of very high degree and order normalised associated Legendre functions. *Journal of Geodesy*, 76 :279–299, 2002.
- [54] G. Hulot and M. Mandea. Observation, modélisation et interprétation du champ géomagnétique à l'échelle spatiale. *IPGP Internal publication*, 1998.
- [55] C. Hwang and S.K. Chen. Fully normalized Spherical Cap Harmonics : application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1. *Geophys. J. Int.*, 129 :450–460, 1997.
- [56] D. D. Jackson. Most squares inversion. *J. Geophys. Res.*, 81(5) :1027–1030, 1976.
- [57] D. D. Jackson. The use of a priori data to resolve non-uniqueness in linear inversion. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 57 :137–157, 1979.

- [58] D. D. Jackson and M. Matsu'ura. A Bayesian approach to non linear inversion. *J. Geophys. Res*, 90(B1) :581–591, 1985.
- [59] J. A. Jacobs. *Geomagnetism*, volume 1,2,3,4. Academic Press, 1987.
- [60] D. C. Jensen and J. C. Cain. An interim geomagnetic field. *J. Geophys. Res*, 67 :3568, 1962.
- [61] O. D. Kellogg. *Foundations of Potential Theory*. Dover, New York, 1953.
- [62] K.S Köblich. A program for computing the conical functions of the first kind  $P_{-1/2+it}^m(z)$  for  $m = 0$  and  $m = 1$ . *Computer Physics Communication*, 23 :51–61, 1981.
- [63] M. Korte and V. Haak. Modelling european magnetic repeat station and survey data by SCHA in search of time-varying anomalies. *Phys. Earth Plan. Int.*, 122 :205–220, 2000.
- [64] M. Korte and R. Holme. Regularisation of spherical cap harmonics. *Geophys. J. Int.*, 153(1) :253–262, 2003.
- [65] R. A Langel. Introduction to the special issue : a perspective on Magsat results. *J. Geophys. Res*, 90(B3) :2441–2444, 1985.
- [66] R. A. Langel, T. J. Sabaka, R. T. Baldwin, and J. A. Conrad. The near Earth magnetic field from magnetospheric and quiet-day ionospheric sources and how it is modeled. *Phys. Earth Plan. Int.*, 98 :235–267, 1996.
- [67] R.A Langel and W.J Hintz. *The magnetic field of the Earth's lithosphere*. cambridge university Press, 1998.
- [68] B. Langlais. Les champs magnétiques de la Terre et de Mars : apport de stellites Oersted et Mars Global Surveyor. Th&egravese de doctorat de l'Institut de Physique du Globe de Paris, 2001.
- [69] B. Langlais and M. Mandea. An IGRF candidate main geomagnetic field model for epoch 2000 and a secular variation model for 2000-2005. *Earths Plan. Spac.*, 52 :1137–1148, 1999.
- [70] B. Langlais and M. Mandea. Use of Oersted scalar data in evaluation the pre-Oersted main field candidate models for the IGRF 2000. *Earths Plan. Spac.*, 52 :1167–1170, 2000.
- [71] C. Larroque and J. Virieux. *Physique de la Terre Solide*. Géosciences. Gordon and Breach, 2001.
- [72] J.L Le Mouel. Sur la distribution des éléments magnétiques en France. Th&egravese de doctorat de l'Université de Paris, 1969.
- [73] N.N. Lebedev. *Special Functions and Their Applications*. Dover Publication, New York, 1972.
- [74] J. Lilensten and J. Bornarel. *Sous les feux du Soleil*. Collection Grenoble Sciences. EDP science, 2001.
- [75] F. J. Lowes. Mean-square values on sphere of spherical harmonic vector fields. *J. Geophys. Res*, 71 :2179, 1966.
- [76] F. J. Lowes. Spatial power spectrum of the main geomagnetic field and extrapolation to the core. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 36 :717–730, 1974.
- [77] F. J. Lowes. The explanation of some covariances, associated with the Backus effect, in the Orsted model (9/99). *Phys. Earth Plan. Int.*, 135 :93–96, 2003.
- [78] F. J. Lowes, T. Bondar, V. P. Golovkov, B. Langlais, S. Macmillan, and M. Mandea. Evaluation of the candidate main field model for the IGRF 2000 derived from preliminary Orsted data. *Earths Plan. Spac.*, 52 :1183–1186, 2000.

- 
- [79] F.J. Lowes. Orthogonality and mean squares of vector fields given by spherical harmonic potentials. *Geophys. J. Int.*, 136 :781–783, 1999. Research note.
- [80] F.J. Lowes, A. De Santis, and B. Duka. A discussion of the uniqueness of a Laplacian potential when given only partial information on a sphere. *Geophys. J. Int.*, 121 :579–584, 1995.
- [81] S. R. C. Malin, Z. Düzgit, and N. Baydemir. Rectangular Harmonic Analysis revisited. *J. Geophys. Res.*, 101(B12) :28205–28209, 1996.
- [82] M. Mareschal and M. Menvielle. On the use of the K indices to define maximum external contributions to MAGSAT at mid-latitudes. *Phys. Earth Plan. Int.*, 43 :199–204, 1986.
- [83] S. Maus and V. Haak. Is the long wavelength crustal magnetic field dominated by induced or by remanent magnetisation. *J. Ind. Geophys. Union*, 2002.
- [84] S. Maus, K. Hemant, M. Rother, and H. Lühr. "Mapping the lithospheric magnetic field from CHAMP Scalar and vector magnetic data" in *CHAMP mission results I*, pages 269–274. Springer, 2002.
- [85] M.A. Meju. *Geophysical Data Analysis : Understanding Inverse Problem Theory and Practice*, volume 6 of *Course Notes Series*. S.N Domenica Editor, society of exploration geophysicists edition, 1994.
- [86] W. Menke. *Geophysical data analysis : discrete inverse theory*, volume 45 of *International Geophysics Series*. Academic Press, New York, second edition, 1989.
- [87] F. Molina and A. De Santis. Considerations and proposal for a best utilisation of IGRF over areas including a geomagnetic observatory. *Phys. Earth Plan. Int.*, 48 :379–385, 1987.
- [88] K. Mosegaard and A. Tarantola. Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems. *J. Geophys. Res.*, 100(12) :12431–12447, 1995.
- [89] I. Nakagawa, T. Yukutake, and N. Fukushima. Extraction of magnetic anomalies of crustal origin from Magsat data over the area of the Japanese islands. *J. Geophys. Res.*, 90(B3) :2609–2615, 1985.
- [90] N. Olsen, T. Moretto, and E. Friis-christensen. New approaches to explore the Earth's magnetic field. *J. Geodynamics*, 33 :29–41, 2002.
- [91] F.W.J. Olver and J.M. Smith. Associated Legendre functions on the cut. *Journal of Computational Physics*, 51 :502–518, 1983.
- [92] J.-P. Poirier. *Les profondeurs de la Terre*. cahiers des sciences de l'Univers. Masson, 1991.
- [93] David L. Powers. *Boundary value problems*. Academic Press, fourth edition, 1999.
- [94] W.H. Press, S.A. Teulolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, New York, second edition, 1992.
- [95] L. Rade and B. Westergren. *Mathematics Handbook*. Studenlitteratur, Sweden, fourth edition, 1998.
- [96] L. Robin. *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales*, volume I-III. Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [97] N. M. Rotanova and S. D. Odintsov. Model of the MAGSAT magnetic anomaly field over Europe using Spherical Cap Harmonic Analysis. *Phys. Chem. Earth*, 24(5) :455–459, 1999.
- [98] T. J. Sabaka, N. Olsen, and R. A. Langel. A Comprehensive Model of the near-Earth magnetic field : Phase 3. Nasa/tm-2000-209894, NASA, 2000.

- 
- [99] T. J. Sabaka, N. Olsen, and R. A. Langel. A comprehensive model of the quiet-time near-earth magnetic field : Phase 3. *Geophys. J. Int.*, 151 :32–68, 2002.
- [100] A. De Santis, M. Chiappini, J. M. Torta, and R. R. B. von Frese. Development of an improved geomagnetic reference field of Antarctica. *Annali di Geofisica*, 42(2) :265–270, 1999.
- [101] J.-J. Schott, M. Roussignol, M. Menvielle, and F. R. Nomenjahanary. Bayesian inversion with Markov Chains-ii. the one-dimensional DC multilayer case. *Geophys. J. Int.*, 138 :769–783, 1999.
- [102] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1965.
- [103] W. R. Smythe. *Static and Dynamic Electricity*. Mc Graw-Hill Book Company, second edition, 1950.
- [104] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory*. Elsevier, Amsterdam, deuxième édition, 1994.
- [105] E. Thébaud, J.J. Schott, and M. Manda. Geomagnetic field modelling on small spherical caps. *Communication at EGS XXVII general assembly*, EGS02-1-04673(SE6.07-1WE2A003), 2002. Nice, France.
- [106] J. M. Torta, A. De Santis, M. Chiappini, and R. R. B. von Frese. A model of the secular change of the geomagnetic field for Antarctica. *Tectonophysics*, 347 :179–187, 2002.
- [107] J. M. Torta, A. Garcia, and A. De Santis. A geomagnetic reference field for Spain at 1990. *J. Geomag. Geoelec.*, 45 :573–588, 1993.
- [108] J.M. Torta, A. Garcia, J.J. Curto, and A. De Santis. New representation of geomagnetic secular variation over restricted regions by means of Spherical Cap Harmonic Analysis : application to the case of Spain. *Phys. Earth Plan. Int.*, 74 :209–217, 1992.
- [109] D. W. Vasco. Degeneracy, singularity and multiple solutions in geophysical inversion. *Geophys. J. Int.*, 113 :434–448, 1993.
- [110] J. S. Walker. *Fourier Analysis*. Oxford University Press, 1988.
- [111] K. A. Whaler and D. Gubbins. Spherical Harmonic Analysis of the geomagnetic field : an example of a linear inverse problem. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 65 :645–693, 1981.
- [112] P. Xu. Truncated SVD method for discrete linear ill-posed problems. *Geophys. J. Int.*, 135 :505–514, 1998.
- [113] M.I. Zhurina and L. N. Karmazina. *Tables and Formulae for the spherical functions  $P_{-1/2+i\tau}^m(z)$* . Pergamon Press, New York, 1966.
- [114] D. Zwillinger. *Handbook of differential equations*. Academic Press, New York, 1989.

---

## Résumé

Le champ magnétique terrestre, dans des régions libres de sources magnétiques, peut être exprimé comme le gradient d'un potentiel scalaire, solution de l'équation de Laplace. Pour des régions dont la couverture en données est particulièrement dense, la modélisation régionale est susceptible d'offrir une meilleure résolution spatiale du champ magnétique que la modélisation globale par les harmoniques sphériques (SH). Avec la méthode régionale de décomposition en harmoniques sur calottes sphériques (SCHA) développée par Haines (1985), des difficultés apparaissent lors du traitement simultané de données enregistrées à des altitudes variées. De plus, ce formalisme ne peut pas être simplement relié au formalisme global SH, nous privant ainsi de précieuses informations *a priori* sur les coefficients du modèle. Dans le présent travail, nous montrons que ces problèmes sont surmontés si SCHA est formulée comme un problème de conditions aux limites dans un cône; cône qui circonscrit la région d'étude et dont la hauteur est compatible avec l'altitude maximale contenue dans les données. Ceci nous permet d'obtenir pour la première fois des relations entre les coefficients de Gauss globaux et ceux des harmoniques locales. La reconstruction précise d'un champ global dans le cône démontre la pertinence de ces relations. De manière à anticiper le problème inverse, nous proposons des relations basées sur le concept de spectre d'énergie, et nous définissons des normes pour le champ magnétique. Ces expressions sont des outils précieux de régularisation pour des problèmes inverses mal conditionnés. Nous traitons finalement le problème inverse. Dans un premier temps, nous considérons des données uniformément distribuées et nous concluons que le modèle obtenu est conforme aux propriétés d'un champ géomagnétique. Dans un second temps, nous simulons une inversion sur un cas réel en considérant les positions des données terrestres et celles du satellite CHAMP. Par une régularisation, nous parvenons à résoudre le problème inverse dans une situation particulièrement défavorable, et nous obtenons un modèle de champ magnétique stable dans tout le volume conique.

**Mots clés:** géomagnétisme, modélisation régionale, fonctions coniques de Mehler, fonctions de Legendre.

## Abstract

The geomagnetic field above the Earth's surface in current free region may be expressed as the gradient of a scalar potential solving Laplace equation. For regions with a fairly dense coverage of data at different altitudes, a regional model ought to offer a better spatial resolution of the regional field over the volume under study than a global field expanded in Spherical Harmonics. The Spherical Cap Harmonics Analysis developed by Haines (1985) is an attractive regional modeling tool having close relationship with global Spherical Harmonics. With the Spherical Cap Harmonic Analysis (SCHA) adopted so far, difficulties arise in upward continuation of the field. It is also uneasy to establish a relationship between global and local Gauss coefficients. Indeed, such relationship would be useful for introducing prior constraint on inverse problems dealing with the estimation of local Gauss coefficients based upon a local dataset. In the present work, we show that these difficulties are overcome if the SCHA modeling is formulated as a boundary value problem in a cone bounded radially by the Earth's surface and an upper surface suitable for satellite data, and bounded laterally by a surface that encompasses a specific region of study. In particular, this new formalism can be related to Spherical Harmonics and gives sensible relationships among both sets of Gauss coefficients. The reliability of these relations is demonstrated by reconstructing the three components of a global field with a pretty good accuracy. In order to foresee the inverse problem, we also establish useful analytical relationships based on spectrum concept and magnetic energy inside a cone. This provides powerful tools for regularizing inverse problems based on real data sparsely distributed. We finally tackle the inverse problem by examining several synthetic simulations for different data distributions; from even to real sparse distributions. All results suggest that the new proposal for regional modeling is efficient. Synthetic data are well resolved and models obey to basic properties of Newtonian potentials.

**Keywords:** geomagnetism, regional modeling, conical functions, Legendre functions.