HAL open science

Problèmes variationnels liés à l'aire

Pascal Romon

To cite this version:

Pascal Romon. Problèmes variationnels liés à l'aire. Mathématiques [math]. Université de Marne la Vallée, 2004. tel-00008760

HAL Id: tel-00008760

https://theses.hal.science/tel-00008760

Submitted on 11 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Marne-la-Vallée

Mémoire de synthèse en vue de
l'habilitation à diriger des recherches

spécialité : mathématique

Pascal Romon

Problèmes variationnels liés à l'aire

soutenue le 1er octobre 2004 devant le jury composé de

Ahmad El Soufi
Paul Gauduchon
Frédéric Hélein
Mathieu Meyer
Pierre Pansu (rapporteur)
Richard Schoen
Claude Viterbo

Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches

par Pascal Romon

Université de Marne-la-Vallée

septembre 2004

Problèmes variationnels liés à l'aire

Ce mémoire est dédié à Harold Rosenberg, Frédéric Hélein et Antonio Ros, avec qui j'ai tant appris sur la géométrie.

Table des matières

Table des matières 2

1 Introduction 2

2 Surfaces minimales plongées 5

3 Le problème isopérimétrique 8

4 Surfaces lagrangiennes et systèmes intégrables 13

5 Perspectives 23

Travaux 25

Références 25

1 Introduction

Dans ce mémoire, je présenterai mes travaux dans différents domaines de la géométrie différentielle, allant de l'étude des plongements pour les surfaces minimales de $\mathbb{R}^3$ à la structure des immersions lagrangiennes dans les espaces symétriques hermitiens, en passant par le problème isopérimétrique dans les variétés plates de dimension 3. Derrière ces sujets variés, on retrouvera des dénominateurs communs, qui jouent un rôle crucial dans tous les résultats que j'ai obtenus, ce que je m'efforcerai de mettre en lumière. En effet il s'agit toujours d'étudier *l'aire de surfaces*, en utilisant des immersions *conformes* à valeurs dans des *espaces homogènes*. Je supposerai toujours l'existence et la régularité des surfaces concernées, et je me focaliserai plutôt sur leurs propriétés et la structure de l'ensemble des solutions du problème variationnel, en montrant comment ces différents problèmes surgissent, et quelles difficultés ils posent.

Surfaces minimales plongées

Exemple classique de problème variationnel en géométrie différentielle, l'équation des surfaces minimales a été décrite en premier par LAGRANGE en 1760, puis caractérisée par MEUSNIER par la condition équivalente de courbure moyenne $H = 0$. Ce problème a été longuement étudié, notamment par ENNEPER, WEIERSTRASS et RIEMANN, qui ont analysé la structure holomorphe des solutions, puis avec les résultats de DOUGLAS et RADÓ, qui ont démontré l'existence du problème à bord prescrit (connu sous le nom de problème de PLATEAU). Bien plus tard, à partir des années 1980 avec le résultat de Costa [Cos84], suivi de nombreux autres, une série d'exemples furent construits, ce qui fut le point de départ d'un travail de classification des surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$ selon leur topologie et géométrie. Néanmoins le critère le plus difficile à contrôler fut et reste le plongement. Ainsi, il s'est passé près de dix ans entre la découverte par HOFFMAN, KARCHER et WEI [HKW93] de l'existence d'un hélicoïde de genre un et la preuve que celui-ci était effectivement plongé (par HOFFMAN, WEBER et WOLF avec des techniques radicalement nouvelles [HWW04]).

Ma première contribution dans ce domaine a été une preuve de la rigidité de l'exemple minimal de RIEMANN, résultat généralisé par la suite, quand les outils sont devenus plus puissants. Je me suis intéressé ensuite au plongement des bouts annulaires qui généralisent le bout hélicoïdal ([10], [2]); ce sont en particulier des bouts de courbure totale infinie. J'ai montré que sous certaines hypothèses de croissance de courbure, l'hypothèse de plongement force le bout à être asymptote à l'hélicoïde, résultat utilisé plus tard par MEEKS et ROSENBERG dans la preuve de l'unicité de l'hélicoïde [MR]. Notons que pour ces preuves de plongement la structure de l'espace d'arrivée ne semble pas cruciale (si ce n'est par sa dimension), mais par contre la paramétrisation holomorphe (*id est* la représentation de WEIERSTRASS) l'est.

Les surfaces de courbure moyenne constante et le problème isopérimétrique

Les surfaces à courbure moyenne H constante – non nulle – (CMC) sont proches des surfaces minimales. Elles satisfont le même problème variationnel, avec une contrainte supplémentaire de volume, ce qui induit une équation aux dérivées partielles plus difficile et une structure algébrique plus complexe. En effet les surfaces CMC à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ correspondent localement aux applications harmoniques non conformes dans la sphère S^2, ce qui peut être décrit par un système intégrable (voir [PS89]), là où l'équation des surfaces minimales n'est autre que l'holomorphie.

Plutôt que d'étudier les plongements CMC, je me suis attaqué à un problème spécifique et plus ancien encore que celui les surfaces minimales (connu sous le nom de problème de DIDON), le *problème isopérimétrique* : savoir quelles sont les surfaces d'aire minimale à volume prescrit. Je me suis placé dans des espaces tridimensionnels plats périodiques $\mathbb{R}^3/G$, dont notamment le tore cubique. Dans ce cas encore l'existence et la régularité sont connus (et découlent par exemple des résultats d'ALMGREN [Alm76]) mais la question reste ouverte de trouver quels sont les minimiseurs à volume donné (ou fraction de volume, dans le cas compact). J'ai utilisé à cette occasion de nombreuses techniques, tournant autour de la structure locale de l'espace des solutions : l'opérateur de JACOBI pour tester la stabilité, ou la déformation dans l'espace des modules. Dans le cube, on s'attend à ce que les surfaces isopérimétriques soient des sphères, des cylindres ou des plans. Cette conjecture est vraie en dimension deux (pour les courbes dans le carré), mais elle est fausse quand la dimension est suffisamment élevée (10). Sans pouvoir aller jusqu'à trancher la conjecture, j'ai réussi, en collaboration avec Laurent HAUSWIRTH, Joaquín PÉREZ et Antonio ROS, à circonscrire nettement l'ensemble des espaces périodiques dans lesquels la conjecture peut *ne pas être vraie*. Cela a des application importantes en physique et chimie (voir par exemple [Ros04]), mais aussi en analyse, où les solutions isopérimétriques mènent aux constantes optimales dans des inégalités entre intégrales de fonctions.

Surfaces stationnaires hamiltoniennes

L'étude des surfaces stationnaires hamiltoniennes est aussi un problème variationnel d'aire avec contrainte, grosso modo la contrainte étant de déformer par des surfaces lagrangiennes. Bien que l'espace ambiant soit de dimension quatre, la contrainte lagrangienne induit en quelque sorte un comportement semblable à la dimension 3. L'existence de solutions et leur régularité sont ici plus difficiles à établir (*cf.* [SW01]), mais en supposant celles-ci, on peut

décrire la structure locale de l'espace des solutions. En effet, j'ai montré (en collaboration avec Frédéric HÉLEIN) que l'équation des surfaces stationnaires hamiltoniennes équivaut localement à un système intégrable, similaire à celui qui régit l'équation des surfaces CMC, similarité qui est commentée dans [6]. Les raisons principales en sont :

i. l'usage de paramétrisations conformes, autrement dit de la variable complexe (une propriété qui peut être supposée sans perte de généralité),

ii. la structure symétrique de la variété cible (par exemple $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{CP}^2$, à comparer avec $\mathbb{R}^3$, S^2 pour les immersions CMC), au point que la stationarité est caractérisée par une propriété de type RUH–VILMS : l'harmonicité d'une partie de l'application de GAUSS (l'angle lagrangien).

Ce sont exactement les mêmes ingrédients qui sont nécessaires pour construire la représentation de WEIERSTRASS ou pour décrire les CMC dans $\mathbb{R}^3$ (et dans d'autres espaces homogènes comme $\mathbb{H}^3$). Remarquons de plus que, dans $\mathbb{C}^2$, l'équation des surfaces stationnaires hamiltoniennes se simplifie considérablement (comme pour les surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$). Cela nous permet de construire une représentation spinorielle remarquablement simple des surfaces lagrangiennes, qui s'avère être un cas particulier de la représentation spinorielle de $\mathbb{R}^4$ (généralisant celle bien connue de $\mathbb{R}^3$).

Pour ce problème, les résultats d'unicité et de classification sont ardus, mais comme dans le cas des surfaces CMC, il est possible de dire beaucoup de choses sur les tores – un trait commun à de nombreux systèmes intégrables. Le plongement est de son côté un critère délicat, à cause du mélange de liberté (dû à la codimension 2) et de contrainte (lagrangienne); aussi n'y ai-je fait qu'une contribution limitée dans [5]. Par contre, il est intéressant de s'attaquer à des problèmes de minimisation tels que l'analogue lagrangien de la conjecture de WILLMORE, formulé par OH. De fait, prenant la suite de mes travaux, ANCIAUX a su donner une réponse partielle à cette conjecture [Anc02]. La structure de système intégrable propose une méthode pour construire de nouveaux exemples et étudier leurs déformations (avec des limitations que j'indiquerai plus bas).

Notations

L'objet de ce mémoire sera toujours une immersion $f\colon \Sigma \to M$, où M est un espace homogène (typiquement $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, S^5$ or $\mathbb{CP}^2$), dont nous étudierons l'aire

$$\mathcal{A} = \int_\Sigma \mathrm{d}A$$

où $\mathrm{d}A$ est l'élément d'aire pour la métrique induite. Une surface est *minimale* si son aire reste constante à l'ordre 1 dans toutes les déformations à support compact. Si ν est une variation normale, alors il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{A}(f + t\,\nu) = -\int_\Sigma \langle \vec{H}\,, \nu\rangle\,\mathrm{d}A = 0$$

avec $\vec{H}$ le vecteur courbure moyenne, *i.e.* la demi-trace de la seconde forme fondamentale. En codimension un, on utilise plutôt la courbure moyenne $H = \langle \vec{H}\,, N\rangle$, où N est le champ normal orienté (autrement dit l'application de GAUSS).

Deux résultats majeurs sont à la base de notre étude :

- un résultat évident : l'aire ne dépend pas de la paramétrisation (à la différence d'autres fonctionnelles),
- un résultat connu, mais moins trivial : on peut toujours faire un changement de variable qui rende l'immersion f conforme, c'est-à-dire

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\| = \left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\| \text{ et } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle = 0.$$

  Cette propriété est cruciale (notamment pour la représentation de Weierstrass) et nous prendrons désormais systématiquement des coordonnées conformes.

2 Surfaces minimales plongées

Au cours des dernières décennies, notre connaissance des surfaces minimales s'est élargie de façon radicale (voir [Law80] pour une introduction au sujet et [MP04] for un bilan des résultats les plus récents). Des conjectures clefs ont été résolues, telles celle de Nitsche par Collin [Col97] sur les surfaces minimales avec au moins deux bouts, et la caractérisation par Meeks et Rosenberg de l'hélicoïde comme la seule surface minimale proprement plongée simplement connexe ([MR] à la suite de travaux de Colding et Minicozzi). Ces deux résultats (et beaucoup d'autres) mettent en lumière la relation entre la topologie de la surface et sa géométrie (via la propriété $H=0$). Dans tous ces cas il s'agit de surfaces plongées et cette propriété s'avère déterminante. En effet, il est plus naturel de considérer les surfaces plongées de l'espace que les immersions (avec leurs auto-intersections potentielles), même si celles-ci sont un outil utile voire incontournable. De plus, si l'hypothèse de plongement est remplacée par celle d'immersion, le nombre de solutions augmente significativement; le problème change de nature[1]. Notons enfin que des travaux similaires sont conduits dans d'autres variétés, mais je ne les évoquerai pas.

Les idées et techniques utilisées pour la résolution de ces problèmes varient grandement, mais partent tous de la formule de Weierstrass pour les surfaces minimales. En effet toute immersion minimale (conforme) f peut être décrite par

$$f(z) = \mathrm{Re} \int^z (g^{-1} - g, i\,(g^{-1} + g), 2)\,\eta$$

avec $g\colon \Sigma \to \bar{\mathbb{C}}$ la projection stéréographique de l'application de Gauss, qui est méromorphe, et $\eta = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\,f_3 + i\,\mathrm{d}\,f_3^*)$ la 1-forme holomorphe communément appelée la *différentielle holomorphe de la hauteur*. Sous certaines hypothèses de topologie ou de courbure, il nous est possible de considérer Σ comme une surface de Riemann, avec des points enlevés qui correspondent aux bouts géométriques (en nombre fini ou infini). Par exemple, l'hypothèse

1. Il est par contre très intéressant de déterminer si la condition de propreté est à elle seule une condition suffisamment discriminante, par exemple pour obtenir des résultats de classification de surfaces minimales par leur topologie, etc. Les surfaces immergées (et non plongées) sont néanmoins le sujet d'étude en cours, mais avec en général des hypothèses supplémentaires comme celle de courbure totale finie (*cf.* les n-noïdes).

de courbure totale finie conduit à une surface Σ compacte privée d'un nombre fini de points, munie de données holomorphes (g, η) satisfaisant les conditions de compatibilité suivantes (OSSERMAN) :

- une métrique définie : $(|g| + |g|^{-1})\,|\eta| > 0$,
- la fermeture des périodes : pour tout lacet $\gamma \subset \Sigma$, $\mathrm{Re} \int^z (g^{-1} - g, i\,(g^{-1} + g), 2)\,\eta = 0$.

Cette dernière condition mène à des problèmes de géométrie algébrique et à la classification des solutions. Telle a été mon premier travail dans ce sujet (paru dans [9]), un résultat de rigidité pour l'exemple minimal de RIEMANN (voir figure 1).

Théorème 1. *Toute surface minimale plongée complète simplement périodique de courbure totale* $16\,\pi$ *(donc d'application de* GAUSS *de degré 4), avec des bouts plans et comprenant deux lignes droites, est le quotient de la surface minimale de* RIEMANN.

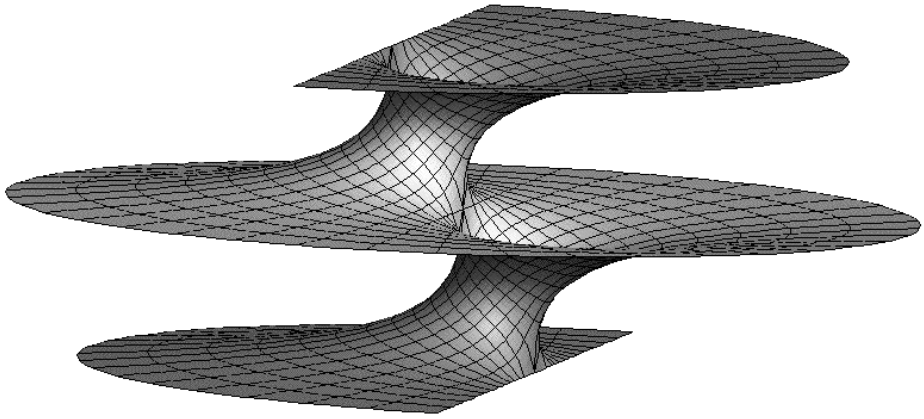

Figure 1. Surface minimale simplement périodique de RIEMANN.

L'idée de départ est d'utiliser les hypothèses géométriques pour réduire le problème à un problème algébrique qui fixe le type conforme du tore et contraint les paramètres holomorphes $(g,\ \eta)$, alors déterminées par un nombre fini d'inconnues (essentiellement l'application de GAUSS). Les conditions de périodes (deux algébriques plus une équation elliptique) forcent (g, η) à coïncider avec les données de l'exemple connu de RIEMANN. Ce théorème est une contribution modeste à une liste importante de résultats de classification, qui l'ont généralisé à plusieurs reprises (voir [MP04] pour un état des lieux, notamment sur l'exemple de RIEMANN). Ces mêmes méthodes algébriques m'ont permis dans ma thèse (travail non publié) de construire une famille de surfaces minimales à quatre bouts, invariante par un groupe de symétrie de rotation d'ordre $k \geqslant 2$ quelconque. Cependant ces surfaces ne sont pas plongées, ce qui diminue leur intérêt.

À côté de ce programme de classification, un autre sujet a émergé dans les années 1990 avec la découverte d'hélicoïdes simplement périodiques avec une poignée, puis surtout d'un hélicoïde de genre un, $\mathcal{H}e_1$ [HKW93] : l'étude des surfaces et bouts de courbure totale infinie (non périodiques). Il est devenu impératif de comprendre la nature asymptotique de telles surfaces, sous des conditions topologiques raisonnables (voir ci-après). La surface modèle est évidemment l'hélicoïde, maintenant considéré dans sa totalité, et dans des coordonnées bien choisies, son application de Gauss est $g(z)=e^z$ tandis que $\eta=i\,\mathrm{d}z$. J'ai prouvé deux résultats importants dans cette direction, le premier dans [10], le second – qui généralise le premier – dans [2] avec Laurent Hauswirth et Joaquín Pérez. Faisons les hypothèses suivante sur le bout minimal :

i. (topologique) le bout est conformément un disque épointé,

ii. (topologique encore) les plans horizontaux coupent la surface en un nombre fini de courbes (donc η est méromorphe au bout),

iii. (métrique) la courbure totale ne croît pas trop vite, ceci étant mesuré grâce à l'application de Gauss, dont l'ordre (au sens de Nevanlinna) doit être fini, *i.e.* g se comporte au voisinage du bout comme $e^{P(z)}$ en ∞, pour un polynôme P. En d'autres termes, $\mathrm{d}g/g$ est méromorphe.

Cet ensemble de conditions s'est révélé pertinent (cela décrit notamment $\mathcal{H}e_1$) et de tels bouts sont désormais appelés *bouts de type fini*. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat.

Théorème 2. *Soit $M\subset\mathbb{R}^3$ une surface minimale complète plongée avec un bout de type fini, de courbure totale infinie. Soit $(g,\,\eta)$ ses données de* Weierstrass. *Alors M est propre, sa courbure gaussienne est bornée, les différentielles méromorphes $\mathrm{d}g/g,\eta$ ont des pôles doubles sans résidu au bout et M est $\mathcal{C}^0$-asymptote à l'hélicoïde.*

C'est exactement ce qui se passe dans le cas de $\mathcal{H}e_1$. Noter que l'on ne requiert pas la propreté, mais qu'elle se déduit du théorème. À l'inverse le caractère plongé est crucial (sans celui-ci le théorème est faux).

Le caractère plongé d'une immersion est une condition difficile à prouver ou contredire, en général parce que l'on ne connaît que les dérivées de l'immersion et non l'immersion elle-même (comme c'est le cas dans la formule de Weierstrass). La plupart des preuves de (non)plongement reposent soit sur l'utilisation de graphes (clairement plongés), soit sur le passage à la limite contrôlé de surfaces plongées, soit enfin sur la réduction de l'étude au comportement asymptotique. C'est la troisième option qui nous intéresse ici, avec une difficulté liée à la courbure totale infinie : le bout n'a justement pas de comportement asymptotique simple[2], contrairement aux bouts de courbure totale finie. Pourtant, il est possible de mettre en évidence un comportement autosimilaire, avec notamment des sections horizontales de la surface de courbure (bidimensionnelle) de plus en plus grande (voir figure 2). Cela impose *in fine* des auto-intersections (des boucles). Néanmoins, la preuve complète exige une analyse minutieuse de tous les cas possibles, avec une démonstration *ad hoc* pour chacun d'entre eux.

2. d'ailleurs ce comportement varie avec le degré de P où $g(z)\sim e^{P(z)}$.

Figure 2. Image quand $g = e^{z^3}$.

Ce théorème a d'abord servi à montrer que l'hélicoïde $\mathcal{H}e_1$ de HOFFMAN, KARCHER et WEI était effectivement plongé en dehors d'un compact (un résultat aussi prouvé par HOFFMAN et MCCUAN [HM03]). Mais l'utilisation la plus importante a été comme étape intermédiaire dans la preuve de l'unicité de l'hélicoïde en tant que surface minimale complète proprement plongée simplement connexe [MR]. Au cours de leur démonstration, MEEKS et ROSENBERG montrent qu'une surface minimale complète proprement plongée de topologie finie (et en particulier simplement connexe) avec un bout, est de type fini au sens ci-dessus. Dès lors elle est asymptote à l'hélicoïde, d'après notre résultat.

En conclusion, nous voyons ici l'utilisation de la structure algébrique sous-jacente (*i.e.* la formule de WEIERSTRASS) pour caractériser la plus extrinsèque des propriétés géométriques : le plongement. La clef de ces démonstrations réside en l'étude fine du comportement des fonctions analytiques en présence, et paraît difficilement généralisable directement à d'autres contextes : cas compact, cas d'une paramétrisation analytique réelle mais non holomorphe. J'ai eu l'occasion de faire une preuve de non-plongement dans le cadre des bouteilles de KLEIN lagrangiennes stationnaires hamiltoniennes (voir plus bas), et la méthode utilisait plutôt l'expression explicite de l'immersion, ainsi que ses symétries.

3 Le problème isopérimétrique

Nous considérerons le problème de minimisation suivant : soit $M = \mathbb{R}^3/G$ une variété plate de dimension trois, avec G un groupe discret infini – l'exemple le plus notable étant le tore cubique $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3 \simeq [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, trouver pour tout $V \leqslant \mathrm{Vol}(M) \leqslant +\infty$ quelle(s)

surface(s) possède(nt) l'aire la plus petite, parmi toutes celles qui bordent un domaine de volume V.

La solution au problème analogue dans le plan est connue depuis fort longtemps[3] : il s'agit de cercles et de droites. La solution du problème isopérimétrique est aussi bien connue dans $\mathbb{R}^3$ (et en fait $\mathbb{R}^n$), et il s'agit des sphères. Pourtant, dans le cas périodique plat, la question reste sans réponse aujourd'hui encore, si ce n'est pour le cas du cube et pour le demi-volume *uniquement* (par une preuve de Hadwiger en 1972, ou celle plus récente et plus courte de Barthe utilisant des mesures de probabilités [Bar01]) : la solution est alors un tore plan. On peut aussi montrer que – comme c'est le cas en général – les solutions pour des volumes assez petits sont des sphères. Il est donc naturel de formuler la conjecture suivante :

Conjecture SCP. *Les surfaces isopérimétriques dans $M = \mathbb{R}^3/G$ sont des sphères, des cylindres ou des tores plans.*

Pourtant la conjecture analogue est fausse si la dimension est trop élevée (10 ou plus), par conséquent toute preuve devra utiliser les spécificités de la dimension 3. Or déjà en dimension 3, il existe des surfaces CMC candidates à l'isopérimétrie autres que les sphères, cylindres et plans, à savoir les surfaces dites de Lawson (de genre 2) et celles de Schwarz (genre 3), voir figure 3. Pire encore, des expérimentations numériques auxquelles je me suis livré (voir [3], section 4.2) montrent que certains candidats potentiels (de type Lawson) sont extrêmement près de contredire la conjecture; pour un volume choisi, leur aire n'est que $1,0003$ fois supérieure à celle de la solution conjecturée ! Par conséquent un argument trop grossier ne suffira pas à prouver la conjecture.

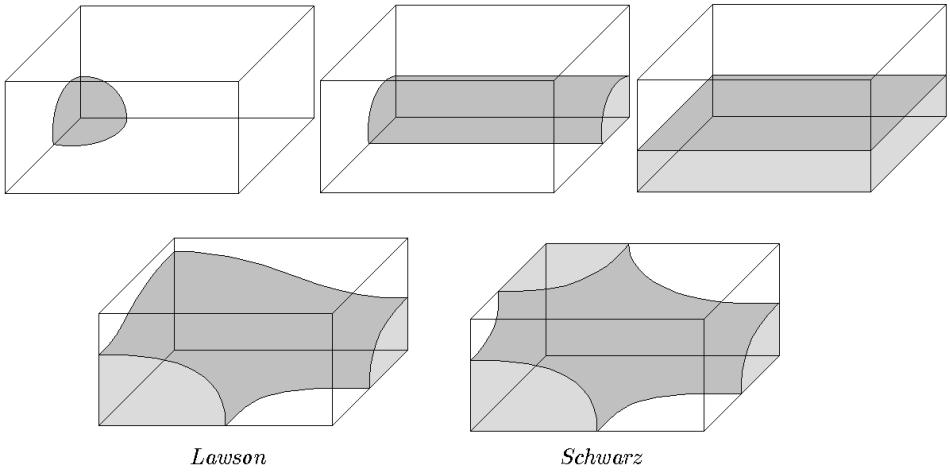

Figure 3. Les candidats pour le problème isopérimétrique, vus dans 1/8-ème du tore $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

3. c'est grosso modo le problème de Didon (qui remonte à l'Antiquité), qui donne le demi-cercle comme courbe de plus petite longueur à aire donnée, et dont les extrémités touchent une droite.

En dépit de la difficulté de ce problème, bien des propriétés des solutions sont déjà connues, et de façon remarquable, ces contributions à la résolution du problème sont très variées, venant parfois de domaines extérieurs à la géométrie différentielle, à savoir les probabilités et le transport de mesures (*cf.* [Ros01] pour un aperçu du sujet). Même à l'intérieur de la géométrie différentielle, les arguments diffèrent considérablement les uns des autres. Pour commencer, notons que les surfaces isopérimétriques sont des minimiseurs de l'aire sous contrainte de volume constant, ce sont donc des surfaces à courbure moyenne constante (CMC). L'existence et la régularité de ces minimiseurs est connue, par des théorèmes venant de la théorie géométrique de la mesure ([Alm76]). Reste à déterminer la forme exacte de ces surfaces, et pour cela il est envisageable d'étudier leur espace de modules, ce qui introduit un peu de topologie et de géométrie algébrique.

Je donnerai ici seulement un aperçu des différentes méthodes que j'ai employées dans un travail en collaboration avec Laurent HAUSWIRTH, Joaquín PÉREZ et Antonio ROS [3], où nous nous sommes intéressés au problème isopérimétrique en présence d'un groupe discret de symétries G.

Dans un premier temps, j'ai étudié le cas des espace doublement périodiques du type $\mathbb{T}(\alpha,\,\beta)\times\mathbb{R}$ où $\mathbb{T}(\alpha,\,\beta)=\mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus(\alpha+i\beta)\,\mathbb{Z}$ (où l'on se ramène à $|\alpha|\leqslant\frac{1}{2}$, $\beta>0$ et $\alpha^2+\beta^2\geqslant 1$). Les surfaces isopérimétriques dans ces variétés sont moins nombreuses que dans le cas triplement périodique, et ce sont des candidats potentiels pour le cas cubique. On sait depuis [RR92] que, pour des raisons de compacité, la conjecture SCP est vraie, en dehors d'un ensemble compact de l'espace des modules. Dans notre article, nous donnons une estimation précise des bornes de ce compact, via la caractéristique d'EULER de la surface solution (qui quand la conjecture est vraie, ne peut être négative).

Théorème 3. ([3], théorème 13)
*Soit Σ une surface isopérimétrique non plane de $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$, de caractéristique d'*EULER *$\chi<0$, de courbure moyenne H, d'aire A, et bordant un domaine de volume V. Alors,*

$$\frac{64\,\pi}{9}\,|\chi|<\frac{A^3}{V^2}\qquad \textit{et}$$

$$\frac{3\,A}{16\,V}\left(1-\sqrt{1+\chi\,\frac{64\,\pi\,V^2}{9\,A^3}}\right)<H<\frac{3\,A}{16\,V}\left(1+\sqrt{1+\chi\,\frac{64\,\pi\,V^2}{9\,A^3}}\right).$$

La topologie de Σ est donc contrainte par sa géométrie :

Corollaire 4. *Toute surface isopérimétrique de $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ de genre supérieur à 1 (i.e. $\chi<0$) borde un volume strictement inférieur à $\frac{3}{4\sqrt{\pi}}A(\mathbb{T})^{3/2}$, où $A(\mathbb{T})$ désigne l'aire du tore.*

On en déduit un encadrement des variétés $\mathbb{T}(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}$ sur lesquels la conjecture SCP est forcément satisfaite :

Corollaire 5. *Si $\beta\geqslant\frac{9\,\pi}{16}\simeq 1{,}767$, alors la conjecture SCP est vraie, i.e. les seules surfaces isopérimétriques sont les sphères, les cylindres et les tores plans (rangées par ordre de volume bordé croissant).*

Les idées clefs derrière ce théorème sont d'une part la stabilité (responsable des inégalités), et d'autre part la déformation simultanée d'une surface et de la variété ambiante où elle est située, au lieu d'une déformation plus standard où l'espace ambiant est fixé. La stabilité est un ingrédient fréquent dans les preuves sur l'isopérimétrie, puisque par

définition les surfaces isopérimétriques sont stables. C'est un critère plus facile d'emploi, car il donne une caractérisation infinitésimale par la variation seconde de l'aire (et l'opérateur de Jacobi), mais il est aussi plus faible que l'isopérimétrie. Pire encore, certains candidats à l'isopérimétrie sont stables (par exemple la surface P de Schwarz). Enfin la dernière idée – et la plus intéressante – utilise le résultat de compacité mentionné plus haut : puisque la conjecture est vraie pour β assez grand, il y a – pour chaque α – un plus grand β en dessous duquel il existe un contre-exemple. On peut prouver que cela se produira nécessairement au volume de transition où cylindres et tores plans sont équivalents.

Dans le même esprit, nous donnons une condition sur $\mathbb{T}(\alpha,\,\beta)$ qui garantit que les sphères restent isopérimétriques sur leur domaine maximal, à savoir tant que les cylindres ne sont pas meilleurs (précisément, pour des volumes inférieurs ou égaux à $\frac{4\pi}{81}$). Rappelons que là encore le résultat est connu dans son principe, l'intérêt réside en la qualité de l'encadrement.

Théorème 6. ([3], théorème 18)
Dans toute variété $\mathbb{T}(\alpha,\beta)\times\mathbb{R}$ *où*

$$\beta > \beta_0 = \frac{2\pi}{27}\left(3-\sqrt{2}+\sqrt{9-3\sqrt{2}}\right) \simeq 0,876603$$

la seule solution isopérimétrique bordant un volume inférieur à $\frac{4\pi}{81}$ *est une sphère.*

Noter que cet encadrement est très bon, puisque la plus petite valeur possible de β est $\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 0,866025$. Cela force tout tore $\mathbb{T}(\alpha,\beta)$ pour lequel cette partie de la conjecture SCP serait fausse, à être très proche du tore hexagonal correspondant à $\alpha+i\,\beta=e^{i\pi/3}$ (voir figure 5). Les tores rectangulaires satisfont en particulier l'hypothèse du théorème 6. Justement, le tore hexagonal est celui que les expérimentations numériques désignent comme quasi contre-exemple (voir plus haut).

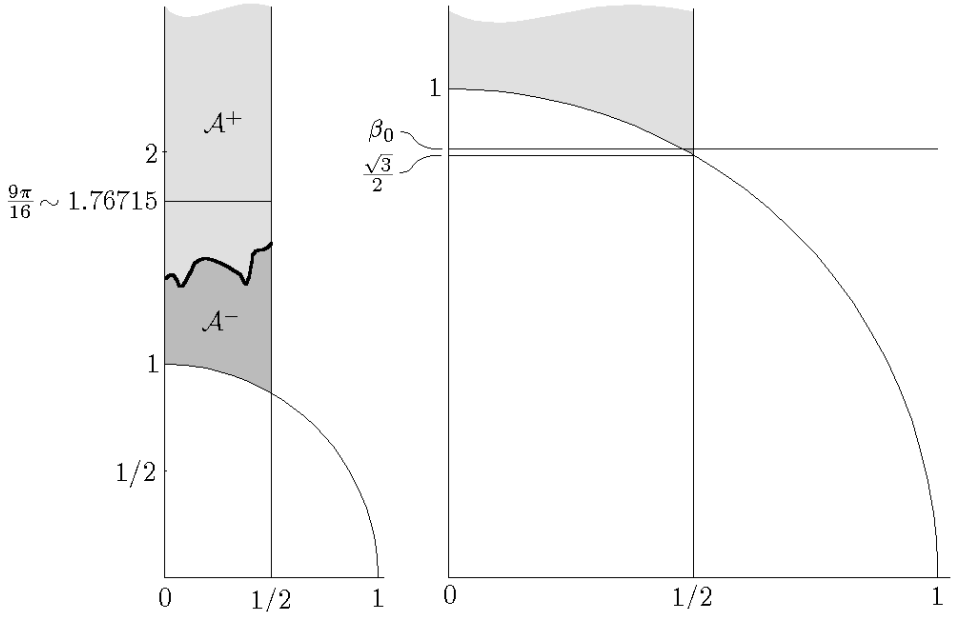

Figure 4. Parties de l'espace des modules des tores $\mathbb{T}(\alpha,\beta)$ pour lesquelles (i) la conjecture SCP est vraie, et (ii) les sphères sont isopérimétriques sur leur domaine maximal.

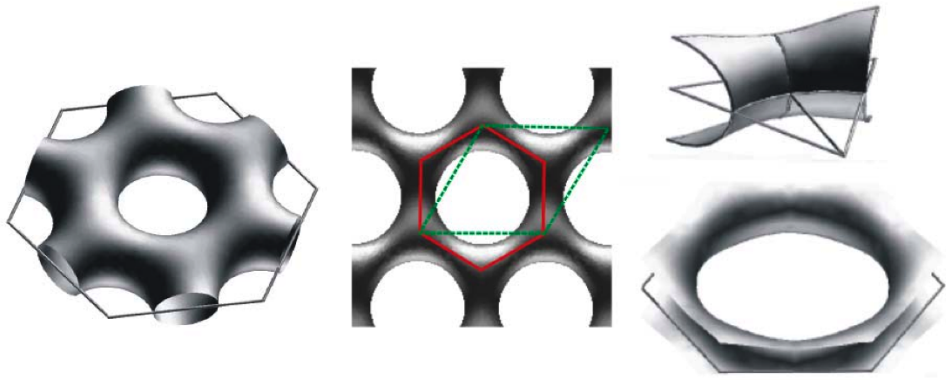

Figure 5. Gauche et centre : surface CMC de genre 2 dans l'espace produit du tore hexagonal par $\mathbb{R}$. Droite : parties de la surface qui l'engendrent par réflexion. Images de Karsten GROSSE-BRAUCKMANN.

Dans le cas triplement périodique cubique, j'ai exploré le problème en supposant des symétries supplémentaires[4], en plus des trois translations indépendantes : les retournements d'axes diagonaux du cube. Une famille de solutions potentielles, obtenues par déformation de la surface P de SCHWARZ possède en effet ce degré de symétrie. Pour comprendre ce problème hautement symétrique, nous caractérisons le *profil isopérimétrique* I, qui est l'application associant à tout volume V l'aire $I(V)$ de la ou des solutions isopérimétriques correspondantes. Une réponse presque complète à la conjecture ci-dessus serait de prouver que le profil isopérimétrique est égal au profil sphères-cylindres-plans qui, lui, est connu.

Théorème 7. ([3], théorème 20)
Le profil isopérimétrique de l'espace $(\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3)/G$*, où* G *contient les quatre retournements diagonaux, est minoré par le profil SCP, et il lui est strictement supérieur dès que le volume bordé dépasse* $\frac{4\pi}{81}$.

Corollaire 8. *Hormis les sphères, aucune surface isopérimétrique du tore standard* $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ *ne peut être invariante par les retournements diagonaux.*

Cela exclut donc certaines surfaces de SCHWARZ (celles qui sont symétriques), mais pas toutes, et pas les surfaces de genre 2 (type LAWSON).

La méthode employée pour démontrer ce résultat est différente des précédentes, et utilise la stabilité pour dériver un principe du maximum pour le profil I. On peut en effet montrer que le profil est un supersolution faible de l'équation différentielle elliptique suivante :

$$I^2 I'' + I\,(I')^2 = 4\,\pi\,\chi\,. \tag{1}$$

Une étude précise nous amène au résultat cité (et d'autres).

4. la symétrie des solutions reflétant souvent les symétries de l'espace ambiant.

Nous avons donc réuni de nombreux résultats, qui complètent ceux précédemment connus, et donnent les meilleures estimations connues aujourd'hui. Néanmoins le sentiment que l'on doit retirer de cette étude est que la conjecture SCP – si elle est vraie – sera difficile à démontrer.

4 Surfaces lagrangiennes et systèmes intégrables

L'aire des surfaces lagrangiennes

On constate depuis quelques années un intérêt renouvelé pour les sous-variétés lagrangiennes des variétés symplectiques. Les raisons pour cela sont variées, et je n'en citerai que quelques unes. Celle qui est la plus éloignée de mes travaux est issue de la physique théorique, où les structures symplectiques sont fréquemment utilisées. Récemment, la théorie de la symétrie miroir s'est vue rattachée aux surfaces lagrangiennes par une conjecture due à Strominger, Yau et Zaslow [SYZ01], liant cette symétrie dans les variétés de Calabi–Yau (dites aussi de Calabi–Aubin–Yau) aux fibrations par des tores *spéciaux lagrangiens* (i.e. calibrés par une forme volume holomorphe parallèle)[5]. Ces tores sont minimisants car ils sont calibrés, donc sont à la fois minimaux *et* lagrangiens. Il existe une littérature étendue sur ce sujet (en particulier en dimension 3), *cf.* les articles de Joyce pour une vue d'ensemble. Un cas particulier mérite notre attention, c'est celui des singularités coniques des sous-variétés spéciales lagrangiennes en dimension 3, ce qui revient à considérer les surfaces minimales legendriennes de la sphère S^5 (obtenues comme intersections du cône asymptotique et de la sphère). Avec Frédéric Hélein, j'ai étudié deux problèmes variationnels proches : les surfaces legendriennes stationnaires hamiltoniennes de S^5 et les surfaces lagrangiennes stationnaires hamiltoniennes de $\mathbb{CP}^2$ (obtenues en projetant de S^5 sur $\mathbb{CP}^2$ par la fibration de Hopf). Ces surfaces généralisent le cas spécial lagrangien.

Le problème de l'élasticité incompressible offre une autre motivation pour étudier les problèmes variationnels sur les surfaces lagrangiennes (*cf.* [Wol97]) : un graphe lagrangien dans $\mathbb{R}^4$ correspond à une application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ préservant l'aire. Parmi toutes ces applications possibles, qui par exemple satisfont des conditions de bord prescrites, il est utile de trouver une solution « meilleure » que les autres, *id est* d'aire minimisante. Il faut garder à l'esprit que la condition lagrangienne est relativement peu restrictive; localement on construit aisément des graphes à partir du gradient d'applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Par contre la contrainte de minimalité débouche sur une EDP difficile, l'équation de Monge-Ampère.

5. Bien qu'il soit ardu de résumer cet aspect de la théorie des cordes, disons simplement que l'on propose comme modèle de l'espace physique une variété de dimension 10 du type $\mathbb{R}^4 \times M$ où M est Calabi–Yau, sur lequel on construit (éventuellement) une quantification. Deux variétés de Calabi–Yau M et $\hat{M}$ sont dites *miroirs* l'une de l'autre si leurs quantifications coïncident, à un automorphisme particulier près. Pour autant M et $\hat{M}$ peuvent être très différentes. Il semble que la « transformation miroir » échange les invariants liés à la structure complexe et ceux liés à la structure symplectique. La conjecture SYZ fait l'hypothèse que deux variétés M et $\hat{M}$ sont miroirs l'une de l'autre s'il existe des surjections continues $f\colon M \to B$ et $\hat{f} : \hat{M} \to B$ avec B une variété topologique compacte de dimension 3, telles que les fibres de f et $\hat{f}$ soient des tores spéciaux lagrangiens, au moins sur un ouvert dense de B, et que ces tores soient asymptotiquement duaux (voir [Joy03] pour une introduction).

La notion de *stationarité hamiltonienne* provient d'un problème variationnel différent, mais par certains aspects plus naturel, abordé par OH [Oh93], CHEN et MORVAN [CM94]. Dans une variété de KÄHLER–EINSTEIN M^{2n}, on peut rechercher les points critiques de l'aire en se restreignant aux sous-variétés lagrangiennes. Une telle sous-variété est dite *stationnaire lagrangienne* [SW01]. Mais stationnaire lagrangien implique de fait minimal[6], car le champ de vecteurs courbure moyenne $\vec{H}$ est une variation symplectique infinitésimale, d'où le besoin de définir une notion plus flexible. En autorisant uniquement les déformations infinitésimales par des champs de vecteurs hamiltoniens (à support compact), qui sont de type $J\,\nabla h$, *i.e.* les gradients symplectiques d'une fonction h, nous réduisons l'ensemble des variations possibles, excluant notamment le flot par courbure moyenne, et obtenons une classe de points critiques plus grande. Ces solutions sont appelées sous-variétés stationnaires hamiltoniennes (lagrangiennes). Elles sont effectivement plus nombreuses que les minimales lagrangiennes, avec par exemple des exemples compacts dans $\mathbb{C}^n$, ce qui est impossible pour une sous-variété minimale à cause du principe du maximum. Ce problème a un sens dans des variétés qui ne sont pas nécessairement de CALABI–YAU (notamment $\mathbb{CP}^2$), il est aussi plus riche et plus subtil, au sens où la minimisation se fait non dans une classe d'homotopie, mais dans une classe d'isotopie hamiltonienne (la classe d'équivalence des sous-variétés lagrangiennes reliées par un flot hamiltonien). Or il est très difficile de déterminer si deux sous-variétés homotopes sont isotopes (*cf.* [Vit00]). Nous avons donc un problème variationnel intéressant, pour lequel il faut prouver existence, régularité, classifier les minimiseurs dans chaque classe d'isotopie, ce qui amène par exemple à la conjecture suivante, due à OH, dont nous discuterons plus bas.

Conjecture. *Les produits cartésiens de cercles $r_1\,S^1 \times \cdots \times r_n\,S^1 \subset \mathbb{C}^n$ sont minimisants dans leur classe d'isotopie.*

Notons qu'existence et régularité sont plus difficiles à démontrer que dans le cas minimal ([Min95], [SW01]).

Dans l'espace $\mathbb{C}^2$, les surfaces stationnaires hamiltoniennes sont particulièrement intéressantes, non seulement de par l'existence de solutions compactes, mais simplement parce qu'une surface minimale et lagrangienne est spéciale lagrangienne et dès lors holomorphe – pour une autre structure complexe que celle de départ. Or les courbes holomorphes sont bien connues, ce qui n'est pas encore le cas des surfaces stationnaires hamiltoniennes.

Enfin notons la parenté de ces surfaces avec les surfaces à courbure moyenne constante (CMC) dans la mesure où elles suivent une caractérisation de type RUH–VILMS : la stationarité équivaut à l'harmonicité d'une « partie » de l'application de GAUSS, à savoir l'angle lagrangien (voir ci-après).

Quand la géométrie différentielle rencontre les systèmes intégrables

Les avancées récentes en géométrie différentielle ont été marquées par l'irruption de méthodes de systèmes complètement intégrables (issues de l'analyse), qui proposent une analyse de l'EDP sous-jacente (*cf.* [Uhl89], [Hit90], [PS89], [Bob94], [DPW98], [Gue97] et de nombreux autres). Il est hors de portée de ce modeste mémoire d'en décrire le pourquoi et le comment, mais l'idée générale est que les systèmes intégrables sont des

6. et même spécial lagrangien, si la variété ambiante est de CALABI–YAU.

EDP *très* structurées et que l'on peut décrire plus en détails l'ensemble de leurs solutions. On peut notamment construire automatiquement des solutions, les décrire localement au moyen de données holomorphes, et bien sûr construire des invariants. Il est à remarquer que de très nombreux problèmes géométriques correspondent à un système intégrable. Ceux-ci sont les EDP les plus simples après les équations de CAUCHY–RIEMANN, de même que dans $\mathbb{R}^3$ les immersions CMC sont comparables – en plus compliqué – aux immersions minimales (qui sont justement des applications holomorphes). Au final ces formalisations sont autant de tentatives de généraliser la représentation de WEIERSTRASS des surfaces minimales dans $\mathbb{R}^n$ à d'autres problèmes géométriques, objectif qui a été atteint dans de nombreux cas. Les surfaces stationnaires hamiltoniennes illustrent à la perfection cette approche. En même temps, le système intégrable que nous allons étudier présente un intérêt en lui-même, de par son utilisation d'un automorphisme d'ordre quatre[7].

Une condition nécessaire à cette structure de système intégrable est l'homogénéité de la variété cible, qui permet d'employer la théorie des groupes de LIE. Si cette approche utilise complètement la géométrie de la variété d'arrivée, elle doit cependant être ré-écrite à chaque nouveau cas, et ne peut évidemment servir pour des espaces non homogènes, à la différence des méthodes plus analytiques. Nous avons cependant montré que dans le cas étudié, tous les espaces symétriques hermitiens partagent une même structure de système intégrable [8].

Enfin, n'oublions pas le rôle crucial joué par le groupe des difféomorphismes conformes sur l'espace de départ, dans la mesure où nous utiliserons en permanence la structure complexe induite par la métrique.

Surfaces stationnaires hamiltoniennes dans les espaces symétriques hermitiens

Dans une variété kählerienne M de dimension 4, munie d'une structure complexe J et d'une forme symplectique ω, une immersion $f\colon \Sigma \to M$ est dite lagrangienne si $f^*\omega = 0$. Un champ de vecteurs hamiltonien est un champ du type $J\,\nabla h$, où h est une fonction numérique lisse à support compact. Comme nous l'avons vu, une immersion lagrangienne f est stationnaire hamiltonienne si elle est point critique de l'aire pour toute variation hamiltonienne infinitésimale, ce qui revient à

$$\forall h \in C_0^\infty(M),\ \int_\Sigma \left\langle J\nabla h, \vec{H} \right\rangle \mathrm{d}A = 0\,.$$

Si l'on suppose de plus que M est d'EINSTEIN, l'image réciproque du fibré canonique par une application lagrangienne est plate, car sa forme de courbure est la forme de RICCI, qui est proportionnelle à $f^*\omega$. On peut donc construire localement une $(n,0)$-forme parallèle Ω le long de Σ, et on définit *l'angle lagrangien* β par

$$e^{i\beta} = \Omega(e_1, e_2)$$

où (e_1, e_2) est une repère mobile orthonormé quelconque de $T\Sigma$. Clairement β est défini à une constante additive près, et $\mathrm{d}\beta$ (la forme de MASLOV) est le vrai invariant géométrique. Qui plus est, β est lié à la fonctionnelle d'aire par le vecteur courbure moyenne :

$$\vec{H} = J\,\nabla\beta$$

7. non qu'un tel automorphisme n'ait jamais été utilisé; mais son association avec la forme de connexion étendue que nous verrons plus bas, avec des puissances allant de -2 à $+2$, est plus rare.

ce qui permet de caractériser les immersions stationnaires hamiltoniennes par

$$\Delta_\Sigma \beta = 0\,. \tag{2}$$

À ce titre, β représente une information partielle[8] sur l'application de GAUSS (de par (e_1, e_2) ci-dessus). L'équation (2) est l'analogue du $\Delta N = 0$ du théorème de RUH–VILMS pour l'application de GAUSS des surfaces CMC. Remarquons que dans une variété de CALABI–YAU, il existe une forme volume holomorphe parallèle globalement définie Ω, ce qui nous permet de définir plus simplement β dans $\mathbb{C}^2$ ou pour les surfaces legendriennes de $S^5 \subset \mathbb{C}^3$.

En me servant de la structure d'espace homogène[9] de $M = G/H$, j'ai montré dans des contextes divers ($\mathbb{C}^2$ dans [7], les espaces symétriques hermitiens dans [8] et les cônes legendriens de S^5 dans [4]) comment relever localement l'immersion f en un repère mobile $F : \Sigma \to G$. C'est une procédure classique de la théorie des repères mobiles, et l'on obtient la forme de MAURER–CARTAN $\alpha = F^{-1}\,\mathrm{d}F$, qui représente – au changement de jauge près – la dérivée de f. Cependant, parmi tous les relèvements de f possibles, seuls quelques-uns sont géométriquement justifiés[10], aussi nous définissons ainsi des *relèvements lagrangiens*. Leur propriété essentielle est de mettre en avant l'angle lagrangien, qui est la quantité intéressante pour notre problème.

En effet, à condition d'utiliser un relèvement lagrangien, la forme de MAURER–CARTAN α se décompose en quatre morceaux $\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ le long des espaces propres d'un automorphisme τ d'ordre 4 de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G ([11]), et chaque morceau possède une signification géométrique. En particulier, α_2 est multiple de $\mathrm{d}\beta$, de sorte que l'équation (2) se ramène à

$$\mathrm{d} * \alpha_2 = 0 \tag{3}$$

où $*$ est l'opérateur de HODGE (donc α_2 est harmonique, car $\mathrm{d}\alpha_2 = 0$). Si l'on suppose sans perte de généralité que l'immersion f est conforme, alors $\alpha_{\pm 1}$ représente la métrique induite $|\mathrm{d}f|$. Et α_0 est la liberté de jauge.

Pour pouvoir reconstruire l'immersion f à partir d'une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ (où l'algèbre de LIE dépend de la variété d'arrivée considérée), il faut et il suffit (localement) que celle-ci satisfasse une condition d'intégrabilité (appelée parfois une équation de courbure nulle, en référence à la connexion $\mathrm{d} + \alpha$) :

$$\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0\,. \tag{4}$$

Le résultat fondateur de [8] est que les équations (3)+(4) équivalent à une seule équation de courbure nulle pour une famille à un paramètre (α_λ) de 1-formes :

$$\forall \lambda \in S^1,\ \mathrm{d}\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0\,. \tag{5}$$

Théorème 9. ([7] p 92, [8] pp 166–168)

8. qui peut détaillée dans le cas de $\mathbb{C}^2$ dans [7].

9. plus précisément symétrique, sauf dans pour $S^5 = U(3)/U(2)$ qui est réductif; les espaces symétriques hermitiens sont $\mathbb{C}^2 = U(2) \ltimes \mathbb{C}^2/U(2)$, $\mathbb{CP}^2 = SU(3)/S(U(2) \times U(1))$, le plan complexe hyperbolique $\mathbb{CD}^2 = SU(2,1)/S(U(2) \times U(1))$, $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ et son dual non compact $SU(1,1) \times SU(1,1)/U(1) \times U(1)$.

10. de même qu'en géométrie riemannienne on considère les repères de DARBOUX.

11. l'automorphisme τ est extérieur, et le cas échéant, c'est une racine carrée de l'involution qui définit l'espace symétrique G/H. Dans tous les cas, τ donne des informations sur géométrie de M.

Sur un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, l'ensemble des immersions faiblement conformes est en bijection, à congruence près, avec l'ensemble des 1-formes α de courbure nulle : $\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$ *qui satisfont* $\alpha'_{-1} = \alpha''_1 = 0$ *(conformité).*

De plus, l'immersion est stationnaire hamiltonienne si et seulement si la forme de MAURER–CARTAN *étendue*

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\,\alpha'_2 + \lambda^{-1}\,\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\,\alpha''_1 + \lambda^2\,\alpha''_2$$

est de courbure nulle pour tout $\lambda \in S^1$.

Une conséquence immédiate est que les immersions stationnaires hamiltoniennes font toujours localement partie d'une famille à un paramètre f_λ (plus précisément, il y a une action de S^1 sur l'ensemble des solutions), exactement comme pour les surfaces minimales et CMC. Nous noterons F_λ le relèvement solution de $\mathrm{d}F_\lambda = F_\lambda\,\alpha_\lambda$ (avec des conditions initiales fixées) dont la projection sur M est f_λ.

Si l'on compare cette équation de courbure nulle à l'équation des surfaces CMC et au système intégrable associé (l'équation de sh-GORDON, soit l'harmonicité dans S^2), on constate que dans les deux cas des choix spécifiques sont effectués :

- de paramétrisation : conforme dans les deux cas, et de plus par ligne de courbure dans le cas CMC (sans ombilics),
- de relèvement : lagrangien ici, de DARBOUX[12] pour les CMC.

Mais les puissances de λ diffèrent (-2 à $+2$ au lieu de -1 à $+1$), et surtout l'analyse de l'équation des CMC se focalise sur l'harmonicité de l'application de GAUSS, pour en déduire *ensuite* l'immersion CMC par la formule de SYM–BOBENKO, tandis qu'ici le relèvement est global. Cela dit, une telle construction (globale) est parfaitement possible pour les immersions CMC aussi.

Groupes de lacets, solutions de type fini et représentation de WEIERSTRASS

Pour tirer profit de la structure de système intégrable de l'EDP (2), adoptons le point de vue des espaces de lacets, plutôt que celui des familles d'applications. On considérera donc $z \mapsto [\lambda \mapsto F_\lambda(z)]$ comme une application à valeurs dans le groupe de lacets ΛG, notée abusivement encore F_λ, tandis que α_λ sera une 1-forme à valeurs dans $\Lambda\mathfrak{g}$, l'algèbre de lacets correspondante. La condition de décomposition de α_λ selon les espaces propres de τ avec les puissances appropriées revient à une propriété d'équivariance[13] : $F_{i\lambda} = \tau(F_\lambda)$. L'écriture en somme de puissances de λ peut être assimilée à une décomposition de FOURIER, et α_λ devient alors un polynôme trigonométrique. Le résultat ci-dessus s'écrit :

Théorème 10. ([7] p 104, [8] p 169)

Sur un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, l'ensemble des immersions faiblement conformes stationnaires hamiltoniennes est en bijection, à congruence près, avec l'ensemble des 1-formes équivariantes α_λ de courbure nulle, à valeurs dans $\Lambda\mathfrak{g}$, et telles que $\lambda^2\,\alpha_\lambda$ et α''_λ s'étendent de manière holomorphe au disque unité $\{|\lambda| \leqslant 1\}$.

12. *i.e.* le repère mobile est construit à partir des dérivées f_x, f_y (ou $f_z, f_{\bar z}$).

13. on dit aussi que le lacet est *twisté* ou *tordu*.

La présentation la plus générale de ce résultat (*cf.* [PS86]) relie les relèvements étendus F_λ à des sections d'une grassmannienne de dimension infinie sur laquelle agissent les groupes de lacets mentionnés ci-dessus. Je me limiterai à en décrire les aspects pertinents à mes travaux, à savoir pour l'essentiel des propriétés de décomposition de groupes de dimension infinie. Si l'on définit ΛG_τ et $\Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$ comme les groupes de lacets équivariants à valeurs dans G et $G^{\mathbb{C}}$ respectivement (avec une régularité $\mathcal{C}^\infty$ ou H^s, $s > \frac{1}{2}$), on peut construire les sous-groupes suivants :

$$\begin{aligned}
&\Lambda^+ G_\tau^{\mathbb{C}} = \{[\lambda \mapsto g_\lambda] \in \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}},\ \text{s'étendant à } |\lambda| \leqslant 1 \text{ de manière holomorphe}\}\\
&\Lambda_B^+ G_\tau^{\mathbb{C}} = \{[\lambda \mapsto g_\lambda] \in \Lambda^+ G_\tau^{\mathbb{C}},\ g_\lambda|_{\lambda=0} \in B\}\\
&\Lambda_*^- G_\tau^{\mathbb{C}} = \{[\lambda \mapsto g_\lambda] \in \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}},\ \text{s'étendant hol. à } \{|\lambda| \geqslant 1\} \cup \{\infty\},\ g_\lambda|_{\lambda=\infty} = \mathbb{1}\}
\end{aligned}$$

avec B un sous-groupe de LIE résoluble de $G^{\mathbb{C}}$. De même pour les algèbres de lacets correspondantes : $\Lambda\mathfrak{g}_\tau$, $\Lambda\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, $\Lambda_\mathfrak{b}^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, $\Lambda_*^-\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$. Alors nous montrons les décompositions suivantes (pour les groupes que nous étudions) ([7], [4]).

Lemme 11. *(décomposition d'*IWASAWA *en dimension infinie)*

Soit G un groupe de LIE *compact muni d'un automorphisme τ d'ordre 4. Soit G_0 le sous-groupe invariant par τ et B un sous-groupe tel que la décomposition d'*IWASAWA $G_0^{\mathbb{C}} = G_0 B$ *soit vraie. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda G_\tau \times \Lambda_B^+ G_\tau^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}\\
(g_\lambda, b_\lambda) & \longmapsto & g_\lambda b_\lambda
\end{array}$$

est un difféomorphisme.

Lemme 12. *Soit G un groupe de* LIE *semi-simple. Alors il existe un ouvert dense $\mathcal{C}$ dans la composante connexe de l'identité, appelé la « grande cellule », tel que*

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_*^- G_\tau \times \Lambda^+ G_\tau^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{C}\\
(g_\lambda^-, g_\lambda^+) & \longmapsto & g_\lambda^- g_\lambda^+
\end{array}$$

soit un difféomorphisme.

Quand la compacité fait défaut, il reste au moins un résultat local, et parfois même le résultat global, comme je l'ai montré dans $\mathbb{C}^2$ pour $U(2) \ltimes \mathbb{C}^2$ [7].

Nous avons adapté la construction de DORFMEISTER–PEDIT–WU [DPW98] à notre cas pour déduire une « représentation de WEIERSTRASS de dimension infinie » des immersions stationnaires hamiltoniennes :

Théorème 13. ([7] p 113–116, [8] pp 170–171)

Toute immersion stationnaire hamiltonienne faiblement conforme f à valeurs dans un espace symétrique hermitien G/H est donnée localement par un potentiel méromorphe $\mu \in \Omega^1(\Sigma) \otimes \Lambda\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, $\mu = \lambda^{-2}\mu_{-2} + \lambda^{-1}\mu_{-1}$, via la procédure d'intégration suivante :

i. intégrer le lacet méromorphe $\mathrm{d}M_\lambda = M_\lambda \mu_\lambda$,

ii. décomposer $M_\lambda = F_\lambda B_\lambda$ d'après le lemme 11.

Alors F_λ est le relèvement étendu d'une solution f_λ.

La réciproque (obtenir μ à partir de f) repose sur l'autre décomposition (lemme 12).

Notons ces points importants :

- le même algorithme vaut pour tous les espaces symétriques hermitiens, seul le groupe change,
- cette construction est bien similaire à la représentation classique de Weierstrass, avec comme donnée méromorphe le potentiel μ, l'intégration de μ, qui se simplifie dans $\mathbb{R}^3$ (car $G = \mathbb{C}^3$ est abélien) et une décomposition d'Iwasawa qui revient à prendre la partie réelle d'une immersion à valeurs dans un groupe de Lie complexe.

Pour les immersions stationnaires hamiltoniennes, cette construction reste néanmoins théorique, à cause de la difficulté d'obtenir pratiquement la décomposition de groupe de lacets, et des problèmes de monodromie dans le cas non simplement connexe. Néanmoins, ce résultat, dans le cadre des surfaces CMC, a été le point de départ de recherches fructueuses, avec la construction de surfaces, soit de façon abstraite, soit numériquement (avec notamment un programme en Java : `CMCLab` que l'on peut trouver en `http://www.gang.umass.edu/software/cmclab/index.html`).

La méthode des intervalles finis (*finite gap method*) est une autre construction liée à ces propriétés de décomposition, qui engendrent des solutions dites *de type fini*. Ces solutions s'obtiennent de façon équivalente par :

- la résolution de deux équations différentielles ordinaires commutant entre elles sur un espace vectoriel de dimension finie d (c'est la méthode originelle),
- la restriction de la représentation de Weierstrass ci-dessus à des potentiels constants de type polynomiaux (*i.e.* lacets constant en z, dont les coefficients de Fourier sont presque tous nuls).

De telles solutions n'ont de sens que sur un domaine contractile, voire sur le revêtement universel d'un tore, de sorte que la forme de Maurer–Cartan est doublement périodique. Nous prouvons alors ce résultat de rigidité dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{CP}^2$ ([7], [4]), dans le même esprit que [PS89] et [BFPP93] :

Théorème 14. ([7] p 119, [4] théorème 4.1) *Tous les tores stationnaires hamiltoniens sont de type fini.*

Cela ouvre la possibilité d'étudier de tels tores dans $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{CP}^2$ ou S^5 dans un espace fini de dimension finie, ce que nous avons fait pour le type le plus simple (on obtient des tores homogènes). Là encore, il s'agit d'un outil qui permet d'appréhender la structure de ces tores[14] comme dans le cas CMC, par exemple avec l'aide de fonctions theta. L'étude détaillée n'a été réalisée que dans le cas de $\mathbb{C}^2$, qui est décrit ci-après.

14. Rappelons que les sphères stationnaires hamiltoniennes sont nécessairement minimales, puisque $d\beta$ est une forme harmonique. Il n'y en a donc pas dans $\mathbb{C}^2$, et celles de $\mathbb{CP}^2$ sont toutes congrues à un double revêtement de $\mathbb{RP}^2$.

Du système intégrable à la représentation spinorielle

Alors que les résultats précédents sont valables pour tous les espaces symétriques hermitiens, avec pour modèle $\mathbb{CP}^2$, il est possible d'aller plus loin dans les détails en se restreignant à l'espace plat $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$, quitte à oublier ce formalisme de système intégrable (qui reste néanmoins caché à l'arrière-plan).

En partant du repère mobile décrit plus haut, l'équation d'intégrabilité (4), pour une immersion lagrangienne stationnaire ou non, s'avère équivalente à une équation de DIRAC avec potentiel complexe. Nous prouvons dans [5] la caractérisation suivante (écrite ici avec les notations de [11]).

Théorème 15. *Soit Σ un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. À toute immersion lagrangienne $f\colon \Sigma \to \mathbb{C}^2$ on peut associer des fonctions lisses $\beta\colon \Sigma \to \mathbb{R}/2\,\pi\,\mathbb{Z}$, qui est l'angle lagrangien, et $(s_1, s_2)\colon \Sigma \to \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$, satisfaisant l'équation de* DIRAC *suivante avec potentiel complexe :*

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial z \\ -\partial/\partial \bar{z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \bar{s}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial\beta/\partial \bar{z} & 0 \\ 0 & \partial\beta/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \bar{s}_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

et telles que

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} e^{i\beta/2} \left\{ \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_2 \end{pmatrix} \mathrm{d}z + i \begin{pmatrix} \bar{s}_2 \\ \bar{s}_1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\bar{z} \right\}. \tag{7}$$

Réciproquement, pour toute fonction β et toute solution (s_1, s_2) de (6) telle que $|s_1|^2 + |s_2|^2 > 0$, on peut construire une immersion lagrangienne f donnée par (7) pour un point de départ $z_0 \in \Sigma$ donné.

De plus, f est stationnaire hamiltonienne (resp. spéciale lagrangienne) si et seulement si β est harmonique (resp. constante).

Quelques commentaires :

1. $\Delta\beta$ peut être calculé avec le Laplacien conforme, au lieu du Laplacien de la métrique induite.

2. Dans le cas spécial lagrangien, on retrouve l'équation de CAUCHY–RIEMANN comme annoncée plus haut.

3. À la différence du point de vue des systèmes intégrables, cette formule décrit non seulement les immersions stationnaires, mais aussi toutes les immersions lagrangiennes (localement). C'est en fait un cas particulier de la représentation spinorielle de toutes surfaces de $\mathbb{R}^4$, telle qu'elle est décrite dans [Kon00].

4. Noter enfin qu'il n'y a pas de méthode générale pour obtenir des solutions à l'équation de DIRAC (6) – ni même pour garantir leur existence – à l'exception du cas spécial lagrangien, où β est constant, et du cas stationnaire hamiltonien détaillé ci-après.

Un des résultats les plus probants de cette nouvelle approche est la description complète et explicite de tous les tores stationnaires hamiltoniens de $\mathbb{C}^2$ (et même plus généralement des immersions d'application de Gauss doublement périodique telles que les cylindres etc.). Rappelons qu'il n'existe aucune solution de genre zéro, à cause de l'harmonicité de $\mathrm{d}\beta$. Il existe par contre des tores stationnaires hamiltoniens, notamment les produits cartésiens $r_1 S^1 \times r_2 S^1$. Au moment de la rédaction de ce travail, les seuls autres tores connus étaient des tores 1-homogènes construits par Castro et Urbano dans [CU98], exemples difficiles à généraliser par définition. À l'opposé, notre méthode donne tous les tores $\mathbb{C}/\Gamma$ possibles (et il y en a une infinité !), où Γ est un réseau dans $\mathbb{C}$, en utilisant un développement en série de Fourier et le théorème 15. En effet l'angle lagrangien (harmonique) est nécessairement de la forme $\beta(z) = 2\pi \langle \beta_0, z\rangle = 2\pi \operatorname{Re}(\beta_0 \bar{z})$ à une constante additive près, avec $\frac{\beta_0}{2} \in \Gamma^\star$, le réseau dual. L'immersion (faiblement conforme) est alors

$$f = \text{constante} + e^{i\pi\langle\beta_0, z\rangle} \sum_{\gamma \in \Gamma_0^\star} c_\gamma \frac{e^{2i\pi\langle\gamma, z\rangle}}{\frac{\bar{\beta}_0}{2} + \bar{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \bar{c_\gamma} \frac{e^{-2i\pi\langle\gamma, z\rangle}}{\frac{\beta_0}{2} - \gamma} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

où les c_γ sont les coefficients de Fourier complexes et

$$\Gamma_0^\star = \left\{ \gamma \in \frac{\beta_0}{2} + \Gamma^\star, |\gamma| = \left|\frac{\beta_0}{2}\right| \text{ et } \gamma^2 \neq \left(\frac{\beta_0}{2}\right)^2 \right\}$$

est l'ensemble des fréquences admissibles.

Un des aspects remarquables de cette formule est que, par construction, les problèmes de périodes sont résolus, à la différence de beaucoup des expressions usuelles telle que la formule de représentation de Weierstrass (où cela constitue même une des principales difficultés). La condition de fermeture des périodes est exactement $\gamma^2 \neq (\beta_0/2)^2$. Par ailleurs, l'ensemble des solutions est ainsi associé à un problème intéressant de géométrie plane classique : l'intersection d'un réseau avec un cercle (voir figure 6).

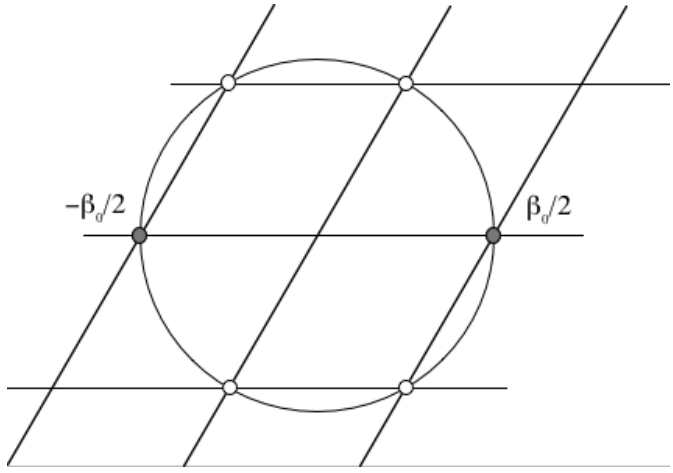

Figure 6. Tore hexagonal avec $\#\Gamma_0^\star = 4$.

Le cardinal de $\Gamma_0^\star$, toujours pair, mesure la complexité de l'immersion : 2 correspond aux solutions les plus simples, les produits cartésiens, qui sont stables (ce qui a été prouvé par Oh pour sa conjecture), 6 donne les tores de Castro et Urbano (instables), et 4 représente un nouvel exemple, illustré figure 6, de tore de type conforme hexagonal, qui n'appartient à la classe d'isotopie d'aucun tore cartésien, et pourtant n'est pas stable ! Nous montrons finalement que cette mesure de la complexité correspond à peu près à l'entier d prévu par la méthode des intervalles finis citée plus haut.

À titre de complément, nous classifions aussi les bouteilles de KLEIN stationnaires hamiltoniennes, et prouvons qu'elles ne sont jamais plongées, contribuant ainsi modestement à une question ouverte en géométrie symplectique, concernant l'existence de bouteilles de KLEIN lagrangiennes plongées dans $\mathbb{R}^4$.

Cette représentation spinorielle a permis à ANCIAUX

- d'améliorer dans [Anc02] une réponse partielle à la conjecture de OH due à MINICOZZI et ILMANEN: dans la classe d'isotopie du tore carré $S^1 \times S^1$, le tore stationnaire d'aire la plus petite est $S^1 \times S^1$ précisément et il est unique (il reste néanmoins à prouver l'existence d'un minimiseur),
- de construire de nouveaux exemples de surfaces stationnaires hamiltoniennes non compactes satisfaisant diverses propriétés géométriques (périodicité, auto-similarité, etc.), *cf.* [Anc03].

Pourtant les limites de cette représentation résident dans son principe même : la nécessité d'utiliser exclusivement des immersions conformes, une condition qui n'est aucunement respectée par le flot hamiltonien par exemple. De fait, deux tores isotopes n'ont pas *a priori* la même classe conforme, ce qui rend les comparaisons d'aire ardues.

Notons enfin que cette formulation peut s'écrire de façon très compacte grâce aux quaternions (puisque $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H}$) :

$$f = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_{0,+}^{\star}} f_\gamma \, \frac{\gamma \, e^{2i\pi \langle \gamma, z \rangle}}{\bar{\beta}_0 \, (\beta_0^2 - 4\,\gamma^2)} \, (-i\,\beta_0 + 2\,\gamma\, j) \right) e^{j\pi \langle \beta_0, z \rangle} + \text{constante}$$

où les f_γ sont les coefficients de FOURIER quaternioniques et

$$\Gamma_{0,+}^{\star} = \{ \gamma \in \Gamma_0^{\star}, \mathrm{Im}\,(\gamma\, \beta_0^{-1}) > 0 \}.$$

Cela rend certes les calculs plus aisés, mais montre de plus la nature quaternionique de l'espace des modules, qui pour une classe conforme donnée, est l'union disjointe d'espaces vectoriels sur $\mathbb{H}$ de dimensions croissantes.

Sous-variétés lagrangiennes en grande dimension

Dans un article non encore publié, en collaboration avec Henri ANCIAUX et Ildefonso CASTRO, j'ai étendu l'étude des sous-variétés lagrangiennes à des dimensions supérieures à 2, mais avec l'hypothèse qu'elles sont fibrées par des sphères rondes (une condition qui peut être comparée avec des travaux de première approche sur les tores 1-homogènes [CU98], [Has00]). C'est par exemple le cas du caténoïde lagrangien [CU99]. Nous obtenons une caractérisation simple de ces surfaces [1].

Théorème 16. *Toute sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geqslant 3$, feuilletée par des sphères rondes de dimension $n-1$ est localement l'image d'une immersion de la forme*

$$\ell : \begin{cases} I \times S^n & \to \quad \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} \\ (s, x) & \mapsto \quad r(s)\, e^{i\varphi(s)}\, x + \displaystyle\int_{s_0}^{s} e^{i\varphi(t)}\, W(t)\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

où I est un intervalle contenant s_0, $s \mapsto \gamma(s) := r(s)\, e^{i\varphi(s)}$ est une courbe plane de I dans $\mathbb{C}$ et $s \mapsto W(s)$ une courbe de I dans $\mathbb{R}^n$.

Une telle sous-variété est dite *centrée* si le centre de chaque sphère reste fixe tandis que s varie (*i.e.* W est identiquement nulle). Notons que ce résultat est faux en dimension 2. En effet, quand $n \geqslant 3$, le n-plan engendré par la feuille sphérique doit être lagrangien, ce qui n'est pas vrai en dimension 2. Les surfaces lagrangiennes feuilletées par des cercles sont de fait beaucoup plus nombreuses et le problème plus complexe en petite dimension (*cf.* le système intégrable évoqué précédemment).

Quand la sous-variété lagrangienne feuilletée par des sphères est de plus : minimale, stationnaire hamiltonienne, de vecteur courbure moyenne de longueur constante (ce qui inclut parallèle) ou auto-similaire, nous prouvons que celle-ci est nécessairement centrée. Cela réduit le problème géométrique à diverses équations différentielles ordinaires, que nous analysons et classifions, et pour lesquelles nous donnons de nouveaux exemples. Par exemple pour le cas stationnaire hamiltonien : des plongements de type caténoïde de $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ et une famille d'immersions non standard de $S^1 \times S^{n-1}$ non plongées.

5 Perspectives

Dans mes travaux, je me suis consacré à la recherche de la « structure » sous-jacente à l'un des problèmes variationnels les plus anciens et emblématiques : la minimisation de l'aire. Plutôt que de m'attacher à prouver l'existence ou à la régularité sous diverses conditions, j'ai cherché à décrire l'ensemble des solutions, leurs propriétés, et comment des contraintes géométriques ou topologiques rejaillissent sur la structure analytique voire algébrique de l'EDP : plongement, isopérimétrie, ou plus prosaïquement fermeture des périodes. Cela donne des énoncés de *rigidité*.

Les méthodes en jeu se fondent essentiellement sur l'usage de paramétrisations conformes et de la variable complexe, ce qui les restreint aux surfaces. La variété cible peut être de dimension supérieure à 3, comme on l'a vu pour les surfaces lagrangiennes, mais c'est souvent en petite dimension que les problèmes restent les plus intéressants.

Il reste évidemment de nombreuses directions d'investigation, et je souhaite en citer quelques unes qui méritent un effort, déjà engagé pour certaines.

S'il semble que dernièrement beaucoup de questions « naturelles » et conjectures importantes sur les surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3$ ont trouvé leur réponse, un nouveau domaine d'étude voisin a vu le jour, qui concerne les surfaces minimales ou CMC dans les espaces $M^2 \times \mathbb{R}$ où M^2 est de courbure constante [Ros02]. Ces surfaces apparentées aux surfaces minimales habituelles ou aux CMC de $\mathbb{R}^3$ possèdent aussi une structure analytique proche. Au-delà des théorèmes indispensables sur l'existence de telles surfaces, il est souhaitable de mieux comprendre cette proximité de comportement. Par exemple, on voit facilement que la théorie locale des immersions minimales dans $S^2 \times \mathbb{R}$ est équivalente à l'harmonicité dans S^2, et donc à la théorie des CMC dans $\mathbb{R}^3$ (et non des surfaces minimales). On a donc un lien avec un système intégrable connu (l'équation de sh-GORDON), dont il

faut interpréter les propriétés en termes de géométrie de ces surfaces. On pourra aussi en construire de nouvelles. Notons qu'une des motivations à cette approche qui brise la symétrie naturelle des espaces-forme est la présence d'un axe asymptotique chez beaucoup de surfaces minimales, une propriété qui apparaît déjà chez les tores CMC (voir l'analyse de PINKALL et STERLING [PS89]).

J'ai souligné l'intérêt que suscitent aujourd'hui les sous-variétés lagrangiennes, et la théorie à laquelle j'ai contribué, en terme de systèmes intégrables, n'en est qu'à son début. Maintenant que l'outil est construit, il serait sensé d'appliquer certaines méthodes connues sur ce type d'EDP : action d'habillage (*dressing*), méthode d'intervalles finis, potentiel à la DPW. Mais au coeur même de la méthode des intervalles finis, il est indispensable d'analyser la courbe spectrale, avec comme objectifs (comme cela a été fait dans les cas CMC et spécial lagrangien) : la résolution du problème de période (notamment dans $\mathbb{CP}^2$) par des arguments de généricité, la construction d'exemples et enfin l'estimation de l'index pour l'énergie ou l'aire des tores, dans l'espoir de déterminer les minimiseurs. Il est raisonnable de penser que les minimiseurs sont les solutions dont la courbe spectrale a le genre le plus bas (ce sont les tores de type fini les moins compliqués). L'espace homogène $\mathbb{C}^2$ possédant une structure particulière, le progrès vers la conjecture de OH sera peut être plus rapide. Mais dans tous les cas, il faudra contourner deux obstacles :

- la dépendance de ce formalisme envers la classe conforme, une propriété peu naturelle dans le contexte lagrangien,
- la difficulté de caractériser une variation lagrangienne dans notre point de vue de repères mobiles.

Un autre objectif sera d'étendre à $\mathbb{CP}^2$ l'utilisation des quaternions qui sont un outil formidable dans $\mathbb{C}^2$. Cela pourrait être fait en adaptant les travaux de PEDIT et PINKALL sur la théorie holomorphe quaternionique. On peut aussi généraliser le point de vue de système intégrable des quaternions vers les octonions par exemple.

Les premiers thèmes cités font désormais partie d'un projet de recherche avec Ian MCINTOSH, tandis que les octonions sont étudiés par Frédéric HÉLEIN et Idrisse KHEMAR [Khe].

Plus ambitieuse encore, mais aussi plus gratifiante, la généralisation du système intégrable à la dimension 3 serait fort utile en physique théorique comme en mathématique. Des systèmes intégrables géométriques à plus de 2 variables existent (par exemple les « curved flats » de [FP96]). Mais clairement l'essentiel des avantages de la variable complexe serait perdu, ainsi que le recours sans perte de généralité à une paramétrisation conforme, donc la tâche ne s'annonce pas aisée.

Last but not least, le problème isopérimétrique reste intouchable malgré nos tentatives et nos progrès. Je suis désormais convaincu que les méthodes connues d'estimées fines ne suffiront pas à prouver ou contredire la conjecture sphère-cylindre-plan, parce que – même si elle est vraie – elle l'est de très peu. D'où la nécessité de trouver d'autres méthodes, peut-être issues de la théorie de la mesure, comme ce fut le cas pour le demi-volume par BARTHE.

Travaux

[1] Henri Anciaux, Ildefonso Castro, and Pascal Romon. Lagrangian submanifolds foliated by $(n-1)$-spheres in $\mathbb{R}^{2n}$. (arXiv:math.DG/0401372), 2004.

[2] Laurent Hauswirth, Joaquin Pérez, and Pascal Romon. Embedded minimal ends of finite type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(4):1335–1370 (electronic), 2001.

[3] Laurent Hauswirth, Joaquin Pérez, Pascal Romon, and Antonio Ros. The periodic isoperimetric problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(5):2025–2047 (electronic), 2004.

[4] Frédéric Hélein and Pascal Romon. Hamiltonian stationary tori in the complex projective plane. *Proceedings of the London Math. Soc.*

[5] Frédéric Hélein and Pascal Romon. Weierstrass representation of Lagrangian surfaces in four-dimensional space using spinors and quaternions. *Commentarii Math. Helvetici*, 75(4):668–680, 2000.

[6] Frédéric Hélein and Pascal Romon. From cmc surfaces to hamiltonian stationary lagrangian surfaces. In *Proceedings of the Congress on Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, 2002.

[7] Frédéric Hélein and Pascal Romon. Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in $\mathbb{C}^2$. *Comm. Anal. Geom.*, 10(1):79–126, 2002.

[8] Frédéric Hélein and Pascal Romon. Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in Hermitian symmetric spaces. In *Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, volume 308 of *Contemp. Math.*, pages 161–178. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[9] Pascal Romon. A rigidity theorem for riemann's minimal surfaces. *Annales de l'Institut Fourier*, 43:485–502, 1993.

[10] Pascal Romon. On helicoidal ends of minimal surfaces. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 12:341–355, 1994.

[11] Pascal Romon. A Weierstrass-type representation for Lagrangian surfaces in complex Euclidean 2-space. In *Proceedings of the Fifth Pacific Rim Geometry Conference (Sendai, 2000)*, volume 20 of *Tohoku Math. Publ.*, pages 147–152, Sendai, 2001. Tohoku Univ.

Références

[Alm76] F. J. Almgren, Jr. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4(165):viii+199, 1976.

[Anc02] Henri Anciaux. An isoperimetric inequality for Hamiltonian stationary Lagrangian tori in $\mathbb{C}^2$ related to Oh's conjecture. *Math. Z.*, 241(3):639–664, 2002.

[Anc03] Henri Anciaux. Construction of many Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in Euclidean four-space. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 17(2):105–120, 2003.

[Bar01] Franck Barthe. Extremal properties of central half-spaces for product measures. *J. Funct. Anal.*, 182(1):81–107, 2001.

[BFPP93] F. E. Burstall, D. Ferus, F. Pedit, and U. Pinkall. Harmonic tori in symmetric spaces and commuting Hamiltonian systems on loop algebras. *Ann. of Math. (2)*, 138(1):173–212, 1993.

[Bob94] A. I. Bobenko. Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases. In *Harmonic maps and integrable systems*, Aspects Math., E23, pages 83–127. Vieweg, Braunschweig, 1994.

[CM94] Bang-Yen Chen and Jean-Marie Morvan. Deformations of isotropic submanifolds in Kähler manifolds. *J. Geom. Phys.*, 13(1):79–104, 1994.

[Col97] Pascal Collin. Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de $\mathbb{R}$. *Ann. of Math. (2)*, 145(1):1–31, 1997.

[Cos84] Celso J. Costa. Example of a complete minimal immersion in $\mathbb{R}^3$ of genus one and three embedded ends. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 15(1-2):47–54, 1984.

[CU98] Ildefonso Castro and Francisco Urbano. Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}^2$. *Compositio Math.*, 111(1):1–14, 1998.

[CU99] Ildefonso Castro and Francisco Urbano. On a minimal Lagrangian submanifold of $\mathbb{C}^n$ foliated by spheres. *Michigan Math. J.*, 46(1):71–82, 1999.

[DPW98] J. Dorfmeister, F. Pedit, and H. Wu. Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.*, 6(4):633–668, 1998.

[FP96] Dirk Ferus and Franz Pedit. Curved flats in symmetric spaces. *Manuscripta Math.*, 91(4):445–454, 1996.

[Gue97] Martin A. Guest. *Harmonic maps, loop groups, and integrable systems*, volume 38 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[Has00] Mark Haskins. Special Lagrangian cones. (arXiv:math.DG/0005164), 2000.

[Hit90] Nigel J. Hitchin. Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere. *J. Differential Geom.*, 31(3):627–710, 1990.

[HKW93] David Hoffman, Hermann Karcher, and Fu Sheng Wei. Adding handles to the helicoid. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 29(1):77–84, 1993.

[HM03] David Hoffman and John McCuan. Embedded minimal ends asymptotic to the helicoid. *Comm. Anal. Geom.*, 11(4):721–735, 2003.

[HWW04] David Hoffman, Matthias Weber, and Michael Wolf. An embedded genus-one helicoid. (arXiv:math.DG/0401080), 2004.

[Joy03] Dominic Joyce. Singularities of special Lagrangian fibrations and the SYZ conjecture. *Comm. Anal. Geom.*, 11(5):859–907, 2003.

[Khe] Idrisse Khemar. in preparation.

[Kon00] B. G. Konopelchenko. Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy. *Ann. Global Anal. Geom.*, 18(1):61–74, 2000.

[Law80] H. Blaine Lawson, Jr. *Lectures on minimal submanifolds. Vol. I*, volume 9 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1980.

[Min95] William P. Minicozzi, II. The Willmore functional on Lagrangian tori: its relation to area and existence of smooth minimizers. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(4):761–791, 1995.

[MP04] William H. Meeks and Joaquin Pérez. Conformal properties in classical minimal surface theory. In *Surveys in differential geometry Vol. IX*. International Press, 2004.

[MR] William H. Meeks and Harold Rosenberg. The uniqueness of the helicoid and the asymptotic geometry of properly embedded minimal surfaces of finite topology. *Ann. of Math.* (to appear).

[Oh93] Yong-Geun Oh. Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations. *Math. Z.*, 212(2):175–192, 1993.

[PS86] Andrew Pressley and Graeme Segal. *Loop groups*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications.

[PS89] Ulrich Pinkall and Ivan Sterling. On the classification of constant mean curvature tori. *Ann. of Math. (2)*, 130(2):407–451, 1989.

[Ros01] Antonio Ros. The isoperimetric problem. In *Lecture series at the Clay Mathematics Institute Summer School on the Global Theory of Minimal Surfaces*, 2001.

[Ros02] Harold Rosenberg. Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$. *Illinois J. Math.*, 46(4):1177–1195, 2002.

[Ros04] Antonio Ros. Isoperimetric inequalities in crystallography. *J. Amer. Math. Soc.*, 17:373–388, 2004.

[RR92] Manuel Ritoré and Antonio Ros. Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms. *Comment. Math. Helv.*, 67(2):293–305, 1992.

[SW01] Richard Schoen and Jon Wolfson. Minimizing area among Lagrangian surfaces: the mapping problem. *J. Differential Geom.*, 58(1):1–86, 2001.

[SYZ01] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow. Mirror symmetry is T-duality [MR 97j:32022]. In *Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999)*, volume 23 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 333–347. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Uhl89] Karen Uhlenbeck. Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model. *J. Differential Geom.*, 30(1):1–50, 1989.

[Vit00] Claude Viterbo. Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(2):411–431 (electronic), 2000.

[Wol97] Jon G. Wolfson. Minimal Lagrangian diffeomorphisms and the Monge-Ampère equation. *J. Differential Geom.*, 46(2):335–373, 1997.