



**HAL**  
open science

## Options Américaines et frontières libres

Etienne Chevalier

► **To cite this version:**

Etienne Chevalier. Options Américaines et frontières libres. Mathématiques [math]. Université de Marne la Vallée, 2004. Français. NNT: . tel-00008823

**HAL Id: tel-00008823**

**<https://theses.hal.science/tel-00008823>**

Submitted on 19 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Université de Marne-la-Vallée*  
*Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées*  
*CNRS UMR 8050*

# **THESE**

présentée  
pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES MATHÉMATIQUES**  
de l'Université de Marne-la-Vallée

par

Etienne CHEVALIER

## **Options américaines et frontières libres**

soutenue le 16 décembre 2004  
devant le jury composé des professeurs :

Mark BROADIE	Rapporteur
Nicole EL KAROUI	Rapporteur
Damien LAMBERTON	Directeur
Yves ACHDOU	Examinateur
Guy BARLES	Examinateur
Nizar TOUZI	Examinateur



## REMERCIEMENTS:

Je remercie Damien Lambertson pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger cette thèse. Son enthousiasme et sa disponibilité m'ont beaucoup aidé pendant toute la durée de ce travail. Je lui suis également reconnaissant pour la patience dont il a toujours fait preuve lors de longues séances de relecture.

Je suis très honoré que Mark Broadie et Nicole El Karoui aient accepté de rédiger le rapport de cette thèse. Leurs commentaires et suggestions m'ont beaucoup apporté.

Je tiens également à remercier toute l'équipe du laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées de l'Université de Marne-la-Vallée pour son accueil chaleureux. Je remercie particulièrement Mireille Morvan pour sa gentillesse.



## Table des matières

<b>I</b>	<b>Fonctions de valeur des options</b>	<b>12</b>
1	Introduction	12
2	Quelques propriétés de la diffusion	15
2.1	Un principe du maximum parabolique . . . . .	15
2.2	Contrôle de la diffusion en temps court . . . . .	17
3	Une classe particulière de pay-off	19
3.1	Prime d'exercice anticipé . . . . .	21
3.2	Limite de la frontière libre à la maturité . . . . .	23
4	Prix d'exercice contre prix spot	24
<b>II</b>	<b>Prix critique près de l'échéance d'une option américaine</b>	<b>30</b>
5	Introduction	30
6	Développement du prix critique près de l'échéance dans le cas $\delta \leq r$	34
6.1	Le cas européen . . . . .	35
6.1.1	Premières estimations du comportement asymptotique de $s_e$ . . . . .	35
6.1.2	Equivalent de $K - s_e$ à l'échéance . . . . .	37
6.2	Prix critiques européen et américain près de l'échéance . . . . .	48
7	Le cas d'un pay-off régulier près de la frontière libre	55
7.1	Fonction de valeur d'une option américaine près de sa maturité . . . . .	56
7.2	Comportement du prix critique près de l'échéance . . . . .	61
8	Modèles à volatilité locale	70
<b>III</b>	<b>Frontière libre près de l'échéance d'un plan de retraite</b>	<b>74</b>
9	Introduction	74
10	Le cas régulier: cas 1	81
10.1	Développement de la fonction de valeur . . . . .	81
10.2	Développement de $s$ au voisinage de l'échéance . . . . .	83
11	Développement de $s$ dans le cas 2	88
11.1	Estimation de $[V - \psi](t, s^e(t))$ au voisinage de l'échéance . . . . .	89
11.2	Développement de $s$ au voisinage de la maturité . . . . .	95

<b>12 Développement de <math>s</math> et <math>\tilde{s}</math> dans le cas 3</b>	<b>99</b>
12.1 Développement de $s$ dans le cas 3 . . . . .	99
12.2 Développement de $\tilde{s}$ . . . . .	102
<b>IV Frontière libre près de l'échéance d'une option américaine sur plusieurs actifs</b>	<b>108</b>
<b>13 Introduction</b>	<b>108</b>
<b>14 Le cas régulier</b>	<b>114</b>
14.1 Développement de la fonction de valeur . . . . .	114
14.2 Frontière libre près de la maturité . . . . .	115
<b>15 Le cas irrégulier</b>	<b>125</b>
15.1 Frontière européenne près de l'échéance . . . . .	125
15.2 Le cas américain . . . . .	129
<b>V Etude de la convergence d'options bermudéennes vers des américaines</b>	<b>140</b>
<b>16 Introduction</b>	<b>140</b>
<b>17 Majoration de l'erreur sur les fonctions de valeur</b>	<b>144</b>
17.1 Le cas général . . . . .	144
17.2 Le cas des options sur combinaison linéaire d'actifs risqués . . . . .	149
<b>18 Majoration de l'erreur sur les frontières libres</b>	<b>151</b>
18.1 Le cas unidimensionnel . . . . .	151
18.2 Le cas multidimensionnel . . . . .	154
<b>19 Minoration de l'erreur sur les fonctions de valeur</b>	<b>162</b>

# Introduction

Depuis les travaux de Black, Scholes et Merton en 1973, les marchés financiers ont connu une expansion considérable et les produits échangés sont de plus en plus nombreux et sophistiqués. Les plus répandus de ces produits sont les options. Les options de base sont les options d'achat ou de vente, appelées respectivement call et put: ce sont des contrats passés entre le vendeur et l'acheteur de l'option qui donnent le droit à l'acheteur d'acquérir ou de vendre un bien financier à un prix (prix d'exercice ou strike) et à une date (maturité) convenus au préalable. Si l'option peut être exercée avant sa maturité, on parle d'option américaine sinon c'est une option européenne. Comme l'acheteur n'est pas obligé d'exercer son droit si cela ne correspond pas à ses intérêts, il gagnera une fonction positive du prix des biens sur lesquels porte l'option. Cette fonction est appelée fonction de pay-off. Evidemment, pour obtenir le droit de faire un gain sûr, l'acheteur doit payer une prime au vendeur. Dans la théorie des options, un des principaux problèmes consiste justement à déterminer cette prime. Cette question, appelée problème de valorisation, a été résolue pour les options européennes portant sur des actifs dont la valeur suit un modèle simple, le modèle de Black et Scholes. Cependant, nous ne pouvons pas obtenir de formule explicite pour le prix d'une option américaine, même dans un modèle aussi simple.

En effet, pour valoriser une option américaine, il est crucial de déterminer les conditions sous lesquelles l'option doit être exercée par son détenteur. La théorie moderne des options affirme qu'il existe une frontière telle qu'il est optimal pour le détenteur de l'option d'exercer son droit dès que les valeurs des biens sous-jacents traversent cette frontière. Pour les options d'achat ou de vente portant sur un seul bien, cette frontière est simplement une fonction du temps appelée prix critique, dans les autres cas nous parlerons de frontière libre. Si l'on connaît cette frontière, valoriser une option américaine revient alors à valoriser une option européenne car la date d'exercice est bien déterminée.

Cependant, nous ne sommes pas capables de donner une formule explicite décrivant la frontière libre même dans les cas les plus simples. Le principal sujet de cette thèse est donc l'approximation de la frontière libre associée à différents types d'options américaines, en particulier pour des maturités courtes.

Pour évaluer le prix d'une option américaine, nous devons avoir une modélisation des prix des biens sous-jacents à cette option. Dans la théorie moderne de valorisation des options, on suppose qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire de possibilité de faire des bénéfices sans prendre de risques. On considère également que le marché est complet. Autrement dit, on suppose que tout produit échangé sur le marché est répliquable par un portefeuille composé uniquement des actifs de base. En reliant cela à la théorie des martingales, on a observé que l'absence d'opportunité d'arbitrage est équivalent à l'existence d'une probabilité, équivalente à la probabilité historique, sous laquelle les processus des prix actualisés des actifs de base sont des martingales (cf. HARRISSON J.M., PLISKA S.R. (1981), DALANG R.C., MORTON A., WILLINGER W. (1990) et DELBAEN F., SCHACHERMAYER W. (1994)). Dans un marché complet, une telle probabilité est unique, on l'appelle la probabilité risque neutre. Tout au long de cette thèse, nous travaillerons sous cette probabilité et nous supposerons que le marché est composé de  $d$  actifs risqués tels que le processus de leurs prix à la date  $t$  soit solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = \text{diag}(S_t) (b(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t),$$

où  $W$  est un mouvement Brownien standard sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\text{diag}(x)$  désigne la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont égaux aux coordonnées de  $x$ . Pour assurer la complétude du marché, nous supposons que  $\sigma$  est toujours inversible.

Dans ce cadre, Benssoussan et Karatzas (cf. BENSSOUSSAN A. (1984) et KARATZAS I. (1988)) ont relié la valorisation d'une option américaine à un problème de temps

d'arrêt optimal. Ils ont démontré que le prix, à la date  $t$ , d'une option américaine de maturité  $T$  et de fonction de pay-off  $f$  est  $P(t, S_t)$  avec:

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbb{E} \left[ e^{-r(\tau-t)} f(S_\tau) | S_t = x \right],$$

où  $\mathcal{T}_{t, T}$  est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans  $[t, T]$  et associés à la filtration de  $W$  que l'on notera  $\mathbb{F}$ . La théorie de l'arrêt optimal (cf. EL KAROUI N. (1981)) permet d'affirmer que

$$P(t, x) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(\tau^*-t)} f(S_{\tau^*}) | S_t = x \right] \quad \text{où } \tau^* = \inf \{ u \geq t : P(u, S_u) = f(S_u) \} \wedge T.$$

D'autre part, la fonction de valeur  $P$  a été caractérisée comme la solution de l'inéquation variationnelle suivante (cf. BENSSOUSSAN A., LIONS J.L. (1982) et JAILLET P., LAMBERTON D., LAPEYRE B. (1990))

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}P \leq 0, & f \leq P, & \tilde{\mathcal{M}}P(P - f) = 0 \quad \text{p.p.} \\ P(x, T) = f(x) & \text{sur } [0, +\infty[, \end{cases}$$

où nous avons posé:

$$\tilde{\mathcal{M}}h(t, x) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{i, j}(t, x) x_i x_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t, x) x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - rh.$$

Ces deux approches font intervenir une région spécifique de  $[0, T[ \times [0, +\infty[^d$  pour calculer  $P$ . Cette région, appelée région d'exercice, est la suivante:

$$\mathcal{E} = \{ (t, x) \in [0, T[ \times [0, +\infty[^d : P(t, x) = f(x) \}.$$

En effet, le temps d'arrêt optimal  $\tau^*$  est le temps d'entrée du processus  $(t, S_t)$  dans  $\mathcal{E}$

et, d'autre part,  $P$  est la solution de  $\tilde{\mathcal{M}}P = 0$  sur le complémentaire de  $\mathcal{E}$ . Améliorer notre connaissance de  $\mathcal{E}$  est donc essentiel pour calculer la fonction de valeur d'une option américaine, mais également pour déterminer la stratégie que le détenteur de l'option doit suivre pour optimiser ses gains.

Dans la partie I, nous présenterons certaines propriétés de la diffusion  $S$  et des fonctions de valeur des options américaines et européennes. Tout d'abord, nous rappelons un principe du maximum parabolique associé au générateur infinitésimal de la diffusion. Ce résultat sera utilisé dans les parties suivantes (cf. parties II et IV) où le comportement de la frontière libre au voisinage de l'échéance est examiné. Pour cela nous aurons également besoin de contrôler la diffusion au voisinage de la maturité et le lemme 2.1 présenté dans la section 2 de la partie I nous fournira ce contrôle. Dans la section suivante, nous introduirons un ensemble particulier d'options: des options de vente portant sur une fonction linéaire de  $S$ . Cet ensemble d'options présente des propriétés particulières qui seront très utiles pour établir les résultats des parties II, IV et V. Finalement, on étendra une formule établie par C. Martini qui permet d'échanger le prix d'exercice et la valeur initiale de l'actif sous-jacent dans la fonction de valeur d'une option de vente européenne.

Dans la partie II, nous considérons une option de vente américaine portant sur un actif qui distribue des dividendes et dont la volatilité est une fonction du temps et de la valeur de l'actif. Au voisinage de l'échéance de cette option, un développement limité du prix critique est donné. Si le taux de dividendes distribués par l'actif est strictement plus grand que le taux d'intérêt du marché, la fonction de pay-off est régulière près de la limite du prix critique. Nous sommes alors capables d'obtenir un développement limité de la fonction de valeur de l'option, puis d'en déduire celui du prix critique au voisinage de la maturité. On démontre ainsi que le comportement du prix critique est parabolique. Dans le cas contraire, nous sommes dans une situation beaucoup moins régulière et un facteur logarithmique supplémentaire apparaît. Pour prouver ce résultat,

on montre qu'au voisinage de l'échéance, le prix critique a le même développement limité du premier ordre qu'une fonction appelée prix critique européen. Finalement, nous obtenons le développement de ce prix critique européen en utilisant la formule permettant d'échanger le prix d'exercice et la valeur initiale de l'actif sous-jacent dans la fonction de valeur d'une option de vente européenne.

Le comportement d'une frontière libre associée à une inéquation variationnelle différentielle est examiné dans la partie III. En effet, dans un article récent Friedman et Shen (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)) ont considéré un plan de retraite offrant l'option d'une retraite anticipée. Ils ont montré que la valeur financière de ce plan de retraite, notée  $V$ , est l'unique solution d'une inéquation variationnelle et ont étudié la frontière libre associée. En utilisant le fait que  $V$  peut également être caractérisée comme la solution d'un problème d'arrêt optimal, nous reprenons le travail de Friedman et Shen en donnant un développement limité de la frontière libre au voisinage de l'échéance du plan de retraite. Contrairement à Friedman et Shen qui ont réduit l'inéquation variationnelle à une équation intégrale pour étudier la frontière libre, nous introduisons une option américaine auxiliaire qui nous permet d'utiliser les résultats de la partie II.

Dans la partie IV, on considère une option de vente américaine portant sur une fonction linéaire de  $d$  actifs distribuant des dividendes. Nous étendons les résultats de la partie II concernant le cas  $d = 1$  en étudiant la frontière libre près de l'échéance lorsque  $d > 1$ . Une paramétrisation de la région d'exercice à la date  $t$  est donnée. Celle-ci nous permet de définir puis de donner la vitesse de convergence de cette région lorsque  $t$  tend vers la maturité de l'option. Obtenir un développement limité de la fonction de valeur de l'option américaine ne se révèle pas beaucoup plus difficile qu'en dimension 1, mais en déduire le comportement de la frontière libre est plus ardu car l'inéquation variationnelle ne donne pas suffisamment d'information sur les dérivées secondes de la fonction de valeur. L'étude de la frontière libre reposera sur le principe du maximum présenté dans

la partie I.

Finalement, nous concluons ce travail en étudiant l'approximation de la frontière libre d'une option américaine par celle d'une option bermudéenne. Une option bermudéenne est une américaine qui ne peut être exercée qu'à certaines dates. Plus précisément, si la fonction de pay-off de l'option est notée  $f$  et sa maturité  $T$ , la fonction de valeur de l'option bermudéenne est définie par

$$P^n(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}^n} \mathbb{E} [e^{-r\tau} f(S_\tau) | \mathcal{F}_t],$$

où  $\mathcal{T}_{t,T}^n$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $\{kT/n : k \in \mathbb{N} \text{ et } nt/T \leq k \leq n\}$ . L'objet de notre étude est alors l'estimation de  $P - P^n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Si il est bien connu que cette différence tend vers 0, la vitesse de convergence reste à être déterminée. Dans le cas d'une maturité infinie et d'une option d'achat portant sur un seul actif, il a été démontré que cette erreur est équivalente à  $C/n$  avec  $C > 0$  (cf. DUPUIS P., WANG H. (2004)). Cependant, ce problème s'avère plus difficile dans le cas d'une maturité finie car la fonction de valeur et la frontière libre sont des fonctions du temps. Toutefois, Dans un cadre général, on sait que la différence  $P - P^n$  est majorée par  $\tilde{C}/n$  avec  $\tilde{C} > 0$  (cf. par exemple BALLY V., PAGÈS G. (2003)). Nous précisons asymptotiquement cette majoration et surtout nous montrons comment en déduire une estimation de la distance entre les frontières libres américaines et bermudéennes, dans le cas d'options sur panier. Enfin, nous montrons, dans le cas d'une option de vente portant sur un seul actif que pour  $x \in \mathbb{R}^+$  plus grand que le prix critique de l'option, il existe une constante  $C_x > 0$  telle que  $P(0,x) - P^n(0,x) \geq C_x/n$ .

## Première partie

# Fonctions de valeur des options

## 1 Introduction

Dans cette partie, nous présentons des résultats généraux sur les fonctions de valeur d'options américaines et européennes. Certains sont bien connus dans des modèles particuliers et nous les étendrons à notre modèle. D'autres sont nouveaux et seront des outils de base pour les démonstrations des parties suivantes.

Tout d'abord, nous spécifions notre modèle de marché. On considère  $d$  actifs risqués et l'on suppose que, pour  $1 \leq i \leq d$ , le prix, à la date  $t$  de l'actif  $i$ , noté  $S_t^i$  est solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t^i = S_t^i \left( b_i(t, S_t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t, S_t) dW_t^j \right),$$

où  $W$  est un mouvement Brownien standard sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $b$  une fonction de  $[0, T] \times [0, +\infty[^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\sigma$  une fonction bornée de  $[0, T] \times [0, +\infty[^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . De plus, nous supposons que  $b$  est bornée et Lipschitzienne et que  $\sigma$  satisfait les hypothèses suivantes:

$H_1$  : Il existe  $m > 0$  et  $M > 0$  tels que

$$\forall (t, x, \xi) \in [0, T] \times [0, +\infty[^d \times \mathbb{R}^d, \quad m \|\xi\|^2 \leq \xi^* \sigma^* \sigma(t, x) \xi \leq M \|\xi\|^2.$$

$H_2$  : Il existe  $\sigma_L > 0$  telle que

$$\forall (t, x, y) \in [0, T] \times [0, +\infty[^{d \times d}, \quad \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq \sigma_L \|x - y\|.$$

$H_3$  : Il existe  $\alpha > 0$  et  $\sigma_H > 0$  telles que

$$\forall x \in [0, +\infty[, (t, s) \in [0, T]^2, \quad |\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| \leq \sigma_H |t - s|^\alpha.$$

L'hypothèse  $H_1$  impose la non-dégénérescence de l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction de valeur d'une option européenne et se révèle très utile pour les problèmes de calibration. De plus, cette hypothèse assure la complétude du marché. La régularité de  $\sigma$  est déterminée par l'interpolation utilisée pour la calibration mais les hypothèses  $H_2$  et  $H_3$  ne sont pas très restrictives. Ces hypothèses sont communément utilisées pour les modèles à volatilité locale.

Dans ce cadre, le prix d'une option américaine de maturité  $T$  et de fonction de pay-off  $f$  est  $P(t, S_t)$  à la date  $t$ , où

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbb{E} [e^{-r\tau} f(S_\tau) \mid S_t = x].$$

Dans la suite, nous noterons  $(S_u^{t, y})_{t \leq u \leq T}$  la solution de l'équation différentielle stochastique précédente telle que  $S_t^{t, y} = y$ . Si  $t = 0$ , nous désignerons cette solution plus simplement par  $(S_u^y)_{0 \leq u \leq T}$ .

De la formule décrivant  $P$ , nous pouvons déduire des propriétés immédiates pour la fonction de valeur d'une option américaine:

- $\forall x \in [0, +\infty[^d, \quad P(T, x) = f(x)$ .
- $\forall x \in [0, +\infty[^d, \forall t \in [0, T], \quad P(t, x) \geq f(x)$ .
- Si  $\sigma$  et  $b$  ne dépendent pas du temps, on peut écrire que pour tout  $x \in [0, +\infty[^d$ ,

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-r\tau} f(S_\tau^x)],$$

donc la fonction  $t \rightarrow P(t, x)$  décroissante sur  $[0, T]$ .

D'autre part, nous rappelons que  $P$  peut être caractérisé comme la solution d'une inéquation variationnelle. Grâce à cela, beaucoup de propriétés intéressantes ont été établies dans le cas d'un seul actif sous-jacent, c'est à dire  $d = 1$ . Nous résumons ici celles qui seront utilisées dans la suite.

- Si  $f$  est convexe,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $x \rightarrow P(t, x)$  est également convexe (cf. EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998) et HOBSON D. (1998)).
- Si  $f$  est monotone,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $x \rightarrow P(t, x)$  a la même monotonie que  $f$  (cf. MARTINI C. (1999)).
- Si  $f$  est convexe,  $P$  est croissante avec la volatilité (cf. EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998)).

Remarquons que l'inéquation variationnelle satisfaite par  $P$  fait intervenir le générateur infinitésimal de la diffusion  $S$ . L'hypothèse  $H_1$  implique que cet opérateur est parabolique sur  $\mathbb{R}^d - \{0\}$  et nous disposons alors d'un puissant outil pour notre étude: le principe du maximum parabolique. Une autre conséquence des hypothèses faites sur la volatilité est la possibilité de contrôler la diffusion  $(S_u^{t,y})_{t \leq u \leq T}$  pour  $t$  proche de la maturité  $T$ . Il est évident que ce contrôle sera essentiel pour l'estimation de la frontière libre près de la maturité. Nous présentons ces deux résultats dans la section 2. Ils nous permettront d'établir la majorité des résultats des parties suivantes.

Dans la section 3, nous supposons que  $b$  est constante et  $\sigma$  indépendante du temps. Nous étudions un ensemble spécifique d'options américaines. Pour ces options, nous avons une formule qui relie la fonction de valeur d'une option américaine à celle d'une option européenne et à la frontière libre. Cette formule, appelée formule de la prime pour exercice anticipé, apparaît dans MYNENI R. (1992) et JACKA S. D. (1991). Elle nous permet de donner une approximation de la différence entre la fonction de valeur d'une option américaine et celle d'une option européenne au voisinage de la maturité. Grâce à cette estimation, nous pourrions dans certains cas déduire de l'étude des options européennes

le comportement des options américaines au voisinage de la maturité. Cela se révélera essentiel pour la démonstration des Théorèmes 5.1, 11.1 et 13.2. D'autre part, ce type d'options a déjà été étudié dans VILLENEUVE S. (1999a) et VILLENEUVE S. (1999b) et nous connaissons la limite de la frontière libre lorsque la maturité tend vers 0. Nous montrons que dans le cas de la dimension 1, ce résultat peut s'étendre au cas des diffusions ayant une volatilité dépendant du temps. Dans la partie II, nous donnerons la vitesse de convergence de la frontière vers sa limite.

Un dernier outil pour l'étude de cette vitesse de convergence est présenté dans la section 4. Dans cette section, nous considérons uniquement des diffusions de dimension 1. Lorsque la volatilité est homogène et que la dérive  $b$  est nulle, C. Martini a établi une formule permettant d'échanger le prix d'exercice (strike) et la valeur initiale du sous-jacent (spot) dans la fonction de valeur d'une option européenne (cf. MARTINI C.(1999)). Cette formule a été observée lors de l'étude de la propagation de convexité par des semi-groupes. Nous montrons que cette formule reste valide pour des dérives non nulles, quitte à ajouter un terme correctif. Ce résultat sera la clé de la démonstration du Théorème 6.1.

## **2 Quelques propriétés de la diffusion**

### **2.1 Un principe du maximum parabolique**

Dans cette section, nous rappelons un principe du maximum qui sera crucial pour les démonstrations de la plupart de nos résultats. Plus précisément, en appliquant ce principe du maximum, nous pourrions déduire une estimation de la frontière libre d'une estimation de la fonction de valeur (cf. les démonstrations des Théorèmes 7.2, 13.1, 13.2 et 18.1)

Nous rappelons que le générateur infinitésimal de  $S$  est:

$$\mathcal{D}h(t,x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,x) x_i x_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t,x) x_i \frac{\partial h}{\partial x_i},$$

nous introduisons alors l'opérateur suivant:

$$\tilde{\mathcal{L}}h(t,x) = \frac{\partial h}{\partial t} - \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j}(t,x) x_i x_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(t,x) x_i \frac{\partial h}{\partial x_i} - rh \right).$$

Quitte à inverser le temps,  $\tilde{\mathcal{L}}$  est l'opérateur qui apparaît dans l'inéquation variationnelle satisfaite par la fonction de valeur  $P$ . Or cet opérateur satisfait le principe du maximum suivant.

**Théorème 2.1** *Soit  $D$  un domaine borné de  $]0,T[ \times \mathbb{R}^d$ . On définit la frontière parabolique de  $D$  par  $\delta_p D = \delta D - \{(t,x) \in \delta D : t = T\}$  où  $\delta D$  est la frontière de  $D$ .*

*Soit  $u$  une fonction définie sur  $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ , continue sur l'adhérence de  $D$ , notée  $\bar{D}$ , telle que*

$$u \in \mathcal{C}^{1,2}(D), \quad \tilde{\mathcal{L}}u \leq 0 \text{ sur } D \quad \text{et} \quad u \leq 0 \text{ sur } \delta_p D.$$

*On a alors  $u \leq 0$  sur  $D$ .*

Un principe du maximum relativement proche de celui-ci se trouve dans FRIEDMAN A. (1975). Pour être complet, nous donnons une démonstration du Théorème 2.1 à l'aide d'arguments probabilistes.

*Démonstration du Théorème 2.1:* Soit  $(t,x) \in D$ .

Pour  $(s,y) \in [0,t] \times \mathbb{R}^d$ , on pose  $v(s,y) = u(t-s,y)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On définit le  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt suivant:

$$\tau_\varepsilon = \{s \geq 0 : d((t-s, S_s^x), D^c) \leq \varepsilon\},$$

où  $d((s,y), D^c)$  représente la distance du point  $(s,y)$  au complémentaire de  $D$ . Comme  $u \in \mathcal{C}^{1,2}(D)$  et par définition de  $\tau_\varepsilon$ , on peut appliquer la formule d'Itô au processus

$(e^{-rs}v(s, S_s^x))_{0 \leq s \leq t}$  entre 0 et  $\tau_\varepsilon$ . On obtient

$$\begin{aligned} e^{-r\tau_\varepsilon}v(\tau_\varepsilon, S_{\tau_\varepsilon}^x) &= v(0, x) + \int_0^{\tau_\varepsilon} e^{-rs} \nabla v(s, S_s^x) \sigma(s, S_s^x) dW_s - \int_0^{\tau_\varepsilon} e^{-rs} \tilde{\mathcal{L}}u(t-s, S_s^x) ds \\ &\geq v(0, x) + \int_0^{\tau_\varepsilon} e^{-rs} \nabla v(s, S_s^x) \sigma(s, S_s^x) dW_s. \end{aligned}$$

Or  $\nabla v$  est borné sur l'ensemble  $\{(s, y) \in D : d((s, y), D^c) \geq \varepsilon\}$  car  $v \in \mathcal{C}^{1,2}(D)$  et  $D$  est borné. En prenant l'espérance dans l'inégalité précédente, on a alors

$$\mathbb{E} [e^{-r\tau_\varepsilon}v(\tau_\varepsilon, S_{\tau_\varepsilon}^x)] \geq v(0, x) = u(t, x).$$

De plus, la fonction  $\varepsilon \rightarrow \tau_\varepsilon$  est croissante et  $\tau_\varepsilon \leq t$  car  $d((0, x), D^c) = 0 \leq \varepsilon$ . Ainsi, il existe une variable aléatoire,  $\bar{\tau}$ , telle que  $\tau_\varepsilon$  tende presque sûrement vers  $\bar{\tau}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Comme  $s \rightarrow S_s$  est continue, on a

$$d((t - \bar{\tau}, S_{\bar{\tau}}^x), D^c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d((t - \tau_\varepsilon, S_{\tau_\varepsilon}^x), D^c) = 0,$$

donc  $(t - \bar{\tau}, S_{\bar{\tau}}^x) \in \delta_p D$ . Finalement,  $v$  est continue sur  $\bar{D}$  et  $D$  est borné, donc par le Théorème de convergence dominée, on obtient

$$u(t, x) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} [e^{-r\tau_\varepsilon}v(\tau_\varepsilon, S_{\tau_\varepsilon}^x)] = \mathbb{E} [e^{-r\bar{\tau}}v(\bar{\tau}, S_{\bar{\tau}}^x)] \leq 0. \quad \diamond$$

## 2.2 Contrôle de la diffusion en temps court

Dans les parties suivantes, notre but sera de donner un développement limité de la frontière libre pour une date proche de la maturité. Il s'avèrera donc très important de contrôler la diffusion  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  pour  $t$  proche de  $T$ . Le lemme suivant va nous fournir ce contrôle.

**Lemme 2.1** *Soient  $B > 0$ ,  $p \geq 1$  et  $h : [0, +\infty[^d \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitzienne. Il existe alors une*

constante  $C > 0$  telle que pour  $t \in [0, T]$ ,  $\theta \in [0, T - t]$  et  $x \in [0, B]^d$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq \theta} |h(S_{t+u}^{t,x}) - h(x)|^p \right] \leq C \theta^{\frac{p}{2}},$$

pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ .

*Démonstration du lemme 2.1:* Dans toute la preuve,  $C$  représentera une constante strictement positive indépendante de  $t$ ,  $\theta$  et  $x$ . Comme  $h$  est Lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} |h(S_{t+u}^{t,x}) - h(x)|^p \right] &\leq C \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} \|S_{t+u}^{t,x} - x\|^p \right] \\ &\leq C \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} |S_{t+u}^{t,x,i} - x_i|^p \right] \\ &\leq C \max_{1 \leq i \leq d} \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} |S_{t+u}^{t,x,i} - x_i|^p \right]. \end{aligned}$$

Soit  $1 \leq i \leq d$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} |S_{t+u}^{t,x,i} - x_i|^p \right] &\leq \\ &C \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} \left| \int_t^{t+u} S_s^{t,x,i} b_i(s, S_s^{t,x}) ds + \sum_{j=1}^d \int_t^{t+u} S_s^{t,x,i} \sigma_{i,j}(s, S_s^{t,x}) dW_s^j \right|^p \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} |S_{t+u}^{t,x,i} - x_i|^p \right] &\leq C \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} \left| \int_t^{t+u} S_s^{t,x,i} b_i(s, S_s^{t,x}) ds \right|^p \right] \\ &\quad + C \max_{1 \leq j \leq d} \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} \left| \int_t^{t+u} S_s^{t,x,i} \sigma_{i,j}(s, S_s^{t,x}) dW_s^j \right|^p \right]. \end{aligned}$$

Or  $b$  est bornée sur  $[0, T] \times [0, +\infty[^d$ , donc on obtient

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} \left| \int_t^{t+u} S_s^{t,x,i} b_i(s, S_s^{t,x}) ds \right|^p \right] \leq C \mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0, \theta]} \left( \int_t^{t+u} |S_s^{t,x,i}| ds \right)^p \right]$$

$$\leq C\theta^p \mathbb{E}\left[\left(\sup_{u \in [t, T]} |S_u^{t,x,i}| \right)^p\right].$$

Introduisons maintenant  $1 \leq j \leq d$ , en appliquant l'inégalité de Bürkhölder-Davis-Gundy, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{u \in [0, \theta]} \left| \int_t^{t+u} S_s^{t,x,j} \sigma_{i,j}(s, S_s^{t,x}) dW_s^j \right|^p\right] \leq C \mathbb{E}\left[\left(\int_t^{t+\theta} (S_{t+u}^{t,x,i})^2 \sigma_{i,j}(t+u, S_{t+u}^{t,x})^2 du\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

Or  $\sigma$  est bornée sur  $[0, T] \times [0, +\infty[^d$ , donc on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{u \in [0, \theta]} \left| \int_t^{t+u} S_s^{t,x,j} \sigma_{i,j}(s, S_s^{t,x}) dW_s^j \right|^p\right] &\leq C \mathbb{E}\left[\left(\int_t^{t+\theta} \left(\sup_{u \in [0, T]} S_u^{t,x,i}\right)^2 du\right)^{\frac{p}{2}}\right] \\ &\leq C\theta^{\frac{p}{2}} \mathbb{E}\left[\left(\sup_{u \in [0, T]} |S_u^{x,t,i}| \right)^p\right]. \end{aligned}$$

Finalement, comme  $x$  est à valeurs dans un compact, on a  $\mathbb{E}\left[\left(\sup_{u \in [t, T]} |S_u^{t,x,i}| \right)^p\right] < C$  et on en déduit que :

$$\forall x \in [0, B]^d, \quad \mathbb{E}\left[\sup_{u \in [0, \theta]} |h(S_u^{t,x}) - h(x)|^p\right] \leq C \left(\theta^p + \theta^{\frac{p}{2}}\right). \quad \diamond$$

### 3 Une classe particulière de pay-off

Dans les parties suivantes, nous nous intéresserons particulièrement à un certain type d'options: les options de vente portant sur une fonction linéaire des actifs  $S$ . Pour cela, nous simplifions notre modèle en supposant que  $b$  est constante et que la volatilité ne dépend pas du temps. Comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette partie, cela assure la décroissance de  $P$  par rapport au temps et cette propriété est essentielle pour établir les résultats de cette section. Plus précisément, nous supposons que le processus

$(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = \text{diag}(S_t)((r\mathbb{1} - \delta)dt + \sigma(S_t) dW_t) \quad (1)$$

où  $r > 0$ ,  $\mathbb{1} = (1)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\delta \in [0, +\infty[^d$  et  $\sigma$  satisfait les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ .

Définissons le type d'options que nous allons étudier. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ , pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$f(x) = (K - \langle \alpha, x \rangle)^+.$$

Ce genre de fonctions de pay-off couvre les cas d'options d'achat ou de vente portant sur un indice ou sur des écarts entre actifs. En effet, les résultats obtenus pour des options de vente peuvent être étendus aux options d'achat grâce à une formule de parité entre call et put (cf. la Proposition 2.1 de VILLENEUVE S. (1999b)).

La fonction de valeur de l'option américaine de maturité  $T$  et de fonction de pay-off  $f$  est alors:

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)],$$

où  $\mathcal{T}_{0, T-t}$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, T - t]$ .

Nous introduisons maintenant une notation désignant les sections temporelles de la région d'exercice  $\mathcal{E}$ :

$$\forall t \in ]0, T), \quad \mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d : P(t, x) = f(x)\}.$$

Si la frontière libre associée à l'option américaine est connue, nous pouvons en déduire une formule explicite donnant le temps d'arrêt optimal  $\tau^*$ . La valorisation de l'option américaine revient alors à donner le prix d'une option européenne de maturité  $\tau^*$ . Il doit donc être possible de relier les fonctions de valeur des options européennes et américaines. Evidemment, d'un point de vue financier une option américaine donne plus de droits

qu'une européenne donc son prix doit être supérieur. La différence entre ces deux fonctions de valeur est alors appelée la prime pour exercice anticipé. Dans la section 3.1, nous rappelons la formule décrivant cette prime qui apparaît dans MYNENI R. (1992) ou JACKA S. D. (1991). En utilisant cette formule, nous estimerons la différence entre des options américaines et européennes de maturité petite et de même fonction de pay-off  $f$ . Cette approximation motivera l'étude des options européennes dans les parties II et IV.

Dans la section suivante (cf. section 3.2), nous rappelons un résultat de VILLENEUVE S. (1999b) qui donne la limite des sections temporelles  $\mathcal{E}_t$  pour  $t$  tendant vers  $T$ . Finalement, nous montrons que cela peut être facilement étendu à des diffusions à volatilités dépendant du temps dans le cas simple où  $d = 1$ .

Cette section prépare aux parties II et IV dans lesquelles la vitesse de convergence de  $\mathcal{E}_t$ , dans un sens que nous préciserons, est donnée.

### 3.1 Prime d'exercice anticipé

Une formule décrivant la prime d'exercice anticipé est donnée dans la Proposition suivante qui est une extension du Corollaire 3.1 de MYNENI R. (1992).

**Proposition 3.1** *Pour  $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty[^d$ , on a*

$$0 \leq P(t, x) - P^e(t, x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} e^{-ru} (rK - \langle \alpha \delta, S_u^x \rangle) \mathbb{1}_{\{S_u^x \in \mathcal{E}_{t+u}\}} du\right].$$

Remarque: Cette formule est établie dans MYNENI R. (1992) et JACKA S. D. (1991) pour des coefficients  $b$  et  $\sigma$  constants. Cependant, la preuve reste valide pour des coefficients continus.

Cette formule nous permet de donner un développement de  $P - P^e$  pour des valeurs de  $t$  proches de la maturité. Cette approximation est présentée dans le Corollaire suivant.

**Corollaire 3.1** *Il existe  $C > 0$  telle que, pour  $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty[^d$  et  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a*

$$0 \leq P(t, x) - P^e(t, x) \leq (T - t) (rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)^+ + C(T - t)^{\frac{3}{2}}.$$

*Démonstration du Corollaire 3.1:* Soit  $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty[^d$  et posons  $\theta = T - t$ . On a

$$\begin{aligned} P(t, x) - P^e(t, x) &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^\theta e^{-rs} (rK - \langle \alpha \delta, S_s^x \rangle)^+ ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\theta e^{-rs} \left( rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_i S_s^{i, x_i} \right)^+ ds \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int_0^\theta e^{-rs} \left( rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_i e^{-(r-\delta_i)(\theta-s)} \mathbb{E}[S_\theta^{i, x_i} | \mathcal{F}_s] \right)^+ ds \right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen nous permet alors d'en déduire que:

$$\begin{aligned} P(t, x) - P^e(t, x) &\leq \mathbb{E} \left[ \int_0^\theta e^{-rs} \left( rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_i e^{-(r-\delta_i)(\theta-s)} S_\theta^{i, x_i} \right)^+ ds \right] \\ &= \frac{1 - e^{-r\theta}}{r} \mathbb{E}[(rK - \langle \alpha \delta, S_\theta^x \rangle)^+] + R(\theta, x), \end{aligned}$$

avec

$$R(\theta, x) = \int_0^\theta e^{-rs} \mathbb{E} \left[ \left( rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_i e^{-(r-\delta_i)(\theta-s)} S_\theta^{i, x_i} \right)^+ - \left( rK - \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_i S_\theta^{i, x_i} \right)^+ \right] ds.$$

Tout d'abord, nous montrons que  $R$  est négligeable par rapport à  $\theta^{\frac{3}{2}}$  lorsque  $\theta$  tend vers

0. En effet, on a

$$\begin{aligned} |R(\theta, x)| &\leq \int_0^\theta e^{-rs} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=1}^d \alpha_i \delta_i (e^{-(r-\delta_i)(\theta-s)} - 1) S_\theta^{i, x_i} \right| \right] ds \\ &\leq \int_0^\theta e^{-rs} \sum_{i=1}^d |\alpha_i| |\delta_i| |e^{-(r-\delta_i)(\theta-s)} - 1| \mathbb{E}[S_t^{i, x_i}] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\theta e^{-rs} \sum_{i=1}^d |\alpha_i| \delta_i |e^{-(r-\delta_i)(\theta-s)} - 1| x_i e^{(r-\delta_i)\theta} ds \\
&\leq \sum_{i=1}^d |\alpha_i| \delta_i x_i \int_0^\theta |e^{\delta_i s} - e^{-rs} e^{(r-\delta_i)\theta}| ds \\
&= o(\theta^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Définissons maintenant la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $g(x) = (rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)^+$ . Nous cherchons à estimer  $\mathbb{E}[e^{-r\theta} g(S_\theta^x)]$  au voisinage de 0. Comme  $g$  est Lipschitzienne, en utilisant le lemme 2.1, nous pouvons affirmer qu'il existe  $C > 0$  indépendante de  $t$  et de  $x$  telle que

$$|\mathbb{E}[e^{-r\theta} (g(S_\theta^x) - g(x))]| \leq C\sqrt{\theta} \quad \text{pour } \theta \text{ suffisamment petit.}$$

Cela conclut la démonstration.  $\diamond$

### 3.2 Limite de la frontière libre à la maturité

Commençons par rappeler le Théorème 2.2 de VILLENEUVE S. (1999b), donnant une formule explicite de la limite de  $\mathcal{E}_t$  lorsque  $t$  tend vers  $T$ :

**Théorème 3.1** *On a*

$$\bigcup_{t < T} \mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d : \langle \alpha, x \rangle < K \quad \text{et} \quad \langle \alpha \delta, x \rangle < rK\} \quad \text{où} \quad \alpha \delta = (\alpha_i \delta_i)_{1 \leq i \leq d}.$$

Remarquons que lorsque  $d = 1$  et  $\alpha = 1$ , il est bien connu que  $\mathcal{E}_t = [0, s(t)]$  où

$$s(t) = \inf \{x \in [0, +\infty[: P(t, x) > f(x)\},$$

est le prix critique de l'option de vente. Le Théorème 3.1 doit donc être vu comme une extension d'un résultat plus ancien au cas d'une diffusion multidimensionnelle à volatilité

non constante. En effet, dans le cas d'une volatilité constante, il a été établi que (cf. KIM I. J. (1990) et VAN MOERBEKE (1976)):

$$\lim_{t \rightarrow T} s(t) = \min\{K; rK/\delta\}.$$

Il est facile de voir que ce résultat reste vrai dans un modèle à volatilité locale:

**Proposition 3.2** *Supposons que  $d = 1$ ,  $\alpha = 1$  et que  $\sigma$  est une fonction de  $[0, T] \times [0, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , satisfaisant les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ . On a alors*

$$\lim_{t \rightarrow T} s(t) = \min\{K; rK/\delta\}.$$

*Démonstration de la Proposition 3.2:* Notons  $P^\sigma$  la fonction de valeur de l'option de vente dans le modèle de Black & Scholes où la volatilité est notée  $\sigma$ . De même, le prix critique associé sera noté  $s^\sigma$ . Des résultats de EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998) associés à l'hypothèse  $H_1$ , on déduit que  $P^m \leq P \leq P^M$  et donc  $s^M \leq s \leq s^m$ .

Comme nous savons que  $\lim_{t \rightarrow T} s^M(t) = \lim_{t \rightarrow T} s^m(t) = \min\{K; rK/\delta\}$  (cf. KIM I. J. (1990) et VAN MOERBEKE (1976)), on conclut la démonstration.  $\diamond$

## 4 Prix d'exercice contre prix spot

Dans toute cette section, nous supposons que  $S$  est une diffusion de dimension 1. En étudiant la propagation de convexité par des semi-groupes, C. Martini a observé que lorsque  $\sigma$  ne dépend pas du temps et que  $\delta = r$ , on a l'égalité suivante (cf. MARTINI C. (1999)):

Pour  $x, y \in [0, +\infty[$  et  $t \in [0, T]$ , on a:

$$\mathbb{E}[(x - S_t^y)^+] = \mathbb{E}[(y - S_t^x)^+] + (x - y). \quad (2)$$

Autrement dit, cela signifie que l'on peut échanger le prix d'exercice et le prix spot dans la fonction de valeur d'une option de vente européenne. Cette égalité a des conséquences intéressantes. Par exemple, C. Martini l'utilise dans ce cadre pour démontrer que la convexité de la fonction de pay-off entraîne la convexité de la fonction de valeur de l'option européenne associée.

Nous l'utiliserons pour donner un développement limité d'une fonction proche du prix critique américain au voisinage de l'échéance. Pour cela, nous devons étendre cette formule à notre modèle et nous montrons une formule analogue pour le cas  $r \neq \delta$  et  $\sigma$  dépendant du prix de l'actif. Ce sera la clé de la démonstration du Théorème 5.1 de la partie suivante.

Le résultat principal de cette section (cf. Théorème 4.1) est donc une extension de la formule (2). Ce Théorème repose sur la symétrie de la diffusion  $S$  par rapport à sa mesure de vitesse. Cette symétrie peut être établie car nous disposons d'une formule explicite d'une fonction d'échelle de la diffusion. En effet, d'après REVUZ D., YOR M. (1990) (§11.3, p.300-311), nous savons qu'une fonction d'échelle,  $v$ , de la diffusion  $S$  est donnée par la formule suivante:

$$v(x) = \int_c^x \exp\left(-\int_c^y \frac{2(r - \delta)}{\sigma(z)^2 z} dz\right) dy, \quad \forall x \in ]0, +\infty[,$$

où  $c$  est une constante arbitraire strictement positive. Nous avons alors le résultat suivant.

**Théorème 4.1** Pour  $x, y \in ]0, +\infty[$  et  $t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} v'(x)\mathbb{E}[(x - S_t^y)^+] &= v'(y)\mathbb{E}[(y - S_t^x)^+] + v'(y)(x - y) + (x - y)^+(v'(x) - v'(y)) \\ &\quad + (r - \delta) \int_0^t v'(y)\mathbb{E}[1_{\{S_u^x < y\}}S_u^x] - v'(x)\mathbb{E}[1_{\{S_u^y < x\}}S_u^y] du. \end{aligned}$$

La preuve de ce Théorème repose sur le lemme suivant.

**Lemme 4.1** Pour  $t, a, x \in [0, +\infty[$ , on note  $L_{t,a}^x$  le temps local de  $S^x$  de niveau  $a$  à la date  $t$ . Nous avons alors  $\forall x, y \in ]0, +\infty[^2$  et  $\forall t > 0$  :

$$v'(y)\mathbb{E}[L_{t,y}^x] = v'(x)\mathbb{E}[L_{t,x}^y].$$

*Démonstration du Théorème 4.1:* Le Théorème 4.1 est une conséquence directe du lemme 4.1 et de la formule de Tanaka-Meyer (cf. KARATZAS I., SHREVE S. (1998), §3.7, p.217).

En effet, cette formule nous donne l'espérance du temps local :

$$\mathbb{E}[L_{t,y}^x] = \mathbb{E}[(y - S_t^x)^+] + (r - \delta) \int_0^t \mathbb{E}[1_{\{S_u^x < y\}}S_u^x] du - (y - x)^+.$$

On conclut alors en reportant cette égalité dans celle donnée par le lemme 4.1.  $\diamond$

*Démonstration du lemme 4.1:*

Lorsque  $r \neq \delta$ , le processus de valeur de l'actif n'est qu'une semi-martingale. Cependant, nous disposons d'une formule explicite de sa mesure de vitesse,  $m$  (cf. REVUZ D., YOR M. (1990), §11.3, p.300-311) :

$$\frac{dm}{dx} = \frac{2}{x^2\sigma(x)^2v'(x)}.$$

En reprenant les arguments de C. Martini (cf. MARTINI C. (1999)), nous sommes alors capables de démontrer que le semi-groupe associé à  $S$  est symétrique par rapport à sa mesure de vitesse et nous obtenons le résultat suivant.

Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions continues à support compact dans  $]0, +\infty[$  et  $t > 0$ . Par la formule de durée d'occupation (cf. REVUZ D., YOR M. (1990) Corollaire 1.6 §6 p.224), on a

$$\begin{aligned}
\int \int \phi(x)\psi(y)v'(y)\mathbb{E}[L_{t,y}^x] dx dy &= \int \phi(x)\mathbb{E}\left[\int \psi(y)v'(y)L_{t,y}^x dy\right] dx \\
&= \int \phi(x)\mathbb{E}\left[\int_0^t \psi(S_s^x)v'(S_s^x) d\langle S_s^x \rangle\right] dx \\
&= \int_0^t \int \phi(x)\mathbb{E}[\psi(S_s^x)v'(S_s^x)\sigma(S_s^x)^2(S_s^x)^2] dx ds \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \int g(x)\phi(x)\mathbb{E}[\psi(S_s^x)g(S_s^x)] m(dx) ds,
\end{aligned}$$

où l'on a posé  $g(x) = \sigma(x)^2 x^2 v'(x)$ .

De la même façon, on montre que

$$\int \int \phi(x)\psi(y)v'(x)\mathbb{E}[L_{t,x}^y] dx dy = \frac{1}{2} \int_0^t \int g(y)\psi(y)\mathbb{E}[\phi(S_s^y)g(S_s^y)] m(dy) ds.$$

La symétrie du semi-groupe de  $S$  par rapport à sa mesure de vitesse nous permet alors d'affirmer que:

$$\int_0^t \int g(y)\psi(y)\mathbb{E}[\phi(S_s^y)g(S_s^y)] m(dy) ds = \int_0^t \int g(y)\phi(y)\mathbb{E}[\psi(S_s^y)g(S_s^y)] m(dy) ds.$$

On a donc établi que

$$\int \int \phi(x)\psi(y)v'(y)\mathbb{E}[L_{t,y}^x] dx dy = \int \int \phi(x)\psi(y)v'(x)\mathbb{E}[L_{t,x}^y] dx dy.$$

Ce résultat étant vrai pour toutes fonctions  $\phi$  et  $\psi$  continues à support compact dans  $]0, +\infty[$ , nous avons:

$$v'(y)\mathbb{E}[L_{t,y}^x] = v'(x)\mathbb{E}[L_{t,x}^y],$$

presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $]0, +\infty[^2$ .

Pour obtenir une égalité valide pour tout  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ , nous démontrons maintenant que la fonction  $(x, y) \rightarrow \mathbb{E}[L_{t,y}^x]$  est continue sur  $]0, +\infty[^2$ . Cette propriété est probablement bien connue mais nous en donnons une preuve pour être complet.

Soient  $K_1, K_2 > 0$  et  $(x, y) \in ]0, K_1[ \times ]0, K_2[$ .

On introduit une suite  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (]0, K_1[ \times ]0, K_2[)^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$ .

D'après 1.32, §VI, p.237 de REVUZ D., YOR M. (1990), il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall (x, y, y') \in ]0, K_1[ \times ]0, K_2[^2, \quad \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |L_{t,y}^x - L_{t,y'}^x| \right] \leq C \sqrt{|y - y'|}.$$

Nous avons donc:

$$| \mathbb{E}[L_{t,y}^x] - \mathbb{E}[L_{t,y_n}^{x_n}] | \leq | \mathbb{E}[L_{t,y}^x] - \mathbb{E}[L_{t,y}^{x_n}] | + C \sqrt{|y - y_n|},$$

puis, en utilisant la formule de Tanaka-Meyer, on a:

$$L_{t,y}^x = (y - S_t^x)^+ + \int_0^t 1_{\{S_u^x < y\}} dS_u^x - (y - x)^+.$$

Comme le processus  $(\int_0^t 1_{\{S_u^x < y\}} S_u^x \sigma(S_u^x) dW_u)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale, on obtient

$$\mathbb{E}[L_{t,y}^x] = \mathbb{E}[(y - S_t^x)^+] + (r - \delta) \int_0^t \mathbb{E}[1_{\{S_u^x < y\}} S_u^x] du - (y - x)^+.$$

Par conséquent, il ne nous reste qu'à prouver la continuité sur  $]0, K_1[$  de la fonction  $x \rightarrow \int_0^t \mathbb{E}[1_{\{S_u^x < y\}} S_u^x] du$ . Soit  $u \in [0, t]$ . On a

$$\begin{aligned} | 1_{\{S_u^{x_n} < y\}} S_u^{x_n} - 1_{\{S_u^x < y\}} S_u^x | &\leq | S_u^{x_n} - S_u^x | + y \mathbb{1}_{\{S_u^x < y \leq S_u^{x_n}\}} \\ &\leq | S_u^{x_n} - S_u^x | + y \mathbb{1}_{\{|S_u^x - y| \leq |S_u^x - S_u^{x_n}|\}}. \end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_u^{x_n} - S_u^x| = 0$  p.s. et  $\mathbb{P}(S_u^x = y) = 0$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1_{\{S_u^{x_n} < y\}} S_u^{x_n} = 1_{\{S_u^x < y\}} S_u^x \quad du \otimes d\mathbb{P} \text{ p.s.}$$

De plus, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq 1_{\{S_u^{x_n} < y\}} S_u^{x_n} \leq y$  donc par convergence dominée, on obtient:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \mathbb{E}[1_{\{S_u^{x_n} < y\}} S_u^{x_n}] du = \int_0^t \mathbb{E}[1_{\{S_u^x < y\}} S_u^x] du$$

et cela termine notre démonstration.  $\diamond$

## Deuxième partie

# Prix critique près de l'échéance d'une option américaine

## 5 Introduction

Pour évaluer le prix d'une option américaine, il est crucial de trouver les conditions sous lesquelles l'option doit être exercée. Ce problème revient à déterminer le prix critique de l'option mais il ne peut pas être résolu sous une forme explicite. Cependant, nous pouvons donner le comportement asymptotique du prix critique au voisinage de la maturité de l'option.

Nous considérons donc un marché financier composé d'un actif risqué dont le processus de prix est noté  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ , où  $T$  est l'échéance des options que nous étudierons. Nous supposons que  $S$  est une solution, sous la probabilité risque-neutre, de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = S_t((r - \delta)dt + \sigma(t, S_t)dW_t),$$

où  $r > 0$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  sont des constantes,  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien standard sur  $\mathbb{R}$  et  $\sigma$  est une fonction de  $[0, T] \times [0, +\infty[$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$ . Finalement, nous noterons  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  la filtration naturelle de  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  et, pour  $x \in [0, +\infty[$ , nous noterons  $(S_t^x)_{0 \leq t \leq T}$  la solution de l'équation précédente de valeur initiale  $x$ .

A la date  $0 \leq t \leq T$ ,  $S_t$  représente la valeur de l'actif risqué sous-jacent à l'option. Cet actif peut aussi bien être une action distribuant des dividendes ou un taux de change. Dans le premier cas,  $r$  est le taux d'intérêt constant du marché et  $\delta$  est le taux de

dividendes versé par action. Dans l'autre cas,  $r$  est le taux d'intérêt du marché et  $\delta$  le taux associé à une monnaie étrangère. Dans ce contexte, considérer des valeurs négatives de  $\delta$  n'a pas de signification, cependant certains résultats de cette partie seront utilisés dans la partie III avec des valeurs quelconques de  $\delta$ .

Le comportement asymptotique du prix critique a déjà été étudié sous des hypothèses plus restrictives (cf. AIT-SAHLIA F. (1995), BARLES G., BURDEAU J., ROMANO M., SANSONEN N. (1995), LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003), LAMBERTON D. (1995) et VILLENEUVE S. (1999)). Cependant, ces résultats requièrent une volatilité constante qui n'est pas directement observable. En pratique, il est très difficile de déterminer la valeur à donner à cette volatilité constante. En effet, l'idée consiste à utiliser les prix d'options observés sur le marché pour évaluer la constante  $\sigma$ , appelée volatilité implicite. Il s'agit de choisir la constante  $\sigma$  pour laquelle les prix théoriques correspondent aux prix observés. Malheureusement, l'observation d'options ayant des prix d'exercice différents donne des volatilités implicites différentes et cela est incompatible avec le modèle de Black & Scholes qui doit donc être étendu. Une approche largement répandue considère des modèles dits à volatilité locale, modèles où la volatilité  $\sigma$  est une fonction déterministe de la valeur de l'actif sous-jacent et du temps (cf. DUPIRE B. (1994), AVELLANEDA M., FRIEDMAN C., HOLMES R., SAMPERI D. (1997), BERESTYCKI H., BUSCA J., ROMANO M., SANSONEN N. (2002) et ACHDOU Y. (2004)). Dans toute cette partie nous considérons donc des modèles à volatilité locale et cherchons à étendre les résultats en volatilité constante à ces modèles. Cette partie peut-être vue comme une version détaillée d'un article à paraître dans *Mathematical Finance* (cf. CHEVALIER E. (2004)).

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

$H_1$  : Il existe  $m > 0$  et  $M > 0$  telles que

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+, \quad m \leq \sigma(t,x) \leq M.$$

$H_2$  : Il existe  $\sigma_L > 0$  telle que

$$\forall (t,x,y) \in [0,T] \times [0, +\infty[^2, \quad |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq \sigma_L |x - y|.$$

$H_3$  : Il existe  $\alpha > 0$  et  $\sigma_H$  tels que

$$\forall x \in [0, +\infty[, (t,s) \in [0,T]^2, \quad |\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| \leq \sigma_H |t - s|^\alpha.$$

Nous rappelons alors la définition de la fonction de valeur de l'option américaine (cf. KARATZAS I. (1988), MYNENI R. (1992) et LAMBERTON D. (1998a)). Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . A la date  $t \in [0,T]$ , le prix d'une option américaine de fonction de pay-off  $f$  et de maturité  $T$  est  $P(t,S_t)$  avec, pour  $x \in [0, +\infty[$ :

$$P(t,x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E} \left[ e^{-r(\tau-t)} f(S_\tau) | S_t = x \right],$$

où  $\mathcal{T}_{t,T}$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[t,T]$ . Nous rappelons également la définition du prix critique associé à cette option. Pour  $t \in [0,T]$ , on pose:

$$s(t) = \inf\{x > 0 : P(t,x) > f(x)\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .

Dans le cas d'une option de vente de prix d'exercice  $K > 0$  et lorsque  $\sigma$  est constante, il a été établi que  $\lim_{t \rightarrow T} s(t) = \min(rK/\delta, K)$ , (cf. KIM I. J. (1990), LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003) et VAN MOERBEKE (1976)). De plus, on sait que le prix critique a différents comportements selon le signe de  $r - \delta$  (cf. AIT-SAHLIA F. (1995), BARLES G., BURDEAU J., ROMANO M., SANSOEN N. (1995), EVANS J.D., KELLER R. J., KUSKE R. (2002), LAMBERTON D. (1995), VILLENEUVE S. Ph. D. (1999) et LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003)). Si  $0 \leq r - \delta$ , la vitesse de convergence de  $s$

est  $\sqrt{(T-t) \ln(1/(T-t))}$  sinon, cette vitesse de convergence est  $\sqrt{T-t}$ .

Dans cette partie, nous étendons les résultats précédents à une volatilité locale et, dans certains cas, à un ensemble assez général de fonctions de pay-off. Nous commençons, dans la section 6, par étudier le cas d'une option de vente portant sur un actif dont la volatilité est indépendante du temps et tel que  $\delta \leq r$ . La formule de parité permettant d'échanger les prix d'exercice et spot dans la fonction de valeur européenne (cf. Théorème 4.1) sera la clé pour notre analyse de ce cas. En effet, si l'on note  $P^e$  la fonction de valeur d'une option de vente européenne et que l'on définit le prix critique européen  $s^e(t)$  comme la solution de l'équation  $P^e(t, x) = (K - x)^+$ , nous obtiendrons un développement limité de  $s^e(t)$  au voisinage de l'échéance grâce à cette formule de parité. Nous déduirons alors un développement de  $s$  de celui de  $s^e$  et prouverons que  $s$  a le même comportement que le prix critique d'une option de vente américaine portant sur un actif dont le taux de dividende est  $\delta$  et dont la volatilité est la constante  $\sigma(K)$ . Finalement, dans la section 8, nous étendons cela à un modèle à volatilité locale général et obtenons le Théorème suivant:

**Théorème 5.1** *Sous les hypothèses  $H_1, H_2$  et  $H_3$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s(t)}{\sigma(T, K) K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta < r \text{ et } 0 < r, \\ \sqrt{2} & \text{si } 0 < \delta = r. \end{cases}$$

Le cas  $0 < r < \delta$  est examiné dans la section 7. Dans cette section, nous nous plaçons dans un modèle légèrement plus général et nous considérons un ensemble de fonctions de pay-off  $f$  plus large. Ces fonctions satisfont des conditions de régularité au voisinage de la frontière libre. Dans ce contexte, nous définissons un prix critique  $s_f(t)$  et étudions son comportement au voisinage de l'échéance. Les hypothèses de régularité de la fonction de pay-off nous permettent alors d'obtenir un développement de  $P$  au voisinage de  $(T, s_f(T))$ . Nous en déduisons ensuite un développement de  $s_f$  dans le Théorème 7.2.

Ce résultat est nouveau, même dans le cas de coefficients constants. Appliqué au cas particulier d'une option de vente portant sur un actif tel que  $r < \delta$ , ce Théorème nous permet de montrer que le comportement du prix critique  $s$  au voisinage de l'échéance est le même que dans le cas où la volatilité est constante et égale à  $\sigma(rK/\delta)$ . Nous étendons ce résultat à un modèle à volatilité locale général dans la section 8 pour obtenir le Théorème suivant:

**Théorème 5.2** *Sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ , si  $0 < r < \delta$ , on a:*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{rK - \delta s(t)}{\sigma(T, rK/\delta) rK \sqrt{T-t}} = -y^*,$$

où  $y^*$  est une constante universelle strictement négative.

## 6 Développement du prix critique près de l'échéance dans le cas $\delta \leq r$

Dans une première étape, nous supposons que la volatilité ne dépend que de la valeur de l'actif pour assurer la décroissance par rapport au temps de la fonction de valeur de l'option américaine. Cela s'avèrera nécessaire dans la démonstration du Théorème 6.3. Nous étendrons notre résultat à des volatilités dépendant du temps dans la section 8. Nous supposons dans la suite que  $0 < r$  et  $\delta \leq r$ .

En suivant l'idée de LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003), nous allons comparer  $s$  et une fonction  $s^e$ , appelée prix critique européen, au voisinage de l'échéance. Comme la fonction de valeur de l'option de vente européenne,  $P^e$ , est strictement convexe et  $(P^e(t,0) - f(0))P^e(t,K) \leq 0$  pour tout  $t \in [0, T[$ , il existe une unique solution de l'équation  $P^e(t,x) - f(x) = 0$  sur  $[0, K]$ . Nous noterons cette solution  $s^e(t)$ . Nous commençons par donner un développement du prix critique européen au voisinage de la

maturité grâce au Théorème 4.1, puis nous montrerons que les prix critiques européen et américain sont suffisamment proches pour avoir le même comportement au voisinage de la maturité (cf. Théorème 6.2).

## 6.1 Le cas européen

### 6.1.1 Premières estimations du comportement asymptotique de $s_e$

Pour  $t \in [0, T]$ , on a  $s(t) \leq s_e(t) \leq K$  donc il est facile de déduire de la Proposition 3.2 que  $\lim_{t \rightarrow T} s_e(t) = K$ . Dans cette section, nous donnons un encadrement de  $K - s_e$  en utilisant les résultats en volatilité constante. Pour cela nous introduisons deux notations:

- Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ , nous dirons que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au point  $a \in \mathbb{R}$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  et nous noterons cette propriété  $f(x) \stackrel{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .
- Pour  $\theta \in ]0, T]$ , on pose

$$\alpha(\theta) = \frac{\ln(K/s_e(T - \theta)) + (r - \delta - \sigma(K)^2/2)\theta}{\sigma(K)\sqrt{\theta}}.$$

Remarquons tout d'abord que trouver un équivalent de  $\alpha(\theta)$  lorsque  $\theta$  tend vers 0 revient à trouver un équivalent de  $(K - s_e(t))/\sqrt{T - t}$  pour  $t$  tendant vers l'échéance. En effet, on a:

$$\alpha(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{K - s_e(T - \theta)}{\sigma(K)K\sqrt{\theta}}.$$

Nous donnons maintenant un encadrement de  $\alpha$  au voisinage de 0. Cet encadrement prépare l'étude de  $K - s_e(t)$  au voisinage de la maturité  $T$ .

**Proposition 6.1** *Pour  $\theta \in ]0, T]$  suffisamment petit, on a:*

$$\frac{m}{2\sigma(K)}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\theta}\right)} \leq \alpha(\theta) \leq \frac{2M}{\sigma(K)}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\theta}\right)}.$$

*Démonstration de la Proposition 6.1:*

Pour  $t \in [0, T[$ , nous noterons  $s_e^\sigma(t)$  le prix critique européen associé à un actif satisfaisant le modèle de Black & Scholes et de volatilité constante égale à  $\sigma$ .

Comme la fonction de valeur d'une option de vente européenne est croissante avec la volatilité (cf. EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998)), on a , d'après l'hypothèse  $H_1$ ,  $s_e^M(t) \leq s_e(t) \leq s_e^m(t)$ . Ainsi, on a

$$\frac{K - s_e^m(t)}{K\sqrt{T-t}} \leq \frac{K - s_e(t)}{K\sqrt{T-t}} \leq \frac{K - s_e^M(t)}{K\sqrt{T-t}}.$$

Nous pouvons alors conclure cette démonstration en utilisant les résultats de LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003) qui nous permettent d'affirmer qu'il existe  $C \in \{1, \sqrt{2}\}$  tel que:

$$\frac{K - s_e^m(t)}{K\sqrt{T-t}} \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} Cm \sqrt{\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)} \quad \text{and} \quad \frac{K - s_e^M(t)}{K\sqrt{T-t}} \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} CM \sqrt{\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}$$

Comme  $\alpha(T-t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} (K - s_e(t))/\sigma(K)K\sqrt{T-t}$ , cela termine la démonstration.  $\diamond$

Le Corollaire suivant est un résultat technique qui sera fréquemment utilisé dans la suite pour contrôler la diffusion  $S$ .

**Corollaire 6.1** *Pour  $0 \leq t < T$  suffisamment proche de  $T$ , on a:*

$$\sup_{u \in [0, T-t]} \mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K) \leq \frac{4M}{m \sqrt{\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}} \quad \text{et} \quad \sup_{u \in [0, T-t]} \mathbb{P}(S_u^K < s_e(t)) \leq \frac{4M}{m \sqrt{\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}}.$$

*Démonstration du Corollaire 6.1:* Soit  $t \in [0, T[$ . On pose  $\theta = T - t$  et on considère  $u \in [0, \theta]$ . D'après la Proposition 6.1, on sait que pour  $\theta$  suffisamment petit, on a

$$\frac{m}{3} \sqrt{\theta \ln\left(\frac{1}{\theta}\right)} \leq \ln(K) - \ln(s_e(t)),$$

donc on peut écrire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K) &= \mathbb{P}(\ln(S_u^{s_e(t)}) - \ln(s_e(t)) > \ln(K) - \ln(s_e(t))) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\int_0^u (r - \delta - \sigma(S_v^{s_e(t)})^2/2) dv + \int_0^u \sigma(S_v^{s_e(t)}) dW_v > \frac{m}{3} \sqrt{\theta \ln(\frac{1}{\theta})}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(|r - \delta| \theta + \int_0^u \sigma(S_v^{s_e(t)}) dW_v > \frac{m}{3} \sqrt{\theta \ln(\frac{1}{\theta})}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a:

$$\mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^u \sigma(S_v^{s_e(t)}) dW_v > \frac{m}{4} \sqrt{\theta \ln(\frac{1}{\theta})}\right),$$

puis, grâce aux inégalités de Markov et de Cauchy-Schwarz, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K) &\leq \frac{4\mathbb{E}[\int_0^u \sigma(S_v^{s_e(t)}) dW_v]}{m\sqrt{\theta \ln(\frac{1}{\theta})}} \\ &\leq \frac{4M}{m\sqrt{\ln(\frac{1}{\theta})}} \end{aligned}$$

De la même façon, on prouve que  $\mathbb{P}(S_u^K < s_e(t)) \leq 2M/m\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}$ .  $\diamond$

Remarque: La constante  $4M/m$  n'est pas optimale mais donne la dépendance des majorants en  $M$  et  $m$ .

### 6.1.2 Equivalent de $K - s_e$ à l'échéance

Le résultat principal de cette section est le Théorème suivant:

**Théorème 6.1** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s_e(t)}{\sigma(K)K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta < r \text{ et } 0 < r, \\ \sqrt{2} & \text{si } 0 < \delta = r. \end{cases}$$

La démonstration du Théorème 6.1 est basée sur un développement limité de  $\alpha$  en 0, grâce au Théorème 4.1. Nous donnons ce développement dans la Proposition suivante.

**Proposition 6.2** *On a*

$$rK\sigma(K)(T-t)^{\frac{3}{2}}\alpha(T-t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(s_e(t) - S_{T-t}^K)^+] - (r - \delta)I(t),$$

avec  $I : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que:  $I(t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} K(T-t)$ .

Remarque: Si  $r = \delta$ , nous n'avons pas besoin de contrôler  $I(t)$  et la Proposition 6.2 est une conséquence immédiate de la formule de parité (2) et de la Proposition 6.1.

*Démonstration de la Proposition 6.2:*

Première étape: On applique le Théorème 4.1 avec  $y = K$  et  $x = s_e(t)$ . Comme  $s_e(t) \leq K$ , on obtient:

$$\begin{aligned} v'(s_e(t))\mathbb{E}[(s_e(t) - S_{T-t}^K)^+] &= v'(K)\mathbb{E}[(K - S_{T-t}^{s_e(t)})^+] + v'(K)(s_e(t) - K) \\ &+ (r - \delta) \int_0^{T-t} v'(K)\mathbb{E}[1_{\{S_u^{s_e(t)} < K\}} S_u^{s_e(t)}] - v'(s_e(t))\mathbb{E}[1_{\{S_u^K < s_e(t)\}} S_u^K] du \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(s_e(t) - S_{T-t}^K)^+] - (r - \delta)I(t) = J(t),$$

où l'on a posé:

$$\begin{aligned} e^{-\phi(t)} &= v'(K)/v'(s_e(t)) \\ I(t) &= e^{-r(T-t)} \int_0^{T-t} (e^{-\phi(t)}\mathbb{E}[1_{\{S_u^{s_e(t)} < K\}} S_u^{s_e(t)}] - \mathbb{E}[1_{\{S_u^K < s_e(t)\}} S_u^K]) du \\ J(t) &= e^{-\phi(t)-r(T-t)}\mathbb{E}[(K - S_{T-t}^{s_e(t)})^+] + e^{-\phi(t)-r(T-t)}(s_e(t) - K). \end{aligned}$$

Deuxième étape: Nous allons montrer que  $J(t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} rK\sigma(K)(T-t)^{\frac{3}{2}}\alpha(T-t)$ .

Comme la définition de  $s_e$  implique  $\mathbb{E}[e^{-r(T-t)}(K - S_{T-t}^{s_e(t)})^+] = K - s_e(t)$ , on obtient:

$$\begin{aligned} J(t) &= e^{-\phi(t)}(1 - e^{-r(T-t)})(K - s_e(t)) \\ &= s_e(t)e^{-\phi(t)}(1 - e^{-r(T-t)})(e^{\sigma(K)\alpha(T-t)\sqrt{T-t} - (r-\delta - \frac{\sigma(K)^2}{2})(T-t)} - 1). \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que  $\lim_{t \rightarrow T} e^{-\phi(t)} = 1$  car  $v'$  est continue. On développe alors l'équation précédente en utilisant la Proposition 6.1 pour comparer  $\alpha(T-t)$  et des puissances de  $T-t$ :

$$J(t) = rK\sigma(K)(T-t)^{\frac{3}{2}}\alpha(T-t) + o\left((T-t)^{\frac{3}{2}}\alpha(T-t)\right).$$

Troisième étape: Montrons que  $I(t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} K(T-t)$ .

On a:

$$I(t) = e^{-\phi(t)-r(T-t)}R_1(t) + e^{-\phi(t)-r(T-t)}R_2(t) + e^{-r(T-t)}R_3(t),$$

avec:

$$\begin{aligned} R_1(t) &= K \int_0^{T-t} \mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} < K) du \\ R_2(t) &= \int_0^{T-t} \mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)\mathbb{1}_{\{S_u^{s_e(t)} < K\}}] du \\ R_3(t) &= - \int_0^{T-t} \mathbb{E}[S_u^K \mathbb{1}_{\{S_u^K < s_e(t)\}}] du \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant le comportement de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  au voisinage de l'échéance.

On a

$$R_1(t) = K(T-t) - \int_0^{T-t} \mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K) du.$$

D'après le Corollaire 6.1, on sait qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| \int_0^{T-t} \mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K) du \right| \leq \frac{C(T-t)}{\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}}.$$

Par conséquent, on obtient:

$$R_1(t) = K(T-t) + o(T-t).$$

D'autre part, pour  $u \in [0, T-t]$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)\mathbb{1}_{\{S_u^{s_e(t)} < K\}}] \right| &= \left| \mathbb{E}[S_u^{s_e(t)} - K] - \mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)\mathbb{1}_{\{S_u^{s_e(t)} > K\}}] \right| \\ &\leq \left| s_e(t)e^{(r-\delta)u} - K \right| + \left| \mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)\mathbb{1}_{\{S_u^{s_e(t)} > K\}}] \right| \end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 6.1, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\left| s_e(t)e^{(r-\delta)u} - K \right| \leq C\sqrt{(T-t)\ln(\frac{1}{T-t})}$$

De plus, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis du Corollaire 6.1 que l'on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)\mathbb{1}_{\{S_u^{s_e(t)} > K\}}] \right| &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)^2]\mathbb{P}(S_u^{s_e(t)} > K)} \\ &\leq \frac{C}{(\ln(\frac{1}{T-t}))^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

En effet, il est facile de voir que  $\mathbb{E}[(S_u^{s_e(t)} - K)^2]$  est borné uniformément par rapport à  $t$  et  $u$ . En conclusion, nous avons démontré que

$$\left| R_2(t) \right| \leq \frac{C(T-t)}{(\ln(\frac{1}{T-t}))^{\frac{1}{4}}} = o(T-t).$$

Finalement, nous savons, toujours d'après le Corollaire 6.1, qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\begin{aligned}
|R_3(t)| &\leq \int_0^{T-t} \mathbb{E} [s^e(t) \mathbf{1}_{\{S_u^K < s_e(t)\}}] du \\
&\leq K \int_0^{T-t} \mathbb{P}(S_u^K < s_e(t)) du \\
&\leq \frac{C(T-t)}{\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}} \\
&= o(T-t).
\end{aligned}$$

Or  $\lim_{t \rightarrow T} e^{-\phi(t)} = 1$ , donc on a

$$\begin{aligned}
I(t) &= K(T-t) + o(T-t) \\
&\stackrel{t \rightarrow T}{\sim} K(T-t). \quad \diamond
\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à donner un développement limité de la fonction de valeur d'une option de vente européenne de prix d'exercice  $s_e(t)$  et de prix spot  $K$  lorsque  $t$  tend vers  $T$ .

**Proposition 6.3** *On a:*

$$\mathbb{E}[e^{-r(T-t)} (s_e(t) - S_{T-t}^K)^+] \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} \frac{K \sigma(K) e^{-\frac{\alpha(T-t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\alpha}(T-t)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Démonstration de la Proposition 6.3:*

Soit  $t \in [0, T[$  et  $\theta = T - t$ . Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\rho_K(\theta) = -\frac{1}{2} \int_0^\theta (\sigma(S_u^K)^2 - \sigma(K)^2) du + \int_0^\theta (\sigma(S_u^K) - \sigma(K)) dW_u$$

$$Y_\theta = \sigma(K)(\sqrt{\theta}\alpha(\theta) + W_\theta) \quad \text{et} \quad X_\theta^K = Y_\theta + \rho_K(\theta).$$

On remarque que l'on a

$$\mathbb{E}[e^{-r\theta} (s_e(t) - S_\theta^K)^+] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} K \mathbb{E}[(1 - \frac{S_\theta^K}{s_e(t)})^+] = K \mathbb{E}[(1 - e^{X_\theta^K})^+].$$

L'idée est alors d'utiliser l'approximation  $e^x \simeq 1 + x$ . En fait, nous montrons dans la première étape que

$$\mathbb{E}[-X_\theta^K \mathbb{1}_{\{X_\theta^K \leq 0\}}] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sigma(K) \sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\alpha(\theta)^2}},$$

puis dans une seconde étape, nous prouverons que

$$\mathbb{E}[(1 - e^{X_\theta^K})^+] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}[-X_\theta^K \mathbb{1}_{\{X_\theta^K \leq 0\}}].$$

Première étape: D'après LAMBERTON D. (1995), on a :

$$\mathbb{E}[-Y_\theta \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq 0\}}] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sigma(K) \sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\alpha(\theta)^2}}.$$

En effet, il existe une variable aléatoire  $g$  suivant une loi gaussienne standard telle que  $\mathbb{E}[-Y_\theta \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq 0\}}] = \sigma(K) \sqrt{\theta} \mathbb{E}[(\alpha(\theta) + g)^-]$  et cette dernière quantité est facile à estimer.

Il nous suffit donc de montrer que  $\mathbb{E}[-X_\theta^K \mathbb{1}_{\{X_\theta^K \leq 0\}}] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}[-Y_\theta \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq 0\}}]$ . Nous noterons  $D(\theta)$  la différence entre ces deux expressions et prouverons que  $D(\theta) = o(\sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\alpha(\theta)^2})$ .

On a :

$$\begin{aligned} |D(\theta)| &= |\mathbb{E}[(-Y_\theta - \rho_K(\theta)) \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq -\rho_K(\theta)\}} + Y_\theta \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq 0\}}]| \\ &= |\mathbb{E}[Y_\theta (\mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq 0\}} - \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq -\rho_K(\theta)\}}) - \rho_K(\theta) \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq -\rho_K(\theta)\}}]| \\ &\leq \mathbb{E}[|Y_\theta| (\mathbb{1}_{\{0 \leq Y_\theta \leq -\rho_K(\theta)\}} + \mathbb{1}_{\{0 \geq Y_\theta \geq -\rho_K(\theta)\}}) + |\rho_K(\theta)| \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq -\rho_K(\theta)\}}] \\ &\leq 2\mathbb{E}[|Y_\theta| \mathbb{1}_{\{|Y_\theta| \leq |\rho_K(\theta)|\}}] + \mathbb{E}[|\rho_K(\theta)| \mathbb{1}_{\{Y_\theta \leq |\rho_K(\theta)|\}}]. \end{aligned}$$

Pour majorer les deux derniers termes, nous introduisons un temps d'arrêt:

$$\tau_\theta = \inf\{s \geq 0 : |\rho_K(s)| > \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}\}.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_\theta| \mathbf{1}_{\{|Y_\theta| \leq |\rho_K(\theta)|\}}] &\leq \mathbb{E}[|Y_\theta| \mathbf{1}_{\{|Y_\theta| \leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}\}} + \mathbf{1}_{\{\tau_\theta < \theta\}}] \\ &\leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}\mathbb{P}(|Y_\theta| \leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}) + \sqrt{\mathbb{E}[Y_\theta^2]}\mathbb{P}(\tau_\theta < \theta). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\mathbb{E}[Y_\theta^2]$  est borné uniformément par rapport à  $\theta$ . Ainsi, on a:

$$\mathbb{P}(\tau_\theta < \theta) = o(\theta^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En effet, d'après l'hypothèse  $H_2$ ,  $\sigma$  est une fonction Lipschitzienne donc le lemme 2.1 et l'inégalité de Bürkhölder-Davis-Gundy nous permettent d'affirmer que pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq u \leq \theta} |\rho_x(u)|^n\right] \leq C\theta^n.$$

On déduit alors de l'inégalité de Doob que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_\theta < \theta) &= \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq u \leq \theta} |\rho_x(u)| > \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}\right) \\ &= o(\theta^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

De plus, en effectuant le changement de variable  $y = \alpha(\theta)(x + \alpha(\theta))$ , on obtient:

$$\mathbb{P}(|Y_\theta| \leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}) = \mathbb{P}(-\theta^{\frac{1}{4}} \leq W_1 + \alpha(\theta) \leq \theta^{\frac{1}{4}})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\alpha(\theta)-\theta^{\frac{1}{4}}}^{-\alpha(\theta)+\theta^{\frac{1}{4}}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&\leq \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\alpha(\theta)\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha(\theta)\theta^{\frac{1}{4}}}^{\alpha(\theta)\theta^{\frac{1}{4}}} e^y dy \\
&\underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\theta^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Finalement, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\mathbb{E}[|Y_\theta| \mid 1_{\{|Y_\theta| \leq |\rho_K(\theta)|\}}] \leq C\theta e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} + o(\theta^n),$$

puis on déduit de la Proposition 6.1 que l'on a :

$$\mathbb{E}[|Y_\theta| \mid 1_{\{|Y_\theta| \leq |\rho_K(\theta)|\}}] \leq o(\max\{\frac{\sqrt{\theta} e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\alpha(\theta)^2}; \theta^n\}).$$

Pour majorer  $|D(\theta)|$ , il nous reste à trouver un majorant de  $\mathbb{E}[|\rho_K(\theta)| \mid 1_{\{Y_\theta \leq |\rho_K(\theta)|\}}]$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\rho_K(\theta)| \mid 1_{\{Y_\theta \leq |\rho_K(\theta)|\}}] &\leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}\mathbb{P}(Y_\theta \leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}) + \sqrt{\mathbb{E}[\rho_K(\theta)^2]\mathbb{P}(\tau_\theta < \theta)} \\
&\leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2} + \alpha(\theta)\theta^{\frac{1}{4}}}}{\alpha(\theta)\sqrt{2\pi}} + o(\theta^n)
\end{aligned}$$

En effet, en effectuant encore une fois le changement de variable  $y = \alpha(\theta)(x + \alpha(\theta))$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_\theta \leq \sigma(K)\theta^{\frac{3}{4}}) &= \int_{-\infty}^{-\alpha(\theta)+\theta^{\frac{1}{4}}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&\leq \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\alpha(\theta)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha(\theta)\theta^{\frac{1}{4}}} e^y dy \\
&\leq \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2} + \alpha(\theta)\theta^{\frac{1}{4}}}}{\alpha(\theta)\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Finalement, la Proposition 6.1 nous assure que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$|D(\theta)| = o(\max\{\sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\alpha(\theta)^2}; \theta^n\}).$$

Il ne nous reste qu'à prouver qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{n-\frac{1}{2}} \alpha(\theta)^2 e^{\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} = 0$$

D'après la Proposition 6.1,  $\alpha(\theta) \leq C_4 \sqrt{\ln(\frac{1}{\theta})}$  donc  $\alpha(\theta)^2 e^{\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} \leq C_4^2 \ln(\frac{1}{\theta}) \theta^{-\frac{C_4^2}{2}}$ . Par conséquent, n'importe quel entier vérifiant  $n \geq C_4^2/2 + 1$  convient.

Deuxième étape: Montrons que  $\mathbb{E}[(1 - e^{X_\theta^K})^+] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}[-X_\theta^K \mathbb{1}_{\{X_\theta^K \leq 0\}}]$ .

Encore une fois, nous noterons  $D(\theta)$  la différence entre ces deux expressions et nous prouverons que  $D(\theta) = o(\sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\alpha(\theta)^2})$ , pour  $\theta$  tendant vers 0. On pose

$$\mu_\theta = \inf\{s \geq 0 : |X_s^K| > \sigma(K)\theta^{\frac{2}{5}}\}.$$

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}^-$ ,  $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} |D(\theta)| &\leq |\mathbb{E}[(1 + X_\theta^K - e^{X_\theta^K}) \mathbb{1}_{\{X_\theta^K \leq 0\}}]| \\ &\leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[(X_\theta^K)^2 \mathbb{1}_{\{X_\theta^K \leq 0\}}] \\ &\leq \frac{1}{2} \theta^{\frac{4}{5}} \mathbb{P}(X_\theta^K \leq 0) + \frac{1}{2} \mathbb{E}[(X_\theta^K)^2 \mathbb{1}_{\{\mu_\theta \leq \theta\}}]. \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\mathbb{E}[(X_\theta^K)^2 \mathbb{1}_{\{\mu_\theta < \theta\}}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X_\theta^K)^4] \mathbb{P}(\mu_\theta < \theta)},$$

puis les inégalités de Doob et de Burkholder-Davis-Gundy nous donnent

$$\mathbb{P}(\mu_\theta < \theta) = o(\theta^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De plus  $\mathbb{E}[(X_\theta^K)^2]$  est borné uniformément par rapport à  $\theta$ , donc on a

$$\mathbb{E}[(X_\theta^K)^2 \mathbb{1}_{\{\mu_\theta < \theta\}}] \leq o(\theta^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Il nous reste à majorer  $\mathbb{P}(X_\theta^K \leq 0)$ . Pour cela, on utilise le temps d'arrêt  $\tau_\theta$  défini dans l'étape précédente et on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_\theta^K \leq 0) &\leq \mathbb{P}\left(\sigma(K)(W_\theta + \sqrt{\theta}\alpha(\theta)) \leq |\rho_K(\theta)|\right) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau_\theta < \theta) + \mathbb{P}(W_\theta \leq \theta^{\frac{3}{4}} - \sqrt{\theta}\alpha(\theta)). \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(\tau_\theta < \theta) = o(\theta^n)$  et que

$$\mathbb{P}(W_\theta \leq \sqrt{\theta}(\theta^{\frac{1}{4}} - \alpha(\theta))) \leq e^{-\frac{(\alpha(\theta) - \theta^{\frac{1}{4}})^2}{2}} / (\alpha(\theta) - \theta^{\frac{1}{4}}) \sqrt{2\pi}.$$

Nous avons donc établi l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta$  tendant vers 0, on a:

$$|D(\theta)| \leq C\theta^{\frac{4}{5}} e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} / \alpha(\theta) + o(\theta^n).$$

La Proposition 6.1 nous permet alors de conclure que:

$$|D(\theta)| = o(\sqrt{\theta} e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} / \alpha(\theta)^2). \quad \diamond$$

Maintenant que les Propositions 6.2 et 6.3 sont démontrées, nous pouvons établir le Théorème 6.1.

*Démonstration du Théorème 6.1:*

Premier cas:  $r = \delta$

D'après la Proposition 6.2, on a

$$r\sigma(K)K\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}[e^{-r\theta}(s_e(T-\theta) - S_\theta^K)^+].$$

D'autre part, la Proposition 6.3 nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}[e^{-r\theta}(s_e(T-\theta) - S_\theta^K)^+] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{K\sigma(K)\sqrt{\theta}e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha(\theta)^2}.$$

Ainsi, nous avons établi le résultat suivant:

$$r\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha(\theta)^2}.$$

Par conséquent, on a  $\alpha(\theta)^3 e^{\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} 1/r\theta\sqrt{2\pi}$ , ce qui implique que  $\alpha(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{2\ln(\frac{1}{\theta})}$ , puis on obtient :

$$\frac{K - s_e(t)}{\sigma(K)K\sqrt{T-t}} \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} \alpha(T-t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} \sqrt{2\ln(\frac{1}{T-t})}.$$

Second cas:  $\delta < r$

La Proposition 6.2 nous donne l'égalité suivante:

$$rK\sigma(K)\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{=} \mathbb{E}[e^{-r\theta}(s_e(T-\theta) - S_\theta^K)^+] - (r-\delta)I(T-\theta) + o\left(\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta)\right),$$

Or, d'après la Proposition 6.1, on a  $\theta^{\frac{3}{2}}\alpha(\theta) = o(\theta)$  donc on obtient

$$(r - \delta)K\theta \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}[e^{-r\theta}(s_e(T - \theta) - S_\theta^K)^+].$$

On déduit alors de la Proposition 6.3, que l'on a:

$$(r - \delta)\theta \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sigma(K)\sqrt{\theta} \frac{e^{-\frac{\alpha(\theta)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\alpha(\theta)^2}}$$

et cela entraîne que  $\alpha(\theta)^2 e^{\frac{\alpha(\theta)^2}{2}} \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sigma(K)/(r - \delta)\sqrt{2\pi\theta}$ . On peut donc montrer que  $\alpha(\theta) \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\ln(\frac{1}{\theta})}$ . On termine la démonstration en écrivant:

$$\frac{K - s_e(t)}{\sigma(K)K\sqrt{T - t}} \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} \alpha(T - t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} \sqrt{\ln(\frac{1}{T - t})}. \quad \diamond$$

## 6.2 Prix critiques européen et américain près de l'échéance

Dans cette section, nous comparons les fonctions de valeur des options de vente européenne et américaine. Cela nous permettra de prouver que les prix critiques européen et américain sont suffisamment proches au voisinage de l'échéance pour avoir le même développement limité du premier ordre près de la maturité (cf. Théorème 6.2). La formule de la prime pour exercice anticipé qui est présentée dans la section 3 de la partie I, nous donnera une évaluation de la différence entre les fonctions de valeur des options de vente européenne et américaine (cf. Corollaire 3.1).

Pour relier cette formule aux prix critiques, il nous sera nécessaire de contrôler la dérivée première de  $P$  par rapport à  $x$  entre  $s$  et  $s_e$ . Nous donnons un encadrement de cette dérivée au voisinage de l'échéance dans la Proposition 6.4. Dans le cas d'une volatilité constante, ce contrôle est relativement facile à obtenir (cf. LAMBERTON D. (1995)), mais dans notre cas la démonstration de la Proposition 6.4 repose fortement sur

le Théorème 4.1.

**Proposition 6.4** Pour  $0 \leq t < T$  suffisamment proche de  $T$  et  $0 \leq x \leq s_e(t)$ , on a

$$0 \leq \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) + 1 \leq \frac{5Mv'(K/2)}{m\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}}.$$

*Démonstration de la Proposition 6.4:* Soit  $t \in [0, T[$  tel que  $s(t) \geq K/2$ . Pour  $x \in [0, s(t)]$ , on a  $\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = -1$  donc le résultat est vrai sur  $[0, K/2]$ . On considère maintenant  $K/2 < x \leq s_e(t)$ .

Pour  $0 < y < rK/\delta$ , la fonction  $s \rightarrow (rK - \delta s)\mathbb{1}_{\{s \leq y\}}$  est décroissante donc on déduit des résultats de MARTINI C. (1999), que l'on a :

$$\forall u \in [0, T], \quad x \rightarrow \mathbb{E}[(rK - \delta S_u^x)\mathbb{1}_{\{S_u^x \leq s(t+u)\}}] \quad \text{est décroissante.}$$

Par conséquent, la Proposition 3.1 nous permet d'affirmer que  $z \rightarrow P(t, z) - P_e(t, z)$  est une fonction décroissante. Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) \leq \frac{\partial P_e}{\partial x}(t, x).$$

Montrons maintenant qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $t$  et  $x$  telle que

$$\frac{\partial P_e}{\partial x}(t, x) + 1 \leq C \ln\left(\frac{1}{T-t}\right) \quad \text{pour } t \text{ suffisamment proche de } T.$$

Soit  $x < y < s_e(t)$ . D'après le Théorème 4.1, on a

$$\begin{aligned} e^{r\theta} v'(K) (P_e(t, y) - P_e(t, x)) &= \mathbb{E}[v'(y)(y - S_{T-t}^K)^+ - v'(x)(x - S_{T-t}^K)^+] + v'(K)(x - y) \\ &+ (r - \delta) \int_0^{T-t} \mathbb{E}[(v'(y)\mathbb{1}_{\{S_u^K < y\}} - v'(x)\mathbb{1}_{\{S_u^K < x\}})S_u^K] du \\ &+ (r - \delta)v'(K) \int_0^{T-t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_u^x < K\}}S_u^x - \mathbb{1}_{\{S_u^y < K\}}S_u^y] du \end{aligned}$$

Or  $v'$  est décroissante, donc on a

$$\begin{aligned} \int_0^{T-t} \mathbb{E}[(v'(y)\mathbb{1}_{\{S_u^K < y\}} - v'(x)\mathbb{1}_{\{S_u^K < x\}})S_u^K] du &\leq v'(y)\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} \mathbb{1}_{[x,y]}(S_u^K)S_u^K du\right] \\ &= v'(y)\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} \frac{\mathbb{1}_{[x,y]}(S_u^K)}{\sigma(S_u^K)^2 S_u^K} d\langle S_u^K \rangle\right]. \end{aligned}$$

En appliquant alors la formule de durée d'occupation (cf. REVUZ D., YOR M. (1990) Corollaire 1.6 §6 p.224), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} \frac{\mathbb{1}_{[x,y]}(S_u^K)}{\sigma(S_u^K)^2 S_u^K} d\langle S_u^K \rangle\right] &= \mathbb{E}\left[\int_x^y \frac{1}{\sigma(z)^2 z} L_{T-t,z}^K dz\right] \\ &\leq \int_x^y \frac{1}{\sigma(z)^2 z} \mathbb{E}[L_{T-t,z}^K] dz. \end{aligned}$$

Or pour  $x \leq z \leq y$ , on déduit de la formule de Tanaka-Meyer que l'on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L_{T-t,z}^K] &= \mathbb{E}[(z - S_{T-t}^K)^+ - (z - K)^+] + (r - \delta) \int_0^{T-t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{]-\infty,z]}(S_u^K)S_u^K du \\ &\leq \mathbb{E}[|S_{T-t}^K - K|] + (r - \delta)(T - t)z. \end{aligned}$$

Finalement, le lemme 2.1 et le fait que  $z > K/2$  nous permettent d'établir l'existence d'une constante  $C' > 0$  indépendante de  $x, y$  et  $t$  telle que

$$\int_0^{T-t} \mathbb{E}[(v'(y)\mathbb{1}_{\{S_u^K < y\}} - v'(x)\mathbb{1}_{\{S_u^K < x\}})S_u^K] du \leq C' \frac{2v'(K/2)}{m^2 K} |y - x| \sqrt{T - t}.$$

Il nous reste maintenant à trouver un majorant de l'expression suivante :

$$\int_0^{T-t} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_u^x < K\}} S_u^x - \mathbb{1}_{\{S_u^y < K\}} S_u^y] du.$$

La fonction  $x \rightarrow (K - x)^+$  est décroissante, donc  $\mathbb{E}[(K - S_u^x)^+ - (K - S_u^y)^+] \geq 0$ , et on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_u^x < K\}} S_u^x - \mathbb{1}_{\{S_u^y < K\}} S_u^y] &= K\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_u^x < K\}} - \mathbb{1}_{\{S_u^y < K\}}] \\ &\quad - \mathbb{E}[(K - S_u^x)^+ - (K - S_u^y)^+] \\ &\leq K\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_u^x < K\}} - \mathbb{1}_{\{S_u^y < K\}}] \\ &\leq K\mathbb{P}(S_u^y > K). \end{aligned}$$

De plus, on a  $x < s_e(t)$  donc, d'après le Théorème 6.1, on sait que pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a:

$$xe^{(r-\delta)(T-t)} < K - \frac{1}{2}\sqrt{(T-t)\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_u^y > K) &\leq \mathbb{P}\left(xe^{(r-\delta)(T-t)} + \frac{1}{2}\sqrt{(T-t)\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)} \leq S_u^y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\sqrt{(T-t)\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)} \leq e^{(r-\delta)(T-t)}(M_u^y - x)\right), \end{aligned}$$

où l'on a posé  $M_u^y = e^{-(r-\delta)u}S_u^y$ .

Comme  $(M_u^y)_{0 \leq u \leq T}$  est une martingale, l'inégalité de Markov nous permet d'écrire que

$$\mathbb{P}(S_u^y > K) \leq \frac{2e^{(r-\delta)(T-t)}}{\sqrt{(T-t)\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}}(y - x).$$

En conclusion, nous avons montré qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $x$ ,  $y$  et  $t$  telle que

$$e^{r(T-t)} \frac{P_e(t, y) - P_e(t, x)}{y - x} \leq C$$

$$-1 + \frac{1}{v'(K)} \mathbb{E} \left[ \frac{v'(y)(y - S_{T-t}^K)^+ - v'(x)(x - S_{T-t}^K)^+}{y - x} \right] + C \sqrt{\frac{T-t}{\ln(\frac{1}{T-t})}}.$$

Posons  $R(t, x) = \mathbb{E}[v'(x)(x - S_{T-t}^K)^+]$  et faisons tendre  $y$  vers  $x$ . On obtient alors

$$e^{r(T-t)} \frac{\partial P_e}{\partial x}(t, x) \leq -1 + \frac{1}{v'(K)} \frac{\partial R}{\partial x}(t, x) + C \sqrt{\frac{T-t}{\ln(\frac{1}{T-t})}}.$$

Comme  $v''(x) \leq 0$ , on a

$$\frac{\partial R}{\partial x}(t, x) = v''(x) \mathbb{E}[(x - S_{T-t}^K)^+] + v'(x) \mathbb{P}(S_{T-t}^K < x) \leq v'(x) \mathbb{P}(S_{T-t}^K < x).$$

Or  $x \leq s_e(t)$ , donc  $x$  est relativement loin de  $K$  et nous pouvons contrôler  $\mathbb{P}(S_{T-t}^K < x)$  en écrivant:  $\mathbb{P}(S_{T-t}^K < x) \leq \mathbb{P}(S_{T-t}^K < s_e(t))$ . Finalement, le Corollaire 6.1 nous permet d'affirmer que pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x}(t, x) \leq -1 + \frac{5Mv'(K/2)}{m\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}}. \quad \diamond$$

**Théorème 6.2** *Pour  $t < T$  suffisamment proche de  $T$ , on a*

$$0 \leq s_e(t) - s(t) \leq MK\sqrt{T-t}.$$

*Démonstration du Théorème 6.2:*

Commençons par remarquer que pour  $t \in [0, T[$ , on a

$$\begin{aligned} P(t, s_e(t)) - (K - s_e(t)) &= \int_{s(t)}^{s_e(t)} \left( \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) + 1 \right) dx \\ &= \int_{s(t)}^{s_e(t)} \int_{s(t)}^x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Or on sait, d'après le Corollaire 3.1, que pour  $t$  tendant vers  $T$ , on a :

$$P(t, s_e(t)) - (K - s_e(t)) \leq (T - t) (rK - \delta s_e(t)) + O(T - t)^{\frac{3}{2}}.$$

Le Théorème 6.1 nous permet d'affirmer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$(rK - \delta s_e(t)) \geq r(K - s^e(t)) \geq C \sqrt{(T - t) \ln \left( \frac{1}{T - t} \right)},$$

on a donc  $(T - t)^{\frac{3}{2}} = o((T - t) (rK - \delta s_e(t)))$  et pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on obtient

$$P(t, s_e(t)) - (K - s_e(t)) \leq 2(T - t) (rK - \delta s_e(t)).$$

Ainsi, on a montré que

$$\int_{s(t)}^{s^e(t)} \int_{s(t)}^x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) d\xi \leq 2(T - t) (rK - \delta s_e(t)).$$

Nous utilisons maintenant l'inéquation variationnelle satisfaite par  $P$  pour trouver un minorant de  $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi)$  sur  $[s(t), s^e(t)]$ .

Sur l'ouvert  $]s(t), s^e(t)[$ , on a :

$$\frac{\sigma(\xi)^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) = -\frac{\partial P}{\partial t}(t, \xi) - (r - \delta) \xi \frac{\partial P}{\partial x}(t, \xi) + rP(t, \xi).$$

Or  $P$  décroît par rapport au temps donc  $\frac{\partial P}{\partial t}(t, \xi) \leq 0$ . De plus, on sait que  $x \rightarrow P(t, x)$  est convexe donc on a :

$$\frac{M^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) \geq \frac{\sigma(\xi)^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) \geq -(r - \delta) \xi \frac{\partial P}{\partial x}(t, \xi) + rP(t, \xi).$$

Pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a  $\frac{K}{2} < s(t)$  et nous pouvons appliquer la Proposition 6.4 pour affirmer qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $t$ , telle que sur  $]s(t), s^e(t)[$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{M^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) &\geq (r - \delta)\xi + rP(t, \xi) - \frac{C(r - \delta)\xi}{\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}} \\ &\geq rK - \delta s_e(t) - \frac{C(r - \delta)K}{\sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})}} \\ &\geq \frac{rK - \delta s_e(t)}{2}. \end{aligned}$$

En effet, si  $r > \delta$ ,  $rK - \delta s^e(t)$  tend vers  $(r - \delta)K > 0$  donc pour  $t$  proche de  $T$  on a

$$C(r - \delta)K / \sqrt{\ln(\frac{1}{T-t})} \leq (rK - \delta s^e(t)) / 2.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{s(t)}^{s^e(t)} \int_{s(t)}^x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, \xi) d\xi &\geq \int_{s(t)}^{s^e(t)} \int_{s(t)}^x \frac{rK - \delta s_e(t)}{M^2 K^2} d\xi \\ &\geq \frac{rK - \delta s_e(t)}{2M^2 K^2} (s^e(t) - s(t))^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que l'on avait :

$$\begin{aligned} (s_e(t) - s(t))^2 &\leq \frac{2M^2 K^2 (P(t, s_e(t)) - (K - s_e(t)))}{rK - \delta s_e(t)} \\ &\leq \frac{4M^2 K^2 \theta (rK - \delta s_e(t))}{rK - \delta s_e(t)}. \end{aligned}$$

Pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a donc le résultat suivant :

$$s_e(t) - s(t) \leq 2MK\sqrt{\theta}. \quad \diamond$$

Le Théorème 6.1 associé au Théorème 6.2, a pour conséquence directe le principal résultat de cette section, le Théorème 6.3.

**Théorème 6.3** *Supposons que  $\sigma$  ne dépende pas du temps et vérifie les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ , on a alors*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s(t)}{\sigma(K)K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta < r \text{ et } 0 < r, \\ \sqrt{2} & \text{si } 0 < \delta = r. \end{cases}$$

## 7 Le cas d'un pay-off régulier près de la frontière libre

Dans cette section, nous considérons une option américaine dont la fonction de pay-off, notée  $f$ , est régulière au voisinage de la frontière libre.

D'autre part nous étendons légèrement notre modèle en supposant que le processus de prix de l'actif sous-jacent  $(S_t^x)_{0 \leq t \leq T}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dS_t^x = S_t^x (b(S_t^x)dt + \sigma(S_t^x)dW_t) \\ S_0^x = x, \end{cases} \quad \text{avec } x \in [0, +\infty[.$$

où  $b : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée, admettant des dérivées premières bornées. Grâce à la régularité de la fonction de pay-off, on obtient un développement limité de la fonction de valeur de l'option américaine associée  $P_f$  au voisinage de la maturité dans le Théorème 7.1. Nous définissons alors un prix critique  $s_f(t)$  pour cette option. En utilisant le Théorème 7.1, nous prouvons que le prix critique admet une limite  $s_f(T)$  lorsque  $t$  tend vers  $T$  tout en donnant un équivalent de  $s_f(T) - s_f(t)$  dans la section 7.2 (cf. Théorème 7.2). Le Théorème 7.2, nous permettra d'en déduire facilement le comportement du prix critique d'une option de vente dans le cas  $r < \delta$  (cf. Corollaire 5.2).

## 7.1 Fonction de valeur d'une option américaine près de sa maturité

Le résultat suivant est une adaptation du Théorème 1 de LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003).

**Théorème 7.1** *Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\eta > 0$  et  $h : [0, \eta] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant les conditions suivantes:*

1.  *$h$  est continue sur  $[0, \eta] \times \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in [0, \eta]$ , la fonction  $x \rightarrow h(t, x)$  est à croissance polynômiale sur  $\mathbb{R}$ .*
2.  *$h$  admet des dérivées continues  $\frac{\partial h}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  au voisinage de  $(0, x_0)$  et la fonction*

$$\mathcal{M}h(t, x) = \frac{\partial h}{\partial t} + b(x)x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

*est différentiable au voisinage de  $(0, x_0)$ .*

Soit  $\theta \in [0, \eta]$ . Pour  $y \in \mathbb{R}$ , on définit  $x(\theta) = x_0 e^{y\sqrt{\theta}}$ .

Pour  $\theta$  tendant vers 0, on a alors:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \theta}} \mathbb{E}[h(\tau, S_\tau^{x(\theta)})] &= h(0, x) \\ &+ \theta \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, 1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \mathcal{M}h(0, x(\theta)) + \sqrt{\theta} x \sigma(x(\theta)) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, x(\theta)) W_s ds \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

**Remarque:** Dans le cas d'une option de vente, on a  $h(t, x) = e^{-rt} (K - x)^+$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$  au voisinage de  $(0, x_0)$ . La seconde condition ne nécessite donc pas d'hypothèse de régularité supplémentaire sur  $\sigma$ .

*Démonstration du Théorème 7.1:*

Soit  $\theta \in [0, \eta]$  et  $y \in \mathbb{R}$ . On introduit le mouvement Brownien suivant:

$$\left( \tilde{W}_t \right)_{0 \leq t \leq 1} = \left( \frac{W_{\theta t}}{\sqrt{\theta}} \right)_{0 \leq t \leq 1}.$$

On remarque alors que:

$$\sup_{\tau \in \tilde{\mathcal{T}}_{0,\theta}} \mathbb{E}[h(\tau, S_\tau^{x(\theta)})] = \sup_{\tau \in \tilde{\mathcal{T}}_{0,1}} \mathbb{E}[h(\theta\tau, S_{\theta\tau}^{x(\theta)})],$$

où  $\tilde{\mathcal{T}}_{0,1}$  est l'ensemble des temps d'arrêt associés à la filtration de  $\tilde{W}$  et à valeurs dans  $[0,1]$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} dS_{\theta u} &= S_{\theta u} (\theta b(S_{\theta u}) + \sigma(S_{\theta u}) dW_{\theta u}) \\ &= S_{\theta u} \left( \theta b(S_{\theta u}) + \sqrt{\theta} \sigma(S_{\theta u}) d\tilde{W}_u \right). \end{aligned}$$

Dans la suite, nous identifierons  $W$  et  $\tilde{W}$  par abus de notations.

D'après les hypothèses vérifiées par  $h$ , on sait qu'il existe  $0 < \varepsilon < \eta$  tel que  $h \in \mathcal{C}^{1,2}([0,\varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$  et  $\mathcal{M}h$  soit différentiable sur  $[0,\varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ .

On introduit le temps d'arrêt suivant:

$$\mu_\theta = \inf \left\{ u \geq 0 : |S_{\theta u}^{x(\theta)} - x_0| > \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Soit  $\tau \in \tilde{\mathcal{T}}_{0,1}$  et posons  $\tau_\theta = \tau \wedge \mu_\theta$ . On a alors

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ h(\theta\tau, S_{\theta\tau}^{x(\theta)}) \right] - \mathbb{E} \left[ h(\theta\tau_\theta, S_{\theta\tau_\theta}^{x(\theta)}) \right] \right| &= \left| \mathbb{E} \left[ \left( h(\theta\tau, S_{\theta\tau}^{x(\theta)}) - h(\theta\mu_\theta, S_{\theta\mu_\theta}^{x(\theta)}) \right) \mathbb{1}_{\{\mu_\theta \leq \tau\}} \right] \right| \\ &\leq 2\mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0,1]} |h(\theta u, S_{\theta u}^{x(\theta)})| \mathbb{1}_{\{\mu_\theta \leq \tau\}} \right] \\ &\leq 2\sqrt{\mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0,1]} |h(\theta u, S_{\theta u}^{x(\theta)})| \right] \mathbb{P}(\mu_\theta \leq 1)}. \end{aligned}$$

Or la première condition portant sur  $h$  implique que

$$\mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0,1]} |h(\theta u, S_{\theta u}^{x(\theta)})| \right] < +\infty,$$

uniformément par rapport à  $\theta$  et  $x_0$  si celui-ci est à valeur dans un compact. De plus l'inégalité de Markov et le lemme 2.1 nous permettent de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\mu_\theta \leq 1) = o(\theta^n).$$

On a donc

$$\mathbb{E} \left[ h(\theta\tau, S_{\theta\tau}^{x(\theta)}) \right] = \mathbb{E} \left[ h(\theta\tau_\theta, S_{\theta\tau_\theta}^{x(\theta)}) \right] + o(\theta^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous pouvons alors appliquer la formule d'Itô au processus  $\left( h(\theta u, S_{\theta u}^{x(\theta)}) \right)_{0 \leq u \leq 1}$  entre 0 et  $\tau_\theta$ . On obtient

$$\mathbb{E} \left[ h(\theta\tau_\theta, S_{\theta\tau_\theta}^{x(\theta)}) \right] = h(0, x(\theta)) + \theta \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \mathcal{M}h(\theta u, S_{\theta u}^{x(\theta)}) du \right].$$

Or  $\mathcal{M}h$  est différentiable sur  $[0, \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ , donc on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ h(\theta\tau_\theta, S_{\theta\tau_\theta}^{x(\theta)}) \right] &= h(0, x(\theta)) + \theta \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \mathcal{M}h(0, x(\theta)) du \right] \\ &\quad + \theta \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left( S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta) \right) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, x(\theta)) du \right] \\ &\quad + \theta \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \theta u \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial t}(0, x(\theta)) du \right] \\ &\quad + \theta R(\theta), \end{aligned}$$

avec

$$R(\theta) = \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \|S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta), \theta u\| R \left( S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta), \theta u \right) du \right] \quad \text{où} \quad \lim_{(x,t) \rightarrow 0} R(x,t) = 0.$$

Il est facile de voir que

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \theta u \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial t}(0, x(\theta)) du \right] = o(\sqrt{\theta}),$$

uniformément par rapport à  $\tau$ . Montrons qu'il en est de même pour  $R(\theta)$ . On sait que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|e^x - 1| \leq \frac{|x|}{2}e^{|x|}$ , donc si l'on pose  $X_{\theta u}^{x(\theta)} = \ln \left( S_{\theta u}^{x(\theta)} \right)$ , on a

$$|R(\theta)| \leq x(\theta) \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left\| \frac{X_{\theta u}^{x(\theta)}}{2} e^{|X_{\theta u}^{x(\theta)}|}, \theta u \right\| |R(S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta), \theta u)| du \right].$$

Or on a

$$\begin{aligned} |X_{\theta u}^{x(\theta)}| &= \left| \int_0^{\theta u} \left( b(S_v^{x(\theta)}) - \frac{\sigma(S_v^{x(\theta)})^2}{2} \right) dv + \int_0^{\theta u} \sigma(S_v^{x(\theta)}) dW_v \right| \\ &\leq (\|b\|_\infty + M)\theta + \sqrt{\theta} \left| \int_0^u \sigma(S_v^{x(\theta)}) dW_v \right|. \end{aligned}$$

Ainsi, comme  $\mathbb{E} \left[ \sup_{u \in [0,1]} e^{|X_{\theta u}^{x(\theta)}|} \right]$  est borné uniformément par rapport à  $\theta$ , il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $t$  et de  $x_0$  telle que:

$$\begin{aligned} |R(\theta)| &= \frac{x_0}{2} \sqrt{\theta} \int_0^1 \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^u \sigma(S_v^{x(\theta)}) dW_v \right| e^{|X_{\theta u}^{x(\theta)}|} |R(S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta), \theta u)| \right] du + o(\sqrt{\theta}) \\ &\leq C x_0 \sqrt{\theta} \int_0^1 \sqrt{\mathbb{E} \left[ \left| \int_0^u \sigma(S_v^{x(\theta)}) dW_v \right|^2 \right]} |R(S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta), \theta u)| du + o(\sqrt{\theta}) \\ &= o(\sqrt{\theta}), \end{aligned}$$

car grâce au Théorème de convergence dominée, l'intégrale de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque  $\theta$  tend vers 0.

L'étape suivante consiste à montrer que:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left( S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta) \right) du \right] = \sqrt{\theta} x(\theta) \sigma(x(\theta)) \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} x(\theta) \sigma(x(\theta)) W_u du \right] + o(\sqrt{\theta}).$$

Avec la notation précédente, on a

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left( S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta) \right) du \right] = x(\theta) \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left( e^{X_{\theta u}^{x(\theta)}} - 1 \right) du \right].$$

Or on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left( e^{X_{\theta u}^{x(\theta)}} - 1 - X_{\theta u}^{x(\theta)} \right) du \right] \right| &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \mathbb{E} \left[ \left( X_{\theta u}^{x(\theta)} \right)^2 e^{X_{\theta u}^{x(\theta)}} \right] du \\ &= o(\sqrt{\theta}). \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left( S_{\theta u}^{x(\theta)} - x(\theta) \right) du \right] &= x(\theta) \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} X_{\theta u}^{x(\theta)} du \right] + o(\sqrt{\theta}) \\ &= x(\theta) \sqrt{\theta} \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \int_0^u \sigma \left( S_{\theta v}^{x(\theta)} \right) dW_v du \right] + o(\sqrt{\theta}). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \int_0^u \sigma \left( S_{\theta v}^{x(\theta)} \right) dW_v du \right] - \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \sigma(x(\theta)) W_u du \right] \right| &\leq \\ \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left| \int_0^u \left( \sigma \left( S_{\theta v}^{x(\theta)} \right) - \sigma(x(\theta)) \right) dW_v \right| du \right], \end{aligned}$$

et l'inégalité de B urh older-Davis-Gundy nous donne alors

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \left| \int_0^u \left( \sigma \left( S_{\theta v}^{x(\theta)} \right) - \sigma(x(\theta)) \right) dW_v \right| du \right] \\ &\leq \int_0^1 \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^u \left( \sigma \left( S_{\theta v}^{x(\theta)} \right) - \sigma(x(\theta)) \right)^2 dv \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq o(1). \end{aligned}$$

Finalement, on a prouvée que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ h(\theta \tau_\theta, S_{\theta \tau_\theta}^{x(\theta)}) \right] &= h(0, x(\theta)) + \theta \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} \mathcal{M}h(0, x(\theta)) du \right] \\ &\quad + \theta^{\frac{3}{2}} x(\theta) \sigma(x(\theta)) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, x(\theta)) \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau_\theta} W_u du \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\mathbb{P}(\mu_\theta < 1) = o(\theta^{\frac{3}{2}})$ , on conclut que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ h(\theta\tau_\theta, S_{\theta\tau_\theta}^{x(\theta)}) \right] &= h(0, x(\theta)) \\ &+ \theta \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \mathcal{M}h(0, x(\theta)) + \sqrt{\theta} x(\theta) \sigma(x(\theta)) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, x(\theta)) W_u du \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

Comme le terme  $o(\theta^{\frac{3}{2}})$  est contrôlé indépendamment de  $\tau$ , on obtient le résultat.  $\diamond$

## 7.2 Comportement du prix critique près de l'échéance

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  satisfaisant les hypothèses suivantes:

- $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $f(0) > 0$ .
- Il existe  $K > 0$  tel que  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[0, K[$ .
- $f$  est à croissance polynômiale et il existe  $a > 0$  telle que, au sens des distributions, on a  $-a \leq f''$ .

$f(S_t)$  sera le pay-off à la date  $t$  de notre option. Si l'on pose  $f(x) = (K - x)^+$ , on revient à une option de vente et il est facile de voir que  $f$  satisfait ces hypothèses.

Nous rappelons la définition de la fonction de valeur d'une option américaine de fonction de pay-off  $f$  et de maturité  $T$ . Pour  $(t, x) \in [0, T] \times [0, +\infty[$ , on a:

$$P_f(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)].$$

On définit maintenant le prix critique dans ce contexte par:

$$s_f(t) = \inf\{x \in [0, K[: \quad P_f(t, x) > f(x)\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = -\infty$ .

Finalement, on pose  $s_0 = \inf\{x \in [0, K[: \quad \mathcal{M}h(0, x) \geq 0\}$ , où  $h(t, x) = e^{-rt} f(x)$  et l'on

suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:

$$H_4 : s_0 < K.$$

$$H_5 : \mathcal{M}h \text{ est différentiable au voisinage de } (0, s_0) \text{ et } \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, s_0) > 0.$$

Remarque: Pour  $(t, x) \in [0, T] \times [0, K[$ , on a

$$\mathcal{M}h(t, x) = e^{-rt} \left( -rf(x) + xb(x)f'(x) + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} f''(x) \right).$$

L'hypothèse  $H_4$  implique un changement de signe de  $\mathcal{M}h$  dans une région où  $h$  est régulière. Nous verrons que l'hypothèse  $H_5$  est cruciale pour obtenir le lemme 7.2.

Commençons par rappeler le lemme 1 de LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003) qui nous permettra de relier le développement limité de la fonction de valeur à celui du prix critique. En effet, en développant  $P$  le long d'une parabole grâce au Théorème 7.1, nous nous ramènerons à l'étude d'un problème d'arrêt optimal indépendant du temps dont la frontière libre associée est donnée par le résultat suivant.

**Lemme 7.1** *Pour  $y \in \mathbb{R}$ , on pose*

$$\phi(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \int_0^\tau (y + W_s) ds.$$

*Il existe  $y^* \in ]-1, 0[$  tel que:*

$$\forall y \leq y^*, \phi(y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y > y^*, \phi(y) > 0.$$

La première conséquence de ce lemme appliqué avec le Théorème 7.1 est le résultat suivant:

**Lemme 7.2** *Pour  $t \in [0, T[$ , on a  $s_f(t) < s_0$ . De plus,*

$$\liminf_{t \rightarrow T} \frac{s_0 - s_f(t)}{\sigma(T, s_0) s_0 \sqrt{T - t}} \geq -y^*.$$

*Démonstration du lemme 7.2:* Soient  $t \in [0, T[$ ,  $y > \sigma(T, s_0)y^*$  et  $\theta = T - t$ .

En appliquant le Théorème 7.1 avec  $h(t, x) = e^{-rt}f(x)$  et  $x_0 = s_0$ , on a:

$$P_f(t, s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) = f(s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) + \theta \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \mathcal{M}h(0, s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) + \sqrt{\theta} s_0 e^{y\sqrt{\theta}} \sigma(s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) W_s ds \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

Il est alors facile de voir que

$$P_f(t, s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) = f(s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) + \theta^{\frac{3}{2}} s_0 e^{rT} \sigma(s_0) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, s_0) \phi\left(\frac{y}{\sigma(s_0)}\right) + o(\theta^{\frac{3}{2}}).$$

Ainsi, pour  $y > \sigma(s_0)y^*$  et  $\theta$  suffisamment petit, l'hypothèse  $H_5$  implique:

$$P_f(t, s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) > f(s_0 e^{y\sqrt{\theta}}) \quad \text{et donc} \quad s_0 e^{y\sqrt{\theta}} \geq s_f(t).$$

En développant alors l'exponentielle, on obtient

$$\liminf_{\theta \rightarrow 0} \frac{s_0 - s_f(t)}{\sigma(s_0) s_0 \sqrt{\theta}} \geq -\frac{y}{\sigma(s_0)}.$$

Finalement, en faisant tendre  $y$  vers  $\sigma(s_0)y^*$ , on a:

$$\liminf_{\theta \rightarrow 0} \frac{s_0 - s_f(t)}{\sigma(s_0) s_0 \sqrt{\theta}} \geq -y^*.$$

En particulier, pour tout  $t \in [0, T[$ , on a  $s_0 \geq s_f(t)$  car  $s_f$  est croissant.  $\diamond$

Remarque: Le Théorème 7.1 et le lemme 7.2 peuvent être adaptés au cas d'une volatilité dépendant du temps au moins  $\frac{1}{2}$ -höldérienne par rapport au temps. Cependant, la décroissance par rapport au temps de la fonction de valeur  $P_f$  se révèle essentielle pour les deux lemmes suivants.

En effet, il nous reste à prouver que  $\limsup_{t \rightarrow T} (s_0 - s_f(t)) / \sigma(s_0) s_0 \sqrt{T - t}$  est ma-

jurée par  $-y^*$ . Or nous nous appuyerons sur les deux résultats suivants.

**Lemme 7.3** *Pour  $t \in [0, T[$  et  $x \in ]s_f(t), s_0[$ , on a :*

$$P_f(t, x) - f(x) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_f}{\partial x}(t, x) - f'(x) > 0.$$

*Démonstration du lemme 7.3:* Soient  $0 \leq t < T$  et

$$x_0 = \inf\{x \in ]s_f(t), K[: \quad P_f(t, x) - f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial P_f}{\partial x}(t, x) - f'(x) \leq 0\}.$$

Par l'absurde, supposons que  $x_0 < s_0$ . On sait que  $P_f$  est décroissant par rapport au temps, donc l'inéquation variationnelle vérifiée par  $P_f$  entraîne que, sur l'ouvert  $]s_f(t), s_0[$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2}(t, x) - f''(x) &\geq \frac{2}{\sigma(x)^2 x^2} [rP_f(t, x) - b(x)x \frac{\partial P_f}{\partial x}(t, x) - \frac{\sigma(t, x)^2 x^2}{2} f''(x)] \\ &= \frac{2}{\sigma(x)^2 x^2} \left[ -\mathcal{M}h(0, x) + r(P_f(t, x) - f(x)) - b(x)x \frac{\partial P_f - f}{\partial x}(t, x) \right] \\ &\geq -\frac{2}{\sigma(x)^2 x^2} \left( \mathcal{M}h(0, x) - b(x)x \frac{\partial P_f - f}{\partial x}(t, x) \right). \end{aligned}$$

La propriété de "smooth fit", nous donne alors

$$\lim_{x \rightarrow s_f(t)} \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2}(t, x) - f''(x) = -\frac{2}{\sigma(s_f(t))^2 s_f(t)^2} \mathcal{M}h(0, s_f(t)) > 0.$$

En effet, par définition de  $s_0$ ,  $\mathcal{M}h(0, x) < 0$  sur  $[0, s_0[$ . Ainsi, on montre que  $s_f(t) < x_0$ . On a alors  $P_f(t, x_0) - f(x_0) > 0$  car  $x \rightarrow P_f(t, x) - f(x)$  est strictement croissante sur  $]s_f(t), x_0[$ . Cela implique donc que  $\frac{\partial P_f}{\partial x}(t, x_0) - f'(x_0) = 0$ . L'inéquation variationnelle entraîne alors que

$$\frac{\partial^2 P_f - f}{\partial x^2}(t, x_0) \geq -\frac{2}{\sigma(x_0)^2 x_0^2} \mathcal{M}h(0, x_0) > 0,$$

car on a supposé que  $x_0 < s_0$ . Il existe donc  $h > 0$  tel que pour tout  $z \in ]x_0 - h, x_0[$ , on a :

$$0 \leq \frac{\partial P_f}{\partial x}(t, z) - f'(z) < 0.$$

C'est absurde, donc on a bien  $x_0 \geq s_0$ .  $\diamond$

**Proposition 7.1** *Sous les hypothèses  $H_4$  et  $H_5$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} s_f(t) = s_0.$$

*Démonstration de la Proposition 7.1:* D'après le lemme 7.2, nous n'avons qu'à démontrer que  $s_0 \leq \liminf_{t \rightarrow T} s_f(t)$ .

Or  $s_f$  est croissant donc admet une limite lorsque  $t$  tend vers  $T$ . Par l'absurde, nous supposons que  $s_0 > \lim_{t \rightarrow T} s_f(t)$ . On introduit alors  $x_1 \in ]\lim_{t \rightarrow T} s_f(t), s_0[$ . Comme  $s_f$  est croissant et  $x_1 > \lim_{t \rightarrow T} s_f(t)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t \in ]T - \varepsilon, T[$ ,  $s_f(t) < x_1$ . Or on sait, d'après le lemme 7.3, que l'on a  $P_f(t, x) > f(x)$  sur l'ouvert  $]T - \varepsilon, T[ \times ]x_1, s_0[$ , donc l'inéquation variationnelle nous donne :

$$-rP_f(t, x) + b(x)x \frac{\partial P_f}{\partial x}(t, x) + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2}(t, x) \geq 0,$$

sur l'ouvert  $]T - \varepsilon, T[ \times ]x_1, s_0[$ . En faisant tendre  $t$  vers  $T$ , on obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$-rf(x) + b(x)xf'(x) + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} f''(x) \geq 0.$$

D'autre part, sur  $]x_1, s_0[$ , on a

$$0 > \mathcal{M}h(0, x) = -rf(x) + b(x)xf'(x) + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} f''(x),$$

ce qui est absurde.  $\diamond$

**Théorème 7.2** *Sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_4$  et  $H_5$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{s_0 - s_f(t)}{s_0 \sigma(s_0) \sqrt{T-t}} = -y^*.$$

*Démonstration du Théorème 7.2:*

D'après le lemme 7.2, il ne nous reste qu'à prouver que:  $\limsup_{t \rightarrow T} \frac{s_0 - s_f(t)}{\sigma(s_0) s_0 \sqrt{T-t}} \leq -y^*$ .

Soit  $0 \leq t < T$  et  $\theta = T - t$ . Par l'absurde, supposons qu'il existe  $z < \sigma(s_0)y^*$  tel que  $s_f(t) < s_0 e^{z\sqrt{\theta}}$ .

D'après la Proposition 7.1, on a  $\lim_{u \rightarrow T} s_f(u) = s_0$  donc on peut définir le réel suivant:

$$\theta_1 = \sup \left\{ u \in [0, \theta] : s_f(T - u) = s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}} \right\}.$$

On a  $0 \leq \theta_1 < \theta$  et pour  $u \in ]\theta_1, \theta[$ , on a  $s_f(T - u) < s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}}$ . Cela nous permet de définir le domaine suivant:

$$D = \left\{ (u, x) \in ]\theta_1, \theta[ \times [0, +\infty[ : s_f(T - u) < x < s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}} \right\},$$

dont la frontière parabolique est

$$\delta_p D = \left\{ (u, x) \in ]\theta_1, \theta[ \times [0, +\infty[ : x = s_f(T - u) \text{ ou } x = s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}} \text{ ou } u = 0 \right\}.$$

Enfin, nous introduisons la fonction suivante, définie sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $D$ :

$$\beta(u, x) = \gamma \left[ \left( x - s_0 e^{z\sqrt{u}} \right)^+ \right]^3,$$

où  $\gamma$  est une constante strictement positive que l'on précisera dans la suite.

Pour  $(u, x) \in [0, T] \times [0, +\infty[$ , on pose  $V(u, x) = P_f(T - u, x)$ . L'idée de la démonstration est alors d'appliquer le principe du maximum présenté dans la partie I sur le domaine  $D$

à la fonction  $V - f - \beta$  avec l'opérateur  $\tilde{\mathcal{L}}$  où  $\tilde{\mathcal{L}}$  est défini par

$$\tilde{\mathcal{L}}V(u, x) = \frac{\partial V}{\partial t} - \left( \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + xb(x) \frac{\partial V}{\partial x} - rV \right).$$

Grâce à ce principe du maximum, nous allons démontrer que  $V - f - \beta \leq 0$  sur  $D$ . On commence par montrer que  $V - f - \beta \leq 0$  sur  $\delta_p D$ .

On remarque en premier lieu que

$$[V - f - \beta](0, x) = -\beta(0, x) \leq 0 \quad \text{pour tout } x \in [0, +\infty[.$$

On note ensuite que, pour  $\theta_1 \leq u \leq \theta$ , on a

$$(V - f - \beta)(u, s_f(T - u)) = -\beta(u, s_f(T - u)) \leq 0.$$

De plus, la démonstration du lemme 7.2, nous permet d'affirmer que

$$(V - f)(u, s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}}) = o\left(u^{\frac{3}{2}}\right),$$

car  $\phi(\sigma(s_0)y^*) = 0$ . On obtient alors l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} (V - f - \beta)\left(u, s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}}\right) &\leq o\left(u^{\frac{3}{2}}\right) - \beta\left(u, s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}}\right) \\ &\leq -\gamma s_0^3 \left(e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}} - e^{z\sqrt{u}}\right)^3 + o\left(u^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\leq -\gamma s_0^3 (\sigma(s_0)y^* - z)^3 u^{\frac{3}{2}} + o\left(u^{\frac{3}{2}}\right) \\ &\leq 0 \quad \text{pour } \theta \text{ suffisamment petit.} \end{aligned}$$

On a montré que  $V - f - \beta \leq 0$  sur  $\delta_p D$ . Il nous reste à vérifier que  $\tilde{\mathcal{L}}[V - f - \beta](u, x) \leq 0$  sur  $D$ .

Remarquons que pour  $x \leq s_0 e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}}$  et  $p > 0$ , on a

$$\left[ \left( x - s_0 e^{z\sqrt{u}} \right)^+ \right]^p \leq s_0^p (\sigma(s_0)y^* - z)^p u^{\frac{p}{2}} + o\left(u^{\frac{p}{2}}\right).$$

Ainsi, comme  $\beta$  est croissante par rapport au temps, on obtient, sur  $D$ :

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathcal{L}}\beta(u,x) &\leq 3\sigma(x)^2 x^2 \gamma s_0 (\sigma(s_0)y^* - z) \sqrt{u} + o(\sqrt{u}) \\ &\leq 3M^2 \gamma s_0 (\sigma(s_0)y^* - z) \sqrt{u} + o(\sqrt{u}). \end{aligned}$$

D'autre part, le lemme 7.3 nous indique  $V > f$  sur  $D$ , donc l'inéquation variationnelle vérifiée par  $P_f$  nous donne

$$\tilde{\mathcal{L}}(V - f) = -\tilde{\mathcal{L}}f = \mathcal{M}h(0,x) \quad \text{sur } D.$$

Or, pour  $(u,x) \in D$ , on a

$$s_0 - s_f(T - u) > s_0 - x > s_0 \left( 1 - e^{\sigma(s_0)y^* \sqrt{u}} \right) = -\sigma(s_0)y^* s_0 \sqrt{u} + o(\sqrt{u}),$$

donc il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour  $\theta$  suffisamment petit et pour tout  $(u,x) \in D$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}h(0,x) &\leq \mathcal{M}h(0,s_0) - (s_0 - x) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0,s_0) + o(s_0 - x) \\ &\leq -(s_0 - x) \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0,s_0) + o(s_0 - x) \\ &\leq -C(s_0 - x) \\ &\leq C\sigma(s_0)y^* s_0 \sqrt{u} + o(\sqrt{u}). \end{aligned}$$

Finalement, on a montré que pour  $(u, x) \in D$ , on a

$$\tilde{\mathcal{L}}(V - f - \beta)(u, x) \leq (C\sigma(s_0)y^*s_0 + 3M^2s_0^3(\sigma(s_0)y^* - z)\gamma)\sqrt{u} + o(\sqrt{u}).$$

On choisit alors  $\gamma$  tel que

$$0 < \gamma < \frac{-C\sigma(s_0)y^*}{3M^2s_0^2(\sigma(s_0)y^* - z)},$$

et l'on a  $\tilde{\mathcal{L}}(V - f - \beta) \leq 0$  sur  $D$ . Le principe du maximum, nous permet alors d'en déduire que  $V - f - \beta \leq 0$  sur  $D$ . Cependant, c'est impossible car pour  $\theta_1 < u < \theta$  et  $s_f(T, u) < x < s_0e^{z\sqrt{u}}$ , cela impliquerait que

$$0 > (V - f - \beta)(u, x) = P_f(T - u, x) - f(x) \geq 0.$$

En conclusion, on a prouvé que

$$s_f(t) \geq s_0e^{z\sqrt{T-t}} \quad \text{pour tout } z < \sigma(s_0)y^* \text{ et } t \text{ suffisamment proche de } T.$$

En développant l'exponentielle et en faisant tendre  $t$  vers  $T$ , on obtient l'inégalité suivante pour tout  $z < \sigma(s_0)y^*$ :

$$\limsup_{t \rightarrow T} \frac{s_0 - s_f(t)}{s_0\sqrt{\theta}} \leq -z.$$

On achève la démonstration en faisant tendre  $z$  vers  $\sigma(s_0)y^*$ .  $\diamond$

**Corollaire 7.1** *Dans le cas d'une option de vente, si  $b(x) = r - \delta$ ,  $0 < r < \delta$  et  $\sigma$  vérifie les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{rK - \delta s(t)}{\sigma(rK/\delta)rK\sqrt{T-t}} = -y^*.$$

*Démonstration du Corollaire 7.1:* Supposons que  $f(x) = (K - x)^+$ ,  $b(x) = r - \delta$  et  $0 < r < \delta$ . Il est facile de vérifier que

$$s_0 = rK/\delta < K \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{M}h}{\partial x}(0, s_0) = \delta > 0.$$

Par conséquent, le Théorème 7.2, nous donne:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{rK - \delta s(t)}{\sigma(rK/\delta)rK\sqrt{T-t}} = -y^*. \quad \diamond$$

Généralement, les fonctions de pay-off utilisées en finance ne sont pas des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ , certaines sont même discontinues. Cependant, elles ne présentent qu'un nombre fini de points d'irrégularité et, selon les paramètres, l'équation  $\mathcal{M}h(0, x) = 0$  peut avoir une solution plus petite que le premier point d'irrégularité. Cette solution, lorsqu'elle existe est alors la limite du prix critique et la vitesse de convergence est parabolique. Si elle n'existe pas, nous avons démontré, dans le cas particulier d'une option de vente, que la limite est le plus petit point de discontinuité de la dérivée première de la fonction de pay-off et qu'un facteur logarithmique supplémentaire apparaît dans la vitesse de convergence. Nous ne sommes pas capables de déterminer si ce facteur apparaît dès que la fonction de pay-off est continue mais non différentiable et le cas de fonctions pay-off discontinues, comme celles des options barrières, reste à être étudié.

## 8 Modèles à volatilité locale

Dans cette section, nous supposons que  $\sigma$  est une fonction de  $[0, T] \times [0, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui satisfait les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ . Nous rappelons également que la fonction de valeur  $P$  dépend de la volatilité  $\sigma$  et nous noterons  $P^\sigma$  la fonction de valeur et  $s^\sigma$  le prix critique associé.

Nous donnons maintenant la démonstration des Théorèmes 5.1 et 5.2.

Pour prouver les Théorèmes 5.1 et 5.2, nous ne pouvons pas procéder comme dans la section précédente car rien ne nous assure la décroissance de la fonction de valeur par rapport au temps. Heureusement le pay-off d'une option de vente est convexe et nous disposons d'un autre outil: la croissance de  $P^\sigma$  par rapport à  $\sigma$  (cf. EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998)).

*Démonstration du Théorème 5.1:* Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après l'hypothèse  $H_3$ ,  $\sigma$  est uniformément continue par rapport au temps, donc il existe  $\eta > 0$  tel que,

$$\forall (t,x) \in [T - \eta, T] \times [0, +\infty[, \quad \sigma(T,x) - \varepsilon \leq \sigma(t,x) \leq \sigma(T,x) + \varepsilon.$$

Pour  $x \in [0, +\infty[$ , on pose  $\sigma_\varepsilon^m(x) = \sigma(T,x) - \varepsilon$  et  $\bar{\sigma}_\varepsilon^M(x) = \sigma(T,x) + \varepsilon$ .

D'après EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998), nous savons que  $P^\sigma$  croît avec la volatilité donc on a

$$P^{\sigma_\varepsilon^m} \leq P^\sigma \leq P^{\bar{\sigma}_\varepsilon^M} \quad \text{sur} \quad [T - \eta, T] \times [0, +\infty[,$$

puis on obtient

$$s^{\bar{\sigma}_\varepsilon^M} \leq s^\sigma \leq s^{\sigma_\varepsilon^m} \quad \text{sur} \quad [T - \eta, T].$$

Pour  $t \in [T - \eta, T]$ , on a donc l'encadrement suivant:

$$\frac{K - s^{\sigma_\varepsilon^m}(t)}{K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} \leq \frac{K - s^\sigma(t)}{K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} \leq \frac{K - s^{\bar{\sigma}_\varepsilon^M}(t)}{K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}}.$$

Or le Théorème 6.3, nous permet d'affirmer qu'il existe un nombre  $C > 0$  égal à 1 si  $\delta^+ < r$  et égal à  $\sqrt{2}$  si  $0 < \delta = r$  tel que

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s^{\sigma_\varepsilon^m}(t)}{K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = C\sigma_\varepsilon^m(K) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s^{\sigma_\varepsilon^M}(t)}{K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = C\sigma_\varepsilon^M(K).$$

On obtient alors

$$C\sigma_\varepsilon^m(K) \leq \liminf_{t \rightarrow T} \frac{K - s^\sigma(t)}{\sigma(K)K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} \leq \limsup_{t \rightarrow T} \frac{K - s^\sigma(t)}{K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} \leq C\sigma_\varepsilon^M(K).$$

Finalement, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on a le résultat suivant:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{K - s^\sigma(t)}{\sigma(T,K)K \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta < r \text{ et } 0 < r, \\ \sqrt{2} & \text{si } 0 < \delta = r. \end{cases} \quad \diamond$$

*Démonstration du Théorème 5.2:* Nous pouvons reprendre les arguments de la démonstration précédente car quelque soit la volatilité  $\sigma$ , si  $r < \delta$ , on a  $\lim_{t \rightarrow T} s^\sigma(t) = rK/\delta$ .  $\diamond$



## Troisième partie

# Frontière libre près de l'échéance d'un plan de retraite

## 9 Introduction

Dans cette partie, nous examinons un problème différent, tiré de l'étude de la valeur financière d'un plan de retraite. On considère toujours un problème d'arrêt optimal mais celui-ci fait apparaître un terme supplémentaire dans l'inéquation variationnelle associée. De plus, on considère des fonctions de pay-off dépendantes du temps. Nous montrerons que les résultats de la partie précédente restent tout de même valides.

Pour certains plans de retraite, Shen et Sherris (cf. SHERRIS M. (1993), SHERRIS M. (1995) et SHERRIS M., SHEN W. (1999)) ont développé un modèle pour calculer la valeur financière du capital touché au moment du départ à la retraite. Ils considèrent un plan de retraite incluant l'option d'une retraite anticipée et distribuant un capital basé sur le salaire du souscripteur à l'instant de son départ. Si l'on note  $S_t$  le salaire d'un membre de ce fond de pension à l'instant  $t$ , alors le montant que recevra ce membre au moment de son départ à la date  $t$ , sera  $\psi(t, S_t)$ . En supposant que  $S$  est un processus de Markov, solution d'une équation différentielle stochastique, Shen et Sherris ont réussi à caractériser la valeur financière de ce contrat comme la solution d'une inéquation variationnelle. Friedman and Shen (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)) ont alors étudié l'existence et l'unicité de la solution de cette inéquation variationnelle et se sont notamment intéressés à la forme de la frontière libre associée à cette inéquation. Plus particulièrement, ils ont donné son comportement près de l'échéance du contrat. Ils ont trouvé que la frontière libre tendait vers une limite avec une vitesse parabolique ou linéaire se-

lon les paramètres (cf. Théorèmes 7.1, 7.2 et 8.1 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)). Cependant, la valeur financière de ce contrat peut également être caractérisée comme la solution d'un problème de temps d'arrêt optimal similaire au problème de valorisation d'une option américaine.

Dans cette partie, nous démontrons que la frontière libre a le même comportement au voisinage de l'échéance du contrat que celle d'une option américaine. Si la limite de la frontière est un point de régularité de  $\psi$  alors la vitesse de convergence sera parabolique sinon un facteur logarithmique apparaît et cela contredit les Théorèmes 7.2 et 8.1 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002). Cette partie est une version détaillée d'un article à paraître dans *Finance and Stochastics* (cf. CHEVALIER E. (2005)).

Pour clarifier notre problème, nous commençons par rappeler le cadre de travail de Friedman et Shen (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)). Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , nous supposons que le processus de salaire  $(S_t^x)_{0 \leq t \leq T}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$\begin{cases} dS_t^x = S_t^x(b(S_t^x)dt + \sigma(S_t^x)dW_t) \\ S_0^x = x, \end{cases}$$

où  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien standard sur  $\mathbb{R}$  de filtration associée  $\mathbb{F}$ .  $b$  et  $\sigma$  sont des fonctions Lipschitziennes de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Nous supposerons aussi que  $b$  est strictement positif, borné et qu'il existe  $0 < m < M$  telles que:

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad m \leq |\sigma(x)| \leq M.$$

Soit  $\psi : [0, T] \times [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , la fonction représentant le capital versé à un membre du fond de pension au moment de son départ à la retraite. Contrairement aux

fonctions de pay-off d'options américaines étudiées dans la partie précédente, nous supposons donc que  $\psi$  dépend du temps. De plus, par hypothèse,  $\psi(t, \cdot)$  est proportionnelle au salaire à la date  $t$  et garantit un minimum. Nous poserons donc  $\psi(t, x) = g(t)f(x)$  sur  $[0, T] \times [0, +\infty[$ , où  $f(x) = \max(A_0, ax)$  avec  $a, A_0 > 0$  et où  $g$  est une fonction continue de  $[0, T]$  dans  $[0, +\infty[$ . Enfin, nous supposons que  $g$  est strictement positive et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de l'échéance du contrat.

Introduisons maintenant une fonction  $B$  strictement croissante, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et à croissance polynômiale sur  $\mathbb{R}^+$ . On suppose que  $B$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  et que  $B(0) = 0$ .  $B$  est un terme qui représente ce que coûte au fond de pension la perte de l'un de ses membres pour des raisons autres que son départ à la retraite.

Nous sommes alors capables de définir la valeur financière  $V$  de ce contrat comme le montant des provisions nécessaires au fond de pension pour faire face à ses engagements. Nous noterons  $\rho$  le taux d'intérêt du marché que nous supposons constant et strictement positif et nous avons alors:

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbb{E} \left[ \int_t^\tau e^{-\rho(s-t)} B(S_s) ds + e^{-\rho(\tau-t)} \psi(\tau, S_\tau) \mid S_t = x \right] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho s} B(S_s^x) ds + e^{-\rho\tau} \psi(t + \tau, S_\tau^x) \right], \end{aligned}$$

où  $\mathcal{T}_{t, T}$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[t, T]$ .

Rappelons maintenant l'inéquation variationnelle satisfaite par  $V$  (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002), SHERRIS M. (1995) et SHERRIS M., SHEN W. (1999)). On pose:

$$\tilde{\mathcal{M}}h = \frac{\partial h}{\partial t} + b(x)x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \rho h.$$

D'après le Théorème 2.4 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002), il existe  $C > 0$  telle que  $V(t, x) \leq C(1 + x)$  sur  $[0, T[ \times \mathbb{R}$  et, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $C_\eta > 0$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial V}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right| \leq C_\eta(1 + x) \text{ sur } \{(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R} : (x - x^*)^2 + (T - t)^2 > \eta\},$$

où  $x^* = A_0/a$ . De plus,  $V$  est solution, au sens des distributions, de l'inéquation variationnelle suivante:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}V + B \leq 0, & \psi \leq V, & (\tilde{\mathcal{M}}V + B)(V - \psi) = 0 \quad \text{p.p.} \\ V(x, T) = \psi(x, T) & \text{sur } [0, +\infty[. \end{cases}$$

La frontière libre de cette inéquation est alors définie comme la frontière de l'ensemble  $\{V > \psi\}$  dans  $\{0 \leq t < T\}$ . Nous la notons  $\Gamma$ . Comme il existe  $\alpha > 0$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $-\alpha \leq f''(x)$  et que  $B \geq 0$ , la propriété dite de "smooth fit" est vérifiée (cf. Corollaire 2.2 de LAMBERTON D. (2002)):

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) \quad \text{sur } \Gamma.$$

En reprenant les arguments de Friedman et Shen (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)), nous sommes alors capables de décrire  $\Gamma$ . On distingue trois cas:

cas 1 :  $0 < A_0(\rho g(T) - g'(T)) < B(x^*)$ .

Pour les deux derniers cas, nous supposons, comme Friedman et Shen, que  $b(x) = b > 0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

cas 2 :  $A_0((\rho - b)g(T) - g'(T)) < B(x^*) < A_0(\rho g(T) - g'(T))$ .

cas 3 :  $B(x^*) < A_0((\rho - b)g(T) - g'(T))$ .

On remarque que si  $A_0(\rho g(T) - g'(T)) < 0$ , alors il existe  $0 \leq t_1 < T$  tel que  $V > \psi$  sur  $[t_1, T[ \times \mathbb{R}^+$  donc il n'existe pas de frontière libre lorsque l'on se rapproche de l'échéance.

En effet, pour  $t \in [0, T[$ , on a

$$\tilde{\mathcal{M}}\psi(t, x) + B(x) = \begin{cases} A_0 g'(t) - \rho A_0 g(t) + B(x) & \text{sur } [0, x^*[ \\ ax(g'(t) + (b(x) - \rho)g(t)) + B(x) & \text{sur } ]x^*, +\infty[, \end{cases}$$

Ainsi pour  $t$  tendant vers  $T$ , on a

$$\tilde{\mathcal{M}}\psi(t, x) + B(x) = \begin{cases} A_0(g'(T) - \rho g(T)) + B(x) + o(1) > 0 & \text{sur } [0, x^*[ \\ ax(g'(T) + (b(x) - \rho)g(T)) + B(x) + o(1) > 0 & \text{sur } ]x^*, +\infty[, \end{cases}$$

avec des  $o(1)$  indépendants de  $x$ . Or, d'après l'inéquation variationnelle,  $\tilde{\mathcal{M}}V + B \leq 0$  donc pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a  $V(t, x) \neq \psi(t, x)$  sur un voisinage de  $T$ .

Dans les trois autres cas, nous savons (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)) qu'il existe  $0 \leq t_0 < T$  tel que

$$\Gamma \cap \{x < x^*\} = \{(t, s(t)) : t_0 \leq t < T\},$$

où  $s(t) = \inf\{x < x^* : V(t, x) > \psi(t, x)\}$ . En reprenant la preuve du Corollaire 4.2 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002), nous pouvons démontrer que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \geq \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, x) \quad \text{sur } [0, T[ \times [0, x^*[ \quad .$$

Par conséquent, pour  $t \in [0, T[$ , on a

$$V(t, x) > \psi(t, x) \text{ si } s(t) < x < x^* \quad \text{et} \quad V(t, x) = \psi(t, x) \text{ si } 0 \leq x \leq s(t).$$

Dans le cas 3, la frontière libre possède une seconde composante qui n'existe pas dans les deux autres cas (cf. FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)). Il existe  $0 \leq t_1 < T$  tel que

$$\Gamma \cap \{x > x^*\} = \{(t, \tilde{s}(t)) : t_1 \leq t < T\},$$

où  $\tilde{s}(t) = \inf\{x > x^* : V(t,x) = \psi(t,x)\}$ . Or le lemme 6.1 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002) nous permet d'affirmer que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \leq \frac{\partial \psi}{\partial x}(t,x) \quad \text{sur} \quad [0, T[ \times [x^*, +\infty[ \quad .$$

Pour  $t \in [0, T[$ , on a donc

$$V(t,x) = \psi(t,x) \text{ si } \tilde{s}(t) < x \quad \text{et} \quad V(t,x) > \psi(t,x) \text{ si } x^* < x < \tilde{s}(t).$$

Friedman et Shen ont démontré dans FRIEDMAN A., SHEN W. (2002) que

$$\lim_{t \rightarrow T} s(t) = \begin{cases} x_0 & \text{dans le cas 1} \\ x^* & \text{dans les cas 2 et 3,} \end{cases}$$

où  $x_0 = \inf\{x \in [0, x^*] : \tilde{\mathcal{M}}\psi(T,x) + B(x) = 0\}$ . Il est facile de voir que  $x_0$  existe dans le cas 1, car

$$\tilde{\mathcal{M}}\psi(T, x^*) + B(x^*) > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{M}}\psi(T, 0) + B(0) < 0.$$

D'autre part, ils ont établi que, dans le cas 3, on a:

$$\lim_{t \rightarrow T} \tilde{s}(t) = x^*.$$

Basés sur le principe du maximum présenté dans la section 2.1, ces résultats restent vrais avec des coefficients non constants.

Dans cette partie, nous examinons les comportements de  $s$  et le cas échéant de  $\tilde{s}$  au voisinage de  $T$ . Cependant, nous n'utiliserons pas les méthodes de Friedman et Shen. Celles-ci consistent à transformer l'inéquation variationnelle en une équation intégrale

portant sur  $(V, s)$  ou  $(V, \tilde{s})$ . Dans la section 10, on étudie le cas 1 et on montre que

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{x_0 \sigma(x_0) \sqrt{T - t}} = -C \quad \text{où } C \text{ est une constante numérique}$$

La démonstration est basée sur la régularité de  $\psi$  au voisinage de  $(T, x_0)$ . En effet, cette régularité nous permet d'obtenir un développement limité de  $V$  au voisinage de  $(T, x_0)$  et d'en déduire un développement de  $s$  au voisinage de  $T$ . Cela correspond à la méthode utilisée dans la partie précédente (cf. section 7) pour avoir un développement du prix critique d'une option américaine mais présente des difficultés supplémentaires: le fait que  $\psi$  dépende du temps et la présence de  $B$  dans l'inéquation variationnelle. Comme Friedman et Shen, nous obtenons un comportement parabolique mais nous donnons un autre moyen de calculer la constante  $C$  (cf. Théorème 10.2).

La section 11 est consacrée à l'étude du cas 2. Nous commençons par comparer  $s$  et le prix critique européen d'une option de vente de prix d'exercice  $x^*$ . Nous démontrons qu'ils sont suffisamment proches au voisinage de  $T$  pour avoir le même comportement et cela implique donc que la vitesse de convergence de  $s$  n'est pas parabolique mais qu'il y a un facteur logarithmique supplémentaire (cf. Théorème 11.1).

Finalement, dans la section 12, nous déduisons du cas 2, la vitesse de convergence de  $s$  dans le cas 3. Celle-ci est encore proportionnelle à  $\sqrt{(T - t) \ln(\frac{1}{T-t})}$  et non à  $T - t$  comme l'affirme le Théorème 7.2 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002) (cf. Théorème 12.1). Pour traiter le comportement de  $\tilde{s}$ , nous adaptions la méthode de LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003) pour étudier la vitesse de convergence du prix critique américain. Encore une fois, nous trouvons que  $\tilde{s}(t)$  converge à la vitesse  $\sqrt{(T - t) \ln(\frac{1}{T-t})}$  (cf. Théorème 12.2).

## 10 Le cas régulier: cas 1

Dans cette section, nous supposons que l'hypothèse du cas 1 est vérifiée, il est alors facile de voir que cela équivaut à  $0 < x_0 < x^*$ . Dans la section 10.1, nous donnons un développement limité de la fonction  $V$  au voisinage de tout point de régularité de  $\psi$  (cf. Théorème 10.1). En appliquant ensuite le Théorème 10.1 au point  $(T, x_0)$ , on trouve un équivalent de  $x_0 - s(t)$  dans la section 10.2 (cf. Théorème 10.2).

### 10.1 Développement de la fonction de valeur

Le résultat suivant est une extension du Théorème 7.1.

**Théorème 10.1** *Soit  $(t_1, x_1) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ,  $\eta > 0$ ,  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h : [t_1, t_1 + \eta] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant:*

1.  *$h$  est continue sur  $[t_1, t_1 + \eta] \times \mathbb{R}$  et pour tout  $t \in [t_1, t_1 + \eta]$ , la fonction  $x \rightarrow h(t, x)$  est à croissance polynômiale.*
2.  *$h$  admet des dérivées continues  $\frac{\partial h}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$  au voisinage de  $(t_1, x_1)$ . De plus, si l'on pose*

$$\mathcal{M}h(t, x) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(t, x) + b(x)x \frac{\partial h}{\partial x}(t, x),$$

*la fonction  $\mathcal{M}h$  est différentiable au voisinage de  $(t_1, x_1)$ .*

3.  *$B$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$*

*Posons  $\hat{\mathcal{M}}h(t, x) = \mathcal{M}h(t, x) + B(x)$ . Il existe  $R > 0$  tel que pour tout  $x \in [x_1 - R, x_1 + R]$  et  $\theta \in [0, \eta]$  tendant vers 0, on a:*

$$\begin{aligned} & \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, \theta}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho u} B(S_u^x) du + e^{-\rho \tau} h(t_1 + \tau, S_\tau^x) \right] = h(t_1, x) \\ & + \theta \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, 1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \hat{\mathcal{M}}h(t_1, x) + \sqrt{\theta} x \sigma(x) \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}h}{\partial x}(t_1, x) W_s ds \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

uniformément par rapport à  $x$ .

*Démonstration du Théorème 10.1:* Ce résultat se démontre en suivant la preuve du Théorème 7.1, les termes dépendants de  $B$  étant facilement contrôlables grâce à la régularité de  $B$ .  $\diamond$

Comme dans la section 7 de la partie II, nous introduisons la fonction suivante:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \phi(y) = \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}_{0,1}} \mathbb{E} \int_0^\tau (y + W_s) ds.$$

Le Théorème 10.1 nous permet alors de donner un développement de  $V$  au voisinage de  $(T, x_0)$  dans le Corollaire suivant.

**Corollaire 10.1** *Pour  $t \in [0, T[$  et  $y \in \mathbb{R}$ , nous avons:*

$$V(t, x_0 e^{y\sqrt{T-t}}) = \psi(t, x_0 e^{y\sqrt{T-t}}) + (T-t)^{\frac{3}{2}} x_0 \sigma(x_0) B'(x_0) \phi\left(\frac{y}{\sigma(x_0)}\right) + o((T-t)^{\frac{3}{2}}).$$

*Démonstration du Corollaire 10.1:*

Soit  $y \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in (0, T]$ . On pose  $t_1 = T - \theta$ ,  $x_1 = x_0 e^{y\sqrt{\theta}}$  pour  $\theta$  suffisamment petit,  $\psi$  vérifie les hypothèses du Théorème 10.1 au point  $(t_1, x_1)$ . En appliquant ce Théorème, on en déduit que:

$$\begin{aligned} V(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) &= \psi(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) \\ &+ \theta \sup_{\tau \in \overline{\mathcal{T}}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \hat{\mathcal{M}}\psi(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) + \sqrt{\theta} x_0 e^{y\sqrt{\theta}} \sigma(x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) B'(x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) W_s ds \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

En effet, il est facile de voir que, pour  $t$  proche de  $T$  et  $0 \leq x < x^*$ , on a

$$\hat{\mathcal{M}}\psi(t, x) = A_0(g'(t) - \rho g(t)) + B(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}\psi}{\partial x}(t, x) = B'(x).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}\psi(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) &= \hat{\mathcal{M}}\psi(T, x_0) + x_0 y \sqrt{\theta} B'(x_0) + o(\sqrt{\theta}) \\ x_0 e^{y\sqrt{\theta}} \sigma(x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) \frac{\partial \hat{\mathcal{M}}\psi}{\partial x}(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) &= x_0 \sigma(x_0) B'(x_0) + o(1).\end{aligned}$$

Comme  $\hat{\mathcal{M}}\psi(T, x_0) = 0$  et  $B'(x_0) > 0$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned}V(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) &= \psi(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) \\ &\quad + \theta^{\frac{3}{2}} x_0 \sigma(x_0) B'(x_0) \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \left( \frac{y}{\sigma(x_0)} + W_s \right) ds \right] + o(\theta^{\frac{3}{2}}) \\ &= \psi(T - \theta, x_0 e^{y\sqrt{\theta}}) + \theta^{\frac{3}{2}} x_0 \sigma(x_0) B'(x_0) \phi\left(\frac{y}{\sigma(x_0)}\right) + o(\theta^{\frac{3}{2}}). \quad \diamond\end{aligned}$$

## 10.2 Développement de $s$ au voisinage de l'échéance

Grâce au lemme 7.1, nous sommes capables de relier le développement limité de  $V$  au voisinage de l'échéance à celui de  $s$ . La première conséquence du lemme 7.1 est le résultat suivant:

**Lemme 10.1** *Pour  $t \in [0, T[$ , on a  $s(t) < x_0$  et*

$$\liminf_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{\sigma(x_0) x_0 \sqrt{T-t}} \geq -y^*.$$

*Démonstration du lemme 10.1:* Soit  $y > \sigma(x_0)y^*$  et  $t \in [0, T[$  suffisamment proche de  $T$ .

On a  $V(t, x_0 e^{y\sqrt{T-t}}) > \psi(t, x_0 e^{y\sqrt{T-t}})$ , et cela entraîne que

$$s(t) \leq x_0 e^{y\sqrt{T-t}} \leq x_0.$$

En développant l'exponentielle dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{\sigma(x_0)x_0\sqrt{T-t}} \geq -\frac{y}{\sigma(x_0)},$$

et finalement, pour  $y$  tendant vers  $\sigma(x_0)y^*$ , on a:

$$\liminf_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{\sigma(x_0)x_0\sqrt{T-t}} \geq -y^*. \quad \diamond$$

Nous allons maintenant démontrer que  $-y^*$  est un majorant de  $\limsup_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s_\psi(t)}{\sigma(x_0)x_0\sqrt{T-t}}$ . Pour cela nous utilisons à la fois le développement limité de  $V$  et l'inéquation variationnelle satisfaite par  $V$ . Cependant, nous devons contrôler les dérivées premières de  $V$  par rapport au temps dans un voisinage de  $(T, x_0)$ . Le lemme suivant nous fournit ce contrôle.

**Lemme 10.2** *Soit  $0 \leq t < T$  et  $x \in [0, x_0)$ . On a*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \leq \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + o(\sqrt{T-t}), \quad \text{pour } t \text{ tendant vers } T.$$

*Démonstration du lemme 10.2:*

Soit  $t \in [0, T]$ ,  $0 < h < T - t$  et  $0 \leq x < x_0$ . Comme on a supposé que  $\psi(t, x) = g(t)f(x)$ , on a

$$\begin{aligned} V(t+h, x) - V(t, x) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho s} B(S_s^x) ds + e^{-\rho \tau} \psi(t+h+\tau, S_\tau^x) \right] \\ &\quad - \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho s} B(S_s^x) ds + e^{-\rho \tau} \psi(t+\tau, S_\tau^x) \right] \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-\rho \tau} (g(t+h+\tau) - g(t+\tau)) f(S_\tau^x)]. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le Théorème de convergence dominée, on a, pour  $h$  tendant vers 0:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-\rho \tau} g'(t+\tau) f(S_\tau^x)].$$

En effet,  $g'$  est bornée et pour  $\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}$ ,  $\mathbb{E}[f(S_\tau^x)] < +\infty$ .

On conclut la démonstration en appliquant le Théorème 10.1 à la fonction  $h(t, x) = g'(t)f(x)$ . On obtient alors

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E}[e^{-\rho\tau} g'(t + \tau)f(S_\tau^x)] = g'(t)f(x) + O(T - t),$$

pour  $t$  tendant vers  $T$ .  $\diamond$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

**Théorème 10.2** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{x_0 \sigma(x_0) \sqrt{T - t}} = -y^*.$$

*Démonstration du Théorème 10.2:*

D'après le lemme 10.1, il ne nous reste qu'à démontrer que:

$$\limsup_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{\sigma(x_0) x_0 \sqrt{T - t}} \leq -y^*.$$

On pose  $\bar{V} = V - \psi$ . Soient  $y < \sigma(x_0)y^*$  et  $0 \leq t < T$  tel que  $s(t) < x_0 e^{y\sqrt{T-t}}$ . De l'inéquation variationnelle et du lemme 10.2, on déduit alors que, au sens des distributions, sur l'ouvert  $]s(t), x_0 e^{y\sqrt{T-t}}[$ , on a:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(x)^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}(t, x) + b(x)x \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) &= \hat{\mathcal{M}}\bar{V} + \rho\bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \\ &\geq -\hat{\mathcal{M}}\psi(T, x) + \rho\bar{V}(t, x) + o(\sqrt{T - t}) \\ &\geq -\hat{\mathcal{M}}\psi(T, x) + o(\sqrt{T - t}). \end{aligned}$$

Or  $\frac{\partial \hat{\mathcal{M}}\psi}{\partial x}(T, x_0) > 0$  et  $\lim_{t \rightarrow T} s(t) = x_0$ , donc il existe  $C > 0$  indépendante de  $n$  telle que pour  $n$  assez grand et  $x \in ]s(t), x_0 e^{y\sqrt{T-t}}[$ , on a:

$$-\hat{\mathcal{M}}\psi(T, x) \geq C(x_0 - x)$$

$$\begin{aligned} &\geq Cx_0(1 - e^{y\sqrt{T-t}}) \\ &\geq -Cx_0y\sqrt{T-t} + o(\sqrt{T-t}). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe donc  $\tilde{C} > 0$  telle que sur l'ouvert  $]s(t), x_0e^{y\sqrt{T-t}}[$ , on a :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}(t, x) \geq -\tilde{C}x_0y\sqrt{T-t} - \frac{2b(x)}{\sigma(x)^2 x} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x).$$

Or  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) \geq 0$  sur  $]s(t), x_0e^{y\sqrt{T-t}}[$  donc l'inégalité précédente entraîne que :

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}(t, x) \geq C_1\sqrt{T-t} - C_2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) \quad \text{sur } ]s(t), x_0e^{y\sqrt{T-t}}[,$$

où  $C_1 = -Cx_0y$ ,  $C_2 = 4\|b\|_\infty/m^2x_0$  si  $b(x) \geq 0$  au voisinage de  $x_0$  et  $C_2 = 0$  si  $b(x) \leq 0$  près de  $x_0$ . Soit  $x \in ]s(t), x_0e^{y\sqrt{T-t}}[$ . En intégrant cette inégalité entre  $s(t)$  et  $x$ , on obtient :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) \geq C_1\sqrt{T-t}(x - s(t)) - C_2\bar{V}(t, x).$$

Cependant,  $x \rightarrow \bar{V}(t, x)$  est croissante sur  $]s(t), x_0e^{y\sqrt{T-t}}[$ , donc  $\bar{V}(t, x) \leq \bar{V}(t, x_0e^{y\sqrt{T-t}})$  et on obtient

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) \geq C_1\sqrt{T-t}(x - s(t)) - C_2\bar{V}(t, x_0e^{y\sqrt{T-t}}).$$

Finalement, on intègre encore une fois entre  $s(t)$  et  $x_0e^{y\sqrt{T-t}}$  pour avoir :

$$\bar{V}(t, x_0e^{y\sqrt{T-t}}) \geq \frac{C_1}{2}\sqrt{T-t}(s_0e^{y\sqrt{T-t}} - s(t))^2 - C_2(x_0e^{y\sqrt{T-t}} - s(t))\bar{V}(t, x_0e^{y\sqrt{T-t}}).$$

On en déduit que

$$\sqrt{T-t}(s_0e^{y\sqrt{T-t}} - s(t))^2 \leq \frac{2}{C_1}\bar{V}(t, x_0e^{y\sqrt{T-t}}) \left(1 + C_2(x_0e^{y\sqrt{T-t}} - s(t))\right).$$

Or on a choisi  $y < \sigma(x_0)y^*$ , donc, d'après le Corollaire 10.1, on a

$$\bar{V}(t, x_0 e^{y\sqrt{T-t}}) = o((T-t)^{\frac{3}{2}}).$$

Ainsi, on a  $(x_0 e^{y\sqrt{T-t}} - s(t))^+ = o(\sqrt{T-t})$  et en développant l'exponentielle, on obtient:

$$x_0 - s(t) \leq -x_0 y \sqrt{T-t} + o(\sqrt{T-t}).$$

Finalement, pour  $t$  tendant vers  $T$ , on a

$$\limsup_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{\sigma(x_0)x_0\sqrt{T-t}} \leq -\frac{y}{\sigma(x_0)},$$

et en faisant tendre  $y$  vers  $\sigma(x_0)y^*$ , on a:

$$\limsup_{t \rightarrow T} \frac{x_0 - s(t)}{\sigma(x_0)x_0\sqrt{T-t}} \leq -y^*. \quad \diamond$$

Remarque: Sous les hypothèses de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002), nous retrouvons le fait que si  $x_0 < x^*$ , il existe  $C > 0$  telle que:

$$x_0 - s(t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} C\sqrt{T-t}.$$

Cependant, nous donnons une nouvelle façon de calculer la constante  $C$ . En effet, d'après LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003),  $-y^*$  est l'unique racine dans  $]0, 1/\sqrt{2}[$  de l'équation  $G(x) = 0$  où

$$G(x) = E \left[ \int_0^1 (x - \sqrt{u}W_1) \mathbb{1}_{\{W_1 > x \frac{1-\sqrt{1-u}}{\sqrt{u}}\}} du \right].$$

## 11 Développement de $s$ dans le cas 2

Dans toute cette section nous supposons que les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$1 \quad A_0((\rho - b)g(T) - g'(T)) < B(x^*) < A_0(\rho g(T) - g'(T)).$$

On remarque que cela implique  $x^* \leq x_0$  et que  $B(x^*) < A_0(\rho g(T) - g'(T))$  sur  $]0, x^*[$  car  $B$  est croissante.

$$2 \quad \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^+, b(x) = b > 0.$$

Nous introduisons la fonction  $P^e$  de  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , telle que:

$$P^e(t, x) = \mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)}(x^* - S_{T-t}^x)^+].$$

Notons que  $P^e$  est la fonction de valeur d'une option de vente européenne de prix d'exercice  $x^*$  et de maturité  $T$ . Nous savons que  $\forall t \in [0, T[, x \rightarrow P^e(t, x)$  est strictement convexe (cf. EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998) ou HOBSON D. (1998)). Or  $P^e$  est également strictement décroissante et  $(P^e(t, 0) - x^*)P^e(t, x^*) \leq 0$ . Ainsi, pour  $t \in ]0, T[$  l'équation  $P^e(t, x) = x^* - x$  admet une unique solution dans  $]0, x^*[$ . Notons  $s^e(t)$  cette solution appelée prix critique européen. D'après le Théorème 6.1, nous connaissons précisément le comportement de  $s^e$  au voisinage de  $T$ . On a  $\lim_{t \rightarrow T} s^e(t) = x^*$  et

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x^* - s^e(t)}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = 1.$$

En utilisant une estimation de  $V - \psi$  au point  $(t, s^e(t))$  pour  $t$  proche de  $T$  (cf. section 11.1), nous allons comparer  $s(t)$  et  $s^e(t)$  au voisinage de la maturité et obtenir dans la Proposition 11.3, le résultat suivant  $(s^e(t) - s(t))^+ \leq C\sqrt{T-t}$ . Dans le cas 2, nous pouvons montrer que  $s^e \geq s$  donc  $s^e$  et  $s$  seront suffisamment proches pour avoir le même comportement au voisinage de  $T$ .

## 11.1 Estimation de $[V - \psi](t, s^e(t))$ au voisinage de l'échéance

Nous commencerons cette section par évaluer  $[V^e - \psi](t, s^e(t))$  au voisinage de l'échéance (cf. Proposition 11.1) puis, grâce à la formule de la prime pour exercice anticipé qui a été présentée dans la partie I, nous donnerons un développement limité de  $[V - V^e](t, s^e(t))$  pour  $t$  tendant vers  $T$ . Cela nous permettra de conclure par la Proposition 11.2 qui donne une estimation de  $[V - \psi](t, s^e(t))$  au voisinage de l'échéance.

**Proposition 11.1** *Sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ , on définit la fonction suivante:*

$$V^e(t, x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^x) du + e^{-\rho(T-t)} \psi(T, S_{T-t}^x)\right].$$

Pour  $t \in [0, T[$  tendant vers  $T$ , on a:

$$V^e(t, s^e(t)) = \psi(t, s^e(t)) + A_0 \alpha (T - t) + o(T - t),$$

où nous avons posé:

$$\alpha = \frac{B(x^*)}{A_0} + g(T)(b - \rho) + g'(T).$$

Remarque: Dans le cas 2, on a  $\alpha > 0$  donc, on déduit de la Proposition 11.1 que l'on a  $V(t, s^e(t)) > \psi(t, s^e(t))$  pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ . Ainsi, au voisinage de l'échéance,  $s(t) \leq s^e(t)$ .

*Démonstration de la Proposition 11.1:*

Soient  $\theta \in ]0, T]$  et  $x \geq 0$ . On a:

$$f(x) = a \max(x^*, x) = a (x + (x^* - x)^+),$$

donc nous pouvons relier les fonctions  $V^e$  et  $P^e$  par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} V^e(T - \theta, x) &= \mathbb{E}\left[\int_0^\theta e^{-\rho u} B(S_u^x) du + ag(T)e^{-\rho\theta} (S_\theta^x + (x^* - S_\theta^x)^+)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\theta e^{-\rho u} B(S_u^x) du\right] + ag(T) (xe^{(b-\rho)\theta} + P^e(T - \theta, x)). \end{aligned}$$

Comme  $B$  est Lipschitzienne et  $u \rightarrow S_u^x$  continue, on a, pour  $\theta$  tendant vers 0:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\theta e^{-\rho u} B(S_u^x) du\right] = \theta B(x) + o(\theta),$$

uniformément par rapport à  $x$  si  $x$  est dans un compact de  $\mathbb{R}^+$  et cela entraîne que

$$V^e(T - \theta, x) = \theta B(x) + ag(T) (xe^{(b-\rho)\theta} + P^e(T - \theta, x)) + o(\theta),$$

uniformément par rapport à  $x$  si  $x$  est dans un compact. Soit  $t \in [0, T[$  suffisamment proche de  $T$ . On réécrit l'équation précédente avec  $\theta = T - t$  et  $x = s^e(t)$ . Par définition de  $s^e$ , on obtient:

$$\begin{aligned} V^e(t, s^e(t)) &= (T - t)B(s^e(t)) + ag(T) [s^e(t)e^{(b-\rho)(T-t)} + x^* - s^e(t)] + o(T - t) \\ &= (T - t)B(s^e(t)) + g(T) [as^e(t)(b - \rho)(T - t) + A_0] + o(T - t) \\ &= g(T)A_0 + (T - t) [B(s^e(t)) + ag(T)s^e(t)(b - \rho)] + o(T - t). \end{aligned}$$

De plus,  $g$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, T]$  donc  $g(T) = g(t) + (T - t)g'(T) + o(T - t)$ , et on a alors:

$$\begin{aligned} V^e(t, s^e(t)) - \psi(t, s^e(t)) &= V^e(t, s^e(t)) - g(t)A_0 \\ &= A_0(g(T) - g(t)) + (T - t) [B(s^e(t)) + ag(T)s^e(t)(b - \rho)] + o(T - t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (T-t)[A_0 g'(T) + B(s^e(t)) + g(T)as^e(t)(b-\rho)] + o(T-t) \\
&= A_0\alpha(T-t) + o(T-t). \quad \diamond
\end{aligned}$$

Nous rappelons maintenant une estimation de la différence entre options de vente américaines et européennes.

**Lemme 11.1** *Pour  $t \in [0, T[$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ , la fonction de valeur de l'option de vente américaine de prix d'exercice  $x^*$  et de maturité  $T$  est donnée par:*

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-\rho\tau} (x^* - S_\tau^x)^+].$$

*Pour  $t$  tendant vers  $T$ , on a alors:*

$$P(t, x) - P_e(t, x) \leq (T-t)(bx + \rho P_e(t, x)) + o(T-t).$$

*Démonstration du lemme 11.1:* Ce résultat est une conséquence de la formule décrivant la prime pour exercice anticipé (cf. Corollaire 3.1 de MYNENI R. (1992)). Pour le voir, il suffit de reprendre la démonstration du Corollaire 3.1 dans ce cadre.  $\diamond$

Dans la Proposition suivante nous donnons une estimation de  $[V - \psi](t, s^e(t))$  au voisinage de l'échéance.

**Proposition 11.2** *Pour  $t \in [0, T[$ , on a*

$$0 \leq V(t, s^e(t)) - \psi(t, s^e(t)) \leq \gamma(T-t) + o(T-t).$$

*où nous avons posé:*

$$\gamma = A_0 \left( \frac{B(x^*)^+}{A_0} + g(T) ((b-\rho)^+ + b) + g'(T)^+ \right).$$

*Démonstration de la Proposition 11.2:*

Soit  $(t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}^+$ . On a

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] + \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-\rho \tau} a g(t + \tau) (S_\tau^x + (x^* - S_\tau^x)^+)] \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] \\ &\quad + a \sup_{u \in [0, T-t]} g(t + u) \left( \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-\rho \tau} S_\tau^x] + \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} [e^{-\rho \tau} (x^* - S_\tau^x)^+] \right). \end{aligned}$$

Or le processus  $(e^{-bt} S_t^x)_{0 \leq t \leq T}$  est une martingale donc pour tout  $\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}$ , on a:

$$\mathbb{E}[e^{-\rho \tau} S_\tau^x] = \mathbb{E}[e^{(b-\rho)\tau} e^{-b\tau} S_\tau^x] \leq e^{(b-\rho)^+(T-t)} \mathbb{E}[e^{-b\tau} S_\tau^x] = x e^{(b-\rho)^+(T-t)}.$$

On obtient alors

$$V(t, x) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] + a \sup_{u \in [0, T-t]} g(t + u) \left( x e^{(b-\rho)^+(T-t)} + P(t, x) \right).$$

D'autre part, on a vu que:

$$V^e(t, x) = \mathbb{E} \left[ \int_0^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] + a g(T) \left( x e^{(b-\rho)(T-t)} + P^e(t, x) \right).$$

Ainsi, on a:

$$\begin{aligned} V(t, x) - V^e(t, x) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ - \int_\tau^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] \\ &\quad + a \sup_{u \in [0, T-t]} g(t + u) \left( x e^{(b-\rho)^+(T-t)} + P(t, x) \right) - a g(T) \left( x e^{(b-\rho)(T-t)} + P^e(t, x) \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Comme  $B$  est Lipschitzienne, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $x$  et  $t$  telle que:

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ - \int_{\tau}^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ - \int_{\tau}^{T-t} e^{-\rho u} B(x) du \right] \\ &\quad + \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_{\tau}^{T-t} e^{-\rho u} |B(S_u^x) - B(x)| du \right] \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ -B(x) \int_{\tau}^{T-t} e^{-\rho u} du \right] \\ &\quad + C(T-t) \sup_{u \in [0, T-t]} \mathbb{E}[|S_u^x - x|]. \end{aligned}$$

Pour  $t$  tendant vers  $T$ , on obtient alors:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ - \int_{\tau}^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^x) du \right] \leq B(x)^-(T-t) + o(T-t).$$

De plus, pour  $u \in [0, T-t]$ , on a

$$\begin{aligned} g(t+u) &\leq g(T) - (T-t-u)g'(T) + \frac{(T-t-u)^2}{2} \sup_{s \in [0, T-t]} |g''(s)| \\ &\leq g(T) + (T-t)g'(T)^- + \frac{(T-t)^2}{2} \sup_{s \in [0, T-t]} |g''(s)|, \end{aligned}$$

donc pour  $t$  tendant vers  $T$ , on a l'inégalité suivante:

$$\sup_{u \in [0, T-t]} g(t+u) \leq g(T) + (T-t)g'(T)^- + o(T-t).$$

Ainsi, en posant  $\theta = T-t$ , on obtient

$$\begin{aligned} a \sup_{u \in [0, \theta]} g(t+u) &\left( x e^{(b-\rho)^+ \theta} + P(t, x) \right) \\ &\leq a [g(T) + \theta g'(T)^- + o(\theta)] [x + x(b-\rho)^+ \theta + P(t, x) + o(\theta)] \\ &\leq a g(T) [x + aP(t, x)] + \theta [a g'(T)^- (x + P(t, x)) + a x g(T) (b-\rho)^+] + o(\theta). \end{aligned}$$

Or on a

$$ag(T) [xe^{(b-\rho)\theta} + P^e(t,x)] = ag(T) [x + P^e(t,x)] + ag(T)x(b - \rho)\theta + o(\theta),$$

donc on déduit de l'inégalité (3) que:

$$\begin{aligned} V(t,x) - V^e(t,x) &\leq \theta [B(x)^- + axg(T)(\rho - b)^+ + ag'(T)^-(x + P(t,x))] \\ &\quad + ag(T)[P(t,x) - P^e(t,x)] + o(\theta). \end{aligned}$$

Finalement, le lemme 11.1 entraîne que:

$$\begin{aligned} V(t,x) - V^e(t,x) &\leq \theta [B(x)^- + axg(T)(\rho - b)^+ + ag'(T)^-(x + P^e(t,x))] \\ &\quad + ag(T)\theta (bx + \rho P^e(t,x)) + o(\theta). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $x = s^e(t)$  et sachant que  $\lim_{t \rightarrow T} s^e(t) = x^*$ , on obtient:

$$\begin{aligned} V(t,s^e(t)) - V^e(t,s^e(t)) &\leq \theta [B(s^e(t))^- + as^e(t)g(T)(\rho - b)^+ + ax^*g'(T)^-] \\ &\quad + ag(T)\theta (bx^* + \rho(x^* - s^e(t))) + o(\theta) \\ &\leq \theta [B(x^*)^- + ag(T)x^*(\rho - b)^+ + ax^*g'(T)^-] \\ &\quad + \theta ag(T)bx^* + o(\theta) \\ &\leq \theta A_0 \left[ \frac{B(x^*)^-}{A_0} + g'(T)^- + g(T) \max(b, \rho) \right] + o(\theta). \end{aligned}$$

On conclut cette démonstration en utilisant la Proposition 11.1 qui nous permet alors d'affirmer que

$$V(t,s^e(t)) - \psi(t,s^e(t)) \leq \gamma(T - t) + o(T - t).$$

où nous avons posé:

$$\gamma = A_0 \left( \frac{B(x^*)^+}{A_0} + g(T) (\max(b, \rho) + b - \rho) + g'(T)^+ \right). \quad \diamond$$

## 11.2 Développement de $s$ au voisinage de la maturité

Pour relier l'estimation de  $V - \psi$  sur la frontière européenne à une estimation de  $s$ , nous utiliserons l'inéquation variationnelle satisfaite par  $V$ . Le lemme suivant nous fournit le contrôle nécessaire de la dérivé première de  $V$  par rapport au temps.

**Lemme 11.2** *Soit  $0 \leq t < T$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ . On a*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) \leq \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) + o(1),$$

*lorsque  $t$  tend vers  $T$  et uniformément par rapport à  $x$  si  $x$  est dans un compact.*

Remarque: La démonstration de ce lemme n'utilise pas les hypothèses du cas 2, ce résultat reste donc vrai quelque soient les paramètres et nous l'appliquerons également dans la section suivante, sous les hypothèses du cas 3.

*Démonstration du lemme 11.2:*

Soient  $t \in [0, T[, 0 < h < T - t$  et  $x \in \mathbb{R}^+$ . On a

$$\begin{aligned} V(t+h, x) - V(t, x) &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho s} B(S_s^x) ds + e^{-\rho \tau} \psi(t+h+\tau, S_\tau^x) \right] \\ &\quad - \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho s} B(S_s^x) ds + e^{-\rho \tau} \psi(t+\tau, S_\tau^x) \right] \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}} \mathbb{E} \left[ e^{-\rho \tau} (g(t+h+\tau) - g(t+\tau)) f(S_\tau^x) \right] \end{aligned}$$

Or,  $g'$  est bornée et pour tout  $\tau \in \mathcal{T}_{0, T-t}$ ,  $\mathbb{E}[f(S_\tau^x)]$  est borné uniformément par rapport à  $\tau$  et à  $x$  si  $x$  est dans un compact de  $\mathbb{R}^+$ , donc par le Théorème de convergence dominée

on obtient:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) \leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E}[e^{-\rho\tau} g'(t+\tau)f(S_\tau^x)].$$

Comme  $f$  et  $g'$  sont Lipschitziennes, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) &\leq \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) + \mathbb{E}\left[ \sup_{u \in [0, T-t]} |e^{-\rho u} g'(t+u)f(S_u^x) - g'(t)f(x)| \right] \\ &\leq \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) + o(1). \quad \diamond \end{aligned}$$

**Proposition 11.3** *Il existe  $C > 0$  tel que pour  $0 \leq t < T$  suffisamment proche de  $T$ , on a*

$$0 \leq s^e(t) - s(t) \leq C\sqrt{T-t}.$$

*Démonstration de la Proposition 11.3:*

Soit  $t_1 \in [0, T[$  tel que pour tout  $t \in ]t_1, T[$ ,  $s(t) < s^e(t)$ .

Sur l'ouvert  $\{(t, \xi) \in ]t_1, T[ \times \mathbb{R}^+ : s(t) < x < s^e(t)\}$ , l'inéquation variationnelle satisfaite par  $V$  nous donne, au sens des distributions, l'inégalité suivante :

$$\frac{\sigma(\xi)^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) = -\frac{\partial V}{\partial t}(t, \xi) - b\xi \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) + \rho V(t, \xi) - B(\xi).$$

Sur  $\{(t, \xi) \in ]t_1, T[ \times \mathbb{R}^+ : s(t) < x < s^e(t)\}$ , le lemme 11.2 nous permet alors d'affirmer que pour  $t_1$  tendant vers  $T$ , on a:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\xi)^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) + b\xi \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) &\geq -\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \xi) + \rho V(t, \xi) - B(\xi) + o(1) \\ &\geq -\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \xi) + \rho \psi(t, \xi) - B(\xi) + o(1) \\ &\geq -A_0 \left( \frac{B(\xi)}{A_0} + g'(t) - \rho g(t) \right) + o(1) \end{aligned}$$

Comme  $B$ ,  $g$  et  $g'$  sont continues, on obtient

$$\frac{\sigma(\xi)^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) + b\xi \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) \geq -A_0 \left( \frac{B(x^*)}{A_0} + g'(T) - \rho g(T) \right) + o(1)$$

pour  $t_1$  suffisamment proche de  $T$ . Par conséquent, il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 \geq 0$  telles que:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) \geq C_1 - C_2 \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) \quad \text{sur } \{(t, \xi) \in ]t_1, T[ \times \mathbb{R}^+ : s(t) < x < s^e(t)\},$$

avec  $C_2 = 4b/x^* m^2$ .

Posons maintenant  $\bar{V}_\psi = V_\psi - \psi$ . On a encore:

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}(t, \xi) \geq C_1 - C_2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, \xi).$$

Soit  $t \in ]t_1, T[$  et  $x \in ]s(t), s^e(t)[$ . On intègre la dernière inégalité entre  $s(t)$  et  $x$  et on déduit de la propriété de "smooth fit", autrement dit de la continuité de  $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}$  que:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) \geq C_1(x - s(t)) - C_2 \bar{V}(t, x).$$

Or on sait que la fonction  $y \rightarrow \bar{V}(t, y)$  est croissante sur  $[0, x^*[$  (cf. le Corollaire 4.2 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002)), donc on a  $\bar{V}(t, x) \leq \bar{V}(t, s^e(t))$  et on obtient

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(t, x) \geq C_1(x - s(t)) - C_2 \bar{V}(t, s^e(t)).$$

Nous intégrons une seconde fois cette inégalité entre  $s(t)$  et  $s^e(t)$  pour avoir

$$\bar{V}(t, s^e(t)) \geq \frac{C_1}{2}(s^e(t) - s(t))^2 - C_2(s^e(t) - s(t))\bar{V}(t, s^e(t)).$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow T} s^e(t) = \lim_{t \rightarrow T} s(t)$ , on en déduit qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que

$$(s^e(t) - s(t))^2 \leq C\bar{V}(t, s^e(t)).$$

Finalement, la Proposition 11.2 nous permet d'affirmer qu'il existe  $\tilde{C} > 0$  indépendante du temps telle que

$$(s^e(t) - s(t))^2 \leq \tilde{C}(T - t)$$

et cela conclut notre démonstration.  $\diamond$

Les Théorèmes 11.3 et 6.1 ont pour conséquence immédiate le Théorème suivant, principal résultat de cette section.

**Théorème 11.1** *Pour  $\alpha = \frac{B(x^*)}{A_0} + g(T)(b - \rho) + g'(T) > 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x^* - s(t)}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T - t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = 1.$$

Remarque: Ce Théorème amène une contradiction avec le Théorème 7.2 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002). En effet, ce dernier affirme qu'il existe  $C_1 > 0$  telle que, si  $\alpha > 0$ ,  $s'(t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} C_1/\sqrt{T-t}$ .

*Démonstration du Théorème 11.1:*

Soit  $0 \leq t < T$  et supposons que  $\alpha > 0$ . D'après la Proposition 11.1, on a:

$$V^e(t, s^e(t)) - \psi(t, s^e(t)) > 0,$$

pour  $T - t$  suffisamment petit. On a donc

$$V(t, s^e(t)) \geq V^e(t, s^e(t)) > \psi(t, s^e(t)),$$

donc  $s(t) \leq s^e(t)$ , pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ . le Théorème 11.3 nous donne alors

$$0 \leq s^e(t) - s(t) \leq C\sqrt{T-t}.$$

Or, d'après le Théorème 6.1, on a

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x^* - s^e(t)}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = 1,$$

donc il en est de même pour  $s(t)$  et cela conclut notre démonstration.  $\diamond$

## 12 Développement de $s$ et $\tilde{s}$ dans le cas 3

Dans toute cette section, nous supposons que  $b(x) = b > 0$  et que les paramètres satisfont le cas 3:

$$B(x^*) < A_0((\rho - b)g(T) - g'(T)).$$

### 12.1 Développement de $s$ dans le cas 3

Dans le cas 3, nous avons  $\alpha < 0$  donc il n'est plus possible d'utiliser la méthode de la section précédente car on n'a pas  $s^e > s$ . Nous allons donc introduire un problème d'arrêt optimal légèrement différent dont les paramètres satisferont le cas 2. Nous démontrerons alors que la frontière libre de ce nouveau problème est suffisamment proche de  $s$  dans  $\{x < x^*\}$  pour avoir le même comportement et nous établirons le principal résultat de cette section:

**Théorème 12.1** *Si  $\alpha < 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x^* - s(t)}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = 1.$$

Remarque: Le Théorème 8.1 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002) affirme qu'il existe  $C_2 > 0$  telle que, pour  $\alpha < 0$ , on a  $s'(t) \stackrel{t \rightarrow T}{\sim} C_2$  mais le Théorème 12.1 montre que cela ne peut pas être vrai.

*Démonstration du Théorème 12.1*

Commençons par définir une nouvelle fonction  $B_\varepsilon$  telle que la fonction de valeur du contrat,  $V_\varepsilon$ , associée à  $B_\varepsilon$ , satisfasse les hypothèses de la section 11 et que  $V_\varepsilon \geq V$ . Nous définirons alors le salaire critique,  $s_\varepsilon$  associé à  $B_\varepsilon$  et démontrerons que  $s_\varepsilon(t) \leq s(t) \leq s_\varepsilon(t) + C\sqrt{T-t}$  au voisinage de  $T$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que:

$$-A_0\alpha < \varepsilon < -A_0\alpha + A_0bg(T).$$

Pour  $(t,x) \in [0,T[ \times [0, +\infty[$ , on pose:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &= B(x) + \varepsilon \\ V_\varepsilon(t,x) &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau e^{-\rho s} B_\varepsilon(S_s^x) ds + e^{-\rho\tau} \psi(t + \tau, S_\tau^x) \right] \\ s_\varepsilon(t) &= \inf \{ x \in [0, x^*[: V_\varepsilon(t,x) > \psi(t,x) \}. \end{aligned}$$

$\varepsilon$  étant strictement positif, il est facile de voir que  $V \leq V_\varepsilon$  et cela implique que  $s \leq s_\varepsilon$ .

Comme  $B$  est croissante, pour  $0 < x < x^*$ , on a

$$\begin{aligned} g(T)\rho - g'(T) - \frac{B_\varepsilon(x)}{A_0} &\geq g(T)\rho - g'(T) - \frac{B(x^*)}{A_0} - \frac{\varepsilon}{A_0} \\ &= -\alpha + bg(T) - \frac{\varepsilon}{A_0} > 0 \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$g(T)(\rho - b) - g'(T) - \frac{B_\varepsilon(x^*)}{A_0} = -\alpha - \frac{\varepsilon}{A_0} < 0,$$

donc en appliquant le Théorème 11.1 à  $s_\varepsilon$ , on obtient:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{x^* - s_\varepsilon(t)}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = 1.$$

En reprenant les arguments de la Proposition 11.3, on utilise l'inéquation variationnelle satisfaite par  $V_\varepsilon$  pour montrer qu'il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 \geq 0$  telle que:

$$\frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial x^2}(t, \xi) \geq C_1 - C_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(t, \xi) \quad \text{sur } ]s_\varepsilon(t), s(t)[.$$

Comme dans la démonstration de la Proposition 11.3, on intègre alors l'inégalité deux fois sur  $]s_\varepsilon(t), s(t)[$  et on utilise l'égalité  $V_\varepsilon(t, s_\varepsilon(t)) = \psi(t, s_\varepsilon(t)) = V(t, s_\varepsilon(t))$ , pour obtenir:

$$V_\varepsilon(t, s(t)) - V(t, s(t)) \geq \frac{C_1}{2}(s(t) - s_\varepsilon(t))^2 - C_2(s(t) - s_\varepsilon(t))(V_\varepsilon(t, s(t)) - V(t, s(t))).$$

Or  $\lim_{t \rightarrow T} (s_\varepsilon(t) - s(t)) = 0$ , donc il existe une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que

$$(s(t) - s_\varepsilon(t))^2 \leq C(V_\varepsilon(t, s(t)) - V(t, s(t))).$$

En outre, il est facile de voir que

$$0 \leq V_\varepsilon(t, x) - V(t, x) \leq \varepsilon(T-t) \quad \text{sur } [0, T[ \times \mathbb{R}^+.$$

Par conséquent, il existe  $\tilde{C} > 0$  indépendante du temps telle que

$$(s(t) - s_\varepsilon(t))^2 \leq \tilde{C}(T-t).$$

Finalement, il existe une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que  $s_\varepsilon(t) \leq s(t) \leq s_\varepsilon(t) + C\sqrt{T-t}$  au voisinage de  $T$  et cela conclut notre démonstration.  $\diamond$

## 12.2 Développement de $\tilde{s}$

Dans cette section, nous allons reprendre des idées de LAMBERTON D. (1995). Premièrement, nous montrons dans la Proposition 12.1, que  $\{x > x^* : V^e(t,x) = \psi(t,x)\} \neq \emptyset$ . Nous étudions ensuite le comportement au voisinage de  $T$  de la plus petite solution de l'équation  $V^e(t,x) = \psi(t,x)$  dans  $\{x > x^*\}$ , solution que nous noterons  $\tilde{s}^e(t)$ . Finalement, nous établissons le Théorème suivant, en utilisant une comparaison entre  $\tilde{s}^e(t)$  et  $\tilde{s}(t)$  au voisinage de l'échéance.

**Théorème 12.2** *Pour  $\alpha < 0$ , on a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{\tilde{s}(t) - x^*}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T-t) \ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}} = 1.$$

Remarque: Nous ne trouvons pas une vitesse de convergence linéaire pour  $\tilde{s}$  alors que c'est ce qui est annoncé dans le Théorème 8.1 de FRIEDMAN A., SHEN W. (2002).

**Proposition 12.1** *Soit  $t \in [0, T[$ . On pose:*

$$\mathcal{S}_t = \{x > x^* : V^e(t,x) = \psi(t,x)\}.$$

*Si  $t$  est suffisamment proche de  $T$ , on a  $\mathcal{S}_t \neq \emptyset$  et si l'on pose  $\tilde{s}^e(t) = \inf \mathcal{S}_t$ , on a  $x^* < \tilde{s}^e(t) \leq \tilde{s}(t)$ .*

Remarque: Comme  $V \geq V^e$ , il est évident que  $\tilde{s}^e \leq \tilde{s}$  et donc  $\lim_{t \rightarrow T} \tilde{s}^e(t) = x^*$ .

*Démonstration de la Proposition 12.1:*

Soit  $t \in [0, T[$ . D'après FRIEDMAN A., SHEN W. (2002), on sait que pour  $x \geq \tilde{s}(t)$ , on a

$$\psi(t,x) = V(t,x) \geq V^e(t,x).$$

Ainsi, il ne nous reste qu'à prouver que  $V^e(t, x^*) > \psi(t, x^*)$  pour  $t$  proche de  $T$ . En utilisant l'égalité  $f(x) = A_0 + a(x - x^*)^+$ , on obtient

$$\begin{aligned} V^e(t, x^*) &= \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^{x^*}) du + g(T)e^{-\rho(T-t)} f(S_{T-t}^{x^*})\right] \\ &= g(T)A_0 + ag(T)\mathbb{E}[(S_{T-t}^{x^*} - x^*)^+] + O(T-t) \\ &= \psi(t, x^*) + ag(T)\mathbb{E}[(S_{T-t}^{x^*} - x^*)^+] + O(T-t). \end{aligned}$$

Comme  $e^x - 1 \geq x$  sur  $\mathbb{R}$ , on a

$$\mathbb{E}[(S_{T-t}^{x^*} - x^*)^+] \geq x^* \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{T-t} b - \frac{\sigma(S_u^{x^*})^2}{2} du + \int_0^{T-t} \sigma(S_u^{x^*}) dW_u\right)^+\right].$$

Il existe donc une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S_{T-t}^{x^*} - x^*)^+] &\geq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{T-t} \sigma(S_u^{x^*}) dW_u - C(T-t)\right)^+\right] \\ &\geq \sigma(x^*)\sqrt{T-t}\mathbb{E}[(W_1)^+] - \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{T-t} \sigma(S_u^{x^*}) - \sigma(x^*) dW_u\right|\right] + O(T-t). \end{aligned}$$

Or  $\sigma$  est Lipschitzienne, donc on peut appliquer le lemme 2.1 pour montrer l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{T-t} (\sigma(S_u^{x^*}) - \sigma(x^*)) dW_u\right|\right] &\leq \left(\mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} (\sigma(S_u^{x^*}) - \sigma(x^*))^2 du\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{T-t} \left(\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq u \leq T-t} (\sigma(S_u^{x^*}) - \sigma(x^*))^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C(T-t). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow T} \frac{V^e(t, x^*) - \psi(t, x^*)}{x^* \sqrt{T-t}} \geq ag(T)\sigma(x^*)\mathbb{E}[(W_1)^+] > 0.$$

Ainsi, pour  $t$  suffisamment proche de  $T$ , on a  $\tilde{s}^e(t) > x^*$ .  $\diamond$

Le lemme suivant montre que  $\tilde{s}$  ne peut pas converger vers  $x^*$  avec une vitesse linéaire ou même parabolique.

**Lemme 12.1** *On a*

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{\tilde{s}(t) - x^*}{\sqrt{T-t}} \geq \lim_{t \rightarrow T} \frac{\tilde{s}^e(t) - x^*}{\sqrt{T-t}} = +\infty.$$

*Démonstration du lemme 12.1:* D'après la définition de  $\tilde{s}^e$ , on a

$$\begin{aligned} g(t)a\tilde{s}^e(t) &= \mathbb{E}\left[\int_0^{T-t} e^{-\rho u} B(S_u^{x^*}) du + g(T)e^{-\rho(T-t)} f(S_{T-t}^{x^*})\right] \\ &= ax^*g(T) + ag(T)\mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)} (S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)} - x^*)^+] + O(T-t). \end{aligned}$$

Posons  $h(t) = (\tilde{s}^e(t) - x^*)/\sqrt{T-t}$ . En reprenant les arguments de la Proposition 12.1, on peut montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathbb{E}\left[e^{-\rho(T-t)} \left(h(t) + \frac{S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)} - \tilde{s}^e(t)}{\sqrt{T-t}}\right)^+\right] + O(\sqrt{T-t}) \\ &\geq \mathbb{E}\left[e^{-\rho(T-t)} \left(h(t) + \frac{1}{\sqrt{T-t}} \int_0^{T-t} \sigma(S_u^{x^*}) dW_u\right)^+\right] + O(\sqrt{T-t}) \\ &\geq \mathbb{E}\left[e^{-\rho(T-t)} \left(h(t) + \frac{\sigma(x^*)W_{T-t}}{\sqrt{T-t}} - C\sqrt{T-t}\right)^+\right] + O(\sqrt{T-t}). \end{aligned}$$

Posons maintenant  $\eta = \liminf_{t \rightarrow T} h(t)$  et supposons que  $\eta < +\infty$ . On déduit alors du lemme de Fatou que

$$\eta \geq \mathbb{E}[(\eta + \sigma(x^*)W_1)^+].$$

C'est absurde car

$$\mathbb{E}[(\eta + \sigma(x^*)W_1)^+] > \mathbb{E}[\eta + \sigma(x^*)W_1] = \eta. \quad \diamond$$

*Démonstration du Théorème 12.2*

Dans une première étape, nous montrons que:

$$\lim_{t \rightarrow T} \frac{\tilde{s}^e(t) - x^*}{\sigma(x^*)x^* \sqrt{(T-t) \ln(\frac{1}{T-t})}} = 1,$$

puis dans un deuxième temps, nous établirons l'existence d'une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que

$$0 \leq \tilde{s}(t) - \tilde{s}^e(t) \leq C\sqrt{T-t}.$$

Comme  $f(x) = ax + a(x^* - x)^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on a:

$$\begin{aligned} ag(t)\tilde{s}^e(t) &= ag(T)\mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)}(x^* - S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)})^+] \\ &\quad + \mathbb{E}[ag(T)e^{-\rho(T-t)}S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)} + \int_0^{T-t} e^{-\rho u}B(S_u^{\tilde{s}^e(t)})du] \\ &= ag(T)\mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)}(x^* - S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)})^+] \\ &\quad + ag(T)e^{(b-\rho)(T-t)}\tilde{s}^e(t) + (T-t)B(x^*) + o(T-t). \end{aligned}$$

En écrivant un développement limité de  $g$  au voisinage de  $T$  et en simplifiant par  $ag(T)\tilde{s}^e(t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} -a\tilde{s}^e(t)g'(T)(T-t) + o(T-t) &= ag(T)\mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)}(x^* - S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)})^+] \\ &\quad + (T-t)(B(x^*) + a(b-\rho)g(T)\tilde{s}^e(t)). \end{aligned}$$

Finalement, comme  $\lim_{t \rightarrow T} \tilde{s}^e(t) = x^*$ , on a

$$ag(T)\mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)}(x^* - S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)})^+] = -\alpha A_0(T-t) + o(T-t),$$

où l'on a toujours  $\alpha = \frac{B(x^*)}{A_0} + (b - \rho)g(T) + g'(T)$ .

Maintenant, grâce au lemme 12.1, nous pouvons reprendre la démonstration de la Proposition 6.3, pour prouver que

$$\mathbb{E}[e^{-\rho(T-t)}(x^* - S_{T-t}^{\tilde{s}^e(t)})^+] \underset{t \rightarrow T}{\sim} \frac{\sigma(x^*)\sqrt{T-t}e^{-\frac{a(t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}a(t)^2},$$

avec

$$a(t) = \frac{\ln(\tilde{s}^e(t)/x^*) + (b - \sigma(x^*)^2/2)(T-t)}{\sigma(x^*)\sqrt{T-t}}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{ag(T)\sigma(x^*)\sqrt{T-t}e^{-\frac{a(t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}a(t)^2} \underset{t \rightarrow T}{\sim} -\alpha A_0(T-t)$$

et il est facile d'en déduire que

$$\frac{\tilde{s}^e(t) - x^*}{x^*\sigma(x^*)\sqrt{T-t}} \underset{t \rightarrow T}{\sim} a(t) \underset{t \rightarrow T}{\sim} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{T-t}\right)}.$$

Nous utilisons maintenant l'inéquation variationnelle satisfaite par  $V$  pour comparer  $\tilde{s}^e$  et  $\tilde{s}$  au voisinage de  $T$ . D'après la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} V(t, \tilde{s}^e(t)) &= V(t, \tilde{s}(t)) + (\tilde{s}^e(t) - \tilde{s}(t))\frac{\partial V}{\partial x}(t, \tilde{s}(t)) + \int_{s(t)}^{\tilde{s}^e(t)} (\tilde{s}^e(t) - \xi)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) d\xi \\ &= \psi(t, \tilde{s}^e(t)) + \int_{s(t)}^{\tilde{s}^e(t)} (\tilde{s}^e(t) - \xi)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\frac{\partial(V-\psi)}{\partial x}(t, x) \leq 0$  sur  $]x^*, +\infty[$  et d'après le lemme 11.2,  $\frac{\partial(V-\psi)}{\partial t}(t, x) \leq o(1)$  sur  $]x^*, +\infty[$ . Ainsi, sur l'ouvert  $]\tilde{s}^e(t), s(t)[$ , d'après l'inéquation variationnelle, on a au

sens des distributions:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(x^*)^2 x^{*2}}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) &= \rho V(t, \xi) - b\xi \frac{\partial V}{\partial x}(t, \xi) - \frac{\partial V}{\partial t}(t, \xi) \\
&\geq \rho\psi(t, \xi) - b\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, \xi) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, \xi) + o(1) \\
&\geq a\xi((\rho - b)g(T) - g'(T)) + o(1) \\
&\geq \frac{\xi}{x^*} B(x^*) + o(1) \text{ car } \alpha < 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante  $C > 0$  indépendante du temps telle que sur l'ouvert  $]\tilde{s}^e(t), s(t)[$ , on a  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t, \xi) \geq C$ . Ainsi, on obtient

$$C \frac{(\tilde{s}^e(t) - \tilde{s}(t))^2}{2} \leq V(t, \tilde{s}^e(t)) - \psi(t, \tilde{s}^e(t)).$$

Finalement, en reprenant les arguments de la démonstration de la Proposition 11.2, on peut établir l'existence d'une constante  $\tilde{C} > 0$  indépendante du temps telle que:

$$(\tilde{s}^e(t) - \tilde{s}(t))^2 \leq \tilde{C}(T - t). \quad \diamond$$

## Quatrième partie

# Frontière libre près de l'échéance d'une option américaine sur plusieurs actifs

## 13 Introduction

Les régions d'exercice d'options portant sur plusieurs actifs ont été l'objet de plusieurs études. (cf. BROADIE M., DETEMPLE J.B. (1997), VILLENEUVE S. (1999a) et VILLENEUVE S. (1999b)). Dans cette partie, nous nous intéressons à un type particulier d'options en considérant une option de vente américaine qui porte sur une combinaison linéaire de  $d$  actifs distribuant des dividendes. La fonction de valeur d'une telle option peut être vue comme la solution d'un problème à frontière libre. Celui-ci se formule de deux façons: en termes d'inéquations variationnelles et comme un problème d'arrêt optimal. Nous allons utiliser ces deux approches pour décrire la frontière au voisinage de l'échéance. La connaissance de cette frontière est d'autant plus importante que le nombre d'actifs est grand. En effet, en grande dimension il devient très difficile de calculer numériquement la valeur d'une option américaine et donc de déterminer la stratégie optimale à suivre.

Comme nous l'avons vu dans la partie II, le comportement de la frontière libre près de la maturité a été largement étudié dans le cas  $d = 1$  (cf. VAN MOERBEKE (1976), BARLES G., BURDEAU J., ROMANO M. ET SANSOEN N. (1995), LAMBERTON D. (1995), LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003) et EVANS J. D., KELLER R. J.,

KUSKE R. (2002)). Il en résulte que la régularité de la fonction de pay-off près de la limite de la frontière implique un comportement parabolique. Cependant, dans certaines situations moins régulières, un facteur logarithmique supplémentaire apparaît. Dans cette partie notre but est d'étendre ces résultats au cas multidimensionnel.

On s'intéresse donc à un marché financier composé de  $d$  actifs risqués et on note  $S_t^i$  leurs valeurs respectives à la date  $t$ . On suppose que le processus  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est solution de l'équation différentielle suivante:

$$dS_t = \text{diag}(S_t)((r\mathbb{1} - \delta)dt + \sigma dW_t) \quad (4)$$

où  $r > 0$ ,  $\mathbb{1} = (1)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\delta \in [0, +\infty[^d$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement Brownien standard sur  $\mathbb{R}^d$ . De plus, on suppose que  $\sigma$  satisfait l'hypothèse  $H_1$ , autrement dit qu'il existe  $m, M > 0$  telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad m\|x\|^2 \leq x^* \sigma \sigma^* x \leq M\|x\|^2.$$

On note  $\mathbb{F}$  la filtration de  $W$  et pour  $x \in [0, +\infty[^d$ ,  $(S_t^x)_{0 \leq t \leq T}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (4) telle que  $S_0^x = x$ .

Définissons maintenant la fonction de pay-off. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ , pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , on pose

$$f(x) = (K - \langle \alpha, x \rangle)^+.$$

Dans toute cette partie nous inverserons le temps pour simplifier les notations. La fonction de valeur d'une option américaine de maturité  $T$  et associée au pay-off  $f$ , est alors:

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)],$$

où  $\mathcal{T}_{0,t}$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[0,t]$ .

Le but de notre travail est de décrire l'ensemble suivant, appelé région d'exercice:

$$\mathcal{E} = \{(t,x) \in ]0,T] \times [0, +\infty[^d : P(t,x) = f(x)\}$$

Plus précisément, nous allons donner le comportement des sections temporelles de la région d'exercice au voisinage de 0. On rappelle que dans la partie I, nous avons introduit la notation suivante pour ces sections:

$$\forall t \in ]0,T], \quad \mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d : P(t,x) = f(x)\}.$$

Les résultats principaux sur la région d'exercice de ce type d'options sont essentiellement dûs à S. Villeneuve (cf. VILLENEUVE S. (1999a) et VILLENEUVE S. (1999b)). Nous les rappelons brièvement ici. On a  $\mathcal{E} \neq \emptyset$  et pour tout  $t \in ]0,T]$ ,  $\mathcal{E}_t$  est un sous-ensemble fermé et convexe de  $[0, +\infty[^d$ . De plus, pour  $0 \leq s < t < T$ ,  $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_s$  et nous avons vu dans la partie I que:

$$\bigcup_{0 < t \leq T} \mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d : \langle \alpha, x \rangle < K \quad \text{et} \quad \langle \alpha \delta, x \rangle < rK\} \quad \text{où} \quad \alpha \delta = (\alpha_i \delta_i)_{1 \leq i \leq d}.$$

Pour définir la vitesse de convergence de  $\mathcal{E}_t$  lorsque  $t$  tend vers 0, nous devons donner une paramétrisation de  $\mathcal{E}_t$ . Pour  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé, on pose:

$$s(t,\varepsilon) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : P(t,x\varepsilon) > f(x\varepsilon)\},$$

avec la convention suivante  $\inf \emptyset = +\infty$ . On remarque que dans les directions telles que  $\langle \alpha, \varepsilon \rangle \leq 0$  et  $\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle \leq 0$ , il n'y a pas de frontière libre. Nous allons donc restreindre notre étude aux autres directions.

D'après les propriétés précédentes, on a :

$$\mathcal{E}_t = \{x \in [0, +\infty[^d : \|x\| \leq s(t, \frac{x}{\|x\|})\}.$$

Ainsi, d'après le Théorème 2.2 de VILLENEUVE S. (1999b), pour  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé, on a :

$$s_\varepsilon := \lim_{t \rightarrow 0} s(t, \varepsilon) = \min\left\{\left[\frac{K}{\langle \alpha, \varepsilon \rangle}\right]^+, \left[\frac{rK}{\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle}\right]^+\right\},$$

avec la notation suivante :

$$[x]^+ = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque: Si  $r\langle \alpha, \varepsilon \rangle^+ < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle$ , la fonction de pay-off est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de la limite de la frontière libre, dans les autres directions les dérivées de  $f$  sont discontinues. Comme dans le cas  $d = 1$ , nous allons donc diviser notre étude en deux parties:  $r\langle \alpha, \varepsilon \rangle^+ < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle$  et  $\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle^+ \leq r\langle \alpha, \varepsilon \rangle$ .

Dans la section 14, on étudie le premier cas. Nous allons utiliser la régularité de  $f$  au voisinage de  $s_\varepsilon \varepsilon$  pour obtenir un développement limité de la fonction de valeur  $P$  près de  $(0, s_\varepsilon \varepsilon)$  (cf. Théorème 14.1). Nous relierons ensuite ce développement limité à celui de  $s$  et nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème 13.1** *Soit  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé, tel que  $r\langle \alpha, \varepsilon \rangle^+ < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle$ . On a*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)) \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle}{\sigma_\varepsilon s_\varepsilon \sqrt{t}} = -y^*,$$

$$\text{avec } \sigma_\varepsilon = \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{i,j} \alpha_i \delta_i \varepsilon_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas d'une diffusion unidimensionnelle à coefficients indépendants du temps, le lien entre le développement de  $P$  et celui de  $s$  est obtenu en trouvant un minorant de  $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$  grâce à l'inéquation variationnelle satisfaite par  $P$  (voir la démonstration du Théorème

6.2). Cependant, dans le cas  $d > 1$ , l'inéquation variationnelle ne donne pas suffisamment d'informations sur les dérivées secondes de  $P$  et nous surmonterons cette difficulté grâce au principe du maximum présenté dans la partie I.

La section 15 est consacrée à l'étude du second cas. Comme dans le cas  $d = 1$ , on définit une frontière libre européenne et on donne sa vitesse de convergence lorsque  $t$  tend vers 0 (cf. Théorème 15.1). On prouve alors que les frontières européennes et américaines sont suffisamment proches pour avoir le même comportement au voisinage de 0 et on obtient le Théorème suivant.

**Théorème 13.2** *Soit  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé. Supposons que  $\langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle^+ < r\langle \alpha, \varepsilon \rangle$ . On a alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{K - \langle \alpha, \varepsilon \rangle s(t, \varepsilon)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon K \sqrt{t \ln(\frac{1}{t})}} = 1,$$

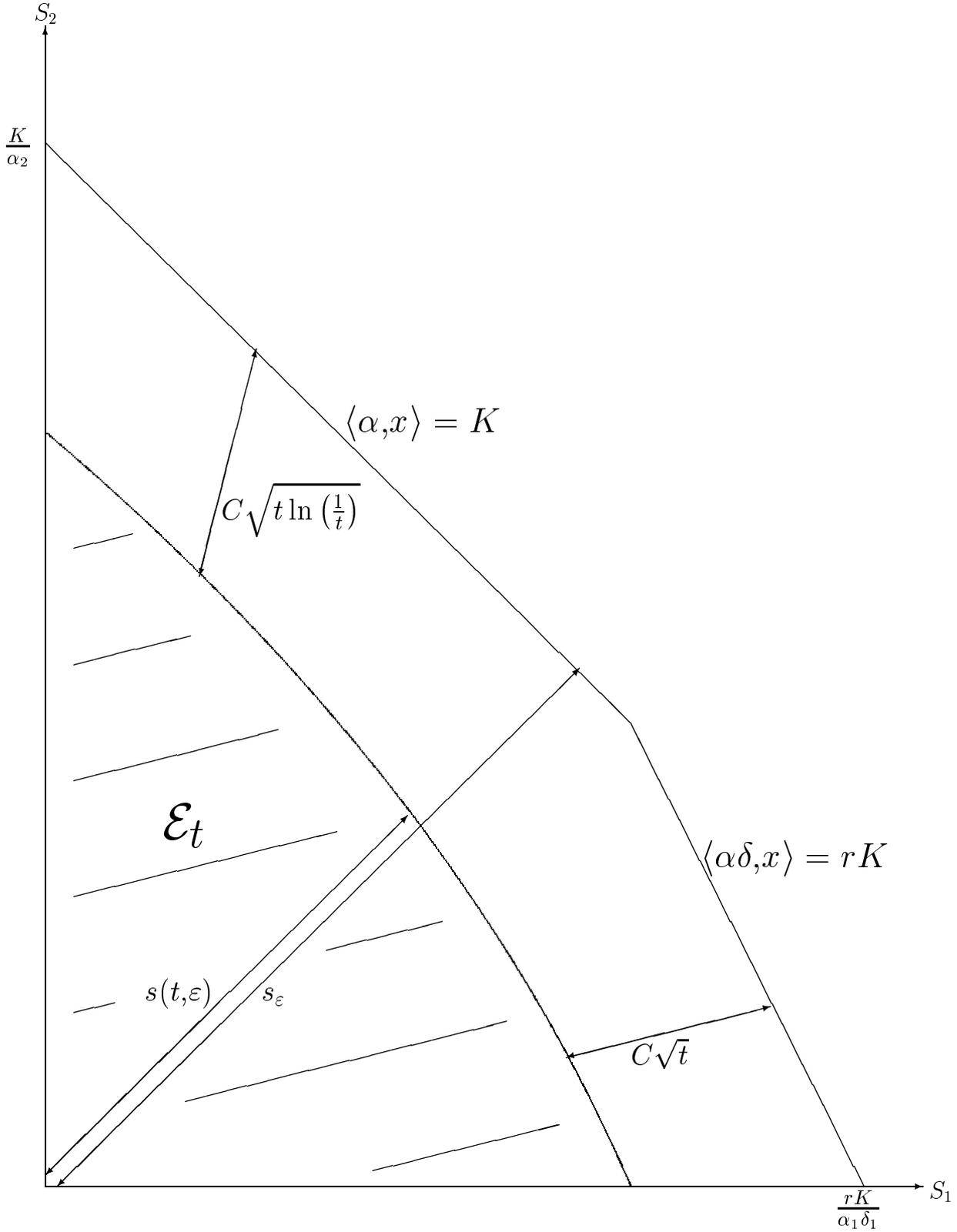
où l'on a posé  $\tilde{\sigma}_\varepsilon = \left( \sum_{j=1}^d \left( \sum_{i=1}^d \alpha_i \sigma_{i,j} \varepsilon_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Cette comparaison entre les deux frontières repose encore une fois sur le principe du maximum.

Le schéma suivant résume nos notations et nos résultats dans le cas  $d = 2$ . Pour ce schéma, on suppose que l'on a

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad \text{et} \quad \delta_2 < r < \delta_1.$$

Illustration des Théorèmes 13.1 et 13.2.



## 14 Le cas régulier

Pour toute cette section, on introduit une direction  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  telle que  $\|\varepsilon\| = 1$  et  $r\langle\alpha, \varepsilon\rangle^+ < \langle\alpha\delta, \varepsilon\rangle$ . Dans ce cas, on rappelle que l'on a  $s_\varepsilon = \frac{rK}{\langle\alpha\delta, \varepsilon\rangle}$ .

### 14.1 Développement de la fonction de valeur

**Théorème 14.1** Soient  $y \in \mathbb{R}^-$  et  $C \geq 0$ . On a :

$$P(t, s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \varepsilon) = f(s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \varepsilon) + t^{\frac{3}{2}} s_\varepsilon \phi \left( \frac{\langle\alpha\delta, \varepsilon\rangle}{\sigma_\varepsilon} y \right) + o(t^{\frac{3}{2}}).$$

avec  $\sigma_\varepsilon = \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{i,j} \alpha_i \delta_i \varepsilon_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  et, pour  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau y + W_u \, du \right].$$

*Démonstration du Théorème 14.1:* Soit  $z \in [0, +\infty[^d$  tel que  $\langle\alpha, z\rangle < K$ . En adaptant la démonstration du Théorème 7.1 au cas multidimensionnel, on obtient

$$P(t, z) = f(z) + t \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \langle\alpha\delta, z\rangle - rK + \sqrt{t} \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sigma_{i,j} \alpha_i \delta_i z_i W_u^j \, du \right] + o(t^{\frac{3}{2}}).$$

On pose alors  $\sigma_z = \left( \sum_{j=1}^d \left( \sum_{i=1}^d \sigma_{i,j} \alpha_i \delta_i z_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  et on a

$$P(t, z) = f(z) + t \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \langle\alpha\delta, z\rangle - rK + \sqrt{t} \sigma_z B_u \, du \right] + o(t^{\frac{3}{2}}),$$

où  $(B_u)_{0 \leq u \leq T}$  est un mouvement Brownien standard sur  $\mathbb{R}$ .

On réécrit alors l'égalité précédente avec  $z = s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \varepsilon$  et on remarque que

$$\langle\alpha\delta, z\rangle - rK = s_\varepsilon \langle\alpha\delta, \varepsilon\rangle - rK + y\sqrt{t} s_\varepsilon \langle\alpha\delta, \varepsilon\rangle + o(\sqrt{t})$$

$$= rKy\sqrt{t} + o(\sqrt{t}).$$

D'autre part, la fonction  $x \rightarrow \sigma_x$  est homogène et on a

$$\sigma_z = \|z\| \sigma_{\frac{z}{\|z\|}} = s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \sigma_\varepsilon = s_\varepsilon \sigma_\varepsilon + o(1).$$

Ainsi, on obtient,

$$P(t, s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \varepsilon) = f(s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \varepsilon) + s_\varepsilon \sigma_\varepsilon t^{\frac{3}{2}} \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau \frac{\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle}{\sigma_\varepsilon} y + B_u du \right] + o(t^{\frac{3}{2}}).$$

Or pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\mathbb{E} \left[ \int_0^1 |g(B_u)| du \right] < +\infty$ , il est facile de voir que l'équation de la programmation dynamique, entraîne:

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau g(B_u) du \right] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,1}^B} \mathbb{E} \left[ \int_0^\tau g(B_u) du \right],$$

où  $\mathcal{T}_{0,1}^B$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}_B$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[0,1]$ .

En appliquant cela à la fonction définie par  $g(x) = \frac{\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle}{\sigma_\varepsilon} y + x$  sur  $\mathbb{R}$ , on obtient le résultat.

◇

## 14.2 Frontière libre près de la maturité

D'après le lemme 1 dans LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003), on sait qu'il existe  $y^* \in ]-1,0[$  tel que:

$$\forall y \leq y^*, \phi(y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y > y^*, \phi(y) > 0,$$

et nous pouvons établir le Théorème 13.1, principal résultat de cette section.

*Démonstration du Théorème 13.1:* Posons  $z^* = \frac{\sigma_\varepsilon y^*}{\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle}$ .

Minoration de la liminf:

Soit  $y > z^*$ . Une première conséquence du Théorème 14.1 et du lemme 1 de LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003), est que pour  $t$  suffisamment petit, on a:

$$P(t, s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}}) > f(s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}}).$$

Ainsi,  $s_\varepsilon e^{y\sqrt{t}} \geq s(t, \varepsilon)$  et en développant l'exponentielle, on obtient:

$$\frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{s_\varepsilon \sqrt{t}} \geq -y + o(1).$$

On a alors

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{s_\varepsilon \sqrt{t}} \geq -y.$$

Finalement, pour  $y$  tendant vers  $z^*$ , on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{(s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)) \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle}{\sigma_\varepsilon s_\varepsilon \sqrt{t}} \geq -y^*.$$

Majoration de la limsup:

Soit  $\varepsilon \in ]0, +\infty[^d$  normé tel que  $\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle > r \langle \alpha, \varepsilon \rangle^+$ .

Nous allons appliquer le principe du maximum vu dans la section 2.1 dans un domaine de  $]0, T[ \times ]0, +\infty[^d$  qui sera une partie d'un cône centré sur la direction  $\varepsilon$ . Pour contrôler la fonction  $P$  dans ce domaine, l'angle au sommet de ce cône ne devra pas être trop grand. Nous le définissons dans ce qui suit.

Soit  $0 < \eta < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle / \|\alpha \delta\|$ . On supposera que  $\eta$  est suffisamment petit pour vérifier

$$\forall x \in [0, +\infty[^d - \{0\}, \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\| \leq \eta \Rightarrow \langle \alpha \delta, x \rangle > r \langle \alpha, x \rangle^+.$$

D'autre part, il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $\varepsilon$  telle que pour tout  $\forall x \in [0, +\infty[^d - \{0\}$ , on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\| \leq \eta \Rightarrow \frac{\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} y^* \geq z^* - C\eta.$$

Soit  $z < z^* - C\eta$ . Montrons qu'il existe  $0 < t_1 \leq T$  tel que

$$\forall t \in ]0, t_1[, s(t, \varepsilon) \leq s_\varepsilon e^{z\sqrt{t}}.$$

Posons maintenant

$$\beta(t, x) = \gamma \left( \left( 1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}} \right)^+ \right)^3 + t \left( \left( \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\|^2 - \frac{\eta^2}{4} \right)^+ \right)^3,$$

où  $\gamma$  est une constante strictement positive que l'on déterminera plus tard. L'idée de notre démonstration consiste à appliquer le principe du maximum à la fonction  $P - f - \beta$  avec l'opérateur suivant:

$$\tilde{\mathcal{L}}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma^* \sigma)_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d (r - \delta_i) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ru \right).$$

sur un domaine que nous allons déterminer pour montrer que  $P - f - \beta$  est négative sur ce domaine. Comme  $\beta$  s'annule aux points  $(t, s_\varepsilon e^{z\sqrt{t}})$ , cela entraînera que  $s_\varepsilon e^{z\sqrt{t}} \leq s(t, \varepsilon)$ . Il nous reste à déterminer le domaine de  $]0, T[ \times ]0, +\infty[^d$  que nous étudierons. On introduit  $y_1 \in ]y^*, 0[$ . Nous choisirons  $y_1$  plus précisément dans la suite. En fait, nous jouerons sur le choix de  $\gamma$  et de  $y_1$  pour que la fonction  $P - f - \beta$  vérifie les hypothèses du principe du maximum.

Nous pouvons désormais définir notre domaine d'étude. Soit  $t_1 \in ]0, T]$ , on pose:

$$D = \left\{ (t, x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d : \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\| \leq \eta \text{ et } s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) < \|x\| < h(t, x) \right\},$$

avec

$$h(t,x) = \frac{\|x\| rK}{\langle \alpha\delta, x \rangle} \exp\left(\frac{\sigma_x}{\langle \alpha\delta, x \rangle} y_1 \sqrt{t}\right).$$

Dans la suite, nous utiliserons la notation suivante  $z_1^x = \frac{\sigma_x}{\langle \alpha\delta, x \rangle} y_1$ .

En premier lieu, on remarque que pour  $(t,x) \in D$ , on a

$$0 < \langle \alpha\delta, x \rangle < \langle \alpha\delta, \frac{x}{\|x\|} \rangle h(t,x) = rK \exp\left(\frac{\sigma_x}{\langle \alpha\delta, x \rangle} y_1 \sqrt{t}\right) < rK e^{z_1^x \sqrt{t}}.$$

Cela implique que  $D$  est un domaine borné car on a

$$rK > \langle \alpha\delta, x \rangle \geq \|x\| (\langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha\delta\|).$$

Nous utilisons maintenant cette propriété pour montrer que  $P - f - \beta$  est négative sur la frontière parabolique de  $D$  et que  $\tilde{\mathcal{L}}(P - f - \beta) \leq 0$  sur  $D$ .

Soit  $(t,x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d$  tel que  $\|x\| = s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right)$ . On a alors

$$[P - f - \beta](t,x) = -\beta(t,x) \leq 0.$$

D'autre part, pour  $(t,x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d$  tel que  $\|\frac{x}{\|x\|} - \varepsilon\| = \eta$ , on a

$$[P - f - \beta](t,x) \leq [P - f](t,x) - \frac{27}{64} \eta^6 t.$$

Or  $P - f$  est convexe et pour  $(t,x) \in D$ , on a  $s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) < \|x\| < h(t,x)$  donc en écrivant que

$$\|x\| = \lambda h(t,x) + (1 - \lambda) s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right),$$

avec  $\lambda \in ]0, 1[$  on obtient

$$[P - f](t,x) = [P - f]\left(t, \lambda h(t,x) \frac{x}{\|x\|} + (1 - \lambda) s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda [P - f] \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right) + (1 - \lambda) [P - f] \left( t, s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) \frac{x}{\|x\|} \right) \\
&= \lambda [P - f] \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right) \\
&\leq [P - f] \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right).
\end{aligned}$$

Le Théorème 14.1 nous permet alors d'obtenir la majoration suivante:

$$\begin{aligned}
[P - f - \beta](t, x) &\leq [P - f] \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right) - \frac{27}{64} \eta^6 t \\
&= t^{\frac{3}{2}} \frac{rK\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} \phi(y_1) - \frac{27}{64} \eta^6 t + o(t^{\frac{3}{2}}) \\
&\leq 0 \quad \text{pour } t_1 \text{ suffisamment petit.}
\end{aligned}$$

Considérons maintenant  $(t, x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d$  tel que  $\|x\| = h(t, x)$ . Toujours d'après le Théorème 14.1, on a

$$\begin{aligned}
[P - f - \beta](t, x) &= [P - f - \beta] \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right) \\
&= t^{\frac{3}{2}} \frac{rK\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} \phi(y_1) - \beta \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right) + o(t^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Or on a

$$\beta \left( t, h(t, x) \frac{x}{\|x\|} \right) = \gamma \left( \left( 1 - \frac{\|x\| rK}{h(t, x) \langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}} \right)^+ \right)^3 = \gamma \left( \left( 1 - e^{(z-z_1^x)\sqrt{t}} \right)^+ \right)^3,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
[P - f - \beta](t, x) &\leq t^{\frac{3}{2}} \frac{rK\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} \phi(y_1) - \gamma \left( 1 - e^{(z-z_1^x)\sqrt{t}} \right)^3 + o(t^{\frac{3}{2}}) \\
&= t^{\frac{3}{2}} \left( \frac{rK\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} \phi(y_1) - \gamma (z_1^x - z)^3 \right) + o(t^{\frac{3}{2}}).
\end{aligned}$$

Cependant, on a vu que

$$z_1^x - z = \frac{\sigma_x}{\langle \alpha \delta \rangle} y_1 - z \geq \frac{\sigma_x}{\langle \alpha \delta \rangle} y^* - z \geq z^* - C\eta - z.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} [P - f - \beta](t, x) &\leq t^{\frac{3}{2}} \frac{rK\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} \left( \phi(y_1) - \gamma \frac{\langle \alpha \delta, x \rangle}{rK\sigma_x} (z^* - C\eta - z)^3 \right) + o(t^{\frac{3}{2}}) \\ &\leq t^{\frac{3}{2}} \frac{rK\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} \left( \phi(y_1) - \gamma \frac{\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|}{rK\sqrt{M} \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|} (z^* - C\eta - z)^3 \right) \\ &\quad + o(t^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

En effet, si l'on note  $\alpha \delta x$  le vecteur de coordonnées  $\alpha_i \delta_i x_i$ , on a

$$\sigma_x = \|\sigma(\alpha \delta x)\| \leq \sqrt{M} \|\alpha \delta x\|^2 \leq \sqrt{M} \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i| \|x\|$$

et d'autre part, on a

$$\langle \alpha \delta, x \rangle = \|x\| \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle + \langle \alpha \delta, x - \|x\| \varepsilon \rangle \geq \|x\| (\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|).$$

Comme  $\phi$  est continue, croissante sur  $\mathbb{R}$  et que  $\phi(y^*) = 0$ , il existe  $y_1 \in ]y^*, 0[$  tel que:

$$\phi(y_1) < \gamma \frac{\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|}{rK\sqrt{M} \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|} (z^* - C\eta - z)^3.$$

On a alors, par définition de  $y_1$ ,  $[P - f - \beta](t, x) \leq 0$  pour  $t_1$  suffisamment petit.

Finalement, pour  $x \in ]0, +\infty[^d$  tel que  $(0, x) \in \delta_p D$ , on a

$$[P - f - \beta](0, x) = -\beta(0, x) \leq 0.$$

Ainsi  $P - f - \beta$  est négative sur la frontière parabolique de  $D$ . Il nous reste à démontrer que c'est aussi le cas de  $\tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta]$  sur  $D$ . D'après la définition de  $D$ ,  $D$  est inclus dans la région de continuation de  $P$  donc  $\tilde{\mathcal{L}}P = 0$  sur  $D$ . De plus, pour  $(t, x) \in D$ , on a  $\langle \alpha, x \rangle < \langle \alpha \delta, x \rangle / r \leq K$  donc  $\tilde{\mathcal{L}}f(t, x) = -(rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)$  sur  $D$ . Ainsi, sachant que pour  $(t, x) \in D$ ,  $\langle \alpha \delta, x \rangle \leq rK e^{z^* \sqrt{t}}$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta](t, x) &= -(rK - \langle \alpha \delta, x \rangle) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \\ &\leq -rK \left(1 - e^{z^* \sqrt{t}}\right) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \\ &\leq rK \frac{\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} y_1 \sqrt{t} - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) + o(\sqrt{t}) \\ &\leq rK y_1 \sqrt{\frac{m}{d}} \sqrt{t} - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) + o(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\sigma_x = \|\sigma(\alpha \delta x)\| \geq \sqrt{m} \|\alpha \delta x\| \geq \sqrt{\frac{m}{d}} \langle \alpha \delta, x \rangle.$$

Il nous reste maintenant à estimer  $\tilde{\mathcal{L}}\beta$  sur  $D$ . Soit  $(t, x) \in D$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t}(t, x) &= -3z\gamma \frac{rK}{2\langle \alpha \delta, x \rangle \sqrt{t}} \left( \left(1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}}\right)^+ \right)^2 + \left( \left( \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\|^2 - \frac{\eta^2}{4} \right)^+ \right)^3 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De plus, pour  $1 \leq i \leq d$ , il existe une fonction  $g_i$  de  $]0, +\infty[^d$  dans  $\mathbb{R}$  bornée uniformément sur tout compact de  $]0, +\infty[^d$  telle que

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_i}(t, x) = 3\gamma \frac{rK \alpha_i \delta_i e^{z\sqrt{t}}}{\langle \alpha \delta, x \rangle^2} \left( \left(1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}}\right)^+ \right)^2 + t g_i(x).$$

De même, pour  $1 \leq i, j \leq d$ , il existe une fonction  $g_{i,j}$  de  $]0, +\infty[^d$  dans  $\mathbb{R}$  bornée uniformément sur tout compact de  $]0, +\infty[^d$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) &= 6\gamma \frac{r^2 K^2 \alpha_i \delta_i \alpha_j \delta_j e^{2z\sqrt{t}}}{\langle \alpha \delta, x \rangle^4} \left(1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}}\right)^+ \\ &\quad - 6\gamma \frac{rK \alpha_i \delta_i \alpha_j \delta_j e^{z\sqrt{t}}}{\langle \alpha \delta, x \rangle^3} \left( \left(1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}}\right)^+ \right)^2 \\ &\quad + t g_{i,j}(x). \end{aligned}$$

On remarque alors que pour  $(t, x) \in D$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \left(1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}}\right)^+ \right)^p &\leq \left(1 - e^{(z-z_1)\sqrt{t}}\right)^p \\ &\leq \left( \frac{\sigma_x}{\langle \alpha \delta, x \rangle} y_1 - z \right)^p t^{\frac{p}{2}} + o(t^{\frac{p}{2}}) \\ &\leq (z^* - C\eta - z)^p t^{\frac{p}{2}} + o(t^{\frac{p}{2}}). \end{aligned}$$

Grâce à cette remarque, au fait que  $x$  est proche de  $\|x\|\varepsilon$  sur  $D$ , et aux calculs des dérivées partielles de  $\beta$ , il est possible d'affirmer que pour  $(t, x) \in D$  on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) &= -3\gamma \frac{r^2 K^2 e^{2z\sqrt{t}}}{\langle \alpha \delta, x \rangle^4} \sum_{i,j=1}^d (\sigma^* \sigma)_{i,j} x_i x_j \alpha_i \delta_i \alpha_j \delta_j \left(1 - \frac{rK}{\langle \alpha \delta, x \rangle} e^{z\sqrt{t}}\right)^+ + o(\sqrt{t}) \\ &= -3\gamma \frac{r^2 K^2 \sigma_x^2}{\langle \alpha \delta, x \rangle^4} (z_1^x - z) \sqrt{t} + o(\sqrt{t}), \end{aligned}$$

où le terme  $o(\sqrt{t})$  ne dépend pas de  $x$  car  $D$  est inclus dans un compact de  $]0, +\infty[^d$ .

On obtient alors

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta](t, x) &\leq rK y_1 \frac{m}{\sqrt{d}} \sqrt{t} + 3\gamma \frac{r^2 K^2 \sigma_x^2}{\langle \alpha \delta, x \rangle^4} (z_1^x - z) \sqrt{t} + o(\sqrt{t}) \\ &\leq rK \sqrt{t} \left( y_1 \frac{m}{\sqrt{d}} - 3\gamma \frac{rK \sigma_x^2}{\langle \alpha \delta, x \rangle^4} z \right) + o(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Or on a vu que

$$\langle \alpha \delta, x \rangle^2 \geq \|x\|^2 (\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_x^2}{\langle \alpha \delta, x \rangle^2} \leq \frac{M \max_{1 \leq i \leq d} (\alpha_i \delta_i)^2}{(\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^2}$$

donc on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} [P - f - \beta] (t, x) &\leq rK \sqrt{t} \left( y_1 \frac{m}{\sqrt{d}} - 3\gamma \frac{rKM \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|^2}{\langle \alpha \delta, x \rangle^2 (\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^2} z \right) + o(\sqrt{t}) \\ &\leq rK \sqrt{t} \left( y_1 \frac{m}{\sqrt{d}} - 3\gamma \frac{r^2 K^2 M \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|^2}{\|x\|^2 (\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^4} z \right) + o(\sqrt{t}). \end{aligned}$$

De plus, la fonction  $(t, x) \rightarrow s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right)$  est continue, donc pour  $t_1$  suffisamment petit, on

a

$$\|x\| > s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) > \frac{rK \|x\|}{2 \langle \alpha \delta, x \rangle} \geq \frac{rK}{2 \|\alpha \delta\|},$$

donc on obtient

$$\tilde{\mathcal{L}} [P - f - \beta] (t, x) \leq rK \sqrt{t} \left( y_1 \frac{m}{\sqrt{d}} - 3\gamma \frac{4 \|\alpha \delta\|^2 M \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|^2}{(\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^4} z \right) + o(\sqrt{t}).$$

On choisit alors  $\gamma$  tel que

$$y^* < 3\gamma \frac{\sqrt{d} 4 \|\alpha \delta\|^2 M \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|^2}{m (\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^4} z$$

et on peut supposer que l'on a

$$y^* < y_1 < 3\gamma \frac{\sqrt{d} 4 \|\alpha \delta\|^2 M^2 \max_{1 \leq i \leq d} |\alpha_i \delta_i|^2}{m (\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha \delta\|)^4} z.$$

Ainsi, le choix de  $\gamma$  puis de  $y_1$  implique  $\tilde{\mathcal{L}} [P - f - \beta] \leq 0$  sur  $D$  pour  $t_1$  petit.

Nous pouvons désormais appliquer le principe du maximum et affirmer que  $P - f - \beta \leq 0$  sur  $D$ .

En particulier, si l'on suppose qu'il existe  $(t, \xi) \in ]0, t_1[ \times \mathbb{R}$  tel que  $s(t, \varepsilon) < \xi < s_\varepsilon e^{z\sqrt{t}}$ , on a alors

$$0 < [P - f](t, \xi_\varepsilon) = [P - f - \beta](t, \xi_\varepsilon) \leq 0.$$

C'est absurde donc pour tout  $t \in ]0, t_1[$ , on a

$$s_\varepsilon e^{z\sqrt{t}} \leq s(t, \varepsilon).$$

En développant l'exponentielle et en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{\sqrt{t}} \leq -z.$$

Ceci étant valable pour tout  $z < z^* - C\eta$ , on a

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{\sqrt{t}} \leq -z^* + C\eta.$$

Enfin, en faisant tendre  $\eta$  vers 0, on obtient le résultat annoncé pour tout  $\varepsilon \in ]0, +\infty[^d$  normé tel que  $\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle > r \langle \alpha, \varepsilon \rangle^+$ .

Si une coordonnée de  $\varepsilon$  est nulle, on peut se ramener à un problème de dimension  $d - 1$ , en supposant que l'actif correspondant est nul. On conclut alors par un raisonnement par récurrence que le résultat est vrai pour tout  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé tel que  $\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle > r \langle \alpha, \varepsilon \rangle^+$ , car il est vrai lorsque  $d = 1$ .  $\diamond$

## 15 Le cas irrégulier

### 15.1 Frontière européenne près de l'échéance

La fonction de valeur d'une option européenne de maturité  $T$  et de pay-off  $f$  sera notée  $P^e$  et on rappelle que

$$P^e(t, x) = \mathbb{E}[e^{-rt}(K - \langle \alpha, S_t^x \rangle)^+] \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^d.$$

Or, pour  $t \in [0, T]$ ,  $x \rightarrow P^e(t, x\varepsilon)$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}$  donc il existe une unique solution de l'équation  $P^e(t, x\varepsilon) = f(x\varepsilon)$ . Cette solution est notée  $s^e(t, \varepsilon)$ . Posons

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon = \left( \sum_{j=1}^d \left( \sum_{i=1}^d \alpha_i \sigma_{i,j} \varepsilon_i \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le résultat principal de cette section est le Théorème suivant:

**Théorème 15.1** *Soit  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé. Supposons que  $\langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle^+ < r \langle \alpha, \varepsilon \rangle$ . On a alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{K - \langle \alpha, \varepsilon \rangle s^e(t, \varepsilon)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon K \sqrt{(t) \ln(\frac{1}{t})}} = 1.$$

La Démonstration de ce Théorème repose sur le lemme suivant.

**Lemme 15.1** *Pour  $t \in ]0, T]$ , on pose:*

$$a(t) = \frac{K - \langle \alpha, \varepsilon \rangle s^e(t, \varepsilon)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon s^e(t, \varepsilon) \sqrt{t}}.$$

*On a alors*

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = +\infty.$$

*Démonstration du lemme 15.1:* Soit  $t \in ]0, T]$ . Par définition de  $s^e(t, \varepsilon)$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_\varepsilon s^e(t, \varepsilon) \sqrt{t} a(t) &= \mathbb{E}[e^{-rt} (K - \langle \alpha, s^e(t, \varepsilon) S_t^\varepsilon \rangle)^+] \\ &= \mathbb{E}[e^{-rt} (\tilde{\sigma}_\varepsilon s^e(t, \varepsilon) \sqrt{t} a(t) - s^e(t, \varepsilon) \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle)^+]. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$a(t) = \mathbb{E}[e^{-rt} \left( a(t) - \frac{\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle}{\tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t}} \right)^+].$$

Or on sait que

$$\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle = \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i \left( \exp \left( (r - \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2) t + \sqrt{t} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} W_1^j \right) - 1 \right),$$

le lemme de Fatou nous permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow 0} a(t) &\geq \mathbb{E} \left[ \left( \liminf_{t \rightarrow 0} a(t) - \frac{\sum_{i,j=1}^d \alpha_i \varepsilon_i \sigma_{i,j} W_1^j}{\tilde{\sigma}_\varepsilon} \right)^+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \liminf_{t \rightarrow 0} a(t) - g \right)^+ \right], \end{aligned}$$

où  $g$  suit une loi gaussienne standard. Supposons maintenant que  $\liminf_{t \rightarrow 0} a(t) = \eta \in \mathbb{R}$ .

Cela impliquerait que  $\eta \geq \mathbb{E}[(\eta - g)^+] > \eta$ , et c'est donc absurde.  $\diamond$

*Démonstration du Théorème 15.1*

Première étape:

Soit  $t \in ]0, T]$ . La définition du prix critique européen implique que:

$$\begin{aligned} K - \langle \alpha, \varepsilon \rangle s^e(t, \varepsilon) &= P^e(t, s^e(t, \varepsilon)) \varepsilon \\ &= e^{-rt} \left( K - s^e(t, \varepsilon) \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i e^{(r - \delta_i)t} \right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ e^{-rt} (\langle \alpha, S_t^\varepsilon \rangle s^e(t, \varepsilon) - K)^+ \right]. \end{aligned}$$

On a donc

$$(1 - e^{-rt})(K - s^e(t, \varepsilon)\langle \alpha, \varepsilon \rangle) + s^e(t, \varepsilon) \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i (e^{-\delta_i t} - e^{-rt}) = \mathbb{E} \left[ e^{-rt} (\langle \alpha, S_t^\varepsilon \rangle s^e(t, \varepsilon) - K)^+ \right].$$

En divisant cette égalité par  $s^e(t, \varepsilon)$ , on obtient:

$$(1 - e^{-rt}) \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) + \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i (e^{-\delta_i t} - e^{-rt}) = \mathbb{E} \left[ e^{-rt} \left( \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right].$$

Or  $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{ta}(t) = 0$ , donc en développant les exponentielles, on a

$$(r \langle \alpha, \varepsilon \rangle - \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle) t \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E} \left[ \left( \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right].$$

Deuxième étape: Pour  $t \in ]0, T]$  et  $1 \leq i \leq d$ , on pose

$$X_t^i = \left( r - \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2 \right) t + \sqrt{t} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} W_1^j.$$

On a alors

$$\mathbb{E} \left[ \left( \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i (e^{X_t^i} - 1) - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right]$$

et nous allons montrer que

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i (e^{X_t^i} - 1) - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right] \stackrel{\theta \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i X_t^i - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right].$$

Posons  $\varepsilon X_t = (\varepsilon_i X_t^i)_{1 \leq i \leq d}$  et cherchons un majorant de  $D(t)$  où

$$D(t) := \left| \mathbb{E} \left[ \left( \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ - \left( \langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta}(t) \right)^+ \right] \right|.$$

On a

$$\begin{aligned}
D(t) &\leq \mathbb{E}[|\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon X_t - \varepsilon \rangle| \mathbb{1}_{\{\min(\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle; \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle) \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}\}}] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[|\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}| \mathbb{1}_{\{\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)} > \langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle\}}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[|\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}| \mathbb{1}_{\{\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)} > \langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon X_t - \varepsilon \rangle| \left(\mathbb{1}_{\{\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}\}} + \mathbb{1}_{\{\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}\}}\right)\right].
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'écrire

$$D(t) \leq \sqrt{\mathbb{E}[|\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon X_t - \varepsilon \rangle|^2]} \left( \sqrt{\mathbb{P}(\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)})} + \sqrt{\mathbb{P}(\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)})} \right).$$

Or, comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x}{2}e^{|x|}$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon X_t - \varepsilon \rangle|^2] &\leq d \sum_{i=1}^d \alpha_i^2 \varepsilon_i^2 \mathbb{E}\left[\left(e^{X_t^i} - 1 - X_t^i\right)^2\right] \\
&\leq \frac{d}{2} \sum_{i=1}^d \alpha_i^2 \varepsilon_i^2 \mathbb{E}\left[(X_t^i)^4 e^{2|X_t^i|}\right].
\end{aligned}$$

De plus,  $\mathbb{E}\left[e^{2|X_t^i|}\right] < +\infty$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  donc il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $t$  suffisamment petit on a

$$\mathbb{E}[|\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon X_t - \varepsilon \rangle|^2] \leq Ct^2.$$

D'autre part, les processus  $(\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle / \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t})_{0 \leq t \leq T}$  et  $(\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle / \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t})_{0 \leq t \leq T}$  tendent en loi vers une loi gaussienne standard et  $\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = +\infty$  d'après le lemme 15.1. Ainsi on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}\right) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle \geq \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{ta(t)}\right)$$

et on en déduit que  $D(t) = o(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0.

Troisième étape: Nous allons prouver que

$$\mathbb{E}\left[\left(\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t} a(t)\right)^+\right] \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{t} e^{-\frac{a(t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} a(t)^2}.$$

Posons  $b(t) = a(t) - \frac{\sqrt{t}}{\tilde{\sigma}_\varepsilon} \sum_{i=1}^d \alpha_i \varepsilon_i \left(r - \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2\right)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\langle \alpha, \varepsilon X_t \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t} a(t)\right)^+\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sqrt{t} \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \sigma_{i,j} \alpha_i \varepsilon_i\right) W_1^j - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t} b(t)\right)^+\right] \\ &= \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t} \mathbb{E}[(g - b(t))^+], \end{aligned}$$

où  $g$  suit une loi gaussienne standard. On déduit donc du lemme 15.1 que

$$\mathbb{E}[(g - b(t))^+] \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{-\frac{b(t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} b(t)^2} \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{e^{-\frac{a(t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} a(t)^2}.$$

Conclusion: Il découle immédiatement des étapes précédentes que

$$(r \langle \alpha, \varepsilon \rangle - \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle) t \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \mathbb{E}\left[\left(\langle \alpha, S_t^\varepsilon - \varepsilon \rangle - \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t} a(t)\right)^+\right] \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{t} e^{-\frac{a(t)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} a(t)^2}.$$

Cela implique que  $a(t) \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}$ .  $\diamond$

## 15.2 Le cas américain

Nous allons maintenant comparer les frontières européenne et américaine pour montrer qu'elles ont le même comportement au voisinage de l'échéance. Le but de cette section est donc d'établir le Théorème 13.2.

*Démonstration du Théorème 13.2:*

Soit  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé tel que  $\langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle^+ < r\langle \alpha, \varepsilon \rangle$ .

Minoration de la liminf:

Sur l'ensemble  $]0, T] \times [0, +\infty[^d$ , on a  $P(t, x) \geq P^e(t, x)$  donc  $s(t, \varepsilon) \leq s^e(t, \varepsilon)$ . Ainsi, on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon s_\varepsilon \sqrt{t \ln(\frac{1}{t})}} \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s^e(t, \varepsilon)}{\tilde{\sigma}_\varepsilon s_\varepsilon \sqrt{t \ln(\frac{1}{t})}} = 1.$$

Majoration de la limsup:

Encore une fois, nous ne sommes pas capables de déduire de l'inéquation variationnelle satisfaite par  $P$  suffisamment d'informations sur les dérivés secondes de  $P$  pour utiliser la formule de Taylor entre  $s(t, \varepsilon)$  et  $s^e(t, \varepsilon)$  et en déduire un majorant de leur différence. Pour surmonter cette difficulté, nous allons utiliser le même principe du maximum parabolique que dans la section précédente dans un domaine qui sera à nouveau une partie d'un cône centré sur la direction  $\varepsilon$ .

Soit  $0 < \eta < (r\langle \alpha, \varepsilon \rangle - \langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle) / \|r\alpha - \alpha\delta\|$ . On supposera que  $\eta$  est suffisamment petit pour vérifier

$$\forall x \in [0, +\infty[^d - \{0\}, \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\| \leq \eta \Rightarrow r\langle \alpha, x \rangle > \langle \alpha\delta, x \rangle^+.$$

D'autre part, il existe une constante  $C > 0$  ne dépendant que de  $\alpha$ ,  $\delta$  et  $\varepsilon$  telle que pour tout  $\forall x \in [0, +\infty[^d - \{0\}$ , on ait

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\| \leq \eta \Rightarrow \tilde{\sigma}_x \leq \|x\| (\tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta).$$

Soit  $z < -\tilde{\sigma}_\varepsilon - C\eta$ . Montrons qu'il existe  $0 < t_1 \leq \min\{T, 1\}$  tel que

$$\forall t \in ]0, t_1[, s(t, \varepsilon) \leq s_\varepsilon e^{z\sqrt{-t \ln(t)}}.$$

Posons maintenant

$$\beta(t,x) = \frac{\gamma}{\sqrt{t}(-\ln(t))^{\frac{3}{2}}} \left( \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t\ln(t)}} \right)^+ \right)^3 + \sqrt{t} \left( \left( \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\|^2 - \frac{\eta^2}{4} \right)^+ \right)^3,$$

où, en prenant  $\eta$  suffisamment petit, on a choisit la constante  $\gamma > 0$  telle que

$$\frac{K(\langle r\alpha - \alpha\delta, \varepsilon \rangle + \eta\|r\alpha - \alpha\delta\|)}{|z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta|^3 (\langle \alpha, \varepsilon \rangle - \eta\|\alpha\|)} < \gamma < \frac{3K(\langle r\alpha - \alpha\delta, \varepsilon \rangle - \|r\alpha - \alpha\delta\|\eta)}{2|z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta|^3 (\langle \alpha, \varepsilon \rangle + \eta\|\alpha\|)}.$$

Ce choix sera justifié dans la suite de la démonstration. En effet, nous appliquerons le principe du maximum à la fonction  $P - f - \beta$  avec l'opérateur suivant:

$$\tilde{\mathcal{L}}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma^* \sigma)_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d (r - \delta_i) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ru \right),$$

sur notre domaine d'étude  $D$  où, pour  $t_1 \in ]0, T[$ , on a posé:

$$D = \left\{ (t,x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d : \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\| \leq \eta \text{ et } s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) < \|x\| < s^e \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) \right\}.$$

Or il nous faudra ajuster la valeur de  $\gamma$  pour que la fonction  $P - f - \beta$  satisfasse les hypothèses de ce principe du maximum sur  $D$ .

Nous pouvons commencer par remarquer que pour  $(t,x) \in D$ , on a

$$0 < \langle \alpha, x \rangle < \langle \alpha, \frac{x}{\|x\|} \rangle s^e \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) < K.$$

Cela implique que  $D$  est un domaine borné car on a

$$K > \langle \alpha, x \rangle = \|x\| \langle \alpha, \varepsilon \rangle + \langle \alpha, x - \|x\|\varepsilon \rangle \geq \|x\| (\langle \alpha, \varepsilon \rangle - \eta\|\alpha\|).$$

Comme dans la section 14, ces propriétés s'avèrent cruciales pour montrer que  $P - f - \beta$  est négative sur la frontière parabolique de  $D$  et que  $\tilde{\mathcal{L}}(P - f - \beta) \leq 0$  sur  $D$ .

Soit  $(t, x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d$  tel que  $\|x\| = s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right)$ . On a alors

$$[P - f - \beta](t, x) = -\beta(t, x) \leq 0.$$

D'autre part, pour  $(t, x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d$  tel que  $\|\frac{x}{\|x\|} - \varepsilon\| = \eta$ , on a

$$[P - f - \beta](t, x) \leq [P - f](t, x) - \frac{27}{64}\eta^6\sqrt{t}.$$

Cependant,  $\|x\| < s^e\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right)$  donc  $P - f(t, x) \leq P - P^e(t, x)$ . Or d'après le Corollaire 3.1, nous savons que

$$\begin{aligned} [P - P^e](t, x) &\leq t(rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)^+ + o(t) \\ &\leq t(rK + |\langle \alpha \delta, x \rangle|) + o(t) \\ &\leq t(rK + \langle \alpha, x \rangle) + o(t) \\ &\leq t(r+1)K + o(t), \end{aligned}$$

car  $\langle \alpha, x \rangle \leq K$  sur  $\bar{D}$ . On obtient donc:

$$\begin{aligned} [P - f - \beta](t, x) &\leq (r+1)Kt - \frac{27}{64}\eta^6\sqrt{t} + o(t) \\ &\leq 0 \quad \text{pour } t_1 \text{ suffisamment petit.} \end{aligned}$$

Considérons maintenant  $(t, x) \in ]0, t_1[ \times ]0, +\infty[^d$  tel que  $\|x\| = s^e\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right)$ . Toujours d'après le Corollaire 3.1, on a

$$[P - f - \beta](t, x) = [P - P^e - \beta]\left(t, s^e\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x}{\|x\|}\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq t(rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)^+ - \frac{\gamma}{\sqrt{t}(-\ln(t))^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t\ln(t)}}\right)^3 + o(t) \\
&= t \left( (rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)^+ + \gamma \left( z + \frac{\tilde{\sigma}_x}{\|x\|} \right)^3 \right) + o(t).
\end{aligned}$$

En effet, d'après le Théorème 15.1, on a

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, x \rangle &= \langle \alpha, \frac{x}{\|x\|} \rangle s^e \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) \\
&= K \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}_x}{\|x\|} \sqrt{t \ln \left( \frac{1}{t} \right)} \right) + o\left( \sqrt{t \ln \left( \frac{1}{t} \right)} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, il est facile de voir que

$$\left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t\ln(t)}} \right)^3 = - \left( z + \frac{\tilde{\sigma}_x}{\|x\|} \right)^3 \left( t \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right)^{\frac{3}{2}} + o \left( t \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Finalement, si  $\|x\| = s^e \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right)$ , on a  $\langle \alpha, x \rangle = K + o(1)$  donc on a

$$\begin{aligned}
rK - \langle \alpha \delta, x \rangle &= \langle r\alpha - \alpha \delta, x \rangle + o(1) \\
&= \|x\| \left( \langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle + \langle r\alpha - \alpha \delta, \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \rangle \right) + o(1) \\
&\leq \|x\| (\langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle + \eta \|r\alpha - \alpha \delta\|) \\
&\leq \frac{K}{\langle \alpha, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha\|} (\langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle + \eta \|r\alpha - \alpha \delta\|).
\end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\begin{aligned}
[P - f - \beta](t, x) &\leq t \left( \frac{K (\langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle + \eta \|r\alpha - \alpha \delta\|)}{\langle \alpha, \varepsilon \rangle - \eta \|\alpha\|} + \gamma (z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)^3 \right) \\
&\quad + o(t) \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

pour  $t_1$  suffisamment petit et d'après le choix de  $\gamma$ . Enfin, pour  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que  $(0, x) \in D$ , on a

$$[P - f - \beta](0, x) = -\beta(0, x) \leq 0.$$

$P - f - \beta$  est donc négative sur la frontière parabolique de  $D$ . Etudions maintenant le signe de  $\tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta]$  sur  $D$ .  $D$  est inclus dans la région de continuation de  $P$  donc on a  $\tilde{\mathcal{L}}P = 0$  sur  $D$ . De plus, pour  $(t, x) \in D$ , on a vu que  $\langle \alpha, x \rangle < K$  donc  $\tilde{\mathcal{L}}f(t, x) = -(rK - \langle \alpha \delta, x \rangle)$  sur  $D$ . On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta](t, x) &= -(rK - \langle \alpha \delta, x \rangle) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \\ &\leq -\langle r\alpha - \alpha \delta, x \rangle - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \\ &\leq -\|x\| (\langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \|r\alpha - \alpha \delta\| \eta) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \\ &\leq -s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) (\langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \|r\alpha - \alpha \delta\| \eta) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x). \end{aligned}$$

Or par continuité de  $(t, y) \rightarrow s \left( t, \frac{y}{\|y\|} \right)$ , nous pouvons affirmer que pour  $t_1$  suffisamment petit on a

$$s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) > \frac{\|x\| 3K}{4 \langle \alpha, x \rangle} > \frac{3K}{4 (\langle \alpha, \varepsilon \rangle + \eta \|\alpha\|)}.$$

On obtient ainsi

$$\tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta] \leq -\frac{3K}{4 (\langle \alpha, \varepsilon \rangle + \eta \|\alpha\|)} (\langle r\alpha - \alpha \delta, \varepsilon \rangle - \|r\alpha - \alpha \delta\| \eta) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \quad \text{sur } D.$$

Nous allons maintenant estimer  $\tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x)$  sur  $D$ . On commence par remarquer que pour  $(t, x) \in D$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\left( \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z \sqrt{-t \ln(t)}} \right)^+ \right)^p \leq -(z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)^p \left( t \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right)^{\frac{p}{2}} + o \left( t \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right)^{\frac{p}{2}}.$$

En effet, le Théorème 15.1 implique que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, x \rangle &\leq \langle \alpha, \frac{x}{\|x\|} \rangle s^e \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right) \\ &\leq K \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}_x}{\|x\|} \sqrt{t \ln \left( \frac{1}{t} \right)} \right) + o\left( \sqrt{t \ln \left( \frac{1}{t} \right)} \right) \\ &\leq K \left( 1 - \frac{\tilde{\sigma}_x}{\|x\|} \sqrt{t \ln \left( \frac{1}{t} \right)} \right) + o\left( \sqrt{t \ln \left( \frac{1}{t} \right)} \right). \end{aligned}$$

Soit  $(t, x) \in D$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t}(t, x) &= \gamma \left( \frac{3}{2t(-\ln(t))^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2(-t \ln(t))^{\frac{3}{2}}} \right) \left( \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \right)^+ \right)^3 \\ &\quad + 3\gamma z \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \left( \frac{1}{2t \ln(t)} + \frac{1}{2t(\ln(t))^2} \right) \left( \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \right)^+ \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{t}} \left( \left( \left\| \frac{x}{\|x\|} - \varepsilon \right\|^2 - \frac{\eta^2}{4} \right)^+ \right)^3. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t}(t, x) &\geq -\gamma \frac{1}{2(-t \ln(t))^{\frac{3}{2}}} \left( -(z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)^3 (t \ln(t))^{\frac{3}{2}} + o(-t \ln(t))^{\frac{3}{2}} \right) \\ &\quad + 3\gamma z \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \frac{1}{2t(\ln(t))^2} \left( -(z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)(-t \ln(t)) + o(-t \ln(t)) \right) \\ &\geq \frac{\gamma(z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)^3}{2} + o(1). \end{aligned}$$

De plus, pour  $1 \leq i \leq d$ , il existe une fonction  $g_i$  de  $]0, +\infty[^d$  dans  $\mathbb{R}$  bornée uniformément sur tout compact de  $]0, +\infty[^d$  telle que

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_i}(t, x) = 3\gamma \frac{K\alpha_i e^{z\sqrt{-t \ln(t)}}}{\langle \alpha, x \rangle^2 \sqrt{t} (-\ln(t))^{\frac{3}{2}}} \left( \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \right)^+ \right)^2 + t g_i(x) = o(1).$$

De même, pour  $1 \leq i, j \leq d$ , il existe une fonction  $g_{i,j}$  de  $]0, +\infty[^d$  dans  $\mathbb{R}$  bornée uniformément sur tout compact de  $]0, +\infty[^d$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j}(t, x) &= 6\gamma \frac{K^2 \alpha_i \alpha_j e^{2z\sqrt{-t \ln(t)}}}{\langle \alpha, x \rangle^4 \sqrt{t} (-\ln(t))^{\frac{3}{2}}} \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \right)^+ \\ &\quad - 6\gamma \frac{K \alpha_i \alpha_j e^{z\sqrt{-t \ln(t)}}}{\langle \alpha, x \rangle^3 \sqrt{t} (-\ln(t))^{\frac{3}{2}}} \left( \left( 1 - \frac{K}{\langle \alpha, x \rangle} e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \right)^+ \right)^2 \\ &\quad + t g_{i,j}(x) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Grâce au fait que  $x$  est proche de  $\|x\|\varepsilon$  sur  $D$ , il est donc possible d'affirmer que pour  $(t, x) \in D$  on a

$$\tilde{\mathcal{L}}\beta(t, x) \geq \frac{\gamma(z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)^3}{2} + o(1),$$

avec un  $o(1)$  uniforme par rapport à  $x$ . Pour  $(t, x) \in D$ , grâce à notre choix de  $\gamma$ , on obtient alors,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta] &\leq -\frac{3K(\langle r\alpha - \alpha\delta, \varepsilon \rangle - \|r\alpha - \alpha\delta\|\eta)}{4(\langle \alpha, \varepsilon \rangle + \eta\|\alpha\|)} - \frac{\gamma(z + \tilde{\sigma}_\varepsilon + C\eta)^3}{2} + o(1) \\ &\leq 0 \quad \text{pour } t_1 \text{ suffisamment petit.} \end{aligned}$$

Nous pouvons désormais appliquer le principe du maximum et affirmer que  $P - f - \beta \leq 0$  sur  $D$ . En particulier, si l'on suppose qu'il existe  $(t, \xi) \in ]0, t_1[ \times \mathbb{R}$  tel que  $s(t, \varepsilon) < \xi < s_\varepsilon e^{z\sqrt{-t \ln(t)}}$ , on a alors

$$0 < [P - f](t, \xi\varepsilon) \leq \beta(t, \xi\varepsilon) = 0.$$

C'est absurde donc pour tout  $t \in ]0, t_1[$ , on a

$$s_\varepsilon e^{z\sqrt{-t \ln(t)}} \leq s(t, \varepsilon).$$

En développant l'exponentielle et en faisant tendre  $t$  vers 0, on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{\sqrt{-t \ln(t)}} \leq -z.$$

Ceci étant valable pour tout  $z < -\tilde{\sigma}_\varepsilon - C\eta$ , on a

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{s_\varepsilon - s(t, \varepsilon)}{\sqrt{-t \ln(t)}} \leq -\tilde{\sigma}_\varepsilon - C\eta.$$

Enfin, en laissant  $\eta$  tendre vers 0, on obtient le résultat annoncé.  $\diamond$

Remarques: Contrairement au cas de la dimension 1, vu dans la partie II, nous n'avons pas démontré ici que la distance entre les frontières libres américaine et européenne était un  $O(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0.

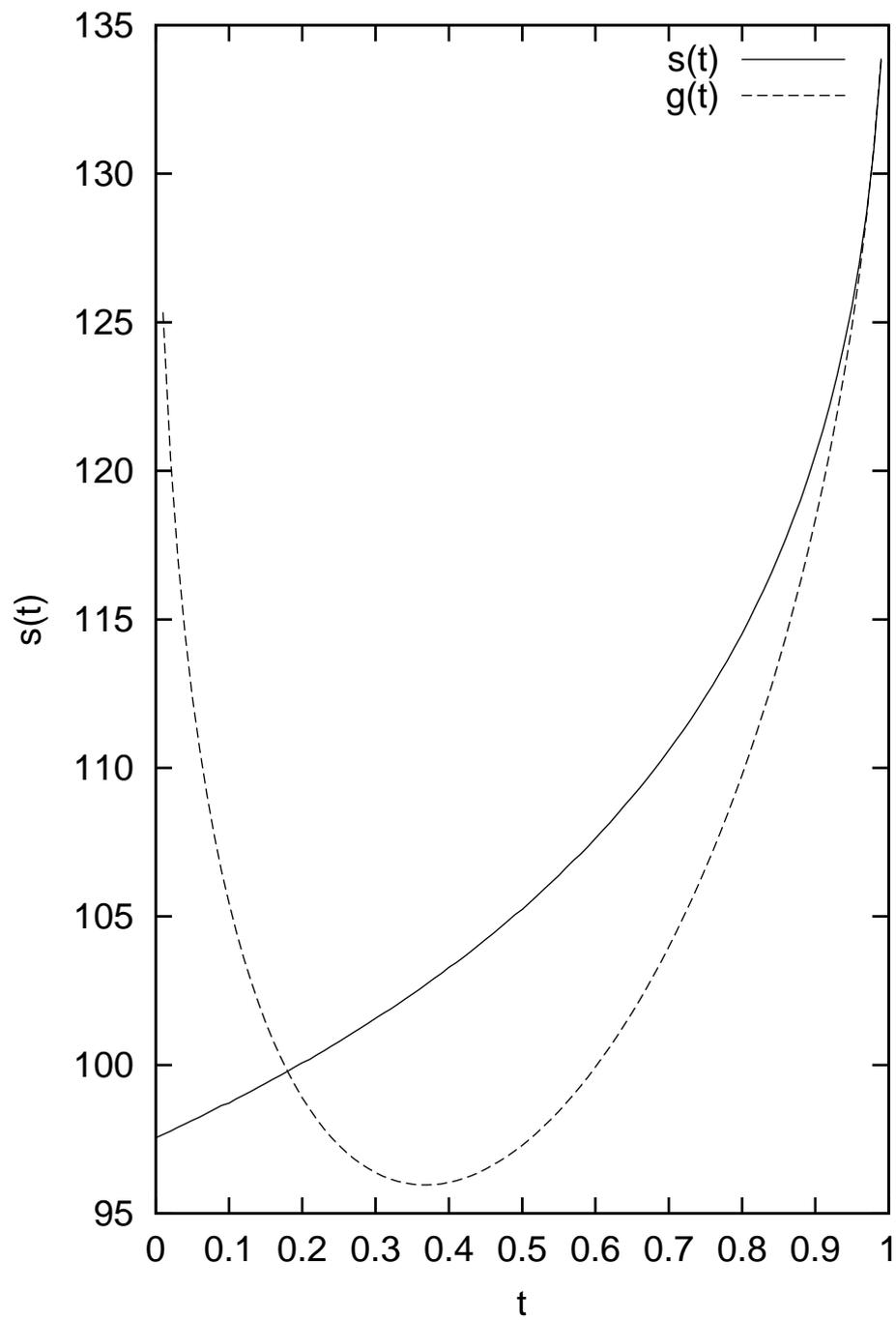
D'autre part, nous n'avons pas traité le cas d'égalité:  $0 < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle = r \langle \alpha, \varepsilon \rangle$ . Ce cas semble ne présenter qu'une difficulté technique. Si l'on considère un cône centré sur la direction  $\varepsilon$ , la frontière libre aura des comportements différents selon la direction que l'on observe dans ce cône. Cependant, il semble que le comportement n'est pas parabolique le long de la direction  $\varepsilon$  car une estimation numérique de  $s$  dans cette direction indique la présence d'un facteur logarithmique supplémentaire.

Considérons une option de vente de prix d'exercice  $K = 100$ , de maturité  $T = 1$  et portant sur la moyenne de deux actifs. On pose  $\alpha = (0.5, 0.5)$ ,  $\delta = (0.05, 0.03)$  et  $r = 0.04$ .

Dans la direction  $\varepsilon = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , on a  $0 < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle = r \langle \alpha, \varepsilon \rangle$ . Nous calculons numériquement la quantité  $s(t, \varepsilon)$  pour diverses valeurs de  $t$  et nous représentons les fonctions suivantes

$$s(t) := s(t, \varepsilon) \quad \text{et} \quad g(t) := \frac{K}{\langle \alpha, \varepsilon \rangle} \left( 1 - \sqrt{2} \tilde{\sigma}_\varepsilon \sqrt{(T-t) \ln \left( \frac{1}{T-t} \right)} \right).$$

Estimation de  $s(t, \varepsilon)$  dans le cas  $0 < \langle \alpha \delta, \varepsilon \rangle = r \langle \alpha, \varepsilon \rangle$ .





## Cinquième partie

# Etude de la convergence d'options

# bermudéennes vers des américaines

## 16 Introduction

Il n'est pas possible d'obtenir une formule explicite pour la fonction de valeur d'une option américaine mais un grand nombre de méthodes numériques ont été développées pour calculer cette fonction. La première idée consiste à résoudre l'inéquation variationnelle satisfaite par la fonction de valeur grâce à des méthodes de différences finies. Cependant, cette approche devient très difficile à mettre en oeuvre pour des diffusions de grande dimension. Dans ce cas, on résout numériquement le problème d'arrêt optimal grâce à des méthodes de Monte-Carlo (cf. BROADIE M., GLASSERMAN P. (1997), LONGSTAFF F. A., SCHWARTZ E. S. (2001) et BALLY V., PAGÈS G. (2003)). Cela implique une discrétisation en temps puis le calcul de la fonction de valeur d'une option bermudéenne. En effet, une option bermudéenne est une option américaine que l'on ne peut exercer qu'à certaines dates. D'un point de vue financier, elle donne donc moins de droits à son détenteur qu'une option américaine. Son prix sera alors inférieur à celui de l'option américaine correspondante. Cependant, si l'on augmente le nombre de dates d'exercice possibles, il est bien connu que le prix de l'option bermudéenne converge vers celui de l'américaine.

Dans cette partie, nous étudierons cette vitesse de convergence lorsque le nombre de dates d'exercice possibles tend vers l'infini. De plus, la fonction de valeur d'une option bermudéenne est solution d'un problème d'arrêt optimal discret, qui peut être vu comme un problème de frontière libre discrète. Nous nous intéresserons donc également à la vi-

tesse de convergence de la frontière libre discrète vers la frontière continue.

On considère  $d$  actifs risqués et on note  $S_t^i$  leurs valeurs respectives à la date  $t$ . On suppose que  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  est solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

$$dS_t = \text{diag}(S_t)((r\mathbb{1} - \delta)dt + \sigma dW_t) \quad (5)$$

où  $r > 0$ ,  $\mathbb{1} = (1)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\delta \in [0, +\infty[^d$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard sur  $\mathbb{R}^d$ . De plus, on suppose que  $\sigma$  vérifie l'hypothèse  $H_1$ , c'est à dire qu'il existe  $m, M > 0$  telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, m\|x\|^2 \leq x^* \sigma \sigma^* x \leq M\|x\|^2.$$

On note  $\mathbb{F}$  la filtration associée à  $W$  et pour  $x \in [0, +\infty[^d$ ,  $(S_t^x)_{0 \leq t \leq T}$  est la solution de l'équation différentielle stochastique (5) telle que  $S_0^x = x$ .

On note  $f$  la fonction de pay-off et on suppose que  $f$  vérifie les hypothèses suivantes:

- $f$  est continue sur  $[0, +\infty[^d$ .
- $f$  est à croissance polynômiale et admet des dérivées premières (au sens des distributions) localement intégrables et à croissance polynômiale.

En inversant le temps comme dans la section précédente, la fonction de valeur de l'option américaine associée au pay-off  $f$  est:

$$P(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)],$$

où  $\mathcal{T}_{0,t}$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $[0, t]$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit également la fonction de valeur de l'option bermudéenne associée au pay-off  $f$ , de maturité  $T > 0$  et offrant  $n$  dates d'exercice. Pour  $k \in \{0, \dots, n\}$

et  $x \in [0, +\infty[^d$ , on pose

$$P^n(kh, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0, kh}^n} \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(S_\tau^x)],$$

où  $h = T/n$  et  $\mathcal{T}_{0, kh}^n$  est l'ensemble des  $\mathbb{F}$ -temps d'arrêt à valeurs dans  $\{ph : p \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq p \leq k\}$ .

Dans cette partie nous cherchons à évaluer  $P - P^n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Sous des hypothèses un peu différentes, il a déjà été prouvé que l'erreur sur les fonctions de valeurs était majorée par une constante multipliée par  $h$  (cf. CARVERHILL A. P., WEBBER N. (1990), LAMBERTON D. (1998b) et BALLY V., PAGÈS G. (2003)).

Dans la section 17, nous redémontrons ce résultat par une méthode qui permet, sous des hypothèses supplémentaires, d'améliorer cette majoration (cf. Théorèmes 17.1 et 17.2). Nous considérons ensuite des options de vente sur panier ou sur spread qui ont été présentées dans la section 3 de la partie I. Pour ce type d'options, nous précisons la constante qui apparaît dans la majoration d'erreur.

Dans la section 18, nous nous intéressons à l'approximation de la région d'exercice de  $P$  par celle de  $P^n$ , toujours dans le cas d'options sur panier ou sur spread. On rappelle la définition de la région d'exercice de ces options américaines:

$$\mathcal{E} = \{(t, x) \in ]0, T] \times [0, +\infty[^d : P(t, x) = f(x)\}.$$

Comme dans la partie précédente, on note  $\mathcal{E}_t$  ses sections temporelles et, pour  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  de norme 1, on pose:

$$s(t, \varepsilon) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : P(t, \lambda\varepsilon) > f(\lambda\varepsilon)\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .

De la même manière, on définit les sections temporelles de la région d'exercice de l'option bermudéenne:

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad \mathcal{E}_{kh}^n = \{x \in [0, +\infty[^d : P^n(kh, x) = f(x)\}.$$

Il est facile de voir que  $\mathcal{E}_{kh}^n$  est convexe et contient  $\mathcal{E}_{kh}$ .

Pour  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  de norme 1 et  $1 \leq k \leq n$ , on pose alors:

$$s^h(kh, \varepsilon) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : P^n(kh, \lambda\varepsilon) > f(\lambda\varepsilon)\},$$

avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ .

Nous déduisons de la majoration d'erreur sur les fonctions de valeur, une estimation de l'erreur sur les frontières libres. Plus précisément, nous appliquerons le principe du maximum présenté dans la partie I pour montrer que la différence entre  $s^n$  et  $s$  est proportionnelle à  $\sqrt{h}$ .

Enfin, dans la section 19 nous considérons une option de vente portant sur un seul actif. Nous démontrons alors que l'erreur  $P - P^n$  est minorée par une constante multipliée par  $h$  lorsque  $h$  est petit. Cette minoration repose sur les résultats précédents, à savoir la majoration de l'erreur sur les frontières libres.

Nous prouvons donc que la vitesse de convergence de  $P^n$  vers  $P$  est de l'ordre de  $1/n$ , mais nous n'obtenons pas d'équivalent de  $n(P^n - P)$ . En considérant une option d'achat de maturité infinie, Dupuis et Wang sont parvenus à donner un développement limité de l'erreur (cf. DUPUIS P., WANG H. (2004)). Cependant, lorsque la maturité est finie, les fonctions de valeurs des options et leurs prix critiques dépendent du temps et trouver un développement limité de l'erreur reste une question ouverte.

## 17 Majoration de l'erreur sur les fonctions de valeur

### 17.1 Le cas général

Pour éviter d'avoir des coefficients variables dans le générateur infinitésimal de la diffusion, nous posons :

$$\forall i \in \{1, \dots, d\}, (X_t^i)_{0 \leq t \leq T} = (\ln(S_t^i))_{0 \leq t \leq T} \quad \text{et} \quad \phi(y) = f((e^{y_i})_{1 \leq i \leq d}) \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}^d.$$

Le générateur infinitésimal de  $X$  est donc :

$$\mathcal{A}u = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma \sigma^*)_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \left( r - \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

et pour  $(t, y) \in [0, T[ \times \mathbb{R}^d$ , on a :

$$P(t, e^y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,t}} \mathbb{E}[e^{-r\tau} \phi(X_\tau^y)],$$

où nous avons utilisé la notation suivante  $e^y = (e^{y_i})_{1 \leq i \leq d}$ .

Le résultat suivant est essentiellement déjà connu (cf. CARVERHILL A. P., WEBBER N. (1990), LAMBERTON D. (1998b) et BALLY V., PAGÈS G. (2003)). Nous le rappelons et en donnons une démonstration tout de même car il peut être vu comme une étape intermédiaire dans la démonstration du résultat principal de cette section (cf. Théorème 17.2).

**Théorème 17.1** *Supposons qu'il existe  $C > 0$  tel que, au sens des distributions, on a :*

$$\tilde{\mathcal{A}}\phi = \mathcal{A}\phi - r\phi \geq -C.$$

Pour  $x \in [0, +\infty[^d$ , on a alors

$$0 \leq P(T, x) - P^n(T, x) \leq Ch \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau_x^*} \mathbb{1}_{\{\tau_x^* < T\}} \right],$$

avec

$$\tau_x^* = \inf\{u \geq t : P(T - u, S_u^x) = f(S_u^x)\} \wedge T.$$

*Démonstration du Théorème 17.1:*

Soient  $y \in \mathbb{R}^d$  et posons  $x = e^y$ . Dans la suite de la démonstration, nous noterons  $\tau_x^* = \tau^*$  et

$$\bar{\tau}_n^* = h \inf\{k \in \mathbb{N} : kh \geq \tau^*\}.$$

Par définition de  $P^n$  et comme  $\bar{\tau}_n^* \in \mathcal{T}_{0,T}^n$ , on a:

$$0 \leq P(T, x) - P^n(T, x) \leq \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} \phi(X_{\tau^*}^y) - e^{-r\bar{\tau}_n^*} \phi(X_{\bar{\tau}_n^*}^y) \right].$$

On régularise la fonction  $\phi$  pour pouvoir appliquer la formule d'Itô. Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on pose

$$g_p(y) = \left( \frac{p}{2\pi} \right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{p^d \|y\|^2}{2}} \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

On définit alors la suite de fonction

$$\phi_p(y) = \phi * g_p(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y - z) g_p(z) dy \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^d.$$

Comme  $\phi$  est continue sur  $\mathbb{R}^d$ , on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \lim_{p \rightarrow +\infty} \phi_p(y) = \phi(y) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{A}}\phi_p(y) = \tilde{\mathcal{A}}\phi * g_p(y).$$

Pour  $p \in \mathbb{N}$ , on a alors:

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\leq \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} (\phi(X_{\tau^*}^y) - \phi_p(X_{\tau^*}^y)) \right] \\ &\quad - \mathbb{E} \left[ e^{-r\bar{\tau}_n^*} (\phi(X_{\bar{\tau}_n^*}^y) - \phi_p(X_{\bar{\tau}_n^*}^y)) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} \phi_p(X_{\tau^*}^y) - e^{-r\bar{\tau}_n^*} \phi_p(X_{\bar{\tau}_n^*}^y) \right]. \end{aligned}$$

Or  $f$  est à croissance polynômiale donc lorsque  $p$  tend vers 0, les deux premiers termes tendent vers 0 par le Théorème de convergence dominée. Pour  $p$  tendant vers 0, La formule d'Itô nous permet alors d'écrire que

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\leq -\mathbb{E} \left[ \int_{\tau^*}^{\bar{\tau}_n^*} e^{-ru} \tilde{\mathcal{A}}\phi_p(X_u^y) du \right] + o(1) \\ &= -\mathbb{E} \left[ \int_{\tau^*}^{\bar{\tau}_n^*} e^{-ru} \tilde{\mathcal{A}}\phi * g_p(X_u^y) du \right] + o(1). \end{aligned}$$

Or nous avons supposé que  $\tilde{\mathcal{A}}\phi \geq -C$  sur  $\mathbb{R}^d$ , donc  $\tilde{\mathcal{A}}\phi * g_p \geq -C$  et en faisant tendre  $p$  vers 0, on obtient

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\leq C\mathbb{E} \left[ \int_{\tau^*}^{\bar{\tau}_n^*} e^{-ru} du \right] \\ &\leq C\mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} \frac{1 - e^{r(\bar{\tau}_n^* - \tau^*)}}{r} \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \right] \\ &\leq Ch\mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} \frac{\bar{\tau}_n^* - \tau^*}{h} \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \right] \\ &\leq Ch\mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \right]. \quad \diamond \end{aligned}$$

Sous des hypothèses supplémentaires, nous pouvons améliorer cette majoration pour  $h$  petit.

**Théorème 17.2** *On se place sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 17.1, mais on suppose en outre que pour  $x \in [0, +\infty[^d$ ,  $\tau_x^*$  admet une densité sur l'ensemble*

$\{\tau_x^* < T\}$ . Pour  $h$  tendant vers 0, on a alors

$$[P - P^n](T, x) \leq \frac{Ch}{2} \mathbb{E} [e^{-r\tau_x^*} \mathbb{1}_{\{\tau_x^* < T\}}] + o(h).$$

*Démonstration du Théorème 17.2:* Soit  $x \in [0, +\infty[^d$ . Supposons que  $\tau_x^*$  admette une densité sur  $\{\tau_x^* < T\}$  et notons  $\psi$  cette densité. Comme  $\psi \in L^1_{]0, T[}$ , il existe une suite de fonctions continues  $(\psi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\psi$  dans  $L^1_{]0, T[}$ . Pour  $t \in [0, T]$ , on pose

$$\bar{t} = h \min\{k \in \{0, \dots, n\} : t \leq kh\}.$$

En reprenant l'avant dernière inégalité de la démonstration du Théorème 17.1, on a alors

$$\begin{aligned} P(T, x) - P^n(T, x) &\leq C \int_0^T e^{-rt} (\bar{t} - t) \psi(t) dt \\ &\leq C \int_0^T e^{-rt} (\bar{t} - t) \psi_p(t) dt + C \int_0^T e^{-rt} (\bar{t} - t) (\psi(t) - \psi_p(t)) dt \\ &\leq C \int_0^T e^{-rt} (\bar{t} - t) \psi_p(t) dt + Ch \|\psi - \psi_p\|_{L^1_{]0, T[}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-rt} (\bar{t} - t) \psi_p(t) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-rt} ((k+1)h - t) \psi_p(t) dt \\ &= h \int_0^1 h \sum_{k=0}^{n-1} e^{-r h(u+k)} (1-u) \psi_p(u(k+h)) du, \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable  $u = (t - kh)/h$ . Comme  $\psi_p$  est continue, la somme de Riemann qui apparaît dans le dernier terme converge vers  $\int_0^T e^{-rt} \psi_p(t) dt$  lorsque  $h$  tend vers 0. Ainsi, il existe  $R(p, h)$  tel que  $\lim_{h \rightarrow 0} R(p, h) = 0$  et

$$\int_0^T e^{-rt} (\bar{t} - t) \psi_p(t) dt = h \int_0^1 (1-u) \int_0^T e^{-rt} \psi_p(t) dt du + hR(p, h)$$

$$= \frac{h}{2} \int_0^T e^{-rt} \psi_p(t) dt + hR(p, h).$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} P(T, x) - P^n(T, x) &\leq \frac{Ch}{2} \int_0^T e^{-rt} \psi_p(t) dt + Ch \|\psi - \psi_p\|_{L^1_{]0, T[}} + ChR(p, h) \\ &\leq \frac{Ch}{2} \int_0^T e^{-rt} \psi(t) dt + \frac{3Ch}{2} \|\psi - \psi_p\|_{L^1_{]0, T[}} + ChR(p, h) \\ &\leq \frac{Ch}{2} \mathbb{E} [e^{-r\tau_x^*} \mathbb{1}_{\{\tau_x^* < T\}}] + \frac{3Ch}{2} \|\psi - \psi_p\|_{L^1_{]0, T[}} + ChR(p, h). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient la majoration suivante:

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{[P - P^n](T, x)}{h} \leq \frac{C}{2} \mathbb{E} [e^{-r\tau_x^*} \mathbb{1}_{\{\tau_x^* < T\}}] + \frac{3C}{2} \|\psi - \psi_p\|_{L^1_{]0, T[}}.$$

En faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , on a le résultat.  $\diamond$

Remarques:

1 Pour une option de vente portant sur un seul actif, on sait que le prix critique est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, T[$ . On en déduit, grâce au Théorème de Girsanov, que la loi conditionnelle de  $\tau_x^*$  sachant  $\{\tau_x^* < T\}$  est équivalente à la loi conditionnelle du temps d'atteinte d'un certain niveau par un mouvement Brownien sachant que ce temps d'atteinte est strictement inférieur à  $T$ .  $\tau_x^*$  admet donc bien une densité dans ce cas.

2 Dans le cas d'une option de vente portant sur une fonction linéaire des actifs, pour  $x \in [0, +\infty[^d$ , on a  $f(x) = (K - \langle \alpha, x \rangle)^+$  avec  $K > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ . Pour  $y \in \mathbb{R}^d$ , on a donc en utilisant la convexité de  $f$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}\phi(y) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(y) + \sum_{i=1}^d \left( r - \delta_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2 \right) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) - r\phi(y) \\ &\geq - \left( \sum_{i=1}^d (r - \delta_i) \alpha_i e^{y_i} + rK - r\langle \alpha, e^y \rangle \right) \mathbb{1}_{\{\langle \alpha, e^y \rangle < K\}} \end{aligned}$$

$$\geq - (rK - \langle \alpha \delta, e^y \rangle) \mathbb{1}_{\{\langle \alpha, e^y \rangle < K\}}.$$

Ainsi, il existe une constante  $C_d > 0$  telle que  $\tilde{\mathcal{A}}\phi \geq -C_d$  et le Théorème 17.1 nous donne

$$\sup_{x \in [0, +\infty[^d} [P - P^n](T, x) \leq C_d h.$$

Dans la section suivante nous allons préciser cette majoration pour ce type d'options.

## 17.2 Le cas des options sur combinaison linéaire d'actifs risqués

Dans cette section et dans toute la suite de cette partie, nous supposons qu'il existe  $K > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  tels que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = (K - \langle \alpha, x \rangle)^+.$$

Les options associées à ce type de fonctions de pay-off ont été particulièrement étudiées dans la section 3 de la partie I et dans la partie IV.

Pour ce type d'options, on peut affiner la majoration du Théorème 17.1. Nous énonçons maintenant ce résultat.

**Proposition 17.1** *On note  $\alpha \delta = (\alpha_i \delta_i)_{1 \leq i \leq d}$ . Pour tout  $x \in [0, +\infty[^d$ :*

$$P(T, x) - P^n(T, x) \leq h \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau_x^*} (rK - \langle \alpha \delta, S_{\tau_x^*}^x \rangle) \mathbb{1}_{\{\tau_x^* < T\}} \right] + o(h),$$

où le terme  $o(h)$  est contrôlé uniformément par rapport à  $x$  sur tout compact de  $[0, +\infty[^d$ .

*Démonstration de la Proposition 17.1:*

Soit  $x \in [0, +\infty[^d$ . Pour la démonstration, on pose

$$\tau^* = \inf\{u \geq 0 : P(T - u, S_u^x) = f(S_u^x)\} \wedge T \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_n^* = \inf\{kh \in \mathbb{N} : kh \geq \tau^*\}.$$

En conditionnant par  $\mathcal{F}_{\tau^*}$  et en remarquant que  $\bar{\tau}_n^*$  est  $\mathcal{F}_{\tau^*}$ -mesurable, on a alors:

$$\begin{aligned} P(T, x) - P^n(T, x) &\leq \mathbb{E} [e^{-r\tau^*} f(S_{\tau^*}^x) - e^{-r\bar{\tau}_n^*} f(S_{\bar{\tau}_n^*}^x)] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [e^{-r\tau^*} f(S_{\tau^*}^x) - e^{-r\bar{\tau}_n^*} f(S_{\bar{\tau}_n^*}^x) \mid \mathcal{F}_{\tau^*}] \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}}] \\ &= \mathbb{E} [e^{-r\tau^*} (f(S_{\tau^*}^x) - e^{-r(\bar{\tau}_n^* - \tau^*)} \mathbb{E} [f(S_{\bar{\tau}_n^*}^x) \mid \mathcal{F}_{\tau^*}]) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}}] \end{aligned}$$

Or, sur  $\{\tau^* < T\}$ , on a  $\langle \alpha, S_{\tau^*}^x \rangle < rK$  donc  $\nabla f(S_{\tau^*}^x) = (-\alpha_i)_{1 \leq i \leq d}$ . Ainsi, comme  $f$  est convexe, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f(S_{\bar{\tau}_n^*}^x) \mid \mathcal{F}_{\tau^*}] \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} &\geq \mathbb{E} [f(S_{\tau^*}^x) + \langle S_{\bar{\tau}_n^*}^x - S_{\tau^*}^x, \nabla f(S_{\tau^*}^x) \rangle \mid \mathcal{F}_{\tau^*}] \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \\ &= f(S_{\tau^*}^x) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} - \langle \alpha, \mathbb{E} [S_{\bar{\tau}_n^*}^x \mid \mathcal{F}_{\tau^*}] - S_{\tau^*}^x \rangle \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \\ &= f(S_{\tau^*}^x) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} - \sum_{i=1}^d \alpha_i (S_{\tau^*}^x)_i (e^{(r-\delta_i)(\bar{\tau}_n^* - \tau^*)} - 1). \end{aligned}$$

Finalement, comme  $\bar{\tau}_n^* - \tau^* \leq h$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-r(\bar{\tau}_n^* - \tau^*)} \mathbb{E} [f(S_{\bar{\tau}_n^*}^x) \mid \mathcal{F}_{\tau^*}] \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}}] &\geq \mathbb{E} [f(S_{\tau^*}^x) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}}] \\ &+ \mathbb{E} \left[ (\bar{\tau}_n^* - \tau^*) \left( \sum_{i=1}^d (r - \delta_i \alpha_i S_{\tau^*}^x - r f(S_{\tau^*}^x)) \right) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \right] + o(h), \end{aligned}$$

avec le terme  $o(h)$  uniformément contrôlé par rapport à  $x$  sur tout compact de  $[0, +\infty[^d$ .

Ainsi, on a

$$\mathbb{E} [e^{-r(\bar{\tau}_n^* - \tau^*)} \mathbb{E} [f(S_{\bar{\tau}_n^*}^x) \mid \mathcal{F}_{\tau^*}] \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}}] = \mathbb{E} [(f(S_{\tau^*}^x) + \langle \alpha \delta, S_{\tau^*}^x \rangle - rK) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}}],$$

et d'après les premières inégalités de cette démonstration, on obtient

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\leq \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} (\bar{\tau}_n^* - \tau^*) (rK - \langle \alpha\delta, S_{\tau^*}^x \rangle) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \right] + o(h) \\ &\leq h \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau^*} (rK - \langle \alpha\delta, S_{\tau^*}^x \rangle) \mathbb{1}_{\{\tau^* < T\}} \right] + o(h). \quad \diamond \end{aligned}$$

## 18 Majoration de l'erreur sur les frontières libres

Le but de cette section est d'établir le Théorème suivant

**Théorème 18.1** *Soit  $\varepsilon \in [0, +\infty[^d$  normé. Il existe une constante  $C_{T,\varepsilon} > 0$  telle que*

$$0 \leq s^n(T,\varepsilon) - s(T,\varepsilon) \leq C_{T,\varepsilon} \sqrt{h},$$

*lorsque  $h = T/n$  est suffisamment petit.*

Pour cela nous procédons comme dans la partie IV en effectuant un raisonnement par récurrence sur  $d$ . En effet, il est relativement facile d'établir ce Théorème dans le cas  $d = 1$  car nous pouvons contrôler  $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$  grâce à l'inéquation variationnelle satisfaite par  $P$ . Cependant, pour  $d > 1$ , nous n'avons plus accès à ce contrôle. Nous prouvons alors ce résultat pour  $\varepsilon \in ]0, +\infty[^d$  normé, grâce au principe du maximum présenté dans la partie I. Si une coordonnée de  $\varepsilon$  est nulle, on se ramène au cas de la dimension  $d - 1$ .

### 18.1 Le cas unidimensionnel

Dans cette section, nous supposons que  $d = 1$ . Quitte à modifier la valeur de  $K$ , on peut supposer que pour  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) = (K - x)^+$ . Le but de cette section est de majorer l'erreur entre les prix critiques américain et bermudéen.

Rappelons la définition du prix critique d'une option américaine de pay-off  $f$  et dont la

fonction de valeur est notée  $P$ . Pour  $t \in ]0, T]$ , on pose

$$s(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : P(t, x) > f(x)\}.$$

Comme la fonction de valeur de l'option bermudéenne correspondante,  $P^n$ , est convexe, il est possible de définir le prix critique de l'option bermudéenne. Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on pose

$$s^n(kh) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : P^n(kh, x) > f(x)\}.$$

Comme  $P^n \leq P$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(T, \cdot) = P(T, \cdot)$ , il est facile de voir que  $s^n \geq s$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s^n(T) = s(T)$ . On rappelle que le Théorème 17.1, nous permet d'affirmer qu'il existe  $C_1 > 0$  telle que

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} [P - P^n](T, x) \leq C_1 h.$$

Nous en déduisons une majoration de la différence entre  $s$  et  $s^n$ .

**Théorème 18.2** *Lorsque  $h = T/n$  tend vers 0, on a*

$$0 \leq s^n(T) - s(T) \leq \sigma s(T) \sqrt{\frac{C_1}{rK - \delta s(T)}} \sqrt{h} + o(\sqrt{h}).$$

*Démonstration du Théorème 18.2:*

D'après l'équation parabolique satisfaite par  $P$  dans la région de continuation et comme  $P$  croît avec le temps, sur l'ouvert  $]s(T), s^n(T)[$ , on a:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 s^n(T)^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(T, \xi) &= rP(T, \xi) - (r - \delta)\xi \frac{\partial P}{\partial x}(T, \xi) + \frac{\partial P}{\partial t}(T, \xi) \\ &\geq rP(T, \xi) - (r - \delta)\xi \frac{\partial P}{\partial x}(T, \xi) \\ &\geq rf(\xi) + (r - \delta)\xi - (r - \delta)\xi \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T, \xi) + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq rK - \delta\xi - (r - \delta)^+ \xi \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T, \xi) + 1 \right) \\
&\geq rK - \delta s^n(T) - (r - \delta)^+ s^n(T) \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T, \xi) + 1 \right).
\end{aligned}$$

On suppose alors que  $n$  est suffisamment grand pour que  $s^n(T) < K$  et on intègre cette inégalité entre  $s(T)$  et  $x \in ]s(T), s^n(T)[$ . On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2 s^n(T)^2}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x}(T, x) + 1 \right) &\geq (rK - \delta s^n(T)) (x - s(T)) \\
&\quad - (r - \delta)^+ s^n(T) (P(T, x) - f(x)) \\
&\geq (rK - \delta s^n(T)) (x - s(T)) \\
&\quad - (r - \delta)^+ s^n(T) (P(T, s^n(T)) - f(s^n(T))),
\end{aligned}$$

car la fonction  $x \rightarrow P(T, x) - f(x)$  est croissante sur  $[0, K]$ . En intégrant une seconde fois entre  $s(T)$  et  $s^n(T)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2 s^n(T)^2}{2} (P(T, s^n(T)) - f(s^n(T))) &\geq \frac{1}{2} (rK - \delta s^n(T)) (s^n(T) - s(T))^2 \\
&\quad - (r - \delta)^+ s^n(T) (P(T, s^n(T)) - f(s^n(T))) (s^n(T) - s(T)).
\end{aligned}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s^n(T) = s(T)$ , donc pour  $\eta > 0$  et  $n$  assez grand, on a

$$(1 + \eta) \sigma^2 s^n(T)^2 (P(T, s^n(T)) - f(s^n(T))) \geq (rK - \delta s^n(T)) (s^n(T) - s(T))^2.$$

Le Théorème 17.1 implique alors

$$\begin{aligned}
(s^n(T) - s(T))^2 &\leq (1 + \eta) \frac{\sigma^2 s^n(T)^2}{(rK - \delta s^n(T))} (P(T, s^n(T)) - f(s^n(T))) \\
&\leq (1 + \eta) \frac{\sigma^2 s(T)^2}{(rK - \delta s(T))} C_1 h + o(h).
\end{aligned}$$

En conclusion, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{s^n(T) - s(T)}{s(T)\sqrt{h}} \leq \sigma \sqrt{\frac{C_1(1+\eta)}{rK - \delta s(T)}}.$$

En faisant tendre  $\eta$  vers 0, on obtient le résultat.  $\diamond$

## 18.2 Le cas multidimensionnel

Pour démontrer le Théorème 18.1, il nous reste à établir le résultat suivant.

**Proposition 18.1** *Soit  $\varepsilon \in ]0, +\infty[^d$  normé. Il existe une constante  $C_{T,\varepsilon} > 0$ , telle que*

$$0 \leq s^n(T,\varepsilon) - s(T,\varepsilon) \leq C_{T,\varepsilon}\sqrt{h} + o(\sqrt{h}),$$

*lorsque  $h = T/n$  tend vers 0.*

Pour démontrer cette Proposition, nous devons avoir des informations supplémentaires sur la régularité de la fonction  $x \rightarrow s^n(T,x)$ . Le lemme suivant va nous fournir ces renseignements.

**Lemme 18.1** *Soient  $\varepsilon \in ]0, +\infty[^d$  normé. Pour  $\eta > 0$ , on note*

$$V_\eta^\varepsilon = \{x \in ]0, +\infty[^d : \|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\| < \eta\}.$$

*Soit  $\eta > 0$  tel que  $V_\eta^\varepsilon$  soit inclus dans un compact de  $]0, +\infty[^d$ . Il existe une constante  $s_\eta^\varepsilon > 0$  telle que, pour  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, on a*

$$\sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) - s^n(T,\varepsilon)|}{\|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\|} \leq s_\eta^\varepsilon.$$

*Démonstration du lemme 18.1:* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\mathcal{E}_T$  et  $\mathcal{E}_T^n$  sont des convexes de  $\mathbb{R}^d$  contenant 0, on peut définir leurs jauges que nous noterons respectivement  $g$  et  $g_n$ . Ce

sont des fonctions convexes et homogènes (cf. BREZIS H. (1983)). D'autre part, pour  $x \in ]0, +\infty[^d$ , il est facile de voir que

$$g(x) = \frac{\|x\|}{s\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right)} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{\|x\|}{s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right)}.$$

Pour  $x \in V_\eta^\varepsilon$ , on a donc

$$\frac{|s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) - s^n(T, \varepsilon)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|} = \frac{1}{\|x\|g_n(x)g_n(\varepsilon)} \frac{|g_n(\|x\|\varepsilon) - g_n(x)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|}.$$

Or par définition de  $s^n$ , on a  $s^1 \geq s^n \geq s$  donc  $g_1 \leq g_n \leq g$ . Comme  $g_1$  et  $g$  sont continues et à valeurs strictement positives sur  $]0, +\infty[^d$ , il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que  $C_1 < g_n < C_2$ . Ainsi, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) - s^n(T, \varepsilon)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|} \leq C \sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|g_n(\|x\|\varepsilon) - g_n(x)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|}.$$

En écrivant  $g_n(x) = g_n(s(T, \varepsilon)\varepsilon) + (g_n(x) - g_n(s(T, \varepsilon)\varepsilon))$  et en utilisant l'homogénéité des jauges, on a donc

$$\begin{aligned} \sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) - s^n(T, \varepsilon)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|} &\leq C g_n(\varepsilon) \sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|\|x\| - s(T, \varepsilon)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|} \\ &\quad + C \sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|g_n(s(T, \varepsilon)\varepsilon) - g_n(x)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|}. \end{aligned}$$

Or  $(g_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée, donc il existe  $\tilde{C} > 0$  telle que

$$C g_n(\varepsilon) \sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|\|x\| - s(T, \varepsilon)|}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|} \leq \tilde{C}.$$

De plus,  $g_n$  est convexe donc, en notant  $\delta V_\eta^\varepsilon$  la frontière de  $V_\eta^\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in V_\eta^\varepsilon} \frac{|g_n(s(T,\varepsilon)\varepsilon) - g_n(x)|}{\|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\|} &\leq \sup_{x \in \delta V_\eta^\varepsilon} \frac{|g_n(s(T,\varepsilon)\varepsilon) - g_n(x)|}{\|x - s(T,\varepsilon)\varepsilon\|} \\ &\leq \frac{2}{\eta} \sup_{x \in \delta V_\eta^\varepsilon} |g_n(x)| \\ &\leq \frac{2C_2}{\eta}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant établir la Proposition 18.1.

*Démonstration de la Proposition 18.1:*

Nous allons suivre les idées de la partie précédente en utilisant le même principe du maximum. Nous l'appliquons sur le domaine de  $]0, T[ \times ]0, +\infty[^d$  suivant:

$$D = \left\{ (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, +\infty[^d : \|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\| < \eta\sqrt{h} \text{ et } s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right) < \|x\| < s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) \right\},$$

où  $\eta > 0$  est une constante que l'on déterminera dans la suite.

Comme, pour tout  $x \in ]0, +\infty[^d$ ,  $t \rightarrow s\left(t, \frac{x}{\|x\|}\right)$  est une fonction décroissante et comme  $s\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) < s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right)$ ,  $D$  est bien un domaine de  $]0, T[ \times ]0, +\infty[^d$ .

Pour  $t \in [0, T]$ , on pose  $\bar{t} = h \min\{k \in \{0, \dots, n\} : t \leq kh\}$ . On commence par remarquer que  $P^n = f$  sur l'adhérence de  $D$  car pour tout  $t \in ]0, T]$ , on a  $s^n\left(T, \frac{x}{\|x\|}\right) \leq s^n\left(\bar{t}, \frac{x}{\|x\|}\right)$ .

Ainsi, le Théorème 17.1 et la croissance de  $P$  par rapport au temps nous permettent d'affirmer que l'on a:

$$[P - f](t, x) \leq P(\bar{t}, x) - P^n(\bar{t}, x) \leq C_d h \quad \text{sur } D.$$

Nous montrons maintenant que cela implique l'existence d'une constante  $C_{T,\varepsilon} > 0$  telle que  $s(T, \varepsilon) \geq s^n(T, \varepsilon) - C_{T,\varepsilon}\sqrt{h}$  pour  $h$  petit.

Sur  $]0, T[ \times ]0, +\infty[^d$ , on définit pour cela la fonction  $\beta(t, x) = \beta_1(x) + \beta_2(x)$ , avec

$$\begin{aligned}\beta_1(x) &= \frac{a}{\sqrt{h}} \left( \left( \|x\| - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \right)^3 \\ \beta_2(x) &= \frac{c}{\sqrt{h}} \left( \left( \|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\| - \frac{\eta}{2}\sqrt{h} \right)^+ \right)^3,\end{aligned}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes strictement positives que l'on déterminera dans la suite.

Nous montrons maintenant que  $P - f - \beta \leq 0$  sur  $D$ .

$\beta$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{1,2}$  sur  $D$  et  $D$  est inclus dans un compact de  $[0, T] \times ]0, +\infty[^d$  donc on peut appliquer le principe du maximum sur  $D$  à la fonction  $P - f - \beta$  avec l'opérateur suivant:

$$\tilde{\mathcal{L}}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d (\sigma^* \sigma)_{i,j} x_i x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d (r - \delta_i) x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - ru \right).$$

Première étape: Montrons que  $P - f - \beta \leq 0$  sur la frontière parabolique de  $D$ .

Soit  $(t, x) \in \delta_p D$ . Nous avons quatre cas à étudier.

– *Premier cas:* Supposons que  $\|x\| = s \left( t, \frac{x}{\|x\|} \right)$ .

On a alors

$$[P - f - \beta](t, x) = -\beta(t, x) \leq 0.$$

– *Deuxième cas:* Supposons que  $\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\| = \eta\sqrt{h}$ .

D'après le Théorème 17.1, on a

$$\begin{aligned}[P - f - \beta](t, x) &\leq C_d h - \beta_2(x) \\ &\leq \left( C_d - c \frac{\eta^3}{8} \right) h.\end{aligned}$$

Ainsi,  $[P - f - \beta](t, x) \leq 0$  si l'on choisit  $c$  et  $\eta$  tels que  $C_d - c \frac{\eta^3}{8} < 0$ .

– *Troisième cas:* Supposons que  $\|x\| = s^n \left( T, \frac{x}{\|x\|} \right)$ .

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} [P - f - \beta](t, x) &\leq C_d h - \beta_1(t, x) \\ &\leq C_d h - \frac{a}{\sqrt{h}} \left( \left( s^n \left( T, \frac{x}{\|x\|} \right) - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \right)^3. \end{aligned}$$

Or il existe  $R > 0$  tel que  $D \subset V_R^\varepsilon$  et tel que  $V_R^\varepsilon$  soit inclus dans un compact de  $]0, +\infty[^d$ , donc en appliquant le lemme 18.1, on prouve qu'il existe  $s_L > 0$  telle que

$$[P - f - \beta](t, x) \leq (C_d - a(b - s_L \eta)^3) h.$$

On en déduit que l'on a  $[P - f - \beta](t, x) \leq 0$  dès que l'on choisit  $a$ ,  $b$  et  $\eta$  telles que  $C_d - a(b - s_L \eta)^3 < 0$ .

– *Quatrième cas*: Supposons que  $t = 0$ .

On a alors

$$[P - f - \beta](0, x) = -\beta(t, x) \leq 0.$$

En conclusion,  $P - f - \beta \leq 0$  sur  $\delta_p D$  si les deux conditions suivantes sont réalisées:

$$C_d < c \frac{\eta^3}{8} \quad \text{et} \quad C_d < a(b - s_L \eta)^3.$$

Seconde étape: Montrons que  $\tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta] \leq 0$  sur  $D$ .

Commençons par évaluer les dérivées partielles de  $\beta$  sur  $D$ .

Soit  $(t, x) \in D$ . Pour  $1 \leq i \leq d$ , on a

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial x_i}(x) = \frac{3ax_i}{\|x\|\sqrt{h}} \left( \left( \|x\| - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \right)^2,$$

et pour  $1 \leq i, j \leq d$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta_1}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{6ax_i x_j}{\|x\|^2 \sqrt{h}} \left( \|x\| - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \\ &\quad + \frac{3a}{\|x\| \sqrt{h}} \left( \mathbb{1}_{\{i=j\}} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} \right) \left( \left( \|x\| - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \right)^2. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 18.1, on peut écrire:

$$\begin{aligned} \left( \|x\| - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ &\leq \left( s^n \left( T, \frac{x}{\|x\|} \right) - s^n(T, \varepsilon) + b\sqrt{h} \right)^+ \\ &\leq (s_L \eta + b) \sqrt{h}. \end{aligned}$$

Pour  $h$  tendant vers 0, on obtient donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}\beta_1 &\geq -\frac{3a}{\|x\|^2} \left( \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j} x_i^2 x_j^2 \right) (b + s_L \eta) + o(1) \\ &\geq -3aM \|x\|^2 (b + s_L \eta) + o(1) \\ &\geq -3aM s^n(T, \varepsilon)^2 (b + s_L \eta) + o(1) \\ &\geq -3aM s(T, \varepsilon)^2 (b + s_L \eta) + o(1). \end{aligned}$$

Il nous reste à minorer  $\tilde{\mathcal{L}}\beta_2$ . Soit  $1 \leq i \leq d$ . On pose

$$g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} [\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|] = \frac{x_i - s(T, \varepsilon)\varepsilon_i}{\|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\|}.$$

Ainsi, on peut calculer les dérivées premières de  $\beta_2$ :

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial x_i}(x) = \frac{3c}{\sqrt{h}} g_i(x) \left( \left( \|x - s(T, \varepsilon)\varepsilon\| - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right)^+ \right)^2.$$

Soit  $1 \leq j \leq d$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{6c}{\sqrt{h}} g_i(x) g_j(x) \left( \|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\| - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right)^+ \\ &\quad + \frac{3c}{\sqrt{h}} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) \left( \left( \|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\| - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right)^+ \right)^2. \end{aligned}$$

Or on peut vérifier que

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{i=j\}} - g_i(x) g_j(x)}{\|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\|}.$$

Il est facile de voir que  $|g_i(x)| \leq 1$  donc, sur  $D$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \beta_2}{\partial x_i}(x) \right| &\leq \frac{3c}{\sqrt{h}} \left( \left( \|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\| - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right)^+ \right)^2 \\ &\leq \frac{3c}{\sqrt{h}} \left( \left( \eta \sqrt{h} - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right)^+ \right)^2 \\ &\leq \frac{3c\eta^2 \sqrt{h}}{4}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right| &\leq \frac{6c}{\sqrt{h}} \left( \|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\| - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right)^+ + \frac{6c}{\sqrt{h}} \frac{\left( \left( \|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\| - \eta \sqrt{h}/2 \right)^+ \right)^2}{\|x - s(T, \varepsilon) \varepsilon\|} \\ &\leq \frac{6c}{\sqrt{h}} \left( \eta \sqrt{h} - \frac{\eta}{2} \sqrt{h} \right) + \frac{6c}{\sqrt{h}} \frac{\left( \eta \sqrt{h} - \eta \sqrt{h}/2 \right)^2}{\eta \sqrt{h}/2} \\ &\leq 6c\eta. \end{aligned}$$

Finalement, on peut affirmer que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}\beta_2 &\geq -3c\eta \sum_{i,j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{i,j} x_i x_j + o(1) \\ &\geq -3c\eta M \left[ s^n \left( T, \frac{x}{\|x\|} \right) \right]^2 + o(1) \end{aligned}$$

$$\geq -3c\eta Ms(T,\varepsilon)^2 + o(1),$$

avec, grâce au lemme 18.1, un terme  $o(1)$  indépendant de  $x$ . On peut donc en conclure que  $\tilde{\mathcal{L}}\beta(t,x)$  vérifie l'inégalité suivante:

$$\tilde{\mathcal{L}}\beta(t,x) \geq -3aMs(T,\varepsilon)^2(b + s_L\eta) - 3c\eta Ms(T,\varepsilon)^2 + o(1).$$

Comme  $D$  est inclus dans la région de continuation de l'option américaine, on a

$$\tilde{\mathcal{L}}P(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{L}}f(t,x) = rK - \langle \alpha\delta, x \rangle \quad \text{sur } D.$$

Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta](t,x) &= -(rK - \langle \alpha\delta, x \rangle) - \tilde{\mathcal{L}}\beta(t,x) \\ &\leq -(rK - \langle \alpha\delta, x \rangle) + 3aMs(T,\varepsilon)^2(b + s_L\eta + 3c\eta Ms(T,\varepsilon)^2) + o(1) \\ &\leq -(rK - s(T,\varepsilon)\langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle) \\ &\quad + 3aMs(T,\varepsilon)^2(b + s_L\eta + 3c\eta Ms(T,\varepsilon)^2) + o(1). \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que l'on a  $P - f - \beta \leq 0$  sur  $\delta_p D$  et  $\tilde{\mathcal{L}}[P - f - \beta](t,x) \leq 0$  sur  $D$  pour  $h$  suffisamment petit, si les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $\eta$  vérifient

$$C_d < c\frac{\eta^3}{8}, \quad C_d < a(b - s_L\eta)^3 \quad \text{et} \quad 3aMs(T,\varepsilon)^2(b + s_L\eta) + 3c\eta Ms(T,\varepsilon)^2 < rK - s(T,\varepsilon)\langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle.$$

En particulier, on remarque que l'on doit avoir  $s_L\eta < b$ . On pose donc  $b = (s_L + 1)\eta$ . On cherche maintenant  $a$ ,  $c$  et  $\eta$  telles que

$$C_d < c\frac{\eta^3}{8}, \quad C_d < a\eta^3 \quad \text{et} \quad a(2s_L + 1)\eta + c\eta < C_T \quad \text{avec} \quad C_T = \frac{rK - s(T,\varepsilon)\langle \alpha\delta, \varepsilon \rangle}{3Ms(T,\varepsilon)^2}.$$

On pose alors

$$a = \frac{2C_d}{\eta^3} \quad \text{et} \quad c = \frac{16C_d}{\eta^3}.$$

Il nous reste à choisir  $\eta > 0$  tel que

$$\frac{2C_d}{\eta^2}(2s_L + 1) + \frac{16C_d}{\eta^2} < C_T.$$

On pose donc  $\eta = \sqrt{C_d(4s_L + 19)/C_T}$ .

Avec ces constantes, on peut appliquer le principe du maximum sur  $D$  et montrer que  $P - f - \beta \leq 0$  sur  $D$ . Or si l'on suppose que  $s(T, \varepsilon) < s^n(T, \varepsilon) - b\sqrt{h}$ , alors il existe  $\lambda \in ]s(T, \varepsilon), s^n(T, \varepsilon) - b\sqrt{h}[$  telle que  $(T, \lambda\varepsilon)$  soit dans l'adhérence de  $D$ . Cependant c'est absurde car par continuité de  $P - f - \beta$ , cela impliquerait

$$0 \geq [P - f - \beta](T, \lambda\varepsilon) = [P - f](T, \lambda\varepsilon) > 0.$$

On a donc montré que  $s(T, \varepsilon) \geq s^n(T, \varepsilon) - b\sqrt{h}$ .  $\diamond$

## 19 Minoration de l'erreur sur les fonctions de valeur

Dans cette section, nous considérons une option de vente portant sur un seul actif et nous montrons que la majoration de l'erreur sur les fonctions de valeurs par une constante multipliée par  $h$  est optimale. En effet, nous allons déduire du Théorème 18.2 qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $P(T, x) - P^n(T, x) \geq Ch$  pour  $x$  suffisamment grand et  $h = T/n$ . Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 19.1** *Soit  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  à support compact dans  $[0, +\infty[$  et telle que  $\phi(0) < 0$ . Soit  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $g(h) = O(\sqrt{h})$  pour  $h$  tendant vers 0.*

On pose

$$\tilde{T}^h = \inf \{t \geq 0 : W_t \leq \phi(t) + g(h)\}, \quad \bar{T}^h = \inf \{kh \in \mathbb{N} : kh \geq \tilde{T}^h\} \text{ et } U^h = \frac{\bar{T}^h - \tilde{T}^h}{h}.$$

On définit également le temps d'arrêt suivant:

$$T^* = \inf \{t \geq 0 : W_t \leq \phi(t)\}$$

Pour  $h$  tendant vers 0, le couple  $(\tilde{T}^h, U^h)$  converge en loi vers  $(T^*, U)$  où  $U$  est de loi uniforme sur  $[0,1]$  et est indépendante de  $T^*$ .

*Démonstration du lemme 19.1:* Nous montrons que la transformée de Fourier du couple  $(\tilde{T}^h, U^h)$  tend vers celle de  $(T^*, U)$  où  $U$  est de loi uniforme sur  $[0,1]$  et est indépendante de  $T^*$ . Puisque  $U^h$  est à valeurs dans  $[0,1]$ , il suffit de montrer que, pour  $p \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ e^{-i2\pi x \tilde{T}^h - i2\pi p U^h} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{-i2\pi x T^*} \right] \mathbb{E} \left[ e^{-i2\pi p U} \right].$$

Soient  $p \in \mathbb{Z}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $\bar{T}^h/h \in \mathbb{N}$ , on remarque que

$$\mathbb{E} \left[ e^{-i2\pi x \tilde{T}^h - i2\pi p U^h} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{i(-2\pi x - \frac{2\pi p}{h})\tilde{T}^h} \right].$$

On veut donc montrer que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[ e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\tilde{T}^h} \right] = \begin{cases} \mathbb{E} \left[ e^{i\xi T^*} \right] & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Comme  $\phi$  est  $\mathcal{C}^1$  à support compact dans  $[0, +\infty[$ , on a

$$\tilde{T}^h = \inf \left\{ t \geq 0 : W_t - \int_0^t \phi'(s) ds \leq \phi(0) + g(h) \right\}.$$

On définit alors la probabilité  $\mathbb{P}^*$  telle que

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \exp \left( - \int_0^{+\infty} \phi'(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\phi'(s))^2 ds \right).$$

Posons  $\hat{T}^h = \inf \{t \geq 0 : W_t \leq \phi(0) + g(h)\}$ .

Sous  $\mathbb{P}^*$ ,  $W_t^* = W_t + \int_0^t \phi'(s) ds$  est un mouvement brownien standard et  $\hat{T}^h = \inf \left\{ t \geq 0 : W_t^* - \int_0^t \phi'(s) ds \leq \phi(0) + g(h) \right\}$ . Ainsi, on a

$$\mathbb{E}^* \left[ \psi(\hat{T}^h) \right] = \mathbb{E} \left[ \psi(\tilde{T}^h) \right] \quad \forall \psi \text{ borélienne et bornée.}$$

Posons  $M_t = \exp \left( - \int_0^t \phi'(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\phi'(s))^2 ds \right)$ . Pour  $\xi \in \mathbb{R}$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{i\xi \hat{T}^h} \right] &= \mathbb{E}^* \left[ e^{i\xi \hat{T}^h} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ M_{+\infty} e^{i\xi \hat{T}^h} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ M_{\hat{T}^h} e^{i\xi \hat{T}^h} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $h > 0$  tel que  $\phi(0) + g(h) < 0$ , on peut écrire que

$$\begin{aligned} T^* &= \hat{T}^0 \\ &= \hat{T}^h + \inf \{u \geq 0 : W_{\hat{T}^h+u} - W_{\hat{T}^h} \leq -g(h)\} \\ &= \hat{T}^h + \mu_{g(h)}, \end{aligned}$$

où  $\mu_{g(h)} = \inf \{u \geq 0 : B_u \leq -g(h)\}$  avec  $B$  mouvement brownien standard. Ainsi, en utilisant la propriété de Markov forte, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ e^{i\xi T^*} \right] &= \mathbb{E}^* \left[ e^{i\xi \hat{T}^0} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ M_{\hat{T}^0} e^{i\xi \hat{T}^0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[ M_{\hat{T}^h} \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\hat{T}^h}^{\hat{T}^0} \phi'(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_{\hat{T}^h}^{\hat{T}^0} (\phi'(s))^2 ds \right) e^{i\xi \hat{T}^0} \mid \mathcal{F}_{\hat{T}^h} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ M_{\hat{T}^h} e^{i\xi \hat{T}^h} F_h(\xi, \hat{T}^h) \right],
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
F_h(\xi, \tau) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^{\mu_{g(h)}} \phi'(\tau + s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^{\mu_{g(h)}} (\phi'(\tau + s))^2 ds \right) e^{i\xi \mu_{g(h)}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ e^{i\xi \mu_{g(h)}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[ e^{i\xi \mu_{g(h)}} \left( \exp \left( - \int_0^{\mu_{g(h)}} \phi'(\tau + s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^{\mu_{g(h)}} (\phi'(\tau + s))^2 ds \right) - 1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Montrons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{(\xi, \tau) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[} | F_h(\xi, \tau) - \mathbb{E} [e^{i\xi \mu_{g(h)}}] | = 0.$$

Posons  $M_t^\tau = \exp \left( - \int_0^t \phi'(\tau + s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\phi'(\tau + s))^2 ds \right)$ .

D'après l'inégalité de Bürkhölder-Davis-Gundy, on a alors

$$\begin{aligned}
| F_h(\xi, \tau) - \mathbb{E} [e^{i\xi \mu_{g(h)}}] | &\leq \mathbb{E} \left[ | M_{\mu_{g(h)}}^\tau - 1 | \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \left| \int_0^{\mu_{g(h)}} M_s^\tau \phi'(\tau + s) dB_s \right| \right] \\
&\leq C \mathbb{E} \left[ \sqrt{\int_0^{\mu_{g(h)}} (M_s^\tau \phi'(\tau + s))^2 ds} \right].
\end{aligned}$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Doob, nous donnent ensuite

$$\begin{aligned}
| F_h(\xi, \tau) - \mathbb{E} [e^{i\xi \mu_{g(h)}}] | &\leq C \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} M_t^\tau \sqrt{\int_0^{\mu_{g(h)}} (\phi'(\tau + s))^2 ds} \right] \\
&\leq C \left( \mathbb{E} \left[ \sup_{t \geq 0} (M_t^\tau)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^{\mu_{g(h)}} (\phi'(\tau + s))^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left( \mathbb{E} [(M_\infty^\tau)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^{\mu_{g(h)}} (\phi'(\tau + s))^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left( \mathbb{E} [(M_\infty^\tau)^2] \right)^{\frac{1}{2}} \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^{\mu_{g(h)} \wedge A} (\phi'(\tau + s))^2 ds \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \sup_{\tau \geq 0} \|M_\infty^\tau\|_{L^2} \|\phi'\|_\infty \mathbb{E} [\mu_{g(h)} \wedge A],
\end{aligned}$$

où  $A > 0$  est une constante. Or,  $\sup_{\tau \geq 0} \|M_\infty^\tau\|_{L^2} < +\infty$  car

$$\mathbb{E} [(M_\infty^\tau)^2] = \exp \left( \int_0^{+\infty} (\phi'(\tau + s))^2 ds \right) \leq \exp \left( \int_0^{+\infty} (\phi'(s))^2 ds \right) < +\infty.$$

Comme  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} [\mu_{g(h)}] = 0$  et il existe donc  $R(h, \xi)$  tendant vers 0 quand  $h$  tend vers 0, tel que

$$\mathbb{E} [e^{i\xi T^*}] = \mathbb{E} [M_{\hat{T}^h} e^{i\xi \hat{T}^h} e^{i\xi \mu_{g(h)}}] + R(h, \xi).$$

Or on a

$$\mathbb{E} [e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\hat{T}^h}] = \mathbb{E} [M_{\hat{T}^h} e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\hat{T}^h}].$$

donc, pour  $p = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E} [e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\hat{T}^h}] - \mathbb{E} [e^{i\xi T^*}]| &\leq \mathbb{E} [M_{\hat{T}^h} |e^{i\xi \mu_{g(h)}} - 1|] + R(h, \xi) \\
&= o(1) \quad \text{pour } h \text{ tendant vers } 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} [e^{i\xi \hat{T}^h}] = \mathbb{E} [e^{i\xi T^*}].$$

D'autre part pour  $p \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})T^*}] &= \mathbb{E} [M_{\hat{T}^h} e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\hat{T}^h} e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\mu_{g(h)}}] + o(1) \\
&= \mathbb{E} [M_{\hat{T}^h} e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\hat{T}^h}] \mathbb{E} [e^{i(\xi - \frac{2\pi p}{h})\mu_{g(h)}}] + o(1).
\end{aligned}$$

Or on sait que  $\mathbb{E}[e^{-p\mu_{g(h)}}] = e^{-g(h)\sqrt{2p}}$ , donc par prolongement analytique on a

$$\mathbb{E}[e^{-z\mu_{g(h)}}] = e^{-g(h)\sqrt{2z}} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re z \geq 0.$$

Ainsi, pour  $h$  suffisamment petit, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{i\left(\xi - \frac{2\pi p}{h}\right)\mu_{g(h)}}\right] = e^{-g(h)\sqrt{2i\left(\xi - \frac{2\pi p}{h}\right)}}$$

Comme  $g(h) = O(\sqrt{h})$  quand  $h$  tend vers 0,  $\mathbb{E}\left[e^{i\left(\xi - \frac{2\pi p}{h}\right)\mu_{g(h)}}\right]$  est borné.

D'autre part,  $T^*$  admet une densité sous  $\mathbb{P}^*$  donc sous  $\mathbb{P}$  car  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}^*$  sont équivalentes.

Ainsi, on a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[e^{i\xi T^*}] = 0.$$

Finalement, on obtient bien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[e^{i\left(\xi - \frac{2\pi p}{h}\right)\tilde{T}^h}\right] \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[M_{\tilde{T}^h} e^{i\left(\xi - \frac{2\pi p}{h}\right)\hat{T}^h}\right] = 0,$$

dès que  $p \neq 0$ .  $\diamond$

Introduisons maintenant quelques notations.

Notations: Soit  $0 < \eta < T$ . D'après le Théorème 18.2, il existe  $C_\eta > 0$  tel que pour tout  $t \in [\eta, T]$ , on a

$$s(t)(1 + C_\eta\sqrt{h}) \geq s^n(t).$$

Pour  $t \in ]0, T]$ , on pose alors  $\tilde{s}^n(t) = s(t)(1 + C_\eta\sqrt{h})$ . On définit ensuite le temps d'atteinte de la frontière  $\tilde{s}^n$  par la diffusion  $S$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^+$ , on pose:

$$\tilde{\tau}_x^h = \inf\{u \geq 0 : S_u^x \leq \tilde{s}^n(u)\} \wedge (T - \eta) \quad \text{et} \quad \bar{\tau}_x^h = \inf\{kh \in \mathbb{N} : kh \geq \tilde{\tau}_x^h\}.$$

Remarque: Pour  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $kh \geq \eta$ , on a  $s^n(kh) \leq \tilde{s}^n(kh)$  et donc  $\tilde{\tau}_x^h \leq \bar{\tau}_x^h \leq \tau_x^h$  où

$$\tau_x^h = h \inf \{k \in \mathbb{N} : S_{kh}^x \leq s^n(kh)\} \wedge T,$$

est un temps d'arrêt optimal pour le problème discret.

**Théorème 19.1** *Il existe  $0 < a \leq 1$  telle que pour tout  $x \in ]s(T), +\infty[$  on a*

$$P(T,x) - P^n(T,x) \geq ah \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau_x^*} (rK - \delta s(\tau_x^*)) \mathbb{1}_{\{\tau_x^* < T-\eta\}} \right],$$

avec  $\tau_x^* = \inf \{u \geq 0 : S_u^x \leq s(u)\} \wedge T$ .

*Démonstration du Théorème 19.1:* Soit  $x \in ]s(T), +\infty[$ . Dans les notations désignant des temps d'arrêt, nous omettons la dépendance en  $x$ . On a

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\geq \mathbb{E} \left[ P(T,x) - e^{-r\tau^h} P(T - \tau^h, S_{\tau^h}^x) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[ \int_0^{\tau^h} e^{-ru} (rK - \delta S_u^x) \mathbb{1}_{\{S_u^x \leq s(u)\}} du \right]. \end{aligned}$$

Or pour  $y \leq s(u)$  alors  $rK - \delta y \geq 0$  donc on obtient

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\geq \mathbb{E} \left[ \int_{\tilde{\tau}^h}^{\tau^h} e^{-ru} (rK - \delta S_u^x) \mathbb{1}_{\{S_u^x \leq s(u)\}} du \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}^h < T-\eta\}} \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[ e^{-r\tilde{\tau}^h} \int_0^{\tilde{\tau}^h - \tilde{\tau}^h} (rK - \delta S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)}) \mathbb{1}_{\{S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \leq s(\tilde{\tau}^h + u)\}} du \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}^h < T-\eta\}} \right] \\ &\geq I(x,h) + R(x,h) \end{aligned}$$

où l'on a posé:

$$I(x,h) = \mathbb{E} \left[ e^{-r\tilde{\tau}^h} (rK - \delta \tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)) \int_0^{\tilde{\tau}^h - \tilde{\tau}^h} \mathbb{1}_{\{S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \leq s(\tilde{\tau}^h + u)\}} du \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}^h < T-\eta\}} \right]$$

$$R(x,h) = \delta \mathbb{E} \left[ e^{-r\tilde{\tau}^h} \int_0^{\tilde{\tau}^h - \tilde{\tau}^h} \left( \tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h) - S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \right) \mathbb{1}_{\{S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \leq s(\tilde{\tau}^h + u)\}} du \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}^h < T - \eta\}} \right].$$

Montrons que  $R(x,h) = o(h)$  lorsque  $h$  tend vers 0. On a

$$\begin{aligned} |R(x,h)| &\leq \delta \mathbb{E} \left[ \int_0^h | \tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h) - S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} | du \right] \\ &\leq \delta h \mathbb{E} \left[ \sup_{0 \leq u \leq h} | \tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h) - S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} | \right] \\ &= o(h), \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.1.

On obtient alors

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\geq I(x,h) + o(h) \\ &\geq \mathbb{E} \left[ e^{-r\tilde{\tau}^h} (rK - \delta \tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)) \int_0^{\tilde{\tau}^h - \tilde{\tau}^h} P_h(x,u,\tilde{\tau}^h) du \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}^h < T - \eta\}} \right] + o(h), \end{aligned}$$

avec  $P_h(x,u,\tilde{\tau}^h) = \mathbb{P} \left( S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \leq s(\tilde{\tau}^h + u) \mid \mathcal{F}_{\tilde{\tau}^h} \right)$ .

Soit  $u \in [0, \tilde{\tau}^h - \tilde{\tau}^h]$ . On pose  $\mu = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}$  et on a

$$\begin{aligned} P_h(x,u,\tilde{\tau}^h) &= \mathbb{P} \left( \mu u + \sigma W_u \leq \ln \left( \frac{s(\tilde{\tau}^h + u)}{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \right) \mid \mathcal{F}_{\tilde{\tau}^h} \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left( \mu u + \sigma W_u \leq -\ln \left( 1 + C_\eta \sqrt{h} \right) \mid \mathcal{F}_{\tilde{\tau}^h} \right). \end{aligned}$$

En effet, on a  $s(\tilde{\tau}^h + u) \geq s(\tilde{\tau}^h)$  car  $s$  est croissant et  $\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h) = s(\tilde{\tau}^h)(1 + C_\eta \sqrt{h})$ . Comme  $0 \leq u \leq h$ , il existe  $c > 0$  et  $g$  une variable aléatoire suivant une loi gaussienne standard telles que

$$\begin{aligned} P_h(x,u,\tilde{\tau}^h) &\geq \mathbb{P} \left( \sigma \sqrt{u} g \leq -\ln \left( 1 + C_\eta \sqrt{h} \right) - |\mu| h \right) \\ &\geq \mathbb{P} \left( \sqrt{u} g \leq -c \sqrt{h} \right). \end{aligned}$$

Sur  $\{(\bar{\tau}^h - \tilde{\tau}^h) \geq h/2\}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\tau}^h - \tilde{\tau}^h} \mathbb{P}\left(S_u^{\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)} \leq s(\tilde{\tau}^h + u) \mid \mathcal{F}_{\tilde{\tau}^h}\right) du &\geq \int_0^{\bar{\tau}^h - \tilde{\tau}^h} \mathbb{P}\left(\sqrt{u}g \leq -c\sqrt{h}\right) du \\ &\geq (\bar{\tau}^h - \tilde{\tau}^h) \int_0^1 \mathbb{P}\left(g \leq -c\sqrt{\frac{h}{u(\bar{\tau}^h - \tilde{\tau}^h)}}\right) du \\ &\geq \frac{h}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathbb{P}(g \leq -2c) du. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'inégalité suivante

$$P(T,x) - P^n(T,x) \geq \frac{h}{4} \mathbb{P}(g \leq -2c) \mathbb{E}\left[e^{-r\tilde{\tau}^h} (rK - \delta\tilde{s}^n(\tilde{\tau}^h)) \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}^h < T-\eta\} \cap \{\tilde{\tau}^h - \bar{\tau}^h \geq \frac{h}{2}\}}\right] + o(h).$$

Or  $\tilde{s}^n(t) = s(t)(1 + C_\eta\sqrt{h})$ , donc on a

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}^h &= \inf\left\{t \geq 0 : W_t \leq \frac{1}{\sigma} \left(\ln\left(\frac{\tilde{s}^n(t)}{x}\right) - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right\} \wedge (T - \eta) \\ &= \inf\{t \geq 0 : W_t \leq \phi(t) + g(h)\} \wedge (T - \eta), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{\sigma} \left(\ln\left(\frac{s(t)}{x}\right) - \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \\ g(h) &= \frac{1}{\sigma} \ln\left(1 + C_\eta\sqrt{h}\right). \end{aligned}$$

Comme  $\phi$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, T]$ ,  $\phi(0) < 0$  et  $g(h) = O(\sqrt{h})$ , on peut appliquer le lemme 19.1 avec  $T^* = \tau^*$  et  $\tilde{T}^h = \tilde{\tau}^h$ . On prouve alors qu'il existe une variable  $U$  uniforme sur  $[0, 1]$  et indépendante de  $\tau^*$  telle que:

$$\begin{aligned} P(T,x) - P^n(T,x) &\geq \frac{h}{4} \mathbb{P}(g \leq -2c) \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_x^*} (rK - \delta s(\tau_x^*)) \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}_x^* < T-\eta\} \cap \{U \geq \frac{1}{2}\}}\right] + o(h) \\ &\geq \frac{h}{8} \mathbb{P}(g \leq -2c) \mathbb{E}\left[e^{-r\tau_x^*} (rK - \delta s(\tau_x^*)) \mathbb{1}_{\{\tilde{\tau}_x^* < T-\eta\}}\right] + o(h). \quad \diamond \end{aligned}$$



REFERENCES

- ACHDOU Y. (2004): *An inverse problem for parabolic variational inequalities in the calibration of American options*, à paraître dans *Journal of Control and Optimization*.
- AIT-SAHLIA F. (1995): *Optimal Stopping and Weak Convergence methods for some problems in financial economics*, Ph. D. dissertation, Stanford University.
- AVELLANEDA M., FRIEDMAN C., HOLMES R., SAMPERI D. (1997): Calibrating volatility surfaces via relative entropy, *Applied Math. Finance* **4**, 37-64.
- BALLY V., PAGÈS G. (2003): Error Analysis of the quantization algorithm for obstacle problems, *Stochastic Processes and their Applications* **106**, 1-40.
- BARLES G., BURDEAU J., ROMANO M., SANSOEN N. (1995): Critical Stock Price near expiration, *Mathematical finance* **5**, 77-95.
- BENSSOUSSAN A. (1984): On the theory of option pricing, *Acta Applicandae Mathematicae* **2**, 139-158.
- BENSSOUSSAN A., LIONS J.L. (1982), Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control, North-Holland.
- BERESTYCKI H., BUSCA J., ROMANO M., SANSOEN N. (2002): Asymptotics and calibration of local volatility models, *Quantitative Finance* **2**, 61-69.
- BREZIS H. (1983): *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson.
- BROADIE M., DETEMPLE J.B. (1997): The valuation of American options on multiple assets, *Mathematical Finance* **7**, 241-286.
- BROADIE M., GLASSERMAN P. (1997): Pricing American-style securities using simulation, *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 1323-1352.
- CARVERHILL A. P., WEBBER N. (1990): American options: theory and numerical analysis, *Options: Recent Advances in Theory and Practice*, Manchester Univ. Press.

- CHEVALIER E. (2004): Critical price near maturity for an American option on a dividend-paying stock in a local volatility model, à paraître dans *Mathematical Finance*.
- CHEVALIER E. (2005): Optimal early retirement near the expiration of a pension plan, à paraître dans *Finance and Stochastics*.
- DALANG R.C., MORTON A., WILLINGER W. (1990): Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models, *Stochastics and Stochastics Reports* **29**(2), 185-202.
- DELBAEN F., SCHACHERMAYER W. (1994): A general version of the fundamental theorem of asset pricing, *Math. Ann.* **300**, 463-520.
- DUPIRE B. (1994): Pricing with a smile, *Risk Magazine* **7**, 18-20.
- DUPUIS P., WANG H. (2004): On the Convergence from Discrete to Continuous Time in an Optimal Stopping Problem, disponible sur la page [www.cfm.brown.edu/people/dupuis/publications.html](http://www.cfm.brown.edu/people/dupuis/publications.html)
- EL KAROUI N. (1981): Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, *Lecture Notes in Mathematics* **876**, 72-238. Springer-Verlag.
- EL KAROUI N., JEANBLANC-PIQUÉ M., SHREVE S. (1998): Robustness of the Black-Scholes formula, *Mathematical finance* **8**, 93-126.
- EVANS J.D., KELLER R. J., KUSKE R. (2002): American options on assets with dividends near expiry, *Mathematical Finance* **12**, No. 3, 219-237.
- FRIEDMAN A. (1964): Partial differential equations of parabolic type, New Jersey, Prentice-Hall: Englewood Cliffs.
- FRIEDMAN A. (1975): Stochastic differential equations and applications, vol. **1**, New York: Academic Press.
- FRIEDMAN A. (1976): Stochastic differential equations and applications, vol. **2**, New York: Academic Press.

- FRIEDMAN A., SHEN W. (2002): A variational inequality approach to financial valuation of retirement benefits based on salary, *Finance and Stochastics* **6**, 273-302.
- HARRISSON J.M., PLISKA S.R. (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, *Stochastic Processes and their Applications* **11**, 215-260.
- HOBSON D. (1998): Volatility Misspecification, option Pricing and Superreplication via Coupling, *The Annals of Applied Probability* **8**, No 1, 193-205.
- JACKA S. D. (1991): Optimal Stopping and the American Put, *Mathematical Finance*, **1**, 1-14.
- JAILLET P., LAMBERTON D., LAPEYRE B. (1990): Variational inequalities and the pricing of American options, *Acta Applicandae Mathematicae*, **21**, 263-289.
- KARATZAS I. (1988): On the pricing of American options, *Applied Math. Optimization* **17**, 37-60.
- KARATZAS I., SHREVE S. (1998): *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer.
- KIM I. J. (1990): The analytic valuation of American options, *Review of Financial Studies* **3**, 547-572.
- LAMBERTON D. (1993): Convergence of the critical price in the approximation of American options, *Mathematical Finance*, **3**, 179-190.
- LAMBERTON D. (1995): Critical Price for an American option near Maturity, *Seminar on Stochastic Analysis*, E. Bolthausen, M. Dozzi and F. Russo, Progress in Probability, Birkhauser.
- LAMBERTON D. (1998a): American options, *Statistics in finance*, D. Hand and S. Jacka eds, Edward Arnold.
- LAMBERTON D. (1998b): Error estimates for the binomial approximation of American put options, *Annals of Applied Probability* **8**, 206-233.
- LAMBERTON D. (2002): Brownian Optimal Stopping and Random Walks, *Applied Ma-*

- thematics and Optimization* **45**, 283-324.
- LAMBERTON D., VILLENEUVE S. (2003): Critical price for an American option on a dividend-paying stock, *The Annals of Applied Probability* **13**, 800-815.
- LONGSTAFF F. A., SCHWARTZ E. S. (2001): Valuing American Options by Simulations: a Simple Least Squares Approach, *Review of Financial Studies* **14**, 113-147.
- MARTINI C. (1999): Propagation of convexity by markovian & martingalian semigroups, *Potential Analysis* **10**, No 2, 133-175.
- MYNENI R. (1992): The pricing of the American option, *Annals of applied probability* **2**, 1-23.
- NEVEU J. (1975): *Discrete-Parameter Martingales*, Amsterdam: North Holland.
- ROGERS L.C.G., WILLIAMS D. (1987): *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, Wiley.
- REVUZ D., YOR M. (1990): *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag.
- SHERRIS M. (1993): Contingent claims valuation of "Greater of" Benefits, *Actuarial Research Clearing House* **1**, 87-105.
- SHERRIS M. (1995): The valuation of option feature in retirement benefits, *J. Risk Ins.* **62**, 509-535.
- SHERRIS M., SHEN W. (1999): Financial valuation of retirement benefits based on salary, *Quantitative Methods in Finance 1999 Conference*, Sydney.
- VAN MOERBEKE (1976): On optimal stopping and free boundary problems, *Arch. Ration. Mech. Anal* **20**, 101-148.
- VILLENEUVE S. (1999a): Exercice Region of American Options on several assets, *Finance and Stochastics* **3**, 295-322, 1999.
- VILLENEUVE S. (1999b): *Options américaines dans un modèle de Black-Scholes multidimensionnel*, Thèse de Doctorat, Université de Marne-la-Vallée.

