



HAL
open science

Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions

Céline Baranger

► **To cite this version:**

Céline Baranger. Modélisation, étude mathématique et simulation des collisions. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2004. Français. NNT : . tel-00008826

HAL Id: tel-00008826

<https://theses.hal.science/tel-00008826>

Submitted on 20 Mar 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Normale Supérieure de Cachan

THÈSE

présentée par

Céline BARANGER

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE
CACHAN**

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

Sujet de la thèse :

**Modélisation, étude mathématique et
simulation des collisions dans les fluides
complexes**

Thèse soutenue le 17 Juin 2004 devant le Jury composé de :

BENOÎT DESJARDINS	Examineur, CEA/DAM
BRUNO DESPRÉS	Rapporteur, CEA/DAM & Univ. Paris 6
LAURENT DESVILLETES	Directeur de Thèse, ENS Cachan
JEAN-MICHEL GHIDAGLIA	Président du jury, ENS Cachan
THIERRY GOUDON	Rapporteur, Université Lille 1

*A mes parents,
à Philippe.*

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier très sincèrement mon directeur de thèse Laurent Desvilletes. Depuis mon stage de DEA, il n'a cessé de me prodiguer d'excellents conseils et de me faire découvrir le monde de la recherche. Sa grande disponibilité et sa gentillesse m'ont aidé tout au long de ces trois années.

Je souhaite remercier vivement Bruno Després et Thierry Goudon d'avoir accepté de rapporter ma thèse et de faire partie de mon jury de soutenance. Je remercie également Jean-Michel Ghidaglia d'avoir accepté de présider mon jury. Benoît Desjardins m'a toujours apporté son soutien amical et je suis heureuse de le compter parmi les membres du jury.

J'ai eu la chance d'effectuer des collaborations scientifiques très profitable, grâce aux conseils avisés de Laurent Desvilletes. Je remercie Clément Mouhot pour cette collaboration si fructueuse, son esprit d'analyse et sa gentillesse m'ont beaucoup touchés. Je remercie également Laurent Boudin de m'avoir entraîné dans le projet Genjet, sa bonne humeur et son professionnalisme ont fait avancer notre travail. Je remercie également Philippe Villedieu pour m'avoir fait partager son expérience.

J'ai effectué une partie de ma thèse au CEA de Bruyères-le-Châtel, dans le laboratoire dirigé par Bernard Rebourcet puis Benoît Desjardins. Merci à tous les deux de m'avoir fait confiance. Je remercie tous les membres de cette équipe que j'ai pu côtoyer. Un énorme merci surtout à Renaud Motte pour m'avoir encadré : sa gentillesse et sa bonne humeur égayaient mes journées à Bruyères, sa pédagogie et sa curiosité en faisait un encadrant exemplaire.

Effectuer ma thèse au sein du CMLA a été pour moi une grande chance. C'est un endroit propice à la recherche et je remercie tous les membres du laboratoire d'y contribuer. Merci surtout à Véronique et Micheline pour leur dévouement et leur efficacité. Merci à Christophe pour avoir été à l'écoute de nos problèmes de thésards. Merci à tous les thésards du laboratoire d'y insuffler la bonne humeur et l'ambiance propice au travail : tout d'abord mes collègues de bureau Ginger (et sa poule), Seb (as), (houhou) Samy et Poussin (c'est fou, ça), et bien sûr Julie (toujours charmante), Benjamin (merci pour nos discussions sur nos problèmes de maths respectifs), Julien (merci pour tes relectures attentives!), Amandine, Anthony, J-P et tous les autres.

Je tiens à remercier les thésards et post-doc du couloir (qui c'est rétréci au fil du temps!) des thésards du CEA. Merci à Stéphane pour avoir eu le courage de partager son bureau avec moi et de supporter mon bavardage, et à Benjamin pour l'avoir supporté (le bavardage) quand Stéphane n'était pas là. Merci à Gwen, Constant, Sylvain, Julien, Paul-Édouard, Sébastien, pour toutes nos discussions ainsi que les séances cafés dans le bureau (surtout Gwen).

Enfin, merci à mes parents, Anthony et Karine et François. A chaque séjour parmi eux je me ressourçais et repartais pleine d'énergie pour continuer la thèse. Merci de m'avoir soutenue tout au long de ces années d'études. Et surtout, merci à Philippe. Son intérêt pour mon travail m'a porté et ses conseils me sont précieux. Merci d'avoir supporté mon caractère et d'avoir été à mes côtés.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à des problèmes issus de la Mécanique des Fluides et plus particulièrement au cas des aérosols (ou sprays, c'est-à-dire un ensemble de particules en suspension dans un fluide environnant). Les phénomènes physiques mis en jeu sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP). La phase continue (fluide environnant) est décrite par des équations issues de la mécanique des milieux continus de type Navier-Stokes ou Euler. La phase dispersée est décrite par une équation cinétique de type Boltzmann.

Le premier résultat que nous présentons est consacré à l'étude mathématique d'un couplage entre une équation cinétique de type Vlasov et les équations d'Euler isentropiques. Ces équations modélisent un spray fin. Nous démontrons l'existence en temps petit d'une solution régulière pour le couplage Vlasov-Euler isentropique.

Ensuite, nous présentons les équations précises relatives à la modélisation des collisions, coalescences et fragmentations dans un spray.

Nous décrivons par la suite la simulation numérique du couplage fluide-cinétique dans un code industriel (Commissariat à l'Énergie Atomique), en particulier l'ajout des phénomènes de collisions.

Un deuxième modèle de fragmentation est également présenté. Ce modèle est plus pertinent dans les cas où les particules de la phase dispersée ont un grand nombre de Weber.

Enfin, nous présentons un résultat concernant une estimation explicite de trou spectral pour l'opérateur de Boltzmann avec potentiels durs linéarisé, et pour l'opérateur de Landau avec potentiels durs linéarisé.

Mots clés : équation cinétique, couplage, temps petit, Vlasov, Euler isentropique, modélisation, collision, coalescence, fragmentation, nombre de Weber, méthodes particulières, Nanbu, Bird, opérateur de Boltzmann et de Landau linéarisé, trou spectral.

Abstract

This thesis deals with the study of complex fluids in Fluid Mechanics, and particularly of sprays (i.e. particles in suspension in a surrounding fluid). The physical quantities are solutions of partial differential equations (PDE). The continuous phase (surrounding fluid) is described by Euler or Navier-Stokes type equations. The dispersed phase is described by a kinetic equation.

The first part is devoted to a mathematical study of a coupling between a Vlasov equation, and the isentropic Euler equations, which appears in the modelling of thin sprays. We establish the existence for small time of a regular solution for the Vlasov-isentropic Euler system.

Next, we write down the precise kernels corresponding to the complex phenomena of oscillations, breakup and collisions/coalescences.

Then, we describe the numerical simulation of a kinetic-fluid coupling in an industrial code (Commissariat à l'Énergie atomique); we especially study the implementation of collisions in the code.

A second model of breakup is also presented. This model is more adapted when droplets interact with a pressure wave and have an high Weber number.

Finally, we give explicit estimates for the spectral gap of the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials.

Keywords : kinetic equation, coupling, small time, Vlasov, Isentropic Euler equations, modelling, collision, coalescence, breakup, Weber Number, numerical methods, linearized Boltzmann and Landau operators, spectral gap.

Table des matières

Introduction	5
1 Présentation des modèles cinétiques et des modèles fluides	5
2 Existence en temps petit pour un couplage Vlasov-Euler isentropique	11
3 Collision, coalescence et fragmentation des sprays	13
4 Simulation numérique du couplage fluide-cinétique dans le cadre d'un code industriel	19
5 Fragmentation à grand nombre de Weber	21
6 Estimations explicites de trous spectraux	24
Bibliographie	28
1 Existence en temps petit pour un couplage Vlasov-Euler isentropique	33
1.1 Introduction	35
1.2 Existence en temps petit d'une solution régulière	37
1.3 Résultats préliminaires	38
1.3.1 Systèmes symétriques au sens de Friedrichs	38
1.3.2 Symétrisation du système d'Euler isentropique	38
1.3.3 Quelques résultats concernant la solution de l'équation cinétique (1.6)	40
1.4 Preuve du théorème 4	43
1.5 Démonstration du lemme 1.6	47
1.5.1 Plan de la preuve	47
1.5.2 Estimations sur U^{k+1}	47
1.5.3 Estimations sur f^{k+1}	55
1.6 Démonstration du lemme 1.7	59
Annexe 1.A Espaces de Sobolev	64
Annexe 1.B Inégalités utilisées	64
Annexe 1.C Régularisation de la donnée initiale	65
Bibliographie	68
2 Établissement des noyaux de collisions, coalescences et fragmentations (modèle T.A.B. pour faible nombre de Weber)	69
2.1 Introduction	70
2.2 Pre-existent models	71
2.2.1 The context	71
2.2.2 Collision modelling	72
2.2.3 Breakup: the T.A.B. model	73
2.3 Description of our model and equations	74
2.3.1 The model	74

2.3.2	Equations	77
2.3.3	Conservations	80
2.4	Numerical simulations	82
2.4.1	Description of the particle method	82
2.4.2	Numerical results	84
	Bibliography	87
3	Simulation numérique du couplage fluide-cinétique dans le cadre d'un code industriel	89
3.1	Introduction	90
3.2	Présentation du modèle	90
3.3	Méthode numérique	92
3.3.1	Le schéma volume fini pour le gaz environnant	92
3.3.2	Le transport des gouttelettes	93
3.3.3	Les collisions de gouttelettes : méthode à poids non constant	93
3.4	Simulations numériques	95
3.4.1	Validation de la méthode à poids non constant	95
3.4.2	Cas test numériques	97
	Bibliographie	101
4	Fragmentation d'un spray à très grand nombre de Weber	103
4.1	Introduction	104
4.2	Presentation of the model	105
4.3	Conservations	107
4.4	Numerical tests	109
4.4.1	Numerical scheme	109
4.4.2	Numerical simulations	110
	Bibliography	113
5	Estimations explicites de trous spectraux pour les opérateurs de Boltzmann et Landau avec potentiels durs	115
5.1	Introduction	116
5.2	The Boltzmann linearized operator	123
5.3	The Landau linearized operator	129
	Bibliography	133
	Publications	137

Introduction

1 Présentation des modèles cinétiques et des modèles fluides

Dans ce travail, nous nous intéressons à des problèmes issus de la Mécanique des Fluides et plus particulièrement au cas des aérosols (ou sprays, c'est-à-dire un ensemble de particules en suspension dans un fluide environnant). Les aérosols se retrouvent par exemple dans l'étude des problèmes de combustion dans les moteurs diesel où des gouttelettes de gazole sont injectées dans de l'air. Les phénomènes physiques mis en jeu sont le plus souvent modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP) qui sont ici de deux types : celles issues de la théorie cinétique de Boltzmann, modélisant les particules en suspension, et celles issues de la mécanique des milieux continus, modélisant le fluide.

Commençons par un bref aperçu de la théorie cinétique. Une description détaillée de la théorie peut être trouvée dans [16] ou [18] et une collection des résultats mathématiques récents sur ce sujet peut être consultée dans [55].

La théorie cinétique des gaz a été introduite par Maxwell et Boltzmann pour modéliser les gaz raréfiés. Un système comprenant un grand nombre de particules peut ainsi être représenté par une fonction de distribution $f(t, x, v)$ dans l'espace des phases (x, v) associé aux particules, x étant la position des particules et v la vitesse ($(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, avec $N = 3$ en pratique). Ainsi, la quantité $f(t, x, v) dx dv$ correspond à la densité de particules se trouvant dans le volume $dx dv$ centré en (x, v) au temps t . D'autres variables, comme par exemple l'énergie interne, peuvent être ajoutées à la fonction f lorsque l'on veut modéliser des phénomènes physiques plus complexes.

L'évolution de la fonction f est donnée par l'équation cinétique de Boltzmann

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f). \quad (1)$$

La première partie de cette équation (membre de gauche) correspond au vol libre des particules. Le second membre $Q(f, f)$, appelé l'opérateur de collision, représente l'effet des collisions entre les particules.

Avant d'écrire explicitement l'opérateur de collision, nous donnons quelques précisions sur les hypothèses concernant les collisions elles-mêmes. Les collisions sont binaires (seulement entre deux particules), localisées en temps et en espace (ainsi l'opérateur de collision n'agira pas sur les variables t et x). Nous supposons également que l'impulsion est conservée lors

d'une collision et que les collisions sont élastiques (conservation de l'énergie cinétique). Ainsi, si l'on considère deux particules de vitesses v et v_* avant collision et de vitesses v' et v'_* après collision, les lois de conservation précédentes nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} v + v_* = v' + v'_*, \\ |v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2. \end{cases}$$

Cela nous donne donc $N+1$ équations scalaires alors qu'il y a $2N$ inconnues scalaires. Les vitesses v' et v'_* sont ainsi déterminées via $N-1$ scalaires. On utilise ci-dessous la représentation- σ pour paramétrer ces équations

$$\begin{cases} v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2}\sigma, \\ v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2}\sigma, \end{cases} \quad (2)$$

où σ est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^N . On note θ (voir figure 1.) l'angle dans le repère du centre de masse entre les vitesses pré et post-collisionnelles.

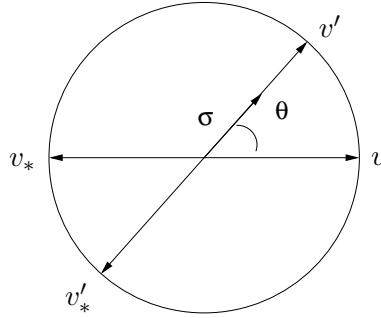


FIG. 1: Les vitesses pré et post-collisionnelles lors d'une collision élastique.

Enfin, les collisions sont considérées comme étant des phénomènes micro-réversibles en ce sens que la probabilité d'avoir une collision entre deux particules de vitesses v et v_* pour donner des particules de vitesses v' et v'_* est la même que la probabilité que les deux particules de vitesses v' et v'_* collisionnent en donnant deux particules de vitesses v et v_* . Enfin, nous faisons l'hypothèse de chaos moléculaire : les vitesses de deux particules qui vont collisionner ne sont pas corrélées et donc la probabilité de trouver en un point x deux particules de vitesses v et v_* (appelée probabilité jointe) est donnée par le produit de la fonction de distribution f en v et en v_* . Cette hypothèse n'est plus valable si les particules se trouvent par exemple dans un fluide environnant turbulent, ou bien quand la taille des particules est prise en compte et que deux particules de tailles très différentes se rencontrent (voir par exemple [34] ou [47]).

Dans le cadre de ces hypothèses, l'opérateur de collision s'écrit alors

$$Q(f, f) = \int_{\sigma \in S^{N-1}} \int_{v_* \in \mathbb{R}^N} (f' f'_* - f f_*) B(v, v_*, \sigma) dv_* d\sigma.$$

Nous utilisons ici les abréviations (habituelles) suivantes $f = f(t, x, v)$, $f_* = f(t, x, v_*)$, $f' = f(t, x, v')$, $f'_* = f(t, x, v'_*)$.

B est appelée la section efficace de collision : elle est liée à la probabilité qu'une collision change (v, v_*) en (v', v'_*) . En fait, B ne dépend que de la norme de la vitesse relative $|v - v_*|$ et du produit scalaire entre $\frac{v-v_*}{|v-v_*|}$ et σ (qui correspond à $\cos(\theta)$), nous noterons donc $B(\cos(\theta), |v - v_*|)$ dans la suite.

Passons à présent à la description des EDP issues de la mécanique des milieux continus. Dans les équations telles que les équations de Navier-Stokes ou d'Euler, les inconnues sont des grandeurs macroscopiques décrivant le fluide, dépendant du temps t et de la position x : la densité de masse $\rho(t, x)$, la vitesse $u(t, x)$ et l'énergie interne massique $e(t, x)$. Les équations sont obtenues en écrivant les lois de conservation sur les grandeurs physiques telles que la masse, l'impulsion et l'énergie. Prenons l'exemple de la conservation de la masse : en considérant un volume de contrôle V quelconque occupé par le fluide, la conservation de la masse implique que la variation de masse dans V doit être égale au flux algébrique de masse sortant de V à travers la paroi ∂V . Ce qui nous donne

$$\int_V \partial_t \rho \, dx = - \int_{\partial V} \rho u \cdot n \, ds,$$

où n est le vecteur normal à ∂V sortant de V . En utilisant la formule de Stokes sur l'intégrale de bord, nous obtenons

$$\int_V \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) \, dx = 0.$$

Le volume V étant arbitraire, on trouve l'équation de conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0.$$

En y ajoutant les équations provenant des conservations de l'impulsion $\rho(t, x) u(t, x)$ et d'énergie interne $\rho(t, x) e(t, x)$, nous obtenons les équations d'Euler compressibles

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p &= 0, \\ \partial_t(\rho e) + \operatorname{div}_x(\rho u e) + p \operatorname{div}_x(u) &= 0, \end{aligned}$$

où p est la pression : $p = p(\rho, e)$.

Pour plus de détails sur la dérivation des équations d'Euler ou de Navier-Stokes, le lecteur pourra consulter les ouvrages de Landau et Lifschitz [38] ou de Lions [41], [42].

Lors de l'étude des aérosols, constitués de deux phases, plusieurs approches sont possibles. Dans une de ces approches, on considère les aérosols comme des écoulements diphasiques, dans lesquels chaque phase est décrite de manière macroscopique et l'ensemble est régi par deux systèmes d'équations proches des équations de Navier-Stokes. Dans une autre approche, qui est celle que nous utilisons tout au long de ce travail, une des phases (le fluide environnant) est décrite par des quantités macroscopiques alors que la phase des gouttelettes en suspension est décrite par une fonction de distribution avec la même approche que pour la théorie cinétique des gaz. C'est Williams ([58]) qui a été le premier à introduire un tel modèle. Par la suite,

Amsden, O'Rourke et leur équipe du Los Alamos Laboratory ont utilisé ce couplage dans la conception du code numérique KIVA-II ([47],[3],[1]).

De manière plus précise, la phase continue est décrite par les quantités $\rho(t, x)$ (densité), $u(t, x)$ (vitesse), $e(t, x)$ (énergie), $p(t, x)$ (pression), mais aussi par sa fraction volumique $\alpha(t, x)$. La phase dispersée des gouttelettes est décrite par la fonction de distribution f , fonction du temps t , de l'espace x , de la vitesse v et du rayon r des gouttelettes. D'autres variables peuvent être utilisées afin de mieux tenir compte de la modélisation physique choisie, comme par exemple, la température T_p des gouttelettes. Comme dans la théorie cinétique des gaz, la fonction f est solution d'une équation de type cinétique. Celle-ci dépend de la modélisation des interactions entre le fluide et les gouttelettes. O'Rourke propose dans [47] une classification des sprays en fonction du degré d'interaction entre le fluide et les gouttelettes (nous n'écrivons pas pour les 3 modèles ci-dessous l'équation en énergie pour le fluide afin de ne pas multiplier les équations).

Dans les sprays dits **fins**, la fraction volumique des gouttelettes est négligeable (*i.e.* $\alpha(t, x) \equiv 1$) mais pas la masse de chaque particule. Ainsi, les gouttelettes interagissent avec le fluide via une force de traînée qui est due à la résistance du fluide au mouvement des gouttelettes. Il y a ainsi échange de quantité de mouvement entre les deux phases. De plus les interactions (comme les collisions) entre gouttelettes considérées incompressibles sont négligées. Dans une telle modélisation, les équations du spray peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p &= - \int m_p f F dv dr, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F f) &= 0,\end{aligned}$$

avec $m_p = \rho_p \frac{4}{3} \pi r^3$ la masse des gouttelettes, où ρ_p est la masse volumique des gouttelettes, supposée constante, et $F = \frac{D_p}{m_p} (u - v)$ la force de traînée de Stokes (D_p est le coefficient de traînée, et il dépend du fluide et des gouttelettes). Un tel modèle est utilisé par exemple par Domelevo dans [24].

Les sprays dits **modérément épais** sont des sprays fins pour lesquels on ne néglige plus les interactions entre gouttelettes. Ce modèle se retrouve dans le code numérique [3] ainsi que dans [34]. Dans ce cadre, les équations du spray s'écrivent

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p &= - \int m_p f F dv dr, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F f) &= Q(f).\end{aligned}$$

Ici, $Q(f)$ est l'opérateur qui prend en compte les interactions entre gouttelettes. Par exemple, si ces interactions sont uniquement des collisions, $Q(f)$ va être très proche de l'opérateur de collision classique de la théorie cinétique des gaz décrit ci-dessus.

Dans la modélisation des sprays dits **épais**, on ne néglige plus la fraction volumique des gouttelettes. De plus, la force d'Archimède due aux gradients de pression dans le gaz n'est

plus nécessairement négligeable devant la force de traînée. Dans ce cadre, les équations du spray s'écrivent

$$\begin{aligned}\partial_t(\alpha\rho) + \operatorname{div}_x(\alpha\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\rho u) + \operatorname{div}_x(\alpha\rho u \otimes u) + \nabla_x p &= - \int m_p f F \, dv \, dr, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (Ff) &= Q(f), \\ 1 - \alpha &= \int \frac{4}{3} \pi r^3 f \, dv \, dr,\end{aligned}$$

avec $F = \frac{D_p}{m_p}(u - v) - \frac{4}{3}\pi r^3 \nabla_x p$.

Une étude précise de la dérivation de ce système d'équations peut être trouvée dans [47].

Ces trois exemples de systèmes couplés entrent dans le cadre plus général des équations dites fluide-cinétique, modélisant les aérosols. Ces équations peuvent être comparées avec les équations diphasiques classiques obtenues avec l'autre approche citée précédemment page 7 (c'est-à-dire en considérant que les deux phases sont décrites par des quantités macroscopiques), en définissant par exemple la vitesse moyenne \bar{u} des gouttelettes

$$\bar{u} = \frac{\int m_p v f \, dv \, dr}{\int m_p f \, dv \, dr}.$$

On obtient alors les équations vérifiées par une telle quantité moyennée en intégrant l'équation en f contre $m_p v \, dv \, dr$. Le lecteur pourra consulter [44] pour une dérivation formelle des équations diphasiques à partir des équations du spray épais dans le cas de gouttelettes compressibles ou incompressibles et en tenant compte de l'équation d'énergie. De même, on retrouve la conservation totale de la masse et de la quantité de mouvement en intégrant en x et en v l'équation sur f multipliée par m_p ou $m_p v$, et en intégrant en x les quantités ρ et ρu du fluide. Par exemple, pour la quantité de mouvement dans le cas de sprays fins

$$\begin{aligned}\partial_t \left(\int_x \rho u \, dx \right) &= - \int_x \int_{v,r} m_p F f \, dx \, dv \, dr, \\ \partial_t \left(\int_x \int_{v,r} m_p v f \, dx \, dv \, dr \right) &= \int_x \int_{v,r} m_p F f \, dx \, dv \, dr.\end{aligned}$$

Ainsi, l'impulsion totale $\int_x \rho u \, dx + \int_x \int_{v,r} m_p v f \, dx \, dv \, dr$ est conservée.

Si l'on considère le système d'équations modélisant un spray fin, nous constatons que les gouttelettes interviennent dans les équations du fluide uniquement comme un terme source. La force de traînée peut être modélisée par : $F = C(\rho u - \rho v)$, avec C une constante du modèle (avec des particules incompressibles et toutes de même rayon). Les équations du spray s'écrivent alors (sous forme simplifiée, en choisissant un système d'unités pour lesquelles les coefficients sont égaux à 1)

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p &= - \int f(\rho u - \rho v), \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot ((\rho u - \rho v) f) &= 0.\end{aligned}$$

La théorie mathématique des systèmes de lois de conservation est très abondante et étudiée depuis longtemps ([39], [43], [33], [52]). Par contre, les études sur les couplages fluide-cinétique sont beaucoup plus récentes (consulter [19], [25], [32], [27], [28], [30]). En **section 2**, nous nous proposons d'étendre au cas ci-dessus (système d'Euler isentropique couplé avec une équation cinétique via un terme de traînée) un résultat d'existence en temps petit pour un système de lois de conservation symétrisable.

Lorsque l'on cherche à modéliser des sprays épais ou modérément épais dans lesquels les gouttelettes ont une grande disparité de taille ou de température, ou bien quand les phénomènes tels que l'évaporation des gouttelettes ou l'échange thermique avec le gaz environnant (sous forme d'énergie) ne sont pas négligeables, la fonction f de description de la phase dispersée doit dépendre du rayon r des gouttelettes ou de la température T_p . Si $f \equiv f(t, x, v, r, T_p)$, l'équation cinétique devient

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (Ff) + \partial_r(Rf) + \partial_{T_p}(\mathcal{T}f) = Q(f),$$

et

$$1 - \alpha = \int \frac{4}{3} \pi r^3 f(t, x, v, r, T_p) dv dr dT_p.$$

Ici, R représente l'évaporation de la particule et \mathcal{T} représente la quantité d'énergie échangée entre les gouttelettes et le fluide. Cette quantité apparaîtrait dans l'équation de conservation d'énergie du fluide (si on l'écrivait) comme un terme source, tout comme la force de traînée F intervient dans l'équation de quantité de mouvement du fluide pour tenir compte de l'échange d'impulsion avec la phase dispersée.

De même, pour prendre en compte des phénomènes plus complexes pouvant exister entre les gouttelettes tels que la coalescence (deux gouttelettes qui se rencontrent et qui s'agglutinent en une unique particule) ou la fragmentation (une seule particule se divise en plusieurs autres gouttelettes plus petites), c'est l'opérateur de collision $Q(f)$ qu'il faut modifier. O'Rourke [47] ainsi que Hylkema et Villedieu [35] ont proposés des opérateurs de collisions prenant en compte les rebonds et les coalescences. Dans [2], un modèle physique de fragmentations de gouttelettes est décrit (en terme de procédure informatique) et utilisé dans le code KIVA-II ([3]). Dans la **section 3**, nous écrivons les opérateurs précis de collision, coalescence et fragmentation correspondant à cette procédure (appelée modèle T.A.B.) et établissons pour ces opérateurs les propriétés de conservations de la masse, de l'impulsion et de l'énergie totale. Nous présentons également une méthode numérique.

En **section 4**, nous présentons la mise en place des collisions dans un code industriel diphasique du Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA), c'est à dire la résolution numérique d'un couplage fluide-cinétique avec la prise en compte des collisions. En particulier, nous décrivons la méthode particulière utilisée dans ce cadre.

Dans le modèle de fragmentation présenté en section 3, les gouttelettes ont un faible nombre de Weber ($We = \frac{\rho |u-v|^2 r}{\sigma}$, où σ est la tension de surface des gouttelettes et correspond au rapport entre les forces aérodynamiques et les forces de tension de surface). Cependant dans certaines applications, les nombres de Weber peuvent être plus importants (par exemple lors du passage d'une onde de choc) et cette modélisation n'est plus pertinente. Nous présentons en **section 5**, un autre modèle de fragmentation qui mène à une équation cinétique différente pour la phase dispersée du spray.

Dans la **section 6**, nous revenons à l'étude de l'opérateur de collision de la théorie cinétique des gaz. Une propriété importante de l'opérateur de collision est que $Q(f, f) = 0$ si et seulement si f est une fonction $M_{\rho, u, T}$, appelée Maxwellienne, de la forme

$$M_{\rho, u, T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{N/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}},$$

correspondant à l'équilibre thermodynamique. Le problème de la convergence vers l'équilibre consiste à montrer que la solution f de l'équation cinétique (1) avec pour condition initiale f_0 une distribution donnée (*i.e.* f est solution du problème de Cauchy associé à (1)) converge vers une Maxwellienne (indépendante de x lorsque des conditions aux limites adéquates sont imposées) quand $t \rightarrow +\infty$, et de trouver la vitesse de convergence vers l'équilibre. De nombreuses études mathématiques ont été menées dans ce sens, une présentation de l'état de l'art au début des années 90 est donnée dans [20]. Depuis, d'autres études se sont développées avec en particulier les techniques de dissipation d'entropie et la recherche d'estimations constructives (*cf.* [23]), qui contrastent avec les études utilisant des théorèmes classiques d'analyse, ne donnant en général que des estimations non explicites. Le travail présenté en section 6 s'inscrit dans le cadre de ces méthodes de détermination d'estimations explicites.

2 Existence en temps petit pour un couplage Vlasov-Euler isentropique

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude mathématique d'un couplage entre une équation cinétique de type Vlasov et les équations d'Euler isentropique, modélisant un spray fin.

Domelevo et Roquejoffre ([26], [27]) ont déjà prouvé l'existence (et l'unicité) globale de solutions régulières à l'équation de Burgers avec viscosité, couplée avec l'équation de Vlasov via un terme de traînée (proportionnel à la vitesse relative entre le gaz et la phase dispersée), avec des données initiales régulières (\mathcal{C}^2 pour u et \mathcal{C}_0^2 pour f)¹. Domelevo ([25]) a étendu ce résultat au cas où la fonction de distribution dépend en plus du rayon (sprays polydispersés) tout comme le terme de traînée, et pour des données initiales moins régulières (en mesure pour f et dans $W^{1,1}$ pour u). Dans un cadre plus général (*i.e.* multidimensionnel), Hamdache ([32]) a prouvé l'existence globale et le comportement en temps grand des solutions d'un couplage Vlasov-Stokes. Domelevo et Vignal ([28]) et Goudon ([30]) étudient également les solutions de couplages fluide-cinétique (Fokker-Planck-Burgers visqueux, Vlasov-Burgers visqueux) et les comportements asymptotiques de ces modèles. Les points communs à ces études sont le fait que la phase continue est toujours modélisée par un fluide visqueux et que les résultats d'existence sont obtenus par une méthode de point fixe utilisant les propriétés régularisantes du noyau de la chaleur.

Nous nous proposons ici de traiter le cas d'équations fluides non visqueuses et de démontrer

1. L'espace $\mathcal{C}_0^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^p(\Omega)$ à support compact sur Ω .

l'existence (en temps petit) de solutions d'un couplage Vlasov-Euler isentropique du type

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + P(\rho)e) &= - \int_v m_p F f dv, \\ \partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (F f) &= 0,\end{aligned}$$

où $P = P(\rho)$ est la pression ($P(\rho) = A \rho^\gamma$, $A > 0, \gamma > 1$ dans le cas des gaz parfaits). Le terme de traînée F est dû à la résistance du fluide au mouvement des gouttelettes de la phase dispersée. Les modélisations de ce terme peuvent être trouvées dans [47] ou [50]. Nous utilisons ici la modélisation simplifiée suivante, couramment utilisée dans les études théoriques

$$F = C \rho (u - v).$$

(le cas $F = C(u - v)$ se traite de la même manière et le résultat énoncé ci-dessous reste valable dans ce cas).

En prenant un système d'unités où toutes les constantes sont égales à 1, on se ramène à étudier le système couplé suivant

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \quad (3)$$

$$\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + P(\rho)I) = \int f(\rho v - \rho u) dv, \quad (4)$$

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (f(\rho u - \rho v)) = 0, \quad (5)$$

où $P(\rho) = \rho^\gamma$, avec $\gamma > 1$.

Le système d'Euler isentropique avec terme source (3)-(4) entre dans le cadre des systèmes de lois de conservation

$$\partial_t U + \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} F_j(U) = 0,$$

pour lesquels la théorie des solutions locales en temps est bien établie ([39], [40], [43], [33], [52]). Ainsi, pour le système d'Euler isentropique (sans couplage), si les données initiales ρ_0 et u_0 sont suffisamment régulières, alors il existe un intervalle de temps maximal sur lequel il existe une unique solution régulière. Ce résultat est général aux systèmes de lois de conservation ayant des propriétés particulières (hyperboliques symétrisables). Par exemple, Majda, dans [43], utilise la notion de systèmes symétrisables au sens de Friedrichs, c'est-à-dire que l'on suppose qu'il existe une matrice $S \equiv S(U)$ symétrique définie positive régulière en U , telle que les matrices $S(U) \partial_U F_j$ soient symétriques et telle que S soit bornée uniformément sur tout ouvert relativement compact de G , l'espace de définition du système de lois de conservation. La preuve de l'existence de solutions utilise des techniques d'estimations d'énergie qui, associées au lemme de Gronwall, permettent d'aboutir à des estimations a priori.

Nous utilisons ici la même technique de preuve, adaptée au couplage avec l'équation de Vlasov. Cette dernière équation se traite en utilisant la méthode des caractéristiques (si ρ et u sont données, alors la fonction f solution de l'équation de Vlasov est explicitement connue), et le contrôle du support de f en x et v , comme dans les preuves d'existence de solutions aux équations de Vlasov-Poisson ([49]).

Si l'on considère les conditions initiales

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \rho(0, x) &= \rho_0(x), \\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad u(0, x) &= u_0(x), \\ \forall (x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad f(0, x, v) &= f_0(x, v), \end{aligned} \tag{6}$$

et en définissant $G =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N$, on montre le théorème suivant

Théorème 1 *Soit $s > N/2 + 1$. Soit G_1 un ouvert relativement compact de G . Soit (ρ_0, u_0) avec $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 - 1$ et u_0 dans $H^s(\mathbb{R}^N)$, et f_0 dans $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \cap H^s(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $f_0 \geq 0$. On suppose de plus que $(\rho_0, \rho_0 u_0)$ est à valeurs dans G_1 (i.e. $\rho_0 \geq cste > 0$). Alors il existe $T > 0$ et il existe une solution (unique) $(\rho, \rho u, f)$ au système d'équation (3)-(4)-(5) avec pour donnée initiale (6), et telle que $(\rho, \rho u) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$.*

La preuve consiste en une méthode itérative où, à chaque étape, on résout le système (3)-(4)-(5) linéarisé autour de la solution de l'étape précédente (en commençant le processus par la donnée initiale). La solution du problème de Cauchy sera la limite de cette suite de solutions intermédiaires. On prouve alors que les estimations a priori nécessaires pour démontrer la régularité lors du passage à la limite, sont valables sur un intervalle de temps ne dépendant pas de l'itération (mais seulement de la donnée initiale). Ces estimations a priori sont obtenues par des méthodes d'énergies en ce qui concerne ρ et ρu et par la méthode des caractéristiques pour f .

3 Collision, coalescence et fragmentation des sprays

L'étude présentée au chapitre 2, publié dans la revue *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* ([5]), consiste à écrire des équations précises correspondant à un type de modélisation de collisions, coalescences et fragmentations de gouttelettes dans un spray (pour une description plus détaillée, consulter [4]).

Dans de nombreuses applications industrielles (combustion, nucléaire, haute atmosphère), l'étude des sprays et de leur comportement est primordiale. Les phénomènes tels que la coalescence et la fragmentation doivent être décrits de manière précise car ils sont prépondérants sur l'évolution de la phase dispersée (voir [35] pour un calcul d'ordre de grandeur sur les collisions).

En ce qui concerne les collisions et coalescences, Hylkema et Villedieu [34, 35] ainsi que O'Rourke [47] proposent des opérateurs de collisions et de coalescences. Dans [35], un ensemble d'hypothèses est formulé sur les collisions qui sont suivies soit d'un rebond, soit d'une coalescence. En particulier, la notion de paramètre d'impact critique est décrit. Ce paramètre permet de déterminer lors de la rencontre de deux gouttelettes, si elles vont rester agglutinées pour une coalescence ou bien rebondir l'une contre l'autre. Ces hypothèses permettent également de décrire les vitesses des gouttelettes après rebond (formule classique (2) en tenant compte des rayons) et après coalescence. Il faut noter ici que dans les modèles de Hylkema - Villedieu et O'Rourke, l'énergie cinétique n'est pas conservée lors des coalescences : en effet, pour avoir conservation de la masse, le rayon final de la particule après coalescence est déterminé de manière unique par les deux rayons initiaux. De même, la vitesse finale est

déterminée de manière unique d'après la conservation de l'impulsion. Il n'y a donc pas en général de conservation de l'énergie cinétique.

Les modèles de fragmentations classiques reposent en général sur une approche statistique basée sur des expérimentations (voir par exemple [56]). Cela permet de déterminer un temps caractéristique de rupture des gouttes et également les caractéristiques des gouttes obtenues par la fragmentation. L'opérateur de fragmentation est alors écrit en utilisant ces données. L'approche que nous choisissons ici est celle du modèle T.A.B. (Taylor Analogy Breakup) présenté par Amsden et O'Rourke dans [2] et utilisé dans le code numérique KIVA-II ([3]). Ce modèle permet à travers une équation d'évolution de déterminer le temps de fragmentation spécifique à chaque particule. Inspiré par les travaux de Taylor [53], Amsden et O'Rourke font dans le modèle T.A.B. l'analogie entre une goutte oscillante et un ressort. Ce modèle est adapté aux cas où la rupture de la goutte est due à l'accroissement de l'amplitude des oscillations de sa surface. Ces oscillations sont dues aux forces aérodynamiques imposées par le fluide environnant sur les gouttes. Deux nouveaux paramètres sont donc ajoutés au modèle de description des gouttes : y (nombre adimensionné), décrivant la déformation de la goutte par rapport à sa position d'équilibre sphérique, et \dot{y} l'oscillation de la goutte (variation de y). Comme dans le cas d'un oscillateur harmonique forcé, ces deux paramètres sont liés par la relation

$$\ddot{y} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho_p} \frac{|u - v|^2}{r^2} - \frac{8\sigma}{\rho_p r^3} y - \frac{10\mu_d}{\rho_p r^2} \dot{y},$$

où σ est la tension de surface et μ_d la viscosité des gouttes.

Le terme en $|u - v|^2$ correspond aux forces aérodynamiques dues au fluide, le terme lié à la tension de surface intervient ici comme une force de rappel et celui lié à la viscosité comme un amortissement. Les coefficients de cette relation sont obtenus en utilisant diverses comparaisons avec des expériences. Cette relation donne donc l'évolution de la déformation de la goutte. La fragmentation a lieu lorsque la déformation est suffisamment importante (amplitude des oscillations supérieure à la moitié du rayon de la goutte), ce qui correspond à $|y| = 1$ (à cause de l'adimensionnement). Ce modèle permet également de prédire un temps de fragmentation en cohérence avec les résultats expérimentaux ([2]).

La fonction de distribution va donc dépendre, en plus de x, v, r, T_p (position, vitesse, rayon, température), des deux variables y et \dot{y} . L'évolution de ces deux paramètres va alors être prise en compte dans l'équation cinétique que vérifie f

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x(f v) + \operatorname{div}_v(f F) + \frac{\partial(f T)}{\partial T_p} + \frac{\partial(f \dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial(f \ddot{y})}{\partial \dot{y}} = Q_{coll}(f, f) + Q_{frag}(f), \quad (7)$$

où $Q_{coll}(f, f)$ et $Q_{frag}(f)$ sont respectivement les opérateurs de collision (et de coalescence) et de fragmentation. Pour l'opérateur de collision, nous nous sommes inspirés de celui décrit par Hylkema et Villedieu [35, 34]. Cependant, il faut tenir compte, lorsque l'on détermine les paramètres des gouttes après collision (que ce soit un rebond ou une coalescence) des deux paramètres supplémentaires y et \dot{y} . Ils sont déterminés afin d'avoir conservation totale de l'énergie constituée de l'énergie cinétique, de l'énergie d'oscillation (proportionnelle à $r^2 \dot{y}^2$), de l'énergie de distorsion (proportionnelle à $r^5 \dot{y}^2$) et de l'énergie de tension de surface (proportionnelle à σr^2). Ainsi, lors des coalescences, de l'énergie cinétique est perdue, on la retrouve

donc en énergie d'oscillation. Ceci permet aussi de considérer le cas des rebonds inélastiques tout en conservant l'énergie totale.

Le noyau de collision $Q_{coll}(f, f)$ s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned}
Q_{coll}(f, f) = & - \int \int_{\substack{v^*, r^*, T_p^*, \\ y^*, \dot{y}^*}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f f^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\phi d\theta dv^* dr^* dT_p^* dy^* d\dot{y}^* \\
& + \int \int_{\substack{v^*, r^*, T_p^*, \\ y^*, \dot{y}^*}} \int_{\theta=0}^{\theta_{cr}} \int_{\phi=0}^{2\pi} f' f'^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) \frac{\dot{y}\dot{y}^*}{\mathcal{A}^4 \dot{y}' \dot{y}'^*} d\phi d\theta dv^* dr^* dT_p^* dy^* d\dot{y}^* \\
& + \frac{1}{2} \int \int_{\substack{(v^\diamond, r^\diamond, T_p^\diamond, \\ y^\diamond, \dot{y}^\diamond) \in \mathbb{D}^*}} \int_{\theta=\theta_{cr}}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f^* f^{\diamond} B(\theta, |v^* - v^\diamond|, r, r^*) \left(\frac{r}{r^\diamond}\right)^{21} \frac{y\dot{y}}{y^\diamond \dot{y}^\diamond} d\phi d\theta dv^* dr^* dT_p^* dy^* d\dot{y}^*.
\end{aligned}$$

Avec les notations suivantes: $f = f(t, x, v, r, T_p, y, \dot{y})$, $f^* = f(t, x, v^*, r^*, T_p^*, y^*, \dot{y}^*)$, $f' = f(t, x, v', r, T_p, y, \dot{y}')$, $f'^* = f(t, x, v'^*, r^*, T_p^*, y^*, \dot{y}'^*)$, $f^{\diamond} = f(t, x, v^\diamond, r^\diamond, T_p^\diamond, y^\diamond, \dot{y}^\diamond)$. $(v', v'^*, \dot{y}', \dot{y}'^*)$ sont respectivement les vitesses et oscillations des gouttelettes **avant collision** entre deux gouttelettes de caractéristiques $(v, v^*, \dot{y}, \dot{y}^*)$

$$\left\{ \begin{array}{l}
v' = \frac{r^3 v + r^{*3} v^*}{r^3 + r^{*3}} + \frac{r^{*3}}{\mathcal{A}(r^3 + r^{*3})} |v - v^*| \vec{\sigma}, \\
v'^* = \frac{r^3 v + r^{*3} v^*}{r^3 + r^{*3}} - \frac{r^3}{\mathcal{A}(r^3 + r^{*3})} |v - v^*| \vec{\sigma}, \\
\dot{y}'^2 = \dot{y}^2 + \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}^2}\right) \frac{r^3 r^{*3}}{r^5 (r^3 + r^{*3})} \frac{r^3}{r^3 + r^{*3}} |v - v^*|^2, \\
\dot{y}'^{*2} = \dot{y}^{*2} + \left(1 - \frac{1}{\mathcal{A}^2}\right) \frac{r^3 r^{*3}}{r^{*5} (r^3 + r^{*3})} \frac{r^{*3}}{r^3 + r^{*3}} |v - v^*|^2,
\end{array} \right.$$

\mathcal{A} est le paramètre d'inélasticité des collisions ($\mathcal{A} \in]0, 1]$). Enfin, le vecteur $\vec{\sigma} \in \mathbb{S}^2$ est paramétré par les angles (θ, ϕ) .

$(v^\diamond, r^\diamond, T_p^\diamond, y^\diamond, \dot{y}^\diamond)$ sont les caractéristiques d'une gouttelette qui, **en coalesçant** avec une

gouttelette $(v^*, r^*, T_p^*, y^*, \dot{y}^*)$ donne une gouttelette (v, r, T_p, y, \dot{y}) .

$$\left\{ \begin{array}{l} r^\diamond = (r^3 - r^{*3})^{1/3}, \\ v^\diamond = \frac{r^3 v - r^{*3} v^*}{r^3 - r^{*3}}, \\ T_p^\diamond = \frac{r^3 T_p - r^{*3} T_p^*}{r^3 - r^{*3}}, \\ y^{\diamond 2} = \frac{r^2 y^2 - r^{*2} y^{*2}}{(r^3 - r^{*3})^{2/3}}, \\ \dot{y}^{\diamond 2} = \frac{r^5 \dot{y}^2 - r^{*5} \dot{y}^{*2}}{(r^3 - r^{*3})^{5/3}} - \frac{r^3 r^{*3}}{(r^3 - r^{*3})^{8/3}} |v - v^*|^2 - \frac{6\sigma (r^{*2} + (r^3 - r^{*3})^{2/3} - r^2)}{\rho_p (r^3 - r^{*3})^{5/3}}, \end{array} \right.$$

et \mathbb{D}^* est l'ensemble des particules $(v^*, r^*, T_p^*, y^*, \dot{y}^*)$ qui en coalesçant, peuvent donner une particule (v, r, T_p, y, \dot{y}) (voir formules page 79).

La section efficace de collision (en représentation $\vec{\sigma}$) est celle des sphères dures

$$B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) = (r + r^*)^2 |v - v^*| \frac{\sin \theta}{4}.$$

θ_{cr} est l'angle critique permettant de déterminer la limite rebond-coalescence

$$\theta_{cr}(|v - v^*|, r, r^*) = \pi - 2 \arcsin \left(\frac{\Pi_{cr}(|v - v^*|, r, r^*)}{r + r^*} \right),$$

où Π_{cr} , le paramètre d'impact critique est donné de façon empirique (cf [35], [3]).

L'opérateur de fragmentation est déterminé en considérant le nombre de gouttelettes qui vont subir la fragmentation : c'est le flux de f à travers les "surfaces" $y = 1$ et $y = -1$, c'est-à-dire $\dot{y}(f(t, x, v, r, T_p, 1, \dot{y}) - f(t, x, v, r, T_p, -1, \dot{y}))$. Il faut également se donner le nombre et les caractéristiques des gouttelettes créées par la fragmentation. On définit pour cela la probabilité b : une gouttelette de caractéristiques $r, |y| = 1$ et \dot{y} va se fragmenter en donnant des gouttelettes de caractéristiques r^*, y^* et \dot{y}^* avec la probabilité $b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y})$. Cette probabilité doit vérifier certaines conditions, afin de préserver la conservation de la masse et de l'énergie totale.

Alors, l'opérateur de fragmentation $Q_{frag}(f)$ s'écrit

$$Q_{frag}(f) = \int_{r^*, \dot{y}^*} \int_{\gamma=0}^{2\pi} b(r, r^*, \dot{y}^*, y, \dot{y}) \dot{y}^* (f(v - \omega^* n, r^*, T_p, 1, \dot{y}^*) - f(v - \omega^* n, r^*, T_p, -1, \dot{y}^*)) \frac{d\gamma}{2} dr^* d\dot{y}^*,$$

le vecteur n pris aléatoirement sur la sphère unité étant paramétré par l'angle γ .

On couple alors l'équation cinétique (7) avec un système d'équations fluides telles que

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u) = -\nabla_x p + \nabla_x \cdot \Sigma + F^s, \quad (9)$$

$$\partial_t(\rho e) + \operatorname{div}_x(\rho u e) = -p \operatorname{div}_x u + \Sigma : \nabla_x u - \operatorname{div}_x J + \dot{Q}^s, \quad (10)$$

avec Σ le tenseur des déformations, F^s et \dot{Q}^s les termes d'interaction avec les gouttelettes et J le flux de chaleur. Ces quantités sont définies plus précisément en page 77.

L'ensemble de ces équations (cinétique + fluide) assure la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie totale. Pour démontrer cela, il faut d'abord montrer le résultat suivant qui nous donne l'expression de la forme faible des opérateurs de collision et de fragmentation

Proposition 1 *Si Φ est une fonction continue à support compact, alors on a pour l'opérateur de collision*

$$\begin{aligned} \langle Q_{coll}(f), \Phi \rangle = & \int \int_{v, r, T_p, y, \dot{y}} \int \int_{v^*, r^*, T_p^*, y^*, \dot{y}^*} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} f f^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) \left((\Phi' + \Phi^*) \chi_{\theta_{cr}} \right. \\ & \left. + \Phi^\# (1 - \chi_{\theta_{cr}}) - \Phi - \Phi^* \right) d\theta d\phi dv^* dr^* dT_p^* dy^* d\dot{y}^* dv dr dT_p dy d\dot{y}, \end{aligned}$$

et pour l'opérateur de fragmentation

$$\begin{aligned} \langle Q_{frag}(f), \Phi \rangle = & \iint_{v, r, T_p, \dot{y}} \dot{y} \left(f(v, r, T_p, 1, \dot{y}) - f(v, r, T_p, -1, \dot{y}) \right) \int \int_{\gamma, r^*, y^*, \dot{y}^*} b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*) \\ & \Phi(v + \omega \mathbf{n}, r^*, T_p, y^*, \dot{y}^*) \frac{d\gamma}{2\pi} dr^* dy^* d\dot{y}^* dv dr dT_p d\dot{y}. \end{aligned}$$

Cela nous permet de montrer que le système fluide-cinétique vérifie la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie totale.

Proposition 2

$$(masse) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_x \rho dx + \int \rho_p \frac{4}{3} \pi r^3 f dx dv dr dT_p dy d\dot{y} \right] = 0,$$

$$(impulsion) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_x \rho u dx + \int \rho_p \frac{4}{3} \pi r^3 v f dx dv dr dT_p dy d\dot{y} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} (energie) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_x \rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) dx + \int \left(\rho_p \frac{4}{3} \pi r^3 \left(\frac{|v|^2}{2} + c_l T_p \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 4\pi r^2 \sigma \left(1 + \frac{4}{3} y^2 \right) + \frac{2\pi}{3} \rho_p r^5 \dot{y}^2 \right) f dx dv dr dT_p dy d\dot{y} \right] = 0. \end{aligned}$$

Afin de résoudre numériquement les équations déterminant l'évolution du spray, il faut résoudre à la fois les équations (8)-(9)-(10) du gaz et l'équation cinétique (7) de la phase dispersée. Nous nous concentrons au chapitre 3 sur la résolution numérique de cette dernière (sans détailler la discrétisation de (8)-(9)-(10)).

Du fait de la grande dimension de l'espace des phases $(x, v, r, T_p, y, \dot{y})$ (10 si on est en 3 dimensions pour le mouvement des gouttelettes), il est trop coûteux d'utiliser une méthode de type volume finis. On utilise alors une méthode particulière, c'est-à-dire que l'on cherche une approximation de f sous la forme d'une somme de masses de Dirac

$$f(t, x, v, r, T_p, y, \dot{y}) \approx \sum_{i=1}^N n_i(t) \delta_{x_i(t), v_i(t), r_i(t), T_{p_i}(t), y_i(t), \dot{y}_i(t)},$$

où les $(x_i(t), v_i(t), r_i(t), T_{p_i}(t), y_i(t), \dot{y}_i(t))$ sont les caractéristiques des N particules numériques, et $n_i(t)$ est le nombre de particules réelles représentées par chaque particule numérique i .

On utilise ensuite un *splitting* en temps de l'équation cinétique. Le principe du *splitting* est le suivant : lorsque l'on considère une équation du type

$$\partial_t f = \mathcal{A} f + \mathcal{B} f, \quad (11)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux opérateurs quelconques, on peut utiliser la formule de Trotter

$$e^{t(\mathcal{A}+\mathcal{B})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{t\frac{\mathcal{A}}{n}} e^{t\frac{\mathcal{B}}{n}})^n,$$

afin de calculer numériquement la solution de (11). Pratiquement, cela revient à résoudre successivement les équations

$$\begin{aligned} \partial_t f &= \mathcal{A} f, \\ \partial_t f &= \mathcal{B} f, \end{aligned}$$

en prenant comme donnée initiale pour l'une des équations la donnée finale fournie par l'autre équation (cf [22]).

Dans le cas de l'équation (7) considérée ici, le *splitting* s'effectue entre la partie transport (Vlasov), la partie collision-coalescence et la partie fragmentation, c'est-à-dire que l'on résout successivement les équations

$$\partial_t f + \operatorname{div}_x(fv) + \operatorname{div}_v(fF) + \frac{\partial(fT)}{\partial T_p} + \frac{\partial(f\dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial(f\ddot{y})}{\partial \dot{y}} = 0,$$

$$\partial_t f = Q_{bu}(f),$$

$$\partial_t f = Q_{coll}(f, f).$$

Enfin, le temps est discrétisé en $t^n = n\Delta t$. La partie de transport est résolue classiquement grâce aux équations caractéristiques vérifiée par $x_i, v_i, r_i, T_{p_i}, y_i$ et \dot{y}_i .

L'étape de fragmentation ne pose pas de problème (on rappelle ici que l'opérateur de fragmentation est linéaire). Une description de la méthode numérique peut être trouvée dans [3].

Enfin, l'opérateur de collision-coalescence est le plus technique à discrétiser. Une description détaillée d'un exemple de discrétisation particulière peut être trouvée dans [36]. La première étape consiste à s'affranchir de la variable d'espace. Cet opérateur n'agissant pas sur les positions des particules mais uniquement sur ces autres caractéristiques, l'idée, inspirée de Bird ([10]) consiste à approcher la fonction f en une position x de l'espace par une moyenne de cette fonction sur un volume entourant cette position : par exemple si V est un petit volume centré en x (appelé volume de contrôle)

$$f \simeq \chi_V \sum_{i=1}^{N_V} \frac{n_i}{Vol(V)} \delta_{v_i, r_i, T_{di}, y_i, \dot{y}_i},$$

où N_V est le nombre de particules numériques situé dans le volume V , et χ_V est la fonction indicatrice du volume V . Lorsque l'on résout l'équation cinétique en couplage avec des équations fluides, qui sont résolues grâce à une méthode de volumes finis, les volumes de contrôle les plus souvent choisis correspondent aux mailles du domaine utilisé en volume fini.

Il reste alors à résoudre l'équation de Boltzmann spatialement homogène

$$\partial_t f = Q_{coll}(f, f).$$

La méthode que nous présentons au chapitre 2 fait partie de la classe des méthodes DSMC (Direct Simulation Monte Carlo), dues à Nanbu ([46]) et Bird ([10]). En écrivant les parties gains Q_{coll}^+ et pertes $Q_{coll}^- = (\int f^*(\int B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\sigma) dv^* dr^* dT_p^* dy^* d\dot{y}^*) f = \mu f$ de l'opérateur de collision

$$\partial_t f = Q_{coll}^+ - \mu f,$$

alors le nombre de particules qui vont subir une collision durant le pas de temps Δt va être égal à $\Delta t N_V \mu$. Il suffit donc à chaque pas de temps de faire collisionner $\Delta t N_V \mu$ particules. Le problème de cette méthode, c'est que la valeur μ peut être très coûteuse à calculer (intégrale en 9 dimensions). La méthode de collision fictive (acceptation-rejet) utilisée au chapitre 2 permet d'accélérer le processus.

Afin de pouvoir valider le code zéro-dimensionnel implémenté, nous utilisons les solutions dites de Bolyev ([11]) : dans le cas très particulier où il n'y a pas de dépendance en r, T_p, y, \dot{y} dans la collision, où la section efficace B vaut 1, et où la donnée initiale f_0 a une forme particulière ($f_0(v) = \frac{2}{3\pi\sqrt{\pi}} |v|^2 e^{-|v|^2}$), on connaît l'expression de la solution de l'équation de Boltzmann homogène. On peut alors faire des comparaisons entre la solution approchée et la solution exacte.

Enfin, nous présentons quelques simulations de collisions, coalescences et fragmentations avec des données physiques (afin d'avoir des conditions réalistes pour les valeurs de θ_{cr} par exemple), et toujours homogènes en espace.

4 Simulation numérique du couplage fluide-cinétique dans le cadre d'un code industriel

Nous présentons au chapitre 3 un travail mené dans le cadre d'une collaboration avec le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA), détaillé en partie dans [7].

Le cadre de base du présent travail est celui étudié par Dukowicz [29], et développé par Motte [45] pour mettre en place un module diphasique dans un code monofluide du CEA. La situation physique initiale est le phénomène appelé éjection de matière : lorsqu'une onde de choc traverse une surface solide, une partie de la matière constituant le solide peut-être arrachée et se retrouver en interaction avec le fluide porteur. Cet écoulement est alors un écoulement de type gaz-particule (ou fluide-cinétique) et peut être modélisé par un couplage entre des équations fluides et une équation de type cinétique.

Le modèle de base est le suivant : on considère que des gouttelettes sont plongées dans un gaz. On suppose qu'il n'y a pas d'échange de matière entre les deux phases, et qu'il n'y a pas d'interaction entre les gouttelettes (pas de collisions, coalescences ni fragmentations). Par contre l'interaction entre le gaz et les gouttelettes est prise en compte via la somme de la force de traînée et de la force d'Archimède (force de gradient de pression). De plus, on suppose que la fraction volumique des gouttelettes n'est pas négligeable. Le gaz est donc caractérisé par sa densité $\rho(t, x)$, sa vitesse $u(t, x)$, son énergie interne massique $e(t, x)$ et sa fraction volumique $\alpha(t, x)$. Les gouttelettes sont décrites par une fonction de distribution f dépendant des variables (t, x, v, r, e_p) (respectivement le temps t , la position x , la vitesse v , le rayon r et l'énergie interne e_p). Ces quantités sont solutions du système couplé suivant

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha \rho) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u) &= 0, \\ \partial_t(\alpha \rho u) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u \otimes u) + \nabla_x p &= F^s, \\ \partial_t(\alpha \rho e) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u e) + p (\partial_t \alpha + \nabla_x \cdot (\alpha u)) &= \dot{Q}^s, \\ \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F f) + \partial_{e_p}(\phi f) &= 0, \\ \alpha &= 1 - \int \frac{4\pi}{3} r^3 f \end{aligned}$$

(tous les termes non explicités ici, comme F^s , \dot{Q}^s ou F , le sont au chapitre 3).

Une première amélioration du modèle a été apportée par Boudin afin de tenir compte de la compressibilité des particules ([13]-[14]).

Le but de cette étude est de poursuivre l'enrichissement du modèle en prenant en compte les phénomènes plus complexes intervenant entre les gouttelettes tels que les collisions, les coalescences et les fragmentations. En effet, les gouttelettes sont pour l'instant seulement convectées par le gaz, sans dispersion possible. Cependant, dans les situations physiques considérées au CEA, la fraction volumique des particules semble suffisamment importante pour que les phénomènes tels que les collisions, les coalescences et les fragmentations ne puissent être négligés. D'après les ordres de grandeurs calculés dans le code du CEA, le phénomène prépondérant semble être les collisions. Nous avons donc choisi, non pas d'utiliser le modèle présenté en section précédente (qui tenait aussi compte des coalescences et des fragmentations), mais de considérer un modèle simple de collision de type sphères dures: au niveau des équations du modèle, cela consiste à rajouter un opérateur de collision Q_{coll} au

second membre de l'équation cinétique

$$\begin{aligned}
Q_{coll}(f, f) = & - \int_{v^*, r^*, e_p^*} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f f^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\phi d\theta dv^* dr^* de_p^* \\
& + \int_{v^*, r^*, e_p^*} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f' f'^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\phi d\theta dv^* dr^* de_p^*,
\end{aligned} \tag{12}$$

avec les notations $f = f(t, x, v, r, e_p)$, $f^* = f(t, x, v^*, r^*, e_p^*)$, $f' = f(t, x, v', r, e_p')$, $f'^* = f(t, x, v'^*, r^*, e_p'^*)$. Les vitesses post-collision (v', v'^*) sont données par

$$\begin{cases} v' &= \frac{r^3 v + r^{*3} v^*}{r^3 + r^{*3}} + \frac{r^{*3}}{r^3 + r^{*3}} |v - v^*| \vec{\sigma}, \\ v'^* &= \frac{r^3 v + r^{*3} v^*}{r^3 + r^{*3}} - \frac{r^3}{r^3 + r^{*3}} |v - v^*| \vec{\sigma}. \end{cases} \tag{13}$$

La section efficace de collision utilisée est donc celle des sphères dures

$$B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) = \pi |v - v^*| (r + r^*)^2 \frac{\sin \theta}{4\pi}.$$

La méthode numérique utilisée pour résoudre ces équations est un splitting en temps entre d'une part le système fluide et l'équation de Vlasov et d'autre part l'équation décrivant les collisions $\partial_t f = Q_{coll}$. La première partie de ce splitting correspond à la partie existante du code et est décrite dans [45], [13], [14]. C'est une méthode Lagrange-projection classique (voir [37], [45]) pour le gaz, et une résolution des caractéristiques pour la phase dispersée.

La partie collision, qui est donc la partie qui a été ajoutée au code du CEA, est une méthode particulière (voir la section précédente). Cependant, dans la méthode décrite dans la section précédente, les particules numériques ont un poids (numérique) constant. Dans le cadre du code CEA, les particules numériques ont un poids variable (à cause des grandes disparités en taille des gouttelettes). Il faut donc utiliser une méthode de collisions à poids non constant. De telles méthodes sont utilisées dans les codes industriels, par exemple à Los Alamos dans le code KIVA-II [3] et à l'ONERA dans le cadre du programme de recherche ASSM [34]-[56]. Dans ces deux cas, ce sont des méthodes de type Bird, aménagées pour tenir compte du poids non constant des particules.

Dans notre approche, nous avons choisi d'utiliser une méthode de type Nanbu ([46]), dans lesquelles quand une particule collisionne avec un partenaire de collision, seuls les paramètres de la première particule sont modifiés.

Afin de valider cette méthode de collisions à poids non constant, nous avons repris le cas test présenté au chapitre 2 pour lequel on dispose d'une solution analytique explicite à l'équation homogène en espace $\partial_t f = Q_{coll}$. Un cas test effectué avec le code du CEA est ensuite présenté. Nous pouvons ainsi comparer les trois résultats obtenus en considérant le code initial, le code avec collision et méthode à poids constant et le code avec collision et méthode à poids non constant.

5 Fragmentation à grand nombre de Weber

Le travail présenté au chapitre 4 a été mené dans le cadre du projet GENJET (GENeration and breakup of liquid JETs), proposé par le Centre d'Étude de Gramat (CEG) de la

Délégation Générale de l'Armement (DGA), et effectué durant le CEMRACS 2003 ([6]). Le but général de ce projet est l'étude de l'impact d'un corps solide contre un réservoir contenant un fluide. A cause de la surpression créée par le projectile dans le réservoir, une partie du liquide est éjectée par le trou effectué par le projectile. Le jet formé est alors susceptible d'interagir avec une onde de surpression aérienne pour former un nuage de gouttelettes. Deux thématiques se sont dégagées de cette vaste étude : premièrement, la modélisation et la simulation de l'entrée d'un corps solide dans un fluide compressible, et la modélisation et la simulation de la fragmentation d'un nuage de gouttelettes sous l'effet d'une onde de choc. C'est cette dernière partie que nous présentons ici et qui a été réalisée en collaboration avec L. Boudin.

Le nuage de gouttelettes est modélisé par le couplage d'un système fluide (pour l'air ambiant) et d'une équation cinétique vérifiée par f , la densité de probabilité des gouttelettes. Dans cette étude f dépend de la position x , de la vitesse v , et du rayon r des gouttelettes. Nous considérons également que le fluide environnant est fixé. Nous nous intéressons seulement à l'équation cinétique.

Nous avons vu précédemment que le modèle de fragmentation T.A.B. décrit en section 3 ne peut pas être utilisé ici car nous cherchons à décrire des gouttelettes qui ont un fort nombre de Weber (We). Nous avons donc choisi de décrire la fragmentation par le modèle d'onde de Reitz ([51], [9], [48]). Ce modèle détermine quand et comment les gouttelettes se fragmentent en calculant la longueur d'onde Λ de la déformation la plus importante à la surface de la gouttelette, déformation due aux instabilités aérodynamiques. Le temps caractéristique de fragmentation τ est alors donné par

$$\tau = \frac{C r}{\Omega \Lambda},$$

où Ω est le taux de croissance de la déformation, r le rayon de la gouttelette et C une constante dépendant des caractéristiques du spray (calculée en général de manière expérimentale). Si le rayon de la gouttelette est plus grand qu'une fraction de la longueur d'onde de la déformation et que $\frac{We}{\sqrt{Re}} > \frac{1}{2}$ (Re étant le nombre de Reynolds), la gouttelette "perd" une partie de sa masse sous forme de nouvelles gouttelettes. Le rayon R de ces nouvelles gouttelettes est proportionnel à la longueur d'onde Λ . La vitesse de ces gouttelettes est égale à la vitesse de la gouttelette initiale plus une vitesse perpendiculaire à cette vitesse. Le rayon de la gouttelette initiale est alors modifié afin d'avoir conservation de la masse lors de la fragmentation.

La définition précise de toutes les quantités non définies ci-dessus (Λ , Ω ,...), ainsi que celles qui suivent, peut être trouvée page 105 et 107 du chapitre 4.

La spécificité de ce modèle est que la gouttelette qui subit la fragmentation ne disparaît pas mais perd seulement de la masse. Ceci implique que la fragmentation ne peut pas être décrite uniquement par un opérateur (linéaire) de fragmentation, qui comptabilise uniquement les gouttelettes qui disparaissent et apparaissent, mais qu'il faut aussi prendre en compte l'évolution "continue" du rayon des gouttelettes. L'équation cinétique s'écrit alors

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (fF) + \partial_r (f\chi) = Q_{\text{bup}}(f), \quad (14)$$

où $F = -\frac{D_p(t,x,v,r)}{m_p(r)}(v - u(t,x))$ est la force de traînée classique et χ décrit l'évolution du rayon des gouttelettes

$$\chi = -\nu(t,x,v,r)(r - R),$$

ν étant la fréquence de fragmentation donnée par

$$\begin{aligned} \nu &= 0 & \text{si } r \leq C' \Lambda \text{ ou si } We \leq \frac{1}{2} \sqrt{Re}, \\ \nu &= \frac{1}{\tau} & \text{sinon.} \end{aligned}$$

Le terme de gain dû à la fragmentation est donc écrit sous forme d'un opérateur intégral ($Q_{bup}(f)$) et le terme de perte correspond à $\partial_r(f\chi)$ (similaire à un terme de perte de rayon due à un phénomène d'évaporation par exemple). L'opérateur $Q_{bup}(f)$ s'écrit

$$Q_{bup}(f)(v, r) = \int_{v_*, r_*} \int_{S_1(v_*)} \nu(v_*, r_*) \frac{3r_*^2(r_* - R_*)}{R_*^3} \delta_{V_*}(v) \delta_{R_*}(r) f(v_*, r_*) \frac{dn}{2\pi} dr_* dv_*,$$

où R_* est le rayon des gouttelettes créées par fragmentation de la goutte (v_*, r_*) (*i.e.* proportionnel à la longueur d'onde Λ_* associée à (v_*, r_*)) et où V_* est leur vitesse, avec $V_* = v_* + v_{\perp} n$ et n est un vecteur aléatoire du cercle unité $S_1(v_*)$ dans le plan normal à v_* .

En intégrant l'équation cinétique (14) contre m_p et $m_p v$ sur l'espace des phases (x, v, r) , et en utilisant les expressions de l'opérateur Q_{bup} et de la variation χ , on obtient la conservation de la masse totale $\int_{x, v, r} m_p f dv dr dx$ et de l'impulsion totale $\int_{x, v, r} m_p v f dv dr dx$.

La méthode numérique utilisée pour résoudre l'équation cinétique est une méthode particulaire (on cherche f sous la forme d'une somme de masses de Dirac de particules numériques). Un *splitting* est effectué entre la partie transport (en espace et en vitesse) et la partie fragmentation (opérateur de fragmentation et le transport en rayon). La partie transport est résolue classiquement par une méthode d'Euler (explicite en espace et implicite en rayon). La partie fragmentation, linéaire, est résolue pour chaque particule numérique indépendamment. Si le rayon r_i de la particule numérique i vérifie $r_i > C' R_i$ et que $\frac{We_i}{\sqrt{Re_i}} > \frac{1}{2}$, alors la particule i va fragmenter avec la probabilité $\frac{\Delta t}{\nu_i}$ où Δt est le pas de temps du schéma numérique. Si elle fragmente effectivement, son rayon est modifié en suivant l'évolution donnée par χ . Le rayon R_i des particules obtenues par la fragmentation est proportionnel au rayon initial de la particule 'mère'. Le nombre N_i des particules obtenues est donné par la conservation de la masse $N_i = \frac{3r_i^2(r_i - R_i)}{R_i^3}$.

Nous avons effectué des tests numériques en utilisant les données physiques fournies par le CEG. Plusieurs configurations ont été testées. Premièrement, nous avons étudié la fragmentation des gouttelettes ayant une vitesse initiale de 50 m.s^{-1} dans l'air au repos. Le rayon moyen des gouttelettes obtenues semble en adéquation avec les résultats expérimentaux effectués par le CEG. Par la suite, nous avons effectué des tests numériques en intégrant l'apparition d'une onde de choc dans l'air. Les résultats numériques donnent un rayon moyen nettement plus faible que dans la première configuration ce qui correspond à une atomisation du spray qui est constatée lors des expériences.

La suite naturelle de ce travail consisterait à coupler numériquement un code de résolution des équations fluides avec la méthode numérique décrite ci-dessus, avec la force de traînée comme terme source dans les équations du fluide, ceci afin de mieux représenter la physique du modèle.

6 Estimations explicites de trous spectraux

Le travail que nous présentons dans cette section a été réalisé en collaboration avec C. Mouhot [8] et est à paraître dans *Revista Matemática Iberoamericana*.

Revenons à la description de l'équation cinétique. La fonction f de répartition des particules, où $f(t, x, v)$ représente la densité de particules se trouvant, au temps t , à la coordonnée x et avec une vitesse v , est solution de

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q^{\mathcal{B}o}(f, f).$$

où $Q^{\mathcal{B}o}$ est l'opérateur de collision de Boltzmann

$$Q^{\mathcal{B}o}(f, f) = \int_{\sigma \in S^{N-1}} \int_{v_* \in \mathbb{R}^N} (f' f'_* - f f_*) B(\cos(\theta), |v - v_*|) dv_* d\sigma.$$

(on rappelle que θ est défini en figure 1. et que $\cos(\theta) = \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma$).

La section efficace de collision B modélise ainsi le type d'interaction entre les particules lors des collisions. Dans le modèle de sphères dures, $B(\cos(\theta), |v - v_*|)$ est proportionnel à $|v - v_*|$. Dans les cas d'interactions via un potentiel en loi de puissance inverse (la force est en $\frac{1}{r^s}$), en dimension 3, la section efficace est $B(\cos(\theta), |v - v_*|) = b(\cos(\theta)) |v - v_*|^{\frac{s-5}{s-1}}$ avec $s \geq 2$. Par contre, b , la section efficace angulaire, peut présenter des singularités en $\theta = 0$ (non-intégrabilité). Cela provient généralement du fort taux de collisions rasantes (cas où v et v' sont proches). Pour pallier cette singularité, l'hypothèse de *cut-off* angulaire formulée par Grad [31] consiste à supposer que la section efficace de collision est intégrable par rapport à la variable angulaire, *i.e.* $\int_{\sigma \in S^{N-1}} b(\cos(\theta)) d\sigma < \infty$. Nous travaillerons dans la suite sans cette hypothèse de *cut-off* angulaire.

Lorsque les collisions rasantes deviennent prédominantes, l'opérateur de collision de Boltzmann n'a plus de sens. L'asymptotique des collisions rasantes permet alors de passer de l'équation de Boltzmann à l'équation de Fokker-Planck-Landau,

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q^{\mathcal{L}a}(f, f)$$

où l'opérateur de collision de Landau est

$$Q^{\mathcal{L}a}(f, f)(v) = \nabla_v \cdot \left(\int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \mathbf{a}(v - v_*) [f_* (\nabla f) - f (\nabla f)_*] dv_* \right),$$

avec $\mathbf{a}(z) = |z|^2 \Phi(|z|) \Pi_{z^\perp}$, où Π_{z^\perp} est la projection orthogonale sur z^\perp , *i.e.*

$$(\Pi_{z^\perp})_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}.$$

Le lecteur pourra se référer à [16] pour une description de l'opérateur de Landau où à [21] et à [54] pour des asymptotiques en collisions rasantes.

Revenons à présent à l'étude de l'opérateur de collision. Grâce aux propriétés du noyau de collision, la forme faible de l'opérateur de collision s'écrit, avec φ une fonction continue quelconque,

$$\int Q^{\mathcal{B}o}(f, f) \varphi dv = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \int_{\sigma \in S^{N-1}} f f_* B(\cos(\theta), |v - v_*|) (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) d\sigma dv dv_* \quad (15)$$

Ainsi, si f est solution de l'équation cinétique (1), grâce aux propriétés de conservation de l'opérateur $v \cdot \nabla_x$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int f(t, x, v) \varphi(v) dx dv &= \int Q^{\mathcal{B}o}(f, f) \varphi dx dv \\ &= \frac{1}{2} \int f f_* B(\cos(\theta), |v - v_*|) (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) d\sigma dv dv_* dx. \end{aligned}$$

En prenant successivement comme fonction $\varphi: v \mapsto 1$, $v \mapsto v$ et $v \mapsto \frac{|v|^2}{2}$, nous retrouvons alors les lois de conservation de l'équation de Boltzmann

$$\frac{d}{dt} \int f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ \frac{|v|^2}{2} \end{pmatrix} dx dv = 0$$

On reconnaît ainsi les conservations de la masse (ici le nombre de particules), de l'impulsion et de l'énergie cinétique totales du système.

En symétrisant encore une fois la formulation (15)

$$\int Q^{\mathcal{B}o}(f, f) \varphi dv = -\frac{1}{4} \int (f' f'_* - f f_*) B(\cos(\theta), |v - v_*|) (\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*) d\sigma dv dv_*,$$

et en l'appliquant à $\varphi = \log f$, nous obtenons

$$\int Q^{\mathcal{B}o}(f, f) \log f dv = -\frac{1}{4} \int B(\cos(\theta), |v - v_*|) (f' f'_* - f f_*) \log \frac{f' f'_*}{f f_*} d\sigma dv dv_* \leq 0.$$

Cette quantité est négative car la fonction $x \mapsto \log x$ est croissante.

La quantité $-\int Q^{\mathcal{B}o}(f, f) \log f dv = D(f)$ est appelée la dissipation d'entropie et est positive. En définissant l'entropie mathématique par $H(f) = \int f \log f dv dx$, le théorème- H de Boltzmann s'énonce alors ainsi

$$\frac{d}{dt} H(f) = - \int D(f) dx \leq 0, \quad (16)$$

et signifie que l'entropie décroît au cours du temps.

Afin d'obtenir la version linéarisée de (16), on écrit f sous la forme $f = M(1 + h)$, où h est petit devant 1 (dans un sens à définir). L'opérateur de collision de Boltzmann peut alors s'écrire en deux parties : une partie linéaire en h que l'on notera $L^{\mathcal{B}o}$

$$L^{\mathcal{B}o}(h) = M^{-1}(Q^{\mathcal{B}o}(M, Mh) + Q^{\mathcal{B}o}(Mh, M)),$$

et une partie quadratique $Q^{\mathcal{B}o}(Mh, Mh)$ qui est supposée négligeable.

L'opérateur $L^{\mathcal{B}o}$ est appelé l'opérateur de Boltzmann linéarisé et s'écrit sous la forme développée

$$L^{\mathcal{B}o}(h)(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} B(\cos \theta, |v - v_*|) M(v_*) [h'_* + h' - h_* - h] d\sigma dv_*.$$

On appelle $D^{\mathcal{B}o}(h) = \langle h, L^{\mathcal{B}o}(h) \rangle_{L^2(M)} = \int h(v) L^{\mathcal{B}o}(h)(v) M(v) dv$, la dissipation d'entropie linéarisée. Le théorème- H implique alors que $D^{\mathcal{B}o}(h) \leq 0$. Ainsi le spectre de $L^{\mathcal{B}o}(h)$ dans $L^2(M)$ est inclus dans \mathbb{R}_-^* .

Le but du chapitre 5 est d'étudier ce spectre (ainsi que celui obtenu dans le cas de l'opérateur de Landau) de manière quantitative. Des études complètes ont été menées (voir [17] et [16]), mais ce sont des études menant à des estimations non explicites de trous spectraux (elles utilisent le théorème de Weyl et la théorie des opérateurs compacts). La diagonalisation complète et explicite est seulement connue dans le cas des molécules Maxwelliennes (noyau de collision B constant) ([57] et [12]). L'idée de ce travail est de réduire le cas des potentiels durs au cas des molécules Maxwelliennes pour lesquelles on connaît les estimations du trou spectral. Cette réduction utilise un argument géométrique. En effet, on ne peut pas minorer directement l'opérateur de dissipation à cause de l'annulation du noyau de collision pour les collisions avec $v = v_*$. L'idée géométrique consiste à remplacer chaque collision avec des vitesses relatives proches par deux collisions intermédiaires. Enfin, nous utiliserons une inégalité (corollaire de [15, Théorème 2.4]) permettant de minorer les collisions supplémentaires obtenues.

Plus précisément, nous étudions les propriétés du spectre de l'opérateur de Boltzmann linéarisé sous les hypothèses suivantes

- B peut s'écrire comme le produit

$$B = b(\cos \theta) \Phi(|v - v_*|), \quad (17)$$

où Φ et b sont des fonctions strictement positives (c'est le cas par exemple pour les noyaux de collision dérivant de potentiels d'interaction en loi de puissance inverse)

- La partie cinétique Φ est minorée à l'infini, *i.e.*

$$\exists R \geq 0, c_\Phi > 0 \mid \forall r \geq R, \Phi(r) \geq c_\Phi. \quad (18)$$

(c'est le cas pour les potentiels durs et le modèle de sphères dures)

- La partie angulaire b vérifie

$$c_b = \inf_{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_3 \in \mathbb{S}^{N-1}} \min\{b(\sigma_1 \cdot \sigma_3), b(\sigma_2 \cdot \sigma_3)\} d\sigma_3 > 0. \quad (19)$$

(ceci est toujours vérifié dans les modèles issus de la physique)

Théorème 2 (L'opérateur de Boltzmann linéarisé) *Avec les hypothèses (17), (18), (19), la dissipation d'entropie $D^{\mathcal{B}o}$ satisfait, pour tout $h \in L^2(M)$*

$$D^{\mathcal{B}o}(h) \geq C_{\Phi, b}^{\mathcal{B}o} D_0^{\mathcal{B}o}(h),$$

où $D_0^{\mathcal{B}o}(h)$ est la dissipation d'entropie avec $B \equiv 1$ (molécules Maxwelliennes), et

$$C_{\Phi, b}^{\mathcal{B}o} = \frac{c_\Phi c_b e^{-4R^2}}{32 |\mathbb{S}^{N-1}|}$$

avec R, c_Φ, c_b définies dans (18), (19).

Comme conséquence, nous en déduisons une estimation quantitative du trou spectral de l'opérateur de Boltzmann linéarisé. Pour tout $h \in L^2(M)$ orthogonal dans $L^2(M)$ à $1, v$ et $|v|^2$, nous avons

$$D^{\mathcal{B}o}(h) \geq C_{\Phi, b}^{\mathcal{B}o} |\lambda_0^{\mathcal{B}o}| \|h\|_{L^2(M)}^2.$$

Ici, $\lambda_0^{\mathcal{B}_0}$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Boltzmann linéarisé avec $B_0 \equiv 1$ (c'est-à-dire pour les molécules Maxwelliennes sans dépendance angulaire, parfois appelées les molécules pseudo-Maxwelliennes) qui vaut en dimension 3 (voir [12])

$$\lambda_0^{\mathcal{B}_0} = -\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{4\pi}{3}.$$

Enfin, par le même processus de linéarisation que pour l'équation de Boltzmann et autour du même équilibre global M , on définit l'opérateur de Landau linéaire

$$L^{\mathcal{L}^a} h(v) = M(v)^{-1} \nabla_v \cdot \left(\int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \mathbf{a}(v - v_*) [(\nabla h) - (\nabla h)_*] M M_* dv_* \right),$$

et la dissipation d'entropie de Landau (linéaire)

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{L}^a}(h) &= - \langle h, L^{\mathcal{L}^a} h \rangle_{L^2(M)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(v - v_*) |v - v_*|^2 \left\| \Pi_{(v-v_*)^\perp} [(\nabla h) - (\nabla h)_*] \right\|^2 M M_* dv_* dv \end{aligned}$$

qui est strictement négatif. Cela implique que le spectre de $L^{\mathcal{L}^a}$ dans $L^2(M)$ est dans \mathbb{R}_-^* . Nous montrons alors le théorème suivant

Théorème 3 (L'opérateur de Landau linéarisé) *Sous les hypothèses (18), la dissipation d'entropie de Landau $D^{\mathcal{L}^a}$ avec un noyau de collision Φ , vérifie : pour tout $h \in L^2(M)$*

$$D^{\mathcal{L}^a}(h) \geq C_\Phi^{\mathcal{L}^a} D_0^{\mathcal{L}^a}(h)$$

où $D_0^{\mathcal{L}^a}(h)$ est la dissipation d'entropie de Landau avec $\Phi \equiv 1$ et où

$$C_\Phi^{\mathcal{L}^a} = \frac{c_\Phi \beta_R}{8 \alpha_N}$$

avec

$$\alpha_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|V|^2} dV, \quad \beta_R = \int_{\{V \in \mathbb{R}^{N-1} \mid |V| \geq 2R\}} e^{-|V|^2} dV.$$

Nous pouvons en déduire les estimées explicites sur le trou spectral de l'opérateur de Landau linéarisé, c'est-à-dire, pour tout $h \in L^2(M)$ orthogonal dans $L^2(M)$ à 1, v et $|v|^2$, nous avons

$$D^{\mathcal{L}^a}(h) \geq C_\Phi^{\mathcal{L}^a} |\lambda_0^{\mathcal{L}^a}| \|h\|_{L^2(M)}^2.$$

Ici, $\lambda_0^{\mathcal{L}^a}$ est la première valeur propre non nulle de l'opérateur de Landau linéarisé avec $\Phi \equiv 1$ (c'est-à-dire le cas des molécules Maxwelliennes).

De plus, en dimension 3, par la limite des collisions rasantes, on peut estimer $\lambda_0^{\mathcal{L}^a}$ grâce à la formule sur le trou spectral explicite de l'opérateur de Boltzmann linéarisé pour les molécules Maxwelliennes

$$|\lambda_0^{\mathcal{L}^a}| \geq 2\pi.$$

Bibliographie

- [1] A. A. AMSDEN. Kiva-3V, Release 2, Improvements to Kiva-3V. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1999.
- [2] A. A. AMSDEN AND P. J. O'ROURKE. The T.A.B. method for numerical calculation of spray droplet breakup. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico.
- [3] A. A. AMSDEN, P. J. O'ROURKE AND T. D. BUTLER. Kiva-II, a computer program for chemical reactive flows with sprays. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1989.
- [4] C. BARANGER. Collisions, coalescences et fragmentations des gouttelettes dans un spray : écriture précise des équations relatives au modèle T.A.B. Mémoire de D.E.A., CMLA, ENS de Cachan, 2001.
- [5] C. BARANGER. Modelling of oscillations, breakup and collisions for droplets: the establishment of kernels for the T.A.B. model. *To appear in Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci.* (2004).
- [6] C. BARANGER ET L. BOUDIN. A kinetic modeling of a breaking up spray with high weber numbers. premier morceau du compte-rendu du projet *Liquid jet generation and breakup* auquel pnt également participé G. Baudin, B. Després, F. Lagoutière, E. Lapébie et T. Takahashi, qui sera soumis aux *Proceedings CEMRACS 2003, Numerical methods for hyperbolic and kinetic problems*.
- [7] C. BARANGER AND L. DESVILLETES. Study at the numerical level of the kernels of collision, coalescence and fragmentation for sprays. Soumis aux *Proceedings* du colloque *Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows*, Cargèse, France, 2003.
- [8] C. BARANGER AND C. MOUHOT. Explicit spectral gap estimates for the linearized boltzmann and landau operators with hard potentials. *À paraître dans Revista Matemática Iberoamericana* (2004).
- [9] S. D. BAUMAN. *A spray model for an adaptative mesh refinement code*. PhD thesis, University of Wisconsin - Madison, 2001.
- [10] G. A. BIRD. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford science publications, 1994.
- [11] A. V. BOBYLĚV. Exact solutions of the Boltzmann equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 225, 6 (1975), 1296–1299.
- [12] A. V. BOBYLĚV. The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules. In *Mathematical physics reviews, Vol. 7*, vol. 7 of *Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev.* Harwood Academic Publ., Chur, 1988, pp. 111–233.
- [13] L. BOUDIN. *Étude mathématique des équations aux dérivées partielles cinétiques et hyperboliques de la Physique*. Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 2000.

-
- [14] L. BOUDIN, L. DESVILLETES AND R. MOTTE. A particle-gas model for compressible droplets. In *Proceedings of the conference "Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows"*, Cargèse, France (2000).
- [15] J. CARRILO, R. MCCANN AND C. VILLANI. Kinetic equilibration rates for granular media. Preprint, 2001.
- [16] C. CERCIGNANI. *The Boltzmann equation and its applications*, vol. 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [17] C. CERCIGNANI, R. ILLNER AND M. PULVIRENTI. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer, 1994.
- [18] S. CHAPMAN AND T. G. COWLING. *The mathematical theory of nonuniform gases*, third ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases, In co-operation with D. Burnett, With a foreword by Carlo Cercignani.
- [19] J. F. CLOUET AND K. DOMELEVO. Solutions of a kinetic stochastic equation modeling a spray in a turbulent gas flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 7 (1997), 239–263.
- [20] L. DESVILLETES. Convergence to equilibrium in various situations for the solution of the Boltzmann equation. In *Nonlinear kinetic theory and mathematical aspects of hyperbolic systems (Rapallo, 1992)*, vol. 9 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.* World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992, pp. 101–114.
- [21] L. DESVILLETES. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.* 21, 3 (1992), 259–276.
- [22] L. DESVILLETES. On the convergence of splitting algorithms for some kinetic equations. *Asympt. Anal.* 6, 4 (1993), 315–333.
- [23] L. DESVILLETES AND C. VILLANI. Rate of convergence toward the equilibrium in degenerate settings. Soumis aux Proceedings du congrès "WASCOM 03", 2003, Villasimius, Italie.
- [24] K. DOMELEVO. *Analyse mathématique et numérique d'une modélisation cinétique d'un brouillard de gouttelettes dans un écoulement gazeux turbulent*. Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 1996.
- [25] K. DOMELEVO. Long time behaviour for a kinetic modelling of two-phase flows with thin sprays and point particles. Preprint de TMR-project "Asymptotics Methods in Kinetic Theory", 2001.
- [26] K. DOMELEVO ET J.-M. ROQUEJOFFRE. Existence et stabilité d'ondes planes solutions d'un modèle cinétique d'écoulements diphasiques. *C.R. Acad. Sci. Paris t. 324, Série I* (1997), 371–376.
- [27] K. DOMELEVO AND J.-M. ROQUEJOFFRE. Existence and stability of travelling waves solutions in a kinetic model of two phase flows. *Comm. Part. Diff. Eq.* 24, 1&2 (1999), 61–108.

- [28] K. DOMELEVO ET M.-H. VIGNAL. Limites visqueuses pour des systèmes de type Fokker-Planck-Burgers unidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332, 9 (2001), 863–868.
- [29] J. K. DUKOWICZ. A particle-fluid numerical model for liquid sprays. *J. Comp. Phys* 35 (1980), 229–253.
- [30] T. GOUDON. Asymptotic problems for a kinetic model of two-phase flow. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 131, 6 (2001), 1371–1384.
- [31] H. GRAD. Principles of the kinetic theory of gases. In *Handbuch der Physik (herausgegeben von S. Flügge)*, Bd. 12, *Thermodynamik der Gase*. Springer-Verlag, Berlin, 1958, pp. 205–294.
- [32] K. HAMDACHE. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 15, 1 (1998), 51–74.
- [33] L. HÖRMANDER. *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, vol. 26 of *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [34] J. HYLKEMA. *Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre*. Thèse de Doctorat, ENSAE - Université Toulouse-III, 1999.
- [35] J. HYLKEMA ET P. VILLEDIEU. Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre. Partie 1: aspects théoriques.
- [36] J. HYLKEMA ET P. VILLEDIEU. Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre. Partie 2: aspects numérique.
- [37] F. LAGOUTIÈRE. *Modélisation mathématique et résolution numérique de problèmes de fluides compressibles à plusieurs constituants*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 2000.
- [38] L. D. LANDAU ET E. M. LIFSHICH. *Physique théorique. Tome VI: Mécanique des fluides*. Éditions Mir, Moscow, 1971. Deuxième édition.
- [39] P. D. LAX. Hyperbolic systems of conservations laws II. *Comm. Pure Appl. Math.* 10 (1957), 537–566.
- [40] P. D. LAX. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1973. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 11.
- [41] P.-L. LIONS. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1, Incompressible models*, vol. 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications.

- [42] P.-L. LIONS. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2, Compressible models*, vol. 10 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Oxford Science Publications.
- [43] A. MAJDA. *Compressible fluid flows and systems of conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, 1984.
- [44] J. MATHIAUD. From Eulerian - Lagrangian model to Eulerian - Eulerian model. Preprint du CMLA, ENS de Cachan, 2004.
- [45] R. MOTTE. A numerical method for solving particle-fluid equations. In *Proceedings of the conference "Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows"*, Cargèse, France (2000).
- [46] K. NANBU. Interrelations between various direct simulations methods for solving the Boltzmann equation. *J. Phys. Soc. Jap.* 52 (1983), 3382–3388.
- [47] P. J. O’ROURKE. *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*. PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [48] M. A. PATTERSON AND R. D. REITZ. Modeling the effects of fuel spray characteristics on diesel engine combustion and emissions. Tech. Rep. #980131, SAE paper, 1998.
- [49] K. PFAFFELMOSER. Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data. *J. Differential Equations* 95, 2 (1992), 281–303.
- [50] W. E. RANZ AND W. R. MARSHALL. Evaporization from drops, part I-II. *Chem. Eng. Prog.* 48, 3 (1952), 141–180.
- [51] R. D. REITZ. Modeling atomization processes in high-pressure vaporizing sprays. *Atom. Spray Tech.*, 3 (1987), 309–337.
- [52] D. SERRE. *Systèmes de lois de conservation. I. Fondations*. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc.
- [53] G. I. TAYLOR. *The shape and acceleration of a drop in a high speed air stream*. The Scientific Paper of G.I. Taylor, Edition G.K. Batchelor, University Press, Cambridge, 1963.
- [54] C. VILLANI. *Contribution à l’étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas*. Thèse de Doctorat, Univ. Paris-Dauphine, 1998.
- [55] C. VILLANI. *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*. Elsevier Science, 2002.
- [56] P. VILLEDIEU ET J. HYLKEMA. Modèles numériques Lagrangiens pour la phase dispersée dans les propulseurs à poudre. Rapport Final n°1/3784.00/DTIM ONERA, 2000.
- [57] C. S. WANG CHANG, G. E. UHLENBECK AND J. DE BOER. In *Studies in Statistical Mechanics, Vol. V*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [58] F. A. WILLIAMS. Spray combustion and atomization. *Physics of fluids* 1 (1958), 541–555.

Chapitre 1

Existence en temps petit pour un couplage Vlasov-Euler isentropique

Sommaire

1.1	Introduction	35
1.2	Existence en temps petit d'une solution régulière	37
1.3	Résultats préliminaires	38
1.3.1	Systèmes symétriques au sens de Friedrichs	38
1.3.2	Symétrisation du système d'Euler isentropique	38
1.3.3	Quelques résultats concernant la solution de l'équation cinétique (1.6)	40
1.3.3.a	Propriétés de f	40
1.3.3.b	Étude du support de f	41
1.3.3.c	Étude du changement de variable: à (s, t) fixé, $(x, v) \mapsto (X(t; x, v, s), V(t; x, v, s))$	42
1.4	Preuve du théorème 4	43
1.5	Démonstration du lemme 1.6	47
1.5.1	Plan de la preuve	47
1.5.2	Estimations sur U^{k+1}	47
1.5.2.a	Estimations d'énergie	48
1.5.2.b	Application de la méthode des énergies au couplage fluide-cinétique	50
1.5.2.c	Majoration de $\partial_t U^{k+1}$	53
1.5.2.d	Lemme de Gronwall	54
1.5.3	Estimations sur f^{k+1}	55
1.6	Démonstration du lemme 1.7	59
Annexe 1.A	Espaces de Sobolev	64
Annexe 1.B	Inégalités utilisées	64
Annexe 1.C	Régularisation de la donnée initiale	65
Bibliographie		68

Notation

$G_1 \subset\subset G$ G_1 est un ouvert relativement compact de G .
 $\mathcal{C}_0^p(\Omega)$ ensemble des fonctions \mathcal{C}^p et à support compact dans Ω

$\mathcal{C}_b^p(\Omega)$ ensemble des fonctions \mathcal{C}^p bornées sur Ω

Norme dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ ($s \in \mathbb{N}$)

$$\|h\|_s = \sum_{|\alpha| \leq s} \sqrt{\int_{\mathbb{R}^N} |D^\alpha(h)|^2 dx}$$

$$\|h\|_{s,T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|h\|_s$$

$$\|h\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}^N} |h(t, x)|$$

$$\|h\|_{\infty,T} = \max_{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^N} |h(t, x)|$$

$$\|D^s(h)\|_{L^2} = \sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha(h)\|_{L^2}$$

Si $f = f(t, x, v)$

$$\|f\|_{s,T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{\alpha, \beta, |\alpha|+|\beta| \leq s} \sqrt{\int \int |D_x^\alpha D_v^\beta f(t, x, v)|^2 dx dv}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{(x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |f(t, x, v)|$$

$$\|f\|_{\infty,T} = \sup_{t \in [0,T], (x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} |f(t, x, v)|$$

1.1 Introduction

Nous présentons ici l'étude mathématique d'un couplage entre un système d'équations aux dérivées partielles provenant de la mécanique des milieux continus, et une équation cinétique provenant de la théorie cinétique des gaz. De tels couplages, introduits par Williams ([15]), interviennent lorsque l'on cherche à modéliser un spray (gaz avec particules en suspension). Le gaz est décrit par la mécanique des milieux continus grâce à des quantités macroscopiques dépendant de l'espace et du temps : la densité $\rho(t, x)$, la vitesse $u(t, x)$, la pression $p(t, x)$. L'évolution de ces quantités est régie par un système d'EDP tel que Navier-Stokes ou Euler, qui correspond aux conservations dans l'espace des phases (t, x) de la masse et de l'impulsion. Par contre, on utilise pour décrire la phase dispersée (particules) une fonction de densité de présence $f \equiv f(t, x, v)$ où v est la vitesse des particules. Cette fonction est, comme dans la théorie cinétique des gaz, solution d'une équation cinétique. Le couplage entre les deux phases dépend alors de la modélisation choisie. Dans le cas de sprays fins ([11]), le couplage intervient via un terme de traînée entre le gaz et les particules, terme qui correspond à l'échange d'impulsion entre les deux phases. Les interactions entre particules sont négligées. Les équations du spray sont alors

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \quad (1.1)$$

$$\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + P(\rho)I) = - \int_v m_p F f dv, \quad (1.2)$$

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (Ff) = 0, \quad (1.3)$$

où m_p est la masse des particules (supposée constante), F est la force de traînée et $P = P(\rho)$ est la pression. Le système écrit ici pour le gaz en coordonnées $(\rho, \rho u)$ est le système d'Euler isentropique, classique en dynamique des gaz. Quand $P(\rho) = A\rho^\gamma$, $A > 0$ et $\gamma > 1$, c'est le cas des gaz parfaits.

Pour le système (1.1)-(1.2)-(1.3), la masse et l'impulsion totale sont conservées (au niveau formel). En effet, en multipliant l'équation (1.3) par m_p ou bien $m_p v$, et en l'intégrant en x et v , on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_x \int_v m_p f dv dx \right) &= 0, \\ \partial_t \left(\int_x \int_v m_p v f dv dx \right) &= \int_x \int_v m_p F f dv dx, \end{aligned}$$

ce qui, combiné avec les équations du gaz (1.1)-(1.2) intégrées en espace, assure la conservation de la masse totale $\int_x \rho dx + \int_x \int_v m_p f dv dx$, et de l'impulsion totale $\int_x \rho u dx + \int_x \int_v m_p f v dv dx$.

La force de traînée F est due à la résistance du fluide au mouvement des particules. On trouvera dans [11] ou [13] des considérations sur la modélisation de ce terme. La modélisation la plus couramment utilisée est la suivante

$$m_p F = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho C_d |u - v|(u - v),$$

où r est le rayon, supposé constant, des particules, et C_d le coefficient de traînée. Dans le cas général, où l'on modélise les particules par des sphères solides, ce coefficient est donné par

$$C_d = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{1}{6} Re^{2/3} \right),$$

où le nombre de Reynolds est $Re = \frac{2\rho|u-v|r}{\mu}$ avec μ la viscosité dynamique du fluide. C'est souvent cette formule qui est utilisée dans les codes numériques de simulations de sprays (par exemple [1]). Nous faisons l'hypothèse traditionnelle des études théoriques (cf. [3],[4],[5],[6],[9]), c'est-à-dire que nous considérons des écoulements à nombres de Reynolds modérés, en considérant que $C_d = \frac{24}{Re}$. Le terme de traînée s'écrit alors

$$F = \frac{9\mu}{2r^2\rho_l}(u-v),$$

où ρ_l la densité massique des particules.

Dans de nombreux cas ([3],[4],[5],[6],[9]), la viscosité est considérée comme une constante, et l'expression de force de traînée utilisée est

$$F = C(u(t,x) - v).$$

Cependant, on peut aussi considérer que la viscosité peut dépendre de la densité ρ du fluide, via $\mu = \rho\nu$ avec ν la viscosité cinématique du fluide (voir [8]). Dans ce cas, on utilise comme terme de traînée

$$F = C\rho(t,x)(u(t,x) - v).$$

C'est l'hypothèse que nous ferons dans cette étude¹. De même, nous supposons que les constantes du modèle (masse, coefficient dans la force de traînée) sont égales à 1.

Les études mathématiques déjà menées sur le couplage fluide-cinétique font intervenir uniquement une équation en u (gaz incompressible) dans laquelle intervient un terme de diffusion. Dans [5], Domelevo et Roquejoffre démontrent l'existence et l'unicité globale de solutions régulières de l'équation de Burgers avec viscosité couplée via un terme de traînée à une équation cinétique (avec données initiales \mathcal{C}^2 pour u et \mathcal{C}_0^2 pour f). Pour le même système, mais pour des sprays polydispersés (avec une dépendance de f en r , le rayon des particules), Domelevo prouve dans [4] l'existence de solutions avec données initiales moins régulières. Hamdache ([9]) montre l'existence globale et le comportement en temps grand dans le cas d'un couplage Vlasov-Stokes en dimension quelconque. Goudon ([8]) lors de l'étude de la limite hydrodynamique du couplage Burgers visqueux et équation cinétique, étudie aussi l'existence et l'unicité de solutions régulières. Les preuves mises en oeuvre pour montrer ces résultats utilisent des méthodes de points fixes et les propriétés régularisantes de l'équation de Burgers visqueuse.

Nous allons, dans ce travail, nous inspirer de la théorie des systèmes hyperboliques symétrisables. Les résultats concernant de tels systèmes sont bien connus, en particulier l'existence en temps petit de solutions régulières (voir [7] pour le cas linéaire, [10] ou [14] pour le cas général). La méthode utilisée pour démontrer ces résultats d'existence fait intervenir des estimations d'énergie qui conduisent à des estimations a priori. En particulier, la notion de système symétrisable au sens de Friedrichs ([10]) permet d'appliquer les estimations d'énergie à des systèmes linéaires à coefficients non constants. Nous nous inspirons dans ce travail de la preuve présentée par Majda dans [10], adaptée à notre cas particulier (Euler isentropique) et en tenant compte du couplage avec l'équation cinétique. Cette équation est traitée en

1. Le lecteur pourra vérifier que le résultat présenté dans ce travail, ainsi que la démonstration, est toujours valable dans le cas d'un terme de traînée de la forme $F = C(u(t,x) - v)$.

utilisant la méthode des caractéristiques et le contrôle du support en x et v de f (comme dans les preuves d'existence de solutions aux équations de Vlasov-Poisson [12]).

Dans la section 1.2, nous présentons le résultat principal, c'est-à-dire l'existence en temps petit de fonctions régulières $(\rho, \rho u, f)$, solutions d'un couplage Vlasov - Euler isentropique, en dimension N quelconque (dans tout l'espace et avec les conditions aux limites $|u| \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow 1$ quand $|x| \rightarrow \infty$). En section 1.3, nous montrons que le système d'Euler isentropique est un système symétrisable au sens de Friedrichs, puis nous présentons les propriétés de f solution de l'équation cinétique. Enfin, en section 1.4, nous présentons la preuve du théorème d'existence. Les sections suivantes sont consacrées à la démonstration de lemmes intermédiaires, en particulier la démonstration d'estimations a priori utilisant la méthode d'énergie.

1.2 Existence en temps petit d'une solution régulière

On considère le système couplé suivant

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \quad (1.4)$$

$$\partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot (\rho u \otimes u + P(\rho)I) = \int f(\rho v - \rho u) dv, \quad (1.5)$$

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (f(\rho u - \rho v)) = 0, \quad (1.6)$$

où $P(\rho) = \rho^\gamma$, où $\gamma > 1$.

On prend pour condition initiale

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \rho(0, x) &= \rho_0(x), \\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad u(0, x) &= u_0(x), \\ \forall (x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad f(0, x, v) &= f_0(x, v). \end{aligned} \quad (1.7)$$

On définit $G =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N$. On montre le théorème suivant

Théorème 4 *Soit $s > N/2 + 1$. Soit G_1 un ouvert relativement compact de G . Soit (ρ_0, u_0) avec $\tilde{\rho}_0 = \rho_0 - 1$ et u_0 dans $H^s(\mathbb{R}^N)$, et f_0 dans $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \cap H^s(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $f_0 \geq 0$. On suppose de plus que $(\rho_0, \rho_0 u_0)$ est à valeurs dans G_1 (i.e. $\rho_0 \geq cste > 0$). Alors il existe $T > 0$ et il existe une solution (unique) $(\rho, \rho u, f)$ au système d'équation (1.4)-(1.5)-(1.6) avec pour donnée initiale (1.7), et telle que $(\rho, \rho u) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, $f \geq 0$.*

Remarque 1.1 *Nous cherchons les solutions dont la donnée initiale correspond à un gaz au repos à l'infini, contenant des particules en un endroit donné de l'espace. Les conditions du théorème impliquent en effet*

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= 1 + \tilde{\rho}_0(x) \rightarrow 1 \text{ quand } |x| \rightarrow \infty, \\ |u_0(x)| &\rightarrow 0 \text{ quand } |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

alors que f_0 est cherchée à support compact.

Remarque 1.2 Nous commençons par montrer ce théorème avec des hypothèses plus restrictives sur la donnée initiale : $\tilde{\rho}_0$ et u_0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ et f_0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. En annexe 1.C sont indiquées les remarques permettant de montrer ce théorème avec les hypothèses plus générales sur la donnée initiale (i.e. H^s au lieu de C^∞). Il faut passer par une étape de régularisation de la donnée initiale, qui s'avère purement technique.

Remarque 1.3 Si $(\rho^1, \rho^1 u^1, f^1)$ et $(\rho^2, \rho^2 u^2, f^2)$ sont deux couples de solutions régulières (c'est-à-dire que $(\rho^1, \rho^1 u^1)$ et $(\rho^2, \rho^2 u^2)$ sont dans $C^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$, f^1 et f^2 sont dans $C_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ vérifiant $f^1 \geq 0$, $f^2 \geq 0$, et où T est le minimum des deux temps d'existence de ces solutions donnés par le théorème 4) de (1.4)-(1.5)-(1.6), avec la même donnée initiale, alors ces deux solutions sont égales.

Nous montrerons que l'unicité est une conséquence de la démonstration de l'existence de solutions régulières (voir la remarque 1.5).

1.3 Résultats préliminaires

Pour démontrer le théorème 4, on utilise le même schéma de preuve que celle parue dans [10]: montrons donc tout d'abord que le système d'Euler isentropique (1.4)-(1.5) peut se mettre sous forme symétrisée (ce qui permettra d'appliquer les estimations d'énergie).

1.3.1 Systèmes symétriques au sens de Friedrichs

Commençons par donner une définition, essentielle pour notre démonstration, sur les systèmes de lois de conservation.

Définition 1.1 Un système de lois de conservation

$$\partial_t U + \sum_i A_i(U) \partial_{x_i} U = b(U),$$

est un système symétrisable au sens de Friedrichs, s'il existe une matrice $S(U)$ symétrique définie positive, et régulière par rapport à U telle que

1. Pour tout G_1 avec $\overline{G_1} \subset\subset G$, il existe $c(G_1)$ une constante non nulle uniforme sur G_1 telle que, pour tout $U \in G_1$

$$c(G_1) I \leq S(U) \leq c(G_1)^{-1} I. \quad (1.8)$$

2. Pour $j = 1 \dots N$, la matrice $S_j(U) = S(U) A_j(U)$ est une matrice symétrique.

Ainsi, comme il est précisé dans [10], si un système est symétrisable au sens de Friedrichs, alors le problème de Cauchy correspondant au système linéarisé sera bien posé (on peut en effet démontrer des estimations d'énergie).

1.3.2 Symétrisation du système d'Euler isentropique

Écrivons le système (1.4)-(1.5) sous forme matricielle, avec la notation $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$

$$\partial_t U + \sum_i A_i(U) \partial_{x_i} U = b(U, f), \quad (1.9)$$

avec pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\rho u_1 \rho u_i}{\rho^2} & \frac{\rho u_i}{\rho} & 0 & 0 & \frac{\rho u_1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{\rho u_2 \rho u_i}{\rho^2} & 0 & \frac{\rho u_i}{\rho} & 0 & \frac{\rho u_2}{\rho} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ P'(\rho) - \frac{(\rho u_i)^2}{\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho u_i}{\rho} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\rho u_N \rho u_i}{\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho u_N}{\rho} & 0 & \frac{\rho u_i}{\rho} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \int f(\rho v_1 - \rho u_1) dv \\ \int f(\rho v_2 - \rho u_2) dv \\ \vdots \\ \vdots \\ \int f(\rho v_N - \rho u_N) dv \end{pmatrix}.$$

On prend pour matrice de symétrisation du système (1.9)

$$S = \begin{pmatrix} P'(\rho) + \frac{|\rho u|^2}{\rho^2} & -\frac{t(\rho u)}{\rho} \\ -\frac{\rho u}{\rho} & Id_N \end{pmatrix}.$$

Le système (1.9) s'écrit alors sous forme symétrisée

$$S(U)\partial_t U + \sum_i (SA_i)(U)\partial_{x_i} U = S(U)b(U, f),$$

ce qui nous permet d'affirmer le résultat suivant

Lemme 1.1 *Le système (1.9) est un système symétrisable au sens de Friedrichs.*

Preuve du lemme 1.1

Montrons tout d'abord que la matrice S est une matrice symétrique définie positive (SDP).

Pour cela on regarde les valeurs propres de la matrice S . Ce sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} + 1\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} - 1\right)^2 + 4\frac{(\rho u)^2}{\rho^2}} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} + 1\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} - 1\right)^2 + 4\frac{(\rho u)^2}{\rho^2}} \\ \lambda_i &= 1 \text{ pour } 2 \leq i \leq N-1 \end{aligned}$$

Les deux premières valeurs propres vérifient $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. En effet, sur G , ρ ne s'annule pas, tout comme $P'(\rho)$ (le terme sous la racine carrée, qui est le déterminant de la matrice $S(u)$ est inférieur strictement à $P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} + 1$).

Un simple calcul permet de vérifier que les matrices SA_i sont bien des matrices symétriques. Il reste à voir que S vérifie la propriété 1.8 de la définition 1.1. On voit bien que si U est dans G_1 ouvert relativement compact de G , alors l'inégalité $cI \leq S(v) \leq c^{-1}I$ est bien vérifiée. En effet, comme $\lambda_1 \leq P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} + 1$ et que $(\rho, \rho u) \in G_1$, il existe c_1 telle que $\lambda_1 \leq c_1$. De plus, $\lambda_1 \lambda_2 = P'(\rho)$, donc $\lambda_2 \geq \frac{P'(\rho)}{P'(\rho) + \frac{(\rho u)^2}{\rho^2} + 1}$ et il existe c_2 telle que $\lambda_2 \geq c_2$. Pour obtenir (1.8), il faut aussi tenir compte de la valeur propre 1. Il suffit de prendre $c(G_1) = \min(\min(1, c_2), \max(1, c_1)^{-1})$. ■

1.3.3 Quelques résultats concernant la solution de l'équation cinétique (1.6)

1.3.3.a Propriétés de f

On considère f , solution de l'équation de transport (1.6)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + (\rho u - \rho v) \cdot \nabla_v(f) = N \rho f,$$

avec pour condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v),$$

A x, v et s fixés, les caractéristiques de cette équation, notées $X(t; x, v, s)$ et $V(t; x, v, s)$ sont définies par

$$\frac{dX}{dt} = V, \tag{1.10}$$

$$X(s; x, v, s) = x,$$

$$\frac{dV}{dt} = (\rho u)(X(t; x, v, s), t) - \rho(X(t; x, v, s), t) V(t; x, v, s), \tag{1.11}$$

$$V(s; x, v, s) = v.$$

Lemme 1.2 *Supposant connues les courbes caractéristiques X, V , on peut exprimer f solution de (1.6), avec pour donnée initiale f_0 , en fonction de ρ de manière explicite*

$$f(t, x, v) = f_0(X(0; x, v, t), V(0; x, v, t)) e^{\int_0^t N \rho(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau}. \tag{1.12}$$

Preuve du lemme 1.2

Il suffit pour cela de dériver par rapport à θ la fonction $\theta \mapsto f(\theta, X(\theta; x, v, t), V(\theta; x, v, t))$. ■

En particulier, on en déduit le

Corollaire 1.1 *Si f est solution de l'équation cinétique (1.6) avec pour donnée initiale $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, alors*

$$\|f\|_\infty(t) \leq \|f_0\|_\infty e^{\int_0^t N \|\rho\|_\infty(\tau) d\tau}. \tag{1.13}$$

On considère maintenant une fonction $g(t, x, v)$ solution de l'équation

$$\partial_t g + v \cdot \nabla_x g + (\rho u - \rho v) \cdot \nabla_v(g) = k N \rho g + B(t, x, v), \tag{1.14}$$

avec $k \in \mathbb{N}$, $B \equiv B(t, x, v)$ fonction “donnée”, et satisfaisant la condition initiale

$$g(0, x, v) = g_0(x, v).$$

Lemme 1.3 *En utilisant les caractéristiques X, V définies en (1.10)-(1.11), on obtient la formule explicite pour g solution de (1.14)*

$$\begin{aligned} g(t, x, v) = & e^{\int_0^t k N \rho(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} g_0(X(0; x, v, t), V(0; x, v, t)) \\ & + \int_0^t e^{\int_\tau^t k N \rho(X(s; x, v, t), s) ds} B(X(\tau; x, v, t), V(\tau; x, v, t), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ce lemme sera utilisé pour obtenir l’expression des dérivées de f par rapport à x et v .

1.3.3.b Étude du support de f

D’après (1.12), on voit que si la condition initiale f_0 est à support compact, il en est de même pour f à tout temps t . On note donc

$$X_M(t) = \sup_{\substack{(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ f(t, x, v) > 0}} |x|, \quad (1.16)$$

et

$$V_M(t) = \sup_{\substack{(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \\ f(t, x, v) > 0}} |v|. \quad (1.17)$$

En d’autres termes, à t fixé, $\text{supp} f \subset B(0, X_M(t)) \times B(0, V_M(t))$.

Lemme 1.4 *$\rho, \rho u$ étant donnés, la solution f de (1.6)-(1.7) vérifie*

$$V_M(t) \leq V_M(0) e^{\int_0^t \|\rho\|_\infty(\tau) d\tau} + \int_0^t \|\rho u\|_\infty(\tau) e^{\int_\tau^t \|\rho\|_\infty(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} d\tau, \quad (1.18)$$

et

$$\begin{aligned} X_M(t) \leq & X_M(0) + V_M(0) \int_0^t e^{\int_0^\tau \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tau \\ & + \int_0^t \|\rho u\|_\infty(\tau) e^{\int_\tau^t \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tau \int_0^\tau e^{\int_\tau^s \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tau \\ & + \int_0^t \|\rho u\|_\infty(\tau) \int_0^\tau e^{\int_\tau^s \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tilde{\tau} d\tau \end{aligned} \quad (1.19)$$

Preuve du lemme 1.4

En résolvant de manière implicite les équations (1.10)-(1.11), on peut écrire

$$X(t; x, v, s) = x + \int_s^t V(\tau; x, v, s) d\tau \quad (1.20a)$$

$$V(t; x, v, s) = e^{-\int_s^t \rho(X(\tau; x, v, s), \tau) d\tau} v + \int_s^t e^{-\int_\tau^t \rho(X(\tilde{\tau}; x, v, s), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} (\rho u)(X(\tau; x, v, s), \tau) d\tau \quad (1.20b)$$

D'après (1.20b) appliquée avec $t = 0$ et $s = t$, on a

$$V(0; x, v, t) = v e^{-\int_t^0 \rho(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} + \int_t^0 e^{-\int_\tau^0 \rho(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} (\rho u)(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau.$$

Donc, on obtient par majoration

$$|v| \leq |V(0; x, v, t)| e^{\int_0^t \|\rho\|_\infty(\tau) d\tau} + \int_0^t \|\rho u\|_\infty(\tau) e^{\int_\tau^t \|\rho\|_\infty(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} d\tau. \quad (1.21)$$

Comme $V_M(t) = \sup_{f(t, x, v) > 0} |v| = \sup_{f_0(X(0; x, v, t), V(0; x, v, t)) > 0} |v| \leq \sup_{\substack{|X(0; x, v, t)| \leq X_M(0) \\ |V(0; x, v, t)| \leq V_M(0)}} |v|$, on

obtient (1.18).

On procède de manière similaire pour X_M . En utilisant l'expression de V dans la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned} x &= X(0; x, v, t) + \int_0^t v e^{-\int_t^\tau \rho(X(s; x, v, t), s) ds} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_t^\tau e^{-\int_\tilde{\tau}^\tau \rho(X(s; x, v, t), s) ds} (\rho u)(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} d\tau, \end{aligned}$$

ce qui nous donne en utilisant l'expression de v ci-dessus (inégalité (1.21)) et après majoration

$$\begin{aligned} |x| &\leq |X(0; x, v, t)| + |V(0; x, v, t)| \int_0^t e^{\int_0^\tau \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|\rho u\|_\infty(\tau) e^{\int_\tau^t \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tau \int_0^t e^{\int_\tau^t \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \|\rho u\|_\infty(\tau) \int_0^\tau e^{\int_\tau^\tau \|\rho\|_\infty(s) ds} d\tilde{\tau} d\tau, \end{aligned}$$

D'où (1.19). ■

1.3.3.c Étude du changement de variable : à (s, t) fixé, $(x, v) \mapsto (X(t; x, v, s), V(t; x, v, s))$

Lemme 1.5 *Le changement de variable $(x, v) \mapsto (X(t; x, v, s), V(t; x, v, s))$ est un C^1 -difféomorphisme sur \mathbb{R}^{2N} , de Jacobien égal à $e^{-\int_s^t N \rho(X(\tau; x, v, s), \tau) d\tau}$.*

Preuve du lemme 1.5

En dimension N , le Jacobien correspond au déterminant de la matrice $2N \times 2N$ suivante

$$\frac{D(X, V)}{D(x, v)} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} & \left(\frac{\partial X_i}{\partial v_j} \right)_{i,j} \\ \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} & \left(\frac{\partial V_i}{\partial v_j} \right)_{i,j} \end{pmatrix}.$$

On utilise alors la formule donnant le déterminant d'une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ à partir des permutations de \mathcal{S}_n

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)}.$$

En dérivant cette expression, et en utilisant les relations (1.10) et (1.11), on obtient

$$\partial_t \left(\det \left(\frac{D(X, V)}{D(x, v)} \right) \right) = -N \rho \det \left(\frac{D(X, V)}{D(x, v)} \right).$$

On écrit les détails en dimension 1. Le déterminant s'écrit alors $\det \left(\frac{D(X, V)}{D(x, v)} \right) = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial x}$. Par interversion des dérivées croisées, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= \partial_t \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial x} \partial_t \left(\frac{\partial V}{\partial v} \right) - \partial_t \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial v} \partial_t \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ &= \partial_x \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial x} \partial_v \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \partial_v \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial v} \partial_x \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Or, grâce aux équations (1.10) et (1.11), on a : $\frac{\partial X}{\partial t} = V$ et $\frac{\partial V}{\partial t} = (\rho u)(X, t) - \rho(X, t) V$. Donc en remplaçant ces dérivées en temps dans l'équation précédente on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial x} \right) &= \partial_x(V) \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial x} \partial_v((\rho u)(X, t) - \rho(X, t) V) \\ &\quad - \partial_v(V) \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial v} \partial_x((\rho u)(X, t) - \rho(X, t) V) \\ &= \frac{\partial X}{\partial x} (\partial_v((\rho u)(X, t)) - \partial_v(\rho(X, t) V)) \\ &\quad - \frac{\partial X}{\partial v} (\partial_x((\rho u)(X, t)) - \partial_x(\rho(X, t) V)) \\ &= \frac{\partial X}{\partial x} (\partial_v X \partial_x(\rho u) - \partial_v X \partial_x \rho V - \rho \partial_v V) \\ &\quad - \frac{\partial X}{\partial v} (\partial_x X \partial_x(\rho u) - \partial_x X \partial_x \rho V - \rho \partial_x V) \\ &= \partial_x X \partial_v X (\partial_x(\rho u) - \partial_x \rho V - \partial_x(\rho u) + \partial_x \rho V) \\ &\quad - \rho \partial_x X \partial_v V + \rho \partial_v X \partial_x V \\ &= -\rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Revenons maintenant au cas général (en dimension N). En résolvant l'équation différentielle avec donnée initiale à $t = s$, on trouve

$$\det \left(\frac{D(X, V)}{D(x, v)} \right) (t) = \det \left(\frac{D(X, V)}{D(x, v)} \right) (s) e^{-\int_s^t N \rho(X(\tau; x, v, s), \tau) d\tau}.$$

Or d'après les conditions initiales portant sur X et V , on a $X(s; x, v, s) = x$ et $V(s; x, v, s) = v$. Donc, au point $t = s$, $\frac{D(X, V)}{D(x, v)} = Id_{R^{2N}}$, et son déterminant vaut 1. ■

1.4 Preuve du théorème 4

On rappelle que l'on note $U = {}^t(\rho, \rho u)$. On a vu dans la partie 1.3.2 que le système (1.4)-(1.5)-(1.6) peut s'écrire sous la forme symétrisée

$$S(U) \partial_t U + \sum_{i=1}^N (SA_i)(U) \partial_{x_i} U = S(U) b(U, f), \quad (1.22)$$

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (vf) + \nabla_v \cdot (f(\rho u - \rho v)) = 0, \quad (1.23)$$

où S est une matrice vérifiant les propriétés (1.8). On rappelle que l'on utilise dans un premier temps les hypothèses suivantes sur la donnée initiale (on notera systématiquement $\overline{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\begin{aligned} U_0 - \overline{U}_0 &\in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N), \\ f_0 &\in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N), \\ \forall x \in \mathbb{R}^N, U_0(x) &\in G_1 \subset\subset G. \end{aligned}$$

La preuve consiste en une méthode itérative. A chaque étape de cette méthode, nous utilisons des estimations a priori pour montrer que les solutions des systèmes linéaires ont de bonnes propriétés (en particulier, pour montrer que ρ ne s'annule pas). Un point décisif est que ces estimations a priori ne dépendent pas de l'itération considérée. On passe ensuite à la limite dans le système itératif.

On commence par fixer $G_2 \subset\subset G$ tel que $\overline{G}_1 \subset G_2$. Le système (1.22)-(1.23) étant un système symétrisé (au sens de Friedrichs), il existe $c(G_2)$ tel que la condition (1.8) soit vérifiée pour toute fonction à valeurs dans G_2 .

La donnée initiale U_0 est à valeurs dans G_1 . De plus, comme $s > N/2 + 1 > N/2$, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il existe donc un nombre $R \equiv R(G_2, U_0)$ tel que

$$\text{pour toute fonction } U, \text{ si } \|U - U_0\|_s \leq R, \text{ alors } U \text{ est à valeur dans } G_2. \quad (1.24)$$

Le support de f_0 étant compact, il est inclus dans $B(0, X_M(0)) \times B(0, V_M(0))$, avec les notations (1.16)-(1.17).

On définit par récurrence une suite de fonctions (U^k, f^k) qui sont solutions du système (1.22)-(1.23) linéarisé autour de (U^{k-1}, f^{k-1}) . De manière précise, on pose

- Pour tout $t > 0$, $(U^0(t), f^0(t)) = (U_0, f_0)$
- pour $k \geq 0$, on suppose que (U^k, f^k) est définie sur $[0, \theta_k[$ et que $\forall t \in [0, \theta_k[, \forall x \in \mathbb{R}^N$, $U^k(t, x) \in G_2$, et on définit (U^{k+1}, f^{k+1}) sur $[0, \theta_k[$ comme solution du système linéaire

$$S(U^k) \partial_t U^{k+1} + \sum_{i=1}^N (SA_i)(U^k) \partial_{x_i} U^{k+1} = S(U^k) b(U^k, f^k), \quad (1.25)$$

$$U^{k+1}(x, 0) = U_0(x), \quad (1.26)$$

$$\partial_t f^{k+1} + \nabla_x \cdot (v f^{k+1}) + \nabla_v \cdot (f^{k+1}(\rho^k u^k - \rho^k v)) = 0, \quad (1.27)$$

$$f^{k+1}(0, x, v) = f_0(x, v). \quad (1.28)$$

On définit alors θ_{k+1} comme le temps maximal pour lequel $\forall t \in [0, \theta_{k+1}[, \forall x \in \mathbb{R}^N$, $U^{k+1}(t, x) \in G_2$.

Comme le système (1.25) est un système linéaire symétrique au sens de Friedrichs à coefficients \mathcal{C}_b^∞ , on a bien défini U^k comme fonction \mathcal{C}^∞ sur $[0, \theta_k[$. De même, $f^k \in \mathcal{C}_0^\infty([0, \theta_k[, \mathbb{R}^N \times$

\mathbb{R}^N) puisque c'est une solution d'une équation de transport linéaire à coefficients \mathcal{C}^∞ et à donnée initiale \mathcal{C}_0^∞ . On note X_M^k et V_M^k les quantités X_M et V_M relative à f^k .

On définit $0 \leq T_k \leq \theta_k$ comme étant le temps maximal pour lequel $\|U^k - U_0\|_{s, T_k} \leq R$.

De plus $U^k - \overline{U_0}$ est à support compact. En effet, $U^k - \overline{U_0}$ vérifie le système linéaire à coefficients \mathcal{C}^∞ $\partial_t(U^k - U_0) + \sum_i A_i(U^{k-1})\partial_{x_i}(U^k - U_0) = b(U^{k-1}, f^{k-1})$, avec $U_0 - \overline{U_0}$ comme donnée initiale, qui est à support compact, et avec un second membre à support compact (car f^k est à support compact en x et v).

On montre maintenant qu'on peut minorer les T_k par un $T_* > 0$ (indépendant de k).

Lemme 1.6 *Il existe $T_* > 0$ et $L > 0$ dépendant uniquement de G_2, s, U_0 et f_0 tels que,*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|U^k - U_0\|_{s, T_*} \leq R, \quad (1.29)$$

$$\|\partial_t U^k\|_{s-1, T_*} \leq L, \quad (1.30)$$

$$\|f^k\|_{s, T_*} \leq 2\|f_0\|_s, \quad (1.31)$$

$$\|f^k\|_{\infty, T_*} \leq 2\|f_0\|_\infty, \quad (1.32)$$

$$\forall t \in [0, T_*] \quad X_M^k(t) \leq 2X_M(0), \quad (1.33)$$

$$\forall t \in [0, T_*] \quad V_M^k(t) \leq 2V_M(0). \quad (1.34)$$

La preuve de ce lemme, basée sur des estimations a priori techniques, est l'objet de la section 1.5, les constantes T_* et L y étant données de manière implicite.

On passe ensuite à la limite quand $k \rightarrow \infty$ dans (1.25)-(1.27). Comme suggéré dans [10], on étudie pour cela la suite $\|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}}$ pour un certain $T_{**} < T_*$ suffisamment petit. De manière précise, on montre que

Lemme 1.7 *Il existe un temps $T_{**} \in]0, T_*]$, dépendant uniquement de G_2, s, U_0, f_0 , et des constantes positives α, α' et γ (également dépendant uniquement de G_2, s, U_0, f_0) vérifiant $\alpha + \alpha' < 1$ telles que*

$$\forall k \geq 2, \quad \|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}} \leq \alpha\|U^k - U^{k-1}\|_{0, T_{**}} + \alpha'\|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_{**}}, \quad (1.35)$$

$$\forall k \geq 2, \quad \|f^k - f^{k-1}\|_{0, T_{**}} \leq \gamma\|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_{**}}. \quad (1.36)$$

La preuve de ce lemme technique est l'objet de la section 1.6.

On termine maintenant la preuve du théorème 4, en admettant les lemmes 1.6 et 1.7. La relation (1.35) avec $\alpha + \alpha' < 1$ nous assure que

$$\sum_k \|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}} < +\infty, \quad (1.37)$$

($\|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}}$ est en effet inférieur à la somme de deux suites géométriques tendant vers 0). Donc, la suite $(U^k)_k$ est une suite convergente de $L^\infty([0, T_{**}], L^2(\mathbb{R}^N))$. Notons U sa limite.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|U^k - U\|_{0, T_{**}} = 0.$$

Les fonctions U^k étant continues en temps sur $[0, T_{**}]$, on a $U \in \mathcal{C}([0, T_{**}], L^2(\mathbb{R}^N))$. De plus, d'après (1.36) et (1.37),

$$\sum_k \|f^{k+1} - f^k\|_{0, T_{**}} < +\infty. \quad (1.38)$$

Donc la suite (f^k) est une suite convergente dans $L^\infty([0, T_{**}], L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N))$ vers une fonction f de $\mathcal{C}([0, T_{**}], L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N))$.

Dans les espaces de Sobolev, on a la relation d'interpolation suivante :

Si $v \in H^s(\mathbb{R}^m)$ avec $m \geq 1$

$$\forall 0 \leq s' \leq s, \|v\|_{s'} \leq C(s) \|v\|_0^{1 - \frac{s'}{s}} \|v\|_s^{\frac{s'}{s}}.$$

En appliquant cette relation d'interpolation à la suite $U^{k+1} - U^k$, on obtient dans l'espace $H^{s'}(\mathbb{R}^N)$ avec $0 < \frac{N}{2} + 1 < s' < s$

$$\begin{aligned} \|U^{k+1} - U^k\|_{s', T_{**}} &\leq C(s) \|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}}^{1 - \frac{s'}{s}} (\|U^{k+1} - U_0\|_{s, T_{**}}^{\frac{s'}{s}} + \|U^k - U_0\|_{s, T_{**}}^{\frac{s'}{s}}) \\ &\leq C(s, s', R) \|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}}^{1 - \frac{s'}{s}}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $0 < \frac{N}{2} + 1 < s' < s$, la série $\|U^{k+1} - U^k\|_{s', T_{**}}$ est convergente. La suite (U^k) converge alors dans $L^\infty([0, T_{**}], H^{s'}(\mathbb{R}^N))$, et $U \in \mathcal{C}([0, T_{**}], H^{s'}(\mathbb{R}^N))$. Comme $\frac{N}{2} + 1 < s'$, l'espace de Sobolev $H^{s'}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continûment dans l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ et donc la convergence précédente s'effectue dans l'espace $L^\infty([0, T_{**}], \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N))$. Donc $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{C}([0, T_{**}], \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N))$ et à valeur dans $\overline{G_2}$.

Par le même argument d'interpolation que celui utilisé pour U^k , la suite f^k converge en fait vers f dans $\mathcal{C}([0, T_{**}], H^{s'}(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v^N))$ avec $0 < \frac{N}{2} + 1 < s' < s$. De plus, les supports en v des fonctions f^k étant bornés uniformément (lemme 1.6), on en déduit alors que les suites $\int f^k dv$ et $\int v f^k dv$ convergent dans $\mathcal{C}([0, T_{**}], H^{s'}(\mathbb{R}_x^N))$ et donc dans $\mathcal{C}([0, T_{**}], \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N))$ vers $\int f dv$ et $\int v f dv$ respectivement.

On peut à présent passer à la limite dans le système linéarisé. En effet,

$$\partial_t U^{k+1} = - \sum_i A_i(U^k) \partial_{x_i} U^{k+1} + b(U^k, f^k)$$

Or, la suite $\sum_i A_i(U^k) \partial_{x_i} U^{k+1}$ converge dans $\mathcal{C}([0, T_{**}] \times \mathbb{R}^N)$ vers $\sum_i A_i \partial_{x_i} U$. Comme $b(U^k, f^k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^k u^k \int f^k dv - \rho^k \int v f^k dv \end{pmatrix}$, et que chaque terme ρ^k , $\rho^k u^k$, $\int f^k dv$ et $\int v f^k dv$ convergent dans $\mathcal{C}([0, T_{**}], \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N))$, $b(U^k, f^k)$ va également converger dans $\mathcal{C}([0, T_{**}], \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N))$ vers $b(U, f)$. Enfin il est clair que

$$\frac{\partial U^{k+1}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} \text{ dans } \mathcal{C}([0, T_{**}] \times \mathbb{R}^N)$$

Finalement, U est dans l'espace $\mathcal{C}^1([0, T_{**}] \times \mathbb{R}^N)$ et vérifie

$$\partial_t U = - \sum_i A_i(U) \partial_{x_i} U + b(U, f).$$

On passe maintenant à la limite dans (1.27). Comme on a convergence de ρ^k et $\rho^k u^k$ dans $L^\infty([0, T_{**}], \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N))$, ainsi que la convergence (forte) dans $L^\infty([0, T_{**}], L^2(\mathbb{R}^N))$ de f^k ,

on voit que l'on peut passer à la limite dans (1.27) (par exemple au sens des distributions), et on a donc

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (v f) + \nabla_v \cdot (f(\rho u - \rho v)) = 0$$

De plus, d'après (1.31)-(1.32), $f \in L^\infty([0, T_{**}], L^\infty \cap H^s(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N))$. En utilisant les caractéristiques (qui sont \mathcal{C}^1 car $U \in \mathcal{C}^1$), on voit que $f \in \mathcal{C}_0^1([0, T_{**}] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Enfin, on passe à la limite dans (1.26)-(1.28), ce qui conclut le théorème 4.

1.5 Démonstration du lemme 1.6

1.5.1 Plan de la preuve

On démontre ce lemme par récurrence. Donc, on se donne U^k, f^k fonctions \mathcal{C}^∞ qui vérifient les relations (1.29) à (1.34) du lemme 1.6. De plus f^k est à support compact en x, v et $U^k - \overline{U}_0$ est à support compact en x .

Les estimations sur U^{k+1} et sur f^{k+1} seront démontrées indépendamment, car le système que vérifie U^{k+1} et f^{k+1} est découplé (U^k et f^k étant supposées connues).

On va donc commencer par étudier $U^{k+1} - U_0$, et appliquer les méthodes d'estimations d'énergie, qui associées au lemme de Gronwall, vont donner l'estimation en norme H^s voulue.

On montrera également que la constante L est déterminée uniquement par les valeurs de R, R' et des données initiales, mais pas par T_* .

Ensuite, on montrera les estimations sur f^{k+1} , en utilisant systématiquement les caractéristiques pour obtenir son expression (ainsi que celle de toutes ses dérivées en x et v) en fonction de la donnée initiale f_0 et du champ U^k .

Remarque 1.4 *On va utiliser dans toute la suite la constante R afin de bien indiquer la provenance des majorations (R majore la norme H^s de $U^k - U_0$). On rappelle que cette constante dépend uniquement de G_2, s et U_0 .*

1.5.2 Estimations sur U^{k+1}

On commence par étudier $U^{k+1} - U_0$. On note $W^{k+1} = U^{k+1} - U_0$, donc W^{k+1} est solution de

$$S(U^k) \partial_t W^{k+1} + \sum_i (SA_i)(U^k) \partial_{x_i} W^{k+1} = S(U^k) b(U^k, f^k) + \mathcal{H}^k, \quad (1.39)$$

$$W^{k+1}(x, 0) = 0, \quad (1.40)$$

avec $\mathcal{H}^k = -\sum_i (SA_i)(U^k) \partial_{x_i} U_0$.

On rappelle que W^{k+1} est \mathcal{C}^∞ à support compact sur $[0, T_{k+1}] \times \mathbb{R}^N$. La suite de la démonstration ne tiendra plus compte des exposants k et $k+1$ afin de simplifier les notations (*i.e.* on notera W au lieu de W^{k+1} , U au lieu de U^k et f au lieu de f^k). On considère donc le système

$$S(U) \partial_t W + \sum_i (SA_i)(U) \partial_{x_i} W = S(U) b(U, f) + \mathcal{H}, \quad (1.41)$$

$$W(x, 0) = 0, \quad (1.42)$$

avec $\mathcal{H} = -\sum_i (SA_i)(U)\partial_{x_i}U_0$.

On cherche une estimation a priori sur la norme H^s de W . On va donc étudier les dérivées successives par rapport à x de W : on note $W_\alpha = D^\alpha W$ avec $|\alpha| \leq s$. Chaque W_α vérifie

$$S(U)\partial_t W_\alpha + \sum_i (SA_i)(U)\partial_{x_i} W_\alpha = S(U)D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H} + b(U, f)) + \mathcal{F}_\alpha, \quad (1.43)$$

$$W(x, 0) = 0, \quad (1.44)$$

avec $\mathcal{F}_\alpha = S(U)\sum_i (A_i(U)\partial_{x_i} W_\alpha - D^\alpha(A_i(U)\partial_{x_i} W))$.

On utilise alors les égalités d'énergie associées à ces systèmes (pour $|\alpha| \leq s$), et on démontre les estimations voulues sur la norme L^2 de W_α . Le lemme abstrait suivant nous indique la méthode à utiliser.

1.5.2.a Estimations d'énergie

Lemme 1.8 *Si les matrices S et SA_i sont symétriques, que S vérifie $cI \leq S \leq c^{-1}I$ et que \mathcal{W} , fonction à support compact, est solution du système suivant*

$$S\partial_t \mathcal{W} + \sum_i SA_i \partial_{x_i} \mathcal{W} = F, \quad (1.45)$$

$$\mathcal{W}(x, 0) = \mathcal{W}_0(x), \quad (1.46)$$

alors, on a l'égalité d'énergie suivante

$$\frac{1}{2}\partial_t \int {}^t \mathcal{W} S \mathcal{W} dx = \frac{1}{2} \int {}^t \mathcal{W} \left(\sum_i \partial_{x_i} (SA_i) + \partial_t S \right) \mathcal{W} dx + \int {}^t \mathcal{W} F dx, \quad (1.47)$$

et l'inégalité, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\|\mathcal{W}\|_0(t) \leq c^{-1}(\|\mathcal{W}_0\|_0 + \frac{1}{2}\|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i} (SA_i)\|_{\infty, T} \int_0^t \|\mathcal{W}\|_0(\tau) d\tau + \int_0^t \|F\|_0 d\tau). \quad (1.48)$$

Preuve du lemme 1.8

On obtient l'égalité d'énergie en multipliant le système (1.45) par ${}^t \mathcal{W}$. Les matrices S et SA_i étant symétriques, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} {}^t \mathcal{W} S \partial_t \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \partial_t ({}^t \mathcal{W} S \mathcal{W}) - \frac{1}{2} {}^t \mathcal{W} (\partial_t S) \mathcal{W}, \\ \text{pour tout } 0 \leq i \leq N, \quad {}^t \mathcal{W} SA_i \partial_{x_i} \mathcal{W} &= \frac{1}{2} \partial_{x_i} ({}^t \mathcal{W} SA_i \mathcal{W}) - \frac{1}{2} {}^t \mathcal{W} (\partial_{x_i} SA_i) \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\frac{1}{2} \partial_t ({}^t \mathcal{W} S \mathcal{W}) - \frac{1}{2} {}^t \mathcal{W} (\partial_t S) \mathcal{W} + \frac{1}{2} \sum_i \partial_{x_i} ({}^t \mathcal{W} SA_i \mathcal{W}) - \frac{1}{2} \sum_i {}^t \mathcal{W} (\partial_{x_i} SA_i) \mathcal{W} = {}^t \mathcal{W} F.$$

En intégrant sur \mathbb{R}^N , comme \mathcal{W} est à support compact, les intégrales en x des termes $\partial_{x_i} ({}^t \mathcal{W} SA_i \mathcal{W})$ s'annulent et on obtient l'égalité d'énergie (1.47).

Ensuite, on utilise les majorations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int {}^t\mathcal{W} \left(\sum_i \partial_{x_i}(SA_i) + \partial_t S \right) \mathcal{W} dx &\leq \frac{1}{2} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \int |\mathcal{W}|^2 dx, \\ \int {}^t\mathcal{W} F dx &\leq \sqrt{\int |\mathcal{W}|^2 dx} \sqrt{\int |F|^2 dx}. \end{aligned}$$

De plus, $\frac{1}{2} \partial_t \int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx = \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} \partial_t \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx}$. Donc en reportant les inégalités et cette relation dans l'équation (1.47), on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} \partial_t \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} &\leq \frac{1}{2} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \int |\mathcal{W}|^2 dx \\ &\quad + \sqrt{\int |\mathcal{W}|^2 dx} \sqrt{\int F^2 dx}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (1.8) de S , on obtient $\sqrt{\int |\mathcal{W}|^2 dx} \leq \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx}$, donc en remplaçant dans l'inégalité ci-dessus

$$\begin{aligned} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} \partial_t \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} &\leq \frac{1}{2\sqrt{c}} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \sqrt{\int |\mathcal{W}|^2 dx} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} \sqrt{\int F^2 dx}, \end{aligned}$$

ce qui donne, en simplifiant par $\sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx}$ (qui est non nul dès que $\mathcal{W} \neq 0$, car S est une matrice symétrique définie positive)

$$\sqrt{c} \partial_t \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx} \leq \frac{1}{2} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \sqrt{\int \mathcal{W}^2 dx} + \sqrt{\int F^2 dx}.$$

On intègre alors par rapport à t

$$\begin{aligned} \sqrt{c} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} dx}(t) &\leq \sqrt{c} \sqrt{\int {}^t\mathcal{W}_0 S \mathcal{W}_0 dx} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \int_0^t \sqrt{\int \mathcal{W}^2 dx} d\tau \\ &\quad + \int_0^t \sqrt{\int F^2 dx} d\tau. \end{aligned}$$

Or, ${}^t\mathcal{W}_0 S \mathcal{W}_0 \leq c^{-1} {}^t\mathcal{W}_0 \mathcal{W}_0$, et ${}^t\mathcal{W} S \mathcal{W} \geq c {}^t\mathcal{W} \mathcal{W}$, donc

$$\begin{aligned} c \sqrt{\int {}^t\mathcal{W} \mathcal{W} dx}(t) &\leq \sqrt{\int \mathcal{W}_0^2 dx} + \frac{1}{2} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \int_0^t \sqrt{\int \mathcal{W}^2 dx} d\tau, \\ &\quad + \int_0^t \sqrt{\int F^2 dx} d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\|\mathcal{W}\|_0(t) \leq c^{-1}(\|\mathcal{W}_0\|_0 + \frac{1}{2}\|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T} \int_0^t \|\mathcal{W}\|_0(\tau) d\tau + \int_0^t \|F\|_0 d\tau),$$

ce qui conclut le lemme. \blacksquare

1.5.2.b Application de la méthode des énergies au couplage fluide-cinétique

Revenons à présent aux systèmes que vérifient les W_α . On commence par appliquer la première partie du lemme 1.8 pour obtenir l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \int {}^t W_\alpha S(U) W_\alpha dx &= \frac{1}{2} \int {}^t W_\alpha \left(\sum_i \partial_{x_i}(SA_i)(U) + \partial_t S(U) \right) W_\alpha dx \\ &+ \int {}^t W_\alpha S(U) D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H} + b(U, f)) dx \quad (1.49) \\ &+ \int {}^t W_\alpha \mathcal{F}_\alpha dx. \end{aligned}$$

Pour pouvoir utiliser la deuxième partie du lemme 1.8, on va chercher des estimations sur la norme infinie de $\sum_i \partial_{x_i}(SA_i)(U) + \partial_t S(U)$, ainsi que sur la norme L^2 de $S(U)D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H} + b(U, f))$ et de \mathcal{F}_α .

Commençons par la norme infinie de $\sum_i \partial_{x_i}(SA_i)(U) + \partial_t S(U)$

$$\partial_t S(U) = DS(U)\partial_t U,$$

$$\partial_{x_i}(SA_i)(U) = D(SA_i)(U)\partial_{x_i} U.$$

Par hypothèse de récurrence, U est à valeurs dans G_2 , qui est relativement compact dans G . Comme S et les SA_i sont des fonctions régulières, ainsi que leurs dérivées, les quantités $DS(U)$ et $DSA_i(U)$ sont majorées en norme infinie par une constante (notée de manière générique C) dépendant uniquement de G_2 . Également par hypothèse de récurrence, on sait que $\|\partial_t U\|_{s-1, T_k} \leq L$, et que $\|U - U_0\|_{s, T_k} \leq R$. D'après les inégalités de Sobolev, l'espace $H^{s-1}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue (car $s-1 > \frac{N}{2} + 1 - 1 > \frac{N}{2}$), on a donc

$$\begin{aligned} \|\partial_t U\|_\infty &\leq C(s) \|\partial_t U\|_{s-1, T_k} \leq C(s) L \\ \|\partial_{x_i} U\|_\infty &\leq C(s) \|\partial_{x_i} U\|_{s-1, T_k} = C(s) \|\partial_{x_i}(U - U_0) + \partial_{x_i}(U_0 - \overline{U_0})\|_{s-1, T_k} \\ &\leq C(s) (\|U - U_0\|_{s, T_k} + \|U_0 - \overline{U_0}\|_{s, T_k}) \leq C(s, R, U_0) \end{aligned}$$

donc on dispose de la majoration suivante

$$\|\partial_t S(U) + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)(U)\|_{\infty, T_k} \leq C(s, L, G_2, U_0).$$

Comme on va travailler sur U^{k+1} dont le domaine d'existence en temps est $[0, T_{k+1}]$, avec $T_{k+1} \leq T_k$, on peut se contenter des majorations des normes $\|\cdot\|_{s, T_{k+1}}$ au lieu des normes $\|\cdot\|_{s, T_k}$ ($\|\cdot\|_{s, T_{k+1}} \leq \|\cdot\|_{s, T_k}$). Finalement

$$\|\partial_t S(U) + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)(U)\|_{\infty, T_{k+1}} \leq C(s, L, G_2, U_0). \quad (1.50)$$

Étudions maintenant la norme L^2 de $S(U)D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H} + b(U, f))$ et de \mathcal{F}_α . On applique ici les inégalités suivantes de type Gagliardo-Nirenberg (cf. [10])

Lemme 1.9 1. Si $h \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $Dh \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \leq s$,

$$\|D^\alpha(hg) - hD^\alpha(g)\|_{L^2} \leq C_s(\|Dh\|_{L^\infty} \|D^{s-1}g\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty} \|D^s h\|_{L^2}).$$

2. Si $u \mapsto g(u)$ est une fonction régulière sur G , si $x \mapsto u(x)$ est une fonction continue à valeur dans G_1 (avec $\overline{G_1} \subset\subset G$) et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^s(\mathbb{R}^N)$, alors pour $s \geq 1$

$$\|D^s g(u)\|_{L^2} \leq C_s \|D_u g\|_{s-1, \overline{G_1}} \|u\|_{L^\infty}^{s-1} \|D^s u\|_{L^2}.$$

3. Si $h, g \in H^s(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $|\alpha| \leq s$,

$$\|D^\alpha(hg)\|_{L^2} \leq C_s(\|h\|_{L^\infty} \|D^s g\|_{L^2} + \|g\|_{L^\infty} \|D^s h\|_{L^2}).$$

On peut appliquer ces inégalités à $\mathcal{F}_\alpha = S(U) \sum_i (A_i(U)D^\alpha(\partial_{x_i} W) - D^\alpha(A_i(U)\partial_{x_i} W))$. Pour appliquer ici l'inégalité 1. du lemme 1.9, il faudrait que $A_i(U)$ soit dans $H^s(\mathbb{R}^N)$, ce qui n'est pas le cas. Par contre $A_i(U) - A_i(\overline{U_0})$ est \mathcal{C}^∞ à support compact donc est dans $H^s(\mathbb{R}^N)$. On peut réécrire le commutateur entre $A_i(U)$ et $\partial_{x_i} W$

$$\begin{aligned} A_i(U)D^\alpha(\partial_{x_i} W) - D^\alpha(A_i(U)\partial_{x_i} W) &= (A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))D^\alpha(\partial_{x_i} W) \\ &\quad - D^\alpha((A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))\partial_{x_i} W) \\ &\quad + A_i(\overline{U_0})D^\alpha(\partial_{x_i} W) - D^\alpha(A_i(\overline{U_0})\partial_{x_i} W) \\ &= (A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))D^\alpha(\partial_{x_i} W) \\ &\quad - D^\alpha((A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))\partial_{x_i} W) \end{aligned}$$

(car $\overline{U_0}$ est une constante). On peut donc appliquer l'inégalité voulue

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\alpha\|_0 &\leq \|S(U)\|_\infty C(s) \sum_i (\|D(A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))\|_\infty \|D^{s-1}\partial_{x_i} W\|_0 \\ &\quad + \|\partial_{x_i} W\|_\infty \|D^s(A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))\|_0), \end{aligned}$$

(cela assure qu'il n'y a pas de dérivées de W d'ordre strictement supérieur à s). On applique ensuite l'inégalité 2. à $D^s(A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))$ (voir l'annexe 1.B pour des calculs plus complets)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\alpha\|_0 &\leq C(s, G_2) (C(G_2) \|W\|_s + \|W\|_s C(s, G_2, R, U_0)) \\ &\leq C(s, G_2, R, U_0) \|W\|_s. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Le terme en \mathcal{H} ne fait intervenir que des termes en U . Comme on connaît par récurrence les estimées sur la norme H^s et infinie de $U - U_0$, on obtient en appliquant l'inégalité 3., puis 2.

(et toujours l'annexe 1.B)

$$\begin{aligned}
\|S(U)D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H})\|_0 &\leq \|S(U)\|_\infty \sum_i \|D^\alpha(A_i(U)\partial_{x_i}U_0)\|_0 \\
&\leq \|S(U)\|_\infty \sum_i (\|D^\alpha((A_i(U) - A_i(\overline{U}_0))\partial_{x_i}(U_0))\|_0 \\
&\quad + \|A_i(\overline{U}_0)D^\alpha(\partial_{x_i}U_0)\|_0) \\
&\leq C(G_2)C(s) \sum_i (\|A_i(U) - A_i(\overline{U}_0)\|_\infty \|D^s\partial_{x_i}U_0\|_0 \\
&\quad + \|\partial_{x_i}U_0\|_\infty \|D^s(A_i(U) - A_i(\overline{U}_0))\|_0 + C\|\partial_{x_i}U_0\|_s) \\
&\leq C(s, G_2) \sum_i \|\partial_{x_i}U_0\|_s \\
&\leq C(s, G_2, U_0). \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Il faut remarquer ici que $\partial_{x_i}U_0 = \partial_{x_i}(U_0 - \overline{U}_0)$ est dans \mathcal{C}_0^∞ donc dans $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Nous allons enfin déterminer la majoration sur le terme provenant du couplage avec l'équation cinétique, terme qui n'apparaît pas dans la preuve de l'existence de solutions pour un système hyperbolique. On a donc besoin de connaître une estimation de la norme L^2 de $S(U)D^\alpha(b(U, f))$. On commence par l'estimation suivante :

$$\|S(U)D^\alpha(b(U, f))\|_0 \leq \|S(U)\|_\infty \|D^\alpha(b(U, f))\|_0.$$

Or $b(U, f) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int f(\rho v - \rho u) dv \end{pmatrix}$, donc $D^\alpha(b(U, f)) = \begin{pmatrix} 0 \\ D^\alpha(\rho \int f v dv) - D^\alpha(\rho u \int f dv) \end{pmatrix}$.
Donc, en utilisant l'inégalité 3. du lemme 1.9, on obtient

$$\begin{aligned}
\|S(U)D^\alpha(b(U, f))\|_0 &\leq C(G_2)(\|\rho\|_\infty \|D^s(\int f v dv)\|_0 + \|\int f v dv\|_\infty \|D^s\rho\|_0 \\
&\quad + \|\rho u\|_\infty \|D^s(\int f dv)\|_0 + \|\int f dv\|_\infty \|D^s(\rho u)\|_0).
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on majore la norme H^s de $U - U_0$. De plus, U est borné car à valeur dans G_2 .

$$\begin{aligned}
\|S(U)D^\alpha(b(U, f))\|_0 &\leq C(G_2, R, U_0)(\|D^s(\int f v dv)\|_0 + \|\int f v dv\|_\infty \\
&\quad + \|D^s(\int f dv)\|_0 + \|\int f dv\|_\infty).
\end{aligned}$$

On dispose également, grâce aux hypothèses de récurrence, des majorations sur la norme H^s de f , sur sa norme infinie et sur son support. En utilisant le fait que le support de f est inclus

dans $B(0, X_M^k(t)) \times B(0, V_M^k(t))$, on peut effectuer les majorations suivantes

$$\begin{aligned} \left\| \int f \, dv \right\|_\infty &\leq \|f\|_\infty \left\| \int \chi_{\text{Supp}f} \, dv \right\|_\infty \\ &\leq 2^N \|f\|_\infty (V_M^k)^N(t) \leq C(f_0), \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\left\| \int f \, v \, dv \right\|_\infty \leq 2^N \|f\|_\infty (V_M^k)^{N+1}(t) \leq C(f_0), \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \|D^s(\int f \, v \, dv)\|_0 &= \sum_{|\alpha|=s} \left\| \int v \, D_x^\alpha(f) \, dv \right\|_0 \\ &= \sum_{|\alpha|=s} \sqrt{\int \left(\int v \, D_x^\alpha(f) \, dv \right)^2 \, dx} \\ &\leq \sum_{|\alpha|=s} \sqrt{\int \left(\int v^2 \, \chi_{\text{Supp}f} \, dv \int (D_x^\alpha(f))^2 \, dv \right) \, dx} \\ &\leq C V_M(t)^{N/2+1} \sum_{|\alpha|=s} \|D_x^\alpha(f)\|_{L_{x,v}^2} \\ &\leq C V_M(t)^{N/2+1} \|f\|_{s, T_*} \leq C(f_0), \\ \|D^s(\int f \, dv)\|_0 &\leq V_M(t)^{N/2} \|f\|_{s, T_*} \leq C(f_0). \end{aligned}$$

Toutes ces majorations, ajoutées aux hypothèses de récurrence (1.31) à (1.34), nous donnent

$$\|S(U)D^\alpha(b(U, f))\|_0 \leq C(G_2, R, f_0, U_0). \quad (1.55)$$

1.5.2.c Majoration de $\partial_t U^{k+1}$

Grâce aux majorations précédentes, on peut prouver l'existence d'un L dépendant uniquement de G_2, R, U_0 et f_0 tel que

$$\|\partial_t U^{k+1}\|_{s-1, T_{k+1}} \leq L.$$

En effet, d'après l'équation linéarisée vérifiée par U^{k+1} , on a

$$\partial_t U^{k+1} = - \sum_i A_i(U^k) \partial_{x_i} U^{k+1} + b(U^k, f^k).$$

On obtient donc pour tout $t \in [0, T_{k+1}]$,

$$\|\partial_t U^{k+1}\|_{s-1}(t) \leq \sum_i \|A_i(U^k) \partial_{x_i} U^{k+1}\|_{s-1, T_{k+1}} + \|b(U^k, f^k)\|_{s-1, T_{k+1}}.$$

Par définition de la norme sur $H^{s-1}(\mathbb{R}^N)$

$$\|b(U^k, f^k)\|_{s-1, T_{k+1}} = \sum_{|\alpha| \leq s-1} \|D^\alpha(b(U^k, f^k))\|_{0, T_{k+1}}.$$

Les calculs qui nous ont amenés à la relation (1.55) nous permettent d'écrire

$$\|b(U^k, f^k)\|_{s-1, T_{k+1}} \leq C(s, G_2, R, U_0, f_0).$$

De plus,

$$\|A_i(U^k)\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{s-1,T_{k+1}} = \sum_{|\alpha|\leq s-1} \|D^\alpha(A_i(U^k)\partial_{x_i}U^{k+1})\|_{0,T_{k+1}}.$$

Ce terme ne fait intervenir que des dérivées de U^{k+1} d'ordre $\leq s$. On utilisera alors la majoration suivante, qui vient de la construction des T_k

$$\|U^{k+1} - U_0\|_{s,T_{k+1}} \leq R.$$

Cette majoration couplée avec l'utilisation des inégalités 2. et 3. du lemme 1.9, et les calculs de l'annexe 1.B nous donne successivement

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(A_i(U^k)\partial_{x_i}U^{k+1})\|_{0,T_{k+1}} &\leq \|D^\alpha((A_i(U^k) - A_i(\bar{U}_0))\partial_{x_i}U^{k+1})\|_{0,T_{k+1}} \\ &\quad + \|A_i(\bar{U}_0)D^\alpha(\partial_{x_i}U^{k+1})\|_{0,T_{k+1}} \\ &\leq C(s)(\|A_i(U^k) - A_i(\bar{U}_0)\|_{\infty,T_{k+1}}\|D^{s-1}\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{0,T_{k+1}} \\ &\quad + \|\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{\infty,T_{k+1}}\|D^{s-1}(A_i(U^k) - A_i(\bar{U}_0))\|_{0,T_{k+1}}) \\ &\quad + C\|\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{s-1,T_{k+1}} \\ &\leq C(s)(C(G_2)\|\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{s-1,T_{k+1}} \\ &\quad + C(s)\|\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{s-1,T_{k+1}}C(s, G_2, R, U_0)) \\ &\quad + C\|\partial_{x_i}U^{k+1}\|_{s-1,T_{k+1}} \\ &\leq C(s, G_2, R, U_0). \end{aligned}$$

Et donc,

$$\|\partial_t U^{k+1}\|_{s-1,T_{k+1}} \leq C(s, G_2, U_0, f_0) \equiv L.$$

On obtiendra donc la relation (1.30) dès que l'on aura trouvé un $T_* \leq T_{k+1}$.

1.5.2.d Lemme de Gronwall

Revenons aux fonctions W_α . Rappelons ici les égalités qu'elles vérifient

$$S(U)\partial_t W_\alpha + \sum_i (SA_i)(U)\partial_{x_i} W_\alpha = S(U)D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H} + b(U, f)) + \mathcal{F}_\alpha \quad (1.56)$$

$$W(x, 0) = 0 \quad (1.57)$$

On peut alors utiliser le lemme 1.8, car par hypothèse de récurrence, U est à valeur dans G_2 . En utilisant la formule (1.48), on obtient

$$\begin{aligned} \|W_\alpha\|_0(t) &\leq c(G_2)^{-1}(\|W_\alpha(0)\|_0 + \frac{1}{2}\|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty,T_{k+1}} \int_0^t \|W_\alpha\|_0(\tau) d\tau) \\ &\quad + c(G_2)^{-1} \int_0^t (\|\mathcal{F}_\alpha\|_0 + \|S(U)D^\alpha(S^{-1}(U)\mathcal{H})\|_0 + \|S(U)D^\alpha(b(U, f))\|_0) d\tau \end{aligned}$$

En utilisant les majorations (1.50)-(1.51)-(1.52)-(1.55), on obtient

$$\begin{aligned} \|W_\alpha\|_0(t) &\leq c(G_2)^{-1}(\|W_\alpha(0)\|_0 + C(s, L, G_2, U_0) \int_0^t \|W_\alpha\|_0(\tau) d\tau) \\ &\quad + c(G_2)^{-1} \int_0^t (C(s, G_2, R, U_0) \|W\|_s(\tau) + C(s, G_2, U_0) + C(G_2, R, f_0, U_0)) d\tau, \end{aligned}$$

En sommant pour tout $|\alpha| \leq s$

$$\begin{aligned} \|W\|_s(t) &\leq c(G_2)^{-1}(\|W\|_s(0) + C(s, R, L, G_2, U_0) \int_0^t \|W\|_s(\tau) d\tau) \\ &\quad + c(G_2)^{-1} t C(s, R, G_2, U_0, f_0). \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $t \in [0, T]$ avec $T \leq T_{k+1}$

$$\begin{aligned} \|W\|_s(t) &\leq c(G_2)^{-1}(\|W\|_s(0) + C(s, R, L, G_2, U_0) \int_0^t \|W\|_s(\tau) d\tau) \\ &\quad + c(G_2)^{-1} T C(s, R, G_2, U_0, f_0). \end{aligned}$$

Donc, le lemme de Gronwall nous assure que si $t \in [0, T]$ avec $T \leq T_{k+1}$

$$\|W\|_s(t) \leq c(G_2)^{-1}(\|W\|_s(0) + T C(s, R, G_2, U_0, f_0)) e^{c(G_2)^{-1} C(s, R, L, G_2, U_0) t}.$$

C'est-à-dire pour tout $T \leq T_{k+1}$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|W\|_s(t) \leq c(G_2)^{-1}(\|W(0)\|_s + T C(s, R, G_2, U_0, f_0)) e^{c(G_2)^{-1} C(s, R, L, G_2, U_0) T}.$$

Comme $W(0) = 0$, on aboutit à

$$\sup_{t \in [0, T]} \|U^{k+1} - U_0\|_s(t) \leq T c(G_2)^{-1} C(s, R, G_2, U_0, f_0) e^{c(G_2)^{-1} C(s, R, L, G_2, U_0) T}.$$

La borne étant une fonction continue de T indépendante de k et valant 0 en 0, cela nous assure l'existence d'un $T_* \leq \inf_k(T_k)$ tel que $T_* \equiv T_*(s, G_2, U_0, f_0) > 0$ et

$$\sup_{t \in [0, T_*]} \|U^{k+1} - U_0\|_s(t) \leq R. \quad (1.58)$$

1.5.3 Estimations sur f^{k+1}

Pour terminer la preuve du lemme 1.6, il reste à démontrer les estimations sur f^{k+1} , solution de (1.27). On a vu en section 1.3 qu'en définissant le champ caractéristique suivant

$$\begin{aligned} \frac{dX^k}{dt} &= V^k, \\ X^k(s; x, v, s) &= x, \\ \frac{dV^k}{dt} &= (\rho^k u^k)(X^k(t; x, v, s), t) - \rho^k(X^k(t; x, v, s), t) V^k(t; x, v, s), \\ V^k(s; x, v, s) &= v, \end{aligned}$$

f^{k+1} peut s'écrire

$$f^{k+1}(t, x, v) = f_0(X^k(0; x, v, t), V^k(0; x, v, t)) e^{\int_0^t N \rho^k(X^k(\tau; x, v, t), \tau) d\tau},$$

donc

$$\|f^{k+1}\|_{\infty, T_*} \leq \|f_0\|_{\infty} e^{C(G_2) T_*}.$$

Quitte à diminuer T_* , on a bien

$$\|f^{k+1}\|_{\infty, T_*} \leq 2 \|f_0\|_{\infty},$$

ce qui correspond à l'estimation (1.32).

On connaît également une estimation du support de f^{k+1} en fonction de U^k (voir relation (1.18) et (1.19) appliquées avec $U = U^k$). En utilisant les majorations connues sur U^k , on obtient pour tout $t \in [0, T_*]$

$$V_M^{k+1}(t) \leq (V_M(0) + C(G_2) T_*) e^{C(G_2) T_*},$$

et

$$X_M^{k+1}(t) \leq X_M(0) + V_M(0) T_* e^{C(G_2) T_*} + C(G_2) T_*^2 e^{C(G_2) T_*}.$$

Donc, quitte à diminuer T_* ,

$$V_M^{k+1}(t) \leq 2 V_M(0), \tag{1.59}$$

et

$$X_M^{k+1}(t) \leq 2 X_M(0). \tag{1.60}$$

Seule reste à démontrer l'estimation sur la norme H^s de f^{k+1} . Lorsque l'on dérive α fois par rapport à x et β fois par rapport à v ($|\alpha| + |\beta| \leq s$) l'équation (1.27) que vérifie f^{k+1} , cela fait intervenir dans l'équation des dérivées d'ordre total $\leq |\alpha| + |\beta|$ en x et v de f^{k+1} , ainsi que les dérivés d'ordre $\leq |\alpha|$ de U^k . Ainsi, on dispose, en regardant les normes L^2 des dérivées successives de f^{k+1} , d'un système d'équations couplées. Ces équations sont toutes des équations de type transport, avec le même champ caractéristique que pour f^{k+1} et des seconds membres variables.

On écrit explicitement celles qui sont obtenues à l'ordre 1 et 2 de dérivation

$$\begin{aligned} & \partial_t(\nabla_x f^{k+1}) + v \cdot \nabla_x (\nabla_x f^{k+1}) + (\rho^k u^k - \rho^k v) \cdot \nabla_v (\nabla_x f^{k+1}) \\ &= N \rho^k (\nabla_x f^{k+1}) + f^{k+1} \nabla_x \rho^k + (\nabla_x \rho^k v - \nabla_x (\rho^k u^k)) \cdot \nabla_v f^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\nabla_v f^{k+1}) + v \cdot \nabla_x (\nabla_v f^{k+1}) + (\rho^k u^k - \rho^k v) \cdot \nabla_v (\nabla_v f^{k+1}) \\ &= 2 N \rho^k (\nabla_v f^{k+1}) - \nabla_x f^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\nabla_{xx} f^{k+1}) + v \cdot \nabla_x (\nabla_{xx} f^{k+1}) + (\rho^k u^k - \rho^k v) \cdot \nabla_v (\nabla_{xx} f^{k+1}) \\ &= N \rho^k (\nabla_{xx} f^{k+1}) + 2 \nabla_x \rho^k \nabla_x f^{k+1} + f^{k+1} \nabla_{xx} \rho^k - (\nabla_{xx} (\rho^k u^k) - v \nabla_{xx} \rho^k) \cdot \nabla_v f^{k+1} \\ & \quad - 2(\nabla_x (\rho^k u^k) - v \nabla_x \rho^k) \cdot \nabla_{xv} f^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\nabla_{xv} f^{k+1}) + v \cdot \nabla_x (\nabla_{xv} f^{k+1}) + (\rho^k u^k - \rho^k v) \cdot \nabla_v (\nabla_{xv} f^{k+1}) \\ &= 2 N \rho^k (\nabla_{xv} f^{k+1}) - \nabla_{xx} f^{k+1} + 2 \nabla_x \rho^k \nabla_v f^{k+1} - (\nabla_x (\rho^k u^k) - v \nabla_x \rho^k) \cdot \nabla_{vv} f^{k+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(\nabla_{vv} f^{k+1}) + v \cdot \nabla_x (\nabla_{vv} f^{k+1}) + (\rho^k u^k - \rho^k v) \cdot \nabla_v (\nabla_{vv} f^{k+1}) \\ &= 3 N \rho^k (\nabla_{vv} f^{k+1}) - 2 \nabla_{xv} f^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (1.15), toutes les dérivées de f^{k+1} peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} D_x^\alpha D_v^\beta f^{k+1}(t, x, v) &= D_x^\alpha D_v^\beta f_0(X^k(0; x, v, t), V^k(0; x, v, t)) e^{\int_0^t C_{\alpha, \beta} \rho^k(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} \\ & \quad + \int_0^t e^{\int_\tau^t C_{\alpha, \beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} B_{\alpha, \beta}(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) d\tau, \end{aligned}$$

où $C_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$ (c'est toujours un multiple positif de \mathbb{N}) et où $B_{\alpha, \beta}$ est une fonction polynomiale en $D_x^{\alpha'} D_v^{\beta'} f^{k+1}$, avec $|\alpha'| + |\beta'| \leq |\alpha| + |\beta|$, en $D_x^\gamma U^k$, avec $|\gamma| \leq |\alpha|$ et en v . De plus, $B_{\alpha, \beta}$ est linéaire par rapport à $D_x^{\alpha'} D_v^{\beta'} f^{k+1}$ et de degré partiel au plus 1 par rapport aux dérivées de U et à v .

On cherche la norme L^2 de $D_x^\alpha D_v^\beta f^{k+1}$. En prenant le carré de l'expression précédente, et en intégrant en x et en v , on a

$$\begin{aligned} \int \int (D_x^\alpha D_v^\beta f^{k+1}(t, x, v))^2 dx dv &\leq 2 \int \int (D_x^\alpha D_v^\beta f_0(X^k(0; x, v, t), V^k(0; x, v, t)))^2 \\ & \quad \times e^{2 \int_0^t C_{\alpha, \beta} \rho^k(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} dx dv \\ & \quad + 2 \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t C_{\alpha, \beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} \right. \\ & \quad \left. \times B_{\alpha, \beta}(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) d\tau \right)^2 dx dv. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on utilise le changement de variables $(x, v) \mapsto (X^k(0; x, v, t), V^k(0; x, v, t))$, qui a pour jacobien : $e^{\int_0^t N \rho^k(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & \int \int 2 (D_x^\alpha D_v^\beta f_0(X^k(0; x, v, t), V^k(0; x, v, t)))^2 e^{2 \int_0^t C_{\alpha, \beta} \rho^k(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} dx dv \\ & \leq \int \int 2 (D_x^\alpha D_v^\beta f_0(X, V))^2 e^{\int_0^t C'_{\alpha, \beta} \rho^k(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} dX dV, \end{aligned}$$

avec $C'_{\alpha,\beta} = 2C_{\alpha,\beta} - N$. En utilisant les hypothèses de récurrence sur U^k

$$\begin{aligned} \int \int 2 (D_x^\alpha D_v^\beta f_0(X^k(0; x, v, t), V^k(0; x, v, t)))^2 e^{2 \int_0^t C_{\alpha,\beta} \rho^k(X(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} dx dv & \quad (1.61) \\ & \leq 2 e^{tC(G_2)} \|D_x^\alpha D_v^\beta f_0\|_{L^2_{x,v}}^2. \end{aligned}$$

Pour ce qui concerne la deuxième intégrale, on applique Cauchy-Schwartz sur le carré de l'intégrale en temps

$$\begin{aligned} & 2 \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t C_{\alpha,\beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} B_{\alpha,\beta}(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) d\tau \right)^2 dx dv \\ & \leq 2 \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t C_{\alpha,\beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} d\tau \right) \\ & \quad \times \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t C_{\alpha,\beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} B_{\alpha,\beta}^2(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) d\tau \right) dx dv \\ & \leq 2t e^{tC(G_2)} \int_0^t \int \int e^{\int_\tau^t C_{\alpha,\beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} B_{\alpha,\beta}^2(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) dx dv d\tau. \end{aligned}$$

Ensuite, on applique le changement de variable $(x, v) \mapsto (X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t))$, qui a pour jacobien $e^{\int_\tau^t N \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} & 2 \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t C_{\alpha,\beta} \rho^k(X(\tilde{\tau}; x, v, t), \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}} B_{\alpha,\beta}(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) d\tau \right)^2 dx dv \\ & \leq 2t e^{tC(G_2)} \int_0^t \int \int B_{\alpha,\beta}^2(X, V) dX dV d\tau. \end{aligned}$$

On utilise alors le résultat suivant

Lemme 1.10 Pour $\tau \in [0, T_*]$:

$$\int \int B_{\alpha,\beta}^2(X, V, \tau) dX dV \leq C(s, G_2, f_0, U_0) \|f^{k+1}\|_s^2(\tau),$$

Preuve du lemme 1.10

$B_{\alpha,\beta}$ est une fonction linéaire en les dérivées $D_x^{\alpha'} D_v^{\beta'} f^{k+1}$ avec $|\alpha'| + |\beta'| \leq |\alpha| + |\beta|$, les coefficients étant soit v , soit des termes en $D_x^\gamma U^k$ (avec $|\gamma| \leq |\alpha| \leq s$). Or

$$\begin{aligned} \forall v \in \text{Supp} f^{k+1} \quad & |v| \leq V_M^{k+1}(t) \leq C(f_0), \\ & \|U^k\|_{\infty, T_*} \leq C(G_2), \\ \forall 1 \leq |\gamma| \leq s \quad & \|D_x^\gamma U^k\|_{\infty, T_*} \leq C(s) (\|U^k - U_0\|_{s, T_*} + \|U_0 - \overline{U_0}\|_{s, T_*}) \leq C(s, R, U_0). \end{aligned}$$

Donc, les coefficients de $B_{\alpha,\beta}((D_x^{\alpha'} D_v^{\beta'} f^{k+1})_{\alpha', \beta'})$ sont majorés en norme infinie par une constante $C(s, G_2, U_0, f_0)$. Et donc, quand on prend le carré de la norme L^2 de $B_{\alpha,\beta}$, on trouve une somme de carré de normes L^2 des termes $D_x^{\alpha'} D_v^{\beta'} f^{k+1}$. Et comme

$$\forall |\alpha'| + |\beta'| \leq s \quad \|D_x^{\alpha'} D_v^{\beta'} f^{k+1}\|_{L^2, T_*} \leq \|f^{k+1}\|_{s, T_*},$$

cela conclut le lemme 1.10. ■ On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & 2 \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t C, \rho^k(X(\bar{\tau}; x, v, t), \bar{\tau}) d\bar{\tau}} B_{\alpha, \beta}(X^k(\tau; x, v, t), V^k(\tau; x, v, t)) d\tau \right)^2 dx dv \\ & \leq 2t e^{tC(G_2)} \int_0^t C(f_0, s, R) \|f\|_s^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Finalement, d'après (1.61) et (1.62)

$$\|D_x^\alpha D_v^\beta f^{k+1}\|_{L_{x,v}^2}^2(t) \leq 2e^{tC(G_2)} \|D_x^\alpha D_v^\beta f_0\|_{L_{x,v}^2}^2 + 2te^{tC(G_2)} \int_0^t C(f_0, s, R) \|f^{k+1}\|_s^2(\tau) d\tau$$

Donc, en sommant sur tous les α et β , on obtient

$$\|f^{k+1}\|_s^2(t) \leq 2e^{tC(G_2)} \|f_0\|_s^2 + 2te^{tC(G_2)} \int_0^t C(f_0, s, R) \|f^{k+1}\|_s^2(\tau) d\tau.$$

Ainsi, si $t \in [0, T]$ avec $T \leq T_*$

$$\|f^{k+1}\|_s^2(t) \leq 2e^{TC(G_2)} \|f_0\|_s^2 + C(f_0, s, R) T e^{TC(G_2)} \int_0^t \|f^{k+1}\|_s^2(\tau) d\tau.$$

On applique enfin le lemme de Gronwall : pour tout $t \in [0, T]$ avec $T \leq T_*$

$$\|f^{k+1}\|_s^2(t) \leq 2e^{TC(G_2)} \|f_0\|_s^2 e^{C(f_0, s, R) T e^{TC(G_2)} t}.$$

Donc, quitte à prendre un T_* plus petit, on obtient

$$\|f^{k+1}\|_{s, T_*} \leq 2 \|f_0\|_s,$$

ce qui conclut la démonstration du lemme 1.6. ■

1.6 Démonstration du lemme 1.7

Étudions la fonction $U^{k+1} - U^k$, pour $k \geq 2$. Elle est solution du système

$$S(U^k) \partial_t (U^{k+1} - U^k) + \sum_i (SA_i)(U^k) \partial_{x_i} (U^{k+1} - U^k) = b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1}) + F_k,$$

avec $F_k = (S(U^{k-1}) - S(U^k)) \partial_t U^k + \sum_i ((SA_i)(U^{k-1}) - (SA_i)(U^k)) \partial_{x_i} U^k$. De plus, $U^{k+1}(x, 0) - U^k(x, 0) = 0$.

Grâce au lemme 1.8 (formule (1.48)), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|U^{k+1} - U^k\|_0(t) & \leq c(G_2)^{-1} \left(\frac{1}{2} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i} (SA_i)\|_{\infty, T_*} \int_0^t \|U^{k+1} - U^k\|_0(\tau) d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t (\|F_k\|_0(\tau) + \|b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})\|_0(\tau)) d\tau \right). \end{aligned}$$

On applique ensuite le lemme de Gronwall (et l'estimation (1.50)): pour tout $t \in [0, T_*]$,

$$\begin{aligned}
\|U^{k+1} - U^k\|_0(t) &\leq c(G_2)^{-1} e^{\frac{c(G_2)^{-1}}{2}} \|\partial_t S + \sum_i \partial_{x_i}(SA_i)\|_{\infty, T_*} T_* \\
&\quad \times \left(\int_0^T (\|F_k\|_0(\tau) + \|b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})\|_0(\tau)) d\tau \right) \\
&\leq c(G_2)^{-1} e^{c(G_2)^{-1} C(s, R, L, G_2, U_0) T_*} T_* \\
&\quad \times (\|F_k\|_{0, T_*} + \|b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})\|_{0, T_*}). \tag{1.63}
\end{aligned}$$

Il faut à présent étudier les normes L^2 des termes F_k et $b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})$. En utilisant les estimées (1.29), (1.30) et la formule des accroissements finis sur S et SA_i (fonctions régulières sur G_2 et de dérivées bornées sur G_2 par une constante $C(G_2)$), on obtient

$$\|F_k\|_{0, T_*} \leq C(G_2, L, R) \|U^k - U^{k-1}\|_{0, T_*}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \int f^k (\rho^k u^k - \rho^k v) dv - \int f^{k-1} (\rho^{k-1} u^{k-1} - \rho^{k-1} v) dv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \int f^k ((\rho^k u^k - \rho^{k-1} u^{k-1}) - (\rho^k - \rho^{k-1}) v) dv \\ \quad + \int (f^k - f^{k-1}) (\rho^{k-1} u^{k-1} - \rho^{k-1} v) dv \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc, en norme L^2

$$\begin{aligned}
\|b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})\|_0 &\leq \|(\rho^k u^k - \rho^{k-1} u^{k-1}) \int f^k dv - (\rho^k - \rho^{k-1}) \int f^k v dv\|_0 \\
&\quad + \|(\rho^{k-1} u^{k-1}) \int (f^k - f^{k-1}) dv - \rho^{k-1} \int (f^k - f^{k-1}) v dv\|_0 \\
&\leq \left\| \int f^k dv \right\|_{\infty} \|\rho^k u^k - \rho^{k-1} u^{k-1}\|_0 \\
&\quad + \left\| \int f^k v dv \right\|_{\infty} \|\rho^k - \rho^{k-1}\|_0 \\
&\quad + \|\rho^{k-1} u^{k-1}\|_{\infty} \left\| \int (f^k - f^{k-1}) dv \right\|_0 \\
&\quad + \|\rho^{k-1}\|_{\infty} \left\| \int (f^k - f^{k-1}) v dv \right\|_0.
\end{aligned}$$

La norme infinie de U^{k-1} est majorée par une constante (dépendant de G_2). Nous avons déjà montré à la section précédente (formules (1.53) et (1.54)) que les normes infinies de $\int f^k dv$ et de $\int f^k v dv$ étaient majorées par une constante en f_0 . Le même type de calcul permet

d'assurer que

$$\begin{aligned} \|\int (f^k - f^{k-1}) dv\|_0 &\leq (4V_M(0))^{N/2} \|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v}^2} \\ &\leq C(f_0) \|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v}^2}, \\ \|\int (f^k - f^{k-1}) v dv\|_0 &\leq C(f_0) \|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v}^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})\|_0 \leq C(f_0) \|U^k - U^{k-1}\|_0 + C(G_2, f_0) \|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v}^2} \quad (1.64)$$

Montrons alors que la relation (1.36) est vérifiée pour $f^k - f^{k-1}$. En effet, la fonction $f^k - f^{k-1}$ est solution de l'équation de transport suivante

$$\begin{aligned} &\partial_t(f^k - f^{k-1}) + v \cdot \nabla_x(f^k - f^{k-1}) + (\rho^{k-1} u^{k-1} - \rho^{k-1} v) \cdot \nabla_v(f^k - f^{k-1}) \\ &= N \rho^{k-1} (f^k - f^{k-1}) + \nabla_v \cdot (f^{k-1}((\rho^{k-2} u^{k-2} - \rho^{k-2} v) - (\rho^{k-1} u^{k-1} - \rho^{k-1} v))). \end{aligned}$$

De plus, à $t=0$, $f^k(x, v, 0) = f^{k-1}(x, v, 0) = f_0(x, v)$. On rappelle que l'on note (X^{k-1}, V^{k-1}) le champ caractéristique associé à cette équation de transport. On peut écrire

$$(f^k - f^{k-1})(t, x, v) = \int_0^t e^{\int_\tau^t N \rho^{k-1}(X^{k-1}(s; x, v, t), s) ds} B(X^{k-1}(\tau; x, v, t), V^{k-1}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau,$$

avec $B = \nabla_v \cdot (f^{k-1}((\rho^{k-2} u^{k-2} - \rho^{k-2} v) - (\rho^{k-1} u^{k-1} - \rho^{k-1} v))) = (\rho^{k-2} u^{k-2} - \rho^{k-1} u^{k-1}) \cdot \nabla_v f^{k-1} - (\rho^{k-2} - \rho^{k-1})(N f^{k-1} + v \cdot \nabla_v(f^{k-1}))$.

Et donc, en utilisant Cauchy-Schwartz et le changement de variable $(x, v) \mapsto (X^{k-1}, V^{k-1})$, on obtient pour tout $t \in [0, T_*]$,

$$\begin{aligned} \int \int ((f^k - f^{k-1})(t, x, v))^2 dx dv &= \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t N \rho^{k-1}(X^{k-1}(s; x, v, t), s) ds} \right. \\ &\quad \times B(X^{k-1}(\tau; x, v, t), V^{k-1}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau \left. \right)^2 dx dv \\ &\leq \int \int \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t N \rho^{k-1}(X^{k-1}(s; x, v, t), s) ds} d\tau \right. \\ &\quad \times \int_0^t e^{\int_\tau^t N \rho^{k-1}(X^{k-1}(s; x, v, t), s) ds} \\ &\quad \times B^2(X^{k-1}(\tau; x, v, t), V^{k-1}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau \left. \right) dx dv \\ &\leq t e^{C(G_2)t} \int_0^t \int \int B^2(x, v, \tau) dx dv d\tau. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une majoration de la norme L^2 de B , on va utiliser les majorations en norme infinies de f^{k-1} et de sa dérivée par rapport à v . La majoration de la norme infinie de f^{k-1} est connue (lemme 1.6), celle de sa dérivée nécessite un calcul supplémentaire. $\nabla_v f^{k-1}$ vérifie l'équation suivante

$$\partial_t(\nabla_v f^{k-1}) + v \cdot \nabla_x(\nabla_v f^{k-1}) + (\rho^{k-2} u^{k-2} - \rho^{k-2} v) \cdot \nabla_v(\nabla_v f^{k-1}) = 2N \rho^{k-2}(\nabla_v f^{k-1}) - \nabla_x f^{k-1}.$$

Donc, en utilisant les caractéristiques (X^{k-2}, V^{k-2}) , $\nabla_v f^{k-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \nabla_v f^{k-1}(t, x, v) &= e^{\int_0^t 2N \rho^{k-2}(X^{k-2}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} \nabla_v(f_0)(X^{k-2}(0; x, v, t), V^{k-2}(0; x, v, t)) \\ &\quad - \int_0^t e^{\int_\tau^t 2N \rho^{k-2}(X^{k-2}(s; x, v, t), s) ds} \nabla_x f^{k-1}(X^{k-2}(\tau; x, v, t), V^{k-2}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Comme U^{k-2} est à valeur dans G_2 , la norme infinie de $\nabla_v f^{k-1}$ est majorée par

$$\|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(t) \leq \|\nabla_v f_0\|_\infty e^{C(G_2)t} + e^{C(G_2)t} \int_0^t \|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty(\tau) d\tau.$$

On remarque que l'on fait intervenir ici la norme infinie de la dérivée première de f^{k-1} par rapport à x : on a un couplage entre ces deux dérivées. On étudie alors $\nabla_x f^{k-1}$ de la même manière. La dérivée première de f^{k-1} par rapport à x vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned} &\partial_t(\nabla_x f^{k-1}) + v \cdot \nabla_x(\nabla_x f^{k-1}) + (\rho^{k-2} u^{k-2} - \rho^{k-2} v) \cdot \nabla_v(\nabla_x f^{k-1}) \\ &= N \rho^{k-2} (\nabla_x f^{k-1}) + \nabla_x \rho^{k-2} f^{k-1} + (\nabla_x \rho^{k-2} v - \nabla_x(\rho^{k-2} u^{k-2})) \cdot \nabla_v f^{k-1}, \end{aligned}$$

donc, la solution est donnée par

$$\begin{aligned} \nabla_x f^{k-1}(t, x, v) &= e^{\int_0^t N \rho^{k-2}(X^{k-2}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau} \nabla_x(f_0)(X^{k-2}(0; x, v, t), V^{k-2}(0; x, v, t)) \\ &\quad + \int_0^t e^{\int_\tau^t N \rho^{k-2}(X^{k-2}(s; x, v, t), s) ds} B_{1,0}(X^{k-2}(\tau; x, v, t), V^{k-2}(\tau; x, v, t), \tau) d\tau, \end{aligned}$$

avec $B_{1,0} = \nabla_x \rho^{k-2} f^{k-1} + (\nabla_x \rho^{k-2} v - \nabla_x(\rho^{k-2} u^{k-2})) \nabla_v f^{k-1}$. La norme infinie de $\nabla_x f^{k-1}$ est alors majorée par

$$\|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty \leq \|\nabla_x f_0\|_\infty e^{C(G_2)t} + e^{C(G_2)t} \int_0^t \|B_{1,0}\|_\infty(\tau) d\tau,$$

avec

$$\begin{aligned} \|B_{1,0}\|_\infty(\tau) &\leq \|\nabla_x \rho^{k-2}\|_\infty(\tau) \|f_0\|_\infty e^{C(G_2)t} \\ &\quad + \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(\tau) (V_M^{k-1}(\tau) \|\nabla_x \rho^{k-2}\|_\infty(\tau) + \|\nabla_x(\rho^{k-2} u^{k-2})\|_\infty(\tau)) \\ &\leq \|f_0\|_\infty e^{C(G_2)t} \|\nabla_x(U^{k-2} - U_0)\|_\infty + C(f_0) \|\nabla_x(U^{k-2} - U_0)\|_\infty \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(\tau) \\ &\leq C(s, R) \|f_0\|_\infty e^{C(G_2)t} + C(f_0, s, R) \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(\tau), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty(t) &\leq \|\nabla_x f_0\|_\infty e^{C(G_2)t} \\ &\quad + C(s, R) \|f_0\|_\infty t e^{C(G_2)t} \\ &\quad + C(f_0, s, R) e^{C(G_2)t} \int_0^t \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi, la somme des deux normes infinies vérifie

$$\begin{aligned} (\|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty + \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty)(t) &\leq (\|\nabla_x f_0\|_\infty + \|\nabla_v f_0\|_\infty) e^{C(G_2)t} + C(s, R) \|f_0\|_\infty t e^{C(G_2)t} \\ &\quad + C(f_0, s, R) e^{C(G_2)t} \int_0^t (\|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty(\tau) + \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(\tau)) d\tau \\ &\leq (\|\nabla_x f_0\|_\infty + \|\nabla_v f_0\|_\infty) e^{C(G_2)T_*} + C(s, R, f_0) T_* e^{C(G_2)T_*} \\ &\quad + C(f_0, s, R) e^{C(G_2)T_*} \int_0^t (\|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty(\tau) + \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall nous assure alors que pour tout $t \in [0, T_*]$

$$\begin{aligned} \|\nabla_x f^{k-1}\|_\infty(t) + \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty(t) &\leq ((\|\nabla_x f_0\|_\infty + \|\nabla_v f_0\|_\infty) e^{C(G_2)T_*} + C(s, R, f_0) T_* e^{C(G_2)T_*}) \\ &\quad \times e^{tC(f_0, s, R)} e^{C(G_2)T_*}. \end{aligned}$$

Donc, quitte à diminuer T_* en un nombre toujours strictement positif, on a

$$\|\nabla_x f^{k-1}\|_{\infty, T_*} + \|\nabla_v f^{k-1}\|_{\infty, T_*} \leq 2(\|\nabla_x f_0\|_\infty + \|\nabla_v f_0\|_\infty).$$

En utilisant $\|\nabla_v f^{k-1}\|_{\infty, T_*} \leq C(\nabla_x f_0, \nabla_v f_0) = C(f_0)$, et le fait que le support en v de f^{k-1} est borné, on peut majorer B en ne faisant intervenir que des termes en $U^{k-1} - U^{k-2}$

$$\begin{aligned} \int \int B^2(x, v, \tau) dx dv &\leq (2V_M^{k-1}(t))^N (\|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty + \|f^{k-1}\|_\infty + V_M^{k-1}(\tau) \|\nabla_v f^{k-1}\|_\infty)^2 \\ &\quad \times \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_0^2(\tau) \\ &\leq C(f_0) \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_0^2(\tau). \end{aligned}$$

Donc,

$$\|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v}^2}^2(t) \leq t e^{C(G_2)t} C(f_0) \int_0^t \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_0^2(\tau) d\tau$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $t \in [0, T_*]$, on obtient

$$\|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v,t}^2}^2 \leq t^2 e^{C(G_2)t} C(f_0) \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0,t}^2.$$

Donc, d'après (1.64)

$$\begin{aligned} \|b(U^k, f^k) - b(U^{k-1}, f^{k-1})\|_{0, T_*} &\leq C(f_0) \|U^k - U^{k-1}\|_{0, T_*} \\ &\quad + C(G_2, f_0) T_* e^{C(G_2)T_*} \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_*}. \end{aligned}$$

Revenons à présent à l'estimation sur $U^{k+1} - U^k$. D'après (1.63),

$$\begin{aligned} \|U^{k+1} - U^k\|_0(t) &\leq c(G_2)^{-1} e^{c(G_2)^{-1}C(s, R, L, G_2, U_0)T_*} T_* (C(G_2, L, R, f_0) \|U^k - U^{k-1}\|_{0, T_*} \\ &\quad + C(G_2, f_0) T_* e^{C(G_2)T_*} \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_*}). \end{aligned}$$

Donc il existe $T_{**} \in]0, T_*[$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha &= c(G_2)^{-1} e^{c(G_2)^{-1}C(s, R, L, G_2, U_0)T_{**}} T_{**} C(G_2, L, R, f_0) < 1, \\ \alpha' &= c(G_2)^{-1} e^{c(G_2)^{-1}C(s, R, L, G_2, U_0)T_{**}} T_{**}^2 C(G_2, f_0) e^{C(G_2)T_{**}} < 1, \\ \alpha + \alpha' &< 1. \end{aligned}$$

Et on obtient ainsi l'estimation (1.35) du lemme 1.7. De plus pour un tel T_{**} , en posant $\gamma = T_{**} e^{C(G_2)/2T_{**}} C(f_0)$, on obtient l'estimation (1.36) du lemme 1.7

$$\|f^k - f^{k-1}\|_{L_{x,v, T_{**}}^2} \leq \gamma \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_{**}}.$$

Remarque 1.5 On démontre l'unicité avec les mêmes outils que ceux utilisés dans cette section. En effet, si l'on considère $(\rho^1, \rho^1 u^1, f^1)$ et $(\rho^2, \rho^2 u^2, f^2)$ deux solutions régulières

(c'est-à-dire que $(\rho^1, \rho^1 u^1)$ et $(\rho^2, \rho^2 u^2)$ sont dans $\mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N)$ et que f^1 et f^2 sont dans $\mathcal{C}_0^1([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$), du même problème de Cauchy qui existent sur un même intervalle de temps T_* (le minimum entre les temps d'existence des deux solutions), on obtient les mêmes estimées que dans le lemme 1.7, c'est-à-dire qu'il existe α, α' (avec $\alpha + \alpha' < 1$), β et $T > 0$, tel que

$$\begin{aligned} \|U^1 - U^2\|_{0, T_*} &\leq \alpha \|U^1 - U^2\|_{0, T_*} + \alpha' \|U^1 - U^2\|_{0, T_*} \\ \|f^1 - f^2\|_{0, T_*} &\leq \beta \|U^1 - U^2\|_{0, T_*} \end{aligned}$$

On en déduit successivement que $U^1 = U^2$ dans $L^\infty([0, T_*], L^2(\mathbb{R}^N))$ donc elles sont égales sur $[0, T_*] \times \mathbb{R}^N$. Et ensuite, $f^1 = f^2$ dans $L^\infty([0, T_*], L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N))$ et donc sont égales sur $[0, T_*] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

Annexe 1.A Espaces de Sobolev

La propriété utilisée tout au long du calcul est que si $s > \frac{N}{2}$, alors $H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec injection continue (voir par exemple dans [2]).

On donne une preuve simple dans le cas $N = 1, s = 1$ de $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Soit $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$ (i.e. à support compact), alors en utilisant la relation $(u^2)'(x) = 2u(x)u'(x)$ intégrée en x , on a

$$\begin{aligned} (u^2)(x) &= 2 \int_{-\infty}^x u(y) u'(y) dy \\ &\leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^x u^2(y) dy} \sqrt{\int_{-\infty}^x (u')^2(y) dy} \\ &\leq 2 \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2} \end{aligned}$$

et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &\leq \sqrt{2 \|u\|_{L^2} \|u'\|_{L^2}} \\ &\leq \sqrt{(\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2})^2} \\ &\leq \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2} \\ &= \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

On conclut alors par densité de l'espace des fonctions \mathcal{C}_0^1 dans $H^1(\mathbb{R})$.

Annexe 1.B Inégalités utilisées

Voici un récapitulatif des inégalités les plus utilisées tout au long de la démonstration

1. Comme U est à valeurs dans G_2 alors $\|U\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C(G_2)$.
2. Comme U est à valeurs dans G_2

$$\|S(U)\|_\infty + \sum_i (\|SA_i(U)\|_\infty + \|A_i(U)\|_\infty + \|D(A_i(U))\|_\infty + \|D(SA_i(U))\|_\infty) \leq c(G_2)$$

3.

$$\begin{aligned}
\|D^s(U)\|_{L^2} &= \|D^s(U - \overline{U_0})\|_{L^2} \\
&\leq \|U - \overline{U_0}\|_s \\
&\leq \|U - U_0\|_s + \|U_0 - \overline{U_0}\|_s \\
&\leq R + C(U_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_i} U\|_\infty &\leq C(s) \|\partial_{x_i} U\|_{s-1} \\
&\leq C(s) (\|\partial_{x_i}(U - U_0)\|_{s-1} + \|\partial_{x_i}(U_0 - \overline{U_0})\|_{s-1}) \\
&\leq C(s) (\|U - U_0\|_s + \|U_0 - \overline{U_0}\|_s) \\
&\leq C(s, R, U_0).
\end{aligned}$$

4. Avec $s > N/2 + 1 > 1$ (donc $s \geq 2$)

$$\begin{aligned}
\|D^s(A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))\|_{L^2} &= \|D^s(A_i(U))\|_{L^2} \\
&\leq C_s \|D(A_i)\|_{s-1, \overline{G_2}} \|U\|_\infty^{s-1} \|D^s(U)\|_{L^2} \\
&\leq C(s, G_2) (R + C(U_0)), \\
\|D^{s-1}(A_i(U) - A_i(\overline{U_0}))\|_{L^2} &= \|D^{s-1}(A_i(U))\|_{L^2} \\
&\leq C_s \|D(A_i)\|_{s-2, \overline{G_2}} \|U\|_\infty^{s-2} \|D^{s-1}(U)\|_{L^2} \\
&\leq C(s, G_2, R, U_0).
\end{aligned}$$

Annexe 1.C Régularisation de la donnée initiale

On montre maintenant le théorème 4 avec les hypothèses annoncées sur la donnée initiale, *i.e.*

1. La donnée initiale reste celle d'un gaz au repos à l'infini, ainsi $\rho_0 = 1 + \tilde{\rho}_0$ avec $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\rho_0 - 1) = 0$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |u_0| = 0$. Ainsi, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} U_0 = \overline{U_0} = {}^t(1, 0)$
2. $\tilde{\rho}_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$ (*i.e.* $U_0 - \overline{U_0} \in H^s(\mathbb{R}^N)$) et $f_0 \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \cap H^s(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$.

L'hypothèse (U_0, f_0) à valeur dans un compact de $G \times \mathbb{R}_+$ est toujours conservée.

La preuve commence alors par une étape de régularisation de la donnée initiale via des convolutions par des approximations de l'unité: on se donne une fonction $j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, positive à support dans la boule unité et d'intégrale unitaire. On pose alors

$$j_{\epsilon_k}(x) = (\epsilon_k)^N j\left(\frac{x}{\epsilon_k}\right).$$

Donc j_{ϵ_k} est aussi $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, positive à support compact et d'intégrale unitaire. Les ϵ_k vérifient $\epsilon_k = 2^{-k} \epsilon_0$, avec ϵ_0 suffisamment petit (on le choisira dans la suite). On définit alors la suite U_0^k par

$$U_0^k = j_{\epsilon_k} * U_0.$$

Par propriété de la suite régularisante, on a

$$U_0^k - \overline{U_0} = j_{\epsilon_k} * (U_0 - \overline{U_0}),$$

et donc $U_0^k - \overline{U}_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^s(\mathbb{R}^N)$, et également

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|U_0^k - U_0\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

De plus, comme $\|U_0^{k+1} - U_0^k\|_{L^2} \leq C \epsilon_k \|U_0 - \overline{U}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}$ (cf. Serre [14], on utilise le fait que $j_{\epsilon_{k+1}} - j_{\epsilon_k}$ est une divergence et que $U_0 - \overline{U}_0 \in H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ car $s > N/2 + 1 > 1$). Comme $\sum_k \epsilon_k = (\sum_k 2^{-k})\epsilon_0 < +\infty$,

$$\sum_k \|U_0^{k+1} - U_0^k\|_{L^2} < +\infty.$$

Il existe enfin des nombres R et ϵ_0 (dépendant uniquement de U_0 , j , s et G_2) tels que

$$\|U_0 - U_0^k\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{c(G_2)}{4} R,$$

et également

$$\|U - U_0^0\|_s \leq R \text{ implique } U(x) \in \overline{G_2}.$$

De même, on régularise la fonction f_0 via une convolution (par rapport à x et à v). On notera f_0^k la suite régularisée, qui vérifie $f_0^k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ (la convolution garde le support compact). De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_0 - f_0^k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} &= 0, \\ \sum_k \|f_0^{k+1} - f_0^k\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} &< +\infty. \end{aligned}$$

Les propriétés de convolution nous assurent aussi que

$$\|f_0^k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)} \leq \|f_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)},$$

et que, si le support de f_0^k est inclus dans $B(0, X_M^k(0)) \times B(0, V_M^k(0))$, on peut, en choisissant bien le paramètre de la convolution, obtenir les inégalités

$$\begin{aligned} X_M^k(0) &\leq \frac{3}{2} X_M(0), \\ V_M^k(0) &\leq \frac{3}{2} V_M(0). \end{aligned}$$

Enfin, comme $f_0 \in H^s(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$, par convolution, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|f_0^k\|_s \leq \|f_0\|_s.$$

A présent que l'étape de régularisation de la donnée initiale est faite, montrons quelles sont les modifications de la démonstration.

Lors de l'étape de définition des suites U^k et f^k , la seule différence est la donnée initiale des problèmes de Cauchy associés aux systèmes linéaires, on aura donc

$$S(U^k) \partial_t U^{k+1} + \sum_i (SA_i)(U^k) \partial_{x_i} U^{k+1} = S(U^k) b(U^k, f^k), \quad (1.65)$$

$$U^{k+1}(x, 0) = U_0^{k+1}(x), \quad (1.66)$$

$$\partial_t f^{k+1} + \nabla_x \cdot (v f^{k+1}) + \nabla_v \cdot (f^{k+1}(\rho^k u^k - \rho^k v)) = 0, \quad (1.67)$$

$$f^{k+1}(0, x, v) = f_0^{k+1}(x, v). \quad (1.68)$$

Les fonctions U^k et f^k sont donc des fonctions \mathcal{C}^∞ sur $[0, T_k]$, le temps $T_k \geq 0$ étant choisi afin d'avoir $\|U^k - U_0^0\|_{s, T_k} \leq R$. De plus, f^k sera à support compact, et U^k vérifie : $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |U^k - U_0^0| = 0$ (ceci afin de pouvoir annuler, dans les estimations d'énergie, les intégrales du type $\int \partial_{x_i} {}^t W S A_i W$).

Le lemme 1.6 est alors remplacé par le lemme suivant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|U^k - U_0^0\|_{s, T_*} \leq R, \quad (1.69)$$

$$\|\partial_t U^k\|_{s-1, T_*} \leq L, \quad (1.70)$$

$$\|f^k\|_{s, T_*} \leq 2 \|f_0\|_s, \quad (1.71)$$

$$\|f^k\|_{\infty, T_*} \leq 2 \|f_0\|_\infty, \quad (1.72)$$

$$\forall t \in [0, T_*] \quad X_M^k(t) \leq 2 X_M(0), \quad (1.73)$$

$$\forall t \in [0, T_*] \quad V_M^k(t) \leq 2 V_M(0), \quad (1.74)$$

(la différence réside dans le fait qu'on considère $U^k - U_0^0$ et non $U^k - U_0$). Les calculs d'estimations se déroulent ici de la même manière qu'avec une donnée initiale plus régulière. La différence majeure et essentielle est l'estimation obtenue par le lemme de Gronwall sur la norme H^s de $U^{k+1} - U_0$, qui ici va correspondre à $U^{k+1} - U_0^0$

$$\sup_{t \in [0, T]} \|V\|_s(t) \leq c(G_2)^{-1} (\|V(0)\|_s + T C(s, R, L, R', G_2, U_0^0, f_0, \epsilon_0)) \exp^{c(G_2)^{-1} C(s, R, L, G_2, U_0^0) T}.$$

Or, on a choisi R tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|U_0^k - U_0\|_s \leq c(G_2) \frac{R}{4}$, donc

$$\|V(0)\|_s = \|U_0^{k+1} - U_0^0\|_s \leq \|U_0^{k+1} - U_0\|_s + \|U_0 - U_0^0\|_s \leq c(G_2) \frac{R}{2}.$$

On aboutit à

$$\sup_{t \in [0, T]} \|U^{k+1} - U_0^0\|_s(t) \leq \frac{R}{2} + T c(G_2)^{-1} C(s, R, L, R', G_2, U_0^0, f_0, \epsilon_0) \exp^{c(G_2)^{-1} C(s, R, L, G_2, U_0^0) T}.$$

Comme la borne est une fonction continue de T et valant $\frac{R}{2}$ en 0, cela nous assure l'existence d'un T_* tel que

$$\sup_{t \in [0, T_*]} \|U^{k+1} - U_0^0\|_s(t) \leq R. \quad (1.75)$$

Les majorations concernant f^k sont menées de la même manière que dans le calcul avec une donnée initiale régulière, les majorations initiales sur f_0^k ayant été choisies de manière *ad hoc*.

Une autre différence majeure intervient lorsque l'on cherche à passer à la limite. Les convergences sont obtenues via ce lemme

Lemme 1.11 *Il existe un temps $0 < T_{**} < T_*$, des constantes positives α, α' et γ telles que $\alpha + \alpha' < 1$ et des suites positives β_k et β'_k telles que $\sum_k \beta_k < +\infty$ et $\sum_k \beta'_k < +\infty$, tels que*

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \\ \|U^{k+1} - U^k\|_{0, T_{**}} &\leq \alpha \|U^k - U^{k-1}\|_{0, T_{**}} + \alpha' \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_{**}} + \beta_k, \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1, \\ \|f^k - f^{k-1}\|_{0, T_{**}} &\leq \gamma \|U^{k-1} - U^{k-2}\|_{0, T_{**}} + \beta'_k, \end{aligned} \quad (1.77)$$

Les β_k et β'_k proviennent en fait des données initiales : $\beta_k = C \|U_0^{k+1} - U_0^k\|_0$ et $\beta'_k = \|f_0^k - f_0^{k-1}\|_0$. On a vu précédemment que le choix des suites U_0^k et f_0^k était effectué de telle manière que ces deux séries soient convergentes.

Bibliographie

- [1] A. A. AMSDEN, P. J. O'ROURKE AND T. D. BUTLER. Kiva-II, a computer program for chemical reactive flows with sprays. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1989.
- [2] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.
- [3] J. F. CLOUET AND K. DOMELEVO. Solutions of a kinetic stochastic equation modeling a spray in a turbulent gas flow. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 7 (1997), 239–263.
- [4] K. DOMELEVO. Long time behaviour for a kinetic modelling of two-phase flows with thin sprays and point particles. Preprint de TMR-project "Asymptotics Methods in Kinetic Theory", 2001.
- [5] K. DOMELEVO AND J.-M. ROQUEJOFFRE. Existence and stability of travelling waves solutions in a kinetic model of two phase flows. *Comm. Part. Diff. Eq.* 24, 1&2 (1999), 61–108.
- [6] K. DOMELEVO ET M.-H. VIGNAL. Limites visqueuses pour des systèmes de type Fokker-Planck-Burgers unidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 332, 9 (2001), 863–868.
- [7] K. O. FRIEDRICHS. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* (1954).
- [8] T. GOUDON. Asymptotic problems for a kinetic model of two-phase flow. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 131, 6 (2001), 1371–1384.
- [9] K. HAMDACHE. Global existence and large time behaviour of solutions for the Vlasov-Stokes equations. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 15, 1 (1998), 51–74.
- [10] A. MAJDA. *Compressible fluid flows and systems of conservation laws in several space variables*. Springer-Verlag, 1984.
- [11] P. J. O'ROURKE. *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*. PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [12] K. PFAFFELMOSER. Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data. *J. Differential Equations* 95, 2 (1992), 281–303.
- [13] W. E. RANZ AND W. R. MARSHALL. Evaporization from drops, part I-II. *Chem. Eng. Prog.* 48, 3 (1952), 141–180.
- [14] D. SERRE. *Systèmes de lois de conservation. I. Fondations*. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc.
- [15] F. A. WILLIAMS. *Combustion theory*. Benjamin Cummings, 1985.

Chapitre 2

Établissement des noyaux de collisions, coalescences et fragmentations (modèle T.A.B. pour faible nombre de Weber)

Sommaire

2.1	Introduction	70
2.2	Pre-existent models	71
2.2.1	The context	71
2.2.2	Collision modelling	72
2.2.3	Breakup: the T.A.B. model	73
2.3	Description of our model and equations	74
2.3.1	The model	74
2.3.2	Equations	77
2.3.3	Conservations	80
2.4	Numerical simulations	82
2.4.1	Description of the particle method	82
2.4.2	Numerical results	84
2.4.2.a	Collision: comparison with an explicit solution	84
2.4.2.b	Numerical simulation of collision, coalescence and breakup with physical data	85
	Bibliography	87

Modelling of oscillations, breakup and collisions for droplets: the establishment of kernels for the T.A.B. model.

Cet article a été accepté pour publication dans la revue *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*.

Abstract

In this work, we consider a spray consisting of droplets surrounded by a gas. The droplets are described by a kinetic equation and the gas verifies an equation of fluid dynamics such as Navier-Stokes. We write down the kernels corresponding to complex phenomena such as oscillations, breakup and collisions/coalescences. We use for that the T.A.B. model of oscillations introduced in particular in the KIVA code of combustion of Los Alamos, and the collision model introduced by Villedieu. We briefly explain the numerical method for solving such equations, and present results.

2.1 Introduction

Sprays are complex flows where dispersed particles coexist with a fluid phase. One possibility (sometimes called Eulerian-Eulerian) for modelling such flows is to describe each phase with macroscopic quantities depending on the time t and the position \mathbf{x} , like density, velocity, energy, and also to consider the volume fraction of one phase. These quantities evolve according to a coupled system of fluid equations (like Euler or Navier-Stokes equations).

Another possibility (sometimes called Eulerian-Lagrangian) is to describe the dispersed phase through a density function like in the kinetic theory of gases (cf. [15]). This function f depends on t , \mathbf{x} , \mathbf{v} (and other parameters) and gives the density of particles which at time t and point \mathbf{x} move with velocity \mathbf{v} . The evolution of f is given by a kinetic equation. It is a variant of the Boltzmann equation that takes into account the presence of the gas (mathematical study on generalization of the Boltzmann equation could be found for example in [12]). The surrounding gas will be described thanks to macroscopic quantities and fluid equations such as Navier-Stokes. The two phases are coupled by terms modelling the transfer of momentum and energy.

In this work, we study a complex flow in which the collisions, coalescences and breakups of the droplets are significant, like for example, in combustion engines ([9], [11]). For the collision model, we use the same principle as Hylkema and Villedieu's ([9]) or O'Rourke's ([11]).

Concerning the breakup phenomena, different models (more or less empirical) are used. We shall present here the T.A.B. model of Amsden and O'Rourke ([1]). This model was used in the KIVA-II code of Los Alamos ([2]) Our goal here is to write a precise kernel, using the T.A.B. model.

In the first part of this work, we present the models of Hylkema and Villedieu and the T.A.B. model. We explain which choices of modelling we made in order to get rigorously defined kernels, and prove formally the conservations of mass, momentum and energy. In the last part, we present the numerical method that is usually used to simulate such complex flows : a classical finite volume method for the gas and a particle method for the dispersed phase. Then we consider only the spatially homogeneous case. We use an explicit solution in a particular case to validate our simulations, and present results with real physical data.

2.2 Pre-existent models

2.2.1 The context

We consider a complex flow in a three-dimensional space where a dispersed phase (droplets) coexists with a fluid phase (gas). The gas is described by macroscopic quantities : its density $\rho(t, \mathbf{x})$, its velocity $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ and its internal energy $I(t, \mathbf{x})$. These quantities are solutions of compressible fluid equations (that come from conservation of mass, momentum and energy) with source terms

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{F}^s, \\ \partial_t (\rho I) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (\rho \mathbf{u} I) + p \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} = \dot{Q}^s, \end{cases} \quad (2.1)$$

where \mathbf{F}^s and \dot{Q}^s model the interaction with the dispersed phase (and possibly contain viscosity terms), and $p = p(\rho, I)$ is the pressure.

We assume here that we have a thin spray (cf. [11]) i.e the dispersed phase has a negligible volume but a significant mass in comparison of that of the gas. So, the coupling between the gas and the dispersed phase consists in the source terms \mathbf{F}^s and \dot{Q}^s only, no volumic fraction appears in this model.

We describe the droplets by the so-called particle distribution function (pdf) f . This function depends on t , \mathbf{x} , \mathbf{v} , (and if necessary on some other variables) and is solution of a kinetic equation (cf. [6])

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F} f) = 0, \quad (2.2)$$

where \mathbf{F} is the drag force of the gas on the droplets.

In some cases, for example diesel combustion, [11, 9] physical phenomena such as collision, coalescence or breakup of droplets, are not negligible. Taking into account such phenomena, we have to add a term (a kernel) in the right-hand-side of Eq. (2.2)

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F} f) = Q(f). \quad (2.3)$$

Our goal here is to give a rigorous form for this kernel.

2.2.2 Collision modelling

We will briefly present here the model written by Villedieu and Hylkema in [9, 10, 8] to describe collision phenomena in a spray. In this model, the pdf depends on t , \mathbf{x} , \mathbf{v} and r , where r is the radius of the droplets.

In [9], some assumptions (the two first are also those of the classical theory of rarefied gases) are made for the collision phenomena

- The time it takes for two drops to collide is small compared to the time between two collisions.
- Binary collision (collision between two droplets) are dominant (collisions between more than two droplets are neglected).
- Any binary collision gives place either to a rebound or to a coalescence. For that, we define the impact parameter Π (see Fig. (2.1)).

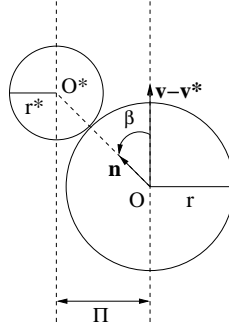


Figure 2.1: The impact parameter of a collision

- The critical impact parameter Π_{cr} is given by an empirical law depending on r , r^* and We , the Weber number (see [9]).
- If $\Pi > \Pi_{cr}$ the collision gives place to a rebound (with conservation of mass, momentum and kinetic energy).
- If $\Pi \leq \Pi_{cr}$ the collision gives place to a coalescence (with conservation of mass and momentum).

These assumptions allow to give formulas connecting pre and post-collisional velocities and radius for droplets.

After a rebound, droplets keep their own radius, and velocities are modified in that way

$$\begin{cases} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \frac{2r^{*3}}{r^3+r^{*3}}((\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \\ \mathbf{v}^{*'} &= \mathbf{v}^* + \frac{2r^3}{r^3+r^{*3}}((\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \end{cases} \quad (2.4)$$

where \mathbf{n} is a unit vector so that $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \geq 0$. Mass, momentum and kinetic energy are conserved in these equations which are at variance with those of KIVA.

After a coalescence, mass and momentum are conserved, so that

$$\begin{cases} \mathbf{v}^\# &= \frac{r^3}{r^3+r^{*3}}\mathbf{v} + \frac{r^{*3}}{r^3+r^{*3}}\mathbf{v}^* \\ \mathbf{r}^\# &= (r^3 + r^{*3})^{1/3}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Kinetic energy is not conserved in these equations (it decreases).

The collision kernel $Q = Q_{coll}(f, f)$ is given in [9]

$$\begin{aligned} Q_{coll}(f, f) = & - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\beta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f f^* B(\beta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) d\varphi d\beta d\mathbf{v}^* dr^* \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\beta=\beta_{cr}}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f' f'^* B(\beta, |\mathbf{v}' - \mathbf{v}'^*|, r, r^*) d\varphi d\beta d\mathbf{v}'^* dr^* \\ & + \frac{1}{2} \int_0^r \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\beta=0}^{\beta_{cr}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f^\diamond f^* \left(\frac{r}{r^\diamond}\right)^{11} B(\beta, |\mathbf{v}' - \mathbf{v}'^*|, r, r^*) d\varphi d\beta d\mathbf{v}'^* dr^*, \end{aligned}$$

with the notation

$$\begin{cases} \mathbf{v}^\diamond &= \frac{r^3}{r^3 - r^{*3}} \mathbf{v} - \frac{r^{*3}}{r^3 - r^{*3}} \mathbf{v}^*, \\ \mathbf{r}^\diamond &= (r^3 - r^{*3})^{1/3}, \end{cases}$$

and $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, r)$, $f^* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, r^*)$, $f' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}', r)$, $f'^* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'^*, r^*)$, $f^\diamond = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^\diamond, r^\diamond)$.

Here, the cross section is that of hard sphere

$$B(\beta, |\mathbf{v}' - \mathbf{v}'^*|, r, r^*) = |\mathbf{v}' - \mathbf{v}'^*| (r + r^*)^2 \cos(\beta) \sin(\beta),$$

and the critical angle β_{cr} is connected with the critical impact parameter by

$$\beta_{cr} = \arcsin\left(\frac{\Pi_{cr}}{r + r^*}\right).$$

2.2.3 Breakup: the T.A.B. model

In most cases, the breakup phenomenon is described by an empirical model. In their work, O'Rourke and Amsden propose a systematic way to decide if a droplet must break or not : the so-called T.A.B. model (Taylor Analogy Breakup). It is inspired by Taylor's work ([13]) described in [1] and used in the KIVA-II code of the Los Alamos Laboratory ([2]).

This model is adapted for cases in which droplets breakup because of the oscillations of their surface. After a critical deformation, they blow up, and give smaller droplets. To model these oscillations, Amsden and O'Rourke used the analogy made by Taylor between a droplet and a spring mass system (they modelled only the fundamental mode of these oscillations, that is the most significant in most cases).

Let us define the parameter y as the distortion from sphericity of a droplet, in the direction of the relative velocity between gas and droplet (see Fig. (2.2)).

We also define the oscillation parameter : \dot{y} (as the time rate of change of y). This two new parameters are in fact variables of the pdf f . In the case of a forced, damped harmonic oscillator, the displacement of the mass is solution of a linear differential equation of order 2. By analogy, y and \dot{y} are connected by

$$\ddot{y} = \frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho_d} \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2}{r^2} - \frac{8\sigma}{\rho_d r^3} y - \frac{10\mu_d}{\rho_d r^2} \dot{y}, \quad (2.6)$$

where ρ_d and μ_d are respectively the density and the viscosity of droplets and σ the surface tension coefficient.

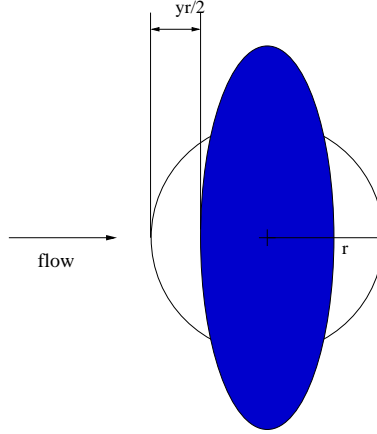


Figure 2.2: Distortion from sphericity

The first term $\frac{2}{3} \frac{\rho}{\rho_d} \frac{|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2}{r^2}$ is similar to an external force acting on the droplet which is supplied by the gas aerodynamic forces. The term in y corresponds to the restoring force due to surface tension. The last term is similar to a damping force supplied by liquid viscosity ([1]).

The assumption made in [1] is that a droplet breaks up if and only if $y > 1$.

With this model, O'Rourke and Amsden could determine the breakup time, $t_{bu} = \pi \sqrt{\frac{\rho_d r^3}{8\sigma}}$ (when We is closed to its critical value, see [1]). It is the average duration which separates the appearance of oscillation from the complete breakup of a droplet. This time is in good agreement with experimentally observed breakup times and is similar to that used by Villedieu and Hylkema ([14]).

They also show how the TAB model gives some prediction of the velocity and size of drops produced by the breakup. If the initial drop parameters are $\mathbf{v}, r, y, \dot{y}$, then the velocity of the product drops becomes $\mathbf{v} + \mathbf{V}_\perp$, where \mathbf{V}_\perp is the velocity normal to the path of the parent drop with magnitude $\frac{1}{2}r\dot{y}$. The mean radius of product drops is $\bar{r} = \frac{r}{7 + \frac{3\rho_d r^3 \dot{y}^2}{8\sigma}}$. They also decide to take 0 as values of y and \dot{y} for these product drops.

Thus, in the KIVA-II code ([2]) the pdf is function of $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}$ (T_d is the temperature of a droplet, and is proportional to its internal energy). The kinetic equation on f becomes

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F} f) + \partial_{T_d} (\dot{T}_d f) + \partial_y (\dot{y} f) + \partial_{\dot{y}} (\ddot{y} f) = Q_{coll} + Q_{bu} \quad (2.7)$$

(we don't consider here the phenomenon of evaporation, that would imply a term in ∇_r).

But in [2], no rigorous kernel is written (only outlines based on numerical instructions). We propose here to write a rigorous kernel for the breakup phenomenon.

2.3 Description of our model and equations

2.3.1 The model

We have for the quantities ρ, \mathbf{u}, I equations (2.1). For the dispersed phase, the pdf is function of $t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}$ (see part 1 for details on y and \dot{y} variables). It is solution of the kinetic

equation (2.7). It remains to write down the two kernels Q_{coll} and Q_{bu} . Our aim is to give a model where physical quantities like mass, momentum or energy are conserved.

Collision we use here a variant of the collision model of Villedieu (see part 1) which takes into account the new variables T_d, y, \dot{y} . We give here the result of a collision between two droplets $(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y})$ and $(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*)$.

If $\Pi \leq \Pi_{cr}$ (coalescence after collision) parameters for the product droplets are

$$\left\{ \begin{array}{l} r^\# = (r^3 + r^{*3})^{1/3}, \\ \mathbf{v}^\# = \frac{r^3 \mathbf{v} + r^{*3} \mathbf{v}^*}{r^3 + r^{*3}}, \\ T_d^\# = \frac{r^3 T_d + r^{*3} T_d^*}{r^3 + r^{*3}}, \\ y^{\#2} = \frac{r^2 y^2 + r^{*2} y^{*2}}{(r^3 + r^{*3})^{2/3}}, \\ \dot{y}^{\#2} = \frac{r^5 \dot{y}^2 + r^{*5} \dot{y}^{*2}}{(r^3 + r^{*3})^{5/3}} + \underbrace{\frac{r^3 r^{*3}}{(r^3 + r^{*3})^{8/3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2}_{\text{term resulting from kinetic energy}} + \underbrace{\frac{6\sigma (r^2 + r^{*2} - (r^3 + r^{*3})^{2/3})}{\rho_d (r^3 + r^{*3})^{5/3}}}_{\text{term resulting from surface tension}}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Because of the conservation of mass and momentum, we have a loss in kinetic and surface tension energy. As we conserve total energy, we put it in the oscillation energy (proportional to $r^5 \dot{y}^2$) (note that since the droplets and the gas are coupled, this energy will eventually be transformed in internal energy of the gas).

If $\Pi > \Pi_{cr}$ (rebound after collision) radius, temperatures and distortions are conserved for the droplets and the new velocities and oscillations are given by

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}' = \frac{r^3 \mathbf{v} + r^{*3} \mathbf{v}^*}{r^3 + r^{*3}} + \alpha \frac{r^{*3}}{r^3 + r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| \vec{\sigma}, \\ \mathbf{v}^{*'} = \frac{r^3 \mathbf{v} + r^{*3} \mathbf{v}^*}{r^3 + r^{*3}} - \alpha \frac{r^3}{r^3 + r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| \vec{\sigma}, \\ \dot{y}'^2 = \dot{y}^2 + (1 - \alpha^2) \frac{r^3 r^{*3}}{r^5 (r^3 + r^{*3})} \frac{r^3}{r^3 + r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2, \\ \dot{y}^{*'}^2 = \dot{y}^{*2} + (1 - \alpha^2) \frac{r^3 r^{*3}}{r^{*5} (r^3 + r^{*3})} \frac{r^{*3}}{r^3 + r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

where $\vec{\sigma}$ is a unit vector of \mathbb{R}^3 (we write here this vector with an arrow in order to avoid mistaking it for σ , which is the surface tension coefficient) and α is the restitution coefficient ($\alpha \in]0, 1[$). We consider here that the collision could be inelastic (it's not the case in Villedieu's model). If $\alpha \neq 1$, kinetic energy is not conserved during the rebound (for more detail on inelastic collisions, see for example [7]). Like previously in the coalescence case, we add this loss of energy in the oscillation energy.

The cross section is that of hard sphere

$$B(\theta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) = \pi |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| (r + r^*)^2 \frac{\sin \theta}{4\pi}.$$

We use here the so-called “ $\vec{\sigma}$ -representation”. This is at variance with Villedieu’s model where the so-called “ \mathbf{n} -representation” is used. In the “ $\vec{\sigma}$ -representation”, the post-collisional velocities are written in the center of mass reference frame.

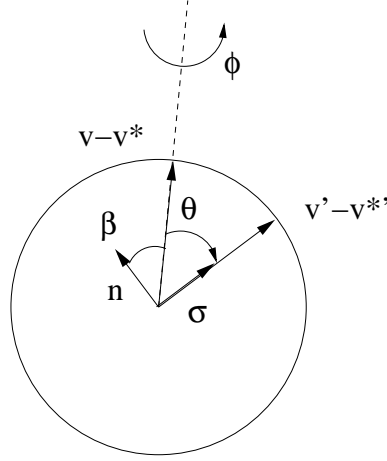


Figure 2.3: (θ, ϕ) angles of a collision in $\vec{\sigma}$ -representation

The critical angle θ_{cr} is linked to Π_{cr} by $\theta_{cr} = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{\Pi_{cr}(|\mathbf{v}-\mathbf{v}^*|, r, r^*)}{r+r^*}\right)$. If $\theta < \theta_{cr}$ then the collision gives place to a rebound and if $\theta \geq \theta_{cr}$, it gives place to a coalescence.

Breakup Like in the T.A.B. model we assume that y and \dot{y} are linked by equation (2.6). On the other hand, our breakup condition will be $|y| = 1$. (That is, y could be non-positive and the droplet could break up in such a configuration.)

After a breakup of the droplet $(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y})$, the parameters of the produced drop are named $(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*)$

- The temperature is unchanged ($T_d^* = T_d$).
- The velocity becomes $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \frac{1}{2}r\dot{y}\mathbf{n}$, where \mathbf{n} is a unit vector normal to the $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ direction (\mathbf{n} is parameterized by an angle $\gamma \in [0, 2\pi]$).
- Radius, distortion and oscillation are given with a probability $b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*)$. This probability has the following properties

$$\begin{aligned} b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*) &\geq 0, \\ b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*) &= 0 \text{ if } r^* > r, \end{aligned} \quad (2.10)$$

(This means that a breakup does not create droplets with a larger radius than the parent droplet).

$$\iint_{r^*, y^*, \dot{y}^*} b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*) r^{*3} dr^* dy^* d\dot{y}^* = r^3, \quad (2.11)$$

(Total mass is conserved in the breakup)

$$\begin{aligned}
& \iint_{r^*, y^*, \dot{y}^*} b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*) \left(\underbrace{4\pi r^{*2} \sigma + \frac{16}{3} \pi \sigma r^{*2} y^{*2} + \frac{2}{3} \pi \rho_d r^{*5} \dot{y}^{*2}}_{\text{surface tension + Distortion + oscillation energies after breakup}} \right) dr^* dy^* d\dot{y}^* \\
= & \underbrace{\frac{\pi}{2} \rho_d r^{*5} \dot{y}^2}_{\text{kinetic energy}} + \underbrace{\frac{28}{3} \pi r^2 \sigma}_{\text{surface tension}} \\
& + \text{oscillation energy before breakup} - \text{kinetic energy after breakup} \quad + \text{distortion energies before breakup}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

(Total energy is conserved during the breakup).

These three properties for b are not included in the KIVA-II code, where the post-breakup parameters are given with an explicit probability (for example, the radius follows a X-square distribution). A drawback of this approach is the non-zero probability of getting after the breakup droplets with radiuses higher than their initial radius.

For the breakup kernel, we were inspired by the outlines in the KIVA-II code. First, we have to know the number of droplets that will breakup : this is, in fact, the flux of f across the “surfaces” $y = 1$ and $y = -1$, that is

$$(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, r, T_d, 1, \dot{y}, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, r, T_d, -1, \dot{y}, t)) \times \dot{y}.$$

And by multiplying this flow by the distribution function, and integrating on the phase space, we obtain the breakup kernel.

We now write down all the equations of our model.

2.3.2 Equations

For the gas, we have

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla_{\mathbf{x}} p + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \sigma + \mathbf{F}^s, \\ \partial_t (\rho I) + \text{div}_{\mathbf{x}} (\rho \mathbf{u} I) = -p \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \sigma : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} - \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{J} + \dot{Q}^s, \end{cases} \tag{2.13}$$

where

- p is the fluid pressure,
- $\sigma = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{Id}$ is the viscous stress tensor,
- $\mathbf{J} = -\mathbf{K} \nabla T$ is the heat flux vector,

- \mathbf{F}^s et \dot{Q}^s are terms due to interaction with the dispersed phase

$$\mathbf{F}^s = - \int f \rho_d \frac{4}{3} \Pi r^3 \mathbf{F} \quad \text{with } \mathbf{F} = \frac{3\rho|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{8\rho_d r} (\mathbf{u} - \mathbf{v}) C_D,$$

$$\dot{Q}^s = - \int f \left[\rho_d \frac{4}{3} \Pi r^3 (c_l \dot{T}_d + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})) + \dot{y} \left(\frac{8\pi}{9} \rho r^3 |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 - \frac{40\pi}{3} \mu_d r^3 \dot{y} \right) \right],$$

where C_D is the drag force coefficient, c_l is the gas specific heat and μ_d the viscosity of the droplet.

For the dispersed phase, we recall the kinetic equation

$$\partial_t f + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(f\mathbf{v}) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{F}) + \frac{\partial(f\dot{T}_d)}{\partial T_d} + \frac{\partial(f\dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial(f\dot{y})}{\partial \dot{y}} = Q_{coll}(f, f) + Q_{bu}(f), \quad (2.14)$$

where the kernels are defined by

$$Q_{coll}(f, f) = - \int \int_{\substack{\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, \\ y^*, \dot{y}^*}} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f f^* B(\theta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) d\phi d\theta d\mathbf{v}^* dr^* dT_d^* dy^* d\dot{y}^*$$

$$+ \int \int_{\substack{\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, \\ y^*, \dot{y}^*}} \int_{\theta=0}^{\theta_{cr}} \int_{\phi=0}^{2\pi} f' f'^* B(\theta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) \frac{\dot{y}\dot{y}^*}{\alpha^4 \dot{y}' \dot{y}'^*} d\phi d\theta d\mathbf{v}^* dr^* dT_d^* dy^* d\dot{y}^*$$

$$+ \frac{1}{2} \int \int_{\substack{(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, \\ y^*, \dot{y}^*) \in \mathbb{D}^*}} \int_{\theta=\theta_{cr}}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f^* f^\diamond B(\theta, |\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^\diamond|, r, r^*) \left(\frac{r}{r^\diamond}\right)^{21} \frac{y\dot{y}}{y^\diamond \dot{y}^\diamond} d\phi d\theta d\mathbf{v}^* dr^* dT_d^* dy^* d\dot{y}^*, \quad (2.15)$$

with the notations

- $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y})$,
- $f^* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*)$,
- $f' = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}', r, T_d, y, \dot{y}')$,
- $f'^* = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}'^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}'^*)$,
- $f^\diamond = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^\diamond, r^\diamond, T_d^\diamond, y^\diamond, \dot{y}^\diamond)$.

The domain \mathbb{D}^* is the set of the variables $(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [-1, 1] \times \mathbb{R}$ which verify the following conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} r^* \leq r, \\ r^{*3} T_d^* \leq r^3 T_d, \\ r^* |y^*| \leq r |y|, \\ 0 \leq r^5 \dot{y}^2 - \frac{r^3 r^{*3}}{r^3 - r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2 - \frac{6\sigma}{\rho_d} (r^{*2} + (r^3 - r^{*3})^{2/3} - r^2), \\ |y^*| \leq \sqrt{\frac{r^5}{r^{*5}} \dot{y}^2 - \frac{r^3 r^{*3}}{r^{*5} (r^3 - r^{*3})} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2 - \frac{6\sigma}{r^{*5} \rho_d} (r^{*2} + (r^3 - r^{*3})^{2/3} - r^2)}. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

The parameters $(\mathbf{v}', \dot{y}', \mathbf{v}^{*'}, \dot{y}^{*'})$ are respectively the velocities and oscillations of two droplets before a collision/rebound which gives two droplets $(\mathbf{v}, \dot{y}, \mathbf{v}^*, \dot{y}^*)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}' = \frac{r^3 \mathbf{v} + r^{*3} \mathbf{v}^*}{r^3 + r^{*3}} + \frac{r^{*3}}{\alpha (r^3 + r^{*3})} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| \vec{\sigma}, \\ \mathbf{v}^{*'} = \frac{r^3 \mathbf{v} + r^{*3} \mathbf{v}^*}{r^3 + r^{*3}} - \frac{r^3}{\alpha (r^3 + r^{*3})} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| \vec{\sigma}, \\ \dot{y}'^2 = \dot{y}^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{r^3 r^{*3}}{r^5 (r^3 + r^{*3})} \frac{r^3}{r^3 + r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2, \\ \dot{y}^{*'}^2 = \dot{y}^{*2} + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{r^3 r^{*3}}{r^{*5} (r^3 + r^{*3})} \frac{r^{*3}}{r^3 + r^{*3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

(the unit vector $\vec{\sigma} \in \mathbb{S}^2$ is parameterized by angles (θ, ϕ)).

Then, $(\mathbf{v}^\diamond, r^\diamond, T_d^\diamond, y^\diamond, \dot{y}^\diamond)$ are parameters of a droplet which coalesces with another droplet $(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*)$ and gives the droplet $(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y})$.

$$\left\{ \begin{array}{l} r^\diamond = (r^3 - r^{*3})^{1/3}, \\ \mathbf{v}^\diamond = \frac{r^3 \mathbf{v} - r^{*3} \mathbf{v}^*}{r^3 - r^{*3}}, \\ T_d^\diamond = \frac{r^3 T_d - r^{*3} T_d^*}{r^3 - r^{*3}}, \\ y^{\diamond 2} = \frac{r^2 y^2 - r^{*2} y^{*2}}{(r^3 - r^{*3})^{2/3}}, \\ \dot{y}^{\diamond 2} = \frac{r^5 \dot{y}^2 - r^{*5} \dot{y}^{*2}}{(r^3 - r^{*3})^{5/3}} - \frac{r^3 r^{*3}}{(r^3 - r^{*3})^{8/3}} |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|^2 - \frac{6\sigma}{\rho_d} \frac{(r^{*2} + (r^3 - r^{*3})^{2/3} - r^2)}{(r^3 - r^{*3})^{5/3}}. \end{array} \right.$$

The cross section, in $\vec{\sigma}$ -representation is

$$B(\theta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) = \pi (r + r^*)^2 |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| \frac{\sin \theta}{4\pi},$$

and θ_{cr} is the critical angle

$$\theta_{cr}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) = \pi - 2 \arcsin \left(\frac{\Pi_{cr}(|\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*)}{r + r^*} \right),$$

where Π_{cr} is given by an empirical formula (cf. Villedieu, KIVA-II).

Finally, the breakup kernel is

$$Q_{bu}(f) = \int_{r^*} \int_{\dot{y}^*} \int_{\gamma=0}^{2\pi} b(r, r^*, \dot{y}^*, y, \dot{y}) \dot{y}^* (f(\mathbf{v} - \omega^* \mathbf{n}, r^*, T_d, 1, \dot{y}^*) - f(\mathbf{v} - \omega^* \mathbf{n}, r^*, T_d, -1, \dot{y}^*)) \frac{d\gamma}{2} dr^* d\dot{y}^*, \quad (2.18)$$

where

- $\omega^* = \frac{r^* \dot{y}^*}{2}$,
- \mathbf{n} is a unit vector parameterized by γ in the normal plan of $\mathbf{u} - \mathbf{v}$,
- b satisfies (2.10)-(2.11)-(2.12) conditions.

2.3.3 Conservations

In order to prove the conservation of mass, momentum and energy, we first give the weak formulation for collision and breakup kernels.

Notation If Q is a kernel and f, Φ are two functions, we define

$$\langle Q(f), \Phi \rangle = \iint_{\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}} Q(f)(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}) \Phi(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}) d\mathbf{v} dr dT_d dy d\dot{y}.$$

Proposition 2.1 *If Φ is a continuous function with compact support, we have the following weak formulation for the collision kernel*

$$\begin{aligned} \langle Q_{coll}(f), \Phi \rangle = & \iint_{\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}} \iint_{\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} f f^* B(\theta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) \left((\Phi' + \Phi^*) \chi_{\theta_{cr}} \right. \\ & \left. + \Phi^\# (1 - \chi_{\theta_{cr}}) - \Phi - \Phi^* \right) d\theta d\phi d\mathbf{v}^* dr^* dT_d^* dy^* d\dot{y}^* d\mathbf{v} dr dT_d dy d\dot{y} \end{aligned} \quad (2.19)$$

and for the breakup kernel

$$\begin{aligned} \langle Q_{bu}(f), \Phi \rangle = & \iint_{\mathbf{v}, r, T_d, \dot{y}} \dot{y} \left(f(\mathbf{v}, r, T_d, 1, \dot{y}) - f(\mathbf{v}, r, T_d, -1, \dot{y}) \right) \int_{\gamma, r^*, y^*, \dot{y}^*} b(r^*, r, \dot{y}, y^*, \dot{y}^*) \\ & \Phi(\mathbf{v} + \omega \mathbf{n}, r^*, T_d, y^*, \dot{y}^*) \frac{d\gamma}{2\pi} dr^* dy^* d\dot{y}^* d\mathbf{v} dr dT_d d\dot{y} \end{aligned} \quad (2.20)$$

where

- $\Phi' = \Phi(\mathbf{v}', r, T_d, y, \dot{y}')$,
- $\Phi^* = \Phi(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*)$,
- $\Phi^{*'} = \Phi(\mathbf{v}^{*'}, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^{*'})$
- $\Phi^\# = \Phi(\mathbf{v}^\#, r^\#, T_d^\#, y^\#, \dot{y}^\#)$.

Then, our model satisfies

Proposition 2.2 *The following conservations hold*

$$(mass) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbf{x}} \rho d\mathbf{x} + \int \rho_d \frac{4}{3} \pi r^3 f d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj \right] = 0,$$

$$(momentum) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbf{x}} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} + \int \rho_d \frac{4}{3} \pi r^3 \mathbf{v} f d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj \right] = 0,$$

$$(total energy) \quad \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbf{x}} \rho \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + I \right) d\mathbf{x} + \int \left(\rho_d \frac{4}{3} \pi r^3 \left(\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + c_l T_d \right) + 4\pi r^2 \sigma \left(1 + \frac{4}{3} y^2 \right) + \frac{2\pi}{3} \rho_d r^5 \dot{y}^2 \right) f d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj \right] = 0.$$

Proof 2.1 *We will give here the main ideas of the proofs of propositions 2.1 and 2.2. We refer to a complete proof in [3].*

We start with the weak formulation of the collision kernel. First we write the collision kernel using the indicator functions $\chi_{\theta_{cr}}$ and $\chi_{\mathbb{D}^}$, and the symmetrical form in Φ (because $B(\theta, |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*|, r, r^*) = B(\theta, |\mathbf{v}^* - \mathbf{v}|, r^*, r)$). So, we have three integrals (corresponding to the loss, the rebound and the coalescence term). In the rebound and in the coalescence integrals, we use transformations of variables between pre-collisional parameters and post-collisional ones. For example : $(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*, \sigma, \dot{y}, \dot{y}^*) \mapsto (\mathbf{v}', \mathbf{v}^{*'}, \mathbf{k}, \dot{y}', \dot{y}^{*'})$ in the rebound term. The absolute value of the Jacobian of this transformation is $\frac{\dot{y} \dot{y}'}{\alpha^3 \dot{y}' \dot{y}^{*'}}$. It remains to use the linearity of B (the cross section) with respect to its second variable, and a change of notation to obtain the second part of $\langle Q_{coll}(f), \Phi \rangle$. We do the same with the coalescence term $(r, \mathbf{v}, T_d, y, \dot{y}) \mapsto (r^\diamond, \mathbf{v}^\diamond, T_d^\diamond, y^\diamond, \dot{y}^\diamond)$. This transformation is bijective with the Jacobian $(\frac{r}{r^\diamond})^{21} \frac{\dot{y} \dot{y}'}{y^\diamond \dot{y}^\diamond}$. A change in notations gives us the weak formulation for this part. This proves the first equality of proposition 2.1.*

For the breakup kernel, we use the transformation of variables $(\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \omega \mathbf{n})$. Another change of notations allows us to conclude the proof of proposition 2.1.

To prove the conservation laws, the method is the same for the three laws : first, we have to make the balance for the gas. After, using the weak formulation, we make the balance for the dispersed phase, and we conclude. (Notice that the conservations at the macroscopic level are obtained because we impose these conservations at the droplets' level). For example, we give the proof of the momentum conservation

For the gas, by integration of the second equation of (2.13), we obtain

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{x}} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = - \int \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 f \mathbf{F} d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj. \quad (2.21)$$

For the droplets, we multiply Eqn. (2.7) by $\rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v}$ and we differentiate this expression with respect to t . After some integrations by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v} f &= \int \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 f \mathbf{F} d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj \\ &\quad - \int \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v} \dot{y} (f(y=1) - f(y=-1)) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy \\ &\quad + \int_{\mathbf{x}} \langle Q_{coll}(f) + Q_{bu}(f), \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v} \rangle d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Using the weak formulation of the kernels with $\Phi = \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v}$, we obtain first that

$$\langle Q_{coll}(f), \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v} \rangle = 0.$$

For the breakup kernel, we get by the same method (taking into account the identity $\int_{\gamma=0}^{2\pi} \mathbf{n} \frac{d\gamma}{2\pi} = 0$)

$$\langle Q_{bu}(f), \Phi \rangle = \int \dot{y} [f(y=1) - f(y=-1)] \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 \mathbf{v} d\mathbf{v} dr dT_d dy.$$

Finally, for the droplet, the change of momentum is given by

$$\frac{d}{dt} \int \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 f d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj = \int \rho_d \frac{4\pi}{3} r^3 f \mathbf{F} d\mathbf{x} d\mathbf{v} dr dT_d dy dj. \quad (2.22)$$

With Eqn. (2.21) and Eqn. (2.22), we obtain the total conservation of the momentum.

2.4 Numerical simulations

2.4.1 Description of the particle method

We shall now describe the numerical method for solving the system (2.13)-(2.14), with the two kernels (2.15)-(2.18).

The scheme used for the continuous phase is a classical finite volume method. We concentrate on the dispersed phase.

Because of the high dimension of the phase space $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y})$, we use a particle method, where the distribution function is approximated at each time by a discrete measure (“the numerical particles”)

$$f \simeq \sum_{i=1}^N n_i(t^n) \delta_{\mathbf{x}_i(t^n), \mathbf{v}_i(t^n), r_i(t^n), T_{di}(t^n), y_i(t^n), \dot{y}_i(t^n)}.$$

Here, N is the total number of numerical particles, and each numerical particle i is in the phase space at $(\mathbf{x}_i(t^n), \mathbf{v}_i(t^n), r_i(t^n), T_{di}(t^n), y_i(t^n), \dot{y}_i(t^n))$, at time t^n , and $n_i(t^n)$ is the number of real particles represented by the numerical particle i .

We solve the kinetic equation (2.14), by a splitting method : first, during a given time step, we solve the transport (Vlasov) part

$$\partial_t f + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(f\mathbf{v}) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}}(f\mathbf{F}) + \frac{\partial(fT_d)}{\partial T_d} + \frac{\partial(f\dot{y})}{\partial y} + \frac{\partial(f\ddot{y})}{\partial \dot{y}} = 0.$$

We compute the trajectories of the numerical particles in the phase space by solving the system $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$, $\frac{dT_d}{dt} = T_d$, $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y}$.

Then, we solve the collision step

$$\partial_t f = Q_{coll}(f, f),$$

and the breakup step

$$\partial_t f = Q_{bu}(f).$$

For these two last steps, we consider, following Bird (cf. [4]) that in each cell of the mesh (used for solving the equation of the gas), the distribution function is independent of the position \mathbf{x} . In the cell C , the solution will be approximate by

$$f \simeq \chi_C \sum_{i=1}^{N_C} \frac{n_i}{Vol(C)} \delta_{\mathbf{v}_i, r_i, T_{di}, y_i, \dot{y}_i},$$

where χ_C is the indicator function of the cell, and $Vol(C)$ is its volume.

So, we can solve the collision and the breakup step in each cell independently. This is this part that we implement.

We propose here an approach in which each numerical particle has the same weight, and so we approximate the solution by

$$f \simeq \omega \chi_C \sum_{i=1}^N \delta_{\mathbf{v}_i, r_i, T_{di}, y_i, \dot{y}_i},$$

where ω is the representativity of each numerical particle.

The collision phase is solved by the ‘‘spurious collision’’ method : when we write the collision kernel with loss and gain terms

$$\partial_t f = -Q^- + Q_r^+ + Q_c^+,$$

the loss term can be written as

$$Q^-(f)(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}) = f(\mathbf{v}, r, T_d, y, \dot{y}) \int f(\mathbf{v}^*, r^*, T_d^*, y^*, \dot{y}^*) \mathcal{B} d\mathbf{v}^* dr^* dT_d^* dy^* d\dot{y}^*,$$

where $\mathcal{B} = \pi |\mathbf{v} - \mathbf{v}^*| (r^2 + r^{*2})$ is the cross section. If we discretize the kinetic equation (2.14) with the (explicit) Euler scheme, we obtain

$$\frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} = -f^n \int f^{n*} \mathcal{B} + Q_r^+ + Q_c^+.$$

In fact, the number of numerical particles which disappear during the time step Δt because of a collision is $\Delta t N \int f^* \mathcal{B}$. Computing this term (it amounts to say that we must find the collision partners for each numerical particle) will imply a big numerical cost. The spurious collision method consists in using an upper bound for \mathcal{B} (denoted by \mathcal{B}_{maj}) for all couples of particles. So, the number of particles that will disappear during the time step Δt because of a (spurious) collision is $N \Delta t \mathcal{B}_{maj} \int f^* = \omega \Delta t N^2 \mathcal{B}_{maj}$. Of course, this number must be small

compared to the total number of numerical particles. So, we have the following condition for the time step

$$\Delta t \ll \frac{1}{\omega N \mathcal{B}_{maj}}.$$

We randomly pick $\omega N^2 \mathcal{B}_{maj} \Delta t / 2$ couples of particles. For each of these couples, the two particles denoted by i and j will collide with the probability $\frac{\mathcal{B}_{ij}}{\mathcal{B}_{maj}}$, where \mathcal{B}_{ij} is the cross section for these two particles. We decide if the collision will be a rebound or a coalescence by picking an angle θ with the law $\sin(\theta)/2$ and by comparing it to the critical angle θ_{cr} .

For the breakup step, we used the same method than that of KIVA-II code in [2]. During a time step Δt , we compute for each numerical particle the new parameters y and \dot{y} (solutions of Eqn. (2.6)) and if $|y| > 1$ during the time step, this particle breaks up.

2.4.2 Numerical results

We assume that the surrounding gas is in a stationary regime and we only consider the spatially homogeneous case: we solve the kinetic equation without the transport part, in one cell of the mesh (used for the discretization of the gas), where the gas has a fixed velocity.

2.4.2.a Collision : comparison with an explicit solution

In a special case, we know explicitly the solution of the equation

$$\partial_t f = Q_{coll}(f, f).$$

This happens when we only consider the collision phenomena (without coalescence) and the cross section does not depend on velocities and radii (cross section equal to $\sin(\theta)/4\pi$). If the initial datum has the form

$$f(0, \mathbf{v}) = \frac{2}{3\pi\sqrt{\pi}} |\mathbf{v}|^2 e^{-|\mathbf{v}|^2},$$

then the solution f only depends on time and velocity and has the form (cf. Bobylev in [5])

$$f(t, \mathbf{v}) = (a(t) + b(t)|\mathbf{v}|^2) e^{-c(t)|\mathbf{v}|^2}, \quad (2.23)$$

where

- $a(t) = \frac{5}{2} \left(\frac{c(t)}{\pi}\right)^{3/2} (1 - c(t)),$
- $b(t) = c(t) \left(\frac{c(t)}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{5}{3}c(t) - 1\right),$
- $c(t) = \frac{3}{5 - 2e^{-t/6}}.$

For example, we know explicitly its moment of order 4

$$\int f |\mathbf{v}|^4 d\mathbf{v} = \frac{125}{12} - \frac{5}{3} e^{-t/3}.$$

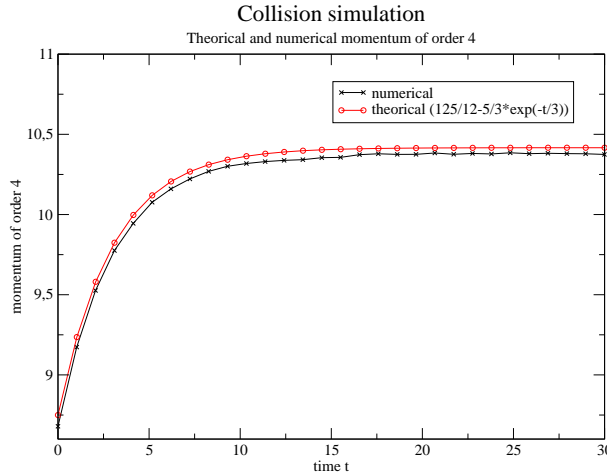


Figure 2.4: Comparison between the numerical and analytical moment of order 4

Then, we can compare this expression to our numerical moment of order 4 (Fig. (2.4)). We see that the error made in the numerical momentum is, in a large proportion, due to the error in the computation of the initial datum.

With this analytic solution, we can compare not only the moment of order 4 of f but the function itself. Notice that if we are only interested in the moment of order 4, we could obtain explicit formula for this moment with any initial data.

Unfortunately, when we add the coalescence phenomena, no such explicit solution is known to exist. We can however determine an inequality on the moment of order 2 (in the case of a constant cross section and a constant critical angle). If f (function of t , \mathbf{v} and r) is the solution of

$$\partial_t f = \int_{\mathbf{v}^*} \int_{r^*} \int_{\sigma} (f' f'^* \chi_{\theta_{cr}}(\sigma) + \frac{1}{2} f^* f^{\diamond} (1 - \chi_{\theta_{cr}}(\sigma)) - f f^*) d\sigma d\mathbf{v}^* dr^*,$$

if there exists a strictly positive r_0 such that $\text{supp}_{r \in R} f_0(\mathbf{v}, r) \in [r_0, +\infty[$ and if $\int f_0(\mathbf{v}, r) r^3 \mathbf{v} d\mathbf{v} dr = 0$, then we have

$$\int f(t, \mathbf{v}, r) r^3 \mathbf{v}^2 d\mathbf{v} dr \geq \int f_0(\mathbf{v}, r) r^3 \mathbf{v}^2 d\mathbf{v} dr e^{-\left(\int f_0 r^3 dr d\mathbf{v}\right) \frac{(1 + \cos \theta_{cr})t}{4r_0^2}}$$

We verified in our computation that this lower bound holds for the moment of order 2.

2.4.2.b Numerical simulation of collision, coalescence and breakup with physical data

First, we study the collision and coalescence phenomena (that is, without breakup) with physical data (we need such realistic data in particular for the calculation of the critical angle θ_{cr}). We take for initial datum a function which is constant in the radius variable r on $[3 \mu m, 6 \mu m]$ and which is in the velocity variable \mathbf{v} a Gaussian distribution centered on \mathbf{u}_g . The velocity of the gas $|\mathbf{u}_g|$ is 1500 m/s and remain constant during the whole simulation.

We verified that the conservation of mass and momentum indeed held in our computation. We also studied the evolution of the radius of the droplets (Fig. (2.5)). We observed that the size of the droplets is increasing because of coalescence. Then, we added the phenomenon of

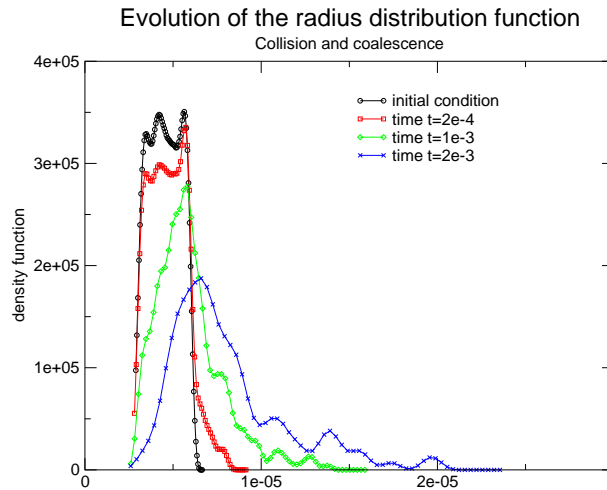


Figure 2.5: Evolution of the radius with only collision and coalescence

breakup (using the T.A.B. model) described previously. We used the same initial datum as above. The result is given in Fig. (2.7). We also draw in Fig. (2.6) the result of a computation where only breakup is taken into account (that is, no collision and no coalescence).

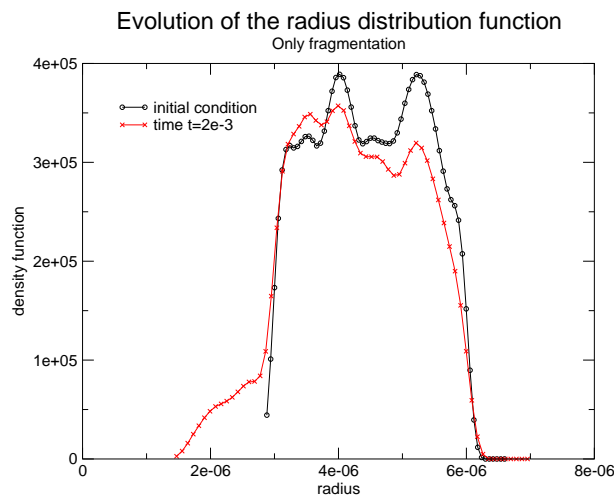


Figure 2.6: Evolution of the radius with only breakup

We observe that because of the breakup, the increasing of the radius of the droplets observed in Fig. (2.5) does not occur and that, on average, the radius is in fact decreasing. This behavior is typical of the specific initial data used in this test case, and is not necessarily observed with other initial data.

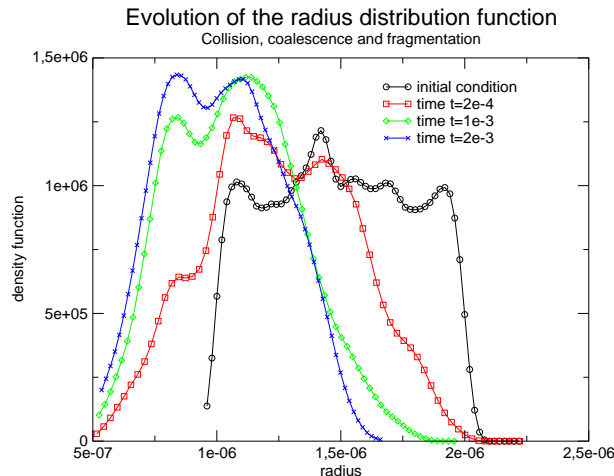


Figure 2.7: Evolution of the radius in case of breakup, collision and coalescence

Bibliography

- [1] A. A. AMSDEN AND P. J. O'ROURKE. The T.A.B. method for numerical calculation of spray droplet breakup. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico.
- [2] A. A. AMSDEN, P. J. O'ROURKE AND T. D. BUTLER. Kiva-II, a computer program for chemical reactive flows with sprays. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1989.
- [3] C. BARANGER. Collisions, coalescences et fragmentations des gouttelettes dans un spray : écriture précise des équations relatives au modèle T.A.B. Mémoire de D.E.A., CMLA, ENS de Cachan, 2001.
- [4] G. A. BIRD. *Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows*. Oxford science publications, 1994.
- [5] A. V. BOBYLĚV. Exact solutions of the Boltzmann equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 225, 6 (1975), 1296–1299.
- [6] C. CERCIGNANI. *The Boltzmann equation and its applications*, vol. 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [7] C. CROIZET AND R. GATIGNOL. Boltzmann-like modeling of a suspension. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 12, 7 (2002), 943–964. Special issue on kinetic theory.
- [8] J. HYLKEMA. *Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre*. Thèse de Doctorat, ENSAE - Université Toulouse-III, 1999.
- [9] J. HYLKEMA ET P. VILLEDIEU. Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre. Partie 1: aspects théoriques.

- [10] J. HYLKEMA ET P. VILLEDIEU. Modélisation cinétique et simulation numérique des collisions entre gouttelettes d'alumine dans un propulseur à poudre. Partie 2: aspects numérique.
- [11] P. J. O'ROURKE. *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*. PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [12] J.-M. ROQUEJOFFRE AND P. VILLEDIEU. A kinetic model for droplet coalescence in dense sprays. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 11, 5 (2001), 867–882.
- [13] G. I. TAYLOR. *The shape and acceleration of a drop in a high speed air stream*. The Scientific Paper of G.I. Taylor, Edition G.K. Batchelor, University Press, Cambridge, 1963.
- [14] P. VILLEDIEU ET J. HYLKEMA. Modèles numériques Lagrangiens pour la phase dispersée dans les propulseurs à poudre. Rapport Final n°1/3784.00/DTIM ONERA, 2000.
- [15] F. A. WILLIAMS. *Combustion theory*. Benjamin Cummings, 1985.

Chapitre 3

Simulation numérique du couplage fluide-cinétique dans le cadre d'un code industriel

Sommaire

3.1	Introduction	90
3.2	Présentation du modèle	90
3.3	Méthode numérique	92
3.3.1	Le schéma volume fini pour le gaz environnant	92
3.3.2	Le transport des gouttelettes	93
3.3.3	Les collisions de gouttelettes : méthode à poids non constant	93
3.4	Simulations numériques	95
3.4.1	Validation de la méthode à poids non constant	95
3.4.2	Cas test numériques	97
3.4.2.a	Les particules	97
3.4.2.b	La fraction volumique du gaz	98
3.4.2.c	La vitesse du gaz	98
3.4.2.d	La température du gaz et des particules	98
	Bibliographie	101

3.1 Introduction

Nous présentons ici une amélioration d'un code numérique du CEA visant à tenir compte des collisions intervenant entre les particules. Ce travail est présenté en partie dans [2].

Le cadre de base a été étudié par Dukowicz [5] pour la partie modélisation et mis en oeuvre du point de vue numérique par Motte [7]. Il s'agit de la modélisation d'un spray épais (*i.e.* la fraction volumique α apparaît dans les équations du gaz) sans prise en compte des phénomènes de compressibilité, de collisions, coalescences et fragmentations (*i.e.* une équation cinétique de type Vlasov) ni. On trouvera dans [7] la méthode numérique permettant de coupler la résolution des équations fluides avec l'équation de Vlasov. Une première amélioration du modèle a été effectuée par Boudin ([3]-[4]). Il s'agit de la prise en compte de la compressibilité des gouttelettes. On trouvera dans les références citées ci-dessus les nouvelles équations du modèle (en particulier on notera l'apparition de termes en $\partial_t \alpha$), ainsi que les modifications apportées à la méthode numérique.

Nous nous intéressons ici à la prise en compte de phénomènes plus complexes tels que les collisions, coalescences et fragmentations, en prenant comme modèle de base celui de Motte [7]. Afin de prendre en compte tous ces phénomènes, nous pourrions utiliser, par exemple, le modèle de collisions, coalescences et fragmentations présenté au chapitre 2. Cependant, ce modèle est plus complexe à mettre en oeuvre dans un code inhomogène (par exemple, deux variables supplémentaires par particule sont nécessaires pour décrire la fragmentation). De plus, une étude des ordres de grandeurs des pas de temps de collisions et de fragmentations dans les applications visées au CEA nous incite à penser que le phénomène prépondérant est le phénomène de collision (sans coalescence). Il a donc été décidé de ne modéliser que les collisions. Nous utilisons pour cela l'opérateur classique de collision avec modèle de sphères dures. La méthode numérique qu'il faut mettre en oeuvre ici est moins classique car on se trouve dans un cadre inhomogène avec des particules numériques à poids non constant (le poids numérique d'une particule correspond aux nombres de gouttelettes réelles qu'elle représente). On ne peut plus utiliser la méthode numérique décrite au chapitre 2. Il faut alors se référer à des méthodes plus complexes. On trouvera par exemple dans [1] et [6] la description de méthodes de collisions à poids non constant. Ces méthodes sont de type Bird, *i.e.* les collisions effectuées modifient les deux particules numériques mises en jeu. Cependant, pour palier les différences de poids numériques, dans [6], une nouvelle particule numérique est créée après chaque collision, alors que dans [1], une moyenne est effectuée afin d'éviter cette création de particules. Nous avons choisi de notre côté d'utiliser une méthode différente, de type Nanbu, qui est facilement adaptable aux cas de particules à poids non constant. Avec une telle méthode, lorsqu'une particule collisionne avec un partenaire de collision, seuls les paramètres de la première particule sont modifiés.

Nous commençons par présenter au paragraphe 3.2 les équations de notre modèle, puis dans le paragraphe 3.3, nous explicitons le schéma numérique utilisé pour discrétiser ces équations. Enfin, au paragraphe 3.4, nous présentons des cas tests numériques.

3.2 Présentation du modèle

L'écoulement complexe que l'on modélise ici est constitué d'un fluide porteur et d'une phase dispersée sous forme de gouttelettes. Les inconnues liées au gaz sont la densité $\rho(t, x)$, la vitesse $u(t, x)$, l'énergie interne massique $e(t, x)$, la fraction volumique $\alpha(t, x)$. La pression

du gaz $p(t, x)$ et la température $T(t, x)$ sont données par des lois d'états. Les gouttelettes sont décrites par une fonction de distribution f . Ainsi, $f(t, x, v, r, e_p)$ est la densité de répartition de gouttelettes se trouvant au temps t à la position x avec une vitesse v , un rayon r et une énergie interne e_p . Ces quantités sont solutions du système couplé suivant :

$$\partial_t(\alpha \rho) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u) = 0, \quad (3.1)$$

$$\partial_t(\alpha \rho u) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u \otimes u) + \nabla_x p = F^s, \quad (3.2)$$

$$\partial_t(\alpha \rho e) + \nabla_x \cdot (\alpha \rho u e) + p(\partial_t \alpha + \nabla_x \cdot (\alpha u)) = \dot{Q}^s, \quad (3.3)$$

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F f) + \partial_{e_p}(\phi f) = Q_{coll}(f), \quad (3.4)$$

$$\alpha = 1 - \int \frac{4\pi}{3} r^3 f dv dr de_p, \quad (3.5)$$

avec les lois d'états

$$p = p(\rho, e),$$

$$T = T(\rho, e),$$

et les termes sources

$$\begin{cases} F^s &= - \int f \rho_d \frac{4}{3} \pi r^3 F dv dr de_p \\ \dot{Q}^s &= - \int f \left[\rho_d \frac{4}{3} \pi r^3 \left(\phi + \left(F + \frac{\nabla_x p}{\rho_d} \right) \cdot (v - u) \right) \right] dv dr de_p, \end{cases}$$

où ρ_d est la densité des gouttelettes, qui est une constante (modèle de gouttelettes incompressibles).

Le terme F est la force correspondant à l'échange d'impulsion entre les deux phases. Elle est constituée d'une force de traînée et d'une force de pression

$$F = \frac{3\rho|u - v|}{8\rho_d r} (u - v) C_D - \frac{\nabla_x p}{\rho_d},$$

où C_D est le coefficient de traînée donné par une expression semi-empirique (voir appendice). Enfin, l'échange thermique ϕ est donné par

$$m_p \phi = 4 \pi r \lambda Nu (T - T_p),$$

où m_p est la masse volumique des gouttelettes et λ est leur conductivité thermique (ce sont des constantes du modèle), Nu est le nombre de Nusselt, donné en appendice, et la température T_p des gouttelettes est donnée par $T_p = T_2(\rho_p, e_p)$.

La différence entre le modèle ci-dessus et le modèle utilisé dans le code du CEA décrit par Motte [7] est la présence de l'opérateur de collision $Q_{coll}(f, f)$. Nous utilisons ici l'opérateur classique de collision correspondant à des collisions binaires élastiques. Le terme $Q_{coll}(f, f)$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} Q_{coll}(f, f) &= - \int_{v^*, r^*, e_p^*} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f f^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\phi d\theta dv^* dr^* de_p^* \\ &+ \int_{v^*, r^*, e_p^*} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} f' f'^* B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) d\phi d\theta dv^* dr^* de_p^*, \end{aligned} \quad (3.6)$$

avec les notations $f = f(t, x, v, r, e_p)$, $f^* = f(t, x, v^*, r^*, e_p^*)$, $f' = f(t, x, v', r, e_p')$, $f^{*'} = f(t, x, v^{*'}, r^*, e_p^{*'})$.

Les vitesses post-collision $(v', v^{*'})$ sont données par

$$\begin{cases} v' &= \frac{r^3 v + r^{*3} v^*}{r^3 + r^{*3}} + \frac{r^{*3}}{r^3 + r^{*3}} |v - v^*| \vec{\sigma}, \\ v^{*'} &= \frac{r^3 v + r^{*3} v^*}{r^3 + r^{*3}} - \frac{r^3}{r^3 + r^{*3}} |v - v^*| \vec{\sigma}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Les énergies internes des gouttelettes ne sont pas modifiées par les collisions, *i.e.* $e_p' = e_p$ et $e_p^{*'} = e_p^*$.

La section efficace de collision utilisée est celle des sphères dures

$$B(\theta, |v - v^*|, r, r^*) = \pi |v - v^*| (r + r^*)^2 \frac{\sin \theta}{4\pi}.$$

Il s'agit donc ici d'un modèle simple sans prise en compte de phénomènes plus complexes tels que les coalescences ou les fragmentations.

3.3 Méthode numérique

Nous rappelons dans cette section la méthode numérique utilisée pour résoudre le modèle ci-dessus, sans l'opérateur de collision, et nous décrivons en section 3.3.3 la méthode numérique mise au point pour décrire les collisions. En effet, la résolution des équations (3.1)-(3.2)-(3.3) et (3.4) se fait en utilisant un *splitting* en temps : durant un même pas de temps, on résout successivement les équations du gaz couplées avec le transport des gouttelettes, puis les collisions des gouttelettes.

Les variables caractéristiques du gaz sont discrétisées de manière classique sur un maillage fixe Eulérien. La vitesse du gaz est calculée aux noeuds du maillage, alors que toutes les autres quantités sont déterminées aux centres de ce maillage.

Par contre, la fonction f est discrétisée sous la forme d'une somme de masses de Dirac

$$f \simeq \sum_{i=1}^{N_p} \omega_i \delta_{x_i(t^n), v_i(t^n), r_i(t^n), e_{p_i}(t^n)}.$$

Ici, N_p est le nombre total de particules numériques, et ω_i la représentativité de chaque particule i , c'est-à-dire le nombre de gouttelettes réelles représentées par chaque particule numérique.

3.3.1 Le schéma volume fini pour le gaz environnant

La méthode classique utilisée pour résoudre les équations du gaz est une méthode de type volume fini. Elle est effectuée en deux étapes. La première étape est dite Lagrangienne (par similarité avec le système de Navier-Stokes de l'hydrodynamique écrit en coordonnées Lagrangiennes), on résout les équations sans termes d'advection. Dans la seconde étape, dite de projection, on résout la partie convective du système. Plus précisément, durant la première étape, on résout

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha \rho) + \alpha \rho \nabla_x \cdot u = 0, \\ \alpha \rho \partial_t u + \nabla_x p = F^s, \\ \alpha \rho \partial_t e + p (\partial_t \alpha + \nabla_x \cdot (\alpha u)) = \dot{Q}^s. \end{cases} \quad (3.8)$$

On utilise ici un schéma explicite de type prédiction-correction, qui est d'ordre deux en temps et en espace. Cette étape est elle-même divisée en 3 phases (voir [7] pour plus de détails).

La seconde étape consiste à résoudre

$$\begin{cases} \partial_t(\alpha \rho) + u \cdot \nabla_x(\alpha \rho) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla_x u = 0, \\ \partial_t e + u \cdot \nabla_x e = 0, \\ \alpha = 1 - \int \frac{4\pi}{3} r^3 f. \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans cette étape, les quantités caractéristiques du gaz sont obtenues par projection de leurs précédentes valeurs sur la grille Eulérienne fixe de départ. Cette procédure est aussi d'ordre 2.

3.3.2 Le transport des gouttelettes

Comme expliqué dans [7], on résout l'équation de transport (en espace, vitesse et énergie) des gouttelettes

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F f) + \partial_{e_p}(\phi f) = 0,$$

en même temps que la résolution des équations du gaz, plus précisément dans la phase Lagrangienne. Cela correspond à résoudre les équations différentielles ordinaires pour la position x_i , la vitesse v_i et l'énergie e_i de chaque particule

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} &= F_i, \\ \frac{de_i}{dt} &= \phi_i, \end{aligned}$$

où les quantités F_i et ϕ_i correspondent aux F et ϕ associés à la particule i , avec les caractéristiques du gaz associées à la maille contenant la particule. Ces équations sont discrétisées via un schéma d'ordre 2 et intégrées aux étapes de la résolution du gaz. Une description complète du schéma numérique permettant de résoudre les équations fluides et le transport des gouttelettes est détaillée dans [7].

3.3.3 Les collisions de gouttelettes : méthode à poids non constant

La dernière étape pour résoudre l'ensemble des équations est la simulation des collisions, c'est-à-dire la résolution de

$$\partial_t f = Q_{coll}.$$

C'est cette étape qui est ajoutée au code préexistant au CEA.

Nous avons déjà présenté (*cf.* Introduction) la technique de résolution d'une telle équation. Rappelons-en rapidement le principe. Afin de s'affranchir de la variable d'espace, non modifiée par l'opérateur de collision, la fonction f est moyennée en espace en utilisant un volume de contrôle. Cela correspond à une convolution avec une fonction caractéristique. Les volumes de contrôles utilisés de manière naturelle dans le cadre d'un couplage avec des équations fluides

(qui sont résolues sur un maillage Eulérien fixe), sont les mailles formées par ce maillage. Ainsi, dans une maille C , f sera cherchée sous la forme

$$f \simeq \chi_C \sum_{i=1}^{N_C} \frac{n_i}{Vol(C)} \delta_{v_i, r_i, e_{p_i}},$$

où χ_C est la fonction indicatrice de la maille C , $Vol(C)$ son volume et N_C le nombre de particules numériques présentes dans la maille. On note alors $\omega_i = \frac{n_i}{Vol(C)}$.

Au chapitre précédent, nous avons présenté une méthode numérique pour les cas où les poids numériques ω_i sont tous égaux (méthode à poids constant).

Cependant, dans le cadre de codes industriels, et en particulier dans celui du CEA, les poids numériques des particules ne sont pas constants. En effet, les gouttelettes réelles peuvent avoir des tailles très disparates : en général, beaucoup de petites gouttelettes et quelques grosses gouttelettes (c'est le cas du code décrit dans [6] et [9], avec des particules solides d'alumine simulées dans un booster de fusée Ariane). Il est cependant nécessaire de tenir compte de toute la distribution en rayon des gouttelettes (par exemple les grosses gouttelettes vont interagir de manière non négligeable avec le gaz). Afin de réduire le nombre de particules numériques utilisées dans les codes, le nombre de particules numériques à faible rayon est du même ordre que le nombre de particules numériques à grand rayon, et les particules de faible rayon sont affectées d'un poids numérique très grand devant celui des grosses particules. Typiquement, le poids numérique utilisé dans [6] est inversement proportionnel au cube du rayon de la particule considérée.

De plus, la méthode à poids constant décrite au chapitre précédent n'est plus pertinente dans le cas de poids non constant. En effet, elle est basée sur le fait que l'on peut définir la probabilité de collision d'un couple de particules. Ce n'est plus possible si les particules n'ont pas le même poids numérique. Si l'on considère deux particules de caractéristiques $(\omega_1, v_1, r_1, e_{p_1})$ et $(\omega_2, v_2, r_2, e_{p_2})$ (avec $\omega_1 < \omega_2$). La particule 1 va collisionner avec la particule 2 avec la probabilité $\omega_2 \Delta t B(\theta_{1,2}, |v_1 - v_2|, r_1, r_2)$ alors que la particule 2 va collisionner avec la particule 1 avec la probabilité $\omega_1 \Delta t B(\theta_{1,2}, |v_1 - v_2|, r_1, r_2)$.

Une première approche consiste alors à considérer que seule une 'partie' (précisément ω_1) de la particule 2 va collisionner avec la particule 1. C'est cette approche qui est privilégiée dans [1] et dans [6]-[9]. Dans le cas des collisions franches (nous ne considérons pas ici le cas des coalescences), le problème de cette méthode est que l'on a alors création d'un troisième groupe de gouttelettes avec des caractéristiques différentes des 2 premières. Le choix fait dans [6] est de créer alors une troisième particule numérique de poids ω_1 et de diminuer le poids de la particule 2 (qui devient $\omega_2 - \omega_1$), la particule 1 étant inchangée. Dans [1], le groupe supplémentaire de gouttelettes est réintégré à la particule 2, une moyenne étant effectuée entre les caractéristiques de la particule et du groupe de gouttelettes afin d'avoir conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie.

Nous avons choisi ici une méthode différente, de type Nanbu ([8]), dite méthode linéaire (par contraste avec les méthodes de type Bird décrites précédemment, qui sont des méthodes dites symétriques). Dans cette méthode, quand une particule collisionne avec un partenaire de collision, seuls les paramètres de la première particule sont modifiés. C'est comme si la particule collisionnait avec un obstacle. Il est ainsi plus facile de calculer la probabilité de collision.

Pour une particule i donnée, la probabilité de collision avec une autre particule durant le pas de temps Δt est

$$\Delta t \sum_{j=1}^{N_C} w_j \mathcal{B}_{ij},$$

où \mathcal{B}_{ij} est la section efficace de collision pour les particules i et j .

En notant $\widetilde{\omega B}$ une borne supérieure des quantités $\omega_i \mathcal{B}_{ij}$, la probabilité qu'une collision fictive arrive pendant le temps Δt est alors

$$\Delta t N_C \widetilde{\omega B}.$$

Le pas de temps est choisi afin de vérifier

$$\Delta t \ll \frac{1}{N_C \widetilde{\omega B}}.$$

Les étapes précises de la méthode (valables seulement pour les rebonds, le cas des coalescences étant reporté à de futurs travaux) sont

- durant un pas de temps Δt , on choisit de manière aléatoire une particule parmi les N_C particules de la maille C , et l'on itère le processus $\Delta t N_C \widetilde{\omega B}$ fois,
- pour chaque particule i , on choisit aléatoirement (avec une loi uniforme) une particule j ,
- ces deux particules i et j vont collisionner avec la probabilité $\frac{\omega_j \mathcal{B}_{ij}}{\widetilde{\omega B}}$
- s'il y a collision, alors il faut modifier la vitesse de la particule i avec la formule classique

$$v'_i = \frac{r_i^3 v_i + r_j^3 v_j}{r_i^3 + r_j^3} + \frac{r_j^3}{r_i^3 + r_j^3} |v_i - v_j| \vec{\sigma},$$

mais la vitesse de la particule j n'est pas changée.

Par conséquent, la conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique est vérifiée seulement en statistique (alors qu'elle l'était exactement dans le cas de la méthode à poids constant).

3.4 Simulations numériques

3.4.1 Validation de la méthode à poids non constant

Nous avons présenté au chapitre 2 la validation de la méthode à poids constant, effectuée dans le cadre d'un code zéro-dimensionnel (*i.e.* homogène en espace), avec une section efficace constante (cas de l'équation de Kac) et une donnée initiale de la forme $f_0(v) = \frac{2}{3\pi\sqrt{\pi}} |v|^2 e^{-|v|^2}$. Dans ce cas, on connaît explicitement la solution de l'équation $\partial_t f = Q_{coll}$ (voir la formule 2.23 du chapitre 2). C'est dans ce cadre que nous avons comparé la méthode à poids non constant avec la méthode à poids constant, en considérant le moment d'ordre 4 obtenu pour chaque méthode numérique (*i.e.* respectivement les quantités $\omega \sum_{i=1}^{N_C} |v_i|^4$ et $\sum_{i=1}^{N_C} \omega_i |v_i|^4$) et en le comparant avec le moment d'ordre 4 théorique $\int f |v|^4 dv$.

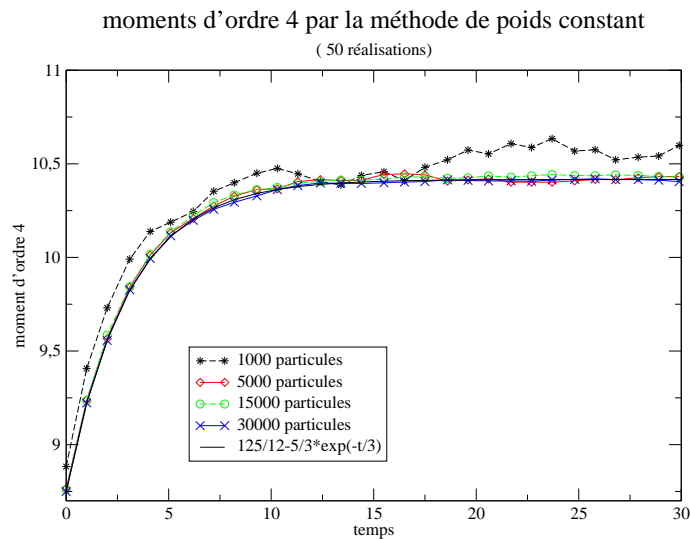


FIG. 3.1: Moments d'ordre 4 par la méthode des poids constants pour un nombre de particules variant entre 1000 et 30000.

Sur la figure 3.1., on retrouve les résultats déjà obtenus pour la méthode à poids constant. Avec cette méthode, à partir de 5000 particules numériques, le moment d'ordre 4 numérique est très proche du moment exact.

Avec la méthode de poids non constant (figure 3.2.), les résultats sont moins bons, comme l'on s'y attendait, mais on observe quand même une convergence des résultats vers le moment exact.

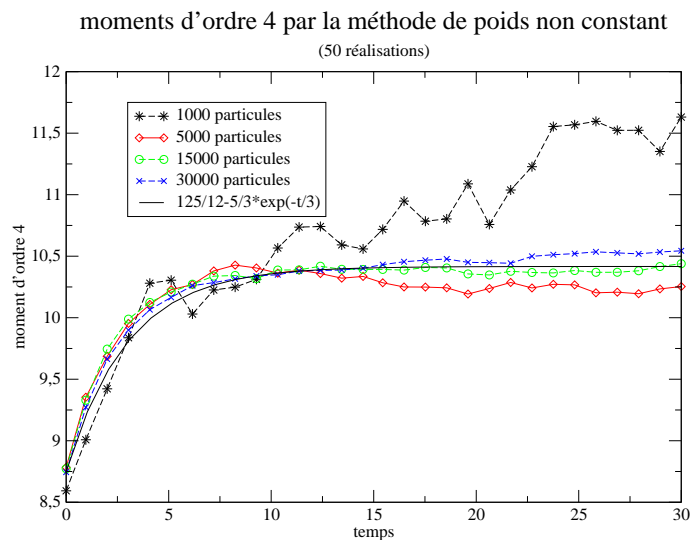


FIG. 3.2: Moments d'ordre 4 par la méthode des poids non constants pour un nombre de particules variant entre 1000 et 30000.

Sur la figure 3.3., les deux moments d'ordre 4 correspondant aux méthodes poids constant

et poids non constant sont comparés au moment exact. On observe ainsi que la méthode à poids non constant est moins précise que la méthode à poids constant, mais que l'erreur est encore très acceptable (il faut préciser ici que l'on observe le moment d'ordre 4 et donc que c'est la queue de distribution de la fonction f qui est observée).

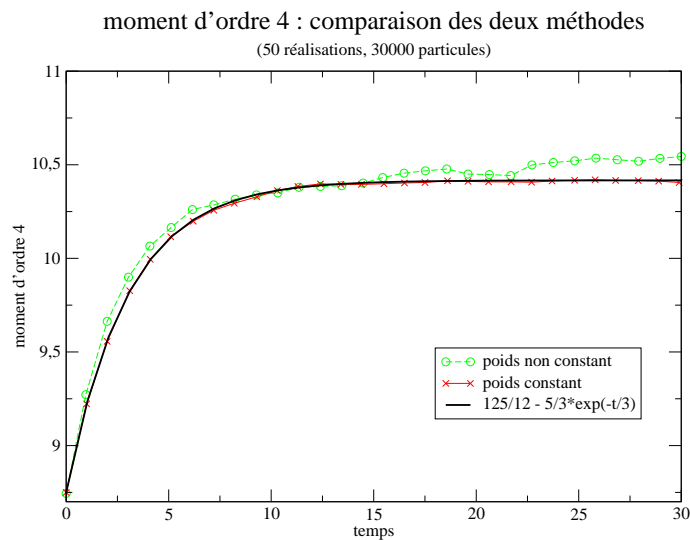


FIG. 3.3: Comparaison pour 30000 particules entre les deux méthodes numériques et le moment exact.

Enfin, il est intéressant de voir à quel point l'impulsion n'est pas conservée au cours de la méthode à poids non constant. Sur la figure 3.4., on a tracé l'impulsion (selon la variable x de l'espace). Nous observons, comme prévu, que l'impulsion n'est pas exactement constante mais varie avec des fluctuations de l'ordre de 1% (ici les vitesses sont de l'ordre de 1). Ces erreurs sont donc raisonnables.

3.4.2 Cas test numériques

Nous présentons à présent les simulations numériques effectuées au CEA. Nous donnons ici des résultats qualitatifs, en effectuant la comparaison entre le code initial (sans collisions) et le code modifié avec les deux méthodes numériques (poids constant ou non constant). Dans le cas test présenté ici, les particules sont initialisées avec une grande vitesse initiale ($\approx 5.10^2$ m/s), à l'intérieur d'un tube contenant le gaz. Elles sont réparties uniformément au milieu du tube. L'initialisation est la même dans les trois cas. Il est juste spécifié au début du calcul s'il s'effectue avec ou sans collisions, et avec méthode à poids constant ou non constant. Pour chaque série de figures, on présente respectivement de gauche à droite, le résultat du calcul sans collision (*i.e.* code initial), du calcul avec méthode à poids constant et calcul avec méthode à poids non constant.

3.4.2.a Les particules

À la figure 3.5, nous avons seulement tracé les particules ainsi que le contour de la géométrie du calcul. Les couleurs des particules correspondent à l'échelle de la vitesse verticale

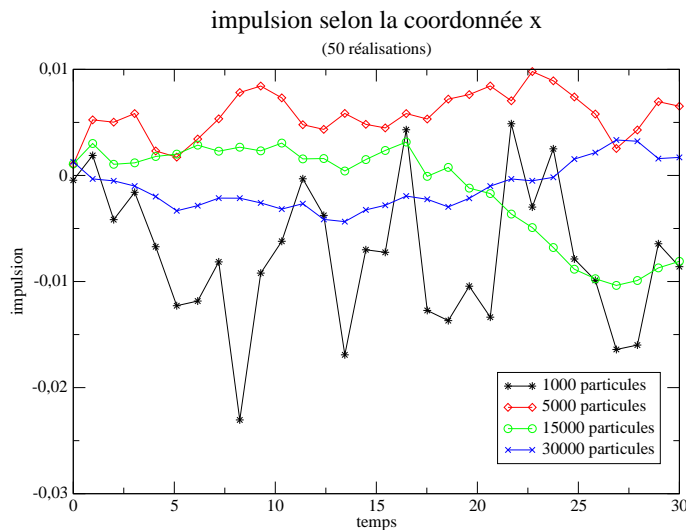


FIG. 3.4: Impulsion selon la coordonnée x obtenue avec la méthode à poids non constant.

des particules. On observe bien que les particules, sans collision, sont uniquement transportées. Par contre, dès que l'on ajoute le phénomène de collision, les particules sont plus 'dispersées'. Cette dispersion est observée tout au long du calcul avec collisions (quelque soit la méthode numérique choisie). Enfin, on observe peu de différences entre la méthode à poids constant et la méthode à poids non constant.

3.4.2.b La fraction volumique du gaz

Du fait de la dispersion due aux collisions, la fraction volumique est légèrement inférieure dans les simulations avec collisions qu'avec la simulation du code initial. Sur la figure 3.6, on voit que la fraction volumique minimum sans collision est de 0,960 alors qu'avec collisions, elle est entre 0,976 et 0,977. De plus, on voit que sans les collisions, la fraction volumique est la plus faible en tête du nuage de particules (ce sont les particules les plus grosses qui vont le plus vite et qui sont à l'avant du nuage). Par contre, avec les collisions, le nuage est mieux réparti et plus dense au centre.

3.4.2.c La vitesse du gaz

À la figure 3.7, nous avons représenté les lignes de vitesse verticale du gaz. Nous observons que les collisions, en modifiant la forme du nuage de particules, modifie le comportement du gaz, via les termes d'interaction (force de traînée et de pression).

3.4.2.d La température du gaz et des particules

Enfin, la dispersion des particules favorise les échanges thermiques avec le gaz. Sur la figure 3.8, dans les cas où les collisions sont prises en compte, les particules situées au bord du nuage sont plus froides (en couleur bleue et verte) que les particules au centre du nuage car elles sont dans une partie où le gaz est plus froid (couleur bleue).

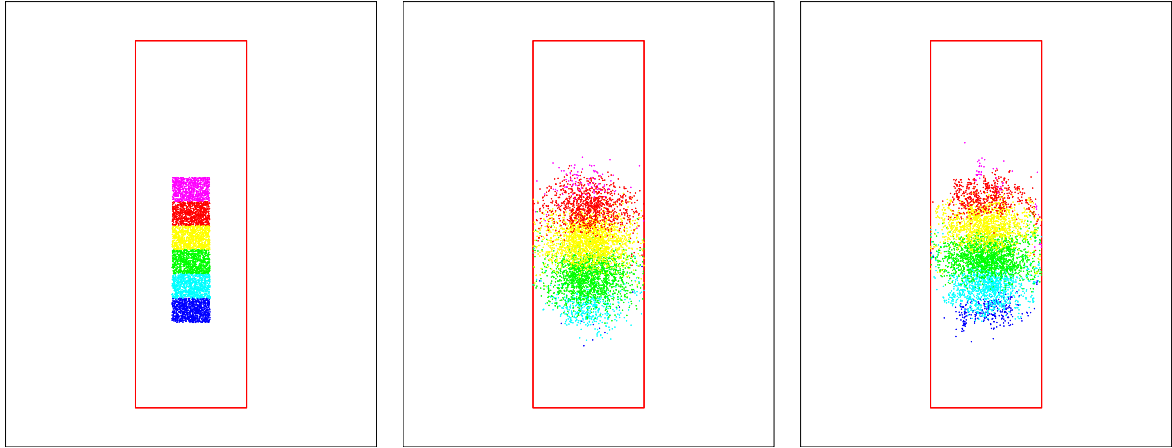


FIG. 3.5: La position des particules (de gauche à droite sans collision, avec collisions et méthode à poids constant, et avec collisions et méthode à poids non constant).

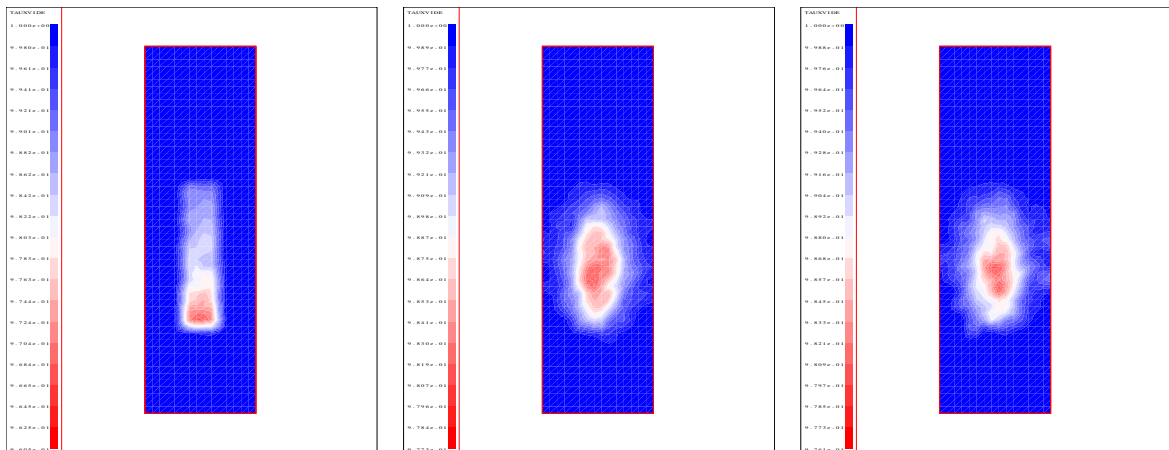


FIG. 3.6: La fraction volumique du gaz (de gauche à droite sans collision, avec collisions et méthode à poids constant, et avec collisions et méthode à poids non constant).

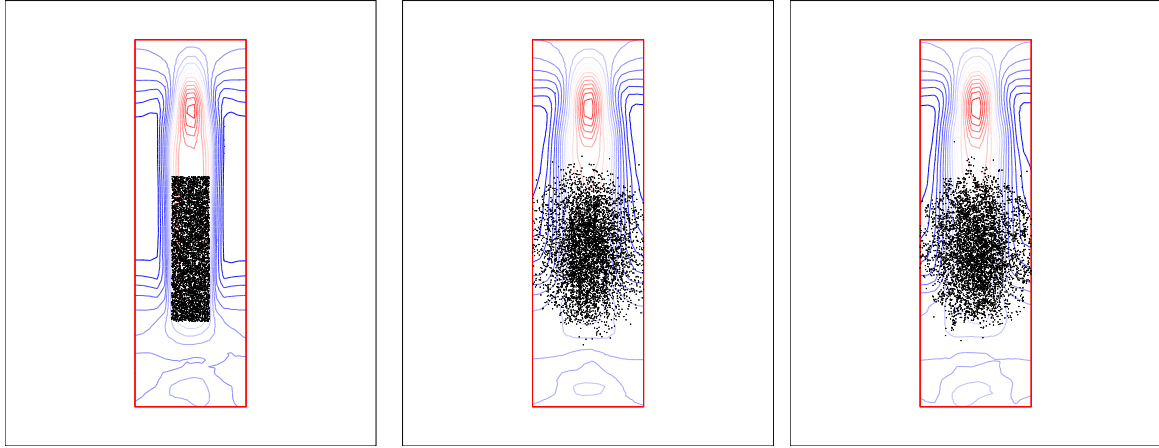


FIG. 3.7: La vitesse du gaz (de gauche à droite sans collision, avec collisions et méthode à poids constant, et avec collisions et méthode à poids non constant).

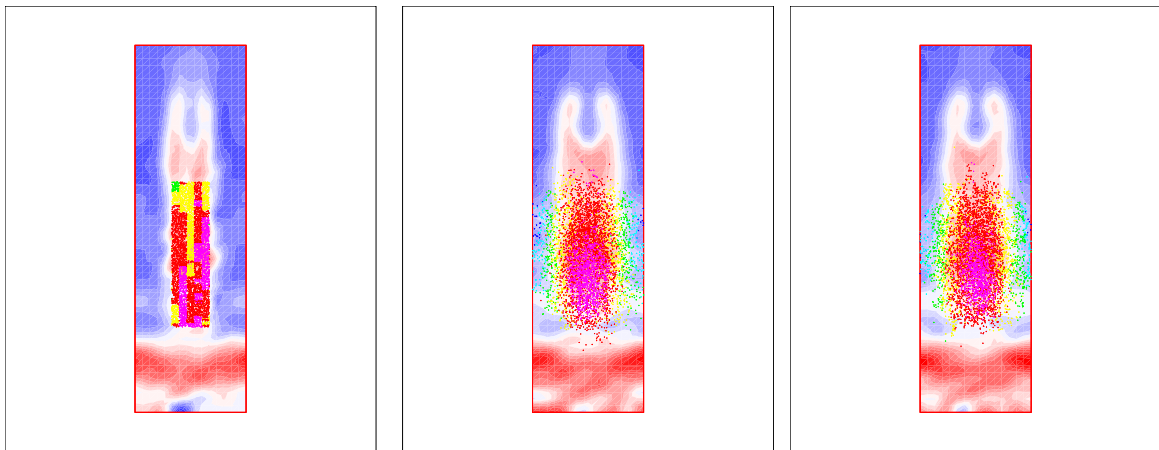


FIG. 3.8: La température du gaz et des particules (de gauche à droite sans collision, avec collisions et méthode à poids constant, et avec collisions et méthode à poids non constant).

Appendice : valeur des coefficients physiques

Pour compléter le modèle, nous donnons la valeur de certains coefficients. Premièrement, le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{2r\rho_g|v-u|}{\mu},$$

où μ est la viscosité (constante) du fluide.

Nous utilisons la formule suivante pour C_D (coefficient de la force de traînée)

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re}(1 + 0.15Re^{0.687}) & \text{si } Re \leq 1000 \\ 0.44 & \text{si } Re \geq 1000 \end{cases}.$$

Le nombre de Nusselt est

$$Nu = 2 + 0.6 Re^{0.5} Pr^{0.33},$$

où Pr est le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\kappa},$$

avec c_p la chaleur spécifique locale du gaz à pression constante et κ la conductivité thermique (qui sont supposées constantes dans ce modèle).

Bibliographie

- [1] A. A. AMSDEN, P. J. O'ROURKE AND T. D. BUTLER. Kiva-II, a computer program for chemical reactive flows with sprays. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1989.
- [2] C. BARANGER AND L. DESVILLETES. Study at the numerical level of the kernels of collision, coalescence and fragmentation for sprays. Soumis aux *Proceedings* du colloque *Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows*, Cargèse, France, 2003.
- [3] L. BOUDIN. *Étude mathématique des équations aux dérivées partielles cinétiques et hyperboliques de la Physique*. Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, 2000.
- [4] L. BOUDIN, L. DESVILLETES AND R. MOTTE. A particle-gas model for compressible droplets. In *Proceedings of the conference "Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows"*, Cargèse, France (2000).
- [5] J. K. DUKOWICZ. A particle-fluid numerical model for liquid sprays. *J. Comp. Phys* 35 (1980), 229–253.
- [6] J. HYLKEMA. *Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre*. Thèse de Doctorat, ENSAE - Université Toulouse-III, 1999.
- [7] R. MOTTE. A numerical method for solving particle-fluid equations. In *Proceedings of the conference "Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows"*, Cargèse, France (2000).
- [8] K. NANBU. Interrelations between various direct simulations methods for solving the Boltzmann equation. *J. Phys. Soc. Jap.* 52 (1983), 3382–3388.

- [9] P. VILLEDIEU ET J. HYLKEMA. Modèles numériques Lagrangiens pour la phase dispersée dans les propulseurs à poudre. Rapport Final n°1/3784.00/DTIM ONERA, 2000.

Chapitre 4

Fragmentation d'un spray à très grand nombre de Weber

Sommaire

4.1	Introduction	104
4.2	Presentation of the model	105
4.3	Conservations	107
4.4	Numerical tests	109
	4.4.1 Numerical scheme	109
	4.4.2 Numerical simulations	110
	Bibliography	113

Liquid jet generation and break-up : a kinetic modeling of a breaking up spray with high Weber numbers

Cet article, écrit en collaboration avec Laurent Boudin¹, est la partie cinétique du rapport **Liquid jets generation and break-up** concernant le projet GENJET du CEMRACS 2003 et qui sera publié dans les proceedings du Cemracs 2003.

Abstract

In this work, we are interested in a kinetic model of a spray that aims to take into account the breaking up of the droplets of the spray with some specific characteristics (like high Weber numbers). The spray evolves inside a fluid (typically, the air).

4.1 Introduction

In this section, we aim to model a spray of droplets which evolve in an ambient fluid (typically the air). That kind of problem was first studied by Williams for combustion issues [11]. The works of O'Rourke [7] helped to set the modeling of such situations and their numerical simulations through an industrial code, KIVA [1].

The main phenomenon that is occurring in the spray is the breakup of the droplets. Any other phenomena, such as collision or coalescence, will be neglected in this work, but they are reviewed in [3] for example. Instead of using the T.A.B. model (see [2]), which is more accurate for droplets with low Weber numbers, we choose the so-called Reitz wave model [10], [8], [4]. Then this breakup model is taken into account in a kinetic model [6], [2].

The question of the spray behavior with respect to the breaking up has arisen in the context of the French military industry. One aims to model with an accurate precision the evolution of a spray of liquid droplets inside the air. In that situation, the droplets of the spray are assumed to remain incompressible (the mass density ρ_d is a constant of the problem) and spherical. We also assume that the forces on the spray (like pressure force for example) are negligible with respect to the drag force, at least at the beginning of the computations.

¹Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 75252 Paris Cedex 05 France, boudin@ann.jussieu.fr

After a few seconds, the gravitation may become preponderant. Note that the aspects of energy transfer will not be tackled in this report.

In the section 4.2, we derive the equations of the model and check the properties of conservations of mass and momentum. Then we briefly present the scheme for the numerical resolution of our problem. Eventually, we show some numerical results.

The notations used here are presented in table 4.1.

$t \geq 0$	time
$x \in \mathbb{R}^{d_x}$	position
$v \in \mathbb{R}^{d_v}$	droplet velocity
$r \in]0, +\infty[$	droplet radius
σ	surface tension of the droplet
$f(t, x, v)$	spray probability density function (PDF)
Q_{bup}	breakup operator
ρ_d	droplet mass density (constant)
$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_d$	droplet mass
$\rho_g(t, x)$	fluid density
$u(t, x) \in \mathbb{R}^{d_v}$	fluid flow velocity
$\alpha(t, x)$	fluid volume fraction
C_d	drag coefficient
Re	Reynolds number associated to the fluid near a droplet
Re_d	Reynolds number of a droplet
We	Weber number associated to the gas near a droplet
We_d	Weber number of a droplet
Oh	Ohnesorge number
Ta	Taylor number

Table 4.1: Notations

4.2 Presentation of the model

The spray is described by the probability density function (PDF) f , which depends on time t , position x , velocity v and radius r . The number of droplets located in the volume (of the phase space) $[x, x + dx] \times [v, v + dv] \times [r, r + dr]$ is the quantity $f(t, x, v, r)dx dv dr$.

The PDF f satisfies the kinetic equation

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (f\gamma) + \partial_r (f\chi) = Q_{\text{bup}}(f). \quad (4.1)$$

The acceleration γ of one droplet is given by

$$\gamma(t, x, v, r) = -\frac{1}{m(r)}D(t, x, v, r)(v - u(t, x)), \quad (4.2)$$

where m is the droplet mass, u the fluid velocity and

$$D = \frac{\pi}{2}r^2 \rho_g C_d |v - u|.$$

In order to give an explicit form of χ and Q_{bup} , we here need to explain how the breakups are handled by the Reitz wave model. We here use the classical Reynolds (Re , Re_d), Weber (We , We_d), Ohnesorge (Oh) and Taylor (Ta) numbers, whose values are described below (see [9], for instance). One can use two different Reynolds numbers : the Reynolds number associated to the fluid near a droplet, and the Reynolds number of the droplet itself. We have

$$\text{Re} = \frac{r\rho_g|v-u|}{\mu_g}, \quad \text{Re}_d = \frac{r\rho_d|v-u|}{\mu_d},$$

where μ_g (resp. μ_d) is the fluid (resp. droplet) viscosity. In the same way, we consider two different Weber numbers

$$\text{We} = \frac{r\rho_g|v-u|^2}{\sigma_d}, \quad \text{We}_d = \frac{r\rho_d|v-u|^2}{\sigma_d},$$

where σ_d is the surface tension of the droplet. Then it is easy to define the Ohnesorge and Taylor numbers of the droplet

$$\text{Oh} = \frac{\sqrt{\text{We}_d}}{\text{Re}_d}, \quad \text{Ta} = \text{Oh}\sqrt{\text{We}}.$$

We refer to [5] for instance, for the definition of the drag coefficient C_d .

A breaking up droplet loses some mass by creating small children droplets, but does not disappear, as it occurs in most breakup models. Hence, there is no disappearance of droplets, only production, since only the mother droplet's radius changes : we must be able to compute the new radius of the mother droplet (thanks to χ) and to evaluate the characteristics of the children droplets (number, position, velocity, radii). The phenomenon taken into account is the main disturbance on the surface of the droplet, which is most likely to result in breakup. The wavelength of this disturbance is

$$\Lambda = \frac{9.02 \left(1 + 0.45\sqrt{\text{Oh}}\right) \left(1 + 0.4\text{Ta}^{0.4}\right)}{\left(1 + 0.865\text{We}^{5/3}\right)^{0.6}} r. \quad (4.3)$$

We also need the growth rate of the wavelength

$$\Omega = \frac{0.34 + 0.385\text{We}^{3/2}}{(1 + \text{Oh}) (1 + 1.4\text{Ta}^{0.6})} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_d r}}, \quad (4.4)$$

where σ is the surface tension of the droplet.

Note down that all this quantities (Re , Re_d , We , We_d , Oh , Λ , Ω) depend on (t, x) (because of the velocity u) and on (v, r) .

We can then provide a characteristic breakup time

$$\tau = \frac{C_\tau r}{\Omega \Lambda}, \quad (4.5)$$

where C_τ mainly depends on the characteristic lengths of the spray. We here propose to choose $C_\tau = 37.88$. Note that (4.3)–(4.5) come from [4], as well as this value of C_τ . This choice seems to be significant, since the physical setting of [4] is close to ours.

Eventually, the variation χ of the droplet radius satisfies

$$\chi(t, x, v, r) = -\nu(t, x, v, r)(r - R(t, x, v, r)), \quad (4.6)$$

where $R(t, x, v, r) = C_R \Lambda(t, x, v, r)$ (we here choose $C_R = 0.61$). The breakup frequency ν is given by

$$\begin{aligned} \nu &= 0 && \text{if } r \leq C_R \Lambda \text{ or } \text{We} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\text{Re}}, \\ \nu &= \frac{1}{\tau} && \text{in any other cases.} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Note that (4.6) cannot be seen as a linear ODE on r : even if R linearly depends on Λ , the wavelength itself does not linearly depend on r , since in (4.3), the Ohnesorge, Taylor and Weber numbers also depend on r .

The breakup operator only deals with the small children droplets. We then propose the following definition of Q_{bup} , where we only keep the dependencies on the velocity and the radius, for the sake of simplicity,

$$\begin{aligned} Q_{\text{bup}}(f)(v, r) &= \int_{v_*, r_*} \int_{S_1(v_*)} \nu(v_*, r_*) \frac{3r_*^2(r_* - R_*)}{R_*^3} \\ &\quad \delta_{V_*}(v) \delta_{R_*}(r) f(v_*, r_*) \frac{dn}{2\pi} dr_* dv_*, \end{aligned} \quad (4.8)$$

where $R_* = R(t, x, v_*, r_*)$ is the radius of the droplets that are coming from the fragmentation of the droplet (v_*, r_*) and $V_* = v_* + v_\perp n$ the velocity of these droplets, with $v_\perp = C_V \Lambda(t, x, v_*, r_*) \Omega(t, x, v_*, r_*)$ ($C_V = 0.5$, in our problem) and n is a random vector of the unit disc $S_1(v_*)$ of the linear plane normal to the vector v_* .

4.3 Conservations

In this section, we check that the classical properties of conservations of mass and momentum are satisfied.

Proposition 4.1 *The total mass of the spray $M(t) = \frac{4\pi\rho_d}{3} \int_{x,v,r} f r^3 dr dv dx$ is constant (in time).*

Proof. We immediately have

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{4\pi\rho_d}{3} \int_{x,v,r} \partial_t f \cdot r^3 dr dv dx \\ &= \frac{4\pi\rho_d}{3} \left[- \int_{x,v,r} \partial_r (f\chi) r^3 dr dv dx + \int_{x,v,r} Q_{\text{bup}}(f) r^3 dr dv dx \right], \end{aligned}$$

with the disappearance of the conservative terms on x and v . Then, by a standard computation, and using (4.6) and (4.8), we get

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & 4\pi\rho_d \left[- \int_{x,v,r} f(v,r)\nu(v,r)(r-R) r^2 drdvdx \right. \\ & + \int_{x,v,r} \left(\int_{v_*,r_*} \int_{S_1(v_*)} \nu(v_*,r_*) \frac{r_*^2(r_*-R_*)}{R_*^3} r^3 \delta_{V_*}(v) \delta_{R_*}(r) \right. \\ & \left. \left. f(v_*,r_*) \frac{dn}{2\pi} dr_*dv_* \right) drdvdx \right]. \end{aligned}$$

The integration along $S_1(v_*)$ gives 1, and the one on v against the Dirac mass too. It is then clear that

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & 4\pi\rho_d \left[- \int_{x,v,r} f(v,r)\nu(v,r)(r-R) r^2 drdvdx \right. \\ & \left. + \int_{x,v_*,r_*} \nu(v_*,r_*) \frac{r_*^2(r_*-R_*)}{R_*^3} R_*^3 f(v_*,r_*) dr_*dv_*dx \right], \end{aligned}$$

that ends the proof.

Since the fluid acts on the spray, the total momentum of the spray $I(t) = \frac{4\pi\rho_d}{3} \int_{x,v,r} f v r^3 dr dv dx$ is not constant, but we have the following

Proposition 4.2 *The time derivative of the total momentum of the spray equals the mean force of the fluid on the spray.*

Proof. We immediately have

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = & \frac{4}{3}\pi\rho_d \int_{x,v,r} f \gamma r^3 drdvdx \\ & + 4\pi\rho_d \left[- \int_{x,v,r} f(v,r)\nu(v,r)(r-R) r^2 v drdvdx \right. \\ & + \int_{x,v,r} \left(\int_{v_*,r_*} \int_{S_1(v_*)} \nu(v_*,r_*) \frac{r_*^2(r_*-R_*)}{R_*^3} r^3 v \delta_{V_*}(v) \delta_{R_*}(r) \right. \\ & \left. \left. f(v_*,r_*) \frac{dn}{2\pi} dr_*dv_* \right) drdvdx \right]. \end{aligned}$$

The first integral term is exactly the mean force of the fluid on the spray. Let us denote by J the term inside the brackets and show that it equals 0. By similar computations, we obtain that

$$\begin{aligned} J = & -4\pi\rho_d \int_{x,v,r} f(v,r)\nu(v,r)(r-R) r^2 v drdvdx \\ & + 4\pi\rho_d \int_{x,v_*,r_*} \int_{S_1(v_*)} \nu(v_*,r_*) f(v_*,r_*) r_*^2 (v_* + v_\perp n) \frac{dn}{2\pi} dr_*dv_*dx. \end{aligned}$$

Since

$$\int_{\mathcal{S}_1(v_*)} n \frac{dn}{2\pi} = 0,$$

it becomes clear that $J = 0$ and the proof is ended.

The well-posedness of (4.1) is not investigated in this paper. However, such a question is studied for other breakup operators, as in [6].

4.4 Numerical tests

We do not here take into account the motion of the droplets. Nevertheless, we aim to ensure the compatibility of the particle method used here, with any finite volume method fitted to the surrounding fluid.

4.4.1 Numerical scheme

We first start by a description of the numerical scheme used for solving (4.1). We assume that the particles have three-dimensional velocities.

The numerical scheme is time-split into two steps : the transport (in velocity) and the breakup. That means that we successively solve

$$\partial_t f + \partial_r(f\chi) = Q_{\text{bup}}(f), \quad (4.9)$$

and

$$\partial_t f + \nabla_v \cdot (f\gamma) = 0, \quad (4.10)$$

during a whole time step. Since we use a particle method, the PDF f is sought to be of the form

$$f(t, v, r) = \omega \sum_{p=1}^{P(t)} \delta_{v_p(t)}(v) \delta_{r_p(t)}(r),$$

where $(v_p(t), r_p(t))$ respectively denote the velocity and the radius of a numerical particle p at a time t , $P(t)$ is the total number of numerical particles and ω is the representativity of the particles (constant in this work).

Transport. During the first part of a time step, we follow the movement of the particles along their characteristics (in terms of velocity, not radius), i.e. we solve

$$\frac{dv_p}{dt} = -\frac{1}{m_p} D_p(v_p - u).$$

Then, the time discretization gives :

$$v_p^{n+1} = v_p^n - \frac{\Delta t}{m_p} D_p^n(v_p^{n+1} - u^n),$$

where u^n is the velocity of the fluid at time $n\Delta t$. We here use an implicit scheme for the discretization of $\frac{dv_p}{dt}$, in order to ensure the numerical stability.

Breakup. The second part of the splitting is the breakup step. This is a linear process, that is, for each particle p , it happens as follows.

1. If $r_p^n \leq C_R \Lambda_p^n$ then the particle p remains as it is.
2. If $r_p^n > C_R \Lambda_p^n$ and $We_p^n \leq \frac{\sqrt{Re_i^n}}{2}$ then the particle p remains as it is.
3. In the other cases, a breakup occurs with the probability $\Delta t / \nu_p^n$. If a breakup occurs,
 - (a) the radius of the particle evolves : $r_p^{n+1} = \frac{\tau_p^n r_p^n + \Delta t C_R \Lambda_p^n}{\tau_p^n}$
 - (b) the total number of the new particles created by the breakup of a particle p is computed in order to ensure the mass conservation $N_p = \frac{3r_p^{n2}(r_p^n - R_p^n)}{R_p^{n3}}$, and with the radius $R_p^n = C_R \Lambda_p^n$,
 - (c) N_p particles \tilde{p} are created with position $x_{\tilde{p}}^{n+1} = x_p^n$, radius $r_{\tilde{p}}^{n+1} = R_p^n$ and velocity $v_{\tilde{p}}^{n+1} = v_p^n + C_V \Lambda_p^n \Omega_p^n \vec{n}$ (\vec{n} unit vector normal to v_p^n).

4.4.2 Numerical simulations

The simulations that we made do not take into account the simulation of the surrounding fluid. First, we only compute the breakup of some droplets which remain motionless. Second, we compute the breakup and the transport of the droplets.

Breakup. We here aim to study the influence of the velocity of the surrounding fluid on the breakup phenomenon (number of breakups, number and size of the created droplets). We have several possibilities for the value of the velocity of the fluid : either it is a constant (equal to 0) during the whole computation, or there could be a shock (in our example, $|u|$ increases from 0 to 400 m.s⁻¹ at a given time), or it could follow a linear profile in time. These three cases are described below.

1. In the first simulation, the fluid is motionless ($u \equiv 0$). Initially, the radii of the 100 droplets considered are uniformly distributed between 0.5 and 1 mm and the velocities are equal to 50 m.s⁻¹ in one direction. The computation lasts for 0.1 s, but actually there is no fragmentation after 0.06 s. The 100 particles become 8000 with a radius around 0.17 mm (between 0.1725 and 0.1775 mm, the higher radii correspond to the “mother” droplets). We could see in figure 4.1 the initial and final distributions of the radii.
2. The second simulation consists in including a shock in the fluid : the velocity of the fluid decreased from 0 to -400 m.s⁻¹ at time 0.04 s. For the sake of the computation, the initial distribution of the radii of the 100 droplets is chosen to be smaller because of the high number of created droplets at this relative velocity (around 350 m.s⁻¹). So we start with radii around 5 and 10 μ m. At the end, the radii of the droplets is between 2.54 and 2.62 μ m (figure 4.2).

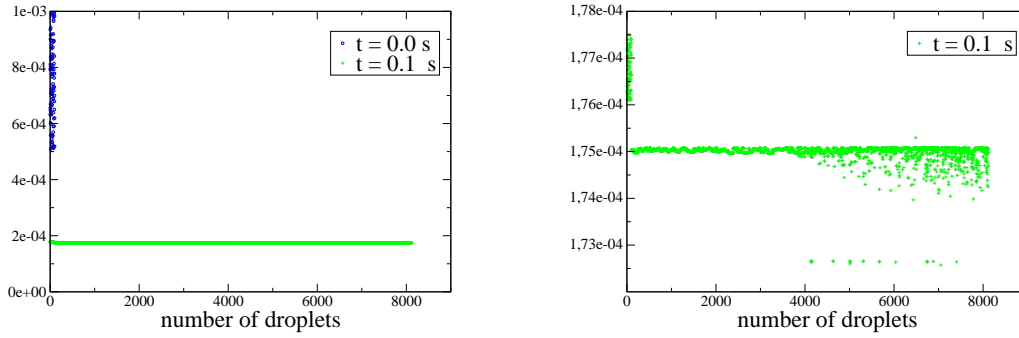


Figure 4.1: Radii (m) of the particles with a fixed surrounding fluid.

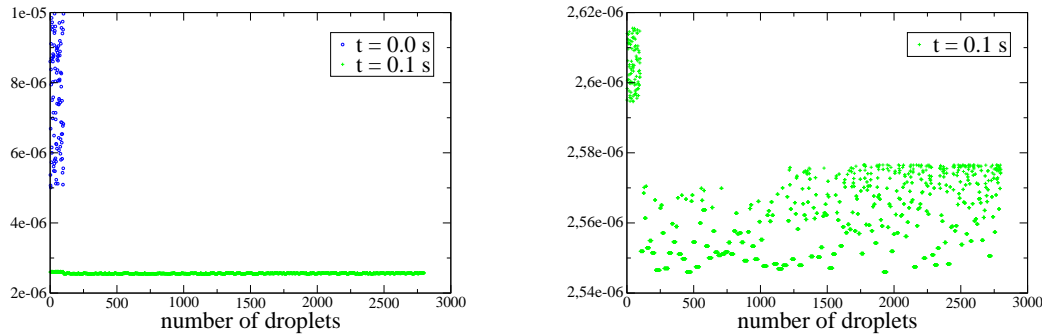


Figure 4.2: Radii (m) of the particles with a shock in the fluid.

3. In the last simulation, the velocity of the surrounding fluid linearly decreases from 0 to -400 m.s^{-1} and from $t = 0.04$ to 0.05 s. We here keep the same initial radius distribution as in the previous simulation. There are less particles created. In figure 4.3, we note that several values of radii are pointed out ($2.4 \mu\text{m}$, $2.6 \mu\text{m}$ and $2.8 \mu\text{m}$ approximately). As a matter of fact, the continuous linear profile of the fluid velocity is discretized into piecewise constant values with respect to the time steps. To avoid this numerical artefact, one must refine the time steps.

To conclude this part, we could say that there is a mean radius for the created droplets which depends on the relative velocity between the droplets and the fluid (for example, around 10^{-4} m without shock, and 10^{-6} m when a shock occurs in the fluid). The radii seems to correspond to the physical behavior of a spray when a shock occurs in the air, i.e. the atomization of the spray, detected during some experimentations made at the CEG.

Breakup and transport. We made some computations of the phenomena : breakup and transport of the droplets. For the time step (verifying a CFL condition) in the transport

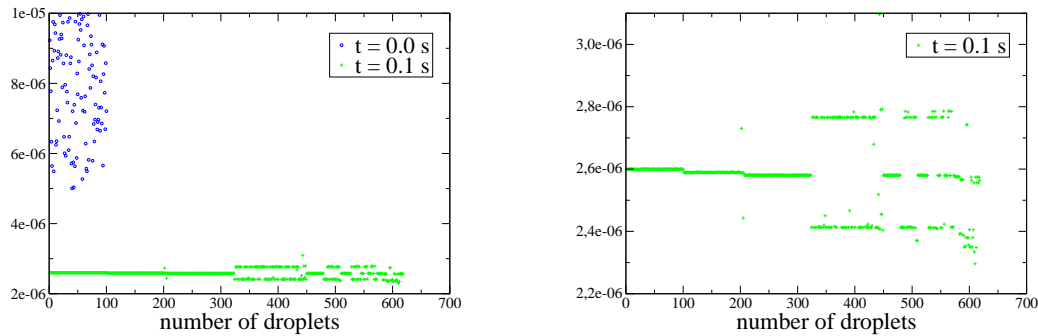


Figure 4.3: Radii (m) of the particles with a linearly profiled velocity for the fluid.

step, we assume that the size of a cell is around 0.005 mm (200 cells for 1 meter). In order to take the interaction between these phenomena into account (because the breakup time is larger than the transport time), the initial radii are randomly picked between 10 and 20 μm . Of course there is some breakup in the beginning, but as the velocity of the droplets goes to 0 (the velocity of the surrounding fluid), there are less and less breakups. On figure 4.4, we could see the final distribution of the droplets, and on figure 4.5, the successive positions of the droplets at several t_i :

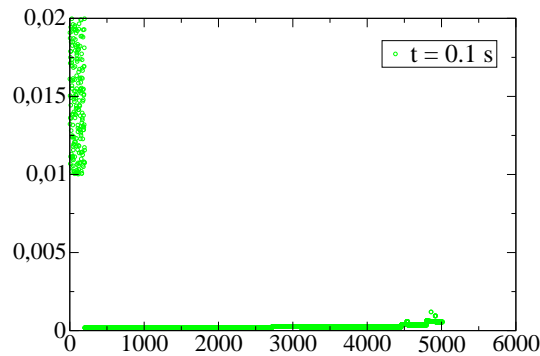


Figure 4.4: Final radii of the droplets during the transport-breakup computation.

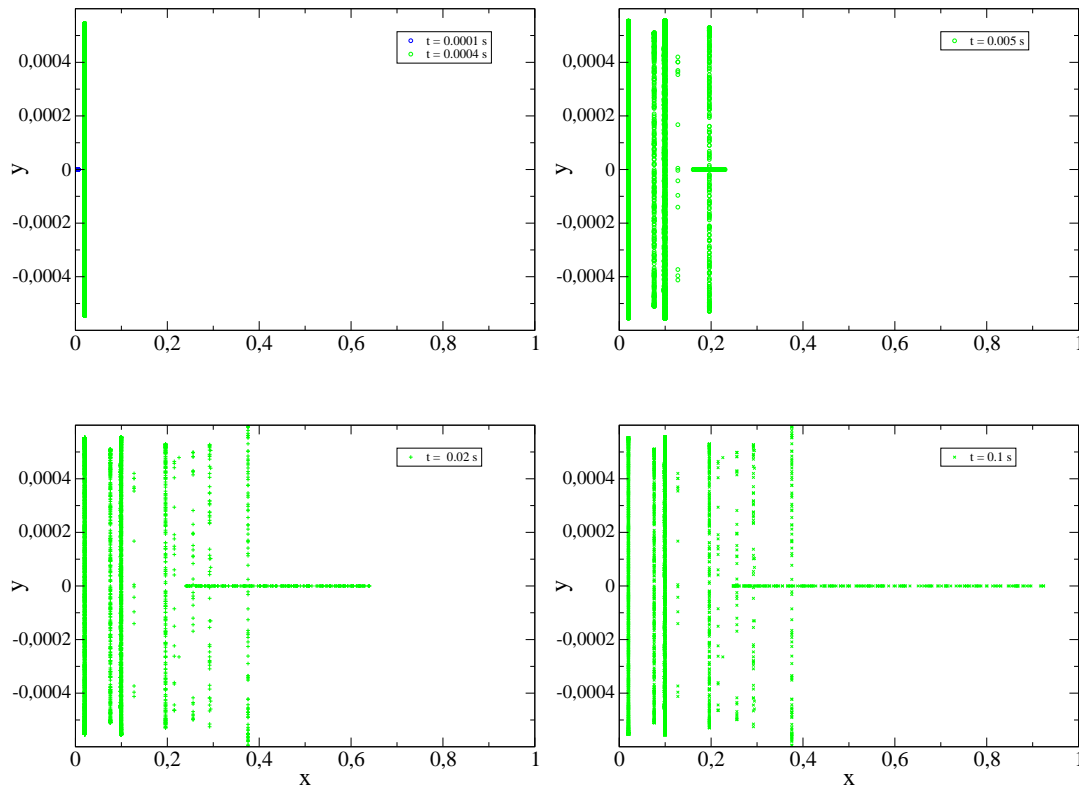


Figure 4.5: Positions of the droplets during the transport-breakup computation.

Bibliography

- [1] A. A. AMSDEN. Kiva-3V, Release 2, Improvements to Kiva-3V. Tech. rep., Los Alamos National Laboratory, 1999.
- [2] C. BARANGER. Modelling of oscillations, breakup and collisions for droplets: the establishment of kernels for the T.A.B. model. *To appear in Math. Mod. and Meth. in Appl. Sci.* (2004).
- [3] C. BARANGER AND L. DESVILLETES. Study at the numerical level of the kernels of collision, coalescence and fragmentation for sprays. Soumis aux *Proceedings* du colloque *Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows*, Cargèse, France, 2003.
- [4] S. D. BAUMAN. *A spray model for an adaptative mesh refinement code*. PhD thesis, University of Wisconsin - Madison, 2001.
- [5] L. BOUDIN, L. DESVILLETES AND R. MOTTE. A modeling of compressible droplets in a fluid. *Comm. Math. Sci.*, 1 (2003), 657–669.
- [6] J. HYLKEMA. *Modélisation cinétique et simulation numérique d'un brouillard dense de gouttelettes. Application aux propulseurs à poudre*. Thèse de Doctorat, ENSAE - Université Toulouse-III, 1999.

- [7] P. J. O'ROURKE. *Collective drop effects on vaporizing liquid sprays*. PhD thesis, Los Alamos National Laboratory, 1981.
- [8] M. A. PATTERSON AND R. D. REITZ. Modeling the effects of fuel spray characteristics on diesel engine combustion and emissions. Tech. Rep. #980131, SAE paper, 1998.
- [9] W. E. RANZ AND W. R. MARSHALL. Evaporization from drops, part I-II. *Chem. Eng. Prog.* 48, 3 (1952), 141–180.
- [10] R. D. REITZ. Modeling atomization processes in high-pressure vaporizing sprays. *Atom. Spray Tech.*, 3 (1987), 309–337.
- [11] F. A. WILLIAMS. *Combustion theory*. Benjamin Cummings, 1985.

Chapitre 5

Estimations explicites de trous spectraux pour les opérateurs de Boltzmann et Landau avec potentiels durs

Sommaire

5.1	Introduction	116
5.2	The Boltzmann linearized operator	123
5.3	The Landau linearized operator	129
	Bibliography	133

Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials

Cet article, écrit en collaboration avec Clément Mouhot¹, a été accepté pour publication dans la revue *Revista Matemática Iberoamericana*.

Abstract

This paper deals with explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann operator with hard potentials (and hard spheres). We prove that it can be reduced to the Maxwellian case, for which explicit estimates are already known. Such a method is constructive, does not rely on Weyl's Theorem and thus does not require Grad's splitting. The more physical idea of the proof is to use geometrical properties of the whole collision operator. In a second part, we use the fact that the Landau operator can be expressed as the limit of the Boltzmann operator as collisions become grazing in order to deduce explicit spectral gap estimates for the linearized Landau operator with hard potentials.

5.1 Introduction

This paper is devoted to the study of the spectral properties of the linearized Boltzmann and Landau collision operators with hard potentials. In this work we shall obtain new quantitative estimates on the spectral gap of these operators. Before we explain our methods and results in more details, let us introduce the problem in a precise way. The Boltzmann equation describes the behavior of a dilute gas when the only interactions taken into account are binary elastic collisions. It reads in \mathbb{R}^N ($N \geq 2$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q^{Bo}(f, f),$$

where $f(t, x, v)$ stands for the time-dependent distribution function of density of particles in the phase space. The N -dimensional Boltzmann collision operator Q is a quadratic operator, which is local in (t, x) . The time and position are only parameters and therefore shall not be

¹C. Mouhot, UMPA, ENS Lyon 46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07 France, cmouhot@umpa.ens-lyon.fr

written in the sequel: the estimates proven in this paper are all local in (t, x) . Thus it acts on $f(v)$ by

$$Q^{\mathcal{B}o}(f, f)(v) = \int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \int_{\sigma \in \mathbb{S}^{N-1}} B(\cos \theta, |v - v_*|) [f'_* f' - f_* f] d\sigma dv_*$$

where we have used the shorthands $f = f(v)$, $f_* = f(v_*)$, $f' = f(v')$, $f'_* = f(v'_*)$. The velocities are given by

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma.$$

The collision kernel B is a non-negative function which only depends on $|v - v_*|$ and $\cos \theta = k \cdot \sigma$ where $k = (v - v_*)/|v - v_*|$.

Consider the collision operator obtained by the linearization process around the Maxwellian *global* equilibrium state denoted by M

$$L^{\mathcal{B}o}h(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} B(\cos \theta, |v - v_*|) M(v_*) [h'_* + h' - h_* - h] d\sigma dv_*,$$

where $f = M(1 + h)$ and $M(v) = e^{-|v|^2}$. Notice that for the associated linearized equation, the entropy is the $L^2(M)$ norm of h and thus by differentiating, the entropy production is

$$\langle h, L^{\mathcal{B}o}h \rangle_{L^2(M)} = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} B(\cos \theta, |v - v_*|) [h'_* + h' - h_* - h]^2 M M_* d\sigma dv_* dv.$$

This quantity is non-positive. At the level of the linearized equation, this corresponds to the first part of Boltzmann's H -theorem, and it implies that the spectrum of $L^{\mathcal{B}o}$ in $L^2(M)$ is non-positive. Let us denote $D^{\mathcal{B}o}(h) = -\langle h, L^{\mathcal{B}o}h \rangle_{L^2(M)}$. We shall call this quantity “(linearized) entropy dissipation functional” by analogy with the nonlinear case.

In the case of long-distance interaction, the collisions occur mostly for very small deviation angle θ . In the case of the Coulomb potential, for which the Boltzmann collision operator is meaningless (see [18, Annex I, Appendix A]), one has to replace it by the Landau collision operator

$$Q^{\mathcal{L}a}(f, f)(v) = \nabla_v \cdot \left(\int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \mathbf{a}(v - v_*) [f_*(\nabla f) - f(\nabla f)_*] dv_* \right),$$

with $\mathbf{a}(z) = |z|^2 \Phi(z) \Pi_{z^\perp}$, where Π_{z^\perp} is the orthogonal projection onto z^\perp , i.e

$$(\Pi_{z^\perp})_{i,j} = \delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}.$$

This operator is used for instance in models of plasma in the case of a Coulomb potential, i.e a gas of (partially or totally) ionized particles (for more details see [16] and the references therein). Applying the same linearization process than for the Boltzmann operator (around the same global equilibrium M), we define the linearized Landau operator

$$L^{\mathcal{L}a}h(v) = M(v)^{-1} \nabla_v \cdot \left(\int_{v_* \in \mathbb{R}^N} \mathbf{a}(v - v_*) [(\nabla h) - (\nabla h)_*] M M_* dv_* \right),$$

and the (linearized) Landau entropy dissipation functional

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{L}^a}(h) &= - \langle h, L^{\mathcal{L}^a} h \rangle_{L^2(M)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(v - v_*) |v - v_*|^2 \left\| \Pi_{(v-v_*)^\perp} [(\nabla h) - (\nabla h)_*] \right\|^2 M M_* dv_* dv \end{aligned}$$

which is also non-positive. It implies that the spectrum of $L^{\mathcal{L}^a}$ in $L^2(M)$ is non-positive.

Let us now write down our assumptions for the collision kernel B :

- B is a tensorial product

$$B = b(\cos \theta) \Phi(|v - v_*|), \quad (5.1)$$

where Φ and b are non-negative functions (this is the case for instance for collision kernels deriving from interaction potentials behaving like inverse-power laws).

- The kinetic part Φ is bounded from below at infinity, i.e

$$\exists R \geq 0, c_\Phi > 0 \mid \forall r \geq R, \Phi(r) \geq c_\Phi. \quad (5.2)$$

This assumption holds for hard potentials (and hard spheres).

- The angular part b satisfies

$$c_b = \inf_{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_3 \in \mathbb{S}^{N-1}} \min\{b(\sigma_1 \cdot \sigma_3), b(\sigma_2 \cdot \sigma_3)\} d\sigma_3 > 0. \quad (5.3)$$

This covers all the physical cases.

Remarks: 1. Notice that there is no b left in $Q^{\mathcal{L}^a}$ and $L^{\mathcal{L}^a}$ but the function Φ is definitely the same in both Landau and Boltzmann operators. Therefore the assumptions on the Landau operator reduce to (5.2). Thus we deal with the so-called “hard potentials” case for the Landau operator, which excludes the Coulomb potential.

2. The assumption that B is a tensorial product is made for a sake of simplicity. Indeed, one could easily adapt the proofs in section 5.2 to relax this assumption. The price to pay would be a more technical condition on the collision kernel B .

The spectral properties of the linearized Boltzmann and Landau operators have been extensively studied. In particular, there are of crucial interest for perturbative approach issues. For instance, the convergence to equilibrium has been studied in this context, as well as the hydrodynamical limit (see [12]).

On the one hand, for hard potentials, the existence of a spectral gap as soon as the kinetic part of the collision kernel is bounded from below at infinity is a classical result, which can be traced back unto Grad himself. The only method was up to now to work under the assumption of Grad’s angular cutoff, and to apply Weyl’s Theorem to $L^{\mathcal{B}}$, written as a compact perturbation of a multiplication operator (a very clear presentation of this proof can be found in [5]). The picture of the spectrum obtained for the operator (under Grad’s cutoff assumption) is described by figures 5.1 and 5.2 (see [4]).

A similar method has been applied to the Landau linearized operator with hard potential in [7].

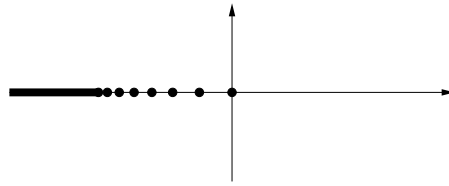


Figure 5.1: Spectrum of the collision operator for strictly hard potential with angular cutoff

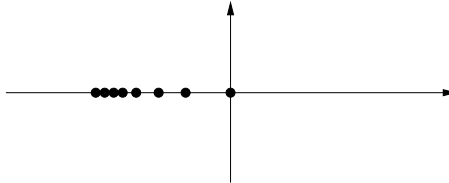


Figure 5.2: Spectrum of the collision operator for Maxwell's molecules with angular cutoff

On the other hand, for the particular case of Maxwellian molecules (for $L^{\mathcal{B}}$), a complete and explicit diagonalisation has been obtained first by symmetry arguments in [19], and then by Fourier methods in [1]. The spectral gap for the “over-Maxwellian” collision kernel of the Landau linearized operator (i.e collision kernels which are bounded from below by one for Maxwellian molecules) can be derived from results in [11], by a linearization process. Notice also that in the case of the so-called Kac’s equation, an explicit entropy production estimate, based on a cancellation method, was given in [10]; this method can be linearized in order to give explicit spectral gap estimates for “over-quadratic” linearized Kac’s operator (for which the physical meaning is not clear!). Nevertheless we did not manage to adapt this strategy to the Boltzmann operator with hard potentials. Notice however that Wennberg [20] gave an extension of the very first entropy estimates of Desvillettes [8] to allow for hard and soft potentials. His idea has some similarities with ours: to avoid the region in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ where $\Phi(|v - v_*|)$ is small.

A specific study of the spectral properties of the linearized operator was made for *non-cutoff* hard potentials in [15]. Nevertheless this article was critically reviewed some years later in [14]. Also another specific study for “radial cutoff potentials” was done in [6].

Finally notice that it is proved in [2] that the Boltzmann linearized operator with soft potential has no spectral gap. The resulting spectrum is described in figure 5.3 (see [4]).

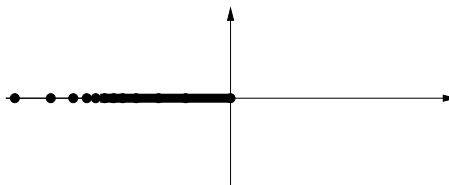


Figure 5.3: Spectrum of the collision operator for soft potentials with angular cutoff

But if one allows a loss on the algebraic weight of the norm, it was proved in [13] a

“degenerated spectral gap” result of the form

$$\|L^{\mathcal{B}o}h\|_{L^2(M)} \geq C \|h\|_{L^2_\gamma(M)} \quad \forall h \perp \{1; v; |v|^2\},$$

where $\gamma < 0$ is the power of the kernel Φ . It is based on inequalities proven in [2] and Weyl’s Theorem.

However, the perturbative method has drawbacks, all coming from the fact that it does not rely on a physical argument. First it is not explicit, that is the width of the spectral gap is not known, which is problematic when one wants to obtain quantitative estimates of convergence to equilibrium. Secondly it gives no information about how this spectral gap is sensitive to the perturbation of the collision kernel. Finally approaches based on Weyl’s Theorem rely strongly on Grad’s cutoff assumption via “Grad’s splitting”, which means to deal separately with the gain and the loss part of the collision operator.

Our method is geometrical and based on a physical argument. It gives explicit estimates and deals with the whole operator, with or without angular cutoff. Up to our knowledge, as far as spectral gaps are considered, it covers all the results of the above-mentioned articles dealing with hard potentials, with or without angular cutoff.

We think likely that this geometrical method could also be adapted to give explicit versions of “degenerated spectral gap” results in the case of soft potentials, even if up to now we did not manage to do it.

We now state our main theorems:

Theorem 5.1 (The Boltzmann linearized operator) *Under the assumptions (5.1), (5.2), (5.3), the Boltzmann entropy dissipation functional $D^{\mathcal{B}o}$ with $B = \Phi b$ satisfies, for all $h \in L^2(M)$*

$$D^{\mathcal{B}o}(h) \geq C_{\Phi,b}^{\mathcal{B}o} D_0^{\mathcal{B}o}(h), \quad (5.4)$$

where $D_0^{\mathcal{B}o}(h)$ stands for the entropy dissipation functional with $B_0 \equiv 1$ and

$$C_{\Phi,b}^{\mathcal{B}o} = \left(\frac{c_\Phi c_b e^{-4R^2}}{32 |\mathbb{S}^{N-1}|} \right)$$

with R, c_Φ, c_b being defined in (5.2), (5.3).

As a consequence we deduce quantitative estimates on the spectral gap of the linearized Boltzmann operator, namely for all $h \in L^2(M)$ orthogonal in $L^2(M)$ to $1, v$ and $|v|^2$, we have

$$D^{\mathcal{B}o}(h) \geq C_{\Phi,b}^{\mathcal{B}o} |\lambda_0^{\mathcal{B}o}| \|h\|_{L^2(M)}^2. \quad (5.5)$$

Here $\lambda_0^{\mathcal{B}o}$ is the first non-zero eigenvalue of the linearized Boltzmann operator with $B_0 \equiv 1$ (that is, for Maxwellian molecules with no angular dependence, sometimes called pseudo-Maxwellian molecules) which equals in dimension 3 (see [1])

$$\lambda_0^{\mathcal{B}o} = -\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = -\frac{4\pi}{3}.$$

Remark: As an application of this theorem, let us give explicit formulas for the spectral gap $S_\gamma^{\mathcal{B}o}$ of the Boltzmann linearized operator with $b \geq 1$ and $\Phi(z) = |z|^\gamma$, $\gamma > 0$, in dimension 3. Then $c_b \geq |\mathbb{S}^2|$ and for any given R we can take $c_\Phi = R^\gamma$. Thus we get

$$S_\gamma^{\mathcal{B}o} \geq \left(\frac{R^\gamma e^{-4R^2}}{32} \right) \frac{4\pi}{3}$$

for any $R > 0$. An easy computation leads to the lower bound

$$S_\gamma^{\mathcal{B}o} \geq \frac{\pi (\gamma/8)^{\gamma/2} e^{-\gamma/2}}{24}$$

by optimizing the free parameter R .

Theorem 5.2 (The Landau linearized operator) *Under assumptions (5.2), the Landau entropy dissipation functional $D^{\mathcal{L}a}$ with collision kernel Φ satisfies, for all $h \in L^2(M)$*

$$D^{\mathcal{L}a}(h) \geq C_\Phi^{\mathcal{L}a} D_0^{\mathcal{L}a}(h) \quad (5.6)$$

where $D_0^{\mathcal{L}a}(h)$ stands for the Landau entropy dissipation functional with $\Phi_0 \equiv 1$ and

$$C_\Phi^{\mathcal{L}a} = \left(\frac{c_\Phi \beta_R}{8 \alpha_N} \right)$$

with

$$\alpha_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|V|^2} dV, \quad \beta_R = \int_{\{V \in \mathbb{R}^{N-1} \mid |V| \geq 2R\}} e^{-|V|^2} dV.$$

As a consequence we deduce quantitative estimates on the spectral gap of the linearized Landau operator, namely for all $h \in L^2(M)$ orthogonal in $L^2(M)$ to 1, v and $|v|^2$, we have

$$D^{\mathcal{L}a}(h) \geq C_\Phi^{\mathcal{L}a} |\lambda_0^{\mathcal{L}a}| \|h\|_{L^2(M)}^2. \quad (5.7)$$

Here $\lambda_0^{\mathcal{L}a}$ is the first non-zero eigenvalue of the linearized Landau operator with $\Phi_0 \equiv 1$ (that is, for Maxwellian molecules).

Moreover in dimension 3, by grazing collisions limit, we can estimate $\lambda_0^{\mathcal{L}a}$ thanks to the explicit formula on the spectral gap of the Boltzmann linearized operator for Maxwellian molecules

$$|\lambda_0^{\mathcal{L}a}| \geq 2\pi. \quad (5.8)$$

Remarks: 1. As for the Boltzmann linearized operator, we can deduce from this theorem an explicit formula for a lower bound on the spectral gap $S_\gamma^{\mathcal{L}a}$ for the Landau linearized operator with hard potentials $\Phi(z) = |z|^\gamma$, $\gamma > 0$, in dimension 3. We get

$$S_\gamma^{\mathcal{L}a} \geq \left(\frac{R^\gamma e^{-4R^2}}{8} \right) 2\pi$$

for any $R > 0$. An easy computation leads to the lower bound

$$S_\gamma^{\mathcal{L}a} \geq \frac{\pi (\gamma/8)^{\gamma/2} e^{-\gamma/2}}{4}$$

by optimizing the free parameter R .

2. The modulus of the first non-zero eigenvalue of the Landau linearized operator for Maxwellian molecules is estimated here by grazing collisions limit. Other methods would have been the linearization of entropy estimates in [11], or to use the decomposition (established in [17]) of the Landau operator for Maxwellian molecules into a Fokker-Planck part (for which spectral gap is already known) and a spherical diffusion process, which can only increase the spectral gap; and then to linearize the estimate thus obtained.

3. More generally, it is likely that an explicit spectral gap for the Landau linearized operator with hard potentials could be directly computed by existing methods even if up to our knowledge this is the first explicit formula. But Theorem 5.2 is stronger: it says that the property proved on the Boltzmann operator with hard potentials, namely “cancellations for small relative velocities can be neglected as far as entropy production is concerned”, remains true for the Landau linearized operator with hard potentials.

The idea of the proof is to reduce the case of hard potentials (in the generalized sense (5.2)) to the Maxwellian case. The difficulty is to deal with the cancellations of the kinetic collision kernel Φ on the diagonal $v = v_*$.

The starting point is the following inequality which is a corollary of [3, Theorem 2.4]

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi(x) - \xi(y)|^2 |x - y|^\gamma M(x) M(y) dx dy \\ \geq K_\gamma \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi(x) - \xi(y)|^2 M(x) M(y) dx dy \end{aligned} \quad (5.9)$$

for $\gamma \geq 0$, ξ some function, and

$$K_\gamma = \frac{1}{4 \int_{\mathbb{R}^N} M} \inf_{x, y \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \min \{|x - z|^\gamma, |z - y|^\gamma\} M(z) dz.$$

It was first suggested by Villani [16, Chap. 5, section 1.4], in the context of the study of entropy-entropy dissipation inequalities for the Landau equation with hard potentials, that this inequality could allow to prove that hard potentials reduce to the Maxwellian case as far as convergence to equilibrium is concerned.

The proof of (5.9) relies strongly on the existence of a “triangular inequality” for some function $F(x, y)$ integrated: in (5.9), the function F is simply $|\xi(x) - \xi(y)|^2$ which satisfies

$$F(x, y) \leq 2F(x, z) + 2F(z, y).$$

The main difficulty is hence to obtain such a “triangular inequality” adapted to our case for the Boltzmann linearized operator. It will be discussed in details in section 5.2 together with the proof of Theorem 5.1. Section 5.3 will be devoted to the Landau linearized operator: using results of section 5.2, we will prove Theorem 5.2 thanks to a grazing collision limit.

5.2 The Boltzmann linearized operator

In this section, we present the proof of inequality (5.4) in Theorem 5.1. In order to “avoid” the diagonal $v \sim v_*$ where Φ is not uniformly bounded from below, we use the following argument: performing a collision with small relative velocity (i.e. for a small $|v - v_*|$) is the same than performing two collisions with great relative velocity, provided that the pre- and post-collisional velocities are the same. One could summarize the situation in this way: when a collision with small relative velocity occurs, at the same time, two collisions with great relative velocity occur, which give the same pre- and post-collisional velocities, and which produce *at least the same amount of entropy*.

Before proving (5.4), let us begin with a preliminary lemma dealing with the angular part of the collision kernel. This lemma is based on the same geometrical idea as the one we shall use for the treatment of the cancellations of Φ : the introduction of some well-chosen intermediate collision. This first step is made for the sake of simplicity: we show that in the sequel of this section one can set $b \equiv 1$ without restriction. It makes the proof clearer, and simplifies somehow the constants.

Let us denote from now on

$$k(v, v_*, v', v'_*) = [h(v) + h(v_*) - h(v') - h(v'_*)]^2.$$

Lemma 5.3 (Homogenization of the angular collision kernel b) *Under the assumptions (5.1), (5.2), (5.3), for all $h \in L^2(M)$,*

$$D^{\mathcal{B}o}(h) \geq \frac{c_b}{4|\mathbb{S}^{N-1}|} D_1^{\mathcal{B}o}(h) \quad (5.10)$$

where $D_1^{\mathcal{B}o}$ denotes the entropy dissipation functional with $B = \Phi(|v - v_*|)$ instead of $B = \Phi(|v - v_*|) b(\theta)$.

Remark: This lemma allows to bound from below the entropy dissipation functional by one with an “uniform angular collision kernel”, i.e a constant c_b , even when b is not bounded from below by a positive number uniformly on the sphere. Notice for instance that the condition $c_b > 0$ is satisfied for b having only finite number of 0.

Proof 5.1 (Proof of Lemma 5.3) *First, we write down an appropriate representation of the operator. The functional $D^{\mathcal{B}o}$ reads in “ σ -representation”*

$$D^{\mathcal{B}o}(h) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Phi(|v - v_*|) b \left(\frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cdot \sigma_1 \right) M M_* k(v, v_*, v', v'_*) d\sigma_1 dv_* dv.$$

(for the classical representations of the Boltzmann operator we refer to [16]). Then keeping σ_1 fixed we do the change of variable $(v, v_*) \rightarrow (\frac{v+v_*}{2}, \frac{v-v_*}{2})$, whose Jacobian is $(-1/2)^N$. Let us denote $\Omega = \frac{v+v_*}{2}$ and $\Omega' = \frac{v-v_*}{2}$. We obtain

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{B}o}(h) &= \frac{2^N}{4} \int_{\Omega \in \mathbb{R}^N} \int_{\Omega' \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Phi(2|\Omega'|) b \left(\frac{\Omega'}{|\Omega'|} \cdot \sigma_1 \right) \\ &k(\Omega + \Omega', \Omega - \Omega', \Omega + |\Omega'| \sigma_1, \Omega - |\Omega'| \sigma_1) e^{-2|\Omega|^2 - 2|\Omega'|^2} d\sigma_1 d\Omega d\Omega' \end{aligned}$$

(recall that $|\Omega|^2 + |\Omega'|^2 = \frac{|v|^2 + |v_*|^2}{2}$).

We now write Ω' in spherical coordinates $\Omega' = r\sigma_2$, the other variables being kept fixed, and use Fubini's Theorem

$$D^{\mathcal{B}o}(h) = \frac{2^N}{4} \int_{\Omega \in \mathbb{R}^N} \int_{r \in \mathbb{R}_+} r^{N-1} \Phi(2r) e^{-2|\Omega|^2 - 2r^2} \int_{\sigma_1 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} b(\sigma_1 \cdot \sigma_2) k(\Omega + r\sigma_2, \Omega - r\sigma_2, \Omega + r\sigma_1, \Omega - r\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 dr d\Omega.$$

Now we apply a geometrical idea that we shall also use below in the treatment of cancellations of Φ : namely we add a third artificial variable. Let us thus introduce two collisions points u and u_* on the sphere of center Ω and radius r (see figure 5.4) and replace the collision “ (v, v_*) gives (v', v'_*) ” by the two collisions “ (v, v_*) gives (u, u_*) ” and “ (u, u_*) gives (v', v'_*) ”.

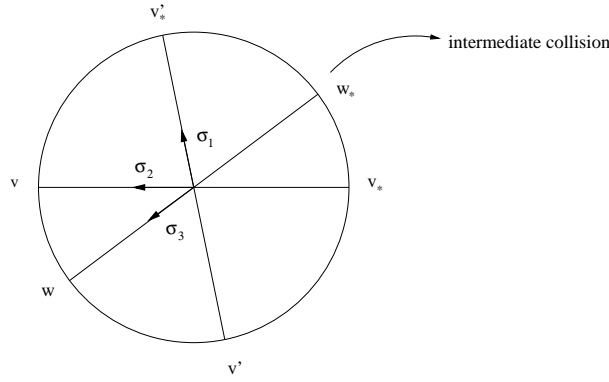


Figure 5.4: Introduction of an intermediate collision

Then, we shall use the following “triangular” inequality on the collision points:

$$\left[(h(v) + h(v_*)) - (h(v') + h(v'_*)) \right]^2 \leq 2 \left[(h(v) + h(v_*)) - (h(u) + h(u_*)) \right]^2 + 2 \left[(h(u) + h(u_*)) - (h(v') + h(v'_*)) \right]^2. \quad (5.11)$$

So let us add a third “blind” variable σ_3 on the sphere

$$D^{\mathcal{B}o}(h) = \frac{2^N}{4 |\mathbb{S}^{N-1}|} \int_{\Omega \in \mathbb{R}^N} \int_{r \in \mathbb{R}_+} r^{N-1} \Phi(2r) e^{-2|\Omega|^2 - 2r^2} \int_{\sigma_1 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_3 \in \mathbb{S}^{N-1}} b(\sigma_1 \cdot \sigma_2) k(\Omega + r\sigma_2, \Omega - r\sigma_2, \Omega + r\sigma_1, \Omega - r\sigma_1) d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 dr d\Omega.$$

As variables σ_1 , σ_2 and σ_3 are equivalent, one can change the “blind” variable into either σ_1 or σ_2 and compute the mean to get

$$D^{\mathcal{B}o}(h) = \frac{2^N}{4 |\mathbb{S}^{N-1}|} \int_{\Omega \in \mathbb{R}^N} \int_{r \in \mathbb{R}_+} r^{N-1} \Phi(2r) e^{-2|\Omega|^2 - 2r^2} \int_{\sigma_1 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_3 \in \mathbb{S}^{N-1}} \frac{1}{2} \left[b(\sigma_1 \cdot \sigma_3) k(\Omega + r\sigma_3, \Omega - r\sigma_3, \Omega + r\sigma_1, \Omega - r\sigma_1) + b(\sigma_2 \cdot \sigma_3) k(\Omega + r\sigma_2, \Omega - r\sigma_2, \Omega + r\sigma_3, \Omega - r\sigma_3) \right] d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 dr d\Omega,$$

which yields

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{B}o}(h) &\geq \frac{2^N}{4 |\mathbb{S}^{N-1}|} \int_{\Omega \in \mathbb{R}^N} \int_{r \in \mathbb{R}_+} \int_{\sigma_1 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_3 \in \mathbb{S}^{N-1}} \Phi(2r) \\ &\quad \frac{1}{2} \min\{b(\sigma_1 \cdot \sigma_3), b(\sigma_2 \cdot \sigma_3)\} \left[k(\Omega + r\sigma_3, \Omega - r\sigma_3, \Omega + r\sigma_1, \Omega - r\sigma_1) \right. \\ &\quad \left. + k(\Omega + r\sigma_2, \Omega - r\sigma_2, \Omega + r\sigma_3, \Omega - r\sigma_3) \right] e^{-2|\Omega|^2 - 2r^2} d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 dr d\Omega, \end{aligned}$$

The triangular inequality needed on k is

$$\begin{aligned} k(\Omega + r\sigma_2, \Omega - r\sigma_2, \Omega + r\sigma_1, \Omega - r\sigma_1) &\leq 2k(\Omega + r\sigma_3, \Omega - r\sigma_3, \Omega + r\sigma_1, \Omega - r\sigma_1) \\ &\quad + 2k(\Omega + r\sigma_2, \Omega - r\sigma_2, \Omega + r\sigma_3, \Omega - r\sigma_3) \end{aligned}$$

and follows from (5.11). Thus if one sets

$$c_b = \inf_{\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^{N-1}} \int_{\sigma_3 \in \mathbb{S}^{N-1}} \min\{b(\sigma_1 \cdot \sigma_3), b(\sigma_2 \cdot \sigma_3)\} d\sigma_3,$$

one obtains (going back to the classical representation)

$$\begin{aligned} D^{\mathcal{B}o}(h) &\geq \frac{c_b}{4 |\mathbb{S}^{N-1}|} \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|v - v_*|) M M_* k(v, v_*, v', v'_*) d\sigma dv_* dv \\ &\geq \frac{c_b}{4 |\mathbb{S}^{N-1}|} D_1^{\mathcal{B}o}(h) \end{aligned}$$

which concludes the proof.

Lemma 5.4 (Treatment of the cancellations of Φ) Under the assumptions (5.2) on Φ , for all $h \in L^2(M)$

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) \geq \left(\frac{c_\Phi e^{-4R^2}}{8} \right) D_0^{\mathcal{B}o}(h) \quad (5.12)$$

where $D_1^{\mathcal{B}o}$ is the entropy dissipation functional with $B = \Phi(|v - v_*|)$ and $D_0^{\mathcal{B}o}$ is the entropy dissipation functional with $B = 1$.

Proof 5.2 (Proof of Lemma 5.4) We assume here that $b \equiv 1$. Lemma 5.3 indeed shows that this is no restriction modulo a factor $c_b/(4 |\mathbb{S}^{N-1}|)$. Let us consider the so-called “ ω -representation” (see [16] again): the vector σ integrated on the sphere becomes $\omega = \frac{v' - v}{|v' - v|}$ and the change of variable changes the angular kernel into

$$\tilde{b}(\theta) = 2^{N-1} \sin^{N-2} \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

where $\cos \theta = 2(k \cdot \omega)^2 - 1$ with $k = (v - v_*)/|v - v_*|$.

The operator $D_1^{\mathcal{B}o}(h)$ thus becomes

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \Phi(|v - v_*|) \tilde{b}(\theta) M M_* k(v, v_*, v', v'_*) d\omega dv dv_*.$$

where the velocities v', v'_* are given by

$$v' = v - (v - v_*, \omega)\omega, \quad v'_* = v_* + (v - v_*, \omega)\omega.$$

Then keeping ω fixed we do the following change of variable

$$v = r_1\omega + V_1, \quad v_* = r_2\omega + V_2$$

with $V_1, V_2 \in \omega^\perp$. The Jacobian of the change of variable is 1 since the decompositions are orthogonal. Finally we obtain the following representation

$$\begin{aligned} D_1^{\mathcal{B}o}(h) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} e^{-r_1^2 - r_2^2} \Phi \left(\sqrt{|r_2 - r_1|^2 + |V_2 - V_1|^2} \right) \\ &\quad \tilde{b}(\theta) k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) dr_1 dr_2 dV_2 dV_1 d\omega. \end{aligned}$$

Assume that Φ is non-decreasing. This is no restriction since $\Phi \geq \tilde{\Phi}$, with

$$\tilde{\Phi}(r) = \inf_{r' \geq r} \Phi(r'),$$

and $\tilde{\Phi}$ satisfies assumption (5.2) with the same constant as Φ . This monotonicity yields

$$\begin{aligned} D_1^{\mathcal{B}o}(h) &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} e^{-r_1^2 - r_2^2} \Phi(|r_2 - r_1|) \\ &\quad \tilde{b}(\theta) k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) dr_1 dr_2 dV_2 dV_1 d\omega. \end{aligned}$$

We now introduce two collision points u and u_* (see figure 5.5) and replace the collision “ (v, v_*) gives (v', v'_*) ” by the two collisions “ (v, u_*) gives (v'_*, u) ” and “ (u, v_*) gives (u_*, v') ”.

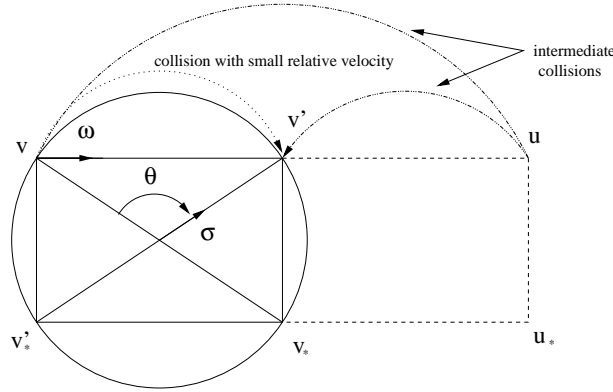


Figure 5.5: Introduction of an intermediate collision

Then, we shall use the following “triangular” inequality on the collision points:

$$\begin{aligned} \left[(h(v) + h(v_*)) - (h(v') + h(v'_*)) \right]^2 &\leq 2 \left[(h(v) + h(u_*)) - (h(u) + h(v'_*)) \right]^2 \\ &\quad + 2 \left[(h(u) + h(v_*)) - (h(v') + h(u_*)) \right]^2. \end{aligned}$$

Recall that $\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$. Let us add a third artificial integration variable r_3 on \mathbb{R}

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) \geq \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \int_{r_3 \in \mathbb{R}} \Phi(|r_2 - r_1|) \tilde{b}(\theta_{1,2}) \\ k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) e^{-r_1^2 - r_2^2 - r_3^2} dr_1 dr_2 dr_3 dV_1 dV_2 d\omega.$$

From now on, indexes of θ denote the points which are chosen to compute the angle. Now we rename r_1, r_2, r_3 first in r_1, r_3, r_2 , secondly in r_3, r_2, r_1 and we take the mean of these two quantities. We get

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) \geq \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \int_{r_3 \in \mathbb{R}} e^{-r_1^2 - r_2^2 - r_3^2} \\ \left[\tilde{b}(\theta_{1,3}) \Phi(|r_3 - r_1|) k(r_1\omega + V_1, r_3\omega + V_2, r_3\omega + V_1, r_1\omega + V_2) \right. \\ \left. + \tilde{b}(\theta_{2,3}) \Phi(|r_2 - r_3|) k(r_3\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_3\omega + V_2) \right] dr_1 dr_2 dr_3 dV_1 dV_2 d\omega.$$

Then,

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) \geq \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \int_{r_3 \in \mathbb{R}} \\ \min \{ \tilde{b}(\theta_{1,3}) \Phi(|r_3 - r_1|), \tilde{b}(\theta_{2,3}) \Phi(|r_2 - r_3|) \} \\ \left[k(r_1\omega + V_1, r_3\omega + V_2, r_3\omega + V_1, r_1\omega + V_2) + \right. \\ \left. k(r_3\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_3\omega + V_2) \right] e^{-r_1^2 - r_2^2 - r_3^2} dr_1 dr_2 dr_3 dV_1 dV_2 d\omega. \quad (5.13)$$

Now we use the following triangular inequality above-mentioned which means translated on k

$$k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) \leq 2k(r_1\omega + V_1, r_3\omega + V_2, r_3\omega + V_1, r_1\omega + V_2) \\ + 2k(r_3\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_3\omega + V_2).$$

Plugging it in (5.13), we get

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) \geq \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \int_{r_3 \in \mathbb{R}} \\ \min \{ \tilde{b}(\theta_{1,3}) \Phi(|r_3 - r_1|), \tilde{b}(\theta_{2,3}) \Phi(|r_2 - r_3|) \} \\ k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) e^{-r_1^2 - r_2^2 - r_3^2} dr_1 dr_2 dr_3 dV_1 dV_2 d\omega,$$

which yields

$$D_1^{\mathcal{B}o}(h) \geq \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \\ \left(\int_{r_3 \in \mathbb{R}} \min \{ \tilde{b}(\theta_{1,3}) \Phi(|r_3 - r_1|), \tilde{b}(\theta_{2,3}) \Phi(|r_2 - r_3|) \} e^{-r_3^2} dr_3 \right) \\ k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) e^{-r_1^2 - r_2^2} dr_1 dr_2 dV_1 dV_2 d\omega.$$

We now restrict the domain of integration for r_3 to the set

$$\mathcal{D}_{r_1, r_2} = \{ r_3 \in \mathbb{R} \mid |r_3 - r_1| \geq |r_1 - r_2| \text{ and } |r_2 - r_3| \geq |r_1 - r_2| \}.$$

Since \tilde{b} is non-decreasing, and

$$\cos \theta = \frac{|V_1 - V_2|^2 - |r_1 - r_2|^2}{|V_1 - V_2|^2 + |r_1 - r_2|^2}$$

which is non-increasing with respect to $|r_1 - r_2|$ when V_1, V_2 are kept frozen, it is easy to check that on this domain we have $\theta_{1,3} \geq \theta_{1,2}$ and $\theta_{2,3} \geq \theta_{1,2}$ and thus $\tilde{b}(\theta_{1,3}) \geq \tilde{b}(\theta_{1,2})$ and $\tilde{b}(\theta_{2,3}) \geq \tilde{b}(\theta_{1,2})$. Therefore we get

$$\begin{aligned} D_1^{\mathcal{B}o}(h) &\geq \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \\ &\quad \left(\int_{r_3 \in \mathcal{D}_{r_1, r_2}} \min \{ \Phi(|r_3 - r_1|), \Phi(|r_2 - r_3|) \} e^{-r_3^2} dr_3 \right) \tilde{b}(\theta_{1,2}) \\ &\quad k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) e^{-r_1^2 - r_2^2} dr_1 dr_2 dV_1 dV_2 d\omega. \end{aligned}$$

Under assumption (5.2), an easy computation leads to

$$\left(\int_{r_3 \in \mathcal{D}_{r_1, r_2}} \min \{ \Phi(|r_3 - r_1|), \Phi(|r_2 - r_3|) \} e^{-|r_3|^2} dr_3 \right) \geq c_\Phi \sqrt{\pi} e^{-4R^2} > 0$$

as soon as $|r_1 - r_2| \leq R$, i.e

$$\left(\int_{r_3 \in \mathcal{D}_{r_1, r_2}} \min \{ \Phi(|r_3 - r_1|), \Phi(|r_2 - r_3|) \} e^{-|r_3|^2} dr_3 \right) \geq c_\Phi \sqrt{\pi} e^{-4R^2} 1_{|r_1 - r_2| \leq R}.$$

By taking the mean of this estimate and the one obtained by replacing Φ by its bound from below $c_\Phi 1_{r \geq R}$, we deduce that

$$\begin{aligned} D_1^{\mathcal{B}o}(h) &\geq \min \left(\frac{c_\Phi e^{-4R^2}}{8}, \frac{c_\Phi}{2} \right) \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} \\ &\quad k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) \tilde{b}(\theta) e^{-r_1^2 - r_2^2} dr_1 dr_2 dV_1 dV_2 d\omega. \end{aligned}$$

If we now go back to the classical representation and simplify the minimum, we obtain

$$\begin{aligned} D_1^{\mathcal{B}o}(h) &\geq \left(\frac{c_\Phi e^{-4R^2}}{8} \right) \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} M M_* k(v, v_*, v', v'_*) d\sigma dv dv_* \\ &= \left(\frac{c_\Phi e^{-4R^2}}{8} \right) D_0^{\mathcal{B}o}(h) \end{aligned}$$

which concludes the proof of the lemma.

The proof of Theorem 5.1 is a straightforward consequence of inequalities (5.10) and (5.12).

5.3 The Landau linearized operator

We now prove Theorem 5.2. The idea here is to take the grazing collisions limit in some inequalities on the Boltzmann linearized operator obtained thanks to the geometrical method used in Section 5.2. In fact, the most natural idea would have been to look for a geometrical property on the Landau linearized operator similar to the triangular inequality used for the Boltzmann linearized operator. But as collision circles reduce to lines in the grazing limit, the triangular inequality becomes trivial, and thus does not seem sufficient to apply the method of section 5.2. It could be linked to the fact that in the grazing collisions limit one loses some information on the geometry of the collision.

The problem that has to be tackled is to keep track of the angular collision kernel b . In fact we need it only for particular b , namely

$$b_\varepsilon(\theta) = \frac{j_\varepsilon(\theta)}{\varepsilon^2 \sin^{N-2} \frac{\theta}{2}} \quad (5.14)$$

where $j_\varepsilon(\theta) = j(\theta/\varepsilon)/\varepsilon$ is a sequence of mollifiers (approximating $\delta_{\theta=0}$) with compact support in $[0, \pi/2]$ and non-increasing on this interval. It is easy to see that $\tilde{b}_\varepsilon = 2^{N-1} \sin^{N-2}(\frac{\theta}{2}) b_\varepsilon$ is also non-increasing on $[0, \pi]$. Following the same strategy as in Lemma 5.4 but keeping track of the angular part of the collision kernel, one obtains

Lemma 5.5 *Under the assumptions (5.1), (5.2), (5.3), plus the assumption that $\tilde{b} = 2^{N-1} \sin^{N-2}(\frac{\theta}{2}) b$ is non-increasing, one gets for all $h \in L^2(M)$*

$$D_{b,\Phi}^{\mathcal{B}_o}(h) \geq \left(\frac{c_\Phi \beta_R}{8\alpha_N} \right) D_{b,1}^{\mathcal{B}_o}(h) \quad (5.15)$$

with

$$\alpha_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|V|^2} dV, \quad \beta_R = \int_{\{V \in \mathbb{R}^{N-1} \mid |V| \geq 2R\}} e^{-|V|^2} dV.$$

Here $D_{b,\Phi}^{\mathcal{B}_o}$ stands for the entropy dissipation functional with $B = \Phi b$ and $D_{b,1}^{\mathcal{B}_o}$ stands for the entropy dissipation functional with $B = b$.

Proof 5.3 (Proof of Lemma 5.5) *The geometrical idea of Lemma 5.4 can be applied to the variables V_1, V_2 . Let us thus introduce two collisions points u and u_* (see figure 5.6) and replace the collision “ (v, v_*) gives (v', v'_*) ” by the two collisions “ (v, u_*) gives (v', u) ” and “ (u, v_*) gives (u_*, v'_*) ”.*

Then, we shall use the following “triangular” inequality on the collision points:

$$\begin{aligned} [(h(v) + h(v_*)) - (h(v') + h(v'_*))]^2 &\leq 2[(h(v) + h(u_*)) - (h(v') + h(u))]^2 \\ &\quad + 2[(h(u) + h(v_*)) - (h(u_*) + h(v'_*))]^2. \end{aligned}$$

Now we introduce an artificial third variable V_3 on ω^\perp . Let us denote

$$\alpha_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|V|^2} dV$$

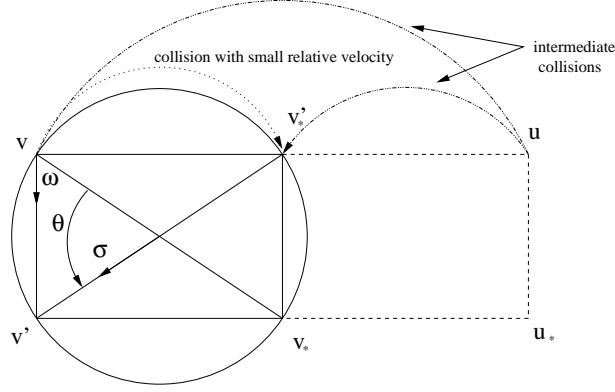


Figure 5.6: Introduction of an intermediate collision

By inverting either V_1 and V_3 or V_2 and V_3 , taking the mean, and using the “triangular” inequality above-mentioned we get

$$D_{b,\Phi}^{\mathcal{B}_o}(h) \geq \frac{1}{16\alpha_N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} e^{-r_1^2 - r_2^2} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} \left(\int_{V_3 \in \omega^\perp} \min \left\{ \tilde{b}(\theta_{1,3}) \Phi(|V_3 - V_1|), \tilde{b}(\theta_{2,3}) \Phi(|V_2 - V_3|) \right\} e^{-|V_3|^2} dV_3 \right) k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} dr_1 dr_2 dV_1 dV_2 d\omega.$$

Let us now restrict the integration along V_3 to the domain

$$\mathcal{D}_{V_1, V_2} = \{V_3 \mid |V_3 - V_1| \geq |V_1 - V_2| \text{ and } |V_2 - V_3| \geq |V_1 - V_2|\}.$$

Then since the expression

$$\cos \theta = \frac{|V_1 - V_2|^2 - |r_1 - r_2|^2}{|V_1 - V_2|^2 + |r_1 - r_2|^2}$$

is non-decreasing according to $|V_1 - V_2|$ when r_1, r_2 are kept frozen, and \tilde{b} is non-increasing, we get $\theta_{1,3} \leq \theta_{1,2}$ and $\theta_{2,3} \leq \theta_{1,2}$ (see figure 5.6) and so $\tilde{b}(\theta_{1,3}) \geq \tilde{b}(\theta_{1,2})$ and $\tilde{b}(\theta_{2,3}) \geq \tilde{b}(\theta_{1,2})$. Consequently

$$D_{b,\Phi}^{\mathcal{B}_o}(h) \geq \frac{1}{16\alpha_N} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{r_1 \in \mathbb{R}} \int_{r_2 \in \mathbb{R}} dr_2 e^{-r_1^2 - r_2^2} \int_{V_1 \in \omega^\perp} \int_{V_2 \in \omega^\perp} \left(\int_{V_3 \in \mathcal{D}_{V_1, V_2}} \min \{ \Phi(|V_3 - V_1|), \Phi(|V_2 - V_3|) \} e^{-|V_3|^2} dV_3 \right) \tilde{b}(\theta_{1,2}) k(r_1\omega + V_1, r_2\omega + V_2, r_2\omega + V_1, r_1\omega + V_2) e^{-|V_1|^2 - |V_2|^2} dr_1 dr_2 dV_1 dV_2 d\omega.$$

Under assumption (5.2), an easy computation leads to

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V_3 \in \mathcal{D}_{V_1, V_2}} \min \{ \Phi(|V_3 - V_1|), \Phi(|V_2 - V_3|) \} e^{-|V_3|^2} dV_3 \right) \\ & \geq c_\Phi \int_{\{V \in \mathbb{R}^{N-1} \mid |V| \geq 2R\}} e^{-|V|^2} dV = c_\Phi \beta_R > 0 \end{aligned}$$

as soon as $|V_1 - V_2| \leq R$, i.e

$$\left(\int_{V_3 \in \mathcal{D}_{V_1, V_2}} \min \{ \Phi(|V_3 - V_1|), \Phi(|V_2 - V_3|) \} e^{-|V_3|^2} dV_3 \right) \geq c_\Phi \beta_R \mathbf{1}_{|V_1 - V_2| \leq R}.$$

Taking the mean of this estimate and the one obtained by the trivial lower bound $\Phi(r) \geq c_\Phi \mathbf{1}_{\{r \geq R\}}$, we get in the end

$$D_{b, \Phi}^{\mathcal{B}o}(h) \geq \min \left(\frac{c_\Phi \beta_R}{8\alpha_N}, \frac{c_\Phi}{2} \right) \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} b(\theta) M M_* [h'_* + h' - h - h_*]^2 d\sigma dv_* dv,$$

which yields

$$D_{b, \Phi}^{\mathcal{B}o}(h) \geq \left(\frac{c_\Phi \beta_R}{8\alpha_N} \right) D_{b, 1}^{\mathcal{B}o}(h)$$

and concludes the proof of the lemma.

We now have to take the grazing collisions limit in the entropy dissipation functional to prove inequality (5.6) of Theorem 5.2 (this limit is essentially well-known, see for instance [9]).

Lemma 5.6 *Let us consider b_ε as defined in (5.14) and Φ satisfying assumption (5.2). Then for a given $h \in L^2(M)$,*

$$D_{b_\varepsilon, \Phi}^{\mathcal{B}o}(h) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} c_{N,j} D_\Phi^{\mathcal{L}^a}(h)$$

where

$$c_{N,j} = \frac{2^{N-5} |\mathbb{S}^{N-2}|}{N-1} \left(\int_0^\pi j(\chi) \chi^2 d\chi \right)$$

depends only on the dimension N and the mollifier j . $D_{b_\varepsilon, \Phi}^{\mathcal{B}o}$ stands for the Boltzmann entropy dissipation functional with $B = \Phi b_\varepsilon$, and $D_\Phi^{\mathcal{L}^a}$ stands for the Landau entropy dissipation functional with collision kernel Φ .

Proof 5.4 (Proof of Lemma 5.6) *The idea of the proof is to expand the expression for small ε and is very similar to what is done in [9]. Let us write the angular vector σ*

$$\sigma = \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \cos(\theta) + \mathbf{n} \sin(\theta),$$

where \mathbf{n} is a unit vector in $(v - v_*)^\perp$. Therefore, we shall write

$$\begin{aligned} D_{b_\varepsilon, \Phi}^{\mathcal{B}o}(h) &= \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|v - v_*|) M M_* \int_{\mathbb{S}^{N-2}((v-v_*)^\perp)} \int_{\theta=0}^\pi b_\varepsilon(\theta) \\ &\quad \left[h \left(v - \frac{v - v_*}{2} (1 - \cos(\theta)) + \frac{|v - v_*|}{2} \mathbf{n} \sin(\theta) \right) \right. \\ &\quad \left. + h \left(v_* + \frac{v - v_*}{2} (1 - \cos(\theta)) - \frac{|v - v_*|}{2} \mathbf{n} \sin(\theta) \right) \right. \\ &\quad \left. - h(v) - h(v_*) \right]^2 \sin^{N-2} \theta d\theta d\mathbf{n} dv dv_*, \end{aligned}$$

where $\mathbb{S}^{N-2}((v - v_*)^\perp)$ denotes the unit sphere in $(v - v_*)^\perp$. Let us now focus on the integral on θ

$$\int_{\theta=0}^{\pi} b_\varepsilon(\theta) \left[h \left(v - \frac{v - v_*}{2} (1 - \cos(\theta)) + \frac{|v - v_*|}{2} \mathbf{n} \sin(\theta) \right) + h \left(v_* + \frac{v - v_*}{2} (1 - \cos(\theta)) - \frac{|v - v_*|}{2} \mathbf{n} \sin(\theta) \right) - h(v) - h(v_*) \right]^2 \sin^{N-2} \theta d\theta,$$

and make the change of variables $\chi = \theta/\varepsilon$. We get

$$\int_{\chi=0}^{\pi} \frac{\sin^{N-2}(\varepsilon \chi)}{\sin^{N-2}(\frac{\varepsilon \chi}{2})} \frac{j(\chi)}{\varepsilon^2} \left[h \left(v - \frac{v - v_*}{2} (1 - \cos(\varepsilon \chi)) + \frac{|v - v_*|}{2} \mathbf{n} \sin(\varepsilon \chi) \right) + h \left(v_* + \frac{v - v_*}{2} (1 - \cos(\varepsilon \chi)) - \frac{|v - v_*|}{2} \mathbf{n} \sin(\varepsilon \chi) \right) - h(v) - h(v_*) \right]^2 d\chi$$

i.e for small ε ,

$$\int_{\chi=0}^{\pi} (2^{N-2} + O(\varepsilon)) \frac{j(\chi)}{\varepsilon^2} \left(\frac{|v - v_*|}{2} \right)^2 \left[\varepsilon \chi \mathbf{n} \cdot (\nabla_v h(v) - \nabla_{v_*} h(v_*)) + O(\varepsilon^2 \chi^2) \right]^2 d\chi,$$

which writes

$$\begin{aligned} |v - v_*|^2 \int_{\chi=0}^{\pi} 2^{N-4} j(\chi) \chi^2 \left[\mathbf{n} \cdot (\nabla_v h(v) - \nabla_{v_*} h(v_*)) \right]^2 d\chi + O(\varepsilon) \\ = 2^{N-4} \left(\int_0^\pi j(\chi) \chi^2 d\chi \right) |v - v_*|^2 \left[\mathbf{n} \cdot (\nabla_v h(v) - \nabla_{v_*} h(v_*)) \right]^2 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

As the unit vector \mathbf{n} is orthogonal to $\frac{v - v_*}{|v - v_*|}$, we can introduce here the orthogonal projection onto $(v - v_*)^\perp$

$$\begin{aligned} D_{b_\varepsilon, \Phi}^{\mathcal{B}o}(h) = \frac{2^{N-4}}{4} \left(\int_0^\pi j(\chi) \chi^2 d\chi \right) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{S}^{N-2}((v - v_*)^\perp)} \Phi(|v - v_*|) |v - v_*|^2 \\ \left[\mathbf{n} \cdot \Pi_{(v - v_*)^\perp} (\nabla_v h(v) - \nabla_{v_*} h(v_*)) \right]^2 M M_* d\mathbf{n} dv dv_* + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

It is straightforward to see that

$$\int_{\mathbb{S}^{N-2}((v - v_*)^\perp)} (\mathbf{n} \cdot u)^2 d\mathbf{n} = \zeta_N \|u\|^2$$

with, for any $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^{N-2}$

$$\zeta_N = \int_{\mathbb{S}^{N-2}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 d\mathbf{n} = \frac{|\mathbb{S}^{N-2}|}{N-1}.$$

Thus we get in the end

$$\begin{aligned} D_{b_\varepsilon, \Phi}^{\mathcal{B}o}(h) &= \frac{|\mathbb{S}^{N-2}| 2^{N-4}}{4(N-1)} \left(\int_0^\pi j(\chi) \chi^2 d\chi \right) \\ &\quad \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |v - v_*|^2 \Phi(|v - v_*|) M M_* \|\nabla_v h(v) - \nabla_{v_*} h(v_*)\|^2 dv_* dv + O(\varepsilon) \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{N-2}| 2^{N-5}}{N-1} \left(\int_0^\pi j(\chi) \chi^2 d\chi \right) D_{\Phi}^{\mathcal{L}a}(h) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

This concludes the proof of Lemma 5.6.

Coming back to the proof of Theorem 5.2, we first prove (5.6): we write down inequality (5.15) on $D_{\Phi, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}$ since b_ε is non-increasing, and we apply Lemma 5.6 on each term, which gives

$$D^{\mathcal{L}^a}(h) \geq C_{\Phi}^{\mathcal{L}^a} D_0^{\mathcal{L}^a}(h),$$

where

$$C_{\Phi}^{\mathcal{L}^a} = \left(\frac{c_{\Phi} \beta_R}{8\alpha_N} \right).$$

Inequality (5.7) follows immediately.

It remains to prove the lower bound (5.8) on the first non-zero eigenvalue of the Landau linearized operator for Maxwellian molecules in dimension 3. Let us denote by $\lambda_{0, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}$ the first non-zero eigenvalue for the Boltzmann linearized operator with $B = b_\varepsilon$: for all $h \in L^2(M)$ orthogonal in $L^2(M)$ to $1, v, |v|^2$,

$$D_{b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}(h) \geq |\lambda_{0, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}| \|h\|_{L^2(M)}^2.$$

We apply Lemma 5.6 to this inequality which leads to

$$D_0^{\mathcal{L}^a}(h) \geq \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\lambda_{0, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}|}{c_{3, j}} \|h\|_{L^2(M)}^2$$

for all $h \in L^2(M)$ orthogonal in $L^2(M)$ to $1, v, |v|^2$. An explicit formula for $|\lambda_{0, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}|$ is given in [1]

$$|\lambda_{0, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}| = \pi \int_0^\pi \sin^3(\theta) b_\varepsilon(\theta) d\theta$$

and thus

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\lambda_{0, b_\varepsilon}^{\mathcal{B}^o}| = 2\pi \left(\int_0^\pi j(\chi) \chi^2 d\chi \right)$$

which concludes the proof.

Acknowledgment : Support by the European network HYKE, funded by the EC as contract HPRN-CT-2002-00282, is acknowledged.

Bibliography

- [1] A. V. BOBYL'EV. The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules. In *Mathematical physics reviews, Vol. 7*, vol. 7 of *Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev.* Harwood Academic Publ., Chur, 1988, pp. 111–233.
- [2] R. E. CAFLISCH. The Boltzmann equation with a soft potential. II. Nonlinear, spatially-periodic. *Comm. Math. Phys.* 74, 2 (1980), 97–109.

-
- [3] J. CARRILO, R. MCCANN AND C. VILLANI. Kinetic equilibration rates for granular media. Preprint, 2001.
- [4] C. CERCIGNANI. *The Boltzmann equation and its applications*, vol. 67 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [5] C. CERCIGNANI, R. ILLNER AND M. PULVIRENTI. *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. Springer, 1994.
- [6] Z. CZECHOWSKY AND A. PALCZEWSKY. Spectrum of the Boltzmann equation collision operator for radial cut-off potentials. *Bull. Acad. Polon. Sci.* 28 (1980), 387–396.
- [7] P. DEGOND AND M. LEMOU. Dispersion relations for the linearized Fokker-Planck equation. *Arch. Rational Mech. Anal.* 138, 2 (1997), 137–167.
- [8] L. DESVILLETES. Entropy dissipation rate and convergence in kinetic equations. *Comm. Math. Phys.* 123, 4 (1989), 687–702.
- [9] L. DESVILLETES. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Transport Theory Statist. Phys.* 21, 3 (1992), 259–276.
- [10] L. DESVILLETES. Convergence towards the thermodynamical equilibrium. In *Trends in applications of mathematics to mechanics (Nice, 1998)*, vol. 106 of *Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000, pp. 115–126.
- [11] L. DESVILLETES AND C. VILLANI. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. II. *H*-theorem and applications. *Comm. Partial Differential Equations* 25, 1-2 (2000), 261–298.
- [12] R. S. ELLIS AND M. A. PINSKY. The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation. *J. Math. Pures Appl. (9)* 54 (1975), 125–156.
- [13] F. GOLSE ET F. POUPAUD. Un résultat de compacité pour l'équation de Boltzmann avec potentiel mou. Application au problème de demi-espace. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 303, 12 (1986), 583–586.
- [14] M. KLAUS. Boltzmann collision operator without cut-off. *Helv. Phys. Acta* 50, 6 (1977), 893–903.
- [15] Y. P. PAO. Boltzmann collision operator with inverse-power intermolecular potentials. I, II. *Comm. Pure Appl. Math.* 27 (1974), 407–428, 559–581.
- [16] C. VILLANI. A survey of mathematical topics in kinetic theory. *Handbook of fluid mechanics*, S. Friedlander and D. Serre, Eds. Elsevier Publ., 2002.
- [17] C. VILLANI. On the spatially homogeneous Landau equation for Maxwellian molecules. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 8, 6 (1998), 957–983.
- [18] C. VILLANI. Contribution à l'étude mathématique des collisions en théorie cinétique. Master's thesis, Univ. Paris-Dauphine France, 2000.

-
- [19] C. S. WANG CHANG, G. E. UHLENBECK AND J. DE BOER. In *Studies in Statistical Mechanics, Vol. V*. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [20] B. WENBERG. On an entropy dissipation inequality for the Boltzmann equation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 315, 13 (1992), 1441–1446.

Publications

Cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

Le chapitre 2 a donné lieu à l'article **Modelling of oscillations, breakup and collisions for droplets: the establishment of kernels for the T.A.B. model**, accepté pour publication dans la revue *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)* (2004).

Le chapitre 3 s'inspire du proceeding **Study at the numerical level of the kernels of collision, coalescence and fragmentation for sprays**, écrit en collaboration avec Laurent Desvillettes, soumis aux proceedings du colloque *Trends in numerical and physical modeling for industrial multiphase flows: International Workshop on Multiphase and Complex Flow Simulation for Industry*, Cargèse, 2003.

Le chapitre 4: **A kinetic modeling of a breaking up spray with high Weber numbers**, écrit en collaboration avec Laurent Boudin, est la première partie du proceeding **Liquid jets generation and break-up**. Ce proceeding est le compte-rendu d'un projet auquel ont également participé Gérard Baudin, Bruno Després, Frédéric Lagoutière, Emmanuel Lapébie et Takéo Takahashi, et sera soumis aux proceedings du *CEMRACS 2003: Numerical methods for hyperbolic and kinetic problems*.

Le chapitre 5 a donné lieu à l'article écrit en collaboration avec Clément Mouhot **Explicit spectral gap estimates for the linearized Boltzmann and Landau operators with hard potentials**, accepté pour publication dans la revue *Revista Matemática Iberoamericana* (2004).