



**HAL**  
open science

## Modélisation de Films Minces

Hamdi Zorgati

► **To cite this version:**

Hamdi Zorgati. Modélisation de Films Minces. domain\_other. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004. Français. NNT : . tel-00008875v1

**HAL Id: tel-00008875**

**<https://theses.hal.science/tel-00008875v1>**

Submitted on 26 Mar 2005 (v1), last revised 13 Apr 2005 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

École doctorale des Sciences Mathématiques de Paris Centre

UFR 921

# Modélisation de Films Minces

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le Vendredi 17 décembre 2004

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Pierre et Marie Curie – Paris 6

(spécialité Mathématiques Appliquées)

par

Hamdi Zorgati

### Composition du jury

*Rapporteurs* : Philippe DESTUYNDER  
Régis MONNEAU

*Examineurs* : Patrizia DONATO  
Frédéric HECHT  
Hervé LE DRET                      Directeur de thèse  
Olivier PANTZ  
Annie RAOULT

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude et ma sincère reconnaissance à M. Hervé Le Dret qui m'a encadré pendant cette thèse. Je le remercie pour sa grande disponibilité sa patience, ses précieux conseils et son optimisme contagieux. Je le remercie aussi pour les sujets passionnants vers lesquels il m'a dirigé et toute l'aide qu'il m'a fournie et grâce à laquelle j'ai pu mener à terme ce travail. Je lui en suis infiniment reconnaissant.

Je remercie également mes rapporteurs, M. Philippe Destuynder et M. Régis Monneau d'avoir accepté de rapporter sur cette thèse et je les remercie du temps qu'ils ont consacré à la lecture de ce travail.

Mme Patrizia Donato, Mme Annie Raoult et M. Frédéric Hecht me font l'honneur de faire partie du jury je leur en suis très reconnaissant. Je tiens à remercier Olivier Pantz qui me fait aussi l'honneur de participer au jury, pour les discussions fructueuses que j'ai eu avec lui surtout en début de ma thèse, son amitié et sa sympathie.

Je voudrais remercier le laboratoire Jacques-Louis Lions pour m'avoir si bien accueilli en son sein, la très belle ambiance qui s'y trouve et les visages souriants qu'on croise dans ses couloirs. Je remercie les différents personnels administratifs du labo, Mme Boulic, Mme Lacrampe, M. Legendre, Mme Loriller et Mme Ruprecht, pour leurs compétences et leurs gentillesse. Je remercie M. David pour sa disponibilité, sa gentillesse et son accueil très chaleureux.

Je remercie également l'Université de Paris Dauphine et plus précisément M. Le Duc et Mme Pons ainsi que CEREMADE chez qui j'ai effectué mes premiers pas dans le monde de l'enseignement. Un grand merci pour tous mes enseignants à la faculté des sciences de Tunis pour tout ce qu'ils m'ont appris pour leur soutien et leurs encouragements.

Je remercie pour leur amitié et leur agréable compagnie mes amis les doctorants, post-doctorants, jeunes chercheurs Abedellatif, Adel, Adrian, Alexandra, Anna, Antoine,

Augusto, Basarab, Cecile, Cristinel, David, Delphine, Fethi, Filipa, Hajer, Hammadi, Hassan, Hyam, Jean Baptiste, Jean Francois, Julien, Karim, Laurent, Marcella, Marjolaine, Martin, Mounir, Mourad, Nicolas, Paolo, Pascal, Paul, Philippe, Radu, Saima, Sever, Sonia, Sorin, Slah, Stefane, Taoufiq, Terence, Valérie, Vincent...

Vient le tour de mes compagnons de sorties à Paris sans qui je n'aurais jamais su apprécier la splendeur de cette ville, Alessandra, Gaetano, Gianluca, Giuseppe, Haithem, Luisa, Maria Luisa, Maria Vittoria, Nouri, Petra, Romain, Valentina...

Un petit saut au dessus de la méditerranée et je me retrouve chez moi à Tunis ; Je ne pourrais jamais remercier assez mes parents ma soeur et mes frères qui m'ont toujours soutenu et infiniment encouragé...

*À mes parents,*



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
1 Films courbés minces martensitiques . . . . .	4
1.1 Développement asymptotique formel . . . . .	6
1.2 Comportement des minimiseurs et $\Gamma$ -convergence . . . . .	8
2 Films courbés hyperélastiques fixés à un substrat rigide . . . . .	9
3 Films courbés minces ferromagnétiques . . . . .	12

---

<b>Chapitre 1</b>
-------------------

<b>Rappels mathématiques et préliminaires géométriques</b>
--

1.1 Introduction . . . . .	20
1.2 Notations et préliminaires géométriques . . . . .	20
1.3 Rappels sur la $\Gamma$ -convergence . . . . .	25

---

<b>Partie I Matériaux martensitiques</b>	<b>29</b>
--	-----------

---

<b>Chapitre 2</b>
-------------------

<b>Films courbés minces martensitiques - Développement asymptotique formel</b>
--

2.1 Introduction . . . . .	34
----------------------------	----



2.2	Mise en œuvre . . . . .	35
2.2.1	Changement de variables . . . . .	35
2.2.2	Développement asymptotique . . . . .	38
2.2.3	Résolution des problèmes de minimisation . . . . .	47
2.3	Applications à des exemples de films de forme simple . . . . .	55
2.3.1	Cas des films plans . . . . .	55
2.3.2	Cas d'un film de forme cylindrique . . . . .	57
2.3.3	Cas d'une portion de sphère . . . . .	59

---

**Chapitre 3**

**Films courbés minces martensitiques -  $\Gamma$ -convergence**

3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Existence de minimiseurs pour l'énergie à épaisseur fixée . . . . .	68
3.3	Calcul de la $\Gamma$ -limite et comportement des minimiseurs . . . . .	75
3.4	Retour à la configuration de référence initiale . . . . .	96

---



---

**Partie II Matériaux hyperélastiques**

**103**

---



---

**Chapitre 4**

**Film courbé mince collé à un substrat avec une condition de non interpénétration**

4.1	Introduction . . . . .	108
4.2	Formulation du problème . . . . .	109
4.3	Calcul de la $\Gamma$ -limite . . . . .	115
4.4	Retour à la configuration initiale . . . . .	131

**Chapitre 5****Films courbés minces ferromagnétiques**

5.1	Introduction . . . . .	142
5.2	Position du problème . . . . .	145
5.3	Comportement de l'énergie magnétostatique . . . . .	148
5.4	Calcul de la $\Gamma$ -limite . . . . .	162
5.5	Retour à la configuration de référence initiale . . . . .	174
5.6	Application à la version courbée du modèle de Gioia et James . . . . .	178
5.7	Modèle avec champ magnétique extérieur . . . . .	180

---

**Conclusions générales****Bibliographie****Résumé****Abstract**



# Introduction générale



# Introduction générale

Le travail de cette thèse porte sur la modélisation des films minces courbés dans divers contextes. Les films minces sont des objets tridimensionnels occupant un domaine ouvert ayant une surface moyenne et une épaisseur suivant la normale à la surface moyenne très faible par rapport aux dimensions de la surface moyenne. En raison de la structure très fine de ces films, ils peuvent subir de grandes déformations même lorsqu'ils ne sont soumis qu'à des forces de faible intensité.

Notre travail se place dans le cadre de la mécanique des solides et de l'électromagnétisme. On utilise principalement les outils mathématiques de l'élasticité non linéaire et du calcul des variations. L'importance de l'élasticité non linéaire est due au fait que l'élasticité linéaire n'est qu'une approximation de l'élasticité non linéaire qui ne peut décrire que des déformations assez petites. Il en va de même pour le ferromagnétisme où l'on utilise des modèles non linéaires.

Les problèmes que nous traitons sont écrits sous la forme de problèmes de minimisation d'une énergie décrivant le comportement du film, sur un ensemble de déformations, ou de magnétisations dans le cas des films ferromagnétiques, admissibles. À partir de modèles tridimensionnels et en faisant tendre l'épaisseur du film vers zéro, on obtient une justification de modèles bidimensionnels.

Parmi les moyens couramment utilisés pour obtenir les modèles bidimensionnels, on trouve l'approche classique fondée sur des Ansatzs portant sur la forme des déformations tridimensionnels. Ce type d'approche utilise des développements asymptotiques formels. Il a permis d'obtenir plusieurs modèles et théories bidimensionnelles (voir Frie-

driehs et Dressler [32], Goldenviezer [34], Ciarlet et Destuynder [19], Ciarlet [13], Destuynder [28], Fox, Raoult et Simo [31], Miara [42], Pantz [44]...). Un second type d'approche plus récent est l'approche variationnelle dans laquelle on n'effectue pas d'Ansatz, mais où l'on utilise principalement la théorie de la  $\Gamma$ -convergence. Cette théorie permet d'étudier la convergence des minimiseurs d'une suite de problèmes du calcul des variations (voir Acerbi, Buttazzo et Percivale [1], Percivale [45], Le Dret et Raoult [38] et [39]...).

L'importance des modèles bidimensionnels obtenus réside dans le fait qu'on peut les utiliser à la place des modèles tridimensionnels complets lorsque l'épaisseur est suffisamment petite. En outre, les modèles bidimensionnels sont à priori plus simples que leur contrepartie tridimensionnelle ce qui facilite leur étude. Ils permettent aussi d'effectuer des simulations numériques moins coûteuses des simulations tridimensionnelles.

On considère donc un film occupant un domaine ouvert courbé dont l'épaisseur  $h$  est très faible par rapport aux autres dimensions. Ensuite, on fait tendre l'épaisseur  $h$  vers zéro et on étudie le comportement asymptotique de l'énergie régissant le film, ainsi que de ses minimiseurs lorsqu'ils existent. Le domaine courbé  $\tilde{\Omega}_h$  occupé par le film est de la forme

$$\tilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \exists \tilde{x} \in \tilde{S}, x = \tilde{x} + \eta a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \text{ avec } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\}, \quad (1)$$

où  $\tilde{S}$  est une surface courbée de  $\mathbb{R}^3$ , image d'un ouvert borné  $\omega$  de  $\mathbb{R}^2$  à travers un  $C^2$ -difféomorphisme  $\psi$  et où  $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$  désigne la normale à  $\tilde{S}$  au point  $\tilde{x}$  (voir chapitre 1).

Dans cette thèse, on étudie trois sortes de films. Il s'agit tout d'abord de films martensitiques, puis de films hyperélastiques collés à un substrat rigide et fixe mais susceptible de se décoller, et enfin de films ferromagnétiques.

## 1 Films courbés minces martensitiques

Les matériaux martensitiques font partie des alliages à mémoire de forme. L'intérêt de ce type de matériaux réside dans le changement de forme qu'ils subissent lors d'un

refroidissement brusque qui les amène de la phase austénite à la phase martensitique au cours d'une transformation appelée transformation martensitique. Plus intéressant encore, de tels matériaux peuvent retrouver leur forme initiale grâce à un simple réchauffement, d'où le caractère à mémoire de forme. Les formes différentes que prend donc un objet composé d'un matériau martensitique à haute température et à basse température, confèrent à ce type de matériaux une grande utilité dans divers domaines de l'industrie tels que l'industrie médicale ou l'industrie aéronautique. Dans notre travail, nous nous intéressons au comportement d'un solide composé d'un matériau martensitique se trouvant dans la phase martensitique à basse température, c'est-à-dire après avoir subi la transformation martensitique.

L'état d'équilibre d'un film courbé mince d'épaisseur  $h$  martensitique occupant un domaine  $\tilde{\Omega}_h$  et subissant une déformation  $\tilde{\varphi}$  est décrit par les minimiseurs de l'énergie régissant son comportement. Celle-ci est constituée d'une partie d'énergie élastique interne non linéaire et d'un terme d'énergie d'interface du type Van der Waals due au changement de phase

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} [\kappa |\nabla^2 \tilde{\varphi}|^2 + W(\nabla \tilde{\varphi})] dx \quad (2)$$

où  $\kappa$  est une constante strictement positive,  $\nabla^2 \tilde{\varphi}$  est le tenseur  $3 \times 3 \times 3$  des dérivées secondes et  $W(\nabla \tilde{\varphi})$  représente l'énergie élastique par unité de volume du matériau comme fonction du gradient de la déformation  $\tilde{\varphi}$ . On s'intéresse au comportement de cette énergie et de ses minimiseurs sur un ensemble de déformations admissibles de la forme

$$V = \{\tilde{\varphi} \in H^2(\tilde{\Omega}_h; \mathbb{R}^3); \tilde{\varphi}(x) = \tilde{A}x \text{ sur } \tilde{\Gamma}_h\}, \quad (3)$$

où  $\tilde{A} = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | \tilde{a}_3)$  est une matrice constante de  $M^3$  et  $\tilde{\Gamma}_h$  est la surface latérale de  $\tilde{\Omega}_h$ , lorsque l'épaisseur  $h$  du film tend vers zéro.

On commence notre étude par un changement de variables qui nous permet de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur  $h$ . L'énergie qu'on obtient s'écrit sur un domaine  $\Omega_1$  de la forme

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } -\frac{1}{2} < x_3 < \frac{1}{2} \right\}. \quad (4)$$



Cette énergie par unité d'épaisseur s'écrit sous la forme

$$e(h)(\varphi(h)) = K(h)(\varphi(h)) + I(h)(\varphi(h)), \quad (5)$$

avec

$$I(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} W \left[ \left( \varphi_{,1} \mid \varphi_{,2} \mid \frac{1}{h} \varphi_{,3} \right) A_h \right] d_h dx \quad (6)$$

et

$$\begin{aligned} K(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ \left( \nabla_p^2 \varphi + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_{,3} + \nabla_p \varphi_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3 \right) \overline{\otimes} A_h \right]^t \overline{\otimes} A_h \right. \\ \left. + \left[ \nabla_p \varphi + \frac{1}{h} \varphi_{,3} \otimes e_3 \right] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Afin d'étudier le comportement de cette énergie ainsi que celui de ses minimiseurs on procède dans un premier temps à un développement asymptotique formel basé sur un Ansatz. Ce développement asymptotique formel nous donne alors l'expression de l'énergie limite, qu'on retrouve ensuite par  $\Gamma$ -convergence mais cette fois sans utiliser d'Ansatz.

## 1.1 Développement asymptotique formel

La méthode du développement asymptotique formel pour les plaques a été introduite tout d'abord par P.G. Ciarlet et P. Destuynder dans [19] et P.G. Ciarlet [14]. Une autre approche de cette méthode utilisant une formulation variationnelle seulement en terme de déplacement a été élaborée par A. Raoult dans [46]. On peut trouver une description générale de cette méthode et des nombreux travaux dans lesquels elle a été utilisé dans P.G. Ciarlet [17]. Cette méthode a ensuite été raffinée et améliorée en terme d'hypothèses par D.D. Fox, A. Raoult et J.C. Simo dans [31]. Ces auteurs résolvent une suite d'équations d'Euler-Lagrange. Dans notre cas, la méthode qui semble la plus adéquate et la plus simple pour procéder au développement asymptotique formel, est celle développée par O. Pantz dans [44] et qui amène à la résolution d'une suite de problèmes de minimisation.

On pose donc un Ansatz selon lequel toute solution du problème de minimisation admet un développement en puissances positives de  $h$ . On démontre alors, que l'énergie

elle-même admet un développement en puissances de  $h$  de la forme

$$e(h)(\varphi) = \sum_{n=-4}^{\infty} h^n e^n(\varphi). \quad (8)$$

En utilisant ensuite la méthode de développement asymptotique introduite par O. Pantz dans [44], on montre la proposition suivante

**Proposition 0.1.1.** *Après minimisation des énergies  $e^{-4}$ ,  $e^{-3}$ ,  $e^{-2}$  et  $e^{-1}$ , l'énergie  $e^0$  obtenue est de la forme*

$$e^0(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left( \kappa \sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}^0|^2 + \sum_{i,j,k,l=1}^3 C^{ijkl} E_{ij}^0 E_{kl}^0 \right) \det A(x) dx, \quad (9)$$

avec  $\varphi \in V_h$  où

$$V_h = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3); \varphi(x) = \tilde{A} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (10)$$

vérifiant

$$\varphi_{,3}^0 = 0 \text{ et } \varphi_{,33}^1 = 0, \quad (11)$$

et

$$d_{ij}^0 = \varphi_{,\alpha\beta}^0 \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} + \varphi_{,\alpha 3}^1 (\Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1}) + \varphi_{,3}^1 \Psi_{3,ij}^{-1} + \varphi_{,\alpha}^0 \Psi_{\alpha,ij}^{-1} + \varphi_{,33}^2 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}, \quad (12)$$

$$E_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left[ (\varphi_{,\alpha}^0 \cdot \varphi_{,\beta}^0) \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} + (\varphi_{,\alpha}^0 \cdot \varphi_{,3}^1) (\Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1}) + |\varphi_{,3}^1|^2 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} - \delta_{ij} \right] \quad (13)$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  et  $\Psi_{i,jk}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, 0)$ .

On vérifie ensuite que nos résultats coïncident avec ceux de Bhattacharya et James (voir [8]) pour les plaques. Enfin, on les applique à quelques exemples simples de films courbés tels que le cylindre et la sphère.

Dans le chapitre suivant, on calcule la  $\Gamma$ -limite de l'énergie  $e(h)$  et on procède à une étude plus précise du comportement des minimiseurs de l'énergie.

## 1.2 Comportement des minimiseurs et $\Gamma$ -convergence

On commence cette étude en démontrant l'existence de minimiseurs de l'énergie à épaisseur constante. Ce résultat d'existence est obtenu grâce au terme d'énergie d'interface dépendant du tenseur des dérivées secondes de la déformation. On passe ensuite au calcul de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie qu'on a prolongé à l'espace  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . La  $\Gamma$ -convergence est une notion introduite par De Giorgi [26], [27]. Elle a été utilisée à maintes reprises pour étudier le comportement limite des films minces. Grâce à ce résultat de  $\Gamma$ -convergence on obtient le corollaire suivant qui nous donne le comportement asymptotique des minimiseurs de l'énergie  $e(h)$ .

**Corollaire 1.** *La famille des minimiseurs  $\varphi(h) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  de  $e(h)$  sur  $V_h$  admet une sous-suite (encore notée par  $\varphi(h)$ ) telle que*

$$\begin{cases} \varphi(h) & \rightarrow \varphi^0 \text{ fortement dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \frac{1}{h}\varphi(h)_{,3} & \rightarrow \bar{b} \text{ fortement dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \frac{1}{h^2}\varphi(h)_{,33} & \rightarrow \bar{c} \text{ fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (14)$$

où  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$  minimise l'énergie limite

$$\begin{aligned} e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = & \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left| [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0(x)]^T \overline{\otimes} A_0(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 + W[(\varphi_{,1}^0(x)|\varphi_{,2}^0(x)|\bar{b})A_0(x)] \right\} d_0(x) dx \end{aligned} \quad (15)$$

sur  $W_0$  avec

$$\begin{aligned} W_0 = & \left\{ (\varphi, b, c) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ vérifiant } \varphi_{,3} = 0, b_{,3} = 0 \right. \\ & \left. \text{et } \varphi(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, 0), b(x) = \tilde{A} \Psi_{,3}(x_1, x_2, 0) = \tilde{A} a_3(x_1, x_2) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Dans le modèle limite que l'on obtient ainsi et qui correspond au modèle limite obtenu par développement asymptotique formel, un terme en dérivées secondes par rapport à la troisième variable intervient, lequel n'apparaît pas dans le cas plan. Ce terme est dû au caractère courbé du film. Cependant, ce terme ne joue aucun rôle dans la minimisation de l'énergie limite. Par contre, il y a apparition d'un terme d'ordre zéro en  $\bar{b}$  qui ne disparaît pas lors de la minimisation. En effectuant un changement de variables inverse, on obtient une énergie limite bidimensionnelle, matériellement indifférente, écrite

sur la surface courbée  $\tilde{S}$  et dépendant de la déformation et d'un vecteur de Cosserat. Cette énergie a comme expression

$$\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}) = \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \left| \nabla^2 \tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \nabla \tilde{b}(\tilde{x}) \otimes n(\tilde{x}) + n(\tilde{x}) \otimes \nabla \tilde{b}(\tilde{x}) + \tilde{b}(\tilde{x}) \otimes \nabla n(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma}. \quad (16)$$

## 2 Films courbés hyperélastiques fixés à un substrat rigide

On étudie dans ce chapitre le comportement asymptotique d'un film courbé hyperélastique fixé à un substrat rigide lorsque son épaisseur tend vers zéro. L'état d'équilibre du film est décrit par les minimiseurs de l'énergie  $\tilde{e}^h$  sur un ensemble de déformations admissibles qu'on choisit de telle manière à ce qu'il n'y ait pas d'interpénétration entre le film et le substrat. On s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie  $\tilde{e}^h$  et de ses minimiseurs, quand ils existent, lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro.

Dans [7], K. Bhattacharya, I. Fonseca et G. Francfort ont étudié le comportement asymptotique de films minces superposés, subissant une déformation et ayant chacun une densité d'énergie élastique interne tout en permettant leur décollement lequel sera pénalisé par une énergie d'interface. Leur travail est basé sur l'analyse asymptotique par  $\Gamma$ -convergence des plaques non homogènes effectuée par A. Braides, I. Fonseca et G. Francfort dans [9]. On se propose dans ce travail d'étudier le comportement d'un film courbé mince posé sur un substrat rigide dont la surface supérieure est courbée. On suppose que le contact entre le film et le substrat a lieu au repos en tout point de la face inférieure du film. On impose en outre aux déformations que subit le film une condition de non interpénétration, voir J. Ball [6], P. Ciarlet et J. Nečas [20] et [21] et Q. Tang [49]. Cette condition est très importante du point de vue physique puisque dans les problèmes de solides en contact, il est impossible qu'une partie d'un des solides pénètre dans l'autre. On impose donc au solide déformé de rester en dehors du substrat sans pour autant interdire le contact entre les deux sur leurs surfaces.

On considère donc une énergie  $\tilde{e}^h$  composée d'une partie  $\tilde{E}^h$  représentant l'énergie élastique interne du film et d'une autre partie  $\tilde{I}^h$  d'énergie d'interface, liée au décollement

du film de son substrat

$$\tilde{e}^h = \tilde{I}^h + \tilde{E}^h, \quad (17)$$

avec

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = h^\alpha \int_{\tilde{S}^h} \Phi(|[\tilde{\varphi}]|) dx \quad (18)$$

et

$$\tilde{E}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}^h} W(\nabla \tilde{\varphi}) dx, \quad (19)$$

où  $W$  est la densité d'énergie élastique du film,  $h^\alpha \Phi$  est la densité d'énergie d'interface avec  $\alpha$  un nombre réel et  $||[\tilde{\varphi}]||$  est la norme du saut de la déformation à travers l'interface entre le film et le substrat. On s'intéresse au problème de minimisation de l'énergie  $\tilde{e}^h$  sur l'ensemble des déformations admissibles défini par

$$\tilde{V}^h = \{\tilde{\varphi} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega}^h, \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{\Omega}^h) \subset \overline{S_u^c} \text{ et } \tilde{\varphi}(x) = x \text{ sur } \tilde{\Gamma}\}, \quad p > 3, \quad (20)$$

où  $\overline{S_u^c}$  représente l'adhérence du complémentaire du domaine occupé par le substrat.

Afin de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur  $h$ , on procède à un premier changement de variables. On effectue ensuite un deuxième changement de variables dans l'espace d'arrivée qui nous permet d'aplatir la surface supérieure du substrat. Ceci permet de simplifier la condition de non interpénétration et facilite le calcul de la borne supérieure de la  $\Gamma$ -limite. Ainsi, l'énergie obtenue s'écrit sous la forme

$$\bar{e}(h)(\bar{\varphi}) = \bar{E}(h)(\bar{\varphi}) + \bar{I}(h)(\bar{\varphi}), \quad (21)$$

avec

$$\bar{E}(h)(\bar{\varphi}) = \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(x) (\bar{\varphi}_{,1}(x) | \bar{\varphi}_{,2}(x) | \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(x)) A_h(x) \right] d_h(x) dx \quad (22)$$

et

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}) = h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) | \mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3) e_3 | d\sigma. \quad (23)$$

L'ensembles des déformations admissibles s'écrit alors

$$\bar{V}^h = \{\bar{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \bar{\varphi}(\Omega_1) \subset \{x_3 \geq 0\} \text{ et } \bar{\varphi}(x) = (x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1)\}. \quad (24)$$

On passe ensuite au calcul de la  $\Gamma$ -limite qui nous permet d'obtenir le corollaire suivant.

**Corollaire 2.** *Toute suite minimisante diagonale  $\bar{\varphi}(h)$  de  $\bar{e}(h)$  est bornée dans  $\bar{V}^h$  et ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  sont des minimiseurs de l'énergie  $\bar{e}(0)$  définie par*

$$\bar{e}(0)(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} QW_0\left(x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x))\right) \det A(x) dx \\ \quad + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) d_0(x) dx & \text{si } \alpha \geq 1 \text{ et } \bar{\varphi} \in \bar{V}_M, \\ \int_{\omega} QW_0\left(x, I(x), (e_1|e_2)\right) \det A(x) dx & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } \bar{\varphi} = I, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $I$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\bar{V}_M = \{\bar{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \bar{\varphi}(\Omega_1) \subset \{x_3 \geq 0\}, \bar{\varphi}_{,3}(0) = 0 \text{ et } \bar{\varphi}(x) = (x_1, x_2, 0) \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1)\} \quad (25)$$

et où  $\delta : ]1, +\infty[ \rightarrow \{0, 1\}$  vérifie

$$\delta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

En procédant à deux changements de variables inverses à ceux effectués auparavant on obtient l'énergie limite écrite sur le domaine courbée

$$\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\tilde{S}} \tilde{W}\left(a_3(\tilde{x}), \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x})\right) d\tilde{x} + \delta(\alpha) \int_{\tilde{S}} \Phi(|[\tilde{\varphi}]|) d\tilde{x} & \text{si } \alpha \geq 1 \text{ et } \tilde{\varphi} \in \tilde{V}, \\ \int_{\tilde{S}} \tilde{W}\left(a_3(\tilde{x}), \tilde{I}\right) d\tilde{x} & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } \tilde{\varphi} = \tilde{I}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\tilde{I}$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$|[\tilde{\varphi}]| = |\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x}|, \quad (26)$$

$\tilde{I}$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\tilde{V} = \{\tilde{\varphi} \in W^{1,p}(\tilde{S}, \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{S}) \subset S_{ub}^c \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{x} \text{ sur } \partial\tilde{S}\}, \quad (27)$$

$a_3(\tilde{x})$  est le vecteur unitaire normal à  $\tilde{S}$  passant par  $\tilde{x}$  et  $\tilde{W} : S^2 \times M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est la densité d'énergie élastique membranaire définie par

$$\tilde{W}(e, F) = \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_e, \mathbb{R}^3)} \left[ \frac{1}{\text{meas } O_e} \int_{O_e} \left[ \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W(F + z \otimes e + D_{e^\perp} \chi(y)) \right] dy \right]. \quad (28)$$

### 3 Films courbés minces ferromagnétiques

Le théorie du micromagnétisme, développée par L.D. Landau, E.M. Lifschitz [35] et W.F. Brown [12], décrit le comportement magnétique d'un corps ferromagnétique. Selon cette théorie, l'état d'un corps ferromagnétique est décrit par sa magnétisation  $m$ , qui est un champ de vecteur défini sur  $\mathbb{R}^3$  et nul en dehors du corps, représentant la densité volumique du moment magnétique macroscopique. Ceci signifie que  $m$  induit un champ magnétique  $H$  dans tout l'espace. Les états que l'on observe lorsqu'un corps ferromagnétique occupant un domaine  $\Omega$  est soumis à un champ magnétique extérieur  $H_e$  sont les minimiseurs d'une énergie  $E_e$  dépendant de la magnétisation  $m$  :

$$E_e(m) = \int_{\Omega} \{ \alpha |\nabla m|^2 + Q \varphi(m) + H_e \cdot m \} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |H|^2. \quad (29)$$

Le premier terme composant l'énergie totale est le terme d'énergie d'échange,

$$E_{ech} = \int_{\Omega} \alpha |\nabla m|^2. \quad (30)$$

Ce terme pénalise les variations spatiales de la magnétisation  $m$  afin de représenter la tendance d'un specimen à révéler des régions de magnétisation uniforme (domaines magnétiques) séparés par des couches de transition très fines (parois). Le coefficient  $\alpha$  est une constante du matériau, strictement positive. Le deuxième terme intervenant dans l'énergie totale est le terme d'énergie anisotrope,

$$E_{an} = \int_{\Omega} Q \varphi(m). \quad (31)$$

Ce terme favorise des directions spécifiques de la magnétisation (les axes faciles) suivant lesquels on suppose que  $\varphi$  s'annule. On suppose par ailleurs que  $\varphi$  est une fonction positive et paire exhibant des symétries crystallographiques. En outre, la fonction  $\varphi$  est la restriction à  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1\}$  d'une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  strictement positive. En général,  $\varphi$  est supposée polynomiale en  $m$ . Le coefficient  $Q$  contrôle l'importance relative de l'énergie anisotrope par rapport à l'énergie magnétostatique. Cette dernière est de la forme

$$E_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |H|^2. \quad (32)$$

Elle représente l'énergie induite par la magnétisation  $m$ , où  $H = -\nabla u$  est le champ magnétique induit par  $m$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $u$  est un potentiel scalaire vérifiant l'équation magnétostatique

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3. \quad (33)$$

Le dernier terme composant l'énergie totale est le terme d'énergie externe ou de Zeeman,

$$E_{ext} = \int_{\Omega} H_e \cdot m. \quad (34)$$

Ce terme est dû au champ magnétique extérieur dans lequel se trouve plongé le corps ferromagnétique, pour plus de détails, voir A. De Simone [28]. À température constante la magnétisation  $m$  vérifie en outre une condition assurant que le matériau soit toujours saturé. Cette condition prend la forme

$$|m| = M \text{ sur } \Omega, \quad (35)$$

avec  $M$  une constante strictement positive, qu'on suppose ici égale à 1 sans perte de généralité.

L'étude des films minces ferromagnétiques présente un grand intérêt puisqu'on trouve ce type de matériau dans divers secteurs de l'industrie. Citons à titre d'exemple les bandes audio et vidéo, lesquelles sont des rubans ferromagnétiques utilisés pour obtenir des enregistrements audio ou vidéo de haute densité.

Dans un premier temps, afin d'étudier ce type de films minces, quelques auteurs ont considéré des films très larges à épaisseur fixée (voir par exemple A. De Simone [28] et B. Dacorogna et I. Fonseca [23]). Ensuite, G. Gioia et R.D. James dans [33] ont étudié le comportement d'un film mince, avec un champ magnétique extérieur nul, lorsque son épaisseur tend vers zéro. Ces auteurs ont considéré un film mince ferromagnétique occupant un domaine  $\Omega_h$  d'épaisseur  $h$ . Ce film a une énergie par unité de volume dépendant de la magnétisation  $\bar{m}$ .

G. Gioia et R.D. James montrent que la magnétisation minimisant l'énergie totale du film mince converge quand  $h \rightarrow 0$  vers une magnétisation minimisant une certaine énergie limite. Cette énergie limite est locale, c'est-à-dire que l'équation magnétostatique (33)



disparaît complètement du modèle limite. G. Gioia et R.D. James montrent aussi que la magnétisation limite est indépendante de la direction normale au film plan, c'est-à-dire que le modèle limite est bidimensionnel. Dans [4], R. Alicandro et C. Leone ont généralisé le travail de G. Gioia et R.D. James en considérant une densité d'énergie  $W$  plus générale, dépendant de la magnétisation et de son gradient, vérifiant des hypothèses de croissance et englobant les deux parties d'énergie d'échange et d'énergie anisotrope. Ils utilisent pour cela la notion de quasiconvexification tangentielle introduite par B. Dacorogna, I. Fonseca, J. Maly et K. Trivisa dans [24] pour trouver la relaxation d'une classe d'énergies où la déformation est contrainte à rester dans une  $C^1$ -variété de dimension  $q$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Nous reprenons ici les travaux de G. Gioia et R.D. James ainsi que celui de R. Alicandro et C. Leone pour les adapter aux cas des films courbés. Après le changement de variables usuel qui nous permet de travailler sur un domaine plan, l'énergie s'écrit sous la forme

$$e(h)(m(h)) = \int_{\Omega_1} \left[ W(m(h), (m(h),_1 | m(h),_2 | \frac{1}{h} m(h),_3) A_h) + \frac{1}{2} \left( A_h^T(u(h),_1, u(h),_2, \frac{1}{h} u(h),_3), m(h) \right) \right] d_h dx \quad (36)$$

et l'équation magnétostatique s'écrit

$$\left( \nabla(-A_h^T(x) I_h \nabla u(h)(x) + m(h)(x)) \right) : (A_h^T(x) I_h) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3. \quad (37)$$

On commence par étudier le terme d'énergie magnétostatique

$$E_{mag}(h)(m) = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \left( A_h^T(u,_{1,2}, \frac{1}{h} u,_{3,3}), m \right) d_h dx, \quad (38)$$

en examinant le comportement du potentiel magnétostatique vérifiant l'équation (33).

On obtient la proposition suivante.

**Proposition 0.3.1.** *Soit  $\bar{m}(h)$  une suite de fonctions  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  telle que  $\bar{m}(h) = 0$  sur  $\Omega_1^c$  et  $|\bar{m}(h)| = 1$  sur  $\Omega_1$  vérifiant  $\bar{m}(h) \rightarrow \bar{m}(0)$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , et soit  $\bar{u}(h, \bar{m}(h))$  la solution de l'équation magnétostatique (5.30) associée à  $\bar{m}(h)$ . On a alors*

$$\nabla \bar{u}(h, \bar{m}(h)) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,3} \rightarrow w \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3), \quad (39)$$

où  $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w\tilde{a}^3|^2 d_0 dx = \int_{\Omega_1} |(a_3, \tilde{m}(0))|^2 d_0 dx, \quad (40)$$

où  $\tilde{a}^3$  représente le troisième vecteur colonne de  $A_0^T(x) = \nabla \Psi^{-1}(\Psi(x_1, x_2, 0))$  et qui est égal à  $a_3$  le troisième vecteur de la base covariante associée au difféomorphisme  $\psi$  sur  $\Omega_1$ . De plus,

$$E_{mag}(h)(\tilde{m}(h)) \rightarrow E_{mag}(0)(\tilde{m}(0)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(a_3, \tilde{m}(0))|^2 d_0 dx. \quad (41)$$

On passe ensuite au calcul de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie totale qui nous permet d'obtenir le corollaire suivant sur le comportement des minimiseurs.

**Corollaire 3.** *Toute suite minimisante diagonale  $m(h)$  de  $e(h)$  est bornée dans*

$$V = \{m \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \text{ vérifiant } m_{/\Omega_1} \in W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ |m| = 1, \text{ p.p. sur } \Omega_1 \text{ et } m = 0, \text{ p.p. sur } \Omega_1^c\}. \quad (42)$$

et ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  appartiennent à

$$V_M = \{m \in V \text{ et } m_{,3} = 0 \text{ sur } \Omega_1\}. \quad (43)$$

et minimisent l'énergie  $e(0)$  définie par

$$e(0)(m) = \int_{\omega} \left\{ Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 \right\} d_0 dx, \quad (44)$$

où  $Q_T^{2,3} W_0$  désigne l'enveloppe quasiconvexe tangentielle de la relaxée de  $W$ .

En effectuant le changement de variables inverse, on trouve que l'énergie limite écrite sur la surface courbée est de la forme

$$\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = \int_{\tilde{S}} \left\{ \tilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) + |(a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})), \tilde{m}(\tilde{x}))|^2 \right\} d\tilde{x}, \quad (45)$$

où  $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\tilde{S}$  au point  $\tilde{x}$  et  $\tilde{W} : S^2 \times S^2 \times M^3$  est définie par

$$\tilde{W}(e, y, F) = \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_e; y^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(O_e)} \int_{O_e} \left\{ \inf_{z \in y^\perp} W(y, F + z \otimes e + D_{e^\perp} \chi(s)) \right\} ds \right]. \quad (46)$$



# **Chapitre 1**

## **Rappels mathématiques et préliminaires géométriques**



# Chapitre 1

## Rappels mathématiques et préliminaires géométriques

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>20</b>
<b>1.2</b>	<b>Notations et préliminaires géométriques</b>	<b>20</b>
<b>1.3</b>	<b>Rappels sur la <math>\Gamma</math>-convergence</b>	<b>25</b>

---

## 1.1 Introduction

On va étudier dans tout ce qui suit le comportement de films courbés minces d'épaisseur  $h$  occupant des domaines ouverts  $\tilde{\Omega}^h$  lorsque leur épaisseur  $h$  tend vers zéro. Pour cela, on est amené avant de commencer l'analyse asymptotique, à effectuer un changement de variables afin de travailler sur un domaine d'épaisseur fixe indépendante de  $h$ . On étudie en suite le comportement asymptotique de l'énergie décrivant l'état d'équilibre de ces films courbés et de ses minimiseurs (quand ils existent) lorsque l'épaisseur  $h$  tend vers zéro. L'outil principal qu'on utilise pour faire cette analyse asymptotique est la  $\Gamma$ -convergence qui fournit simultanément l'énergie limite et le comportement des minimiseurs. Dans le cas des films martensitiques ou hyperélastiques posés sur un substrat les énergies étudiées ont une partie d'énergie interne dépendant du gradient de la déformation que subit le film courbé et une autre partie qui dépend soit du tenseur des dérivées secondes de la déformation (énergie d'interface du type Van der Waals), soit de la déformation elle même (énergie d'interface d'un autre type dépendant du saut de la déformation). L'énergie étudiée dans le cas des films ferromagnétiques comporte une partie d'énergie dépendant de la magnétisation et de son gradient englobant l'énergie d'échange et l'énergie anisotrope et une partie d'énergie magnétostatique dépendant de la magnétisation et du champ magnétique qu'elle induit.

On commence donc par une description de la géométrie du film courbé dans sa configuration initiale. On rappelle ensuite la définition et les propriétés principales de la  $\Gamma$ -convergence.

## 1.2 Notations et préliminaires géométriques

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base orthonormée canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . La norme d'un vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^3$  est notée  $|v|$ , le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$  par  $u \cdot v$ , leur produit vectoriel par  $u \wedge v$  et leur produit tensoriel par  $u \otimes v$ . Soit  $M^3$  l'espace des matrices  $3 \times 3$  à coefficients réels muni de la norme usuelle  $|F| = \sqrt{\text{tr}(F^T F)}$ . On note  $A = (a_1 | a_2 | a_3)$  la matrice de  $M^3$  dont la première colonne est  $a_1$ , la deuxième est  $a_2$  et la troisième est  $a_3$ . On note par  $\nabla^2 \varphi$  le tenseur  $3 \times 3 \times 3$  des dérivées secondes d'une

déformation  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

On note par  $\mathbb{M}^{3 \times 3 \times 3}$  l'ensemble des tenseurs  $3 \times 3 \times 3$  à coefficients réels. Soit  $P = (p_{ijk})$  un tenseur d'ordre 3, le tenseur  $P^T$  de composantes  $q_{ijk} = p_{ikj}$  est le transposé de  $P$  par rapport au second et au troisième indice. Soit  $P$  un tenseur d'ordre  $p \geq 1$  et soit  $Q$  un tenseur d'ordre  $q \geq 1$ . On appelle produit tensoriel contracté des tenseurs  $P$  et  $Q$  qu'on note  $P \overline{\otimes} Q$ , le tenseur d'ordre  $p + q - 2$  dont les composantes sont obtenues par sommation des produits des composants de  $P$  et  $Q$  sur le dernier indice des composantes de  $P$  et le premier indice de celles de  $Q$ . Par exemple, si  $p = 3$  et  $q = 2$  on a

$$P \overline{\otimes} Q = P_{ijk} Q_{km} (e_i \otimes e_j \otimes e_m). \quad (1.1)$$

Tout au long de ces travaux, on utilisera la convention de sommation. Les indices grecs prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2\}$  et les indices latins prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

On considère le domaine  $\tilde{\Omega}_h$  représentant un film courbé mince d'épaisseur  $h$  dont la surface moyenne est  $\tilde{S}$ , une sous-variété bidimensionnelle de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^3$  bornée et qui admet un atlas comportant une seule carte. Soit  $\psi$  cette carte. C'est donc un  $C^2$ -difféomorphisme d'un ouvert borné  $\omega$  inclus dans  $\mathbb{R}^2$  sur  $\tilde{S}$ . On suppose que  $\omega$  admet une frontière  $\partial\omega$  lipschitzienne et que  $\psi$  est prolongeable en une fonction de  $C^2(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3)$ . Soient  $a_\alpha(x) = \psi_{,\alpha}(x)$  les vecteurs de la base covariante du plan tangent  $T_{\psi(x)}\tilde{S}$  associés à la carte  $\psi$ , où  $\psi_{,\alpha}$  désigne la dérivée de  $\psi$  par rapport à la  $\alpha$  ième variable. On suppose qu'il existe un  $\delta > 0$  tels que

$$|a_1(x) \wedge a_2(x)| \geq \delta \text{ sur } \bar{\omega} \quad (1.2)$$

et on définit le vecteur  $a_3(x) = \frac{a_1(x) \wedge a_2(x)}{|a_1(x) \wedge a_2(x)|}$  appartenant à  $C^1(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3)$ . C'est le vecteur unitaire normal au plan tangent. Les vecteurs  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$  et  $a_3(x)$  constituent la base covariante. On définit les vecteurs de la base contravariante par les relations

$$a^\alpha(x) \in T_{\psi(x)}\tilde{S}, \quad a^\alpha(x) \cdot a_\beta(x) = \delta_{\alpha\beta} \text{ et } a^3(x) = a_3(x). \quad (1.3)$$

On pose  $A(x) = (a_1(x)|a_2(x)|a_3(x))$ . On remarque que  $A(x)$  est une matrice inversible



sur  $\bar{\omega}$  dont l'inverse est donné par

$$A^{-1}(x) = (a^1(x)|a^2(x)|a^3(x))^T. \quad (1.4)$$

On remarque aussi que

$$\det A(x) = |\mathbf{cof} A(x) \cdot e_3| = |a_1(x) \wedge a_2(x)| \geq \delta > 0 \quad \text{sur } \bar{\omega}. \quad (1.5)$$

Le domaine  $\tilde{\Omega}_h$  s'écrit

$$\tilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, \exists \tilde{x} \in \tilde{S}, x = \tilde{x} + \eta a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \text{ avec } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\} \quad (1.6)$$

et pour  $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_h$  on a

$$\tilde{x} = \tilde{\pi}(\tilde{x}) + \left[ (\tilde{x} - \tilde{\pi}(\tilde{x})) \cdot a_3(\psi^{-1}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))) \right] \cdot a_3(\psi^{-1}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))),$$

où  $\tilde{\pi}$  est la projection orthogonale qui envoie  $\tilde{\Omega}_h$  sur  $\tilde{S}$ . L'application  $\tilde{\pi}$  est bien définie et de classe  $C^1$  pour  $h$  assez petit par rapport aux rayons de courbure de  $\tilde{S}$ . On peut donc définir les coordonnées curvilignes d'un point du domaine  $\tilde{\Omega}_h$  associé à la carte  $\psi$  par

$$(x_1, x_2) = \psi^{-1}(\tilde{\pi}(\tilde{x})) \quad \text{et} \quad x_3 = (\tilde{x} - \tilde{\pi}(\tilde{x})) \cdot a_3(\psi^{-1}(\tilde{\pi}(\tilde{x}))). \quad (1.7)$$

On définit le domaine  $\Omega_h$  par

$$\Omega_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2) \in \omega, \frac{-h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\}. \quad (1.8)$$

On définit ensuite, pour un  $h^*$  assez petit, le  $C^2$ -difféomorphisme  $\Psi : \Omega_{h^*} \rightarrow \tilde{\Omega}_{h^*}$  par

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2) + x_3 a_3(x_1, x_2). \quad (1.9)$$

Ce difféomorphisme est l'inverse du changement de variables qu'on effectue afin de travailler sur un domaine plan, et son gradient est égal à

$$\nabla \Psi(x_1, x_2, x_3) = A(x_1, x_2) + x_3 (a_{3,1}(x_1, x_2) | a_{3,2}(x_1, x_2) | 0). \quad (1.10)$$

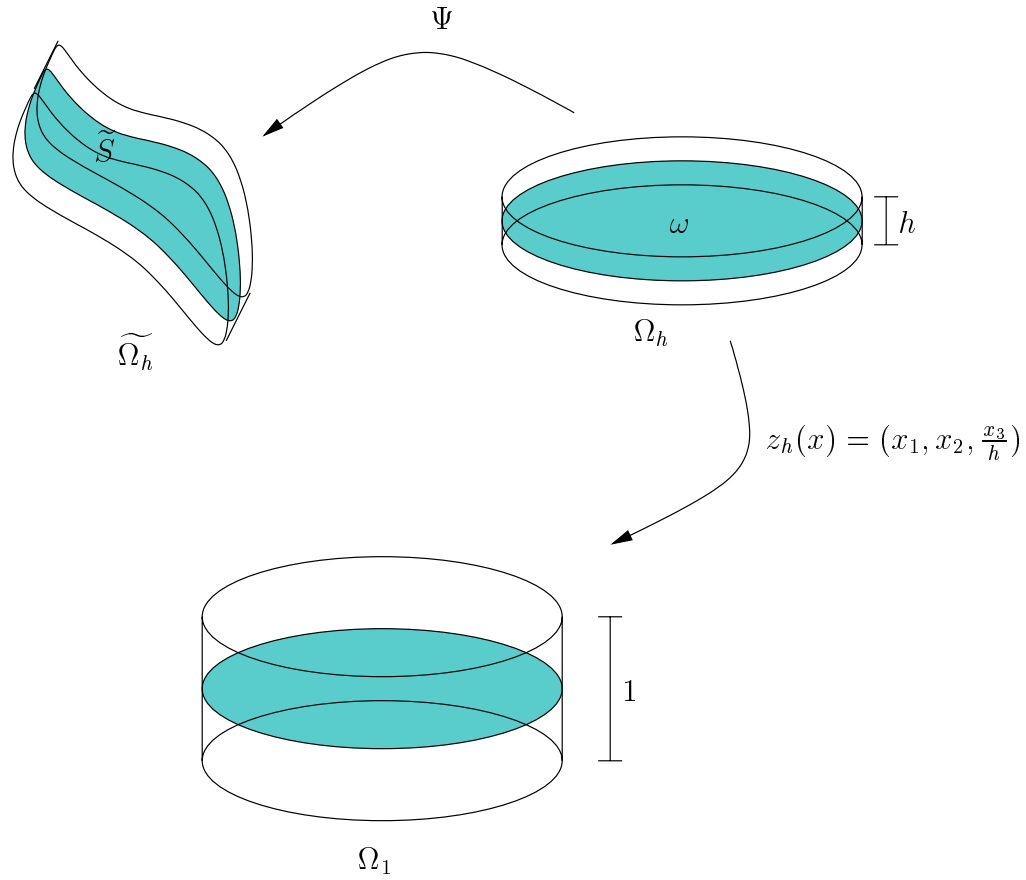


Figure 1. Changements de variables

La matrice  $\nabla\Psi(x_1, x_2, x_3)$  est partout inversible et son déterminant est le jacobien du changement de variables. Dans toute la suite,  $h$  désignera une suite quelconque de nombres réels inférieurs à  $h^*$  et strictement décroissante vers zéro. On pose

$$\begin{aligned} A_h(x) &= \nabla\Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \\ &= (A(x_1, x_2) + hx_3(a_{3,1}(x_1, x_2)|a_{3,2}(x_1, x_2)|0))^{-1} \end{aligned}$$

et

$$d_h(x) = \det \nabla\Psi(x_1, x_2, hx_3). \tag{1.11}$$

On démontre le lemme suivant

**Lemme 1.2.1.** *Le  $C^2$ -difféomorphisme  $\Psi$  vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} A_h(x) & \rightarrow A_0(x) \text{ dans } C^0(\Omega_1) \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \\ \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) & \rightarrow \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \text{ dans } C^0(\Omega_1) \text{ lorsque } h \rightarrow 0 \\ d_h(x) & \rightarrow d_0(x) \text{ dans } C^0(\Omega_1) \text{ lorsque } h \rightarrow 0. \end{cases}$$

**Preuve**

La première convergence découle du fait que, puisque  $\Psi$  est un  $C^2$ -difféomorphisme de  $\Omega_h$  dans  $\tilde{\Omega}_h$ , il en est de même pour  $\Psi^{-1}$ , ce qui implique que les dérivées premières de  $\Psi^{-1}$  sont lipschitziennes. Ceci implique que

$$\begin{aligned} \|A_h - A_0\|_{L^\infty(\Omega_1)} &= \|\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi \circ z_h^{-1} - \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi \circ z_0^{-1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \\ &\leq c \sup_{x \in \Omega_1} |z_h^{-1}(x) - z_0^{-1}(x)| \\ &= c \sup_{x \in \Omega_1} |(x_1, x_2, hx_3) - (x_1, x_2, 0)| \\ &\leq c h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième majoration on utilise le module de continuité de  $\nabla^2 \Psi^{-1}$  et le fait que  $\Psi$  est lipschitzienne. Pour une fonction  $f$  continue sur un compact  $K$  on définit  $\omega_f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  par

$$\omega_f(r) = \max_{\substack{x, y \in K \\ |x-y| \leq r}} |f(x) - f(y)|. \quad (1.12)$$

On a

$$\omega_f(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (1.13)$$

On applique ceci pour  $f = \nabla^2 \Psi^{-1}$  on obtient que

$$\|\nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi \circ z_h^{-1} - \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi \circ z_0^{-1}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \omega_{\nabla^2 \Psi^{-1}}(\|\Psi(z_h^{-1}) - \Psi(z_0^{-1})\|_{L^\infty}) \quad (1.14)$$

Or, comme  $\Psi^{-1}$  est lipschitzienne on a

$$\begin{aligned} \|\Psi(z_h^{-1}) - \Psi(z_0^{-1})\|_{L^\infty} &\leq c \sup_{x \in \Omega_1} |z_h^{-1}(x) - z_0^{-1}(x)| \\ &= c \sup_{x \in \Omega_1} |(x_1, x_2, hx_3) - (x_1, x_2, 0)| \\ &\leq c h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par suite, on a

$$\omega_{\nabla^2 \Psi^{-1}}(\|\Psi(z_h^{-1}) - \Psi(z_0^{-1})\|_{L^\infty}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad (1.15)$$

ce qui nous donne la deuxième convergence. Enfin, l'application  $\det : M^3 \rightarrow M^3$  est linéaire par rapport aux colonnes, ce qui implique que

$$\begin{aligned} d_h(x) &= \det(\nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3)) \\ &= \det(a_1|a_2|a_3) + hx_3(\det(a_1|a_{3,2}|a_3) + \det(a_{3,1}|a_2|a_3)) + h^2x_3^2(a_{3,1}|a_{3,2}|a_3). \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$|d_h(x) - d_0(x)| = h|x_3 \det(a_1|a_{3,2}|a_3) + x_3 \det(a_{3,1}|a_2|a_3) + hx_3^2(a_{3,1}|a_{3,2}|a_3)|, \quad (1.16)$$

ce qui implique que

$$\sup_{x \in \Omega_1} |d_h(x) - d_0(x)| \rightarrow 0, \quad (1.17)$$

ce qui achève la démonstration. □

### 1.3 Rappels sur la $\Gamma$ -convergence

Soit  $X$  un espace topologique, on note par  $\mathcal{N}(x)$  l'ensemble des voisinages ouverts d'un point  $x \in X$ . Soit  $G_h$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On définit la  $\Gamma$ -lim inf et la  $\Gamma$ -lim sup de  $(G_h)$  par

$$(\Gamma - \liminf_{h \rightarrow 0} G_h)(x) := \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \liminf_{h \rightarrow 0} \inf_{y \in U} G_h(y) \quad (1.18)$$

et

$$(\Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} G_h)(x) := \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \limsup_{h \rightarrow 0} \inf_{y \in U} G_h(y). \quad (1.19)$$

Il découle de cette définition que si  $X$  est un espace métrique,  $G_i$  est la  $\Gamma$ -lim inf de  $G_h$  si et seulement si

$$G_i(x) = \inf_{\{x_h\}} \{\liminf_{h \rightarrow 0^+} G_h(x_h); x_h \rightarrow x \text{ dans } X\}, \quad (1.20)$$

et  $G_s$  est la  $\Gamma$ -lim sup de  $G_h$  si et seulement si

$$G_s(x) = \inf_{\{x_h\}} \{\limsup_{h \rightarrow 0^+} G_h(x_h); x_h \rightarrow x \text{ dans } X\}. \quad (1.21)$$

Si  $\Gamma - \limsup G_h = \Gamma - \liminf G_h$ , on dit que  $G_h$  est  $\Gamma$ -convergente avec

$$\Gamma - \lim G_h = \Gamma - \limsup G_h = \Gamma - \liminf G_h. \quad (1.22)$$

On obtient comme conséquence de ces définitions qu'une suite  $G_h$  de fonctions d'un espace métrique  $X$  dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est  $\Gamma$ -convergente vers  $G_0$  pour la topologie de  $X$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites pour tout  $x \in X$

$$\begin{cases} \forall x_h \rightarrow x, \liminf G_h(x_h) \geq G_0(x), \\ \exists y_h \rightarrow x, G_h(y_h) \rightarrow G_0(x). \end{cases}$$

Les propriétés de la  $\Gamma$ -convergence qui nous intéressent sont des propriétés de compacité à savoir que toute suite  $G_h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  admet une sous suite  $\Gamma$ -convergente, et que si les minimiseurs de  $G_h$  restent dans un compact de  $X$  indépendant de  $h$ , alors leurs valeurs d'adhérence sont des minimiseurs de  $G_0$ .

On a aussi la proposition suivante qu'on peut trouver dans [25].

**Proposition 1.3.1.** *Les fonctions  $\Gamma - \limsup G_h$  et  $\Gamma - \liminf G_h$  sont semi-continues inférieurement pour la topologie de  $X$ .*

**Preuve**

La démonstration découle du fait que si  $\mathcal{O}$  est la topologie de  $X$  et si on considère une fonction  $\alpha : \mathcal{O} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  quelconque alors la fonction définie par

$$F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \alpha(U), \quad (1.23)$$

où  $\mathcal{N}(x)$  désigne l'ensemble des voisinages ouverts de  $x$  au sens de  $\mathcal{O}$ , est semi-continue inférieure dans  $X$ . En effet, soit  $c \in \mathbb{R}$  une constante et considérons l'ensemble

$$V = \{y \in X, F(y) > c\}. \quad (1.24)$$

Montrons que  $V$  est un ouvert de  $X$ . Soit  $z \in V$ , ceci implique que

$$F(z) > c, \quad (1.25)$$

ce qui implique qu'il existe un voisinage ouvert  $U_c \in \mathcal{N}(z)$  tel que

$$\alpha(U_c) > c. \quad (1.26)$$

Soit  $x \in U_c$  quelconque. Ceci implique que  $U_c \in \mathcal{N}(x)$  et donc que

$$F(x) = \sup_{u \in \mathcal{N}(x)} \alpha(u) \geq \alpha(U_c) > c. \quad (1.27)$$

Par conséquent,  $x \in V$  et par suite  $U_c \subset V$ , ce qui prouve que  $V$  est un ouvert. En appliquant ceci aux fonctions

$$\alpha(U) = \liminf_{h \rightarrow 0} \inf_U G_h \quad (1.28)$$

et

$$\alpha'(U) = \limsup_{h \rightarrow 0} \inf_U G_h \quad (1.29)$$

et grâce aux définitions de la  $\Gamma$ -lim sup et de la  $\Gamma$ -lim inf dans (1.18) et (1.19), on obtient la preuve de la proposition.

□

Pour plus de détails sur les propriétés et les caractéristiques de la  $\Gamma$ -convergence voir [5], [25], [26] et [27].



# **Première partie**

## **Matériaux martensitiques**





# **Chapitre 2**

## **Films courbés minces martensitiques - Développement asymptotique formel**



# Chapitre 2

## Films courbés minces martensitiques - Développement asymptotique formel

### Résumé

On considère un film courbé mince martensitique dont le comportement est régi par une énergie composée d'une partie d'énergie hyperélastique interne non linéaire dépendant du gradient de la déformation et d'une partie d'énergie d'interface du type Van der Waals dépendant du tenseur des dérivées secondes de la déformation. On effectue un développement asymptotique formel basé sur un Ansatz pour trouver la limite de cette énergie lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>2.2</b>	<b>Mise en œuvre</b>	<b>35</b>
2.2.1	Changement de variables	35
2.2.2	Développement asymptotique	38
2.2.3	Résolution des problèmes de minimisation	47
<b>2.3</b>	<b>Applications à des exemples de films de forme simple</b>	<b>55</b>
2.3.1	Cas des films plans	55
2.3.2	Cas d'un film de forme cylindrique	57

## 2.1 Introduction

On s'intéresse dans cette étude à des films courbés minces, composés d'un matériau du type martensitique. Les matériaux martensitiques font partie des alliages à mémoire de forme. À partir d'une phase à haute température appelée phase austénite, le matériau subit une transformation réversible par refroidissement brusque appelée transformation martensitique, qui l'amène à la phase martensitique. Au cours de cette transformation qui est quasi-instantanée, le solide subit une faible variation du volume et un important cisaillement de la structure dans une direction bien déterminée. Grâce à la réversibilité de la transformation martensitique, le solide peut retrouver sa forme initiale par un simple réchauffement. Ainsi, le matériau a une forme géométrique bien définie à basse température et une forme différente à haute température. C'est là que se situe la grande importance de ce matériau dans divers secteurs d'applications tels que l'aéronautique, l'électronique et le secteur médical. Citons à titre d'exemple les microactionneurs ou les prothèses de col du fémur, lesquels ont une forme initiale facilitant leur mise en place à la température ambiante et qui prennent leur forme fonctionnelle à la température du corps humain suite à la transformation martensitique. Dans notre travail, nous allons nous intéresser au comportement d'un solide composé d'un matériau martensitique se trouvant dans la phase martensitique à basse température, c'est-à-dire après avoir subi la transformation martensitique.

L'état d'équilibre d'un film courbé mince d'épaisseur  $h$  martensitique occupant un domaine  $\tilde{\Omega}_h$  et subissant une déformation  $\tilde{\varphi}$  est décrit par les minimiseurs de l'énergie régissant son comportement. Celle-ci est constituée d'une partie d'énergie élastique interne non linéaire et d'un terme d'énergie d'interface du type Van der Waals due au changement de phase

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} [\kappa |\nabla^2 \tilde{\varphi}|^2 + W(\nabla \tilde{\varphi})] dx \quad (2.1)$$

où  $\kappa$  est une constante strictement positive,  $\nabla^2 \tilde{\varphi}$  est le tenseur  $3 \times 3 \times 3$  des dérivées secondes et  $W(\nabla \tilde{\varphi})$  représente l'énergie élastique par unité de volume du matériau

comme fonction du gradient de la déformation  $\tilde{\varphi}$ . On s'intéresse au comportement de cette énergie et de ses minimiseurs lorsque l'épaisseur  $h$  du film tend vers zéro.

Pour cela on va procéder, dans un premier temps, à un développement asymptotique formel fondé sur un Ansatz afin d'obtenir une indication sur la forme de l'énergie limite. La méthode du développement asymptotique formel pour les plaques a été introduite tout d'abord par P.G. Ciarlet et P. Destuynder dans [19] et P.G. Ciarlet [13]. Une autre approche de cette méthode utilisant une formulation variationnelle seulement en terme de déplacement a été élaborée par A. Raoult dans [46]. On peut trouver une description générale de cette méthode et de quelques travaux où elle a été utilisée dans P.G. Ciarlet [16]. Cette méthode a ensuite été raffinée et améliorée en terme d'hypothèses par D.D. Fox, A. Raoult et J.C. Simo dans [31]. Ces auteurs résolvent une suite d'équations d'Euler-Lagrange. Dans notre cas, la méthode qui semble la plus adéquate et la plus simple pour procéder au développement asymptotique formel, est celle développée par O. Pantz dans [44] et qui amène à la résolution d'une suite de problèmes de minimisation.

On va commencer notre étude par un changement de variables qui nous permettra de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur  $h$ . Ensuite on procédera au calcul des termes du développement asymptotique de l'énergie, ce qui nous amènera à la résolution des problèmes de minimisation. Les solutions obtenues nous donneront alors une idée sur l'expression de l'énergie limite puisqu'il s'agit d'une démarche formelle. On terminera enfin par une illustration de nos résultats dans le cas des plaques et de quelques exemples de films courbés de forme simple.

## 2.2 Mise en œuvre

### 2.2.1 Changement de variables

Dans son état de référence le film mince occupe le domaine  $\tilde{\Omega}_h$  introduit au chapitre 1. On va associer à toute déformation  $\tilde{\varphi}$  sur  $\tilde{\Omega}_h$  l'énergie

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) = \tilde{K}^h(\tilde{\varphi}) + \tilde{I}^h(\tilde{\varphi}), \quad (2.2)$$

où

$$\tilde{K}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} \kappa |\nabla^2 \tilde{\varphi}|^2 dx \quad (2.3)$$

représente l'énergie d'interface avec  $\kappa$  une constante strictement positive,  $\nabla^2 \tilde{\varphi}$  est le tenseur  $3 \times 3 \times 3$  des dérivées secondes et

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} W(\nabla \tilde{\varphi}) dx \quad (2.4)$$

est l'énergie interne élastique, avec  $W : M^3 \rightarrow [0, +\infty[$  régulière et vérifiant les hypothèses de croissance et de coercivité :  $\exists c_1, c_2 > 0$

$$\forall A \in M^3, c_1(|A|^2 - 1) \leq W(A) \leq c_2(|A|^q + 1) \quad \text{avec } 2 \leq q < 6, \quad (2.5)$$

ainsi que l'axiome d'indifférence matérielle, c'est-à-dire que pour toute matrice  $3 \times 3$   $A$  et toute rotation  $R$  dans  $SO(3)$ , on a

$$W(RA) = W(A),$$

où  $SO(3) = \{R \in M^3 : R^T R = I, \det R = 1\}$  est le groupe de rotations de  $\mathbb{R}^3$ .

On s'intéresse au problème de minimisation de l'énergie  $\tilde{e}^h$  sur l'ensemble des déformations admissibles  $V$  défini par

$$V = \{\tilde{\varphi} \in H^2(\tilde{\Omega}_h; \mathbb{R}^3); \tilde{\varphi}(x) = \tilde{A}x \text{ sur } \tilde{\Gamma}_h\}, \quad (2.6)$$

où  $\tilde{A} = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | \tilde{a}_3)$  est une matrice constante de  $M^3$  et  $\tilde{\Gamma}_h$  est la surface latérale de  $\tilde{\Omega}_h$ . On étudie le comportement de cette énergie et celui de ces minimiseurs lorsque l'épaisseur du film courbé tend vers zéro. Pour cela on commence par faire un changement de variables qui nous permet de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur. On procède en deux étapes. Dans la première étape, on se ramène à un domaine plan grâce au fait que, pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}_h$ , il existe un unique  $x \in \Omega_h$  tel que  $\tilde{x} = \Psi(x)$ , où

$$\Omega_h = \left\{x \in \mathbb{R}^3, \exists x' \in \omega, x = x' + \eta e_3, -\frac{h}{2} < \eta < \frac{h}{2}\right\}, \quad (2.7)$$

ceci pour  $h$  assez petit (voir chapitre 1). Si  $\tilde{\varphi}$  est une déformation du film dans sa configuration de référence, on définit  $\varphi_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$\forall x \in \Omega_h, \varphi_h(x) = \tilde{\varphi}(\Psi(x)). \quad (2.8)$$

Sachant que l'énergie totale est de l'ordre de  $h$  pour le régime de déformations que l'on vise à la limite (par définition du régime membranaire), on s'intéresse au comportement limite de l'énergie par unité d'épaisseur c'est-à-dire  $\frac{1}{h}\tilde{e}^h(\tilde{\varphi})$ . Pour toute déformation  $\varphi_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  on pose donc

$$e^h(\varphi_h) = \frac{1}{h}\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) \quad (2.9)$$

et on obtient par changement de variables

$$\begin{aligned} e^h(\varphi_h) &= \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} \left\{ W(\nabla \varphi_h \nabla \Psi^{-1}(\Psi(x))) \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left| \left( \nabla^2 \varphi_h \overline{\otimes} (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi) \right)^T \overline{\otimes} (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi) + \nabla \varphi_h \overline{\otimes} (\nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi) \right|^2 \right\} \det \nabla \Psi \, dx. \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| (\varphi_h)_{i,lm}(x) \Psi_{m,k}^{-1}(\Psi(x)) \Psi_{l,j}^{-1}(\Psi(x)) + (\varphi_h)_{i,l}(x) \Psi_{l,jk}^{-1}(\Psi(x)) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + W(\nabla \varphi_h(x) \nabla \Psi^{-1}(\Psi(x))) \right\} \det \nabla \Psi(x) \, dx. \end{aligned}$$

(La notion de produit tensoriel contracté  $\overline{\otimes}$  a été introduite au premier chapitre). On définit ensuite l'application  $z_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$z_h(x_1, x_2, x_3) = \left( x_1, x_2, \frac{x_3}{h} \right). \quad (2.10)$$

L'application  $z_h$  envoie  $\Omega_h$  sur l'ouvert

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } -\frac{1}{2} < x_3 < \frac{1}{2} \right\}. \quad (2.11)$$

À toute déformation  $\varphi_h$  sur  $\Omega_h$ , on associe la déformation  $\varphi(h) : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\varphi(h)(x) = \varphi_h(z_h^{-1}(x)). \quad (2.12)$$

On pose enfin

$$e(h)(\varphi(h)) = e^h(\varphi_h). \quad (2.13)$$

On obtient alors

$$e(h)(\varphi(h)) = K(h)(\varphi(h)) + I(h)(\varphi(h)), \quad (2.14)$$



avec

$$I(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} W \left[ \left( \varphi_{,1} \mid \varphi_{,2} \mid \frac{1}{h} \varphi_{,3} \right) A_h \right] d_h dx \quad (2.15)$$

et

$$\begin{aligned} K(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ \left( \nabla_p^2 \varphi + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_{,3} + \nabla_p \varphi_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3 \right) \overline{\otimes} A_h \right]^t \overline{\otimes} A_h \right. \\ \left. + \left[ \nabla_p \varphi + \frac{1}{h} \varphi_{,3} \otimes e_3 \right] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h(x) dx, \end{aligned} \quad (2.16)$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} K(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| (\varphi)_{i,\alpha\beta}(x) \Psi_{\alpha,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{\beta,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right. \\ \left. + \frac{1}{h} (\varphi)_{i,\alpha 3} (\Psi_{\alpha,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{3,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) + \Psi_{\alpha,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{3,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3)) \right. \\ \left. + \frac{1}{h^2} (\varphi)_{i,33}(x) \Psi_{3,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{3,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right. \\ \left. + (\varphi)_{i,\alpha}(x) \Psi_{\alpha,jk}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) + \frac{1}{h} (\varphi)_{i,3}(x) \Psi_{3,jk}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h(x) dx, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où l'on a posé

$$d_h(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3) \quad (2.18)$$

et

$$A_h(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \quad (2.19)$$

avec les notations  $\nabla_p \varphi = \varphi_{,\alpha} \otimes e_\alpha$  et  $\nabla_p^2 \varphi = \varphi_{,\alpha\beta} \otimes e_\alpha \otimes e_\beta$ . On peut dès lors commencer la procédure de développement asymptotique sur le domaine  $\Omega_1$ .

## 2.2.2 Développement asymptotique

Pour pouvoir procéder au développement asymptotique, on a besoin d'une expression explicite de la densité d'énergie interne élastique  $W$ . On suppose donc que le matériau est un matériau de Saint Venant-Kirchhoff, c'est-à-dire que

$$W(A) = \frac{\lambda}{8} (\text{tr}(A^T A - I))^2 + \frac{\mu}{4} \text{tr}((A^T A - I)^2) \text{ pour tout } A \in M^3, \quad (2.20)$$

où  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$  sont les constantes de Lamé du matériau. Ce choix peut sembler peu adapté au contexte de notre étude, puisque le matériau de Saint Venant-Kirchhoff

ne présente pas de changement de phase, alors que nous lui ajoutons une énergie d'interface. En fait, le but de cette étude formelle est de fournir une idée sur la forme de l'énergie limite pour un véritable matériau martensitique dans des cas plus généraux de façon à servir de guide dans l'étude par  $\Gamma$ -convergence menée au chapitre suivant. Le matériau de Saint Venant-Kirchhoff permet des calculs explicites relativement simples, alors qu'une énergie possédant des puits de potentiel sur les différentes phases conduirait à des calculs autrement complexes.

On note  $P(h)$  le problème consistant à trouver  $\varphi(h)$  vérifiant :

$$e(h)(\varphi(h)) = \inf\{e(h)(\varphi), \varphi \in V_h\} \quad (2.21)$$

avec

$$V_h = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3); \varphi(x) = \tilde{A} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (2.22)$$

où  $\tilde{A} = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | \tilde{a}_3)$  est une matrice constante de  $M^3$ .

**Ansatz 1.** *On suppose que la solution  $\varphi(h)$  du problème  $P(h)$  admet un développement en puissances de  $h$*

$$\varphi(h) = \varphi^0 + h\varphi^1 + h^2\varphi^2 + \dots$$

**Remarque 1.** *Les dérivées premières  $\Psi_{,i}^{-1}$  et secondes  $\Psi_{,ij}^{-1}$  prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$  admettent chacune un développement asymptotique en puissances de  $h$ . Ce développement peut être obtenu en utilisant la formule de Taylor-Lagrange et en supposant que  $\Psi^{-1}$  est suffisamment dérivable.*

Partant de l'Ansatz 1 et de la remarque 1, on va montrer que l'énergie  $e(h)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $h$ . On obtient dans un premier temps la proposition suivante.

**Proposition 2.2.1.** *La fonctionnelle  $e(h)$  admet un premier développement asymptotique en puissances de  $h$*

$$e(h)(\varphi) = \sum_{n=-4}^{\infty} h^n e_h^n(\varphi). \quad (2.23)$$

avec

$$e_h^{-4}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left( \kappa |d_{ij}^{-2}|^2 + C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} \right) c_0 dx, \quad (2.24)$$

$$e_h^{-3}(\varphi) = \sum_{p=-4}^{-3} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-5} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-5} \right) c_0 + \left( \kappa d_{ij}^{-2} \cdot d_{ij}^{-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} \right) c_1 dx \quad (2.25)$$

et pour tout  $n \geq -2$

$$e_h^n(\varphi) = \sum_{p=-4}^n \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-2} \right) c_0 dx + \sum_{p=-4}^{n-1} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-3} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-3} \right) c_1 dx + \sum_{p=-4}^{n-2} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-4} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-4} \right) c_2 dx, \quad (2.26)$$

où les quantités  $d_{ij}^p$  et  $E_{ij}^p$  seront définies dans (2.47)(2.48) et (2.52),  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  dans (2.35), et  $C^{ijkl}$  sont les composantes du tenseur d'élasticité.

**Remarque 2.** Il faut noter que les termes  $e_h^n$  que l'on obtient dépendent de  $h$ . Il ne s'agit pas d'un développement asymptotique au sens usuel du terme. Néanmoins, la remarque 1 nous permettra de déduire (voir proposition 2.2.3) que  $e(h)$  admet un second développement asymptotique en puissances de  $h$  comportant des termes indépendants de  $h$  de la forme

$$e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq -4} e^n(\varphi) h^n. \quad (2.27)$$

On utilise ensuite la méthode de O. Pantz qui consiste à résoudre une suite de problèmes de minimisation et qui repose sur la proposition suivante démontrée dans [44]. Dans ce qui suit, on désignera par  $\varphi$  la suite  $(\varphi^i)_{i \in \mathbb{N}}$  et l'on écrira

$$e(h)(\varphi) = e(h)(\varphi(h)). \quad (2.28)$$

**Proposition 2.2.2.** La solution  $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \dots)$  de la suite des problèmes  $P(h)$  est telle que

$$\varphi \in \bigcap_{n=-4}^{\infty} Q_n, \quad (2.29)$$

avec

$$Q_{n+1} = \left\{ \varphi \in Q_n, e^n(\varphi) = \inf_{\varphi' \in Q_n} e^n(\varphi') \right\}$$

et

$$Q_{-4} = \left\{ \varphi \in C(\overline{\Omega}_1; \mathbb{R}^3), \sum_n \varphi^n h^n \in V_h \right\}.$$

On désigne par  $P_n$  le problème consistant à déterminer l'ensemble des minimiseurs de  $e^n$  sur  $Q_n$ .

La proposition 2.2.2 nous permet d'obtenir la solution  $\varphi(h)$  de  $P(h)$  par la résolution de la suite récursive des problèmes  $P_n$ .

### Démonstration de la proposition 2.2.1 et calcul des termes du développement asymptotique

On rappelle qu'on suppose que le matériau est un matériau de Saint Venant-Kirchhoff et donc que

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}^h} W(\nabla \tilde{\varphi}) \quad (2.30)$$

avec

$$W(\nabla \tilde{\varphi}) = C^{ijkl} \tilde{E}_{ij}^h(\tilde{\varphi}) \tilde{E}_{kl}^h(\tilde{\varphi}) \quad (2.31)$$

où

$$C^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \quad (2.32)$$

est le tenseur d'élasticité et

$$\tilde{E}^h(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2} [\nabla \tilde{\varphi}^T \nabla \tilde{\varphi} - I] \quad (2.33)$$

est le tenseur de déformation.

**Lemme 2.2.1.** *Le jacobien du changement de variables  $\det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3)$  est polynomial par rapport à  $h$  avec*

$$\det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3) = c_0 + hc_1 + h^2 c_2. \quad (2.34)$$

#### Preuve

On obtient ceci simplement en développant le déterminant par rapport aux colonnes du gradient, on obtient

$$c_0 = \det(a_1 | a_2 | a_3), \quad c_1 = x_3 [\det(a_1 | a_{3,2} | a_3) + \det(a_{3,1} | a_2 | a_3)] \quad \text{et} \quad c_2 = x_3^2 \det(a_{3,1} | a_{3,2} | a_3). \quad (2.35)$$

□

**Lemme 2.2.2.** Les composantes  $\tilde{E}_{ij}^h(\tilde{\varphi})$  du tenseur de déformation  $\tilde{E}^h(\tilde{\varphi})$  admettent un développement en puissances de  $h$ ,

$$\tilde{E}_{ij}^h(\tilde{\varphi}) = \sum_{n \geq -2} \tilde{E}_{ij}^n h^n, \quad (2.36)$$

où

$$\tilde{E}_{ij}^{-2} = \frac{1}{2} \tilde{C}_{ij}^0, \quad \tilde{E}_{ij}^{-1} = \frac{1}{2} (\tilde{B}_{ij}^0 + \tilde{C}_{ij}^1), \quad \tilde{E}_{ij}^0 = \frac{1}{2} (\tilde{A}_{ij}^0 + \tilde{B}_{ij}^1 + \tilde{C}_{ij}^2 - \delta_{ij}) \quad (2.37)$$

et

$$\tilde{E}_{ij}^n = \frac{1}{2} (\tilde{A}_{ij}^n + \tilde{B}_{ij}^{n+1} + \tilde{C}_{ij}^{n+2}) \text{ pour } n > 0, \quad (2.38)$$

avec

$$\tilde{A}_{ij}^n = \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} \sum_{p=0}^n \varphi_{,\alpha}^p \cdot \varphi_{,\beta}^{n-p}, \quad (2.39)$$

$$\tilde{B}_{ij}^n = \left( \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \right) \left( \sum_{p=0}^n \varphi_{,3}^p \cdot \varphi_{,\alpha}^{n-p} \right) \quad (2.40)$$

et

$$\tilde{C}_{ij}^n = \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \sum_{p=0}^n \varphi_{,3}^p \cdot \varphi_{,3}^{n-p}, \quad (2.41)$$

où les dérivées des  $\varphi^p$  sont prises au point  $z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})$ . Les coefficients  $\tilde{E}_{ij}^n$  dépendent donc de  $h$ .

**Preuve**

On a

$$\tilde{E}_{ij}(h) = \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}_{,i} \cdot \tilde{\varphi}_{,j} - \delta_{ij}). \quad (2.42)$$

On exprime les dérivées de  $\tilde{\varphi}$  en fonction de celles de  $\varphi$  et on obtient

$$\tilde{\varphi}_{i,j}(\tilde{x}) = \left( \varphi_{i,k} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \left( (z_h)_{k,l} \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \Psi_{l,j}^{-1}(\tilde{x}), \quad (2.43)$$

avec

$$(z_h)_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta} \text{ et } (z_h)_{i,3} = (z_h)_{3,i} = \frac{1}{h} \delta_{i3}. \quad (2.44)$$

En explicitant les termes en les dérivées de  $z_h$  et puisque  $\varphi(x) = \sum_{p \geq 0} h^p \varphi^p(x)$ , on obtient

$$\tilde{\varphi}_{i,j}(\tilde{x}) = \sum_{p \geq 0} h^p \left( \left( (\varphi_{,\alpha}^p \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{\alpha,j}^{-1}(\tilde{x}) + \frac{1}{h} (\varphi_{,3}^p \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{3,j}^{-1}(\tilde{x}) \right) \right). \quad (2.45)$$

On a alors en appliquant le produit scalaire

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{,i}(\tilde{x}) \cdot \tilde{\varphi}_{,j}(\tilde{x}) &= \sum_{n \geq 0} h^n \sum_{p=0}^n \left( (\varphi_{,\alpha}^p \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{\alpha,i}^{-1}(\tilde{x}) + \frac{1}{h} (\varphi_{,3}^p \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{3,i}^{-1}(\tilde{x}) \right) \\ &\quad \cdot \left( (\varphi_{,\beta}^{n-p} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{\beta,j}^{-1}(\tilde{x}) + \frac{1}{h} (\varphi_{,3}^{n-p} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{3,j}^{-1}(\tilde{x}) \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\tilde{\varphi}_{,i}(\tilde{x}) \cdot \tilde{\varphi}_{,j}(\tilde{x}) = \sum_{n \geq 0} h^n \left( A_{ij}^n + \frac{1}{h} B_{ij}^n + \frac{1}{h^2} C_{ij}^n \right).$$

avec les  $\tilde{A}_{ij}^n$ ,  $\tilde{B}_{ij}^n$  et  $\tilde{C}_{ij}^n$  définis comme ci-dessus, ce qui nous donne le résultat.  $\square$

**Lemme 2.2.3.** *Le terme d'énergie élastique interne  $I(h)(\varphi)$  admet un développement en puissances de  $h$*

$$I(h)(\varphi) = \sum_{n=-4}^{+\infty} I_h^n(\varphi) h^n, \quad (2.46)$$

où

$$\begin{aligned} I_h^{-4}(\varphi) &= \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} c_0 dx, \\ I_h^{-3}(\varphi) &= \sum_{p=-4}^{-3} \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-5} c_0 dx + \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} c_1 dx \end{aligned}$$

et pour tout  $n \geq -2$

$$\begin{aligned} I_h^n(\varphi) &= \sum_{p=-4}^n \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-2} c_0 dx + \sum_{p=-4}^{n-1} \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-3} c_1 dx \\ &\quad + \sum_{p=-4}^{n-2} \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-4} c_2 dx. \end{aligned}$$

où

$$E_{ij}^{-2} = \frac{1}{2} C_{ij}^0, \quad E_{ij}^{-1} = \frac{1}{2} (B_{ij}^0 + C_{ij}^1), \quad E_{ij}^0 = \frac{1}{2} (A_{ij}^0 + B_{ij}^1 + C_{ij}^2 - \delta_{ij}) \quad (2.47)$$

et

$$E_{ij}^n = \frac{1}{2} (A_{ij}^n + B_{ij}^{n+1} + C_{ij}^{n+2}) \text{ pour } n > 0, \quad (2.48)$$

avec

$$A_{ij}^n = \Psi_{\alpha,i}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \Psi_{\beta,j}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \sum_{p=0}^n \varphi_{,\alpha}^p(x) \cdot \varphi_{,\beta}^{n-p}(x), \quad (2.49)$$

$$B_{ij}^n = \left( \Psi_{3,i}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \Psi_{\alpha,j}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) + \Psi_{\alpha,i}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \Psi_{3,j}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \right) \left( \sum_{p=0}^n \varphi_{,3}^p(x) \cdot \varphi_{,\alpha}^{n-p}(x) \right) \quad (2.50)$$

et

$$C_{ij}^n = \Psi_{3,i}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \Psi_{3,j}^{-1}(\Psi(z^{-1}(x))) \sum_{p=0}^n \varphi_{,3}^p(x) \cdot \varphi_{,3}^{n-p}(x), \quad (2.51)$$

sachant que les  $c_0, c_1, c_2$  sont définis dans le lemme 2.2.1.

### Preuve

On a

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} C^{ijkl} \tilde{E}_{ij}^h(\tilde{\varphi}^h) \tilde{E}_{kl}^h(\tilde{\varphi}^h) dx.$$

On remplace les  $\tilde{E}_{ij}^h(\tilde{\varphi}^h)$  et les  $\tilde{E}_{kl}^h(\tilde{\varphi}^h)$  par leurs développements en puissances de  $h$  et on effectue le produit scalaire des deux séries, on obtient

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = \sum_{n \geq -4} \left( \left( \sum_{p=-4}^n \int_{\tilde{\Omega}_h} C^{ijkl} \tilde{E}_{ij}^{p+2}(\tilde{\varphi}^h) \tilde{E}_{kl}^{n-p-2}(\tilde{\varphi}^h) dx \right) \right) h^n.$$

Par changement de variables on a

$$I(\varphi) = \frac{1}{h} \tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = \sum_{n \geq -4} \left( \left( \sum_{p=-4}^n \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-2} \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3) dx \right) \right) h^n.$$

On remplace le jacobien par son développement en puissances de  $h$  on obtient

$$I(\varphi) = \sum_{n \geq -4} \left( \left( \sum_{p=-4}^n \int_{\Omega_1} C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-2} (c_0 + hc_1 + h^2 c_2) dx \right) \right) h^n$$

ce qui nous donne le résultat. □

**Lemme 2.2.4.** *Le terme d'énergie d'interface  $K(h)(\varphi)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $h$*

$$K(h)(\varphi) = \sum_{n=-4}^{+\infty} K_h^n(\varphi) h^n$$

avec

$$K_h^{-4}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa c_0 d_{ij}^{-2} \cdot d_{ij}^{-2} dx,$$

$$K^{-3h}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa \left( c_1 d_{ij}^{-2} \cdot d_{ij}^{-2} + \sum_{p=-4}^{-3} c_0 d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-3-p-2} \right) dx$$

et pour tout  $n \geq -2$

$$K_h^n(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa \left( c_2 \sum_{p=-4}^{n-2} d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-4} + c_1 \sum_{p=-4}^{n-1} d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-3} + c_0 \sum_{p=-4}^n d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-2} \right) dx,$$

où

$$d_{ij}^{-2} = \zeta_{ij}^0, \quad d_{ij}^{-1} = \gamma_{ij}^0 + \zeta_{ij}^1 \quad \text{et pour tout } n \geq 0, \quad d_{ij}^n = \xi_{ij}^n + \gamma_{ij}^{n+1} + \zeta_{ij}^{n+2}, \quad (2.52)$$

avec

$$\xi_{ij}^p = \varphi_{,\alpha\beta}^p \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} + \varphi_{,\alpha}^p \Psi_{\alpha,ij}^{-1}, \quad (2.53)$$

$$\gamma_{ij}^p = \varphi_{,\alpha 3}^p (\Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}) + \varphi_{,3}^p \Psi_{3,ij}^{-1} \quad (2.54)$$

et

$$\zeta_{ij}^p = \varphi_{,33}^p \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}. \quad (2.55)$$

Dans ces formules les dérivées  $\Psi_{k,i}^{-1}$  et  $\Psi_{k,i}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$ .

**Preuve**

On a

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}). \quad (2.56)$$

On dérive deux fois et l'on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{,ij}(\tilde{x}) &= \left( \varphi_{,\alpha\beta} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \Psi_{\alpha,i}^{-1}(\tilde{x}) \Psi_{\beta,j}^{-1}(\tilde{x}) + \left( \varphi_{,\alpha} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \Psi_{\alpha,ij}^{-1}(\tilde{x}) \\ &+ \frac{1}{h} \left[ \left( \varphi_{,\alpha 3} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \left( \Psi_{\alpha,i}^{-1}(\tilde{x}) \Psi_{3,j}^{-1}(\tilde{x}) + \Psi_{\alpha,j}^{-1}(\tilde{x}) \Psi_{3,i}^{-1}(\tilde{x}) \right) + \left( \varphi_{,3} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \Psi_{3,ij}^{-1}(\tilde{x}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{h^2} \left( \varphi_{,33} \circ z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x}) \right) \Psi_{3,i}^{-1}(\tilde{x}) \Psi_{3,j}^{-1}(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Puis on remplace  $\varphi$  par son développement en puissances de  $h$  et on obtient

$$\tilde{\varphi}_{,ij} = \sum_{p \geq -2} \tilde{d}_{ij}^p h^p, \quad (2.57)$$



avec

$$\tilde{d}_{ij}^{-2} = \tilde{\zeta}_{ij}^0, \tilde{d}_{ij}^{-1} = \tilde{\gamma}_{ij}^0 + \tilde{\zeta}_{ij}^1 \text{ et pour tout } n \geq 0, \tilde{d}_{ij}^n = \tilde{\xi}_{ij}^n + \tilde{\gamma}_{ij}^{n+1} + \tilde{\zeta}_{ij}^{n+2}, \quad (2.58)$$

où les  $\tilde{\xi}_{ij}^p$ ,  $\tilde{\gamma}_{ij}^p$  et  $\tilde{\zeta}_{ij}^p$  ont les mêmes expressions algébriques que les  $\xi_{ij}^p$ ,  $\gamma_{ij}^p$  et  $\zeta_{ij}^p$  définis dans (2.53) (2.54) et (2.55) à la seule différence que les fonctions  $\varphi_{,i}$ ,  $\varphi_{,ij}$  sont prises au point  $z_h \circ \Psi^{-1}(\tilde{x})$  et les fonctions  $\Psi_{k,i}^{-1}$ ,  $\Psi_{k,ij}^{-1}$  sont prises au point  $\tilde{x}$ . On calcule ensuite le produit scalaire de deux séries ce qui nous donne

$$|\tilde{\varphi}_{,ij}|^2 = \sum_{n \geq -4} \left( \sum_{p=-4}^n \tilde{d}_{ij}^{p+2} \cdot \tilde{d}_{ij}^{n-p-2} \right) h^n.$$

Enfin, par changement de variables, on trouve

$$\begin{aligned} K(h)(\varphi) &= \frac{1}{h} \tilde{K}^h(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} \kappa |\tilde{\varphi}_{,ij}|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{n \geq -4} \left( \left( \sum_{p=-4}^n d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-2} \right) (c_0 + hc_1 + h^2 c_2) \right) h^n dx, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. □

### Preuve de la proposition 2.2.1

Il suffit d'écrire que  $e(h)(\varphi) = I(h)(\varphi) + K(h)(\varphi)$  et d'appliquer les lemmes 3.3 et 3.4. On trouve que

$$e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq -4} e^n(\varphi) h^n, \quad (2.59)$$

avec

$$e^{-4}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{-2} \cdot d_{ij}^{-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} \right) c_0 dx, \quad (2.60)$$

$$e^{-3}(\varphi) = \sum_{p=-4}^{-3} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-5} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-5} \right) c_0 + \left( \kappa d_{ij}^{-2} \cdot d_{ij}^{-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} \right) c_1 dx \quad (2.61)$$

et pour tout  $n \geq -2$

$$e^n(\varphi) = \sum_{p=-4}^n \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-2} \right) c_0 dx + \sum_{p=-4}^{n-1} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-3} \right. \\ \left. + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-3} \right) c_1 dx + \sum_{p=-4}^{n-2} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{n-p-4} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{n-p-4} \right) c_2 dx. \quad (2.62)$$

□

**Remarque 3.** Les termes du développement asymptotique de  $e(h)$  ne sont pas indépendants de l'épaisseur  $h$  puisque les dérivées premières et secondes de  $\Psi^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$ , cependant, grâce à la remarque 1 on a la proposition suivante.

**Proposition 2.2.3.** L'énergie  $e(h)$  admet un développement asymptotique de la forme

$$e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq -4} e^n(\varphi) h^n, \quad (2.63)$$

où les  $e^n$  sont indépendants de  $h$ .

**Preuve**

On obtient ceci grâce à la proposition 2.2.1 et à la remarque 1.

□

**Remarque 4.** L'expression des  $e^n$  découle de celle des  $e_h^n$ . Au cours de la résolution des problèmes de minimisation, on n'aura en fait pas besoin de l'expression explicite des termes  $e^n$ . On trouvera le résultat en utilisant directement l'expression des  $e_h^n$ .

### 2.2.3 Résolution des problèmes de minimisation

On va utiliser la proposition 2.2.2 pour obtenir l'expression de  $e^0$  après avoir minimisé les énergies  $e^{-4}$ ,  $e^{-3}$ ,  $e^{-2}$  et  $e^{-1}$ . On obtient le résultat suivant.

**Proposition 2.2.4.** Après minimisation des énergies  $e^{-4}$ ,  $e^{-3}$ ,  $e^{-2}$  et  $e^{-1}$ , l'énergie  $e^0$  obtenue est de la forme

$$e^0(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left( \kappa \sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}^0|^2 + \sum_{i,j,k,l=1}^3 C^{ijkl} E_{ij}^0 E_{kl}^0 \right) \det A(x) dx,$$

avec  $\varphi \in V_h$  vérifiant

$$\varphi_{,3}^0 = 0 \text{ et } \varphi_{,33}^1 = 0, \quad (2.64)$$

et

$$d_{ij}^0 = \varphi_{,\alpha\beta}^0 \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} + \varphi_{,\alpha 3}^1 (\Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1}) + \varphi_{,3}^1 \Psi_{3,ij}^{-1} + \varphi_{,\alpha}^0 \Psi_{\alpha,ij}^{-1} + \varphi_{,33}^2 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}, \quad (2.65)$$

$$E_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left[ (\varphi_{,\alpha}^0 \cdot \varphi_{,\beta}^0) \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} + (\varphi_{,\alpha}^0 \cdot \varphi_{,3}^1) (\Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1}) + |\varphi_{,3}^1|^2 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} - \delta_{ij} \right] \quad (2.66)$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  et  $\Psi_{i,jk}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, 0)$ .

La démonstration de cette proposition découle des lemmes et propositions suivantes.

**Lemme 2.2.5.** *L'énergie  $e^{-4}$  est de la forme*

$$e^{-4}(\varphi) = \int_{\Omega_1} (\kappa |\varphi_{,33}^0|^2 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} + \frac{1}{4} C^{ijkl} |\varphi_{,3}^0|^4 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \Psi_{3,k}^{-1} \Psi_{3,l}^{-1}) c_0 dx \quad (2.67)$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, 0)$ .

**Preuve**

On applique la proposition 2.2.1 qui nous donne que

$$e_h^{-4}(\varphi) = \int_{\Omega_1} (\kappa |d_{ij}^{-2}|^2 + C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2}) c_0 dx, \quad (2.68)$$

où d'après le lemme 2.2.4 on a

$$d_{ij}^{-2} = \zeta_{ij}^0 = \varphi_{,33}^0 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \quad (2.69)$$

et d'après le lemme 2.2.2 on a

$$E_{ij}^{-2} = \frac{1}{2} C_{ij}^0 = \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} |\varphi_{,3}^0|^2, \quad (2.70)$$

sachant que les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$ . Or le fait qu'on ait

$$h^4 e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e_h^{n-4} h^n = \sum_{n \geq 0} e^{n-4} h^n, \quad (2.71)$$

implique que pour tout  $\varphi$  on a

$$e^{-4}(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} e_h^{-4}(\varphi), \quad (2.72)$$

ce qui nous donne le résultat.

□

Dès lors qu'on a l'expression de l'énergie  $e^{-4}$ , on peut la minimiser sur  $V_h$  suivant la méthode de O. Pantz. On obtient.

**Proposition 2.2.5.** *La résolution du premier problème de minimisation fournit*

$$Q_{-3} = \{\varphi \in V_h, \varphi_{,3}^0 = 0\}.$$

De plus  $e^{-4}(\varphi) = 0$  sur  $Q_{-3}$ .

**Preuve**

D'après la proposition 2.2.2 on a

$$Q_{-3} = \{\varphi \in V_h, e^{-4}(\varphi) = \inf_{\varphi' \in V_h} e^{-4}(\varphi')\}.$$

Or, on voit grâce au lemme 2.2.5, que pour minimiser l'énergie  $e^{-4}$  sur  $V_h$ , il faut et il suffit de prendre des déformations  $\varphi$  vérifiant

$$\varphi_{,3}^0 = 0. \tag{2.73}$$

Pour ces déformations, on a

$$e^{-4}(\varphi) = 0, \tag{2.74}$$

ce qui nous donne le résultat, puisque  $e^{-4}(\varphi) \geq 0$  et que  $e^{-4}(\varphi) > 0$  si  $\varphi_{,3}^0 \neq 0$ .

□

**Corollaire 4.** *Pour  $\varphi \in Q_{-3}$  on a*

$$e_h^{-4}(\varphi) = 0. \tag{2.75}$$

**Preuve**

La preuve est évidente grâce à (2.68).

□

On passe ensuite au deuxième problème de minimisation. On a la proposition suivante.

**Proposition 2.2.6.** *Le deuxième problème de minimisation est trivial. On a*

$$Q_{-2} = Q_{-3}.$$

**Preuve**

D'après la proposition 2.2.2, on a

$$Q_{-2} = \{\varphi \in Q_{-3}, e^{-3}(\varphi) = \inf_{\varphi' \in Q_{-3}} e^{-3}(\varphi')\}.$$

Or d'après la proposition 2.2.1 on a

$$e_h^{-3}(\varphi) = \sum_{p=-4}^{-3} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-5} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-5} \right) c_0 + \left( \kappa d_{ij}^{-2} \cdot d_{ij}^{-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{-2} E_{kl}^{-2} \right) c_1 dx. \quad (2.76)$$

Or, pour  $\varphi \in Q_{-3}$ , la proposition 2.2.5 montre que  $d_{ij}^{-2} = 0$  et  $E_{ij}^{-2} = 0$  ce qui implique d'après (2.76) que

$$e_h^{-3}(\varphi) = 0. \quad (2.77)$$

Comme on a déjà montré que

$$e_h^{-4}(\varphi) = e^{-4}(\varphi) = 0, \quad (2.78)$$

on voit donc que

$$h^3 e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e_h^{n-3}(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e^{n-3}(\varphi), \quad (2.79)$$

d'où pour tout  $\varphi$  on a

$$e^{-3}(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} e_h^{-3}(\varphi) = 0, \quad (2.80)$$

ce qui nous donne le résultat.

□

On passe au problème de minimisation d'ordre suivant qui va nous donner une condition sur la dérivée seconde de  $\varphi^1$ .

**Lemme 2.2.6.** *Pour  $\varphi \in Q_{-2}$  on a*

$$e^{-2}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa |\varphi_{,33}^1|^2 \Psi_{3,i}^{-1^2} \Psi_{3,j}^{-1^2} \det(a_1 | a_2 | a_3) dx, \quad (2.81)$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, 0)$ .

**Preuve**

D'après la proposition 2.2.1 on a

$$e_h^{-2}(\varphi) = \sum_{p=-4}^{-2} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-4} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-4} \right) c_0 dx + \sum_{p=-4}^{-3} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-5} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-5} \right) c_1 dx + \int_{\Omega_1} \left( \kappa |d_{ij}^{-2}|^2 + C^{ijkl} |E_{ij}^{-2}|^2 \right) c_2 dx. \quad (2.82)$$

Or, lorsque  $\varphi \in Q_{-2}$ , c'est-à-dire que  $\varphi_{,3}^0 = 0$ , on a déjà vu que  $d_{ij}^{-2} = 0$  et que  $E_{ij}^{-2} = 0$ .

Par conséquent, on a

$$e_h^{-2}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \sum_{i,j,k,l=1}^3 \left( \kappa |d_{ij}^{-1}|^2 + C^{ijkl} E_{ij}^{-1} E_{kl}^{-1} \right) \det(a_1|a_2|a_3) dx. \quad (2.83)$$

D'autre part, le lemme 2.2.2 implique que

$$\begin{aligned} E_{ij}^{-1} &= \frac{1}{2}(B_{ij}^0 + C_{ij}^1) = \frac{1}{2} \left( (\Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}) \varphi_{,3}^0 \cdot \varphi_{,\alpha}^0 + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \sum_{p=0}^1 \varphi_{,3}^p \cdot \varphi_{,3}^{1-p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (\Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}) \varphi_{,3}^0 \cdot \varphi_{,\alpha}^0 + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} |\varphi_{,3}^0 \cdot \varphi_{,3}^1|^2 \right) \end{aligned}$$

et le lemme 2.2.4 que

$$d_{ij}^{-1} = \gamma_{ij}^0 + \zeta_{ij}^1 = \varphi_{,\alpha 3}^0 (\Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}) + \varphi_{,3}^0 \Psi_{3,ij}^{-1} + \varphi_{,33}^1 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}.$$

Par suite, si  $\varphi \in Q_{-2}$  alors

$$E_{ij}^{-1} = 0 \text{ et } d_{ij}^{-1} = \varphi_{,33}^1 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1},$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$ . En remplaçant ces expressions dans (2.83), on obtient que

$$e_h^{-2}(\varphi) = \int_{\Omega_1} \kappa |\varphi_{,33}^1|^2 \Psi_{3,i}^{-1 2} \Psi_{3,j}^{-1 2} \det(a_1|a_2|a_3) dx, \quad (2.84)$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$ . D'autre part, puisque  $\varphi \in Q_{-2}$  on a

$$h^2 e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e_h^{n-2}(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e^{n-2}(\varphi), \quad (2.85)$$

par suite pour tout  $\varphi$  on a

$$e^{-2}(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} e_h^{-2}(\varphi), \quad (2.86)$$

ce qui nous donne le résultat.

□

Comme conséquence du lemme 2.2.6 on obtient la proposition suivante.

**Proposition 2.2.7.** *Le troisième problème de minimisation nous donne que*

$$Q_{-1} = \{ \varphi \in V_h, \varphi_{,3}^0 = 0 \text{ et } \varphi_{,33}^1 = 0 \}. \quad (2.87)$$

**Preuve**

D'après la proposition 2.2.2 on a

$$Q_{-1} = \{ \varphi \in Q_{-2}, e^{-2}(\varphi) = \inf_{\varphi' \in Q_{-2}} e^{-2}(\varphi') \}.$$

Or d'après le lemme 2.2.6, pour annuler l'énergie  $e^{-2}$  et donc la minimiser, il faut et il suffit d'annuler  $\varphi_{,33}^1$ , ce qui nous donne le résultat.

□

**Corollaire 5.** *Pour  $\varphi \in Q_{-1}$  on a*

$$e_h^{-2}(\varphi) = 0. \quad (2.88)$$

**Preuve**

On obtient ceci grâce à (2.84).

□

On passe ensuite au problème de minimisation suivant. On a

**Proposition 2.2.8.** *Le quatrième problème de minimisation est trivial, on a*

$$Q_0 = Q_{-1}.$$

**Preuve**

D'après la proposition 2.2.2 on a

$$Q_0 = \{\varphi \in Q_{-1}, e^{-1}(\varphi) = \inf_{\varphi' \in Q_{-1}} e^{-1}(\varphi')\}.$$

D'autre part on a d'après la proposition 2.2.1 que

$$\begin{aligned} e_h^{-1}(\varphi) = & \sum_{p=-4}^{-1} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-3} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-3} \right) c_0 dx + \sum_{p=-4}^{-2} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-4} \right. \\ & \left. + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-4} \right) c_1 dx + \sum_{p=-4}^{-3} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-5} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-5} \right) c_2 dx. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Or, pour tout  $\varphi \in Q_{-1}$  on a d'après (2.52) et (2.47)

$$d_{ij}^{-2} = d_{ij}^{-1} = 0 \text{ et } E_{ij}^{-2} = E_{ij}^{-1} = 0, \quad (2.90)$$

ce qui implique que pour tout  $\varphi \in Q_{-1}$  on a

$$e_h^{-1}(\varphi) = 0. \quad (2.91)$$

D'autre part, puisque  $\forall \varphi \in Q_{-1}$  on a

$$e^{-2}(\varphi) = e_h^{-2}(\varphi) = 0. \quad (2.92)$$

Ceci implique, comme précédemment, que pour tout  $\varphi$  on a

$$e^{-1}(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} e_h^{-1}(\varphi) = 0, \quad (2.93)$$

ce qui nous donne ce qu'on cherche. □

Finalement le problème de minimisation suivant nous donne la proposition 2.2.4.

**Preuve de la proposition 2.2.4**

Puisque d'après la proposition 2.2.1 on a

$$\begin{aligned} e_h^0(\varphi) = & \sum_{p=-4}^0 \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-2} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-2} \right) c_0 dx + \sum_{p=-4}^{-1} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-3} \right. \\ & \left. + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-3} \right) c_1 dx + \sum_{p=-4}^{-2} \int_{\Omega_1} \left( \kappa d_{ij}^{p+2} \cdot d_{ij}^{-p-4} + C^{ijkl} E_{ij}^{p+2} E_{kl}^{-p-4} \right) c_2 dx. \end{aligned} \quad (2.94)$$



En annulant les  $d_{ij}^{-2}$ ,  $d_{ij}^{-1}$ ,  $E_{ij}^{-2}$  et  $E_{ij}^{-1}$  on aura

$$e_h^0(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left( \kappa |d_{ij}^0|^2 + C^{ijkl} E_{ij}^0 E_{kl}^0 \right) c_0 dx. \quad (2.95)$$

Or, d'après le lemme 2.2.2 on a

$$\begin{aligned} E_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(A_{ij}^0 + B_{ij}^1 + C_{ij}^2 - \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} \varphi_{\alpha}^0 \cdot \varphi_{\beta}^0 + \left( \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \right) \left( \sum_{p=0}^1 \varphi_{,3}^p \cdot \varphi_{,\alpha}^{1-p} \right) + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \sum_{p=0}^2 \varphi_{,3}^p \cdot \varphi_{,3}^{2-p} - \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

qui devient pour  $\varphi \in Q_0$

$$E_{ij}^0 = \frac{1}{2} \left( \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} \varphi_{\alpha}^0 \cdot \varphi_{\beta}^0 + \left( \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} \right) \varphi_{,3}^1 \cdot \varphi_{,\alpha}^0 + \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1} |\varphi_{,3}^1|^2 - \delta_{ij} \right) \quad (2.97)$$

et d'après le lemme 2.2.4 on a

$$\begin{aligned} d_{ij}^0 &= \xi_{ij}^0 + \gamma_{ij}^1 + \zeta_{ij}^2 \\ &= \varphi_{,\alpha\beta}^0 \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{\beta,j}^{-1} + \varphi_{,\alpha}^0 \Psi_{\alpha,ij}^{-1} + \varphi_{,\alpha 3}^1 (\Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{\alpha,j}^{-1} + \Psi_{\alpha,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}) + \varphi_{,3}^1 \Psi_{3,ij}^{-1} + \varphi_{,33}^2 \Psi_{3,i}^{-1} \Psi_{3,j}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

où les fonctions  $\Psi_{i,j}^{-1}$  et  $\Psi_{i,jk}^{-1}$  sont prises au point  $\Psi(x_1, x_2, hx_3)$ . Or puisqu'on a pour  $\varphi \in Q_0$

$$e_h^{-1}(\varphi) = e^{-1}(\varphi) = 0, \quad (2.99)$$

ceci implique que

$$e(h)(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e_h^n(\varphi) = \sum_{n \geq 0} e^n(\varphi), \quad (2.100)$$

par suite

$$e^0(\varphi) = \lim_{h \rightarrow 0} e_h^0(\varphi), \quad (2.101)$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 2.2.4

□

**Remarque 5.** En appliquant nos résultats pour le cas des films plans c'est-à-dire pour  $\Psi(x) = x$  on retrouve les résultats du développement asymptotique formel de O. Pantz pour l'énergie interne d'un matériau de Saint Venant-Kirchhoff et le modèle de Bhattacharya et James obtenu par des résultats de convergence pour l'énergie d'interface.

## 2.3 Applications à des exemples de films de forme simple

### 2.3.1 Cas des films plans

On va appliquer nos résultats dans le cas des films plans, c'est-à-dire pour  $\Psi(x) = x$ . L'expression de l'énergie  $e^0$  devient

$$e^0(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left( |\nabla_p^2 \varphi^0|^2 + 2|\nabla_p \varphi_{,3}^1|^2 + |\varphi_{,33}^2|^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,2}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] \right\} dx. \quad (2.102)$$

**Remarque 6.** Dans le cas des plaques, les dérivées de  $\Psi$  sont des constantes et donc la dépendance en  $h$  qui subsiste dans le cas général après la résolution des cinq premiers problèmes de minimisation n'apparaît pas. Par conséquent, on peut aller plus loin dans la résolution des problèmes de minimisation.

On démontre le théorème suivant

**Théorème 2.3.1.** En minimisant l'énergie  $e^0$  sur  $Q_0$  on obtient que

$$Q_1 = \left\{ \varphi \in V_h \text{ vérifiant } \varphi_{,3}^0 = 0, \varphi_{,33}^1 = 0, e_1^0(\varphi^0, \varphi^1) = \inf_{(\xi, \eta) \in Q_2^0} e_1^0(\xi, \eta), \varphi_{,33}^2 = 0 \right. \\ \left. \text{et } \varphi^0(x) = x_1 \tilde{a}_1 + x_2 \tilde{a}_2, \varphi_{,3}^1(x) = \tilde{a}_3 \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (2.103)$$

avec  $\tilde{A} = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | \tilde{a}_3)$  la matrice constante de la condition au bord,

$$Q_3^0 = \left\{ (z_0, z_1) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ tel qu'il existe } (\varphi^2, \varphi^3, \dots) \text{ vérifiant} \right. \\ \left. z_0 + h z_1 + h^2 \varphi^2 + \dots \in Q^0 \right\} \quad (2.104)$$

et

$$e_1^0(\varphi^0, \varphi^1) = \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left( |\nabla_p^2 \varphi^0|^2 + 2|\nabla_p \varphi_{,3}^1|^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,2}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] \right\} dx. \quad (2.105)$$

**Preuve**

On rappelle que

$$Q^0 = \left\{ \varphi = \varphi^0 + h\varphi^1 + h^2\varphi^2 + \dots \text{ où } \varphi^n \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ vérifiant } \varphi_{,3}^0 = 0 \text{ et } \varphi_{,33}^1 = 0 \right. \\ \left. \text{ avec } \varphi(x) = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | h\tilde{a}_3)x \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}, \quad (2.106)$$

où  $\tilde{A} = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | \tilde{a}_3)$  est une matrice constante de  $M^3$ . La condition imposée sur le bord  $\partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  s'écrit aussi

$$\varphi^0(x) = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | 0)x, \quad \varphi^1(x) = (0 | 0 | \tilde{a}_3)x = x_3 \tilde{a}_3 \text{ et } \varphi^n(x) = 0 \text{ pour } n \geq 2. \quad (2.107)$$

On pose

$$e_1^0(\varphi^0, \varphi^1) = \inf_{z^2 \in Q_1^0} e^0(\varphi^0, \varphi^1, z^2), \quad (2.108)$$

avec

$$Q_1^0 = \left\{ z \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ tel qu'il existe } (\varphi^0, \varphi^1, \varphi^3, \dots) \text{ vérifiant } \varphi^0 + h\varphi^1 + h^2z + h^3\varphi^3 + \dots \in Q^0 \right\}. \quad (2.109)$$

On obtient pour  $\varphi^2$  vérifiant

$$\varphi_{,33}^2 = 0 \quad (2.110)$$

que

$$e_1^0(\varphi^0, \varphi^1) = \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left( |\nabla_p^2 \varphi^0|^2 + 2|\nabla_p \varphi_{,3}^1|^2 \right) + \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,2}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] \right\} dx. \quad (2.111)$$

□

**Remarque 7.** On retrouve ainsi le modèle de Bhattacharya et James (voir[8]) pour les plaques.

On définit l'énergie  $e$  par

$$e(u) = \int_{\omega} \left\{ 2\kappa |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + |\varphi_{,2}^0|^2 + |u|^2 - 3 \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + (|\varphi_{,2}^0|^2 - 1)^2 + (|u|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot u)^2 + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot u)^2 \right] \right\} dx. \quad (2.112)$$

On remarque que le minimiseur de cette énergie est le  $\varphi_3^1$  qui minimise l'énergie  $e^0$ . En regardant l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à cette énergie on trouve que ses minimiseurs vérifient l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} [\lambda(|\varphi_1^0|^2 + |\varphi_2^0|^2 + |u|^2 - 3) + 2\mu(|u|^2 - 1)]u + 2\mu[(u, \varphi_1^0)\varphi_1^0 + (u, \varphi_2^0)\varphi_2^0] \\ -4\kappa\Delta u = 0 \text{ sur } \omega \\ u = \tilde{a}_3 \text{ sur } \partial\omega, \end{cases}$$

### 2.3.2 Cas d'un film de forme cylindrique

Afin d'avoir une idée sur ce que donnent les résultats du développement asymptotique dans le cas d'un exemple explicite de film courbé mince, on va les appliquer dans le cas d'un film mince de forme cylindrique, de longueur 1 et de rayon  $r$ . On rappelle que dans le cas d'une portion d'un cylindre, le difféomorphisme  $\psi$  est de la forme :

$$\begin{aligned} \psi : ]0; 1[ \times ]0; \frac{\pi}{2}[ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1, r \cos x_2, r \sin x_2), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= (1, 0, 0), a_2(x_1, x_2) = (0, -r \sin x_2, r \cos x_2) \text{ et} \\ a_3(x_1, x_2) &= (0, -\cos x_2, -\sin x_2), \end{aligned}$$

par suite  $c_0 = r$  et  $\Psi$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Psi : ]0; 1[ \times ]0; \pi[ \times ]-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}[ &\rightarrow \tilde{\Omega}_h \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1, (r - x_3) \cos x_2, (r - x_3) \sin x_2) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \tilde{\Omega}_h &\rightarrow \Omega_1 \\ (z_1, z_2, z_3) &\mapsto \left( z_1, \arctan \frac{z_3}{z_2}, r - \sqrt{z_2^2 + z_3^2} \right). \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule les valeurs de  $\Psi^{-1}$  et de ses dérivées au point

$$\Psi(x_1, x_2, 0) = (x_1, r \cos x_2, r \sin x_2).$$

On obtient ainsi les valeurs des  $d_{ij}^0$  et des  $E_{ij}^0$ , ce qui nous donne l'expression suivante de l'énergie  $e^0$

$$\begin{aligned} e^0(\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2) = & \int_{\Omega_1} \left\{ \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + \frac{1}{r} |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \right. \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + \left( \frac{1}{r} |\varphi_{,2}^0|^2 - 1 \right)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] \\ & \left. + \kappa \left( |\varphi_{,11}^0|^2 + \frac{2}{r^2} |\varphi_{,12}^0|^2 + 2|\varphi_{,13}^1|^2 + \left| \frac{1}{r^2} \varphi_{,22}^0 - \frac{1}{r} \varphi_{,3}^1 \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{r} \varphi_{,23}^1 + \frac{1}{r^2} \varphi_{,2}^0 \right|^2 + |\varphi_{,33}^2|^2 \right) \right\} r dx. \end{aligned} \quad (2.113)$$

On remarque qu'on peut minimiser l'énergie  $e^0$  par rapport à  $\varphi_{,33}^2$  en prenant

$$\varphi_{,33}^2 = 0. \quad (2.114)$$

L'expression de l'énergie devient

$$\begin{aligned} e^0(\varphi^0, \varphi^1) = & \int_{\Omega_1} \left\{ \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + \frac{1}{r} |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \right. \\ & + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + \left( \frac{1}{r} |\varphi_{,2}^0|^2 - 1 \right)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] \\ & \left. + \kappa \left( |\varphi_{,11}^0|^2 + \frac{2}{r^2} |\varphi_{,12}^0|^2 + 2|\varphi_{,13}^1|^2 + \left| \frac{1}{r^2} \varphi_{,22}^0 - \frac{1}{r} \varphi_{,3}^1 \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{r} \varphi_{,23}^1 + \frac{1}{r^2} \varphi_{,2}^0 \right|^2 \right) \right\} r dx. \end{aligned} \quad (2.115)$$

La différence principale, à ce stade, avec le cas des plaques, se situe dans l'existence des termes d'ordres 1 dans la partie d'énergie d'interface, à savoir  $\frac{1}{r^2} \varphi_{,2}^0$  et  $\frac{1}{r} \varphi_{,3}^1$ . Ceci rend la minimisation de  $e^0$  par rapport à  $\varphi^1$  assez différente du cas des plaques. En effet, afin de minimiser notre énergie par rapport à  $\varphi^1$ , on considère l'énergie à  $\varphi_{,1}^0$ ,  $\varphi_{,2}^0$  et  $\varphi_{,22}^0$  constants définie sur  $H^1(\omega; \mathbb{R}^3)$  par

$$\begin{aligned} e(u) = & \int_{\omega} \left\{ \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + \frac{1}{r} |\varphi_{,2}^0|^2 + |u|^2 - 3 \right)^2 + \frac{\mu}{2} \left[ (|u|^2 - 1)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot u)^2 + 2(\varphi_{,2}^0 \cdot u)^2 \right] \right. \\ & \left. + \kappa \left( 2|u_{,1}|^2 + \left| \frac{1}{r} u - \frac{1}{r^2} \varphi_{,22}^0 \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{r} u_{,2} + \frac{1}{r^2} \varphi_{,2}^0 \right|^2 \right) \right\} r dx. \end{aligned} \quad (2.116)$$

On remarque que le minimiseur de cette énergie est le  $\varphi_{,3}^1$  qui minimise l'énergie  $e^0$ . En regardant l'équation d'Euler-Lagrange correspondante à cette énergie on trouve que ses minimiseurs vérifient l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} [\lambda(|\varphi_{,1}^0|^2 + \frac{1}{r} |\varphi_{,2}^0|^2 + |u|^2 - 3) + 2\mu(|u|^2 - 1)]u + 2\mu[(u, \varphi_{,1}^0)\varphi_{,1}^0 + (u, \varphi_{,2}^0)\varphi_{,2}^0] \\ + 2\frac{\kappa}{r}(\frac{1}{r}u - \frac{1}{r^2}\varphi_{,22}^0) - 4\kappa\tilde{\Delta}u = 0 \text{ sur } \omega \\ u = \tilde{A}a_3 \text{ sur } \partial\omega, \end{cases}$$

où

$$\tilde{\Delta}u = u_{,11} + \frac{1}{r^2}u_{,22}. \quad (2.117)$$

### 2.3.3 Cas d'une portion de sphère

On va essayer de voir le cas d'un film mince de forme sphérique qui est un exemple assez différent de celui du cylindre puisqu'il est assez éloigné du cas des plaques. On va donc considérer une surface moyenne de forme sphérique pour laquelle le difféomorphisme  $\psi$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi : ]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[ \times ]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[ &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_1) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2) &= (\cos x_1 \cos x_2, \cos x_1 \sin x_2, -\sin x_1), \\ a_2(x_1, x_2) &= (-\sin x_1 \sin x_2, \sin x_1 \cos x_2, 0) \text{ et} \\ a_3(x_1, x_2) &= (\sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_1). \end{aligned}$$

Par suite  $c_0 = \sin x_1$  et  $\Psi$  s'écrit

$$\begin{aligned} \Psi : ]0; \frac{\pi}{2}[ \times ]0; \frac{\pi}{2}[ \times ]-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}[ &\rightarrow \tilde{\Omega}_h \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto ((1+x_3) \sin x_1 \cos x_2, (1+x_3) \sin x_1 \sin x_2, (1+x_3) \cos x_1) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \tilde{\Omega}_h &\rightarrow \Omega_1 \\ (z_1, z_2, z_3) &\mapsto \left( \arctan \sqrt{\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_3^2}}, \arctan \frac{z_2}{z_1}, -1 + \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \right). \end{aligned}$$

Ensuite, on calcule les valeurs de  $\Psi^{-1}$  et de ses dérivées au point  $\Psi(x_1, x_2, 0)$ , on obtient les valeurs des  $d_{ij}^0$  et des  $E_{ij}^0$ , ce qui nous donne l'expression de l'énergie  $e^0$  suivante :

$$\begin{aligned} e^0(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left[ |\varphi_{,11}^0|^2 + \frac{1}{\sin^4 x_1} |\varphi_{,22}^0|^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,12}^0|^2 + 2|\varphi_{,13}^1|^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,23}^1|^2 + |\varphi_{,33}^2|^2 \right. \right. \\ + \frac{2 \cos x_1}{\sin^3 x_1} \varphi_{,22}^0 \cdot \varphi_{,1}^0 - \frac{4 \cos x_1}{\sin^3 x_1} \varphi_{,12}^0 \cdot \varphi_{,2}^0 - 4 \varphi_{,13}^1 \cdot \varphi_{,1}^0 - \frac{4}{\sin^2 x_1} \varphi_{,23}^1 \cdot \varphi_{,2}^0 \\ + \frac{2}{\sin^2 x_1} \varphi_{,22}^0 \cdot \varphi_{,3}^1 + |\varphi_{,3}^1|^2 + |\varphi_{,1}^0|^2 (4 \cos^2 x_1 \sin^2 x_1 + \cot^2 x_1 + 2) + |\varphi_{,2}^0|^2 \left. \right] \\ + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + \left( \frac{1}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,2}^0|^2 - 1 \right)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} (\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right. \\ \left. + \frac{2}{\sin^2 x_1} (\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] + \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + \frac{1}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \Big\} \sin x_1 dx. \end{aligned}$$

On remarque que là aussi on peut minimiser notre énergie par rapport à  $\varphi_{,33}^2$  rien qu'en l'annulant, c'est-à-dire que  $\varphi^2$  est affine par rapport à la troisième variable. Par suite tous les termes restants sont indépendants de la troisième variable. Ceci nous permet d'intégrer par rapport à cette variable pour obtenir l'expression suivante

$$\begin{aligned} e^0(\varphi) = \int_{\omega} \left\{ \kappa \left[ |\varphi_{,11}^0|^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,12}^0|^2 + 2|\varphi_{,13}^1 - \varphi_{,1}^0|^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,23}^1 - \varphi_{,2}^0|^2 \right. \right. \\ + \frac{2 \cos x_1}{\sin^3 x_1} \varphi_{,22}^0 \cdot \varphi_{,1}^0 - \frac{4 \cos x_1}{\sin^3 x_1} \varphi_{,12}^0 \cdot \varphi_{,2}^0 + \left| \frac{1}{\sin^2 x_1} \varphi_{,22}^0 + \varphi_{,3}^1 \right|^2 \\ + |\varphi_{,1}^0|^2 (4 \cos^2 x_1 \sin^2 x_1 + \cot^2 x_1 + 1) + |\varphi_{,2}^0|^2 \left( 1 - \frac{2}{\sin^2 x_1} \right) \left. \right] \\ + \frac{\mu}{2} \left[ (|\varphi_{,1}^0|^2 - 1)^2 + \left( \frac{1}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,2}^0|^2 - 1 \right)^2 + (|\varphi_{,3}^1|^2 - 1)^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} (\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,2}^0)^2 + 2(\varphi_{,1}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right. \\ \left. + \frac{2}{\sin^2 x_1} (\varphi_{,2}^0 \cdot \varphi_{,3}^1)^2 \right] + \frac{\lambda}{4} \left( |\varphi_{,1}^0|^2 + \frac{1}{\sin^2 x_1} |\varphi_{,2}^0|^2 + |\varphi_{,3}^1|^2 - 3 \right)^2 \Big\} \sin x_1 dx. \end{aligned}$$

En procédant comme dans le cas du cylindre, on va considérer l'énergie  $\tilde{e}$  définie par

$$\begin{aligned} \tilde{e}(u) = \int_{\omega} \left\{ \kappa \left[ 2|u_{,1} - a|^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} |u_{,2} - b|^2 + \left| \frac{1}{\sin^2 x_1} c + u \right|^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{\mu}{2} \left[ (|u|^2 - 1)^2 + 2(a \cdot u)^2 + \frac{2}{\sin^2 x_1} (b \cdot u)^2 \right] + \frac{\lambda}{4} \left( |a|^2 + \frac{1}{\sin^2 x_1} |b|^2 + |u|^2 - 3 \right)^2 \right\} \sin x_1 dx. \end{aligned}$$

On voit tout de suite que le  $\varphi_{,3}^1$  minimisant  $e^0$  est le minimiseur de  $\tilde{e}$  avec  $a = \varphi_{,1}^0$ ,  $b = \varphi_{,2}^0$  et  $c = \varphi_{,22}^0$ . En suite en considérant l'équation d'Euler-Lagrange, on conclut que

ce minimiseur doit vérifier l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} [\lambda(|a|^2 + \frac{1}{\sin^2 x_1}|b|^2 + |u|^2 - 3) + 2\mu(|u|^2 - 1) + 2\kappa]u + 2\mu[(u, a)a + \frac{1}{\sin^2 x_1}(u, b)b] \\ -4\kappa\tilde{\Delta}u + \frac{2\kappa}{\sin x_1}c = 0 \text{ sur } \omega \\ u = \tilde{A}a_3 \text{ sur } \partial\omega, \end{cases}$$

où

$$\tilde{\Delta}u = u_{,11} + \frac{1}{\sin^2 x_1}u_{,22}. \quad (2.118)$$





**Chapitre 3**  
**Films courbés minces martensitiques -**  
 **$\Gamma$ -convergence**



# Chapitre 3

## Films courbés minces martensitiques - $\Gamma$ -convergence

### Résumé

En se basant sur les résultats de l'analyse formelle effectuée au chapitre précédent, on étudie le comportement des minimiseurs de l'énergie d'un film courbé mince martensitique lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro. On trouve que ces minimiseurs convergent vers les minimiseurs d'une énergie obtenue par  $\Gamma$ -convergence, dépendant d'une déformation bidimensionnelle et d'un vecteur de Cosserat.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>66</b>
<b>3.2</b>	<b>Existence de minimiseurs pour l'énergie à épaisseur fixée</b>	<b>68</b>
<b>3.3</b>	<b>Calcul de la <math>\Gamma</math>-limite et comportement des minimiseurs</b>	<b>75</b>
<b>3.4</b>	<b>Retour à la configuration de référence initiale</b>	<b>96</b>

---

### 3.1 Introduction

On considère un film courbé mince martensitique occupant au repos un domaine  $\tilde{\Omega}_h$ . Son comportement sous une déformation  $\tilde{\varphi}$  est décrit par la somme d'une énergie interne élastique  $\tilde{I}^h$  et d'un terme d'énergie d'interface  $\tilde{K}^h$

$$\tilde{e}^h = \tilde{I}^h + \tilde{K}^h, \quad (3.1)$$

avec

$$\tilde{K}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} \kappa |\nabla^2 \tilde{\varphi}|^2 dx \quad (3.2)$$

et

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}_h} W(\nabla \tilde{\varphi}) dx, \quad (3.3)$$

où  $\kappa$  est une constante strictement positive,  $\nabla^2 \tilde{\varphi} \in \mathbb{M}^{3 \times 3 \times 3}$  le tenseur  $3 \times 3 \times 3$  des dérivées secondes,  $W(\nabla \tilde{\varphi})$  représente l'énergie par unité de volume du matériau comme fonction du gradient de la déformation  $\tilde{\varphi}$ . La densité d'énergie interne  $W$  vérifie les propriétés de croissance et de coercivité suivantes : Il existe  $c_1, c_2 > 0$  tels que

$$c_1(|A|^2 - 1) \leq W(A) \leq c_2(|A|^q + 1) \quad \text{avec } 2 \leq q < 6 \quad (3.4)$$

et l'axiome d'indifférence matérielle qui s'exprime par le fait que pour toute matrice  $A$  et toute rotation  $R$  dans  $SO(3)$ , on a

$$W(RA) = W(A), \quad (3.5)$$

où

$$SO(3) = \{R \in M^3 : R^T R = I, \det R = 1\}. \quad (3.6)$$

On suppose aussi qu'il existe un nombre fini de matrices symétriques définies positives  $U_1, U_2, \dots, U_n$  tels que  $W$  atteigne son minimum sur

$$SO(3)U_1 \cup SO(3)U_2 \cup \dots \cup SO(3)U_n. \quad (3.7)$$

Déterminer la position d'équilibre du film courbé revient à minimiser l'énergie  $\tilde{e}^h(\tilde{\varphi})$  sur un ensemble de déformations admissibles, ce qui revient à trouver  $\tilde{\varphi}_m \in V$  vérifiant

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}_m) = \min_{\tilde{\varphi} \in V} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi}), \quad (3.8)$$

avec

$$V = \{\tilde{\varphi} \in H^2(\tilde{\Omega}_h; \mathbb{R}^3); \tilde{\varphi}(x) = \tilde{A}x \text{ sur } \tilde{\Gamma}_h\}, \quad (3.9)$$

où  $\tilde{A} = (\tilde{a}_1 | \tilde{a}_2 | \tilde{a}_3)$  est une matrice constante de  $M^3$  et  $\tilde{\Gamma}_h$  est la surface latérale de  $\tilde{\Omega}_h$ . On voudrait connaître le comportement de cette énergie ainsi que celui de ses minimiseurs lorsque l'épaisseur  $h$  tend vers zéro. Pour cela on va étudier l'énergie

$$e(h)(\varphi) = \frac{1}{h} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi}), \quad (3.10)$$

qu'on obtient après un changement de variables déjà effectué au chapitre précédent et qui nous permet de travailler sur un domaine  $\Omega_1$  indépendant de l'épaisseur, où

$$e(h)(\varphi) = K(h)(\varphi) + I(h)(\varphi), \quad (3.11)$$

avec

$$I(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} W[(\varphi_{,1} | \varphi_{,2} | \frac{1}{h} \varphi_{,3}) A_h] d_h dx \quad (3.12)$$

et

$$\begin{aligned} K(h)(\varphi) &= \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ (\nabla_p^2 \varphi + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_{,3} + \nabla_p \varphi_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right. \\ &\quad \left. + [\nabla_p \varphi + \frac{1}{h} \varphi_{,3} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h dx \\ &= \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| (\varphi)_{i,\alpha\beta} \Psi_{\alpha,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{\beta,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} (\varphi)_{i,\alpha 3} (\Psi_{\alpha,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{3,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) + \Psi_{\alpha,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{3,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h^2} (\varphi)_{i,33} \Psi_{3,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Psi_{3,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right. \\ &\quad \left. + (\varphi)_{i,\alpha} \Psi_{\alpha,jk}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) + \frac{1}{h} (\varphi)_{i,3} \Psi_{3,jk}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h dx, \quad (3.13) \end{aligned}$$

où on a posé

$$d_h(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3), \quad A_h(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3)$$

et

$$\nabla_p \varphi = \varphi_{,\alpha} \otimes e_\alpha \quad \text{et} \quad \nabla_p^2 \varphi = \varphi_{,\alpha\beta} \otimes e_\alpha \otimes e_\beta. \quad (3.14)$$

Le problème (3.8) devient donc, trouver  $\varphi(h) \in V_h$  vérifiant

$$e(h)(\varphi(h)) = \min_{\varphi \in V_h} e(h)(\varphi), \quad (3.15)$$

avec

$$V_h = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3); \varphi(x) = \tilde{A} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (3.16)$$

Pour plus de détails concernant les expressions des énergies et la géométrie du film courbé dans sa configuration de référence, voir les chapitres précédents.

Afin d'étudier le comportement de cette énergie et de ses minimiseurs, on va avoir recours à la théorie de la  $\Gamma$ -convergence, une notion introduite par De Giorgi [26] [27] et récemment utilisée avec succès pour étudier le comportement limite des films minces. On va montrer que l'énergie  $E^*(h)$  obtenue après prolongement de  $e(h)$  à  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et découplage de certaines variables,  $\Gamma$ -converge vers une énergie  $E^*(0)$  cohérente avec la forme de l'énergie limite  $e^0$  obtenue par le développement asymptotique formel du chapitre précédent.

On entame notre étude par un lemme sur l'existence des minimiseurs de l'énergie  $e(h)$  à épaisseur fixée. On procède ensuite au calcul de la  $\Gamma$ -limite, puis on applique les propriétés de la  $\Gamma$ -convergence pour décrire le comportement limite des minimiseurs de  $e(h)$  lorsque  $h$  tend vers zéro. Enfin, on réécrit le modèle limite dans la configuration initiale.

## 3.2 Existence de minimiseurs pour l'énergie à épaisseur fixée

Dans toute la suite,  $c$  désigne une constante strictement positive susceptible de changer de valeur de ligne en ligne. Puisque l'expression de  $e(h)(\varphi)$  contient une forme quadratique définie positive en les dérivées secondes de  $\varphi$ , l'espace fonctionnel naturel sur lequel on voudrait minimiser l'énergie est l'espace  $H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ , avec des conditions limites sur le bord du domaine. La topologie naturelle pour laquelle les minimiseurs sont susceptibles de rester dans un compact est la topologie faible de  $H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . Comme  $H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  n'est pas un espace métrisable pour cette topologie faible, nous sommes

amenés à travailler sur l'espace  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  muni de sa topologie forte, en posant

$$\text{pour tout } \varphi \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), e^*(h)(\varphi) = \begin{cases} e(h)(\varphi) & \text{si } \varphi \in V_h \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$V_h = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3); \varphi(x) = \tilde{A} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (3.17)$$

où  $\omega$  est la surface moyenne de  $\Omega_1$ . On a le lemme suivant.

**Lemme 3.2.1.** *Pour tout  $h$  fixé, l'énergie  $e^*(h)$  admet un minimiseur sur  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ .*

**Preuve**

On précise tout d'abord que, par définition de  $e^*(h)$ , ses éventuels minimiseurs sur  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  sont exactement ceux de  $e(h)$  sur  $V_h$ . On applique donc la méthode directe du calcul des variations au problème (3.15). Pour cela, on considère une suite minimisante  $\varphi_n(h) \in V_h$ . Cette suite vérifie

$$e(h)(\varphi_n(h)) \leq c, \quad (3.18)$$

où  $c$  ne dépend pas de  $n$ . D'autre part

$$e(h)(\varphi_n(h)) = I(h)(\varphi_n(h)) + K(h)(\varphi_n(h)). \quad (3.19)$$

En raison des bornes inférieures satisfaites par les deux termes, on a donc deux majorations

$$I(h)(\varphi_n(h)) \leq c \text{ et } K(h)(\varphi_n(h)) \leq c. \quad (3.20)$$

Tout d'abord, la première inégalité s'écrit

$$\int_{\Omega_1} W \left[ \left( \varphi_n(h)_{,1} \mid \varphi_n(h)_{,2} \mid \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \right) A_h \right] d_h dx \leq c. \quad (3.21)$$

On rappelle qu'il existe par hypothèse  $c_1 > 0$  tel que  $\forall A \in M^3$ ,

$$c_1(|A|^2 - 1) \leq W(A), \quad (3.22)$$

ce qui implique que

$$\int_{\Omega_1} \left| \left( \varphi_n(h)_{,1} \mid \varphi_n(h)_{,2} \mid \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \right) A_h \right|^2 d_h dx \leq c. \quad (3.23)$$



On note ensuite que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \left| \left( \varphi_n(h)_{,1} | \varphi_n(h)_{,2} | \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \right) \right|^2 d_h dx \\
 &= \int_{\Omega_1} \left| \left( \varphi_n(h)_{,1} | \varphi_n(h)_{,2} | \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \right) A_h A_h^{-1} \right|^2 d_h dx \\
 &\leq \sup_{x \in \bar{\Omega}_1} |(A_h(x))^{-1}|^2 \int_{\Omega_1} \left| \left( \varphi_n(h)_{,1} | \varphi_n(h)_{,2} | \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \right) A_h \right|^2 d_h dx \\
 &\leq c
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\|\nabla_p \varphi_n(h)\|_{L^2} \leq c \quad \text{et} \quad \frac{1}{h} \|\varphi_n(h)_{,3}\|_{L^2} \leq c, \quad (3.24)$$

ce qui implique que

$$\|\nabla \varphi_n(h)\|_{L^2} \leq c. \quad (3.25)$$

On utilise ensuite la deuxième majoration de (3.63)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ \left( \nabla_p^2 \varphi_n(h) + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} + \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3 \right) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right. \\
 & \quad \left. + \left[ \nabla_p \varphi_n(h) + \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3 \right] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h dx \leq c.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ \nabla_p \varphi_n(h) + \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3 \right] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h dx \\
 &= \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{ijk} \left| \left( \nabla_p \varphi_n(h) + \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3 \right)_{im} \left( \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right)_{mjk} \right|^2 d_h dx \\
 &\leq 27 \sup_{m,j,k,x \in \bar{\Omega}_1} \left| \left( \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right)_{mjk} \right|^2 \int_{\Omega_1} 3\kappa \sum_{im} \left| \left( \nabla_p \varphi_n(h) + \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \right)_{im} \right|^2 d_h dx \\
 &= 81 \sup_{m,j,k,x \in \bar{\Omega}_1} \left| \left( \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right)_{mjk} \right|^2 \int_{\Omega_1} \kappa \left( |\nabla_p \varphi_n(h)|^2 + \frac{1}{h^2} |\varphi_n(h)_{,3}|^2 \right) d_h dx \\
 &\leq c, \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

grâce aux propriétés du difféomorphisme  $\Psi$  (voir chapitres précédents) et à l'estimation (3.24), où  $P_{ijk}$  désigne la composante d'indice  $ijk$  du tenseur du troisième ordre  $P$  et  $Q_{ij}$  désigne la composante d'indice  $ij$  du tenseur du deuxième ordre  $Q$ . On obtient donc en

utilisant l'inégalité triangulaire et les estimations (3.63) et (3.26)

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ \left( \nabla_p^2 \varphi_n(h) + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} + \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3 \right) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right|^2 d_h dx \\
 & \leq 2 \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ \nabla_p \varphi_n(h) + \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3 \right] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 d_h dx + 2K(h)(\varphi) \\
 & \leq c. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

On pose ensuite

$$P(h) = \nabla_p^2 \varphi_n(h) + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} + \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3. \quad (3.28)$$

La dernière estimation devient

$$\int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ P(h)(x) \overline{\otimes} A_h(x) \right]^T \overline{\otimes} A_h(x) \right|^2 d_h(x) dx \leq c. \quad (3.29)$$

Par suite on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_1} \kappa \left| \nabla_p^2 \varphi_n(h) + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} + \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3 \right|^2 d_h dx \\
 & = \int_{\Omega_1} \kappa \left| P(h) \right|^2 d_h dx \\
 & = \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{ijk} \left| (P(h))_{ijk} \right|^2 d_h dx \\
 & = \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{ijk} \left| (P(h))_{ilm} (A_h)_{mo} (A_h)_{ln} A_h^{-1}{}_{nj} A_h^{-1}{}_{ok} \right|^2 d_h dx \\
 & \leq 81 \sup_{p,q,x \in \overline{\Omega_1}} |A_h^{-1}{}_{pq}|^4 \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{ijk} \left| (P(h))_{ilm} (A_h)_{mo} (A_h)_{ln} \right|^2 d_h dx \\
 & \leq 729 \sup_{p,q,x \in \overline{\Omega_1}} |A_h^{-1}{}_{pq}|^4 \int_{\Omega_1} \kappa \sum_{ion} \left| (P(h))_{ilm} (A_h)_{mo} (A_h)_{ln} \right|^2 d_h dx \\
 & = 729 \sup_{p,q,x \in \overline{\Omega_1}} |A_h^{-1}{}_{pq}|^4 \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ P(h) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right|^2 d_h dx \\
 & \leq c, \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

d'après (3.29). On obtient donc

$$\begin{aligned} & \|\nabla_p^2 \varphi_n(h)\|_{L^2}^2 + 2 \left\| \frac{1}{h} \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \left\| \nabla_p^2 \varphi_n(h) + \frac{1}{h} (e_3 \otimes \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} + \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3 \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq c \end{aligned} \quad (3.31)$$

et donc on a

$$\|\nabla_p^2 \varphi_n(h)\|_{L^2}^2 \leq c, \quad \left\| \frac{1}{h} \nabla_p \varphi_n(h)_{,3} \right\|_{L^2}^2 \leq c \text{ et } \left\| \frac{1}{h^2} \varphi_n(h)_{,33} \right\|_{L^2}^2 \leq c, \quad (3.32)$$

ce qui implique que

$$\|\nabla^2 \varphi_n(h)\|_{L^2} \leq c. \quad (3.33)$$

Ceci avec (3.25) impliquent que

$$\|\varphi_n(h)\|_{H^2} \leq c, \quad (3.34)$$

où la constante  $c$  dépend de l'épaisseur  $h$  et ne dépend pas de la suite  $n$ . Ceci implique que pour une sous-suite toujours notée  $\varphi_n(h)$ , il existe  $\varphi(h) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  tel que

$$\varphi_n(h) \rightharpoonup \varphi(h) \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad (3.35)$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  et

$$\frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \rightharpoonup \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3} \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (3.36)$$

Grâce au théorème de Rellich, on obtient que

$$\varphi_n(h) \rightarrow \varphi(h) \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad (3.37)$$

et

$$\frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \rightarrow \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (3.38)$$

Le théorème de trace implique l'appartenance de  $\varphi(h)$  à  $V_h$ . En effet, posant  $\Gamma = \partial\omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  on a

$$\|\varphi_n(h)|_\Gamma - \varphi(h)|_\Gamma\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma; \mathbb{R}^3)} \leq c \|\varphi_n(h) - \varphi(h)\|_{H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)}. \quad (3.39)$$

Or, pour tout  $n$  et pour presque tout  $x \in \Gamma$  on a

$$\varphi_n(h)|_\Gamma(x) = \tilde{A}(\Psi(x_1, x_2, hx_3)), \quad (3.40)$$

ce qui implique que pour presque tout  $x \in \Gamma$  on a

$$\varphi_n(h)|_{\Gamma}(x) = \tilde{A}(\Psi(x_1, x_2, hx_3)) \quad (3.41)$$

et donc

$$\varphi(h) \in V_h. \quad (3.42)$$

Pour achever la démonstration, il nous reste à prouver que

$$e(h)(\varphi_n(h)) \rightarrow e(h)(\varphi(h)) \quad (3.43)$$

quand  $n \rightarrow \infty$ . On obtient ceci grâce aux convergences (3.37), (3.38), la continuité de  $W$  et la convexité des termes fonction du tenseur des dérivées secondes qui donnent la semi-continuité inférieure du terme d'énergie d'interface pour la topologie faible de  $H^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ . En effet, les convergences (3.35) et (3.36) impliquent que pour une sous-suite encore notée  $n$  on a

$$\nabla \varphi_n(h) \rightarrow \nabla \varphi(h) \text{ dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad \forall 1 \leq p < 6 \quad (3.44)$$

et

$$\frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \rightarrow \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3} \text{ dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad \forall 1 \leq p < 6. \quad (3.45)$$

En utilisant la réciproque partielle du théorème de Lebesgue et grâce aux convergences (3.44) et (3.45) on obtient l'existence de  $g_1, g_2 \in L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  indépendants de  $n$  tels que pour une sous-suite on a pour presque tout  $x \in \Omega_1$

$$|\nabla_p \varphi_n(h)(x)| \leq g_1(x) \quad (3.46)$$

et

$$\left| \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3}(x) \right| \leq g_2(x). \quad (3.47)$$

De plus

$$\nabla_p \varphi_n(h) \rightarrow \nabla_p \varphi(h) \quad (3.48)$$

et

$$\frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3} \rightarrow \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3}, \quad (3.49)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . La continuité de  $W$  et les convergences (3.48) et (3.49) impliquent que

$$W[(\varphi_n(h))_{,1} | \varphi_n(h)_{,2} | \frac{1}{h} \varphi_n(h)_{,3}] A_h \, d_h \rightarrow W[(\varphi(h))_{,1} | \varphi(h)_{,2} | \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3}] A_h \, d_h, \quad (3.50)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . D'autre part, les propriétés (3.4) de  $W$  impliquent que

$$\begin{aligned} |W[(\varphi_n(h),_1|\varphi_n(h),_2|\frac{1}{h}\varphi_n(h),_3) A_h] d_h| &\leq c(|\nabla_p\varphi_n(h)|^q + |\frac{1}{h}\varphi_n(h),_3|^q) \\ &\leq c(|g_1|^q + |g_2|^q), \end{aligned}$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$I(h)(\varphi_n(h)) \rightarrow I(h)(\varphi(h)). \quad (3.51)$$

Considérons ensuite le terme d'énergie d'interface. Posons

$$\begin{aligned} \Xi(h)(\varphi_n(h)) &= \left[ (\nabla_p^2\varphi_n(h) + \frac{1}{h}(e_3 \otimes \nabla_p\varphi_n(h),_3 \right. \\ &\quad \left. + \nabla_p\varphi_n(h),_3 \otimes e_3) + \frac{1}{h^2}\varphi_n(h),_{33} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h(x) \right]^T \overline{\otimes} A_h(x) \end{aligned} \quad (3.52)$$

et

$$\Phi(h)(\varphi_n(h)) = [\nabla_p\varphi_n(h) + \frac{1}{h}\varphi_n(h),_3 \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2\Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \quad (3.53)$$

$\Xi$  et  $\Phi$  étant des tenseurs du troisième ordre. On a

$$K(h)(\varphi_n(h)) = \int_{\Omega_1} \kappa \{ |\Xi(h)(\varphi_n(h))|^2 + |\Phi(h)(\varphi_n(h))|^2 + 2\Xi(h)(\varphi_n(h)) \cdot \Phi(h)(\varphi_n(h)) \} d_h dx. \quad (3.54)$$

La convergence (3.37) implique que

$$\int_{\Omega_1} \kappa |\Phi(h)(\varphi_n(h))|^2 d_h(x) dx \rightarrow \int_{\Omega_1} \kappa |\Phi(h)(\varphi(h))|^2 d_h(x) dx. \quad (3.55)$$

En outre les convergences (3.35) et (3.37) impliquent que

$$\int_{\Omega_1} \kappa \Xi(h)(\varphi_n(h)) \cdot \Phi(h)(\varphi_n(h)) d_h(x) dx \rightarrow \int_{\Omega_1} \kappa \Xi(h)(\varphi(h)) \cdot \Phi(h)(\varphi(h)) d_h(x) dx. \quad (3.56)$$

Ensuite, puisque  $\int_{\Omega_1} \kappa |\Xi(\varphi_n(h))|^2 d_h(x) dx$  est quadratique en  $\nabla^2\varphi_n(h)$  et donc sci pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_1; \mathbb{M}^{3 \times 3 \times 3})$ , on a grâce à (3.35) que

$$\liminf \int_{\Omega_1} \kappa |\Xi(h)(\varphi_n(h))|^2 d_h(x) dx \geq \int_{\Omega_1} \kappa |\Xi(h)(\varphi(h))|^2 d_h(x) dx. \quad (3.57)$$

Les convergences (3.55), (3.56) et (3.57) impliquent que

$$\liminf K(h)(\varphi_n(h)) \geq K(h)(\varphi(h)), \quad (3.58)$$

qui avec (3.51) implique que

$$\liminf e(h)(\varphi_n(h)) \geq e(h)(\varphi(h)). \quad (3.59)$$

La définition d'une suite minimisante nous permet de déduire que

$$\lim e(h)(\varphi_n(h)) = e(h)(\varphi(h)), \quad (3.60)$$

ce qui implique que  $\varphi(h)$  est un minimiseur de  $e(h)$  sur  $V_h$ .

□

Maintenant que l'existence de minimiseurs pour l'énergie  $e^*(h)$  est démontrée, on passe au calcul de la  $\Gamma$ -limite de cette énergie pour la topologie forte de  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  lorsque l'épaisseur  $h$  tend vers zéro, afin de déterminer son comportement asymptotique ainsi que celui de ses minimiseurs.

### 3.3 Calcul de la $\Gamma$ -limite et comportement des minimiseurs

On commence tout d'abord par démontrer le lemme suivant

**Lemme 3.3.1.** *Soit  $\varphi(h) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  une suite vérifiant  $e^*(h)(\varphi(h)) \leq c$  avec  $c$  une constante strictement positive. Il existe alors  $\varphi^0 \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ ,  $\bar{b} \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{c} \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  tels que pour une sous-suite de  $\varphi(h)$  encore notée  $\varphi(h)$  on a*

$$\begin{cases} \varphi(h) & \rightharpoonup \varphi^0 \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \\ \frac{1}{h}\varphi(h)_{,3} & \rightharpoonup \bar{b} \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \\ \frac{1}{h^2}\varphi(h)_{,33} & \rightharpoonup \bar{c} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \end{cases}$$

avec  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$  où

$$W_0 = \left\{ (\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ vérifiant } \varphi^0_{,3} = 0, \bar{b}_{,3} = 0 \right. \\ \left. \text{et } \varphi^0(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, 0), \bar{b}(x) = \tilde{A} \Psi_{,3}(x_1, x_2, 0) = \tilde{A} a_3(x_1, x_2) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

#### Preuve

On a par définition que si  $\varphi(h)$  vérifie  $e^*(h)(\varphi) \leq c < +\infty$  alors

$$e^*(h)(\varphi(h)) = e(h)(\varphi(h)). \quad (3.61)$$

D'autre part

$$e(h)(\varphi(h)) = I(h)(\varphi(h)) + K(h)(\varphi(h)). \quad (3.62)$$

On a donc deux majorations

$$I(h)(\varphi(h)) \leq c \text{ et } K(h)(\varphi(h)) \leq c. \quad (3.63)$$

En procédant comme dans la démonstration du lemme 3.2.1 on aboutit à des estimations équivalentes aux estimations (3.24) et (3.32), à savoir que

$$\|\nabla_p \varphi(h)\|_{L^2} \leq c \quad \text{et} \quad \frac{1}{h} \|\varphi(h)_{,3}\|_{L^2} \leq c. \quad (3.64)$$

et

$$\|\nabla_p^2 \varphi(h)\|_{L^2}^2 \leq c, \quad \left\| \frac{1}{h} \nabla_p \varphi(h)_{,3} \right\|_{L^2}^2 \leq c \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{h^2} \varphi(h)_{,33} \right\|_{L^2}^2 \leq c. \quad (3.65)$$

L'inégalité de Poincaré et les estimations (3.64) et (3.65) impliquent que

$$\|\varphi(h)\|_{H^2} \leq c, \quad \frac{1}{h} \|\varphi(h)_{,3}\|_{H^1} \leq c \quad \text{et} \quad \frac{1}{h^2} \|\varphi(h)_{,33}\|_{L^2} \leq c. \quad (3.66)$$

Ceci nous permet donc de conclure que si  $\varphi(h)$  vérifie  $e^*(h)(\varphi(h)) \leq c$ , alors il existe une sous-suite encore notée  $\varphi(h)$ ,  $\varphi^0 \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ ,  $\bar{b} \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{c} \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  tels que

$$\begin{cases} \varphi(h) & \rightharpoonup \varphi^0 \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad \text{faible,} \\ \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3} & \rightharpoonup \bar{b} \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad \text{faible,} \\ \frac{1}{h^2} \varphi(h)_{,33} & \rightharpoonup \bar{c} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad \text{faible.} \end{cases}$$

D'autre part, l'estimation (3.64) implique que  $\varphi^0_3 = 0$  et l'estimation (3.65) que  $\bar{b}_{,3} = 0$ . Enfin, le théorème de trace nous donne les conditions aux limites

$$\varphi^0(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, 0), \quad \bar{b}(x) = \tilde{A} \Psi_{,3}(x_1, x_2, 0) = \tilde{A} a_3(x_1, x_2) \quad (3.67)$$

sur  $\partial\omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

□

**Remarque 8.** Contrairement à  $\varphi^0$  et  $\bar{b}$ , on n'a pas de conditions limites sur le bord pour  $\bar{c}$ . Ceci est dû au fait que  $\bar{c}$  est la limite de  $\frac{1}{h^2} \varphi_{,33}$  dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  espace sur lequel il n'existe pas d'application trace sur le bord.

Le résultat principal de cette section est le théorème 3.3.1 qui donne l'expression de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie  $e(h)$ . Avant d'énoncer ce théorème, on démontre d'abord que les convergences obtenues dans le lemme 3.3.1 pour une déformation à énergie bornée deviennent fortes pour une déformation minimisant l'énergie  $e(h)$ . On a la proposition suivante

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\varphi(h)$  un minimiseur de l'énergie  $e(h)$  sur  $V_h$ . Il existe une sous-suite encore notée  $\varphi(h)$  telle qu'il existe  $\varphi^0 \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ ,  $\bar{b} \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{c} \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant*

$$\begin{cases} \varphi(h) & \rightarrow \varphi^0 \text{ fortement dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \frac{1}{h}\varphi(h)_{,3} & \rightarrow \bar{b} \text{ fortement dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \frac{1}{h^2}\varphi(h)_{,33} & \rightarrow \bar{c} \text{ fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases}$$

avec

$$(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0. \quad (3.68)$$

**Preuve**

On va tout d'abord montrer que si  $\varphi(h)$  est un minimiseur de  $e(h)$  sur  $V_h$ , alors il existe une constante  $c > 0$  tels que  $e(h)(\varphi(h)) \leq c$ . Pour cela on va comparer l'énergie de  $\varphi(h)$  à celle de  $\xi(h)$  définie par

$$\xi(h)(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, hx_3). \quad (3.69)$$

On rappelle que  $V_h$  est défini par

$$V_h = \{\varphi \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3); \varphi(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}. \quad (3.70)$$

On voit tout de suite que  $\xi(h) \in V_h$  et donc par définition de  $\varphi(h)$  on a

$$e(h)(\varphi(h)) \leq e(h)(\xi(h)). \quad (3.71)$$

Or

$$\begin{aligned} e(h)(\xi(h)) &= \frac{1}{h} \tilde{c}^h(\tilde{\xi}) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} W(\nabla \tilde{\xi}) + \kappa |\nabla^2 \tilde{\xi}|^2 dx, \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\xi}(x) = \tilde{A}x$ . Or

$$\nabla \tilde{\xi} = \tilde{A} \text{ et } \nabla^2 \tilde{\xi} = 0. \quad (3.72)$$



Par suite

$$\begin{aligned} e(h)(\xi(h)) &= \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} W(\tilde{A}) dx \\ &= \frac{c}{h} \text{meas}(\tilde{\Omega}_h) \\ &= c \text{meas}(\omega), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$e(h)(\varphi(h)) \leq c. \quad (3.73)$$

L'énergie d'un minimiseur est donc bornée indépendamment de  $h$ . Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.3.1 qui nous donne l'existence de  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$  tels que, pour une sous-suite de  $\varphi(h)$  encore notée  $\varphi(h)$ , on ait

$$\begin{cases} \varphi(h) & \rightharpoonup \varphi^0 \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \\ \frac{1}{h}\varphi(h)_{,3} & \rightharpoonup \bar{b} \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \\ \frac{1}{h^2}\varphi(h)_{,33} & \rightharpoonup \bar{c} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ faible.} \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} E_1^h & = \varphi(h) - \varphi^0, \text{ avec } E_1^h \rightharpoonup 0 \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ E_2^h & = \frac{1}{h}\varphi(h)_{,3} - \bar{b}, \text{ avec } E_2^h \rightharpoonup 0 \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ E_3^h & = \frac{1}{h^2}\varphi(h)_{,33} - \bar{c} \text{ avec } E_3^h \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (3.74)$$

Il nous reste à démontrer que ces convergences sont fortes. Pour cela on va construire une fonction-test qui appartient à  $V_h$  et comparer l'énergie de cette fonction-test à celle du minimiseur. Le moyen le plus naturel pour construire la fonction-test adéquate est de poser

$$\xi(h)(x) = \varphi^0(x) + hx_3\bar{b}(x) + h^2 \int_0^{x_3} \int_0^t \bar{c}(x_1, x_2, s) ds dt, \quad (3.75)$$

mis à part le fait que cette fonction n'a pas la régularité requise, puisque les déformations admissibles sont dans  $H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ , alors que  $\bar{b}$  est seulement dans  $H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{c}$  est dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . Pour surmonter cette difficulté, on régularise les fonctions  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$  tout en gardant les mêmes conditions au bord de  $\Omega_1$ . Pour ce qui est de  $\bar{c}$ , on sait que  $\mathcal{D}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  est dense dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . Il existe donc une suite  $\bar{c}_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\bar{c}_\varepsilon \rightarrow \bar{c} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.76)$$

En ce qui concerne  $\bar{b}$  et sachant qu'on a  $\bar{b}(x) = \tilde{A}\Psi_{,3}(x_1, x_2, 0) = \tilde{A}a_3(x_1, x_2)$  sur  $\gamma$ , on pose dans un premier temps

$$\tilde{\bar{b}}(x) = \bar{b}(x) - \tilde{A}a_3(x_1, x_2). \quad (3.77)$$

On a donc  $\tilde{\bar{b}} \in H_0^1(\omega; \mathbb{R}^3)$  et grâce à la densité de  $\mathcal{D}(\omega; \mathbb{R}^3)$  dans  $H_0^1(\omega; \mathbb{R}^3)$ , il existe une suite  $\tilde{\bar{b}}_\varepsilon \in \mathcal{D}(\omega; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\tilde{\bar{b}}_\varepsilon \rightarrow \tilde{\bar{b}} \text{ dans } H^1(\omega; \mathbb{R}^3) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.78)$$

On pose ensuite

$$\bar{b}_\varepsilon = \tilde{\bar{b}}_\varepsilon + \tilde{A}a_3(x_1, x_2) \quad (3.79)$$

et on a donc  $\bar{b}_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\omega}; \mathbb{R}^3) \subset H^2(\omega; \mathbb{R}^3)$  vérifie  $\bar{b}_\varepsilon(x) = \tilde{A}a_3(x_1, x_2)$  sur  $\partial\omega$  et

$$\bar{b}_\varepsilon \rightarrow \bar{b} \text{ dans } H^1(\omega; \mathbb{R}^3) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.80)$$

Posons

$$\xi_\varepsilon(h)(x) = \varphi^0(x) + hx_3\bar{b}_\varepsilon(x_1, x_2) + h^2 \int_0^{x_3} \int_0^t \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds dt. \quad (3.81)$$

En prolongeant  $\bar{b}_\varepsilon$  sur  $\mathbb{R}^3$ , on sait qu'il existe  $\bar{b}'_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant  $\bar{b}'_\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = \bar{b}_\varepsilon(x_1, x_2)$  pour tout  $x \in \Omega_1$ . On remplacera dans ce qui suit  $\bar{b}_\varepsilon$  par  $\bar{b}'_\varepsilon$  en gardant la même notation. Comme  $\bar{c}_\varepsilon$  est  $C^\infty(\bar{\Omega}_1; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{b}'_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant les mêmes conditions au bord que  $\bar{b}$ , on voit que  $\xi_\varepsilon(h) \in V_h$  et donc c'est une déformation admissible pour le problème 3.15, ceci implique que

$$e(h)(\varphi(h)) \leq e(h)(\xi_\varepsilon(h)). \quad (3.82)$$

D'autre part, à  $\varepsilon$  fixé, on a

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(h) \rightarrow \varphi^0 \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h}\xi_{\varepsilon,3}(h) \rightarrow \bar{b}'_\varepsilon \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h^2}\xi_{\varepsilon,33}(h) \rightarrow \bar{c}_\varepsilon \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (3.83)$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ . En réécrivant (3.82) on obtient

$$\begin{aligned}
 e(h)(\varphi(h)) &= \int_{\Omega_1} \left\{ W[(\varphi_{,1}^0 + E_{1,1}^h | \varphi_{,2}^0 + E_{1,2}^h | \bar{b} + E_2^h) A_h] \right. \\
 &+ \kappa \left| \left[ (\nabla_p^2 \varphi^0 + \nabla_p^2 E_1^h + (e_3 \otimes (\nabla_p \bar{b} + \nabla_p E_2^h) + (\nabla_p \bar{b} + \nabla_p E_2^h) \otimes e_3) + (\bar{c} + E_3^h) \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right. \\
 &\quad \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \nabla_p E_1^h + (\bar{b} + E_2^h) \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 \right\} d_h dx \\
 &\leq e(h)(\xi_\varepsilon(h)) = \int_{\Omega_1} \left\{ W[(\xi_{\varepsilon,1}(h) | \xi_{\varepsilon,2}(h) | \frac{1}{h} \xi_{\varepsilon,3}(h)) A_h] \right. \\
 &+ \kappa \left| \left[ (\nabla_p^2 \xi_\varepsilon(h) + (e_3 \otimes \frac{1}{h} \nabla_p \xi_{\varepsilon,3}(h) + \frac{1}{h} \nabla_p \xi_{\varepsilon,3}(h) \otimes e_3) + \bar{c}_\varepsilon \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right. \\
 &\quad \left. \left. + [\nabla_p \xi_\varepsilon(h) + \frac{1}{h} \xi_{\varepsilon,3}(h) \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 \right\} d_h dx. \quad (3.84)
 \end{aligned}$$

En posant

$$\mathcal{A}_h = \left[ (\nabla_p^2 \varphi^0 + \nabla_p^2 E_1^h + (e_3 \otimes (\nabla_p \bar{b} + \nabla_p E_2^h) + (\nabla_p \bar{b} + \nabla_p E_2^h) \otimes e_3) + (\bar{c} + E_3^h) \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h, \quad (3.85)$$

$$\mathcal{C}_h = [\nabla_p \varphi^0 + \nabla_p E_1^h + (\bar{b} + E_2^h) \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \quad (3.86)$$

et

$$\mathcal{B}_h = \mathcal{C}_h + \mathcal{A}_h, \quad (3.87)$$

l'estimation (3.84) s'écrit

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_1} \kappa \left| \mathcal{B}_h \right|^2 d_h dx \\
 &\leq \int_{\Omega_1} \left\{ W[(\xi_{\varepsilon,1}(h) | \xi_{\varepsilon,2}(h) | \frac{1}{h} \xi_{\varepsilon,3}(h)) A_h] - W[(\varphi_{,1}^0 + E_{1,1}^h | \varphi_{,2}^0 + E_{1,2}^h | \bar{b} + E_2^h) A_h] \right. \\
 &+ \kappa \left| \left[ (\nabla_p^2 \xi_\varepsilon(h) + (e_3 \otimes \frac{1}{h} \nabla_p \xi_{\varepsilon,3}(h) + \frac{1}{h} \nabla_p \xi_{\varepsilon,3}(h) \otimes e_3) + \bar{c}_\varepsilon \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h \right]^T \overline{\otimes} A_h \right. \\
 &\quad \left. \left. + [\nabla_p \xi_\varepsilon(h) + \frac{1}{h} \xi_{\varepsilon,3}(h) \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \right|^2 \right\} d_h dx.
 \end{aligned}$$

Grâce à (3.74), le théorème de Rellich implique que

$$\begin{cases} \nabla_p E_1^h \rightarrow 0 & \text{dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \forall 1 \leq p < 6, \\ E_2^h \rightarrow 0 & \text{dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \forall 1 \leq p < 6. \end{cases} \quad (3.88)$$

La réciproque partielle du théorème de Lebesgue implique que pour une sous-suite, encore notée  $h$  on a l'existence de  $g_1, g_2 \in L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  tels que

$$\nabla_p E_1^h \rightarrow 0 \text{ et } E_2^h \rightarrow 0, \quad (3.89)$$

presque partout sur  $\Omega_1$  et que

$$|\nabla_p \varphi^0 + \nabla_p E_1^h| \leq g_1 \text{ et } |\bar{b} + E_2^h| \leq g_2, \quad (3.90)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . La continuité de  $W$  implique alors que

$$W[(\varphi_{,1}^0 + E_{1,1}^h | \varphi_{,2}^0 + E_{1,2}^h | \bar{b} + E_2^h) A_h] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0], \quad (3.91)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . D'autre part, les propriétés de croissance de  $W$  implique que

$$\begin{aligned} W[(\varphi_{,1}^0 + E_{1,1}^h | \varphi_{,2}^0 + E_{1,2}^h | \bar{b} + E_2^h) A_h] &\leq c \left( |\nabla_p \varphi^0 + \nabla_p E_1^h|^q + |\bar{b} + E_2^h|^q \right), \\ &\leq c \left( |g_1|^q + |g_2|^q \right), \end{aligned} \quad (3.92)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous permet alors d'avoir que

$$W[(\varphi_{,1}^0 + E_{1,1}^h | \varphi_{,2}^0 + E_{1,2}^h | \bar{b} + E_2^h) A_h] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0], \quad (3.93)$$

dans  $L^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  pour la sous-suite extraite. L'unicité de la limite implique que la convergence (3.93) est valable pour toute la suite. De même on a grâce à (3.83)

$$W[(\xi_{\varepsilon,1}(h) | \xi_{\varepsilon,2}(h) | \frac{1}{h} \xi_{\varepsilon,3}(h)) A_h] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] \quad (3.94)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . En utilisant encore le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient en faisant tendre  $h$  vers zéro que

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} \kappa |\mathcal{B}_h|^2 d_h dx \\ &\leq \int_{\Omega_1} \left\{ W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] - W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0] \right. \\ &\quad + \kappa \left| \left[ (\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b}_\varepsilon + \nabla_p \bar{b}_\varepsilon \otimes e_3) + \bar{c}_\varepsilon \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0 \right]^T \overline{\otimes} A_0 \right. \\ &\quad \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b}_\varepsilon \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 \right\} d_0 dx. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ensuite, l'estimation (3.80) implique que

$$(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) \rightarrow (\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}), \quad (3.96)$$

dans  $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0 \forall 1 \leq p < 6$ . Par suite la réciproque partielle du théorème de Lebesgue implique que pour une sous-suite, encore notée  $\varepsilon$ , il existe  $g \in L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  indépendant de  $\varepsilon$  tels que

$$|(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0| \leq g. \quad (3.97)$$

De plus

$$(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0 \rightarrow (\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0, \quad (3.98)$$

presque partout sur  $\Omega_1$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ceci implique, grâce à la continuité de  $W$ , que

$$W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0] \quad (3.99)$$

presque partout sur  $\Omega_1$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . D'autre part, on a grâce aux propriétés de croissance de  $W$  que

$$\begin{aligned} W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] &\leq c \left| (\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0 \right|^q \\ &\leq c |g|^q, \end{aligned}$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Ceci avec (3.99) implique grâce au théorème de la convergence dominée que

$$W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0] \quad (3.100)$$

dans  $L^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ensuite on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans (3.95). En utilisant les estimations (3.76), (3.80) et (3.100) on obtient que

$$\begin{aligned} &\limsup_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} \kappa \left| \mathcal{B}_h \right|^2 d_h dx \\ &\leq \int_{\Omega_1} \kappa \left| \left[ (\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \bar{b} + \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \bar{\otimes} A_0 \right]^T \bar{\otimes} A_0 \right. \\ &\quad \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 d_0 dx. \end{aligned}$$

D'autre part, les convergences (3.74) impliquent que

$$\mathcal{B}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{B}_0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad (3.101)$$

avec

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{C}_0, \quad (3.102)$$

où

$$\mathcal{A}_0 = \left[ (\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \bar{b} + \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0 \right]^T \overline{\otimes} A_0 \quad (3.103)$$

et

$$\mathcal{C}_0 = [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0). \quad (3.104)$$

Cette convergence dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  faible implique que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} \kappa |\mathcal{B}_h|^2 d_h dx \geq \int_{\Omega_1} \kappa |\mathcal{B}_0|^2 d_0 dx \quad (3.105)$$

ce qui, avec (3.95) implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega_1} \kappa |\mathcal{B}_h|^2 d_h dx = \int_{\Omega_1} \kappa |\mathcal{B}_0|^2 d_0 dx, \quad (3.106)$$

qui implique avec (3.101) que

$$\mathcal{B}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{B}_0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (3.107)$$

Or d'après (3.74) on avait déjà

$$\mathcal{C}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{C}_0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad (3.108)$$

ce qui implique que

$$\mathcal{A}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{A}_0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (3.109)$$

Finalement, les propriétés du difféomorphisme  $\Psi$  vues dans le premier chapitre impliquent que

$$\begin{aligned} & (\nabla_p^2 \varphi^0 + \nabla_p^2 E_1^h + (e_3 \otimes (\nabla_p \bar{b} + \nabla_p E_2^h) + (\nabla_p \bar{b} + \nabla_p E_2^h) \otimes e_3) + (\bar{c} + E_3^h) \otimes e_3 \otimes e_3) \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} (\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3), \end{aligned}$$

fortement dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  ce qui implique que

$$\begin{cases} \nabla_p^2 E_1^h & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \nabla_p E_2^h & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ E_3^h & \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (3.110)$$

d'où le résultat.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal. On introduit d'abord une nouvelle énergie  $E^*(h)$  définie par

$$E^*(h)(\varphi, b, c) = \begin{cases} e^*(h)(\varphi) & \text{si } b = \frac{1}{h}\varphi_{,3}, c = \frac{1}{h^2}\varphi_{,33} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ , on pose

$$E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{cases} \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left| [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \otimes A_0]^T \otimes A_0 \right. \right. \\ \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \otimes \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 \right. \\ \left. + W[(\varphi^0_{,1} | \varphi^0_{,2} | \bar{b}) A_0] \right\} d_0 dx & \text{si } (\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $A_0(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0)$  et  $d_0(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, 0)$ . On a le théorème suivant

**Théorème 3.3.1.** *La suite  $E^*(h)$   $\Gamma$ -converge vers  $E^*(0)$  pour la topologie forte de  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  lorsque  $h$  tend vers zéro.*

La preuve de ce théorème découlera des deux propositions suivantes.

**Proposition 3.3.2.** *On a*

$$E^*(0) \leq \Gamma - \liminf E^*(h).$$

**Preuve**

Pour démontrer ceci, on considère  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ , et on montre que pour tout  $(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\begin{cases} \xi(h) & \rightarrow \varphi^0 & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \bar{b}(h) & \rightarrow \bar{b} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \bar{c}(h) & \rightarrow \bar{c} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (3.111)$$

on a

$$\liminf E^*(h)(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \geq E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}). \quad (3.112)$$

Commençons par le cas où

$$(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \notin W_0. \quad (3.113)$$

Dans ce cas, on a

$$E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = +\infty. \quad (3.114)$$

Supposons par l'absurde que

$$\liminf E^*(h)(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) < +\infty, \quad (3.115)$$

ceci implique d'après les définitions de  $E^*(h)$  et de  $e^*(h)$  que

$$\bar{b}(h) = \frac{1}{h}\xi(h)_{,3} \quad \text{et} \quad \bar{c}(h) = \frac{1}{h^2}\xi(h)_{,33}, \quad (3.116)$$

que  $\xi(h) \in V_h$  et que  $e(h)(\xi(h)) < +\infty$ . Ce qui implique pour une sous-suite encore notée  $h$ , il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  tel que

$$e(h)(\xi(h)) \leq c. \quad (3.117)$$

Or, d'après le lemme (3.3.1) ceci implique que  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$  ce qui contredit notre hypothèse. On a donc  $\liminf E^*(h)(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) = +\infty$ , d'où la conclusion dans ce cas.

Passons ensuite au cas où

$$(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0 \quad (3.118)$$

et considérons  $(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\begin{cases} \xi(h) & \rightarrow \varphi^0 & \text{dans} & L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \bar{b}(h) & \rightarrow \bar{b} & \text{dans} & L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \bar{c}(h) & \rightarrow \bar{c} & \text{dans} & L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (3.119)$$

Supposons que  $\bar{b}(h) \neq \frac{1}{h}\xi(h)_{,3}$  ou bien que  $\bar{c}(h) \neq \frac{1}{h^2}\xi(h)_{,33}$  ou bien que  $\xi(h) \notin V_h$  pour tout  $h$ . Dans tous ces cas on aura

$$E^*(h)(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) = +\infty, \quad (3.120)$$

ce qui nous donne ce qu'on cherche. On peut donc supposer qu'il existe une sous-suite telle que

$$\bar{b}(h) = \frac{1}{h}\xi(h)_{,3}, \quad \bar{c}(h) = \frac{1}{h^2}\xi(h)_{,33} \quad \text{et} \quad \xi(h) \in V_h \quad (3.121)$$



et que  $E^*(h)$  est majorée indépendamment de  $h$ . Dans ce cas on a

$$E^*(h)(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) = e(h)(\xi(h)), \quad (3.122)$$

avec  $e(h)(\xi(h))$  majorée indépendamment de  $h$ , ce qui implique d'après le lemme 3.3.1 que

$$\begin{cases} \xi(h) & \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h}\xi(h)_{,3} & \rightharpoonup \bar{b} & \text{dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \frac{1}{h^2}\xi(h)_{,33} & \rightharpoonup \bar{c} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (3.123)$$

Ceci implique que pour une sous-suite encore notée  $h$  on a

$$\begin{cases} \nabla_p \xi(h) & \rightarrow \nabla_p \varphi^0 & \text{dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad \forall 1 \leq p < 6, \\ \frac{1}{h}\xi(h)_{,3} & \rightarrow \bar{b} & \text{dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad \forall 1 \leq p < 6, \end{cases} \quad (3.124)$$

ce qui implique grâce à la réciproque partielle du théorème de Lebesgue qu'il existe une sous-suite pour laquelle  $\nabla_p \xi(h)$  et  $\frac{1}{h}\xi(h)_{,3}$  sont dominées par des fonctions de  $L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  indépendantes de  $h$ . D'autre part, les convergences (3.124) impliquent, grâce aux propriétés du difféomorphisme  $\Psi$ , que

$$(\xi(h)_{,1} | \xi(h)_{,2} | \frac{1}{h}\xi(h)_{,3}) A_h(x) \rightarrow (\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0(x) \text{ fortement dans } L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (3.125)$$

On extrait à nouveau une sous-suite, toujours notée  $\xi(h)$ , qui vérifie

$$(\varphi_{,1}^h | \varphi_{,2}^h | \frac{1}{h}\varphi_{,3}^h) A_h(x) \rightarrow (\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0(x) \text{ presque partout.} \quad (3.126)$$

Par conséquent, la continuité de  $W$  et les propriétés de  $\Psi$  impliquent que

$$W[(\varphi_{,1}^h(x) | \varphi_{,2}^h(x) | \frac{1}{h}\varphi_{,3}^h(x)) A_h(x)] d_h(x) \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0(x) | \varphi_{,2}^0(x) | \bar{b}) A_0(x)] d_0(x) \quad (3.127)$$

presque partout. On a aussi grâce aux propriétés de croissance (3.4) vérifiées par  $W$  que

$$| W[(\varphi_{,1}^h(x) | \varphi_{,2}^h(x) | \frac{1}{h}\varphi_{,3}^h(x)) A_h(x)] d_h(x) | \leq c ( |\nabla_p \xi(h)|^q + | \frac{1}{h}\varphi_{,3}^h |^q ), \quad (3.128)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Comme ces fonctions sont dominées par des fonctions de  $L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  indépendantes de  $h$ , le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} I(h)(\xi(h)) &= \int_{\Omega_1} W[(\varphi_{,1}^h(x) | \varphi_{,2}^h(x) | \frac{1}{h}\varphi_{,3}^h(x)) A_h(x)] d_h(x) dx \\ &\rightarrow I(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = \int_{\Omega_1} W[(\varphi_{,1}^0(x) | \varphi_{,2}^0(x) | \bar{b}) A_0(x)] d_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Considérons maintenant l'énergie d'interface  $K(h)(\varphi(h))$ . Avant de développer son expression, on va poser

$$\Xi(h)(\xi(h)) = \left[ (\nabla_p^2 \xi(h) + \frac{1}{h}(e_3 \otimes \nabla_p \xi(h)_{,3} + \nabla_p \varphi_{,3}^h \otimes e_3) + \frac{1}{h^2} \xi(h)_{,33} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_h(x) \right]^T \overline{\otimes} A_h(x) \quad (3.130)$$

et

$$\Phi(h)(\xi(h)) = \left[ \nabla_p \xi(h) + \frac{1}{h} \xi(h)_{,3} \otimes e_3 \right] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \quad (3.131)$$

$\Xi$  et  $\Phi$  étant des tenseurs du troisième ordre. On rappelle que le produit scalaire de deux tenseurs  $3 \times 3 \times 3$ ,  $\Xi = (\zeta_{ijk})$  et  $\Phi = (f_{ijk})$  est défini par  $\Xi \cdot \Phi = \sum_{i,j,k=1}^3 \zeta_{ijk} \cdot f_{ijk}$  et que la norme d'un tenseur  $3 \times 3 \times 3$  est  $|\Xi| = \sqrt{\Xi \cdot \Xi}$ . Avec ces notations, on aura donc

$$K(h)(\xi(h)) = \int_{\Omega_1} \kappa \{ |\Xi(h)(\xi(h))|^2 + |\Phi(h)(\xi(h))|^2 + 2\Xi(h)(\xi(h)) \cdot \Phi(h)(\xi(h)) \} d_h(x) dx. \quad (3.132)$$

On pose

$$\Xi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = \left[ (\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0(x) \right]^T \overline{\otimes} A_0(x) \quad (3.133)$$

et

$$\Phi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0). \quad (3.134)$$

Les propriétés de  $\Psi$  et les convergences (3.123) impliquent que

$$\int_{\Omega_1} \kappa |\Phi(h)(\xi(h))|^2 d_h(x) dx \rightarrow \int_{\Omega_1} \kappa |\Phi(0)|^2 d_0(x) dx. \quad (3.135)$$

Par ailleurs, comme  $\xi(h) \rightharpoonup \varphi^0$  dans  $H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  faible,  $\frac{1}{h} \varphi_{,3}^h \rightharpoonup \bar{b}$  dans  $H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  faible et  $\frac{1}{h^2} \varphi_{,33}^h \rightharpoonup \bar{c}$  dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  faible, on a, toujours en utilisant les propriétés de  $\Psi$ ,

$$\int_{\Omega_1} 2\kappa \Xi(h)(\xi(h)) \cdot \Phi(h)(\xi(h)) d_h(x) dx \rightarrow \int_{\Omega_1} 2\kappa \Xi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \cdot \Phi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) d_0(x) dx. \quad (3.136)$$

Ensuite puisque  $\int_{\Omega_1} \kappa |\Xi(\xi(h))|^2 d_h(x) dx$  est quadratique en  $\nabla^2 \xi(h)$  et donc sci pour la topologie faible de  $L^2(\Omega_1; \mathbb{M}^{3 \times 3 \times 3})$  on a

$$\liminf \int_{\Omega_1} \kappa |\Xi(h)(\xi(h))|^2 d_h(x) dx \geq \int_{\Omega_1} \kappa |\Xi(0)|^2 d_0(x) dx. \quad (3.137)$$

Finalement grâce à (3.135), (3.136) et (3.137) on obtient

$$\begin{aligned} \liminf K(h)(\xi(h)) &\geq K(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \\ &= \int_{\Omega_1} \kappa \left\{ |\Xi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c})|^2 + |\Phi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c})|^2 + 2\Xi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \cdot \Phi(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \right\} d_0(x) dx \end{aligned} \quad (3.138)$$

et puisque

$$I(h)(\xi(h)) \rightarrow I(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \quad (3.139)$$

il vient

$$\begin{aligned} \liminf e(h)(\xi(h)) &\geq e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \\ &= K(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) + I(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}), \end{aligned} \quad (3.140)$$

ce qui implique que

$$\liminf E^*(h)(\xi(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \geq E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}), \quad (3.141)$$

ce qui achève la démonstration. □

On a ainsi obtenu la borne inférieure de la  $\Gamma$ -limite. On passe ensuite au calcul de la borne supérieure qu'on obtient grâce à la proposition suivante

**Proposition 3.3.3.** *On a*

$$\Gamma - \limsup E^*(h) \leq E^*(0).$$

**Preuve**

Afin de démontrer cette proposition, pour tout  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ , il nous faut trouver  $(z(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\begin{cases} z(h) &\rightarrow \varphi^0 &\text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \bar{b}(h) &\rightarrow \bar{b} &\text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \bar{c}(h) &\rightarrow \bar{c} &\text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \end{cases}$$

et

$$E^*(h)(z(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \rightarrow E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}). \quad (3.142)$$

Dans le cas où  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \notin W_0$  n'importe quel élément  $(z(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\begin{cases} z(h) & \rightarrow \varphi^0 & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \bar{b}(h) & \rightarrow \bar{b} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \bar{c}(h) & \rightarrow \bar{c} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \end{cases}$$

satisfait (3.142) puisqu'on a

$$\limsup E^*(h)(z(h), \bar{b}(h), \bar{c}(h)) \leq E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = +\infty. \quad (3.143)$$

Considérons le cas où  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$ , c'est-à-dire que

$$E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}), \quad (3.144)$$

avec

$$\begin{aligned} e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) &= \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left| [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \bar{\otimes} A_0]^T \bar{\otimes} A_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 + W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0] \right\} d_0 dx. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Il serait naturel de poser

$$z(h)(x) = \varphi^0(x) + hx_3 \bar{b}(x) + h^2 \int_0^{x_3} \int_0^t \bar{c}(x_1, x_2, s) ds dt, \quad (3.146)$$

mais cette fonction-test manque là aussi de régularité. On commence donc par régulariser les fonctions  $\bar{b}$  et  $\bar{c}$  en considérant, comme dans la démonstration de la proposition 3.3.1 une suite  $\bar{b}_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega}_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant la même condition au bord que  $\bar{b}$ , c'est-à-dire  $\bar{b}_\varepsilon(x) = \tilde{A}a_3(x_1, x_2)$  sur  $\partial\omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $\bar{c}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\begin{cases} \bar{b}_\varepsilon & \rightarrow \bar{b} & \text{dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \\ \bar{c}_\varepsilon & \rightarrow \bar{c} & \text{dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (3.147)$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  avec  $\bar{b}_{\varepsilon,3} = 0$  et on pose

$$z_\varepsilon(h)(x) = \varphi^0(x) + hx_3 \bar{b}_\varepsilon(x) + h^2 \int_0^{x_3} \int_0^t \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds dt. \quad (3.148)$$

On voit tout de suite que

$$z_\varepsilon(h) \in V_h. \quad (3.149)$$

En effet, il est clair que  $z_\varepsilon(h) \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . De plus, puisque

$$\Psi(x_1, x_2, hx_3) = \Psi(x_1, x_2, 0) + hx_3 a_3(x_1, x_2), \quad (3.150)$$

alors on a  $z_\varepsilon(h) = \tilde{A}\Psi(x_1, x_2, hx_3)$  sur  $\partial\omega \times (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ . De plus, on a

$$\frac{1}{h} z_\varepsilon(h)_{,3}(x) = \bar{b}_\varepsilon(x) + h \int_0^{x_3} \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \quad (3.151)$$

et

$$\frac{1}{h^2} z_\varepsilon(h)_{,33}(x) = \bar{c}_\varepsilon(x) \quad (3.152)$$

ce qui implique qu'on a bien pour  $\varepsilon > 0$  fixé

$$\begin{cases} z_\varepsilon(h) & \rightarrow \varphi^0 \text{ dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ fort} \\ \frac{1}{h} z_\varepsilon(h)_{,3} & \rightarrow \bar{b}_\varepsilon \text{ dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ fort} \\ \frac{1}{h^2} z_\varepsilon(h)_{,33} & \rightarrow \bar{c}_\varepsilon \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ fort,} \end{cases} \quad (3.153)$$

quand  $h$  tend vers zéro. D'autre part on a

$$\begin{aligned} e(h)(z_\varepsilon(h)) &= \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left| \left[ \left( \nabla_p^2 z_\varepsilon(h)(x) + e_3 \otimes \nabla_p \left( \bar{b}_\varepsilon(x) + h \int_0^{x_3} \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right) + \nabla_p \left( \bar{b}_\varepsilon(x) \right. \right. \right. \right. \right. \\ &+ h \int_0^{x_3} \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \Big) \otimes e_3 + \bar{c}_\varepsilon(x) \otimes e_3 \otimes e_3 \Big] \bar{\otimes} A_h(x) \Big]^T \bar{\otimes} A_h(x) + \left[ \nabla_p z_\varepsilon(h)(x) \right. \\ &+ \left. \left( \bar{b}_\varepsilon(x) + h \int_0^{x_3} \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right) \otimes e_3 \right] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3) \Big|^2 \\ &+ W \left[ (z_\varepsilon(h)_{,1}(x) | z_\varepsilon(h)_{,2}(x) | \bar{b}_\varepsilon(x) + h \int_0^{x_3} \bar{c}_\varepsilon(x_1, x_2, s) ds) A_h(x) \right] \Big\} d_h(x) dx, \end{aligned} \quad (3.154)$$

ceci implique grâce aux convergences (3.153) que pour une sous-suite encore notée  $h$  on a

$$\begin{aligned} E^*(h)(z_\varepsilon(h), \frac{1}{h} z_\varepsilon(h)_{,3}, \frac{1}{h^2} z_\varepsilon(h)_{,33}) &= e(h)(z_\varepsilon(h)) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} e(0)(\varphi^0, \bar{b}_\varepsilon, \bar{c}_\varepsilon) \\ &= E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}_\varepsilon, \bar{c}_\varepsilon). \end{aligned}$$

Ceci implique qu'on a

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} E^*(h)(\varphi^0, \bar{b}_\varepsilon, \bar{c}_\varepsilon) \leq E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}_\varepsilon, \bar{c}_\varepsilon). \quad (3.155)$$

Les convergences (3.147) impliquent, grâce à la réciproque partielle du théorème de Lebesgue que pour une sous-suite encore notée  $\varepsilon$  on a

$$\begin{cases} \bar{b}_\varepsilon \rightarrow \bar{b} & \text{presque partout dans } \Omega_1, \\ \bar{c}_\varepsilon \rightarrow \bar{c} & \text{presque partout dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (3.156)$$

La continuité de  $W$  implique que

$$W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0], \quad (3.157)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . D'autre part, la réciproque partielle du théorème de Lebesgue implique aussi qu'il existe  $g \in L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  indépendant de  $\varepsilon$  tel que pour presque tout  $x \in \Omega_1$

$$|\bar{b}_\varepsilon(x)| \leq g(x), \quad (3.158)$$

ce qui implique grâce aux propriétés de croissance de  $W$  que

$$\begin{aligned} W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] &\leq c |(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon)|^q \\ &\leq c |(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | g)|^q, \end{aligned}$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Ceci avec (3.157) implique grâce au théorème de convergence dominée que

$$W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}_\varepsilon) A_0] \rightarrow W[(\varphi_{,1}^0 | \varphi_{,2}^0 | \bar{b}) A_0], \quad (3.159)$$

dans  $L^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . On obtient donc que pour une sous-suite encore notée  $\varepsilon$  on a

$$E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}_\varepsilon, \bar{c}_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}). \quad (3.160)$$

D'autre part, la semi-continuité inférieure de la  $\Gamma$ -limite supérieure pour la topologie forte de  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  implique qu'on a

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} E^*(h)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} E^*(h)(\varphi^0, \bar{b}_\varepsilon, \bar{c}_\varepsilon). \quad (3.161)$$

Ceci avec (3.155) et (3.160) nous permettent d'avoir que

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} E^*(h)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \leq E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}), \quad (3.162)$$

ce qui achève la démonstration.

□

### Preuve du théorème 3.3.1

On obtient la preuve du théorème 3.3.1 en appliquant les deux propositions précédentes et grâce à la définition et aux propriétés de la  $\Gamma$ -convergence.

□

**Remarque 9.** *Dans le modèle limite qu'on a obtenu, on n'a pas eu à relaxer la densité d'énergie élastique interne par quasiconvexification. Ceci est dû au terme d'énergie d'interface qui nous donne la convergence forte dans  $H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . On n'a donc pas besoin de la relaxation et on peut se contenter de la continuité de  $W$  et de ses propriétés de croissance pour obtenir la  $\Gamma$ -limite.*

**Remarque 10.** *En appliquant notre résultat aux cas des films plans, c'est-à-dire pour un difféomorphisme  $\Psi$  égal à l'identité, on retrouve le résultat de K. Bhattacharya et R.D. James dans [8]. On remarque que dans le modèle limite des films courbés, un terme en dérivée seconde par rapport à la troisième variable intervient, qui n'apparaît pas dans le cas plan. Ce terme est dû au caractère courbé du film. Cependant, on verra que ce terme ne joue aucun rôle dans la minimisation de l'énergie limite. Par contre il y a apparition d'un terme d'ordre zéro en  $\bar{b}$  qui ne disparaît pas lors de la minimisation. En particulier, ce terme apparaît dans les cas du cylindre et la sphère vus au chapitre précédent.*

**Remarque 11.** *On remarque aussi qu'on retrouve les mêmes résultats obtenus par le développement asymptotique formel du chapitre précédent, tels que la dépendance du modèle limite par rapport au terme  $\bar{c}$  dû au caractère courbé du film et les conditions sur les termes d'ordre un sur  $\varphi^0$  et  $\bar{b}$  à savoir leur indépendance par rapport à la troisième variable. L'étude qui va suivre nous permettra de minimiser par rapport à  $\bar{c}$ .*

**Corollaire 6.** *La famille des minimiseurs  $\varphi(h) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  de  $e(h)$  sur  $V_h$  admet une sous-suite (encore notée par  $\varphi(h)$ ) tels que*

$$\begin{cases} \varphi(h) & \rightarrow \varphi^0 \text{ fortement dans } H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \frac{1}{h}\varphi(h)_{,3} & \rightarrow \bar{b} \text{ fortement dans } H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ \frac{1}{h^2}\varphi(h)_{,33} & \rightarrow \bar{c} \text{ fortement dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (3.163)$$

avec  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$  minimisant l'énergie limite

$$e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = \int_{\Omega_1} \left\{ \kappa \left| [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0(x)]^T \overline{\otimes} A_0(x) \right. \right. \\ \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 + W[(\varphi_{,1}^0(x) | \varphi_{,2}^0(x) | \bar{b}) A_0(x)] \right\} d_0(x) dx \quad (3.164)$$

sur  $(\varphi, b, c) \in W_0$ .

### Preuve

Le lemme 3.2.1 assure l'existence de minimiseurs de l'énergie  $E^*(h)$  qui sont, à un changement de notation près, les mêmes minimiseurs de l'énergie  $e(h)$ , la proposition 3.3.1 nous permet d'avoir l'existence des  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in W_0$  vérifiant (3.163). On se propose de montrer que  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c})$  minimisent  $e(0)$  sur  $W_0$ . Pour cela, on va utiliser l'argument standard de la  $\Gamma$ -convergence. On considère  $(\xi, \bar{q}, \bar{t}) \in W_0$  et on veut montrer que

$$e(0)(\xi, \bar{q}, \bar{t}) \geq e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}). \quad (3.165)$$

D'après le théorème 3.3.1 et grâce à (3.163) on a que

$$\liminf e(h)(\varphi(h)) = \liminf E^*(h)(\varphi(h), \frac{1}{h} \varphi(h)_{,3}, \frac{1}{h^2} \varphi(h)_{,33}) \\ \geq E^*(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \\ = e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}). \quad (3.166)$$

On sait aussi, grâce à la définition de la  $\Gamma$ -limite, qu'il existe  $(\xi(h), b(h), c(h))$  dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\begin{cases} \xi(h) & \rightarrow \xi \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ b(h) & \rightarrow \bar{q} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \\ c(h) & \rightarrow \bar{t} \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (3.167)$$

et

$$e(h)(\xi(h)) = E^*(h)(\xi(h), b(h), c(h)) \\ \rightarrow E^*(0)(\xi, \bar{q}, \bar{t}) \\ = e(0)(\xi, \bar{q}, \bar{t}). \quad (3.168)$$



Puisque  $\varphi(h)$  minimise  $e(h)$ , on a

$$e(h)(\varphi(h)) \leq e(h)(\xi(h)). \quad (3.169)$$

Ceci avec (3.166) et (3.168), nous donne

$$\begin{aligned} e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) &\leq \liminf e(h)(\varphi(h)) \\ &\leq \liminf e(h)(\xi(h)) \\ &= e(0)(\xi, \bar{q}, \bar{t}), \end{aligned}$$

d'où ce qu'on cherche. □

Comme conséquence de ce corollaire on a le résultat suivant.

**Corollaire 7.** *Le deuxième vecteur de Cosserat minimisant l'énergie  $e(0)$  vérifie*

$$\bar{c}_{,3} = 0 \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (3.170)$$

**Preuve**

Pour montrer ceci, on fixe  $\varphi^0 \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{b} \in H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant  $\varphi_{,3}^0 = 0$ ,  $\bar{b}_{,3} = 0$  et  $\varphi^0(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, 0)$ ,  $\bar{b}(x) = \tilde{A} \Psi_{,3}(x_1, x_2, 0) = \tilde{A} a_3(x_1, x_2)$  sur  $\partial\omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . On considère le problème de minimisation suivant ; trouver  $\bar{c} \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  tel que

$$e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) = \min_{\xi \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \xi). \quad (3.171)$$

La solution du problème (3.171) vérifie l'équation d'Euler-Lagrange ;  $\forall u \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left( [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0]^T \overline{\otimes} A_0 \right. \\ \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0), [(e_3 \otimes u \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0]^T \overline{\otimes} A_0 \right) d_0 dx = 0, \end{aligned} \quad (3.172)$$

ce qui implique grâce à l'inversibilité du tenseur  $A_0$  que

$$\begin{aligned} [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \overline{\otimes} A_0]^T \overline{\otimes} A_0 \\ + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \overline{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) = 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (3.173)$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} & [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3)) \bar{\otimes} A_0]^T \bar{\otimes} A_0 + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \\ & = [(\bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \bar{\otimes} A_0]^T \bar{\otimes} A_0 \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (3.174)$$

Or, si  $P = (p_{ijk})$  est un tenseur d'ordre 3,  $A = (a_{ij})$  une matrice inversible on a

$$\begin{aligned} (P \bar{\otimes} A \bar{\otimes} A^{-1})_{ijk} &= \sum_l (P \bar{\otimes} A)_{ijl} A_{lk}^{-1} \\ &= \sum_l \sum_s P_{ijs} A_{sl} A_{lk}^{-1} \\ &= \sum_s P_{ijs} \sum_l A_{sl} A_{lk}^{-1} \\ &= \sum_s P_{ijs} (AA^{-1})_{sk} \\ &= P_{ijk}, \end{aligned}$$

ce qui implique qu'en appliquant le produit tensoriel contracté dans les deux membres de l'égalité (3.174) à la matrice  $A_0^{-1}$ , en passant ensuite au transposé et en appliquant de nouveau le produit tensoriel contracté à la matrice  $A_0^{-1}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left[ [ [ (\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3)) \bar{\otimes} A_0 ]^T \bar{\otimes} A_0 \right. \\ & \quad \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) ] \bar{\otimes} A_0^{-1} \right]^T \bar{\otimes} A_0^{-1} \\ & = (\bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \text{ dans } L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \end{aligned} \quad (3.175)$$

Comme le terme à gauche de cette égalité est indépendant de  $x_3$  il en sera de même pour le terme à droite, ce qui nous permet de conclure. □

On pose

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_0 &= \left\{ (\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in H^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \times L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \text{ vérifiant } \varphi_{,3}^0 = 0, \bar{b}_{,3} = 0, \right. \\ & \quad \left. \bar{c}_{,3} = 0 \text{ et } \varphi^0(x) = \tilde{A} \Psi(x_1, x_2, 0), \bar{b}(x) = \tilde{A} a_3(x_1, x_2) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

**Remarque 12.** Grâce aux conditions  $\varphi_{,3}^0 = 0$ ,  $\bar{b}_{,3} = 0$  et  $\bar{c}_{,3} = 0$  sur  $\Omega_1$ , on peut identifier les fonctions  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c})$  avec des fonctions  $(\varphi^{0'}, \bar{b}', \bar{c}') \in H^2(\omega; \mathbb{R}^3) \times H^1(\omega; \mathbb{R}^3) \times L^2(\omega; \mathbb{R}^3)$  vérifiant les conditions au bord  $\varphi^{0'}(x) = \tilde{A} \psi(x_1, x_2)$ ,  $\bar{b}'(x) = \tilde{A} a_3(x_1, x_2)$  sur  $\partial\omega$ . On va continuer à noter ces fonctions  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c})$  par abus de notation.

### 3.4 Retour à la configuration de référence initiale

Considérons une autre carte  $\psi'$  de  $\omega'$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\tilde{S}$ . Travaillant avec cette autre carte, nous obtenons les mêmes résultats de convergence que précédemment mais cette fois à travers un autre difféomorphisme  $\Psi'$ . Effectuons donc le changement de variables initial inverse, afin d'avoir l'expression de l'énergie limite dans la configuration de référence initiale sans dépendance par rapport à la carte choisie. On a pour  $(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) \in \tilde{W}_0$ ,

$$\begin{aligned} e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) &= \int_{\omega} \left\{ \kappa \left| [(\nabla_p^2 \varphi^0 + (e_3 \otimes \nabla_p \bar{b} + \nabla_p \bar{b} \otimes e_3) + \bar{c} \otimes e_3 \otimes e_3) \bar{\otimes} A_0(x)]^T \bar{\otimes} A_0(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\nabla_p \varphi^0 + \bar{b} \otimes e_3] \bar{\otimes} \nabla^2 \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 + W[(\varphi_{,1}^0(x) | \varphi_{,2}^0(x) | \bar{b}) A_0(x)] \right\} d_0(x) dx, \end{aligned} \quad (3.176)$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned} e(0)(\varphi^0, \bar{b}, \bar{c}) &= \int_{\omega} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| (\varphi^0)_{i,\alpha\beta}(x) \Psi_{\alpha,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \Psi_{\beta,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right. \right. \\ &\quad + (\bar{b})_{i,\alpha}(x) (\Psi_{\alpha,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \Psi_{3,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) + \Psi_{\alpha,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \Psi_{3,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0)) \\ &\quad + (\bar{c})_i(x) \Psi_{3,k}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \Psi_{3,j}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) + (\varphi^0)_{i,\alpha}(x) \Psi_{\alpha,jk}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \\ &\quad \left. \left. + (\bar{b})_i(x) \Psi_{3,jk}^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0) \right|^2 + W[(\varphi_{,1}^0(x) | \varphi_{,2}^0(x) | \bar{b}) A_0(x)] \right\} d_0(x) dx. \end{aligned} \quad (3.177)$$

On pose  $\tilde{x} = \Psi(x)$  pour  $x \in \omega$ ,  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi^0(x)$ ,  $\tilde{b}(\tilde{x}) = \bar{b}(x)$ ,  $\tilde{c}(\tilde{x}) = \bar{c}(x)$  et  $\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}) = e(0)(\varphi)$ .  
On a

$$\varphi_{i,j}^0(x) = \tilde{\varphi}_{i,l}(\Psi(x)) \Psi_{l,j}(x), \quad (3.178)$$

et

$$\varphi_{i,jk}^0(x) = \tilde{\varphi}_{i,ls}(\Psi(x)) \Psi_{s,k}(x) \Psi_{l,j}(x) + \tilde{\varphi}_{i,l}(\Psi(x)) \Psi_{l,jk}(x). \quad (3.179)$$

En remarquant qu'on a  $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, 0)$  sur  $\Omega_1$ , puisque  $\varphi_{,3}^0$ , alors on a

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{\varphi} \circ \Psi(\Psi_1^{-1}(\tilde{x}), \Psi_2^{-1}(\tilde{x}), 0), \quad (3.180)$$

de même pour  $\tilde{b}$  on a

$$\tilde{b}(\tilde{x}) = \tilde{b} \circ \Psi(\Psi_1^{-1}(\tilde{x}), \Psi_2^{-1}(\tilde{x}), 0). \quad (3.181)$$

D'autre part, on sait d'après la définition du difféomorphisme  $\Psi$  que son gradient est indépendant de la troisième variable ce qui entraîne que

$$\nabla \Psi(\Psi_1^{-1}(\tilde{x}), \Psi_2^{-1}(\tilde{x}), 0) = \nabla \Psi(\Psi_1^{-1}(\tilde{x}), \Psi_2^{-1}(\tilde{x}), \Psi_3^{-1}(\tilde{x})) = (\nabla \Psi^{-1}(\tilde{x}))^{-1}. \quad (3.182)$$

On a donc pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{S}$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{i,j}(\tilde{x}) &= \varphi_{i,l}^0(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\Psi_{l,j}^{-1}(\tilde{x}) \\ &= \varphi_{i,\alpha}^0(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\Psi_{\alpha,j}^{-1}(\tilde{x})\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) &= \varphi_{i,ls}^0(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\Psi_{s,k}^{-1}(\tilde{x})\Psi_{l,j}^{-1}(\tilde{x}) + \varphi_{i,l}^0(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\Psi_{l,jk}^{-1}(\tilde{x}) \\ &= \varphi_{i,\alpha\beta}^0(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\Psi_{\beta,k}^{-1}(\tilde{x})\Psi_{\alpha,j}^{-1}(\tilde{x}) + \varphi_{i,\alpha}^0(\Psi^{-1}(\tilde{x}))\Psi_{\alpha,jk}^{-1}(\tilde{x}).\end{aligned}$$

En considérant tout ceci, on obtient l'expression suivante de  $\tilde{e}(0)$

$$\begin{aligned}\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}, \tilde{c}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| \tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x})\Psi_{3,k}^{-1}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x})\Psi_{3,j}^{-1}(\tilde{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{c}_i(\tilde{x})\Psi_{3,k}^{-1}(\tilde{x})\Psi_{3,j}^{-1}(\tilde{x}) + \tilde{b}_i(\tilde{x})\Psi_{3,jk}^{-1}(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes \nabla\Psi_3^{-1}(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma}. \quad (3.183)\end{aligned}$$

**Remarque 13.** *On remarque que  $\nabla\Psi_3^{-1}(\tilde{x}) = a^3(\Psi^{-1}(\tilde{x})) = n(\tilde{x})$  est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne  $\tilde{S}$  au point  $\tilde{x}$  ce qui montre bien que l'énergie limite obtenue ne dépend pas de la carte à travers laquelle on écrit l'énergie. Ceci souligne le caractère intrinsèque du problème limite de minimisation. L'énergie limite s'écrit donc*

$$\begin{aligned}\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}, \tilde{c}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| \tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x})n_k(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{c}_i(\tilde{x})n_k(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) + \tilde{b}_i(\tilde{x})n_{j,k}(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma} \\ &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \left| \nabla^2\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \nabla\tilde{b}(\tilde{x}) \otimes n(\tilde{x}) + n(\tilde{x}) \otimes \nabla\tilde{b}(\tilde{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{c}(\tilde{x}) \otimes n(\tilde{x}) \otimes n(\tilde{x}) + \tilde{b}(\tilde{x}) \otimes \nabla n(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma}. \quad (3.184)\end{aligned}$$

**Proposition 3.4.1.** *Les conditions  $\varphi_3^0 = 0$  et  $\bar{b}_3 = 0$  deviennent*

$$\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x})n(\tilde{x}) = \nabla\tilde{b}(\tilde{x})n(\tilde{x}) = 0. \quad (3.185)$$

De plus on a

$$\tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x})n_k(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) = 0. \quad (3.186)$$

**Preuve**

Ceci découle du fait qu'on a  $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(\Psi(x))$  ce qui implique que

$$\begin{aligned}\varphi_{i,3}^0(x) &= 0 \\ &= \tilde{\varphi}_{i,l}(\Psi(x))\Psi_{l,3}(x) \\ &= (\nabla\tilde{\varphi}_i(\Psi(x)), a^3(x)) \\ &= (\nabla\tilde{\varphi}_i(\tilde{x}), n(\tilde{x}))\end{aligned}$$

et donc on a

$$\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x})n(\tilde{x}) = 0. \quad (3.187)$$

De même on obtient

$$\nabla\tilde{b}(\tilde{x})n(\tilde{x}) = 0. \quad (3.188)$$

L'égalité (3.186) provient du fait que  $\varphi_{,33}^0 = 0$ . En effet on a

$$\begin{aligned}\varphi_{i,33}^0(x) &= 0 \\ &= \tilde{\varphi}_{i,jk}(\Psi(x))\Psi_{j,3}(x)\Psi_{k,3}(x) + \tilde{\varphi}_{i,j}(\Psi(x))\Psi_{j,33}(x) \\ &= \tilde{\varphi}_{i,jk}(\Psi(x))(a_3)_j(x)(a_3)_k(x) + \tilde{\varphi}_{i,j}(\Psi(x))((a_3)_j)_{,3}(x).\end{aligned}$$

Or, on sait que pour tout  $x \in \omega$

$$(a_3)_{,3}(x) = 0. \quad (3.189)$$

Grâce à ceci on obtient en utilisant le fait que  $a_3(x) = n(\tilde{x})$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x})n_k(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) &= \tilde{\varphi}_{i,jk}(\Psi(x))(a_3)_j(x)(a_3)_k(x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

**Corollaire 8.** *Le minimum de l'énergie  $\tilde{e}(0)$  à  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{b}$  fixés est atteint pour  $\tilde{c} = 0$  et vaut*

$$\begin{aligned}\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| \tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x})n_k(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{b}_i(\tilde{x})n_{j,k}(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma} \\ &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \left| \nabla^2\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \nabla\tilde{b}(\tilde{x}) \otimes n(\tilde{x}) + n(\tilde{x}) \otimes \nabla\tilde{b}(\tilde{x}) + \tilde{b}(\tilde{x}) \otimes \nabla n(\tilde{x}) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma}. \quad (3.190)\end{aligned}$$

**Preuve**

On obtient ceci grâce à la proposition 3.4.1. En effet, la relation (3.186) implique que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \tilde{\varphi}_{i,j,k}(\tilde{x}) \tilde{c}_i(\tilde{x}) n_k(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) &= \sum_i c_i(\tilde{x}) \sum_{j,k} \tilde{\varphi}_{i,j,k}(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) n_k(\tilde{x}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.191}$$

La deuxième relation dans (3.185) implique que

$$\sum_j \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) = 0, \tag{3.192}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x}) n_k^2(\tilde{x}) \tilde{c}_i(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) &= \sum_{i,k} c_i(\tilde{x}) n_k^2(\tilde{x}) \sum_j \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.193}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x}) \tilde{c}_i(\tilde{x}) n_k(\tilde{x}) n_j^2(\tilde{x}) &= \sum_{i,j} c_i(\tilde{x}) n_j^2(\tilde{x}) \sum_k \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x}) n_k(\tilde{x}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.194}$$

D'autre part, comme le vecteur  $n$  est de norme constante, ceci implique que pour tout  $k = 1, 2, 3$  on a

$$\begin{aligned} (n_{\cdot,k}(\tilde{x}), n(\tilde{x})) &= \sum_j n_{j,k}(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.195}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k=1}^3 \tilde{b}_i(\tilde{x}) n_{j,k}(\tilde{x}) \tilde{c}_i(\tilde{x}) n_k(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) &= \sum_{i,k} \tilde{b}_i(\tilde{x}) \tilde{c}_i(\tilde{x}) n_k(\tilde{x}) \sum_j n_{j,k}(\tilde{x}) n_j(\tilde{x}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.196}$$

En appliquant (3.191), (3.193), (3.194) et (3.196) dans (3.184) on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}, \tilde{c}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| \tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x})n_k(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{b}_i(\tilde{x})n_{j,k}(\tilde{x}) \right|^2 + \left| \tilde{c}_i(\tilde{x})n_k(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.197)$$

ceci implique que le minimum par rapport à  $\tilde{c}$  est atteint pour  $\tilde{c} = 0$  et vaut

$$\begin{aligned} \tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \sum_{i,j,k=1}^3 \left| \tilde{\varphi}_{i,jk}(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,j}(\tilde{x})n_k(\tilde{x}) + \tilde{b}_{i,k}(\tilde{x})n_j(\tilde{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{b}_i(\tilde{x})n_{j,k}(\tilde{x}) \right|^2 + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma} \\ &= \int_{\tilde{S}} \left\{ \kappa \left| \nabla^2\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \nabla\tilde{b}(\tilde{x}) \otimes n(\tilde{x}) + n(\tilde{x}) \otimes \nabla\tilde{b}(\tilde{x}) + \tilde{b}(\tilde{x}) \otimes \nabla n(\tilde{x}) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right\} d\tilde{\sigma}. \end{aligned} \quad (3.198)$$

□

Ce résultat est confirmé par les exemples de films minces de forme simple telle que le cylindre et la sphère vus au chapitre précédent. On rappelle que pour un film mince de forme cylindrique l'énergie limite obtenue par développement asymptotique formel est de la forme

$$\begin{aligned} e^0(\varphi^0, \bar{b}) &= \int_{\omega} \left\{ W[(\varphi_{,1}^0(x)|\varphi_{,2}^0(x)|\bar{b})A_0(x)] \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left( |\varphi_{,11}^0|^2 + \frac{2}{r^2}|\varphi_{,12}^0|^2 + 2|\bar{b}_{,1}|^2 + \left| \frac{1}{r^2}\varphi_{,22}^0 - \frac{1}{r}\bar{b} \right|^2 + 2\left| \frac{1}{r}\bar{b}_{,2} + \frac{1}{r^2}\varphi_{,2}^0 \right|^2 \right) \right\} r dx, \end{aligned} \quad (3.199)$$

$$\text{avec } A_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin x_2}{r} & \frac{\cos x_2}{r} \\ 0 & -\cos x_2 & -\sin x_2 \end{pmatrix} \text{ et où on a noté } \varphi_{,3}^1 = \bar{b}.$$

En écrivant l'énergie sur la surface courbée on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}, \tilde{b}) &= \int_{\tilde{S}} \left\{ W[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes n(\tilde{x})] \right. \\ &\quad \left. + \kappa \left( |\tilde{\varphi}_{,11}|^2 + 2|\tilde{\varphi}_{,12} + n_1\tilde{b}_{,1}|^2 + 2|\tilde{\varphi}_{,13} + n_2\tilde{b}_{,1}|^2 + |\tilde{\varphi}_{,22} + 2n_1\tilde{b}_{,2} + n_{2,2}\tilde{b}|^2 + 2|\tilde{\varphi}_{,23} + n_2\tilde{b}_{,2} + n_1\tilde{b}_{,3} + n_{2,3}\tilde{b}|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + |\tilde{\varphi}_{,33} + 2n_2\tilde{b}_{,3} + n_{3,3}\tilde{b}|^2 \right) \right\} d\tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.200)$$

avec

$$n(\tilde{x}) = \left( 0, \frac{-\tilde{x}_2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}}, \frac{-\tilde{x}_3}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}} \right) \quad (3.201)$$

et

$$\nabla n(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\tilde{x}_3^2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}^3} & \frac{\tilde{x}_2 \tilde{x}_3}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}^3} \\ 0 & \frac{\tilde{x}_2 \tilde{x}_3}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}^3} & \frac{-\tilde{x}_2^2}{\sqrt{\tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2}^3} \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.4.2.** *L'énergie limite reste matériellement indifférente.*

**Preuve**

On voit ceci en posant pour  $A = (a_1|a_2|a_3) \in M^3$  et  $b, u \in \mathbb{R}^3$

$$\widetilde{W}(A, b, u) = W((a_1|a_2|a_3) + b \otimes u). \quad (3.202)$$

On obtient grâce à (3.5) que  $\forall R \in SO(3)$  on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(RA, Rb, u) &= W((Ra_1|Ra_2|Ra_3) + Rb \otimes u) \\ &= W((Ra_1|Ra_2|Ra_3) + (Rbu_1|Rbu_2|Rbu_3)) \\ &= W\left(R((a_1|a_2|a_3) + b \otimes u)\right) \\ &= W\left((a_1|a_2|a_3) + b \otimes u\right) \\ &= \widetilde{W}(A, b, u) \end{aligned}$$

et on applique ceci pour  $A = \nabla \tilde{\varphi}$ ,  $b = \tilde{b}$  et  $u = n(\pi(\tilde{x}))$  on obtient le résultat pour la partie d'énergie interne élastique. En ce qui concerne la partie d'énergie d'interface,  $\forall R \in SO(3)$  on a

$$\begin{aligned} &\left| R\nabla^2 \tilde{\varphi} + (R\nabla \tilde{b}) \otimes n + n \otimes (R\nabla \tilde{b}) + R\tilde{b} \otimes \nabla n \right|^2 \\ &= \left| R(\nabla^2 \tilde{\varphi} + \nabla \tilde{b} \otimes n + n \otimes \nabla \tilde{b} + \tilde{b} \otimes \nabla n) \right|^2 \\ &= \left| \nabla^2 \tilde{\varphi} + \nabla \tilde{b} \otimes n + n \otimes \nabla \tilde{b} + \tilde{b} \otimes \nabla n \right|^2, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □





**Deuxième partie**

**Matériaux hyperélastiques**



**Chapitre 4**  
**Film courbé mince collé à un substrat**  
**avec une condition de non**  
**interpénétration**



# Chapitre 4

## Film courbé mince collé à un substrat avec une condition de non interpénétration

### Résumé

Le comportement d'un film courbé mince hyperélastique collé à un substrat rigide est décrit par une énergie composée d'une partie d'énergie interne dépendant du gradient de la déformation et d'une partie d'énergie d'interface dépendant du saut de la déformation à travers l'interface film-substrat. On calcule la  $\Gamma$ -limite de cette énergie en imposant aux déformations une condition de non interpénétration qui empêche le film de pénétrer à l'intérieur du substrat sans pour autant interdire le contact entre les deux.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>108</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulation du problème</b>	<b>109</b>
<b>4.3</b>	<b>Calcul de la <math>\Gamma</math>-limite</b>	<b>115</b>
<b>4.4</b>	<b>Retour à la configuration initiale</b>	<b>131</b>

---

## 4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude du comportement d'un film courbé mince  $\tilde{\Omega}^h$  déformable d'épaisseur  $h$  constitué d'un matériau hyperélastique en contact, à sa surface inférieure  $\tilde{S}$ , avec un substrat rigide et fixe occupant le domaine  $S_u$ . Le comportement de ce film subissant une déformation  $\tilde{\varphi}$  est décrit par une énergie  $\tilde{e}^h$  composée par une partie  $\tilde{E}^h$  représentant l'énergie élastique interne du film et une autre partie  $\tilde{I}^h$  d'énergie d'interface, liée au décollement du film de son substrat. Cette énergie n'est pas du type Van der Waals vu aux chapitres précédents. Elle admet une densité fonction du saut de la prolongée sur tout  $\mathbb{R}^3$  de la déformation  $\tilde{\varphi}$  à travers l'interface film-substrat. On pose donc

$$\tilde{e}^h = \tilde{I}^h + \tilde{E}^h,$$

avec

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = h^\alpha \int_{\tilde{S}^h} \Phi(|[\tilde{\varphi}]|) dx$$

et

$$\tilde{E}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}^h} W(\nabla \tilde{\varphi}) dx,$$

où  $W$  est la densité d'énergie élastique du film,  $h^\alpha \Phi$  est la densité d'énergie d'interface avec  $\alpha$  un nombre réel et  $||[\tilde{\varphi}]||$  est la norme du saut de la déformation à travers l'interface entre le film et le substrat.

Dans [7] K. Bhattacharya, I. Fonseca et G. Francfort ont repris le travail de A. Braides, I. Fonseca et G. Francfort dans [9] où ces derniers avaient étudié le comportement asymptotique des plaques non homogènes. K. Bhattacharya, I. Fonseca et G. Francfort ont analysé le comportement asymptotique de films minces superposés, subissant une déformation et ayant chacun une densité d'énergie élastique interne tout en permettant leur décollement qui sera pénalisé par une énergie d'interface. On se propose dans ce travail d'étudier le comportement d'un film courbé mince collé à un substrat rigide ayant une surface supérieure courbée en supposant que le contact entre le film et le substrat a lieu en tout point de la surface inférieure du film et on impose aux déformations que subit le film une condition de non interpénétration, voir J. Ball [6], P. Ciarlet et J. Nečas [20] et [21] et Q. Tang [49]. Cette condition semble assez logique du point de vue

physique puisque dans les problèmes de solides en contact, il est impossible qu'une partie d'un des solides pénètre dans l'autre. On impose donc au solide déformé de rester en dehors du substrat sans pour autant interdire le contact entre les deux.

L'état d'équilibre du film est décrit par les minimiseurs de l'énergie  $\tilde{e}^h$  sur un ensemble de déformations admissibles qu'on choisit de telle manière qu'il n'y ait pas d'interpénétration entre le film et le substrat. On s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie  $\tilde{e}^h$  et de ses minimiseurs, quand ils existent, lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro.

On commence tout d'abord par effectuer un changement de variables qui nous permettra de travailler sur un domaine plan d'épaisseur constante, ensuite on effectue un deuxième changement de variables pour aplatis la surface supérieure du substrat afin de simplifier la condition de non interpénétration. On passe ensuite au calcul de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie qui nous donne le comportement des minimiseurs de cette énergie et on finit par un retour à la configuration initiale.

## 4.2 Formulation du problème

La géométrie du domaine  $\tilde{\Omega}^h$  occupé par le film courbé est la même que celle vue au premier chapitre, à la seule différence que  $\tilde{S}$  est la surface inférieure du film et non pas sa surface moyenne. Nous garderons les mêmes notations en ce qui concerne le  $C^1$ -difféomorphisme  $\Psi$  qui envoie  $\Omega^h$  sur  $\tilde{\Omega}^h$  et les vecteurs des bases covariante et contravariante. On suppose que le film est composé d'un matériau hyperélastique homogène pour lequel la densité d'énergie élastique interne,  $W : M^3 \rightarrow [0, +\infty[$  avec  $M^3$  l'espace des matrices  $3 \times 3$  à coefficients réels muni de la norme usuelle  $|F| = \sqrt{\text{tr}(F^T F)}$ , est une fonction continue vérifiant les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} \exists c > 0, \exists p \in ]1, +\infty[, \forall F \in M^3, |W(F)| \leq c(1 + |F|^p), \\ \exists \gamma > 0, \exists \beta \geq 0, \forall F \in M^3, W(F) \geq \gamma|F|^p - \beta, \\ \forall F, F' \in M^3, |W(F) - W(F')| \leq c(1 + |F|^{p-1} + |F'|^{p-1})|F - F'|. \end{cases} \quad (4.1)$$



Le comportement du film subissant une déformation  $\tilde{\varphi}$  est décrit par l'énergie

$$\tilde{e}^h = \tilde{I}^h + \tilde{E}^h,$$

où

$$\tilde{I}^h(\tilde{\varphi}) = h^\alpha \int_{\tilde{S}} \Phi(|[\tilde{\varphi}]|) d\tilde{\sigma}$$

et

$$\tilde{E}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\tilde{\Omega}^h} W(\nabla \tilde{\varphi}) d\tilde{x},$$

avec

$$|[\tilde{\varphi}]| = |\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x}|, \text{ pour tout } \tilde{x} \in \tilde{S}, \quad (4.2)$$

où  $|x|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Le saut  $|[\tilde{\varphi}]|$  est bien défini pour  $\tilde{\varphi} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega}^h, \mathbb{R}^3)$  lequel est inclu dans  $C^0(\overline{\tilde{\Omega}^h}, \mathbb{R}^3)$  pour  $p > 3$ . La fonction  $\Phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  intervenant dans le terme d'énergie d'interface est supposée être semi continue inférieure, croissante et vérifiant

$$\Phi(0) = 0 \text{ et } \Phi(t) > 0 \text{ pour } t \neq 0. \quad (4.3)$$

Comme on ne fait pas l'hypothèse que la densité d'énergie élastique interne est quasiconvexe, puisque ceci excluerait de notre étude des exemples intéressants tels que le matériau de Saint Venant-Kirchhoff, on n'est pas assuré de l'existence de solutions pour le problème de minimisation : trouver  $\tilde{\varphi}(h) \in \tilde{V}^h$  tels que

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}(h)) = \inf_{\tilde{\varphi} \in \tilde{V}^h} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi}),$$

avec

$$\tilde{V}^h = \{\tilde{\varphi} \in W^{1,p}(\tilde{\Omega}^h, \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{\Omega}^h) \subset \overline{S_u^c} \text{ et } \tilde{\varphi}(x) = x \text{ sur } \tilde{\Gamma}\}, p > 3, \quad (4.4)$$

où  $\overline{S_u^c}$  représente l'adhérence du complémentaire du domaine occupé par le substrat,  $\tilde{\Gamma}$  est la surface latérale de  $\tilde{\Omega}^h$  et  $\tilde{\varphi}(\tilde{\Omega}^h)$  est l'image de  $\tilde{\Omega}^h$  définie sans ambiguïté à l'aide du représentant continu de  $\tilde{\varphi}$ , puisque  $p > 3$ , donc cet ensemble est bien défini. Par conséquent, on considère une suite minimisante diagonale  $\tilde{\varphi}(h)$  pour la suite d'énergies  $\tilde{e}^h$ , dont on est assuré de l'existence, satisfaisant

$$\tilde{\varphi}(h) \in \tilde{V}^h, \tilde{e}^h(\tilde{\varphi}(h)) = \inf_{\tilde{\varphi} \in \tilde{V}^h} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) + h\varepsilon(h), \quad (4.5)$$

avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ . La condition de non interpénétration imposée à la déformation dans  $\tilde{V}^h$  veut dire que celle-ci ne peut envoyer aucun point de  $\tilde{\Omega}^h$  dans l'intérieur du substrat. Par contre il peut exister des points qui seront envoyés sur sa frontière. Ce sont les points de contact entre le film déformé et le substrat. La condition évite en ce sens qu'il y ait pénétration du film dans le substrat. On commence par faire un changement de variables qui nous permet de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur  $h$ . On procède en deux étapes.

Soit  $\tilde{x} \in \tilde{\Omega}^h$ ,  $\exists x \in \Omega_h$  tel que  $\tilde{x} = \Psi(x)$ , où

$$\Omega_h = \{x \in \mathbb{R}^3, \exists x' \in \omega, x = x' + \eta e_3, 0 < \eta < h\}. \quad (4.6)$$

Si  $\tilde{\varphi}$  est une déformation du film courbé dans sa configuration de référence, on définit pour tout  $x \in \Omega_h$ ,  $\varphi_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$\varphi_h(x) = \tilde{\varphi}(\Psi(x)). \quad (4.7)$$

Sachant que pour une déformation  $\tilde{\varphi} : \tilde{\Omega}^h \rightarrow \mathbb{R}^3$  en régime membranaire, l'énergie se comporte comme  $h$  quand  $h$  tend vers zéro, on s'intéresse au comportement limite de l'énergie par unité d'épaisseur :  $\frac{1}{h} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi})$ . Pour une déformation  $\varphi_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  on considère donc l'énergie mise à l'échelle

$$\begin{aligned} e^h(\varphi_h) &= \frac{1}{h} \tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} W(\nabla \varphi_h(x)(\nabla \Psi)^{-1}(x)) \det \nabla \Psi(x) dx + h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\varphi_h]|) |\operatorname{cof} \nabla \Psi(x) e_3| d\sigma, \end{aligned}$$

avec

$$|[\varphi_h]| = |\varphi_h(x_1, x_2, 0) - \Psi(x_1, x_2, 0)|. \quad (4.8)$$

On définit l'application  $z_h : \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}^3$  par

$$z_h(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_2, \frac{x_3}{h}\right). \quad (4.9)$$

L'application  $z_h$  envoie  $\Omega_h$  sur

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \omega \text{ et } 0 < x_3 < 1\}. \quad (4.10)$$

À toute déformation  $\varphi_h$  sur  $\Omega_h$  on associe la déformation  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\varphi(x) = \varphi_h(z_h^{-1}(x)).$$

On pose  $e(h)(\varphi) = e^h(\varphi_h)$ . On a alors

$$e(h)(\varphi) = E(h)(\varphi) + I(h)(\varphi), \quad (4.11)$$

avec

$$E(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} W \left[ (\varphi_{,1}(x) | \varphi_{,2}(x) | \frac{1}{h} \varphi_{,3}(x)) A_h(x) \right] d_h(x) dx \quad (4.12)$$

et

$$I(h)(\varphi) = h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\varphi]|) | \mathbf{cof} \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3) e_3 | d\sigma, \quad (4.13)$$

où

$$|[\varphi]| = |\varphi(x_1, x_2, 0) - \Psi(x_1, x_2, 0)|$$

et où on a posé

$$d_h(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3) \quad (4.14)$$

et

$$A_h(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3). \quad (4.15)$$

En posant

$$\varphi(h) = \tilde{\varphi}(h) \circ \Psi \circ z_h^{-1},$$

le problème (4.5) devient

$$\varphi(h) \in V^h, \quad e(h)(\varphi(h)) = \inf_{\varphi \in V^h} e(h)(\varphi) + h\varepsilon(h), \quad (4.16)$$

avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  et

$$V^h = \{ \varphi \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \varphi(\Omega_1) \subset \bar{S}_u^c \text{ et } \varphi(x) = \Psi(x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1) \}. \quad (4.17)$$

Ce dernier changement de variables nous permet de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur du film courbé qui va tendre vers zéro.

Nous allons maintenant procéder à un autre changement de variables dans l'espace d'arrivée, qui nous permettra d'aplatir la surface supérieure du substrat (voir Figure.2). Ceci permet de simplifier la condition de non interpénétration et facilite le calcul de la

borne supérieure de la  $\Gamma$ -limite. On suppose que le substrat est infini au sens où  $\Psi$  est la restriction à  $\Omega_1$  d'un difféomorphisme  $\bar{\Psi}$  de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que

$$S_u^c = \bar{\Psi} \left\{ x \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0 \right\}. \quad (4.18)$$

La condition de non interpénétration impose au film déformé d'être inclus dans  $S_u^c$ . On pose pour tout  $x \in \Omega_1$

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{\Psi}^{-1}(\varphi(x)). \quad (4.19)$$

Exprimée à l'aide de  $\bar{\varphi}$ , la condition de non interpénétration devient

$$\bar{\varphi}_3 \geq 0. \quad (4.20)$$

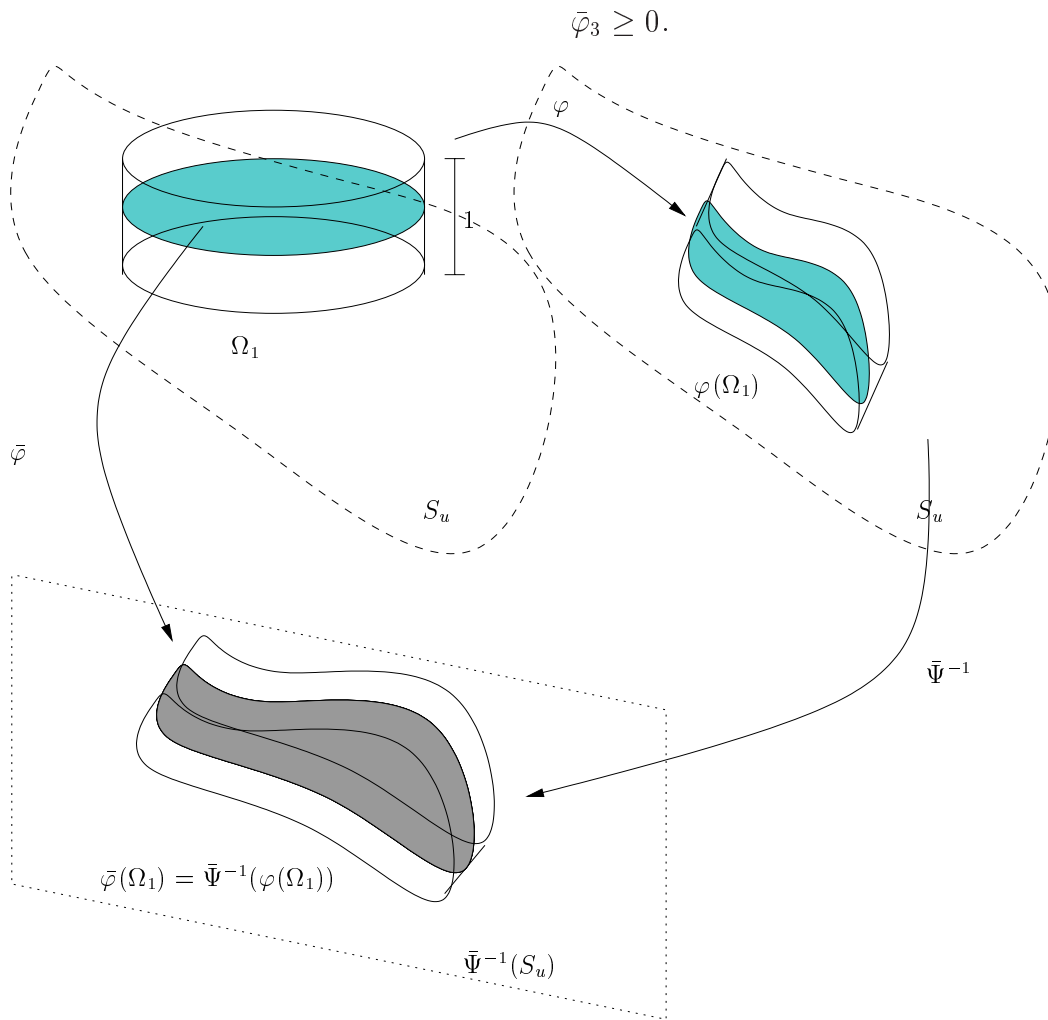


Figure 2. Changement de variables

L'opérateur qui à une application  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associe l'application  $\bar{\Psi}^{-1} \circ \varphi$  est un opérateur de Nemytsky. En particulier, si  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  alors  $\bar{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ . De plus on a

$$\nabla \varphi(x) = \nabla \bar{\Psi}(\bar{\varphi}(x)) \nabla \bar{\varphi}(x), \quad (4.21)$$

soit encore

$$\partial_i \varphi(x) = \nabla \bar{\Psi}(\bar{\varphi}(x)) \partial_i \bar{\varphi}(x). \quad (4.22)$$

Finalement on obtient

$$(\partial_\alpha \varphi | \frac{1}{h} \partial_3 \varphi) = \nabla \bar{\Psi}(\bar{\varphi}) (\partial_\alpha \bar{\varphi}(x) | \frac{1}{h} \partial_3 \bar{\varphi}). \quad (4.23)$$

On définit, alors

$$\begin{aligned} \bar{e}(h)(\bar{\varphi}) &= \bar{E}(h)(\bar{\varphi}) + \bar{I}(h)(\bar{\varphi}), \\ &= e(h)(\varphi), \end{aligned}$$

avec

$$\bar{E}(h)(\bar{\varphi}) = E(h)(\varphi) = \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(x) (\bar{\varphi}_{,1}(x) | \bar{\varphi}_{,2}(x) | \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(x)) A_h(x) \right] d_h(x) dx \quad (4.24)$$

et

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}) = I(h)(\varphi) = h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3) e_3| d\sigma, \quad (4.25)$$

où

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]| = |\bar{\Psi}(\bar{\varphi}(x_1, x_2, 0)) - \bar{\Psi}(x_1, x_2, 0)|. \quad (4.26)$$

En posant

$$\bar{\varphi}(h)(x) = \bar{\Psi}^{-1}(\varphi(h)(x)), \quad (4.27)$$

le problème (4.16) devient

$$\bar{\varphi}(h) \in \bar{V}^h, \quad \bar{e}(h)(\bar{\varphi}(h)) = \inf_{\bar{\varphi} \in \bar{V}^h} \bar{e}(\bar{\varphi}) + h\varepsilon(h), \quad (4.28)$$

avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  et

$$\bar{V}^h = \{ \bar{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \bar{\varphi}(\Omega_1) \subset \{x_3 \geq 0\} \text{ et } \bar{\varphi}(x) = (x_1, x_2, hx_3) \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1) \}. \quad (4.29)$$

### 4.3 Calcul de la $\Gamma$ -limite

Avant d'entamer le calcul de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie  $\bar{e}(h)$ , on commence par prolonger cette énergie sur  $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  en posant

$$\text{pour tout } \bar{\varphi} \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \bar{e}(h)(\bar{\varphi}) & \text{si } \bar{\varphi} \in \bar{V}^h, \\ +\infty & \text{si non.} \end{cases}$$

L'énergie limite qu'on obtient par  $\Gamma$ -convergence est relaxée, c'est à dire que la densité d'énergie interne est quasiconvexifiée (C.B. Morrey [43]). Ceci est inévitable même si la densité de départ est quasiconvexe, puisque cette quasiconvexité n'est pas conservée par la densité  $W_0$  qui intervient dans le modèle limite. On rappelle que l'enveloppe quasiconvexe d'une fonction  $W : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times M^{3,2} \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$QW = \sup\{Z : M^{3,2} \rightarrow \mathbb{R}, Z \text{ quasiconvexe et } Z \leq W\},$$

sachant qu'une fonction  $Z : \Omega \times \mathbb{R}^3 \times M^{3,2} \rightarrow \mathbb{R}$  est quasiconvexe si et seulement si

$$Z(x, y, A) \leq \frac{1}{\text{meas } D} \int_D Z(x, y, A + \nabla\theta(s)) ds,$$

pour tout domaine borné  $D \subset \mathbb{R}^3$ , tout  $A \in M^{3,2}$  et tout  $\theta \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^2)$ . Comme conséquence de ces définitions, on obtient l'expression suivante de l'enveloppe quasiconvexe

$$QW(x, y, A) = \inf_{\theta \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^2)} \frac{1}{\text{meas } D} \int_D W(x, y, A + \nabla\theta(s)) ds, \quad (4.30)$$

pour plus de détails voir [22]. Tout  $F$  dans  $M^3$  s'écrit sous la forme  $F = (z_1|z_2|z_3) = (\bar{F}|z_3)$ , où les  $z_i$  sont les colonnes de  $F$  et  $\bar{F} = (z_1|z_2) \in M^{3,2}$ . On introduit, comme dans [1] et [39], la fonction  $W_0 : \omega \times \mathbb{R}^3 \times M^{3,2} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$W_0(x, y, \bar{F}) = \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W(\nabla\bar{\Psi}(y)(\bar{F}|z)A_0(x)), \quad (4.31)$$

avec  $A_0(x) = \nabla\bar{\Psi}^{-1} \circ \bar{\Psi}(x_1, x_2, 0)$ . Cette fonction est bien définie grâce à la continuité de  $W$  et à ses propriétés de croissance et de coercivité (4.1), elle vérifie des conditions de croissance et de coercivité analogues à celles vérifiées par  $W$ . En effet, on a la proposition suivante

**Proposition 4.3.1.** *La fonction  $W_0$  est continue et vérifie les propriétés de croissance et de coercivité suivantes*

$$\begin{cases} \exists c' > 0, \forall \bar{F} \in M^{3,2}, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \bar{\omega}, |W_0(x, y, \bar{F})| \leq c'(1 + |\bar{F}|^p), \\ \exists \gamma' > 0, \exists \beta' \geq 0, \forall \bar{F} \in M^{3,2}, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \bar{\omega}, W_0(x, y, \bar{F}) \geq \gamma' |\bar{F}|^p - \beta'. \end{cases} \quad (4.32)$$

**Preuve**

La fonction  $W_0$  est semicontinue supérieure comme infimum de fonctions continues. Pour avoir la continuité de  $W_0$ , il suffit donc de montrer qu'elle est semicontinue inférieure. On considère une suite  $(x_n, y_n, \bar{F}_n) \in \bar{\omega} \times \mathbb{R}^3 \times M^{3,2}$  convergente vers  $(x, y, \bar{F})$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Grâce à la coercivité de  $W$ , pour tout  $z \in \mathbb{R}^3$  on a

$$\begin{aligned} \alpha |z|^p &= \alpha \left| \nabla \bar{\Psi}(y) (\nabla \bar{\Psi}(y))^{-1} (0|z) A_0(x) (A_0(x))^{-1} \right|^p \\ &\leq \alpha \left\| (\nabla \bar{\Psi})^{-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \left\| (A_0)^{-1} \right\|_{L^\infty(\omega)} \left| \nabla \bar{\Psi}(y) (0|z) A_0(x) \right|^p \\ &\leq \left\| (\nabla \bar{\Psi})^{-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \left\| (A_0)^{-1} \right\|_{L^\infty(\omega)} W(\nabla \bar{\Psi}(y) (0|z) A_0(x)) + \beta. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe un compact  $K$  tel que pour tout  $n$ , l'infimum de  $W$  par rapport à  $z \in \mathbb{R}^3$  est atteint en un point  $z^n \in K$ . On procède ensuite comme dans [38]. On extrait une sous-suite encore notée  $n$  telle que  $W_0(x_n, y_n, \bar{F}_n)$  converge quand  $n \rightarrow +\infty$ , de laquelle on extrait une autre sous-suite telle que  $z_n \rightarrow z \in K$ . Grâce à la continuité de  $W$ , on a

$$\begin{aligned} W_0(x_n, y_n, \bar{F}_n) &= W(\nabla \bar{\Psi}(y_n) (\bar{F}_n | z_n) A_0(x_n)) \\ &\rightarrow W(\nabla \bar{\Psi}(y) (\bar{F} | z) A_0(x)) \\ &\geq W_0(x, y, \bar{F}). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour toute sous-suite telle que  $W_0(x_n, y_n, \bar{F}_n)$  converge, on en déduit que

$$\liminf W_0(x_n, y_n, \bar{F}_n) \geq W_0(x, y, \bar{F}). \quad (4.33)$$

Par suite  $W_0$  est semi-continue inférieure et donc continue.

Soit  $(x, y, \bar{F}) \in \bar{\omega} \times \mathbb{R}^3 \times M^{3,2}$  et  $z_0 \in \mathbb{R}^3$  réalisant le minimum dans la définition de

$W_0$ , on a

$$\begin{aligned} W_0(x, y, \bar{F}) &= W(\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|z_0)A_0(x)) \\ &\geq \alpha |\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|z_0)A_0(x)|^p - \beta \\ &\geq \alpha |\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|0)A_0(x)|^p - \beta, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} |\bar{F}|^p &= |\nabla \bar{\Psi}(y)(\nabla \bar{\Psi}(y))^{-1}(\bar{F}|0)A_0(x)(A_0(x))^{-1}|^p \\ &\leq \|(\nabla \bar{\Psi})^{-1}\|_{L^\infty} \|(A_0)^{-1}\|_{L^\infty} |\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|0)A_0(x)|^p, \end{aligned}$$

ce qui nous donne la coercivité. Enfin,  $W_0$  est positive en dehors d'un compact sur lequel elle est bornée grâce à sa continuité. Pour tout  $(x, y, \bar{F})$  en dehors de ce compact on a

$$\begin{aligned} |W_0(x, y, \bar{F})| &= W_0(x, y, \bar{F}) \\ &= W(\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|z_0)A_0(x)) \\ &\leq W(\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|0)A_0(x)) \\ &\leq c(1 + |\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|0)A_0(x)|^p) \\ &\leq c(1 + \|\nabla \bar{\Psi}\|_{L^\infty} \|A_0\|_{L^\infty} |\bar{F}|^p) \\ &\leq c(1 + |\bar{F}|^p), \end{aligned}$$

d'où la propriété de croissance.

□

Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre qui est l'expression de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie, on va étudier le comportement des déformations à énergie bornée. Dans toute la suite  $c$  désignera une constante positive susceptible de changer de valeur de ligne en ligne.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $\bar{\varphi}(h) \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  une suite vérifiant*

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c, \tag{4.34}$$

*avec  $c$  une constante strictement positive indépendante de  $h$ . Alors  $\bar{\varphi}(h)$  est uniformément bornée dans  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  et les valeurs d'adhérence de  $\bar{\varphi}(h)$  pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  appartiennent à*

$$\bar{V}^0 = \{\bar{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \bar{\varphi}(\Omega_1) \subset \{x_3 \geq 0\} \text{ et } \bar{\varphi}(x) = (x_1, x_2, 0) \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1)\} \tag{4.35}$$



et vérifient

$$\bar{\varphi}_{,3}(0) = 0. \quad (4.36)$$

De plus, dans le cas  $\alpha < 1$ , les valeurs d'adhérence vérifient

$$\bar{\varphi}(0)(x) = x \text{ dans } \omega. \quad (4.37)$$

**Preuve**

Soit  $\bar{\varphi}(h) \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c < +\infty, \quad (4.38)$$

ceci implique que  $\bar{\varphi}(h) \in \bar{V}^h$  et que

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) = \bar{e}(h)(\bar{\varphi}(h)). \quad (4.39)$$

On a alors les deux estimations suivantes

$$\bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c \text{ et } \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c. \quad (4.40)$$

La première estimation s'écrit

$$\int_{\Omega_1} W\left(\nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(x) \left(\bar{\varphi}_{,\alpha}(h) \middle| \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h)\right) A_h(x)\right) d_h(x) dx \leq c, \quad (4.41)$$

où  $\bar{\varphi}_{,\alpha}(h) = (\bar{\varphi}_{,1}(h) | \bar{\varphi}_{,2}(h)) \in M^{3,2}$ . Les propriétés (4.1) de  $W$  impliquent que

$$\left\| \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi} \left(\bar{\varphi}_{,\alpha}(h) \middle| \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h)\right) A_h \right\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \leq c. \quad (4.42)$$

Or

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\bar{\varphi}_{,\alpha}(h) \middle| \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h)\right) \right\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} = \left\| (\nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi})^{-1} (\nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}) \left(\bar{\varphi}_{,\alpha}(h) \middle| \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h)\right) A_h^{-1} A_h \right\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \\ & \leq \left\| (\nabla \bar{\Psi})^{-1} \right\|_{L^\infty(\Omega_1; M^3)} \left\| A_h^{-1} \right\|_{L^\infty(\Omega_1; M^3)} \left\| \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi} \left(\bar{\varphi}_{,\alpha}(h) \middle| \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h)\right) A_h \right\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \\ & \leq c. \end{aligned}$$

On obtient que pour  $h$  assez petit

$$\|\nabla \bar{\varphi}(h)\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \leq c \quad (4.43)$$

et l'inégalité de Poincaré implique que  $\bar{\varphi}(h)$  est uniformément borné dans  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ . Ceci implique que pour une sous-suite encore notée  $h$  on a l'existence d'un  $\bar{\varphi}(0) \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  tel que

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi}(0), \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \quad (4.44)$$

par suite, il existe une sous-suite encore notée  $h$  tel que

$$\bar{\varphi}(h) \rightarrow \bar{\varphi}(0), \text{ dans } L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3) \quad (4.45)$$

D'autre part puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \|\bar{\varphi}_{,3}(h)\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} &\leq \left\| \left( \bar{\varphi}_{,\alpha}(h) \middle| \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h) \right) \right\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

ceci implique qu'on a

$$\bar{\varphi}_{,3}(0) = 0. \quad (4.46)$$

De plus, puisque  $\bar{\varphi}(h) \in \bar{V}^h$ , on a

$$\forall h > 0, \bar{\varphi}(h)(\Omega_1) \subset \{x_3 \geq 0\}. \quad (4.47)$$

Or, l'équation (4.45) implique que

$$\bar{\varphi}(h) \rightarrow \bar{\varphi}(0), \quad (4.48)$$

presque partout dans  $\Omega_1$ , ce qui implique que

$$\bar{\varphi}(0)(x) \in \{x_3 \geq 0\}, \quad (4.49)$$

pour presque tout  $x$  dans  $\Omega_1$ . Comme  $\bar{\varphi}(0) \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  avec  $p \geq 3$ , elle est donc continue et l'on a

$$\bar{\varphi}(0)(\Omega_1) \subset \{x_3 \geq 0\}. \quad (4.50)$$

Grâce à la continuité de l'opérateur trace on obtient ensuite que

$$\bar{\varphi}(0) \in \bar{V}^0. \quad (4.51)$$

D'autre part, en utilisant la deuxième estimation de (4.40), on a dans le cas  $\alpha < 1$ , grâce au lemme de Fatou et à la semi-continuité inférieure faible de  $\Phi$ , que

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(0)]| = 0, \quad (4.52)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . En effet pour  $\alpha < 1$  si

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c, \quad (4.53)$$

ceci implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3) e_3| dx = 0. \quad (4.54)$$

Or la semi continuité inférieure de  $\Phi$  et le lemme de Fatou nous donnent

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3) e_3| dx \\ &\geq \int_{\omega} \liminf_{h \rightarrow 0} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) d_0(x) dx \\ &\geq \int_{\omega} \Phi(\liminf_{h \rightarrow 0} |[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) d_0(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui implique grâce à (4.3) que

$$\liminf_{h \rightarrow 0} |[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]| = 0, \quad (4.55)$$

presque partout sur  $\omega$ . D'autre part, on sait que

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi}(0) \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3). \quad (4.56)$$

Le théorème de trace implique que pour une sous-suite

$$\bar{\varphi}(h)_{/x_3=0} \rightharpoonup \bar{\varphi}(0)_{/x_3=0} \text{ dans } W^{1-\frac{1}{p},p}(\omega, \mathbb{R}^3), \quad (4.57)$$

par suite

$$\bar{\varphi}(h)_{/x_3=0} \rightarrow \bar{\varphi}(0)_{/x_3=0} \text{ dans } L^p(\omega, \mathbb{R}^3), \quad (4.58)$$

ce qui implique que

$$\bar{\varphi}(h)_{/x_3=0} \rightarrow \bar{\varphi}(0)_{/x_3=0} \text{ presque partout sur } \omega. \quad (4.59)$$

En composant par le difféomorphisme  $\bar{\Psi}$  on obtient que

$$\bar{\Psi}(\bar{\varphi}(h))_{/x_3=0} \rightarrow \bar{\Psi}(\bar{\varphi}(0))_{/x_3=0}, \quad (4.60)$$

presque partout sur  $\omega$ . Ceci avec (4.55) impliquent que

$$\bar{\Psi}(\bar{\varphi}(0))_{/x_3=0} = \bar{\Psi}(x_1, x_2, 0), \quad (4.61)$$

presque partout sur  $\omega$  et donc on a

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(0)]| = 0, \quad (4.62)$$

presque partout sur  $\omega$ , qui s'écrit aussi

$$\bar{\Psi}(\bar{\varphi}(0)(x_1, x_2, 0)) = \bar{\Psi}(x_1, x_2, 0), \quad (4.63)$$

presque partout sur  $\omega$ . L'injectivité de  $\bar{\Psi}$  implique que

$$\bar{\varphi}(0)(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0), \quad (4.64)$$

presque partout sur  $\omega$ . Or, la continuité de  $\bar{\varphi}(0)$  induite par son appartenance à  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  avec  $p > 3$ , implique que

$$\bar{\varphi}(0)(x_1, x_2, 0) = (x_1, x_2, 0), \quad (4.65)$$

sur tout  $\omega$ , et comme  $\bar{\varphi}_{,3}(0) = 0$ , on obtient que

$$\bar{\varphi}(0)(x) = x \text{ dans } \Omega_1. \quad (4.66)$$

On a alors dans le cas  $\alpha < 1$

$$\bar{\varphi}(0) \in \bar{V}_M^* = \{\bar{\varphi} \in \bar{V}^0, \bar{\varphi}_{,3} = 0 \text{ et } |[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]| = 0 \text{ presque partout sur } \Omega_1\} = \{Id\}, \quad (4.67)$$

où  $Id$  représente l'identité de  $\Omega_1$ . Cet ensemble est réduit à un seul élément.

□

On pose

$$\bar{V}_M = \{\bar{\varphi} \in \bar{V}^0, \bar{\varphi}_{,3} = 0\}.$$

On peut maintenant établir la  $\Gamma$ -limite de notre énergie qui est donnée par le théorème suivant

**Théorème 4.3.1.** *La suite d'énergies  $\bar{e}^*(h)$  est  $\Gamma$ -convergente pour la topologie forte de  $L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  quand  $h \rightarrow 0$ . On pose pour  $\alpha \geq 1$*

$$\bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} QW_0\left(x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x))\right) d_0(x) dx \\ + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) d_0(x) dx \\ + \infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } \bar{\varphi} \in \bar{V}_M, \\ \text{sinon,} \end{array}$$

et pour  $\alpha < 1$

$$\bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} QW_0(x, I(x), (e_1|e_2)) d_0(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} = I, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $d_0(x) = \det A(x)$ , où  $A(x) = \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, 0) = (a_1(x)|a_2(x)|a_3(x))$  et où  $\delta : ]1, +\infty[ \rightarrow \{0, 1\}$  vérifie

$$\delta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1, \\ 0 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Alors  $\bar{e}^*(0)$  est la  $\Gamma$ -limite de  $\bar{e}^*(h)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ .

La preuve du théorème découle des deux propositions suivantes, où on trouve dans la première la borne inférieure de la  $\Gamma$ -limite et dans la deuxième sa borne supérieure.

**Proposition 4.3.2.** On a

$$\bar{e}^*(0) \leq \Gamma - \liminf \bar{e}^*(h). \quad (4.68)$$

**Preuve**

Pour obtenir ceci, il faut montrer que pour tout  $\bar{\varphi}^0 \in L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  et  $\bar{\varphi}(h) \in L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\bar{\varphi}(h) \rightarrow \bar{\varphi}^0 \text{ dans } L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \quad (4.69)$$

on a

$$\liminf \bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \geq \bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}^0). \quad (4.70)$$

Tout d'abord, si  $\bar{\varphi}^0$  n'est pas dans  $\bar{V}_M$  pour le cas  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0 \neq I$  pour le cas  $\alpha < 1$ , en raisonnant par l'absurde on trouve que

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) = +\infty. \quad (4.71)$$

En effet, si  $\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) < +\infty$ , ceci implique que pour une sous-suite encore notée  $h$ , il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  tel que

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c. \quad (4.72)$$

Par suite, le lemme 4.3.1 implique que  $\bar{\varphi}^0 \in \bar{V}_M$  pour le cas  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0 = I$  pour le cas  $\alpha < 1$ . Donc pour  $\bar{\varphi}^0$  dans  $L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3) \setminus \bar{V}_M$ , pour le cas  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0$  dans  $L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3) \setminus \{I\}$  pour le cas  $\alpha < 1$ , on a bien

$$\liminf \bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) = +\infty \geq \bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}^0) = +\infty. \quad (4.73)$$

On considère maintenant  $\bar{\varphi}^0 \in \bar{V}_M$  pour  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0 = I$  pour  $\alpha < 1$ , ceci implique que pour  $h$  assez petit et modulo l'extraction d'une sous-suite,

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) < +\infty. \quad (4.74)$$

Donc  $\bar{\varphi}(h) \in \bar{V}^h$  et

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi}^0 \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3). \quad (4.75)$$

On se propose de montrer que

$$\liminf \bar{e}(h)(\bar{\varphi}(h)) \geq \bar{e}(0)(\bar{\varphi}^0), \quad (4.76)$$

où

$$\bar{e}(0)(\bar{\varphi}) = \int_{\omega} QW_0(x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x)))d_0(x) dx + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|)d_0(x) dx, \quad (4.77)$$

pour  $\alpha \geq 1$  et

$$\bar{e}(0)(\bar{\varphi}) = \int_{\omega} QW_0(x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x)))d_0(x) dx, \quad (4.78)$$

pour  $\alpha < 1$ . On a

$$\begin{aligned} \bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) &= \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h) (\bar{\varphi}_{,1}(h)|\bar{\varphi}_{,2}(h)|\frac{1}{h}\bar{\varphi}_{,3}(h)) A_h \right] d_h dx \\ &= \int_{\Omega_1} \left\{ W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h) (\bar{\varphi}_{,1}(h)|\bar{\varphi}_{,2}(h)|\frac{1}{h}\bar{\varphi}_{,3}(h)) A_0 \right] + R(x, h, \bar{\varphi}(h)) \right\} d_h dx, \end{aligned} \quad (4.79)$$

où

$$\begin{aligned} R(x, h, \bar{\varphi}(h)) &= W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)(x) (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x)|\frac{1}{h}\bar{\varphi}_{,3}(h)(x)) A_h(x) \right] \\ &\quad - W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)(x) (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x)|\frac{1}{h}\bar{\varphi}_{,3}(h)(x)) A_0(x) \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

et on a, puisque

$$A_h \rightarrow A_0 \text{ dans } C^0(\Omega_1) \quad (4.81)$$

(voir chapitre préliminaire) et grâce à la troisième propriété de  $W$  dans (4.1), que

$$\int_{\Omega_1} R(x, h, \bar{\varphi}(h))d_h(x) dx \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (4.82)$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned}\bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) &\geq \int_{\Omega_1} \left\{ W_0(x, \bar{\varphi}(h)(x), (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x))) + R(x, h, \bar{\varphi}(h)) \right\} d_h(x) dx \\ &\geq \int_{\Omega_1} \left\{ QW_0(x, \bar{\varphi}(h)(x), (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x))) + R(x, h, \bar{\varphi}(h)) \right\} d_h(x) dx,\end{aligned}$$

par définition de  $W_0$  et de l'enveloppe quasiconvexe. On passe à la  $\lim \inf$  lorsque  $h$  tend vers zéro, on obtient grâce à (4.82)

$$\lim \inf \bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) \geq \lim \inf \int_{\Omega_1} QW_0(x, \bar{\varphi}(h)(x), (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x))) d_h(x) dx. \quad (4.83)$$

La convergence de  $d_h$  vers  $d_0$  dans  $C^0(\Omega_1)$  (voir chapitre préliminaire) implique que

$$\begin{aligned}\lim \inf \int_{\Omega_1} QW_0(x, \bar{\varphi}(h)(x), (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x))) d_h(x) dx \\ = \lim \inf \int_{\Omega_1} QW_0(x, \bar{\varphi}(h)(x), (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x)|\bar{\varphi}_{,2}(h)(x))) d_0(x) dx.\end{aligned} \quad (4.84)$$

On définit la fonction  $G : W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$G(\bar{\varphi}) = \int_{\Omega_1} QW_0(x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x))) d_0(x) dx.$$

Cette fonction est semicontinue inférieure pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  grâce à la quasiconvexité de  $QW_0$  et au fait que

$$0 \leq QW_0(x, y, \bar{F}) \leq c(1 + |\bar{F}|^p), \quad (4.85)$$

voir [2], [22] et [41]. Et puisque

$$\bar{\varphi}(h) \rightharpoonup \bar{\varphi}_0 \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3), \quad (4.86)$$

alors

$$\begin{aligned}\lim \inf \bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) &\geq \lim \inf G(\bar{\varphi}(h)) \\ &\geq G(\bar{\varphi}^0) \\ &= \int_{\omega} QW_0(x, \bar{\varphi}^0(x), (\bar{\varphi}_{,1}^0(x)|\bar{\varphi}_{,2}^0(x))) d_0(x) dx.\end{aligned} \quad (4.87)$$

On passe maintenant au terme d'énergie d'interface. On a

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) = h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) d_0(x)dx. \quad (4.88)$$

3 cas se présentent

La positivité du terme d'énergie d'interface implique que les cas  $\alpha < 1$  et  $\alpha > 1$  sont triviaux.

Cas :  $\alpha = 1$

On a

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) = \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) d_0(x)dx. \quad (4.89)$$

La semi continuité inférieure de  $\Phi$  et le lemme de Fatou impliquent que

$$\begin{aligned} \liminf \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) &\geq \int_{\omega} \liminf_{h \rightarrow 0} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) d_0(x)dx \\ &\geq \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x)dx \\ &= \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x)dx. \end{aligned}$$

On obtient donc que pour  $\alpha \geq 1$

$$\liminf \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) \geq \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x)dx, \quad (4.90)$$

et pour  $\alpha < 1$

$$\liminf \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) \geq 0. \quad (4.91)$$

Finalement, puisque les énergies  $\bar{I}(h)$  et  $\bar{E}(h)$  sont positives, on a grâce à (4.87)

$$\begin{aligned} \liminf \bar{e}(h)(\bar{\varphi}(h)) &\geq \liminf \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) + \liminf \bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) \\ &\geq \bar{e}(0)(\bar{\varphi}^0). \end{aligned}$$

Ceci et (4.73) impliquent que

$$\liminf \bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \geq \bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}^0), \quad (4.92)$$

ce qui implique que

$$\Gamma - \liminf \bar{e}^*(h) \geq \bar{e}^*(0). \quad (4.93)$$



□

On passe au calcul de la borne supérieure de la  $\Gamma$ -limite. On aura besoin du lemme suivant (voir [38])

**Lemme 4.3.2.** *Soient  $X \hookrightarrow Y$  deux espaces de Banach avec  $X$  réflexif où l'injection  $X \subset Y$  est compacte. Soit une fonction  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\forall v \in X, G(v) \geq g(\|v\|_X)$  où  $g$  vérifie  $g(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Soit  $G^*$  la fonction définie par  $G^*(v) = G(v)$  si  $v \in X$ ,  $G^*(v) = +\infty$  sinon. Soit  $\Gamma - G$  l'enveloppe semi-continue inférieurement de  $G$  pour la topologie faible de  $X$  et  $\Gamma - G^*$  l'enveloppe semi-continue inférieurement de  $G^*$  pour la topologie forte de  $Y$ . Alors*

$$\Gamma - G^* = (\Gamma - G)^* \quad (4.94)$$

**Proposition 4.3.3.** *On a*

$$\Gamma - \limsup \bar{e}^*(h) \leq \bar{e}^*(0). \quad (4.95)$$

**Preuve**

Pour montrer ceci, il suffit de trouver pour tout  $\bar{\varphi}^0 \in L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  une suite de fonctions-tests  $\bar{\varphi}(h)$  convergente vers  $\bar{\varphi}^0$  vérifiant

$$\lim e^*(h)(\xi(h)) \leq e^*(0)(\bar{\varphi}^0). \quad (4.96)$$

Soit  $\bar{\varphi}^0 \in L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ . On pose

$$\bar{\varphi}(h)(x_1, x_2, x_3) = \bar{\varphi}^0(x_1, x_2) + hx_3(e_3 + \xi(x_1, x_2)), \quad (4.97)$$

avec  $\xi \in W_0^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$  et  $e_3$  le troisième vecteur de la base euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . On a

$$\bar{\varphi}(h) \rightarrow \bar{\varphi}^0 \text{ fortement dans } W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3). \quad (4.98)$$

Si  $\bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}^0) = +\infty$ , c'est-à-dire si  $\bar{\varphi}^0$  n'est pas dans  $\bar{V}_M$  pour  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0 \neq I$  pour  $\alpha < 1$ , ceci implique que

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) = +\infty, \text{ pour } h \text{ assez petit.} \quad (4.99)$$

En effet, supposons que  $\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \leq c < +\infty$ , ceci implique d'après le lemme 4.3.1 que  $\bar{\varphi}^0 \in \bar{V}_M$  pour  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0 = I$  pour  $\alpha < 1$ , ce qui est absurde. Par conséquent, lorsque  $\bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}^0) = +\infty$  on a bien

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}(h)) \rightarrow \bar{e}^*(0)(\bar{\varphi}^0).$$

Considérons maintenant  $\bar{\varphi}^0 \in \bar{V}_M$  pour  $\alpha \geq 1$  et  $\bar{\varphi}^0 = I$  pour  $\alpha < 1$  et regardons ce qui se passe avec  $\bar{\varphi}(h)$ . On a  $\bar{\varphi}(h) \in W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ . Pour tout  $x \in \partial\omega \times (0, 1)$ ,  $\bar{\varphi}^0(x) = (x_1, x_2, 0)$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(h)(x) &= (x_1, x_2, 0) + hx_3 e_3, \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1) \\ &= (x_1, x_2, hx_3), \text{ sur } \partial\omega \times (0, 1). \end{aligned}$$

On regarde d'abord le terme d'énergie d'interface. On a

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]| = |[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|, \quad (4.100)$$

par suite trois cas se présentent

1er cas :  $\alpha < 1$

On a

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]| = |[\bar{\Psi} \circ I]| = 0, \quad (4.101)$$

ce qui implique que

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]| = 0 \quad (4.102)$$

et par suite que

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) = 0. \quad (4.103)$$

2ème cas :  $\alpha = 1$

On a

$$\begin{aligned} \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) &= \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3)e_3| dx \\ &= \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3)e_3| dx \\ &\rightarrow \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x) dx \\ &= \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x) dx. \end{aligned}$$

3ème cas :  $\alpha > 1$

On a

$$\begin{aligned} \bar{I}(h)(\bar{\varphi}(h)) &= h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3)e_3| dx \\ &= h^{\alpha-1} \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) |\mathbf{cof} \nabla \bar{\Psi}(x_1, x_2, hx_3)e_3| dx \\ &\rightarrow 0 \\ &= \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x) dx. \end{aligned}$$

On passe au terme d'énergie élastique. On a

$$\begin{aligned} \bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) &= \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)(x) (\bar{\varphi}_{,1}(h)(x) | \bar{\varphi}_{,2}(h)(x) | \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{,3}(h)(x)) A_h(x) \right] d_h(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)(x) (\bar{\varphi}_{,\alpha}^0(x) + hx_3 \xi_{,\alpha}(x) | \xi(x) + e_3) A_h(x) \right] d_h(x) dx, \quad (4.104) \end{aligned}$$

où on a utilisé la notation  $(x_\alpha | x_3) = (x_1 | x_2 | x_3)$ . La continuité de  $W$ , ses propriétés de croissance et le théorème de convergence dominée impliquent que

$$\bar{E}(h)(\bar{\varphi}(h)) \rightarrow \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0(x) (\bar{\varphi}_{,\alpha}^0(x) | \xi(x) + e_3) A_0(x) \right] d_0(x) dx. \quad (4.105)$$

Parsuite

$$\begin{aligned} \bar{e}(h)(\bar{\varphi}(h)) &\rightarrow \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0(x) (\bar{\varphi}_{,\alpha}^0(x) | \xi(x) + e_3) A_0(x) \right] d_0(x) dx \\ &\quad + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x) dx, \quad (4.106) \end{aligned}$$

pour  $\alpha \geq 1$  et

$$\bar{e}(h)(\bar{\varphi}(h)) \rightarrow \int_{\Omega_1} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0(x) (\bar{\varphi}_{,\alpha}^0(x) | \xi(x) + e_3) A_0(x) \right] d_0(x) dx, \quad (4.107)$$

pour  $\alpha < 1$ . La fonction  $h : \omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$h(x, z) = W \left[ \nabla \bar{\Psi}(\bar{\varphi}^0(x)) (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x) | z + e_3) A_0(x) \right] \quad (4.108)$$

est une fonction de Carathéodory. Par conséquent, le lemme de sélection mesurable, voir [30], implique qu'il existe  $\xi_0$  mesurable tels que

$$W_0(x, \bar{\varphi}^0(x), (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x))) = W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0(x) (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x) | \xi_0(x) + e_3) A_0(x) \right] \quad (4.109)$$

et grâce à (4.1), on obtient que  $\xi_0 \in L^p(\omega, \mathbb{R}^3)$ . La densité de  $W_0^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$  dans  $L^p(\omega, \mathbb{R}^3)$  implique l'existence de  $\xi_0^h \in W_0^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$  vérifiant  $\xi_0^h \rightarrow \xi_0$  dans  $W^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . En choisissant

$$\bar{\varphi}(h) = \bar{\varphi}^0 + hx_3\xi_0^h + hx_3e_3, \quad (4.110)$$

il nous restera seulement à satisfaire la condition de non interpénétration. Pour cela on projette  $\bar{\varphi}(h)$  sur le demi-espace  $\{x_3 \geq 0\}$  en posant

$$\bar{\varphi}_p(h) = (\bar{\varphi}_1(h), \bar{\varphi}_2(h), [\bar{\varphi}_3(h)]_+), \quad (4.111)$$

où  $[r]_+ = \frac{r + |r|}{2}$ . On remarque que  $\bar{\varphi}_p(h) \in \bar{V}^h$ . Puisqu'on a

$$|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}(h)]| = |[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]| \quad (4.112)$$

et que  $[\bar{\varphi}_3^0]_+ = \bar{\varphi}_3^0$ , alors on a

$$\bar{I}(h)(\bar{\varphi}_p(h)) \rightarrow \bar{I}(0)(\bar{\varphi}^0), \quad (4.113)$$

où

$$\bar{I}(0)(\bar{\varphi}) = \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) d_0(x) dx \quad \text{si } \alpha \geq 1 \quad (4.114)$$

et

$$\bar{I}(0)(\bar{\varphi}) = 0 \quad \text{si } \alpha < 1. \quad (4.115)$$

On note que

$$\left( (\bar{\varphi}_p(h))_{,\alpha} \middle| \frac{1}{h} (\bar{\varphi}_p(h))_{,3} \right) \rightarrow \left( \bar{\varphi}_{,\alpha}^0 \middle| \xi_0 \right) \quad \text{dans } L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3). \quad (4.116)$$

La réciproque partielle du théorème de Lebesgue implique que pour une sous-suite encore notée  $h$  on a

$$\left( (\bar{\varphi}_p(h))_{,\alpha} \middle| \frac{1}{h} (\bar{\varphi}_p(h))_{,3} \right) \rightarrow \left( \bar{\varphi}_{,\alpha}^0 \middle| \xi_0 \right) \quad (4.117)$$

presque partout dans  $\Omega_1$ . De plus, il existe une fonction  $g \in L^p(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  tel que

$$\left| \left( (\bar{\varphi}_p(h))_{,\alpha} \middle| \frac{1}{h} (\bar{\varphi}_p(h))_{,3} \right) \right| \leq g. \quad (4.118)$$

presque partout dans  $\Omega_1$ . La continuité de  $W$  et l'estimation (4.117) impliquent que

$$\begin{aligned} W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \varphi_p(\bar{h})(x) (\bar{\varphi}_{p,1}(h)(x) | \bar{\varphi}_{p,2}(h)(x) | \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{p,3}(h)(x)) A_h(x) \right] \\ \rightarrow W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0(x) (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x) | \xi_0(x) + e_3) A_0(x) \right] \\ = W_0(x, \bar{\varphi}^0(x), (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x))) \quad (4.119) \end{aligned}$$

presque partout dans  $\Omega_1$ . D'autre part, les propriétés de  $W$  impliquent que

$$W \left[ \nabla \bar{\Psi} \circ \varphi_p(\bar{h})(x) (\bar{\varphi}_{p,1}(\bar{h})(x) | \bar{\varphi}_{p,2}(\bar{h})(x) | \frac{1}{h} \bar{\varphi}_{p,3}(\bar{h})(x)) A_h(x) \right] \leq c \left| (\bar{\varphi}_p(\bar{h}))_{,\alpha} \left| \frac{1}{h} (\bar{\varphi}_p(\bar{h}))_{,3} \right|^p \right. \\ \left. \leq |g|^p \right. \quad (4.120)$$

presque partout dans  $\Omega_1$ . En utilisant (4.119) et grâce au théorème de convergence dominée on obtient que

$$\bar{E}(h)(\varphi_p(h)) \rightarrow \int_{\omega} W_0(x, \bar{\varphi}^0(x), (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x))) d_0(x) dx. \quad (4.121)$$

Ceci avec (4.113) implique que

$$\bar{e}(h)(\bar{\varphi}_p(h)) \rightarrow \int_{\omega} W_0(x, \bar{\varphi}^0(x), (\bar{\varphi}_{,1}^0(x) | \bar{\varphi}_{,2}^0(x))) d_0(x) dx + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}^0]|) d_0(x) dx, \quad (4.122)$$

pour  $\alpha \geq 1$  et

$$\bar{e}(h)(\bar{\varphi}_p(h)) \rightarrow \int_{\omega} W_0(x, x, (e_1 | e_2)) d_0(x) dx, \quad (4.123)$$

pour  $\alpha < 1$ . On pose

$$G^*(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} W_0(x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x) | \bar{\varphi}_{,2}(x))) d_0(x) dx \\ + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) d_0(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} \in \bar{V}_M, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour  $\alpha \geq 1$  et

$$G^*(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} W_0(x, x, (e_1 | e_2)) d_0(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} = I, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour  $\alpha < 1$ . On vient de voir que

$$\bar{e}^*(h)(\bar{\varphi}_p(h)) \rightarrow G^*(\bar{\varphi}^0), \quad (4.124)$$

ce qui implique que

$$\Gamma - \limsup \bar{e}^*(h) \leq G^* \quad (4.125)$$

et comme la  $\Gamma - \limsup$  d'une fonction est faiblement semicontinue inférieure et que grâce au lemme 5.4.2, l'enveloppe sci de  $G^*$  est notre  $\bar{e}^*(0)$ , on appliquant l'enveloppe sci des deux cotés on obtient

$$\Gamma - \limsup \bar{e}^*(h) \leq \bar{e}^*(0), \quad (4.126)$$

ce qui achève la démonstration.

□

**Preuve du théorème 4.3.1**

On obtient la preuve du théorème en appliquant directement les deux propositions précédentes.

□

**Remarque 14.** *On remarque que, contrairement au problème de minimisation de l'énergie  $\bar{e}(h)$  où l'on n'est pas assuré de l'existence de solutions, celui de l'énergie limite admet toujours une solution grâce à la semi continuité inférieure faible du terme d'énergie élastique due à la quasi-convexification et à sa coercivité.*

On obtient comme corollaire du théorème (4.3.1), un résultat sur les valeurs d'adhérence de la suite minimisante diagonale  $\bar{\varphi}(h)$ .

**Corollaire 9.** *La suite minimisante diagonale  $\bar{\varphi}(h)$  de  $\bar{e}(h)$  est bornée dans  $\bar{V}^h$  et ses points limites pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  sont des minimiseurs de l'énergie  $\bar{e}(0)$  définie par*

$$\bar{e}(0)(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} QW_0 \left( x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x)) \right) \det A(x) dx \\ + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi (|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) d_0(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} \in \bar{V}_M \text{ et } \alpha \geq 1, \\ \int_{\omega} QW_0 \left( x, I(x), (e_1|e_2) \right) \det A(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} = I \text{ et } \alpha < 1. \end{cases}$$

**Preuve**

La démonstration est analogue à celle du chapitre précédent.

□

## 4.4 Retour à la configuration initiale

Considérons une autre carte  $\psi'$  de  $\omega'$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\tilde{S}$ . Travaillant avec cette autre carte, nous obtenons les mêmes résultats de convergence que précédemment mais cette fois à travers un autre difféomorphisme  $\Psi'$ . Effectuons donc le changement de variables initiale inverse, afin d'avoir l'expression de l'énergie limite dans la configuration de référence initiale sans dépendance par rapport à la carte choisie. On considère, comme

dans [39], pour tout vecteur unitaire  $e$  de  $S^2$ , un ouvert borné  $O_e \subset e^\perp$  et on note par  $\pi_e$  la projection orthogonale sur cet ouvert. On prolonge toute fonction  $\chi \in W_0^{1,\infty}(O_e, \mathbb{R}^3)$  en posant

$$\chi_e(y) = \chi(\pi_e(y)) \quad (4.127)$$

et on définit pour tout  $y \in O_e$ ,

$$D_{e^\perp} \chi(y) = \nabla \chi_e(y). \quad (4.128)$$

En associant à chaque  $\bar{\varphi}$  dans  $V_M$ , pour  $\alpha \geq 1$ , et égal à l'identité, pour  $\alpha < 1$ , d'abord un  $\varphi$  à valeurs dans  $\bar{\Psi}(\bar{\varphi}(\omega))$ , en posant

$$\varphi(x) = \bar{\Psi}(\bar{\varphi}(x)), \quad (4.129)$$

ensuite un  $\tilde{\varphi}$  définit sur  $\tilde{S}$ , en posant

$$\tilde{x} = \bar{\Psi}(x) \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x), \quad (4.130)$$

on obtient le théorème suivant

**Théorème 4.4.1.** *Toute déformation  $\tilde{\varphi}$  associée à un minimiseur  $\bar{\varphi}$  de l'énergie  $\bar{e}(0)$ , minimise l'énergie  $\tilde{e}(0)$  définie par*

$$\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\tilde{S}} \tilde{W} \left( a_3(\tilde{x}), \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \right) d\tilde{x} + \delta(\alpha) \int_{\tilde{S}} \Phi(|[\tilde{\varphi}]|) d\tilde{x} & \text{si } \tilde{\varphi} \in \tilde{V} \text{ et } \alpha \geq 1, \\ \int_{\tilde{S}} \tilde{W} \left( a_3(\tilde{x}), \tilde{I} \right) d\tilde{x} & \text{si } \bar{\varphi} = \tilde{I} \text{ et } \alpha < 1, \end{cases}$$

où

$$|[\tilde{\varphi}]| = |\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x}|, \quad (4.131)$$

$\tilde{I}$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\tilde{V} = \{ \tilde{\varphi} \in W^{1,p}(\tilde{S}, \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{S}) \subset S_{ub}^c \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{x} \text{ sur } \partial\tilde{S} \}, \quad (4.132)$$

$a_3(\tilde{x})$  est le vecteur unitaire normal à  $\tilde{S}$  passant par  $\tilde{x}$  et  $\tilde{W} : S^2 \times M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est la densité d'énergie élastique membranaire définie par

$$\tilde{W}(e, F) = \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_e, \mathbb{R}^3)} \left[ \frac{1}{\text{meas } O_e} \int_{O_e} \left[ \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W(F + z \otimes e + D_{e^\perp} \chi(y)) \right] dy \right]. \quad (4.133)$$

**Preuve**

On rappelle que par le corollaire (10),  $\bar{\varphi}$  minimise l'énergie

$$\bar{e}(0)(\bar{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\omega} QW_0 \left( x, \bar{\varphi}(x), (\bar{\varphi}_{,1}(x)|\bar{\varphi}_{,2}(x)) \right) \det A(x) dx \\ + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\bar{\Psi} \circ \bar{\varphi}]|) d_0(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} \in \bar{V}_M \text{ et } \alpha \geq 1, \\ \int_{\omega} QW_0 \left( x, I(x), (e_1|e_2) \right) \det A(x) dx & \text{si } \bar{\varphi} = I \text{ et } \alpha < 1. \end{cases}$$

On effectue tout d'abord un changement de variables pour revenir à l'espace d'arrivée initiale en posant pour  $x \in \omega$ ,

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) \text{ et } e(0)(\varphi) = \bar{e}(0)(\bar{\varphi}). \quad (4.134)$$

On obtient

$$e(0)(\varphi) = \begin{cases} \int_{\omega} QW_0 \left( x, \bar{\Psi}^{-1}(\varphi(x)), \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\varphi(x))(\varphi_{,1}(x)|\varphi_{,2}(x)) \right) \det A(x) dx \\ + \delta(\alpha) \int_{\omega} \Phi(|[\varphi]|) d_0(x) dx & \text{si } \varphi \in V \text{ et } \alpha \geq 1, \\ \int_{\omega} QW_0 \left( x, \bar{\Psi}^{-1}(x), \nabla \bar{\Psi}^{-1}(x)(\bar{\Psi}_{,1}(x)|\bar{\Psi}_{,2}(x)) \right) \det A(x) dx & \text{si } \varphi = \bar{\Psi} \text{ et } \alpha < 1, \end{cases}$$

avec

$$V = \{ \varphi \in W^{1,p}(\omega, \mathbb{R}^3), \varphi(\omega) \subset \bar{S}_u^c \text{ et } \varphi(x) = \bar{\Psi}(x) \text{ sur } \partial\omega \} \quad (4.135)$$

et

$$|[\varphi]| = |\varphi(x_1, x_2, 0) - \bar{\Psi}(x_1, x_2, 0)|. \quad (4.136)$$

Ensuite on effectue un deuxième changement de variables pour revenir au film courbé en posant pour  $x \in \omega$ ,

$$\tilde{x} = \bar{\Psi}(x) \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x). \quad (4.137)$$

En posant

$$\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}) = e(0)(\varphi), \quad (4.138)$$

on a

$$\tilde{e}(0)(\tilde{\varphi}) = \begin{cases} \int_{\tilde{S}} QW_0 \left( \bar{\Psi}^{-1}, \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}), \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}) \nabla \tilde{\varphi} (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1} | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}) \right) d\tilde{x} \\ + \delta(\alpha) \int_{\tilde{S}} \Phi(|[\tilde{\varphi}]|) d\tilde{x} & \text{si } \tilde{\varphi} \in \tilde{V} \text{ et } \alpha \geq 1, \\ \int_{\tilde{S}} QW_0 \left( \bar{\Psi}^{-1}, \bar{\Psi}^{-1}, \nabla \bar{\Psi}^{-1} (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1} | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}) \right) d\tilde{x} & \text{si } \tilde{\varphi} = \tilde{I} \text{ et } \alpha < 1, \end{cases}$$



avec

$$\tilde{V} = \{\tilde{\varphi} \in W^{1,p}(\tilde{S}, \mathbb{R}^3), \tilde{\varphi}(\tilde{S}) \subset \overline{S_u^c} \text{ et } \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{x} \text{ sur } \partial\tilde{S}\} \quad (4.139)$$

et

$$|[\tilde{\varphi}]| = |\tilde{\varphi}(\tilde{x}) - \tilde{x}|. \quad (4.140)$$

Ensuite on utilise la représentation intégrale de l'enveloppe quasiconvexe de Dacorogna (voir [22]) qui dit que

$$QW_0(x_0, x_1, F) = \inf_{\bar{\chi} \in W_0^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^3)} \left\{ \frac{1}{\text{meas } O} \int_O W_0(x_0, x_1, F + \nabla \bar{\chi}(\bar{y})) d\bar{y} \right\}, \quad (4.141)$$

ce qui nous donne que

$$\begin{aligned} & QW_0\left(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}), \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})), \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}))\right) \\ &= \inf_{\bar{\chi} \in W_0^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^3)} \left\{ \frac{1}{\text{meas } O} \int_O W_0\left(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}), \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})), \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \right. \right. \\ & \left. \left. (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \bar{\chi}(\bar{y})\right) d\bar{y} \right\}. \end{aligned}$$

Or

$$W_0(x, y, \bar{F}) = \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W(\nabla \bar{\Psi}(y)(\bar{F}|z) A_0(x)), \quad (4.142)$$

ce qui nous donne que

$$\begin{aligned} & QW_0\left(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}), \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})), \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}))\right) \\ &= \inf_{\bar{\chi} \in W_0^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^3)} \left\{ \frac{1}{\text{meas } O} \int_O \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W\left(\nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) (\nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \right. \right. \\ & \left. \left. (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \bar{\chi}(\bar{y}) | z) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}))\right) d\bar{y} \right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} & \nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) \left( \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \bar{\chi}(\bar{y}) \Big| z \right) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) \\ &= \nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) \left( \nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) \Big| 0 \right) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) \\ &+ \nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) \left( \nabla \bar{\chi}(\bar{y}) \Big| 0 \right) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) \left( 0 \Big| z \right) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) \end{aligned}$$

et

$$\nabla \bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) (\nabla \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) | 0) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) = \nabla \tilde{\varphi}(\tilde{x}). \quad (4.143)$$

Comme la matrice  $\nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})))$  est inversible et indépendante de  $\bar{y}$  alors lorsque  $\bar{\chi}$  parcourt  $W_0^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^3)$ ,  $(\nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))))^{-1}\bar{\chi}$  va parcourir  $W_0^{1,\infty}(O; \mathbb{R}^3)$ , ce qui nous permet, en passant à l'infimum, de remplacer le terme  $\nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})))\nabla\bar{\chi}$  par  $\nabla\bar{\chi}$  seulement. De même, lorsque  $z$  parcourt  $\mathbb{R}^3$ ,  $\nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})))z$  va aussi parcourir  $\mathbb{R}^3$ , ce qui nous permet de garder seulement le  $z$  lorsqu'on passe à l'infimum sur  $\mathbb{R}^3$ . D'autre part on a

$$\begin{aligned} & \nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) (\nabla\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x})) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) + \nabla\bar{\chi}(\bar{y})|z) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) \\ &= \nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + (\nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})))\nabla\bar{\chi}(\bar{y})|0) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) + (0|\nabla\bar{\Psi}(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})))z) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})). \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables

$$y = D\psi(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}))\bar{y}, \quad (4.144)$$

on obtient que

$$(\nabla\bar{\chi}(\bar{y})|0) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) = D_{a_3(\tilde{x})^\perp} \chi(y) \quad (4.145)$$

et que  $\chi \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3(\tilde{x})}; \mathbb{R}^3)$ . En choisissant  $O = O_{a_3(\tilde{x})}$  et en remarquant que

$$(0|z) A_0(\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) = z \otimes a_3(\tilde{x}), \quad (4.146)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & QW_0 \left( \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}), \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x})), \nabla\bar{\Psi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) (\bar{\Psi}_{,1} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x}) | \bar{\Psi}_{,2} \circ \bar{\Psi}^{-1}(\tilde{x})) \right) \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3(\tilde{x})})} \left\{ \frac{1}{\text{meas}(O_{a_3(\tilde{x})})} \int_{O_{a_3(\tilde{x})}} \inf_{z \in \mathbb{R}^3} W \left( \nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + D_{a_3(\tilde{x})^\perp} \chi(y) + z \otimes a_3(\tilde{x}) \right) d\bar{y} \right\}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. □

**Remarque 15.** *On remarque que l'énergie limite obtenue ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel on écrit l'énergie, ce qui souligne le caractère intrinsèque du problème limite de minimisation.*



**Troisième partie**

**Matériaux ferromagnétiques**



# **Chapitre 5**

## **Films courbés minces ferromagnétiques**



# Chapitre 5

## Films courbés minces ferromagnétiques

### Résumé

Le comportement d'un film courbé mince ferromagnétique d'épaisseur  $h$  non soumis à un champ magnétique extérieur est décrit par une énergie dépendant de la magnétisation du film, contrainte à garder un module constant. L'énergie totale du film est composée d'une partie d'énergie magnétostatique induite et d'une partie d'énergie englobant l'énergie d'échange et l'énergie anisotrope, ayant comme densité une fonction  $W$ . La  $\Gamma$ -limite de l'énergie totale lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro est obtenue en considérant l'enveloppe quasiconvexe tangentielle de la densité d'énergie  $W$ .

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>142</b>
<b>5.2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>145</b>
<b>5.3</b>	<b>Comportement de l'énergie magnétostatique</b>	<b>148</b>
<b>5.4</b>	<b>Calcul de la <math>\Gamma</math>-limite</b>	<b>162</b>
<b>5.5</b>	<b>Retour à la configuration de référence initiale</b>	<b>174</b>
<b>5.6</b>	<b>Application à la version courbée du modèle de Gioia et James</b>	<b>178</b>
<b>5.7</b>	<b>Modèle avec champ magnétique extérieur</b>	<b>180</b>

---



## 5.1 Introduction

Le théorie du micromagnétisme, développée par L.D. Landau, E.M. Lifschitz [35] et W.F. Brown [12], décrit le comportement magnétique d'un corps ferromagnétique. Selon cette théorie, l'état d'un corps ferromagnétique est décrit par sa magnétisation  $m$ , qui est un champ de vecteur défini sur  $\mathbb{R}^3$  et nul en dehors du corps, représentant la densité volumique du moment magnétique macroscopique. Ceci signifie que  $m$  induit un champ magnétique  $H$  dans tout l'espace. Les états que l'on observe lorsqu'un corps ferromagnétique occupant un domaine  $\Omega$  est soumis à un champ magnétique extérieur  $H_e$  sont les minimiseurs d'une énergie  $E_e$  dépendant de la magnétisation  $m$  :

$$E_e(m) = \int_{\Omega} \{ \alpha |\nabla m|^2 + Q \varphi(m) + H_e \cdot m \} + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |H|^2. \quad (5.1)$$

Le premier terme composant l'énergie totale est le terme d'énergie d'échange,

$$E_{ech} = \int_{\Omega} \alpha |\nabla m|^2. \quad (5.2)$$

Ce terme pénalise les variations spatiales de la magnétisation  $m$  afin de représenter la tendance d'un specimen à révéler des régions de magnétisation uniforme (domaines magnétiques) séparés par des couches de transition très fines (parois). Le coefficient  $\alpha$  est une constante du matériau, strictement positive. Le deuxième terme intervenant dans l'énergie totale est le terme d'énergie anisotrope,

$$E_{an} = \int_{\Omega} Q \varphi(m). \quad (5.3)$$

Ce terme favorise des directions spécifiques de la magnétisation (les axes faciles) suivant lesquels on suppose que  $\varphi$  s'annule. On suppose par ailleurs que  $\varphi$  est une fonction positive et paire exhibant des symétries crystallographiques. En outre, la fonction  $\varphi$  est la restriction à  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3, |x| = 1\}$  d'une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$  strictement positive. En général,  $\varphi$  est supposée polynomiale en  $m$ . Le coefficient  $Q$  contrôle l'importance relative de l'énergie anisotrope par rapport à l'énergie magnétostatique. Cette dernière est de la forme

$$E_{mag} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |H|^2. \quad (5.4)$$

Elle représente l'énergie induite par la magnétisation  $m$ , où  $H = -\nabla u$  est le champ magnétique induit par  $m$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et  $u$  est un potentiel scalaire vérifiant l'équation magnétostatique (33)

$$\operatorname{div}(-\nabla u + m) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3.$$

Le dernier terme composant l'énergie totale est le terme d'énergie externe ou de Zeeman,

$$E_{ext} = \int_{\Omega} H_e \cdot m. \quad (5.5)$$

Ce terme est dû au champ magnétique extérieur dans lequel se trouve plongé le corps ferromagnétique. Pour plus de détails, voir A. De Simone [28]. À température constante la magnétisation  $m$  vérifie en outre une condition assurant que le matériau soit toujours saturé, de la forme

$$|m| = M \text{ sur } \Omega, \quad (5.6)$$

avec  $M$  une constante strictement positive, qu'on suppose ici égale à 1.

L'étude des films minces ferromagnétiques présente un grand intérêt puisqu'on trouve ce type de matériau dans divers secteurs de l'industrie. Citons à titre d'exemple les bandes audio et vidéo, lesquelles sont des rubans ferromagnétiques utilisés pour obtenir une haute densité lors de l'enregistrement audio ou vidéo.

Dans un premier temps, afin d'étudier ce type de films minces, quelques auteurs ont considéré des films très larges à épaisseur fixée (voir par exemple A. De Simone [28] et B. Dacorogna et I. Fonseca [23]). Ensuite, G. Gioia et R.D. James dans [33] ont étudié le comportement d'un film mince, avec un champ magnétique extérieur nul, lorsque son épaisseur tend vers zéro. Ces auteurs ont considéré un film mince d'épaisseur  $h$  ferromagnétique occupant un domaine  $\Omega_h$ . Ce film a une énergie par unité de volume dépendant de la magnétisation  $\bar{m}$ . Cette énergie se compose d'une partie d'énergie d'échange

$$E_{ech} = \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} \alpha |\nabla \bar{m}|^2, \quad (5.7)$$

d'une partie d'énergie anisotrope

$$E_{an} = \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} \varphi(\bar{m}), \quad (5.8)$$

où  $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction continue et paire (cette hypothèse est usuelle mais ils ne l'utilisent pas dans leur analyse), et un terme d'énergie magnétostatique

$$E_{mag} = \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} \frac{1}{2} \nabla \bar{u} \cdot \bar{m}, \quad (5.9)$$

où  $\bar{u}$  est un potentiel scalaire vérifiant l'équation magnétostatique (33) Enfin, ils supposent que la magnétisation vérifie la condition de saturation

$$|\bar{m}| = 1 \text{ sur } \Omega_h. \quad (5.10)$$

G. Gioia et R.D. James montrent que la magnétisation minimisant l'énergie totale du film mince converge quand  $h \rightarrow 0$  vers une magnétisation minimisant une certaine énergie limite. Cette énergie limite est locale, c'est-à-dire que l'équation magnétostatique (33) disparaît complètement du modèle limite. G. Gioia et R.D. James montrent aussi que la magnétisation limite est indépendante de la direction normale au film plan, c'est-à-dire que le modèle limite est bidimensionnel. Dans [4], R. Alicandro et C. Leone ont généralisé le travail de G. Gioia et R.D. James en considérant une densité d'énergie  $W$  plus générale, dépendant de la magnétisation et de son gradient, vérifiant des hypothèses de croissance et englobant les deux parties d'énergie d'échange et d'énergie anisotrope. Ils utilisent pour cela la notion de quasiconvexification tangentielle introduite par B. Dacorogna, I. Fonseca, J. Maly et K. Trivisa dans [24] pour trouver la relaxation d'une classe d'énergies où la déformation est contrainte à rester dans une  $C^1$ -variété de dimension  $q$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans ce travail, on utilise la  $\Gamma$ -convergence pour étudier le comportement de l'énergie d'un film courbé mince ferromagnétique et de ses minimiseurs lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro en se basant sur le modèle de R. Alicandro et C. Leone [4]. Après avoir posé le problème, on étudie le terme d'énergie magnétostatique en examinant le comportement du potentiel magnétostatique vérifiant l'équation (33). On rappelle ensuite les notions principales de la quasiconvexité tangentielle pour enfin passer au calcul de la  $\Gamma$ -limite.

## 5.2 Position du problème

Le comportement d'un film courbé mince d'épaisseur  $h$  ferromagnétique, occupant un domaine  $\tilde{\Omega}_h$  (pour plus de détails concernant la géométrie du domaine  $\tilde{\Omega}_h$  voir les chapitres précédents) est décrit par une énergie micromagnétique  $\tilde{e}_h$  dépendant de la magnétisation (ou aimantation)  $\tilde{m}_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  nulle en dehors de  $\tilde{\Omega}_h$ , qui représente la densité par unité de masse du moment magnétique. Cette énergie par unité de volume est de la forme

$$\tilde{e}_h(\tilde{m}_h) = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} \left[ W(\tilde{m}_h, \nabla \tilde{m}_h) + \frac{1}{2} \nabla \tilde{u}_h \cdot \tilde{m}_h \right] d\tilde{x}, \quad (5.11)$$

sous la contrainte de saturation

$$|\tilde{m}_h| = M_T \text{ sur tout } \tilde{\Omega}_h, \quad (5.12)$$

où  $W$  est une fonction continue vérifiant les hypothèses de croissance et de coercivité

$$\begin{cases} \exists c > 0, \exists p \in ]1, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall F \in M^3, |W(x, F)| \leq c(1 + |F|^p), \\ \exists \gamma > 0, \exists \beta \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall F \in M^3, W(x, F) \geq \gamma|F|^p - \beta, \\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \forall F, F' \in M^3, |W(x, F) - W(x, F')| \leq c(1 + |F|^{p-1} + |F'|^{p-1}) |F - F'|, \end{cases} \quad (5.13)$$

et  $\tilde{u}_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel scalaire pour le champ magnétique induit  $H_h = -\nabla \tilde{u}_h$  vérifiant l'équation magnétostatique (33)

$$\operatorname{div}(-\nabla \tilde{u}_h + \tilde{m}_h) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3,$$

qui s'écrit aussi

$$\operatorname{div} B_h = 0, \quad (5.14)$$

avec

$$B_h = H_h + \tilde{m}_h \text{ sur } \mathbb{R}^3. \quad (5.15)$$

La constante  $M_T$  représente la saturation magnétique à la température  $T$ . Comme on se place à température constante, on peut supposer que

$$M_T = 1 \quad (5.16)$$

sans perte de généralité. Dans le cas de Gioia et James on a

$$W(y, F) = \varphi(y) + \alpha|F|^2, \quad (5.17)$$

et l'on a  $p = 2$ .

Nous allons étudier le comportement de l'énergie  $\tilde{e}_h$  et de ses éventuels minimiseurs lorsque l'épaisseur du film courbé tend vers zéro. Pour cela on va utiliser, comme dans les chapitres précédents, la notion de  $\Gamma$ -convergence.

Avant de commencer l'étude du comportement de l'énergie lorsque  $h$  tend vers zéro, on effectue un changement de variables analogue à celui qu'on a effectué dans les chapitres précédents et qui nous permet de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur  $h$ . Dans la mesure où l'on considère un domaine  $\tilde{\Omega}_h$  qui a la même géométrie que celui du premier chapitre, il nous suffit de reprendre les mêmes notations concernant le difféomorphisme  $\Psi$  envoyant un domaine  $\Omega_h$  de surface moyenne plane sur  $\tilde{\Omega}_h$  ainsi que l'application  $z_h$  qui élargit l'épaisseur du film jusqu'à 1. Puisque le potentiel scalaire  $\tilde{u}_h$  est défini sur  $\mathbb{R}^3$  tout entier, avant d'effectuer le changement de variables usuel, on va supposer que la surface moyenne de  $\tilde{\Omega}_h$  est l'image d'un ouvert  $\omega \subset \mathbb{R}^2$  par un  $C^1$ -difféomorphisme  $\bar{\psi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui prolonge  $\psi$  à  $\mathbb{R}^2$ . Plus généralement, on suppose que  $\Psi$  est la restriction à  $\mathbb{R}^2 \times (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$  d'un  $C^1$ -difféomorphisme  $\bar{\Psi}$  de  $\mathbb{R}^3$ . On peut aussi supposer que  $\Psi$  est égal à l'identité en dehors d'un compact contenant  $\Omega_h$ . Dans toute la suite, par abus de notation, on conservera la notation  $\Psi$  pour désigner  $\bar{\Psi}$  et on suppose que  $\bar{\Psi}$  est égal à l'identité en dehors d'un compact contenant  $\Omega_h$ .

On définit donc, dans un premier temps, les fonctions  $m_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $u_h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en posant pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$  avec  $\tilde{x} = \Psi(x)$ ,

$$m_h(x) = \tilde{m}_h(\Psi(x)) \quad \text{et} \quad u_h(x) = \tilde{u}_h(\Psi(x)), \quad (5.18)$$

ceci implique que pour tout  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$  on a

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{m}_h(\tilde{x}) &= \nabla m_h(\Psi^{-1}(\tilde{x})) (\nabla \Psi^{-1}(\tilde{x})), \\ &= \nabla m_h(x) (\nabla \Psi^{-1}(\Psi(x))) \end{aligned}$$

et

$$\tilde{u}_{h,i}(\tilde{x}) = u_{h,j}(\Psi^{-1}(\tilde{x})) \Psi_{j,i}^{-1}(\tilde{x}), \quad (5.19)$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\nabla \tilde{u}_h(\tilde{x}) &= (\nabla \Psi^{-1}(\tilde{x}))^T \nabla u_h(\Psi^{-1}(\tilde{x})), \\ &= (\nabla \Psi^{-1}(\Psi(x)))^T \nabla u_h(x).\end{aligned}$$

La différence apparente entre ces deux formules est due au fait que  $u_h$  est scalaire, alors que  $m_h$  est vectoriel. En posant  $e^h(m_h) = \tilde{e}_h(\tilde{m}_h)$ , on obtient

$$e^h(m_h) = \frac{1}{h} \int_{\Omega_h} \left[ W(m_h, \nabla m_h (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi)) + \frac{1}{2} \left( (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi)^T \nabla u_h, m_h \right) \right] \det \nabla \Psi \, dx_h. \quad (5.20)$$

On pose ensuite, pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ ,

$$m(h)(x) = m_h(x_1, x_2, hx_3) \quad \text{et} \quad u(h)(x) = u_h(x_1, x_2, hx_3). \quad (5.21)$$

Ceci implique que

$$\nabla \tilde{m}_h(\tilde{x}) = (m(h)_{,1} | m(h)_{,2} | \frac{1}{h} m(h)_{,3}) A_h \quad (5.22)$$

et

$$\nabla \tilde{u}_h(\tilde{x}) = A_h^T (u(h)_{,1}, u(h)_{,2}, \frac{1}{h} u(h)_{,3}), \quad (5.23)$$

avec

$$A_h(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, hx_3). \quad (5.24)$$

Remarquons que

$$A_h(x) = \left( A(x_1, x_2) + hx_3 (a_{3,1} | a_{3,2} | 0) \right)^{-1}. \quad (5.25)$$

pour tout  $x \in \bar{\omega} \times [-1, 1]$  (mais pas nécessairement en dehors de cet ensemble). En posant  $e(h)(m(h)) = e^h(m_h)$ , on obtient

$$\begin{aligned}e(h)(m(h)) &= \int_{\Omega_1} \left[ W(m(h), (m(h)_{,1} | m(h)_{,2} | \frac{1}{h} m(h)_{,3}) A_h) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( A_h^T (u(h)_{,1}, u(h)_{,2}, \frac{1}{h} u(h)_{,3}), m(h) \right) \right] d_h \, dx, \quad (5.26)\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$d_h(x) = \det \nabla \Psi(x_1, x_2, hx_3). \quad (5.27)$$

D'autre part, les équations (5.22) et (5.23) s'écrivent aussi

$$\nabla \tilde{m}_h = \nabla m(h) I_h A_h \quad (5.28)$$

et

$$\nabla \tilde{u}_h = A_h^T I_h \nabla u(h), \quad (5.29)$$

avec  $I_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{m}_h &= \nabla \tilde{m}_h : I \\ &= (\nabla m(h) I_h A_h) : I \\ &= (\nabla m(h) I_h) : A_h^T \\ &= \nabla m(h) : (A_h^T I_h) \end{aligned}$$

où  $I$  désigne la matrice identité de  $M^3$  et  $A : B$  le produit scalaire matriciel défini par  $A : B = \operatorname{tr}(AB^T)$ . De même on a

$$\operatorname{div}(-\nabla \tilde{u}_h) = (\nabla(-A_h^T I_h \nabla u(h))) : (A_h^T I_h),$$

et donc l'équation magnétostatique s'écrit alors

$$\left( \nabla \left( -A_h^T(x) I_h \nabla u(h)(x) + m(h)(x) \right) \right) : (A_h^T(x) I_h) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3. \quad (5.30)$$

Enfin, la contrainte de saturation (5.12) devient

$$\forall x \in \Omega_1, |m(h)(x)| = 1. \quad (5.31)$$

### 5.3 Comportement de l'énergie magnétostatique

On va analyser le comportement asymptotique du terme d'énergie magnétostatique

$$E_{mag}(h)(m) = \int_{\Omega_1} \frac{1}{2} \left( A_h^T(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h} u_{,3}), m \right) d_h dx \quad (5.32)$$

lorsque l'épaisseur du film courbé tend vers zéro. Pour cela, étant donné  $m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mesurable avec  $m|_{\Omega_1} \in L^2(\Omega_1; S^2)$  et  $m = 0$  sur  $\Omega_1^c$ , on considère le problème de minimisation : trouver  $u(h, m) \in U$  tel que

$$I_m(h)(u(h, m)) = \inf_{v \in U} I_m(h)(v), \quad (5.33)$$

avec

$$I_m(h)(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h}v_{,3}) - m \right|^2 d_h dx \quad (5.34)$$

et

$$U = \left\{ v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \int_B v dx = 0 \right\}, \quad (5.35)$$

où  $B$  est une boule fixée de  $\mathbb{R}^3$  qu'on peut supposer égale à la boule unité. La condition  $\int_B v dx = 0$  exclut les translations triviales  $v \rightarrow v + c$ . On munit  $U$  du produit scalaire

$$(u, v)_{U,h} = \int_{\mathbb{R}^3} \left( A_h^T(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h}u_{,3}), A_h^T(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h}v_{,3}) \right) d_h dx, \quad (5.36)$$

où  $(x, y)$  désigne le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$ , qui fait de  $U$  un espace de Hilbert. En effet, on a la proposition suivante.

**Proposition 5.3.1.** *L'espace  $U = \left\{ v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3), \nabla v \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \int_B v dx = 0 \right\}$  muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{U,h} = \int_{\mathbb{R}^3} \left( A_h^T(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h}u_{,3}), A_h^T(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h}v_{,3}) \right) d_h dx, \quad (5.37)$$

*est un espace de Hilbert.*

**Preuve**

On vérifie aisément que  $(\cdot, \cdot)_{U,h}$  est un produit scalaire sur  $U$ . Considérons une suite de Cauchy  $(u_n)$  dans  $U$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $N \in \mathbb{N}^*$  tels que si  $n, m \geq N$  on a

$$\|u_n - u_m\|_{U,h} < \varepsilon, \quad (5.38)$$

avec  $\|u\|_{U,h} = \sqrt{(u, u)_{U,h}}$ . En d'autres termes, on a

$$\left\| A_h^T(u_{n,1} - u_{m,1}, u_{n,2} - u_{m,2}, \frac{1}{h}(u_{n,3} - u_{m,3})) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} < \varepsilon. \quad (5.39)$$

Or, comme on a supposé que  $\Psi$  était égale à l'identité en dehors d'un compact contenant  $\Omega_h$ , ceci implique que  $A_h^{-1}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}^3; M^3)$  par suite

$$\|\nabla u_n - \nabla u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} < \varepsilon. \quad (5.40)$$

Puisque l'espace  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  est complet et que la matrice  $A_h^T$  est supposée inversible, il existe donc un  $H \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tel que

$$\nabla u_n \rightarrow H, \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3). \quad (5.41)$$



Il nous reste à identifier cette fonction  $H$ . Pour cela on va utiliser la version  $L^p$  du lemme de Poincaré suivante (voir par exemple [11])

**Lemme 5.3.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné, régulier, simplement connexe et  $f_i \in L^p(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Supposons que*

$$f_{i,j} = f_{j,i} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \forall i, j = 1, \dots, N. \quad (5.42)$$

Alors il existe  $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$  solution du système

$$\varphi_{,i} = f_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.43)$$

On sait que (5.41) implique que pour toute boule ouverte  $B(0, N) \subset \mathbb{R}^3$  de rayon  $N$ ,  $N \geq 2$  on a

$$\nabla u_n \rightarrow H, \text{ dans } \mathcal{D}'(B(0, N); \mathbb{R}^3). \quad (5.44)$$

Comme  $\text{rot}(\nabla u_n) = 0$ , on en déduit que

$$\text{rot } H = 0 \text{ au sens de } \mathcal{D}'(B(0, N); \mathbb{R}^3). \quad (5.45)$$

On utilise alors le lemme de Poincaré qui nous donne pour tout  $N \geq 2$ , l'existence d'un  $u_{0,N} \in H^1(B(0, N))$  vérifiant

$$H = \nabla u_{0,N} \text{ dans } B(0, N). \quad (5.46)$$

Ensuite, pour tout  $N \geq 2$  on pose

$$\bar{u}_{0,N} = u_{0,N} - \frac{1}{\text{meas } B} \int_B u_{0,N} dx, \quad (5.47)$$

On a pour tout  $N \geq 2$ ,  $\bar{u}_{0,N} \in H^1(B(0, N))$  vérifiant

$$\nabla \bar{u}_{0,N} = H \quad (5.48)$$

et

$$\int_B \bar{u}_{0,N} dx = 0. \quad (5.49)$$

Vérifions que pour tout  $N \geq 2$  on a

$$\bar{u}_{0,N+1|B(0,N)} = \bar{u}_{0,N}. \quad (5.50)$$

En effet, on a

$$\nabla \bar{u}_{0,N+1} = H = \nabla \bar{u}_{0,N}, \quad (5.51)$$

presque partout sur  $B(0, N)$ . Ceci implique qu'il existe une constante  $c_N \in \mathbb{R}$  telle que

$$\bar{u}_{0,N+1} = \bar{u}_{0,N} + c_N \quad (5.52)$$

presque partout sur  $B(0, N)$ . Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \int_B \bar{u}_{0,N+1} dx &= 0 \\ &= \int_B (\bar{u}_{0,N} + c_N) dx \\ &= c_N \text{meas}(B), \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$c_N = 0. \quad (5.53)$$

On fait ensuite tendre  $N$  vers l'infini et l'on obtient l'existence d'un  $\bar{u}_0 \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3)$  tel que

$$H = \nabla \bar{u}_0. \quad (5.54)$$

En outre

$$\int_B \bar{u}_0 = 0 \quad (5.55)$$

et

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla \bar{u}_0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \quad (5.56)$$

ce qui conclut la démonstration.

□

Cette proposition nous permet d'avoir l'existence de solution pour le problème de minimisation (5.33). On a la proposition suivante.

**Proposition 5.3.2.** *Le problème de minimisation (5.33) admet une solution unique  $u(h, m) \in U$  vérifiant l'équation d'Euler-Lagrange*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( A_h^T(u(h, m)_{,1}, u(h, m)_{,2}, \frac{1}{h}u(h, m)_{,3}) - m, A_h^T(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h}v_{,3}) \right) d_h dx = 0, \forall v \in U. \quad (5.57)$$

**Preuve**

On obtient ceci grâce à la proposition 5.3.1 puisque le problème (5.33) s'écrit comme une projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

□

L'équation (5.57) est la forme faible de (5.30). En effet celle-ci implique que pour tout  $v \in U$  on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \nabla \left( -A_h^T(x) I_h \nabla u(h)(x) + m(h)(x) \right) : \left( A_h^T(x) I_h \right) v \right) d_h dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \left( A_h^T(x) I_h \nabla u(h)(x) - m(h)(x) \right), \left( A_h^T(x) I_h \right) \nabla v \right) d_h dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( A_h^T(u(h, m)_{,1}, u(h, m)_{,2}, \frac{1}{h} u(h, m)_{,3}) - m, A_h^T(v_{,1}, v_{,2}, \frac{1}{h} v_{,3}) \right) d_h dx. \end{aligned}$$

En posant  $v = u(h, m)$  dans (5.57) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(u(h, m)_{,1}, u(h, m)_{,2}, \frac{1}{h} u(h, m)_{,3}) \right|^2 d_h dx \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \left( A_h^T(u(h, m)_{,1}, u(h, m)_{,2}, \frac{1}{h} u(h, m)_{,3}), m \right) d_h dx, \end{aligned} \quad (5.58)$$

où le membre de droite est égal à deux fois le terme d'énergie magnétostatique  $E_{mag}(h)$  correspondant à la magnétisation  $m$  donnée. La proposition suivante va nous donner le comportement de ce terme lorsque l'épaisseur du domaine courbé tend vers zéro.

**Proposition 5.3.3.** *Soit  $\bar{m}(h)$  une suite de fonctions  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  telles que  $\bar{m}(h) = 0$  sur  $\Omega_1^c$  et  $|\bar{m}(h)| = 1$  sur  $\Omega_1$ , vérifiant  $\bar{m}(h) \rightarrow \bar{m}(0)$  fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ , et soit  $\bar{u}(h, \bar{m}(h))$  la solution du problème de minimisation (5.33) associée à  $\bar{m}(h)$ . On a alors*

$$\nabla \bar{u}(h, \bar{m}(h)) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ et } \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,3} \rightarrow w \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3), \quad (5.59)$$

où  $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w \tilde{a}^3|^2 d_0 dx = \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx, \quad (5.60)$$

où  $\tilde{a}^3$  représente le troisième vecteur colonne de  $A_0^T(x) = \nabla \Psi^{-1}(\Psi(x_1, x_2, 0))$  et qui est égal à  $a_3$  le troisième vecteur de la base covariante associée au difféomorphisme  $\psi$  sur  $\Omega_1$ . De plus,

$$E_{mag}(h)(\bar{m}(h)) \rightarrow E_{mag}(0)(\bar{m}(0)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx. \quad (5.61)$$

**Preuve**

Comme  $\bar{u}(h, \bar{m}(h))$  minimise l'énergie  $I_{\bar{m}(h)}^h$  sur tout  $U$ , on a en particulier pour  $u = 0$  que

$$\begin{aligned} I_{\bar{m}(h)}(h)(\bar{u}(h, \bar{m}(h))) &\leq I_{\bar{m}(h)}(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\bar{m}(h)|^2 d_h dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |\bar{m}(h)|^2 d_h dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} d_h dx \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(\tilde{\Omega}_h) \\ &\leq c, \end{aligned}$$

grâce aux propriétés vérifiées par  $\bar{m}(h)$ . En utilisant l'inégalité triangulaire et encore une fois le fait que  $|\bar{m}(h)| = 1$  sur  $\Omega_1$  on obtient que

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq c + \left( \int_{\Omega_1} d_h dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c'. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\left| (\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right| \\ &\leq \|A_h^{T-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3; M^3)} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|, \end{aligned} \quad (5.62)$$

presque partout sur  $\mathbb{R}^3$ , ce qui implique que

$$\|\nabla \bar{u}(h, \bar{m}(h))\|_{L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)} \leq c \quad \text{et} \quad \frac{1}{h} \|\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq c \quad (5.63)$$

et donc pour une sous-suite encore notée  $h$ , il existe  $H \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  et  $w \in L^2(\mathbb{R}^3)$  tels que

$$\nabla \bar{u}(h, \bar{m}(h)) \rightharpoonup H \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ faible} \quad (5.64)$$

et

$$\frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3 \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ faible.} \quad (5.65)$$

Or, en utilisant le lemme de Poincaré et en procédant comme dans la démonstration de la proposition 5.3.1, on obtient l'existence d'un  $u(0) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  tels que  $H = \nabla u(0)$ , par suite

$$\nabla \bar{u}(h, \bar{m}(h)) \rightharpoonup \nabla u(0) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \text{ faible,} \quad (5.66)$$

avec

$$u(0)_{,3} = 0. \quad (5.67)$$

La dernière égalité implique qu'il existe  $\bar{u}(0) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$  avec  $\nabla \bar{u}(0) \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  tels que  $u(0)(x) = \bar{u}(0)(x_1, x_2)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ . Or, comme  $\nabla u(0) \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  on a

$$\begin{aligned} c &\geq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(0)|^2 d_h dx \\ &\geq \int_a^b \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{u}(0)|^2 d_h dx \\ &\geq (b-a) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{u}(0)|^2 d_h dx_1 dx_2 \\ &= (b-a) \|\nabla \bar{u}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

ceci  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  avec  $b > a$ . En faisant tendre  $(b-a)$  vers l'infini on obtient que

$$\nabla \bar{u}(0) = 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2) \quad (5.68)$$

et donc

$$\nabla u(0) = 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3) \quad (5.69)$$

et puisque  $u(0) \in U$ , ceci implique que

$$u(0) = 0. \quad (5.70)$$

On veut maintenant montrer que les convergences dans (5.65) et (5.66) sont fortes. On revient à l'équation (5.58) qui s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,1}, \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,2}, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,3}) \right|^2 d_h dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,1}, \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,2}, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h))_{,3}), \bar{m}(h)) d_h dx. \quad (5.71) \end{aligned}$$

Les convergences (5.65), (5.66) et la convergence forte de  $\bar{m}(h)$  vers  $\bar{m}(0)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  impliquent que

$$\int_{\mathbb{R}^3} (A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3), \bar{m}(h)) d_h dx \rightarrow \int_{\Omega_1} (A_0^T(u(0),_1, u(0),_2, w), \bar{m}(0)) d_0 dx, \quad (5.72)$$

par suite la norme  $A_h^T(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h}u_{,3})$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  converge. On se propose d'identifier la limite de cette norme. On considère une suite de fonctions  $w^\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  qui convergent fortement dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  vers  $w$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Soit  $a_\varepsilon > 0$  tel que la projection du support de  $w^\varepsilon$  sur l'axe des  $x_3$  soit incluse dans  $[-a_\varepsilon, a_\varepsilon]$  et on suppose que  $a_\varepsilon > 1$ . On pose pour  $\lambda > 0$

$$v_h^{\varepsilon, \lambda}(x_1, x_2, x_3) = h \int_{-a_\varepsilon}^{x_3} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds - \frac{h}{\lambda} \int_{a_\varepsilon}^{x_3} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(r) dr \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds + c^\varepsilon. \quad (5.73)$$

La construction de la fonction test  $v_h^{\varepsilon, \lambda}$  est voisine de celle utilisée par G. Gioia et R.D. James dans [33]. La constante  $c_\varepsilon$  est choisie de façon à satisfaire la condition de nullité de l'intégrale sur la boule  $B$  et le deuxième terme permet à  $\nabla v_h^{\varepsilon, \lambda}$  d'appartenir à  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . En effet, on a

$$v_{h,3}^{\varepsilon, \lambda}(x_1, x_2, x_3) = h w^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) - \frac{h}{\lambda} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds. \quad (5.74)$$

Comme  $w^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , il est clair que

$$v_{h,3}^{\varepsilon, \lambda} \in L^2(\mathbb{R}^3). \quad (5.75)$$

On a aussi pour  $\alpha = 1, 2$

$$v_{h,\alpha}^{\varepsilon, \lambda}(x_1, x_2, x_3) = h \int_{-a_\varepsilon}^{x_3} w_{,\alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds - \frac{h}{\lambda} \int_{a_\varepsilon}^{x_3} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(r) dr \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w_{,\alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds. \quad (5.76)$$

On se propose de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_{h,\alpha}^{\varepsilon, \lambda}|^2 < +\infty. \quad (5.77)$$

Pour cela il nous suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |v_{h,\alpha}^{\varepsilon, \lambda}(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_3 < M^{\varepsilon, \lambda}, \quad (5.78)$$

où  $M^{\varepsilon, \lambda}$  ne dépend pas de  $x_1, x_2$ , par le théorème de Fubini et puisque  $w^\varepsilon$  est à support compact. Pour cela, on définit la fonction  $f_{x_1, x_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f_{x_1, x_2}(s) = \frac{1}{h} v_{h, \alpha}^{\varepsilon, \lambda}(x_1, x_2, s), \quad (5.79)$$

On veut montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f_{x_1, x_2}(s)|^2 ds < M^{\varepsilon, \lambda}. \quad (5.80)$$

Comme  $w^\varepsilon$  est à support compact on considère

$$M_1^\varepsilon = \max_{\mathbb{R}^3} \nabla w^\varepsilon. \quad (5.81)$$

Ceci implique que pour  $-a_\varepsilon + \lambda \leq x_3 \leq a_\varepsilon + \lambda$  on a

$$|f_{x_1, x_2}(x_3)| \leq (|x_3| + 3a_\varepsilon) M_1^\varepsilon, \quad (5.82)$$

par suite on a

$$\begin{aligned} \int_{-a_\varepsilon - \lambda}^{a_\varepsilon + \lambda} |f(x)|^2 dx &\leq \int_{-a_\varepsilon - \lambda}^{a_\varepsilon + \lambda} (|x_3| + 3a_\varepsilon)^2 M_1^{\varepsilon 2} dx_3 \\ &< M^{\varepsilon, \lambda}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Par ailleurs, lorsque  $a_\varepsilon + \lambda < x_3$ , comme  $w_{, \alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, s) = 0$  pour  $s > a_\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} f(x_3) &= \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w_{, \alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds - \frac{1}{\lambda} \int_{a_\varepsilon}^{x_3} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(r) dr \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w_{, \alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, s) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.84)$$

ce qui implique que

$$\int_{a_\varepsilon + \lambda}^{+\infty} |f(x_3)|^2 dx_3 = 0. \quad (5.85)$$

Par le même argument on obtient que

$$\int_{-\infty}^{-a_\varepsilon - \lambda} |f(x_3)|^2 dx_3 = 0. \quad (5.86)$$

Les estimations (5.83), (5.103) et (5.86) nous donnent (5.80) qui nous permet de conclure que

$$\nabla v_h^{\varepsilon, \lambda} \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3). \quad (5.87)$$

De plus, on a clairement

$$\lim_{h \rightarrow 0} v_{h,1}^{\varepsilon,\lambda} = \lim_{h \rightarrow 0} v_{h,2}^{\varepsilon,\lambda} = 0, \quad (5.88)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  et

$$\frac{1}{h} v_{h,3}^{\varepsilon,\lambda} = w^\varepsilon - \frac{1}{\lambda} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds. \quad (5.89)$$

Comme  $\bar{u}(h, \bar{m}(h))$  est la solution du problème (5.33) on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 + |\bar{m}(h)|^2 \\ & \quad - 2(A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3), \bar{m}(h)) d_h dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(v_{h,1}^{\varepsilon,\lambda}, v_{h,2}^{\varepsilon,\lambda}, \frac{1}{h} v_{h,3}^{\varepsilon,\lambda}) \right|^2 + |\bar{m}(h)|^2 - 2(A_h^T(v_{h,1}^{\varepsilon,\lambda}, v_{h,2}^{\varepsilon,\lambda}, \frac{1}{h} v_{h,3}^{\varepsilon,\lambda}), \bar{m}(h)) d_h dx. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Grâce à (5.72), (5.70) et au fait que

$$A_0^T = (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0))^T = (a^1 | a^2 | a^3), \quad (5.91)$$

sur  $\Omega_1$ , où les  $a^i$  sont les vecteurs de la base contravariante associée au difféomorphisme  $\psi$  avec  $|a^3| = 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} (A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3), \bar{m}(h)) d_h dx \\ & = \int_{\Omega_1} (A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3), \bar{m}(h)) d_h dx \\ & \rightarrow \int_{\Omega_1} (A_0^T(0, 0, w), \bar{m}(0)) d_0 dx \\ & = \int_{\Omega_1} (w a^3, \bar{m}(0)) d_0 dx. \end{aligned} \quad (5.92)$$

En outre, on a

$$A_h(x) = (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, h x_3))^T \rightarrow (\nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0))^T = A_0^T(x), \quad (5.93)$$

dans  $C^0(\mathbb{R}^3)$ . Soient  $\tilde{a}^i$  les vecteurs colonne de  $A_0^T$  qui sont définis sur  $\mathbb{R}^3$  indépendamment de  $x_3$ . On sait que

$$\tilde{a}^i = a^i, \quad (5.94)$$

sur  $\Omega_1$ . En passant à la limite dans (5.90) lorsque  $h \rightarrow 0$  et en utilisant (5.92), on obtient en éliminant le terme  $|\bar{m}(h)|^2$  dans les deux membres de l'inégalité et en passant à droite



le troisième terme du membre de gauche de l'inégalité

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left( w^\varepsilon - \frac{1}{\lambda} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right) \tilde{a}^3 \right|^2 d_0 dx \\
 & - 2 \int_{\Omega_1} \left\{ \left( \left( w^\varepsilon - \frac{1}{\lambda} \left( \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right) \right) a^3, \bar{m}(0) \right) + 2 \left( w a^3, \bar{m}(0) \right) \right\} d_0 dx.
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

En développant cette expression on obtient

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left( |w^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left| \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{\lambda} \left( w^\varepsilon \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right) \right| \tilde{a}^3|^2 d_0 dx \\
 & + \int_{\Omega_1} \frac{2}{\lambda} \left( \left( \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_0^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right) a^3, \bar{m}(0) \right) - 2 \left( w^\varepsilon a^3, \bar{m}(0) \right) + 2 \left( w a^3, \bar{m}(0) \right) d_0 dx.
 \end{aligned} \tag{5.96}$$

Puisque la projection du support de  $w^\varepsilon$  sur l'axe des  $x_3$  est incluse dans  $[-a_\varepsilon, a_\varepsilon]$ , ceci implique que

$$w^\varepsilon(x) \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) = 0, \tag{5.97}$$

presque partout sur  $\mathbb{R}^3$ , ce qui annule le troisième terme du membre de droite de l'inégalité (5.96). De même, puisque  $a_\varepsilon > 1$  ceci implique que

$$\chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) = 0 \tag{5.98}$$

sur  $\Omega_1$ , ce qui annule le quatrième terme du membre de droite de l'inégalité (5.96). En

considérant tout ceci, l'inégalité (5.96) s'écrit

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left( |w^\varepsilon|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left| \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}(x_3) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right|^2 \right) |\tilde{a}^3|^2 d_0 dx \\
 & \quad - 2 \int_{\Omega_1} [(w^\varepsilon a^3, \bar{m}(0)) - (w a^3, \bar{m}(0))] d_0 dx \\
 & = \int_{\mathbb{R}^3} |w^\varepsilon \tilde{a}^3|^2 d_0 dx - 2 \int_{\Omega_1} [(w^\varepsilon a^3, \bar{m}(0)) - (w a^3, \bar{m}(0))] d_0 dx \\
 & \quad + \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} w^\varepsilon(x_1, x_2, s) ds \right|^2 |\tilde{a}^3|^2 d_0 d\sigma \left( \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}^2(x_3) dx_3 \right). \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a_\varepsilon, a_\varepsilon + \lambda]}^2(x) dx = \lambda,$$

et en faisant tendre  $\lambda$  vers  $+\infty$  on obtient que

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx \\
 & \leq \int_{\mathbb{R}^3} |w^\varepsilon \tilde{a}^3|^2 d_0 dx - 2 \int_{\Omega_1} (w^\varepsilon a^3, \bar{m}(0)) - (w a^3, \bar{m}(0)) d_0 dx. \quad (5.100)
 \end{aligned}$$

On passe ensuite à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro et on obtient que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} |w \tilde{a}^3|^2 d_0 dx. \quad (5.101)$$

D'un autre côté, grâce à la convergence faible dans (5.65) et (5.66) et puisque

$$A_0^T(u(0),_1, u(0),_2, w) = A_0^T(0, 0, w) = w \tilde{a}^3 \quad (5.102)$$

sur  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w \tilde{a}^3|^2 d_0 dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \right|^2 d_h dx. \quad (5.103)$$

On déduit de (5.101) et (5.103) la convergence de la norme, ce qui implique que

$$A_h^T(\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h} \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) \rightarrow A_0^T(0, 0, w) = w \tilde{a}^3, \quad (5.104)$$

dans  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . Par suite on obtient grâce à la convergence de  $A_h^{T-1}$  vers  $A_0^{T-1}$  dans  $C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  que

$$\begin{aligned} (\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h))) &= A_h^{T-1} A_h^T (\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h))) \\ &\rightarrow A_0^{T-1} A_0^T (0, 0, w) = (0, 0, w), \end{aligned} \quad (5.105)$$

ce qui nous donne la convergence forte dans (5.65) et (5.66). On se propose ensuite d'identifier la norme de  $w\tilde{a}^3$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . L'équation (5.71) s'écrit à la limite lorsque  $h \rightarrow 0$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |w\tilde{a}^3|^2 d_0 dx = \int_{\Omega_1} (wa_3, \bar{m}(0)) d_0 dx. \quad (5.106)$$

On pose

$$\xi_h^\varepsilon = h \int_{-1}^{x_3} (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) - \frac{h}{\lambda} \int_1^{x_3} \chi_{[1,1+\lambda]}(r) dr \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds + c^\varepsilon, \quad (5.107)$$

où  $\bar{m}^\varepsilon(0)$  est une suite de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  qui converge vers  $\bar{m}(0)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro avec  $\text{supp } \bar{m}^\varepsilon(0)$  inclus dans  $\Omega_1$  et  $c^\varepsilon$  une constante dépendant de  $\varepsilon$ . On montre comme précédemment, que

$$\xi_h^\varepsilon \in U, \quad (5.108)$$

avec

$$\frac{1}{h} \xi_{h,3}^\varepsilon = (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) - \frac{1}{\lambda} \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds. \quad (5.109)$$

Le problème (5.33) de minimisation implique qu'on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T (\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_1, \bar{u}(h, \bar{m}(h)),_2, \frac{1}{h}\bar{u}(h, \bar{m}(h)),_3) - \bar{m}(h) \right|^2 d_h dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_h^T (\xi_{h,1}^\varepsilon, \xi_{h,2}^\varepsilon, \frac{1}{h}\xi_{h,3}^\varepsilon) - \bar{m}(h) \right|^2 d_h dx. \end{aligned} \quad (5.110)$$

En faisant tendre  $h$  vers zéro on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_0^T (0, 0, w) - \bar{m}(0) \right|^2 d_0 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_0^T (0, 0, (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds) - \bar{m}(0) \right|^2 d_0 dx. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Or,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \left| A_0^T(0, 0, (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) - \frac{1}{\lambda} \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds) - \bar{m}(0) \right|^2 d_0 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left( (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) - \frac{1}{\lambda} \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \right) \tilde{a}^3 \right. \\
 &\quad \left. - \bar{m}(0) \right|^2 d_0 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) \right|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \chi_{[1,1+\lambda]}^2(x_3) \left| \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \right|^2 |\tilde{a}^3|^2 \\
 &\quad + |\bar{m}(0)|^2 - \frac{2}{\lambda} \left( (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \right) \\
 &\quad - 2 \left( (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) \tilde{a}^3, \bar{m}(0) \right) - \frac{2}{\lambda} \left( \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \tilde{a}^3, \bar{m}(0) \right) d_0 dx
 \end{aligned} \tag{5.112}$$

et puisque la projection du support de  $\bar{m}^\varepsilon(0)$  et de  $\bar{m}(0)$  sur l'axe des  $x_3$  est incluse dans  $[0, 1]$ , ceci implique que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\lambda} \left( (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \right) d_0 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\lambda} \left( \chi_{[1,1+\lambda]}(x_3) \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \tilde{a}^3, \bar{m}(0) \right) d_0 dx \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.113}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^3} \chi_{[1,1+\lambda]}^2(x_3) \left| \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \right|^2 |\tilde{a}^3|^2 d_0 dx \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{-1}^1 (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0))(x_1, x_2, s) ds \right|^2 |\tilde{a}^3|^2 d_0 d\sigma \\
 &\quad \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

En appliquant tout ceci dans (5.111) on obtient en faisant tendre  $\lambda$  vers l'infini

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| w \tilde{a}^3 - \bar{m}(0) \right|^2 d_0 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left| (\tilde{a}^3, \bar{m}^\varepsilon(0)) \tilde{a}^3 - \bar{m}(0) \right|^2 d_0 dx. \tag{5.115}$$

En développant cette expression et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[ |w \tilde{a}^3|^2 - 2w (\tilde{a}^3, \bar{m}(0)) \right] d_0 dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left[ |(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 - 2|(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 \right] d_0 dx, \tag{5.116}$$

qui s'écrit grâce à (5.106)

$$- \int_{\mathbb{R}^3} w(\tilde{a}^3, \bar{m}(0)) d_0 dx \leq - \int_{\mathbb{R}^3} |(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx, \quad (5.117)$$

on obtient donc que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^3} w(\tilde{a}^3, \bar{m}(0)) d_0 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |w\tilde{a}^3|^2 d_0 dx. \end{aligned} \quad (5.118)$$

On revient à (5.106) qui implique grâce à l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |w\tilde{a}^3|^2 d_0 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (w\tilde{a}^3, \bar{m}(0)) d_0 dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} |w|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left( \int_{\mathbb{R}^3} |w\tilde{a}^3|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_{\mathbb{R}^3} |(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.119)$$

qui avec (5.118) implique que

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^3} |w\tilde{a}^3|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left( \int_{\mathbb{R}^3} |(\tilde{a}^3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Finalement, en considérant tout ceci on obtient que

$$E_{mag}(h)(\bar{m}(h)) \rightarrow E_{mag}(0)(\bar{m}(0)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}(0))|^2 d_0 dx. \quad (5.121)$$

□

Maintenant qu'on connaît le comportement du terme d'énergie magnétostatique, on passe au calcul de la  $\Gamma$ -limite de l'énergie totale  $e(h)$ .

## 5.4 Calcul de la $\Gamma$ -limite

On veut étudier le comportement des minimiseurs de l'énergie  $e(h)$  sur l'ensemble des magnétisations appartenant à  $W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et vérifiant la contrainte (5.31). Cependant, le fait que la fonction  $W$  ne soit pas tangentielllement quasiconvexe ne permet pas

d'assurer l'existence de ces minimiseurs. C'est pourquoi nous allons considérer dans ce qui suit, une suite minimisante diagonale  $m(h)$  de l'énergie  $e(h)$  dont on est assuré de l'existence, c'est-à-dire une suite telle que

$$m(h) \in V \text{ et } e(h)(m(h)) = \inf_{m \in V} e(h)(m) + h\varepsilon(h), \quad (5.122)$$

avec  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$  et

$$V = \left\{ m \in L^p(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3), \text{ vérifiant } m_{/\Omega_1} \in W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \right. \\ \left. |m| = 1, \text{ p.p. sur } \Omega_1 \text{ et } m = 0, \text{ p.p. sur } \Omega_1^c \right\}. \quad (5.123)$$

**Remarque 16.** Dans ce qui suit, on va identifier les fonctions de  $V$  avec des fonctions de  $W^{1,p}(\Omega_1; S^2)$  en gardant la même notation.

On a le lemme suivant

**Lemme 5.4.1.** Si  $m(h)$  est une suite de fonctions de  $V$  vérifiant

$$e(h)(m(h)) \leq c \quad (5.124)$$

alors elle est uniformément bornée dans  $V$  et ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible de  $W^{1,p}$  appartiennent à

$$V_M = \{m \in V \text{ et } m_{,3} = 0 \text{ sur } \Omega_1\}. \quad (5.125)$$

**Preuve**

Comme on a déjà vu que

$$\int_{\Omega_1} \frac{1}{2} (A_h^T(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h}u_{,3}), m) d_h dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |A_h^T(u_{,1}, u_{,2}, \frac{1}{h}u_{,3})|^2 d_h dx, \quad (5.126)$$

et donc que l'énergie magnétostatique est positive, on déduit de (5.124) que

$$\int_{\Omega_1} W(m(h), (m(h)_{,1}, m(h)_{,2}, \frac{1}{h}m(h)_{,3})A_h) d_h dx \leq c, \quad (5.127)$$

ce qui implique grâce à (5.13) que

$$\|(m(h)_{,1}, m(h)_{,2}, \frac{1}{h}m(h)_{,3})A_h\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \leq c. \quad (5.128)$$

Or

$$\begin{aligned} \|(m(h)_{,1}, m(h)_{,2}, \frac{1}{h}m(h)_{,3})\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} &= \|(m(h)_{,1}, m(h)_{,2}, \frac{1}{h}m(h)_{,3})A_h A_h^{-1}\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \\ &\leq \|A_h^{-1}\|_{L^\infty(\Omega_1; M^3)} \|(m(h)_{,1}, m(h)_{,2}, \frac{1}{h}m(h)_{,3})A_h\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \\ &\leq c, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\nabla m(h)\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \leq c \text{ et } \frac{1}{h}\|m(h)_{,3}\|_{L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)} \leq c. \quad (5.129)$$

On en déduit qu'il existe une sous-suite, encore notée  $h$ , et  $m(0) \in W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$m(h) \rightharpoonup m(0) \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad (5.130)$$

avec

$$m(0)_{,3} = 0. \quad (5.131)$$

D'autre part, la convergence faible dans  $W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  implique que pour une sous-suite encore notée  $h$  on a

$$m(h) \rightarrow m(0) \text{ dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad (5.132)$$

ce qui implique, encore pour une sous-suite notée  $h$ , qu'on a

$$m(h) \rightarrow m(0), \quad (5.133)$$

presque partout dans  $\Omega_1$ , ce qui implique que pour presque tout  $x \in \Omega_1$  on a

$$|m(0)| = 1. \quad (5.134)$$

□

Avant d'énoncer le résultat principal de cette section, on va rappeler la définition de la quasiconvexité tangentielle, introduite par B. Dacorogna, I. Fonseca, J. Maly et K. Trivisa dans [24] et qui donne la relaxation d'une classe de fonctionnelles d'énergies où les déformations admissibles sont contraintes de rester dans une  $C^1$  sous-variété de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^d$ . Cette définition a été reprise et généralisée par R. Alicandro et C. Leone pour le cas des fonctionnelles dépendent du gradient de la déformation ainsi que de la déformation elle-même. On note par  $M^{d \times N}$  l'ensemble des matrices  $d \times N$ . Soit  $f : M^{d \times N} \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction Borel mesurable et  $M$  une  $C^1$  sous-variété de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^d$ . On note par  $T_y(M)$  l'espace tangent à  $M$  en  $y$  pour  $y \in M$ .

**Definition 5.4.1.** Soit  $y \in M$  et  $\xi \in [T_y(M)]^N$ . La quasiconvexification tangentielle de  $f$  en  $\xi$  relativement à  $y$  est définie par

$$Q_T^{N,d} f(y, \xi) := \inf \left\{ \int_Q f(y, \xi + \nabla \varphi(x)) dx : \varphi \in W_0^{1,\infty}(Q; T_y(M)) \right\}, \quad (5.135)$$

avec  $Q$  un cube de  $\mathbb{R}^N$ .

Dans notre cas  $M$  est la sphère unité  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$  et  $T_y(S^2) = y^\perp$ , le plan orthogonal à  $y$ . On rappelle aussi la proposition et le théorème démontrés dans [24]

**Proposition 5.4.1.** Soit  $f : M^{d \times N} \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction continue telle qu'il existe un  $c > 0$  et  $p \geq 1$  vérifiant

$$0 \leq f(\xi) \leq c(1 + |\xi|^p), \quad (5.136)$$

pour tout  $\xi \in M^{d \times N}$ . Soit la fonctionnelle définie par

$$J(u) := \int_{\Omega_1} Q_T^{N,d} f(u, \nabla u) dx, \quad u \in W^{1,p}(\Omega_1; M). \quad (5.137)$$

Alors  $J(\cdot)$  est séquentiellement faiblement semi-continue inférieure dans  $W^{1,p}(\Omega_1; M)$ .

**Théorème 5.4.1.** Soit  $f : M^{d \times N} \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction continue vérifiant

$$0 \leq f(\xi) \leq c(1 + |\xi|^p), \quad (5.138)$$

pour  $p \geq 1$ ,  $c > 0$  et tout  $\xi \in M^{d \times N}$ . Si  $M$  est une  $C^1$  sous-variété de dimension  $p$ , alors

$$F(u) = \int_{\Omega_1} Q_T^{N,d} f(u, \nabla u) dx, \quad (5.139)$$

où

$$F(u) := \inf_{u_n} \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_1} f(\nabla u_n) dx : u_n \rightharpoonup u \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1; M) \right\}. \quad (5.140)$$

Dans notre cas, la magnétisation  $m$  est contrainte à rester dans la sphère  $S^2$ . Par conséquent,  $m_i$  appartient à  $m^\perp$ . Comme dans les chapitres précédents, on définit la fonction  $W_0 : \Omega_1 \times \mathbb{R}^3 \times M^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$\begin{aligned} W_0(x, y, \bar{F}) &:= \inf_{z \in y^\perp} W(y, (\bar{F}|z)A_0(x)) \\ &= \inf_{z \in \mathbb{R}^3} \bar{W}(y, (\bar{F}|z)A_0(x)), \end{aligned} \quad (5.141)$$



avec  $A_0(x) = \nabla \Psi^{-1} \circ \Psi(x_1, x_2, 0)$  et

$$\bar{W}(y, (\bar{F}|z)A_0(x)) = \begin{cases} W(y, (\bar{F}|z)A_0(x)), & \text{si } z \in y^\perp, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.142)$$

La fonction  $W_0$  possède des propriétés analogues à celles vérifiées par  $W$ . En effet on a la proposition suivante.

**Proposition 5.4.2.** *La fonction  $W_0$  est continue et vérifie les propriétés de croissance et de coercivité suivantes*

$$\begin{cases} \exists c' > 0, \forall \bar{F} \in M^{3,2}, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \bar{\omega}, |W_0(x, y, \bar{F})| \leq c'(1 + |\bar{F}|^p), \\ \exists \gamma' > 0, \exists \beta' \geq 0, \forall \bar{F} \in M^{3,2}, \forall y \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \bar{\omega}, W_0(x, y, \bar{F}) \geq \gamma' |\bar{F}|^p - \beta'. \end{cases} \quad (5.143)$$

**Preuve**

La preuve de cette proposition est analogue à celle du chapitre précédent.

□

On se propose de calculer la  $\Gamma$ -limite de l'énergie régissant le comportement du film courbé ferromagnétique afin de déterminer le comportement asymptotique de cette énergie et de ses minimiseurs. L'espace sur lequel on souhaiterait calculer cette  $\Gamma$ -limite est naturellement l'espace  $W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ , mais celui-ci muni de sa topologie faible n'est pas un espace métrique. C'est pourquoi on étend l'énergie  $e(h)$  à tout l'espace  $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  en posant

$$\forall m \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3), e^*(h)(m) = \begin{cases} e(h)(m) & \text{si } m \in V, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la  $\Gamma$ -limite de notre énergie. Elle est obtenue par le théorème suivant.

**Théorème 5.4.2.** *La suite d'énergies  $e^*(h)$  est  $\Gamma$ -convergente pour la topologie forte de  $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . Sa  $\Gamma$ -limite a comme expression*

$$e^*(0)(m) = \begin{cases} \int_{\omega} Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx & \text{si } m \in V_M \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La preuve de ce théorème découle des deux propositions suivantes.

**Proposition 5.4.3.** *On a*

$$\Gamma - \liminf e^*(h) \geq e^*(0). \quad (5.144)$$

**Preuve**

La borne inférieure de la  $\Gamma$ -limite inférieure est obtenue en montrant que pour toute suite de fonctions  $m^h \in L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  convergente vers  $m^0$  dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  fort, on a

$$\liminf e^*(h)(m^h) \geq e^*(0)(m^0). \quad (5.145)$$

Tout d'abord, si  $m^h$  n'est pas dans  $V$ , ceci implique que

$$e^*(h)(m^h) = +\infty \quad (5.146)$$

et (5.145) est clairement réalisée. De même si  $m^h \in V$  et

$$\liminf e^*(h)(m^h) = +\infty. \quad (5.147)$$

Ensuite, on considère  $m^h \in V$ , avec

$$\liminf e^*(h)(m^h) = \liminf e(h)(m^h) < +\infty \quad (5.148)$$

ceci implique que pour une sous-suite, il existe  $c > 0$  tel que

$$e(h)(m^h) < c. \quad (5.149)$$

D'après le lemme 5.4.1 ceci implique que pour une sous-suite qu'on note encore  $h$  on a

$$m^h \rightharpoonup m^0 \text{ dans } W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad (5.150)$$

et grâce au fait que  $m^h$  est uniformément bornée dans  $L^\infty(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  on a

$$m^h \rightarrow m^0 \text{ dans } L^q(\Omega_1; \mathbb{R}^3), \quad (5.151)$$

pour tout  $q > 1$ , en particulier pour  $q = 2$ . On en déduit grâce à la proposition 5.3.3 que

$$E_{mag}(h)(\bar{m}^h) \rightarrow E_{mag}(0)(\bar{m}^0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} |(a_3, \bar{m}^0)|^2 d_0 dx. \quad (5.152)$$

Posons

$$E_{ea}(h)(m) = \int_{\Omega_1} W\left(m, (m_{,1}|m_{,2}|\frac{1}{h}m_{,3})A_h\right) d_h dx, \quad (5.153)$$

qui représente l'énergie d'échange et l'énergie anisotrope. On a

$$\begin{aligned} E_{ea}(h)(m^h) &= \int_{\Omega_1} W\left(m^h, (m_{,1}^h|m_{,2}^h|\frac{1}{h}m_{,3}^h)A_h\right) d_h dx \\ &= \int_{\Omega_1} \left\{ W\left(m^h, (m_{,1}^h|m_{,2}^h|\frac{1}{h}m_{,3}^h)A_0\right) + R(x, h, m^h) \right\} d_h dx, \end{aligned} \quad (5.154)$$

avec

$$R(x, h, m^h) = W\left(m^h, (m_{,1}^h|m_{,2}^h|\frac{1}{h}m_{,3}^h)A_h\right) - W\left(m^h, (m_{,1}^h|m_{,2}^h|\frac{1}{h}m_{,3}^h)A_0\right). \quad (5.155)$$

Grâce aux propriétés (5.13) de  $W$  et aux propriétés du difféomorphisme  $\Psi$ , on a déjà vu aux chapitres précédents que

$$\int_{\Omega_1} R(x, h, m^h) d_h dx \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (5.156)$$

On a donc

$$\begin{aligned} E_{ea}(h)(m^h) &\geq \int_{\Omega_1} \left\{ W_0\left(x, m^h, (m_{,1}^h|m_{,2}^h)\right) + R(x, h, m^h) \right\} d_h dx \\ &\geq \int_{\Omega_1} \left\{ Q_T^{2,3} W_0\left(x, m^h, (m_{,1}^h|m_{,2}^h)\right) + R(x, h, m^h) \right\} d_h dx. \end{aligned} \quad (5.157)$$

En passant à la  $\liminf$  lorsque  $h \rightarrow 0$  on obtient, en utilisant (5.156) et la proposition 5.4.1 que

$$\liminf E_{ea}(h)(m^h) \geq \int_{\Omega_1} Q_T^{2,3} W_0\left(x, m^0, (m_{,1}^0|m_{,2}^0)\right) d_0 dx. \quad (5.158)$$

Grâce à ceci, à (5.152) et puisque  $m^0$  vérifie  $m_{,3}^0 = 0$  (lemme 5.4.1), on obtient que

$$\liminf e(h)(m^h) \geq \int_{\omega} \left\{ Q_T^{2,3} W_0\left(x, m^0(x), (m_{,1}^0|m_{,2}^0)\right) + |(a_3(x), m^0)|^2 \right\} d_0 dx, \quad (5.159)$$

par suite on a

$$\liminf e^*(h)(m^h) \geq e^*(0)(m^0) \quad (5.160)$$

ce qui implique que

$$\Gamma - \liminf e^*(h) \geq e^*(0). \quad (5.161)$$

□

On passe ensuite au calcul de la borne supérieure de la  $\Gamma$ -limite, où l'on aura besoin du lemme suivant (voir [38])

**Lemme 5.4.2.** *Soient  $X \hookrightarrow Y$  deux espaces de Banach avec  $X$  réflexif où l'injection  $X \subset Y$  est compacte. Soit une fonction  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall v \in X, G(v) \geq g(\|v\|_X)$ , où  $g$  vérifie  $g(t) \rightarrow +\infty$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Soit  $G^*$  la fonction définie par  $G^*(v) = G(v)$  si  $v \in X$ ,  $G^*(v) = +\infty$  sinon. Soit  $\Gamma - G$  l'enveloppe semi-continue inférieure de  $G$  pour la topologie faible de  $X$  et  $\Gamma - G^*$  l'enveloppe semi-continue inférieure de  $G^*$  pour la topologie forte de  $Y$ . Alors*

$$\Gamma - G^* = (\Gamma - G)^* \quad (5.162)$$

**Proposition 5.4.4.** *On a*

$$\Gamma - \limsup e^*(h) \leq e^*(0). \quad (5.163)$$

**Preuve**

Pour obtenir la majoration de la  $\Gamma$ -limite, on doit construire une suite  $m^h \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  qui converge fortement vers  $m^0$  dans  $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  et qui vérifie

$$\lim e^*(h)(m^h) \leq e^*(0)(m^0). \quad (5.164)$$

Soit  $m^0 \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . Tout d'abord, lorsque  $m^0$  n'est pas dans  $V_M$ , ceci implique que

$$e^*(0)(m^0) = +\infty \quad (5.165)$$

en posant, pour tout  $h, m^h = m^0$  on obtient tout de suite (5.164). On considère ensuite  $m^0 \in V_M$  et on pose

$$m^h(x) = m^0(x_1, x_2) + hx_3\xi(x_1, x_2), \quad (5.166)$$

avec  $\xi \in W_0^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$  que nous choisirons ultérieurement. Nous laissons provisoirement de côté la contrainte  $|m^h| = 1$  et nous y reviendrons un peu plus loin. On a donc clairement

$$m^h \rightarrow m^0 \text{ fortement dans } W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (5.167)$$

Ceci implique que pour une sous-suite encore notée  $h$  on a

$$\nabla m^h \rightarrow \nabla m^0 \text{ fortement dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (5.168)$$

Le réciproque partielle du théorème de Lebesgue implique que pour une sous-suite encore notée  $h$  il existe une fonction  $g \in L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  tel que

$$|\nabla m^h| \leq c|g| \quad (5.169)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Or, les propriétés de croissance (5.13) de  $W$  impliquent que

$$\begin{aligned} W(m^h, (m_{,\alpha}^0 + hx_3\xi_{,\alpha}|\xi)A_h) &\leq c|\nabla m^h|^p \\ &\leq c|g|^p \end{aligned}$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . D'autre part la continuité de  $W$  implique que

$$W(m^h, (m_{,\alpha}^0 + hx_3\xi_{,\alpha}|\xi)A_h) \rightarrow W(m^0, (m_{,\alpha}^0|\xi)A_0), \quad (5.170)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Par conséquent, le théorème de convergence dominée implique que

$$\begin{aligned} E_{ea}(h)(m^h) &= \int_{\Omega_1} W(m^h, (m_{,\alpha}^0 + hx_3\xi_{,\alpha}|\xi)A_h) d_h dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega_1} W(m^0, (m_{,\alpha}^0|\xi)A_0) d_0 dx. \end{aligned}$$

La fonction  $\mu : \omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\mu(x, z) = \bar{W}(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|z)A_0(x)) \quad (5.171)$$

est une fonction de Carathéodory. Par conséquent, le lemme de sélection mesurable, implique qu'il existe une application  $\xi : \omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  mesurable telle que

$$W_0(x, m^0(x), (m_{,1}^0(x)|m_{,2}^0(x))) = \bar{W}(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\xi(x))A_0(x)), \quad (5.172)$$

(voir [30]). Si  $\xi \notin m^{0\perp}$ , ceci implique que

$$W_0(x, m^0(x), (m_{,1}^0(x)|m_{,2}^0(x))) = +\infty \quad (5.173)$$

et il n'y a rien à démontrer. Si  $\xi \in m^{0\perp}$  presque partout ceci implique que

$$\begin{aligned} W_0(x, m^0(x), (m_{,1}^0(x)|m_{,2}^0(x))) &= \bar{W}(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\xi(x))A_0(x)) \\ &= W(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\xi(x))A_0(x)). \end{aligned} \quad (5.174)$$

et grâce aux propriétés (5.13) de  $W$ , on obtient que  $\xi \in L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$ . Il existe donc, grâce à la densité de  $C_c^\infty(\omega; \mathbb{R}^3)$  dans  $L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$ , une suite  $\xi^\varepsilon \in C_c^\infty(\omega; \mathbb{R}^3)$  vérifiant

$$\xi^\varepsilon \rightarrow \xi \text{ fortement dans } L^p(\omega; \mathbb{R}^3). \quad (5.175)$$

Ensuite, on projette  $\xi^\varepsilon$  sur  $m^{0\perp}$  en posant

$$\bar{\xi}^\varepsilon = (I - m^0 \otimes m^0)\xi^\varepsilon. \quad (5.176)$$

On a  $\bar{\xi}^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$  et vérifie

$$\bar{\xi}^\varepsilon \rightarrow \xi \text{ fortement dans } L^p(\omega; \mathbb{R}^3). \quad (5.177)$$

Ceci implique que pour une sous-suite encore notée  $\varepsilon$ , il existe une fonction dans  $L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$  qui domine  $\bar{\xi}^\varepsilon$  presque partout sur  $\Omega_1$ . La continuité de  $W$  implique que

$$W(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\bar{\xi}^\varepsilon(x))A_0(x)) \rightarrow W(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\xi(x))A_0(x)) \quad (5.178)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Or, les propriétés de croissance de  $W$  impliquent que

$$W(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\bar{\xi}^\varepsilon(x))A_0(x)) \leq c|(m_{,\alpha}^0(x)|\bar{\xi}^\varepsilon(x))|^p \quad (5.179)$$

et puisque ces ces fonctions sont dominées dans  $L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$  on obtient grâce au théorème de la convergence dominée que

$$\int_{\omega} W(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\bar{\xi}^\varepsilon(x))A_0(x))d_0dx \rightarrow \int_{\omega} W(m^0(x), (m_{,\alpha}^0(x)|\xi(x))A_0(x))d_0dx. \quad (5.180)$$

Pour tout  $\eta > 0$ , il existe donc un  $\varepsilon(\eta) > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \leq \varepsilon(\eta)$  on a

$$\int_{\omega} W(m^0, (m_{,\alpha}^0|\bar{\xi}^\varepsilon)A_0)d_0dx \leq \int_{\omega} W(m^0, (m_{,\alpha}^0|\xi)A_0)d_0dx + \eta \quad (5.181)$$

et grâce à (5.174) on obtient que

$$\int_{\omega} W(m^0, (m_{,\alpha}^0|\bar{\xi}^\varepsilon)A_0)d_0dx \leq \int_{\omega} W_0(x, m^0(x), (m_{,1}^0(x)|m_{,2}^0(x)))d_0dx + \eta \text{ meas}(\tilde{S}). \quad (5.182)$$

Posons alors

$$\bar{m}_\varepsilon^h = m^0 + hx_3\bar{\xi}^\varepsilon. \quad (5.183)$$

On sait que  $\bar{m}_\varepsilon^h \in W^{1,p}(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , pour  $h < \frac{1}{2\|\bar{\xi}^\varepsilon\|_{L^\infty(\omega; \mathbb{R}^3)}}$  et puisque  $|m^0| = 1$ , on a

$$|\bar{m}_\varepsilon^h| > \frac{1}{2}, \quad (5.184)$$

presque partout. On peut donc poser

$$m_\varepsilon^h = \frac{\bar{m}_\varepsilon^h}{|\bar{m}_\varepsilon^h|}. \quad (5.185)$$

Par construction, on a  $m_\varepsilon^h \in V$  grâce à la propriété d'algèbre de  $W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\omega; \mathbb{R}^3)$ .

De plus

$$\nabla m_\varepsilon^h = \left( \frac{I}{|\bar{m}_\varepsilon^h|} - \frac{\bar{m}_\varepsilon^h \otimes \bar{m}_\varepsilon^h}{|\bar{m}_\varepsilon^h|^3} \right) \nabla \bar{m}_\varepsilon^h. \quad (5.186)$$

D'autre part on a

$$m_\varepsilon^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} m^0 \text{ fortement dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (5.187)$$

De plus

$$m_{\varepsilon,\alpha}^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} (I - m^0 \otimes m^0) m_{,\alpha}^0 \text{ fortement dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (5.188)$$

Or, puisque  $|m^0| = 1$  on a

$$((m^0 \otimes m^0) \nabla m^0)_{i,\alpha} = m_i^0 (m^0, m_{,\alpha}^0) = 0. \quad (5.189)$$

On a aussi

$$\frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} (I - m^0 \otimes m^0) \bar{\xi}^\varepsilon \text{ fortement dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3) \quad (5.190)$$

et puisque  $\bar{\xi}^\varepsilon \in m^{0\perp}$  on a

$$(m^0 \otimes m^0) \bar{\xi}^\varepsilon = 0 \quad (5.191)$$

et donc on obtient que

$$m_{\varepsilon,\alpha}^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} m_{,\alpha}^0 \text{ et } \frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \bar{\xi}^\varepsilon \text{ fortement dans } L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3). \quad (5.192)$$

La réciproque partielle du théorème de Lebesgue implique que pour une sous-suite encore notée  $h$ , les fonctions  $m_{\varepsilon,\alpha}^h$  et  $\frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h$  sont dominées par des fonctions  $L^p(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$ .

Or, la continuité de  $W$  implique que

$$W(m_\varepsilon^h, (m_{\varepsilon,\alpha}^h | \frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h) A_h) \rightarrow W(m^0, (m_{,\alpha}^0 | \bar{\xi}^\varepsilon) A_0) \quad (5.193)$$

presque partout dans  $\Omega_1$ . D'autre part les propriétés de croissance de  $W$  impliquent que

$$W(m_\varepsilon^h, (m_{\varepsilon,\alpha}^h | \frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h) A_h) \leq c |(m_{\varepsilon,\alpha}^h | \frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h)|^p \quad (5.194)$$

presque partout sur  $\Omega_1$ . Comme ces fonctions sont dominés et grâce au théorème de convergence dominée on a que

$$\begin{aligned} E_{ea}(h)(m_\varepsilon^h) &= \int_{\Omega_1} W(m_\varepsilon^h, (m_{\varepsilon,\alpha}^h | \frac{1}{h} m_{\varepsilon,3}^h) A_h) d_h dx \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\omega} W(m^0, (m_{,\alpha}^0 | \bar{\xi}^\varepsilon) A_0) d_0 dx \\ &\leq \int_{\omega} W_0(x, m^0(x), (m_{,1}^0(x) | m_{,2}^0(x))) d_0 dx + \eta \end{aligned}$$

ceci, avec la proposition (5.3.3), implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0} e(h)(m_\varepsilon^h) \leq \int_{\Omega_1} \left\{ W_0(x, m^0(x), (m_{,1}^0(x) | m_{,2}^0(x))) + |(a_3, m^0)|^2 \right\} d_0 dx + \eta. \quad (5.195)$$

On pose ensuite

$$G^*(m) = \begin{cases} \int_{\omega} W_0(x, m(x), (m_{,1} | m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx & \text{si } m \in V_M \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vient de voir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} e^*(h)(m_\varepsilon^h) \leq G^*(m^0) + \eta, \quad (5.196)$$

ce qui implique que

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} e^*(h)(m^0) \leq G^*(m^0) + \eta. \quad (5.197)$$

comme ceci est vrai pour tout  $\eta > 0$ , on obtient que

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow 0} e^*(h)(m^0) \leq G^*(m^0). \quad (5.198)$$

Or, la  $\Gamma - \limsup$  d'une fonction est faiblement semicontinue inférieure et l'enveloppe sci de la fonction  $G$  définie sur  $V_M$  par

$$G(m) = \int_{\omega} W_0(x, m(x), (m_{,1} | m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx \quad (5.199)$$

est la fonction  $e(0)$  définie sur  $V_M$  par

$$e(0)(m) = \int_{\omega} Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1} | m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx, \quad (5.200)$$



voir [24]. Donc, en utilisant le lemme 5.4.2, on obtient que l'enveloppe sci de  $G^*$  est bien  $e^*(0)$ , en prenant l'enveloppe sci des deux membres de 5.198, on obtient

$$\Gamma - \limsup e^*(h) \leq e^*(0). \quad (5.201)$$

□

### Preuve du théorème 5.4.2

On obtient la preuve du théorème en appliquant directement les deux propositions précédentes et les définitions des  $\Gamma$ -limites inférieures et supérieure.

□

**Corollaire 10.** *La suite minimisante diagonale  $m(h)$  de  $e(h)$  est bornée dans  $\bar{V}$  et ses valeurs d'adhérence pour la topologie faible de  $W^{1,p}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$  appartiennent à  $V_M$  et minimisent l'énergie  $e(0)$  définie par*

$$e(0)(m) = \int_{\omega} \left\{ Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 \right\} d_0 dx. \quad (5.202)$$

### Preuve

La démonstration de ce corollaire est analogue à celle du chapitre 2 en utilisant le lemme 5.4.1.

□

## 5.5 Retour à la configuration de référence initiale

Puisque pour toute magnétisation  $m$  dans  $V_M$  on a  $m_{,3} = 0$  dans  $\Omega_1$ , on va identifier dans ce qui suit, en gardant les mêmes notations, les magnétisations  $m \in V_M$  avec des magnétisations  $\bar{m} \in \bar{V}_M$  où

$$\bar{V}_M = \{ \bar{m} \in L^p(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3), \text{ avec } \bar{m}_{/\omega} \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), |\bar{m}| = 1 \text{ p.p. sur } \omega, \bar{m} = 0 \text{ p.p. sur } \omega^c \}. \quad (5.203)$$

On considère une autre carte  $\psi'$  qui envoie  $\omega'$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\tilde{S}$ . Travaillant avec cette autre carte, nous obtenons les mêmes résultats de convergence que précédemment mais cette fois à travers un autre difféomorphisme  $\Psi'$ . Effectuons donc le changement de variables initial inverse, afin d'avoir l'expression de l'énergie limite dans la configuration

de référence initial sans dépendance par rapport à la carte choisie. On considère, comme dans [39], pour tout vecteur unitaire  $e$  de  $S^2$ , un ouvert borné  $O_e \subset e^\perp$  et on note par  $\pi_e$  la projection orthogonale sur cet ouvert. On prolonge toute fonction  $\chi \in W_0^{1,\infty}(O_e, \mathbb{R}^3)$  en posant

$$\chi_e(y) = \chi(\pi_e(y)) \quad (5.204)$$

et on définit pour tout  $y \in O_e$ ,

$$D_{e^\perp} \chi(y) = \nabla \chi_e(y). \quad (5.205)$$

À tout  $m \in \tilde{V}_M$  on associe une magnétisation  $\tilde{m} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\tilde{m}(\tilde{x}) = m(\psi^{-1}(\tilde{x})). \quad (5.206)$$

On a  $\tilde{m} \in \tilde{V}_M$  avec

$$\tilde{V}_M = \{\tilde{m} \in W^{1,p}(\psi(\mathbb{R}^2); \mathbb{R}^3), |\tilde{m}| = 1 \text{ p.p. sur } \tilde{S}, \tilde{m} = 0 \text{ p.p. sur } \tilde{S}^c \text{ et } \nabla \tilde{m} a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) = 0\}. \quad (5.207)$$

On obtient le théorème suivant

**Théorème 5.5.1.** *Toute magnétisation  $\tilde{m}$  associé à une magnétisation  $m$  minimisant l'énergie limite  $e(0)$ , minimise sur  $\tilde{V}_M$  l'énergie  $\tilde{e}(0)$  définie par*

$$\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = \int_{\tilde{S}} \left\{ \tilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) + |(a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})), \tilde{m}(\tilde{x}))|^2 \right\} d\tilde{x}, \quad (5.208)$$

où  $a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$  désigne le vecteur unitaire normal à  $\tilde{S}$  au point  $\tilde{x}$  et  $\tilde{W} : S^2 \times S^2 \times M^3$  est définie par

$$\tilde{W}(e, y, F) = \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_e; y^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(O_e)} \int_{O_e} \left\{ \inf_{z \in y^\perp} W(y, F + z \otimes e + D_{e^\perp} \chi(s)) \right\} ds \right]. \quad (5.209)$$

**Preuve**

On a pour tout  $m \in V_M$

$$e(0)(m) = \int_{\omega} Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx. \quad (5.210)$$

On pose  $\tilde{x} = \psi(x)$ ,  $\tilde{m}(\tilde{x}) = m(x)$  ceci implique que

$$\nabla m(x) = \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(x) \quad (5.211)$$

et en posant  $\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = e(0)(m)$  on obtient

$$\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = \int_{\tilde{S}} \left\{ Q_T^{2,3} W_0(\psi^{-1}(\tilde{x}), \tilde{m}(\tilde{x}), \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))) + |(a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})), \tilde{m}(\tilde{x}))|^2 \right\} d\tilde{x}. \quad (5.212)$$

La représentation intégrale de l'enveloppe quasiconvexe tangentielle (5.135) s'écrit dans notre cas

$$Q_T^{2,3} W_0(x, y, \xi) := \inf \left\{ \frac{1}{\text{meas}(O)} \int_O W_0(x, y, \xi + \nabla \chi(s)) ds : \chi \in W_0^{1,\infty}(O; y^\perp) \right\}, \quad (5.213)$$

avec  $O$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  où l'infimum ne dépend pas du choix de cet ouvert. Ceci implique que pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{S}$  on a

$$\begin{aligned} & Q_T^{2,3} W_0(\psi^{-1}(\tilde{x}), \tilde{m}(\tilde{x}), \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))) \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O; \tilde{m}(\tilde{x})^\perp)} \frac{1}{\text{meas}(O)} \int_O W_0(\psi^{-1}(\tilde{x}), \tilde{m}(\tilde{x}), \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \chi(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.214)$$

D'autre part la définition de  $W_0$  implique que

$$\begin{aligned} & Q_T^{2,3} W_0(\psi^{-1}(\tilde{x}), \tilde{m}(\tilde{x}), \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))) \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O; \tilde{m}(\tilde{x})^\perp)} \frac{1}{\text{meas}(O)} \int_O \inf_{z \in \tilde{m}(\tilde{x})^\perp} W(\tilde{m}(\tilde{x}), \\ & \quad , (\nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \chi(s)|z) A_0(\psi^{-1}(\tilde{x}))) ds. \end{aligned} \quad (5.215)$$

Or, on a

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x})) + \nabla \chi(s)|z) A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})) &= (\nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))|0) A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})) \\ &+ (\nabla \chi(s)|0) A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})) + (0|z) A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})). \end{aligned} \quad (5.216)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))|0) &= \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) (\nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))|0) \\ &= \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) (a_1(\psi^{-1}(\tilde{x}))|a_2(\psi^{-1}(\tilde{x}))|0). \end{aligned}$$

D'autre part la condition  $m_{,3} = 0$  devient

$$\nabla \tilde{m}(\tilde{x}) a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) = 0 \quad (5.217)$$

ce qui implique que

$$\nabla \tilde{m}(\tilde{x})(\nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))|0) = \nabla \tilde{m}(\tilde{x})(a_1(\psi^{-1}(\tilde{x}))|a_2(\psi^{-1}(\tilde{x}))|a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))). \quad (5.218)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \nabla \Psi^{-1}(\Psi(x_1, x_2, 0)) \\ &= (\nabla \Psi(x_1, x_2, 0))^{-1} \\ &= (a_1(\psi^{-1}(\tilde{x}))|a_2(\psi^{-1}(\tilde{x}))|a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})))^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\nabla \tilde{m}(\tilde{x})(\nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))|0)A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})) = \nabla \tilde{m}(\tilde{x}). \quad (5.219)$$

Ensuite on pose

$$\bar{s} = \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))s \text{ et } \bar{\chi}(\bar{s}) = \chi(s). \quad (5.220)$$

Ceci implique que  $\bar{\chi} \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))}; \mathbb{R}^3)$  et

$$(\nabla \chi(s)|0)A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})) = D_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))^\perp} \bar{\chi}(\bar{s}). \quad (5.221)$$

On a enfin, pour tout  $z \in \mathbb{R}^3$ ,

$$(0|z)A_0(\psi^{-1}(\tilde{x})) = z \otimes a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})). \quad (5.222)$$

En choisissant  $O = (\nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x})))^{-1}O_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))}$  et en écrivant dans (5.215) ce qu'on a obtenu dans (5.219), (5.221) et (5.222) on obtient

$$\begin{aligned} &Q_T^{2,3} W_0(\psi^{-1}(\tilde{x}), \tilde{m}(\tilde{x}), \nabla \tilde{m}(\tilde{x}) \nabla \psi(\psi^{-1}(\tilde{x}))) \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))}; \tilde{m}^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(O_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))})} \int_{O_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))}} \left\{ \inf_{z \in \tilde{m}^\perp} W(\tilde{m}, F + z \otimes a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_{a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))^\perp} \chi(s) \right\} ds \right], \quad (5.223) \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. □

**Remarque 17.** *On note que l'énergie limite obtenue ne dépend pas de la carte à travers laquelle on écrit l'énergie. Ceci souligne le caractère intrinsèque du problème limite de minimisation.*

## 5.6 Application à la version courbée du modèle de Gioia et James

On applique nos résultats au modèle de Gioia et James (voir [33]), c'est-à-dire pour

$$W(y, F) = \varphi(y) + \alpha |F|^2. \quad (5.224)$$

Le corollaire 10 implique que le problème de minimisation limite s'écrit :  $m_0 \in V_m$  vérifiant

$$e(0)(m_0) = \inf_{m \in V_M} e(0)(m), \quad (5.225)$$

avec

$$e(0)(m) = \int_{\omega} Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) + |(a_3(x), m)|^2 d_0 dx. \quad (5.226)$$

avec

$$\begin{aligned} & Q_T^{2,3} W_0(x, m(x), (m_{,1}|m_{,2})) \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O; m^\perp)} \frac{1}{\text{meas}(O)} \int_O \inf_{z \in m^\perp} \{ \varphi(m) + \alpha |((m_{,1}|m_{,2}) + \nabla \chi(s)|z) A_0|^2 \} ds \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3}; m^\perp)} \frac{1}{\text{meas}(O_{a_3})} \int_{O_{a_3}} \inf_{z \in m^\perp} \{ \varphi(m) + \alpha | (m_{,1}|m_{,2}|0) A_0 + D_{a_3^\perp} \chi(s) + z \otimes a_3|^2 \} ds. \end{aligned}$$

Dans la configuration initiale, c'est-à-dire sur la surface courbée, le théorème 5.5.1 nous donne l'énergie limite qui s'écrit

$$\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = \int_{\tilde{S}} \left\{ \tilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) + |(a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})), \tilde{m}(\tilde{x}))| \right\} d\tilde{x}, \quad (5.227)$$

avec

$$\begin{aligned} & \tilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) \\ &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3}; \tilde{m}^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(O_{a_3})} \int_{O_{a_3}} \left\{ \inf_{z \in \tilde{m}^\perp} [\varphi(\tilde{m}) + \alpha | \nabla \tilde{m} + z \otimes a_3 + D_{a_3^\perp} \chi(s)|^2] \right\} ds \right]. \end{aligned} \quad (5.228)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} | \nabla \tilde{m} + z \otimes a_3 + D_{a_3^\perp} \chi(s) |^2 &= |\nabla \tilde{m}|^2 + |z \otimes a_3|^2 + |D_{a_3^\perp} \chi(s)|^2 \\ &+ 2(\nabla \tilde{m} : z \otimes a_3) + 2(\nabla \tilde{m} : D_{a_3^\perp} \chi(s)) + 2(z \otimes a_3 : D_{a_3^\perp} \chi(s)). \end{aligned} \quad (5.229)$$

Or, comme on sait que  $\nabla \tilde{m} a_3 = 0$  ceci implique que

$$\begin{aligned} (\nabla \tilde{m} : z \otimes a_3) &= \text{tr} (\nabla \tilde{m} (z \otimes a_3)^T) \\ &= \text{tr} (\nabla \tilde{m} (a_3 \otimes z)) \\ &= \text{tr} (\nabla \tilde{m} a_3 \otimes z) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.230}$$

De même, puisque  $D_{a_3^\perp} \chi(s) a_3 = 0$  on obtient que

$$(z \otimes a_3 : D_{a_3^\perp} \chi(s)) = 0. \tag{5.231}$$

Les estimations (5.230) et (5.231) impliquent que

$$|\nabla \tilde{m} + z \otimes a_3 + D_{a_3^\perp} \chi(s)|^2 = |\nabla \tilde{m}|^2 + |z \otimes a_3|^2 + |D_{a_3^\perp} \chi(s)|^2 + 2(\nabla \tilde{m} : D_{a_3^\perp} \chi(s)). \tag{5.232}$$

Ceci implique que l'infimum de cette quantité sur les  $z \in \tilde{m}^\perp$  est atteint pour  $z \in a_3^\perp \cap \tilde{m}^\perp$  en particulier pour  $z = 0$ . On obtient donc que

$$\widetilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) = \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O_{a_3}; \tilde{m}^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(O_{a_3})} \int_{O_{a_3}} [\varphi(\tilde{m}) + \alpha |\nabla \tilde{m} + D_{a_3^\perp} \chi(s)|^2] ds \right]. \tag{5.233}$$

On procède ensuite au changement de variables inverse de (5.220). On obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(O; \tilde{m}^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(O)} \int_O [\varphi(\tilde{m}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha |\nabla \tilde{m} + (\nabla \chi(s)|_0) A_0(\psi^{-1}(\tilde{x}))|^2] ds \right], \end{aligned} \tag{5.234}$$

avec  $O$  un ouvert borné quelconque de  $\mathbb{R}^2$ . L'inversibilité de la matrice  $A_0(\psi^{-1}(\tilde{x}))$  implique que

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) &= \inf_{\chi \in W_0^{1,\infty}(D; \tilde{m}^\perp)} \left[ \frac{1}{\text{meas}(D)} \int_D [\varphi(\tilde{m}) + \alpha |\nabla \tilde{m} + \nabla \chi(s)|^2] ds \right] \\ &= \varphi(\tilde{m}) + \alpha Q_T^{3,3} \Phi(\nabla \tilde{m}), \end{aligned}$$

avec  $\Phi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\Phi(A) = |M|^2$  et  $D$  un ouvert borné quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . Comme la fonction  $\Phi$  est convexe, ce qui implique que son enveloppe quasiconvexe tangentielle est elle-même, on a

$$\widetilde{W}(a_3(\tilde{x}), \tilde{m}, \nabla \tilde{m}(\tilde{x})) = \varphi(\tilde{m}) + \alpha |(\nabla \tilde{m})|^2 \tag{5.235}$$

et donc finalement on obtient que

$$\tilde{e}(0)(\tilde{m}) = \int_{\tilde{S}} \left\{ \varphi(\tilde{m}) + \alpha |(\nabla \tilde{m})|^2 + |(a_3(\psi^{-1}(\tilde{x})), \tilde{m}(\tilde{x}))|^2 \right\} d\tilde{x}. \quad (5.236)$$

## 5.7 Modèle avec champ magnétique extérieur

Lorsqu'on plonge le film courbé dans un champ magnétique extérieur uniforme  $H_e$  l'énergie totale régissant le comportement du film contiendra un terme d'énergie  $E_{ext}$  appelé énergie externe ou de Zeeman dépendant de la magnétisation  $\tilde{m}_h$  du film avec

$$\tilde{E}_{ext}(\tilde{m}_h) = \frac{1}{h} \int_{\tilde{\Omega}_h} (H_e, \tilde{m}_h) d\tilde{x}. \quad (5.237)$$

En posant pour tout  $x \in \Omega_1$ ,  $m(h)(x) = \tilde{m}(\Psi(x_1, x_2, hx_3))$  et  $E_{ext}(h)(m(h)(x)) = \tilde{E}_{ext}(\tilde{m}_h)$  on obtient

$$E_{ext}(h)(m(h)) = \int_{\Omega_1} (H_e, m(h)) d_h dx. \quad (5.238)$$

Lorsque  $m(h)$  converge vers  $m(0)$  fortement dans  $L^2(\Omega_1; \mathbb{R}^3)$  avec  $m(0),_3 = 0$  sur  $\Omega_1$ , on a pour une sous suite encore notée  $h$

$$\begin{aligned} E_{ext}(h)(m(h)) &\rightarrow E_{ext}(0)(m(0)) \\ &= \int_{\omega} (H_e, m(0)) d_0 dx. \end{aligned}$$

L'énergie limite totale sera alors de la forme

$$e(0)(m(0)) = \int_{\omega} \left\{ Q_T^{2,3} W_0(x, m(0)(x), (m(0),_1 | m(0),_2)) + |(a_3(x), m(0))|^2 + (H_e, m(0)) \right\} d_0 dx. \quad (5.239)$$

# Conclusions générales





# Conclusions générales

L'étude des films minces courbés s'avère être plus compliquée et nécessite des calculs plus complexes et moins évidents à effectuer que celle des films plans. Cependant, nous avons constaté au cours de notre étude que les modèles limites obtenus pour les films courbés sont non seulement plus généraux, mais aussi dans certains cas, assez différents de ceux obtenus pour les films plans. Ces différences s'illustrent, par exemple, dans le cas de l'analyse asymptotique des films martensitiques par l'apparition dans le modèle limite de termes qui n'existent pas dans le cas des films plans. Dans des simulations ou des calculs à haute précision, ces différences peuvent changer considérablement les informations obtenues.

Il existe d'autres modèles étudiés pour les films plans qui peuvent être adaptés aux cas des films courbés. L'ajout de termes de dérivées d'ordre supérieur à 2 par exemple, peut très probablement engendrer des différences dans les modèles limites obtenus par rapport au cas plan.

Divers types de travaux effectués pour l'étude des films élastiques peuvent être adaptés aux films ferromagnétiques, tels que l'étude des films non homogènes ou des films superposés. La condition de saturation sur le matériel ferromagnétique aura sans doute des incidences sur le modèle limite. Il serait aussi intéressant d'étudier les modèles ferromagnétiques exprimés à l'aide de l'espace  $SBV$  à valeurs dans la sphère unité.

Des simulations numériques des résultats obtenus peuvent être envisagées sur des exemples où l'on connaît l'expression explicite de l'énergie.



# **Bibliographie**



# Bibliographie

- [1] E. ACERBI, G. BUTTAZZO and D. PERCIVALE, *A variational definition for the strain energy of an elastic string*. Journal of Elasticity 25, (1991), 137-148.
- [2] E. ACERBI and N. FUSCO, *Semicontinuity problems in the calculus of variations*. Arch. Rational Mech. Anal. 86, (1984) 125-145.
- [3] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*. Academic Press, New York (1975).
- [4] R. ALICANDRO and C. LEONE, *3D-2D Asymptotic analysis for micromagnetic thin films*, ESAIM : COCV, 6 (2001), 489-498.
- [5] H. ATTOUCH, *Variational convergence for functions and operators*. Pitman, Boston.
- [6] J.M. BALL, *Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 88A, 1981, p. 315-328.
- [7] K. BHATTACHARYA, I. FONSECA and G. FRANCFORT, *An asymptotic study of the debonding of thin films*. Arch. Rational Mech. Anal. 161,(2002), 205-229.
- [8] K. BHATTACHARYA and R.D. JAMES, *A theory of thin films of martensitic Materials with applications to microactuators*. Journal Mech. phys. Solids 47,(1999), 531-576.
- [9] A. BRAIDES, I. FONSECA and G. FRANCFORT, *3D-2D asymptotic analysis for inhomogeneous thin films*. Ind. U. Math. J. 49,(2001), 1367-1404.
- [10] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [11] H. BREZIS, *Equations de Ginzburg-Landau et singularités*, Cours de DEA 2001-2002. Publications du laboratoire d'analyse numérique.
- [12] W.F. BROWN, *Micromagnetics*, New York : Wiley, 1963.
- [13] P.G. CIARLET, *A justification of the Von Kármán equation*. Arch. Rational Mech. Anal., 73 : 349-189, 1980.

- [14] P.G. CIARLET, *Élasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris, 1986.
- [15] P.G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Three-dimensional elasticity.
- [16] P.G. CIARLET, *Plates and Junctions in Elastic Multi-structures : An Asymptotic Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [17] P.G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. II*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1997. Theory of plates.
- [18] P.G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. III*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988. Theory of shells.
- [19] P.G. CIARLET and P. DESTUYNDER *A justification of the two-dimensional linear plate model*. J. Mécanique,18(2) : 315-344, 1979.
- [20] P.G. CIARLET and J. NEČAS, *injectivité presque partout, auto-contact, et non interpénétrabilité en élasticité non linéaire tridimensionnelle*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série I, n 11, 1985.
- [21] P.G. CIARLET and J. NEČAS, *Injectivity and self contact in nonlinear elasticity*. Arch. Rational Mech. Anal. 97, (1987), 171-188.
- [22] B. DACOROGNA, *Direct methods in the calculus of variations*. Applied mathematical sciences (1978), Springer-Verlag, Berlin.
- [23] B. DACOROGNA and I. FONSECA, *Minima absolus pour des énergies ferromagnétiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331, Série 1, p. 497-500, 2000.
- [24] B. DACOROGNA, I. FONSECA, J. MALÝ and K. TRIVISA, *Manifold constrained variational problems*. Calc. Var.9 (1999), 185-206.
- [25] G. DAL MASO, *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications (1993), Birkhäuser.
- [26] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*. Rend. Mat. (IV), 8 (1975), 277-294.
- [27] E. DE GIORGI and T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*. Atti. Accad. Naz. Lincei, 58, (1975), 842-850.
- [28] A. DE SIMONE, *Energy minimizers for large ferromagnetic bodies*. Arch. Rational Mech. Anal. 125, (1993) 99-143.

- 
- [29] P. DESTUYNDER, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*. Doctoral Sissertation, Université Pierre et Marie Curie (1980).
- [30] I. EKELAND and R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod, Paris.
- [31] D.D. FOX, A. RAOULT and J.C. SIMO, *A justification of nonlinear properly invariant plate theories*. Arch. Rational Mech. Anal., 124(2) :157-199, 1993.
- [32] K.O. FRIEDRICHS and R.F. DRESSLER, *A boundry-layer theory for elastic plates*. Comm. Pure Appl. Math., 14 :1-33, 1961.
- [33] G. GIOIA and R.D. JAMES, *Micromagnetics of very thin films*. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A 453 (1997) 213-223.
- [34] A.L. GOLDENVEIZER, *Derivation of an approximate theory of shells by means of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity*. Prikl. Mat. Mech., 27 :593-608, 1963.
- [35] L.D. LANDAU and E.M. LIFSCHITZ, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*. Phys. Z. Sowjetunion 8 (1935), 153-169.
- [36] H. LE DRET and N. MEUNIER, *Modeling heterogeneous martensitic wires*. In press.
- [37] H. LE DRET and N. MEUNIER, *Heterogeneous wires made of martensitic materials*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 143-147.
- [38] H. LE DRET and A. RAOULT, *The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity*. J. Math. Pures Appl. (9), 74(6) : 549-578, 1995.
- [39] H. LE DRET and A. RAOULT, *The membrane shell model in nonlinear elasticity : A variational asymptotic derivation*. J. Nonlinear Sci : 59-84, 1996.
- [40] H. LE DRET and H. ZORGATI, *Films courbés minces martensitiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 65-69.
- [41] P. MARCELLINI, *Approximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals*. Manuscripta Math. 51 (1985) 1-28
- [42] B. MIARA, *Analyse asymptotique des coques membranaires non linéairement élastiques*. C.R, Acad. Sci. Paris, 318, Série I, p 689-694.
- [43] C.B. MORREY JR, *Quasiconvexity and the semicontinuity of multiple integrals*. Pacific J. Math., 2 (1952), p 25-53.



- [44] O. PANTZ, *Quelques problèmes de modélisation en élasticité non linéaire*. Thèse de Doctorat de l'Université de Pierre et Marie Curie, Paris, 2001.
- [45] D. PERCIVALE, *The variational method for tensile structures*. Politecnico di Torino, Dipartimento di Matematica. Research Report # 16.
- [46] A. RAOULT, *Doctoral Dissertation*. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1988.
- [47] Y.C. SHU, *Heterogeneous thin films of martensitic materials*. Arch. Rational Mech. Anal. 153 : 39-90, 2000.
- [48] V. ŠVERÁK, *Regularity properties of deformations with finite energy* Arch. Rational Mech. Anal. 100, (1988), 105-127.
- [49] Q. TANG, *Almost-everywhere injectivity in nonlinear elasticity*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 109A, 1988, p. 79-95.

## Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation des films minces courbés du type martensitique, hyperélastiques et ferromagnétiques. L'épaisseur de ces films suivant la direction normale à leur surface moyenne est très petite devant les autres dimensions du film. Dans le cas des films hyperélastiques, on considère que ceux-ci sont fixés à un substrat tout en pouvant s'en décoller. La formulation du problème exclut l'interpénétration du film et du substrat. Les états d'équilibre de ces films sont dans tous les cas décrits par des problèmes de minimisation d'énergie dépendant de la déformation que subit le film ou de la magnétisation dans le cas des films ferromagnétiques. On étudie le comportement de ces énergies ainsi que celui de leurs éventuels minimiseurs, lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro à l'aide des outils de la  $\Gamma$ -convergence et de développement asymptotique formel. On obtient des modèles bidimensionnels où l'énergie limite s'écrit sur une surface courbée de  $\mathbb{R}^3$ .

**Mots-clés:** films minces courbés, martensite, hyperélasticité, ferromagnétisme,  $\Gamma$ -convergence, élasticité non linéaire, développement asymptotique formel, non interpénétration de la matière.

## Abstract

This doctoral dissertation is devoted to the modeling of curved thin films made of martensitic, hyperelastic and ferromagnetic materials. The thickness of the films along the normal direction to their midsurface is very small compared with the other dimensions of the films. In the case of hyperelastic films, we consider films that are bounded to a substrate while allowing for debonding. The formulation of the problem prevents film/substrate interpenetration. The equilibrium states of the films are described by energy minimization problems, with energies depending on the film deformation or magnetization in the case of ferromagnetic films. We study the behavior of these energies and their possible minimizers when the thickness of the film tends to zero using the  $\Gamma$ -

convergence arguments and formal asymptotic expansion. We obtain two-dimensional models in which the limiting energy is written on a curved surface of  $\mathbb{R}^3$ .

**Keywords:** curved thin films, martensite, hyperelasticity, ferromagnetism,  $\Gamma$ -convergence, nonlinear elasticity, formal asymptotic expansion, noninterpenetration of matter.