

# Intégration d'une contrainte logique dans les problèmes de contrôle optimal et résolution par la programmation mixte

Dorin Preda

Laboratoire Informatique et Mathématiques Appliquées  
LIMA-IRIT

14 Décembre 2004



- 1 Position du problème
  - Modélisation. Problème mixte
- 2 Contrainte logique
  - Solution saturée
  - Réduction de l'espace de recherche
- 3 MINLP issu d'une dynamique linéaire
  - Modèle MIQP
  - Modèle MINLP
- 4 Transfert orbital. Optimisation globale
  - Branch and Reduce
  - Convexification
- 5 Conclusion

# Position du problème

# Contrôle optimal et contrainte logique

- Contrôle optimal :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x(\cdot), u(\cdot)} \int_0^{t_f} |u(t)|^2 dt \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = F(t, x(t), u(t)) \quad t \in [0, t_f] \\ x(0) = x^0 \\ x(t_f) = x^f \\ |u(t)| \leq U_{max} \quad t \in [0, t_f] \end{array} \right.$$

## Contrainte logique ( $C_\Delta$ )

*Sur chaque intervalle de temps  $[\tau, \tau + \delta] \subset [t_0, t_f]$  de longueur  $\delta$  (où  $\tau \in [t_0, t_f - \delta]$ ) la durée du contrôle ne peut pas dépasser  $\delta_0$  ( $0 < \delta_0 < \delta$ ).*

# Intérêt

- Motivation :
  - sûreté de fonctionnement de l'organe de commande
  - satellite autour de la Terre, visibilité du Soleil
- Difficultés :
  - nature logique de la contrainte
  - fonction discontinue ou variables discrètes :

$$\int_t^{t+\delta} \chi(u(s)) ds \leq \delta_0 \quad t \in [t_0, t_f - \delta],$$

où la fonction  $\chi$  :

$$\chi(u(t)) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } |u(t)| = 0, \\ 1 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

- Méthode :
  - discrétisation  $\Rightarrow$  programmation mixte

# Discrétisation

- Collocation directe :

- l'état

$$x(t) \approx c_i^3 \left(\frac{t-t_i}{h}\right)^3 + c_i^2 \left(\frac{t-t_i}{h}\right)^2 + c_i^1 \frac{t-t_i}{h} + c^0, \quad t \in [t_i, t_{i+1})$$

- le contrôle

$$u(t) \approx u_i \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_i, t_{i+1})$$

- Equations :

- continuité de  $x(\cdot)$  et  $\dot{x}(\cdot)$
  - vérification de la dynamique en  $t_i$  et  $(t_i + t_{i+1})/2$

# Contrainte logique

- Variables binaires ( $y \in \{0,1\}^{N+1}$ ) :
  - $y_i = 0 \Rightarrow |u_i| = 0$
  - $y_i = 1 \Rightarrow |u_i| \leq U_{max}$
- Contrainte logique :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 + y_1 + \dots + y_{\Delta-1} \leq \Delta_0 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_{\Delta} \leq \Delta_0 \\ \dots \\ y_i + y_{i+1} + \dots + y_{i+\Delta-1} \leq \Delta_0 \\ \dots \\ y_{N-\Delta} + y_{N-\Delta+1} + \dots + y_{N-1} \leq \Delta_0 \\ y_{N-\Delta+1} + y_{N-\Delta+2} + \dots + y_N \leq \Delta_0 \end{array} \right.$$

- $Y_{\Delta} = \{y \in \{0,1\}^{N+1} \mid C_{\Delta} y \leq \Delta_0\}$

## Premier modèle

- Idée : remplacer  $u_i$  par  $u_i y_i$
- Problème mixte :

$$\begin{aligned} \min_{x,u,y} \quad & \sum_{i=0}^N u_i^2 \\ \text{s.t.} \quad & F(x,u \odot y) = 0 \quad (\text{dynamique}) \\ & |u_i| \leq U_{max} \quad (\text{contrôle borné}) \\ & C_{\Delta} y \leq \Delta_0 \quad (\text{contrainte logique}), \end{aligned}$$

avec  $u \odot y = (\dots, u_i y_i, \dots)$

- **Avantage** : modélisation naturelle
- **Désavantage** : on change le type de problème



## Deuxième modèle

- Prendre en compte les contraintes de "boîte" :

$$\begin{cases} u_i - U_{max}y_i \leq 0 \\ u_i + U_{max}y_i \geq 0 \end{cases}$$

- Problème mixte :

$$\begin{array}{ll} \min_{x,u,y} & u^T u \\ \text{s.t.} & F(x,u) = 0 \quad (\text{dynamique}) \\ & u_i - U_{max}y_i \leq 0 \quad (\text{rôle des variables ...}) \\ & u_i + U_{max}y_i \geq 0 \quad (\text{... binaires}) \\ & |u_i| \leq U_{max} \quad (\text{contrôle borné}) \\ & C_{\Delta}y \leq \Delta_0 \quad (\text{contrainte logique}) \end{array}$$

- **Avantage** : on garde le même type de problème
- **Désavantage** : modélisation "forcée"

## Vers la résolution ...

### Idée

- Minorer/majorer
- Exploiter la forme particulière du problème

### Objectifs

- Propriétés des contraintes logiques
- Dynamique linéaire
  - modèle MIQP (B&C, GOA, GBD)
  - modèle MINLP (?)
- Transfert orbital
  - algorithme Branch and Reduce
  - optimisation globale basée sur la **convexification** (minoration) et l'analyse d'intervalle (réduction du domaine)

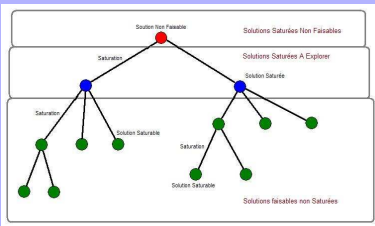
# Contrainte logique

# Solution saturée

Soit  $P(y)$  le problème obtenu en fixant  $y$

## Proposition

Si  $y^1, y^2 \in Y_\Delta$  et  $y_i^1 \geq y_i^2, i = \overline{0, N}$  alors  $val(P(y^1)) \leq val(P(y^2))$ .



## Saturation

Pour chaque composante  $y_i$

Si  $y_i = 0$  alors

$$\bar{y}^k = (y_0, y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_N)$$

si  $\bar{y}^k \in Y_\Delta$  alors  $y = \bar{y}$ ;

Fin si

Fin pour

# Espace de recherche

- $\bar{Y}_\Delta = \{y \in Y_\Delta | y \text{ saturé}\}$

## Proposition

Si  $y \in \bar{Y}_\Delta$  alors

$$\begin{array}{rcll}
 \Delta_0 & \leq & y_0 + y_1 + \dots + y_{\Delta-1} & \leq \Delta_0 \\
 \Delta_0 - 1 & \leq & y_1 + y_2 + \dots + y_\Delta & \leq \Delta_0 \\
 & & \dots & \\
 \max(0, -\Delta + 2\Delta_0) & \leq & y_k + y_{k+1} + \dots + y_{k+\Delta-1} & \leq \Delta_0 \\
 & & \dots & \\
 \Delta_0 - 1 & \leq & y_{N-\Delta} + y_{N-\Delta+1} + \dots + y_{N-1} & \leq \Delta_0 \\
 \Delta_0 & \leq & y_{N-\Delta+1} + y_{N-\Delta+2} + \dots + y_N & \leq \Delta_0.
 \end{array}$$

## Élimination, Matrice TU

## Élimination

Si  $y^k \in \bar{Y}_\Delta$  alors la contrainte  $y^T(e - y^k) \geq 1$  élimine seulement  $y^k$  et tout autre vecteur  $y$  se saturant en  $y^k$ .

## Matrice Totalement Unimodulaire

$\left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T y \\ y \in [0,1]^n & \\ \text{s.t.} & C_\Delta y \leq \Delta_0 \end{array} \right.$	a les mêmes	$\left\{ \begin{array}{ll} \min & c^T y \\ y \in \{0,1\}^n & \\ \text{s.t.} & C_\Delta y \leq \Delta_0. \end{array} \right.$
	solutions optimales que	

# MINLP issu d'une dynamique linéaire

# Les algorithmes : Branch and Bound

## Idée

Énumérer les alternatives d'un problème, sans explorer toutes les combinaisons possibles (arbre de solutions)

Concepts :

- **Séparation** : résoudre  $(P) \Leftrightarrow (P1 : y_i = 0) \wedge (P2 : y_i = 1)$
- **Relaxation** : trouver des sous-estimations de  $val(P1)$  et  $val(P2)$
- **Élimination** : basée sur la sous-estimation

Utilisation :

- MILP, MIQP
- au cas par cas ...



## GOA et GBD

## Idée

Itérer entre une sur-estimation (**primal**) et une sous-estimation (**master**) du minimum global.

## Primal

Problème obtenu en fixant  $y$  :  $P(y)$

 $(\bar{x}^k, \bar{\lambda}^k)$ 

## Master

Problème mixte obtenu :

- approximation extérieure (GOA)
- la théorie de la dualité (GBD)

 $y^{k+1}$

## Première modélisation

## La formulation MIQP

$$\text{Min } \frac{1}{2} u^T u$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$Cx + Du = d$$

$$-U_{\max} y_i \leq u_i \leq U_{\max} y_i, \quad i = \overline{0, N} \quad (\text{Var. Bin.})$$

$$C_{\Delta} y \leq \Delta_0, \quad i = \overline{0, N - \Delta + 1} \quad (C_{\Delta})$$

Avantages :

- relaxation quadratique en  $x, u$  et  $y$
- séparabilité en  $x, u$  et  $y$

⇒ **GOA, GBD, B&B**

## Résultats modèle MIQP

## Résultats

$N_{var}^d$	$\Delta$	$\Delta_0$	$N_{var}^c$	$N_{contr}$	$t_{B\&B}(s)$	$t_{GBD}(s)$	$t_{GOA}(s)$
8	5	3	24	22	0.06	0.89	0.69
10	7	4	30	26	0.11	4.82	4.21
15	10	7	45	36	0.24	234.79	115.58
20	15	10	60	48	0.52	*	*
30	20	10	90	73	16.52	*	*
40	30	15	120	96	7.76	*	*
40	25	15	120	93	34.57	*	*
40	25	10	120	96	447.18	*	*
40	20	10	120	93	1009.04	*	*
50	15	10	150	108	428.97	*	*
50	30	20	150	113	43.88	*	*
50	40	20	150	123	144.74	*	*
50	40	30	150	113	4.54	*	*

Résultats obtenus pour un problème de test sur une machine PIII  
1GHz avec 512Mb RAM

## Résultats modèle MIQP

## Résultats

$N_{var}^d$	$\Delta$	$\Delta_0$	$N_{var}^c$	$N_{contr}$	$t_{B\&B}(s)$	$t_{GBD}(s)$	$t_{GOA}(s)$
8	5	3	24	22	0.06	0.89	0.69
10	7	4	30	26	0.11	4.82	4.21
15	10	7	45	36	0.24	234.79	115.58
20	15	10	60	48	0.52	*	*
30	20	10	90	73	16.52	*	*
40	30	15	120	96	7.76	*	*
40	25	15	120	93	34.57	*	*
40	25	10	120	96	447.18	*	*
40	20	10	120	93	1009.04	*	*
50	15	10	150	108	428.97	*	*
50	30	20	150	113	43.88	*	*
50	40	20	150	123	144.74	*	*
50	40	30	150	113	4.54	*	*

Résultats obtenus pour un problème de test sur une machine PIII  
1GHz avec 512Mb RAM

## Résultats (suite ...)

### Branch and Bound

- Problèmes jusqu'à 60 variables binaires
- Arbre mal adapté à notre problème

### GOA et GBD

- pas plus de 15-20 variables
- mauvaise estimation inférieure (notre modélisation)
- exploration de tout l'espace de recherche
- (+) après quelques itérations on obtient une solution très proche de l'optimum

# Modèle MINLP

## Formulation

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \frac{1}{2} u^T u \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & Cx + D(u \cdot y) = d \\ & C_{\Delta} y \leq \Delta_0 \\ & -U_{\max} \leq u_i \leq U_{\max} \quad i = \overline{1, N} \end{aligned}$$

- (-) relaxation non convexe
- (+) à  $y$  fixé,  $P(y)$  est convexe

⇒ **Décomposition de Benders**

# Sous-estimation

## Idée

Utiliser la dualité forte appliquée à  $P(y)$  :

$$\varphi(\lambda, \mu, y) = \min_{x, u} \mathcal{L}(\lambda, \mu, x, u, y)$$

- objectif quadratique :

$$\nabla_u \mathcal{L} = 0 \Rightarrow u_i = f(\lambda, \mu, x, y)$$

- l'état n'apparaît pas dans l'objectif :

$$\nabla_x \mathcal{L} = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda, \mu, y)$$

- $y$  variables binaires ( $y_i^2 = y_i, i = \overline{0, N}$ ) :

$$\text{val}(P(y)) \geq \varphi(\lambda^k, \mu^k, y) = -\frac{1}{2} y^T \eta(\lambda^k, \mu^k) + \xi(\lambda^k, \mu^k)$$

# MINLP : Algorithme

## Variante de GBD

- Soit  $k = 0$  et  $y^k = y_0$  une solution **saturée**
- Soit **LBD** =  $-\infty$ , **UBD** =  $+\infty$
- **Tant que** ( $|\mathbf{UBD} - \mathbf{LBD}| < \epsilon$ )
  - Résoudre  $P(y^k)$ . Mettre à jour **UBD**
  - Ajouter la contrainte  $y(e - y^k) \geq 1$  dans le master
  - Ajouter la contrainte  $\varphi(y, \lambda^k, \mu^k) \leq \mathbf{UBD}$  dans le master
  - Résoudre le master (**MILP**). Mettre à jour **LBD**
  - STOP si master non faisable
  - Saturer la solution du master :  $y^{k+1}$
- **Fin tant que**



# Résultats modèle MINLP

## Résultats

$N_{int}$	$\Delta$	$\Delta_0$	$N_c$	$N_{contr}$	Time(s)	$N_{iter}$
50	30	15	120	123	0.13	5
100	80	60	300	223	0.26	5
150	100	40	450	363	0.25	4
250	200	100	750	553	0.16	2
300	250	200	900	653	1.42	6
300	250	100	900	653	0.19	2
300	150	100	900	753	1.54	7
300	100	25	900	853	0.66	4
500	300	200	1500	1203	0.63	3
700	400	150	2100	1703	8.30	9

- les mêmes conditions de tests (problèmes tests, machine de calcul)
- nette amélioration par rapport au modèle MIQP

# Résultats modèle MINLP

## Résultats

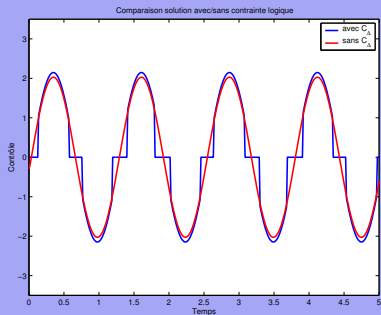
$N_{int}$	$\Delta$	$\Delta_0$	$N_c$	$N_{contr}$	Time(s)	$N_{iter}$
50	30	15	120	123	0.13	5
100	80	60	300	223	0.26	5
150	100	40	450	363	0.25	4
250	200	100	750	553	0.16	2
300	250	200	900	653	1.42	6
300	250	100	900	653	0.19	2
300	150	100	900	753	1.54	7
300	100	25	900	853	0.66	4
500	300	200	1500	1203	0.63	3
700	400	150	2100	1703	8.30	9

- les mêmes conditions de tests (problèmes tests, machine de calcul)
- nette améliorations par rapport au modèle MIQP

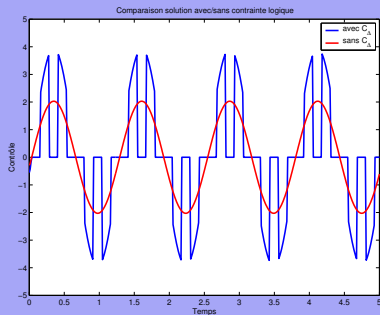
## Oscillateur harmonique

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\omega^2 x(t) + u(t)$$

$N = 400, \Delta = 20, \Delta_0 = 15$



$N = 400, \Delta = 15, \Delta_0 = 10$



- Solution périodique

## Conclusions sur MINLP

Avantages :

- Jusqu'à 2000 variables entières
- Petit nombre d'itérations
- Temps d'exécution faible pour le master (Matrice TU)
- Bons résultats pour tous les problèmes étudiés
- Bons résultats pour des problèmes avec contrôle multidimensionnel

- Intégration possible de la contrainte 
$$\sum_{j=1}^m |u_j(t)|^2 \leq U_{max}^2$$

# Transfert orbital. Optimisation globale

# Branch and Reduce

## Idée

Branch and Bound "spatial" combiné avec l'analyse d'intervalle et la dualité.

Méthode :

- **Majoration** : solution locale du problème non-convexe sur le domaine réduit
- **Minoration** : obtenue en convexifiant le problème non-convexe sur le domaine réduit
- **Réduction** du domaine en utilisant deux techniques (dualité et analyse d'intervalle)
- **Séparation** du domaine ("branch")

## Domaine d'application

### Utilité

On traite des problèmes d'optimisation non-convexe, éventuellement mixtes.

### Avantages :

- démarche adaptable au problème
- méthode générale pour minorer l'optimum global

### Désavantages :

- nature combinatoire
- mise en œuvre fastidieuse

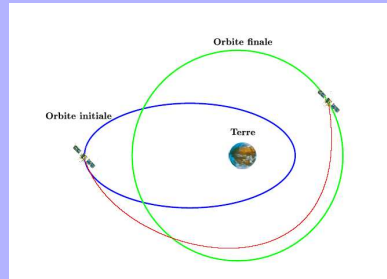
# Le problème (I)

Satellite en mouvement autour de la Terre :  $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{u}}{m}$

- Collaboration CNES
- Transfert coplanaire
- Orbite finale géostationnaire ( $e = 0$ )
- Poussée faible
- Critère :  $\int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\|^2 dt$

Simplification :

- Masse constante





# Le problème (II)

## Formulation

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{r}, \mathbf{u}} \int_0^{t_f} u^2(t) dt \\ \text{s.t.} \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\mu \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} + \frac{1}{m} \mathbf{u}(t) \quad t \in [0, t_f] \\ \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0 \quad \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f \\ \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \dot{\mathbf{r}}(t_f) = \mathbf{v}_f \\ u^2(t) \leq T_{max}^2 \quad t \in [0, t_f] \end{array} \right.$$

- problème non-convexe
- discrétisation par collocation
- solution NLP  $\Rightarrow$  majorant de l'optimum global

# Convexification (I)

## Concepts

- permet l'obtention d'un minorant de l'optimum global
- relaxation de chaque terme non-linéaire  $q(x,u)$  par des enveloppes convexes  $q^{inf}(x,u)$  et concaves  $q^{sup}(x,u)$  :

$$z \leftarrow q(x,u) \quad \text{et} \quad \begin{cases} +z - q^{sup}(x,u) \leq 0 \\ -z + q^{inf}(x,u) \leq 0 \end{cases}$$

## Exemple

Convexification de McCormick pour les fonctions bilinéaires :

$$z = xy \quad \text{et} \quad \begin{cases} z \geq x^U y + y^U x - x^U y^U \\ z \leq x^U y + y^L x - x^U y^L \end{cases}$$

## Convexification (II)

### Avantage :

- méthode générale utilisable pour tout problème non-convexe

### Désavantages :

- ajout de nouvelles variables
- qualité du minorant?

Estimer la qualité de la convexification :

- domaine  $x \in [x_{loc} - \Delta x, x_{loc} + \Delta x]$
- analyse de  $\frac{LBD}{UBD} = f(\Delta x)$

# Coordonnées Cartésiennes (I)

Motivation :

- Petit nombre de termes non-linéaires :  $\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$  et  $\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

Mais ...

- problème discrétisé difficile
- solutions oscillatoires
- termes difficiles à convexifier

## Méthode

- passage en coordonnées polaires :  $\frac{\cos \alpha}{r^2}$  et  $\frac{\sin \alpha}{r^2}$ .
- enveloppes convexes (resp. concaves) quadratiques :

$$a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 r + a_4$$

## Coordonnées Cartésiennes (II)

### Minoration!

Le minorant ainsi obtenu est 0 !

- $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{m} \mathbf{u}$
- relaxation trop importante pour la "force centrale"
- un contrôle nul peut satisfaire les contraintes

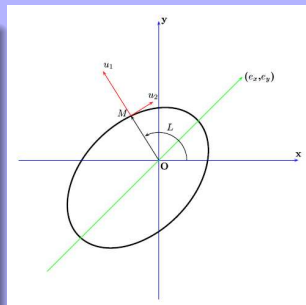
### Relaxation convexe

Les contraintes doivent assurer qu'en l'absence du contrôle le satellite reste sur la même orbite.

## Coordonnées de Gauss

- Paramètres orbitaux  $P, e_x, e_y$  et  $L$
- Intégrales premières du mouvement :  $P, e_x, e_y$
- Contraintes de boîte pertinentes
- (-) termes non-linéaires, mais aussi  $\sin L$  et  $\cos L$

$$\begin{aligned} \dot{P} &= 2 \frac{1}{m\mu} \frac{P^{3/2}}{W} u_2 \\ \dot{e}_x &= \frac{1}{m\mu} (\sin L) P^{1/2} u_1 + \frac{1}{m\mu} P^{1/2} \frac{Q_1}{W} u_2 \\ \dot{e}_y &= -\frac{1}{m\mu} (\cos L) P^{1/2} u_1 + \frac{1}{m\mu} P^{1/2} \frac{Q_2}{W} u_2 \\ \dot{L} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{W^2}{P^{3/2}} \\ W &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \\ Q_1 &= 2 \cos L + e_x (1 + \cos^2 L) + e_y (\sin L \cos L) \\ Q_2 &= 2 \sin L + e_x (\sin L \cos L) + e_y (1 + \sin^2 L) \end{aligned}$$



# Démarche

Préserver  $|u| = 0 \Rightarrow P, e_x, e_y = \text{const}$  :

- utiliser le module :  $u_1, u_2 \leftarrow |u|$
- séparation partie positive et négative :  $u = u^+ - u^-$

Equations :

- contribution de  $\int u_1^2(t) dt \approx 12\%$
- conserver juste les équations  $\dot{P}$  et  $\dot{L}$
- substitution  $R = P^{-1/2}$

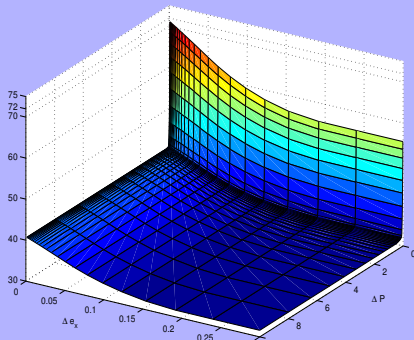
Variable en  $L$  :

- $W = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L \Rightarrow W \in [1 - e^U, 1 + e^U]$

# Analyse

Résultats :

- le rapport  $\frac{LBD}{UBD}$  ne dépasse pas 0.72
- plus efficace à la proximité de la solution ( $\Delta P, \Delta e_x \rightarrow 0$ )
- l'intégration des autres équations n'améliore pas les résultats



## Conclusion

Comment mieux prendre en compte les termes en  $\sin L$  et  $\cos L$ ?



# Formulation en longitude

## Solution

Exprimer les équations de Gauss en fonction de  $L$  :

- $\cos L$  et  $\sin L$  deviennent constantes
- $W$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  expressions linéaires

Désavantage :

- substitution  $u \leftarrow u \frac{P^{3/4}}{W}$

Amélioration :

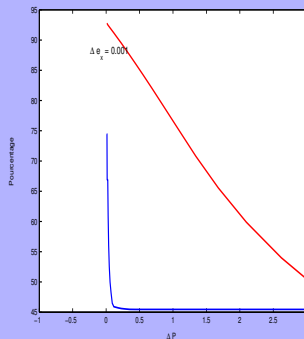
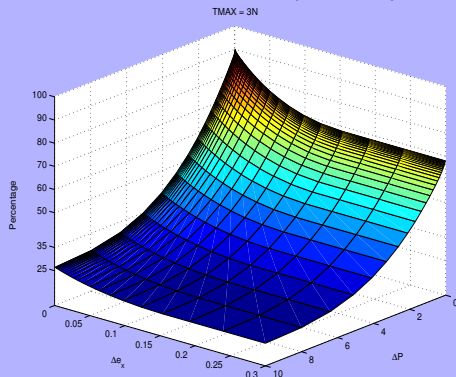
- passage à :  $R = \frac{1}{P}, E_x = \frac{e_x}{P}, E_y = \frac{e_y}{P}$

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{P}\right) + \frac{d}{dL}\left(\frac{e_x}{P}\right) \cos L + \frac{d}{dL}\left(\frac{e_y}{P}\right) \sin L = 0$$

# Analyse

- $\frac{LBD}{UBD} \rightarrow 0.95$
- temps de calcul important
- relaxation quadratique (CPLEX)

$N_{dis}$	$N_{tot}$	$t_{exec}(s)$	Rapport (%)
200	10775	23.6914	89.21262
400	21575	50.2818	89.51814
1000	53975	166.7295	89.75155



# Résultats (I)

Bilan :

- problèmes de petite taille (15-20 points de discrétisation)
- temps de calcul important (quelques jours)
- grand nombre d'itérations

Points positifs :

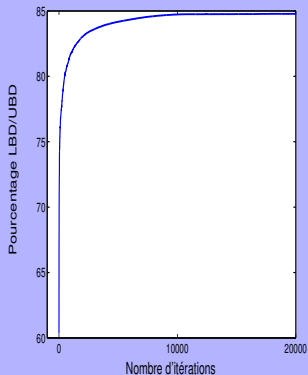
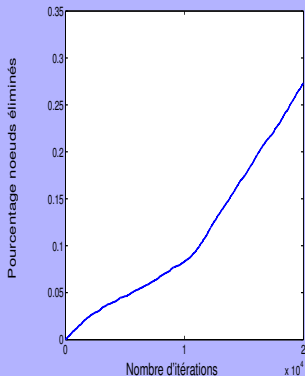
- nombre de noeuds éliminés
- réduction basée sur l'analyse d'intervalle

Difficulté :

- la minoration !

## Résultats (II)

$$\begin{array}{ll}
 N = 30 & T_{max} = 2.3 \\
 L^0 = \pi & L^f = L^0 + 6\pi \\
 P^0 = 36.625 & P^f = 42.165 \\
 e_x^0 = 0.15 & e_x^f = 0.00 \\
 e_y^0 = 0.00 & e_y^f = 0.00
 \end{array}$$



No. itér	100000
Rapport	85%
Temps	$\approx 10$ jours
No. noeuds	$\approx 100000$

# Conclusion

# Conclusion

## Dynamique linéaire

- Prise en compte de  $C_{\Delta}$
- Analyse de l'espace de recherche  $C_{\Delta}$
- Algorithme GBD  $\Rightarrow$  taille importante (2000 variables entières)

## Transfert orbital

- Limitation aux variables continues
- Adaptation de l'algorithme au transfert orbital 2D
- (-) Petite taille (20 points de discrétisation)
- (-) Efficacité de la convexification

# Perspectives

## Dynamique linéaire

- Prise en compte de contraintes quadratiques séparables
- Intégration de  $C_{\Delta}$  dans un problème convexe

## Transfert orbital

- Heuristiques : séparation, choix du noeud suivant
- Minoration : dualité
- $C_{\Delta}$  : SQP  $\rightsquigarrow$  S-MINLP