

# Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données de rang réduit dans un modèle de circulation océanique: application à l'océan Pacifique Tropical

Céline Robert

# ► To cite this version:

Céline Robert. Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données de rang réduit dans un modèle de circulation océanique : application à l'océan Pacifique Tropical. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2004. Français. NNT : . tel-00008891

# HAL Id: tel-00008891 https://theses.hal.science/tel-00008891

Submitted on 29 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

Pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I (arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Mathématiques Appliquées

présentée par

# Céline ROBERT

Développement et comparaison de méthodes d'assimilation de données de rang réduit dans un modèle de circulation océanique : application à l'océan Pacifique Tropical

Date de soutenance : 21 Décembre 2004

Composition du jury :

Francois-Xavier Le Dimet	LMC-Université Joseph Fourier	Président
Jacques Blum	LJD-Université de Nice	Rapporteur
Olivier Talagrand	LMD-ENS	Rapporteur
Herlé Mercier	LPO-IFREMER	Examinateur
Anthony Weaver	CERFACS	Examinateur
Eric Blayo	LMC-Université Joseph Fourier	Directeur
Jacques Verron	LEGI-CNRS	Co-directeur

Thèse préparée au sein du Laboratoire de Modélisation et Calcul (IMAG projet IDOPT) et du Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels.

# Remerciements

Bienvenue sur la page personnelle des remerciements ... Un travail de thèse est sans doute le fruit de plusieurs contributions. Celui-çi s'est construit petit à petit avec la participation active bien sûr des membres des équipes dans lesquelles j'ai travaillé mais aussi de certaines collaborations extérieures et de ce que j'avais déjà acquis en débutant. Il me semble finalement que chaque élément, même petit a sans doute joué un rôle.

Alors un grand merci à mes parents qui m'ont toujours encouragée à faire des études (j'ai bien suivi leurs conseils n'est ce pas?). Un grand merci à mes enseignants de l'ESM2 pour l'avoir fait découvrir les joies de la recherche avec un merci particulier à Gérard Tavéra.

Mes expériences précédentes à Aix et au laboratoire ID-IMAG ont sans doute renforcé mon goût pour la recherche et finalement poussée à reprendre une thèse, alors je voulais remercier ici Claude Millot qui m'a permis d'aller en mer goûter aux joies de la mesure dans le golfe du Lion et puis en Tunisie. J'en garde encore un grand souvenir et cela m'a permis de découvrir que je préfère quand même faire de l'océanographie derrière un ordinateur!

Merci aux membres du projet IDOPT et de l'équipe EDP du LMC de m'avoir intégrée dans leur rang. Un grand merci à mes collègues de bureau en particulier mes joyeux collègues de la salle 3 (et assimilés) : William, Marc, Cyril, Ehouarn, Florian, Morgan, Carine et les autres pour les pauses café, les pauses café et les pauses thé, les discussions de foot, les discussions tout court, qui ont contribué à créer un environnement de travail très agréable. Merci aussi à mes collègues de sport : Cathy, Manu, William, ..., pour la motivation, la forme et l'endomorphine.

Comme j'ai quand même travaillé, je remercie aussi les 4D-Varistes : Sophie et Arthur pour la mise en route, Anthony pour le code et Maelle pour les dicussions !

De même, un petit clin d'œil à l'équipe assimilation du LEGI, pour les réunions du jeudi. Un grand merci à Jean-Michel pour les conseils techniques, la mise en œuvre du filtre SEEK et les réponses aux questions !

Et puis un grand merci à Eric Blayo pour ses qualités de directeur de thèse. Il a su suivre ce travail de près tout en me laissant une autonomie très importante ! Ma démarche initiale sortait un peu de l'ordinaire mais c'est sans inquiétude (apparente au moins :)) qu'il a accepté d'encadrer ce travail. Il a toujours su se rendre disponible y compris pour la relecture et pour tout cela je l'en remercie très sincèrement ! Merci également à Jacques Verron qui m'a donné les moyens d'effectuer ce travail dans le cadre d'une collaboration avec le LEGI, dans un environnement dynamique. Tout ceci a permis de créer un cadre très favorable au déroulement de cette thèse. Merci enfin à tous les membres du jury de thèse d'avoir accepté d'évaluer ce travail et l'attention qu'ils y ont portée ainsi que pour pour leurs remarques constructives. Merci donc à Jacques Blum, Olivier Talagrand, Herlé Mercier et Anthony Weaver ainsi qu'à François-Xavier Le Dimet qui a accepté d'en être le Président.

Je finis par le pilier de l'équipe, celui qui est toujours là dans les bons moments comme dans l'adversité : merci Vincent.

Encore Merci a tous et longue vie à la recherche publique!

# Table des matières

$\mathbf{R}$	Remerciements			
In	trod	uction		1
1	L'assimilation de données : introduction théorique			<b>5</b>
	1.1	L'assin	milation de données $\ldots$	6
		1.1.1	Introduction	6
		1.1.2	Composantes d'un système d'assimilation : description et notations	6
		1.1.3	Les erreurs dans le processus	8
	1.2	Métho	des d'assimilation séquentielle $\ldots$	10
		1.2.1	Filtre de Kalman	10
		1.2.2	Filtre de Kalman Etendu	12
		1.2.3	Contraintes liées à la mise en œuvre pratique	13
	1.3	Assim	ilation variationnelle	13
		1.3.1	Formulation du problème	14
		1.3.2	Formulations dicrètes	16
		1.3.3	Contrôle de l'erreur modèle	18
		1.3.4	Minimisation de la fonction coût par méthode adjointe $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	19
		1.3.5	La matrice B en assimilation variationnelle $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	22
	1.4	Equiva	alence formelle	27
	1.5	Réduc	tion d'ordre en assimilation de données	27
		1.5.1	Principe théorique	27
		1.5.2	Application au filtre de Kalman : le filtre SEEK	28
		1.5.3	4D–VAR réduit	31
		1.5.4	Conclusions	32
	1.6	Analy	se et diagnostics	32
		1.6.1	Validation des systèmes	32
		1.6.2	Différentes normes utilisées dans le processus d'assimilation	33
<b>2</b>	L'as	ssimila	tion de données dans l'océan Pacifique tropical	37
	2.1	Dynar	nique de l'océan Pacifique Tropical	38

		2.1.1	La dynamique océanique en période normale	38
		2.1.2	Le phénomène El Niño	39
		2.1.3	La dynamique océanique en période El Niño	40
	2.2	Le mo	dèle OPA	43
		2.2.1	Hypothèses et équations	43
		2.2.2	Discrétisation	45
	2.3	Config	guration des expériences : le modèle TDH	46
		2.3.1	Caractéristiques du modèle	46
		2.3.2	Forçages utilisés	47
		2.3.3	Ebauche et état initial	48
		2.3.4	Données assimilées	48
	2.4	Modél	isation numérique de la zone Pacifique Tropical et validation du modèle OPA .	49
	2.5	Assim	ilation variationnelle dans l'océan Pacifique Tropical	51
		2.5.1	Assimilation de données de température TAO	51
	2.6	Assim	ilation séquentielle dans l'océan Pacifique Tropical	53
		2.6.1	Assimilation séquentielle de champs 2D	53
		2.6.2	Assimilation séquentielle de champs 3D	53
3	Exp	périenc	es préliminaires de validation et expériences jumelles en assimilation	
Vā	ariati	onnelle	2	55
	3.1	Les co	mposantes du $4D$ -VAR complet : la matrice B, les forçages et la variable assimilée	56
		3.1.1	Contexte général des expériences	56
		3.1.2	Sensibilité du système en expériences jumelles	60
		3.1.3	Sensibilité du système en assimilation de données réelles	65
	3.2	Expér	iences en $4D-VAR$ réduit : première comparaison avec le $4D-VAR$ en expé-	
		riences	s jumelles	70
		3.2.1	Configuration des expériences	70
		3.2.2	Assimilation d'une seule observation	72
		3.2.3	Expériences jumelles	73
		3.2.4	Conclusion	79
	3.3	Le rôle	e du rappel en surface dans l'assimilation de données	79
		3.3.1	Influence du rappel en SST sur la trajectoire de référence	80
		3.3.2	Effet du rappel en SST sur la solution d'un cycle d'assimilation en $4D-VAR$	
			$ m r m \acute{e}duit$	82
	3.4	Conclu	usions	85
4	Exp	périenc	es réalistes en 4D–VAR réduit	87
	4.1	Gestio	on de l'erreur modèle par le 4D–VAR réduit $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	88
		4.1.1	Configuration des expériences	89

		4.1.2	Influence de la base	. 89
		4.1.3	Conclusions	. 90
	4.2	Spécif	ication du sous-espace de correction	. 91
		4.2.1	Configuration	. 91
		4.2.2	Choix de la base de correction	. 91
		4.2.3	Conclusion sur le choix de la base de correction	. 94
	4.3	Cyclag	ge avec recouvrement	. 94
		4.3.1	Influence du recouvrement	. 95
		4.3.2	Conclusions sur le cyclage avec recouvrement	. 98
	4.4	Précor	nditionnement du 4D–VAR par le 4D–VAR réduit $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	. 98
		4.4.1	Une approche "mixte"	. 98
		4.4.2	Correction par le 4D–VAR complet de la solution obtenue avec le 4D-var rédu	it 99
		4.4.3	Conclusions sur le 4D–VAR mixte	. 103
	4.5	Concl	usions	. 103
<b>5</b>	Exp	oérienc	es préliminaires en assimilation séquentielle	105
	5.1	Préser	ntation des expériences préliminaires	. 106
	5.2	Sensit	ilité aux différents paramètres du filtre	. 107
		5.2.1	Initialisation	. 107
		5.2.2	Rôle du facteur d'oubli	. 107
		5.2.3	Evolution de la base de correction	. 113
	5.3	Concl	usions	. 116
6	Exp	oérienc	es réalistes avec le filtre SEEK	117
	6.1	Assim	ilation de données TAO seules	. 118
		6.1.1	Influence du facteur d'oubli et interaction avec l'évolution de la base	. 118
		6.1.2	Erreurs RMS par rapport aux données XBT	. 124
		6.1.3	Conclusions	. 125
	6.2	Assim	ilation conjointe de données XBT et TAO	. 126
		6.2.1	Apport des données XBT	. 126
		6.2.2	Evolution de la solution et de sa partie orthogonale	. 129
		6.2.3	Conclusions sur l'assimilation de données TAO et XBT	. 130
	6.3	Concl	usions	. 131
7	Con	nparai	son 4D–VAR réduit / SEEK sur l'océan Pacifique tropical	133
	7.1	$\operatorname{Comp}$	araison du $4D-V_{AR}$ réduit et du filtre SEEK en expériences jumelles $\ldots$ $\ldots$	. 135
		7.1.1	Comparaison de la phase d'analyse	. 135
		7.1.2	Comparaison de la phase de prévision	. 137
		7.1.3	Position de l'état prédit par rapport au sous-espace de correction $\ldots$ $\ldots$	. 139
		7.1.4	Conclusions	. 140

	7.2	Comparaison des résultats obtenus en expériences réalistes	
		7.2.1 Variabilité saisonnière	
		7.2.2 Position de l'incrément prédit par rapport au sous-espace de c	correction 145
	7.3	Comparaison de chaque expérience avec des données issues du réseau	и ТАО 146
		7.3.1 Comparaison avec les données de température : validation des	s algorithmes 146
		7.3.2 Comparaison avec les données indépendantes de courants et s	alinité 149
	7.4	Conclusions	155
8	Hyb	oridation des systèmes 4D–VAR réduit et SEEK	157
	8.1	Equivalence et hybridation des méthodes séquentielles et variationne	lles 158
		8.1.1 Equivalence formelle	158
		8.1.2 Hybridation du 3D-VAR et du filtre de Kalman d'ensemble	159
	8.2	Hybridation du 4D-Var incrémental et du filtre SEEK	159
		8.2.1 Le 4D–VAR incrémental	
		8.2.2 Filtre SEEK	
		8.2.3 Algorithme d'hybridation	
		8.2.4 Conclusions	
	8.3	Application au cas d'une équation d'advection-diffusion $\ldots \ldots \ldots$	
		8.3.1 Cas d'un modèle linéaire $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	
		8.3.2 Cas d'un modèle non-linéaire $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	
		8.3.3 Conclusions	
	8.4	Application au cas du modèle TDH du Pacifique Tropical	
		8.4.1 Algorithme d'hybridation	
		8.4.2 Implémentation en expériences jumelles	166
		8.4.3 Implémentation en données réelles	
		8.4.4 Conclusions	
C	onclu	sions et perspectives	173
Bi	bliog	raphie	i
A	nnex	es	vii
٨	Rag	as réduites : décomposition en base FORS (Empirical Orthogon	al Functions) is
A	Das	es reduites : decomposition en base LOFS (Empirical Orthogon	airunununs) ix
	A.1	Calcul des base d'Eofs	ix
		A.1.1 Présentation	ix
		A.1.2 Calculs des modes	ix

в	Algo	orithm	e de minimisation m1qn3	xiii
	B.1 Minimisation			
		B.1.1	Algorithme de Newton	xiii
		B.1.2	Algorithme de Quasi-Newton	xiv
		B.1.3	Estimation de W $\ldots$	xiv
		B.1.4	Quasi-Newton à mémoire limitée	xv
	B.2	Minim	isation de J en pratique	xv
		B.2.1	Détermination du pas	xv
		B.2.2	Une itération interne en pratique	xvi
		B.2.3	Les routines	xvi
С	$\mathbf{Assi}$	imilati	on variationnelle : le code OPAVAR	xvii
	C.1	Organ	isation du code	xvii
	C.2	Algori	thme de minimisation $\ldots$	xviii
	C.3	Cas pa	articulier des expériences jumelles	xviii
D	$\mathbf{Assi}$	imilati	on séquentielle : SESAM et le filtre SEEK	xxi
	D.1	Organ	isation du code SEEK $\ldots$	xxi
	D.2	Consti	ruction d'un fichier restart pour OPA	xxii
	D.3	Les dif	fférentes versions	xxii

# Introduction

La prévision de l'évolution de la météorologie est une chose qui nous est familière, de même que la météo marine permet de connaître à court terme l'évolution du temps sur les côtes. La prévision de l'évolution des océans à court, moyen ou long terme est une discipline un peu moins connue du grand public. Elle est pourtant devenue opérationnelle. C'est un des objectifs du projet MERCA-TOR. Ce projet fournit en particulier, chaque semaine, des prévisions à quelques jours de l'océan atlantique et de la Méditerranée à haute résolution. La prévision opérationnelle de l'évolution de l'état de l'océan a plusieurs applications. Par exemple, la prévision peut être utile pour prévoir la propagation de nappes de polluants à la surface des océans, cette propagation étant liée à l'évolution des courants de surface. La description et la prévision de la situation océanique constitue aussi un outil d'aide pour certaines activités de pêche, ou encore, pour celles liées aux plate-formes offshore. Enfin, la donnée des cartes de courant peut servir de façon plus anecdotique aux marins engagés dans des courses pour optimiser leur trajectoire. On voit donc que les applications sont diverses et plus ou moins cruciales !

Un aspect fondamental est le rôle que joue l'océan dans le climat du fait de sa très grande capacité thermique. Il permet en effet de réguler, de modifier, voire d'amplifier certains phénomènes climatiques. En effet, certains phénomènes de grande échelle, comme El Niño, sont fortement couplés avec la circulation océanique. L'étude de cette circulation permet d'établir le rôle de l'interaction océan-atmosphère de façon à être capable de l'identifier et éventuellement de le prédire. Ce type de phénomène climatique a un impact socio-économique très important. Son étude revêt donc une importance particulière.

Pour étudier ces phénomènes, des **modèles** mathématiques et numériques ont été développés. Les systèmes météorologiques et océanographiques sont des systèmes fortement non-linéaires et chaotiques. La turbulence dans ce type d'écoulements est une composante importante de la dynamique, au niveau de l'échelle à laquelle elle se produit mais aussi par interactions avec les autres échelles. La résolution numérique de ce type de système, par un modèle discret, fait entrer en jeu un certain nombre d'approximations qui concernent presque tous les composants de ce modèle. Parmi ces erreurs et approximations, on peut citer en particulier les approximations dues à la discrétisation du domaine physique étudié, à la paramétrisation des phénomènes d'échelle inférieure à la taille de la maille (turbulence sous-maille), ou encore les erreurs sur la condition initiale qui n'est qu'imparfaitement connue. Le modèle est donc une source insuffisante d'informations pour avoir une connaissance exacte des phénomènes étudiés. Ces erreurs initiales, ou introduites au cours du calcul, vont avoir une trajectoire liée à celle du modèle. La trajectoire *a priori* du modèle est difficile à évaluer et il en est de même pour la propagation des erreurs.

La connaissance de l'évolution des océans passe nécessairement par la mesure et l'acquisition

de **données**. La mise en œuvre de campagnes de mesures intensives, sur des domaines étendus, est une opération difficile et coûteuse au regard des moyens matériels et humains que cela implique. On peut citer différentes techniques de mesures, il s'agit principalement de mesures satellites ou de campagnes à la mer. En particulier en océanographie, les mesures en eau profonde sont très difficiles à obtenir en nombre important. Il en résulte une distribution irrégulière en temps et en espace des données disponibles. Ce type d'information est capital pour la connaissance du système mais reste insuffisant lui aussi.

Une solution est donc de tirer parti de ces deux sources indépendantes d'informations pour obtenir une connaissance plus approfondie du système étudié. C'est l'objet des méthodes d'**assimilation de données**. Le but de ces méthodes est de préciser l'état du système obtenu par un modèle grâce à l'introduction au cours de la simulation de données mesurées. Il s'agit d'imposer au modèle des contraintes supplémentaires pour forcer sa trajectoire à se maintenir la plus proche possible des données.

L'intérêt de combiner ces deux sources (modèle et données) est d'obtenir une estimation dont la variance d'erreur est inférieure à chaque variance initiale et donc d'obtenir un résultat plus proche de la "réalité". Toutefois, en introduisant des mesures dans le modèle, on introduit de nouvelles sources d'erreurs liées aux données observées : erreurs d'observation, erreurs de représentation des données sur une grille discrète, erreurs de prise en compte de ces données dans un processus d'assimilation (il ne s'agit pas forcément directement d'une variable du modèle), pour lesquelles on manque également de connaissance.

Pour les systèmes étudiés, le nombre de points de grille nécessaires à la modélisation de zones aussi étendues que l'océan Pacifique Tropical est très important. La mise en œuvre des algorithmes complets, qu'ils soient séquentiels ou variationnels, pose encore aujourd'hui des problèmes de temps de calcul et de stockage en mémoire. C'est pourquoi des méthodes de rang réduit sont développées pour permettre d'augmenter l'efficacité numérique de ces algorithmes et ainsi étudier des domaines plus vastes ou encore utiliser des grilles de maillage plus fines.

C'est dans ce contexte que se situe notre travail. Il va s'agir d'une part de développer et mettre en œuvre différentes méthodes séquentielles et variationnelles, de rang réduit, dans une configuration réaliste qui est celle de l'océan Pacifique Tropical. D'autre part, les solutions obtenues seront comparées entre elles puis par rapport à des observations effectuées dans la zone. Dans la zone géographique étudiée, la circulation est de nature plus linéaire que dans d'autres parties de l'océan mondial. Cela facilite l'application des algorithmes d'assimilation de données dans la mesure où certaines hypothèses sont plus facilement satisfaites. Cette zone a aussi l'avantage d'être observée depuis longtemps par un réseau de mouillages (réseau TAO/TRITON).

Nous commencons par détailler les méthodes séquentielles et variationnelles d'un point de vue théorique (chapitre 1). Nous décrivons ensuite les expériences réalisées auparavant avec des méthodes existantes, dans cette configuration réaliste (chapitre 2). Nous présentons ensuite de nouvelles approches, basées sur le 4D–VAR et une méthode de réduction d'ordre, ainsi que les résultats préliminaires obtenus avec les méthodes variationnelles, en expériences jumelles (chapitre 3) puis en assimilant des données réelles de profils de température (chapitre 4). Ensuite, nous présentons les expériences effectuées, dans la même configuration, avec une méthode séquentielle de rang réduit : le filtre SEEK (chapitre 5). Nous testons de plus cette méthode séquentielle en assimilant des données

réelles (chapitre 6). Une comparaison systématique des résultats obtenus par chacun des différents algorithmes sera réalisée (chapitre 7) en expériences jumelles puis en données réelles. Nous présenterons aussi, au cours de ce chapitre, la comparaison effectuée avec des données indépendantes afin de valider succintement la pertinence physique des résultats obtenus. Enfin, au chapitre 8, nous présentons la mise en œuvre d'une méthode d'hybridation séquentielle/variationnelle et son application à la même configuration.

# Chapitre 1

# L'assimilation de données : introduction théorique

# Sommaire \*

1.1	$\mathbf{L}^{2}\mathbf{as}$	similation de données	6
	1.1.1	Introduction	6
	1.1.2	Composantes d'un système d'assimilation : description et notations	6
	1.1.3	Les erreurs dans le processus	8
1.2	Mét	hodes d'assimilation séquentielle	10
	1.2.1	Filtre de Kalman	10
	1.2.2	Filtre de Kalman Etendu	12
	1.2.3	Contraintes liées à la mise en œuvre pratique	13
1.3	$\mathbf{Assi}$	milation variationnelle	<b>13</b>
	1.3.1	Formulation du problème	14
	1.3.2	Formulations dicrètes	16
	1.3.3	Contrôle de l'erreur modèle	18
	1.3.4	Minimisation de la fonction coût par méthode adjointe	19
	1.3.5	La matrice B en assimilation variationnelle	22
1.4	Equi	ivalence formelle	<b>27</b>
1.5	Réd	uction d'ordre en assimilation de données	<b>27</b>
	1.5.1	Principe théorique	27
	1.5.2	Application au filtre de Kalman : le filtre SEEK	28
	1.5.3	4D–VAR réduit	31
	1.5.4	Conclusions	32
1.6	Ana	lyse et diagnostics	<b>32</b>
	1.6.1	Validation des systèmes	32
	1.6.2	Différentes normes utilisées dans le processus d'assimilation $\hdots$	33

# 1.1 L'assimilation de données

# 1.1.1 Introduction

On peut distinguer principalement deux classes de méthodes d'assimilation de données, très utilisées en océanographie et en météorologie : l'assimilation séquentielle et l'assimilation variationnelle.

Dans le cadre de l'assimilation séquentielle, basée sur la théorie de l'estimation statistique, on effectue une assimilation (une analyse) à chaque pas de temps où l'on dispose d'une nouvelle donnée ; la phase de simulation qui suit cette assimilation est une phase dite de prévision.

L'assimilation variationnelle, quant-à-elle, est une méthode de contrôle, qui consiste à assimiler des données disponibles sur une période fixe (fenêtre temporelle) pour déterminer, par exemple, l'état initial qui permet au modèle de "suivre" le mieux possible ces données sur l'intervalle considéré. L'analyse est alors effectuée sur toute la fenêtre temporelle et on peut ensuite faire de la prévision.

Une des difficultés rencontrées avec ce genre de méthodes, est la dimension des vecteurs manipulés dans l'étude d'un système réaliste. Les systèmes étudiés comportent couramment de  $10^6$  à  $10^7$ degrés de liberté. L'étude du système complet induit donc une occupation en mémoire et un coût de calcul très important. Une solution possible consiste à ne corriger l'état que suivant certaines directions seulement, réduisant de ce fait les dimensions du problème. Le problème sous-jacent est alors le choix des directions de correction pertinentes (choix d'une base particulière). La description de cette approche, appelée méthode de rang réduit, sera développée au §1.5.

Dans cette première partie, nous commençons par introduire assez brièvement les différentes composantes d'un système d'assimilation, ainsi que les notations que nous utiliserons tout au long du document. Nous détaillons ensuite les méthodes d'assimilation de données les plus utilisées ( $\S1.2$  et  $\S1.3$ ), en essayant de préciser ce que peut être une validation du système et/ou des résultats ( $\S1.6$ ). Nous terminons par une présentation des méthodes d'assimilation en base réduite ( $\S1.5$ ).

# 1.1.2 Composantes d'un système d'assimilation : description et notations

Dans cette partie, nous introduisons brièvement les différentes composantes d'un système d'assimilation en suivant pour cela les notations présentées et utilisées par Ide *et al.*, [30].

#### Le système étudié

Dans le contexte océanographique (qui est celui dans lequel nous nous plaçons par la suite), le système étudié est un système complexe, gouverné par un système d'équations non-linéaires tridimensionnelles, comportant une évolution temporelle. On est donc en présence d'un système dynamique non-linéaire (couplé dans le cas général avec le système atmosphérique et éventuellement avec d'autres systèmes comme le système hydrologique ou encore la végétation).

On peut définir un **état réel** du système, qui représente la réalité à un instant donné. Cet état contient la totalité de l'information représentative du système à cet instant (aucune erreur ne vient perturber sa valeur). On le note  $\mathbf{x}^t$ . La connaissance que nous avons de cet état est partielle au regard de la taille du système réel, et dans tous les cas, perturbée par un ensemble d'erreurs.

## Le modèle utilisé

En océanographie, de nombreux modèles existent et ont déjà été largement testés et validés. Dans notre cas, le modèle tri-dimensionnel OPA (Madec *et al.*, [40]) est constitué des équations de Navier-Stokes sur une sphère en rotation (auxquelles on ajoute certaines hypothèses pour former le système d'Equations Primitives qui sera détaillé au paragraphe 2.2) discrétisées sur une grille 3D. A ces équations, on ajoute certains termes (ou équations) afin de compenser les approximations faites lors de la construction du modèle (modélisation de la turbulence sous-maille, prise en compte des flux), appelées paramétrisations.

Dans ce type de modèle, les variables prognostiques (obtenues par évolution temporelle) généralement calculées sont la vitesse (une composante suivant les 2 directions horizontales), notée  $\mathbf{U}_h = (u, v)$ , la température potentielle T et la salinité S. Suivant les versions, on peut aussi trouver comme variable d'état l'élévation de la surface notée  $\eta_h$ . A ces variables s'ajoutent des variables dites diagnostiques, obtenues par calcul à partir des précédentes (on ne calcule pas l'évolution temporelle de ce type de variable). Parmi celles-ci on peut trouver par exemple la vitesse verticale wou la fonction de courant barotrope  $\Psi$ .

Ces variables représentent un état du système à un instant donné. Un vecteur d'état peut donc être construit à partir de ces variables, comme par exemple le vecteur  $\mathbf{x} = (\mathbf{U}_h, \mathbf{T}, \mathbf{S})$  ou éventuellement  $\mathbf{x} = (\mathbf{U}_h, \mathbf{T}, \mathbf{S}, \eta_h)$ .

Si l'on note X l'état réel du système, et  $\mathcal{M}$  le modèle continu exact des équations qui régisssent le système, l'évolution temporelle de X s'écrit formellement :

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = \mathcal{M}(X, t) \tag{1.1}$$

Cet état réel n'est pas porté à notre connaissance, de même que le modèle continu exact. On dispose seulement d'une estimation de l'état du système et d'un modèle numérique qui comporte certaines approximations. Le vecteur  $\mathbf{x}$ , qui est un état du système à un instant donné, obtenu par itérations successives du modèle numérique non-linéaire M, est propagé en temps par la formulation continue suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t} = M(\mathbf{x}, t) + \eta \tag{1.2}$$

On en déduit la formulation discrète en temps et en espace qui s'écrit formellement :

$$\mathbf{x}_{t_{i+1}} = M_{(t_i, t_{i+1})}(\mathbf{x}_{t_i}) + \eta_i \tag{1.3}$$

où  $\eta_i$  représente l'erreur modèle (généralement considérée non biaisée). L'indice *i* représente la discrétisation temporelle :  $t_i \in \{t_1, ..., t_p\}$ . Les caractéristiques plus précises du modèle utilisé dans notre étude seront détaillées dans le chapitre 2.

#### Les données observées

Le système étudié est partiellement observé par un réseau d'instruments de mesure : campagne à la mer, données satellites. Il faut souligner qu'au regard du nombre de points spatiaux du maillage du modèle discret, les mesures disponibles sont relativement peu nombreuses. Le champ d'observations obtenu peut être représenté par un vecteur des observations, noté  $\mathbf{y}^o$ , dont les composantes  $y_i^o$  sont distribuées sur une fenêtre temporelle.

Du fait du relativement petit nombre de mesures, il existe moins de points d'observations que de points de grille de la discrétisation du domaine étudié. Pour mesurer l'écart entre les observations et les résultats du modèle, on choisit de se placer dans l'espace des observations. On définit donc un **opérateur d'observation**, noté H, qui permet de passer de l'espace du modèle à l'espace des observations : l'inverse impliquerait un traitement trop entâché d'erreur pour ramener les données, observées sur une grille très irrégulière, sur la grille dense et régulière du modèle (on limite ainsi les extrapolations).

De la même façon que pour la formulation du modèle, si l'on pouvait observer le système de façon exacte on aurait :

 $Y^{o} = \mathcal{H}(X)$ , avec  $Y^{o}$  le vecteur d'observations exact et  $\mathcal{H}$  l'opérateur d'observation exact (1.4)

Or, on ne connait tout ceci que de façon approchée. On a alors :

$$Y^{o} = \mathbf{y}^{o} + \epsilon, \quad \epsilon \text{ l'erreur d'observation}$$
(1.5)

Par suite la formulation discrète a pour expression :

$$\mathbf{y}_{i}^{o} = H_{i}[\mathbf{x}^{t}(t_{i})] + \epsilon_{i}, \ t_{i} \in \{t_{1}, ..., t_{p}\}$$
(1.6)

où  $\epsilon$  représente l'erreur associée au processus de prise en compte des données<sup>1</sup>.

Il faut noter que l'assimilation ne porte pas nécessairement sur l'état complet du système. On peut assimiler seulement une partie des observations portant sur le vecteur d'état. On peut assimiler aussi une donnée qui n'est pas directement une variable du modèle. Dans ce cas, on introduit un terme d'erreur supplémentaire dans l'opérateur d'observation, dû à la traduction de ce terme en fonction des variables d'état (par exemple, lors de l'assimilation de données de hauteur de mer dans un modèle d'océan à toit rigide, la hauteur dynamique est une variable diagnostique).

## Analyse et prévision

Le processus d'assimilation de données débute à partir d'un état le plus souvent issu d'une simulation antérieure, appelé **ébauche** (ou encore background) et noté  $\mathbf{x}^b$ . Lors d'une séquence d'assimilation de données, on cherche un état analysé, noté  $\mathbf{x}^a$ , qui est un état du système, corrigé par l'information issue des observations, introduite dans le système. Ces deux états sont calculés au temps initial du cycle d'assimilation.

La phase qui suit cette période d'analyse est celle dite de prévision, qui est l'application du modèle non linéaire M à l'état analysé  $\mathbf{x}^a$ , dont on cherche l'évolution temporelle. Cet état prévu est noté  $\mathbf{x}^f$ , pour "forecast".

# 1.1.3 Les erreurs dans le processus

Comme nous l'avons vu en introduction, dans un tel processus, les sources d'erreurs sont multiples et constituent une part importante des inconnues. Une façon d'obtenir une approximation de leur valeur est une estimation statistique. Une approximation consiste à supposer qu'elles sont gaussiennes non biaisées, ce qui conduit à l'existence d'une solution optimale.

Les sources d'erreurs sont principalement :

- Erreur sur la *condition initiale* du modèle (mauvaise connaissance de l'état initial)  $\mathbf{e}^b$ : cet état contient des erreurs qui peuvent s'amplifier au cours de l'évolution temporelle.
- Erreur modèle  $\eta$ : le modèle numérique est construit en effectuant certaines approximations (paramétrisations, estimation des échanges à la surface...). Ces approximations introduisent des erreurs sur les états obtenus à l'issue de l'intégration temporelle du modèle. Pour le modèle discrétisé, on ajoute les erreurs de troncature, dues à l'utilisation de schémas numériques d'ordre plus ou moins élevé.

 $<sup>^{1}</sup>$ Remarque : en pratique cette équation est inutilisable, car on ne connaît pas du tout  $\mathbf{x}^{t}$ 

- Erreur d'observation  $\boldsymbol{\epsilon}$ : en plus des erreurs liées aux instruments, certaines observations représentent des phénomènes locaux non-résolus par le système d'assimilation. Cette information est donc perdue alors qu'elle peut avoir une grande influence sur le système. Enfin, la prise en compte de ces données dans la procédure d'assimilation nécessite quelques transformations préalables (interpolation, opérateur d'observation, ...) qui peuvent introduire des erreurs supplémentaires.
- Erreur de *représentativité*  $\boldsymbol{\epsilon}$ : c'est l'erreur qui se produit lors du passage de l'espace modèle à l'espace des observations et que l'on quantifie par :  $\mathbf{y} H(\mathbf{x})$ .

Ces erreurs sont prises en compte dans le processus d'assimilation par leurs matrices de covariance. Rappelons que la covariance d'un vecteur aléatoire X est la matrice  $\mathbf{C} = E(XX^t)$ , où E est l'espérance mathématique. En pratique nous verrons par la suite que ces matrices sont le plus souvent estimées ou paramétrisées, leur connaissance exacte étant en général impossible à obtenir.

En résumé, les matrices de covariances d'erreurs utilisées dans les deux principales méthodes d'assimilation sont donc :

- ${\bf B}$  : la matrice de covariance d'erreur d'ébauche,
- **Q** : la matrice de covariance d'erreur modèle,
- $-~{\bf P}^a$  : la matrice de covariance d'erreur d'analyse,
- $-~{\bf P}^f$  : la matrice de covariance d'erreur de prévision,
- $-\mathbf{R} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$ : la matrice de covariance d'erreur d'observations, composée des erreurs liées aux instruments et de celles liées à la représentativité.

Ces notions étant introduites, nous allons présenter plus en détail les différentes méthodes d'assimilation de données et leurs caractéristiques algorithmiques.

# 1.2 Méthodes d'assimilation séquentielle

Dans cette partie, nous allons détailler le principe de l'assimilation séquentielle ainsi que les principaux algorithmes développés. L'assimilation séquentielle consiste à effectuer une correction de la trajectoire du modèle à chaque nouvelle donnée disponible, suivant la séquence décrite à la figure 1.1.



FIG. 1.1 – Processus global d'assimilation séquentielle

La procédure consiste en une première phase de correction de l'état en cours, grâce à l'information issue des données observées, à l'instant où la donnée est observée. Elle est suivie d'une phase de prévision à l'aide du modèle numérique, initialisée avec l'état analysé au temps précédent. Ce principe est à la base du **filtre de Kalman**, que nous allons détailler.

# 1.2.1 Filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est un filtre d'assimilation séquentielle de données, adapté aux modèles dynamiques et aux opérateurs d'observation linéaires développé par Kalman en 1960 [32]. Il est basé sur la théorie de l'estimation dont le BLUE décrit ci-dessous est une illustration. Le filtre de Kalman généralise l'estimation optimale aux systèmes dynamiques pour lesquels on dispose d'une équation d'évolution. Nous allons présenter l'algorithme mis en œuvre dans le filtre de Kalman, ainsi que les modifications nécessaires à l'extension aux modèles et opérateurs d'observations non-linéaires : le filtre de Kalman étendu (EKF).

## Le BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)

Considérons deux estimations  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  d'un même état quelconque  $\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x}$  est une variable aléatoire). On note  $\boldsymbol{\sigma}_1$  et  $\boldsymbol{\sigma}_2$  les écart-types associés à ces deux estimations. Une hypothèse supplémentaire est de considérer que ces deux estimations sont non-biaisées, mais comportent une certaine erreur  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ . La meilleure estimation,  $\mathbf{x}_a$ , de  $\mathbf{x}$  connaissant  $\mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{y}_2$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_1$  et  $\boldsymbol{\sigma}_2$ , est donnée par :

$$\mathbf{x}_{a} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{2}^{2}}{\boldsymbol{\sigma}_{1}^{2} + \boldsymbol{\sigma}_{2}^{2}} \, \mathbf{y}_{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_{1}^{2}}{\boldsymbol{\sigma}_{1}^{2} + \boldsymbol{\sigma}_{2}^{2}} \, \mathbf{y}_{2} \tag{1.7}$$

Cet estimateur (non biaisé) est appelé le *meilleur estimateur linéaire non-biaisé* (estimateur de variance minimale. Cette équation peut être réécrite sous la forme :

 $\mathbf{x}_a = \mathbf{y}_1 + \mathbf{K}(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)$ 

 $\mathbf{K}$  est appelé le gain et vaut :

$$\mathbf{K} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_1^2}{\boldsymbol{\sigma}_1^2 + \boldsymbol{\sigma}_2^2}$$

Cette méthode du BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) est à l'origine de la théorie du filtre de Kalman.

#### 1.2.1.1 Description du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman consiste, comme indiqué précédemment, en l'application successive de deux types d'étape : une étape d'analyse suivie d'une étape de prévision, durant laquelle l'état analysé est propagé dans le temps. La particularité du filtre de Kalman, par rapport notamment aux méthodes variationnelles qui seront présentées ensuite, est qu'à chaque étape, il fournit une estimation des erreurs faites lors de l'analyse et de la prévision.

#### Etape d'analyse

On dispose à un instant donné du résultat de la prévision précédente  $\mathbf{x}^{f}$  et du vecteur d'observation  $\mathbf{y}$ . L'équation principale de l'étape d'analyse se met sous la forme :

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^f + \mathbf{K}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}^f))$$

**K** est appelée matrice de gain du filtre. On rappelle que H est l'opérateur d'observation. L'état analysé,  $\mathbf{x}_a$ , est une combinaison linéaire de  $\mathbf{x}^f$ , la prévision fournie par le modèle et d'une correction qui dépend de l'écart entre les observations et leurs équivalents modèle. Cette équation d'analyse fournit aussi une expression de l'erreur d'analyse, que l'on note  $\mathbf{e}^a$ , de matrice de covariance  $\mathbf{P}^a$ , en fonction de l'erreur de prévision  $\mathbf{e}^f$  (de matrice de covariance  $\mathbf{P}^f$ ) et de l'erreur d'observation  $\epsilon$  (de matrice de covariance  $\mathbf{R}$ ) :

$$\mathbf{e}^a = \mathbf{e}^f + \mathbf{K}(\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{H} \ \mathbf{e}^f)$$

On remarque que l'estimation de l'erreur fait intervenir l'opérateur linéarisé  $\mathbf{H}$  de l'opérateur d'observations. Cette expression de  $\mathbf{e}^a$  permet d'obtenir une expression de la matrice  $\mathbf{P}^a$ :

$$\mathbf{P}^{a} = E[\mathbf{e}^{a}\mathbf{e}^{aT}] = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]\mathbf{P}^{f}[\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]^{T} + \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^{T}$$
(1.8)

Si on cherche la matrice de gain optimale  $\mathbf{K}$  qui minimise la variance de l'erreur d'analyse, on obtient l'expression :

 $\mathbf{K} = \mathbf{P}^{f} \mathbf{H}^{T} [\mathbf{H} \mathbf{P}^{f} \mathbf{H}^{T} + \mathbf{R}]^{-1}$ 

En substituant **K** dans l'équation (1.8), l'expression de  $\mathbf{P}^a$  se simplifie pour donner :

$$\mathbf{P}^a = [\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H}]\mathbf{P}^f$$

#### -

# Etape de prévision

On prend en compte l'erreur modèle dans cette étape de prévision. Cette erreur est généralement considérée comme non-biasée et décorrelée dans le temps. Considérons  $\mathbf{M}$  un modèle dynamique linéaire et  $\mathbf{Q}$  la matrice de covariance de l'erreur modèle. L'évolution de l'état vrai du système par le modèle dynamique s'écrit :

$$\mathbf{x}_{k+1}^t = \mathbf{M}_{k,k+1}\mathbf{x}_k^t + \boldsymbol{\eta}_k$$

A partir d'un état analysé obtenu à la séquence précédente, on effectue une prévision sur un intervalle de temps fixé  $[t_k, t_{k+1}]$ . Les équations de l'étape de prévision, à partir de cet état analysé, s'écrivent de la façon suivante :

$$\mathbf{x}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{x}_k^a$$

L'erreur modèle est prise en compte dans l'erreur de prévision. L'équation qui gouverne l'évolution de cette erreur devient :

$$\mathbf{e}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1}\mathbf{e}_k^a + oldsymbol{\eta}_k$$

de matrice de covariance d'erreur :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = E[\mathbf{e}_{k+1}^f \mathbf{e}_{k+1}^{fT}] = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_k$$

A la fin d'une étape d'analyse-prévision de l'algorithme, on obtient l'état  $\mathbf{x}_{k+1}^{f}$ , à partir duquel on peut réaliser une nouvelle étape d'analyse avec les nouvelles données disponibles.

Algorithme du filtre de Kalman :	
• Analyse	
$ \begin{split} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^f \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}]_k^{-1} \\ \mathbf{x}_k^a &= \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^f) \\ \mathbf{P}_k^a &= [\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_k^f \end{split} $	(1.9)
• Prévision	
$\mathbf{x}_{k+1}^f \hspace{0.1 in} = \hspace{0.1 in} \mathbf{M}_{k,k+1}(\mathbf{x}_k^a)$	
$\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{M}_{k,k+1} \mathbf{P}_k^a \mathbf{M}_{k,k+1}^T + \mathbf{Q}_k$	(1.10)

# 1.2.2 Filtre de Kalman Etendu

On a vu qu'une hypothèse forte du filtre de Kalman est la linéarité du modèle M. Or, la pratique en océanographie met en jeu comme nous l'avons vu des modèles non-linéaires. Il faut donc utiliser une version généralisée du filtre de Kalman, dite **filtre de Kalman Etendu** (EKF), qui permet la prise en compte de modèles faiblement non-linéaires (notés alors M). Cela nécessite la mise en œuvre d'un modèle linéaire tangent, dérivé du modèle direct. La solution obtenue n'est alors plus une solution optimale mais approchée. La validité du modèle linéaire tangent, linéarisé autour d'un point, aura donc une incidence directe sur la validité de la solution obtenue. Les erreurs dans le processus sont quant-à-elles toujours calculées avec les opérateurs linéaires tangents  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$ . On remplace alors M et H par  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  dans les opérations associées aux erreurs.

L'algorithme s'écrit dans ce cas :

Algorithme du filtre de Kalman Etendu :	
5	
• Analyse	
$\mathbf{x}_k^a = \mathbf{x}_k^f + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - H_k \mathbf{x}_k^f)$	
$\mathbf{P}_{k}^{a} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k}\mathbf{H}_{k}]\mathbf{P}_{k}^{a}$	(1.11)
	× /
• Prévision	
$\mathbf{x}_{L+1}^{J} = M_{L+1}(\mathbf{x}_{L}^{L})$	
$\kappa + 1$ $\kappa, \kappa + 1 < \kappa$	
$\mathbf{P}^{f}$ – $\mathbf{M}_{r}$ , $\mathbf{P}^{a}\mathbf{M}^{T}$ , $\mathbf{r}$ + $\mathbf{O}_{r}$	
$\mathbf{L}_{k+1}$ - $\mathbf{W}_{k,k+1}$ $\mathbf{L}_{k}$ $\mathbf{W}_{k,k+1}$ + $\mathbf{Q}_{k}$	
$\mathbf{V}$ $\mathbf{D}^{f}$ $\mathbf{U}^{T}$ $[\mathbf{U}$ $\mathbf{D}^{f}$ $\mathbf{U}^{T}$ $ $ $\mathbf{D}$ $1^{-1}$	$(1 \ 10)$
$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} [\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{F}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1}]^{-1}$	(1.12)

# 1.2.3 Contraintes liées à la mise en œuvre pratique

La méconnaissance des erreurs intervenant lors de la mise en œuvre des algorithmes d'assimilation de données (observation, ébauche, analyse, modèle, ...) rend l'estimation des matrices de covariances d'erreur **P**, **R** et **Q** très difficile, ce qui rend le filtre sous-optimal. De plus, la matrice de covariance d'erreur d'analyse, de dimension  $n \times n$  (n est la dimension spatiale du problème), n'est pas stockable directement pour des domaines d'étude étendus. De même, le coût de calcul lié à l'évolution temporelle de cette matrice de covariance des erreurs d'analyse est prohibitif. Enfin la linéarisation des opérateurs qui conduit à négliger certains termes d'ordre supérieur, fait apparaître des problèmes de fermeture dans les équations d'évolution des covariances d'erreur.

Pour rendre le calcul réalisable, Evensen ([23]) a développé un filtre de Kalman d'ensemble. L'estimation des covariances d'erreurs est basée sur une méthode de Monte-Carlo, qui permet de s'affranchir d'une partie des problèmes cités ci-dessus. Il estime de cette façon, à partir d'un ensemble d'états, une densité de probabilité des erreurs.

Un autre type de méthodes développées de façon à diminuer les coûts de calcul liés à la taille des problèmes réalistes rencontrés sont les méthodes de rang réduit, mieux adaptées aux configurations de grande taille. Ces méthodes font l'objet de la section 1.5.

# **1.3** Assimilation variationnelle

Les méthodes variationnelles, basées sur la théorie de l'optimisation (ou du contrôle optimal), ont une approche différente. Il s'agit de prendre en compte globalement, dans la phase d'analyse, une série temporelle d'observations distribuées sur un intervalle [0,T]. Ce type de méthodes est couramment utilisé depuis quelques années de façon opérationnelle dans les centres de prévisions météorologiques (CEPMMT pour European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, National Meteorological Center, Météo-France). Alors que les méthodes basées sur le filtre de Kalman ne permettent de contrôler que l'état analysé, en effectuant des corrections locales en temps ( $\mathbf{x}^a$  est localisé en temps au même instant que la donnée observée) et induisent une trajectoire globale temporelle peu régulière, les méthodes variationnelles se définissent davantage comme une méthode de lissage, par ajustement de la solution en temps et en espace. De façon générale, elles permettent de contrôler différentes variables comme la condition initiale bien sûr mais aussi certains paramètres du modèle y compris certaines erreurs. En général, c'est plutôt la condition initiale qui est choisie comme variable de contrôle, mais plusieurs travaux récents, comme à grenoble les travaux d'Arthur Vidard [63] ou encore ceux de Sophie Durbiano [22] montrent qu'il est tout à fait envisageable de chercher à contrôler l'erreur modèle. Par contre, ces méthodes ne fournissent pas explicitement d'estimation des erreurs d'analyse et de prévision faites au cours des cycles comme le font les méthodes basées sur le filtre de Kalman (l'estimation des erreurs d'analyse engendrerait un coût de calcul supplémentaire).

# 1.3.1 Formulation du problème

Dans le formalisme variationnel, on évalue une fonction coût,  $J(\mathbf{x}) = J_o(\mathbf{x}) + J_b(\mathbf{x})$ , constituée le plus souvent d'un premier terme  $J_o$  qui quantifie l'écart entre la solution fournie par le modèle et les observations et d'un second terme qui quantifie l'écart à l'ébauche. On considère en effet que l'ébauche est un état pertinent du système et qu'il ne faut pas trop s'en éloigner. Ce deuxième terme joue un rôle régularisant pour la solution obtenue.

L'objectif est de trouver l'état initial  $\mathbf{x}_0$  qui minimise cette fonction coût. Ce paragraphe est consacré à la description des principales méthodes d'assimilation variationnelle, dont nous allons exposer brièvement les algorithmes. La minimisation de la fonction de coût se fait sur des intervalles de temps fixés successifs, comme le montre la figure 1.2 à la page suivante.



FIG. 1.2 – Processus global d'assimilation variationnelle

La figure 1.3 décrit plus en détail la procédure sur une période d'assimilation, avec le détail des différents termes.



FIG. 1.3 – Une période d'assimilation variationnelle

L'information fournie par les données disponibles est prise en compte globalement sur un intervalle de temps, contrairement à l'assimilation séquentielle pour laquelle la correction ne tient plus compte des données passées.

## **1.3.1.1** Formulation continue

Formellement, on a vu que le système initial modélisé sous une forme continue a pour expression :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{M}(X, t), & t \in [0, T] \\ X(0) = U \end{cases}$$
(1.13)

X est la variable d'état du système continu et U la condition initiale.

La partie "observations" du système décrit peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} Y^{o}: \text{ le vecteur d'observations} \\ \mathcal{H}(X) = Y : \text{ l'équivalent modèle des observations} \end{cases}$$
(1.14)

## La fonction coût

On se place dans le cas du contrôle de la condition initiale U. On peut quantifier l'écart entre les valeurs des variables obtenues par intégration du modèle direct, aux points d'observations, et les valeurs observées, sur la fenêtre temporelle considérée. Avec la norme  $\|.\|_o$  définie dans l'espace des observations,  $J_o$  a donc pour expression :

$$J_o(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{H}(X) - Y^o\|_o^2 dt$$
(1.15)

Le terme  $J_b$  qui mesure l'écart à l'état initial (ou encore ébauche et noté  $X_b$ ), avec la norme  $\|.\|_b$ dans l'espace modèle, se formule de la façon suivante :

$$J_b(U) = \frac{1}{2} \|U - X^b\|_b^2$$
(1.16)

La fonction coût totale s'écrit comme la somme de ces deux termes :

$$J(U) = J_0 + J_b = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathcal{H}(X) - Y^o\|_o^2 dt + \frac{1}{2} \|U - X^b\|_b^2$$
(1.17)

On cherche, dans un problème classique, à obtenir une correction apportée à l'état initial qui fournisse une trajectoire de prévision qui minimise l'écart aux observations et l'écart à l'ébauche sur un cycle fixé. On cherche donc  $U^*$ , l'état initial qui minimise cette fonction coût J(U). Notons que cette fonctionnelle est le plus souvent non-convexe et peut donc comporter plusieurs minima locaux.

# **1.3.2** Formulations dicrètes

Dans les applications en météorologie ou océanographie, on ne dispose pas d'un modèle continu ni d'un état continu mais d'un modèle d'évolution discret ainsi que d'un état exprimé sur une grille discrète. Il en est de même pour les observations qui sont sur une grille spatio-temporelle discrète. De plus, spatialement, la couverture des données est bien moindre que le nombre de points de grille de calcul du modèle. La formulation précédente s'étend aux problèmes discrets en remplacant simplement les dérivées par des schémas discrets et les intégrales par des sommes discrètes comme nous allons le constater à travers la description de plusieurs algorithmes. Dans cette partie, on remplace les notations X et Y par leur équivalent discret  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

# 1.3.2.1 Le 3D-VAR

Le 3D-VAR est une méthode d'assimilation variationnelle, caractérisée par l'absence de dimension temporelle. Les observations prises en compte sont ramenées à l'instant où s'effectue l'assimilation (il existe cependant une version FGAT du 3D-VAR (First Guess at Appropriate Time) qui permet de s'affranchir de cette contrainte). La fonction de coût associée au 3D-VAR s'écrit alors :

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + \frac{1}{2} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}^o - H(\mathbf{x}))$$
(1.18)

La minimisation se fait par une méthode de gradient. Le gradient de  $J(\mathbf{x})$  dans ce cas est calculable et a pour expression :

$$\nabla_x J = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} [H(\mathbf{x}) - \mathbf{y}^o] + \mathbf{B}^{-1} [\mathbf{x} - \mathbf{x}^b]$$
(1.19)

Cette formulation a notamment été utilisée dans les travaux d'Andersson *et al.* ([3]) au centre ECMWF.

# 1.3.2.2 Le 4D-Var

Dans le cas du 4D-VAR, la dimension temporelle apparaît explicitement, en particulier dans l'expression de la fonction coût que nous avons vu précédemment. La formulation discrète s'écrit de la façon suivante :

$$J(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (\mathbf{y}_i^o - H_i(\mathbf{x}_i))^T \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{y}_i^o - H_i(\mathbf{x}_i))$$
(1.20)

Pour ces deux méthodes, suivant la taille du système étudié, la taille des matrices utilisées peut largement dépasser les capacités actuelles de stockage. De plus, la minimisation est une opération coûteuse en temps de calcul. Pour pallier cette difficulté, Courtier *et al.* ([16]) ont introduit une formulation dite "incrémentale" qui porte sur un incrément de l'état initial et non plus sur la condition initiale entière.

#### 1.3.2.3 Le 4D-VAR incrémental

Il s'agit d'une formulation qui a pour but de réduire le coût du 4D–VAR en fournissant une solution approchée. L'intégration du modèle direct non-linéaire étant coûteuse, la variable de contrôle est mise sous la forme :

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b$$

 $\delta \mathbf{x}_0$  est une petite perturbation autour de l'ébauche, pour laquelle les hypothèses linéaires tangentes appliquées au modèle direct et à l'opérateur d'observation sont valides. Le modèle linéaire tangent est écrit avec une physique simplifiée ce qui garantit une intégration moins coûteuse et l'écriture de son modèle adjoint en est facilitée. Il est, de plus, souvent mis en œuvre avec une résolution inférieure à celle du modèle direct. Sous ces hypothèses, la fonction coût devient alors quadratique par rapport à l'incrément d'analyse  $\delta \mathbf{x}_0$ .

$$\mathbf{x}(t_{i+1}) = M_{0 \to i}(\mathbf{x}(t_0)) = M_{0 \to i}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}} + \delta \mathbf{x}_0)$$
$$\simeq M_{0 \to i}(\mathbf{x}^{b}) + \mathbf{M}_{0 \to i}\delta \mathbf{x}_0$$
$$\simeq \mathbf{x}^{b}(t_i) + \mathbf{M}_{0 \to i}\delta \mathbf{x}_0$$

Soit G l'opérateur défini par :

$$G_i(\mathbf{x}_b) = H_i[\mathbf{x}_b(t_i)] = H_i[M_{0 \to i}(\mathbf{x}_b)]$$

Les opérateurs linéarisés autour de l'ébauche sont calculés de la façon suivante :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial M}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^b}, \ \mathbf{H}_i = \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^b}, \ \mathbf{G}_i = \frac{\partial G_i}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^b}$$

Il vient :

$$H_{i}[\mathbf{x}(t_{i})] = H_{i}[\mathbf{x}^{b}(t_{i})] + \mathbf{H}_{i}\delta\mathbf{x}_{0} + \|\delta\mathbf{x}_{0}\|^{2} + \dots$$
(1.21)

$$G_i[\mathbf{x}] = G_i[\mathbf{x}^b] + \mathbf{G}_i \delta \mathbf{x}_0 + \|\delta \mathbf{x}_0\|^2 + \dots$$
(1.22)

Le vecteur d'innovation  $\mathbf{d_i}$  est défini par :

$$\mathbf{d_i} = \mathbf{y}_i^o - H_i M_i \mathbf{x}^b$$

La fonction coût s'écrit alors :

$$J(\delta \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x}_0)^T B^{-1} \delta \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_0} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)^{\mathbf{t}} \mathbf{R}_i^{-1} (\mathbf{H}_i \mathbf{M}_{\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_0} \delta \mathbf{x}_0 - \mathbf{d}_i)$$
(1.23)

L'état analysé est alors obtenu par addition de la solution du problème de minimisation de la fonction coût (incrément optimal) à l'ébauche.

$$\mathbf{x}^a = \mathbf{x}^b + \delta \mathbf{x}^a_0 \tag{1.24}$$

Cette version du 4D-VAR est couramment utilisée en météorologie ([47]) et également en océanographie, dans des travaux récents ([67], [62]).

# 1.3.3 Contrôle de l'erreur modèle

# 1.3.3.1 4D-Var

Dans la formulation complète, on ajoute dans les équations régissant l'évolution temporelle du système un terme correspondant à la prise en compte de l'erreur modèle de la forme  $B\eta$ . Si on revient à la formulation continue de la fonction coût, on a alors :

$$J(U,\eta) = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x})^T B^{-1} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_0^T \|H(U) - Y^o\|_o^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \|\eta\|_Q^2 dt$$
(1.25)

Q est un terme de pondération qui définit une norme pour le calcul du terme d'erreur modèle. Une fois discrétisé, le modèle adjoint permet également de calculer ce terme et la formulation du gradient de J inclut un terme supplémentaire qui dépend de l'état adjoint. Cette méthode a notamment été implémentée et testée sur des configurations idéalisées et réalistes par Arthur Vidard [63]. Il a aussi testé cette prise en compte dans le cadre de la réduction d'ordre. Le choix des vecteurs s'est effectué en prenant les premiers termes du développement en série de Fourier. Ce travail a été complété par Sophie Durbiano [22] qui a testé cette prise en compte de l'erreur modèle dans le cadre du 4D–VAR réduit que nous détaillons par la suite.

# 1.3.3.2 Les méthodes duales

Une autre méthode permet de prendre en compte l'erreur modèle : la méthode des représenteurs (4D-PSAS). La fonction coût s'écrit de la même façon que précédemment. La solution introduite par Bennett [7] et Amodei [2] est de travailler sur une formulation duale du 4D-Var : la minimisation se fait alors dans l'espace des observations. La fonction coût, duale de J dans l'espace des observations, fait intervenir de la même façon les matrices **B**, **R** et **Q**. Cette méthode a été utilisée par exemple par Louvel ([38]), avec un modèle océanique aux équations primitives (MICOM) à 4 couches. On peut également citer les travaux de Auroux ([4]), sur une méthode duale appliquée à un modèle quasi-géostrophique.

# 1.3.4 Minimisation de la fonction coût par méthode adjointe

La minimisation s'effectue au moyen d'un algorithme de descente de type gradient conjugué, qui nécessite l'évaluation de la quantité  $\nabla J$  à chaque itération de minimisation. Etant donnée la dimension de l'espace de contrôle, il serait irréaliste d'estimer directement ce gradient. On utilise donc une résolution par méthode adjointe (Le Dimet et Talagrand [34]), basée sur la théorie du contrôle optimal.

#### 1.3.4.1 Méthode de l'adjoint pour un modèle continu

Le système considéré peut se modéliser sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = \mathcal{M}(X, t), \quad t \in [0, T] \\ X(0) = U \end{cases}$$

Les notations utilisées sont celles introduites par les équations (1.13) et (1.14). La fonction coût est donnée par l'équation (1.17).

Le calcul du terme  $\nabla J_b$  ne pose pas de problème puisqu'il est de la forme  $\mathbf{B}^{-1}\delta \mathbf{x}_0$ . La méthode adjointe sert uniquement à calculer  $J_o$ .

On cherche  $U^*$  tel que  $J_o(U^*) = \min J_o(U)$ . La variable de contrôle de la minimisation est ici la condition initiale U. La minimisation aurait pu porter sur une autre variable de contrôle comme par exemple les conditions aux limites ou encore certains paramètres du modèle. L'expression du gradient de la fonction coût comporterait alors des termes supplémentaires.

Une condition nécessaire du premier ordre pour que  $U^*$  vérifie ce minimum est l'équation d'Euler :

$$\nabla J_o(U^*) = 0$$

On considère une perturbation  $\delta u$  appliquée à la condition initiale U. La dérivée de Gâteaux de  $J_o(U)$ , notée  $\hat{J}_o$ , dans la direction de  $\delta u$  est donnée par :

$$\hat{J}_o(U,\delta u) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J_o(U + \alpha \delta u) - J_o(U)}{\alpha}$$
(1.26)

On note  $\langle , \rangle$  le produit scalaire associé à la norme  $\|$ .  $\|_o$  avec  $\langle a, b \rangle = \int_0^T (a, b) dt$ . On a donc par définition, en supposant que  $\hat{J}_o$  est linéaire par rapport à la perturbation  $\delta u$ : Soit  $\hat{X}$  la dérivée de Gâteaux de la variable d'état X. La dérivée du système continu (1.13), pour une perturbation  $\delta u$  sur la condition initiale, s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} \hat{X} \\ \hat{X}(0) = \delta u \end{cases}$$
(1.27)

Par définition de la fonction coût liée aux observations  $J_o(U) = \frac{1}{2} \int_0^T ||\mathcal{H}(X) - Y^o||_o^2 dt$  et en supposant que  $\mathcal{H}(X) = H.X$ , on a :

$$\hat{J}_o(U,\delta u) = \langle HX - Y_o, H\hat{X} \rangle = \langle \nabla J_o(U), \delta u \rangle$$
(1.28)

Dans un deuxième temps, on considère une variable arbitraire P, qui a la même dimension que  $\hat{X}$ . On peut alors écrire à partir du système (1.27) :

$$<\frac{\partial \hat{X}}{\partial t}, P>=\int_{0}^{T}(\frac{\partial \hat{X}}{\partial t}, P)dt = <\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}\hat{X}, P>$$
 (1.29)

En intégrant le premier membre de (1.29) par parties, on obtient le système :

$$(\hat{X}(T), P(T)) - (\hat{X}(0), P(0)) - \langle \hat{X}, \frac{\partial P}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} \hat{X}, P \rangle = \langle \hat{X}, \left[ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} \right]^T P \rangle$$
(1.30)

En utilisant  $\hat{X}(0) = \delta u$ , l'équation (1.30) devient :

$$(\hat{X}(T), P(T)) - (\delta u, P(0)) = \langle \hat{X}, \frac{\partial P}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}\right]^T P >$$
(1.31)

En utilisant la définition de l'adjoint de H, l'équation (1.28) peut se réécrire sous la forme :

$$\langle \delta u, \nabla J_o(U) \rangle = \langle \hat{X}, H^T(HX - Y_o) \rangle$$
 (1.32)

Si on identifie les équations (1.31) et (1.32), on définit le système adjoint de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}\right]^T \cdot P = H^T (HX - Y_o) \\ P(T) = 0 \end{cases}$$
(1.33)

Et on obtient l'égalité :

$$\nabla J_o(U) = -P(0) \tag{1.34}$$

P est solution du système adjoint du modèle linéaire tangent  $\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X}$ , intégré de façon rétrograde à partir de la condition initiale P(T) = 0. En pratique, pour obtenir  $\nabla J_o$ , il faut donc intégrer de façon rétrograde le modèle adjoint, obtenu à partir du modèle linéaire tangent, sur le même intervalle de temps que pour le cycle d'assimilation, ce qui permet d'obtenir la valeur du gradient  $\nabla J_o(U)$  que l'on cherchait. On remarque que  $\left[\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \mathbf{X}}\right]^T$  contient toute la trajectoire de référence du modèle direct, ce qui induit un problème de stockage.

On doit rajouter bien sûr le deuxième terme  $J_b$  dans la formulation du gradient.

## 1.3.4.2 Méthodes adjointes pour un modèle discret

On applique la méthode décrite pour le modèle continu dans le cas discret. Pour le modèle discret (ce qui nous intéresse en pratique), l'évolution temporelle avec un modèle M s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = M_{(t_i, t_{i+1})}(\mathbf{x}_i), & t_i \in \{t_1, ..., t_p\} \\ \mathbf{x}_0 \end{cases}$$
(1.35)

 $\mathbf{x}_0$  est la condition initiale du modèle discret. La variable de contrôle est en pratique l'incrément  $\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^b$ . L'état initial est très souvent pris égal à l'ébauche et donc l'incrément initial est nul.

L'expression de la fonction coût discrétisée devient alors :

$$J(\delta \mathbf{x}_{0}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_{0}^{T} \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_{0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} (\mathbf{y}_{i} - H_{i}(\mathbf{x}_{i}))^{T} \mathbf{R}_{i}^{-1} (\mathbf{y}_{i} - H_{i}(\mathbf{x}_{i}))$$
(1.36)

où **B** et  $\mathbf{R}_i$  sont les matrices de covariances d'erreurs d'ébauche et d'observations. Si on perturbe l'état initial par un champ  $\mathbf{h}_{x_0}$ , la dérivée de Gâteaux suit l'évolution dans la direction de la perturbation, de la même façon que pour le modèle continu :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{M}_{(t_i, t_{i+1})} \hat{\mathbf{x}}_i, & t_i \in \{t_1, ..., t_p\} \\ \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{h}_{x_0} \end{cases}$$
(1.37)

La dérivée directionnelle de la fonction coût s'écrit alors :

$$\hat{J}(\mathbf{x}_{0}, \mathbf{h}_{x_{0}}) = \sum_{i=1}^{p} [\mathbf{H}_{t_{i}} \hat{\mathbf{x}}_{i}]^{T} \mathbf{R}_{i}^{-1} [H_{t_{i}}(\mathbf{x}_{i}) - \mathbf{y}_{i}^{o}] + \mathbf{h}_{x_{0}}^{T} \mathbf{B}^{-1} [\delta \mathbf{x}_{0}]$$
(1.38)

On a de même :

$$\hat{J}(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_{x_0}) = (\nabla_{x_0} J, \mathbf{h}_{x_0})$$
 (1.39)

Si l'on définit l'état adjoint  $\mathbf{x}^*$  (équivalent de la variable adjointe P pour la formulation continue) de l'état courant  $\mathbf{x}$  du système par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i}^{*} = \mathbf{M}_{(t_{i}, t_{i+1})}^{T} \mathbf{x}_{i+1}^{*} + \mathbf{H}_{t_{i}}^{T} \mathbf{R}_{i}^{-1} (H_{t_{i}}(\mathbf{x}_{i}) - \mathbf{y}_{i}^{o}) \\ \mathbf{x}_{p}^{*} = 0 \end{cases}$$
(1.40)

On obtient alors par identification de (1.38) et (1.39) :

$$\nabla_{x_0} J = -\mathbf{x}_0^* + \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 \tag{1.41}$$

# 1.3.4.3 Obtention du modèle adjoint

En pratique, l'obtention du modèle adjoint se fait à partir du modèle direct discrétisé. En effet, la dicrétisation du modèle direct induit certaines approximations qu'il est important de retrouver dans le modèle adjoint discret. Cette différentiation peut se faire au moyen d'outils de différentiation automatique comme par exemple celui développé à l'INRIA, TAPENADE, dans le projet Tropics.

Ces outils facilitent grandement le travail du développeur. Cependant, d'une part d'un point de vue purement informatique, pour des raisons d'optimisation du code, l'intervention "humaine" reste nécessaire et d'autre part certaines fonctionnalités du langage fortran90 ne sont pas (encore) implémentées. Enfin, pour de gros modèles numériques comme OPA, l'automatisation de la procédure n'est pas envisageable.

Par conséquent, le calcul du modèle adjoint est un travail considérable, d'autant plus qu'il inclut nécessairement une phase de validation approfondie par le test. Le modèle adjoint discret du code OPA a été développé et validé par Weaver *et al.* ([67]).

# 1.3.5 La matrice B en assimilation variationnelle

Un aspect important des algorithmes d'assimilation de données est l'estimation et/ou la modélisation des covariances des erreurs qui affectent notre système (observations, modèle, ...). L'estimation de ces erreurs étant très difficile à réaliser du fait du manque de connaissance de ce qui les détermine, la solution mise en œuvre dans ce type d'application est de les modéliser. La faible connaissance de ces erreurs signifie qu'on ne connaît évidemment pas leur valeur en un point mais aussi qu'on ne sait pas estimer leur densité de probabilité sur le domaine étudié. De plus, la taille des systèmes étudiés rend impossible le stockage direct d'une matrice de covariance dont éventuellement on connaîtrait tous les termes.

Dans les parties précédentes, on a introduit la matrice de covariances d'erreur à l'ébauche **B**, qui apparaît dans la fonction coût (terme d'écart à la condition initiale) sans préciser son rôle particulier. **B** joue deux rôles importants. Le premier est l'estimation des covariances d'erreur d'ébauche (l'écart entre l'ébauche choisie dans la phase d'assimilation et l'état vrai si on en avait la connaissance). **B** définit de plus le terme  $J_b$  de la fonction coût. Enfin, un troisième rôle plus technique est le préconditionnement : **B** est l'opérateur qui permet de passer de l'espace physique dans lequel la solution évolue dans le temps et l'espace de contrôle dans lequel est effectuée la minimisation.

$$J_b(\delta \mathbf{x}_0) = \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0$$
$$= \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0$$
avec  $\delta \mathbf{v}_0 = \mathbf{B}^{-1/2} \delta \mathbf{x}_0$ 

La dépendance de la solution par rapport à  ${\bf B}$  est très forte. En effet, dans la formulation incrémentale du 4D–VAR, l'incrément d'analyse s'écrit :

$$\delta \mathbf{x}^{a} = \mathbf{B}\mathbf{G}^{T} \left(\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{G}^{T} + \mathbf{R}\right)^{-1} \left[\mathbf{y}^{0} - G(\mathbf{x})_{b}\right]$$
(1.42)

où G est l'opérateur composé du modèle non-linéaire M et de l'opérateur d'observation H.

Dans cette partie, on réintroduit très brièvement la définition et les propriétés des fonctions de covariance, avant d'introduire dans une seconde partie la modélisation utilisée dans le 4D-Var (OPAVAR).

#### 1.3.5.1 Retour sur la notion de covariance

**Définition :** Soit X une variable aléatoire réelle définie en chaque point d'un domaine de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux points de ce domaine. On définit une fonction de covariance B par :

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$$
  

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = E[(X(\mathbf{x}) - E[X(\mathbf{x})])(X(\mathbf{y}) - E[X(\mathbf{y})])]$$
(1.43)

B est une fonction de covariance si et seulement si elle est symétrique semi-définie positive.

A partir de la définition de B, on voit que la variance de X en  $\mathbf{x}$  s'écrit  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  et son écarttype  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ . On obtient alors la fonction de corrélation C associée à B, en normalisant par l'écart-type :

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{B(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{B(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} \cdot B(\mathbf{y}, \mathbf{y})^{1/2}}$$
(1.44)

Les fonctions de corrélation sont donc sans dimension.

Par suite, on peut définir T un opérateur de corrélation, appliqué à une fonction f quelconque de  $\mathbb{R}^n$  :

$$T_B(f)(\mathbf{x}) = \int C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$
(1.45)

C est appelé le noyau de l'opérateur T.

## Isotropie et homogénéité

Une fonction de corrélation peut éventuellement posséder les deux propriétés suivantes :

• Si la fonction de corrélation C est invariante par toute translation sur  $\mathbb{R}^n$ , alors C est dite *homogène*. (En d'autres termes, la corrélation entre deux points ne dépend que de la position respective de ces deux points).

• Soit g une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire qui vérifie  $||g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})|| = ||g(\mathbf{x} - \mathbf{y})|| = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ . C est isotrope ssi  $\forall g, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ C(g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) = C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Si C est une fonction de corrélation homogène et isotrope, alors  $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ne dépend que de la distance  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  et on peut noter  $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . L'équation (1.45) s'écrit alors :

$$T_B(f)(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$
(1.46)

Ce qui signifie que l'opérateur s'écrit alors comme le produit de convolution des fonctions f et G:

$$T_B(f)(\mathbf{x}) = f * G$$

## 1.3.5.2 Modélisation des covariances d'erreur d'ébauche

Nous décrivons maintenant l'opérateur de covariance **B** tel qu'il a été construit par Weaver et Courtier ([64]) et largement testé et validé dans sa configuration OPAVAR (4D-Var incrémental appliqué à la configuration TDH) par Weaver *et al.* ([67]) et Vialard *et al.* ([62]).

# Estimation des corrélations

Comme on ne connaît pas l'état vrai de l'océan, on ne sait pas estimer *a priori* l'erreur que l'on fait en prenant un état initial issu d'une simulation précédente effectuée avec le modèle non-linéaire. On cherche donc à *modéliser* la covariance d'erreur d'ébauche dont la définition est :

$$E\left[(\epsilon^b - E(\epsilon^b))(\epsilon^b - E(\epsilon^b))^T\right]$$

où  $\epsilon^b = \mathbf{x}^b - \mathbf{x}^t$  est une variable aléatoire qui représente l'erreur d'ébauche.

En pratique, le modèle est discret et les variables d'états organisées sur une grille. On a donc besoin d'estimer, pour une variable, la corrélation entre ses valeurs en deux points de grille.

L'hypothèse de base est que *les fonctions de corrélations sont de type gaussiennes*. Cela signifie en pratique que si l'on apporte une correction en un point de grille, l'influence de cette correction va être maximale en ce point et décroître spatialement, de façon gaussienne au fur et à mesure que l'on s'en éloigne. La caractérisation de ces fonctions se fait par la spécification des *échelles de corrélation* comme les distances spatiales en longitude et latitude.

#### Equation de diffusion en 1D dans $\mathbb{R}$

On se place dans le cas 1D, la généralisation par produit tensoriel ensuite ne posant pas de problème particulier. La méthode présentée ici est celle proposée par Derber et Rosati [18].

 $\mathcal{B}$  Comme indiqué plus haut, le premier point-clé est de modéliser la fonction de corrélation avec une fonction gaussienne.  $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  peut s'écrire, par exemple, sous la forme :

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa T}} \exp\left[\frac{-(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4\kappa T}\right]$$
(1.47)

Le terme  $\sigma = \sqrt{2\kappa T}$  peut être interprété comme la longueur d'échelle de la fonction gaussienne. La fonction ne dépend que de la distance entre **x** et **y**, elle est donc bien homogène et isotrope. Dans ce cas, l'opérateur de corrélation associé effectue le produit de convolution de cette fonction de corrélation avec toute fonction f.

Le deuxième point clé est de remarquer que ce produit de convolution est exactement la solution d'une équation de diffusion.

Considérons en effet l'équation de diffusion 1D :

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \ t \in [0, T] \\ \eta(x, 0) \text{ donné} \end{cases}$$
(1.48)

La solution analytique à l'instant T est :

$$\eta(x,T) = \frac{1}{(4\pi\kappa T)^{1/2}} \int_{y} \exp\left[\frac{-(x-y)^{2}}{(4\kappa T)}\right] \eta(y,0) dy$$

Le calcul explicite de cette solution, par une formule de quadrature, nécessiterait une intégration spatiale sur tout le domaine de la solution (équivalent au calcul du produit de convolution de la fonction gaussienne avec la condition initiale). En pratique, on préfère résoudre l'équation de diffusion 1D (1.48). Il est en effet plus facile et surtout moins coûteux d'intégrer numériquement cette équation (1.48) discrétisée sur un intervalle de temps [0,T] et de normaliser la solution ensuite.

# Equation de diffusion 3D en coordonnées sphériques

L'extension au cas 3D, en séparant les corrélations horizontales et verticales, se fait simplement. L'application au cas d'une sphère se fait en effectuant un changement de coordonnées qui prend en compte les différents facteurs d'échelle. On remplace la distance euclidienne définie précédemment entre deux points de  $\mathbb{R}$  par son équivalent en coordonnées sphériques.

On applique un développement en harmoniques sphériques à la variable  $\eta$  ce qui permet de passer en coordonnées sphériques. L'application de l'équation de diffusion à ce développement se fait alors dans l'espace de Fourier. Les harmoniques sphériques sont les vecteurs propres de l'opérateur laplacien sur une sphère, ce qui permet d'obtenir n équations indépendantes pour les coefficients du développement (n est alors le nombre de coefficients utilisés pour le développement). On a donc n intégrations à effectuer en différences finies indépendamment sur un intervalle [0,T] (au lieu du champ complet à calculer). Les conditions aux limites utilisées sont de type Neumann. La solution totale est alors obtenue à partir des n coefficients et toujours d'une normalisation appropriée.

# Corrélations verticales

Par analogie directe, on peut utiliser une équation de diffusion verticale 1D pour calculer un opérateur de corrélation vertical. On utilise la même méthode de résolution que dans le cas précédent. Sachant que la composition d'opérateurs de covariance donne un opérateur de covariance, on peut composer alors un opérateur horizontal et un opérateur vertical, calculés indépendamment.

#### Implémentation pratique

Dans notre cas, le vecteur d'état est composé de quatre variables indexées sur la grille du modèle, qui comporte environ  $2.10^5$  points. L'opérateur de covariance est représenté sous forme matricielle et appliqué à ce vecteur d'état. L'opérateur est monovarié : chaque bloc de **B** correspond à chacune des variables du vecteur d'état ( $\mathbf{U}_h, T, S$ ). Il est construit comme un produit symétrique de plusieurs opérateurs.

La modélisation précédente nous a fourni une approximation d'un opérateur de corrélation gaussienne par la résolution numérique de l'équation de diffusion. On a séparé les corrélations verticales et horizontales. Il faut maintenant obtenir un opérateur de covariance 3D, donc composer l'opérateur horizontal et vertical et multiplier par les écart-types associés pour obtenir ensuite le résultat final sous la forme **Bv**.

 ${\bf B}$  est donc construit sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \ \boldsymbol{\Sigma} \ \boldsymbol{\Lambda} \ \mathbf{L}^{1/2} \ \mathbf{W}^{-1} \ \mathbf{L}^{T/2} \ \boldsymbol{\Lambda} \ \boldsymbol{\Sigma} \ \mathbf{S}^{T} = \mathbf{B}^{1/2} \mathbf{B}^{T/2}$$
(1.49)

Dans cette expression :

- L est l'opérateur de filtrage 3D, composé de l'opérateur horizontal  $\mathbf{L}_h$  et vertical  $\mathbf{L}_v$ . Ces opérateurs contiennent les fonctions gaussiennes décrites ci-dessus.
- W est une matrice qui contient les facteurs d'échelle.
- $\Lambda$  est une matrice diagonale de facteurs de normalisation qui permet de rendre les coefficients diagonaux de la matrice  $\mathbf{C} = \Lambda \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^{T/2} \Lambda$  égaux à 1.  $\mathbf{C}$  est la matrice de corrélation monovariée.
- $-\Sigma$  représente la matrice diagonale des écarts-types.
- **S** est un opérateur qui permet de mettre en relation le vecteur (u, v) (qui contient les composantes baroclines et barotropes de la vitesse) en  $(\hat{u}, \hat{v}, \Psi)$  (on a séparé les composantes baroclines et barotropes).
**L** est un opérateur auto-adjoint par rapport au produit scalaire de métrique volumique définie dans  $\mathbf{W} : \mathbf{L}$  vérifie  $\mathbf{L} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}^T\mathbf{W}$ . Cela permet d'écrire que  $\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1}$  est une matrice symétrique. Si on obtient  $\mathbf{L}$  sous la forme  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{1/2}\mathbf{L}^{1/2}$ ,  $\mathbf{L}^{1/2}$  est aussi auto-adjoint et  $\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{L}^{1/2}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{L}^{T/2}$ . Ces propriétés vont permettre d'écrire le préconditionnement détaillé dans le paragraphe suivant.

Cet opérateur a en particulier certaines propriétés comme celle de permettre un couplage horizontal-vertical et de pouvoir modifier certains paramètres comme les échelles spatiales de longueur de corrélations. On peut de plus choisir des fonctions de corrélations plus générales que des fonctions gaussiennes (Weaver et Courtier, [64] ou encore Ricci, [49]). Il est de plus très efficace numériquement.

#### Préconditionnement

Pour améliorer l'efficacité des calculs effectués, on rend le vecteur de contrôle adimensionnel en effectuant un préconditionnement. En pratique, on impose un changement de variable qui permet de passer de l'espace modèle (les variables ont une dimension) à l'espace de contrôle (les variables sont sans dimension).

Nous avons vu que ce rôle est attribué en pratique à la matrice **B**, définie précédemment.

On définit  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1/2} \delta \mathbf{x}_0$  l'incrément dans l'espace de contrôle. L'expression de  $J_b$  devient alors  $\frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \delta \mathbf{v}^T \delta \mathbf{v}$ . On peut alors déduire l'expression de son gradient  $\nabla_x J_b = \delta \mathbf{v}$ .

L'expression de  $\mathbf{B}^{1/2}$  sous la forme  $\mathbf{S} \Sigma \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{W}^{-1/2}$  permet d'écrire :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{S} \ \mathbf{\Sigma} \ \mathbf{\Lambda} \ \mathbf{L}^{1/2} \ \mathbf{W}^{-1/2} \delta \mathbf{y} \tag{1.50}$$

### 1.3.5.3 Matrice de covariances d'erreur d'ébauche multivariée

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que  $\mathbf{B}$  conditionne fortement la solution obtenue lors d'un cycle d'assimilation de données variationnelle.

Très souvent, le modèle de corrélation mis en œuvre est un modèle monovarié (qui ne prend pas en compte certaines interactions ou équilibres entre les variables). La matrice associée est alors représentée sous une forme bloc diagonale, ce qui signifie qu'un point de grille influence ses voisins mais pas les autres variables. Par conséquent, l'assimilation d'une seule variable peut entraîner une détérioration des autres variables non assimilées.

**Opérateur multivarié :** la construction d'un opérateur **B** multivarié implique la prise en compte de relations supplémentaires liant certains variables entre elles, dans le calcul des covariances. La matrice **B** comporte alors des termes extra-diagonaux.

Ricci ([48]) a étudié la prise en compte d'une relation température-salinité dans un 3D-VAR sur le Pacifique tropical. Les résultats obtenus en expériences jumelles montrent que la prise en compte des contraintes entre les variables contribue largement à l'amélioration des résultats (amélioration du bilan global de sel, amélioration de la représentation des courants). L'extension au 4D–VAR est en cours de développement au CERFACS (A. Weaver).

**Opérateur multivarié de rang réduit :** nous verrons par la suite que dans le cas des méthodes de rang réduit, il est possible de modéliser **B** dans un espace de dimension réduite. Les directions principales qui engendrent cet espace de dimension réduite peuvent être des vecteurs d'une base EOFs par exemple, construite naturellement de façon multivariée.

### **1.4** Equivalence formelle

L'analyse statistique consiste à fournir la meilleure estimation possible  $\mathbf{x}^a$  de l'état du système à partir d'un premier estimé  $\mathbf{x}^f$ . Cette estimation se fait sous la forme d'une relation linéaire de la forme :

$$\mathbf{x}^{a} = \mathbf{x}^{f} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}(\mathbf{x}^{f})) \tag{1.51}$$

Cette relation se calcule sous la contrainte que  $\mathbf{x}^a$  doit minimiser la variance de l'erreur d'analyse et on obtient alors une expression pour  $\mathbf{K} = \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T [\mathbf{H} \mathbf{P}^f \mathbf{H}^T + \mathbf{R}^{-1}].$ 

Nous avons vu de plus que la résolution variationnelle du problème d'assimilation de données conduisait à la minimisation d'une fonctionnelle, constituée d'un terme d'écart aux observations et d'un terme de régularisation d'écart à un premier estimé de l'état du système (ou ébauche).

La minimisation de cette fonctionnelle conduit à l'obtention d'un état analysé  $\mathbf{x}^a$  qui vérifie, entre autres relations,  $\nabla J = 0$  (minimium de J).

Dans le cas où le modèle d'évolution temporelle de l'état du système est linéaire, la résolution du problème d'assimilation par l'une ou l'autre des deux approches, conduit à un résultat identique qui est l'expression de  $\mathbf{x}^a$  en fonction du vecteur des observations  $\mathbf{y}$  et de l'état estimé *a priori*  $\mathbf{x}^f$ suivant la relation (1.51). La dimension temporelle dans le problème d'assimilation variationnelle implique que c'est l'état obtenu à la fin de la période d'intégration qui est égal à celui obtenu lors de l'analyse séquentielle.

Cette équivalence sera reprise au chapitre 8 lorsque nous présenterons l'hybridation des deux méthodes.

### 1.5 Réduction d'ordre en assimilation de données

On a vu que pour des applications réalistes la mise en œuvre des méthodes d'assimilation de données devenait problématique en particulier pour la spécification des matrices de covariances d'erreurs. Plusieurs types de méthodes ont été mis en œuvre pour résoudre ce problème en effectuant certaines approximations (on a évoqué en particulier les méthodes d'ensemble [23] et les méthodes duales [38]). On détaille ici le principe et la mise en œuvre de la méthode de réduction d'ordre appliquée en assimilation variationnelle et séquentielle.

### 1.5.1 Principe théorique

L'existence d'un attracteur pour les systèmes dynamiques de type océan ou atmosphère a été démontré pour différents modèles (Bernier [8], Lions *et al.*, [37], Temam, [53]). La dimension de cet attracteur dépend des hypothèses et des paramètres sur lesquels est basé le modèle. Pour un modèle Quasi-Géostrophique par exemple, les hypothèses effectuées réduisent de façon très importante le nombre de degrés de liberté. La dimension de l'attracteur donne de plus une indication sur le nombre de degrés de liberté dont on a besoin pour simuler le système dynamique. Ce nombre de degrés de liberté reste encore beaucoup trop élevé pour les moyens de calcul actuels si on considère un système complexe. Cependant, en pratique, une fois le modèle discrétisé, on se ramène sans doute à une dimension d'attracteur raisonnable.

L'attracteur du système étant inhomogène, la propagation des erreurs, en fonction de leur direction initiale par exemple, peut présenter des caractéristiques très différentes, comme par exemple les échelles temporelles de prédictibilité dans l'espace des phases [33]. De façon plus générale, les perturbations tangentes à cet attracteur sont amplifiées, du fait du caractère chaotique du système alors que les perturbations normales sont atténuées. Dans ce contexte, lorsqu'on envisage de n'utiliser qu'un nombre réduit de directions de correction dans les méthodes d'assimilation de données, les directions choisies doivent comporter en priorité les directions tangentes. On cherche donc un sous-espace qui contienne ces directions, de façon à pouvoir effectuer des corrections pertinentes, sans conserver la totalité de l'information.

#### 1.5.1.1 Détermination du sous-espace de correction

Toute matrice de covariance  $\mathbf{P}$ , de taille (n,n), est réelle et symétrique. On peut donc la diagonaliser sous la forme :

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{N} \mathbf{\Lambda} \mathbf{N}^T$$

 $\Lambda$  contient donc *n* valeurs propres et **N**, *n* vecteurs propres. L'idée de base de la réduction d'ordre est de ne conserver que les *r* premiers de ces vecteurs, associés aux *r* plus grandes valeurs propres, pour générer un sous-espace de dimension réduite. On a alors :

$$\mathbf{P} = \mathbf{N}_r \mathbf{\Lambda}_r \mathbf{N}_r^T = \mathbf{N}_r \mathbf{\Lambda}_r^{1/2} \mathbf{\Lambda}_r^{1/2} \mathbf{N}_r^T = \mathbf{S}_r \mathbf{S}_r^T, \quad \text{où } \mathbf{S} \text{ est de taille} \quad n \times r$$

### 1.5.1.2 Initialisation de la procédure

L'initialisation de la procédure d'assimilation de données nécessite un premier estimé  $\mathbf{x}_0$  qui a pour matrice de covariance d'erreurs sur ce premier estimé  $\mathbf{P}_0$ . L'obtention de  $\mathbf{P}_0$  peut se faire par différentes méthodes. Une façon de procéder consiste à effectuer une décomposition en fonctions empiriques orthogonales (EOFS) sur un échantillonnage d'une série temporelle d'états du système. On obtient alors une série de modes décrivant les directions de variabilité principales du système. En ne sélectionnant qu'un nombre réduit d'entre eux pour décrire le sous-espace d'erreur initial, on engendre un sous-espace de dimension réduite. Une base de vecteurs EOFS n'est pas la seule base envisageable. Durbiano ([22]) a testé dans un modèle shallow-water d'autres types de vecteurs comme les vecteurs issus du breeding ([55]), des vecteurs de Lyapunov et des vecteurs singuliers.

### 1.5.2 Application au filtre de Kalman : le filtre SEEK

Dans les méthodes de type filtre de Kalman, les matrices de covariance d'erreurs sont a priori de rang complet. La propagation des erreurs par le modèle dynamique devient prohibitif pour des configurations importantes, au regard des moyens de calcul disponibles. On cherche donc à exprimer les erreurs commises dans la procédure dans un espace de dimension réduite. Les premiers travaux concernant l'application de la réduction de la dimension de l'espace d'erreur au filtre de Kalman ont été réalisés par Cane *et al.* ([14]) sur un modèle à deux couches de l'océan Pacifique Tropical avec assimilation de données de hauteur de mer moyenne en différents points du domaine. L'algorithme du filtre SEEK (Singular Evolutive Extended Kalman Filter, Pham *et al.* [45]) se situe dans cette classe de méthodes. Sa particularité est de pouvoir faire évoluer le sous-espace de correction (et donc la matrice de covariance d'erreur d'analyse) avec le système dynamique. Il a d'abord été développé et appliqué sur un modèle QG dans un bassin carré par Pham *et al.* ([45]) avec assimilation de données de type altimétrique. L'extension à l'assimilation de données altimétriques dans un modèle non-linéaire de l'océan Pacifique Tropical a été réalisé en 1999 par Verron *et al.* [59]. L'équipe MEOM du LEGI a grandement contribué au développement des différentes versions du filtre SEEK, enrichissant la réduction d'ordre de diverses méthodes de prise en compte de la base de réduction, notamment à travers la mise en place du logiciel SESAM qui permet de façon simple et surtout très modulaire d'utiliser ce filtre ([54]).

### 1.5.2.1 Mise en œuvre dans le filtre SEEK

#### • Initialisation

Après le calcul d'une famille de vecteurs  $(L_i)$ , la matrice initiale est calculée sous la forme :

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{S}_0 \mathbf{S}_0^T \tag{1.52}$$

où S contient les vecteurs de la base choisie, multipliés par la valeur propre associée.

### • Décomposition des matrices de covariances d'erreur

Les matrices sont exprimées, sous la forme de l'équation (1.52), à l'étape d'assimilation k:

$$\mathbf{P}_{k}^{f} = \mathbf{S}_{k}^{f} \mathbf{S}_{k}^{fT}$$
$$\mathbf{P}_{k}^{a} = \mathbf{S}_{k}^{f} [I + (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})^{T} \mathbf{R}_{k}^{-1} (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})]^{-1} \mathbf{S}_{k}^{fT}$$
(1.53)

### • Evolution des modes d'erreur

Le nombre de modes étant de l'ordre de 10 à 30 suivant l'application, il est tout à fait envisageable de les faire évoluer numériquement avec le modèle, ce qui n'était pas possible en dimension complète pour des raisons de coût de calcul. L'évolution de chaque mode par le modèle non-linéaire s'écrit :

$$\left[\mathbf{S}_{k+1}^{f}\right]_{r} = M\left[\mathbf{x}_{k}^{a} + \left[\mathbf{S}_{k}^{a}\right]_{r}\right] - M\left[\mathbf{x}_{k}^{a}\right]$$
(1.54)

En introduisant  $\mathbf{M}$  le modèle linéaire tangent, on peut écrire :

$$\left[\mathbf{S}_{k+1}^{f}\right]_{r} = M\left[\mathbf{x}_{k}^{a} + \left[\mathbf{S}_{k}^{a}\right]_{r}\right] - M\mathbf{x}_{k}^{a} \simeq \mathbf{M}\left[\mathbf{S}_{k}^{a}\right]_{r}$$

Chaque mode peut évoluer aussi directement avec le modèle linéaire tangent  $\mathbf{M}$ . Dans ce cas, on néglige les propagations non-linéaires des modes d'erreur. En pratique c'est la version interpolée qui est mise en œuvre.

#### • Paramétrisation de l'erreur modèle

La matrice de covariance d'erreur de prévision se met sous la forme :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{S}_{k+1}^f)^T + \mathbf{Q}_k$$

Dans cette équation  $\mathbf{Q}_k$  représente la matrice de covariance d'erreurs modèle. Cette matrice ne peut pas être déterminée de façon satisfaisante, elle est donc paramétrisée. On utilise pour cela, dans le filtre SEEK, une méthode simple qui consiste à introduire dans l'équation un facteur de pondération (ou encore facteur d'oubli)  $0 < \rho < 1$ :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{S}_{k+1}^f)^T$$

Ce facteur a pour rôle d'augmenter le poids donné à la matrice d'erreur de prévision.

### 1.5.2.2 Algorithme complet du filtre SEEK

Initialisation :  $\mathbf{x}_{k=0} = \mathbf{x}_{0}$  $\mathbf{P}_{k=0} = \mathbf{S}^{0} \mathbf{S}^{0T}$ (1.55) Analyse :  $\mathbf{P}_{k}^{f} = \mathbf{S}_{k}^{f} \mathbf{S}_{k}^{fT}$  $\mathbf{K}_{k} = \mathbf{S}_{k}^{f} [I + (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})^{T} \mathbf{R}_{k}^{-1} (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})]^{-1} (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})^{T} \mathbf{R}_{k}^{-1}$  $\mathbf{x}_{k}^{a} = \mathbf{x}_{k}^{f} + \mathbf{K}_{k} [\mathbf{y}_{k} - \mathbf{H}_{k} \mathbf{x}_{k}^{f}]$  $\mathbf{P}_{k}^{a} = \mathbf{S}_{k}^{f} [I + (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})^{T} \mathbf{R}_{k}^{-1} (\mathbf{H}_{k} \mathbf{S}_{k}^{f})]^{-1} \mathbf{S}_{k}^{fT}$ (1.56) Prévision :  $\mathbf{x}_{k+1}^{f} = M_{k,k+1} [\mathbf{x}_{k}^{a}]$  $[\mathbf{S}_{k+1}^{f}]_{r} = M[\mathbf{x}_{k}^{a} + [\mathbf{S}_{k}^{a}]_{r}] - M[\mathbf{x}_{k}^{a}]$  $\mathbf{P}_{k+1}^{f} = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^{f} (\mathbf{S}^{f})_{k+1}^{T}$ (1.57)

### 1.5.2.3 Les variantes du filtre

Le filtre SEEK présente des variantes dans la propagation des matrices de covariances d'erreur.

- version évolutive : la matrice  $\mathbf{P}^a$  évolue avec la dynamique, propagée soit par le modèle nonlinéaire, soit par le modèle linéaire.
- version fixe :  $\mathbf{P}^a$  n'évolue pas avec la dynamique du modèle. On rajoute seulement à chaque étape d'analyse la matrice de covariance d'erreur modèle  $\mathbf{Q}_k$  pour obtenir  $\mathbf{P}_{k+1}^f$ . On a alors :

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{P}_k^a + \mathbf{Q}_k = \mathbf{S}_k^a \mathbf{S}_k^{aT} + \mathbf{Q}_k$$

- version stationnaire : l'erreur en sortie d'étape d'analyse est seulement diagnostiquée. Elle ne sert donc pas à l'évaluation de  $\mathbf{P}_k^f$  comme précédemment. On a toujours au cours des différentes étapes  $\mathbf{P}_k^f = \mathbf{P}^0$ .

Cette dernière méthode a été utilisée et validée sur de nombreux domaines, en particulier dans la thèse de Testut [54]. On peut citer aussi les travaux présentés dans [59].

D'autres variantes ont été implémentées et concernent la définition du sous-espace d'erreur. Il s'agit alors d'un filtre SEEK dit **adaptatif** (Brasseur *et al.*, 1999 [12]). Il a été utilisé en particulier par Durand ([20]) dans le Pacifique Tropical. Le sous-espace d'erreur est un sous-espace de dimension réduite qui n'explique qu'une partie de l'information apportée par les observations. La composante orthogonale est négligée dans le processus d'assimilation. La méthode employée dans ce filtre adaptatif est de supprimer le vecteur le moins pertinent de la base pour le remplacer par un nouveau vecteur qui représente une partie de l'information contenue dans le sous-espace orthogonal au sous-espace de correction. En pratique, une composante du vecteur innovation, orthogonale au sous-espace de correction, est choisie pour remplacer le vecteur éliminé. Cette procédure soulève plusieurs problèmes :

- le vecteur innovation ne contient que la variable assimilée : il fournit donc un mode monovarié
- le mode obtenu doit être extrapolé horizontalement et verticalement pour couvrir la même zone que les autres vecteurs (EOFS le plus souvent).
- ce mode doit être en adéquation avec la dynamique du modèle pour ne pas introduire de corrections qui entrainerait un état physique trop instable. Pour cela, il évolue avec la dynamique du modèle pendant un intervalle de temps donné

Nous détaillerons au chapitre 2 les résultats obtenus avec le filtre SEEK sur le Pacifique Tropical.

### 1.5.3 4D–VAR réduit

Dans le 4D–VAR, il s'agit de trouver un vecteur qui minimise la fonctionnelle J. La démarche dans les méthodes variationnelles de rang réduit consiste à exprimer ce vecteur de contrôle dans un espace de dimension réduite, à effectuer la phase de minimisation dans cet espace réduit et à exprimer ensuite l'état analysé (celui qui minimise J) de nouveau dans l'espace complet.

Il faut donc de la même façon que précédemment déterminer un sous-espace qui permette de représenter au mieux les informations, c'est à dire qui minimise l'erreur de troncature que l'on fait quand on réduit la dimension de l'espace de travail.

La démarche est alors la suivante : trouver  $\mathbf{x}^r$  qui minimise la fonction coût J, défini par :

$$\mathbf{x}^r = \mathbf{x}^b + \sum_{i=1}^r \lambda_i \mathbf{L}_i$$

La base  $(\mathbf{L}_i)_{i=1...r}$  est une base de vecteurs caractéristiques, représentant la variabilité du système étudié. Les travaux de S. Durbiano ont permis de montrer que pour un modèle shallow-water, en assimilation variationnelle, la famille de vecteurs qui permettait d'obtenir les meilleurs résultats était les composantes principales (EOFS) dont nous avons parlé précédemment et qui sont décrits plus en détail en annexe A.1. Nous verrons plus en détail par la suite que cette base de vecteurs présente l'avantage dans notre contexte de modéliser des covariances tridimensionnelles et multivariées.

La famille de vecteurs choisie définit un sous-espace de correction. Cette famille de vecteurs doit permettre d'exprimer les covariances d'erreur que l'on a détaillé précédemment, en particulier la matrice **B** qui représente une erreur commise dans ce sous-espace. L'avantage important du choix d'une base de vecteurs EOFS est que les valeurs propres associées à la diagonalisation représentent physiquement des covariances puisque c'est ainsi qu'elles ont été construites. La difficulté qui réside dans l'utilisation de familles autres que des vecteurs EOFS est justement cette spécification des covariances entre les différents modes.

La variable de contrôle dans l'espace modèle est le jeu de coefficients  $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r)$  qui permet de représenter l'incrément  $\delta \mathbf{x}^r$  sous la forme  $\delta \mathbf{x}^r = \sum_{i=1}^r \lambda_i L_i$ .

#### 1.5.3.1 Prise en compte de l'erreur modèle

Cette méthode de réduction d'ordre peut aussi être appliquée au contrôle de l'erreur modèle. Une façon possible de le faire est de considérer que l'erreur peut se décomposer sous la forme suivante :

$$e = \overline{e} + \Sigma \alpha_i \mathbf{e}_i$$

La variable de contrôle est alors augmentée des coefficients ( $\alpha_i$ ). Cette prise en compte de l'erreur modèle avec réduction d'ordre a été implémentée et testée par Vidard ([63]) sur une équation de Burger. Ces expériences mettent en évidence d'une part le gain apporté par la prise en compte de l'erreur modèle et d'autre part par la réduction d'ordre. Durbiano ([22]) a aussi développé cette méthode de prise en compte de l'erreur modèle dans le cadre du modèle shallow-water en détaillant les diverses sources d'erreurs (systématique et instantanée) et en mettant en évidence le gain obtenu pour la phase d'analyse du 4D-VAR.

### 1.5.4 Conclusions

La taille des systèmes manipulés en océanographie ou en météorologie est une contrainte importante pour les moyens de calcul actuels, pour pouvoir contrôler la totalité d'un état dans un processus d'assimilation (on a vu qu'un système courant comporte de  $10^6$  à  $10^7$  degrés de liberté). La réduction d'ordre semble être une réponse possible en apportant un gain en terme de coût de calcul. Comme nous le verrons par la suite dans la mise en œuvre des expériences avec les méthodes de rang réduit, le choix de la base de réduction est un paramètre très sensible, la spécification du sous-espace d'erreur en dépendant directement.

### **1.6** Analyse et diagnostics

### 1.6.1 Validation des systèmes

D'une manière générale, les diagnostics sur les méthodes d'assimilation de données sont difficiles à réaliser. Une façon d'évaluer la faisabilité et l'efficacité d'une méthode est d'effectuer, dans un premier temps, des expériences jumelles, c'est à dire de générer des observations avec le modèle direct. Connaissant la solution exacte, on peut évaluer l'erreur commise par les différentes méthodes employées et déterminer dans le cadre des expériences réalisées quelle est la configuration la plus performante : la comparaison des résultats entre la simulation modifiée et la simulation de référence donne accès aux valeurs d'erreur RMS (que nous allons définir ci-dessous) de l'évolution des différentes variables au cours du temps, le choix de la norme utilisée pour évaluer cette erreur RMS étant à préciser<sup>2</sup> (ces calculs sont détaillés au paragraphe suivant). Dans le cas des méthodes variationnelles, on peut voir la convergence de l'algorithme grâce à l'étude des différents termes de la fonction coût au cours des itérations de minimisation. Les diagnostics dans le cas de l'assimilation de données réelles sont moins faciles à mettre en œuvre. D'une part, la consistence interne du schéma peut se faire en comparant le champ obtenu à celui des données utilisées dans le schéma d'assimilation : on analyse alors la capacité du schéma à corriger le champ concerné et à produire une solution correcte. D'autre part, la validité physique des solutions obtenues peut être analysée en comparant, au premier ordre, avec des données indépendantes (non-utilisées dans le schéma d'assimilation) pour juger de l'amélioration de la solution obtenue.

Dans le cas des méthodes variationnelles, la validation des algorithmes peut être faite a posteriori, en se basant sur les propriétés statistiques de la différence entre l'état analysé et les observations (ImA, pour Information Minus Analysis). Ces diagnostics portent sur la valeur du minimum de la fonction coût et les quantités E[J] et Var[J] pour vérifier a posteriori les hypothèses faites sur la statistique des erreurs dans le système. Talagrand ([52], [51]) montre que l'étude statistique de l'écart entre l'état analysé et les observations donne des éléments d'appréciation sur la façon dont a été prise en compte l'erreur d'observation, et dans certains cas l'erreur modèle.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Généralement, c'est la norme de l'énergie totale qui est utilisée [22]

### 1.6.2 Différentes normes utilisées dans le processus d'assimilation

### 1.6.2.1 Valeurs d'erreur RMS

Les diagnostics d'erreur concernent l'écart entre la trajectoire optimisée et la trajectoire de référence (qui est la solution à identifier). On parle d'erreur absolue  $\|\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{x}_{ref}\|_2$ .

Cette valeur pourra aussi être rapportée à la norme de la solution de référence. On parle alors d'erreur relative :

$$\frac{\|\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{x}_{ref}\|_2}{\|\mathbf{x}_{ref}\|_2}$$

.  $\|.\|_2$  signifie que le norme utilisée est la norme  $\mathcal{L}_2$ . On parle, en océanographie, dans ce cas, d'erreur RMS.

Calculer globalement la norme d'un vecteur d'état, constitué de quatre variables (U,V,T,S) n'aurait pas de sens dans la mesure où elles n'ont pas la même dimension. Le calcul d'erreur se fait donc nécessairement variable par variable, il n'y a donc pas ici de problème de dimension. Il se fait de plus généralement par couche du modèle.

La quantité  $\|\mathbf{x}_{opt} - \mathbf{x}_{ref}\|$  est calculée en pratique de la façon suivante. Soit N le nombre de points de grille pris en compte,

$$\begin{cases} \mathbf{z} = \mathbf{x}_{opt} - \mathbf{x}_{ref} \\ \|\mathbf{z}\|^2 = \frac{1}{N} < \mathbf{z}, \mathbf{z} >= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} z_k z_k \end{cases}$$
(1.58)

Pour le calcul de la norme globale d'un vecteur d'état, on doit définir une autre norme :

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle_{\sigma} = \| \frac{\mathbf{z}}{\sigma} \|_2$$

où z est un vecteur d'état de la forme (u,v,T,S) et  $\sigma = (\sigma^u, \sigma^v, \sigma^T, \sigma^S)$  est la variance empirique calculée en chaque point pour chaque variable.

$$\sigma_i^T = \frac{1}{N_t} \sum_{l=1}^{N_t} (T_{il} - \overline{T_i})^2 \quad \text{calculée au point } i, \text{ pour la température}$$
(1.59)

Pour des raisons de coût de calcul, la métrique qui est utilisée pour adimensionaliser le vecteur d'état n'est pas exactement celle-là mais correspond à une variance empirique approchée : on effectue une moyenne spatiale des variances locales obtenues avec l'équation (1.59). Elle ne dépend plus du point de grille mais uniquement de la variable considérée. Finalement, on a

$$\sigma^T = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} \sigma_i^T$$

Ainsi, on définit un produit scalaire adapté à la dimension du vecteur d'état :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\sigma} = \frac{1}{\sigma^{T}} \langle \mathbf{x}^{T}, \mathbf{y}^{T} \rangle_{\mathcal{L}_{2}} + \frac{1}{\sigma^{S}} \langle \mathbf{x}^{S}, \mathbf{y}^{S} \rangle_{\mathcal{L}_{2}} + \dots$$
 (1.60)

D'où 
$$\|\mathbf{x}\|_{\sigma}^{2} = \frac{1}{\sigma^{T}} < \mathbf{x}^{T}, \mathbf{x}^{T} >_{\mathcal{L}_{2}} + \frac{1}{\sigma^{S}} < \mathbf{x}^{S}, \mathbf{x}^{S} >_{\mathcal{L}_{2}} + \dots$$
 (1.61)

C'est cette norme qui intervient dans le calcul des EOFS multivariées (détaillé en annexe A.1).

### 1.6.2.2 Calcul de la distance au cours du temps entre l'incrément d'analyse et sa propagation dans l'espace de dimension réduite

Sur la figure 1.4, on a représenté l'espace réduit comme sous-espace de l'espace modèle. L'incrément d'analyse (auquel on a ajouté l'ébauche) évolue au cours du temps dans l'espace modèle avec le modèle non-linéaire. L'espace modèle, complet de dimension  $N (= 4N_x)$  est muni d'une base canonique orthonormée  $(\mathbf{e}_k)_{k=1...N}$ , pour la norme  $\langle . \rangle_{\sigma}$ .



FIG. 1.4 – Représentation de l'incrément dans l'espace modèle et l'espace de contrôle Soit x un vecteur de l'espace modèle. Sa norme dans l'espace modèle s'écrit donc :

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbf{e}_k$$
$$\|\mathbf{x}\|_{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k^2 \tag{1.62}$$

L'incrément est défini comme étant l'état en cours auquel on retranche l'ébauche :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b$$

En particulier,  $\delta \mathbf{x}_a(t_i)$  représente l'évolution au cours du temps, propagé par le modèle non-linéaire M, de l'état analysé  $\mathbf{x}_a$ .

$$\mathbf{x}_a(t_i) = M_{t_0, t_i}(\mathbf{x}_a(t_0))$$

On note donc par convention :

$$\delta \mathbf{x}_a(t_0) = \mathbf{x}_a(t_0) - \mathbf{x}_b$$
  
et  $\delta \mathbf{x}_a(t_i) = \mathbf{x}_a(t_i) - \mathbf{x}_b$  (1.63)

La projection orthogonale est notée avec une étoile. La base de vecteurs qui engendre le sous-espace de correction est une base adimensionnelle, orthonormée pour un produit scalaire qui est fixé en tenant compte du caractère dimensionnel des vecteurs qui composent la matrice d'état  $\mathbf{X}$  ( $\langle . \rangle_{\sigma}$ ). Il nous a paru utile ici de réorthonormer ces vecteurs avec un algorithme de Gram-Schmidt ce qui les rend orthonormé par rapport au produit scalaire euclidien :

$$\langle \mathbf{L}_i, \mathbf{L}_k \rangle = \delta_{ik}$$

La projection est effectuée sur les vecteurs de la base qui engendre le sous-espace de correction :

$$\delta \mathbf{x}_{a}(t_{i})^{*} = \sum_{k=1}^{r} a_{k}^{i} \mathbf{L}_{k}$$

$$\text{avec } a_{k}^{i} = \langle \delta \mathbf{x}_{a}(t_{i}), \mathbf{L}_{k} \rangle$$

$$(1.64)$$

### Calcul de la distance entre $\delta \mathbf{x}_a(t_i)$ et l'espace réduit

Cette distance est donnée par une norme  $\mathcal{L}_2$ . On note  $\delta \mathbf{z}(t_i) = \delta \mathbf{x}_a(t_i)^* - \delta \mathbf{x}_a(t_i)$ . On a alors :

$$\mathcal{D}_{i}^{*} = \|\delta \mathbf{z}(t_{i})\|_{2} = \|\delta \mathbf{x}_{a}(t_{i})^{*} - \delta \mathbf{x}_{a}(t_{i})\|_{2} = \|\sum_{k=1}^{r} a_{k}^{i} \mathbf{L}_{k} - \delta \mathbf{x}_{a}(t_{i})\|_{2} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (z_{k}^{i})^{2}}$$
(1.65)

Cette quantité doit être comparée à la quantité initiale. On trace donc le rapport :

$$\mathcal{D}_i = \frac{\mathcal{D}_i^*}{\mathcal{D}_0^*}$$

On peut ainsi analyser l'évolution au cours du temps de la distance entre la solution fournie par le modèle numérique et le sous-espace de correction, relativement à la distance initiale.

## Chapitre 2

# L'assimilation de données dans l'océan Pacifique tropical

### Sommaire \*

<b>2.1</b>	Dyn	amique de l'océan Pacifique Tropical	38
	2.1.1	La dynamique océanique en période normale	38
	2.1.2	Le phénomène El Niño	39
	2.1.3	La dynamique océanique en période El Niño	40
2.2	Le n	nodèle OPA	43
	2.2.1	Hypothèses et équations	43
	2.2.2	Discrétisation	45
2.3	Con	figuration des expériences : le modèle TDH	<b>46</b>
	2.3.1	Caractéristiques du modèle	46
	2.3.2	Forçages utilisés	47
	2.3.3	Ebauche et état initial	48
	2.3.4	Données assimilées	48
2.4	Mod	lélisation numérique de la zone Pacifique Tropical et validation du	
	$\operatorname{mod}$	èle OPA	<b>49</b>
<b>2.5</b>	$\mathbf{Assi}$	milation variationnelle dans l'océan Pacifique Tropical	51
	2.5.1	Assimilation de données de température TAO	51
2.6	$\mathbf{Assi}$	milation séquentielle dans l'océan Pacifique Tropical	<b>53</b>
	2.6.1	Assimilation séquentielle de champs 2D	53
	2.6.2	$\begin{tabular}{ll} Assimilation séquentielle de champs 3D & \dots & $	53

### 2.1 Dynamique de l'océan Pacifique Tropical

Les expériences numériques qui vont être présentées dans ce travail de thèse ont été réalisées sur la zone de l'océan Pacifique Tropical. Nous allons décrire succinctement les phénomènes océaniques qui s'y produisent, leur couplage avec l'atmosphère ainsi que quelques résultats d'études numériques réalisées dans cette zone, avec ou sans assimilation de données.

Ce bassin océanique est en particulier le siège d'un phénomène climatique et océanique de grande échelle connu sous le nom de El Niño et sa réplique La Niña. Les modifications du climat et de l'océan (avec un fort couplage océan-atmosphère) qui se produisent lors d'un tel épisode sont de grande amplitude, d'où un impact socio-économique très important (modifications du climat qui perturbent les cultures agricoles habituelles, modifications de l'activité biologique de l'océan qui peut conditionner des activités comme la pêche). Son étude et sa prévision sont donc des enjeux décisifs.

L'océan Pacifique Tropical a un comportement différent suivant la zone géographique considérée : on peut distinguer trois zones principales qui sont les zones *Est*, *Centre* et *Ouest*. De façon simplifiée, en période calme on observe en surface une masse d'eau chaude située à l'Ouest du bassin (la **Warm Pool**), un gradient de température central, une masse d'eau beaucoup plus froide au Sud-Est ainsi qu'une masse d'eau dont la température de surface (SST, Sea Surface Temperature) est plus proche de celle de la Warm Pool au Nord-Est. Pour chaque masse d'eau en surface (avec une SST particulière), la réponse atmosphérique à la surface de l'océan est différente. De plus, la dynamique à l'équateur diffère aussi de celle qu'on peut observer dans les Tropiques. On a, à l'échelle du bassin, un système qui met en jeu une grande diversité de phénomènes.

### 2.1.1 La dynamique océanique en période normale

En *période normale*, les vents dominants dans le bassin Est soufflent vers l'Ouest (Alizés). Ces Alizés contribuent à créer une différence de niveau de mer d'environ 50 cm entre la partie Est et la partie Ouest. On observe de plus une différence de presque 8°C sur la température de surface.

Ces vents d'Est entretiennent un courant Sud-Equatorial (**SEC**, South Equatorial Current) en advectant de l'eau vers l'Ouest sur une profondeur de 80 m environ à une vitesse de 1 m/s. Ces alizés soufflent le long de l'équateur. La force d'Ekman résultante a un sens différent suivant l'hémisphère dans lequel on se place. L'eau de surface est entraînée vers le Nord dans l'hémisphère Nord et vers le Sud dans l'hémisphère Sud. Il en résulte une remontée d'eau vers la surface dans cette zone. Cet upwelling, associé à la dynamique régionale dans cette zone, contribue à l aprésence d'eau plus froide dans cette zone. Cette eau se réchauffe ensuite au fur et à mesure de son transport grâce aux flux de chaleur atmosphériques. Le bilan de température de surface fait apparaître un équilibre entre un réchauffement par les flux atmosphériques et un refroidissement par des processus verticaux (Vialard *et al.*, [61]). A une certaine période de l'année, on observe un renversement des flux dominants avec la présence de *vents d'Ouest* qui font partie de la dynamique saisonnière du bassin (phénomène connu sous le nom de mousson australe).

La zone d'eau de surface plus chaude à *l'Ouest* est donc une zone d'accumulation d'eau (**SEC** + précipitations importantes). Cette accumulation contribue à la création d'un sous-courant équatorial (**EUC**, Equatorial UnderCurrent) qui "évacue" l'eau vers *l'Est*, centré à l'équateur et avec des vitesses de 1 à 1.5 m/s (son intensité maximale est atteinte au printemps). Ce courant se situe à environ 170 m de profondeur et remonte le long de la thermocline au cours de son déplacement vers

l'Est. Il atteint la surface vers 110°W et scinde le **SEC** en deux branches. Le bilan de température de surface dans cette partie Ouest du bassin met en jeu un plus grand nombre de processus que dans la partie Est : les forçages atmosphériques sont équilibrés par l'advection zonale due aux courants de basses fréquences et par des processus de subsurface.

De plus, au Nord de l'équateur (4°N-8°N), on observe le Contre-Courant Equatorial Nord (NECC). La thermocline remonte dans cette région et, associée au gradient de vent, contribue à la création de ce courant géostrophique dirigé vers l'Est dans les 150 premiers mètres. Il parcourt le Pacifique et rencontre le SEC qui est de sens opposé. Il y a alors création d'un fort cisaillement horizontal qui permet la création d'ondes d'instabilités appelées Ondes Tropicales d'Instabilité ou TIWS (Tropical Instability Waves). Au niveau du front entre les masses Est et Ouest, les fluctuations des TIWS à l'échelle de 15-45 jours (au niveau du front) induisent un fort transport de chaleur à l'équateur (Vialard *et al.*, [61]).

Dans une année normale, la basse pression atmosphérique se développe au-dessus du nord de l'Australie et de l'Indonésie, avec de hautes pressions au-dessus du Pacifique. En conséquence, les vents au-dessus du Pacifique sont dirigés de l'Est vers l'Ouest. Ces Alizés advectent les eaux de surface vers l'Ouest apportant des pluies diluviennes en Indonésie et au nord de l'Australie, les précipitations étant plus importantes au dessus de la masse d'eau chaude.

Il est important de noter que même en période calme les vents et les flux atmosphériques jouent un rôle capital dans la dynamique océanique par un couplage océan-atmosphère très fort.



FIG. 2.1 – Circulation océanique dans le Pacifique Tropical en période normale

### 2.1.2 Le phénomène El Niño

El Niño est le nom donné au réchauffement occasionnel des eaux de l'Océan Pacifique le long de la côte équatoriale de l'Amérique du Sud. Ce phénomène se produit approximativement tous les 2 à 7 ans, habituellement autour de Noël, et dure de quelques semaines à quelques mois. Parfois un événement extrêmement chaud peut se développer et durer beaucoup plus longtemps. Par exemple, un fort El Niño s'est développé en 1991 qui a perduré jusqu'en 1995.

Les phénomènes physiques mis en jeu lors de ce type d'épisodes sont nombreux, complexes et toujours couplés. Il est donc important de bien les identifier, déterminer quels sont leurs poids respectifs dans les différents bilans, pour pouvoir les reproduire correctement et ensuite faire de la prévision. Plusieurs études ont mis en évidence le rôle particulier de certains processus dans la mise en place des conditions de déclenchement et de développement d'un épisode El Niño : le rôle des forçages atmosphériques et leurs anomalies éventuelles (coups de vent violents, ...) à une période donnée, ainsi que le rôle crucial de la dynamique océanique (ondes de Rossby et de Kelvin, upwellings, advection, ...).

### 2.1.2.1 Circulation atmosphérique

La formation de El Niño se produit de façon conjointe avec une oscillation atmosphérique de grande échelle (oscillation australe). Le couplage de ces deux phénomènes est appelé **ENSO**, pour El Niño Southern Oscillation.

Pendant une année "El Niño", la basse pression au-dessus de l'Australie du nord est remplacée par de hautes pressions, tandis que la pression atmosphérique tombe au-dessus de grandes zones du Pacifique central et le long de la côte de l'Amérique du Sud. Ce changement dans la configuration des pressions provoque un affaiblissement et même parfois une renverse des vents "normaux" de l'Est. L'air moite et chaud présent du côté Est du Pacifique provoque de fortes augmentations des taux de précipitations et d'inondations. En revanche, les hautes pressions et les eaux plus froides autour de l'Australie réduisent la formation des nuages d'orage, menant à la sécheresse et parfois même à d'importants feux de brousse avec le dessèchement de la végétation.

Après un événement de El Niño, les conditions atmosphériques reviennent habituellement à la normale. Cependant, certaines années les vents d'Est peuvent devenir extrêmement forts et une accumulation anormale d'eau froide peut se produire dans le Centre et l'Est du Pacifique. Cet événement s'appelle La Niña. Les événements froids de La Niña suivent parfois (mais pas toujours) El Niño.

### 2.1.2.2 Les observations disponibles

La quantité d'observations effectuées dans cette zone est importante comparée à d'autres régions de l'océan mondial. Plusieurs types de données sont observées : un important réseau de mouillages (TAO, Tropical Array Observing System) a été mis en place et envoie régulièrement des données de vent, de température et de courants (programme TOGA, Tropical Observing General Atmosphere), les satellites mesurent des données de surface (température de surface, hauteurs de mer, ...). On dispose également de données XBT de VOS (Voluntary Observing Ship) ainsi que de données issues de flotteurs ARGO. Cependant, leur résolution spatiale ou temporelle reste parfois insuffisante pour appréhender tous les phénomènes (en particulier ceux de petites échelles qui jouent un rôle très important). De même, les données mesurées en surface ne rendent pas compte du comportement vertical de l'océan. Elles ne permettent pas non plus de discriminer les contributions aux différents termes d'un bilan global. Par exemple la donnée mesurée de température en surface ne permet pas directement de déduire la contribution aux différents termes du bilan de chaleur.

L'étude numérique apparaît donc comme un outil nécessaire dans ce type de problématique, d'autant plus que la relative importance du nombre d'observations permet de valider correctement le modèle par des comparaisons systématiques avec des données indépendantes.

### 2.1.3 La dynamique océanique en période El Niño

### 2.1.3.1 La variabilité interannuelle

Le cycle saisonnier est périodiquement perturbé par un phénomène de grande échelle couplé avec une oscillation de l'atmosphère (oscillation australe). C'est un phénomène atmosphérique qui semble être à l'origine de la perturbation du cycle saisonnier du fonctionnement du Pacifique Tropical. En période El Niño, suite à un renforcement des Alizés qui ont engendré un stockage important d'eau chaude dans la partie Ouest, on observe un affaiblissement de ces mêmes vents et l'apparition de coups de vent d'Ouest assez forts. Ce changement provoque un approfondissement de la thermocline dans le bassin Est et une élévation dans le bassin Ouest.

Ces coups de vents d'Ouest (**WwB**, Westerly Wind Burst) advectent d'une part l'eau chaude vers l'Est en surface. D'autre part, ils induisent la création de deux types d'ondes : les ondes de **Kelvin** qui se propagent vers l'Est et les ondes de **Rossby** qui se propagent vers l'Ouest. Les ondes de Kelvin mettent environ deux mois pour traverser le Pacifique et ont pour effet principal d'enfoncer la thermocline à l'Est. Ceci a pour effet de diminuer les upwellings et donc la quantité d'eau plus froide en surface. On est donc en présence de deux anomalies d'eau chaude : une dans le Pacifique central et une dans le Pacifique Ouest. La profondeur de la thermocline à l'Est diminue, dont la pente Est-Ouest devient alors pratiquement nulle. On observe alors un changement de sens du SEC qui vient renforcer le NECC.



FIG. 2.2 – Circulation océanique dans le Pacifique Tropical en période El Niño

Les ondes de Rossby se propagent vers l'Ouest dans une bande de  $\pm$  5° autour de l'équateur, mais plus lentement que les ondes de Kelvin (elles mettent environ 6 mois à traverser le Pacifique). Elles se réfléchissent sur la côte Ouest. Ces ondes dites d'upwelling, une fois réfléchies, repartent vers l'Est et contribuent à la remise en place de l'upwelling de la zone SE. Dans cette zone, la SST se refroidit alors de nouveau et donc modifie le comportement atmosphérique associé avec la création d'anomalie de vents d'Est. Ces anomalies créent à leur tour des ondes de Kelvin qui renforcent également les mécanismes d'upwelling. On observe alors une anomalie d'eau froide en surface dans la zone SE : phénomène qui est connu sous le nom de La Niña.



FIG. 2.3 – Circulation océanique dans le Pacifique Tropical en période El Niño

### 2.1.3.2 El Niño 1997-1998

L'épisode de 1997-1998 est un épisode particulièrement fort qui se situe dans notre période d'étude et que nous allons donc détailler un peu plus précisement. Il suit les mécanismes brièvement décrits dans le paragraphe précédent. Nous en donnons ici une chronologie sommaire.

Début 1997, de forts vents d'Ouest se développent dans le Pacifique équatorial, le long de l'équateur, advectant l'eau plus chaude en surface vers l'Est et empêchant l'upwelling des eaux plus froides de subsurface de se mettre en place correctement. La zone d'eau chaude s'étend par diffusion : on constate une forte augmentation de la SST dans la zone (+ 4°C en Décembre 1997).

Le pic de l'épisode El Niño est en Décembre 1997 où l'eau plus chaude s'est déplacée très à l'Est. La zone d'eau froide a perdu de l'extension et sa température a augmenté. Les vents dans le bassin *Ouest* soufflent de façon soutenue, advectant la masse d'eau de surface plus chaude encore plus à l'Est.

Après le pic, plusieurs phénomènes tendent à faire diminuer la température de surface (turbulence, évaporation). La thermocline devient plus mince et le gradient de température de surface diminue. Cette diminution du gradient *au centre* affecte les vents de grandes échelles parmi lesquels les vents d'Ouest. Début 1998, on observe une anomalie pour la température de surface dans l'*Est* du bassin (> 29°C), l'atmosphère contribuant aussi au réchauffement.

Mi-Mai 1998, les vents reviennent à la normale dans le pacifique *Est*. On observe un retour des upwellings et donc un refroidissement des eaux de surface dans la zone Est. La thermocline remonte et la SST diminue fortement (jusqu'à 8°C observé en un point sur 30 jours). Un phénomène la Niña s'est alors mis en place.

Ceci n'est qu'une description des principaux phénomènes que l'on peut observer lors d'un épisode du type de celui de 1997/1998. On comprend aisément que leur diversité et leur amplitude, ainsi que le couplage océan-atmopshère rendent très ardue la tâche de modélisation et de prévision.

### 2.2 Le modèle OPA

Les différentes expériences d'assimilation de données sont réalisées, dans ce travail, à partir du code OPA [40]. Le modèle OPA (Océan PArallélisé) est un modèle de circulation générale océanique (OGCM), basé sur les équations primitives, développé au Laboratoire d'Océanographie DYnamique et de Climatologie (LODyC, IPSL, Paris VI). Ce code, en constante évolution, est utilisé assez largement dans la communauté scientifique, dans de grands projets de recherche (comme par exemple CLIPPER, MERCATOR ou MERSEA). Ce code est également utilisé au centre européen ECMWF.

Dans cette partie, nous présentons le code OPA au travers des différentes hypothèses et équations qui le constituent.

### 2.2.1 Hypothèses et équations

Certaines hypothèses spécifiques au milieu étudié sont faites :

- Approximation sphérique : les surfaces géopotentielles sont supposées sphériques (la gravité est donc parallèle au rayon de la terre).
- Hypothèse de couche mince : la profondeur de l'océan est faible devant le rayon de la terre (4 km pour 6400 km).
- Hypothèse de toit rigide : la vitesse verticale à la surface est nulle (il existe cependant des versions d'OPA à surface libre).
- Hypothèse de Boussinesq : les variations de densité sont négligées sauf dans la contribution aux forces de poussée. Il en résulte une hypothèse de quasi-incompressibilité : la divergence 3D de la vitesse est nulle.
- Hypothèse hydrostatique : le gradient de pression vertical équilibre les forces de poussée.

### **Equations primitives**

Il s'agit des équations de Navier-Stokes sur une sphère en rotation, auxquelles on ajoute les hypothèses suivantes. Soit (i,j,k) un repère orthonormé où k est parallèle au rayon de la terre et (i,j) est tangent aux surfaces géopotentielles.

Le vecteur vitesse se note alors  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + w\mathbf{k}$ . On note T la température potentielle, S la salinité,  $\rho$  la densité et p la pression. Les équations primitives se définissent par :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} = -[\mathbf{U}.\nabla \mathbf{U}]_h - \rho_0 \nabla_h p + \mathbf{D}^u$$
(2.1)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \tag{2.2}$$

$$\nabla .\mathbf{U} = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla . (T\mathbf{U}) + \mathbf{D}^t \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\nabla .(S\mathbf{U}) + \mathbf{D}^s \tag{2.5}$$

$$\rho = \rho(T, S, p) \tag{2.6}$$

où **D** représente un opérateur de diffusion et f, la force de Coriolis. L'opérateur **D** représente la paramétrisation des phénomènes turbulents qui se produisent à une échelle inférieure à celle de la maille. Plusieurs modélisations peuvent être utilisées pour représenter ce phénomène : nous verrons le détail de celle que nous utilisons dans la description de la configuration (§2.3).

**Conditions aux limites :** les conditions aux limites du modèle concernent la topographie du fond et des côtes (bathymétrie) ainsi que les échanges avec l'atmosphère en surface. Les échanges pris en compte par le modèle à travers ces deux types de surface sont d'une part pour les échanges

Pour les échanges avec le continent :

- apports en eau douce des rivières (éventuellement),

continent-océan et d'autre part les échanges océan-atmosphère.

- aucun flux de sel, de chaleur ou de masse à travers les surfaces solides : la vitesse normale au continent est nulle :  $w = -U_h \cdot \nabla_h(H)$ ,
- prise en compte du frottement sur les surfaces solides : paramétrisation.

Dans notre configuration, sur les frontières fermées et le long des côtes, la conditions de nonglissement (no-slip) est appliquée : u = v = 0.

Pour les échanges avec l'atmosphère :

- flux net évaporation précipitation : cette composante est prise en compte sous la forme d'un échange de sel à la surface,
- tension de vent : prise en compte sous la forme d'un flux de quantité de mouvement (condition aux limites des flux de moments turbulents verticaux),
- prise en compte d'un flux de chaleur  $Q_{tot} = Q + QSR$  où le terme QSR représente la radiation solaire.

L'évolution de la température en surface est donnée par une équation qui tient compte des échanges avec l'atmosphère.

$$K_v \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{Q_{tot}}{\rho_0 C_{pw}}$$
(2.7)

Pour compenser une éventuelle erreur dans l'estimation des échanges de chaleur entre l'océan et l'atmosphère, on peut également ajouter un terme de relaxation de la température de l'océan en surface vers une température climatologique (qui rend compte des variations saisonnières). On ajoute un terme au bilan de chaleur qui contraint la température de surface à ne pas trop s'éloigner de la température climatologique :

$$Q_{corr} = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_{T^s_{rap}} \times (T^s_{rap} - T^s)$$
(2.8)

avec :

 $-T^s_{rap}$ : température de surface climatologique

 $-\frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_{T^s_{rap}}$ : une estimation de la variabilité de Q par rapport à cette température  $T^s_{rap}$ 

Ce terme de variabilité est de l'ordre de  $40Wm^{-2}K^{-1}$  (Barnier [6]). Nous reviendrons sur ce terme au chapitre 3.

**Gradient de pression horizontal** La pression p=p(x,y,z,t) est exprimée sous forme d'une somme de deux termes : une pression de référence  $p_s$  à la surface et une pression hydrostatique  $p_h$ . Cette pression hydrostatique est calculée par intégration entre la surface et la profondeur z:

$$p_h(z) = \int_{\zeta=z}^{\zeta=0} g\rho(T, S, \zeta) d\zeta$$
(2.9)

On est dans le cadre de l'hypothèse de toit rigide. L'élévation de la surface est supposée nulle, on doit donc estimer la pression de surface  $p_s$ . D'après les hypothèses dans lesquelles on se place (hypothèse de toit rigide et non-divergence de la vitesse 3D), le transport barotrope  $H\overline{\mathbf{U}}_h$  (où  $\overline{U}_h$ , vitesse barotrope, est la moyenne de  $\mathbf{U}_h$  sur la colonne d'eau de hauteur H), est non-divergent ; il dérive donc d'un potentiel et s'écrit sous la forme :

$$H\overline{U}_h = (\mathbf{k} \times \nabla \Psi) \tag{2.10}$$

Etant donné que la pression  $p_s$  ne dépend pas de z, son gradient horizontal peut être obtenu à partir de la moyenne verticale de l'équation (2.1):

$$\frac{\partial \overline{U}_h}{\partial t} = -(1/\rho_0)\nabla_h p_s + \overline{M}$$
(2.11)

$$= \frac{1}{H} \left[ \mathbf{k} \times \nabla \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{t}} \right) \right] \quad (\text{en utilisant l'équation (2.10)}) \tag{2.12}$$

Finalement on obtient :

$$(1/\rho_0)\nabla_h p_s = \overline{M} - \frac{1}{H} \left[ \mathbf{k} \times \nabla \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{t}} \right) \right]$$
 (2.13)

Dans ces deux équations,  $\overline{M}$  représente le reste des termes de l'équation (2.1), y compris la contribution du terme de pression hydrostatique. En prenant la composante verticale du rotationnel de l'équation (2.13), on obtient l'équation suivante :

$$\left[\nabla \times \left[\frac{1}{H}\mathbf{k} \times \nabla \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{t}}\right)\right]\right]_{z} = \left[\nabla \times \overline{M}\right]_{z}$$
(2.14)

La dérivée  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  est donc solution de l'équation elliptique (2.14). La dernière étape consiste à spécifier les conditions aux limites de cette équation. L'écoulement à travers les surface solides est nul. On impose des conditions aux limites de Dirichlet :  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = cste$  le long des lignes de côtes. On pose donc arbitrairement  $\Psi = 0$  le long du continent. En présence d'îles, la résolution est plus délicate du fait de l'évaluation de  $\Psi$  sur chaque contour fermé et leur contribution au champ total. La solution de cette équation (2.14) permet de résoudre l'équation (2.13) et d'obtenir la pression de surface comme quantité diagnostique (obtenue à partir du calcul de variables prognostiques).

### 2.2.2 Discrétisation

Le schéma de résolution spatial est en différences finies centrées du second ordre. La discrétisation verticale est en niveaux z. La grille est une grille de type Arakawa C. Le schéma de discrétisation temporelle est un schéma Leap-frog stabilisé par un filtre d'Asselin. On renvoie à la documentation technique [40] pour plus de détails.



FIG. 2.4 – Répartition des variables sur la grille

### 2.3 Configuration des expériences : le modèle TDH

Toutes les expériences seront effectuées dans la même configuration dont la zone géographique est représentée sur la figure ci-dessous. La zone s'étend de 120°E à 90°W et de 32°S à 32°N.



FIG. 2.5 – Zone du Pacifique Tropical couverte par le modèle : exemple du champ de température au niveau 2 du modèle

### 2.3.1 Caractéristiques du modèle

La turbulence (horizontale et verticale) non-résolue par le modèle (phénomènes qui se produisent à une échelle inférieure à celle de la maille) est représentée dans le modèle par un terme de paramétrisation. Ce terme dépend linéairement des gradients de grandes échelles, comme la somme d'un opérateur horizontal et d'un opérateur vertical. Dans notre cas, pour les 3 variables considérées (vitesse, température et salinité), il s'agit d'un opérateur harmonique (d'autres modélisations existent). La composante verticale pour la vitesse s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{D}^{vU} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mathbf{A}^{vm} \frac{\partial U_h}{\partial z} \right]$$

La formulation est identique pour les autres variables : seul le coefficient  $\mathbf{A}^{v}$  dépend de la variable considérée.

Pour la composante horizontale, les gradients sont calculés sur les niveaux du modèle (ils doivent être ramenés à un calcul sur les surfaces géopotentielles ou les isopycnes). Pour les traceurs, l'opérateur a l'expression suivante :

$$\mathbf{D}^{lT} = \nabla . \left( \mathbf{A}^{lT} \mathbf{R} \nabla T \right)$$

**R** est un opérateur  $(3\times3)$  qui prend en compte les pentes qui existent entre les niveaux du modèle et les surfaces sur lesquelles les opérateurs agissent (géopotentielles ou isopycnes). Pour la vitesse, la formulation se fait en fonction de  $\chi$ , la divergence du champ de vitesse horizontale et  $\zeta$ , la vorticité relative.

$$\mathbf{D}^{lU} = \nabla_h \left( \mathbf{A}^{lm} \chi \right) - \nabla_h \times \left( \mathbf{A}^{lm} \zeta \mathbf{k} \right)$$

La grille du modèle contient  $171 \times 59 \times 25$  points. Sa résolution est irrégulière : les points de grille sont espacés de 1° en longitude, et de 0.5° en latitude à l'équateur jusqu'à 2° sur les frontières Nord et Sud du domaine. Le pas de temps est de 1h30.

Ces informations sont synthétisées dans le tableau ci-dessous.

Dimensions de la grille	$171 \times 59 \times 25 \ (=252225)$
Grille	1° long., 0.5° à l'équateur $\rightarrow$ 2° N et S lat.
$\Delta t$	5400 s.
Viscosité turbulente horizontale	$A^{lm} = A^{lT} = 2000 \ m^2/s$
(dynamique et traceurs)	
Viscosité verticale	$A^{vm} = 1.e-4 \ m^2/s$
(dynamique)	
Diffusivité verticale	$A^{vT} = 1.e-5 \ m^2/s$
(traceurs)	
Conditions aux limites au fond et au bord	no-slip
(dynamique)	

### 2.3.2 Forçages utilisés

Les forçages comportent les vents et les flux de chaleur à la surface. Deux types de forçages sont utilisés au cours des expériences : un premier de type climatologique et un deuxième plus réaliste, contenant des informations plus locales. Ces forçages sont issus de ré-analyses (résultats de modèles numériques d'atmosphère, contraints par assimilation de données atmosphériques).

Le premier type de vents, provenant du National Center for Environmental Prediction (NCEP), n'utilise que des observations issues du satellite ERS alors que le deuxième type ajoute des données de vents locales, mesurées au niveau des bouées du réseau TAO (Tropical Atmosphere Ocean, voir figure 2.6) du projet TOGA (Tropical Ocean Global Atmosphere), ils sont notés (ERS-TAO). Ces derniers vents sont de meilleure qualité du point de vue de l'estimation des intensités ([41]). De même, deux types de flux de chaleur sont susceptibles d'être utilisés. Un premier type, issu du centre

	Vents	Flux
Type	$\mathbf{ERS}$	ECMWF
périod.	semaine	jour (climato.)
Type	ERS-TAO	NCEP
périod.	semaine	jour

### 2.3.3 Ebauche et état initial

L'état initial utilisé dans les simulations qui vont suivre est issu d'une simulation libre réalisée avec les forçages (ERS-TAO + NCEP) sur l'année 1992.

### 2.3.4 Données assimilées

Les données réelles assimilées sont les données de température du réseau TAO. Leur localisation horizontale est illustrée sur la figure ci-dessous. On dispose de données de la surface jusqu'à une profondeur de 500 m. La couverture temporelle de ces données TAO s'étend de 1985 à aujourd'hui, sous forme de moyennes journalières. On dispose également de données de sondes XBT dans la même zone avec une distribution spatiale et temporelle une peu différente (figures 2.7).



FIG. 2.6 – Réseau de bouées TAO

Le réseau TAO comporte environ 70 mouillages avec 10 points de mesure de température de subsurface répartis sur la verticale (20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 180, 300 et 500 mètres de profondeur). Les données XBT de température réalisées par les bateaux VOS (Voluntary Observing Ship) sont plus irrégulièrement réparties sur le domaine.



FIG. 2.7 – Réseau de mesure XBT en Janvier 1993

Ces figures sont obtenues pour les données disponibles en Janvier 1993. Elles ne rendent pas compte de la dépendance en temps des observations (toutes ne sont pas disponibles au même instant) et il faut noter que la répartition n'est pas équivalente chaque mois. Ces figures permettent néanmoins de donner un aperçu de la distribution spatiale de ces données XBT.

En expériences jumelles, les observations sont générées par le modèle libre suivant un masque qui correspond aux points du modèle les plus proches des points du réseau TAO. Ces données sont prises en compte toutes les 6 heures ce qui correspond environ à  $2.10^5$  observations par mois pour la température uniquement. En assimilation de données réelles, le nombre d'observations par mois est à peu près égal à  $1.10^5$  (TAO et XBT). Le vecteur de contrôle étant constitué de 4 variables sur la grille du modèle (u, v, T, S), dans le cas de la prise en compte de données réelles, on se situe donc dans un rapport observations/variable de 1/8.

### 2.4 Modélisation numérique de la zone Pacifique Tropical et validation du modèle OPA

Nous présentons ici les travaux réalisés par Vialard *et al.* [61], qui concernent la modélisation numérique du bassin Pacifique Tropical avec le modèle direct OPA du LODYC.

La configuration étudiée dans cette étude est très proche de celle utilisée dans notre travail. La modélisation a été réalisée sur la période 1993-1998 (qui contient l'épisode El Niño de 1997-1998). Les forçages atmosphériques utilisés sont les flux issus de la réanalyse journalière ECMWF et les vents ERS-TAO. Il faut noter l'utilisation d'un rappel en surface vers la température climatologique de Reynolds et Smith (1994) avec un coefficient constant de  $-40Wm^{-2}K^{-1}$ . Le travail réalisé par Vialard *et al.* a eu pour but d'une part de valider les résultats du modèle sur une période "calme" pour ensuite identifier les mécanismes actifs dans la mise en place et le développement d'un épisode El Niño. La validation a été effectuée grâce à la comparaison avec différents types de données indépendantes sur trois variables principales : la hauteur dynamique, les courants et la structure thermique.

### La hauteur dynamique :

Dans le Pacifique Est, entre l'équateur et 5°N, les instabilités intrasaisonnières fortes (du type de celles générées par les TIWs) sont correctement représentées par le modèle. Au delà de 10°N, les écarts aux observations augmentent (à ces latitudes, le niveau moyen de la mer est en relation directe avec le rotationnel du vent : une imprécision dans les données de vents a des conséquences directes sur la représentation de l'océan).

Près de l'équateur, en revanche, le niveau de la mer est une réponse à l'intégrale zonale de la composante zonale du vent (équilibre de Sverdrup) ce qui permet de limiter l'influence de certaines erreurs présentes dans les données de vent, et qui explique une meilleure adéquation aux observa-

tions. La propagation d'ondes de Kelvin est bien représentée par le modèle et est en phase avec les observations. Toutefois, ces ondes se propagent plus lentement que dans la réalité : ceci peut être expliqué par une stratification trop faible dans le modèle.

### La structure thermique :

Les anomalies interannuelles de SST ont été calculées par rapport à la moyenne 93-96. Même si le rappel en SST n'est pas fait vers un champ qui contient un signal interannuel, les résultats contiennent une variabilité interannuelle, avec une amplitude de ces variations plus faible que dans la réalité.

La valeur du coefficient de rappel paraît être un peu forte, en particulier dans le Pacifique Est, pour bien reproduire les anomalies mais, en contrepartie, elle permet de conserver une bonne structure moyenne.

Au niveau de la structure verticale, il apparaît que le modèle reproduit correctement l'état moyen mais que la thermocline est trop diffuse avec un océan profond trop chaud à l'échelle du bassin.

#### Les courants :

En surface, les courants sont comparés à la climatologie des courants moyens de Reverdin et al., (1994). Cette climatologie est calculée sur 1987-1992. Il apparaît que le modèle reproduit correctement les courants de surface. L'amplitude minimum du **SEC** apparaît à l'équateur, avec la séparation de ce courant en deux branches, au Nord et au Sud de l'équateur. Le **NECC** s'écoule à 7°N comme dans les observations. Par contre le modèle introduit un biais : le **SEC** a une trop grande amplitude (+ 0.1 m/s). Il est géographiquement situé un peu trop à l'Ouest et la séparation des deux branches est moins marquée que dans les observations. Quant au **NECC**, il est sous-estimé d'environ 0.1 m/s (ce qui peut s'expliquer par une inadéquation avec le vent ou par un problème de diffusion dans le modèle : une diffusion isopycnale pourrait renforcer ce type de courant géostrophique).

La structure verticale le long de l'équateur montre une bonne adéquation entre le courant zonal moyen et les observations (en particulier celles fournies par les bouées TAO).

Dans le Pacifique Centre et Est, le modèle reproduit correctement le **SEC** vers l'*Ouest* et l'**EUC** vers l'*Est*. Dans le Pacifique *Ouest*, l'**EUC** est à la bonne profondeur (150 m environ).

L'intensité du **SEC** est sous-estimée et celle de l'**EUC** sur-estimée. Enfin, la variabilité verticale des courants est correctement représentée.

### **Conclusion** :

Cette étude a eu pour but de modéliser la circulation dans le Pacifique Tropical pour comprendre plus en détails les mécanismes qui s'y produisent, et en particulier en période El Niño. En ce qui concerne plus particulièrement le modèle, les auteurs ont montré que le modèle reproduisait correctement les principales caractéristiques de la circulation dans le Pacifique Tropical. La validation a été effectuée sur plusieurs échelles de temps (état moyen, variabilité inter-annuelle, ...) et montre une bonne estimation de la circulation. La qualité de la simulation doit être en partie attribuée selon les auteurs à la qualité des vents utilisés (Menkes, [41]).

Cependant, certains défauts systématiques ont été identifiés comme une thermocline trop diffuse par exemple, qui peut être attribuée à la formulation du modèle. D'autres aspects comme la sousestimation des gradients de température verticaux ou encore la surestimation du **SEC** peuvent être directement liés aux forçages atmosphériques. En effet, les vents contiennent des composantes surestimées qui entraînent un upwelling un peu trop important. Une autre source d'imprécision provient des flux climatologiques en surface associés à un rappel vers la température de Reynolds. Le coefficient de rappel trop fort entraîne la sous-estimation de l'anomalie de SST présente lors de l'épisode El Niño de 1997/1998.

On a vu au cours de la description du phénomène El Niño l'importance des forçages atmosphériques dans sa mise en place et son développement. Dans une étude numérique, il est donc capital d'avoir une bonne représentation des flux et des vents autant en terme de structures spatiales que d'intensité et de variabilité temporelle.

### 2.5 Assimilation variationnelle dans l'océan Pacifique Tropical

### 2.5.1 Assimilation de données de température TAO

Dans la zone du Pacifique Tropical, les systèmes 3D-VAR et 4D-VAR ont été développés et validés pour le modèle OPA du LODYC (en particulier les modèles tangent et adjoint). Nous présentons ici les principaux résultats des travaux réalisés par Vialard *et al.* [62] et Weaver *et al.* [67].

Les données assimilées dans les études dans cette région sont les données in-situ de température des bouées TAO ainsi que des profils d'XBT, dans la zone décrite sur les figures 2.6 et 2.7.

Les auteurs ont validé de façon approfondie aussi bien les différentes composantes du système d'assimilation, que les résultats obtenus (en 3D-VAR et 4D-VAR), d'un point de vue statistique et physique. Nous ne parlerons ici que des résultats obtenus par le 4D-VAR car c'est la méthode qui nous intéresse plus particulièrement.

### 2.5.1.1 Configuration des expériences

La matrice de covariance d'erreurs d'ébauche, **B**, suit la formulation donnée dans Weaver [64], décrite au paragraphe 1.3.5. Les forçages utilisés sont les mêmes que ceux utilisés pour le modèle direct (vents ERS-TAO et flux ECMWF). Un rappel en température en surface est utilisé avec un coefficient de  $-40Wm^{-2}K^{-1}$ . Pour le 4D–VAR, le cycle d'assimilation est réalisé en effectuant une boucle externe de 60 itérations internes (remise à jour avec le modèle linéaire tangent).

Les cycles d'assimilation de données sont d'une durée d'un mois et la simulation libre (contrôle) sert de référence pour comparer les différentes expériences d'assimilation. La période représentée est 1993-1998, avec une fin d'épisode El Niño au début de la période et un évènement plus fort en fin de période (1997-1998).

#### 2.5.1.2 Résultats obtenus

L'étude de l'évolution d'une perturbation avec le modèle linéaire tangent a permis de mettre en évidence qu'aux grandes échelles, celui-ci donnait de bons résultats alors que dans les zones où la dynamique a une échelle plus petite (zones de TIWS, mélange vertical), les approximations effectuées dans ce modèle (comme par exemple l'absence du schéma TKE pour la diffusion verticale) limitait un peu plus la précision des résultats obtenus.

En ce qui concerne les résultats obtenus avec le 4D–VAR, l'effet principal de l'assimilation de données de température est diagnostiqué d'abord par rapport à la simulation de contrôle et concerne

la correction du biais en température sous la thermocline : le contenu thermique est largement amélioré par l'assimilation. Le modèle libre présente une thermocline trop diffuse : l'assimilation corrige la stratification en diminuant la température des couches basses de la thermocline tout en augmentant celles situées au dessus. L'incrément du 4D–VAR est contraint, par la dynamique présente dans le modèle linéaire tangent, de respecter certains équilibres entre les variables. L'assimilation de données de température dans la couche de subsurface modifie donc les autres composantes du vecteur d'état. Par contre, ces autres composantes ne bénéficient pas toutes de la même amélioration que celle constatée pour la structure thermique moyenne. En particulier, la structure saline de l'océan est modifiée. Elle est initialisée à partir de la climatologie de Levitus et ne perd pas d'information concernant les grosses structures salines, mais certaines dérives localisées apparaissent. Il en est de même pour les courants : toutes les composantes ne sont pas systématiquement améliorées. Le NECC est amélioré (l'assimilation augmente son intensité par rapport à la simulation de contrôle). Par contre, les courants à l'Ouest et à l'Est sont identiques à ceux présents dans la simulation de contrôle. Enfin, l'intensité de l'EuC est plus sous-estimée que dans le contrôle, ce qui pourrait être dû à la qualité de la prise en compte du mélange vertical.

La variabilité du contenu en température est aussi améliorée : l'amplitude des températures simulées entre 97 et 98 est beaucoup mieux reproduite. A plus haute fréquence, la variabilité des TIWS (Tropical Instability Waves) et IGWS (Internal Gravity Waves) est aussi beaucoup mieux représentée (échelles de temps qui sont inférieures à la fenêtre d'assimilation). Ces résultats ont aussi été l'objet de comparaisons avec des données indépendantes comme par exemple les courants mesurés aux points du réseau TAO ainsi que des données de hauteur de mer, ce qui a permis de mettre en évidence une bonne adéquation de la variabilité interannuelle.

En conclusion, l'assimilation de données variationnelle a amélioré les caractéristiques de l'état moyen de l'océan ainsi que celles de la variabilité interannuelle pour la composante en température et du niveau de la mer. Il faut, par contre, noter que dans certains cas, certains champs qui ne sont pas directement assimilés peuvent être dégradés du fait du caractère monovarié de l'opérateur **B**.

Suite à ces travaux sur le 4D-VAR, l'idée d'une matrice **B** multivariée a été mise en œuvre par Ricci [48]. On introduit alors d'une part des contraintes de balance géostrophique sur les vitesses, et d'autre part des relations locales entre T et S. Ainsi, une modification de la température à un endroit donné du champ implique une modification de la salinité. Cette modification n'était pas prise en compte par l'opérateur **B** monovarié (la modification d'une variable n'agit directement que sur elle-même). Toutefois, cet opérateur n'est pas encore totalement mis en œuvre dans le 4D-VAR.

### 2.5.1.3 Conclusions

Les nombreux travaux de validations effectués ont montré que l'assimilation de données *in-situ* de température dans le Pacifique Tropical améliorait de façon notable les caractéristiques de la circulation océaniques.

Certains points peuvent être améliorés (caractère totalement multivarié de l'opérateur de covariance, amélioration de la dynamique représentée par le TL, configuration boucles internes / externes) dont certains sont des travaux en cours. Les résultats obtenus montrent la capacité de tels systèmes à améliorer la connaissance de la circulation dans la zone Pacifique Tropical par l'assimilation de données *in-situ*, sur une zone restreinte du domaine.

### 2.6 Assimilation séquentielle dans l'océan Pacifique Tropical

Plusieurs travaux ont déjà été effectués avec le filtre SEEK dans la zone Pacifique tropical, où la non-linéarité de la circulation océanique reste faible comparée à d'autres zones de l'océan mondial. Les variables assimilées concernent principalement des données satellites de SSH et SST. Ces expériences sont aussi complétées par l'assimilation de données 3D telles que les températures aux points du réseau TAO ou encore des profils XBT.

### 2.6.1 Assimilation séquentielle de champs 2D

Les satellites permettent d'obtenir des champs 2D de données qui ont une couverture spatiale très importante. La problématique est ensuite le contrôle de la structure verticale de l'océan par l'assimilation de champs de surface (champs comme la SST, la SSH ou encore la SSS). La thèse de Fabien Durand l'illustre, [20], par le développement d'outils d'assimilation adaptés. Cela consiste à analyser dans quelle mesure l'assimilation de champs 2D de SSS et SST permettent de contrôler la dynamique 3D dans la configuration Pacifique Tropical et la reproduction de phénomènes dynamiques à forte variabilité. Dans la mesure où un filtre SEEK "classique" n'était pas en mesure de répondre à cette attente, un filtre SEEK *adaptatif* a été développé, comme cela a été expliqué au paragraphe 1.5.2.3. Il s'agit de remplacer un mode de la base de correction, peu représentatif de l'innovation (sur lequel l'innovation se projette le plus mal), par un mode qui représente la partie orthogonale aux directions exprimées par la base. Fabien Durand montre ainsi que l'enrichissement de la base par des modes d'erreurs complémentaires permet d'améliorer de façon significative le contrôle de la dynamique y compris en période de variabilité importante. En particulier, les structures thermohalines de subsurface sont contraintes de façon efficace.

### 2.6.2 Assimilation séquentielle de champs 3D

Cependant, notre problématique est plus centrée sur l'assimilation de champs 3D de température et les travaux sur lesquels on va principalement se baser pour définir nos expériences d'assimilation de données TAO dans le Pacifique Tropical en assimilation séquentielle sont ceux effectués par Laurent Parent lors de sa thèse. Parent [44] a réalisé des expériences d'assimilation de données de température issues des réseaux TAO et XBT et de champs de surface issus d'observations satellite comme la température de surface et la hauteur de mer. Après avoir largement validé le filtre en expériences jumelles, des données réelles ont été assimilées. Les expériences qui assimilent des champs de surface ne nous concernant que dans une moindre mesure, nous allons donc nous focaliser sur les résultats qui concernent l'assimilation de données de température 3D aux points du réseau TAO.

Au cours de la mise en place de ses expériences d'assimilation, il a mené de nombreux tests de sensibilité concernant les points qui peuvent s'avérer délicats lors de l'assimilation :

- condition de redémarrage d'une prévision
- nombre et pertinence des vecteurs de la base
- forçages atmosphériques
- fréquence d'assimilation

Comme c'est le cas pour le 4D-Var, le redémarrage d'un cycle de prévision, suite à une analyse, pose un problème de schéma numérique. En effet on ne dispose alors plus que d'un seul champ localisé en temps à l'instant de l'analyse. Dans le code OPA, le schéma de discrétisation temporelle par défaut est un schéma "saute-mouton" et nécessite donc deux pas de temps du champ complet pour redémarrer un cycle de prévision. Comme pour le 4D-Var, un redémarrage par un schéma d'Euler s'impose alors avec une partie des variables comme l'énergie cinétique turbulente qui n'est pas en accord avec la partie corrigée (vecteur d'état). Néanmoins, ce champ s'ajuste par la suite au cours de la prévision.

Laurent Parent a pu constater que cette perturbation dans le champ initial peut être stabilisée par le modèle non-linéaire si la durée du cycle de prévision (qui peut passer de 1 à 10 jours suivant le choix effectué) est suffisante (entre 5 et 10 jours). Suivant les configurations, il devient alors important de tester l'influence de ce paramètre.

Les forçages atmosphériques jouent de même un rôle très important pour la représentation correcte de la variabilité dans la simulation libre qui sert à calculer les EOFS. La variabilité contenue dans ces vecteurs EOFS peut être de nature différente suivant la période retenue pour le calcul (saisonnière ou interannuelle).

Enfin, une réflexion est menée sur la pertinence de la base EOFS utilisée et son évolution éventuelle au cours du temps. Les expériences présentées ne font état que d'une base fixe dans le temps, la procédure d'évolution reste donc dans ce cadre à définir. Mais la période de calcul reste elle aussi un point délicat : si elle ne contient pas la variabilité interannuelle, il paraît totalement illusoire de vouloir représenter correctement les phénomènes dynamiques qui se produisent pendant les années 97-98.

Il montre que la cohérence entre la variabilité exprimée par le modèle et celle contenue dans les EOFS retenues pour l'assimilation a une importance primordiale. Les performances obtenues en matière d'erreur RMS sont directement reliées à ce paramètre. Lorsqu'il compense le manque de cohérence de la base par rapport aux observations par leur évolution temporelle, il faut un certain temps avant que le bénéfice ne s'en fasse sentir. Il faut alors évaluer le gain obtenu par rapport au surcoût que cela engendre.

L'assimilation de données TAO réelles (un cycle de 10 jours avec les données TAO à 5 jours) révèle une incohérence entre l'état analysé et la physique contenue dans le modèle. Les erreurs apparaissent lors des phases de prévision. L. Parent utilise alors une procédure de réinitialisation du modèle avec la procédure VIM (Brasseur, 96). Il semble que dans ce type de source d'erreur, la pertinence des flux joue un rôle important.

Enfin, une expérience sur une période plus longue est menée (1994-1998) dans laquelle il teste toujours les deux mêmes types de données, avec des EOFS calculées sur l'ensemble de la période et qui contiennent donc un signal saisonnier mais aussi interannuel. Cette expérience permet de mettre en évidence le caractère intégral de la correction due à l'assimilation de données TAO (correction du contenu thermique).

Cette expérience a fait l'objet d'une validation physique dans laquelle les composantes dominantes de la circulation dans la zone Pacifique Tropical et en particulier dans la bande équatoriale ont été analysées de façon poussée. Il en résulte que l'assimilation de données TAO contrôle bien la hauteur de l'océan (le contenu thermique). Il observe aussi une remontée de la thermocline ainsi que son pincement. L'EUC ainsi que le NECC sont intensifiés par rapport à la simulation libre dans laquelle ils sont trop faibles. Ces expériences ont donc prouvé la capacité du filtre SEEK et des données TAO à améliorer la représentation de la dynamique océanique dans la zone.

## Chapitre 3

# Expériences préliminaires de validation et expériences jumelles en assimilation variationnelle

🕷 Sommaire 🎕
--------------

3.1	1 Les composantes du 4D-VAR complet : la matrice B, les forçages et			
	la va	riable assimilée	<b>56</b>	
3	5.1.1	Contexte général des expériences	56	
3	5.1.2	Sensibilité du système en expériences jumelles	60	
3	.1.3	Sensibilité du système en assimilation de données réelles	65	
3.2	Expé	ériences en $4D-VAR$ réduit : première comparaison avec le $4D-$		
	VAR	en expériences jumelles	70	
3	5.2.1	Configuration des expériences	70	
3	5.2.2	Assimilation d'une seule observation	72	
3	.2.3	Expériences jumelles	73	
3	5.2.4	Conclusion	79	
3.3	Le ré	ôle du rappel en surface dans l'assimilation de données	79	
3	3.3.1	Influence du rappel en SST sur la trajectoire de référence	80	
3	.3.2	Effet du rappel en SST sur la solution d'un cycle d'assimilation en $4D-VAR$		
		réduit	82	
3.4	Cone	clusions	85	

#### variationnelle

L'objectif de ce chapitre est tout d'abord de comprendre le rôle particulier des différentes composantes du système d'assimilation variationnelle. Ces paramètres sont essentiellement la matrice  $\mathbf{B}$ , la nature de la variable assimilée, les forçages atmosphériques ainsi que le rappel en surface vers la température climatologique. Pour comprendre le rôle exact de chacun de ces éléments, et fixer une configuration optimale pour réaliser nos expériences réalistes, nous avons comparé les résultats obtenus en expériences jumelles (§3.1.2) puis réalisé des expériences préliminaires en assimilant des données réelles (§3.1.3).

D'autre part, nous avons implémenté et testé l'algorithme du 4D–VAR réduit dans cette configuration. Pour valider sa mise en œuvre, nous effectuons la même analyse du rôle de ces différents élements. Une fois la configuration optimale identifiée, nous avons pu réaliser des expériences préliminaires que nous présentons ensuite pour comparer les résultats obtenus par les deux systèmes dans une même configuration et valider ainsi les hypothèses qui sous-tendent la construction de l'algorithme du 4D–VAR réduit (§3.2). Enfin, nous analyserons plus particulièrement le rôle du rappel en assimilation variationnelle (§3.3).

### 3.1 Les composantes du 4D-VAR complet : la matrice B, les forcages et la variable assimilée

### 3.1.1 Contexte général des expériences

Dans un premier temps, pour comprendre en détail la méthode et le fonctionnement du code d'assimilation variationnelle dans sa formulation complète (4D–VAR standard), nous avons réalisé une série d'expériences préliminaires, suceptibles de mettre en évidence le rôle des différentes composantes du système comme la matrice de covariance d'erreur à l'ébauche **B**, la variable assimilée ainsi que les forçages atmosphériques.

Nous allons regarder dans ce paragraphe l'effet de chacune de ces composantes sur le gradient de la fonction coût, l'incrément résultant ainsi que leur évolution au cours des itérations. Ces quantités sont observables dans l'espace de contrôle et dans l'espace modèle. Le passage de l'un à l'autre se fait par l'application de l'opérateur **B** dont le rôle est alors mis en évidence en comparant chacune de ces quantités dans les deux espaces. Dans le but d'identifier le rôle de la variable assimilée, on choisit d'assimiler successivement des valeurs de température puis de salinité dans le cadre d'expériences jumelles. De plus, nous disposons de plusieurs types de forçages pour réaliser nos expériences : une climatologie (ECMWF+ERS) et des forçages plus réalistes (NCEP+ERS-TAO). Nous testerons donc l'effet de ces différents forçages sur le cycle d'assimilation.

### 3.1.1.1 Configuration

Dans cette partie, pour tester les différentes composantes citées précédemment, nous avons choisi de nous situer dans le cadre d'expériences jumelles qui sont favorables au système d'assimilation dans la mesure où les observations et le modèle présentent la même variabilité (c'est le modèle non-linéaire qui permet de générer les observations). Ces expériences débutent le 01/01/1993 et durent une année. Pour réaliser ces expériences, nous disposons d'une ébauche issue d'une simulation libre réalisée avec les forçages (NCEP+ERS-TAO). Ces expériences sont réalisées sans rappel vers la température de surface.

Les observations sont constituées de la température aux points de la grille du modèle les plus proches du réseau TAO (1750 points environ) avec un champ toutes les 6 heures (nous verrons que

l'on peut tout aussi bien générer des observations de salinité). Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons au cas de l'assimilation de données réelles dans la même configuration.

L'état initial utilisé pour générer ces observations est issu d'une intégration du modèle direct avec les forçages (NCEP+ERS-TAO) à la date du 01/01/93.

La matrice de covariance  $\mathbf{B}$  utilisée est l'opérateur monovarié développé et validé par Weaver et al., [64], et présenté au chapitre 1.

Les cycles d'assimilation comportent deux boucles externes de 10 itérations internes (ce qui correspond à 20 itérations en tout). A chaque boucle externe, le terme d'écart aux observations est recalculé à partir de l'intégration du modèle non-linéaire complet, au lieu du modèle linéaire tangent utilisé pour les autres itérations.



FIG. 3.1 – Initialisation des cycles d'assimilation

### 3.1.1.2 La matrice B utilisée

Le rôle de l'opérateur **B** est double. Il sert d'abord à préconditionner la minimisation : une fois l'incrément optimal obtenu dans l'espace de contrôle, il est projeté dans l'espace modèle (dimensionné) par la matrice  $\mathbf{B} : \delta \mathbf{x} = \mathbf{B}^{1/2} \delta \mathbf{y}$ . La correction effectuée en un point pour une variable est propagée aux points de grilles voisins mais demeure locale. Il sert d'autre part au calcul de la fonction coût liée à l'ébauche. L'opérateur **B** définit la norme avec laquelle ce terme  $J_b = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}$  est calculé. Il s'agit, dans ces expériences, d'un opérateur monovarié qui ne propage pas l'effet de la correction d'une variable du vecteur d'état sur les autres. Cette interaction est réalisée par le modèle linéaire tangent.

Dans cette partie, la matrice utilisée pour modéliser les covariances d'erreur d'ébauche est celle décrite dans [64] et utilisée dans [62] et [67]. Les longueurs de corrélations choisies sont de 8° en longitude et 2° en latitude à l'équateur et 4° en latitude dans la zone exta-tropicale ( $\dot{a} + /-20^{\circ}$  jusqu'à  $+ /-30^{\circ}$ ) pour la composante horizontale, pour la température. Les coefficients utilisés sur la verticale dépendent de la profondeur et les écart-types moyens utilisés sur la profondeur sont représentés sur la figure 3.2 pour les quatre variables du vecteur d'état. L'application de la composition des opératuers fait intervenir un facteur de volume qui correspond à la maille.



FIG. 3.2 – Ecart-type des coefficient d'erreur sur l'ébauche appliqué pour la construction de la matrice **B**. Valeurs moyennes par couche du modèle, en fonction de la profondeur.

Les coefficients sont moyennés sur chaque couche horizontale et tracés en fonction des différents niveaux du modèle. Ainsi, pour la température, on dispose d'observations jusqu'au niveau 15 du modèle, ce qui explique la forme particulière que prend la courbe.

#### 3.1.1.3 Description des quantités comparées

Nous allons commencer par analyser le gradient initial  $\nabla_x J$  de la fonction coût (qui correspond uniquement au terme d'écart aux observations $\nabla_x J_o$ , avant toute minimisation) puis son évolution au cours des itérations de minimisation. On regardera ensuite l'évolution de l'incrément  $\delta \mathbf{x}$ , dans l'espace modèle ainsi que l'incrément préconditionné, dans l'espace de contrôle,  $\delta \mathbf{y} = \mathbf{B}^{-1/2} \delta \mathbf{x}$ , pour les composantes en température et en salinité.

Suite aux mises à jour avec le modèle non-linéaire, le gradient de la fonction coût est plus important et diminue ensuite au cours des itérations. Pour cette raison, on effectue les comparaisons en début de cycle ou après une remise à jour avec le modèle non-linéaire complet pour analyser les structures les plus fortes. A l'inverse, l'incrément final est obtenu à la fin du cycle, ils sont donc comparés à la dernière itération.

Dans l'espace de contrôle, les termes sont adimensionnels et donc les composantes en température et salinité sont quantitativement comparables, ce qui n'est plus le cas dans l'espace modèle. Ces quantités sont "visualisables" aussi bien dans l'espace modèle que dans l'espace de contrôle.

### 3.1.1.4 Structure de l'ébauche utilisée

L'ébauche conditionne la phase d'assimilation dans le sens où cet état sert de point de départ à la minimisation. De plus le terme de régularisation contraint l'état analysé à ne pas trop s'en éloigner. Nous avons choisi une ébauche issue de la simulation de référence mais décalée de 3 mois par rapport à la date de début du cycle d'assimilation comme indiqué sur la figure 3.1.1.1.



FIG. 3.3 - Ebauche (simulation libre au 01/03/93) : température, coupe verticale à l'équateur et coupe horizontale au niveau 2 (15m.) du modèle.

On observe sur ces deux figures une masse d'eau chaude caractéristique située à l'Ouest du bassin, qui s'étend sur une profondeur de 50 mètres environ, à une température maximale supérieure à 29°C, c'est la Warm Pool décrite au chapitre 2. *A contrario*, les eaux situées dans la partie Est du bassin présentent plutôt des caractéristiques plus froides : environ 25°C. On observe donc la présence caractéristique d'un fort gradient horizontal en température le long de l'équateur. A 350 mètres de profondeur, la masse d'eau est beaucoup plus homogène horizontalement, avec une température proche de 12°C.



FIG. 3.4 – Ebauche : coupe verticale à l'équateur de la vitesse zonale

La circulation des masses d'eau est la plus active à l'équateur sur une profondeur d'environ 300 mètres. On observe sur la figure 3.1.1.4 en surface une circulation plus tourbillonnaire. L'intensité des courants en valeur absolue peut atteindre 1.5 m/s.

### 3.1.1.5 Résumé des expériences réalisées

Nous allons réaliser les expériences résumées dans le tableau suivant :

Expériences	Vents	Flux de chaleur	Observations
1	ECMWF	$\mathbf{ERS}$	T en expériences jumelles
2	NCEP	ERS-TAO	T en expériences jumelles
3	NCEP	ERS-TAO	S en expériences jumelles
4	ECMWF	ERS	T en obs. réelles
5	NCEP	ERS-TAO	T en obs. réelles

### 3.1.2 Sensibilité du système en expériences jumelles

### 3.1.2.1 Convergence de l'algorithme

### Gradient initial

Le gradient initial de la fonction coût (qui est la première direction de descente pour la minimisation) est obtenu après une seule trajectoire du modèle direct qui permet d'évaluer l'équivalent modèle des observations. Une intégration rétrograde du modèle adjoint fournit alors  $\nabla_x J_0$  dans l'espace de contrôle. A ce stade, aucune minimisation n'a été effectuée.

Dans l'espace de contrôle, le terme  $\nabla_x J_0$  présente son maximum dans la bande équatoriale (zone horizontale où sont situés les points d'observations, symétrique par rapport à l'équateur), mais en dessous de la limite verticale d'extension des points de mesure (500 mètres), jusqu'au fond. On observe une alternance de zones où le gradient est positif puis négatif, les zones positives étant localisées sous les points d'observations.



FIG. 3.5 – Composante en température du gradient initial dans l'espace de contrôle

Le gradient initial dans l'espace de contrôle est plus fort en salinité qu'en température (figure 3.6), avec une plus grande extension géographique des zones de fortes valeurs. Un fort gradient en salinité indique qu'une petite variation en salinité entraine une grande variation de la fonction coût. Le système est donc sensible à la salinité lorsqu'on assimile des données de température, ce qui traduit le fort couplage température-salinité (les autres composantes  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  du gradient ne sont pas montrées ici car très faibles). Ce couplage existe au travers de l'équation de la densité par exemple.



(a) Coupe verticale à 8.5°N

(b) Coupe horizontale à 500 m.

FIG. 3.6 – Composante en salinité du gradient initial dans l'espace de contrôle.

### Evolution au cours du temps du gradient et de l'incrément

L'évolution du gradient dans l'espace de contrôle indique que ce gradient diminue logiquement au cours des itérations de minimisation (la correction à apporter est de plus en plus faible), pour la composante en température comme pour celle en salinité.

L'incrément dans l'espace de contrôle se situe dans la même zone géographique que le gradient (figures 3.7), et comme il s'agit d'expériences jumelles très favorables au système d'assimilation, il n'évolue plus beaucoup entre les deux boucles externes (l'identification de la solution est assez rapide). La composante en température a des valeurs plus faible que celle en salinité avec une extension spatiale horizontale plus importante.



FIG. 3.7 – Incrément dans l'espace de contrôle, à l'itération 1.

### 3.1.2.2 Espace modèle versus espace de contrôle : le rôle de B

Dans ce paragraphe suivant, nous allons voir l'effet de l'opérateur **B** dans le cas de l'assimilation d'une seule observation. Dans cette partie, nous regardons l'effet de cet opérateur lors du changement d'espace, sur le gradient et l'incrément d'analyse. Dans l'espace de contrôle, les variables sont sans dimension, ce qui permet de comparer les valeurs obtenues pour deux composantes différentes, ce qui n'est plus le cas dans l'espace modèle.

On constate alors que les fortes valeurs se retrouvent localisées dans la zone couverte par les données, horizontalement et verticalement (figure 3.8).


FIG. 3.8 – Composante en température du gradient dans l'espace modèle, itération 1.

Dans l'espace modèle, les valeurs les plus fortes du gradient en salinité sont situées dans la même zone géographique que pour le gradient en température mais c'est le gradient en température qui présente les valeurs les plus élevées. On a précisé précédemment que le couplage entre les variables se fait, dans une certaine mesure, par l'application du modèle linéaire tangent au cours de la minimisation. Une modification en température entraîne donc une modification des autres variables. Seulement, l'opérateur de covariance étant monovarié, la sensibilité du système dans l'espace modèle semble donc liée principalement à la variable assimilée.

L'incrément dans l'espace modèle représente la modification apportée par l'assimilation de données à l'état initial (l'ébauche  $x_b$ ) pour obtenir l'état analysé. Il présente les mêmes caractéristiques géographiques que le gradient : on retrouve sa localisation dans la zone des observations. La correction en température se fait essentiellement aux points d'observations, comme on peut le voir sur la figure 3.9.



FIG. 3.9 – Composante en température de l'incrément dans l'espace modèle, itération 11.

Dans l'espace modèle, la contribution de l'incrément est aussi plus importante sur la composante en température qu'en salinité (figure non montrée).

#### 3.1.2.3 Influence de la variable assimilée

Dans l'expérience précédente (expérience 1), la variable assimilée étant la température, on pourrait s'attendre à ce que la réponse du système soit plus sensible sur la température que sur la salinité. Pour évaluer l'importance du rôle de la variable observée dans le système, nous avons fait la même expérience mais en assimilant cette fois de la salinité aux points d'observations TAO (expérience 2), en utilisant les forçages (NCEP+ERS-TAO). On regarde de même les composantes en température et en salinité du gradient initial ainsi que l'incrément.

Dans le modèle non-linéaire, la température et la salinité jouent un rôle quasi symétrique que l'on peut s'attendre à retrouver dans un système d'assimilation de données. Contrairement à cette intuition, nous allons voir qu'il n'y a pas de symétrie évidente dans le rôle joué par le température et la salinité, sans doute du fait de l'opérateur de corrélation.

La composante en température du gradient initial dans l'espace de contrôle reste plus faible (figure 3.10) que celle en salinité (il faut noter la différence du facteur multiplicatif même si l'échelle de couleur reste la même). En comparant avec l'assimilation de température, le gradient initial en température conserve une extension horizontale/verticale importante tout en ayant une intensité plus faible sur la majeure partie de la zone. La composante en salinité perd pratiquement son extension géographique, pour concentrer son intensité maximale dans des zones locales, à 400 m. avec une zone particulière à 160°E.



FIG. 3.10 – Gradient initial (assimilation de la salinité) dans l'espace de contrôle, coupe verticale à  $8.5^{\circ}N$ 

Le gradient dans l'espace modèle ne représente pas non plus cette symétrie. Il a globalement une intensité assez faible. En particulier, la composante en salinité est plus faible que lors de l'assimilation de température. Il en est de même pour la composante en température (figure 3.8). En comparant les deux expériences, on constate que le système est plus sensible aux variations de température.



FIG. 3.11 – Gradient dans l'espace modèle, coupe verticale à l'équateur, itération 1.

Lorsque l'on assimile la salinité, même si les deux composantes de l'incrément dans l'espace modèle ne sont pas quantitativement comparables, on peut observer que la correction apportée a une structure verticale très peu étendue, avec des valeurs très faibles, en température aussi bien qu'en salinité (figure 3.12). De façon générale, on a observé que l'assimilation de salinité réduisait les différences d'intensité entre la température et la salinité, tout en réduisant l'extension spatiale des différents composants observés.



FIG. 3.12 – Incrément dans l'espace modèle, coupe verticale à l'équateur

La température et la salinité, même si ces deux variables présentent un aspect fortement couplé, ne jouent pas ici un rôle symétrique dans le système d'assimilation de données. Dans la zone étudiée, l'océan Pacifique Tropical, la salinité joue un rôle spécifique qui a d'ailleurs conduit à la mise en place de projets d'observations spécifique de cette donnée (SMOS, AQUARIUS).

#### 3.1.2.4 Le rôle des forçages atmosphériques

Dans une simulation libre, l'effet des flux et des vents se mesure à moyen et long terme, le temps que la dynamique du bassin complet soit affectée. Nous nous plaçons ici dans un contexte un peu différent : nous cherchons à analyser dans quelle mesure le gradient de la fonction coût et l'incrément d'analyse sont sensibles au type de forçage sur un cycle d'assimilation.

Dans cette expérience (expérience 3), on compare le rôle des flux et des vents (NCEP+ERS-TAO), physiquement plus réalistes, avec celui des forçages (ECMWF+ERS), toujours en expériences jumelles. Les comparaisons des résultats avec ceux de l'expérience 1 vont permettre d'évaluer l'influence des forçages sur un cycle d'assimilation. La variable assimilée est la température dans ce cas.

On constate que le type de forçage a peu d'influence sur le gradient initial en température dans l'espace de contrôle. La structure spatiale est sensiblement la même, avec une intensité locale un peu plus importante (figure 3.13) que dans le cas des forçages (NCEP+ERS-TAO). De même, lorsqu'on compare l'évolution du gradient de la fonction coût en fonction des forçages utilisés, on constate que les différentes composantes ne présentent pas de différences très significatives.



FIG. 3.13 – Gradient initial dans l'espace de contrôle, composante en température, coupe verticale à 8.5°N.

Dans l'espace modèle, par contre, les résultats obtenus pour le gradient montrent des valeurs plus importantes avec les flux NCEP et ce également au cours du cycle, en température et en salinité. La structure horizontale révèle également cette différence.

Lorsque l'on compare les résultats obtenus, pour l'incrément dans l'espace modèle, on ne constate pas de différence très marquée entre les deux expériences ECMWF et NCEP, comme on peut le constater sur la figure 3.14. Les modifications sont apportées dans la zone TAO, avec des différences d'intensité très localisées. La correction s'effectue presque exclusivement sur la température.



FIG. 3.14 – Incrément dans l'espace modèle, coupe verticale à l'équateur.

En conclusion, le gradient initial est très peu sensible au changement de forçage. Il semblerait que le système et donc le gradient au cours des itérations et l'incrément final soit légèrement plus sensible aux forçages (NCEP+ ERS-TAO). Nous comparerons ces résultats avec ceux obtenus en données réelles dans le paragraphe suivant.

# 3.1.3 Sensibilité du système en assimilation de données réelles

Dans le prolongement des expériences précédentes, nous assimilons cette fois des données réelles de température. Les éléments que l'on peut analyser sont donc le rôle de  $\mathbf{B}$  lors de l'assimilation de données réelles ainsi que les forçages atmosphériques. Les données réelles sont la température aux points du réseau TAO et des données issues d'XBT. Les expériences sont réalisées dans les mêmes conditions que précédemment, seule la matrice de covariance d'erreur d'observations est différente. Le rôle de la matrice  $\mathbf{B}$  est identique à celui décrit dans la partie précédente, nous ne le décrirons

pas spécifiquement. Nous testons, par contre, les deux types de forçages utilisés précédemment (expériences 4 et 5).

# 3.1.3.1 Prise en compte des forçages atmosphériques

La structure globale du gradient initial est peu sensible au type de forçage utilisé comme on peut le voir sur les figures 3.15 et 3.16.



FIG. 3.15 – Composante en température du gradient initial dans l'espace de contrôle, coupe verticale à  $8.5^{\circ}$ N.

La composante en salinité (qui est comparable à celle en température puisqu'elle est représentée dans l'espace de contrôle) a ici encore une intensité plus importante que celle en température mais une même extension géograhique.



FIG. 3.16 – Composante en salinité du gradient initial dans l'espace de contrôle, coupe verticale à  $8.5^{\circ}$ N.

Dans l'espace de contrôle au cours des itérations, la composante en température présente des différences d'intensité locale en fonction du type de forçage utilisé. On peut constater sur la figure 3.17 que la zone de minimum située à 105°W est plus marquée pour les forçages NCEP mais on constate aussi une zone de maximum située à 160°W qui n'existe que pour les forçages ECMWF.



FIG. 3.17 – Composante en température du gradient dans l'espace de contrôle, coupe verticale à  $8.5\,^{\circ}\mathrm{N}.$ 

Les deux composantes du gradient dans l'espace de contrôle ont une sensibilité différente par rapport au type de forçage utilisé. Pour la composante en salinité (figure 3.18), on remarque une zone de minimum très marquée située à 160°W qui n'existe pas sur celle obtenue avec les flux NCEP. Elle correspond à la même localisation géographique que le maximum obtenu en température que l'on a observé sur la figure 3.17.



FIG. 3.18 – Composante en salinité du gradient dans l'espace de contrôle, coupe verticale à 8.5°N.

L'opérateur **B** qui permet d'exprimer le gradient dans l'espace modèle a exactement le même effet qu'en expériences jumelles et quel que soit le type de forçage : les zones de forts gradients, aussi bien en température qu'en salinité, sont situées dans la zone des données (de la surface à 500 mètres de profondeur et dans la bande équatoriale). La composante en salinité est assez faible et ne présente pas beaucoup de différence entre les différents forçages. La composante en température par contre est assez sensible au type de forçage. Elle a une structure spatiale assez différente puisqu'on constate sur la figure 3.19 deux zones de maximum pour les forçages ECMWF ainsi qu'une zone de minimum qui est beaucoup plus étendue spatialement.



FIG. 3.19 – Composante en température du gradient dans l'espace modèle, coupe verticale à l'équateur.

L'incrément final dans l'espace modèle(figure 3.20) montre les zones où les corrections ont été apportées au champ initial. Les deux principales zones de correction sont situées de part et d'autre de l'équateur, à l'Est et l'Ouest du modèle, dans la zone de présence de données assimilées. Cet incrément final indique que principalement, les corrections faites sont négatives en température et positives en salinité. Verticalement, la zone de correction est dans la zone des 300 premiers mètres, de part et d'autre de l'équateur.



FIG. 3.20 – Composante en température de l'incrément dans l'espace modèle, coupe verticale à l'équateur.

Alors que l'incrément en température ne montre pas de différence importante ni en structure spatiale ni en intensité, la correction effectuée sur le champ de salinité (figure 3.21), est plus important dans le cas des forçages ECMWF : encore une fois la différence est une différence d'intensité locale.



FIG. 3.21 – Composante en salinité de l'incrément dans l'espace modèle, coupe verticale à l'équateur.

L'incrément final montre donc les zones où les corrections ont été apportées au champ initial. Les deux principales zones de correction sont situées de part et d'autre de l'équateur, à l'Est et l'Ouest du modèle. Cet incrément final indique que principalement, les corrections faites sont négatives en température et positives en salinité. Verticalement, la zone de correction est dans la zone des 300 premiers mètres, de part et d'autre de l'équateur. L'incrément en salinité est plus important dans le cas des forçages ECMWF : encore une fois la différence est essentiellement une différence d'intensité locale.

# 3.2 Expériences en 4D–VAR réduit : première comparaison avec le 4D–VAR en expériences jumelles

Nous avons choisi de réaliser dans cette partie une comparaison 4D-VAR/4D-VAR réduit, en expériences jumelles pour comparer les solutions obtenues dans chaque cas (seule **B** change). La matrice **B** étant construite différemment, l'incrément d'analyse obtenu dans l'espace modèle par l'équation  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{B}^{1/2} \delta y$  reflète cette différence. Nous illustrons dans un premier temps le rôle spécifique de cette matrice en assimilant une seule observation. Nous avons ensuite réalisé les expériences jumelles sur une année complète, ce qui nous permis d'effectuer des diagnostics sur une période plus significative.

# 3.2.1 Configuration des expériences

### 3.2.1.1 La matrice R

La matrice de covariance d'erreur d'observations est choisie diagonale avec un écart-type de 0.5°C (seule la température est assimilée), pour les expériences en 4D–VAR et 4D–VAR réduit.

## 3.2.1.2 Les observations en expériences jumelles

On est exactement dans le même contexte que les expériences préliminaires précédentes. On dispose des coordonnées horizontales et verticales des points du réseau TAO et on assimile la température en ces points, un champ de données toutes les 6 heures.

## 3.2.1.3 Les forçages atmosphériques

L'utilisation des flux atmosphériques NCEP dans le contexte du 4D–VAR réduit, sans rappel en température, a montré que le système révèle une variabilité très importante dans la température de surface. Cette variabilité se retrouve alors naturellement dans la base EOFS calculée, entrainant une solution irréaliste en température de surface. Nous avons donc décidé de choisir les flux ECMWF pour nos expériences.

# 3.2.1.4 La matrice B

En 4D–VAR complet, la matrice **B** est la même que précédemment (Weaver *et al.*, [64]). En 4D–VAR réduit, la matrice **B** est issue d'une décomposition EOFS (décrite au chapitre 1 et en annexe). Nous avons testé différentes bases que nous décrivons dans la partie suivante.

# 3.2.1.5 Différentes bases EOFS

Nous rappelons ici le principe du calcul. Les EOFS sont obtenues par diagonalisation de la matrice de covariance. Cette matrice est calculée à partir d'un échantillonnage temporel d'une simulation libre. Les états sont centrés et adimensionnés sont stockés dans une matrice d'état **X**. La matrice  $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$  est ensuite diagonalisée sous la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^T$ . On obtient des vecteurs propres de dimension spatiale identique à celle des vecteurs d'états initiaux. Le choix de la simulation libre qui permet de générer les états conditionne la base obtenue. Pour chaque base, le pourcentage de variance cumulée retenu est d'environ 90%. Il est atteint pour une trentaine de vecteurs, comme on peut le constater sur la figure 3.22. Base EOFS monovariée : nous avons, dans un premier temps, calculé une base monovariée, c'est à dire que les matrices de variance-covariance sont calculées avec un vecteur d'état constitué d'une seule variable. Les vecteurs propres sont obtenus d'une façon classique mais ne tiennent pas compte de la variabilité des autres composants. Pour obtenir environ 90% de variabilité par variable, nous avons retenu 30 vecteurs par variable, ce qui conduit à une matrice finale de 120 vecteurs. L'échantillonnage temporel est d'un état tous les 3 jours sur une durée totale d'une année. Cette base ne nous a pas permis d'obtenir de résultats satisfaisants et nous n'en parlerons plus par la suite.

*Base* EOFS *multivariée* : la construction de la base à partir des vecteurs d'état comportant 4 variables d'états conduit naturellement au calcul d'une base multivariée. Elle est calculée à partir d'un échantillon temporel issu d'une simulation du modèle direct sur l'année 1993 avec un échantillonnage temporel tous les 3 jours. Pour l'assimilation, nous ne conservons que les 30 premiers modes.



FIG. 3.22 – Variance exprimée par la base EOFS multivariée

Sur la figure 3.22, on constate que le pourcentage de variance exprimée par les 30 premiers vecteurs est d'environ 92%. La décroissance des valeurs propres est assez importante, la variabilité est donc bien concentrée sur les premiers modes.

#### Les modes dominants

Dans cette partie, on s'intéresse au premier mode qui représente le mode de variabilité maximum, sur la période considérée qui est ici l'année 1993. Le premier mode en température montre une structure en opposition Nord-Sud, classique de la zone étudiée. On note une structure particulièrement marquée à l'extrême Est de la zone d'étude, juste en dessous de l'équateur. La variabilité principale est contenue dans les couches superficielles de l'océan (au dessus de 400 mètres) mais on constate la présence de structures spatiales plus en profondeur, bien que d'intensité plus faible.



FIG. 3.23 – Premier mode de la base EOFS multivariée

Le premier mode en salinité est beaucoup plus faible et montre une structure beaucoup moins marquée que le mode en température. Par contre, on note aussi une structure remarquable à l'Est au niveau de l'équateur cette fois. Le mode qui représente les courants montre une variabilité importante au niveau des courants équatoriaux avec une structure particulière à l'Ouest.



FIG. 3.24 – Premier mode de la base EOFS multivariée

### 3.2.2 Assimilation d'une seule observation

Dans un premier temps, et pour comprendre la différence de solution obtenue entre le 4D-VAR complet et le 4D-VAR réduit, on assimile une seule observation en température située en un point à l'équateur (200°E), à 50 mètres de profondeur et à la fin du cycle d'assimilation qui débute le 1<sup>er</sup> Janvier 1993 et qui dure un mois.

La différence de correction apportée dans chaque cas correspond à la différence de spécification de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche **B**. On a dans le cas du 4D–VAR l'application d'un opérateur analytique, dont l'effet est calibré par un certain nombre de paramètres et en particulier les longueurs d'échelle de corrélation, horizontale et verticale, dont on voit l'effet sur les figures cidessous. Cet opérateur est monovarié. La correction obtenue est donc assez locale autour du point d'observation.

Dans le cas du 4D-VAR réduit, la spécification de cet opérateur se fait de façon statistique en déterminant les directions de plus grande variabilité du système. Ces directions sont tridimensionnelles et multivariées. La correction obtenue, comme combinaison linéaire des directions de plus grande variabilité, est donc globale.

L'étendue géographique de la correction est limitée dans le cas du 4D–VAR à une zone d'influence que l'on peut voir sur la figure 3.25. Dans le cas du 4D–VAR réduit on constate au contraire le caractère global de la solution avec extension horizontale beaucoup plus importante, couvrant l'ensemble du domaine. L'amplitude de la correction apportée dans le cas du 4D–VAR complet est 10 fois plus grande que dans le cas du 4D–VAR réduit.



FIG. 3.25 – Incrément en température obtenu au bout d'un mois d'assimilation d'une seule observation de température. Coupe horizontale à 50 m.

On peut constater sur la figure 3.26 que même faible en profondeur, la correction est tridimensionnelle dans les deux cas. La propagation de l'information se fait donc vers les couches plus profondes.



FIG. 3.26 – Incrément en température obtenu au bout d'un mois d'assimilation d'une seule observation de température. Coupe verticale à l'équateur.

#### 3.2.3 Expériences jumelles

Ces expériences sont menées en assimilant des données de température simulées sur l'ensemble des points du réseau TAO, avec une donnée toutes les six heures. Ces expériences sont faites dans la même configuration que précédemment avec deux boucles externes de dix itérations internes.

#### **3.2.3.1** Fonctions coût

La fonction coût représente la rapidité de convergence de l'algorithme. On peut constater sur la figure suivante 3.27, que le 4D–VAR réduit (en rouge) a un comportement qualitativement équivalent à celui du 4D–VAR. Par contre, à chaque cycle (22 itérations pour un mois), le minimum de J est très

rapidement atteint (figure de gauche) par le 4D-VAR réduit, ce qui montre clairement qu'on peut diminuer de façon très significative le nombre d'itérations réalisées en 4D-VAR réduit (en pratique, 4 ou 5 suffisent) en expériences jumelles. A la première itération, le terme relatif aux observations (figure de droite), qui représente l'écart entre l'ébauche et les observations, est plus important dans le cas du 4D-VAR réduit, mais revient très rapidement au même niveau que le 4D-VAR classique.



FIG. 3.27 – Fonction coût en log10, totale  $(J = J_b + J_o)$  à gauche et observations  $(J_o)$  à droite pour le 4D–VAR en noir et le 4D–VAR réduit en rouge, sur l'année 1993



## 3.2.3.2 Etat analysé

FIG. 3.28 – Température, état analysé obtenu après 4 mois d'assimilation. Coupe horizontale à 15 m.

La comparaison de l'état analysé au début du 4<sup>ème</sup> mois d'assimilation est un diagnostic qui permet de voir la structure globale de température dans les différentes expériences. L'expérience de

référence représente l'état que doit identifier l'assimilation. La simulation libre montre une certaine dérive en température sur deux zones en particulier : (100°W, 12°N) et son symétrique par rapport à l'équateur, ainsi que deux zones situées vers 180°W.

La solution obtenue avec le 4D–VAR permet de bien corriger ces dérives, avec des caractéristiques tout à fait en accord avec la solution de référence. Mais l'état analysé présente quand même quelques différences dans les mêmes zones que pour la simulation libre mais dans des proportions bien moindres.

Par contre, dans le cas du 4D-VAR réduit la solution obtenue est très similaire à la solution de référence : en particulier on peut remarquer la zone située à ( $170^{\circ}E,8^{\circ}S$ ) qui est parfaitement représentée.

Le tracé des champs de différence, calculés entre la solution optimisée obtenue avec le 4D–VAR classique et le 4D–VAR réduit et la solution exacte, permet de bien mettre en évidence la nature différente des solutions obtenues.



FIG. 3.29 – Différence de la composante en température entre l'état analysé obtenu après 4 mois d'assimilation et la solution exacte. Coupe horizontale à 15 m.

Cette meilleure identification de la solution dans le cas du 4D–VAR réduit peut être expliquée par la bonne représentation de la variabilité du système océanique par la base EOFS, ainsi que le caractère tridimensionnel et multivarié de ces modes. Ainsi malgré le faible nombre de degrés de liberté dont dispose cette méthode pour exprimer la solution (le vecteur de contrôle n'a que 30 coefficients), cette méthode, en expériences jumelles, a un coût de calcul réduit et fournit de très bons résultats. Nous allons voir de plus au paragraphe suivant que la qualité des résultats obtenus est la même plus en profondeur ainsi que sur les autres variables du système.

#### 3.2.3.3 Valeurs d'erreur RMS

Dans le cadre des expériences jumelles, nous connaissons la solution à identifier (le champ global dont sont issues les observations ou solution de référence). Nous pouvons donc calculer l'erreur entre la solution obtenue et cette solution de référence. Ces erreurs RMS, calculées comme la norme  $\mathcal{L}_2$  de la différence entre la solution obtenue et l'état de référence, permettent de valider plus globalement les résultats. Sur les figures 3.30, on peut observer que le niveau global d'erreur atteint par le 4D–VAR réduit est plus faible que la simulation libre d'une part et que le 4D–VAR d'autre part. Ce niveau bas d'erreur est obtenu non seulement dans la zone où existent des observations et pour la composante en température mais aussi pour les autres variables comme la salinité et en profondeur. On peut faire le même constat pour les composantes de la vitesse (figure 3.31).

Le caractère multivarié des modes de la base utilisée permet donc de corriger les erreurs sur les autres variables. Le caractère 3D de la correction, tel qu'on a déjà pu l'observer dans les résultats obtenus en assimilant une seule observation, permet de corriger l'ébauche en profondeur de façon efficace.



FIG. 3.30 – Valeurs d'erreur RMS absolue en température et salinité, comparaison entre la simulation libre, 4D–VAR et 4D–VAR réduit



FIG. 3.31 – Valeurs d'erreur RMS absolue en vitesse, comparaison entre la simulation libre, 4D–VAR et 4D–VAR réduit

#### 3.2.3.4 Norme de l'orthogonal à la projection pour le 4D-VAR réduit

Dans le 4D–VAR réduit, on corrige l'ébauche suivant quelques directions privilégiées en laissant de côté toute une partie de la solution. Plusieurs questions se posent alors : comment se comporte la partie orthogonale à la projection présentée ci-dessus ? Comment évolue-t-elle au cours du temps ? Pour répondre à ces questions, nous avons calculé la norme de cette partie orthogonale. Le calcul de cette norme est décrit en détail au chapitre 1.



FIG. 3.32 – Norme de la partie orthogonale à la projection de  $\delta \mathbf{x}_{\mathbf{a}}$  sur les EOFS pour 6 cycles d'assimilation.

Au premier mois, l'ébauche dans l'étape d'assimilation ne contient aucune information provenant des EOFS. Pour le mois 2, l'ébauche est issue de la propagation d'un état constitué d'une partie formée par une combinaison linéaire de ces vecteurs. La partie orthogonale est donc moins importante et évolue moins au cours de la propagation par le modèle non-linéaire.

#### 3.2.3.5 Ecart calculé entre la solution et les observations

L'information dont on dispose pour corriger le modèle sont les données de température aux points du réseau TAO. Le système d'assimilation de données corrige l'ébauche pour obtenir un état analysé qui doit théoriquement être plus proche des données. Une façon de quantifier cette correction est de comparer la différence entre l'ébauche et les observations d'une part, et d'autre part la différence entre l'état analysé et les observations. Ces deux quantités, calculées dans l'espace des observations *aux points d'observations uniquement*, sont données par :

$$BmO = H_i(\mathbf{x}^b(t_i) - \mathbf{y}_i^o) \tag{3.1}$$

et 
$$AmO = H_i(\mathbf{x}^a(t_i) - \mathbf{y}_i^o)$$
 (3.2)

Ce diagnostic permet de quantifier la correction effectuée au point d'observation. Si le cycle d'assimilation se déroule correctement la quantité AmO doit être plus faible que celui obtenu avec la quantité BmO. Dans le cas d'expériences jumelles, la donnée de température est déjà sur la grille du modèle, la comparaison est directe. Les résultats sont moyennés temporellement sur 6 cycles d'un mois. Enfin, nous ne disposons de données que jusqu'à 500 m, on ne peut donc pas effectuer ce diagnostic plus en profondeur.



FIG. 3.33 – Background minus Observations (BmO) en noir, Analysis minus Observation (AmO) en rouge

On observe dans les deux cas la courbe AmO a un niveau plus faible que la courbe BmO. Ceci valide *a posteriori* l'utilité de l'assimilation de données dans les deux cas. Au niveau de la surface, les deux expériences montrent peu de différences. Le niveau le plus élévé est obtenu à 150 m. A cette profondeur, on voit clairement que le niveau obtenu par le 4D–VAR réduit est nettement supérieur à celui obtenu par le 4D-var. Ce diagnostic illustre très clairement le caractère local de la correction réalisé par le 4D–VAR et *a contrario* le caractère global de la correction fournie par le 4D–VAR réduit.

#### 3.2.4 Conclusion

Ces premières expériences ont permis de mettre en évidence les caractéristiques des deux méthodes au travers de l'application de l'opérateur **B**. Ainsi, on a observé que dans le cas du 4D–VAR l'effet de la matrice de covariance d'erreur à l'ébauche est local et monovarié. Dans le cas du 4D– VAR réduit, l'effet de cet opérateur est tridimensionnel et multivarié. La solution obtenue, c'est à dire une correction de l'ébauche, multivariée et tridimensionnelle présente des niveaux d'erreurs très faibles.

On a pu constater à travers les différents diagnostics réalisés que, dans le cadre de ces expériences jumelles, le 4D–VAR réduit était une méthode performante d'assimilation de données variationnelle. L'identification de la solution par le 4D–VAR réduit est très rapide, le coût de calcul est considérablement réduit par rapport au 4D–VAR classique.

La base de correction multivariée permet d'obtenir de bons résultats en expériences jumelles (on a vu par ailleurs que la base monovariée ne permettait pas d'obtenir de bons résultats). La pertinence de la base est un élément déterminant pour la qualité des résultats.

# 3.3 Le rôle du rappel en surface dans l'assimilation de données

De précédentes études ont déjà montré que le rappel en surface vers les champs de SST et/ou SSS jouait un rôle important dans la reproduction de l'état moyen de l'océan sur la période étudiée : sans rappel en surface vers une température climatologique, J. Vialard et A. Weaver ont montré que dans le cadre d'une simulation directe la structure moyenne en température de l'océan n'était pas correctement reproduite ([62]).

On a vu dans la description du code OPA que le rappel intervient dans la paramétrisation des échanges de chaleur avec l'atmosphère par l'ajout d'un terme correctif dans l'équation de bilan des échanges :

$$Q_{corr} = \frac{\partial Q}{\partial T} {}_{|T^s_{rap}} (T^s_{rap} - T^s)$$
(3.3)

Cet ajout peut être interprété comme une correction de l'erreur faite en utilisant une paramétrisation des échanges à la surface qui représente les échanges réels de façon incorrecte ou insuffisante.

Toutefois, le rappel de la température de surface vers un champ climatologique peut être considéré comme une forme d'assimilation de données. L'introduction de ce rappel en même temps qu'une procédure d'assimilation de données de température ne permet pas de bien distinguer les rôles respectifs de chacun. En 4D–VAR réduit, en expériences jumelles, le rappel intervient dans plusieurs composantes de la procédure. Il intervient dans le calcul des données : c'est une trajectoire obtenue avec le modèle direct. Il intervient aussi dans le calcul des mises à jour avec le modèle (non-linéaire et linéaire tangent). Enfin, il intervient dans le calcul des EOFS : les états du système sont générés à partir d'une simulation libre qui contient un terme de rappel. Une simulation sans rappel entraine donc la suppression de ce terme partout.

L'objet de cette partie est donc de faire un bilan sur le rôle du rappel en particulier dans le cadre du 4D-VAR réduit, de façon à évaluer l'effet de la prise en compte ou non du rappel et fixer ce dernier paramètre de la configuration.

Nous traitons le cas des expériences jumelles qui permettent par définition de bien identifier les conséquences d'une modification de procédure. Nous effectuons donc des comparaisons entre le 4D–VAR complet et réduit, avec ou sans rappel.

#### Les différentes expériences

La configuration des expériences est la même que précédemment. Le spin-up qui donne l'état initial (appelé  $\mathbf{x}_0$ ) est issu d'un an de simulation avec rappel en température en surface.

La trajectoire de référence ou trajectoire vraie est réalisée avec ou sans rappel en cohérence avec l'expérience d'assimilation avec laquelle on effectue les comparaisons.

La trajectoire libre est une simulation directe calculée à partir d'un état initial à  $t_0+3$  mois, avec et sans rappel.

L'assimilation en 4D-VAR réduit : l'état vrai et l'ébauche sont identiques au 4D-VAR standard. Les bases EOFs utilisées sont calculées à partir de la trajectoire directe avec ou sans rappel.

#### 3.3.1 Influence du rappel en SST sur la trajectoire de référence

La trajectoire de référence est générée à partir d'un état initial obtenu avec un spin-up avec rappel. La génération des données au cours du cycle d'assimilation est réalisée avec le modèle nonlinéaire. La trajectoire libre et la remise à jour de la trajectoire en cours de cycle sont calculées de la même façon, avec ou sans rappel. Le rappel en surface ne concerne que le champ de température, on analyse donc ses effets principalement sur le champ de température obtenu dans chaque cas.

Comme on pouvait s'y attendre, l'absence de rappel dans la simulation libre avec le modèle nonlinéaire entraîne l'apparition de structures de plus petites échelles dans les couches superficielles de l'océan. On constate qu'au bout de 3 mois de simulation sans rappel, la température de surface présente des zones plus chaudes, en particulier dans la partie Ouest du bassin. Ces zones présentent environ 0.5°C de plus que la simulation avec rappel. On observe aussi de petites structures situées dans l'Est du bassin, juste au Nord de l'équateur qui présentent une température élevée.



(a) Simulation avec rappel

(b) Simulation sans rappel

FIG. 3.34 – Cartes de température pour l'expérience de référence (01-04-93), coupe horizontale couche 2 du modèle (15 m.).

Sur la coupe verticale (figure 3.35), on constate nettement après trois mois de simulation l'effet du rappel sur les 100 premiers mètres. Des perturbations apparaissent dans la simulation sans rappel à 160°E par exemple.



(a) Simulation avec rappel

(b) Simulation sans rappel

FIG. 3.35 – Cartes de température pour l'expérience de référence (01-04-93), coupe verticale le long de l'équateur.

Cet effet principal se retrouve dans toutes les trajectoires générées avec le modèle libre : on constate la même conséquence sur la trajectoire libre (figures non montrées).

# 3.3.2 Effet du rappel en SST sur la solution d'un cycle d'assimilation en 4D– VAR réduit

En comparant les résultats obtenus avec la trajectoire libre d'une part et le 4D–VAR réduit d'autre part, on constate que la prise en compte ou non du rappel ne modife pas, à grande échelle, la qualité de la solution identifiée par le 4D–VAR réduit. On peut voir que le champ de température obtenu en surface par l'assimilation de données est dans les deux cas très proche de la solution référence. On peut observer notamment sur la figure 3.36, les structures présentes à 170°E sous l'équateur.



FIG. 3.36 – Cartes de température en couche 2 du modèle (15 m.) le 01-04-93, pour la trajectoire de référence, la trajectoire libre et le 4D–VAR réduit.

L'impact du rappel au niveau local peut être quantifié au moyen des diagnostics AmO et BmO. On constate que pour le 4D-VAR réduit, la correction est de faible amplitude aux points d'observations. Le rôle du rappel se traduit par une correction plus faible dans la zone de surface qui s'explique immédiatement par le peu de liberté laissée au modèle pour s'ajuster en température. On constate sur la figure 3.37 que dans les 50 premiers mètres, l'écart aux observations est plus important dans le cas avec rappel. Au niveau de la thermocline à 150 m. c'est le contraire : la solution identifiée avec rappel est plus proche de la solution. Le rappel n'agit directement qu'en surface.



FIG. 3.37 – BmO (en noir) et AmO (en rouge) pour le 4D–VAR réduit, avec rappel à gauche et sans rappel à droite en moyenne temporelle et spatiale horizontale.

Pour estimer l'erreur commise dans les deux cas de façon globale, nous comparons les résultats obtenus avec la solution de référence, par couche, sur l'ensemble des points de la couche considérée en calculant les valeurs d'erreur RMS (figure 3.38).

L'utilisation du rappel dans les expériences diminue fortement le niveau de l'erreur RMS moyenne sur la période. Au cours des trois premiers mois, l'amplitude de l'erreur diminue fortement dans le cas sans rappel, mais n'atteint jamais le niveau d'erreur RMS avec rappel. Au contraire, dans le cas avec rappel, le niveau de l'erreur parait être beaucoup plus rapidement stable, indépendamment de la variable et de la profondeur. La diminution importante de l'erreur est aussi observée en profondeur pour le 4D–VAR réduit, en raison du caractère tridimensionnel de la correction, déjà visible dans le cas de l'expérience où l'on assimilait qu'une seule observation.



FIG. 3.38 – Erreurs RMS au cours du temps : comparaison entre la trajectoire libre et le 4D–VAR réduit, avec et sans rapppel

# Conclusions sur le rôle du rappel

Ces différents diagnostics nous ont permis de mettre en évidence d'une part que le rôle du rappel ne changeait pas le comportement global de l'assimilation de données. Quantitativement, on obtient des valeurs d'erreurs par exemple différentes mais d'un point de vue méthodologique l'influence est très faible. La présence ou non de rappel modifie peu la qualité de l'identification de la solution comme on a pu le voir. Par contre l'erreur commise globalement par couche est plus faible lorsqu'on prend en compte un rappel en température. De plus les résultats ont montré que physiquement la qualité du champ obtenu est meilleure. Nous décidons donc de conserver la prise en compte du rappel dans les expériences suivantes.

# 3.4 Conclusions

Un premier objectif de ce chapitre était de comprendre le rôle de chacune des composantes du système d'assimilation variationnelle et les interactions qui peuvent exister entre elles. Pour cela, nous avons défini un certain nombre d'expériences "test" destinées à mettre en évidence les éléments fondamentaux de ce type d'expériences. Il en ressort un certain nombre de paramètres, fixés en expériences jumelles, et qu'il faudra éventuellement calibrer de nouveau en assimilant des données réelles. Ainsi, cette analyse a illustré le rôle de la matrice  $\mathbf{B}$ , par le passage des différentes composantes de l'espace de contrôle à l'espace modèle. Ce rôle est clair dans le cas de l'incrément, pour lequel on s'attend a priori à la forme de la correction : locale dans le cas du 4D-VAR complet. L'assimilation de la salinité dans le cas d'expériences jumelles a montré le caractère non-symétrique joué par la température par rapport à la salinité. Même si de façon générale, les différences d'intensité observées ne sont pas facilement interprétables, on a quand même pu mettre en évidence le comportement du système d'assimilation dans le cas de l'assimilation d'une autre variable. Le rôle des forçages est plus ambigu suivant que l'on se place dans le cadre d'expériences jumelles ou d'assimilation de données réelles. Dans tous les cas, ce rôle n'est pas évident à discriminer simplement en tenant compte des résultats obtenus sur une période aussi courte. Nous verrons par la suite, que cette discrimination se fera d'un point de vue pratique. Enfin, nous avons pu constater que le rappel en température permettait en expériences jumelles de diminuer globalement le niveau d'erreur obtenu, sans affecter la procédure d'assimilation, et c'est donc cette configuration que nous retiendrons.

Le deuxième point important de chapitre est la mise en place d'une première application du 4D–VAR réduit dans une configuration similaire à celle utilisé pour le 4D–VAR classique. Cette méthode de rang réduit a prouvé, dans le contexte des expériences jumelles, sa capacité à identifier la condition initiale optimale avec un coût de calcul bien inférieur à celui du 4D–VAR classique. Les résultats obtenus avec cette méthode sont satisfaisant de plusieurs points de vue : qualité et rapidité de l'identification de la condition initiale optimale, aussi bien en température que pour les autres variables. La construction et l'application de la matrice **B** sont aussi facilitées, puisque le choix d'une base EOFs fournit directement une matrice de covariance d'erreur dans l'espace réduit. Comme les travaux de Sophie Durbiano le laissaient supposer, le 4D–VAR réduit est une bonne alternative, dans le cadre des expériences jumelles, aux méthodes variationnelles classiques. Nous allons cependant voir dans le chapitre suivant que l'application à l'assimilation de données réelles ne sera pas si évidente.

variationnelle

# Chapitre 4

# Expériences réalistes en 4D–VAR réduit

4.1	Gest	ion de l'erreur modèle par le 4D–VAR réduit	88	
	4.1.1	Configuration des expériences	89	
	4.1.2	Influence de la base	89	
	4.1.3	Conclusions	90	
4.2	Spéc	cification du sous-espace de correction	91	
	4.2.1	Configuration	91	
	4.2.2	Choix de la base de correction	91	
	4.2.3	Conclusion sur le choix de la base de correction	94	
4.3	4.3 Cyclage avec recouvrement 94			
	4.3.1	Influence du recouvrement	95	
	4.3.2	Conclusions sur le cyclage avec recouvrement	98	
4.4 Préconditionnement du 4D-VAR par le 4D-VAR réduit			98	
	4.4.1	Une approche "mixte"	98	
	4.4.2	Correction par le $4D$ -VAR complet de la solution obtenue avec le $4D$ -var		
		réduit	99	
	4.4.3	Conclusions sur le 4D–VAR mixte	103	
4.5	4.5 Conclusions			

# Sommaire \*

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la méthode de 4D–VAR réduit à l'assimilation de données réelles dans la même configuration que celle décrite au chapitre précédent.

Les expériences préliminaires du chapitre 3 nous ont permis de qualifier le rôle de chacune des composantes, en particulier celui de la matrice **B**, pour les deux méthodes de 4D–VAR complet et 4D–VAR réduit dans le cadre des expériences jumelles. On a notamment mis en évidence les différences entre les solutions obtenues dans chaque cas. L'intérêt du 4D–VAR réduit réside dans le caractère naturellement tridimensionnel et multivarié de la correction qu'il apporte. Par ailleurs, l'identification de la solution s'effectue en un nombre très restreint d'itérations. Toutefois, en expériences jumelles, on peut considérer que le modèle est parfait et reproduit la dynamique réelle dans la mesure où il est utilisé pour générer les observations. Il s'agit donc d'un contexte très favorable puisque l'erreur modèle présente dans le processus d'assimilation est nulle.

Dans le cas de l'assimilation de données réelles, le modèle libre produit une variabilité différente de celle de la dynamique réelle. De plus, les résultats obtenus par le 4D–VAR réduit dépendent beaucoup de la pertinence de la base utilisée pour engendrer l'espace de correction. Le point-clé dans l'assimilation de données réelles va donc être la capacité du 4D–VAR réduit à effectuer une assimilation avec un modèle qui contient une erreur importante. A partir de ce constat, nous nous sommes demandés dans quelle mesure le 4D–VAR réduit, suivant la base de correction choisie, pouvait ou non corriger un certain type d'erreur modèle. Nous allons d'abord tester ce point particulier en expériences idéalisées dans une configuration proche des expériences jumelles précédentes (§4.1).

Par la suite, nous allons envisager des stratégies visant à accroître la capacité du 4D–VAR réduit à fonctionner avec un modèle imparfait. La première stratégie va consister à évaluer différentes bases EOFS en assimilation de données réelles (§4.2).

Ensuite, une stratégie de lissage de la trajectoire issue des états analysés va être envisagée. Elle peut être implémentée en s'inspirant des travaux de B. Luong ([39]), détaillés dans la suite, sur des cycles avec recouvrement. Bien que la problématique soit de nature différente (processus physiques et domaine géographique différents), le fait de ne pas générer un état analysé trop différent du précédent, et donc de lisser la trajectoire assimilée peut avoir un effet bénéfique sur la solution obtenue. A la différence de ce qui a été mis en œuvre dans ses travaux, nous envisagerons un recouvrement plus simple (§4.3).

Enfin, nous allons voir que l'on peut aussi utiliser le 4D–VAR réduit comme préconditionneur au 4D–VAR complet (§4.4). En effet, le 4D–VAR réduit identifie rapidement une solution mais l'état analysé obtenu n'est pas toujours physiquement réaliste. Nous allons tester le fait que le 4D–VAR puisse corriger cet état analysé obtenu avec le 4D–VAR réduit en un faible nombre d'itérations.

La validation des expériences réalistes interviendra ultérieurement (au chapitre 7) lors de la comparaison des différentes expériences.

# 4.1 Gestion de l'erreur modèle par le 4D–VAR réduit

Dans cette partie, nous nous replaçons brièvement dans le contexte académique des expériences jumelles pour introduire d'une part plus facilement un terme d'erreur modèle et d'autre part pour être capable d'estimer l'erreur commise et éventuellement la partie corrigée. Nous espérons ainsi appréhender, dans une certaine mesure, les problèmes posés par l'assimilation de données réelles. Dans cette optique, nous avons choisi le rappel vers la température de surface de Reynolds comme terme simulant l'erreur modèle. Rappelons que ce terme, décrit au paragraphe 2.2.1, intervient dans l'équation d'évolution de la température.

$$K_v \frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{Q_{tot}}{\rho_0 C_{pw}} + \frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_{T^s_{rap}} \times (T^s_{rap} - T^s)$$
(4.1)

#### 4.1.1 Configuration des expériences

Les observations, qui représentent la réalité du système sont générées, dans tous les cas, sans rappel. Si la base de vecteurs EOFS est calculée avec un modèle qui ne contient pas de terme de rappel, elle est donc en accord avec les observations (elle représente la même variabilité) et elle est donc vraie. L'erreur modèle peut alors être modélisée par la prise en compte d'un terme de rappel dans le modèle direct qui intervient dans le processus d'assimilation.

Nous disposons donc de plusieurs cas de figure pour effectuer des comparaisons. L'expérience qui va servir de référence pour les comparaisons est celle dans laquelle ni les données, ni la base, ni le modèle ne contient de terme de rappel en température. Dans ce cas de figure (noté EXP1) la base et le modèle sont donc vraies.

L'erreur dans la base ou le modèle, consiste donc à prendre en compte un terme de rappel. Pour la deuxième expérience (EXP2), la base est fausse et le modèle reste vrai (seule la base est calculée avec un terme de rappel). Enfin, dans la troisième (EXP3), la base est vraie et le modèle est faux (seul le modèle contient un terme de rappel).

	base Eofs	Modèle
EXP1	Vraie	Vrai
EXP2	Fausse	Vrai
EXP3	Vraie	Faux

Pour le reste, la configuration est la même que celle mise en œuvre dans le chapitre précédent :

- Expériences d'une année d'assimilation (1993).
- Observations générées par le modèle (1993).
- Forçages : flux ECMWF et vents ERS-TAO.
- Matrice **R** diagonale avec  $\mathbf{R}_i = \sigma_T = 0.5^{\circ}$ C.
- Matrice **B** : décomposition EOF sur un échantillonnage d'une année (1993) avec 30 modes.

#### 4.1.2 Influence de la base

Nous allons voir, dans ce paragraphe, que l'erreur modèle présente dans les expériences est la source d'erreur la plus importante. De plus, cette erreur modèle est mal prise en compte par la base EOFS. En effet, losqu'on compare les niveaux d'erreur RMS obtenus dans chaque cas, l'erreur la plus faible est bien sûr obtenue pour l'expérience référence, avec une base en accord avec le modèle et les observations, en noir sur la figure 4.1.

Si on introduit une erreur dans le système d'assimilation, les valeurs d'erreur RMS nous montrent que le niveau d'erreur est élevé et augmente avec le temps **en surface, pour la température**. Lorsque la base est fausse mais le modèle vrai, l'erreur augmente mais dans une moindre mesure par rapport à l'expérience de référence. Contrairement à ce qu'on aurait pu espérer, l'erreur la plus importante est obtenue dans le cas où le modèle est faux et la base vraie (EXP3, en bleu sur la figure 4.1). Dans ce cas, la base contient les bonnes directions de correction sans que cela suffise à effectuer une correction pertinente, en accord avec les observations. Pour les autres variables et plus en profondeur, le niveau d'erreur obtenu est aussi plus élevé mais diminue au cours du temps. Cet aspect est dû au caractère à la fois tridimensionnel et multivarié des EOFS, associé au fait que plus en profondeur et pour les autres variables, le type d'erreur choisi n'a que peu d'influence.



FIG. 4.1 – Erreurs RMS : EXP1 (référence) : modèle vrai base vraie (trait noir), EXP2 : modèle vrai base fausse (trait rouge), EXP3 : modèle faux base vraie (trait bleu)

Par contre, en ce qui concerne la norme de la distance au sous-espace de correction, on ne constate pas de différence significative entre les trois expériences. L'évolution de l'incrément au cours du temps est de plus en plus proche du sous-espace de correction quelle que soit l'expérience.



FIG. 4.2 – Norme de la distance entre l'incrément et le sous-espace des EOFS

#### 4.1.3 Conclusions

La conclusion de ces expériences est que l'erreur présente dans le modèle joue un rôle prépondérant. Cette erreur empêche le modèle de présenter une variabilité cohérente avec les observations. La correction apportée par le 4D–VAR réduit est une combinaison linéaire des vecteurs de la base qui engendre le sous-espace de correction. Si ce sous-espace ne représente pas la même variabilité que celle présente dans les données réelles observées, la correction apportée n'est pas cohérente. La base de vecteurs choisie pour engendrer l'espace de correction n'est donc pas toujours en mesure de corriger efficacement l'ébauche. Mais même si la base est correcte, l'erreur présente dans le modèle provoque une augmentation de l'erreur commise. Cet aspect nous laisse à penser que dans le cas de l'assimilation de données réelles, la nature de l'erreur modèle jouera un rôle décisif pour les résultats obtenus lors de l'assimilation. Il est même possible que l'erreur modèle soit trop importante et nous empêche de mener à bien nos expériences.

Il faut cependant noter que le type d'erreur choisi a très certainement joué ici un rôle important :

le rappel n'a d'effet qu'en surface et uniquement sur la température alors que la correction apportée par les vecteurs EOFS est tridimensionnelle et multivariée et que les observations sont présentes jusqu'à 500 mètres de profondeur. Nous allons voir au paragraphe suivant le rôle particulier de la base dans le cadre de l'assimilation de données réelles.

# 4.2 Spécification du sous-espace de correction

## 4.2.1 Configuration

Pour ces expériences réelles, nous nous sommes placés dans la même configuration que précédemment mais en utilisant les données réelles TAO et XBT sur l'année 1993.

## 4.2.2 Choix de la base de correction

#### 4.2.2.1 Base issue de la trajectoire *libre*

La première base testée est la même que celle utilisée dans les expériences jumelles, calculée à partir de la simulation libre. Elle ne contient *a priori* qu'une information sur la variabilité du modèle, qui peut être sans doute assez éloignée de la variabilité réelle du système. On peut constater sur la figure 4.3 que la fonction coût liée aux observations  $(J_o)$  diminue très rapidement au cours de chaque cycle. Il en est de même pour le terme relatif à l'ébauche mais le minimum atteint est très différent d'un cycle à l'autre.

En ce qui concerne la solution obtenue, les états analysés ne sont pas physiquement réalistes. En effet, on peut voir sur la figure 4.4 une zone de très forts gradients de température située à l'équateur dans le bassin Est. On constate de même que la composante zonale de la vitesse présente des gradients et une intensité trop importante dans la même zone (avec des valeurs supérieures à 1.5 m/s). Il faut toutefois remarquer que cette zone est située à la limite du domaine des bouées TAO et qu'au delà, nous ne disposons pas d'observations.



FIG. 4.3 – Fonctions coût pour les 6 premiers mois de 1993 obtenues en 4D–VAR réduit avec une base issue de la trajectoire libre



FIG. 4.4 – Champ de température, état analysé obtenu en 4D–VAR réduit avec base issue de la trajectoire libre le 01/06/93. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15 m.).

Une première hypothèse est que le modèle libre à partir duquel sont calculés les EOFS ne représente pas la bonne variabilité (celle associée aux données). L'erreur modèle est importante et la variabilité contenue dans la base de vecteurs EOFS n'est pas suffisamment représentative de la dynamique réelle. Cette hypothèse est en accord avec les résultats obtenus au paragraphe précédent (§4.1). La deuxième hypothèse, complémentaire, est que la difficulté que rencontre le 4D–VAR réduit provient aussi en partie de la discontinuité entre les différents états analysés au cours du temps. En effet, la configuration actuelle impose au 4D–VAR réduit d'apporter une correction très importante à l'ébauche, qui représente un choc que le modèle supporte plus ou moins bien, ce qu'on a pu constater sur l'évolution de  $J_b$ . Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 4.3.

#### 4.2.2.2 Base issue de la trajectoire assimilée

Pour vérifier l'hypothèse selon laquelle le modèle ne représente pas sufisamment la variabilité contenue dans les données, nous avons calculé une nouvelle base EOFS à partir d'états issus de la trajectoire assimilée obtenue avec le 4D-VAR complet sur la même période. Les champs utilisés pour le calcul des EOFS sont donc des champs modifiés suite à l'assimilation de données TAO et XBT. Ils sont donc plus représentatifs de la variabilité réelle du système. Il en résulte que l'état physique obtenu est beaucoup plus lisse et présente des extrêma plus faibles aussi bien en température que pour la composante zonale de la vitesse. On constate sur la figure 4.5 que les fonctions coût ont globalement le même comportement que dans l'expérience précédente. Par contre, la solution physique obtenue présente beaucoup moins de forts gradients, malgré la présence de petites structures en température (figure 4.7). De même pour la composante u (figure 4.8), les valeurs obtenues dans cette zone à l'équateur sont beaucoup plus faibles (on observe un maximum à 1.2 m/s). Il faut toutefois noter la présence d'une zone située à 130°W dans laquelle la vitesse zonale atteint une valeur importante.



FIG. 4.5 – Fonctions coût obtenues en 4D–VAR réduit avec base assimilée pour les 6 premiers mois de 1993

Si l'on compare avec les résultats obtenus en 4D-VAR complet, on constate que la fonction coût liée aux observations ( $J_o$ ) décroit de façon plus importante dans le cas du 4D-VAR réduit (pour les deux choix de base) que pour le 4D-VAR complet (figure 4.6).



FIG. 4.6 – Fonction coût liée aux observations  $(J_o)$  pour le 4D–VAR complet pour les 4 premiers mois de 1993

Comme on peut le constater sur le figure 4.7, la solution obtenue par le 4D–VAR complet est une solution qui présente une structure en température plus lisse avec des gradients moins forts, de caractère réaliste.



FIG. 4.7 – Composante en température, état analysé le 01/06/93. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle.



FIG. 4.8 – Composante zonale du courant horizontal, état analysé le 01/06/93. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle.

#### 4.2.3 Conclusion sur le choix de la base de correction

Ces expériences ont montré que le 4D–VAR réduit était capable d'assimiler des données réelles sous réserve d'une base adéquate. Lorsque la base EOFS ne contient qu'une information imparfaite concernant la variabilité présente dans les données, les résultats obtenus sont physiquement irréalistes dans la mesure où ils présentent de forts gradients.

Lorsque la base EOFS est issue d'une trajectoire assimilée, les résultats sont très sensiblement améliorés et on obtient une identification rapide de la solution (et donc un coût de calcul moindre). Un inconvénient majeur est évidemment qu'il faut alors faire une expérience d'un an avec le 4D– VAR complet avant de pouvoir effectuer une année d'assimilation de données en 4D–VAR réduit. Cette solution est difficilement acceptable en pratique! Par contre, on peut tout à fait envisager d'utiliser des trajectoires issues de simulations précédentes calculées avec assimilation de données, ou encore la mise en place de procédure préliminaires d'assimilation sur la même période, beaucoup moins coûteuses comme par exemple une méthode d'Interpolation Optimale. Ceci permettrait de générer une trajectoire qui prendrait en compte la variabilité contenue dans les données.

De plus, cette expérience confirme que l'erreur modèle joue un rôle prépondérant dans le système d'assimilation de données et suggère que la prise en compte, même simplifiée, de l'erreur modèle comme paramètre supplémentaire de contrôle, associée à la condition initiale, pourrait être un moyen de compenser le fait que le modèle seul ne représente pas exactement la même variabilité que les données ([63]).

# 4.3 Cyclage avec recouvrement

On a pu voir dans l'expérience précédente que, lorsque la base EOFS est issue de la trajectoire libre, l'état analysé obtenu au bout de quelques mois est un état physiquement irréaliste. La fonction coût liée à l'ébauche présente un minimum très variable à chaque cycle. Une hypothèse envisagée pour expliquer ce comportement est que la période sur laquelle on utilise des données nouvelles est trop grande.

En se basant sur les travaux de Luong ([39], [10]) sur le cyclage réalisé dans le cadre de l'assimilation variationnelle de champs de surface dans un modèle QG aux latitudes moyennes, nous avons envisagé une prise en compte progressive des observations. Dans ses expériences, Luong met en œuvre une stratégie d'assimilation dans laquelle la fenêtre temporelle augmente progressivement, en conservant toujours le même instant initial. L'état analysé obtenu au cycle 1 sert d'ébauche au cycle suivant. Il montre, après plusieurs cycles de longueurs croissantes, que l'état obtenu par la minimisation est une meilleure approximation de l'état de référence. La problématique de Luong est évidemment différente, les phénomènes physiques (tourbillons fortement non-linéaires de moyenne latitude) ne se produisant ni dans la même zone ni à des échelles comparables. Cependant, nous avons pensé qu'une prise en compte progressive des données sur la fenêtre d'assimilation pouvait être en mesure d'améliorer les résultats.

Afin de ne pas trop sortir des limites de validité du modèle linéaire tangent, nous avons choisi une méthode différente pour effectuer les cycles : le recouvrement partiel. Nous choisissons de garder toujours la même durée pour notre cycle d'assimilation mais au lieu de raccorder la fin du cycle kau début du cycle k + 1, nous avons mis en place un recouvrement d'une longueur d'un demi-cycle (15 jours dans notre cas), comme on peut le voir sur la figure 4.9. Cette expérience est appelée 4D-VAR cyclé.

#### 4.3.1 Influence du recouvrement

Dans cette expérience, on cycle le 4D–VAR réduit sur une période d'un mois, avec un recouvrement de 15 jours, comme le montre la figure ci-dessous. La taille de la fenêtre d'assimilation est conservée et est égale à un mois.



FIG. 4.9 - Cyclage du 4D-VAR réduit avec un recouvrement de 15 jours

En pratique, on prend un état issu de la dernière prévision, à  $t_0+15$  jours. Cet état sert d'ébauche pour l'expérience suivante qui ne débute donc plus le 1<sup>er</sup> jour du mois suivant mais le 15 du mois en cours. Au troisième cycle, on retombe sur le 2<sup>ème</sup> mois de l'expérience. L'écart aux observations au cours d'un cycle ne prend en compte des données *nouvelles* que sur une période de 15 jours, l'ébauche ayant déjà été corrigée avec les données observées sur les 15 premiers jours, lors du cycle d'assimilation précédent. On a donc un coût de calcul qui augmente (pour faire une expérience d'une année, on rajoute 11 cycles d'un mois supplémentaires). Mais avec un 4D–VAR réduit qui coûte beaucoup moins cher qu'un 4D–VAR complet, le coût global reste acceptable. L'aspect intéressant de cette méthode vient du fait qu'on prend en compte deux fois les données pour contraindre plus fortement le résultat issu de l'analyse, mais de façon progressive. Le résultat est satisfaisant dans la mesure où l'on améliore les résultats obtenus en 4D–VAR réduit seul.

Le comportement du terme de la fonction coût lié à l'ébauche, tout en étant très faible comparé à celui lié aux observations, a un comportement perturbé : une forte diminution au début du cycle suivie d'une ré-augmentation progressive, due à la modification de la stratégie temporelle. On peut constater sur la figure 4.10 qu'à chaque début de cycle la fonction coût liée aux observations diminue très rapidement.



FIG. 4.10 – 4D–VAR réduit cyclé : fonctions coûts des différents cycles, sur l'année 1993.

L'intérêt de la méthode est de corriger un état qu'on a obtenu au bout de 15 jours de prévision au lieu d'un mois complet. On s'intéresse donc à la correction apportée par un cycle supplémentaire décalé de 15 jours. Cette correction se fait dans l'ensemble du bassin puisque même dans les parties extrêmes du domaine d'étude, on peut constater des corrections comprise entre 0.5°C et 1°C. Cependant, l'essentiel de la correction de forte amplitude (plus de 2°C) s'effectue dans la zone Centre-Est du bassin au dessus de l'équateur (correspondant approximativement à la région des TIWs). L'étendue spatiale de cette correction est assez limitée. Elle permet de réajuster la température dans cette zone particulière comme on peut le voir sur la figure 4.11. L'amplitude de la correction dans cette zone montre à quel point la solution obtenue dans le cas non-cyclé fournissait une solution insuffisamment correcte dans cette zone comme on pouvait le voir sur la figure 4.4. Toutefois, bien qu'atténuée, on retrouve la présence de forts gradients irréalistes en température, dans la même zone perturbée que dans le cas du cas du 4D-VAR réduit.



FIG. 4.11 – Composante en température, état analysé et correction apportée le 01/12/93. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15m.)

La correction sur les courants est essentiellement basée autour de l'équateur elle aussi, sur les 200 premiers mètres. Sur la coupe à 141°W, figure 4.12, on constate que la correction intensifie le courant Est-Ouest à 200 m. de profondeur au niveau de l'équateur, ainsi que le courant de surface un peu en dessous. Par contre, elle contribue à diminuer celui qui est situé en surface à 5°N. L'amplitude de la correction est identique à celle du courant obtenu par la prévision, ce qui indique que la correction est très forte.



FIG. 4.12 – Composante zonale de la vitesse (**u**), état analysé et correction le 01/12/93. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15m.)

Enfin, on peut observer sur la figure 4.13 que le fait de cycler le 4D–VAR réduit permet d'obtenir des masses d'eau plus homogènes dans la partie Ouest du bassin que le 4D–VAR réduit seul. Il reste cependant une zone de forts gradients située le long de l'équateur à l'Est du bassin. Cette zone est certainement la zone la plus problématique rencontrée lors de ces expériences d'assimilation. On remarque que l'upwelling, qui est à son niveau le plus fort au mois de Décembre, est assez bien représenté avec le 4D–VAR cyclé, contrairement au 4D–VAR réduit seul, pour lequel la masse d'eau plus froide est beaucoup trop étendue. Les masses d'eau sont positionnées correctement par rapport à la solution obtenue en 4D–VAR standard. Par contre, les gradients situés à 105°W environ sont plus importants.


FIG. 4.13 – Composante en température, état analysé le 01/12/93. Coupe horizontale à 15 m.

Comme dans le cas des autres expériences en 4D-VAR réduit, on peut tracer la partie orthogonale à l'état analysé et son évolution au cours du temps. Les cycles de 15 jours sont juxtaposés. La distance à l'espace de correction diminue et tend à se stabilier au cours des cycles.



FIG. 4.14 – 4D–VAR réduit cyclé : norme de la partie orthogonale pour les différents cyles

#### 4.3.2 Conclusions sur le cyclage avec recouvrement

Le 4D-VAR réduit cyclé a ici montré sa capacité à assimiler des données réelles. La prise en compte des données, de façon redondante, sur une période limitée contribue à faciliter le redémarrage du modèle. Ceci contribue à diminuer le choc induit par la correction de l'ébauche au début de chaque cycle. On a pu voir que la correction apportée au bout de 15 jours était encore très importante aussi bien en température qu'en salinité. Des problèmes persistent toutefois avec la présence de forts gradients dans l'état analysé.

### 4.4 Préconditionnement du 4D-VAR par le 4D-VAR réduit

### 4.4.1 Une approche "mixte"

Nous avons vu dans les expériences précédentes que la base EOFS calculée à partir d'une trajectoire libre manquait de pertinence pour obtenir une solution satisfaisante avec un cycle *standard* de 4D–VAR réduit (sans recouvrement) en assimilant des données réelles de profils de température (TAO et XBT). Une approche possible pour exploiter la rapidité d'identification du minimum de la fonction coût en 4D-VAR réduit, tout en obtenant une solution dans un espace plus complet, est de préconditionner le 4D-VAR complet par un cycle de 4D-VAR réduit sur la même période. Le 4D-VAR réduit peut ainsi identifier rapidement une première solution qui est ensuite affinée par le 4D-VAR complet, dans la zone des données. Nous appelons cette méthode un 4D-VAR mixte.

Nous avons réalisé une expérience d'une année (1993) dans laquelle le cycle d'assimilation est effectué de la façon suivante : le 4D-VAR réduit effectue une boucle externe de 10 itérations internes ; l'état analysé issu de ce premier cycle sert d'ébauche pour le deuxième cycle qui commence à la même date et qui consiste en une boucle externe de 10 itérations internes effectuée par le 4D-VAR complet. Le coût de ce 4D-VAR mixte est donc un 4D-VAR réduit de 10 itérations et un 4D-VAR complet de 10 itérations aussi. Il est donc presque équivalent en coût de calcul à un cycle de 4D-VAR réduit comme nous l'avons fait dans les expériences précédentes.

### 4.4.2 Correction par le 4D-VAR complet de la solution obtenue avec le 4D-var réduit

Le 4D–VAR réduit effectue une première minimisation et identifie une première solution. Le 4D–VAR complet ré-effectue une deuxième minimisation en profitant de la première identification, ce qui lui permet d'avoir très rapidement un niveau très bas d'erreur comme on peut le constater sur la figure 4.15. Le niveau de la partie liée à l'ébauche est très faible mais on peut quand même noter un comportement très oscillant pour le 4D–VAR complet qui démarre non pas sur un état issu d'une prévision mais sur l'état issu de l'analyse réalisée avec le 4D–VAR réduit. En ce qui concerne l'écart aux observations, on voit nettement le rôle du 4D–VAR réduit en préconditionnement du 4D–VAR complet.



FIG. 4.15 – Fonctions coûts obtenues pour une année d'assimilation avec un 4D-VAR mixte

Nous allons voir que les modifications apportées par l'une et l'autre méthodes sont des corrections assez significatives dans la bande des 300 premiers mètres. Ces modifications concernent à la fois la variable assimilée mais aussi les composantes des vitesses. Les corrections apportées sont de nature un peu différente : correction plus globale pour le 4D–VAR réduit que pour le 4D–VAR par exemple. Enfin, les corrections effectuées ne vont pas forcément dans le même sens : une intensification locale apportée par le 4D–VAR réduit peut être annulée, voire inversée, par le 4D–VAR complet, comme nous le verrons à la figure 4.18.

La structure thermique en surface est corrigée principalement dans la zone Centre-Est au niveau de l'équateur. La correction apportée par le 4D-VAR réduit est une correction globale dans la mesure

où on constate par exemple sur la figure 4.16, une correction effectuée à 150°E à l'extrême Nord du modèle. La correction effectuée ensuite par le 4D–VAR standard est plus localisée d'une part au niveau de l'équateur, et d'autre part, sur des structures de petite échelle. Les gradients présents dans la correction sont eux aussi beaucoup plus lisses.



FIG. 4.16 – Température, ébauche du douzième mois, corrections successives et état analysé le 01/12/93 avec le 4D–VAR mixte. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15 m.)

La figure 4.17 permet de constater que dans les deux cas, les corrections significatives se situent dans la zone des 220 premiers mètres de profondeur.



FIG. 4.17 – Température, ébauche du douzième mois et corrections successives le 01/12/93 avec le 4D–VAR mixte. Coupe verticale à l'équateur

La correction qui concerne les courants est plus complexe à analyser dans la mesure où, à l'équateur, on trouve plusieurs courants à des profondeurs différentes. On peut constater, sur la figure 4.18, que pour certaines composantes, les deux agissent dans le même sens. Il s'agit du courant situé au Sud de l'équateur à 150 mètres de profondeur : les deux corrections tendent à intensifier ce courant dans la direction Ouest-Est. Par contre, pour d'autres composantes, les deux corrections agissent de façon opposée comme dans le cas du courant situé à  $8.5^{\circ}N$  : le 4D–VAR réduit augmente sa composante zonale qui est ensuite diminuée par le 4D–VAR standard. De même, pour le courant situé à  $2.5^{\circ}S$  en surface : sa composante zonale est diminuée par le 4D–VAR réduit et réaugmentée ensuite par le 4D–VAR.



FIG. 4.18 – Composante en vitesse zonale de l'ébauche du douzième mois et corrections successives le 01/12/93 avec le 4D–VAR mixte. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15 m.)

La zone la plus corrigée est aussi la zone la plus différente entre l'expérience que nous avons menée avec le préconditionnement et le 4D–VAR standard. Il s'agit de la zone équatoriale Est. On constate sur la figure 4.19 que le 4D–VAR présente une zone d'eau froide trop étendue située à 110°W sous l'équateur. Cette structure est corrigée par le 4D–VAR mixte qui améliore ainsi la solution.



FIG. 4.19 – Composante en température, état analysé le 01/12/93. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15 m.) en haut et coupe verticale à l'équateur en bas.

La norme de la partie orthogonale est présentée sur les deux figures (4.20 (a) et (b)) en distinguant la contribution du 4D–VAR réduit (à gauche) et le 4D–VAR complet (à droite). La norme de l'écart est plus importante dans le cas du 4D–VAR complet, ce qui est logique puisque la solution obtenue n'a plus la contrainte d'appartenir au sous-espace de correction. Cependant, cet écart demeure faible et dans tous les cas diminue au cours du temps pour se stabiliser au quatrième mois.





### 4.4.3 Conclusions sur le 4D-VAR mixte

L'usage conjoint du 4D-VAR réduit et complet semble fournir de meilleurs résultats que le 4D-VAR seul avec un coût diminué par 2. On a pu constater que la correction supplémentaire apportée par un 4D-VAR qui débute sur un état analysé issu d'une combinaison linéaire d'EOFS conserve son caractère local et permet aussi de corriger l'intensité des différents courants à l'équateur par exemple. Au bout d'une année d'assimilation réalisée avec deux fois moins d'itérations, on obtient un état qui est physiquement valide. La pertinence d'une telle expérience doit sans doute être validée dans des configurations plus critiques comme un épisode El Niño par exemple. La correction apportée par le 4D-VAR complet est, de plus, peu éloignée de l'espace de correction engendré par les EOFS. Ce sous-espace semble donc être cohérent avec la nature de la correction apportée (contrainte par la dynamique du modèle).

### 4.5 Conclusions

Nous avons vu dans ce chapitre que le 4D–VAR réduit mis en œuvre en expériences réelles de façon identique à ce qui a été fait en expériences jumelles rencontre des difficultés à assimiler directement des données de profils de température. La base issue du modèle libre n'est pas suffisamment pertinente pour fournir des résultats corrects.

L'analyse effectuée avec une base plus pertinente, issue du modèle assimilé, permet d'obtenir de meilleurs résultats dans la mesure où l'on parvient à assimiler des données réelles. Une façon d'assurer la faisabilité d'une telle expérience serait de générer la base EOFS à partir de simulations existantes, pour que le coût de calcul ne soit pas rédhibitoire.

En extrapolant les résultats obtenus, une autre façon de faire serait d'enrichir la base avec des informations provenant des observations (on pourrait en cela suivre la méthode employée par Fabien Durand [20]).

Si l'on conserve une base issue de la trajectoire libre, le fait de cycler avec un recouvrement temporel permet d'améliorer la solution obtenue avec le 4D–VAR réduit mais de forts gradients en température perdurent en surface.

Une approche de type mixte, dans laquelle on préconditionne le 4D–VAR complet avec un cycle de 4D–VAR réduit, facilite le processus de minimisation et permet d'obtenir des résultats tout à fait satisfaisants. De plus, on réduit ainsi le coût de calcul sans détériorer la solution identifiée. Parmi les perspectives envisageables, le test d'autres bases qui engendreraient un espace de correction différent, comme les breds modes, pourrait constituer une alternative intéressante pour le 4D–VAR mixte.

Toujours dans l'optique d'améliorer la pertinence de la base, une stratégie serait de la faire évoluer au cours de l'assimilation, au fur et à mesure de la prise en compte de nouvelles données. Une première idée testée précédemment était de recalculer cette base sur la trajectoire assimilée. Nous avons vu que cela coûte cher. Par contre, nous avons vu dans le premier chapitre qu'une méthode qui permettait cette évolution était justement le filtre SEEK. La perspective d'une éventuelle hybridation avec ce type de méthode séquentielle semble donc prometteuse.

## Chapitre 5

# Expériences préliminaires en assimilation séquentielle

Sommaire \*

5.1 Prés	sentation des expériences préliminaires	
5.2 Sensibilité aux différents paramètres du filtre		
5.2.1	Initialisation	
5.2.2	Rôle du facteur d'oubli	
5.2.3	Evolution de la base de correction $\ldots \ldots 113$	
5.3 Conclusions		

### 5.1 Présentation des expériences préliminaires

De façon identique à ce que nous avons fait pour les méthodes d'assimilation variationnelle, ces expériences préliminaires (en configuration d'expériences jumelles) sont destinées d'une part à comprendre et analyser le comportement du filtre SEEK dans une configuration la plus proche possible de celle du 4D–VAR, et d'autre part à identifier quels sont les paramètres (ou composantes) du filtre qui jouent un rôle important. La configuration physique des expériences est donc choisie bien évidemment identique à celle du 4D–VAR en terme de zone géographique, forçages atmosphériques, rappel en température de surface, etc.

Les paramètres intrinsèques qu'il nous faut tester sont l'initialisation du filtre, la prise en compte de l'erreur modèle au travers du facteur d'oubli, et bien sûr la gestion des vecteurs de la base qui définit l'espace réduit de correction. On va à cet égard tester l'aspect évolutif ou non de cette base. En expériences jumelles, les différents résultats seront comparés au travers des valeurs d'erreurs RMS obtenues.

Pour une première définition de ces expériences jumelles réalisées avec le filtre SEEK, nous nous sommes appuyés sur les résultats obtenus par Laurent Parent au cours de sa thèse [44], en ce qui concerne les expériences d'assimilation de données de profils TAO seuls.

Il apparaît qu'un point important de la réussite de ses expériences menées sur la même période que nous (1993-1994) est l'état utilisé pour l'initialisation du système. En effet, Laurent Parent a observé qu'un état présentant un biais trop important par rapport à l'état représenté par les données n'est pas corrigé efficacement par le filtre SEEK. Il nous appartiendra alors de déterminer dans quelle mesure notre état initial est un bon candidat pour ce type d'expériences.

Enfin, une partie peut-être un peu plus théorique à tester, à la fois en expériences jumelles et en données réelles, est la prise en compte de la base EOF et son aspect fixe ou évolutif dans le filtre SEEK. Quelle est la période de calcul la plus pertinente ? On peut par exemple suivre la démarche de Fabien Durand ([21]) qui calcule la base EOFs avec un échantillonnage de 9 jours de simulation libre en adéquation avec son cycle d'assimilation de 9 jours. Les questions qui se posent alors, et qui recoupent dans une certaine mesure celles qui sont apparues pour les expériences en 4D–VAR réduit sont les suivantes : quel est le comportement de la partie non résolue de l'espace d'erreur ? L'évolution des modes par le modèle nécessite-t-elle une réorthogonalisation ? Et si oui quelle est la fréquence pertinente ?

Au travers de la définition de nos expériences, nous allons tenter de répondre à ces questions.

De façon cohérente avec les expériences réalisées en 4D-VAR, les expériences sont donc effectuées dans la configuration suivante :

- données TAO : les données sont prises en compte tous les 10 jours. Il s'agit de données instantanées de température générées par le modèle à cette fréquence.
- fréquence d'assimilation : 10 jours
- $-\,$  base EOFs fixe calculée sur 1993 à partir d'une simulation libre
- prévision : redémarrage avec un pas d'Euler
- forçages : flux ECMWF et vents ERS-TAO
- rappel vers la température de Reynolds en surface

On note que le filtre en base fixe, comme nous l'avons décrit au chapitre 1, ne signifie pas que la base reste identique tout au long de la période d'assimilation. Elle évolue à chaque analyse mais n'est pas propagée par le modèle.

### 5.2 Sensibilité aux différents paramètres du filtre

### 5.2.1 Initialisation

Pour l'initialisation des expériences avec le filtre SEEK, nous disposons de deux états différents : le même état initial qu'en 4D–VAR réduit (un état issu de la simulation libre décalé de 3 mois dans le temps) ou d'un état moyen calculé sur l'année 1993. Dans de nombreuses études utilisant le filtre SEEK, il a été constaté qu'une initialisation avec un état moyen, calculé sur une période significative, permettait de faire une initialisation correcte de l'algorithme d'assimilation séquentielle (comme ca doit être le cas en théorie).

Nous avons testé une procédure d'initialisation qui consistait à utiliser tout d'abord le même état que pour le 4D–VAR, puis un état moyen. Dans un premier temps, avant de faire des expériences spécifiques, nous fixons le facteur d'oubli à 0.2 (Parent, [44]). L'expérience est réalisée en base fixe. L'erreur RMS obtenue avec l'initialisation faite avec l'ébauche est plus élevée au départ qu'avec celle faite avec l'état moyen comme on peut le constater sur la figure 5.1. L'initialisation avec l'état moyen donnant de meilleurs résultats, on conserve celle-ci dans la suite des expériences.

Nous verrons par la suite que le choix du facteur d'oubli qui a été fait pour cette expérience n'est pas un choix optimal ce qui explique que le niveau d'erreur augmente et dépasse même le niveau obtenu par la simulation libre mais cela ne change rien au problème d'initialisation que nous venons d'évoquer.



FIG. 5.1 – Erreur Rms au cours du temps (1993) au niveau 2 (15 m.) du modèle, composante en température : comparaison de l'initialisation avec l'état moyen et une ébauche décalée de 3 mois, sur l'année 1993, état moyen en trait gras, ébauche du 4D–VAR en trait moyen, simulation libre en trait fin

### 5.2.2 Rôle du facteur d'oubli

Le facteur d'oubli  $\rho$  joue le rôle de prise en compte de l'erreur modèle au travers d'un facteur multiplicatif devant la matrice de covariance d'erreur de prévision  $\mathbf{P}^{f}$ . Tester différentes valeurs de ce facteur revient à calibrer l'influence de l'erreur modèle dans la procédure.

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \frac{1}{\rho} \mathbf{S}_{k+1}^f (\mathbf{S}_{k+1}^f)^T$$

Pour tester l'influence de ce facteur d'oubli, on initialise la procédure comme défini ci-dessus avec un état moyen calculé sur 1993. L'expérience débute au 01/01/93 et dure une année. Les cycles

d'assimilation sont de 10 jours. Pour la première expérience, le facteur d'oubli  $\rho$  a été fixé à 1 (*ie* une erreur modèle nulle). Puis nous l'avons progressivement diminué, ce qui revient à multiplier la matrice  $\mathbf{P}_f$  par l'inverse de ce facteur. Nous testons finalement trois valeurs : 1, 0.7 et 0.2. Dans ces expériences, la base est *fixe*, elle n'évolue que lors des phases d'analyse.

La diminution du facteur d'oubli a pour effet d'augmenter l'intensité du signal présent dans les vecteurs de la base de correction. On peut constater sur la figure 5.2 qu'au bout de 6 mois le premier vecteur en température, qui a une intensité presque nulle en dehors de la zone équatoriale pour  $\rho = 1$  présente des valeurs atteignant 0.02°C dans la même zone pour  $\rho = 0.2$ .



FIG. 5.2 – Premier vecteur de la base EOFs le 10/06/93 : composante en température au niveau 2 du modèle, initialisation avec l'état moyen.

#### Rôle du facteur d'oubli sur la prévision

Lorsque nous regardons l'erreur commise par rapport à la trajectoire de référence, l'erreur la plus faible est obtenue pour un facteur de 1 et augmente lorsqu'on diminue ce facteur, en surface comme en profondeur, comme nous allons le voir sur les figures ci-dessous.

La figure 5.3 présente les valeurs d'erreurs Rms obtenues dans chaque cas pour les différentes variables du vecteur d'état **en surface**. On peut constater que le facteur d'oubli a une influence très nette sur toutes les variables. La première période d'assimilation (6 premiers mois) fournit de très bons résultats, sur les 4 variables en surface. Pour la deuxième période, on constate une augmentation régulière de l'erreur, particulièrement en ce qui concerne les courants. Un facteur de 0.2 conduit même, pour la deuxième période de l'année, à des valeurs supérieures à celles obtenues par le run libre, pour les quatre variables.



FIG. 5.3 – Valeur d'erreur Rms absolue au niveau 2 du modèle (15 m), en fonction du temps (1993) avec  $\rho = 1$  en trait noir moyen,  $\rho = 0.7$  en trait rouge,  $\rho = 0.2$  en trait noir gras et simulation libre en trait fin.

On effectue le même constat plus en profondeur (figure 5.4) : au bout de 6 mois le niveau d'erreur remonte pour atteindre celui de la trajectoire libre, dans le meilleur des cas. Aucune des valeurs testées du facteur d'oubli ne permet de compenser cette augmentation au cours du temps de l'erreur.

Il apparaît donc d'une part que diminuer le facteur d'oubli permet de conserver une intensité du signal, contenu dans les modes, constante au cours des cycles et donc un certain niveau d'information. Mais d'autre part, le signal véhiculé au cours des cycles par la matrice de covariance, tout en gagnant de l'intensité, perd de la pertinence puisque l'erreur commise augmente au cours du temps. L'augmentation de la prise en compte de l'erreur modèle mise en œuvre n'ayant pas apporté de solution, plusieurs hypothèses peuvent émerger de ce constat. Une première hypothèse peut être qu'on observe un problème de dynamique saisonnière : on passe de l'hiver à l'été avec une dynamique plus variable (mais le 4D–VAR réduit, qui travaille pourtant avec des directions de correction constante dans le temps, ne présente pas ce problème en expériences jumelles). Une autre hypothèse est la perte progressive d'information au fur et à mesure des cycles. Enfin, une possibilité peut être que nous n'avons pas identifié la valeur optimale du facteur d'oubli, la diminution mise en œuvre étant trop importante.



FIG. 5.4 – Valeur d'erreurs Rms absolue au niveau 20 du modèle (750 m), en fonction du temps (1993) avec  $\rho = 1$  en trait noir moyen,  $\rho = 0.7$  en trait rouge,  $\rho = 0.2$  en trait noir gras et simulation libre en trait fin.

### Rôle du facteur d'oubli sur l'analyse

La variation du facteur d'oubli se traduit dans les états analysés obtenus avec le filtre SEEK par des différences très faibles dans la structure thermique des couches supérieures de l'océan. Lorsqu'on diminue le facteur d'oubli, au bout de 11 mois d'assimilation de données, on constate l'apparition de structures de petite échelle. On voit sur la figure 5.5 que la solution obtenue avec le filtre SEEK quelle que soit la valeur du facteur d'oubli est une solution pour laquelle les gradients de température de surface sont très lissés. L'influence de l'initialisation avec un état moyen perdure certainement encore, malgré l'assimilation de données.



FIG. 5.5 – Température, état analysé au bout de 11 mois d'assimilation avec le filtre SEEK en expériences jumelles, initialisé avec l'état moyen (coupe horizontale au niveau 2).

Les coupes verticales font aussi apparaître des petites structures qui modifient localement les masses d'eau. Les valeurs RMS étant calculées par couche, l'erreur augmente donc.



FIG. 5.6 – Température, état analysé au bout de 11 mois d'assimilation avec le filtre SEEK en expériences jumelles, initialisé avec l'état moyen (coupe verticale à l'équateur).

En **base fixe**, parmi les configurations testées, celle qui permet d'obtenir les meilleurs résultats en **expériences jumelles** est donc une initialisation effectuée avec un état moyen calculé sur l'année d'assimilation à partir de la trajectoire libre, et un facteur d'oubli égal à 1. L'erreur obtenue aurait dependant pu être atténuée par un calibrage plus fin du facteur d'oubli.

### 5.2.3 Evolution de la base de correction

Une deuxième composante capitale du système est la base Eofs utilisée pour modéliser les covariances d'erreur. Cette base est la même base approchée utilisée dans le 4D–VAR réduit. Pour l'initialisation du filtre SEEK, la première décomposition est de la forme  $\mathbf{P}^f = \mathbf{S}_0^f \mathbf{S}_0^{fT}$  avec  $\mathbf{S}^0 = \Lambda^{1/2} \mathbf{L}$ qui représente donc la base de vecteurs Eofs multipliés par la valeur propre associée.

### 5.2.3.1 Evolution de la base lors de l'étape d'analyse

Dans cette partie, les vecteurs ne sont pas encore propagés par le modèle : de la phase d'analyse à la phase de prévision, la matrice reste inchangée et on a donc  $\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{P}_k^a$ .

La base initiale est la même que celle utilisée dans le 4D–VAR (c'est à dire calculée sur l'année 1993). La seule différence est que les vecteurs  $\mathbf{L}_i$  sont représentés multipliés par leur valeur propre associée  $\lambda_i$ . Dans la première expérience, le facteur d'oubli est pris égal à 1.



FIG. 5.7 - Premier état de la base Eofs initiale : composante en température, salinité, courants au niveau 2 du modèle (à la date du 01-01-93, multiplié par la valeur propre associée)

Le filtre SEEK débute par une phase d'analyse (équation 1.56) : il est donc surtout intéressant de regarder l'évolution de la matrice après cette première étape pendant laquelle la matrice de covariance d'erreur d'analyse est obtenue à partir de la base initiale.

 $\mathbf{P}_1^a$  est calculée de la façon suivante :

$$\mathbf{P}_{1}^{a} = \mathbf{S}_{0}^{f} [I + (\mathbf{H}_{0} \mathbf{S}_{0}^{f})^{T} \mathbf{R}_{0}^{-1} (\mathbf{H}_{0} \mathbf{S}_{0}^{f})]^{-1} \mathbf{S}_{0}^{fT})$$

Après cette phase, en ce qui concerne la température, la structure Nord-Sud est conservée malgré une diminution de l'échelle très importante (les valeurs représentées sont autour de  $10^{-2}$  alors qu'elles étaient plutôt de l'ordre de 100 pour la base initiale). On constate de plus l'apparition de petites structures plus nombreuses au niveau de l'équateur. Il en est de même pour la salinité. Les courants sont beaucoup plus faibles et on identifie moins clairement les courants caractéristiques de la zone. Au bout de 6 mois, l'intensité du signal baisse de façon très significative, la composante en température est très faible.



FIG. 5.8 – Premier vecteur de la base EOFs obtenue après la première analyse : composante en température, salinité courants au niveau 2 du modèle (à la date du 10-01-93, multiplié par la valeur propre associée)

Par la suite, à chaque étape d'assimilation en base fixe, on a  $\mathbf{P}_{k+1}^{f} = \mathbf{P}_{k}^{a}$ . Nous avons vu au paragraphe précédent que diminuer le facteur d'oubli permettait de conserver un niveau de signal plus élevé mais induisait une augmentation de l'erreur commise les 6 derniers mois. Pour pallier cette perte d'information, l'évolution de la base par le modèle non-linéaire peut alors être une solution possible.

### 5.2.3.2 Propagation de la base avec le modèle non-linéaire pendant l'étape de prévision

Le filtre SEEK comporte plusieurs variantes pour faire évoluer les modes de correction au cours du temps. L'evolution peut se faire avec le modèle linéaire sur la durée d'un cycle. Cette méthode ne permet de prendre en compte que la propagation linéaire, avec les approximations faites lors de son écriture. Nous avons choisi de tester directement l'évolution des modes avec le modèle non-linéaire complet. Pour une base de r vecteurs, il faut donc rajouter à chaque étape de prévision r trajectoires du modèle libre. Le coût de calcul est donc largement augmenté. On se place à la phase d'analyse k. L'évolution de la base lors de l'étape de prévision se fait de la façon suivante :

$$\mathbf{L}_{i}^{k+1} = M_{k,k+1}(\mathbf{x}_{a}^{k} + \mathbf{L}_{i}^{k}) - M_{k,k+1}(\mathbf{x}_{a}^{k})$$
(5.1)

La propagation est réalisée pour tous les vecteurs de la base. Par conséquent, le coût de cette évolution est de 30 fois le coût du modèle direct. La base propagée permet de construire la matrice de covariance d'erreur de prévision. Dans cette expérience, que nous appelons EVOL1, la base de correction est modifée lors de la phase d'analyse et ensuite lors de la phase de prévision.

Pour toutes les variables, en surface et plus en profondeur, l'évolution de la base par le modèle non-linéaire permet de diminuer l'erreur Rms à partir d'une durée de 6 mois environ : elle diminue de moitié entre les 6 premiers et les 6 derniers mois (figure 5.9). La comparaison entre les résultats obtenus pour les deux facteurs d'oubli principalement retenus lors des expériences précédentes, montrent que la meilleure configuration est une base qui évolue avec un facteur de 0.7. Le niveau d'erreur obtenu pour  $\rho = 0.7$  évolue de la même façon que pour  $\rho = 1$  mais en étant un tout petit peu plus faible.



FIG. 5.9 – Valeur d'erreurs RMS absolue au niveau 2 du modèle (15 m.) sur un an.

Comme précédemment, les états analysés obtenus, avec ou sans évolution de la base, ne présentent pas de différences très marquées. L'évolution de la base avec le modèle non-linéaire provoque sur l'état analysé l'apparition de petites structures très locales (figure 5.10).



FIG. 5.10 – Etat analysé au bout de 11 mois d'assimilation avec le filtre SEEK en expériences jumelles, composante en température (coupe horizontale au niveau 2), base fixe à gauche, base évolutive à droite avec  $\rho = 1$ .

Il faut remarquer que les vecteurs de la base évoluent séparément avec le modèle non linéaire. Ces vecteurs n'ont *a priori* aucune raison de rester orthogonaux les uns aux autres. De plus, chaque vecteur est propagé de façon indépendante. L'espace engendré par cette base évolutive est différent de celui qui aurait été engendré par l'utilisation du modèle linéaire. Le sous-espace de correction a donc changé. La comparaison des solutions nous a montré que cette base évolutive permet d'obtenir des résultats de meilleure qualité.

### 5.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons testé un certain nombre de paramètres intrinsèques du filtre SEEK, comme le facteur d'oubli ou encore l'évolution de la base de correction. Les résultats obtenus pour ces expériences préliminaires sont intéressants dans la mesure où un certain nombre de problèmes ont été soulevés.

Ces expériences préliminaires nous ont permis d'analyser l'influence du facteur d'oubli sur la solution en expériences jumelles. Nous avons pu constater de plus que l'évolution de chaque vecteur de la base avec le modèle non-linéaire, malgré un coût de calcul élevé (30 fois le modèle direct) permettait d'améliorer les résultats, par rapport à ceux obtenus en base fixe, en modifiant le sous-espace engendré par la base.

Comme dans le cas du 4D–VAR réduit, la définition de la base constitue un enjeu majeur pour l'efficacité du filtre. On a vu que lorsque la base reste fixe, les résultats se détérioraient à partir d'un certain nombre de cycles, en partie du fait de la perte de l'information.

## Chapitre 6

# Expériences réalistes avec le filtre SEEK

Sommaire \*

6.1 Assimilation de données TAO seules		
6.1.1	Influence du facteur d'oubli et interaction avec l'évolution de la base $.118$	
6.1.2	Erreurs RMs par rapport aux données XBT	
6.1.3	Conclusions	
6.2 Assimilation conjointe de données XBT et TAO		
6.2.1	Apport des données XBT	
6.2.2	Evolution de la solution et de sa partie orthogonale	
6.2.3	Conclusions sur l'assimilation de données TAO et XBT	
6.3 Conclusions		

Dans ce chapitre, nous réalisons de la même façon qu'avec le 4D–VAR réduit, des expériences avec des données réelles. Les résultats obtenus avec le 4D–VAR réduit seul, utilisant une base calculée sur une trajectoire libre, n'ont pas été satisfaisants. Nous allons essayer de voir dans quelle mesure le filtre SEEK permet d'obtenir des états physiquement réalistes.

La prise en compte de données réelles modifie de façon significative les résultats obtenus et le comportement du filtre : il est donc nécessaire de tester à nouveau les valeurs du facteur d'oubli mise en œuvre en expériences jumelles ainsi que le rôle spécifique de l'évolution de la base.

Contrairement aux expériences jumelles, nous ne disposons plus de la trajectoire vraie pour évaluer l'erreur commise. Nous allons donc dans un premier temps n'assimiler que des données TAO pour pouvoir estimer le niveau d'erreur RMS en comparant avec des données XBT indépendantes car non-assimilées dans cette expérience (§6.1). Nous assimilons ensuite la totalité des données à notre disposition, en analysant plus clairement le rôle de l'ajout de données supplémentaires et leur influence sur le résultat physique obtenu (§6.2). La validation de l'algorithme d'assimilation de données et de la pertinence physique des résultats obtenus seront analysés plus en détail au chapitre 7.

### 6.1 Assimilation de données TAO seules

Nous assimilons dans cette expérience uniquement les données TAO (bien que le pourcentage varie suivant le mois considéré, le nombre d'observations issues des XBT est sensiblement du même ordre de grandeur que celui des données TAO mais leur distribution spatiale est irrégulière). Nous allons pouvoir calculer des erreurs RMS par rapport aux données XBT, indépendantes. L'assimilation conjointe de données TAO et XBT permettra ensuite de quantifier l'apport de données supplémentaires.

Les expériences sont réalisées dans les mêmes conditions que précédemment, avec un cycle de 10 jours. Nous mettons en œuvre dans ce chapitre les deux valeurs du facteur d'oubli qui ont été précédemment testées en expériences jumelles :  $\rho = 1$  et  $\rho = 0.7$ .

De plus, nous allons évaluer l'apport de l'évolution des modes avec le modèle non-linéaire.

Comme dans les chapitres précédents, la zone où l'on constate la plus grosse influence des différents paramètres (en particulier pour le facteur d'oubli et l'évolution de la base) est située le long de l'équateur, à l'extrême Est du domaine étudié. Certaines autres zones présentent des variations importantes comme la zone située à (110°W,10°N).

Nous comparons principalement les effets des différentes composantes du filtre sur la structure thermique et sur les courants en surface et en subsurface. Nous allons voir aussi que la prise en compte de données réelles par rapport aux expériences jumelles se traduit par des structures de grande échelle moins homogènes et par l'apparition de gradients plus forts aussi bien en température que pour les courants.

### 6.1.1 Influence du facteur d'oubli et interaction avec l'évolution de la base

### 6.1.1.1 Rôle du facteur d'oubli en base fixe

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que l'effet principal du facteur d'oubli sur la base EOFS est d'augmenter l'amplitude des vecteurs de cette base. Dans le cas de l'assimilation de données réelles, l'erreur modèle est plus importante. On cherche donc logiquement à diminuer ce facteur d'oubli pour tenir compte de cette erreur. Or, nous allons voir que cette diminution se traduit, sur la solution obtenue, par une intensification des gradients de température et des courants trop importante. L'augmentation de l'amplitude des modes conduit alors la solution à un état physiquement irréaliste.

En base fixe, la diminution du facteur d'oubli a rapidement un effet sur la structure thermique ainsi que sur les courants assez important, modifiant par exemple la température des masses d'eau de plus d'un degré. On voit sur la figure 6.1 que la zone située vers (110°W,10°N) présente un gradient plus marqué et une masse d'eau plus chaude (de 31°C à 32°C) au début du cinquième mois. On constate de plus que la structure tourbillonnaire située au niveau de l'équateur à l'Est du bassin est beaucoup plus turbulente dans le cas où le facteur d'oubli est égal à 0.7 (figure 6.1). De même le gradient de température situé entre 100 et 150 mètres de profondeur présente une structure beaucoup plus perturbée. Il faut noter que la zone qui présente les structures les moins réalistes est la même que celle observée lors des expériences réalisées avec le 4D–VAR réduit.



FIG. 6.1 – Température, état analysé le 01/05/93. Coupe horizontale à 15 m. (en haut) et coupe verticale à l'équateur (en bas).

L'évolution temporelle de la solution contribue au lissage des structures caractéristiques de l'écoulement mais ne suffit pas à compenser l'effet de la diminution du facteur d'oubli.

Lorsque le facteur d'oubli est égal à 1, la Warm Pool, située de part et d'autre de l'équateur à l'Ouest devient plus homogène. Ceci apparaît très clairement sur la coupe verticale sur la figure 6.2. Au mois 11, l'upwelling situé au Sud de l'équateur, dans la partie Est du bassin est plus décalé vers l'Ouest. Les eaux ont des caractéristiques plus froides à l'équateur et les courants ont davantage propagé cette masse d'eau plus froide vers l'Ouest, comme on peut le constater sur la figure 6.2.

Dans le cas où  $\rho = 0.7$ , la masse d'eau la plus froide s'est beaucoup moins déplacée vers l'Ouest. Sur la coupe verticale, on remarque la présence, au dessus de la masse d'eau plus froide, de tourbillons d'eau plus chaude. La remontée d'eau froide est légèrement décalée vers l'Ouest. L'équilibre dans cette zone entre les eaux froides qui remontent et les eaux chaudes présentes dans la zone est largement modifié. De plus, la figure 6.2 met en évidence les forts gradients qui se sont formés au niveau de l'équateur vers 110°W.



FIG. 6.2 – Température, état analysé le 01/12/93. Coupe horizontale à 15 m. (en haut) et coupe verticale à l'équateur (en bas)

En ce qui concerne les courants, nous nous intéressons particulièrement à la composante zonale de la vitesse horizontale. Le rôle du facteur d'oubli est encore une fois non négligeable. Il modifie en effet non seulement la structure des courants mais aussi leur intensité. On peut constater sur la figure 6.3 que le courant Ouest-Est (le SEC) situé à  $(140^{\circ}W, 2^{\circ}N)$  est beaucoup plus fort (1.1 m/s contre 0.6 m/s) lorsque  $\rho = 0.7$ . Il en est de même pour la partie située à  $110^{\circ}W$ . La structure de ce dernier est de plus beaucoup plus tourbillonnaire. On peut voir sur la figure 6.3 qu'au début du douzième mois, l'upwelling est couplé avec une intensification du courant situé juste au Sud de l'équateur à  $140^{\circ}W$  (le SEC). La composante située juste au dessus de l'équateur et dirigée vers l'Est (le NECC) comporte des gradients plus importants.



FIG. 6.3 – Composante zonale de la vitesse horizontale, état analysé au 01/05/93 en haut et 01/12/93 en bas. Coupe horizontale au niveau 2 du modèle (15 m.).

En conclusion, on peut constater que la diminution du facteur d'oubli entraîne l'apparition de tourbillons, l'intensification de certains gradients, ce qui conduit à des états irréalistes. L'intensification de l'amplitude des modes de correction ne permet pas de corriger efficacement l'erreur modèle mais introduit sans doute une correction trop importante. La valeur choisie (0.7), associée au faible nombre de données assimilées, ne semble pas être appropriée à cette expérience. Une expérience de sensibilité plus poussée fournirait sans doute une valeur plus optimale. Une solution, peut-être plus appropriée à notre expérience que l'augmentation de leur intensité, serait une correction de la structure de ces modes.

### 6.1.1.2 Evolution de la base

Comme en expériences jumelles, nous testons ici l'effet joint de l'évolution de la base et du facteur d'oubli. Lorsque la base évolue avec le modèle, avec un facteur d'oubli égal à 0.7, l'expérience s'arrête au sixième mois avec un état analysé physiquement irréaliste (une température trop élevée). Nous avons vu auparavant que l'effet principal de la diminution du facteur d'oubli était l'introduction de structures plus tourbillonnaires et plus intenses, aussi bien en température, que pour les courants. Cet effet, couplé avec l'évolution de la base, induit donc rapidement la génération d'états encore plus irréalistes, qui ne permettent pas de poursuivre l'expérience sur une année complète. Seul le facteur d'oubli égal à 1 (aucune prise en compte de l'erreur modèle) permet de conduire l'expérience jusqu'à son terme.

D'autre part, dans le cas où  $\rho = 1$ , si la structure thermique obtenue au mois 4 est encore suffisamment réaliste pour permettre la poursuite de l'expérience, on constate qu'on obtient quelques mois plus tard des états dans la zone Est de l'équateur tout à fait irréalistes. Les gradients créés, entre l'eau chaude présente dans la zone et l'eau plus froide qui remonte du Sud le long de l'équateur, atteignent des valeurs extrêmes, comme on peut le constater sur la figure 6.4 au début du mois 12.



FIG. 6.4 – Température, état analysé, base évolutive,  $\rho = 1$ . Coupe horizontale à 15 m.

Ces gradients sont présents sur la verticale jusqu'à une profondeur de 200 mètres environ (figure 6.5). On constate sur cette même figure que le courant zonal présente la même zone de gradients trop forts alors que le NECC à l'équateur a une position et une intensité inchangée et que le courant dirigé d'Est en Ouest (le SEC) ne présente pas de structure extrême en dehors de cette zone réduite. Ce problème semble directement induit par le premier vecteur EOFS en température (représenté sur la figure 6.6) qui a évolué avec le modèle. Contrairement aux résultats obtenus en expériences jumelles, l'évolution de la base dans cette expérience avec des données réelles conduit à des résultats irréalistes. Nous n'utiliserons donc dans la suite que le filtre SEEK en base fixe.



FIG. 6.5 – Etat analysé au 01/11/93, base évolutive.



FIG. 6.6 – Première Eof en température au 01/11/93

### 6.1.2 Erreurs RMS par rapport aux données XBT

Nous indiquons sur al figure 6.7 les écarts RMS entre la solution et les données indépendantes XBT non assimilées. Ces valeurs sont calculées sur l'état analysé seulement et par rapport aux données XBT non assimilées. L'écart est mesuré tous les 10 jours environ au cours de l'année d'expérience (à chaque fin de cycle du filtre). Nous avons constaté au paragraphe précédent que les expériences en données réelles ne révèlent pas le même comportement qu'en expériences jumelles. Les courbes d'erreurs RMS confirment ce constat. Il est logique d'observer un niveau d'erreur beaucoup plus élevé que dans le cas des expériences jumelles, surtout en comparant par rapport à des données indépendantes. Comme les résultats du paragraphe 6.1.1 semblaient l'indiquer, l'expérience qui fournit les meilleurs résultats est celle pour laquelle la base est fixe avec un facteur d'oubli égal à 1. La plus mauvaise serait celle obtenue en base évolutive avec un facteur d'oubli égal à 0.7 si elle arrivait à son terme. Celle obtenue avec une base évolutive et un facteur d'oubli égal à 1 (en rouge sur la figure 6.7) est celle qui présente les valeurs les plus hautes ainsi qu'une augmentation constante au cours de l'année.



FIG. 6.7 – Erreurs RMS en température calculées par rapport aux données XBT, sur l'année 1993.

### 6.1.3 Conclusions

Dans cette partie, nous n'avons assimilé qu'une partie des données disponibles pour conserver un jeu de données indépendantes. Nous avons testé d'une part l'effet du facteur d'oubli et ensuite son interaction avec l'évolution de la base. Il apparaît que seule la base fixe, associée à un facteur d'oubli égal à 1, fournit des résultats réalistes. La diminution du facteur d'oubli ainsi que l'évolution de la base conduisent à des résultats irréalistes. De forts gradients très localisés appparaissent, en particulier dans la zone équatoriale à l'Est du bassin (il faut noter qu'à partir de 95°W, il n'y a plus de données TAO disponibles). L'évolution de la base associée à la diminution du facteur d'oubli ne permet pas de mener l'expérience jusqu'à son terme et devient rapidement totalement instable (au bout de 6 mois environ).

Cette expérience a permis de mettre en évidence que la diminution du facteur d'oubli, telle qu'elle a été mise en œuvre, n'entrainaît pas une amélioration des résultats. L'évolution de la base avec le modèle non-linéaire n'a pas non plus permis d'apporter une solution satisfaisante. Une expérience de sensibilité plus complète sur ces paramètres et leur interaction aurait peut être permis d'améliorer la solution. En particulier, le faible nombre de données contribue sans doute à l'instabilité du système, la variabilité exprimée par ces données étant certainement très différente de celle exprimée par le modèle. L'erreur modèle est dans ce cas trop importante pour pouvoir être corrigée efficacement par cette approche.

### 6.2 Assimilation conjointe de données XBT et TAO

Dans cette partie, nous testons l'ajout de données XBT aux expériences réalistes précédentes. Nous allons voir dans quelle mesure l'assimilation d'un nombre plus important de données permet d'améliorer les résultats, toujours en interaction avec le facteur d'oubli et l'évolution de la base.

### 6.2.1 Apport des données XBT

### 6.2.1.1 Rôle du facteur d'oubli

Pour les composantes qui sont représentées ci-dessous (température et composante zonale du courant), l'effet principal de l'assimilation de données XBT supplémentaires est de lisser les forts gradients qui apparaissaient dans les expériences précédentes. Nous pouvons constater cet effet sur le champ de température en surface sur la figure 6.8. Îl en est de même pour la salinité (champ non montré) qui dans ces expériences a un comportement très similaire à celui de la température.



FIG. 6.8 – Température, état analysé le 01/05/93. Coupe horizontale à 15 m.

Ce phénomène est encore plus clair pour l'état analysé le 01/12/93 (figure 6.9). En comparant avec la figure 6.2, on constate que la propagation des eaux froides dans la partie Est du bassin le long de l'équateur se fait de façon plus lisse et plus réaliste. La masse d'eau la plus froide qui s'est propagée jusqu'à 100°W le long de l'équateur est plus chaude (21°C contre 20°C pour l'assimilation des données TAO seules).



FIG. 6.9 – Température, état analysé le 01/12/93. Coupe horizontale à 15 m. (en haut) et coupe verticale à l'équateur (en bas).

La conséquence de la diminution du facteur d'oubli sur la solution est de même nature que pour l'expérience précédente. La coupe verticale de température montre qu'un facteur d'oubli égal à 0.7 (figure 6.9) entraı̂ne l'apparition de tourbillons chauds dans la zone où l'on observe, dans le cas où  $\rho = 1$ , la remontée d'eau froide en surface. Ceci a pour effet de maintenir l'eau la plus froide à une profondeur de 50 mètres. La percée de l'eau plus froide à la surface s'effectue quand même, mais décalée vers l'Est et avec des caractéristiques plus chaudes.

L'effet de l'assimilation de données supplémentaires est de contribuer à lisser globalement les structures présentes dans le bassin et à lisser les gradients y compris dans la couche des 200 premiers mètres. On peut constater par exemple que la descente d'eau plus chaude qui se situe à 140°E jusqu'à 150 mètres est plus lisse avec des gradients beaucoup plus faibles.

La structure spatiale et l'intensité des courants sont modifiées par l'ajout de données XBT. On peut constater au 01/05/93 (figure 6.10) que la structure positive dans la zone Ouest du bassin est moins intense sous l'équateur à 160°E par comparaison avec la figure 6.3. Il en est de même pour celle qui se poursuit en un courant le long de l'équateur.



FIG. 6.10 – Composante zonale de la vitesse, état analysé le 01/05/93 en haut et le 01/12/93 en bas. Coupe horizontale à 15 m.

Au cours du temps, cette tendance se poursuit. Le SEC a des structures de plus faible intensité. Le lissage du gradient en température dans la même zone contribue sans doute à cet affaiblissement observé. Par contre, on peut voir que la diminution du facteur d'oubli (figure 6.10) entraîne l'augmentation de l'intensité du courant zonal ainsi que des gradients vers 110°W.

### 6.2.1.2 Evolution de la base

Lorsque la base évolue au cours du temps, on constate toujours la génération de gradients irréalistes de température dans la partie Est du bassin à l'équateur (figure 6.11). Toutefois, l'ajout de données XBT dans l'assimilation fait diminuer fortement ces gradients sur la couche des 200 premiers mètres, comme on peut le constater en comparant à la figure 6.5. Il en est de même pour les courants. L'intensité des structures situées dans cette partie Est est atténuée.



FIG. 6.11 – Composante en température et composante zonale de la vitesse, état analysé le 01/12/93, base évolutive,  $\rho = 1$ 

### 6.2.2 Evolution de la solution et de sa partie orthogonale

Comme dans les expériences effectuées avec le 4D–VAR, on regarde ici comment évolue la partie orthogonale à l'état analysé. Le premier constat est qu'elle augmente au cours du cycle. Elle est systématiquement très faible en début de cycle, puisque proche de l'état analysé qui est une combinaison linéaire des modes qui engendrent l'espace de correction. Comme on pouvait s'y attendre, la partie orthogonale à l'état analysé est très différente si la base évolue ou pas. En effet, en base fixe, on constate, pour un facteur d'oubli égal à 1, que la norme de la projection sur l'espace orthogonal augmente au cours du temps (figure 6.12).



FIG. 6.12 – Norme de la projection orthogonale, base fixe,  $\rho = 1$ 

La diminution du facteur d'oubli permet de stabiliser cette partie orthogonale et de lui conserver un niveau constant au cours du temps : on constate que la norme évolue peu (figure 6.13).



FIG. 6.13 – Norme de la projection orthogonale, base fixe,  $\rho = 0.7$ 

Lorsque la base évolue, la norme de la projection au mois 2 est déjà inférieure à celle obtenue dans l'expérience précédente et elle diminue ensuite encore fortement au cours du temps. Au mois 11, on peut constater que la distance maximale est de 0.06 au lieu de 80 en base fixe (figure 6.12). L'évolution des modes avec le modèle non-linéaire permet donc d'engendrer un espace qui évolue en même temps et dans la même direction que la trajectoire de prévision. Ces modes contiennent la même erreur modèle que celle contenue dans la solution. La propagation ne réduit donc pas l'erreur modèle mais permet au sous-espace de correction de rester en adéquation avec les états prévus.



FIG. 6.14 – Norme de la projection orthogonale, base évolutive,  $\rho = 1$ 

### 6.2.3 Conclusions sur l'assimilation de données TAO et XBT

L'ajout des données XBT contribue au lissage et à l'atténuation des structures irréalistes les plus importantes. On a pu en effet observer un lissage des forts gradients de température en même temps qu'une atténuation des composantes les plus importantes des courants à l'équateur. Par contre, la forte diminution du facteur d'oubli ou l'évolution de la base amplifient la formation de ces structures irréalistes conduisant même l'expérience jusqu'à l'obtention d'états totalement instables. La configuration qui apparaît la plus réaliste est donc celle dans laquelle on assimile à la fois des données TAO et XBT et qui a été réalisée en base fixe avec un facteur d'oubli égal à 1.

Le calcul de la distance de la solution au sous-espace de correction montre qu'à la fois le facteur d'oubli et l'évolution de la base maintiennent l'évolution de l'incrément proche du sous-espace de correction. Ici encore, une valeur optimale du facteur d'oubli aurait contribué à l'amélioration de la solution ou tout au moins à la stabiliser sur une année.

### 6.3 Conclusions

Nous avons pu observer au cours de ces expériences que le filtre SEEK était tout à fait en mesure d'assimiler des données réelles. Les expériences menées ont permis de mettre en évidence le rôle spécifiques de paramètres comme le facteur d'oubli ou encore l'évolution de la base de correction dans le cas de l'assimilation de données réelles. Toutefois, l'évolution de la base de correction et le facteur d'oubli sont deux paramètres qu'il convient de manipuler avec précaution. Nous avons vu dans nos expériences que la diminution du facteur d'oubli ou l'évolution de la base avec le modèle non-linéaire pouvaient entraîner l'apparition de petites structures turbulentes et l'augmentation de gradients locaux. Ces modifications importantes peuvent même conduire à l'obtention d'un état instable physiquement.

L'assimilation de données supplémentaires a par contre contribué à stabiliser le système et l'état analysé.

L'état analysé obtenu à l'issue de la phase d'analyse lors d'un cycle d'assimilation avec le filtre SEEK ne satisfait pas nécessairement aux contraintes dynamiques imposées par le modèle. La phase de prévision peut alors rencontrer des difficultés lors du démarrage. Lorsqu'on rajoute des données, l'information disponible présente sans doute moins de discontinuité importante et donc une variabilité un peu lissée. Il est possible que cette représentation enrichie de nouvelles données soit plus en accord avec la dynamique du modèle. L'erreur d'analyse est donc plus faible.

L'erreur modèle présente en expériences réalistes est plus importante qu'en expériences jumelles. La diminution du facteur d'oubli n'a pas toujours été concluante dans ces expériences. Le résultat obtenu est différent de celui de L. Parent [44], puisqu'il a testé des valeurs pouvant aller jusqu'à 0.2. Cependant, certains paramètres de ses expériences différaient de notre configuration en particulier en ce qui concerne le calcul de la base, la fréquence d'assimilation ainsi que les données assimilées. De même, l'évolution des modes par le modèle non-linéaire ne se révèle pas être une solution satisfaisante pour faire diminuer l'erreur modèle. On voit que le sous-espace de correction évolue avec la dynamique du modèle mais ne réduit pas l'erreur commise. Ces résultats, qui ont consisté principalement à analyser le rôle des différents paramètres du filtre SEEK, pourront être améliorés par des expériences de sensibilité plus complètes. Finalement, l'expérience qui nous permet d'obtenir les meilleurs résultats est celle pour laquelle la base est fixe et le facteur d'oubli égal à 1.

La validation physique de cette expérience se fera conjointement avec celle des expériences en 4D-VAR au chapitre suivant.

### Chapitre 7

# Comparaison 4D–VAR réduit / SEEK sur l'océan Pacifique tropical

### Sommaire \*

7.1 Comparaison du 4D-VAR réduit et du filtre SEEK en expériences ju-		
melles		
7.1.1	Comparaison de la phase d'analyse	
7.1.2	Comparaison de la phase de prévision	
7.1.3	Position de l'état prédit par rapport au sous-espace de correction $139$	
7.1.4	Conclusions	
7.2 Comparaison des résultats obtenus en expériences réalistes 141		
7.2.1	Variabilité saisonnière	
7.2.2	Position de l'incrément prédit par rapport au sous-espace de correction $~$ . $.~145$	
7.3 Comparaison de chaque expérience avec des données issues du réseau		
TAO		
7.3.1	Comparaison avec les données de température : validation des algorithmes . 146	
7.3.2	Comparaison avec les données indépendantes de courants et salinité $\ldots$ 149	
7.4 Conclusions		
Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus avec le filtre SEEK et le 4D–VAR réduit au travers des expériences que nous avons réalisées précédemment dans une configuration identique. Pour effectuer cette comparaison, il faut tenir compte d'un certain nombre d'éléments propres à chaque méthode. Ainsi, nous pouvons noter que l'analyse produite par le 4D–VAR est un état qui fournit la trajectoire la plus proche des observations sur l'intervalle considéré. Le filtre SEEK ne possède pas cette caractéristique. De plus, l'analyse produite par le filtre SEEK ne respecte pas forcément les contraintes dynamiques imposées par le modèle comme par exemple l'équilibre hydrostatique. La prévision qui débute sur cette analyse peut avoir quelques difficultés lors du démarrage, surtout sur un cycle qui ne dure que 10 jours. Nous pouvons donc nous attendre à obtenir une prévision meilleure avec le 4D–VAR. Par contre, la procédure de démarrage de la prévision est identique dans les deux cas. Enfin, le filtre SEEK possède la capacité d'estimer l'erreur d'analyse et de prévision à chaque étape, faisant ainsi évoluer au cours des cycles le sous-espace de correction.

L'objectif de ce chapitre est double. Il s'agit de comparer les expériences réalisées précédemment, d'une part d'un point de vue méthodologique avec les expériences jumelles, et d'autre part les expériences effectuées avec des données réelles qui ont fourni un résultat correct. Cette validation, au premier ordre, consistera à analyser l'efficacité des algorithmes d'assimilation ainsi que la pertinence des solutions physiques obtenues.

Pour comparer les résultats obtenus par les deux méthodes d'assimilation en expériences jumelles, nous allons nous intéresser d'une part à la qualité de l'analyse obtenue au cours de l'année 1993, et d'autre part à la qualité de la solution obtenue lors de la prévision. Enfin, nous nous intéresserons à la position de la prévision par rapport au sous-espace de correction engendrés par les vecteurs de la base EOFS (§7.1).

Dans une deuxième partie, nous allons analyser les différences entre les solutions assimilant des données réelles sur des moyennes saisonnières (§7.2). Puis nous analyserons, pour chaque expérience, la cohérence de l'algorithme d'assimilation de données en comparant les champs de température avec les champs de données du réseau TAO au cours de l'année 1993. Nous disposons par ailleurs des données de salinité et de courants mesurés à certains points de l'équateur toujours sur le réseau TAO. Ces données, indépendantes par rapport au processus d'assimilation, vont nous permettre d'analyser comment les différents algorithmes corrigent ces variables non-assimilées de valider le réalisme physique des solutions obtenues (§7.3). Ces comparaisons simples vont nous permettre de vérifier succintement la validité des solutions obtenues.

Les résultats, dans tous les cas sont à examiner en n'oubliant pas le temps de calcul. Il faut souligner qu'un cycle d'un mois avec le 4D–VAR réduit ou mixte prend environ 2000 secondes sur la NEC SX5 de l'IDRIS alors que le filtre SEEK en base fixe consomme environ 200 secondes, soit 10 fois moins, pour effectuer le même cycle.

Nous avons souligné au premier chapitre que dans le cas linéaire, les deux approches fournissaient la même solution. Dans cette étude, réalisée sur l'océan Pacifique Tropical, la circulation est linéaire dans une grande partie mais il existe des zones où la circulation présente des caractéristiques nonlinéaires comme la zone de formation des Ondes Tropicales d'Instabilités (TIWs). Les différences qui apparaissent entre les résultats obtenus par chacune des méthodes sont situées principalement dans cette zone. De plus, la mise en œuvre des algorithmes, avec la choix des différents paramètres (en particulier pour le filtre SEEK) influe naturellement sur les résultats obtenus. En particulier, nous allons voir que la durée du cycle dans le cas du filtre SEEK apparaît donc comme un élément important.

# 7.1 Comparaison du 4D–VAR réduit et du filtre SEEK en expériences jumelles

On se place tout d'abord dans le cadre des expériences jumelles, c'est à dire que l'erreur modèle est nulle dans tous les cas. Le 4D–VAR réduit utilisé pour cette comparaison est celui qui utilise une base issue d'une trajectoire libre. Pour le filtre SEEK, les meilleurs résultats, en expériences jumelles, ont été obtenus avec une base évolutive et un facteur d'oubli égal à 1. Les résultats obtenus en base fixe étant peu différents, nous conservons la meilleure expérience. Nous allons donc comparer les résultats de ces deux expériences.

# 7.1.1 Comparaison de la phase d'analyse

La seule variable observée est donc la température aux points du réseau TAO. Pour cette composante en température, les deux méthodes identifient très bien la solution y compris dans les zones où il n'y a pas de données observées. On peut constater, sur la figure 7.1, que les masses d'eau présentes en surface ont des caractéristiques identiques, et ceci aussi bien au mois 5 qu'au mois 12. Les gradients ont la bonne amplitude et leur position géographique est bien représentée.



FIG. 7.1 – Température, référence et états analysés. Coupe horizontale à 15 m.

Ces bonnes performances sont également obtenues pour les variables non observées. Ainsi par exemple, pour la composante **u**, au mois 5, on a une très bonne identification de la solution, comme on peut le voir sur la figure 7.2. L'EUC, à 80 mètres de profondeur, a la bonne position et la bonne intensité, il en est de même pour le courant de surface dirigé vers l'Ouest (SEC).

Au mois 12, on obtient toujours une très bonne identification mais la solution fournie par le filtre SEEK présente quelques différences locales. Le courant dirigé vers l'Est a la bonne position et la bonne intensité, mais on peut remarquer que la structure du SEC, ainsi que le courant dirigé vers l'Ouest et situé à 15°N, n'ont pas la bonne structure. A 5°S, l'intensité est légèrement sur-estimée.



FIG. 7.2 – Composante zonale de la vitesse, référence et état analysé. Coupe verticale à 141°W

Il faut toutefois noter qu'au mois 12, l'upwelling encore présent au Sud-Est de l'équateur entraine la présence d'une circulation perturbée le long de l'équateur. La solution n'étant pas contrainte directement par le modèle, il n'est pas étonnant que dans cette zone l'analyse obtenue avec le filtre SEEK présente des différences sur la composante **u**.

#### 7.1.2 Comparaison de la phase de prévision

La prévision fournit la trajectoire du modèle entre deux phases d'analyse. Dans le cas du 4D-VAR réduit, elle a la même durée que la fenêtre d'assimilation, c'est à dire 30 jours environ. Dans

le cas du filtre SEEK, la taille de la fenêtre temporelle entre deux analyses est de 10 jours environ. Pour les deux expériences, nous avons donc des durées de prévision différentes entre deux analyses. Nous avons choisi de représenter les trajectoires de prévision sur une année complète en excluant systématiquement les états analysés de ces trajectoires. Les valeurs d'erreur RMS présentées dans cette partie ne sont donc calculées qu'à partir d'états prédits. Elles fournissent donc un bon outil d'évaluation de la prévision effectuée par chaque méthode, en comparant à la trajectoire de référence.

Les niveaux d'erreur obtenus dans les deux expériences sont très faibles, et ce sur toutes les variables. On peut constater sur les figures 7.3 et 7.4 que les deux méthodes fournissent des solutions de qualité très proche sur les six premiers mois. Le 4D-VAR réduit conserve le même niveau de qualité pendant les 6 derniers mois, tandis que la solution fournie par le filtre SEEK devient un peu moins précise. Ce constat est aussi valable pour les autres variables que celle assimilée et en surface comme en profondeur. Ceci est illustré sur les figures 7.3 et 7.4.





FIG. 7.4 – 4D–VAR réduit / SEEK : erreur RMS à 750 mètres, sur l'année 1993.

#### 7.1.3 Position de l'état prédit par rapport au sous-espace de correction

Si l'évolution temporelle de l'incrément reste proche du sous-espace de correction, c'est que celui-ci identifie bien la variabilité exprimée par le modèle. Le choix de la base de vecteurs EOFS est donc, en ce sens, adéquat.

Dans le cas du 4D-VAR réduit, la base n'évolue pas au cours de l'année d'assimilation. Elle n'est donc pas liée directement, lors un cycle, à la variabilité du modèle durant ce cycle. Par contre, dans le cas du filtre SEEK, cette base évolue avec l'analyse. Elle tient alors compte de la variabilité contenue dans les observations. Comme nous nous situons dans le cas des expériences jumelles, cette variabilité est exactement celle du modèle.

Notons enfin, avant de commenter la figure 7.5 que le premier cycle est dans tous les cas un cycle particulier, car il s'agit de la seule analyse effectuée à l'issue d'une trajectoire libre.

On peut constater sur la figure 7.5 que l'évolution de l'incrément dans le cas du filtre SEEK est beaucoup plus proche du sous-espace de correction que le 4D–VAR réduit.



FIG. 7.5 – Evolution de distance de l'incrément au sous-espace de correction au cours du temps.

Nous avons déjà souligné le fait que ce diagnostic ne renseigne pas sur la qualité de la solution obtenue mais seulement sur le positionnement des directions de correction par rapport aux directions de variabilité principales du modèle. En effet, si le modèle contient beaucoup d'erreurs, les modes de correction peuvent "suivre" cette erreur sans y gagner en pertinence.

En expériences jumelles, le modèle représente la variabilité réelle (celle présente dans les observations); le fait que le filtre SEEK permette de faire évoluer le sous-espace de correction dans la même direction que la variabilité du modèle est donc un aspect positif. Toutefois, nous avons vu au chapitre précédent que ce n'est pas toujours le cas, si l'erreur modèle devient trop importante.

#### 7.1.4 Conclusions

Ces comparaisons nous ont permis de constater qu'en expériences jumelles, les solutions analysées fournies par les deux méthodes sont identiques en température. Pour l'identification des autres variables, la solution fournie par le 4D–VAR réduit présente de meilleures caractéristiques. Les erreurs faites lors de la phase de prévision sont d'une manière générale très faibles pour les deux expériences, pour toutes les variables, en surface comme en profondeur. Elles sont toutefois plus faibles avec le 4D–VAR réduit qu'avec le filtre SEEK pour les six derniers mois de la simulation. La détermination d'une configuration optimale du filtre SEEK aurait cependant peut-être pu permettre d'atténuer cette augmentation. La distance de l'incrément au sous-espace de correction évolue avec le modèle avec le filtre SEEK. Cette possibilité n'existe pas avec le 4D–VAR réduit.

Le 4D-VAR réduit fournit donc en expériences jumelles, sur une année d'assimilation, une solution qui semble plus satisfaisante à la fois du point de vue de l'analyse et du point de vue de la

prévision. Ce gain dans la précision de la solution se fait toutefois au détriment de la performance puisque le coût de calcul est environ 10 fois supérieur au SEEK en base fixe qui donne des résultats très proches de ceux obtenus avec le SEEK évolutif.

# 7.2 Comparaison des résultats obtenus en expériences réalistes

Nous comparons ici les résultats obtenus en assimilant des données réalistes. Cette comparaison sera pour l'instant purement qualitative dans la mesure où nous ne disposons plus de la solution exacte pour évaluer l'analyse.

Les expériences réalistes avec le filtre SEEK présentées dans le chapitre précédent ont permis de déterminer l'expérience qui fournissait les meilleurs résultats : nous conservons ici l'expérience en base fixe et un facteur d'oubli égal à 1. Pour le 4D–VAR réduit, nous conservons le 4D–VAR mixte pour effectuer nos comparaisons.

# 7.2.1 Variabilité saisonnière

Les 6 derniers mois sont ceux où la dynamique évolue le plus. Nous ne comparons donc les différentes méthodes que sur ces 6 derniers mois, à partir de moyennes saisonnières réalisées sur 2 périodes de 3 mois de prévision.

# Composante en température

Sur ces deux périodes, pour la composante en température à l'équateur, on distingue deux zones principales : l'Est et l'Ouest (figure 7.6). On peut observer sur la figure 7.6, la présence de la Warm Pool (environ 29°C et plus) en surface. La thermocline est située environ à 120 m de profondeur avec un pincement caractéristique vers 180°W. Pour la zone Est, on observe bien une remontée en surface d'eau plus froide (environ 22°C). La thermocline est de nouveau très marquée vers 90°W, du fait de la présence d'une masse d'eau plus chaude à l'extrême Est de la zone. Cette répartition zonale des masses d'eau génère donc un gradient de température horizontal important en surface.

Durant la première période, de juillet à septembre, pour la simulation libre, la remontée d'eau froide est relativement faible. La température de surface est donc plus élevée et par conséquent le gradient horizontal plus faible. De plus, la thermocline est trop diffuse globalement sur toute la zone.

Le premier effet visible de l'assimilation de données est de modifier la thermocline. En effet, les simulations réalisées en 4D–VAR et 4D–VAR mixte présente une Warm Pool plus chaude (31°C) accompagnée d'un pincement de la thermocline qui n'apparaît pas sur les autres simulations, à 175°E. Ceci n'apparaît que dans une moindre mesure avec le filtre SEEK, avec cependant une plongée d'eau froide en début de période qu'on ne retrouve pas avec les différents 4D–VAR, mais seulement dans la simulation libre.

Pour la deuxième période, d'Octobre à Décembre, les caractéristiques globales sont les mêmes. On retrouve le fait que l'assimilation de données a pour effet principal de pincer la thermocline. De plus, la reproduction de la structure de surface est améliorée. On peut observer en effet que dans la simulation libre, l'eau froide remonte en surface alors que ce phénomène était absent dans la première période de 3 mois. Par contre, dans le cas des expériences avec assimilation, on observe plutôt une diminution de l'étendue d'eau froide en surface, ce qui correspond davantage à la réalité.

#### Composante zonale de la vitesse

Pour les deux périodes, les caractéristiques du courant à grande échelle sont assez semblables. On peut observer, sur la figure 7.7, deux composantes inversées du courant de surface, ainsi que la présence d'un fort courant vers l'Est en subsurface (EUC). Le cœur de ce courant est situé à environ 80-100 m. de profondeur. Il varie en intensité et en extension géographique suivant l'expérience considérée.

Le premier effet de l'assimilation de données est une légère intensification et une diminution de l'étendue géographique de la composante du courant vers l'Est en surface au dessus de l'équateur. La simulation libre a tendance à étendre géographiquement cette composante. Elle est par contre plus intense et plus étroite dans les expériences avec assimilation. Les effets sur la structure du SEC sont moins identifiables. La structure est plus étroite avec une intensité maximale légèrement plus importante dans le cas du 4D–VAR mixte et du filtre SEEK.

Dans la deuxième période (Octobre-Décembre), on peut observer une intensification géographique de ces courants. Là encore, l'effet de l'assimilation diffère suivant l'algorithme utilisé : le filtre SEEK tend à diminuer l'intensité des courants de surface au contraire des expériences en 4D–VAR. En ce qui concerne le SEC, son extension géographique a tendance à augmenter vers les couches plus profondes sauf dans l'expérience en 4D–VAR complet.



FIG. 7.6 – Température, moyenne sur 3 mois de prévision. Coupe verticale à l'équateur.



FIG. 7.7 – Composante zonale de la vitesse, moyenne sur 3 mois de prévision. Coupe verticale à 141°W.

#### Conclusion

L'assimilation de données a un effet clair sur la structure en température pour toutes les méthodes d'assimilation à savoir le pincement de la thermocline le long de l'équateur. En ce qui concerne les autres variables, en particulier sur la structure des courants, les effets sont différents suivant la méthode utilisée et sont de nature plutôt locale. Nous avons vu en effet que l'assimilation n'affecte pas les structures de grandes échelles en moyenne saisonnière.

# 7.2.2 Position de l'incrément prédit par rapport au sous-espace de correction

En ce qui concerne l'évolution de l'incrément et sa position par rapport au sous-espace de correction, on constate sur le figure 7.8 que le 4D-VAR réduit a le même comportement qu'en expériences jumelles. Le premier mois est un cas particulier puis l'incrément se rapproche mois après mois du sous-espace de correction. En début de mois, la distance est faible, puis réaugmente progressivement. Le filtre SEEK est utilisé cette fois en base fixe, la distance à l'espace de correction augmente donc en cours de cycle, sur toute l'année (figure 7.9).



FIG. 7.8 - 4D-VAR réduit : évolution de la distance de l'incrément au cours du temps au sous-espace de correction. 6 premiers mois de 1993.



FIG. 7.9 – Filtre SEEK : évolution de la distance de l'incrément au cours du temps au sous-espace de correction.

# 7.3 Comparaison de chaque expérience avec des données issues du réseau TAO

Nous comparons dans cette partie les résultats obtenus pour chaque expérience avec les données TAO, en certains points du réseau. Cette comparaison va permettre de vérifier *a posteriori* de façon simple la réalité physique des résultats obtenus dans chaque expérience. Une validation plus physique avec des diagnostics plus évolués sera nécessaire pour parvenir à des conclusions plus poussées.

La validation des expériences réalisées en assimilant des données réelles comporte deux aspects complémentaires. Il s'agit d'une part d'analyser la cohérence du système en comparant la solution obtenue avec le champ assimilé. D'autre part, il faut vérifier que l'état physique obtenu est cohérent avec ce qui peut être observé indépendamment de la variable assimilée.

Nous avons choisi quelques points du domaine pour effectuer nos comparaisons, principalement le long de l'équateur, dans la zone où l'on dispose le plus d'observations. Nous distinguons ici deux zones avec un premier point situé à 165°E à l'Ouest du bassin et un point situé dans la zone qui subit le plus de modifications le long de l'équateur dans l'Est du bassin, à 110°W. Notons de plus que les séries temporelles commencent le 1<sup>er</sup> Février 1993.

Nous analysons dans un premier temps la situation décrite par les données, puis nous comparons les résultats fournis par les différentes expériences, en essayant d'identifier quel est l'apport de l'assimilation de données dans les résultats obtenus.

Les résultats obtenus avec le 4D–VAR cyclé sont, de façon générale, irréalistes, aussi bien pour les représentations des courants que pour la structure en salinité. Nous ne montrons pas ici ces résultats qui n'ont que peu d'intérêt. Nous avons choisi de montrer en revanche les résultats obtenus en 4D–VAR réduit avec la base issue d'une expérience d'assimilation. Ces calculs n'ont été mené que sur 6 mois. Cependant, la comparaison du 4D–VAR mixte avec une base issue d'une trajectoire non assimilée et le 4D–VAR réduit avec une base issue d'une expérience d'assimilation nous a semblé intéressante d'un point de vue méthodologique. C'est pourquoi nous la présentons ici, sur la période Février-Juin.

# 7.3.1 Comparaison avec les données de température : validation des algorithmes

#### Température à 165°E

Dans cette zone, la thermocline est située à environ 100 m. de profondeur. Très marquée en début de période (5 premiers mois), on observe (figure 7.10) un relâchement qui intervient à partir du mois de juin avec un écartement des isothermes qui traduit l'augmentation la température de la couche vers 200 m. La température dans la couche des 100 premiers mètres est assez homogène et celle des couches plus profondes ne subissent pas de variations importantes au cours de l'année.

Les structures globales de température des solutions sont correctes. On retrouve l'effet principal de l'assimilation de données qui est le pincement de la thermocline.

Dans le cas de la **simulation libre**, on peut observer sur la figure 7.10 que cette thermocline est beaucoup trop diffuse, ce qui représente le principal défaut de cette simulation.

Les deux expériences réalisées en 4D-VAR complet et mixte présentent au contraire une évolution correcte avec un bon positionnement, ainsi qu'une couche de surface qui a la bonne température.

Les 5 premiers mois du 4D-VAR réduit en base assimilée montrent un gradient initial un peu trop faible, mais qui est bien renforcé par la suite.

Enfin, dans le cas du **filtre SEEK**, le positionnement initial de la thermocline, qui provient d'un état moyen, n'est pas assez profond (50 m. environ), et de plus elle est un peu trop diffuse. Malgré une intensification qui intervient ensuite, elle reste légèrement trop faible pour la fin de la période.



FIG. 7.10 – Température, au point 165°E, 0°N, au cours du temps sur l'année 1993.

#### Température à 110°W

Au point 110°W le long de l'équateur, le comportement est un peu différent dans la mesure où l'on se situe dans la zone où la masse d'eau plus froide qui vient du Sud-Est est propagée le long de l'équateur. Comme on peut le voir sur la figure 7.11, la thermocline est ici située vers 80 m de profondeur. On peut observer un refroidissement de l'eau en surface vers le mois d'Août, d'une durée de 2 mois environ, suivi d'un réchauffement de la couche de surface. Les couches situées en dessous 200 m de profondeur sont plus stables et ne subissent pas de grosses modifications.

On observe encore une fois une thermocline beaucoup trop diffuse dans la **simulation libre**. Le refroidissement des eaux de surface est insuffisant.

Dans les simulations réalisées avec le 4D–VAR complet et mixte, le refroidissement en surface est très ponctuel, la température est alors trop chaude. La température de surface au mois d'avril présente un maximum un peu sur-estimé.

Le 4D-VAR réduit en base assimilée présente une bonne température de surface : le maximum a la bonne valeur et la bonne extension géographique. Le gradient, en début de période, est toutefois encore trop faible.

Dans le cas du **filtre SEEK**, l'eau présente en surface en début de période est trop chaude (état moyen), et la thermocline est trop diffuse. Elle est renforcée le mois suivant, mais reste de façon générale trop diffuse sur la période considérée. De même le refroidissement de surface est un peu trop faible.



FIG. 7.11 – Température, au point 110°W, 0°N, au cours du temps sur l'année 1993.

L'effet principal de l'assimilation de données sur la température est celui que l'on a pu identifier en regardant la variabilité saisonnière : une meilleure représentation de la thermocline du point de vue global et parfois d'un point de vue local. L'état choisi pour l'initialisation a une certaine influence étant donné la faible durée des expériences (une année).

#### 7.3.2 Comparaison avec les données indépendantes de courants et salinité

#### Composante zonale du courant à 165°E

L'étude de l'évolution du courant en un point est délicate. Si le modèle représente une structure présente dans les observations mais décalée d'un point de grille, comme un tourbillon par exemple, celui-ci n'apparaîtra pas sur la comparaison alors qu'elle sera reproduite quand même par le modèle. Cela peut être le cas particulièrement au point situé à 110°W, où la circulation des courants le long

de l'équateur est plus dynamique et où les systèmes d'assimilation ont des difficultés à les reproduire.

On peut observer sur la figure 7.12 qu'il existe une composante constante qui est le courant dirigé vers l'Est vers 180 m. de profondeur (EUC). Ce courant s'intensifie en Juillet et Août et par la suite tend à s'approfondir légèrement. En surface, on peut observer l'alternance d'une composante dirigée vers l'Est et d'une composante dirigée vers l'Ouest. Les mois de Juillet et d'Août sont significatifs dans la mesure où on peut observer une intensification de la composante dirigée vers l'Est.

De façon générale, les courants présents dans la **simulation libre** ont une intensité trop faible. On observe l'intensification de l'EUC à la bonne période mais le maximum reste insuffisant. Le courant en surface devient lui aussi positif mais reste trop faible. Enfin, on peut observer du mois de Septembre au mois de Novembre, un affaiblissement très important de l'EUC. Il réapparaît en Décembre mais trop faible.

La simulation en **4D–VAR complet** ne reproduit pas la composante positive aux mois de Juillet et Août en surface. L'intensification de l'EUC à 200 m. se produit trop tôt, et est légèrement sur-estimée. De plus, le courant de surface au début de la période est clairement inversé par rapport aux données.

Le 4D-VAR mixte permet de corriger le courant de surface en Juillet-Août : son intensité ainsi que sa direction sont alors plus conformes aux données observées. Il conserve les défauts du 4D-VAR complet en ce qui concerne l'EUC en Juin (trop intense, trop tôt) et cette composante négative en surface en début de période.

Le 4**D**–**VAR réduit en base assimilée** représente bien la composante du courant de surface dirigé vers l'Ouest mais son intensité est un peu forte. Début Février on constate que l'EUC est inexistant. Il se renforce fin Avril / début Mai mais l'intensité reste trop faible. Par contre, il ne représente pas le pic d'intensité trop important de l'EUC en Juin, principal défaut des expériences en 4D–VAR.

Le filtre SEEK présente un courant SEC correct avec une intensification qui a les bonnes caractéristiques, suivie d'un approfondissement. Par contre, on peut observer la présence d'un courant dirigé vers l'Ouest, très intense, vers le mois de Mars. Ce courant n'est pas réaliste et a de plus une intensité beaucoup trop importante sur une durée non négligeable.



FIG. 7.12 – Composante zonale du courant horizontal, au point 165°E, 0°N, au cours du temps sur l'année 1993. Attention au décalage entre les échelles verticales.

Malgré certains défauts, le 4D-VAR mixte fournit la solution la plus réaliste pour le courant dans cette zone.

#### Composante zonale du courant à 110°W

On observe sur la figure 7.13 l'EUC situé à une profondeur de 100 m. environ, avec une extension verticale importante (jusqu'à une centaine de mètres). Ce courant est assez intense (jusqu'à 1.2 m/s). On observe de plus une intensification de ce courant vers le mois de Septembre. Son extension verticale peut aller jusqu'en surface ce qui produit une alternance de courants positifs et négatifs dans cette zone au cours du temps.

Dans la **trajectoire libre**, le courant a une intensité trop faible. Les gradients sont, de même, trop faibles. L'intensification observée du mois de Septembre est absente et le courant de surface,

dans la deuxième partie de l'année, est presque exclusivement dirigé vers l'Ouest (l'extension verticale du SEC est trop faible).

L'assimilation de données a principalement pour effet de renforcer l'EUC, en particulier en Septembre, ainsi que son extension verticale, ce qui a pour effet d'améliorer la représentation des courants de surface.

Pour le **4D–VAR complet**, on peut observer que l'extension verticale du SEC est améliorée par rapport à la simulation libre. Par contre, l'intensification du mois de Septembre est légèrement trop importante. De plus, ce courant devient trop faible au mois de Décembre. Au mois de Juillet, le courant dirigé vers l'Ouest est trop intense en surface.

Cet effet est diminué par le **4D–VAR mixte**, qui malgré le manque d'extension verticale, jusqu'à la surface, de l'EUC présente de bonnes caractéristiques tout au long de l'année. L'intensification de Septembre est bien représentée. On observe cependant une intensification du courant un peu trop élevée fin Octobre. Au mois de Juillet, le courant est moins intense en surface, ce qui est en accord avec les observations.

Le 4**D**–**VAR réduit assimilé** représente bien l'EUC malgré une intensité trop importante vers 50 m. En Mai-Juin, le courant dirigé vers l'Ouest en surface est assez réaliste malgré un étalement spatio-temporel trop important. Par contre, ce courant est présent sur toute la colonne d'eau ce qui n'est pas réaliste.

Le filtre SEEK présente une structure incorrecte en début de période (les 3 premiers mois), l'EUC a une intensité et une extension verticale trop faibles. De plus, le courant dirigé vers l'Ouest est présent toute l'année, avec une intensité trop importante. La mauvaise représentation des courants les 3 premiers mois ne provient pas de l'état moyen : la trajectoire libre ne présente pas cette caractéristique. Les trois premiers mois provoquent une dérive, que l'assimilation de données tend à atténuer au cours du temps mais sans parvenir à restaurer un état correct. Nous n'avons pas d'explication à cette représentation des courants en ce point.



FIG. 7.13 – Composante zonale du courant horizontal, au point 110°W, 0°N, au cours du temps sur l'année 1993.

Pour la représentation des courants en ce point, les résultats sont plus partagés. En effet, les structures géographiques sont mieux représentées par le 4D–VAR mixte, alors que les intensité sur la colonne d'eau sont mieux reproduites par le 4D–VAR complet notamment au mois de Septembre.

#### Composante en salinité à 165°E

On observe un fort gradient en salinité (barrière de sel), à 90/100 m. de profondeur, avec une eau peu salée en surface (34-34.5 Psu) et une eau plus salée en profondeur (34.6-35.1 Psu). Le gradient a une position globalement stable au cours de l'année avec une légère remontée en fin de période.

Le **modèle libre**, sous 100 m. de profondeur, présente des caractéristiques correctes, mais la salinité dans la couche de surface est assez mal représentée. Le gradient de salinité est trop faible et n'est pas à la bonne profondeur au cours de l'année. De plus, on observe des remontée d'eau salée en surface qui ne sont pas du tout réalistes.

De façon générale, nous allons voir que l'assimilation de données de température contribue à améliorer très sensiblement l'évolution de la salinité dans les différentes expériences.

L'expérience en **4D–VAR complet** montre un gradient initial correct. Il a ensuite tendance à faiblir, ce que l'on n'observe pas dans les données. L'augmentation de la salinité de surface au mois de Juillet n'est pas réaliste, de même qu'une augmentation de la salinité en Septembre.

Le 4D-VAR mixte est très correct les 6 premiers mois. Ensuite on observe une diminution du gradient en salinité, comme dans le 4D-VAR complet, ainsi que l'apparition de structure salée en surface en Octobre.

La salinité du 4D-Var réduit assimilé est correcte en surface. Le gradient, par contre, a une profondeur trop variable au cours du temps.

Le filtre SEEK présente une alternance de structures ayant des salinités différentes en surface qui ne sont pas très réalistes, la salinité ayant tendance dans les données à rester faible tout au long de l'année. Le gradient en salinité a une profondeur qui oscille au cours du temps et qui, comme pour les expériences en 4D–VAR, a tendance à diminuer au cours des 6 derniers mois.



FIG. 7.14 – Salinité, au point 165°E, 0°N, au cours du temps sur l'année 1993.

Pour la représentation de la salinité, en ce point, c'est le 4D–VAR complet qui fournit la structure la plus réaliste, avec une première période très proche de la réalité observée.

# 7.4 Conclusions

La comparaison systématique des résultats obtenus en 4D–VAR réduit et SEEK nous a permis d'une part de mettre en évidence les particularités propres à chaque méthode en expériences jumelles et d'autre part de confronter les résultats en assimilation de données réelles.

En expériences jumelles, nous avons pu constater que **l'analyse** fournie par les deux méthodes était équivalente, avec des solutions globales très proches de la référence. De petites différences locales sont cependant apparues dans la solution obtenue avec le filtre SEEK sur les variables non assimilées à la fin de la période considérée. La **prévision** a permis de mettre en évidence que le niveau d'erreur RMS obtenu avec le 4D–VAR réduit était le plus faible sur toute la période et pour toutes les variables. D'une part, le 4D–VAR fournit un état qui minimise l'écart aux observations sur le cycle entier, d'autre part, la prévision se fait sur une période plus longue (1 mois) et dans ce cas les erreurs dues au redémarrage du modèle ont une influence moindre que pour la période de prévision du filtre SEEK qui est de 10 jours.

En assimilant des données réelles, les solutions obtenues sont assez différentes, surtout en ce qui concerne les variables non assimilées. De façon générale, toutes les expériences comparées avec des données indépendantes reproduisent plus ou moins correctement les principales structures caractéristiques de l'état de l'océan. L'initialisation de la séquence d'assimilation dans le filtre SEEK, par un état moyen, semble jouer un rôle très important en lissant fortement les gradients des différentes variables. Un calibrage plus fin du facteur d'oubli pourrait atténuer cet effet. A l'inverse, les solutions obtenues avec les différents 4D–VAR comportent des gradients locaux plus importants.

La salinité est globalement mal représentée dans la simulation libre. L'assimilation de données de température permet d'améliorer cela, surtout en 4D–VAR. L'assimilation conjointe de température et de salinité permettrait sans doute d'améliorer cet aspect. Le défaut majeur de la matrice **B**, dans le cas du 4D–VAR complet, est d'être monovariée. Contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre, le préconditionnement par le 4D–VAR réduit, qui utilise une matrice multivariée, ne pallie pourtant pas vraiment ce défaut en ce qui concerne les résultats en salinité.

Toutefois, certains défauts des solutions obtenus par le 4D–VAR complet sont corrigés par le 4D–VAR mixte, comme par exemple l'intensité du courant de surface dirigé vers l'Ouest au point 110°W, ou encore celle du courant de surface dirigé vers l'Est en Juillet, au point 165°E.

Le 4D–VAR réduit en base assimilée produit une prévision réaliste sur l'intervalle de temps étudié, malgré certains gradients trop faibles. Il rejoint un peu sur ce point la solution obtenue avec le filtre SEEK.

Le filtre SEEK, nous l'avons dit, tend à produire des gradients un peu trop faibles. L'état moyen utilisé pour l'initialisation joue probablement un rôle important à cet égard.

Il est intéressant de remarquer que l'utilisation de bases de réduction, modifiées d'une façon ou d'une autre par les observations (SEEK et 4D–VAR réduit avec une base assimilée), ont tendance à induire un affaiblissement des gradients dans la prévision.

Les diagnostics réalisés dans ce chapitre sont des diagnostics préliminaires qu'il faudra étendre pour réaliser une validation physique plus précise des résultats obtenus dans les différentes expériences.

# Chapitre 8

# Hybridation des systèmes 4D–VAR réduit et SEEK

#### Sommaire \*

8.1	1 Equivalence et hybridation des méthodes séquentielles et variationnelles158			
8	8.1.1	Equivalence formelle		
8	8.1.2	Hybridation du 3D-VAR et du filtre de Kalman d'ensemble		
8.2 Hybridation du 4D-Var incrémental et du filtre SEEK				
8	8.2.1	Le 4D–VAR incrémental		
8	8.2.2	Filtre SEEK		
8	8.2.3	Algorithme d'hybridation		
8	8.2.4	Conclusions		
8.3 Application au cas d'une équation d'advection-diffusion				
8	8.3.1	Cas d'un modèle linéaire		
8	8.3.2	Cas d'un modèle non-linéaire		
8	8.3.3	Conclusions		
8.4 Application au cas du modèle TDH du Pacifique Tropical 163				
8	8.4.1	Algorithme d'hybridation		
8	8.4.2	Implémentation en expériences jumelles		
8	8.4.3	Implémentation en données réelles		
8	8.4.4	Conclusions		

Jusqu'à présent, nous avons testé indépendamment sur la même configuration le filtre SEEK et le 4D–VAR réduit. Nous avons vu quels étaient les "comportements" de chacune des deux méthodes en présence ou non d'erreur modèle. L'évolution de la base, au cours des phases d'analyse, dans le cas du filtre SEEK permet de prendre en compte au moins partiellement cette erreur dans le cas de l'assimilation de données réelles, tandis que le 4D–VAR réduit fournit une analyse et une prévision de meilleure qualité lorsque cette erreur est nulle ou très faible.

Nous abordons ici la dernière partie de notre travail qui va consister à tenter de tirer profit des avantages de chacune dans une hybridation des deux méthodes. A partir de l'équivalence formelle des deux solutions obtenues dans un cadre quasi-théorique, de nombreux travaux récents font états de réflexion sur le sujet, avec des expériences réalisées principalement avec un 3D-VAR. Ces travaux seront détaillés dans la première partie (§8.1.2).

Dans un deuxième paragraphe, nous détaillons les travaux théoriques de Fabrice Veersé qui propose une solution pour hybrider le filtre SEEK et le 4D–VAR (§8.2) et une première application réalisée par Ehouarn Simon sur un modèle monodimensionnel (§8.3).

Nous présentons enfin des expériences préliminaires menées avec ce modèle hybride 4D–VAR réduit-SEEK dans la configuration réaliste utilisée jusqu'à présent, tout d'abord en expériences jumelles, puis une toute première expérience en données réelles (§8.4).

# 8.1 Equivalence et hybridation des méthodes séquentielles et variationnelles

#### 8.1.1 Equivalence formelle

Les études portant sur l'hybridation des méthodes variationnelles et séquentielles ont pour origine l'équivalence théorique entre les deux approches dans le cas où les opérateurs sont linéaires. Dans le cas où le modèle et l'opérateur d'observations sont linéaires, ce qui n'est évidemment pas notre cas, de nombreux auteurs (Jazwinski [31] ou encore Li et Navon [36]) ont montré que la solution obtenue avec le filtre de Kalman et un algorithme variationnel de type 4D–VAR fournissait des solutions équivalente si le modèle est parfait. L'état qui est le meilleur estimé dans les deux cas, a exactement les mêmes propriétés (en particulier obéit à la même loi statistique gaussienne) et la solution à la fin de la période d'assimilation est donc identique pour les deux méthodes. Cette propriété peut être étendue au cas où le modèle présente une erreur (Li et Navon, [36]).

En ce qui nous conerne, le modèle et l'opérateur d'observations ne sont plus linéaires. L'équivalence n'est donc plus évidente. Cependant, même si d'un point de vue statistique, les deux solutions obtenues ne sont pas équivalentes au sens du meilleur estimé, de nombreuses études ont mené une réflexion et dans certains cas une mise en œuvre de méthodes hybrides, combinant le traitement des statistiques d'erreurs venant de l'assimilation séquentielle et une analyse provenant des méthodes variationnelles. L'idée sous-jacente est de combiner les avantages des deux méthodes en considérant que l'analyse des méthodes variationnelles peut être améliorée en utilisant une matrice de covariance d'erreur d'ébauche issue des méthodes séquentielles et donc évoluant au cours du temps. Nous allons voir dans les paragraphes suivants le détail des différentes mises en œuvre.

#### 8.1.2 Hybridation du 3D-VAR et du filtre de Kalman d'ensemble

Dans cette partie nous présentons les travaux effectués par Hamill *et al.* [27], qui concernent l'hybridation d'un algorithme variationnel 3D-VAR avec un Filtre de Kalman d'Ensemble (EnKF). L'hybridation, dans ce cas, consiste à combiner les informations sur les statistiques d'erreur de l'ébauche fournies par chacune des deux méthodes. Elles sont estimées à partir d'une *combinaison linéaire* de celles utilisées dans le 3D-VAR (indépendante du temps) et des covariances issues des trajectoires générées dans le filtre d'ensemble. Dans l'expérience menée, le modèle est supposé parfait. La configuration testée est constituée d'un modèle quasi-géostrophique dans une configuration rectangulaire et périodique dans une direction.

#### Modélisation de la matrice B en 3D-VAR

Le 3D-VAR est celui décrit à la section 1.3.2.1. L'opérateur d'observation est supposé ici linéaire. L'intégration du modèle se fait dans l'espace spectral. On note  $\mathbf{B}_0$  la matrice de covariance d'erreur d'ébauche.

# Détermination de la matrice $\mathbf{P}^b$ dans le filtre de Kalman d'Ensemble

Si on note  $\mathbf{P}^{b}$ , la matrice de covariance d'erreur à l'ébauche issue du Filtre de Kalman d'Ensemble, la technique utilisée est de sortir spécifiquement une trajectoire pour mettre à jour les autres :

$$\boldsymbol{P}_{i}^{b} = (n-2)^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} (\boldsymbol{x}_{j}^{b} - \overline{\boldsymbol{x}}_{i}^{b}) (\boldsymbol{x}_{j}^{b} - \overline{\boldsymbol{x}}_{i}^{b})^{T}$$

où  $\overline{x}_i^b$  est la moyenne calculée sans la composante  $\mathbf{x}_i$ . Cette technique est basée sur la séparation de l'échantillon en deux sous-ensembles.

#### Matrice B hybride

L'hybridation des deux matrices de covariance d'erreur d'ébauche se fait par combinaison linéaire des deux estimations précédentes :

$$\boldsymbol{B} = (1 - \alpha)\boldsymbol{P}^b + \alpha \boldsymbol{B_0}$$

où  $\alpha$  est un coefficient qu'il faut adapter à chaque expérience. Les conclusions obtenues sur la valeur du paramètre  $\alpha$  dépendent presque exclusivement de la taille de l'ensemble utilisé pour évaluer  $\mathbf{P}^{b}$ .

#### Mise en œuvre algorithmique

La mise en œuvre du Filtre de Kalman d'Ensemble fournit une analyse de contrôle, et un jeu de nanalyses perturbées. Ensuite, n prévisions à 12H fournissent n ébauches. Le filtre prend en compte un jeu d'observations bruitées sur un cycle de 12H. Les n analyses correspondant aux n ébauches sont ensuite réalisées avec le schéma hybridé.

Ce schéma d'hybridation a permis de réduire l'erreur d'analyse et donc améliore notablement la durée de la prévision. Il n'a cependant pas été testé dans des conditions réalistes.

# 8.2 Hybridation du 4D-Var incrémental et du filtre SEEK

Veersé [58] a réalisé une étude théorique concernant l'hybridation d'un 4D–VAR incrémental avec un filtre de Kalman réduit (SEEK).

La différence importante par rapport aux travaux précédents est que les observations ne sont pas prises en compte au même moment lors du cycle d'assimilation. En effet, le filtre SEEK assimile les données présentes en ne tenant compte que des données passées dans l'état obtenu. A contrario, le 4D-VAR prend en compte pour le calcul de l'incrément d'analyse, à un temps  $t_0$ , les données futures par rapport à  $t_0$ . L'hybridation des deux méthodes nécessite donc un "recalage" en temps.

Dans le 4D-VAR, les matrices n'évoluent pas en temps avec l'analyse, contrairement au filtre SEEK pour lequel elles sont propagées par le modèle non-linéaire (ou éventuellement le modèle linéaire tangent). Si on considère directement qu'on travaille avec le 4D-VAR réduit, les matrices de covariances sont déjà supposées de rang réduit. Si l'on choisit de plus d'utiliser une même base de vecteurs pour engendrer le sous-espace de correction, la décomposition initiale est alors commune et facilite la mise en œuvre de la méthode.

#### 8.2.1 Le 4D–VAR incrémental

On se place dans le cadre général du 4D-VAR incrémental décrit à la section 1.3.2.3. On considère le cycle k d'une durée T qui débute à  $t = t_0$ , avec l'hypothèse supplémentaire qu'il n'y a pas d'observation au temps initial  $t_0$  (on suppose qu'elle a été assimilée à la fin de la période précédente). Les notations sont un peu particulières<sup>3</sup> puisque le 4D-VAR incrémental utilisé par Fabrice Veersé réalise une minimisation à partir de l'état  $\mathbf{x}^g = \mathbf{x}^f(t_0) + \delta \mathbf{x}_0$ . On doit donc réaliser une suite de minimisations successives de la fonction suivante :

$$J(\delta \mathbf{x}_{0}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}_{0}^{T} \mathbf{B}^{-1} \delta \mathbf{x}_{0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} [\mathbf{H}_{i}(\mathbf{x}_{i}^{g}) \cdot \delta \mathbf{x}_{i} - \mathbf{d}_{i}]^{T} \mathbf{R}_{i}^{-1} [\mathbf{H}_{i}(\mathbf{x}_{i}^{g}) \cdot \delta \mathbf{x}_{i} - \mathbf{d}_{i}]$$
(8.1)

Dans cette expression on note :

$$\mathbf{x}^{g}(t_{0}) = l$$
'ébauche à l'itération  $k$  (8.2)

$$\mathbf{x}_{i}^{g} = \mathbf{x}^{g}(t_{i}) = M_{(t_{0},t_{i})}(\mathbf{x}^{g}(t_{0})) \text{ la prévision à l'itération } k$$
(8.3)

et 
$$\delta \mathbf{x}_i = \delta \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{M}_{(t_0, t_i)} \cdot \delta \mathbf{x}_0$$
 l'incrément au temps  $t_i$  (8.4)

#### 8.2.2 Filtre SEEK

**Phase de prévision :** il s'agit de ramener au pas de temps courant  $t_0$ , la formulation de la prévision :

$$\mathbf{x}^{f}(t_{0}) = M_{(t_{0}-T,t_{0})}(\mathbf{x}^{a}(t_{0}-T))$$

où T est la longueur du cycle d'assimilation du 4D-Var, avec :

$$\mathbf{P}^{f}(t_{0}) = \mathbf{M}_{(t_{0}-T)} \mathbf{P}^{a}_{(t_{0}-T)} \mathbf{M}^{T}_{(t_{0}-T)}$$

Phase d'analyse : l'incrément doit être obtenu sous la forme :

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^a - \mathbf{x}_0^f = \mathbf{K}[\mathbf{y}^0 - H(\mathbf{x}^g) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^g)((\mathbf{x}^g) - (\mathbf{x}^f))]$$

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Pour plus de précision, nous renvoyons le lecteur à l'annexe correspondante détaillée dans [65]

#### 8.2.3 Algorithme d'hybridation

Il s'agit maintenant de combiner l'évolution temporelle des matrices de covariances d'erreur calculées par le filtre SEEK avec le calcul de l'incrément d'analyse du 4D–VAR. On prend  $\mathbf{B} = \mathbf{P}_{t_k}^f$  à chaque cycle de 4D–VAR réduit. La difficulté est notamment la date de prise en compte des données sur la période, qu'il faut homogénéiser pour avoir une formulation consistante des différents termes. Les matrices de covariance d'erreur sont de rang réduit dans le filtre SEEK. L'algorithme est initialisé par une décomposition EOFS qui fournit :

$$\mathbf{P}_0^a = \mathbf{L}_0 \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{L}_0$$

Au cours des cycles d'assimilation, elle se décompose sous la forme :

$$\mathbf{P}_k^a = \mathbf{L}_k \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{L}_k$$

On note les cycles successifs k - 1 et k. sans rentrer dans les détails du calcul ([57]), la mise à jour se fait par propagation de la base de correction suivant l'algorithme suivant :

$$\mathbf{L}_{k} = \mathbf{M}_{(t_{0}-T,t_{0})}\mathbf{L}_{k-1}$$

$$\Lambda_{k} = \mathbf{\Lambda}_{k-1} - \mathbf{\Lambda}_{k-1}\mathbf{L}_{k}^{T}\mathbf{M}^{T}\mathbf{H}(\mathbf{x}^{g})^{T} \left[\mathbf{H}(\mathbf{x}^{g})\mathbf{M}\mathbf{L}_{k}\mathbf{\Lambda}_{k-1}\mathbf{L}_{k}^{T}\mathbf{M}^{T}\mathbf{H}(\mathbf{x}^{g})^{T} + \mathbf{R}\right]^{-1}$$

$$\times \mathbf{H}(\mathbf{x}^{g})\mathbf{M}\mathbf{L}_{k}\mathbf{\Lambda}_{k-1}$$

$$(8.5)$$

$$(8.5)$$

$$(8.5)$$

$$(8.6)$$

On déduit de l'expression de  $\mathbf{P}^a_{k-1},$  l'expression de  $\mathbf{P}^f_k$  :

$$\mathbf{P}_{k}^{f} = \mathbf{M}_{(t_{0}-T,t_{0})} \mathbf{L}_{k-1} \mathbf{\Lambda}_{k-1} \mathbf{L}_{k-1}^{T} \mathbf{M}_{(t_{0}-T,t_{0})}^{T}$$

$$(8.7)$$

L'algorithme d'hybridation d'un 4D-VAR réduit et d'un filtre SEEK est donc donné par la séquence suivante :

• Phase d'analyse, réalisée par le 4D-VAR sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ :

$$\delta \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_b + \mathbf{L}_k \mathbf{\Lambda}_{k-1} \delta \mathbf{y}$$
(8.8)

• Phase de prévision : le filtre SEEK propage les matrices de covariances

$$\mathbf{x}_{k+1}^{f} = M_{(t_0, t_0 + T)}(\mathbf{x}_{k}^{a})$$
(8.9)

$$\mathbf{L}_{k+1} = \mathbf{M}_{(t_0, t_0+T)} \mathbf{L}_k$$
  

$$\mathbf{P}_{k+1}^f = \mathbf{L}_{k+1} \mathbf{\Lambda}_k \mathbf{\Lambda}_k^T \mathbf{L}_{k+1}^T$$
(8.10)

#### 8.2.4 Conclusions

Cette méthode a été proposée d'un point de vue théorique et n'a jamais été testée de façon numérique par Fabrice Veersé. Nous allons voir dans le paragraphe suivant sa mise en œuvre d'une telle méthode dans le cas d'une équation de Burger 1D.

# 8.3 Application au cas d'une équation d'advection-diffusion

Ce travail a été réalisé par Ehouarn Simon lors de son stage de Master 2 Recherche en 2004 [50]. Il consiste à appliquer la méthode théorique décrite dans la partie précédente au cas d'une équation 1D de transport-diffusion. L'équation considérée est tout d'abord linéaire puis est étendue au cas non-linéaire. Les expériences sont réalisées en expériences jumelles. La solution analytique est connue et les observations sont générées par l'équation d'évolution discrète puis éventuellement bruitées. La réduction d'ordre est implémentée dans tous les cas en utilisant comme base une décomposition EOFS calculée à partir d'une trajectoire libre.

#### 8.3.1 Cas d'un modèle linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t \ge 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi(1 - x)), \quad x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

$$(8.11)$$

La phase d'analyse est effectuée par le 4D–VAR réduit. Le filtre SEEK assure la propagation des modes par la dynamique linéaire du modèle. L'analyse des différents vecteurs de la base montre que seuls les trois premiers modes sont réellement pertinents. La propagation des modes de façon linéaire conserve cette répartition. Ehouarn Simon a comparé les résultats obtenus par le 4D–VAR réduit seul et l'algorithme hybride. Dans tous les cas testés (sensibilité sur le bruit et l'échantillonnage des observations), l'erreur RMS obtenue est très faible et inférieure à celle obtenue avec un 4D–VAR réduit (figure 8.1). Dans le cas du 4D–VAR réduit, les vecteurs ne sont pas propagés. Au bout de quelques cycles, la dynamique présente dans les modes n'est plus en phase avec celle du modèle : l'erreur obtenue en 4D–VAR réduit augmente. Par contre, l'hybridation permet de maintenir un niveau d'erreur très faible grâce à la propagation des modes.

#### 8.3.2 Cas d'un modèle non-linéaire

Pour cette expérience, le terme de transport est remplacé par un terme d'advection non linéaire.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t \ge 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \sin(\pi(1-x)), \quad x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

$$(8.12)$$

Cette implémentation nécessite donc le calcul d'un modèle linéaire tangent. L'analyse EOFS est réalisée exactement de la même façon. La propagation des modes s'effectue avec le modèle linéaire tangent. Au cours du temps, le 4D–VAR réduit conduit cette fois à une erreur plus faible que l'hybridation (figure 8.1). La propagation des vecteurs par le modèle linéaire entraîne en effet une augmentation de l'erreur au cours du temps. Ehouarn Simon a constaté qu'au bout d'un faible nombre de propagations, les vecteurs qui étaient dominants tendaient à se ressembler. Ceci pourrait être dû à l'utilisation du modèle linéaire tangent (sans terme de forçage) pour la propagation. Il faut toutefois noter que cet aspect a aussi été observé lors du test de la propagation de la base par le modèle non-linéaire dans le cas du le filtre SEEK seul (chapitre 6).





#### 8.3.3 Conclusions

Dans un cadre linéaire, cette hybridation donne de très bons résultats dans le contexte académique des expériences jumelles. L'application au cas d'un modèle non-linéaire montre ses limites dans la mesure où la propagation des vecteurs de la base EOFS ne permet plus à ces vecteurs d'être correctement en phase avec la variabilité du système. On retrouve ici les questions posées dans le cas de l'utilisation du filtre SEEK ou du 4D-VAR réduit utilisés seuls. Le point crucial de la réussite de ces expériences est encore une fois la pertinence de la variabilité exprimée par la base EOFS par rapport à celle du modèle au temps t.

# 8.4 Application au cas du modèle TDH du Pacifique Tropical

Nous avons réalisé de nombreuses expériences aussi bien avec le 4D–VAR réduit qu'avec le filtre SEEK en assimilant des données réelles dans le Pacifique Tropical. Ces expériences nous ont permis de calibrer les différents paramètres intrinsèques aux deux méthodes. Nous allons tester dans cette partie l'algorithme hybride d'assimilation de données dans cette zone. La configuration est strictement identique à celle utilisée dans les expériences précédentes, nous ne la rappelons donc pas ici (§2.3). Les résultats obtenus par Ehouarn Simon, au cours de son étude sur un cas académique, nous ont permis d'identifier les points importants de la mise en œuvre de ce type d'algorithme. Nous allons tout d'abord définir l'implémentation pratique de cet algorithme au paragraphe 8.4.1. Puis nous l'appliquons à la configuration tout d'abord en expériences jumelles (§8.4.2), puis en assimilant des profils réels (§8.4.3). Il s'agit d'un travail au stade préliminaire sur l'hybridation mais il donne déjà de bons résultats en expériences jumelles et des résultats corrects en assimilationde données réelles. Des développements supplémentaires seront sans doute à envisager dans le futur.

#### 8.4.1 Algorithme d'hybridation

Pour prendre en compte les observations de la même période dans l'analyse, on choisit pour le 4D-VAR réduit la matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^f$  obtenue avec le filtre SEEK en fin de cycle. La matrice de covariance d'erreur d'ébauche a donc évolué, avec le filtre SEEK, lors de l'analyse effectuée avec les observations disponibles sur le cycle précédent. Le 4D-VAR effectue l'analyse grâce à cette nouvelle matrice qui ne tient pas compte des données en cours mais seulement des données passées. Ceci est cohérent avec le fait que la matrice de covariance d'erreur de prévision du cycle précédent devienne une matrice de covariance d'erreur d'ébauche du cycle suivant.

Si le choix de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche pour le 4D-VAR s'est fait assez naturellement, il n'en est pas de même pour déterminer le retour du 4D-VAR vers le filtre SEEK. En effet, pour que le filtre SEEK puisse bénéficier de l'analyse réalisée par le 4D-VAR, nous avons pensé, dans un premier temps, utiliser l'état analysé provenant du 4D-VAR pour initialiser la phase de prévision du SEEK au même instant. Cet état initial allait de nouveau être contraint par les données, une deuxième fois sur la même période, de façon séquentielle. La qualité de la prévision aurait pu être améliorée. En contre-partie, l'estimation des erreurs faites au cours des différentes phases aurait été perturbée par le fait que l'état initial tenait déjà compte des données. cet élément nous a parut incorrect. Nous avons donc plutôt choisi de prendre l'ébauche du 4D-VAR (la prévision au bout de 30 jours) pour ébauche de la première analyse du SEEK au même instant (c'est à dire pour remplacer  $\mathbf{x}^f$ ). Il provient de la trajectoire optimale du cycle précédent mais n'est pas encore modifié par la prise en compte des données du cycle en cours. L'algorithme est celui décrit sur la figure ci-dessous.



filtre Seek : L'ébauche est l'état analysé obtenu avec le 4D-Var réduit à la même date. On effectue
3 cycles de 10 jours pour que la dernière date traitée corresponde à celle du 4D-Var réduit.

# $\bullet$ Etape $n \rightarrow n+1$ : Cyclage sur la période totale

– L'étape 2 est repétée jusqu'à la fin.

FIG. 8.2 – Séquences d'hybridation du SEEK et du 4D–VAR réduit

L'algorithme peut s'écrire alors sous la forme :

Etape 1 : Init	ialisation des algo	orithmes
	4D-Var ré	eduit Filtre SEEK
	$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_0$ $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r$	$\begin{vmatrix} \mathbf{x}_b = \overline{\mathbf{x}} \\ \mathbf{P}_0^f = \mathbf{B}_r \end{vmatrix}$
• Etape 2 : Cyo	clage 4D–Var / Se	eek sur un mois
	- ,	4D–Var réduit
	Initialisation	$\mathbf{x}_i^b = \mathbf{x}_i^f$
	Analyse	$\mathbf{B}=\mathbf{P}_{i}^{f}$ du cycle SEEK précédent
	Propagation	$\mathbf{x}_{i+1}^f = M_{(t_i, t_{i+1})}(\mathbf{x}_i^a)  (1 \text{ mois})$
Cycle i-i1	Initialisation Analyse Propagation	$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i}^{o} &= \mathbf{x}_{i}^{a} \text{ du cycle } 4\mathrm{D-VAR précédent} \\ \mathbf{P}_{i}^{a} &= \mathbf{S}_{i}^{f} [I + (\mathbf{H}_{i} \mathbf{S}_{i}^{f})^{T} \mathbf{R}_{i}^{-1} (\mathbf{H}_{i} \mathbf{S}_{i}^{f})]^{-1} \mathbf{S}_{i}^{fT} \\ \mathbf{x}_{i1}^{f} &= M_{(t_{i}, t_{i1})} (\mathbf{x}_{i}^{f}) \\ \mathbf{P}_{i1}^{f} &= \mathbf{S}_{i1}^{fT} \mathbf{S}_{i1}^{f} = \mathbf{P}_{i}^{a} \end{aligned}$
Cycle i1-i2	Initialisation Analyse Propagation	$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i1}^{b} &= \mathbf{x}_{i1}^{f} \\ \mathbf{P}_{i1}^{a} &= \mathbf{S}_{i1}^{f} [I + (\mathbf{H}_{i1} \mathbf{S}_{i1}^{f})^{T} \mathbf{R}_{i1}^{-1} (\mathbf{H}_{i1} \mathbf{S}_{i1}^{f})]^{-1} \mathbf{S}_{i1}^{fT} \\ \mathbf{x}_{i2}^{f} &= M_{(t_{i1}, t_{i2})} (\mathbf{x}_{i1}^{f}) \\ \mathbf{P}_{i2}^{f} &= \mathbf{S}_{i2}^{fT} \mathbf{S}_{i2}^{f} \end{aligned}$
Cycle i2-i+1	Initialisation Analyse Propagation	$ \begin{split} \mathbf{x}_{i2}^{b} &= \mathbf{x}_{i2}^{f} \\ \mathbf{P}_{i2}^{a} &= \mathbf{S}_{i2}^{f} [I + (\mathbf{H}_{i2} \mathbf{S}_{i2}^{f})^{T} \mathbf{R}_{i2}^{-1} (\mathbf{H}_{i2} \mathbf{S}_{i2}^{f})]^{-1} \mathbf{S}_{i2}^{fT} \\ \mathbf{x}_{i+1}^{f} &= M_{(t_{i2}, t_{i+1})} (\mathbf{x}_{i2}^{f}) \\ \mathbf{P}_{i+1}^{f} &= \mathbf{S}_{i+1}^{fT} \mathbf{S}_{i+1}^{f} \end{split} $

Du fait que nous effectuons cette hybridation directement en base réduite pour les deux méthodes, l'interaction entre les algorithmes concerne seulement deux termes : l'ébauche et la matrice de covariance d'erreur d'ébauche. Le coût de cet algorithme, par cycle, équivaut au coût d'un cycle du 4D-VAR réduit sur un mois et de 3 cycles du filtre SEEK de 10 jours chacun, soit environ 2000 + 200 s. sur la NEC SX5 de l'IDRIS.

# 8.4.2 Implémentation en expériences jumelles

#### 8.4.2.1 Description de l'expérience

Les observations sont générées par le modèle aux points les plus proches du réseau TAO. L'expérience dure une année, par cycle d'un mois pour le 4D–VAR réduit et de 10 jours pour le filtre SEEK. La base utilisée pour l'initialisation est la base calculée à partir de la simulation libre sur la même période. Pour le filtre SEEK, le facteur d'oubli est égal à 0.7 (résultats du chapitre 5). Dans le chapitre 5, nous avons vu par ailleurs que le gain obtenu par l'évolution de la base avec le modèle non-linéaire était faible au regard du coût de calcul. Nous ne testons donc pas cette possibilité ici.

#### 8.4.2.2 Valeurs d'erreur RMS sur la période

Comme pour les expériences jumelles précédentes, nous nous intéressons aux valeurs d'erreur RMS obtenues sur la période étudiée. Nous pouvons constater, pour toutes les variables, que les 6 premiers mois le niveau d'erreur obtenu avec cette méthode hybride est inférieur à celui de toutes les autres expériences. Les six mois suivants, l'erreur obtenue avec le filtre SEEK a tendance à réaugmenter (tout en restant à un niveau très faible). La méthode hybride suit donc naturellement cette tendance et l'erreur augmente légèrement. C'est alors le 4D–VAR réduit qui a le niveau d'erreur le plus faible.



FIG. 8.3 – Valeurs d'erreur RMS obtenues pour l'expérience hybride à 15 mètres sur l'année 1993.

Plus en profondeur (750 m.), l'erreur est initialement très faible et le constat est le même. Dès lors que l'erreur obtenue par le filtre SEEK réaugmente, celle de la méthode hybride aussi.



FIG. 8.4 – Valeurs d'erreur RMS obtenues pour l'expérience hybride à 750 mètres sur l'année 1993.

Ces expériences jumelles nous montre qu'il est donc possible d'obtenir, par une méthode hybride, un niveau d'erreur encore plus faible. On peut tout à fait imaginer qu'en améliorant les résultats obtenus avec le filtre SEEK sur les 6 derniers mois grâce à des expériences de sensibilité, l'expérience hybride permette d'améliorer encore les résultats sur toute l'année.

#### 8.4.3 Implémentation en données réelles

Nous avons vu dans les chapitres précédents que le filtre SEEK est mieux à même d'assimiler des données des données réelles que le 4D–VAR seul (et non pas mixte).

#### 8.4.3.1 Description de l'expérience

Nous utilisons ici les données de profils de température issus du réseau TAO ainsi que des données XBT. Les conditions d'expériences sont les mêmes que celles décrites au chapitre 4 pour le 4D–VAR réduit et au chapitre 6 pour le filtre SEEK. Nous conservons les paramètres qui ont donné les meilleurs résultats en assimilation de données réelles : la base est encore fixe et le facteur d'oubli égal à 1.

#### 8.4.3.2 Evolution des états analysés

Contrairement aux bons résultats obtenus en expériences jumelles, les états analysés obtenus par la méthode hybride en assimilant des données réelles sont des états physiquement peu réalistes. L'algorithme de minimisation a généralement du mal à converger et à obtenir un état analysé optimal. Comme on peut le voir sur la figure 8.5, on obtient, au cours de l'année, des gradients importants et de fortes intensités, principal défaut présents dans le 4D–VAR réduit seul. On peut en particulier voir sur la coupe verticale de température au mois 10, la présence de gradients de température irréalistes.



FIG. 8.5 – Composante en température et en vitesse zonale, état analysé aux mois 8, 9 et 10. Coupe verticale à l'équateur pour la température et coupe à 141°W pour la vitesse zonale.

#### 8.4.3.3 Variabilité saisonnière

Lorsqu'on regarde les moyennes calculées sur 3 mois de prévision (en excluant les état analysés), on constate que la solution obtenue est tout à fait réaliste et comparable à celles obtenues par les autres algorithmes (chapitre 7). La trajectoire obtenue par le 4D–VAR réduit est correcte d'un point de vue physique. On a, en effet, un gradient de température réaliste dans l'Est du bassin ; le gradient de surface est aussi bien représenté. Les courants sont positionnés au bon endroit et les intensités des vitesses, en surface comme à 100 m. de profondeur, sont tout à fait correctes.



FIG. 8.6 – Température et composante zonale de la vitesse, moyenne de la prévision sur 3 mois. Coupe verticale à l'équateur pour la température et coupe à 141°W pour la vitesse zonale.
#### 8.4.3.4 Validation des résultats

Lorsque l'on compare l'évolution temporelle de la prévision avec les données disponibles aux points du réseau TAO (non montré ici), on retrouve la présence de gradients irréalistes à certains pas de temps, en particulier en température à 110°W. Toutefois, plus globalement sur l'ensemble de l'expérience, la solution physique obtenue n'est pas totalement incorrecte. Pour la composante en vitesse, au point (110°W, 0°N), l'intensité en surface est souvent trop importante. Quant à la salinité, seule une période (Octobre environ) présente des gradients trop importants.



FIG. 8.7 – Composante en température, vites<br/>se zonale et salinité. Evolution temporelle en coupe verticale

Les résultats obtenus montrent que l'algorithme hybride permet d'améliorer très nettement les résultats du 4D-VAR réduit.

#### 8.4.4 Conclusions

Les expériences présentées dans ce chapitre demeurent préliminaires. Certains développements sont encore à effectuer et divers paramètres doivent être testés.

Toutefois, ces expériences réalisées dans ce chapitre nous ont permis de mettre en évidence que pour des modèle simples et en expériences jumelles, les résultats obtenus par cet algorithme hybride étaient de très bonne qualité. Malgré le faible nombre d'expériences de sensibilité réalisées, les résultats obtenus sont tout à fait encourageants.

Dans le cas des données réelles, nous avons vu que l'algorithme a plus de difficultés à réaliser la phase d'analyse en 4D–VAR réduit. Le réalisme physique de l'état analysé obtenu devient donc discutable. Par contre, la phase de prévision, est tout à fait satisfaisante et nous permet d'obtenir des résultats corrects. De même, la comparaison avec des données réalistes révèle un comportement globalement satisfaisant de la solution.

## Conclusions et perspectives

Le premier objectif de ce travail était de développer et mettre en œuvre, dans un contexte réaliste, des méthodes d'assimilation variationnelle de rang réduit. Nous souhaitions de plus confronter cette approche à une approche séquentielle similaire, de type filtre SEEK, afin notamment de proposer des pistes vers l'hybridation de ces méthodes.

Dans ce but, nous avons réalisé des expériences identiques pour les deux méthodes, tout d'abord en expériences jumelles puis en configuration complètement réaliste, en assimilant des données de température TAO-XBT sur le Pacifique Tropical dans le modèle OPA.

Les expériences jumelles nous ont permis de dégager les points-clés théoriques de chaque méthode. L'assimilation de données réelles a permis quant à elle de déterminer la limite d'application de certaines approches ainsi que le bon comportement de certaines autres. La mise en place d'une toute première expérience hybride a permis de renforcer l'idée que les méthodes peuvent s'améliorer l'une l'autre par échange d'informations, comme nous allons le détailler par la suite.

#### • méthodes variationnelles

- En expériences jumelles, le 4D-VAR de rang réduit conserve les avantages du 4D-VAR complet, tout en profitant de l'identification de l'incrément optimal comme combinaison linéaire de vecteurs EOFS multivariés. L'espace de contrôle étant de dimension faible, l'identification est très rapide. L'algorithme de minimisation converge immédiatement et le coût de calcul est divisé par deux au minimum. De plus, la solution obtenue est de meilleure qualité que celle obtenue avec le 4D-VAR complet, du fait du caractère naturellement multivarié de cette approche de rang réduit.
- En assimilation de données réelles, par contre, la présence d'erreur modèle rend le choix de la base de correction délicat. Une base EOFS, calculée à partir d'une trajectoire du modèle sans assimilation, produit une solution physiquement irréaliste. La méthode de cyclage proposée permet d'améliorer légèrement les résultats mais n'est pas vraiment concluante. Par contre, des méthodes alternatives ont été développées et testées avec succès comme le 4D-VAR réduit qui utilise une base EOFS calculée sur une simulation avec assimilation et le 4D-VAR mixte. Ce dernier, pour lequel quelques itérations de 4D-VAR réduit agissent comme un préconditionnement à quelques itérations de 4D-VAR complet, s'avère être l'approche qui permet d'obtenir la solution physique la plus pertinente. La comparaison sur l'année de simulation met en évidence qu'il s'agit des meilleurs résultats obtenus. Le coût de calcul est alors identique à celui du 4D-VAR réduit simple et par conséquent deux fois moins cher au moins qu'un cycle de 4D-VAR complet.

 Le coût de calcul de ces méthodes variationnelles reste tout de même élevé comparé à celui des méthodes séquentielles.

### • méthodes séquentielles

- Les différents algorithmes basés sur le filtre SEEK ont été testés avec succès aussi bien en expériences jumelles qu'en données réelles. Les réglages qui ont été mis en évidence au cours de ces expériences dépendent des nombreux paramètres de la configuration : zone géographique, période étudiée, type de données, etc., et ne sont donc pas transposables directement à une autre expérience. En expériences jumelles, les 6 premiers mois de simulation ont mis en évidence un comportement du filtre SEEK identique à celui du 4D–VAR réduit. Les 6 derniers mois, l'erreur commise sur l'estimation de la trajectoire réaugmente légèrement. Un réglage encore plus fin des paramètres, comme le facteur d'oubli, aurait peut être pu améliorer cela.
- En assimilation de données réelles, le filtre SEEK s'est avéré être une méthode robuste, capable de très bien assimiler des observations réelles. La solution obtenue est physiquement très correcte. Elle présente toutefois certains défauts comme des gradients un peu trop faibles qui peuvent être dus à l'initialisation du système par un état moyen, donc très lisse. Une expérience de sensibilité plus poussée permettrait de calibrer plus finement les paramètres (facteur d'oubli, évolution de la base) et améliorerait la solution obtenue. Rappelons que cette méthode, utilisée en base fixe coûte environ 10 fois moins cher que les méthodes variationnelles de rang réduit.

## • méthode hybride

- La méthode hybride telle qu'elle a été mise en œuvre va dans le sens de la recherche de bases de correction pertinentes pour le 4D-VAR réduit, par l'interaction entre les deux algorithmes. Le filtre SEEK ne se contente pas de fournir le caractère évolutif de la base qui engendre le sous-espace de dimension réduite, mais bénéficie de la qualité de la prévision obtenue lors de la phase de 4D-VAR. En expériences jumelles, lorsque le filtre SEEK et le 4D-VAR réduit ont un niveau d'erreur identique, la méthode hybride parvient à améliorer la solution obtenue. Lorsque l'erreur du filtre SEEK augmente légèrement, l'erreur de la méthode hybride devient légèrement supérieure à celle du 4D-VAR réduit qui reste alors la plus faible.
- En assimilant des données réelles, les états analysés obtenus présentent des gradients ainsi que des intensités dans le champ de vitesse irréalistes. Par contre, la prévision en moyenne saisonnière est tout à fait réaliste. L'évolution temporelle aux points TAO, présente en général une solution acceptable. Ce n'est pas la meilleure solution d'un point de vue physique mais celle obtenue avec le 4D–VAR réduit seul se trouve nettement améliorée. Cette expérience préliminaire ouvre donc un certain nombre de perspectives sur lesquelles nous allons revenir par la suite.

Ces expériences n'ont duré qu'une seule année, correspondant à une dynamique de l'océan Pacifique Tropical plutôt calme même si durant la période considérée, la circulation océanique n'est pas dans un état totalement "normal", encore influencée par l'épisode El Niño de 1991. Ce travail demanderait donc à être complété, d'une part pour permettre une évaluation sur un plus long terme, et d'autre part pour se confronter à des situations de type El Niño.

Les perpectives à ce travail sont multiples. Si l'on se place dans l'objectif de construire un système d'assimilation de données fournissant les meilleurs résultats possibles sur cette zone du Pacifique Tropical, de nombreux paramètres du système pourraient être optimisés. Citons notamment la construction de la base de correction, l'utilisation de variantes du filtre SEEK comme sa version adaptative, ou encore l'assimilation d'autres types de données, et en particulier des mesures altimétriques dans une version à surface libre du modèle.

D'un point de vue méthodologique, la compréhension détaillée de l'apport de l'hybridation pour le 4D–VAR réduit et pour le filtre SEEK nous paraît être un point essentiel. Cerner les points de ces méthodes sur lesquels l'hybridation a un effet positif permettra peut être d'aller plus loin dans cette voie.

Au cours de nos expériences, nous avons pu voir que l'erreur modèle jouait un rôle primordial sur la qualité des résultats obtenus. Les méthodes variationnelles permettent de contrôler cette erreur au même titre que la condition initiale. Ce contrôle s'est révélé très efficace dans le travail d'Arthur Vidard dans le même contexte applicatif. La mise en œuvre conjointe avec le 4D–VAR réduit ou mixte pourrait être un point clé des développements futurs.

Enfin, il nous semble que ce travail pose la question plus fondamentale du lien entre les différentes composantes d'un système d'assimilation : modèle (et donc erreur modèle), observations et méthodes d'assimilation. Comment combiner de façon optimale ces trois composantes pour construire un système d'assimilation adapté à un problème donné ?

# Bibliographie

- H.D.I. Abarbanel. Analysis of Observed Chaotic Data. Springer-verlag, institute for nonlinear science edition, 1996.
- [2] L. Amodei. Solution approchée pour un problème d'assimilation de données météorologiques avec prise en compte de l'erreur modèle. C.R. Acad. Sci. Paris, IIa(321) :1087–1094, 1995.
- [3] E. Andersson. The ECMWF implementation of the three-dimensional variational assimilation (3D-Var), III: Experimental results. Q. J.R. Meteorol. Soc., 120:1831-1860, 1998.
- [4] D. Auroux. Etudes de différentes méthodes d'assimilation de données pour l'environnement. Mémoire de Thèse de Doctorat, LJD, Université de Nice, 10 Décembre 2003.
- [5] D. Auroux. Assimilation de données expérimentales dans les systèmes non-linéaires chaotiques. Technical report, LMC, IMAG, 1998.
- [6] B. Barnier, L. Siefridt, and P. Marchesiello. Thermal forcing for a global ocean circulation model using a three-year climatology of ECMWF analysis. J. Marine Systems, 6 :363–380, 1995.
- [7] A.F. Bennett. Inverse methods in physical oceanography. Cambridge University Press, 1992.
- [8] C. Bernier. Existence of attractor for the quasi-geostrophic approximation of the Navier-Stokes equations and estimate of its dimension. Advances in Mathematical Sciences and Applic., 4 :465-489, 1994.
- [9] E. Blayo, J. Blum, and J. Verron. Assimilation variationnelle de données en océanographie et réduction de la dimension de l'espace de contrôle, pages 199–219. Gauthier-Villars, 1998.
- [10] J. Blum, B. Luong, and J. Verron. Variational assimilation of altimeter data into a non-linear ocean model : temporal strategies. ESAIM proceedings, 1998.
- [11] F. Bouttier and P. Courtier. Data assimilation concepts and methods. Meteorological Training Course Lecture Series, March 1999.
- [12] P. Brasseur, J. Ballabrera, and J. Verron. Assimilation of altimetric data in the mid-latitude oceans using the Singular Evolutive Extended Kalman filter with an eddy-resolving, primitive equation model. J. Mar. Syst., 22 :269-294, 1999.
- [13] R. Buizza. Chaos and weather prediction. Meteorological Training Course Lecture Series, January 2000.
- [14] M. A. Cane, A. Kaplan, Miller R. N., B. Tang, E. C. Hackert, and A. J. Busalacchi. Mapping tropical Pacific sea level : data assimilation via a reduced state space Kalman filter. J. of Geophys. Res., 101(C10) :22599-22617, 1996.
- [15] P. Courtier, E. Andersson, W. Heckley, J. Pailleux, D. Vasiljevic, M. Hamrud, A. Hollingsworth, F. Rabier, and M. Fisher. The ECMWF implementation of the three-dimensional variational assimilation (3D-Var), i : Formulation. Q. J. R. Meteorol. Soc., 124(550) :1783-1807, 1998.

- [16] P. Courtier, J.N. Thépaut, and A. Hollingsworth. A strategy for operational implementation of 4D-Var using an incremental approach. Q. J. R. Meteorol. Soc., 120 :1367–1387, 1994.
- [17] F. Debost. Etude de nouveaux scénarios d'altimétrie satellitaires pour la reconstruction de la circulation océanique méso-échelle par assimilation de données altimétriques. Mémoire de Thèse de Doctorat, LEGI, UJF, Université de Grenoble I, 16 Juin 2004.
- [18] J. Derber and A. Rosati. A global oceanic data assimilation system. J. Phys. Oceangr., 19:1333-1347, 1989.
- [19] Henk A. Dijkstra. Nonlinear Physical Oceanography. Atmospheric and Oceanographic Sciences Library. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [20] F. Durand. Contrôle des couches superficielles des océans tropicaux par assimilation de données satellite : application au Pacifique Tropical. Mémoire de Thèse de Doctorat, LEGOS, Université de Toulouse III, 24 Septembre 2002.
- [21] F. Durand, L. Gourdeau, T. Delcroix, and J. Verron. Can we improve the representation of modeled ocean mixed layer by assimilating surface-only sattelite-drived data? a case study for the tropical Pacific during the 1997-1998 El Niño. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., pages 1–10, 2003.
- [22] S. Durbiano. Vecteurs caractéristiques de modèles océaniques pour la réduction d'ordre en assimilation de données. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, UJF, Université de Grenoble I, 20 Décembre 2001.
- [23] G. Evensen. Sequential data assimilation with a non-linear quasi-geostrophic model using monte-carlo methods to forecast error statistics. J. Geophys. Res., 99 :10143-10162, 1994.
- [24] A. Ghoul. Approche modulaire pour l'assimilation de données. Technical report, Paris XIII, Paris VI, LODYC, 2000.
- [25] J. C. Gilbert and C. Lemaréchal. The module M1QN3. Technical report, INRIA, 1995.
- [26] L. Gourdeau, J. Verron, T. Delcroix, A. J. Busalacchi, and R. Murtugudde. Assimilation of Topex/Poseidon altimetric data in a primitive equation model of the Tropical Pacific ocean during the 1992-1996 El Niño-Southern Oscillation period. *Journal of Geophysical Research*, 105 :8473-8488, April, 2000.
- [27] T. M. Hamil and C. Snyder. A hybrid Ensemble Kalman Filter-3D-Variationnal Analysis Scheme. Monthly Weather Review, pages 2905–2919, August 2000.
- [28] I. His Paun. Sur quelques problèmes régis par des équations aux dérivées partielles en astrophysique et en océanographie. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, UJF, Université de Grenoble I, 29 Octobre 2001.
- [29] I. Hoteit. Filtres de Kalman réduits et efficaces pour l'assimilation de données en océanographie. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, IDOPT, UJF, Université de Grenoble I, 8 Janvier 2001.
- [30] K. Ide, P. Courtier, M. Ghil, and A.C. Loreanc. Unified notation for data assimilation : Operational, Sequential and Variational. *Journal of Meteorological Society of Japan*, 75:181– 189, 1997.
- [31] Andrew H. Jazwinski. Stochastic processes and filtering theory. Number 64 in Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1970.
- [32] R. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of Physical Oceanography, 23 :2541–2566, 1960.

- [33] E. Kasantsev. Unstable periodic orbits and attractor of the barotropic ocean model. Nonlinear processes in Geophysics, 5 :193-208, 1998.
- [34] F.-X. Le Dimet and O. Talagrand. Variationnal algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : Theoretical aspects. *Tellus*, 38A :97–110, 1986.
- [35] B. Legras and R. Vautard. A guide to Lyapunov vectors. Proceedings of seminar on predictability, European Centre for Medium-range Weather Forecasts, 1995.
- [36] Z. Li and I.M. Navon. Optimality of 4D-Var and its relationship with the Kalman filter and Kalman smoother. Q. J. R. Meteorol. Soc., 127(572) :661-684, 2001.
- [37] J.L. Lions, O.P. Manley, R. Temam, and S. Wang. Physical interpretation of the attractor dimension for the Primitive Equations of atmospheric circulation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 54(9), 1997.
- [38] S. Louvel. Implementation of a dual variationnal algorithm for assimilation of synthetic altimeter data in the oceanic primitive equation model MICOM. J. of the Geophys. Res., 106(C5) :9199-9212, 2001.
- [39] B. Luong. Techniques de contrôle optimal pour un modèle quasi-géostrophique de circulation océanique. Application à l'assimilation variationnelle de données altimétriques satellitaires. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, IDOPT, UJF, Université de Grenoble I, en collaboration avec l'équipe MEOM du laboratoire LEGI, 11 Juillet 1995.
- [40] G. Madec, P. Delecluse, M. Imbard, and C. Levy. OPA8.1 Ocean General Circulation Model reference manual. Technical report, Institut Pierre et Simon Laplace (IPSL), 1998.
- [41] C. Menkes, J.P. Boulanger, J.P. Busalachi, J. Vialard, P. Delecluse, M.J. McPhaden, E. Hackert, and N. Grima. Impact of TAO vs. ERS wind stresses onto simulations of the Tropical Pacific ocean during the 1993-1998 period by the OPA OGCM, climate impact of scale interactions for the Tropical Ocean-Atmosphere system. *Euroclivar Workshop Report*, 13:46-48, 1998.
- [42] R. N. Miller and L. L. Ehret. Ensemble generation for models of multimodal systems. Monthly Weather Review, 130 :2313–2333, 2002.
- [43] Mu Mu and Jia-cheng Wang. Nonlinear fastest growing perturbation and the first kind of predictability. Science in China (D), 44(12), 2001.
- [44] L. Parent. Assimilation de données dans l'océan Pacifique Tropical sur la période 1994-1998.
   Mémoire de Thèse de Doctorat, LEGI, UJF, Université de Grenoble I, 20 Novembre 2000.
- [45] D.T. Pham, J. Verron, and M.C. Roubaud. A singular Evolutive Extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *Inverse Problems*, 14 :979–997, 1998.
- [46] C. Pires, R. Vautard, and O. Talagrand. On extending the limits of variational assimilation in nonlinear chaotic systems. *Tellus*, 48A :96–121, 1996.
- [47] F. Rabier, J.N. Thépaut, and P. Courtier. Extended assimilation and forecast experiments with a four-dimensional variationnal assimilation system. Q. J. R. Meteorol. Soc., 124 :1861–1887, 1998.
- [48] S. Ricci. Modélisation multivariée de la matrice de covariance d'erreur d'ébauche pour l'assimilation variationnelle océanique. Mémoire de Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 29 Mars 2004.
- [49] S. Ricci, A. T. Weaver, J. Vialard, and P. Rogel. Incorporating state-dependant temperaturesalinity constraints in the background error covariance of variational ocean data assimilation. *ECMWF Tech. memo.*, 441, 2004.

- [50] E. Simon. Une méthode mixte d'assimilation de données. Technical report, Master 2 Recherche de mathématiques appliquées de Grenoble, Université J.Fourier, LMC, 2004.
- [51] O. Talagrand. Internal diagnostics of data assimilation systems. Diagnostics of Models and Data Assimilation Systems, Compte-rendu de séminaire, pages 407–409, Septembre 1999.
- [52] O. Talagrand. A posteriori evaluation and verification of analysis and assimilation algorithms. Proceedings of workshop on Diagnosis of Data Assimilation Systems, European Centre for Medium-range Weather Forecasts, 1999.
- [53] R. Temam. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. in Applied Mathematical Sciences, 68, 1988.
- [54] C.E. Testut. Assimilation de données satellitales avec un filtre de Kalman de rang réduit dans un modèle aux Equations Primitives de l'océan Atlantique. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, IDOPT, UJF, Université de Grenoble I, 5 Décembre 2000.
- [55] Z. Toth and E. Kalnay. Ensemble forecasting at NCEP and the Breeding method. Monthly Weather Review, 125 :3297–3319, 1997.
- [56] Y. Tremollet. Parallélisation d'algorithme variationnel d'assimilation de données en météorologie. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, UJF, Université de Grenoble I, 27 Novembre 1995.
- [57] F. Veersé, D-T. Pham, and J. Verron. 4D-Var/SEEK : a consistent hybrid variationnalsmoothing data assimilation method. *Rapport de recherche INRIA*, No 3902, 2000.
- [58] F. Veersé and J.N. Thépaut. Multiple-truncation incremental approach for four-dimensional variational data assimilation. Q. J. R. Meteorol. Soc., 124 :1889–1908, 1998.
- [59] J. Verron, L. Gourdeau, D. T. Pham, R. Murtugudde, and A.J. Busalacchi. An extended Kalman filter to assimilate sattelite altimeter data into a nonlinear numerical model of the tropical Pacific Ocean : Method and validation. *Journal of Geophysical Research*, 1054 :5441– 5458, March, 1999.
- [60] J. Vialard, C. Menkes, D. L. T. Anderson, and M. Alonso Balmaseda. Sensitivity of Pacific Ocean Tropical instability waves to initial conditions. *Journal of Physical Oceanography*, 33 :106-121, January, 2003.
- [61] J. Vialard, C. Menkes, J.-P. Boulanger, P. Delecluse, E. Guilyardi, and M. J. McPhaden. A model study of oceanic mechanisms affecting Equatorial Pacific Sea Surface Temperature during the 1997-98 El Niño. J. Phys. Oceanogr., 31 :1649-1675, 2001.
- [62] J. Vialard, A. Weaver, D.L.T. Anderson, and P. Delecluse. Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the tropical Pacific Ocean, part 2 : physical validation. *Monthly Weather Review*, 131 :1379–1395, 2003.
- [63] P.A. Vidard. Vers une prise en compte des erreurs modèle en assimilation de données 4D-Variationnelle. Application à un modèle réaliste d'océan. Mémoire de Thèse de Doctorat, LMC, CERFACS, UJF, Université de Grenoble I, 20 Décembre 2001.
- [64] A. Weaver and P. Courtier. Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation. Q. J. R. Meteorol. Soc., 127 :1815–1846, 2001.
- [65] A. Weaver, J. Vialard, D.L.T. Anderson, and P. Delecluse. Three- and four-dimensionnal variationnal assimilation with a general circulation model of the Tropical Pacific Ocean. Technical report, Internal report ECMWF Tech. memo., March 2002.

- [66] A.T. Weaver and J. Vialard. Development of an ocean incremental 4D-Var scheme for seasonal prediction. Proceedings of the Third WMO International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography, Quebec City, Canada, 7-11 June 1999.
- [67] A.T. Weaver, J. Vialard, and D.L.T. Anderson. Three- and four-dimensional variational assimilation with a general circulation model of the Tropical Pacific Ocean, part 1 : formulation, internal diagnostics and consistency checks. *Monthly Weather Review*, 131 :1360–1378, 2003.

# Annexes

## Annexe A

# Bases réduites : décomposition en base EOFS (Empirical Orthogonal Functions)

#### A.1 Calcul des base d'Eofs

#### A.1.1 Présentation

Une base d'EOFS (ou Composantes Principales) est une base de vecteurs qui représentent les modes de variabilité du système étudié. Ils sont calculés à partir d'une série temporelle du vecteur d'état du modèle. Ils contiennent donc une information statistique.

Ces modes minimisent la perte d'information qui se produit lors de la projection d'un nuage de points représentatifs du système étudié sur une base quelconque.

#### A.1.2 Calculs des modes

En reprenant les notations utilisées dans la section 2.2, l'évolution temporelle du vecteur d'état  $(\mathbf{U}_h, T, S)$  est obtenue à partir d'une simulation du modèle direct sur une période temporelle T. On a une suite de N états discrets correspondant aux instants  $t_i$ ,  $i \in (1, ..., N)$ .

La taille totale de ce vecteur d'état est de  $4 \times M$  où M est le nombre de points de grille total du modèle (jpi\*jpj\*jpk pour OPA, égal à 252225 points pour la configuration TDH).

La matrice X a donc pour dimension  $(N \times 4M)$ . En pratique, on considère un échantillonnage du vecteur d'état tous les quatre jours pour une durée totale d'une ou deux années de simulation.

La matrice X se développe sous la forme :

A partir de la série temporelle, on définit un vecteur d'état moyen  $\overline{X}$ , qui est la moyenne temporelle de chaque composante du vecteur X sur la période T. La matrice de variance-covariances est calculée à partir de l'évolution temporelle  $Y = X - \overline{X}$  (le signal total centré pour ne conserver que la variabilité par rapport à l'état moyen).

Nous avons vu que le vecteur d'état est composé de variables qui ont des dimensions différentes. Pour le calcul de la matrice de covaraince, ces états sont dans un premier temps adimensionnés par la variance empirique moyenne puis les vecteurs retrouvent en fin de calcul leur dimension, composante par composante pour finalement représenter des états de variabilité physiques du modèle. Cette adimensionnement a été détaillé au paragraphe 1.6.2.

#### Cas des Eofs multivariées :

Dans le cas d'Eofs multivariées, la matrice de variance-covariance  $C = Y^t Y$  a la forme suivante :

$$C = \begin{bmatrix} U^{t}U & U^{t}V & U^{t}T & U^{t}S \\ U^{t}V & V^{t}V & V^{t}T & V^{t}S \\ U^{t}T & T^{t}V & T^{t}T & T^{t}S \\ U^{t}S & S^{t}V & S^{t}T & S^{t}S \end{bmatrix}$$

où le terme générique  $U^t U$  est formé par le bloc symétrique suivant :

$$U^{t}U = \begin{bmatrix} \sum_{N} U_{1}^{2} & \cdots & \sum_{N} U_{1}U_{m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots \\ \sum_{N} U_{1}U_{m} & \cdots & \sum_{N} U_{m}^{2} \end{bmatrix}$$

La base d'Eofs, définies comme les vecteurs propres de la matrice C, est obtenue par diagonalisation. Les valeurs propres associées sont rangées en pratique par ordre décroissant dans la matrice diagonale. Les valeurs propres indiquent le pourcentage de variance associé à chaque composante : lorsqu'on garde les 30 premières Eofs, on décide de garder un signal qui correspond à environ 98% ou 99% de la variance totale (le reste étant considéré comme du bruit).

#### Cas des Eofs monovariées :

On considère le vecteur d'état variable par variable et les covariances croisées comme nulles (les termes de la formes  $U^tV$  sont nuls). La matrice C s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} U^{t}U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V^{t}V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^{t}T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S^{t}S \end{bmatrix}$$
(A.1)

avec la même formulation pour les termes diagonaux que précédemment. La diagonalisation est alors effectuée par bloc de la même façon que si l'on considérait une seule variable.

Lorsque la matrice diagonale est calculée, les valeurs propres  $(\lambda_i)$  sont ordonnées dans le sens décroissant, et la matrice des vecteurs propres (EOFs) dans le même ordre. Dans le cas monovarié, on a donc 2 possibilités pour la diagonalisation de la matrice globale : soit on respecte l'ordre décroissant global et les EOFs sont alors rangées sans tenir compte de la variable à laquelle elles font référence, et on peut avoir :

$$EOF = \begin{bmatrix} eof_1^u & eof_2^u & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & eof_1^v & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & eof_1^t & eof_2^t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

Garder alors les 30 premières composantes ne garantit plus l'équirépartition entre toutes les variables. On préfèrera plutôt la représentation suivante qui permet une écriture à première vue plus cohérente avec la formulation en base entière et le calcul du préconditionnement  $B^{1/2}$ .

$$EOF = \begin{bmatrix} eof_1^u & eof_2^u & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & eof_1^v & eof_2^v & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & eof_1^t & eof_2^t & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & eof_1^s & eof_2^s & \cdots \end{bmatrix}$$

Cette formulation permet de garder un même nombre de vecteurs représentatifs par variable et donc de conserver un pourcentage de variabilité équivalent.

Le calcul des EOFs peut être fait variable par variable, de même que la diagonalisation des sousblocs.(En pratique, chaque matrice bloc est diagonalisée séparément et on reconstruit la matrice totale des vecteurs propres ensuite). On garde alors 120 vecteurs en tout : ce qui revient à en garder 30 par variable pour conserver un taux de représentativité de la variabilité suffisamment élevé.

#### Préconditionnement du problème d'assimilation :

Dans le cas où la base de vecteurs choisie est la base d'Eofs, la matrice B contient les valeurs propres associées à chaque vecteur. Le préconditionnement est effectué par la matrice  $B^{-1/2}$ :

$$(B^{-1/2})_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

Dans le 4D-Var standard, on a l'expression de  $J_b$  suivante :

$$J_b = \delta X_0^{\ t} B^{-1} \delta X_0$$

où B est la matrice de covariance d'erreur sur le background monovariée [64].

Dans le cas réduit, on a :

$$J_b = \delta X_0{}^t B_r{}^{-1} \delta X_0$$

avec  $B_r = LB_c L^t$ , L étant la matrice qui contient les r vecteurs propres (EOFs) :

Par construction, L est une base orthonormée :  $L^T L = In$ . On a vu que la variable de contrôle était l'incrément  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_b$ .  $\delta \mathbf{x}$  peut être exprimé dans cette base d'Eofs :

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \delta c_i L_i = L[\delta c]^t$$

 $(\delta c_i)_i$  est donc le vecteur qui représente les coordonnées de la variable de contrôle dans la base des Eofs.

L'incrément préconditionné s'écrit ensuite :

$$\delta \mathbf{y} = B^{-1/2} \delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} \delta c_i B^{-1/2} L_i$$

En pratique, la minimisation s'effectue alors sur le vecteur  $(\delta c_i)_{i=1,...,r}$  r étant le nombre d'Eofs conservées, de l'ordre de 30, la réduction d'ordre engendre donc une réduction de l'espace de contrôle.

## Annexe B

## Algorithme de minimisation m1qn3

#### B.1 Minimisation

Pour la minimisation de la fonction coût J(x) calculée par le 4D-Var, on est dans le cas d'une minimisation sans contrainte d'une fonction continûment dérivable.

La minimisation de cette fonctionnelle J s'effectue à l'aide d'une méthode de Quasi-Newton à mémoire limitée. La différence avec une méthode de Newton classique est qu'on utilise des approximations successives de la Hessienne inverse de la fonctionnelle au point courant (calcul approché moins coûteux que le calcul complet).

Dans cette partie, on présente d'abord l'algorithme de résolution dérivé d'un algorithme classique (Newton), la méthode de Quasi-Newton et sa version adaptée aux problèmes de grande taille (à mémoire limitée). Nous détaillons ensuite le préconditionnement utilisé ainsi que la mise en œuvre algorithmique dans notre cas particulier.

#### **B.1.1** Algorithme de Newton

L'algorithme de Newton est un algorithme de descente classique qui se définit de la façon suivante.

L'algorithme est initialisé avec un  $x_0$  correspondant à l'état initial du système (cela peut-être l'ébauche) avant minimisation. On note k, l'indice correspondant au numéro de l'itération de minimisation en cours. A partir de l'état  $x_k$  (état initial pour la minimisation à l'étape k), on évalue une direction de descente  $d_k$  donnée par :

$$d_k = -[\nabla^2 J(x_k)]^{-1} \cdot \nabla J(x_k) \tag{B.1}$$

On calcule classiquement un pas de descente  $\rho_k$  le long de la direction de descente  $d_k$  avec une condition de Wolfe pour fixer le pas.

Le résultat de l'itération de minimisation est donné par :  $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$ .

On voit clairement que le calcul de la direction  $d_k$  implique le calcul de l'inverse de la matrice hessienne  $\nabla^2 J$ , ce qui est impossible à mettre en œuvre pour les systèmes de grande taille du type de ceux étudiés en océanographie ou météorologie. Par ailleurs, le gradient de la fonctionnelle J qui intervient aussi n'est pas calculé directement, il est obtenu par intégration du modèle adjoint.

#### B.1.2 Algorithme de Quasi-Newton

Le principe de cet algorithme est de remplacer le calcul de l'inverse de la matrice hessienne  $\nabla^2 J^{-1} = W$  par une suite de matrices symétriques définies positives, qui réalise une approximation, que l'on met à jour à chaque itération, pour un coût plus faible que le calcul complet. On a donc une approximation à chaque itération de minimisation :  $W_k$ . Cette approximation est elle même obtenue de façon itérative comme on le verra plus loin.

A l'étape k, ayant obtenu  $W_k$ , on définit une direction de descente de la forme (B.1) :

$$d_k = -W_k \nabla J(x_k) \tag{B.2}$$

On cherche un pas de descente par recherche linéaire et on pose de la même façon :

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$$

La mise à jour de l'approximation W est de rang 2, suivant une expression du type :

$$W_{k+1} = f(x_k, x_{k+1}, \nabla J(x_k), \nabla J(x_{k+1}))$$

Plusieurs types de mise à jour existent et présentent des particularités. L'algorithme présente des variantes en terme de mise en œuvre. Dans la problématique qui nous concerne, nous utilisons une version fortement préconditionnée qui améliore l'efficacité de cet algorithme (Diagonal Initial Scaling mode).

#### B.1.3 Estimation de W

Pour estimer l'inverse de la matrice hessienne, la méthode BFGS est mise en œuvre. A l'itération de minimisation k, on a :

$$W_{k+1} = U(W_k, s_k, y_k) = \left(I - \frac{s_k \otimes y_k}{\langle y_k, s_k \rangle}\right) W_k \left(I - \frac{y_k \otimes s_k}{\langle y_k, s_k \rangle}\right) + \frac{s_k \otimes s_k}{\langle y_k, s_k \rangle}\right)$$

avec  $s_k = x_{k+1} - x_k$ ;  $y_k = \nabla J(x_{k+1} - \nabla J(x_k))$  et l'opérateur  $\otimes$  défini par :  $u \otimes v : d \to \langle v, d \rangle . u$ Il est donc adapté au produit scalaire euclidien, canonique pour une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Concrètement, l'algorithme se met en place de la manière suivante :

$$W_k^0 = D_k$$
$$W_k^{i+1} = U(W_k^i, s_{k-m+i}, y_{k-m+i}), \ 0 \le i \le m-1$$
$$W_k = W_k^m$$

En mode DIS, la mise à jour de la matrice  $D_k$  se fait de façon itérative :

$$D_{k+1}^{(i)} = \left(\frac{\langle D_k y_k, y_k \rangle}{\langle y_k, s_k \rangle D_k^{(i)}} + \frac{\langle y_k, e_i \rangle^2}{\langle y_k, s_k \rangle} - \frac{\langle D_k y_k, y_k \rangle \langle s_k, e_i \rangle^2}{\langle y_k, s_k \rangle \langle D_k^{-1} s_k, s_k \rangle \langle D_k^{(i)} \rangle^2}\right)^{-1}$$
(B.3)

On voit bien que la matrice  $D_k$  est totalement déterminée par la matrice initiale, et les données des paires  $(s_k, y_k)$ .

L'algorithme est donc celui-ci :

- 1. x l'itéré initial, W matrice initiale (qui peut être prise égale à l'identité)(approximation de l'inverse de le Hessienne de la fonction f), g le gradient de la fonctionnelle f à minimiser,  $\epsilon$  la tolérance d'erreur (lorsque  $|g| < \epsilon$  l'algorithme se termine).
- 2. Evaluation de la direction de descente initiale : d= -Wg
- 3. recherche linéaire itérative sur t (exemple : méthode de Wolfe) (pour le pas)  $x_+ = x + td$  et  $g_+ = g(x_+)$
- 4. Calcul de  $W_+$  et boucle sur la première étape ( $W_+$  est symétrique définie positive)
- 5. Equation de quasi-newton :  $s = s_k = x_{k+1} x_k$  à l'étape k,  $y = y_k = g_{k+1} g_k$

$$W_+ y = s$$

#### B.1.4 Quasi-Newton à mémoire limitée

Il s'agit d'une extension de l'algorithme BFGS, pour les configurations nécessitant un stockage en mémoire plus léger. La routine adapte le nombre de vecteurs gardés en mémoire à la capacité de l'ordinateur utilisé.

Le stockage de W dépasse les capacités actuelles des ordinateurs. Plusieurs solutions sont envisageables comme par exemple de réinitialiser toujours W à l'identité mais ce n'est guère satisfaisant (on retombe dans ce cas sur une méthode de type gradient conjugué). On peut remarquer que W est entièrement déterminée dans le cas de la méthode BFGS par  $W_1$  et les 2(k-1) vecteurs ( $s_k, y_k$ ). Le problème se ramène donc à un problème de stockage de 2(k-1)n réels si n est la taille du problème. On considère m le nombre de mise à jour de la matrice W. m n'est pas le nombre d'itérations de minimisation : c'est le nombre de terme de la suite calculée pour approcher la matrice W pour chaque itération de minimisation (en gros  $nmax \times n$  itérations de calcul au total).

Au bout d'un certain nombre d'itérations m', on n'a plus assez de place pour stocker plus de paires en mémoire : on ne garde alors que les m dernières, qui sont censées être les plus proches de  $x_k$ . On initialise avec l'identité, on construit une suite  $W_k$  qui s'approche de plus en plus de la valeur de la hessienne inverse au point  $x_k$  en limitant la place occupée en mémoire. Si un ordinateur a une capacité de stockage de m vecteurs, il faut limiter les itérations pour déterminer  $W_k$  à m itérations (m paires ( $s_k, y_k$ )). La méthode de quasi-newton construit un modèle local autour de  $x_k$ , on garde donc les m dernières paires en mémoire (qui sont censées réaliser la meileure approximation autour de  $x_k$ ).

$$s_1 = x_{k-m+1} - x_{k-m}, \dots, s_m = x_k - x_{k-1}$$
$$y_1 = g_{k-m+1} - g_{k-m}, \dots, s_m = g_k - g_{k-1}$$

### B.2 Minimisation de J en pratique

L'objectif de cette partie est de détailler la procédure utilisée dans OPAVAR, pour une utilisation pratique.

#### B.2.1 Détermination du pas

On utilise en pratique la formulation incrémentale du 4D-Var, le fonction coût est alors quadratique par rapport au vecteur de contrôle. La fonctionnelle est quadratique en 4D-Var complet ou 4D-Var réduit, c'est donc une méthode de pas optimal qui est utilisée pour la détermination du pas de descente.

### B.2.2 Une itération interne en pratique

Pour plus de simplicité dans les notations, on note ici x l'état initial, f la fonction coût et g son gradient, t le pas de descente et d la direction de descente. L'appel aux différentes routines se fait en cascade. Les indices relatifs aux différentes quantités représentent les différentes étapes du calcul.

• M1QN3 : initialisation de paramètres : méthode, nombre de paires, tableaux • M1QN3A – initialisation de paramètres (*itérations*, ..) – calcul de la norme du gradient initial  $g_1$ : gnorm = < g1, g1 >– calcul d'un préconditionnement initial pour mettre à l'échelle la première direction de descente (obtenue à partir du gradient initial :  $d = \alpha * q1$ ) ou relecture de l'itération précédente  $\rightarrow$  **Début boucle interne** sauvegarde dans une variable temporaire de  $f_1$  et  $g_1$ • OPTSTP – mise à jour du vecteur de contrôle  $x_1$  avec  $t_1$  (ébauche du pas) :  $x_2 = x_1 + t_1 * g_1$ – appel du simulateur (simul) pour avoir une nouvelle valeur  $f_2$ et  $g_2$  avec  $x_2$  en entrée de simul (indic=5 : linéaire tangent et adjoint sans impression de diagnostics) - Test sur la nouvelle norme du gradient obtenue - test du gradient (si param. dans namelist) - calcul du pas de descente optimal (formule classique)  $t_{opt}$ - calcul du nouveau  $x_3 = x_2 + t_{opt} * g_2$ - calcul du gradient  $g_3 = g_2 - \frac{\langle g_2, d \rangle}{\langle g_1, d \rangle} g_2$ - calcul de  $f_3 = f_2 + \frac{1}{2}t_{opt} * < g_2, d >$ • MLISO – appel de la routine simul pour diagnostics : écriture dans le fichier de sortie de $f_1(b)$  et  $f_1(o)$  et  $f_3$ • FIN MLISO renvoie les nouvelles valeurs de x, f et g• M1QN3A – mise à jour des paires (y, s) en fonction de t, g et d - mise à jour de la matrice  $\dot{W}$ - mise à jour du preconditionnement diagonal.  $\rightarrow$  Fin boucle interne FIN M1QN3A FIN M1QN3

### B.2.3 Les routines

D'un point de vue pratique, la routine m1qn3 fait appel à une routine spécifique au calcul du produit scalaire : prosca. Elle fait également appel à une routine spécifique au calcul de l'état courant simul, qui est vue dans la procédure de minimisation comme le simulateur et qui permet d'évaluer  $x_k$ ,  $J(x_k)$  et  $\nabla J(x_k)$  par la méthode adjointe.

En pratique la minimisation est arrêtée avant convergence, quand on considère que la fonction coût a atteint une décroissance suffisante par rapport à sa valeur initiale.

## Annexe C

# Assimilation variationnelle : le code OPAVAR

### C.1 Organisation du code

Le code OPAVAR est basé sur le code OPA avec un développement spécifique du code linéaire tangent et du code adjoint. Le développement et la mise en œuvre dans le Pacifique Tropical ont été réalisés par Weaver et Vialard et on peut trouv une description détaillée dans [65].

Le tableau suivant présente la mise en œuvre de l'assimilation variationnelle au niveau du code OPAVAR. On a une succession d'étapes réalisées par les différentes routines au cours d'une itération (ou boucle) de minimisation. A chaque itération, on détermine un état initial plus proche de la solution optimale. A l'aide de ce nouvel état initial, on recalcule l'équivalent modèle des observations. Ce calcul peut s'effectuer avec le modèle complet direct (on parle alors de *boucle externe*) ou avec le modèle linéaire tangent (on parle alors d'*itération interne*). On précise dans le tableau ci-dessous ce qui est fait dans le cas d'une boucle externe ou d'une itération interne.

Initialisation	
Lecture de l'ébauche	$\mathbf{x}^b$
Initialisation de la matrice $\mathbf{B}$	(Ecarts types et opérateur de corrélation)
Lecture des observations	$\mathbf{Y}^{o}$
Initialisation de l'opérateur d'observation	Н
Boucle de minimisation	
$1 . \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{OPA} \ (ou \ TL) \Longrightarrow \mathbf{y} = H(\mathbf{x})$	Intégration du modèle direct ( <i>ou linéaire tangent</i> ) à partir de l'état <b>x</b> et calcul de l'équivalent modèle des observations
$\mathbf 2$ . Calcul de $J_0 = \frac{1}{2} \int_0^T \ H(X) - Y_{obs}\ ^2 dt$	Evaluation de $J_0$
<b>3</b> . Opa-adjoint $U_{adj}(T) = 0$ $\implies U_{adj}(0) = \nabla_x(J_0)$	Evaluation de $ abla_x J_0$ par intégration rétrograde du modèle adjoint
<b>4</b> . Préconditionnement : $\mathbf{B}^{-1/2}( abla_x J_0)$	passage dans l'espace de contrôle
5 . Minimisation [m1qn3] $\Rightarrow$ état analysé $~\delta \mathbf{y}_a$	calcul de l'incrément dans l'espace de contrôle
$6$ . $\mathbf{B}^{1/2}.\delta\mathbf{v}^a=\delta\mathbf{x}^a$ :	passage de cet incrément dans l'espace modèle
$7$ . $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}^a$	Mise à jour de la valeur courante de l'état initial

Pour la première étape de la boucle, le texte en gras concerne les étapes réalisées lors de boucles externes, le texte en italique celles réalisées lors des itérations internes. L'intégration du modèle direct ne concerne ainsi que les boucles externes. L'équivalent modèle des observations, calculé après obtention de l'incrément d'analyse à l'itération précédente, est obtenu par intégration du modèle linéaire tangent, lors des boucles internes.

## C.2 Algorithme de minimisation

Pour la résolution du problème de minimisation, on utilise un algorithme itératif de descente à mémoire limitée, basé sur une méthode Quasi-Newton, développée par Gilbert et Lemarechal [25]. Cependant, la fonction coût dans le 4D–VAR incrémental étant quadratique, une méthode de pas optimal est employée dans notre cas. Le détail de l'algorithme utilisé est donné en annexe dans la partie B.

## C.3 Cas particulier des expériences jumelles

Lorsque qu'on effectue un cycle en expériences jumelles, on réalise une intégration du modèle direct à partir d'un état initial (différent de l'ébauche) appelé "état vrai" et l'on génère ainsi des

valeurs de la variable "observée", aux points d'observation. Ces "pseudo-observations" sont alors une sortie du modèle direct, moyennées pour obtenir la fréquence temporelle voulue.

Lors d'une expérience jumelle, le cas est plus favorable qu'un cas réel et la minimisation est réalisée avec très peu d'itérations. Pour rendre la minimisation un peu plus réaliste, on ajoute aux valeurs d'observations obtenues un bruit blanc gaussien.

## Annexe D

# Assimilation séquentielle : SESAM et le filtre SEEK

Dans cette partie, on présente d'une part les aspects pratiques de la mise en œuvre d'un cycle d'assimilation séquentielle avec le filtre SEEK ainsi que les travaux réalisés précédemment dans la zone qui nous intéresse particulièrement : le Pacifique Tropical.

### D.1 Organisation du code SEEK

A la différence d'OPAVAR, le filtre SEEK par l'intermédiaire de son outil de gestion performant SESAM (Testut, [54]), peut tourner avec n'importe quel modèle et donc en particulier OPA. C'est dans ce cas que nous nous placerons pour notre étude.

On a vu précédemment que le filtre SEEK posssède d'une part la possibilité de travailler en ordre réduit, c'est à dire exprimer les matrices de covariances d'erreur d'analyse et d'erreur de prévision dans un espace de dimension réduite, nécessitant donc un nombre de composantes raisonnable pour l'étude de systèmes réalistes. On exprime ces matrices à l'aide de vecteurs EOFs représentatifs de la varibilité de la dynamique océanique dans la zone étudiée (nous y reviendrons par la suite), de la même façon que dans le 4D-Var réduit.

L'utilisation du filtre SEEK offre de plus la possibilité de faire évoluer dans le temps, avec la dynamique du modèle, les vecteurs de la base de correction. Cette possibilité permet à la base de rester en accord avec la variabilité représentée par le modèle lors des étapes de prévision.

Concrètement parlant, la mise à jour de ces vecteurs par le modèle non-linéaire peut poser quelques problèmes numériques que nous aborderons plus loin dans la partie qui décrit nos propres expériences.



Schéma d'évolution de l'état analysé et des matrices de covariances d'erreurs au cours d'un cycle d'analyse séquentielle avec le filtre SEEK.

Les différents objets gérés par SESAM et qui apparaissent sur le schéma ci-dessus, sont tous au format NetCDF.

## D.2 Construction d'un fichier restart pour OPA

Les sorties de SESAM (champs 3D) doivent être interfacées avec OPA, pour la phase de prévision (et éventuellement l'évolution de la base). La construction du fichier restart nécessite la connaissance des champs complémentaires comme la fonction de courant, sa dérivée, le rotationnel, etc ... Dans un premier temps, nous complétons le champ issu de l'analyse séquentielle (un,vn,tn,sn) par les champs issus de la phase de prévision précédente (bsfn,rotn,hdivn, ...) et en recalculant immédiatement tous les champs diagnostiques.

Le choix du schéma utilisé pour le restart est le même que dans le cas du 4D-Var : nous ne disposant que d'un seul champ pour effectuer le démarrage d'OPA. Il est toutefois possible de reconstruire un champ décalé d'un pas de temps pour effectuer un démarrage en Leap-frog. Dans ce cas, la qualité de l'approximation reste à évaluer. Nous avons choisi d'utiliser un schéma d'Euler, comme dans le cas du 4D-Var.

## D.3 Les différentes versions

C.-E. Testut, [54], J.-M. Brankart, ainsi que l'équipe MEOM, ont grandement contribué au développement du logiciel SESAM et ainsi permis son extension à de nouvelles utilisations, liées à des contraintes nouvelles comme par exemple, l'utilisation du filtre SEEK sur des zones très importantes (jusqu'à des configurations de 8.10<sup>6</sup> points de grille). Lors de la mise en œuvre d'expériences d'assimilation sur des configurations nouvelles, les adaptations nécessaires ne sont pas seulement numériques ou informatiques mais aussi méthodologiques. En effet, les approximations successives peuvent, dans un cas particulier, se montrer trop restrictives. Il s'agit alors d'identifier la "défaillance" et d'y remédier. C'est le cas, par exemple, avec le développement du filtre SEEK local, où la correction n'est plus uniquement propagée en 3D par les EOFs sur l'ensemble du domaine, mais est contrainte par la définition d'une zone d'influence à n'avoir d'impact que dans les zones réellement pertinentes.