



**HAL**  
open science

# Modélisation du rayonnement thermique par une approche électromagnétique. Rôle des ondes de surface dans le transfert d'énergie aux courtes échelles et dans les forces de Casimir

Jean-Philippe Mulet

► **To cite this version:**

Jean-Philippe Mulet. Modélisation du rayonnement thermique par une approche électromagnétique. Rôle des ondes de surface dans le transfert d'énergie aux courtes échelles et dans les forces de Casimir. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2003. Français. NNT : . tel-00008907

**HAL Id: tel-00008907**

**<https://theses.hal.science/tel-00008907>**

Submitted on 30 Mar 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° D'ORDRE :

UNIVERSITÉ PARIS XI  
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

PAR

Jean-Philippe MULET

**Sujet :** Modélisation du rayonnement thermique par une approche électromagnétique. Rôle des ondes de surface dans le transfert d'énergie aux courtes échelles et dans les forces de Casimir.

Soutenue le 31 Mars 2003 devant la Commission d'examen composée de :

MM.	BLOCH	D.	Rapporteur
	CHAVEL	P.	Président
	GREFFET	J.-J.	
	HENKEL	C.	
	JOULAIN	K.	
	VALLÉE	F.	Rapporteur



# Préface

Lorsque l'on termine un travail, ou un manuscrit, il est souvent de coutume de le dédier à un ou des proches, à quelqu'un de cher ou encore à quelqu'un qui a marqué votre vie et à qui vous voulez rendre hommage. Je ne dérogerais donc pas à la règle. Et j'aimerais donc dédier ce manuscrit à Monsieur Maurice Garnier.

Monsieur Garnier a été mon professeur de physique lorsque j'étais en classes préparatoires au Lycée La martinière-Monplaisir, à Lyon. Je lui dédie ce travail pour le remercier de m'avoir donné non seulement le goût pour la physique (le glaçon dans le pastis...) mais également la rigueur nécessaire pour en faire.

De cette époque pas si lointaine, j'ai gardé en plus de mes cours de physique, ce très beau texte d'Hubert Reeves (tiré de "Patience dans l'Azur", me semble-t-il...), texte qu'il nous avait distribué alors. Depuis, j'ai très souvent relu ce texte traitant des amours conflictuelles de la poésie et de la physique, sûrement parce que j'y ai trouvé une part de vérité, de ma vérité. Les dernières phrases du texte laissent penser qu'il y a une issue heureuse au conflit. Je vous invite donc à méditer ce texte.

## L'empire des nombres

Un grand ciel bleu vif met en relief les pastels et les fauves du feuillage d'automne. Parmi les sombres conifères et les érables écarlates, les trembles agitent leurs feuilles luisantes au gré du vent matinal. Mouvements rapides, oscillations rythmées, comme un scintillement de reflets argentés sur la mer.

Encadré par les troncs blancs, ce frémissement ou plutôt ce fourmillement de lumières vives procure à l'œil une sensation de plénitude et de perfection. Tout ici prend sa juste place.

L'esprit humain ne se contente pas d'admirer. Il veut aussi comprendre. Aujourd'hui, après deux mille ans de recherches scientifiques, nous avons appris beaucoup. Nous savons pourquoi le ciel est bleu ou vert ou rose, et pourquoi le feuillage change de couleur. Nous connaissons les lois qui régissent le balancement gracieux des feuilles au bout de leur pétiole. Nous sommes en mesure de calculer le nombre de photons que ces frondaisons reflètent vers nos yeux émerveillés.

Mais la magie de ce spectacle n'est-elle pas menacée par la perfection de ces explications? La poésie a-t-elle encore quelque chose à dire quand la science est passée par là? Le charme indicible de ce matin d'automne résiste-t-il à l'analyse des mécanismes délicats que l'œil inexorable du chercheur a su y détecter?

Cette interrogation revient régulièrement dans les questions à la fin de mes conférences. Elle manifeste une préoccupation très présente chez nos contemporains. Si je l'aborde dans ces pages, c'est aussi parce qu'au carrefour de mes goûts naturels pour la science et la poésie, je me la suis souvent posée.

## Coucher de soleil sur le Pacifique

Mon premier souvenir à ce sujet remonte à l'âge de dix-huit ans. Je me trouvais alors sur la côte ouest du Canada, pour un stage d'été au Dominion Astrophysical Observatory.

Le soir, j'allais régulièrement voir le Soleil se coucher sur l'océan. L'événement que je vais conter eut lieu à l'occasion d'un crépuscule particulièrement somptueux dont la moindre teinte, après quarante ans, est encore gravée dans ma mémoire.

Au loin, les sommets enneigés des montagnes côtières passent lentement du blanc au rose. Reflétées sur les eaux calmes de la mer, ces couleurs s'étalent sur les longues houles venues du large.

Dans la douce contemplation à laquelle je m'abandonne, une pensée soudain me trouble profondément et "m'arrache à ma rêverie comme une dent" aurait dit Jacques Prévert<sup>1</sup>.

Les spectacles maritimes me sont depuis longtemps familiers. Interminablement, j'ai arpenté les côtes abruptes de la Gaspésie<sup>2</sup> et les plages immenses du golfe Saint-Laurent. Mais depuis ma dernière visite à l'océan quelque chose s'est passé qui prend à cette instant toute son importance. Étudiant au département de physique de l'université de Montréal, j'ai fait la connaissance, quelques mois plus tôt, des équations de Maxwell.

Maxwell est un physicien écossais du siècle dernier. Nous lui devons, en grande partie, la théorie de la lumière. Les équations dont il est l'auteur nous fournissent une excellente représentation mathématique des comportements lumineux. Réflexions, réfractions, diffractions, interférences; tous les jeux de la lumière naissent de l'interaction des atomes avec des champs électriques et magnétiques. Superbe, mathématiquement élégante, et physiquement efficace, la théorie de Maxwell déclenche l'enthousiasme de l'étudiant qui la rencontre pour la première fois. C'est un des grands moments de l'apprentissage de la physique.

Devant l'océan serein, glorieusement coloré par le couchant, une voix intérieure se fait entendre: "Ces dessins, ces formes, ces teintes chatoyantes sont des solutions mathématiques des équations de Maxwell. Parfaitement prévisibles et calculables. Rien de plus."

Dans ma tête, c'est la panique. La crainte de voir se désintégrer le plaisir exquis qui me possède. Dois-je y renoncer à tout jamais maintenant que j'ai regardé par-dessus la clôture et goûté au fruit empoisonné de la connaissance? Autant ce sacrifice cruel me paraît inacceptable, autant il me semble impossible de faire marche arrière. Dans mon ciel intérieur, les équations de Maxwell se dressent, froides, inexorables. Leur lumière crue abolit, me semble-t-il, la fragile magie du ciel rose et de la mer moirée.

Secoué par ce conflit, je quitte le paysage devenu insoutenable pour rentrer chez moi à pied, en longeant les séquoias géants du Beacon Hill Park<sup>3</sup>. Un violent mal de tête me saisit, comme un coin de métal enfoncé dans mon crâne. Enfermé dans ce dilemme, je comprends alors le sens premier du mot "schizophrénie", déchirure mentale.

Cette soirée m'a marqué pour longtemps. Elle est à l'origine d'un long parcours qui se poursuit encore aujourd'hui. À la recherche d'une solution ou plutôt d'une réconciliation, j'ai été amené à explorer de nombreuses avenues. Je me suis engagé sur des routes quelquefois inattendues, dans l'espoir de retrouver le droit de jouir paisiblement du spectacle des vagues roses sur la mer tranquille.

---

1. J. Prévert, "Promenade de Picasso", *Paroles*, pp. 239-241, Éditions Gallimard (1949). Les vers originaux sont "(...) le peintre arraché à ses songes / comme une dent."

2. Péninsule du Canada (Québec), entre le fleuve et le golfe du Saint-Laurent et la baie des Chaleurs.

3. Parc situé dans la ville de Victoria (Île Vancouver), en Colombie Britannique (Canada).

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\operatorname{div}_{\mathbf{r}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t)$$

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(\mathbf{r}, t)$$

Les équations de *Maxwell*



# Remerciements

Cette thèse a été réalisée au laboratoire EM2C de l'École Centrale de Paris entre Janvier 2000 et Janvier 2003. Je tiens à remercier ses directeurs successifs, Jean-Pierre Martin et Nasser Darabiha de m'y avoir accueilli dans d'excellentes conditions.

Je remercie Pierre Chavel de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury et d'avoir porté de l'intérêt à mon travail. Je remercie également Daniel Bloch et Fabrice Vallée d'avoir accepté le difficile mais essentiel travail de rapporteur. Je remercie également Carsten Henkel d'avoir fait partie de ce jury, de m'avoir accueilli pendant une semaine à Potsdam et pour les nombreuses discussions que nous avons eu ensemble.

Je remercie Jean-Jacques Greffet de m'avoir fait le plaisir de diriger cette thèse. En effet, travailler avec lui est toujours un plaisir et une expérience enrichissante. Sa rigueur et sa curiosité scientifiques n'ont d'égal que sa capacité de rendre les choses simples à la compréhension. Sa confiance et son soutien durant ces trois années et surtout pendant la difficile période de rédaction ont été pour moi très précieux. Je le remercie également pour son sens de la pédagogie et pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés lorsque je me retrouvais face aux élèves. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et de ma reconnaissance.

Je remercie Karl Joulain de m'avoir également fait le plaisir d'encadrer cette thèse. J'espère que tu garderas un bon souvenir de ton premier thésard ! Pour ma part, je me rappellerais toujours cette soirée de février ou mars 2001 où, assis à la table de la cafétéria, nous essayions vainement de mettre en défaut le calcul de Lifshitz pour la force de Casimir... Il s'avéra, une fois de plus, qu'il avait raison. Au-delà de cela, je le remercie pour sa disponibilité et son enthousiasme de tous les instants, pour son immense culture scientifique et non scientifique. J'espère que nous aurons l'occasion de collaborer fortement à l'avenir.

Je voudrais également remercier Rémi Carminati pour toujours avoir pris le temps de répondre à mes questions, parfois naïves, parfois ardues... Je le remercie de me donner un exemple de ce que doit être un bon et jeune enseignant. J'espère que nous aurons encore l'occasion de courir quelques centaines (voire quelques milliers...) de kilomètres ensemble !

Je n'oublie pas Sebastian Volz pour m'avoir souvent aidé durant ma dernière année de thèse. Ses éclairages de thermique et nanothermique m'ont toujours été très utiles pour y voir plus clair.

Pour paraphraser un célèbre slogan publicitaire des années quatre-vingt (ou octente si vous préférez...), je dirais : "s'il n'existait pas, il faudrait l'inventer !". Il s'agit bien évidemment de Rachid Elaloufi. Je le remercie pour ces trois années passées ensemble au laboratoire à parler de physique ou de politique autour d'un café ou d'une table ou encore à résoudre des énigmes mathématiques. Je crois que c'est à ses côtés que l'on apprend le sens du mot "amitié".

Je remercie tous les thésards et thésardes du laboratoire pour l'ambiance qu'ils ont pu y mettre. Je pense particulièrement à Stéphane, François, Marjorie et Marine. Je pense également à mes divers "camarades de rédaction" (outre Rachid et Stéphane bien sûr) : Stéphane J., Thierry, Christine, Alix et Ngoc.



Je veux également témoigner de ma reconnaissance à mes parents sans lesquels je ne serais pas arrivé là où je suis. Je pense également à mes soeurs, Florence, Sophie et Marie ainsi qu'à Olivier et à mon filleul Hugo.

Je n'oublie pas bien évidemment les "Totos", compagnons de toujours: Al (avant-centre), Arno (ailier gauche), Gaby (milieu droit), Giac (gardien de but), Grosch (meneur de jeu), Gurw (arrière droit), Max (milieu gauche), Ren's (stoppeur), Vinz (ailier droit) et Yan's (libéro).

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction aux polaritons de surface</b>	<b>5</b>
1.1 Physique des polaritons . . . . .	6
1.1.1 Relation de dispersion pour les ondes électromagnétiques . . . . .	6
1.1.2 Modes optiques transverses dans un plasma . . . . .	7
1.1.3 Oscillations longitudinales dans un plasma . . . . .	7
1.1.4 Plasmons de volume . . . . .	8
1.1.5 Polaritons de volume . . . . .	9
1.2 Plasmons et phonon-polaritons de surface . . . . .	13
1.2.1 Description du système considéré . . . . .	13
1.2.2 Résolution électromagnétique . . . . .	13
1.2.3 Conditions d'existence d'un polariton de surface sur une interface plane en l'absence de pertes . . . . .	15
1.3 Plasmon-polariton à l'interface vide/métal . . . . .	16
1.3.1 Relation de dispersion . . . . .	16
1.3.2 Extension spatiale perpendiculairement à l'interface . . . . .	17
1.3.3 Atténuation le long de l'interface . . . . .	18
1.4 Phonon-polariton à l'interface vide/cristal polaire . . . . .	18
1.4.1 Relation de dispersion . . . . .	18
1.4.2 Extension spatiale perpendiculairement à l'interface . . . . .	19
1.4.3 Atténuation le long de l'interface . . . . .	21
1.5 Techniques d'excitation de polaritons de surface . . . . .	21
1.5.1 Configuration Kretschmann . . . . .	21
1.5.2 Configuration Otto . . . . .	22
1.5.3 Pointe en champ proche . . . . .	22
1.6 Relation de dispersion pour un matériau avec pertes . . . . .	22
1.6.1 Position du problème . . . . .	22
1.6.2 Exemple d'un cristal polaire avec pertes . . . . .	23
1.6.3 Discussion physique sur la manière d'obtenir la relation de dispersion . . . . .	26
<b>2 Rayonnement thermique en champ proche et émission cohérente de lumière</b>	<b>29</b>
2.1 Modélisation du rayonnement thermique . . . . .	32
2.1.1 Rappels sur l'approche radiométrique . . . . .	32
2.1.2 Le rayonnement thermique en électromagnétisme . . . . .	36
2.1.3 Développement en onde plane et formalisme de Green . . . . .	37
2.2 Densité d'énergie au-dessus d'une interface . . . . .	39
2.2.1 Système physique étudié . . . . .	39
2.2.2 Calcul de la densité d'énergie . . . . .	39
2.3 Densité d'énergie pour le SiC . . . . .	45
2.3.1 Divergence électrostatique . . . . .	46

2.3.2	Contribution du phonon-polariton . . . . .	50
2.3.3	Densité d'énergie "champ lointain" . . . . .	50
2.3.4	Densité d'états électromagnétiques . . . . .	51
2.3.5	Densité d'états associée au polariton de surface . . . . .	51
2.4	Densité d'énergie pour d'autres matériaux . . . . .	52
2.4.1	Cas du verre . . . . .	52
2.4.2	Cas du silicium dopé . . . . .	53
2.5	Émissivité champ proche . . . . .	58
2.5.1	Émissivité pour les ondes propagatives . . . . .	58
2.5.2	Émissivité pour les ondes évanescentes . . . . .	60
2.6	Spectroscopie locale . . . . .	60
2.6.1	Principe de la manipulation . . . . .	60
2.6.2	Principe de la reconstruction de la constante diélectrique . . . . .	63
2.7	Émission thermique cohérente . . . . .	65
2.7.1	Introduction . . . . .	65
2.7.2	Position du problème . . . . .	65
2.7.3	Résultats obtenus pour l'émissivité directionnelle . . . . .	69
2.7.4	Spectres en réflectivité . . . . .	72
2.7.5	Discussion sur l'émission cohérente . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Transfert radiatif entre deux plans à courtes distances</b>	<b>79</b>
3.1	Description du système et du problème à résoudre . . . . .	81
3.1.1	Géométrie du système considéré . . . . .	81
3.1.2	Position du problème . . . . .	81
3.2	Approche radiométrique . . . . .	82
3.2.1	Calcul <i>ab initio</i> . . . . .	82
3.2.2	Critiques de l'approche radiométrique . . . . .	83
3.3	Approche électromagnétique . . . . .	85
3.3.1	Coefficient de transfert radiatif . . . . .	85
3.3.2	Calcul électromagnétique complet . . . . .	86
3.3.3	Comparaison des deux approches . . . . .	88
3.4	Rôle des ondes de surface . . . . .	89
3.4.1	Exemple du SiC . . . . .	90
3.4.2	Comparaison avec d'autres matériaux . . . . .	92
3.4.3	Développement asymptotique . . . . .	96
3.4.4	Comparaison avec la conduction . . . . .	97
3.5	Exemple du silicium dopé . . . . .	97
3.5.1	Coefficient de transfert radiatif . . . . .	98
3.5.2	Influence du dopage sur le transfert radiatif . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Transfert radiatif à courtes distances entre une particule et un substrat</b>	<b>103</b>
4.1	Article APL <b>78</b> , 2931 (2001) . . . . .	104
4.1.1	Introduction . . . . .	104
4.1.2	Évaluation des échanges radiatifs entre la particule et le substrat . . . . .	104
4.1.3	Résultats numériques . . . . .	106
4.1.4	Conclusion . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Dynamique de la relaxation électronique de nanoparticules métalliques dans une matrice diélectrique</b>	<b>111</b>
5.1	Position du problème . . . . .	112
5.1.1	Un peu de bibliographie . . . . .	112

5.1.2	Le modèle à deux températures . . . . .	112
5.1.3	Interaction directe entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice . . . . .	114
5.2	Régime basse fluence . . . . .	114
5.2.1	Expression théorique du transfert d'énergie entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice . . . . .	114
5.2.2	Validité de notre approche . . . . .	115
5.2.3	Modélisation par un terme de surface . . . . .	117
5.3	Régime haute fluence . . . . .	119
5.3.1	Position du problème . . . . .	119
5.3.2	Résultats obtenus . . . . .	120
<b>6</b>	<b>La force de Casimir entre deux plans</b>	<b>123</b>
6.1	Historique de l'“effet Casimir” . . . . .	125
6.1.1	La découverte de Casimir . . . . .	125
6.1.2	Les contributions majeures . . . . .	127
6.1.3	Les enjeux . . . . .	130
6.2	Calcul de la force de Casimir . . . . .	131
6.2.1	Position du problème . . . . .	131
6.2.2	Comparaison avec le calcul de Lifshitz . . . . .	134
6.2.3	Validation de la méthode . . . . .	135
6.3	Force de Casimir pour un métal . . . . .	136
6.3.1	Cas du modèle plasma à température nulle . . . . .	136
6.3.2	Cas d'un métal réel à température nulle . . . . .	137
6.3.3	Cas d'un métal réel à température non nulle . . . . .	138
6.4	Force de Casimir à courte distance . . . . .	139
6.4.1	Force en fonction de la distance . . . . .	139
6.4.2	Spectre de la force . . . . .	140
6.4.3	Force de Casimir et relation de dispersion pour le SiC . . . . .	142
6.4.4	Force de Casimir et relation de dispersion pour un métal . . . . .	145
6.4.5	Classification en termes de modes “liants” et “anti-liants” . . . . .	147
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>152</b>
<b>A</b>	<b>Modélisation des propriétés électromagnétiques des matériaux</b>	<b>153</b>
A.1	Cas des métaux . . . . .	153
A.2	Cas des semi-conducteurs dopés . . . . .	155
A.3	Cas des matériaux polaires et des semi-conducteurs . . . . .	160
<b>B</b>	<b>Théorème de Fluctuation-Dissipation</b>	<b>165</b>
B.1	Théorème de fluctuation-dissipation . . . . .	165
B.1.1	Hypothèses du modèle . . . . .	165
B.1.2	La formulation du théorème de fluctuation-dissipation . . . . .	166
B.2	Localité de la constante diélectrique . . . . .	168
<b>C</b>	<b>Tenseur de Green de l'espace libre</b>	<b>171</b>
C.1	Formalisme de Green . . . . .	171
C.1.1	Position du problème . . . . .	171
C.1.2	Introduction du tenseur de Green . . . . .	171
C.2	Tenseur de Green pour le champ électrique . . . . .	172
C.2.1	Transformée de Fourier du tenseur de Green $\leftrightarrow E$ . . . . .	172
C.2.2	Détermination de l'équation vérifiée par $\mathfrak{E}_0$ . . . . .	173

C.2.3	Inversion formelle du tenseur $\left[ (k^2 - k_0^2 \epsilon) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}} \right]$ . . . . .	174
C.2.4	Expression du tenseur de Green $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$ de l'espace libre . . . . .	175
C.3	Développement de Weyl . . . . .	175
C.3.1	Idée du développement de Weyl . . . . .	175
C.3.2	Expression du tenseur $\overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K}, z, z')$ . . . . .	175
C.3.3	Formalisme de Sipe . . . . .	176
C.3.4	Expression du tenseur $\overset{\leftrightarrow H}{\mathbf{g}}_0(\mathbf{K}, z, z')$ . . . . .	177
<b>D</b>	<b>Tenseur de Green à une interface</b> . . . . .	<b>179</b>
D.1	Préliminaires . . . . .	179
D.1.1	Géométrie du problème . . . . .	179
D.1.2	Notations de Sipe (Sipe 1987) . . . . .	179
D.1.3	Définition des facteurs de Fresnel pour une interface plane . . . . .	180
D.2	Relations sur les facteurs de Fresnel . . . . .	181
D.2.1	Relations préliminaires sur les vecteurs d'onde . . . . .	181
D.2.2	Relations sur les facteurs de Fresnel . . . . .	181
D.2.3	Formules utiles avec les facteurs de Fresnel . . . . .	182
D.3	Tenseurs de Green à une interface pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ . . . . .	182
D.3.1	Tenseurs de Green en réflexion . . . . .	182
D.3.2	Tenseurs de Green en transmission . . . . .	182
D.3.3	Diffraction électromagnétique par un réseau . . . . .	183
<b>E</b>	<b>Tenseur de Green à deux interfaces</b> . . . . .	<b>185</b>
E.1	Préliminaires . . . . .	185
E.1.1	Géométrie du problème . . . . .	185
E.1.2	Notations de Sipe . . . . .	186
E.1.3	Définition des facteurs de Fresnel pour un système à deux interfaces planes . . . . .	186
E.2	Tenseurs de Green à deux interfaces pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ . . . . .	188
E.2.1	Tenseurs de Green en transmission . . . . .	188
E.2.2	Tenseurs de Green en transmission dans l'espace intermédiaire (sens des $z$ positifs) . . . . .	188
E.2.3	Tenseurs de Green en transmission dans l'espace intermédiaire (sens des $z$ négatifs) . . . . .	188
E.3	Calcul du vecteur de Poynting . . . . .	189
E.3.1	Position du problème . . . . .	189
E.3.2	Calcul du vecteur de Poynting du milieu 1 vers le milieu 2 . . . . .	189
E.3.3	Contribution des différentes ondes . . . . .	191
E.4	Calcul de la force de Casimir . . . . .	192
E.4.1	Position du problème . . . . .	192
E.4.2	Calcul du tenseur des contraintes . . . . .	192
E.4.3	Contribution des différentes ondes . . . . .	195
E.4.4	Résultat final . . . . .	197
E.4.5	Approche adoptée par Lifshitz . . . . .	200
E.5	"Mode" de surface ou "résonance" de surface . . . . .	203
<b>F</b>	<b>Approximation dipolaire pour une particule sphérique</b> . . . . .	<b>205</b>
F.1	Le modèle dipolaire pour une particule sphérique . . . . .	205
F.1.1	Hypothèses de l'approximation dipolaire . . . . .	205
F.1.2	Polarisabilité d'une particule sphérique . . . . .	205

F.2	Théorème de fluctuation-dissipation pour des dipôles fluctuants . . . . .	206
F.3	Tenseur de Green pour un dipôle . . . . .	207
<b>G</b>	<b>Tenseur de Green en approximation électrostatique pour un système sphère-</b>	
	<b>dipôle</b>	<b>209</b>
G.1	Position du problème . . . . .	209
G.1.1	Géométrie du système considéré . . . . .	209
G.1.2	Calcul de la fonction de Green électrostatique . . . . .	210
G.1.3	Tenseur de Green électrostatique pour une particule sphérique . . . . .	210
G.2	Puissance nette échangée . . . . .	212
G.2.1	Méthode de calcul . . . . .	212
G.2.2	Quelques relations sur les polynômes de Legendre . . . . .	213
G.2.3	Expression du taux de chauffage . . . . .	214
	<b>Références</b>	<b>215</b>



# Introduction

Cette thèse est consacrée à la modélisation du *rayonnement thermique*, abordée d'un point de vue *électromagnétique*. Plus précisément, elle s'applique à l'étude de l'excitation thermique d'*ondes de surface* (plasmon-polaritons ou phonon-polaritons) susceptibles d'exister pour certains matériaux métalliques ou diélectriques. L'originalité de ce travail a consisté à évaluer la contribution de ces ondes de surface :

1. à l'émission thermique de matériaux micro- ou nanostructurés (*réseaux*) ;
2. aux transferts d'énergie par rayonnement dans des systèmes de taille micro- ou nanométrique ;
3. aux forces de Casimir dans la limite électrostatique.

Le cadre de notre étude est donc celui de l'électrodynamique et les deux principales hypothèses que nous faisons dans ce travail sont les suivantes :

- les propriétés électromagnétiques des matériaux étudiés sont décrites au moyen de la permittivité ou *constante diélectrique*  $\varepsilon(\omega)$  complexe, dépendant de la pulsation  $\omega$  du champ électromagnétique interagissant avec la matière. Cette grandeur *macroscopique* est supposée être une grandeur *locale* spatialement ;
- les systèmes physiques considérés sont à l'*équilibre thermodynamique local* (ETL). À chaque instant  $t$  et en chacun des points  $\mathbf{r}$ , nous pouvons définir une température d'équilibre  $T(\mathbf{r}, t)$ .

Cette thèse fait notamment suite aux travaux réalisés par J. Le Gall (Le Gall 1996) sur les propriétés d'émission de lumière par des réseaux de carbure de silicium (SiC) et également aux résultats obtenus par Carminati et Greffet (1999), par Shchegrov *et al.* (2000) et par Henkel *et al.* (2000) concernant la cohérence spatiale et temporelle des sources thermiques pouvant supporter des ondes de surface. Il a été notamment montré que la longueur de corrélation du champ électromagnétique rayonné thermiquement par une source pouvait être beaucoup plus grande que la valeur usuelle de  $\lambda/2$  à une distance de la surface inférieure à la longueur d'onde. De la même manière, la densité d'énergie électromagnétique au voisinage de la surface de la source pouvait être supérieure à celle du vide de plusieurs ordres de grandeur et *quasi* monochromatique.

De plus, ce travail s'inscrit dans l'effort de modélisation réalisé ces dernières années pour appréhender les phénomènes physiques qui apparaissent lorsque les dimensions des systèmes étudiés diminuent (Abramson et Tien 1999). En effet, la miniaturisation constante des composants électroniques (circuits intégrés, puces,...), optiques (guides d'onde, diodes lasers,...), optoélectroniques, ou même mécaniques (MEMS) oblige à réduire l'échelle d'étude à des dimensions comprises typiquement entre 10 nm et 10  $\mu\text{m}$ . La course à la performance rend ces composants de plus en plus consommateurs d'énergie et la quantité de chaleur qu'ils doivent dissiper va croissant. Il en résulte parfois des élévations localisées (dans le temps et l'espace), de température qui pénalisent notamment leur fiabilité et compromettent leur durée de vie. Ainsi, il apparaît essentiel, non seulement



de prédire les échanges d'énergie dans de tels systèmes, mais aussi de trouver des moyens efficaces pour évacuer l'énergie qu'ils produisent.

La température typique des composants considérés peut être comprise entre 300 K et 500 K. Ces températures correspondent, *via* la loi de déplacement de Wien, à des longueurs d'onde où le rayonnement thermique est maximal (cas du corps noir) comprises entre 6  $\mu\text{m}$  et 10  $\mu\text{m}$ . Les tailles caractéristiques que nous étudions (entre 10 nm et 10  $\mu\text{m}$ ) sont donc du même ordre ou inférieures à cette longueur d'onde, si bien qu'il est nécessaire de tenir compte des effets purement *ondulatoires*, comme les interférences et l'existence d'ondes évanescentes ou de surface. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté une approche électromagnétique du rayonnement thermique puisque celle-ci tient compte de l'ensemble de ces phénomènes.

Par ailleurs, nous avons été également conduits à aborder un sujet voisin : l'“effet Casimir”. Cet effet se caractérise par le fait que deux miroirs parfaits à température nulle s'attirent mutuellement du fait des fluctuations quantiques du vide qui existent dans la cavité qu'ils forment. À très courte distance (lorsque les effets de retard sont négligeables), cette force s'interprète simplement comme l'interaction des polaritons existant à la surface de chaque miroir. Ce problème a fait l'objet de nombreuses contributions récemment et nous avons voulu l'aborder car le formalisme que nous avons développé pour le transfert radiatif s'appliquait naturellement à ce problème.

Le chapitre 1 est un chapitre introductif à la physique des polaritons de surface, phénomène central dans notre travail. Nous étudions les conditions d'existence des ondes de surface sur une interface plane séparant le vide d'un matériau quelconque. Nous illustrons ce chapitre par deux cas concrets : celui des *plasmon-polaritons* de surface pour un métal et celui des *phonon-polaritons* de surface pour un matériau polaire. Nous examinons alors la *relation de dispersion* de ces ondes de surface et discutons en détail la manière de la calculer ou de la déterminer expérimentalement.

Dans le chapitre 2, nous rappelons quelques résultats sur le rayonnement thermique tel qu'il a été formulé par Planck (1901) et nous décrivons le formalisme développé initialement par Ry-  
tov (1958) pour décrire le rayonnement thermique dans le cadre de l'électrodynamique classique. Notre premier exemple d'application de ce formalisme concernera le calcul de la densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane et l'application de nos résultats au dimensionnement d'une expérience de spectroscopie locale d'émission thermique. Enfin, nous montrerons qu'un matériau, dont la surface a été microstructurée avec un réseau lamellaire et qui supporte des ondes de surface, présente des propriétés d'émission tout-à-fait particulières. Il constitue une *source cohérente de rayonnement thermique*, à la fois spatialement (directivité) et spectralement (monochromaticité) et qui présente l'“effet Wolf” (Wolf 1986).

Nous aborderons ensuite, dans le chapitre 3, le problème du *transfert radiatif entre deux milieux semi-infinis* séparés par une faible épaisseur de vide, de 10 nm à plusieurs dizaines de microns. Nous verrons encore les limites d'une approche “radiométrique” du transfert radiatif et la nécessité d'utiliser une approche électromagnétique. Dans le cas du carbure de silicium ou du silicium dopé, nous verrons que le transfert par rayonnement peut être très important, voire du même ordre de grandeur que la conduction (lorsque le vide est remplacé par un gaz transparent), lorsque les deux milieux sont suffisamment proches. Dans ce cas-là, la prise en compte des ondes de surface est alors essentielle pour évaluer précisément le transfert.

Le chapitre 4 est l'étude du *transfert radiatif entre un substrat* (milieu semi-infini plan) *et une particule sub-longueur d'onde*, traitée dans le cas de l'approximation dipolaire. De la même manière que précédemment, nous montrerons que l'échange d'énergie entre la particule et l'échantillon peut être considérablement amplifié notamment lorsque celle-ci est à une distance très faible de la surface (régime “champ proche”). Nous avons alors examiné la configuration où l'on approcherait une particule “chaude” près de la surface et calculé la distribution d'énergie à l'intérieur du substrat. Un confinement spatial de cette distribution d'énergie nous fera alors envisager une application au chauffage localisé.

Dans le même thème, le chapitre 5 s'intéresse au cas de nanoparticules métalliques enfouies dans une matrice diélectrique. Le but est d'expliquer certains résultats expérimentaux obtenus lorsque ces nanoparticules sont illuminées par des impulsions laser femtosecondes. Le problème est alors d'étudier la *dynamique de relaxation électronique* en régime basse fluence (variation de la température électronique faible) et haute fluence (variation importante) et notamment l'influence de la taille de la particule. Nous verrons que l'hypothèse d'un mécanisme supplémentaire d'échange d'énergie, qui serait *surfactive*, permet alors de rendre compte de la plupart des comportements expérimentaux observés.

Le dernier chapitre concerne les *forces de Casimir* et le problème de l'énergie du vide dont nous avons fait un bref historique. Pour le calcul des forces de Casimir, nous avons utilisé le même formalisme que précédemment et adopté une approche mathématique différente de celle qui est couramment utilisée. Même si notre approche n'est pas innovante, elle nous permettra de donner une interprétation originale des résultats. Nous l'avons d'ailleurs validée sur un cas simple et nous avons retrouvé de nombreux résultats sur les forces de Casimir pour des métaux, à température nulle ou non. Des simulations numériques que nous avons réalisées sur du carbure de silicium et sur de l'aluminium, nous permettent alors d'identifier clairement le rôle joué par les ondes de surface dans la force de Casimir à courte distance. Nous verrons notamment que le couplage des ondes de surface conduit à l'apparition de "*modes liants*" (forces attractives) et de "*modes anti-liants*" (forces répulsives).



# Chapitre 1

## Introduction aux polaritons de surface

### Introduction

Ce premier chapitre introductif concerne les polaritons en général, et les polaritons de surface en particulier. Nous verrons que sous cette dénomination de "polariton" sont regroupés plusieurs phénomènes physiques, parfois différents mais dont le point commun est de décrire l'interaction entre un champ électromagnétique et la matière (électrons dans un métal, ions dans un cristal, excitons). Ce chapitre se veut didactique et c'est la raison pour laquelle quelques rappels ont été faits au sujet de la physique des polaritons de volume. De nombreuses précisions à ce sujet abondent (Kittel 1998, Ziman 1960, Ashcroft et Mermin 1976). Ils permettront de comprendre un peu mieux les processus physiques sous-tendus lorsque nous parlerons de polaritons de surface.

Les *polaritons de surface* apparaissent à l'interface entre deux milieux (pour notre part, nous n'avons considéré ici que le cas de l'interface plane). Ils représentent des solutions particulières des équations de Maxwell qui correspondent à des ondes se propageant parallèlement à l'interface et dont l'amplitude décroît exponentiellement lorsque l'on s'éloigne perpendiculairement à celle-ci. C'est pourquoi ces ondes sont souvent appelées "ondes de surface" : elles restent confinées à proximité de l'interface. Pour une étude complète et détaillée des polaritons de surface, on pourra consulter Raether (1988) et Agranovich et Mills (1982). Une bibliographie importante est également disponible dans Le Gall (1996).

Pour étudier ces ondes de surface, nous avons résolu le problème électromagnétique correspondant à la propagation d'une onde à l'interface entre deux milieux qui resterait *confinée* sur cette interface. Nous en avons déduit une *relation de dispersion* qui relie la fréquence d'apparition du polariton avec les caractéristiques spatiales du champ électromagnétique. Cette relation de dispersion a ensuite été étudiée dans deux cas précis : dans le cas d'une interface vide/métal avec du cuivre et dans le cas d'une interface vide/diélectrique avec du carbure de silicium. Enfin, nous avons décrit différents montages expérimentaux permettant d'étudier les polaritons de surface et montré que la manière de réaliser les expériences importait beaucoup, notamment lorsque l'on voulait tracer la relation de dispersion avec des matériaux présentant des pertes.

## 1.1 Physique des polaritons

Avant d'aborder la théorie des polaritons de surface, nous allons faire quelques rappels d'électromagnétisme dans la matière. Après avoir rappelé la *relation de dispersion* pour les ondes électromagnétiques dans un milieu isotrope, nous traiterons le cas d'un gaz électronique pour voir quels sont les modes qui existent dans un tel milieu. Ensuite, nous verrons l'origine des plasmons, notamment dans les métaux. Enfin, nous traiterons les interactions photon/phonon dans un cristal polaire pour essayer d'appréhender la physique des phonon-polaritons.

### 1.1.1 Relation de dispersion pour les ondes électromagnétiques

Considérons un milieu linéaire, homogène, isotrope et non magnétique, caractérisé – d'un point de vue électromagnétique – par sa permittivité diélectrique relative (ou *constante* diélectrique)  $\varepsilon(\omega)$  qui est *a priori* complexe. Nous supposons ici et pour l'ensemble de notre travail que cette constante diélectrique est une grandeur *locale* (pour une discussion plus complète de ce point, voir annexe B). En résolvant les équations de Maxwell dans un tel milieu et pour un champ électrique monochromatique<sup>1</sup> à la pulsation  $\omega$ , de la forme  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , nous obtenons la relation de dispersion sur le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , pour les ondes électromagnétiques :

$$\mathbf{k}^2 = k^2 = (k' + ik'')^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon(\omega) = k_0^2 \varepsilon(\omega) \quad (1.1)$$

avec  $k_0^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = \omega^2/c^2$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide,  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide et  $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$  la permittivité diélectrique du vide.  $k_0$  est le module du vecteur d'onde dans le vide ( $\varepsilon = 1$ ). On remarquera par ailleurs que le fait que  $\varepsilon$  ne dépende pas de  $\mathbf{k}$  est une traduction mathématique de sa localité.

La relation de dispersion donne des informations sur la manière dont se comportent les ondes dans le milieu, en fonction des valeurs prises par la constante diélectrique :

- **$\varepsilon$  réel positif** : pour  $\omega$  réel,  $k$  est réel ( $k = k'$ ) et une onde transverse peut se propager sans atténuation dans le milieu ;
- **$\varepsilon$  réel négatif** : pour  $\omega$  réel,  $k$  est imaginaire pur ( $k = ik''$ ) et l'onde est évanescence dans le milieu avec atténuation sur une distance  $1/k''$  ;
- **$\varepsilon$  complexe** : pour  $\omega$  réel,  $k$  est complexe et une onde transverse peut se propager, avec atténuation, dans le milieu ;
- **$\varepsilon = 0$**  : nous verrons (*cf.* Sec. 1.1.3) qu'une onde polarisée longitudinalement peut exister dans le milieu ;
- **$\varepsilon = \infty$**  : cette condition définit les pôles de la constante diélectrique et par là même les oscillations libres du milieu.

Nous allons maintenant donner quelques exemples de matériaux dans lesquels des polaritons peuvent prendre naissance.

---

1. Par convention, dans tous les cas, la dépendance temporelle d'un champ monochromatique sera de la forme  $\exp(-i\omega t)$

### 1.1.2 Modes optiques transverses dans un plasma

Un plasma est un gaz formé d'électrons et d'ions positifs en même proportion. Dans ce milieu, *macroscopiquement* neutre, les électrons ou les ions sont libres de se déplacer. Un tel milieu peut être décrit d'un point de vue électromagnétique par une constante diélectrique de type "plasma" :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1.2)$$

où  $\omega_p$  est la pulsation plasma (*cf.* annexe A). La relation de dispersion (1.1) s'écrit alors :

$$c^2 k^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad (1.3)$$

Ainsi, pour  $\omega < \omega_p$ , aucune onde ne peut se propager dans le plasma (*réflexion totale* sur l'ionosphère utilisée notamment pour les ondes courtes) ; pour  $\omega \geq \omega_p$ , le milieu est transparent et des ondes électromagnétiques *transverses* peuvent se propager dans le plasma. En effet, le milieu étant homogène et macroscopiquement neutre ( $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ), les ondes qui se propagent dans le milieu sont transverses ( $\mathbf{E}$  perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ ). La figure 1.1 donne la relation de dispersion des ondes transverses pour un plasma :

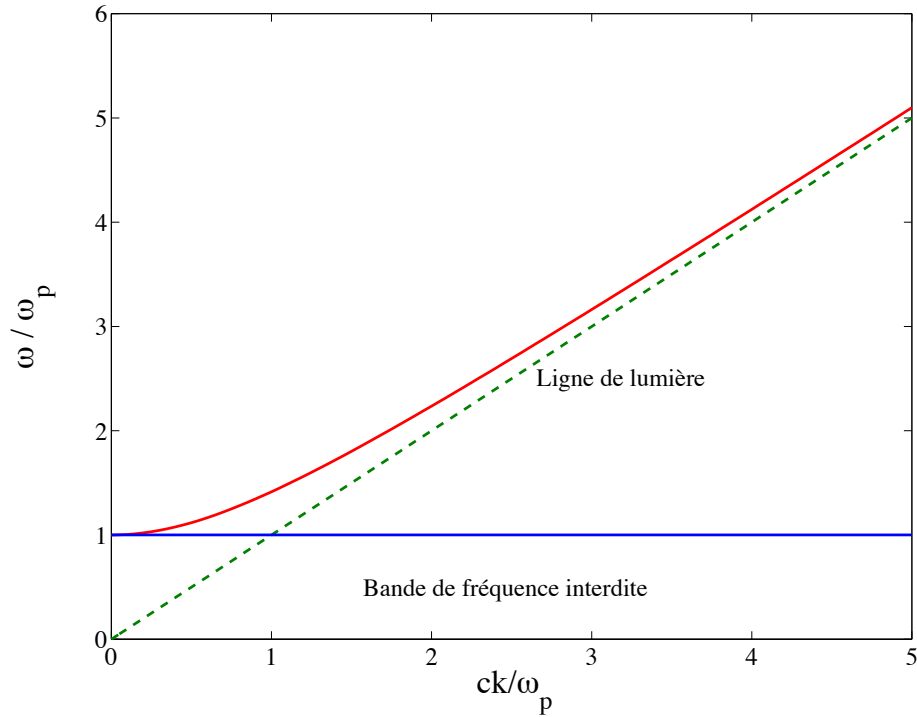


FIG. 1.1 – Relation de dispersion pour un plasma sans pertes :  $\omega_p = 11.23 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ . La droite  $\omega = ck$  s'appelle la "ligne de lumière".

### 1.1.3 Oscillations longitudinales dans un plasma

Nous allons voir dans ce paragraphe que les fréquences pour lesquelles  $\varepsilon(\omega) = 0$  correspondent à des modes *longitudinaux*. Pour comprendre physiquement à quoi correspond un mode longitudinal, rappelons que la constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  est introduite *via* la relation constitutive entre le déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  et la polarisation  $\mathbf{P}$  par :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.4)$$

Si pour une fréquence  $\omega_L$ , nous avons  $\varepsilon(\omega_L) = 0$  alors  $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/\varepsilon_0$ . Il apparaît donc un champ de dépolarisation qui donne naissance à un mode d'oscillation longitudinale dans le plasma. On peut mieux comprendre ce phénomène en examinant la figure suivante (Fig. 1.2) :

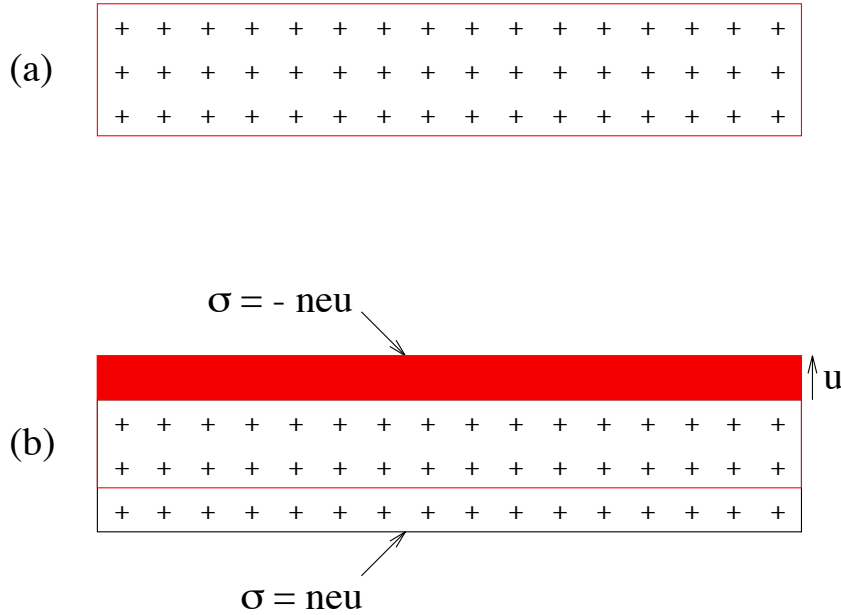


FIG. 1.2 – Vue en coupe d'une couche de métal. Figure (a) : position d'équilibre (région électriquement neutre). Figure (b) : léger déplacement du nuage électronique entraînant l'apparition d'un champ électrique à l'intérieur de la couche.

La figure 1.2a représente la coupe d'une couche de métal. D'un point de vue macroscopique, cette couche est électriquement neutre : elle possède  $n$  ions positifs et  $n$  électrons par unité de volume. Elle est à l'équilibre. La figure 1.2b représente la même couche avec le nuage électronique légèrement décalé (déplacement  $u$ ) par rapport à la position d'équilibre : une densité superficielle de charges  $\sigma = \pm neu$  se crée sur les deux faces de la couche. Un champ électrique  $E = |\sigma|/2\varepsilon_0$  apparaît alors à l'intérieur de la couche, tendant à ramener l'ensemble des charges négatives à leur position initiale. Nous montrerions aisément que les électrons ont un mouvement décrit par  $u(t)$  tel que :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_p^2 u = 0 \quad (1.5)$$

Il s'agit donc d'une oscillation *collective* des électrons. Nous comprenons mieux désormais pourquoi pour un plasma :

$$\varepsilon(\omega_L) = 0 \Rightarrow \omega_L = \omega_p \quad (1.6)$$

puisque les oscillations longitudinales correspondent aux pulsations du plasma.

#### 1.1.4 Plasmons de volume dans les métaux ou les diélectriques

Une oscillation de plasma dans un métal est une excitation collective longitudinale du gaz des électrons de conduction (Kittel 1998). Un *plasmon* est une oscillation de plasma quantifiée. L'énergie de ces plasmons de volume pour les métaux est typiquement de l'ordre de 10 eV

( $1 \text{ eV} \approx 1.517 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ). Les plasmons de volume existent également dans les diélectriques ; ce sont alors des oscillations quantifiées du nuage d'électrons de valence par rapport à l'ensemble des ions positifs. Les énergies associées sont, dans ce cas, de l'ordre de 10 à 20 eV. Pour exciter ces plasmons, une des méthodes est de bombarder des films minces de métal ou de diélectrique avec un faisceau d'électrons, ayant une énergie de l'ordre de quelques keV. Les plasmons en volume sont alors créés par diffusion inélastique des électrons : la diffusion peut être simple ou multiple et se produire soit en réflexion, soit en transmission. Il y a couplage entre la charge de l'électron et les fluctuations du champ électrostatique des oscillations de plasma. Cette méthode expérimentale permet de réaliser des spectres d'excitation pour les différents matériaux et peut constituer une méthode d'identification.

### 1.1.5 Polaritons de volume dans les cristaux

Nous allons décrire à présent les interactions qui peuvent exister au sein d'un cristal, entre les phonons (quantum d'énergie de vibration d'un réseau cristallin) et les photons (quantum d'énergie électromagnétique). Rappelons tout d'abord quelques résultats essentiels concernant les phonons<sup>2</sup>. Les phonons (d'origine mécanique, phonique ou thermique) sont associés aux *ondes élastiques* qui se propagent à l'intérieur d'un solide cristallin *via* la vibration des différents plans d'atomes (ou d'ions) le constituant. Un phonon, comme tout mode d'un système physique (stationnaire et invariant par translation), est caractérisé par sa fréquence  $\omega$  et son vecteur d'onde  $\mathbf{K}$ .

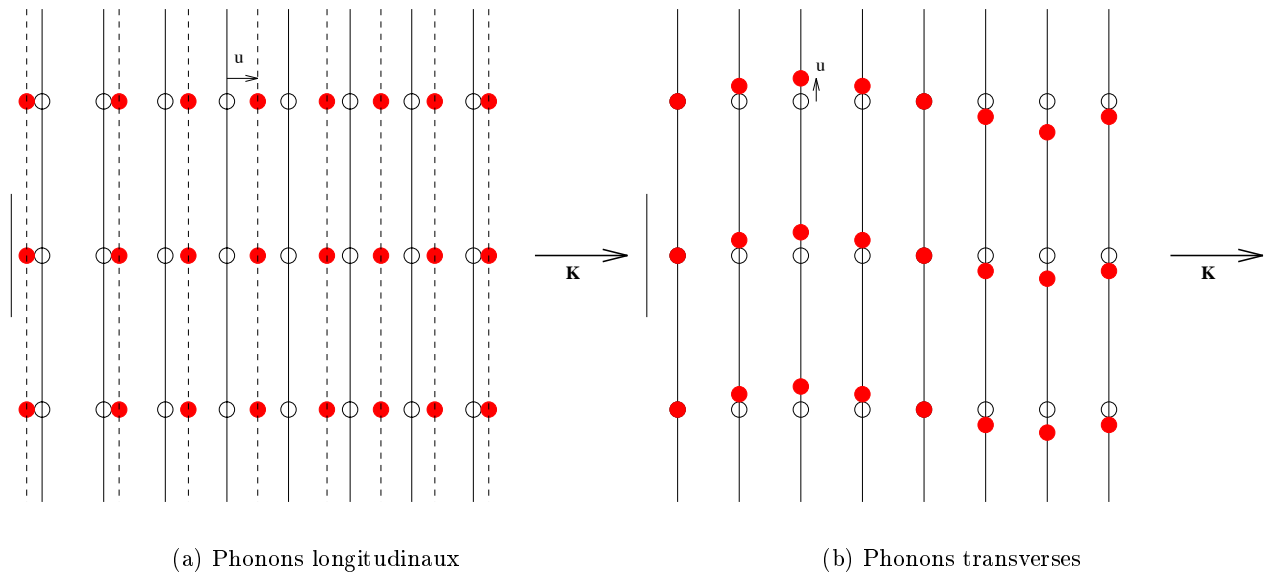


FIG. 1.3 – *Vibration de plans atomiques lors de la propagation d'une onde longitudinale ou transverse.*

Les phonons sont de deux types : les phonons longitudinaux (*cf.* Fig. 1.3(a)) où la vibration se fait *parallèlement* à la propagation (c'est-à-dire au vecteur d'onde) ; les phonons transverses (*cf.* Fig. 1.3(b)) où la vibration se fait *perpendiculairement* au vecteur d'onde. Ainsi, dans un cristal monoatomique, pour un vecteur d'onde donné (dans la première zone de Brillouin), il y a un phonon acoustique longitudinal (noté LA) et deux phonons acoustiques transverses (notés TA). La relation de dispersion présente donc trois branches distinctes<sup>3</sup>.

Pour un réseau cristallin comportant plus d'un atome (ou ion) par maille élémentaire (NaCl ou

2. Pour une description plus détaillée de la théorie des phonons, on pourra se reporter à Ziman (1960), Kittel (1998) et Srivastava (1990).

3. Pour les phonons, on parle également de polarisation.



KBr, par exemple), de nouvelles branches apparaissent dans la relation de dispersion. Ces branches, appelées les branches des phonons optiques, apparaissent à des fréquences  $\omega$  plus élevées que celles des phonons acoustiques. Pour comprendre un peu mieux la différence, nous avons représenté sur la figure 1.4 le mode optique et le mode acoustique (pour une polarisation transverse) associés à la même longueur d'onde.

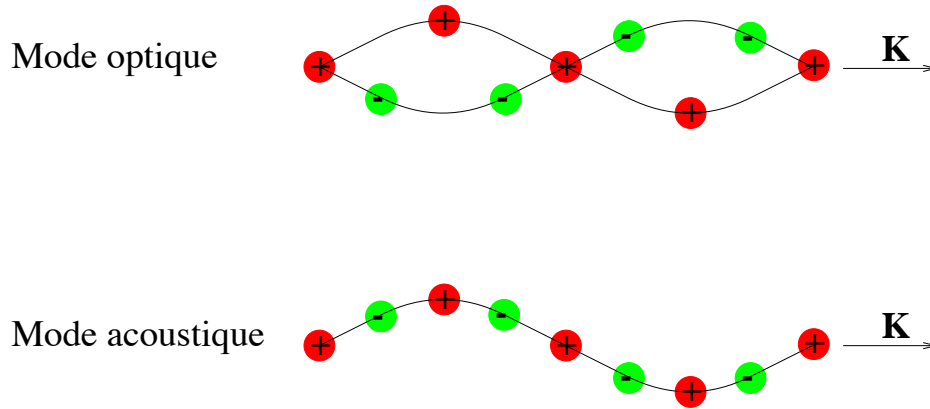


FIG. 1.4 – Modes optique et acoustique transverses pour une longueur d'onde donnée (chaîne linéaire diatomique).

On parle également pour les phonons optiques, de phonons longitudinaux (phonons LO) et de phonons transverses (phonons TO). La relation de dispersion comporte alors trois branches supplémentaires, correspondant à ces phonons optiques.

Le “mode optique” produit un moment dipolaire non nul et va donc pouvoir être excité avec un champ électrique ayant la bonne fréquence et le bon vecteur d'onde. Un couplage phonon-photon va ainsi avoir lieu et le quantum de couplage est appelé *polariton*.

À ce stade, nous devons faire trois remarques très importantes :

- le polariton ne peut exister que dans les cristaux polaires (ionique ou partiellement covalent) ;
- le polariton n'existe qu'entre un phonon optique transverse et une onde électromagnétique transverse (Kittel 1998, Fig. 14, p. 264) ;
- le couplage a lieu pour des vecteurs d'ondes très petits par rapport au bord de la zone de Brillouin<sup>4</sup> : typiquement  $|\mathbf{K}|$  est de l'ordre de quelques centaines à quelques milliers de  $\text{cm}^{-1}$ .

Pour comprendre plus précisément la physique des polaritons en volume, examinons la figure 1.5 qui représente leur relation de dispersion. La courbe bleue pointillée représente la relation de dispersion dans le cristal *sans couplage* ; les deux branches en trait plein rouge correspondent aux polaritons : elles apparaissent à des fréquences soit plus grandes que  $\omega_L$  (branche supérieure), soit plus petites que  $\omega_T$  (branche inférieure). Le couplage phonon-photon crée donc une *bande de fréquence interdite* où aucune onde ne peut se propager (amortissement exponentiel qui décroît de  $\omega_T$  à  $\omega_L$ ). Nous pouvons également remarquer que le comportement du polariton est différent suivant la valeur de  $K$  : près de la courbe bleue (photon sans couplage), il est plutôt du type photon et près des courbes vertes (phonon sans couplage), il est plutôt du type phonon.

Nous allons donner maintenant l'expression de la constante diélectrique que l'on peut déterminer en modélisant le couplage entre un photon et un phonon optique. Ce modèle, appelé *modèle*

4. Partie “plate” de la relation de dispersion des phonons optiques.

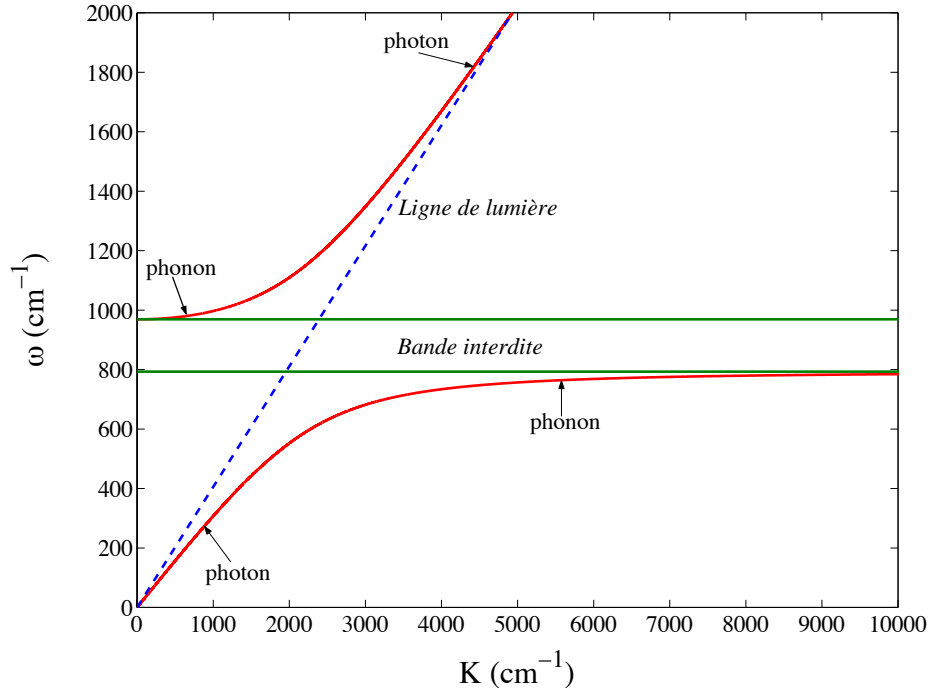


FIG. 1.5 – Relation de dispersion pour les polaritons en volume dans un cristal:  $\omega_T = 793 \text{ cm}^{-1}$  et  $\omega_L = 969 \text{ cm}^{-1}$ .

d'oscillateur (cf. annexe. A), fournit la constante diélectrique suivante :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \left[ 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \right] \quad (1.7)$$

où  $\varepsilon_\infty$  représente la contribution (pour les fréquences optiques) des ions du réseau cristallin à la polarisation et  $\Gamma$  est un paramètre phénoménologique qui décrit l'amortissement dans le milieu. Si on néglige l'amortissement ( $\Gamma = 0$ ), nous avons alors  $\varepsilon(\omega_L) = 0$  comme pour les ondes longitudinales dans un plasma. Ceci justifie la notation  $\omega_L$ . Par ailleurs, pour  $\omega \rightarrow 0$ , la constante diélectrique tend vers sa valeur en régime statique  $\varepsilon_{stat} = \varepsilon_\infty(\omega_L/\omega_T)^2$ . On retrouve donc la relation de *Lyddane-Sachs-Teller* (Lyddane *et al.* 1941) ou relation LST :

$$\frac{\varepsilon_{stat}}{\varepsilon_\infty} = \frac{\omega_L^2}{\omega_T^2} \quad (1.8)$$

Avec ce modèle, nous pouvons calculer la réflectivité d'un cristal susceptible de supporter des polaritons (cf. Fig. 1.6). Nous donnons ici l'exemple d'un cristal de carbure de silicium.

Nous pouvons remarquer qu'entre  $\omega_T$  et  $\omega_L$  le cristal est très réfléchissant, montrant qu'en effet les ondes ne peuvent pas se propager dans cette bande de fréquences. Le tableau 1.1 donne quelques exemples de cristaux polaires avec les paramètres du modèle d'oscillateur.

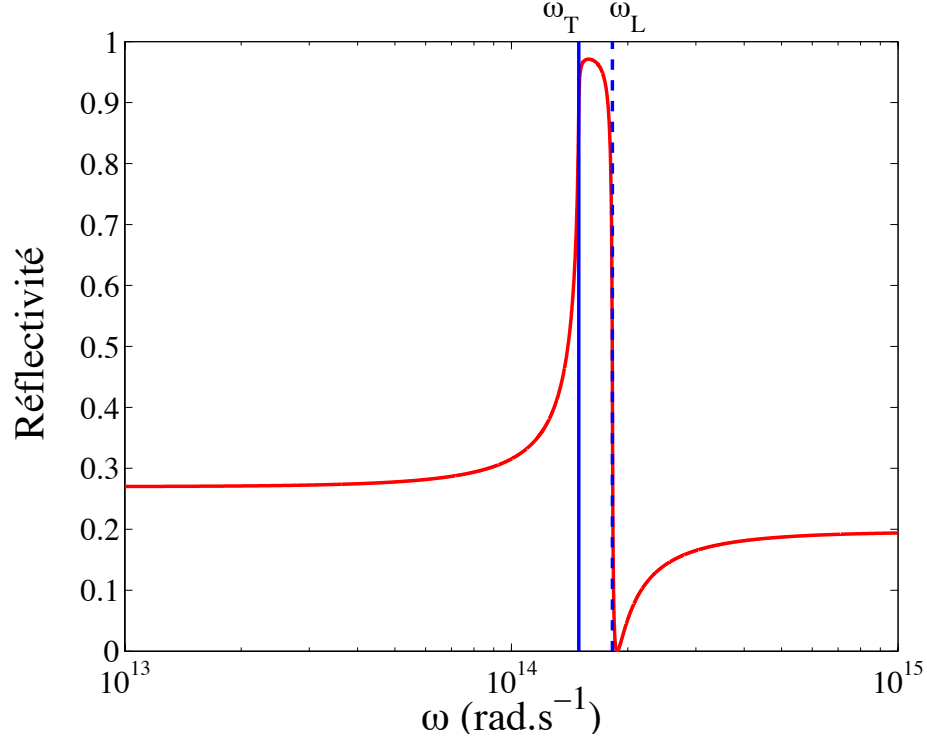


FIG. 1.6 – Réflectivité en incidence normale d'un cristal polaire donnée par un modèle d'oscillateur entre  $10^{13}$  et  $10^{15}$   $\text{rad.s}^{-1}$  :  $\varepsilon_{\infty} = 6.7$  ( $\varepsilon_{stat} = 10.0$ ),  $\omega_T = 149.37 \times 10^{12}$   $\text{rad.s}^{-1}$ ,  $\omega_L = 182.53 \times 10^{12}$   $\text{rad.s}^{-1}$  et  $\Gamma = 89.66 \times 10^{10}$   $\text{rad.s}^{-1}$ .

Cristal	$\varepsilon_{stat}$	$\varepsilon_{\infty}$	$\omega_T$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	$\omega_L$ ( $\text{cm}^{-1}$ )
NaCl	5.90	2.25	164.6	265.4
SiC	10.0	6.70	793.0	969.0
AsGa	12.9	10.9	270.8	292.0
Si	11.7	11.7	525.6	525.6

TAB. 1.1 – Paramètres du modèle d'oscillateur de différents cristaux polaires à 300 K (Kittel 1998).

## 1.2 Plasmons et polaritons de surface sur une interface plane

Nous allons maintenant étudier les polaritons de surface, et notamment ceux qui existent sur une interface plane. Cette géométrie simple nous permettra de comprendre facilement le phénomène d'onde de surface. Pour introduire de manière naturelle les ondes de surface, nous résoudrons le problème électromagnétique complet, ce qui nous permettra ensuite de discuter des conditions d'existence des plasmon- et des phonon-polaritons de surface.

**Remarque:** Par la suite, nous utiliserons les dénominations suivantes pour décrire les ondes de surface (et unifier les appellations avec les termes anglo-saxons) : *plasmon-polariton de surface* et *phonon-polariton de surface*. Et plus généralement, nous utiliserons le terme *polariton de surface* pour désigner l'un ou l'autre de ces phénomènes.

### 1.2.1 Description du système considéré

Considérons le système décrit sur la figure 1.7.

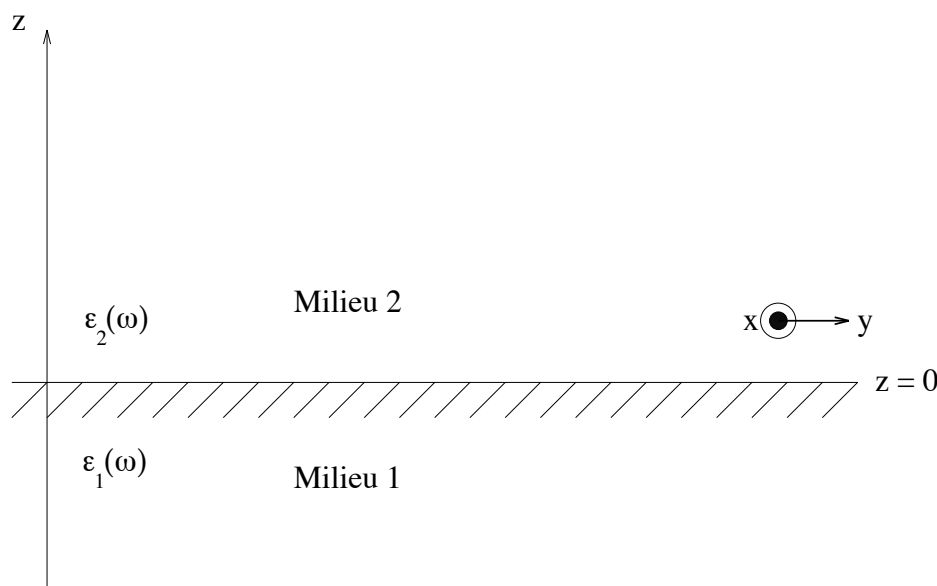


FIG. 1.7 – Géométrie du système étudié.

L'espace est divisé en deux milieux semi-infinis (le milieu 1 et le milieu 2), linéaires, homogènes, isotropes et non magnétiques. Ils sont séparés par une interface plane telle que: pour  $z < 0$ ,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega)$  et pour  $z > 0$ ,  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_2(\omega)$ . L'axe  $z$  est perpendiculaire à l'interface et le plan  $x - y$  parallèle à celle-ci. Les vecteurs unitaires associés aux trois axes seront notés  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ . Pour un point  $\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$  de l'espace, on notera  $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z)$ ,  $\mathbf{R}$  étant la composante du vecteur parallèle au plan  $x - y$ .

### 1.2.2 Résolution électromagnétique

Pour la géométrie considérée (*cf.* Fig. 1.7), nous cherchons des ondes, solutions des équations de Maxwell, qui se propagent parallèlement à l'interface et dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance à l'interface. Ceci définit un mode du système, appelé "onde de surface".

Le champ électrique dans chacun des deux milieux s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{x,1} \\ E_{y,1} \\ E_{z,1} \end{pmatrix} \exp [i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} - \gamma_1 z - \omega t)] \quad \text{pour } z < 0 \quad (\text{Milieu 1}) \quad (1.9a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{x,2} \\ E_{y,2} \\ E_{z,2} \end{pmatrix} \exp [i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} + \gamma_2 z - \omega t)] \quad \text{pour } z > 0 \quad (\text{Milieu 2}) \quad (1.9b)$$

où  $\mathbf{K}$  est la composante du vecteur d'onde parallèle à l'interface (et  $K = |\mathbf{K}|$  son module);  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont déterminés par :

$$\gamma_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1 - K^2 \quad \text{avec } \text{Im}(\gamma_1) > 0 \quad \text{et } \text{Re}(\gamma_1) \geq 0 \quad \text{si } \text{Im}(\gamma_1) = 0 \quad (1.10a)$$

$$\gamma_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 - K^2 \quad \text{avec } \text{Im}(\gamma_2) > 0 \quad \text{et } \text{Re}(\gamma_2) \geq 0 \quad \text{si } \text{Im}(\gamma_2) = 0 \quad (1.10b)$$

où  $k_0^2 = \omega^2/c^2$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide.

Nous allons maintenant distinguer le cas de la polarisation  $s$  et de la polarisation  $p$ . Nous supposons de plus (choix arbitraire qui ne restreint pas la généralité du modèle) que  $\mathbf{K}$  est parallèle à  $\hat{\mathbf{x}}$ .

### Polarisation $s$ ou TE

Pour cette polarisation, seule la composante suivant  $\hat{\mathbf{y}}$  du champ électrique est non nulle. Le champ a donc pour expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{y,1} \hat{\mathbf{y}} \exp [i(Kx - \gamma_1 z - \omega t)] \quad \text{pour } z < 0 \quad (1.11a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_{y,2} \hat{\mathbf{y}} \exp [i(Kx + \gamma_2 z - \omega t)] \quad \text{pour } z > 0 \quad (1.11b)$$

En écrivant la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, donc la continuité de  $E_y$ , on montre que  $E_{y,1} = E_{y,2} = E_{y,0}$ . De plus, le champ magnétique  $\mathbf{B}$  étant continu,  $-\partial E_y / \partial z$  est continu, donc on a :

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad (1.12)$$

Cependant, comme nous avons  $\text{Im}(\gamma_1) > 0$  et  $\text{Im}(\gamma_2) > 0$ , cette relation n'est jamais satisfaite. Ainsi, en polarisation  $s$ , il n'existe pas d'onde de surface.

### Polarisation $p$ ou TM

Pour cette polarisation, la composante suivant  $\hat{\mathbf{y}}$  du champ électrique est nulle. Le champ a donc pour expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{x,1} \\ 0 \\ E_{z,1} \end{pmatrix} \exp [i(Kx - \gamma_1 z - \omega t)] \quad \text{pour } z < 0 \quad (1.13a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{x,2} \\ 0 \\ E_{z,2} \end{pmatrix} \exp [i(Kx + \gamma_2 z - \omega t)] \quad \text{pour } z > 0 \quad (1.13b)$$

La continuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  implique que  $E_{x,1} = E_{x,2} = E_{x,0}$ . Par ailleurs,

dans chacun des deux milieux nous avons  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  (milieux homogènes et non chargés), donc les composantes suivant  $\hat{\mathbf{z}}$  se déduisent de  $E_{x,0}$  par :

$$E_{z,1} = - \frac{K}{\gamma_1} E_{x,0} \quad (1.14)$$

$$E_{z,2} = \frac{K}{\gamma_2} E_{x,0} \quad (1.15)$$

De plus,  $D_z = \varepsilon E_z$  étant continu, nous avons  $\varepsilon_1 E_{z,1} = \varepsilon_2 E_{z,2}$  si bien que :

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = 0 \quad (1.16)$$

Nous obtenons alors la condition sur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour avoir une onde de surface en polarisation  $p$  :

$$\varepsilon_2 \gamma_1 + \varepsilon_1 \gamma_2 = 0 \quad (1.17)$$

Si nous réécrivons cette équation en tenant compte de l'équation (1.10), nous obtenons alors la relation suivante pour l'onde de surface :

$$K^2 = k_0^2 \frac{\varepsilon_1(\omega)\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)} \quad (1.18)$$

Cette relation relie la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde parallèle  $K$  définissant l'onde de surface : cette relation est appelée la *relation de dispersion* du polariton de surface.

### 1.2.3 Conditions d'existence d'un polariton de surface sur une interface plane en l'absence de pertes

Nous avons déjà vu que les ondes de surface n'apparaissent qu'en polarisation  $p$ . Supposons maintenant que le milieu 2 soit un milieu dans lequel il y a propagation sans atténuation, c'est-à-dire que  $\varepsilon_2(\omega)$  soit un réel positif. La relation (1.17) montre alors qu'il faut que  $\varepsilon_1(\omega) < 0$ . On dit que le milieu 1 constitue le milieu "actif". Ainsi :

- le polariton n'apparaît qu'en polarisation  $p$  (TM) ;
- la relation de dispersion du polariton de surface s'écrit :

$$K = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\omega)\varepsilon_2(\omega)}{\varepsilon_1(\omega) + \varepsilon_2(\omega)}} \quad (1.19)$$

- lorsque le milieu 2 est sans pertes, le polariton n'apparaît que si  $\varepsilon_1 < 0$ . Le milieu 1 est alors appelé le milieu *actif*. De surcroît,  $K$  n'est réel que si  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0$ , c'est-à-dire si  $\varepsilon_1 < -\varepsilon_2$ .

**Remarque :** Le milieu 2 sera à partir de maintenant constitué par du vide de constante diélectrique  $\varepsilon_2(\omega) = 1, \forall \omega$ . Ainsi, une onde de surface ne pourra exister que si  $\varepsilon_1 < -1$ .

Dans les deux prochaines sections, nous présentons deux exemples de polaritons de surface : un avec un métal (cuivre) et un autre avec un cristal polaire (carbure de silicium). Nous étudierons notamment leur relation de dispersion, leur extension spatiale perpendiculairement à l'interface et leur atténuation parallèlement à l'interface.

## 1.3 Exemple de plasmon-polariton de surface à l'interface vide/métal

### 1.3.1 Relation de dispersion

Nous étudions ici le cas du cuivre que nous considérons pour l'instant comme un métal *sans pertes* dont la constante diélectrique  $\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon(\omega)$  est donnée par le modèle de Drude (*cf.* annexe A) :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1.20)$$

avec  $\omega_p = 11.23 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ .

La relation de dispersion du polariton de surface s'écrit alors :

$$K = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega) + 1}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega^2 - \omega_p^2}} \quad (1.21)$$

Notons que la condition  $Im(\gamma_2) > 0$  n'est satisfaite que si  $K > \omega/c$  ce qui implique que  $\varepsilon(\omega) < -1$ , c'est-à-dire  $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$ . La figure 1.8 représente la relation de dispersion du plasmon-polariton de surface à l'interface vide/métal.

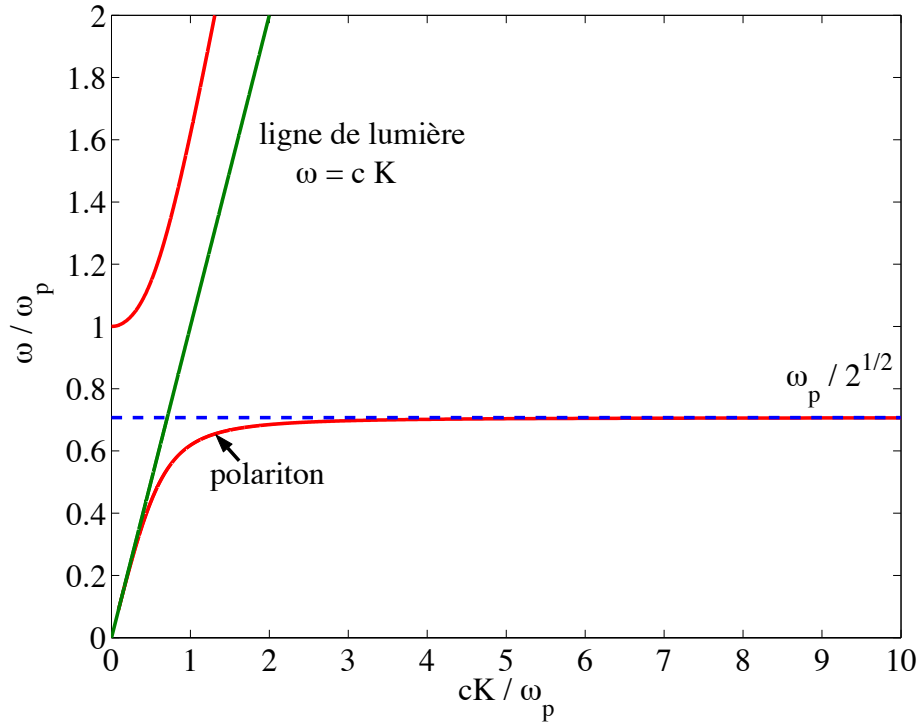


FIG. 1.8 – Relation de dispersion pour un plasmon-polariton de surface à l'interface vide/cuivre.

Nous pouvons remarquer que  $\omega_p/\sqrt{2} = 7.94 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  ( $\sqrt{2} \lambda_p = 0.24 \mu\text{m}$ ) est dans le proche ultraviolet, comme pour la plupart des métaux. L'onde de surface fait donc partie du spectre visible.

La courbe correspondant au plasmon-polariton (*i.e.* la branche inférieure rouge) présente trois régions :

1.  $cK/\omega_p \ll 1$ : le polariton est une onde avec une vitesse de phase ( $v_\varphi = \omega/K$ ) proche de  $c$  ( $K \sim \omega/c$  pour  $\omega \rightarrow 0$ );

2.  $cK/\omega_p \approx 1$ : le couplage est fort entre l'onde électromagnétique qui se propage et l'oscillation des charges: on parle alors de "plasmon-polariton de surface" (*surface-plasmon polariton* en anglais);
3.  $cK/\omega_p \rightarrow \infty$ : l'onde a une vitesse de groupe ( $v_g = d\omega/dK$ ) qui tend vers 0 (asymptote horizontale) et le champ a un caractère électrostatique: on parle parfois de "plasmon de surface" (*surface plasmon* en anglais).

À la vue de la relation de dispersion, une remarque très importante est à faire: comme la courbe correspondant au polariton de surface est sous la ligne de lumière (courbe verte), le polariton de surface est une onde non radiative *i.e.* évanescente. Ainsi, la deuxième branche de la relation de dispersion (en rouge) qui se situe dans le cône de lumière, vérifie la relation de dispersion mais ne constitue pas une onde de surface, car cette onde est propagative. De plus, il est clair que l'on ne peut pas exciter un plasmon-polariton de surface à l'aide d'une onde plane puisque leurs domaines dans le plan  $(K, \omega)$  sont disjoints.

### 1.3.2 Extension spatiale perpendiculairement à l'interface

D'après l'Éq. (1.10), pour le polariton, nous avons :

$$\gamma_2^2 = k_0^2 - K^2 = k_0^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) = k_0^2 \frac{1}{\varepsilon + 1} \quad (1.22)$$

De plus, le polariton n'existe que si  $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$ , région pour laquelle  $\varepsilon + 1 < 0$  avec le modèle de Drude. Ainsi, dans le milieu 2,  $\gamma_2$  est imaginaire tandis que  $K$  est réel (pour un métal sans pertes). Le champ électrique est donc polarisé elliptiquement dans le plan  $(x - z)$ .

Considérons maintenant un métal avec des pertes, ayant une constante diélectrique de la forme (*cf.* annexe A) :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} \quad (1.23)$$

où  $\tau$  correspond à un temps de relaxation dans le métal. Pour le cuivre, par exemple, nous avons  $\tau = 72.5$  fs. La constante diélectrique possède donc une partie réelle et une partie imaginaire, tout comme la grandeur  $K$  de la relation de dispersion (nous supposons ici que  $\omega$  est réel). Nous pouvons calculer la composante suivant  $\hat{\mathbf{z}}$  du vecteur d'onde dans le milieu 1 :

$$\gamma_1^2 = k_0^2 \varepsilon - K^2 = k_0^2 \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right) = k_0^2 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon + 1} \quad (1.24)$$

Pour le polariton,  $\gamma_1$  possède aussi une partie imaginaire et donc l'amplitude de l'onde associée au polariton diminue lorsqu'on s'éloigne de l'interface (dans le milieu 1 et le milieu 2). Nous pouvons alors définir la longueur d'atténuation  $\delta_i$  de l'onde dans le milieu  $i$  ( $i = 1, 2$ ) comme la distance au bout de laquelle l'intensité (carré de l'amplitude) de l'onde a été divisée par  $e$  ( $\ln(e) = 1$ ). Nous avons alors :

$$\delta_i = \frac{1}{2\text{Im}(\gamma_i)} \quad (1.25)$$

Nous avons représenté cette grandeur (rapportée à la longueur d'onde  $\lambda$  du polariton) dans le cas de l'interface vide/cuivre sur la figure 1.9.

La longueur d'atténuation tend vers 0 lorsque  $\lambda$  tend vers  $\sqrt{2} \lambda_p$ . L'onde, de nature électrostatique, ne pénètre donc pas à l'intérieur du métal et reste confinée à l'interface vide/métal (onde évanescente).



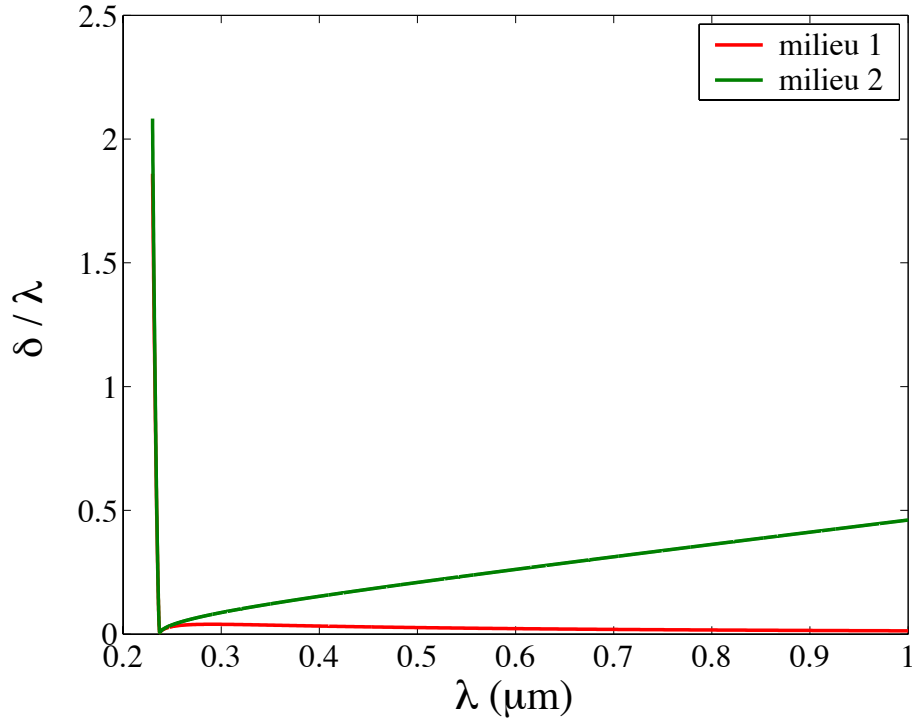


FIG. 1.9 – Longueur d’atténuation dans le vide et dans le cuivre pour le plasmon-polariton de surface à l’interface vide/cuivre.

### 1.3.3 Atténuation le long de l’interface

Lorsque le métal présente des pertes, le polariton s’atténue aussi lors de la propagation parallèlement à l’interface. Notons  $L$  cette longueur de propagation au bout de laquelle l’intensité (carré de l’amplitude) de l’onde est divisée par  $e$ . Par définition, elle est donnée par la relation :

$$L_{att} = \frac{1}{2Im(K)} \quad (1.26)$$

que nous avons représentée sur la figure 1.10.

La longueur de propagation est relativement grande sauf entre  $\lambda_p$  et  $\sqrt{2} \lambda_p$  où elle est vaut respectivement  $3\lambda_p$  et environ 0. Ceci s’explique par le fait qu’on se trouve alors dans la partie “interdite” de la relation de dispersion, entre  $\omega_p/\sqrt{2}$  et  $\omega_p$ .

## 1.4 Exemple de phonon-polariton de surface à l’interface vide/cristal polaire

### 1.4.1 Relation de dispersion

Nous considérons ici le cas du carbure de silicium (symbole chimique SiC) qui est un cristal polaire diatomique auquel nous nous sommes largement intéressés dans ce travail. Par souci de simplicité, nous supposons pour l’instant que sa constante diélectrique peut être caractérisée par un modèle d’oscillateur sans pertes :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2} \quad (1.27)$$

avec  $\varepsilon_\infty = 6.7$ ,  $\omega_L = 969 \text{ cm}^{-1}$  et  $\omega_T = 793 \text{ cm}^{-1}$ .

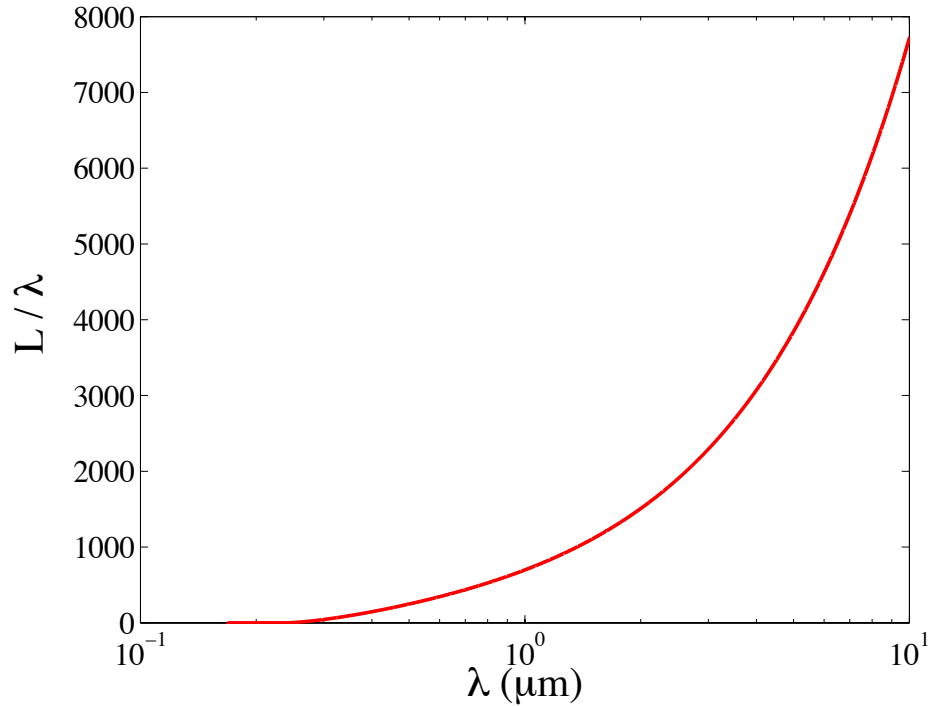


FIG. 1.10 – Longueur de propagation du plasmon-polariton de surface à l'interface vide/cuivre.

Notons  $\omega_{sup}$  la valeur de la fréquence telle que  $\varepsilon(\omega_{sup}) = -1$ . En utilisant l'expression (1.27) et la relation (1.8), on obtient :

$$\omega_{sup} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{stat} + 1}{\varepsilon_{\infty} + 1}} \omega_T \quad (1.28)$$

Ainsi, en prenant  $\varepsilon_{stat} = 10.0$ , nous trouvons  $\omega_{sup} = 948 \text{ cm}^{-1}$  ( $178.57 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$  ou  $10.55 \text{ } \mu\text{m}$ ). La signification de  $\omega_{sup}$  apparaît clairement lorsque nous examinons la relation de dispersion du phonon-polariton de surface (*cf.* Fig. 1.11) : c'est la fréquence qui correspond à l'asymptote horizontale (vitesse de groupe *nulle*) de la relation de dispersion pour  $K \rightarrow \infty$ . On remarquera d'ailleurs que cette asymptote correspond à une longueur d'onde de  $10.55 \text{ } \mu\text{m}$ , c'est-à-dire dans l'infrarouge, contrairement aux métaux où la limite se situe plutôt dans l'ultraviolet, voire dans le visible. Cependant, ici comme pour les métaux, seule la branche inférieure de la relation de dispersion (hors du cône de lumière) correspond à une véritable onde de surface (onde évanescente); l'autre branche est une onde radiative. Notons également que la relation de dispersion du phonon-polariton de surface est très différente de celle du phonon-polariton de volume représentée sur la figure 1.5, notamment en ce qui concerne la "bande interdite", puisqu'ici elle est comprise entre  $\omega_{sup}$  et  $\omega_L$  (largeur =  $21 \text{ cm}^{-1}$ ).

### 1.4.2 Extension spatiale perpendiculairement à l'interface

Tout comme pour le métal, le phonon-polariton de surface a une extension spatiale limitée suivant  $\hat{\mathbf{z}}$ . Nous pouvons donc de la même manière définir une longueur d'atténuation de l'onde dans chacun des deux milieux, que nous avons représentée sur la figure 1.12.

Nous remarquons à nouveau qu'autour de  $\lambda_{sup}$  (comme autour de  $\sqrt{2} \lambda_p$  pour le métal), la longueur d'atténuation est la plus faible. Cette longueur d'onde, que nous pourrions appeler la longueur d'onde de résonance, correspond au *confinement maximal* de l'onde sur l'interface. Cela

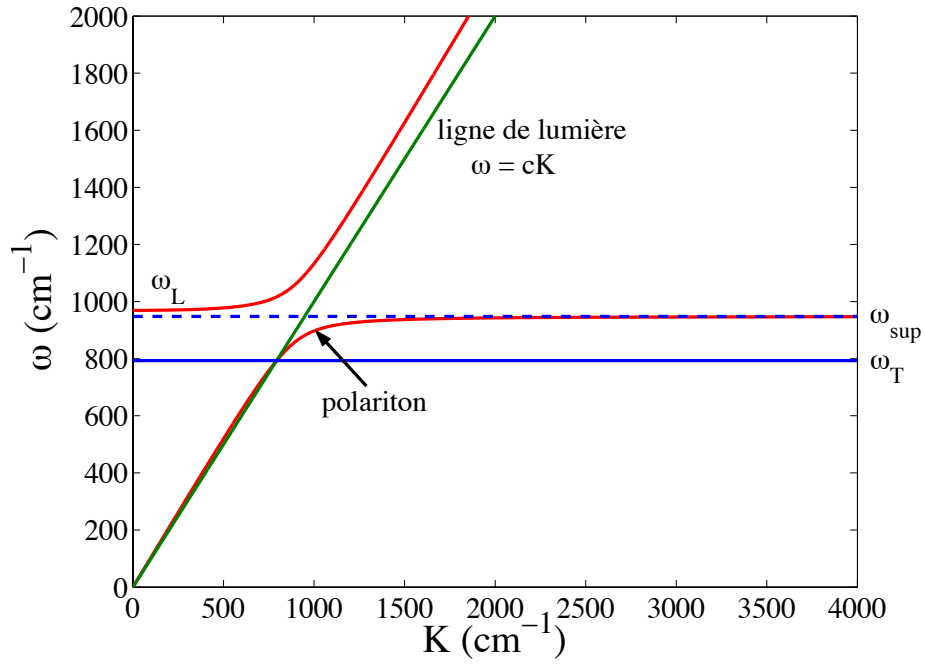


FIG. 1.11 – Relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

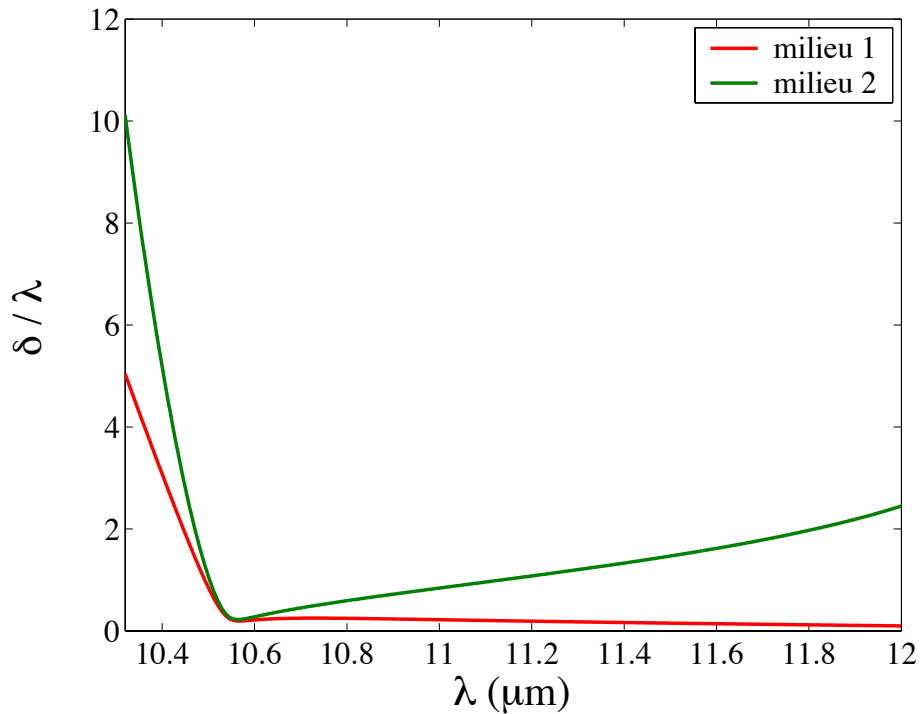


FIG. 1.12 – Longueur d'atténuation dans le vide et dans le cristal pour le phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

coïncide avec l'asymptote horizontale de la relation de dispersion du phonon-polariton (divergence de la densité d'états et vitesse de groupe nulle). Ce sont les grandes valeurs de  $K$  donc de  $\gamma = \sqrt{k_0^2 \varepsilon - K^2} \sim iK \rightarrow \infty$ .

### 1.4.3 Atténuation le long de l'interface

La figure 1.13 présente la longueur de propagation du polariton de surface dans le cas d'une interface vide/SiC, en fonction de la longueur d'onde.

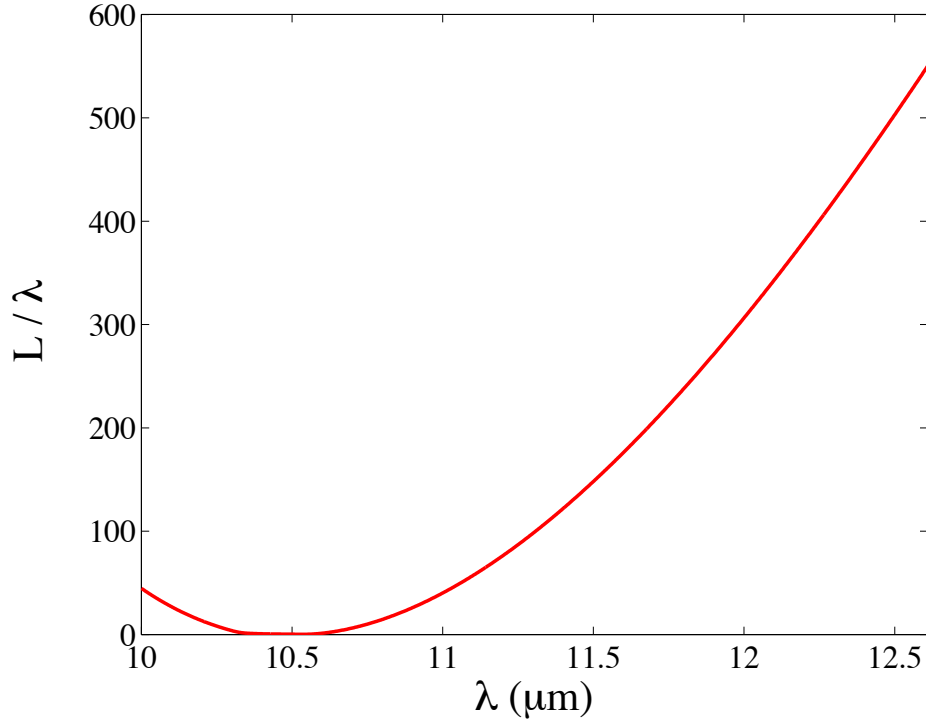


FIG. 1.13 – Longueur de propagation du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

On remarquera que c'est pour  $\lambda \approx \lambda_{sup}$  que l'onde se propage le moins loin.

## 1.5 Techniques d'excitation de polaritons de surface

Comme nous venons de le voir, les polaritons de surface correspondent à des ondes *non radiatives* et ne rayonnent donc aucun champ. De la même manière, nous ne pouvons pas exciter directement les ondes de surface avec une onde propagative incidente, en tout cas lorsque l'un des deux milieux est constitué par du vide. Ainsi, l'idée est d'utiliser un troisième milieu. Dans cette partie, nous allons décrire trois montages simples permettant d'exciter les ondes de surface : deux avec un prisme (configurations Kretschmann et Otto) et une avec une pointe en champ proche.

### 1.5.1 Configuration Kretschmann

Cette première configuration, appelée configuration Kretschmann (Kretschmann 1968) est décrite sur la figure 1.14(a). On utilise un prisme d'indice optique  $n$  ( $\varepsilon = n^2$ ) que nous supposons réel par souci de simplicité. L'idée est de réaliser la réflexion totale interne du faisceau en prenant  $\theta_{inc} > \theta_{lim} = \arcsin(1/n)$  : il y a alors génération d'une onde évanescente dans l'intervalle d'air séparant le prisme et la surface à exciter. Cette onde a un vecteur d'onde  $K$  tel que  $K = n(\omega/c) \sin(\theta_{inc}) > \omega/c$  et peut donc se coupler au polariton de surface à l'interface air/métal.

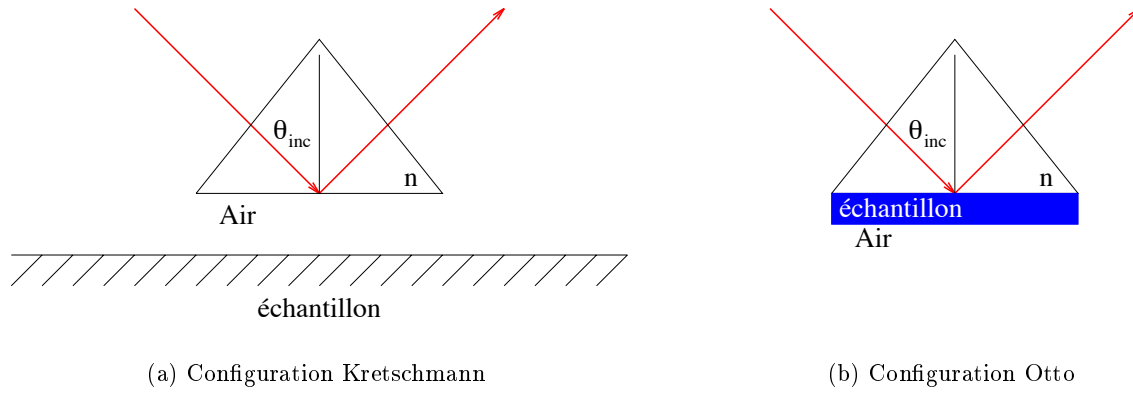


FIG. 1.14 – Montages expérimentaux permettant d’exciter des ondes de surface avec un prisme.

### 1.5.2 Configuration Otto

L’autre configuration, décrite sur la figure 1.14(b) et appelée configuration Otto (Otto 1971), consiste à exciter le polariton de surface à l’interface métal/air (onde incidente dans le métal). Pour cela, un film mince de métal est déposé sur la base du prisme. Le prisme est éclairé de la même manière que précédemment, il y a réfraction à l’interface verre/métal et réflexion totale à l’interface métal/air.

### 1.5.3 Pointe en champ proche

L’autre possibilité pour exciter des ondes de surface est d’utiliser les techniques de microscopie optique de champ proche et notamment l’“effet de pointe”. On peut, par exemple (*cf.* Fig. 1.15), utiliser une sonde à ouverture qui va servir de source de lumière sub-longueur d’onde et générer des ondes évanescentes en sortie de fibre. Si l’on approche cette source assez près d’une interface (typiquement à une distance de l’ordre de  $\lambda/2\pi$ ), un polariton de surface est susceptible d’être excité si la fréquence  $\omega$  de l’onde est bien choisie (condition de résonance). Dans le cas d’une sonde sans ouverture (fibre optique étirée recouverte par un film mince de métal, par exemple), la génération des ondes évanescentes se fait par diffraction d’un faisceau laser par la pointe de taille nanométrique (typiquement de 10 à 100 nm).

Nous verrons au chapitre 2 qu’il est également possible d’exciter des polaritons de surface en gravant un réseau sur une interface plane.

## 1.6 Relation de dispersion pour un matériau avec pertes

### 1.6.1 Position du problème

Rappelons ici l’expression de la relation de dispersion du polariton à l’interface entre le vide et un matériau quelconque de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  :

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega) + 1}} \quad (1.29)$$

Nous considérons que le matériau est un matériau réel, c’est-à-dire qu’il possède des pertes et donc que sa constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  est une grandeur *complexe*.

Le cas le plus général pour résoudre la relation de dispersion, *i.e.* trouver la fonction  $\omega(K)$ , est de supposer une fréquence  $\omega$  complexe et un vecteur d’onde parallèle  $K$  également complexe. Cependant, une solution ne peut être trouvée car la relation de dispersion ne fournit que deux

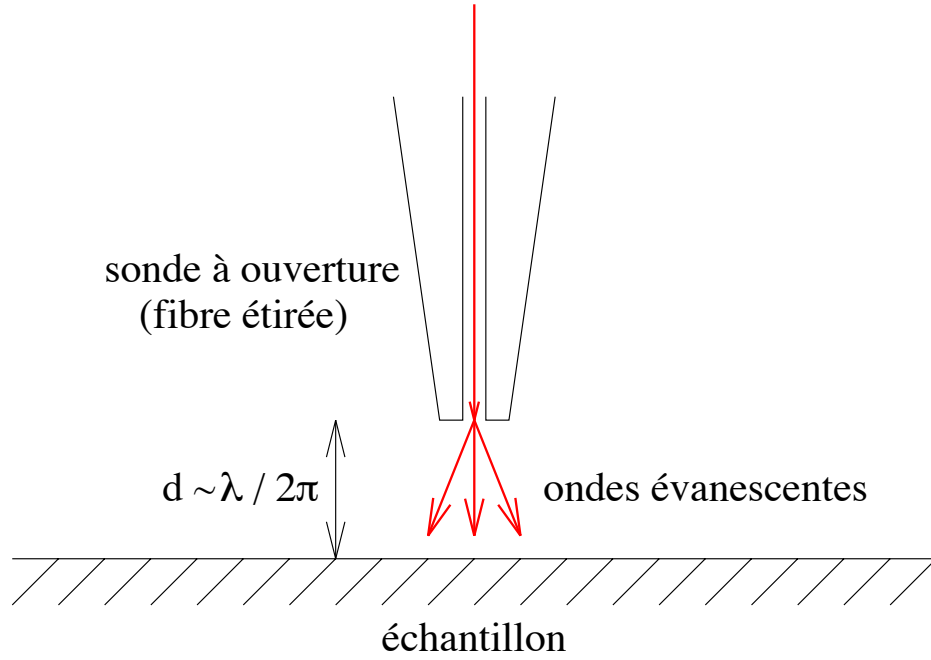


FIG. 1.15 – Montage expérimental utilisant une sonde à ouverture pour exciter des polaritons de surface en champ proche.

équations indépendantes et nous avons *a priori* quatre inconnues :  $Re(\omega)$ ,  $Im(\omega)$ ,  $Re(K)$  et  $Im(K)$ . Ainsi, dans un cas, il faudra choisir  $\omega$  réel et  $K$  complexe ; dans l'autre cas,  $K$  sera pris réel et  $\omega$  complexe. Nous allons voir, dans le cas d'un cristal de carbure de silicium (SiC), que les relations de dispersion obtenues sont tout-à-fait différentes.

### 1.6.2 Exemple d'un cristal polaire avec pertes

#### Cas du régime permanent : $\omega$ réel et $K$ complexe

Pour comprendre pourquoi ce cas correspond au régime permanent, écrivons l'expression du champ électrique, dans le vide et le long de l'interface ( $z = 0$ ) :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-K''x) \exp [i(K'x - \omega t)] \quad (1.30)$$

où  $K' = Re(K)$  et  $K'' = Im(K) > 0$ . Cette onde correspond donc à une onde monochromatique (à la fréquence  $\omega$  réelle) en régime permanent, qui se propage le long de l'interface en s'atténuant exponentiellement.

Traçons maintenant (*cf.* Fig. 1.16) la relation de dispersion ( $Re(K), \omega$ ) pour le SiC dont la constante diélectrique complexe  $\varepsilon(\omega)$  est donnée par l'équation (1.7).

Nous pouvons remarquer que cette courbe est très différente de celle de la figure 1.11. En effet, nous n'avons plus de véritable "bande interdite" et la relation de dispersion possède deux points de repliement (ou "back-bending" en anglais) : le premier pour  $Re(K) \approx 2265.9 \text{ cm}^{-1}$  et  $\omega \approx 946.5 \text{ cm}^{-1}$  et le deuxième pour  $Re(K) \approx 154.2 \text{ cm}^{-1}$  et  $\omega \approx 963.9 \text{ cm}^{-1}$ . De plus, notons que la branche correspondant au polariton de surface entre dans le cône de lumière pour  $\omega = 950.3 \text{ cm}^{-1}$ . Par ailleurs, nous pouvons tracer la partie imaginaire de  $K$  en fonction de  $\omega$  (*cf.* Fig. 1.17) et nous rendre compte que celle-ci n'est importante que pour  $800 \text{ cm}^{-1} < \omega < 1100 \text{ cm}^{-1}$ , avec un pic très important vers  $949.2 \text{ cm}^{-1}$  où  $Im(K) = 1994.5 \text{ cm}^{-1}$  (longueur de propagation la plus faible).

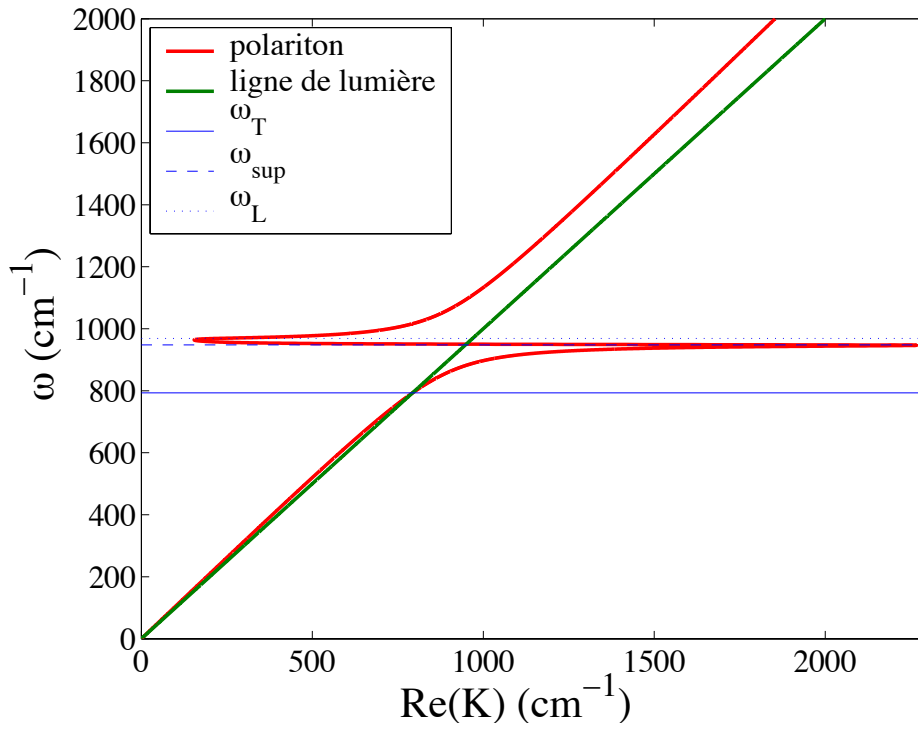


FIG. 1.16 – Relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

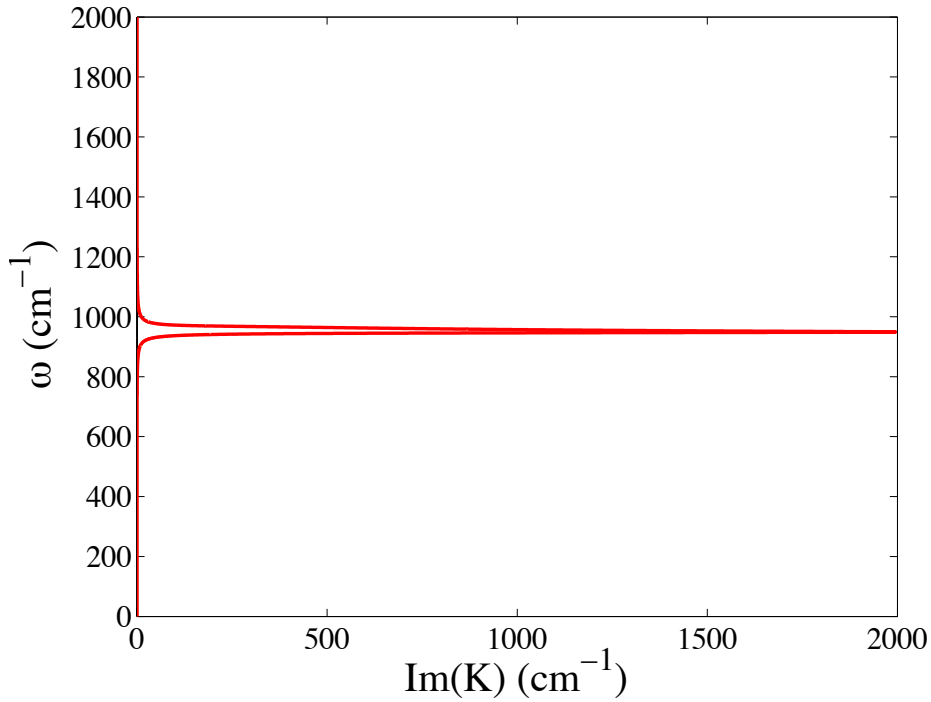


FIG. 1.17 – Partie imaginaire de la composante parallèle à l'interface du vecteur d'onde pour le phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

### Cas du régime transitoire: $K$ réel et $\omega$ complexe

Comme pour le cas précédent, écrivons l'expression du champ électrique, dans le vide et le long de l'interface ( $z = 0$ ):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-\omega''t) \exp[i(Kx - \omega't)] \quad (1.31)$$

où  $\omega' = \text{Re}(\omega) > 0$  et  $\omega'' = \text{Im}(\omega) > 0$ . Cette onde correspond donc à une onde transitoire de fréquence  $\omega'$  qui s'atténuerait exponentiellement dans le temps avec une *durée de vie* de  $1/\omega''$ . Pour tracer la relation de dispersion ( $K, \text{Re}(\omega)$ ), nous devons d'abord trouver quelle équation vérifie  $\omega$  et ne garder que les solutions telles que  $\text{Re}(\omega) > 0$ . En utilisant l'expression (1.7) de la constante diélectrique complexe, l'équation à résoudre est la suivante :

$$\omega^4 + i\Gamma\omega^3 - \left[ \omega_L^2 + c^2 K^2 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_\infty} \right) \right] \omega^2 - i\Gamma c^2 K^2 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_\infty} \right) \omega + \frac{c^2 K^2}{\varepsilon_\infty} (\varepsilon_\infty \omega_L^2 + \omega_T^2) = 0 \quad (1.32)$$

C'est une équation complexe d'ordre 4, dont les solutions dans le plan complexe sont connues analytiquement. On ne conserve que les deux solutions qui ont une partie réelle positive; elles correspondent aux deux branches (courbes rouges) de la relation de dispersion que nous présentons sur la figure 1.18.

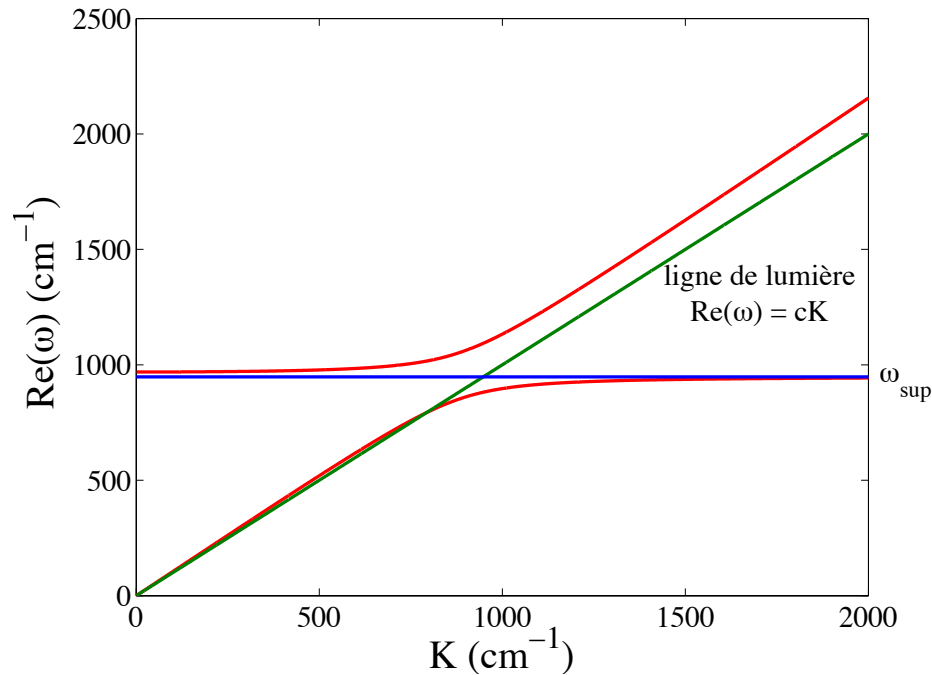


FIG. 1.18 – Relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

Nous remarquons que cette fois-ci, il n'y a pas de repliement de la relation de dispersion. En revanche, nous avons toujours l'asymptote horizontale  $\text{Re}(\omega) = \omega_{sup}$  pour  $K \rightarrow \infty$  et la "bande interdite" entre  $\omega_{sup}$  et  $\omega_L$ . Cette courbe ressemble à celles que nous tracions pour des matériaux sans pertes; c'est pour cette raison qu'auparavant nous faisons l'hypothèse d'un  $\omega$  réel. Nous pouvons, comme pour le cas précédent, tracer la partie imaginaire de  $\omega$  (cf. Fig. 1.19).



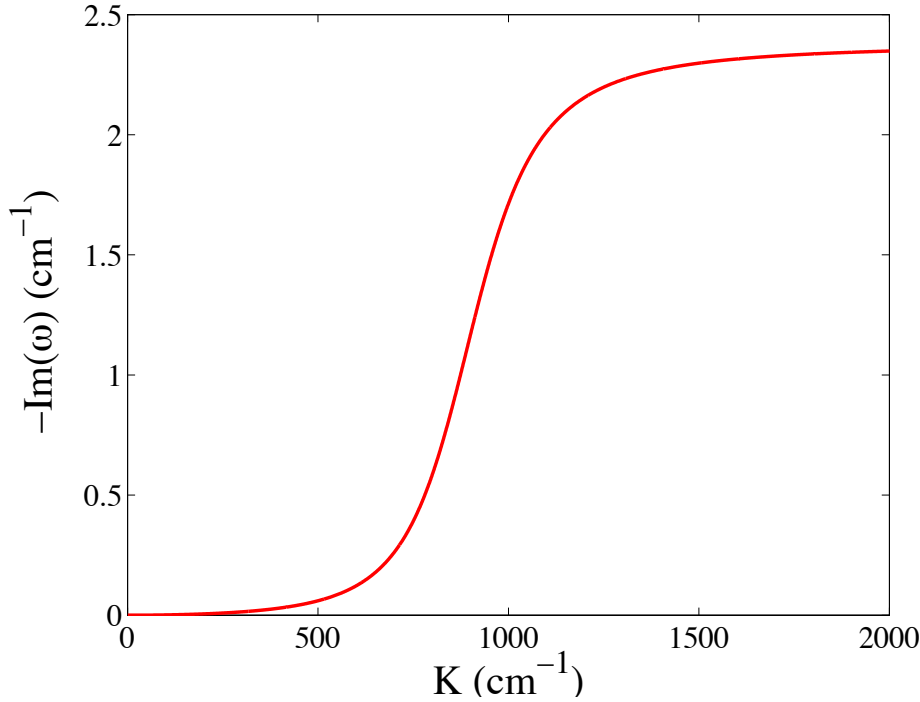


FIG. 1.19 – Opposé de la partie imaginaire de  $\omega$  pour le phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

### 1.6.3 Discussion physique sur la manière d'obtenir la relation de dispersion

Il peut sembler étonnant, au premier abord, que les relations de dispersion ne soient pas les mêmes bien qu'elles décrivent le même phénomène physique (le polariton de surface). En fait, ce qui compte, c'est la manière dont *expérimentalement* nous pourrions déterminer cette relation de dispersion.

#### 1<sup>ère</sup> expérience

Pour cette première expérience, nous utilisons un montage de Réflexion Totale Atténuée (ou ATR = *Attenuated Total Reflection* en anglais) dans une configuration du type Kretschmann (*cf.* Fig. 1.14(a)) pour réaliser un spectre de la lumière réfléchie (ATR-Kretschmann) par un échantillon susceptible de supporter des polaritons de surface. Nous nous plaçons ici en régime monochromatique avec une fréquence  $\omega$  *réelle* bien déterminée (par exemple celle d'un laser incident). L'idée est alors de faire varier l'angle d'incidence  $\theta_{inc}$  et donc la valeur de  $K$  :  $K = \frac{n\omega}{c} \sin \theta_{inc}$ . Des creux vont apparaître dans le spectre angulaire : ils correspondent à l'excitation du polariton de surface. Ainsi, si nous reportons sur une courbe tous les couples  $(K, \omega)$ , nous pouvons alors construire petit à petit la relation de dispersion représentée sur la figure 1.16. La position du creux correspond à  $Re(K)$  et sa largeur est liée à  $Im(K)$ . Ce type d'expérience correspond donc au choix  $K$  complexe et  $\omega$  réel et donne effectivement une relation de dispersion *avec repliement*.

#### 2<sup>ème</sup> expérience

Pour cette deuxième expérience, nous fixons l'angle d'incidence  $\theta_{inc}$  et faisons varier la fréquence  $\omega$  de l'onde incidente. Aussi la valeur de la composante parallèle  $K$  du vecteur d'onde est-elle fixée et *réelle*. Par ailleurs, les lois de Descartes imposent la conservation de  $K$  à travers l'interface ; ainsi, si une onde de surface est excitée sur l'interface, elle aura alors une composante  $K$  réelle. Maintenant, en réalisant le spectre, c'est-à-dire en faisant varier  $\omega$ , le spectre de la réflectivité

va également présenter des creux qui correspondent au polariton de surface. Nous pouvons de la même manière reporter sur une courbe tous les couples  $(K, \omega)$  pour reconstruire la courbe représentée sur la figure 1.18. La partie imaginaire de  $\omega$  est, elle, liée à la largeur spectrale des creux dans la réflectivité, c'est-à-dire à la durée de vie du polariton dans le domaine temporel. Ce type d'expérience correspond donc au choix  $K$  réel et  $\omega$  complexe; les mesures donnent bien une relation de dispersion *sans repliement*.

## Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que l'interface plane entre deux milieux pouvait supporter des ondes de surface sous certaines conditions: polarisation  $p$  (TM) du champ électrique, constante diélectrique négative de l'un des deux milieux (milieu actif) et vérification de la relation de dispersion (Éq. 1.18).

Le cas d'un métal (Cu) et celui d'un cristal polaire (SiC) ont été traités, laissant apparaître d'autres caractéristiques des polaritons de surface: *résonance* pour  $\varepsilon(\omega) = -1$ , caractère *non radiatif* (*i.e.* évanescent) du polariton de surface et *confinement* près de l'interface.

Nous allons voir dans les prochains chapitres que ces caractéristiques du polariton de surface vont avoir des conséquences au niveau de la densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface et des transferts radiatifs sub-longueur d'onde. Nous allons également nous en servir pour modifier les propriétés radiatives de surface.

## Chapitre 2

# Rayonnement thermique en champ proche et émission cohérente de lumière

## Introduction

Le *rayonnement thermique* est un phénomène physique bien connu et relativement bien compris depuis la description qui en a été faite par Planck (1901) puis par Einstein (1907 et 1916). Nous allons donc, dans ce chapitre, faire quelques rappels sur le rayonnement du *corps noir*, sur la notion d'émissivité et les différentes lois que nous pouvons déduire de ce modèle (loi du déplacement de Wien, loi de Stefan-Boltzmann, ...). Ensuite, nous verrons qu'il est possible de formuler la théorie du rayonnement thermique dans le cadre de l'*électrodynamique classique*. Nous pourrons alors calculer la densité d'énergie rayonnée par une source thermique dans le cas le plus général, à condition de connaître sa *constante diélectrique*.

Ce formalisme électromagnétique a été utilisé précédemment par Carminati et Greffet (1999) pour étudier le rayonnement thermique en champ proche. Un calcul *exact* du tenseur de la densité spectrale croisée ("cross-spectral density tensor" en anglais) du champ électromagnétique émis thermiquement par une source plane et opaque a été fait pour étudier la longueur de corrélation spatiale  $l_{cor}$  de ce champ, au voisinage de telles sources. Il a été démontré deux résultats très intéressants :

1. la longueur de corrélation  $l_{cor}$  peut être très inférieure à la valeur classique de  $\lambda/2$  obtenue pour un corps noir (et plus généralement pour une source lambertienne) : cet effet, lié au caractère *non radiatif* du champ électromagnétique près de la surface, implique de reconsidérer le concept d'émissivité à l'échelle sub-longueur d'onde ;
2. la longueur de corrélation  $l_{cor}$  peut atteindre des valeurs de plusieurs dizaines de longueurs d'onde en champ proche lorsque l'interface vide/matériau est susceptible de supporter des ondes de surface (plasmon-polariton ou phonon-polariton) : cette longueur de corrélation est alors liée à la longueur de propagation de l'onde de surface (*cf.* Chap. 1).

Nous verrons (Sec. 2.2) quelles sont les conséquences de ces effets sur la densité d'énergie électromagnétique d'émission thermique au-dessus d'une interface plane séparant le vide et un matériau opaque à une température  $T$ .

Par ailleurs, Henkel *et al.* (2000) sont allés plus loin dans les calculs en déterminant les expressions *asymptotiques* du tenseur de corrélation du champ électrique. Une analyse détaillée permet alors de distinguer les régimes précédemment évoqués :

1. régime champ proche (pour  $z \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ ) :  $l_{cor} \sim z$ ,  $z$  étant la distance du point d'observation à

l'interface ;

2. régime du polariton de surface (pour  $z \sim \frac{\lambda}{2\pi}$ ) : on a alors  $l_{cor} \gg \lambda$  ;
3. régime champ lointain (pour  $z \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ ) :  $l_{cor}$  de l'ordre de  $\lambda/2$ .

Par ailleurs, il est montré que dans le cas de métaux dans le visible, la longueur de corrélation en champ proche est également de l'ordre de  $z$  (sauf si l'épaisseur de peau dans le métal est inférieure à  $z$ ). Nous verrons que ces régimes sont retrouvés pour la densité d'énergie électromagnétique.

De la même manière, Shchegrov *et al.* (2000) ont étudié la cohérence *temporelle* du champ électrique émis thermiquement au voisinage d'une interface vide/matériau opaque. Ce travail montre que le spectre d'émission thermique est très différent selon qu'il est calculé (ou mesuré) en champ proche ou en champ lointain : il peut être quasi monochromatique en champ proche lorsque les ondes évanescentes contribuent majoritairement au spectre ou avoir une large bande en champ lointain comme le rayonnement thermique usuel. Ce changement est essentiellement dû au *filtrage passe-bas* réalisé lors de la propagation du champ loin de la source.

Dans ce chapitre, nous avons calculé la densité d'énergie électrique *et* magnétique associée au rayonnement thermique. Nous avons déduit une expression tout-à-fait générale valable pour l'émission thermique de n'importe quel corps opaque et une expression exacte et condensée dans le cas d'une interface plane. D'ailleurs, nous verrons que la signification physique des différents termes est aisée à donner. Nous avons alors étudié cette densité d'énergie électromagnétique dans le cas d'une interface vide/SiC, en fonction de la pulsation et de la distance d'observation. Comme pour la densité d'énergie électrique, la densité d'énergie électromagnétique dans le vide présente plusieurs particularités *en champ proche* : elle est amplifiée de plusieurs ordres de grandeur en champ proche et elle est quasi monochromatique à la pulsation de résonance du phonon-polariton de surface. Nous retrouverons les mêmes effets avec le silicium dopé, remarquant toutefois qu'il s'agit alors de plasmon-polaritons de surface. D'ailleurs, nous exploiterons les effets mis en évidence pour essayer de concevoir une expérience d'optique de champ proche nous permettant de réaliser de la spectroscopie locale d'émission thermique. L'idée est de mesurer *localement* le spectre de la densité d'énergie électromagnétique avec un microscope optique en champ proche et de reconstruire alors localement la constante diélectrique de l'échantillon examiné. Un premier modèle, fondée sur la théorie développée par Porto *et al.* (2000), est utilisé pour réaliser le dimensionnement d'une expérience avec le carbure de silicium.

Parallèlement à cela, nous avons continué les travaux entrepris initialement par J. Le Gall (Le Gall 1996) concernant l'*émission thermique cohérente* de lumière par des réseaux de carbure de silicium. Cependant, ces précédent travaux ont été effectués sur des réseaux dont les paramètres géométriques (période par rapport à la longueur d'onde, largeur et hauteur des traits) avaient été mal optimisés, si bien que les effets de cohérence spatiale n'étaient pas très apparents. Le problème était que le réseau travaillait sur la partie relativement "plate" de la relation de dispersion du phonon-polariton de surface (*cf.* Fig. 1.18) si bien que la directivité et la monochromaticité de la source thermique n'étaient pas très élevées. P. J. Hesketh avait, dans les années 80, également travaillé<sup>1</sup> sur des réseaux profonds de silicium dopé mais les effets observés avaient été faussement attribués à des modes de "tuyaux d'orgues" ("organ pipe" en anglais) dans la profondeur du réseau. Partant de ce constat, nous avons donc dimensionné et fait fabriquer un nouveau réseau qui présentait toutes les propriétés souhaitées : pics d'absorption très fins dans la réflectivité spectrale, émissivité très directive et un spectre d'émission dépendant fortement de la direction d'émission ("*effet Wolf*"<sup>2</sup>). Une comparaison avec des mesures expérimentales montre un parfait accord entre la modélisation théorique (*i.e.* simulation numérique) et les résultats expérimentaux.

---

1. Hesketh et Zemel (1988a), Hesketh et Zemel (1988b), Wang et Zemel (1991), Wang et Zemel (1992) et Hesketh *et al.* (1986)

2. E. Wolf, "*Invariance of the spectrum of light on propagation*", Phys. Rev. Lett. **56**, pp. 1370-1372 (1986)

La source thermique que nous avons conçue est le *premier exemple* de source thermique présentant l'“effet Wolf”.

## 2.1 Modélisation du rayonnement thermique en électromagnétisme

Dans ce premier paragraphe, nous allons faire quelques brefs rappels sur les concepts de corps noir et d'émissivité, très utiles lorsque nous traitons des problèmes de transfert radiatif. Ensuite, nous introduirons les idées de base qui permettent de traiter du rayonnement thermique en électromagnétisme : courants fluctuants, *théorème de fluctuation-dissipation* et équilibre thermodynamique local (ETL). Cette théorie a été développée initialement par Rytov (1958) puis par Landau et Lifchitz (1980). Nous précisons enfin la manière dont nous calculons le champ électromagnétique associé au rayonnement thermique.

### 2.1.1 Rappels sur l'approche radiométrique

Pour des détails plus complets sur le rayonnement thermique, abordée du point de vue de l'optique (notions de luminance, d'étendue géométrique, *etc*), on pourra se reporter à Meyzonnette et Lépine (1997) et Meyzonnette et Lépine (2001). Pour une approche tournée vers les transferts thermiques, on lira Taine et Petit (1994).

Rappelons tout d'abord que le rayonnement que nous appellerons "*rayonnement thermique*" est le rayonnement produit par l'agitation thermique des électrons, des atomes ou des molécules qui constituent la matière. Ce rayonnement existe dès lors que la température d'un corps est strictement supérieure à 0 K. Ce rayonnement est parfois appelé rayonnement par *incandescence*.

#### Corps noir

Considérons un objet quelconque susceptible d'interagir avec la lumière. Cet objet est désigné comme *corps noir* si cet objet absorbe intégralement le rayonnement incident, ceci quels que soient la longueur d'onde de ce rayonnement, son angle d'incidence ou sa polarisation.

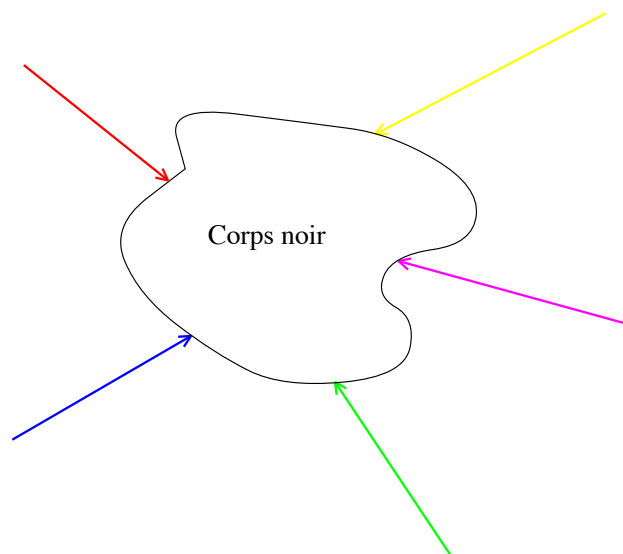


FIG. 2.1 – Le modèle du corps noir : objet absorbant totalement le rayonnement incident quels que soient la longueur d'onde, l'angle d'incidence ou la polarisation.

Supposons maintenant que ce corps noir soit en *équilibre thermique* avec un thermostat à la température  $T$  (enceinte isotherme). Du fait de l'existence de cet équilibre thermique, le rayonnement émis par le corps noir est exactement compensé par le rayonnement absorbé. Ainsi, nous

comprenons que le rayonnement émis par un corps noir dépend de sa température (spectre et niveau d'émission). Par la suite, nous noterons  $L_\omega^0(T)$  la luminance monochromatique (ou *spectrique*) du corps noir à la température  $T$  et à la pulsation  $\omega$ . Cette grandeur est en  $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\text{Hz}^{-1}$ . La luminance du corps noir est, par définition, *isotrope*. La figure 2.2 représente l'émission d'un corps noir à la température de 300 K : la figure 2.2(a) représente la luminance monochromatique en fonction de la pulsation  $\omega$  et la figure 2.2(b) en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ . On remarquera en examinant ces deux courbes que la pulsation  $\omega_{max}$  du maximum de  $L_\omega^0(T)$  ne correspond pas<sup>3</sup> à la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  du maximum de  $L_\lambda^0(T)$  (qui lui est donné par la loi du déplacement de Wien, cf. Sec. 2.1.1).

Par ailleurs, les luminances monochromatiques d'un corps noir sont très différentes en fonction de la température, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.3 (échelle *log-log*) : On remarquera de plus que les courbes de luminance monochromatique de corps noir à différentes températures ne se coupent *jamais* (sinon, il y aurait un déséquilibre).

### Corps réel : notion d'émissivité

Tous les corps opaques ne sont évidemment pas des corps noirs. Un corps quelconque n'absorbe qu'une partie du rayonnement incident, en fonction de l'angle d'incidence, de la polarisation, de la pulsation et de la température  $T$ . Nous définissons ainsi un facteur d'absorption monochromatique directionnel  $\alpha(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation})$ ,  $\theta$  et  $\phi$  étant les angles définissant la direction d'incidence sur le corps (ce sont les angles des coordonnées sphériques habituelles). En raisonnant sur un corps réel et un corps noir en équilibre thermique dans une enceinte isotherme à la température  $T$ , nous pouvons montrer que la luminance monochromatique émise par le corps réel à la pulsation  $\omega$  et dans la direction  $(\theta, \phi)$ , notée  $L_\omega(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation})$ , vaut :

$$L_\omega^{\text{réel}}(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation}) = \alpha(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation}) L_\omega^0(T) \quad (2.1)$$

Cette loi est la *première loi de Kirchhoff*. Par ailleurs, nous définissons l'émissivité monochromatique directionnelle  $\epsilon(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation})$ <sup>4</sup> du corps par :

$$\epsilon(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation}) = \frac{L_\omega^{\text{réel}}(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation})}{L_\omega^0(T)} \quad (2.2)$$

$\epsilon$  est sans dimension.

Ainsi, nous avons la relation suivante entre  $\epsilon$  et  $\alpha$  :

$$\epsilon(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation}) = \alpha(T, \omega, \theta, \phi, \text{polarisation}) \quad (2.3)$$

Ceci constitue la *deuxième loi de Kirchhoff*. Notons alors que le corps noir est la source de rayonnement thermique qui, pour une température donnée, émet le plus d'énergie à la pulsation  $\omega$ , et ceci quelle que soit la direction d'émission considérée.

### Les différentes lois du rayonnement thermique

- Loi de Planck Elle donne la valeur de la luminance monochromatique du corps noir en fonction de la température  $T$  :

$$L_\omega^0(T) = \frac{c}{4\pi} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \frac{1}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1} \quad (2.4)$$

3. *i.e.* nous n'avons pas  $\omega_{max} = \frac{2\pi c}{\lambda_{max}}$ .

4. Ne pas confondre  $\epsilon$  la permittivité diélectrique et  $\epsilon$  l'émissivité.



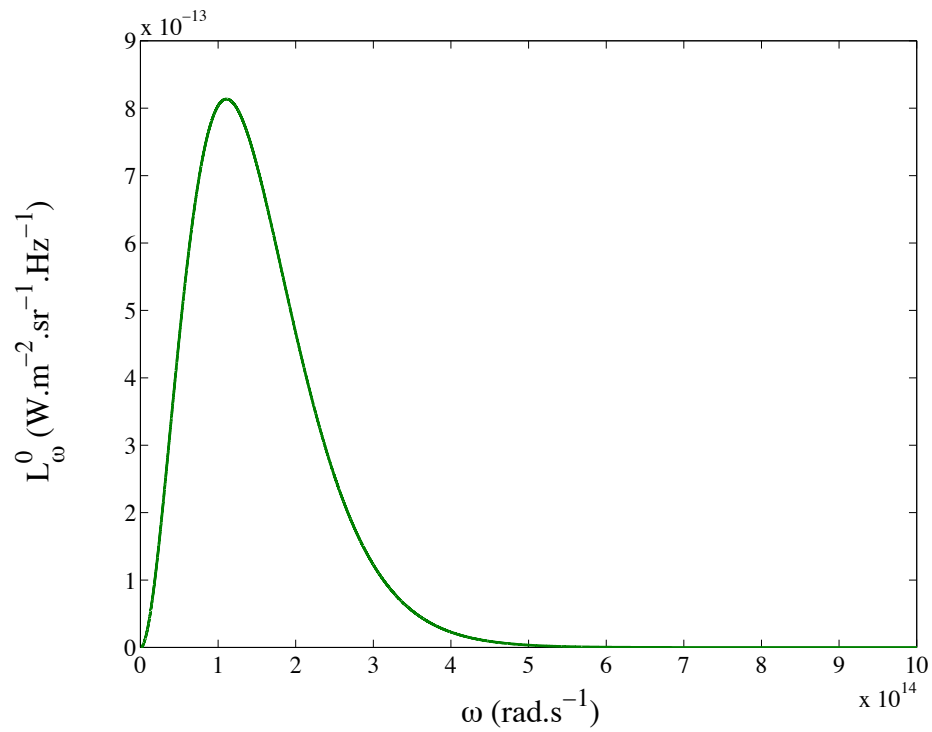
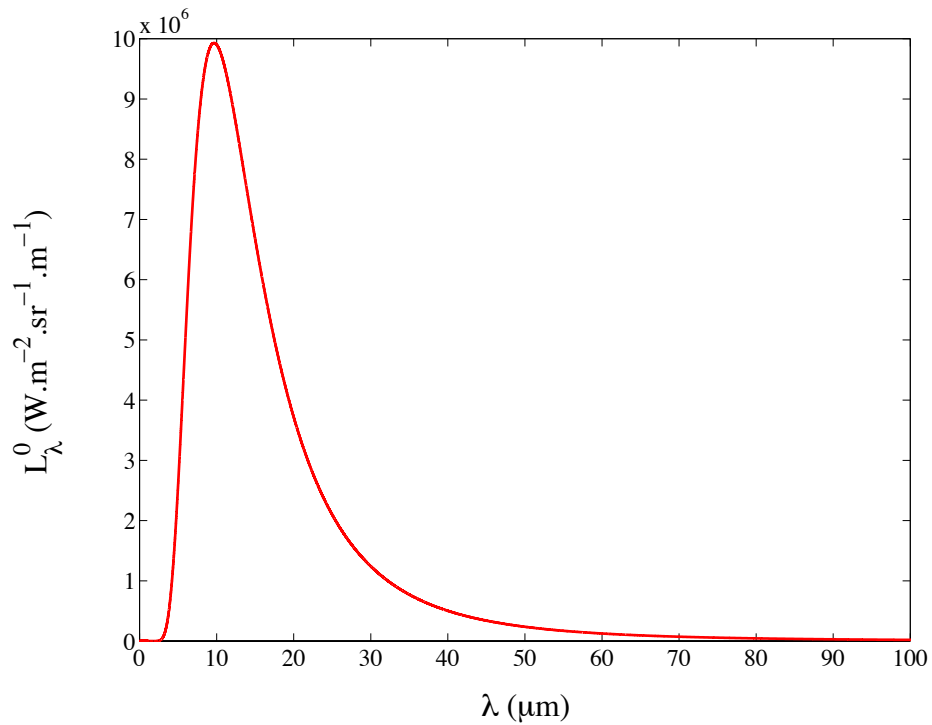
(a) Luminance en fonction de la pulsation  $\omega$ (b) Luminance en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ 

FIG. 2.2 – Luminance monochromatique du corps noir à la température de 300 K.

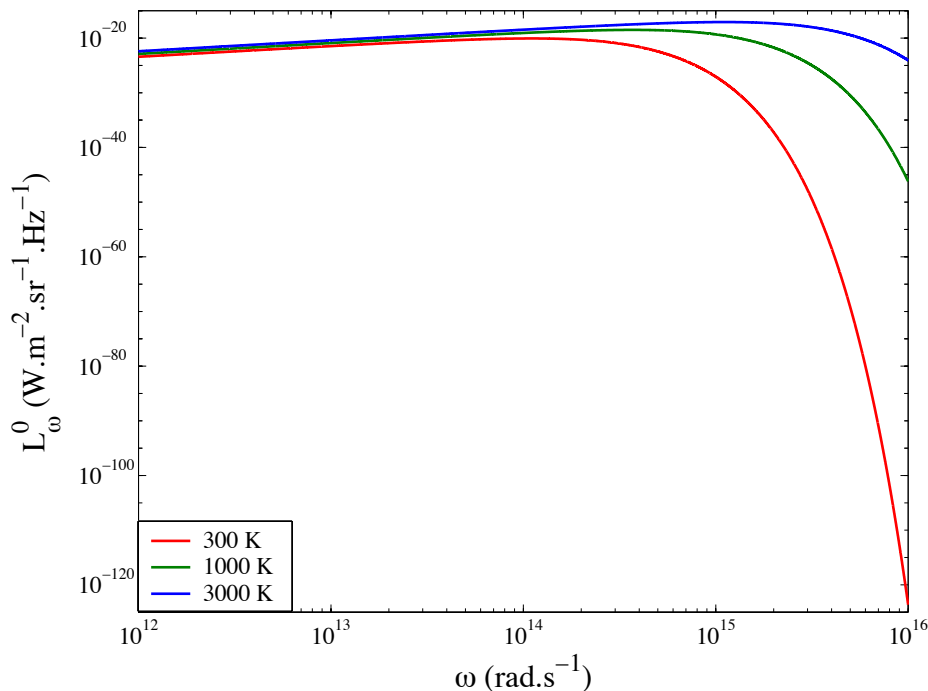


FIG. 2.3 – Luminance monochromatique du corps noir pour différentes températures : 300 K (rouge), 1000 K (vert) et 3000 K (bleu).

- Loi du déplacement de Wien Elle précise, pour un corps noir à la température  $T$ , la valeur de la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  pour laquelle la luminance monochromatique  $L_{\lambda}^0(T)$  est maximale :

$$\lambda_{max} (\mu m) \approx \frac{2898}{T(K)} \quad (2.5)$$

Ainsi, un corps noir à la température de 300 K présente un maximum d'émission thermique à une longueur d'onde d'environ  $10 \mu m$ .

Lorsque la luminance monochromatique est exprimée par unité de fréquence en  $\omega$ , la position du maximum  $\omega_{max}$  est donnée par la relation :

$$\omega_{max}(\text{THz}) \approx 0.3694 T(\text{K}) \quad (2.6)$$

- Loi de Stefan Elle donne la luminance *totale* émise par un corps noir à la température  $T$  :

$$L^0(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (2.7)$$

où  $\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8}$  est la constante de Stefan, en  $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\text{K}^{-4}$ .

Une autre remarque importante à faire est qu'un corps noir à la température  $T$  émet environ 25% de son rayonnement entre  $\lambda = 0$  et  $\lambda = \lambda_{max}$  et 75 % au delà. De plus, 98 % de l'énergie est émise entre  $\lambda_{max}/2$  et  $8 \lambda_{max}$ . Ainsi, pour un corps noir à 300 K, la plus grande partie du rayonnement est émise entre 5 et  $80 \mu m$ .

## 2.1.2 Le rayonnement thermique en électromagnétisme

### Courants fluctuants

Considérons un corps matériel quelconque à une température  $T > 0$  K. À cause des fluctuations thermiques de température (autour de la température d'équilibre  $T$ ), il y a de l'agitation thermique à l'intérieur de ce corps. Cette agitation thermique met en mouvement les électrons le constituant, créant ainsi un courant électrique susceptible de rayonner un champ électromagnétique. Si nous considérons un volume  $dV$  de ce matériau, centré au point  $\mathbf{r}$ , nous noterons alors  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}, \omega)$  le *courant fluctuant* généré à la pulsation  $\omega$ . En fait,  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}, \omega)$  correspond à une densité volumique de courant (en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ ). L'introduction de ces "*sources fluctuantes*" dans le problème et notamment dans les équation de Maxwell, permet de traiter le rayonnement thermique en électromagnétisme.

### Théorème de fluctuation-dissipation

Les courants fluctuants ont une moyenne d'ensemble (moment d'ordre 1) nulle si bien que le champ électromagnétique moyen rayonné thermiquement par un corps à température non nulle est nul. Cependant, la moyenne d'ensemble de la fonction de corrélation des courants (moment d'ordre 2) est non nulle et est donnée par le théorème de fluctuation-dissipation. Nous allons maintenant rappeler les conditions d'application de ce théorème. Nous considérons un milieu matériel (*non magnétique*) décrit d'un point de vue électromagnétique par sa constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ . Cette permittivité est supposée être une grandeur *locale*, c'est-à-dire que la polarisation en un point du milieu est directement proportionnelle au champ électrique en ce point, et ne dépend pas directement du champ en d'autres points (*cf.* Annexe B). Par ailleurs, ce milieu est supposé être à l'*équilibre thermodynamique local* (ETL), c'est-à-dire qu'entre autres, une température d'équilibre  $T$  peut être définie en tout point du système et ceci à chaque instant. Dans ces conditions, considérons deux éléments de courants  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}, \omega)$  et  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega')$  situés respectivement au point  $\mathbf{r}$  et au point  $\mathbf{r}'$  à l'intérieur du matériau et oscillant respectivement à la pulsation  $\omega$  et à la pulsation  $\omega'$ . Le théorème de fluctuation-dissipation est une relation portant sur le tenseur des corrélations qui stipule que :

$$\left\langle j_m^f(\mathbf{r}, \omega) j_n^f(\mathbf{r}', \omega')^* \right\rangle = 2 \frac{\omega \varepsilon_0}{\pi} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \delta_{m,n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega') \quad (2.8)$$

où :

- les crochets  $\langle \rangle$  indiquent que nous réalisons une moyenne d'ensemble ;
- les indices  $m, n = x, y, z$  correspondent aux différentes composantes spatiales des courants (en coordonnées cartésiennes) ;
- $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide et  $\varepsilon''(\omega)$  la partie imaginaire de la constante diélectrique du milieu ;
- $\Theta(\omega, T)$  est l'énergie moyenne d'un oscillateur harmonique quantique à la pulsation  $\omega$  et à la température  $T$  (*cf.* Annexe B) ;
- $\delta_{m,n}$  est le symbole de Kronecker ;
- $\delta$  est la distribution de Dirac.

Ainsi, nous pouvons dire que les courants fluctuants sont  $\delta$ -corrélés dans l'espace (*localité* de la constante diélectrique) et en pulsation (*stationnarité* des grandeurs fluctuantes). En outre, il

est important de voir ici qu'à partir du moment où la constante diélectrique du milieu est connue, nous connaissons la manière dont le milieu rayonne dans l'espace. Et même si le théorème de fluctuation-dissipation ne fait apparaître que la partie imaginaire de la constante diélectrique, il est également nécessaire de connaître sa partie réelle pour savoir comment se propage le champ dans l'espace<sup>5</sup>. Le théorème de fluctuation-dissipation relie simplement l'absorption (proportionnelle à la partie imaginaire de la constante diélectrique) à l'émission. Il nous reste maintenant à décrire la manière dont nous calculons le champ électromagnétique associé au rayonnement thermique. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

### 2.1.3 Développement en onde plane et formalisme de Green

#### Développement en onde plane

Nous nous placerons en régime stationnaire et nous travaillerons avec des champs monochromatiques. La dépendance temporelle de toutes les grandeurs physiques (champs, courants,...) est en  $\exp(-i\omega t)$ ,  $\omega$  étant la pulsation en  $\text{rad.s}^{-1}$ . Ceci a une importance, notamment pour le choix du signe de la partie imaginaire de la constante diélectrique et de celle des vecteurs d'onde. Dans tous les calculs que nous développerons, le terme  $\exp(-i\omega t)$  sera toujours implicite dans l'expression des champs. Par ailleurs, nous utiliserons souvent le développement en ondes planes du champ électromagnétique. Par exemple, considérons le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  existant au point  $\mathbf{r}$  et à la pulsation  $\omega$ ; ce champ (dont on ne connaît pas *a priori* l'expression dans l'espace réel) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.9)$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$  correspond à l'amplitude d'une onde plane se propageant avec le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Mathématiquement,  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$  correspond à la transformée de Fourier *spatiale* (3D) du champ électrique.

#### Formalisme de Green

Le problème électromagnétique à résoudre est de relier les courants fluctuants  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}, \omega)$  au champ électromagnétique représenté par  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  (champ électrique) et  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  (champ magnétique).

Dans tous les systèmes que nous avons étudiés, nous avons supposé que les milieux étaient linéaires, homogènes, isotropes et non magnétiques. La linéarité du milieu et donc celle des équations de Maxwell nous permettent d'affirmer qu'il existe une relation linéaire entre les courants (l'excitation) et les champs (la réponse);  $\mathbf{j}^f$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  étant des vecteurs cette relation s'exprime aux moyens de tenseurs, dits *tenseurs de Green*. Considérons donc un élément de courant ponctuel  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega)$  situé au point  $\mathbf{r}'$  et rayonnant à la pulsation  $\omega$ ; le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ ) rayonné au point  $\mathbf{r}$  et oscillant à la pulsation  $\omega$  est donné par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \overset{\leftrightarrow H}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.10b)$$

où  $\overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{G}}$  et  $\overset{\leftrightarrow H}{\mathbf{G}}$  sont les tenseurs de Green du système respectivement pour le champ électrique et

---

5. Cependant, la partie réelle peut être directement déduite de la partie imaginaire, *via* les relations de Kramers-Kronig. La déduction ne sera exacte que si la partie imaginaire est connu sur *tout* le spectre

pour le champ magnétique. Physiquement, ces tenseurs représentent la propagation du champ à la pulsation  $\omega$ , du point  $\mathbf{r}'$  au point  $\mathbf{r}$ . Toute l'information utile, comme la géométrie du système et ses propriétés électromagnétiques, est contenue dans les tenseurs de Green. Des détails sur la manière dont nous pouvons calculer ces tenseurs dans quelques géométries simples sont donnés dans les annexes C, D, E et G. Pour une distribution – discrète ou continue – de courants, il suffit de sommer ou d'intégrer sur l'ensemble des sources du rayonnement.

### Signaux analytiques

Dans l'ensemble de notre travail, nous avons travaillé avec des signaux complexes dits *analytiques*<sup>6</sup>. Les grandeurs physiques usuelles (champs, densité de courant,...) variant avec le temps sont des grandeurs mesurables *réelles* (au sens mathématique). Considérons, par exemple, un signal  $x(t)$  *réel* dépendant du temps que nous pouvons écrire sous la forme :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (2.11)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt x(t) \exp(i\omega t) \quad (2.12)$$

et définissons  $x^a(t)$  par :

$$x^a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{x}^a(\omega) \exp(-i\omega t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{x}^a(\omega) = \tilde{x}(\omega) & \text{si } \omega \geq 0 \\ \tilde{x}^a(\omega) = 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$x^a$  est le signal *analytique* (en général complexe) associé au signal *réel*  $x$ . Remarquons dès à présent que le signal analytique n'a rien à voir avec le signal complexe associé au signal réel lorsque nous travaillons en régime harmonique. Le signal analytique est le signal dont le spectre ne contient que des pulsations positives et est identique à celui du signal originel. Cependant, en "réduisant" ainsi le spectre, nous ne perdons pas d'information sur  $x(t)$  car ce signal étant réel, son spectre est *hermitique* (i.e.  $\tilde{x}(-\omega) = \tilde{x}(\omega)^*$ ). De cette remarque, nous pouvons tirer facilement que :

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} [x^a(t)] \quad (2.14)$$

Si  $x(t)$  représente un signal aléatoire réel dépendant du temps, nous pouvons également définir un signal analytique associé. Pour cela, considérons une réalisation particulière  $x_k(t)$  de l'ensemble des réalisations et définissons  $x_k^a(t)$  comme le signal analytique associé à cette réalisation. Nous construisons alors un nouvel ensemble statistique, constitué des différentes réalisations  $x_k^a(t)$ . Ainsi, nous noterons (symboliquement)  $x^a(t)$  le signal aléatoire analytique associé au signal aléatoire réel  $x(t)$ . Considérons à présent deux signaux aléatoires réels  $x(t)$  et  $y(t)$  dépendant du temps. Les signaux analytiques complexes associés sont notés  $x^a(t)$  et  $y^a(t)$ . Nous aurons souvent des grandeurs quadratiques à calculer du type  $x^2(t)$  ou  $x(t)y(t)$ . Dans le cas de signaux monochromatiques, nous aurons alors la relation suivante :

$$x^c x^{c*} = (2 x^a) (2 x^{a*}) = 4 x^a x^{a*} \quad (2.15)$$

Ainsi, il y a un facteur 4 selon que l'on travaille avec les signaux complexes ou les signaux analytiques. Nous verrons dans la section suivante que cette remarque aura tout son intérêt.

---

6. On pourra se reporter utilement à Mandel et Wolf 1995, Chap. 3, p. 92.

## 2.2 Densité d'énergie au-dessus d'une interface

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser au rayonnement thermique et plus particulièrement à la *densité d'énergie électromagnétique* au-dessus d'une interface plane. Après avoir rappelé la géométrie du système étudié, nous détaillerons le calcul de la densité d'énergie à partir de la description du rayonnement thermique que nous avons faite précédemment. Nous présenterons alors les résultats que nous avons obtenus pour le carbure de silicium (SiC) aux caractéristiques particulières; des comparaisons seront ensuite faites avec d'autres matériaux comme le verre et le silicium dopé. Enfin, une brève discussion sur la notion d'émissivité en champ proche sera abordée.

### 2.2.1 Système physique étudié

La géométrie que nous avons étudiée est relativement simple (*cf.* Fig. 2.4). L'espace est divisé en deux milieux semi-infinis: pour  $z \leq 0$ , le milieu ("substrat" ou "échantillon") est un matériau linéaire, homogène, isotrope et non magnétique, de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ , maintenu à la température uniforme  $T > 0$ ; au-dessus de ce milieu, séparé par une interface plane, il y a du vide de constante diélectrique égale à 1 quelle que soit la pulsation<sup>7</sup>. Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z) = (x, y, z)$ .

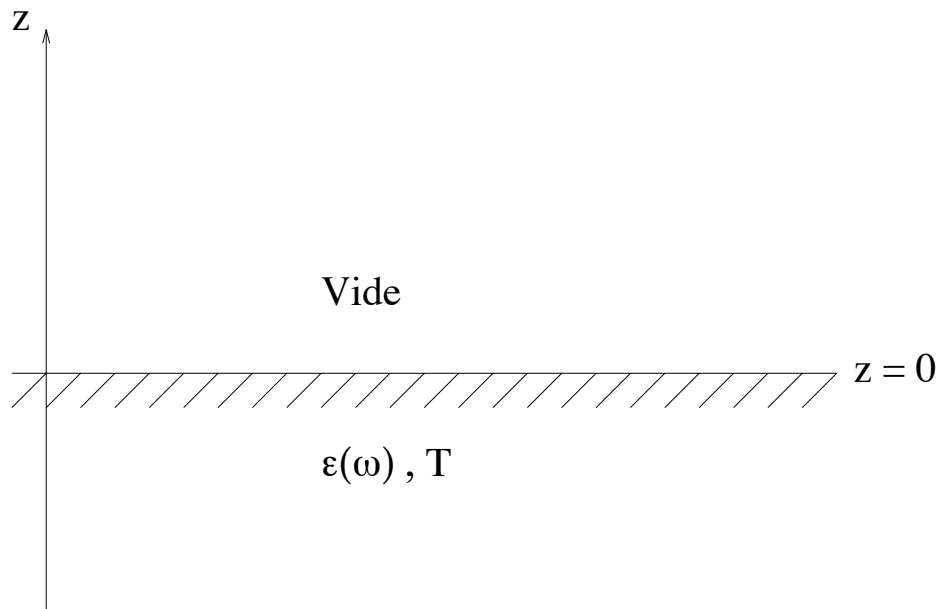


FIG. 2.4 – Géométrie du système étudié.

Le substrat étant à une température  $T > 0$ , l'agitation thermique génère donc des courants fluctuants à l'intérieur de ce milieu. Pour un point  $\mathbf{r}'$  dans le matériau, nous notons  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega)$  la densité volumique de courant fluctuant (en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ ) créée au point  $\mathbf{r}'$  à la pulsation  $\omega$ . Ces courants rayonnent un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  et un champ magnétique  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  en un point  $\mathbf{r}$  (situé dans le vide) et à la pulsation  $\omega$ .

### 2.2.2 Calcul de la densité d'énergie électromagnétique au-dessus de l'interface

Le système étudié étant invariant par translation *parallèlement* à l'interface, la densité d'énergie au-dessus de l'interface ne dépend que de la hauteur  $z$  où nous la calculons (ceci ne serait pas vrai pour le tenseur d'auto-corrélation du champ).

<sup>7</sup>. Nous supposons également que le vide est à une température de 0 K, ce qui revient à ne calculer que l'émission du substrat.

### Définition de la densité d'énergie électromagnétique dans le vide

Nous noterons  $u(\mathbf{r}, \omega, T)$  la *densité d'énergie électromagnétique* pour un point  $\mathbf{r}$  au-dessus de l'interface, à la pulsation  $\omega$  et pour un substrat à la température  $T$ . Par définition, la densité d'énergie électromagnétique *dans le vide* (milieu non dispersif) associée à un champ monochromatique, représentée par ses signaux analytiques  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ , est égale à :

$$u(\mathbf{r}, \omega, T) = 2 \times \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle + \frac{\mu_0}{2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle \right] \quad (2.16)$$

où le facteur 2 provient du fait que nous travaillons justement avec des signaux analytiques. Cette densité d'énergie électromagnétique monochromatique est en  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$ . Il y a deux contributions à cette densité d'énergie électromagnétique : un terme électrique  $u_e(\mathbf{r}, \omega, T)$  :

$$u_e(\mathbf{r}, \omega, T) = 2 \times \frac{\varepsilon_0}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle \quad (2.17)$$

et un terme magnétique  $u_m(\mathbf{r}, \omega, T)$  :

$$u_m(\mathbf{r}, \omega, T) = 2 \times \frac{\mu_0}{2} \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle \quad (2.18)$$

La densité d'énergie électromagnétique totale (en  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ ), c'est-à-dire intégrée sur l'ensemble du spectre, est notée  $u(\mathbf{r}, T)$  et est donnée par :

$$u(\mathbf{r}, T) = \int_0^\infty d\omega u(\mathbf{r}, \omega, T) \quad (2.19)$$

**Remarque :** Nous détaillons cette fois-ci un calcul complet de rayonnement thermique dans le cadre de l'électromagnétisme. Par la suite, les calculs détaillés seront reportés en annexe. Ceci permettra de se familiariser avec le formalisme et les notations que nous utiliserons par la suite.

### Calcul pour une pulsation $\omega$

Par la suite nous noterons  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^E$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^H$  les tenseurs de Green du système correspondant au rayonnement d'un courant situé dans le substrat vers un point d'observation situé dans le vide. Ces tenseurs correspondent à ceux que nous avons notés  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{12}^E$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{12}^H$  dans l'annexe D. Nous avons donc les relations suivantes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \int_V d^3\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.20a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int_V d^3\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.20b)$$

où le volume  $V$  correspond à l'espace  $z < 0$  (espace inférieur où se situent les sources du rayonnement). Nous allons maintenant détailler le calcul complet du terme d'énergie électrique  $u_e(\mathbf{r}, \omega, T)$  :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle &= \left\langle \left| i\omega\mu_0 \int_V d^3\mathbf{r}' \overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \right|^2 \right\rangle \\
&= \mu_0^2 \omega^2 \int_V d^3\mathbf{r}' \int_V d^3\mathbf{r}'' \sum_{l,m,n=x,y,z} G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,n}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega)^* \\
&\quad \times \langle j_m^f(\mathbf{r}', \omega) j_n^f(\mathbf{r}'', \omega)^* \rangle
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pour écrire la deuxième égalité, nous avons supposé que moyenne d'ensemble et intégration pouvaient être interchangées. Or, d'après le théorème de fluctuation-dissipation (Éq. 2.8), la fonction de corrélation des courants s'exprime sous la forme :

$$\langle j_m^f(\mathbf{r}', \omega) j_n^f(\mathbf{r}'', \omega)^* \rangle = 2 \frac{\omega \varepsilon_0}{\pi} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \delta_{m,n} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \tag{2.22}$$

Donc, la double intégration dans l'équation (2.21) se réduit à une seule, si bien que nous obtenons :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle = 2 \mu_0^2 \omega^2 \times \frac{\omega \varepsilon_0}{\pi} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \int_V d^3\mathbf{r}' G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)^* \tag{2.23}$$

où la double sommation sur les indices  $l$  et  $m$  est implicite (sommation sur les indices répétés). Ainsi, en rappelant que nous avons la relation  $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$ , nous obtenons la densité d'énergie électrique :

$$\varepsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)^* \rangle = 2 \frac{\omega^3}{\pi c^4} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \int_V d^3\mathbf{r}' G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)^* \tag{2.24}$$

Il s'agit maintenant de calculer le terme  $G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)^*$ . Pour cela, nous développons le tenseur du champ électrique sous la forme suivante (cf. Annexe D) :

$$\overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{g}}(\mathbf{K}, z, z', \omega) \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \tag{2.25}$$

où  $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z)$  et  $\mathbf{r}' = (\mathbf{R}', z')$ . Ce développement est simplement une relation de transformée de Fourier (2D spatiale) entre  $\overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{G}}$  et  $\overset{\leftrightarrow E}{\mathbf{g}}$ . C'est l'analogie du développement en ondes planes pour les champs électriques et magnétiques. Le vecteur  $\mathbf{K}$  correspond à la composante *parallèle à l'interface* d'une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  dans le substrat<sup>8</sup>.

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\int_V d^3\mathbf{r}' G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)^* &= \int \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \frac{d^2\mathbf{K}'}{(2\pi)^2} \exp[i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{R}] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^0 dz' g_{l,m}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}', z, z', \omega)^* \\
&\quad \int d^2\mathbf{R}' \exp[-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{R}']
\end{aligned} \tag{2.26}$$

---

8. On remarquera que seul le vecteur  $\mathbf{K}$  se conserve à la traversée des deux milieux (loi de *Snell-Descartes*) ; en revanche, le vecteur d'onde total, lui, dépend de l'indice du milieu.



où nous reconnaissons l'identité classique<sup>9</sup> :

$$\int d^2\mathbf{R}' \exp[-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{R}'] = 4\pi^2 \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \quad (2.27)$$

Donc, la dépendance par rapport à  $\mathbf{R}$  disparaît (invariance par translation dans un plan parallèle à  $x - y$ ) et l'équation (2.26) se simplifie en :

$$\int_V d^3\mathbf{r}' G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)^* = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \left[ \int_{-\infty}^0 dz' g_{l,m}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega)^* \right] \quad (2.28)$$

Par ailleurs, nous pouvons montrer (cf. Annexe D) que  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}^E$  est de la forme :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}^E(\mathbf{K}, \omega) \exp[i(\gamma_0 z - \gamma z')] \quad (2.29)$$

où  $\gamma_0$  et  $\gamma$  sont les composantes *perpendiculaires* à l'interface du vecteur d'onde, respectivement dans le vide et dans le substrat. Elles sont définies comme suit :

$$\gamma_0^2 = k_0^2 - K^2 \quad \text{avec} \quad Re(\gamma_0) \geq 0 \quad \text{et} \quad Im(\gamma_0) \geq 0 \quad (2.30)$$

$$\gamma^2 = k_0^2 \varepsilon - K^2 \quad \text{avec} \quad Re(\gamma) \geq 0 \quad \text{et} \quad Im(\gamma) \geq 0 \quad (2.31)$$

Ainsi :

$$g_{l,m}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega)^* = g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega)^* \exp(-2\gamma_0'' z) \exp(2\gamma'' z') \quad (2.32)$$

De plus, le calcul de l'intégrale sur  $z'$  (qui converge car  $\gamma'' > 0$ ) montre que :

$$\int_{-\infty}^0 dz' \exp(2\gamma'' z') = \left[ \frac{1}{2\gamma''} \exp(2\gamma'' z') \right]_{z'=-\infty}^{z'=0} = \frac{1}{2\gamma''} \quad (2.33)$$

En insérant cette équation dans l'équation (2.26), nous obtenons une expression très simplifiée :

$$\int_V d^3\mathbf{r}' G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)^* = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\gamma''} g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega)^* \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.34)$$

À ce stade, il reste donc à évaluer la quantité  $g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega)^*$ . Le calcul, long et fastidieux, ne sera pas développé ici, mais il peut être fait en utilisant de l'expression de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}^E$  donnée à l'annexe D. Le résultat final se met sous la forme (la somme sur les indices répétés  $l$  et  $m$  est encore implicite) :

$$g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega) g_{l,m}^E(\mathbf{K}, \omega)^* = \frac{1}{4} \left[ \frac{|t_s|^2}{|\gamma|^2} + \frac{(K^2 + |\gamma_0|^2)(K^2 + |\gamma|^2)}{k_0^4 |n|^2} \frac{|t_p|^2}{|\gamma|^2} \right] \quad (2.35)$$

---

9. Cette identité est conforme aux conventions que nous avons prises pour définir la transformée de Fourier et son inverse.

où  $t_s = t_s(\mathbf{K}, \omega)$  et  $t_p = t_p(\mathbf{K}, \omega)$  sont les facteurs de Fresnel en transmission (en amplitude) du milieu inférieur vers le milieu supérieur ;  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  est l'indice optique du substrat.

Nous obtenons ainsi une première expression de la densité d'énergie électrique  $u_e(z, \omega, T)$  au-dessus de l'interface :

$$u_e(z, \omega, T) = 2 \frac{\omega^3}{\pi c^4} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \times \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2\gamma''} \cdot \frac{1}{4} \left[ \frac{|t_s|^2}{|\gamma|^2} + \frac{(K^2 + |\gamma_0|^2)(K^2 + |\gamma|^2)}{k_0^4 |n|^2} \frac{|t_p|^2}{|\gamma|^2} \right] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.36)$$

On remarquera donc que le calcul montre bien que la densité d'énergie ne dépend que de la hauteur  $z$  du point d'observation. De la même manière, à cause de l'invariance par translation et de la symétrie cylindrique (les axes  $x$  et  $y$  jouent le même rôle pour le problème), tous les termes de l'intégrand ( $\gamma_0, \gamma, t_s, t_p$ ) dans l'équation précédente ne dépendent que de  $K = |\mathbf{K}|$ . Nous pouvons donc effectuer la transformation suivante sur la variable d'intégration  $\mathbf{K}$  :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{K}}{(2\pi)^2} = \int \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} \rightarrow \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{K dK d\theta}{(2\pi)^2} = \int_0^\infty \frac{K dK}{2\pi} \quad (2.37)$$

Par ailleurs, d'après (D.6), nous avons :

$$\frac{\varepsilon''(\omega)}{2\gamma''} = \frac{1}{k_0^2} \gamma' \quad (2.38)$$

D'où :

$$u_e(z, \omega, T) = \frac{1}{4} \frac{\omega^2 \Theta(\omega, T)}{\pi^2 c^3} \times \int_0^\infty \frac{K dK}{k_0} \gamma' \left[ \frac{|t_s|^2}{|\gamma|^2} + \frac{(K^2 + |\gamma_0|^2)(K^2 + |\gamma|^2)}{k_0^4 |n|^2} \frac{|t_p|^2}{|\gamma|^2} \right] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.39)$$

Nous reconnaissons, dans les différents termes, la densité d'énergie  $u_\omega^0(T)$  associée au rayonnement du corps noir à la température  $T$  par la relation :

$$u_\omega^0(T) = \frac{4\pi}{c} L_\omega^0(T) = \frac{\omega^2 \Theta(\omega, T)}{\pi^2 c^3} \quad (\text{J.m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}) \quad (2.40)$$

À ce stade du calcul, nous devons introduire la distinction qu'il y a entre les ondes *propagatives* et les ondes *évanescentes*.

### Contribution des ondes propagatives et des ondes évanescentes

Cette distinction se fait sur la nature des ondes transmises du substrat vers le vide :

$$K \leq k_0 \quad : \text{ ondes propagatives} \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = \text{Re}(\gamma_0) = |\gamma_0| \quad \text{et} \quad \text{Im}(\gamma_0) = 0 \quad (2.41)$$

$$K \geq k_0 \quad : \text{ ondes évanescentes} \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = i \text{Im}(\gamma_0) = i |\gamma_0| \quad \text{et} \quad \text{Im}(\gamma_0) \neq 0 \quad (2.42)$$

Les ondes propagatives dans le milieu 2 (constitué par du vide) se propagent sans s'atténuer et les ondes évanescentes dans le milieu 2 ne se propagent pas.

Ainsi, l'intégration dans l'équation (2.39) doit être séparée en deux, en distinguant le terme correspondant aux ondes propagatives et celui correspondant aux ondes évanescentes.

Pour les ondes propagatives, nous avons :

$$K^2 + |\gamma_0|^2 = K^2 + (k_0^2 - K^2) = k_0^2 \quad (2.43)$$

De plus, nous pouvons montrer facilement (*cf.* Annexe D) que :

$$\frac{\gamma' (K^2 + |\gamma|^2)}{k_0^2} = Re(\varepsilon\gamma^*) \quad (2.44)$$

Or, d'après (D.10), nous avons :

$$\frac{\gamma' |t_s|^2}{|\gamma|^2} = \frac{1}{|\gamma_0|} (1 - |r_s|^2) \quad (2.45a)$$

$$\frac{Re(\varepsilon\gamma^*) |t_p|^2}{|n|^2 |\gamma|^2} = \frac{1}{|\gamma_0|} (1 - |r_p|^2) \quad (2.45b)$$

Il faut faire attention qu'ici,  $r_s = r_s(\mathbf{K}, \omega)$  et  $r_p = r_p(\mathbf{K}, \omega)$  sont les facteurs de Fresnel en réflexion (en amplitude) du milieu supérieur vers le milieu inférieur.

Nous en déduisons donc l'expression finale de la densité d'énergie électrique pour les ondes propagatives :

$$u_e^{prop}(z, \omega, T) = \frac{1}{2} u_\omega^0(T) \times \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ (1 - |r_s|^2) + (1 - |r_p|^2) \right] \quad (2.46)$$

Le terme en  $\exp(-2\gamma_0'' z)$  a disparu car, pour les ondes propagatives,  $\gamma_0$  est réel et  $\gamma_0'' = 0$ .

En ce qui concerne les ondes évanescentes, l'équation (2.43) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$K^2 + |\gamma_0|^2 = K^2 + (K^2 - k_0^2) = 2K^2 - k_0^2 = k_0^2 \left( 2\frac{K^2}{k_0^2} - 1 \right) \quad (2.47)$$

et l'équation 2.44 est également valable pour les ondes évanescentes. Les équations (2.45) donnent alors :

$$\frac{\gamma' |t_s|^2}{|\gamma|^2} = \frac{1}{|\gamma_0|} 2 Im(r_s) \quad (2.48a)$$

$$\frac{Re(\varepsilon\gamma^*) |t_p|^2}{|n|^2 |\gamma|^2} = \frac{1}{|\gamma_0|} 2 Im(r_p) \quad (2.48b)$$

Nous obtenons ainsi la contribution  $u_e^{evan}(z, \omega, T)$  des ondes évanescentes à la densité d'énergie électrique :

$$u_e^{evan}(z, \omega, T) = u_\omega^0(T) \times \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ Im(r_s) + \left( 2\frac{K^2}{k_0^2} - 1 \right) Im(r_p) \right] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.49)$$

Nous remarquons donc que, pour les ondes évanescentes, les termes en polarisation  $s$  et en polarisation  $p$  ne sont pas symétriques: ceci est tout à fait normal car en polarisation  $s$ ,  $\mathbf{E}$  est

perpendiculaire au plan d'incidence et en polarisation  $p$ ,  $\mathbf{E}$  est dans le plan d'incidence. Dans chacun des cas, ce n'est pas la même géométrie pour le champ; cela est donc normal que les deux contributions aient des expressions différentes.

Des calculs identiques aux précédents peuvent être menés pour déterminer la densité d'énergie magnétique  $u_m(z, \omega, T)$  au-dessus de l'interface. L'ensemble des résultats est résumé dans le paragraphe suivant.

### Densité d'énergie électromagnétique au-dessus de l'interface

Voici les résultats définitifs que nous obtenons par le calcul :

$$u_e^{prop}(z, \omega, T) = \frac{1}{2} u_\omega^0(T) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ (1 - |r_s|^2) + (1 - |r_p|^2) \right] \quad (2.50a)$$

$$u_m^{prop}(z, \omega, T) = u_e^{prop}(z, \omega, T) \quad (2.50b)$$

$$u_e^{evan}(z, \omega, T) = u_\omega^0(T) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ Im(r_s) + \left( 2 \frac{K^2}{k_0^2} - 1 \right) Im(r_p) \right] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.50c)$$

$$u_m^{evan}(z, \omega, T) = u_\omega^0(T) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ \left( 2 \frac{K^2}{k_0^2} - 1 \right) Im(r_s) + Im(r_p) \right] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.50d)$$

Nous remarquons donc que, pour la densité d'énergie magnétique, la contribution des ondes propagatives est la même que celle du terme électrique<sup>10</sup>; en revanche, la contribution des ondes évanescentes est exactement symétrique par rapport à la polarisation. Ceci est normal et habituel : les ondes  $s$  pour le champ  $\mathbf{E}$  sont l'analogue des ondes  $p$  pour le champ  $\mathbf{H}$  et *vice versa*. Ainsi, en sommant l'énergie électrique et l'énergie magnétique, les termes pour les ondes évanescentes se simplifient et nous obtenons la densité d'énergie électromagnétique monochromatique :

$$u^{prop}(z, \omega, T) = u_\omega^0(T) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ (1 - |r_s|^2) + (1 - |r_p|^2) \right] \quad (2.51a)$$

$$u^{evan}(z, \omega, T) = 4 u_\omega^0(T) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^3 |\gamma_0|} \frac{1}{2} [Im(r_s) + Im(r_p)] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.51b)$$

$$u(z, \omega, T) = u^{prop}(z, \omega, T) + u^{evan}(z, \omega, T) \quad (2.51c)$$

Nous pouvons remarquer que nous retrouvons  $u^{prop}(\omega, T) = u_\omega^0(T)$  pour un corps noir ( $r_s = r_p = 0 \quad \forall K, \omega$ ).

Nous pouvons désormais étudier la densité d'énergie électromagnétique (monochromatique ou totale) au-dessus de quelques matériaux. Le premier que nous avons choisi est le carbure de silicium (SiC).

## 2.3 Résultats obtenus avec le SiC

Nous donnons ici les quelques résultats que nous avons obtenus par simulation numérique à partir des équations (2.51). La constante diélectrique utilisée est celle que nous avons modélisée dans l'annexe A.

La figure 2.5 représente la densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'un substrat de SiC à une température de  $T = 300$  K en fonction de la hauteur  $z$  d'observation.

Sur cette courbe (échelle *log-log*), nous pouvons distinguer trois zones.

---

10. Ceci est à rapprocher du fait qu'une onde plane monochromatique *dans le vide* transporte la même quantité d'énergie sous forme électrique et magnétique.

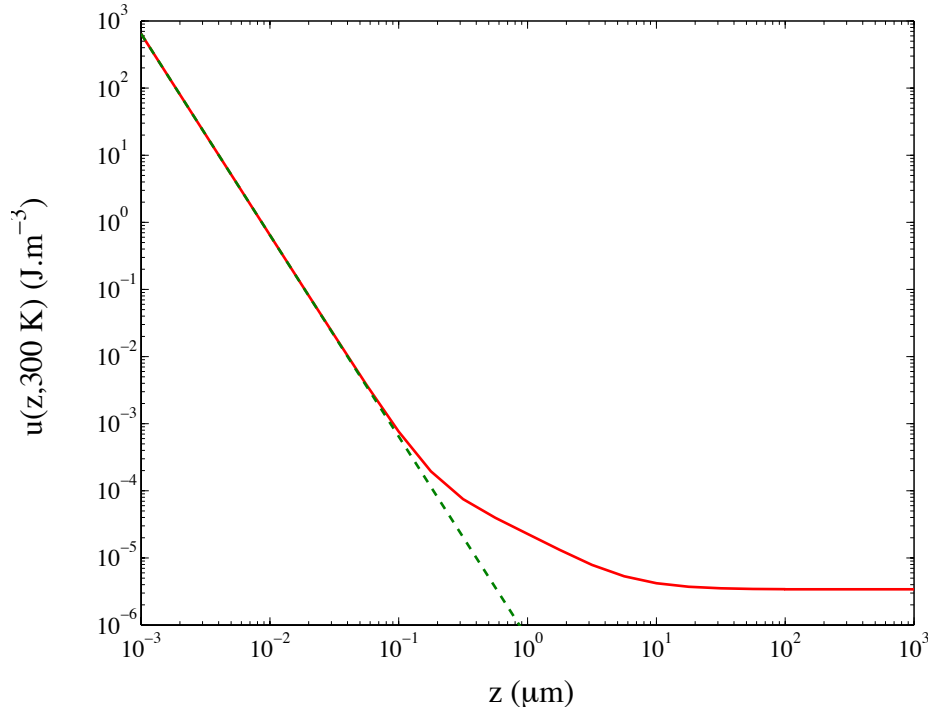


FIG. 2.5 – Densité d’énergie électromagnétique au-dessus d’une interface plane de SiC à la température de 300 K (la courbe en trait pointillé vert correspond à l’asymptote en champ proche variant comme  $1/z^3$ ).

### 2.3.1 Divergence électrostatique

La première zone, pour des hauteurs d’observation  $z$  telles que  $z \ll \lambda_{max}$  (longueur d’onde de Wien à la température considérée), correspond à un régime *quasi* statique, de type “électrostatique”. C’est un régime que nous pouvons appeler également régime “champ proche”, où les effets de retard sont négligeables. En étudiant l’intégrale (2.51b), nous pouvons montrer que la contribution majeure provient des ondes de très grands vecteurs d’onde  $K$  tel que  $K \gg k_0$  qui correspondent à des ondes évanescentes. Cette affirmation est illustrée par la figure 2.6 où nous voyons aisément que pour les courtes distances, ce sont les ondes évanescentes qui sont responsables de l’augmentation de la densité d’énergie au-dessus de l’interface. Les ondes propagatives ont une contribution relativement faible et indépendante de la hauteur d’observation (*cf.* Sec. 2.3.3). De plus, on notera que l’effet d’exaltation de la densité d’énergie en champ proche atteint jusqu’à 8 ordres de grandeur (par rapport à la valeur en “champ lointain”, c’est-à-dire pour des hauteurs supérieures à  $10 \mu\text{m}$ ) pour une hauteur d’observation de  $1 \text{ nm}$  (limite du modèle électromagnétique).

Pour ce régime “champ proche” où  $1/z \geq K \gg k_0$ , nous pouvons alors faire un développement asymptotique de l’expression de la densité d’énergie et ainsi obtenir :

$$u^{evan}(z, \omega, T) \sim \frac{1}{8\pi^2\omega z^3} \text{Im} \left( \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right) \Theta(\omega, T) \quad (2.52)$$

La dépendance en  $1/z^3$  est une signature du caractère *électrostatique* du régime étudié ; la courbe pointillée verte sur la figure 2.5 correspond à une pure dépendance en  $1/z^3$  : nous voyons qu’elle “colle” parfaitement à la courbe jusqu’à  $z \approx 0.1 \mu\text{m}$ .

En outre, le facteur  $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$  correspond au développement limité du facteur de réflexion de Fresnel  $r_p$  pour les grands vecteurs d’onde  $K$ . En effet, dans ce régime, seules les ondes évanescentes  $p$  contribuent et les polaritons de surface jouent un rôle majeur dans cette augmentation de la densité

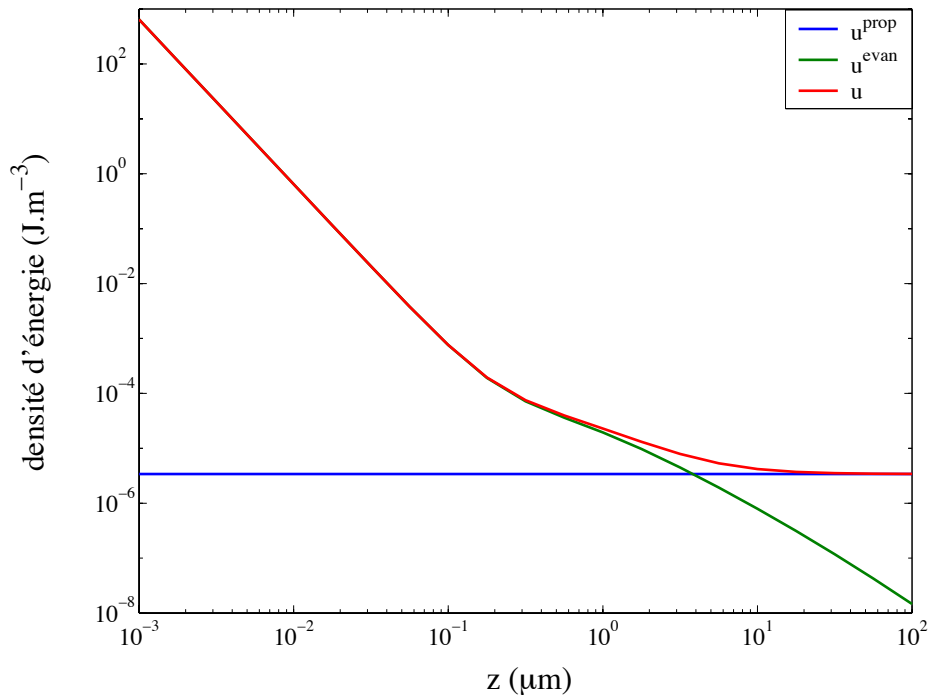


FIG. 2.6 – Densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane de SiC à la température de 300 K : contributions des différentes ondes.

d'énergie. En effet, la résonance des ondes de surface correspond à la condition  $Re[\varepsilon(\omega)] = -1$ . Ceci se voit très bien sur la figure 2.7 où nous avons représenté la densité d'énergie électromagnétique en fonction de la pulsation  $\omega$ , pour une hauteur  $z = 10$  nm et une température  $T = 300$  K.

La densité d'énergie électromagnétique au-dessus de l'interface est *quasi* monochromatique à la pulsation de résonance du phonon-polariton de surface  $\omega_{res} = 178.6 \times 10^{12}$  rad.s<sup>-1</sup> pour le SiC. Pour mieux voir les différences de niveaux de signal entre ondes propagatives et ondes évanescentes, nous avons tracé la même figure que précédemment (Fig. 2.7) mais en échelle *log-log* (au lieu de *log-lin*) et ceci, en distinguant ondes propagatives et ondes évanescentes, polarisation *s* et polarisation *p*.

Si maintenant nous réalisons un grossissement autour du pic (*cf.* Fig. 2.9), nous voyons que celui-ci est très fin spectralement puisqu'il a une largeur à mi-hauteur d'environ 100 GHz, c'est-à-dire de 40 nm en longueur d'onde. Nous avons vu que la position du pic était fixée par la pulsation de résonance du phonon-polariton; la finesse, elle, est essentiellement liée à l'absorption dans le carbure de silicium, *via* la partie imaginaire de la constante diélectrique du SiC. D'ailleurs, dans la formule donnant la constante diélectrique du SiC, le paramètre représentant l'absorption  $\Gamma$ , vaut 4 cm<sup>-1</sup>, c'est-à-dire environ 40 nm. Autour de cette pulsation, nous avons  $\varepsilon''(\omega_{res}) \approx 0.13$ .

Si nous représentons (*cf.* Fig. 2.10) uniquement la densité d'énergie due aux ondes propagatives, nous reconnaissons une courbe qui ressemble beaucoup à la courbe d'émissivité spectrale du carbure de silicium. En effet, le SiC est un matériau qui est un excellent corps noir dans l'infrarouge sauf sur une bande de pulsations comprises entre  $10^{14}$  ( $\approx 20$  μm) et  $2 \times 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup> ( $\approx 10$  μm) où il est très réfléchissant. On notera néanmoins qu'il n'y a pas de nette différence concernant l'émissivité<sup>11</sup> des deux polarisations: celle en *p* est environ deux fois plus grande que celle en *s* pour des longueurs d'onde plus grandes que 20 μm.

Enfin, nous pouvons remarquer que le spectre d'énergie électromagnétique – émis par rayonnement thermique au-dessus de l'interface – dépend fortement de la distance où il est calculé (ou mesuré). Cette dépendance est surtout sensible à courte distance lorsque les ondes évanescentes

11. En fait, il s'agit ici d'émissivité *hémisphérique* puisque nous intégrons sur le vecteur d'onde parallèle  $K$ .

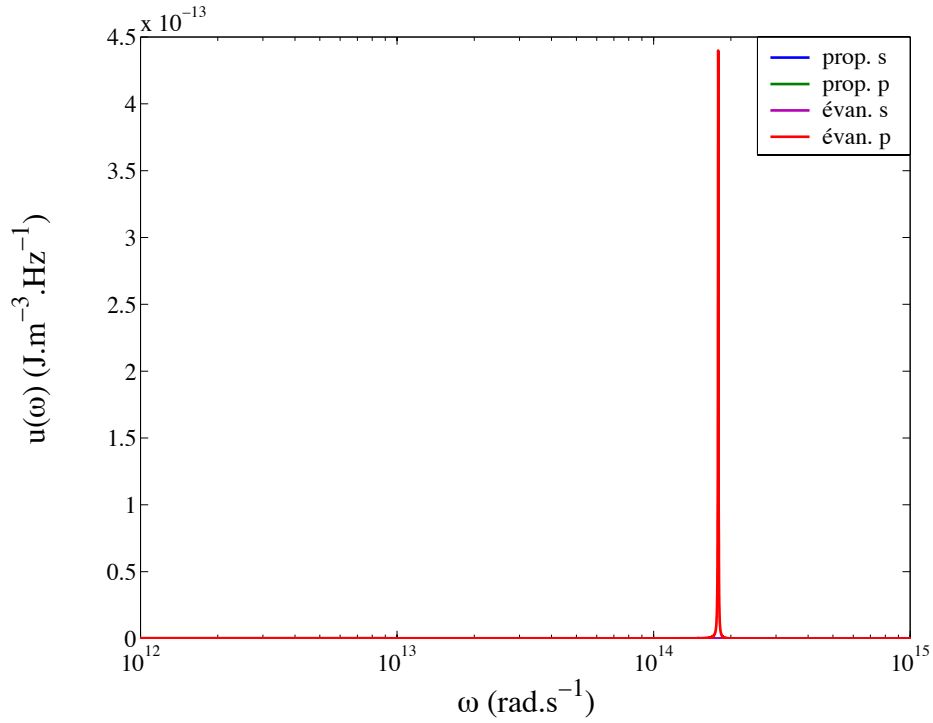


FIG. 2.7 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de SiC à la température de 300 K pour  $z = 10$  nm (échelle log-lin) : contribution des différentes ondes.

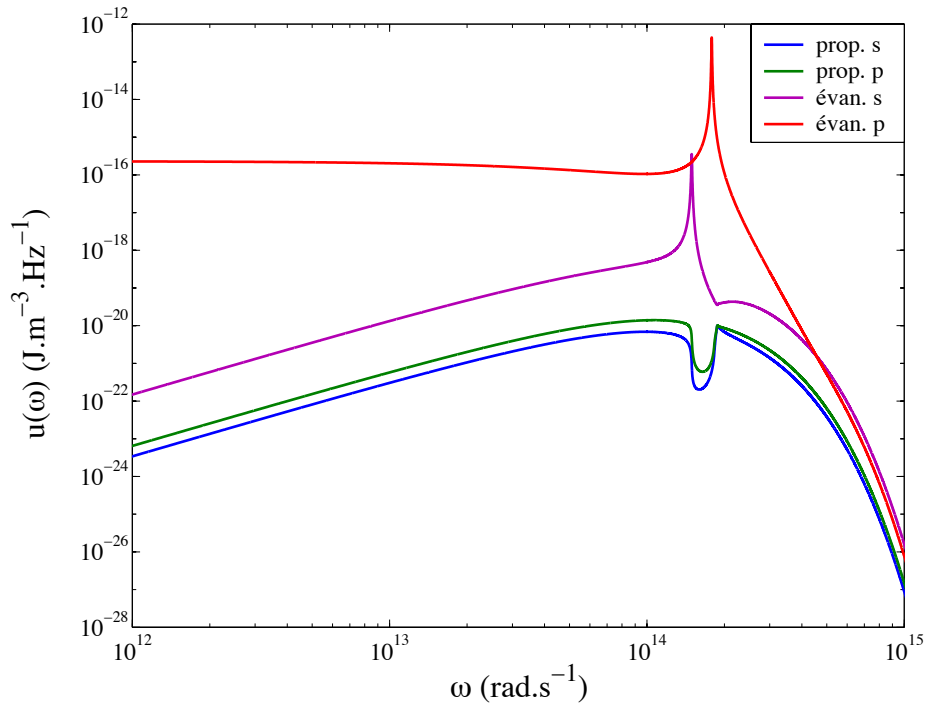


FIG. 2.8 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de SiC à la température de 300 K pour  $z = 10$  nm : contribution des différentes ondes (échelle log-log).

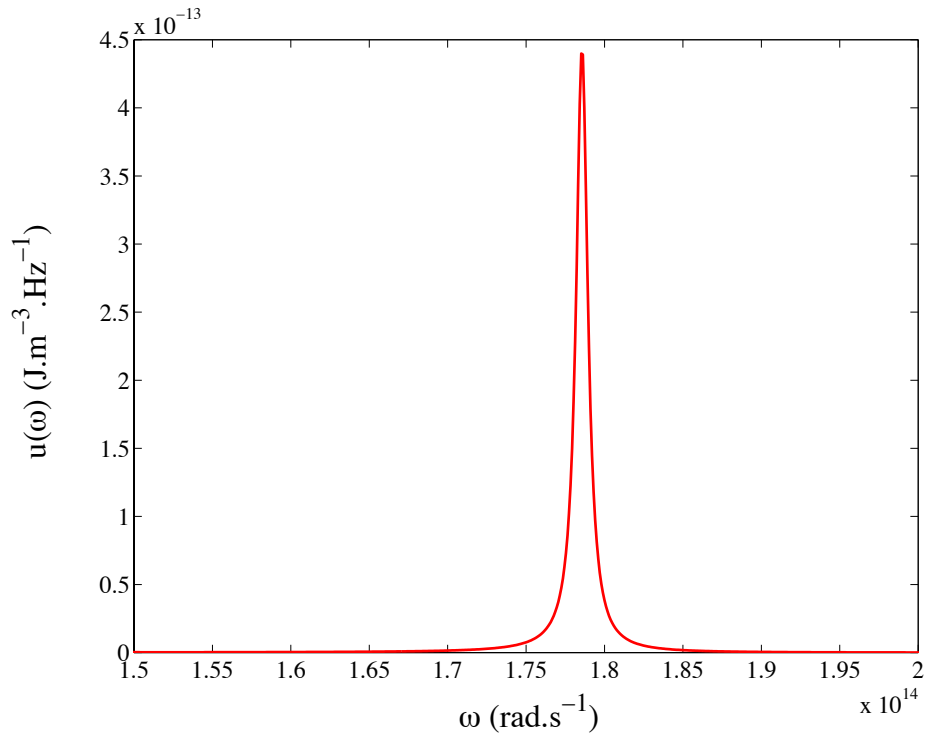


FIG. 2.9 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de SiC à la température de 300 K pour  $z = 10$  nm : vue de détail autour du pic de résonance.

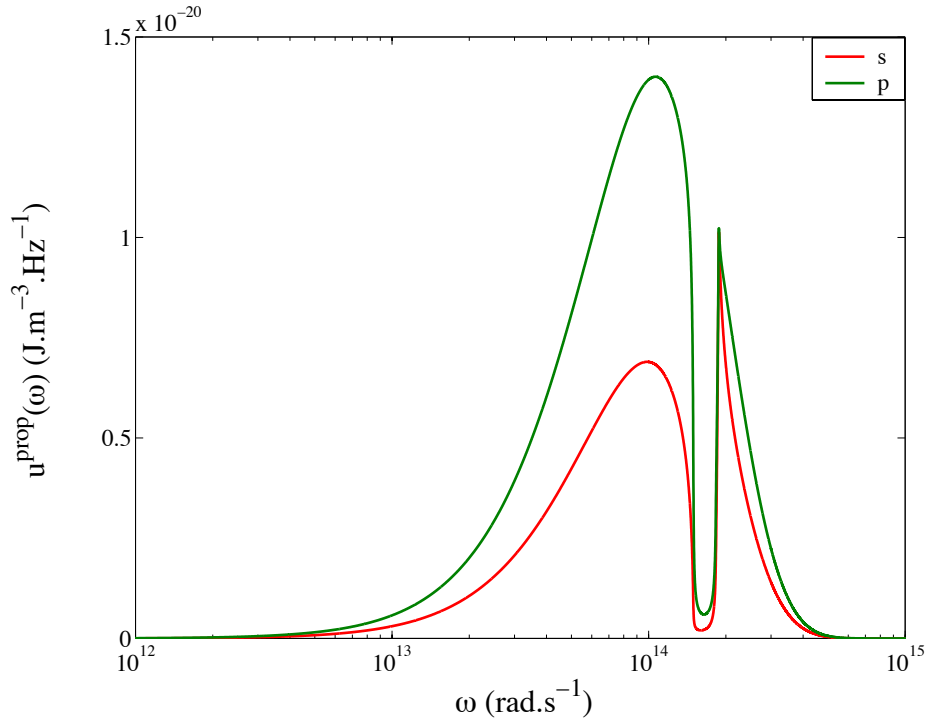


FIG. 2.10 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique en champ lointain (ondes propagatives uniquement) au-dessus d'une interface plane de SiC à la température de 300 K.



constituent la contribution dominante à la densité d'énergie. Pour se rendre compte de ces différences, nous avons représenté en figure 2.11 les spectres calculés pour  $z = 10$  nm,  $z = 1 \mu\text{m}$  et pour  $z \gg 1$  en champ lointain. Notons que *chacune* des courbes est normalisée par rapport à son maximum. Nous pouvons voir que les spectres d'émission thermique en champ lointain et en

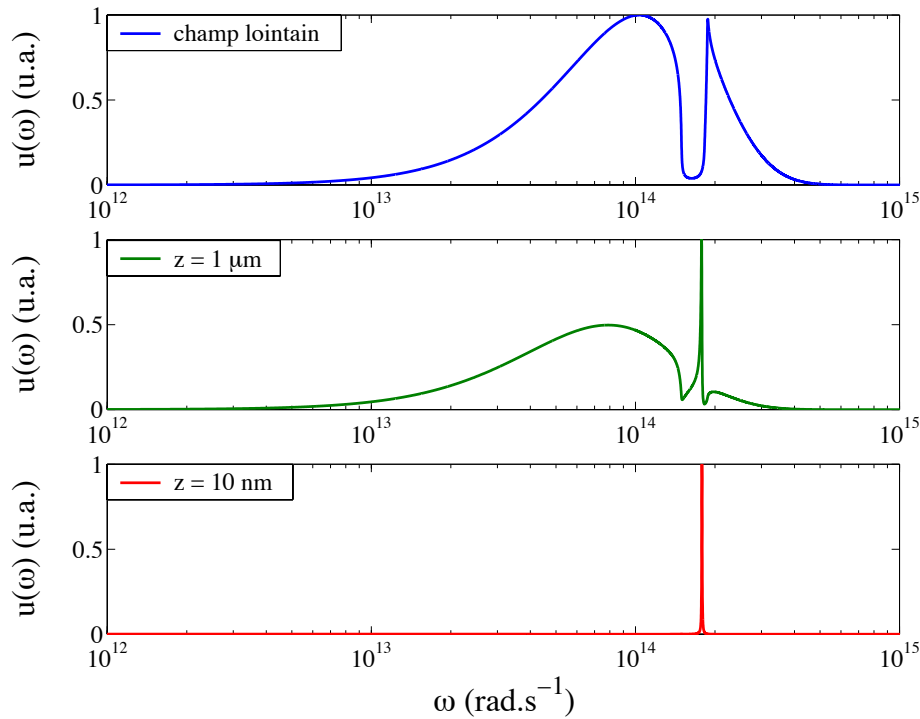


FIG. 2.11 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de SiC à la température de 300 K pour différentes hauteurs d'observation :  $z = 10$  nm,  $z = 1 \mu\text{m}$  et  $z$  en champ lointain.

champ proche sont radicalement différents: le premier ressemble au spectre du corps noir (modulé par l'émissivité du matériau) et le second est quasi monochromatique. La résonance pour  $z = 1 \mu\text{m}$  est présente mais beaucoup moins qu'à très courtes distances. En effet, cette hauteur se trouve dans la deuxième zone de la figure 2.5.

### 2.3.2 Contribution du phonon-polariton

Cette deuxième zone, comprise environ entre  $0.1 \mu\text{m}$  et  $10 \mu\text{m}$ , correspond à la zone du polariton de surface. Sur la figure 2.5, nous pouvons voir que pour ces distances, la densité d'énergie présente une "légère bosse" correspondant à ce régime. Il a été montré (Henkel *et al.* 2000) que pour cette zone, le densité d'énergie présentait une dépendance exponentielle en fonction de la distance de la forme  $\exp(-\kappa_{pol}z)$ , où :

$$\frac{1}{\kappa_{pol}} = \frac{1}{2Im[\gamma_0(K_{pol})]} \quad (2.53)$$

est la *longueur d'atténuation* du polariton dans le vide. Cette zone n'est pas réellement une zone "champ proche", dans la mesure où la condition  $z \ll \lambda_{max}$  n'est pas réalisée. D'ailleurs, l'exaltation de la densité d'énergie y est moindre.

### 2.3.3 Densité d'énergie "champ lointain"

La troisième zone correspond à la zone de "champ lointain", pour  $z \gg 10 \mu\text{m}$ , où seules les ondes propagatives contribuent à la densité d'énergie. La densité d'énergie a alors une valeur fixe

de  $3.4 \times 10^{-6} \text{ J.m}^{-3}$  (dans le cas du SiC), indépendante de la hauteur  $z$  d'observation. Dans cette zone, les propriétés d'émissivité du SiC sont les mêmes que celles que nous connaissons usuellement (*cf.* Fig. 2.10).

### 2.3.4 Interprétation en termes de densité d'états électromagnétiques

#### Définition de la densité d'états

Pour introduire la densité d'états, écrivons la densité d'énergie sous la forme suivante :

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega) \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \quad (2.54)$$

où  $\rho(\mathbf{r}, \omega)$  représente la *densité locale d'états* ("Local Density Of States" ou LDOS en anglais) au point  $\mathbf{r}$  et à la pulsation  $\omega$ . Pour une situation d'équilibre thermique, cette expression est un résultat habituel de la physique statistique qui stipule que la densité d'énergie en un point  $\mathbf{r}$  et à la pulsation  $\omega$  est le produit de l'énergie du photon par le nombre moyen de photon par état (donné ici par la *statistique de Bose-Einstein*) et par la densité d'états au point  $\mathbf{r}$  et à la pulsation  $\omega$ . Pour une situation *hors d'équilibre* comme ici (substrat à la température  $T > 0$  émettant dans le vide supposé à 0 K), nous rappelons ici une des expressions que nous avons trouvée pour la densité d'énergie électromagnétique associée au rayonnement thermique :

$$u(\mathbf{r}, \omega) = 2 \frac{\omega^3}{\pi c^4} \varepsilon''(\omega) \Theta(\omega, T) \times \sum_{l,m} \int_V d^3 \mathbf{r}' \left[ |G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)|^2 + \frac{1}{k_0^2} |G_{l,m}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)|^2 \right] \quad (2.55)$$

où  $V$  correspond au volume des sources, ici l'espace semi-infini rempli par le diélectrique à la température  $T$  ;  $\varepsilon''(\omega)$  est la partie imaginaire de la constante diélectrique complexe dépendant de la pulsation.  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^E$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^H$  sont les tenseurs de Green du système respectivement pour le champ électrique et le champ magnétique (*cf.* Sec. 2.2.2). L'équation précédente est tout-à-fait générale et s'applique à toutes les géométries ; pour les géométries compliquées, il est nécessaire d'évaluer numériquement les tenseurs de Green alors que dans le cas simple d'une interface plane, ceux-ci sont connus de manière analytique (*cf.* Annexe D). Nous définissons alors la densité d'états par l'équation (2.54), conduisant à l'expression suivante :

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = 2 \frac{\omega^3}{\pi c^4} \varepsilon''(\omega) \times \sum_{l,m} \int_V d^3 \mathbf{r}' \left[ |G_{l,m}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)|^2 + \frac{1}{k_0^2} |G_{l,m}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)|^2 \right] \quad (2.56)$$

À ce stade, une remarque importante s'impose. La densité d'états associée au champ électromagnétique n'est pas donnée simplement par la partie imaginaire de la trace du tenseur de Green comme cela est souvent supposé (Girard *et al.* 2000 ; Colas des Francs *et al.* 2001 ; De-reux *et al.* 2000). Cependant, cette différence s'explique par le fait que la situation décrite par l'équation (2.56) correspond à une situation *hors d'équilibre*, où tous les modes du champ électromagnétique ne peuvent pas être excités. En effet, la densité d'états ainsi définie ne tient compte que des modes du champ électromagnétique pouvant exister dans le vide pour  $z > 0$  du fait du rayonnement thermique venant du matériau occupant l'espace  $z < 0$ . Aussi, les ondes qui pourraient venir du vide pour  $z > 0$  ne sont-elles pas incluses dans le calcul. Ceci a été fait par Di Stefano *et al.* (2000).

### 2.3.5 Densité d'états associée au polariton de surface

Au chapitre précédent, nous avons étudié la relation de dispersion du polariton de surface à l'interface *plane* entre le vide et un milieu absorbant. Cette relation de dispersion relie la pulsation

du polariton de surface  $\omega$  à la composante parallèle  $K$  du vecteur d'onde. Dans le cas d'un échantillon de SiC à la température de 300 K, cette relation ressemble à la figure 2.12. *Géométriquement*

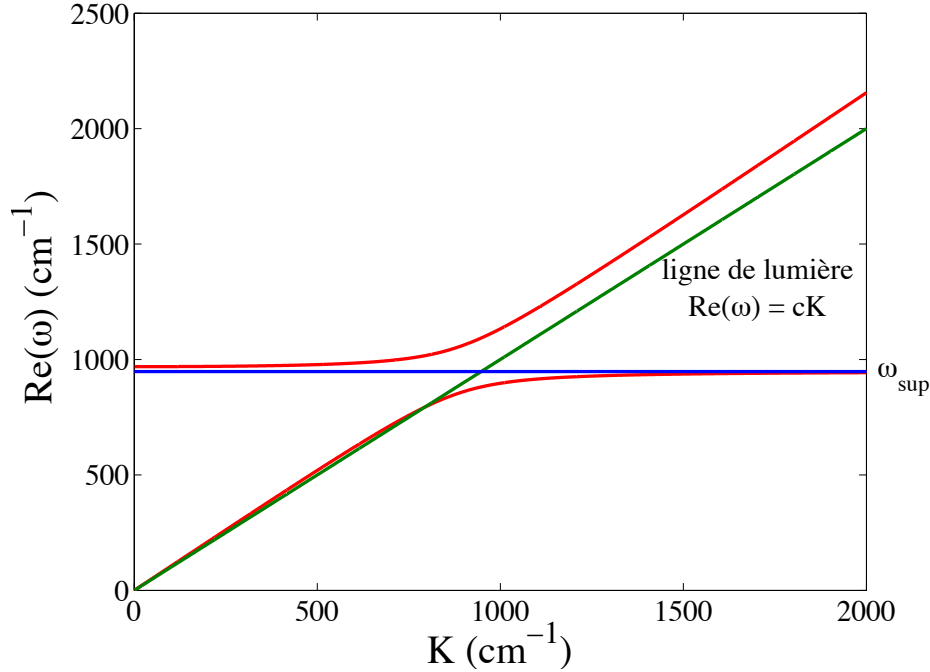


FIG. 2.12 – Relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC.

la densité d'états peut être vue comme la dérivée  $\frac{dK}{d\omega}$  de la courbe représentant la relation de dispersion  $\omega = \omega(K)$ . Ainsi, si nous examinons la figure précédente, nous pouvons remarquer que pour les faibles vecteurs d'onde, la densité d'états est constante (courbe linéaire) puis augmente pour tendre vers l'*infini* (courbe horizontale) pour  $\omega \approx \omega_{sup}$ . La densité d'états diverge donc pour cette pulsation et c'est la raison essentielle pour laquelle dans le spectre de la densité d'énergie, il y a un pic d'émission. De plus, la pulsation  $\omega_{sup}$  est la pulsation pour laquelle, justement, nous avons  $Re[\varepsilon(\omega_{sup})] = -1$ : cette pulsation correspond donc à la pulsation de résonance du phonon-polariton de surface pour le SiC. À cette pulsation correspond une infinité de vecteurs d'onde  $K$  pour lesquels une onde de surface est susceptible d'exister à l'interface vide/SiC.

Nous verrons (Sec. 2.7) comment cette relation de dispersion peut également être exploitée dans sa partie linéaire pour réaliser une expérience d'émission thermique cohérente.

## 2.4 Résultats obtenus avec du verre et du silicium dopé

### 2.4.1 Cas du verre

Le verre est un matériau diélectrique transparent dans le visible et très absorbant dans l'infrarouge; sa constante diélectrique a été tabulée par Philipp (1985) entre 0.1 et 100  $\mu\text{m}$ , notamment. Ce sont ces valeurs que nous avons utilisées pour nos simulations numériques. Le verre est un matériau *polaire* susceptible de supporter des phonon-polaritons de surface. Nous allons le voir avec les exemples suivants.

La figure 2.13 montre le spectre de la densité d'énergie électromagnétique liée au rayonnement thermique au-dessus d'une interface plane de verre; la hauteur d'observation est  $z = 10$  nm et la température de l'échantillon est de  $T = 300$  K. Nous voyons donc que ce spectre présente 2 pics: un pic d'intensité faible autour de  $\omega = 206.6$  THz ( $\lambda = 9.12$   $\mu\text{m}$ ) et un autre d'intensité très importante pour  $\omega = 93.17$  THz ( $\lambda = 20.22$   $\mu\text{m}$ ). En examinant la constante diélectrique du verre (*cf.* Annexe A), nous voyons que ces deux pulsations correspondent à celles où  $Re[\varepsilon(\omega)] \approx -1$ ,

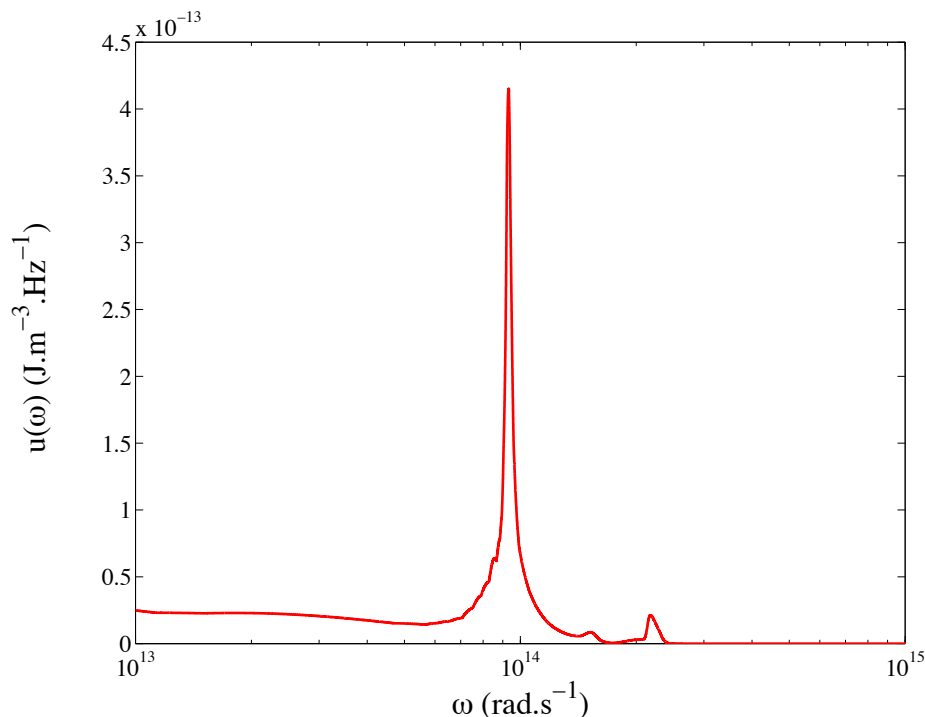


FIG. 2.13 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de verre à la température de 300 K pour  $z = 10$  nm.

c'est-à-dire à celles des polaritons de surface. Les deux pics sont donc bien dus aux résonances des ondes de surface. Notons que la hauteur du plus grand pic ( $\approx 4 \times 10^{-13} \text{ J.m}^{-3}.\text{Hz}^{-1}$ ) est à peu près la même que pour le SiC. De la même manière, la densité d'énergie *totale* présente une divergence à très courtes distances en  $1/z^3$ , comme nous pouvons le voir sur la figure 2.14. Nous obtenons une valeur de  $u \approx 5.42 \text{ J.m}^{-3}$  pour  $z = 10$  nm, c'est-à-dire environ plus de 9 fois plus grande que celle pour le SiC. Ceci est dû au fait que le pic de résonance pour le verre est plus large que pour le SiC (la hauteur étant la même comme nous l'avons souligné auparavant) et est visible sur la figure 2.15 : la largeur du pic le plus important est de  $\Delta\nu = 637 \text{ MHz}$ . À 10 nm, la contribution la plus importante à la densité d'énergie est bien évidemment donnée par les ondes évanescentes, et notamment le phonon-polariton de surface. (*cf.* Fig. 2.16). Cette résonance modifie donc nettement la forme du spectre d'énergie électromagnétique en champ proche par rapport à sa forme en champ lointain (*cf.* figure 2.17). D'ailleurs, de la même manière que pour le SiC, nous avons tracé sur la figure 2.18, la densité d'énergie électromagnétique monochromatique pour les ondes propagatives. Nous retrouvons le fait que le verre est un bon corps noir dans l'infrarouge avec deux zones d'absorption vers 7 et 20  $\mu\text{m}$ .

### 2.4.2 Cas du silicium dopé

Nous venons d'étudier les cas du SiC et du verre et nous avons vu que la densité d'énergie électromagnétique était fortement augmentée en champ proche, notamment à cause des phonon-polaritons de surface. Nous avons également étudié le cas du silicium dopé. Ce matériau *semiconducteur* est susceptible de supporter des ondes de surface de type *plasmon-polariton*, notamment dans l'infrarouge. La position et la largeur du pic de résonance dépend de la nature du dopage ( $n$  ou  $p$ ) et de la concentration en impuretés. Les figures suivantes présentent les différents résultats de calcul que nous avons obtenus avec le silicium dopé. Les effets de résonance et d'exaltation en champ proche se produisent également pour le silicium dopé. La dernière figure (Fig. 2.22) présente la densité d'énergie électromagnétique à 10 nm en fonction du dopage.

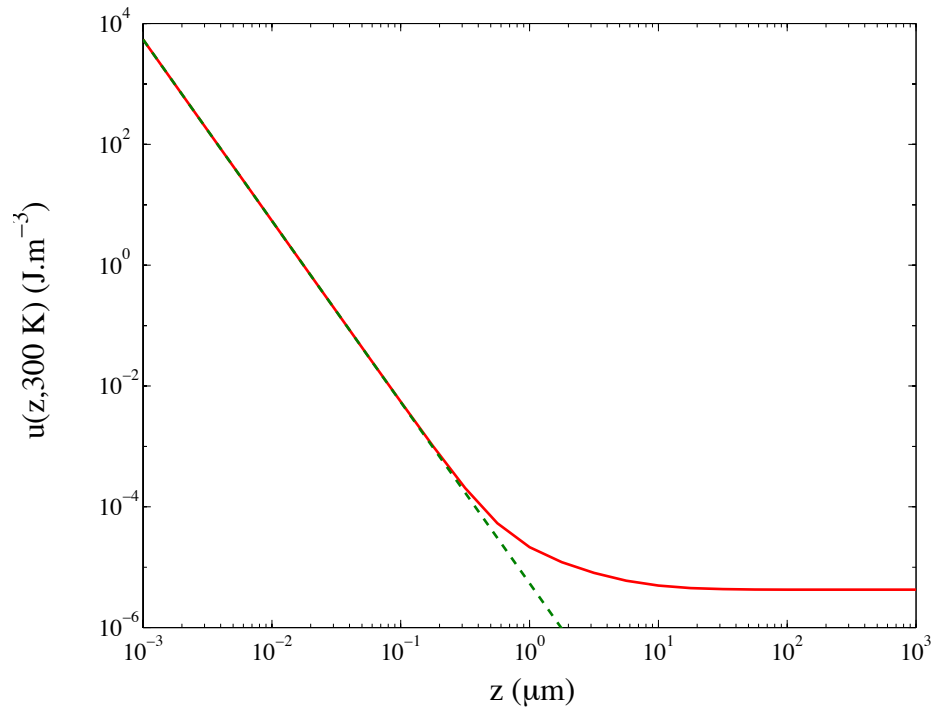


FIG. 2.14 – Densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane de verre à la température de 300 K.

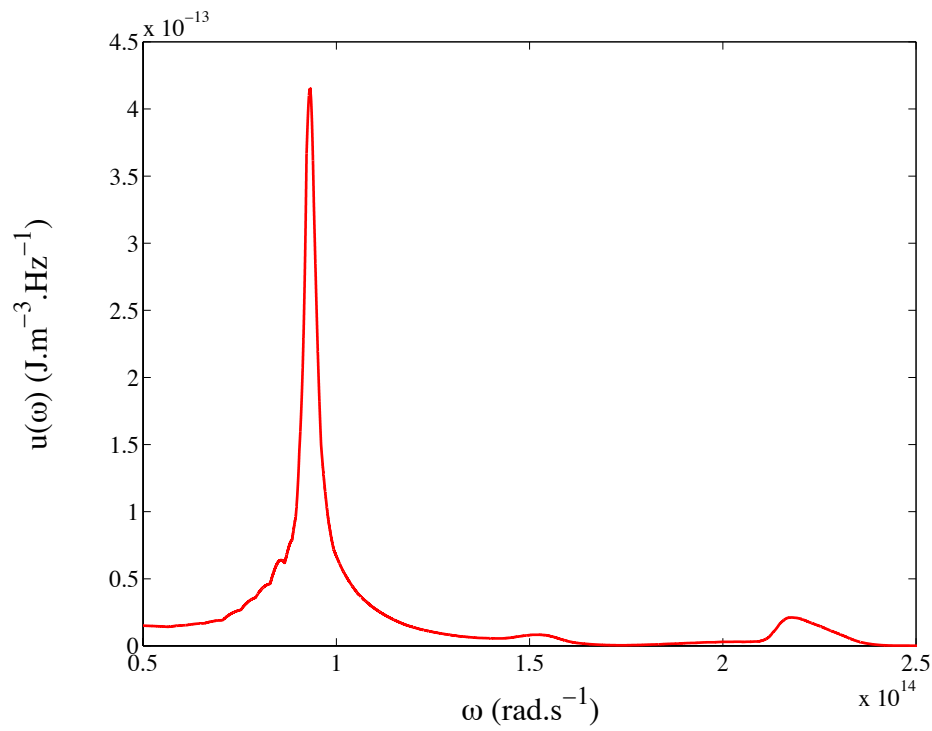


FIG. 2.15 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de verre à la température de 300 K : vue de détail des pics de résonances des polaritons de surface.

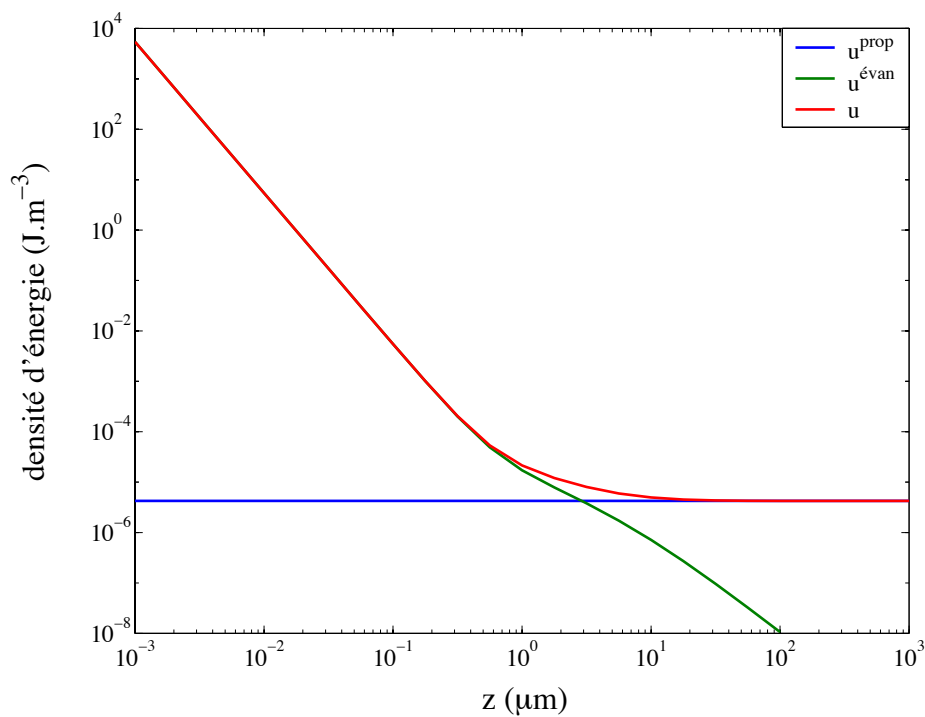


FIG. 2.16 – Densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane de verre à la température de 300 K : contribution des ondes propagatives et évanescentes en fonction de la hauteur  $z$  d'observation.

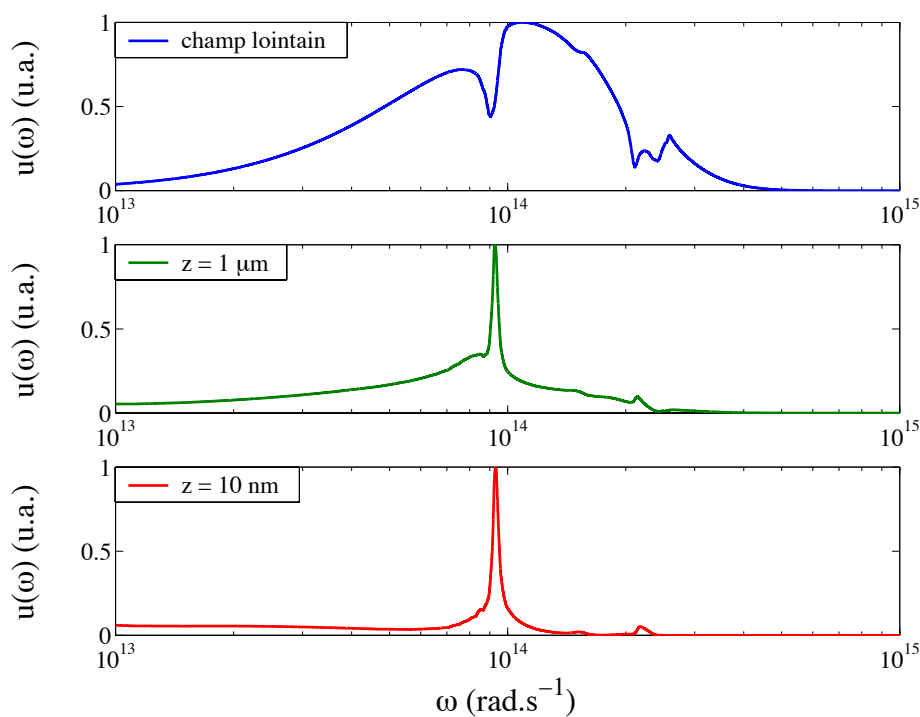


FIG. 2.17 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique au-dessus d'une interface plane de verre à la température de 300 K pour différentes hauteurs d'observation :  $z = 10$  nm,  $z = 1$   $\mu\text{m}$  et  $z$  en champ lointain.

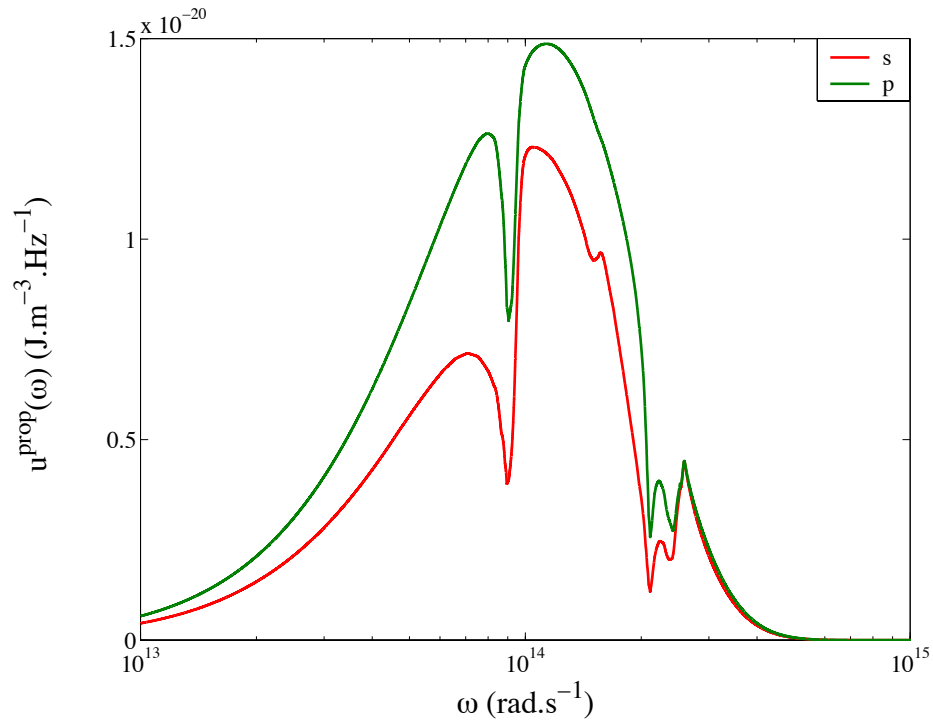


FIG. 2.18 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique en champ lointain au-dessus d'une interface plane de verre à la température de 300 K.

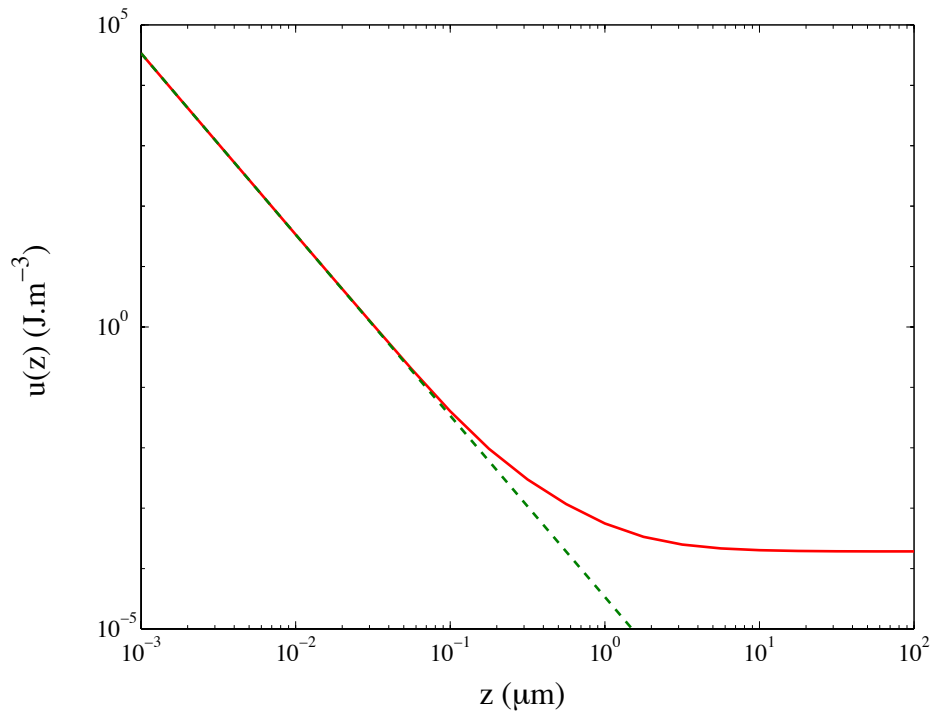


FIG. 2.19 – Densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane de Si dopé à la température de 800 K et pour un dopage  $n$  à  $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ .

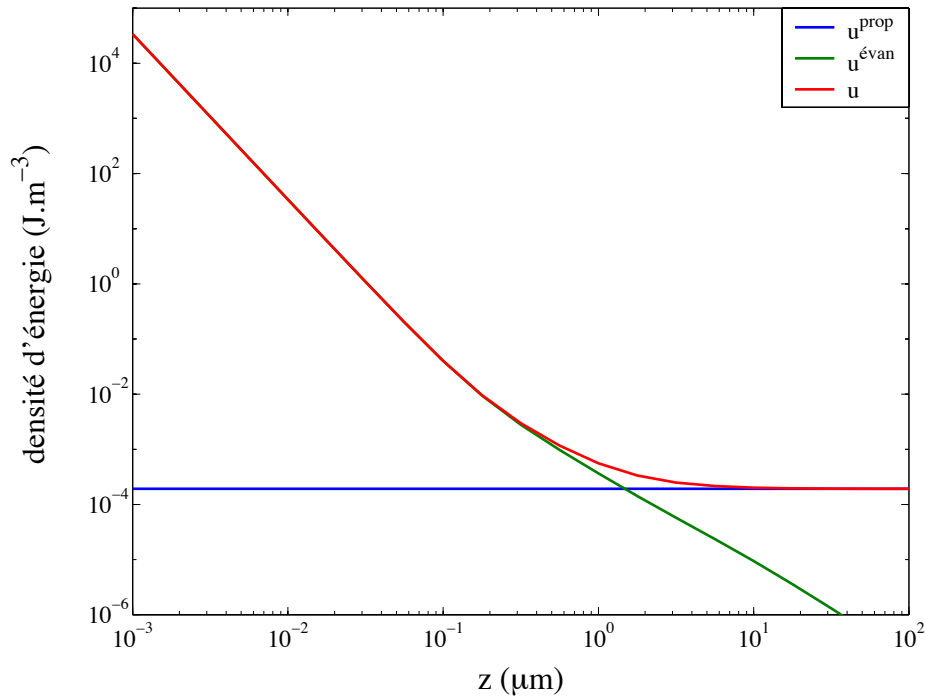


FIG. 2.20 – Densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane de Si dopé à la température de 800 K et pour un dopage  $n$  à  $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  : contribution des différentes ondes.

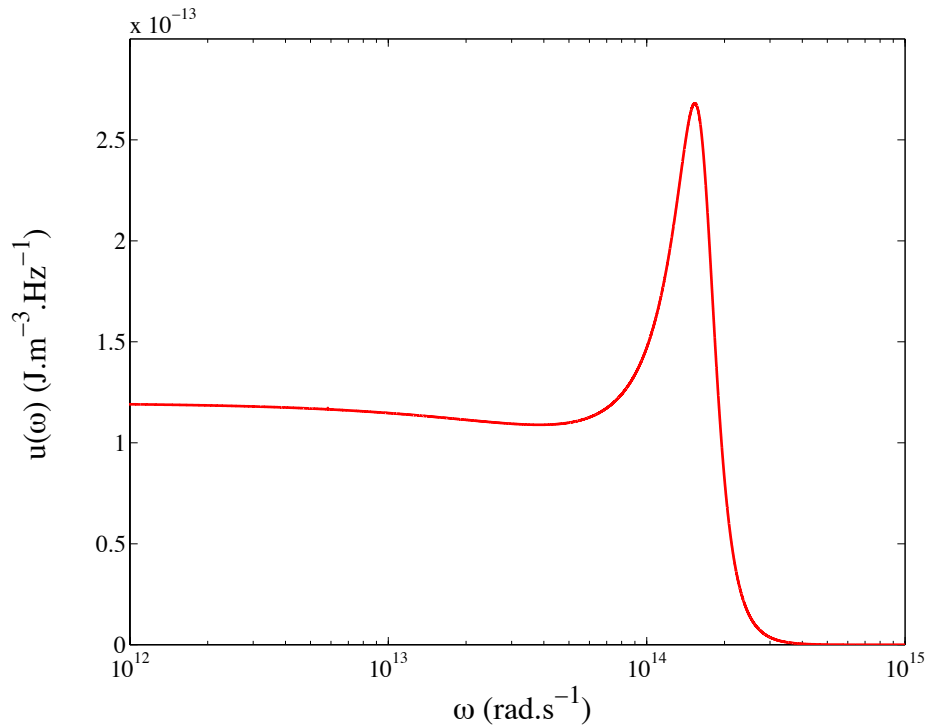


FIG. 2.21 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique à 10 nm au-dessus d'une interface plane de Si dopé à la température de 800 K et pour un dopage  $n$  à  $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ .



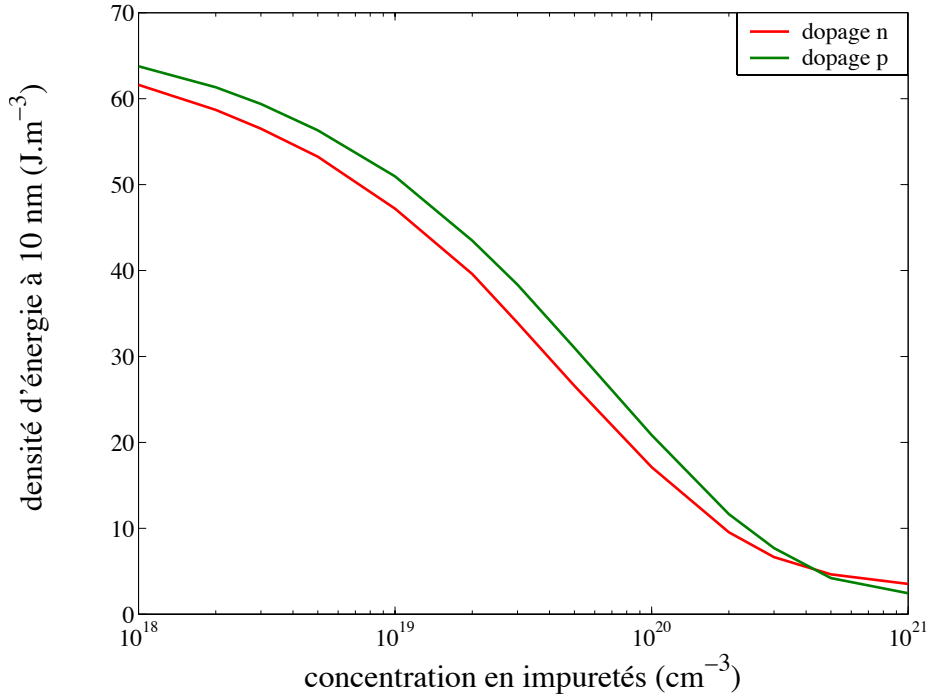


FIG. 2.22 – Densité d'énergie électromagnétique monochromatique à 10 nm au-dessus d'une interface plane de Si dopé à la température de 800 K : influence du dopage.

## 2.5 Définition d'une émissivité en champ proche

Nous aimerions ici réécrire la densité d'énergie électromagnétique (2.51c) sous la forme d'une intégrale sur les angles du produit de l'émissivité spectrale directionnelle  $\epsilon(T, \omega, \theta)$  et de la densité d'énergie électromagnétique du corps noir  $u_\omega^0(T)$ . Cependant, en examinant cette équation, nous voyons que cette émissivité dépend *a priori* de la hauteur  $z$ ; c'est pourquoi il n'est pas possible de définir d'émissivité pour la densité d'énergie *totale*. Cependant, nous allons voir qu'il est possible de le faire pour les ondes propagatives.

### 2.5.1 Émissivité pour les ondes propagatives

Nous rappelons ici l'expression de la densité d'énergie électromagnétique due aux ondes propagatives dans le vide au-dessus de l'interface :

$$u^{prop}(z, \omega, T) = u_\omega^0(T) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \frac{1}{2} \left[ (1 - |r_s|^2) + (1 - |r_p|^2) \right] \quad (2.57)$$

Or, pour les ondes propagatives, nous rappelons que  $1 - |r_s|^2 = T_s$  et  $1 - |r_p|^2 = T_p$ ;  $T_s$  et  $T_p$  sont les facteurs en énergie de Fresnel en transmission respectivement pour la polarisation  $s$  et pour la polarisation  $p$ . Ainsi, la densité d'énergie totale pour les ondes propagatives (qui est manifestement indépendante de  $z$ ) peut se réécrire sous la forme :

$$u^{prop}(\omega, T) = u_\omega^0(T) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} \left[ \frac{T_s + T_p}{2} \right] \quad (2.58)$$

De plus, d'après la deuxième loi de Kirchhoff (*cf.* Éq. 2.3), comme le milieu inférieur est semi-infini et absorbant, nous pouvons dire (puisque toutes les ondes transmises sont absorbées dans

le substrat) que<sup>12</sup>  $\epsilon(T, \omega, \theta) = (T_s + T_p)/2$ , où  $\epsilon(T, \omega, \theta)$  est l'émissivité à la température  $T$ , à la pulsation  $\omega$  et dans la direction  $\theta$ .

Considérons à présent la figure suivante :

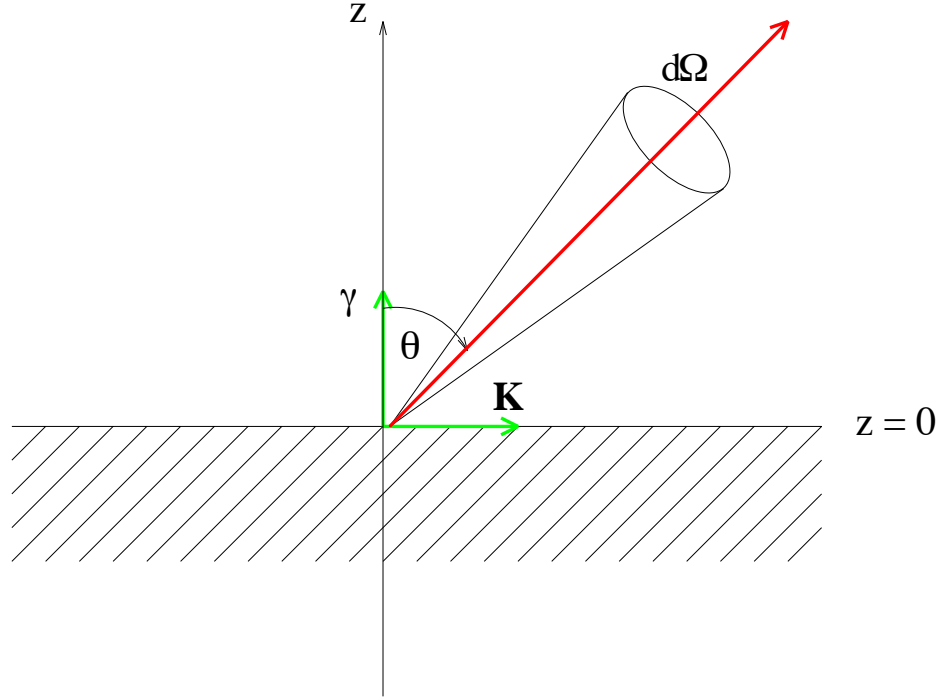


FIG. 2.23 – Définition de l'angle de propagation  $\theta$  pour les ondes propagatives dans le vide au-dessus de l'interface plane.

Nous avons représenté l'angle solide  $d\Omega$  autour de la direction de propagation  $\theta$  pour une onde propagative telle que:  $K = k_0 \cos \theta$  et  $\gamma_0 = |\gamma_0| = k_0 \sin \theta$ . Donc, nous avons la relation suivante :

$$\frac{K dK}{k_0 |\gamma_0|} = \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (2.59)$$

Ainsi, nous obtenons une expression simplifiée de la densité d'énergie au-dessus de l'interface en fonction de l'émissivité du substrat :

$$w^{prop}(\omega, T) = u_{\omega}^0(T) \int_{2\pi} \frac{d\Omega}{2\pi} \epsilon(\omega, \theta) \quad (2.60)$$

où  $\epsilon(\omega, \theta)$  peut être considérée comme l'émissivité spectrale directionnelle du matériau. Nous voyons ici que l'approche électromagnétique permet de retrouver par une autre méthode des résultats introduits de manière phénoménologique.

---

12. On ne fait généralement pas la distinction entre l'émissivité en polarisation  $s$  et en polarisation  $p$ ; c'est pourquoi nous définissons celle-ci comme étant la demi-somme des facteurs de transmission en énergie.

## 2.5.2 Peut-on définir une émissivité pour les ondes évanescentes ?

Pour les ondes évanescentes, la densité d'énergie électromagnétique prenait la forme suivante :

$$u^{evan}(z, \omega, T) = 4 u_{\omega}^0(T) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K^3 dK}{k_0^3 |\gamma_0|} \frac{1}{2} [Im(r_s) + Im(r_p)] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.61)$$

Nous comprenons bien que le raisonnement qui a été fait pour les ondes propagatives ne peut pas être refait ici, notamment parce que nous ne pouvons pas définir de *réelle* direction de propagation pour les ondes évanescentes. Néanmoins, si nous essayons d'identifier les deux contributions, nous obtenons une expression pour l'«émissivité» due aux ondes évanescentes :

$$\epsilon^{evan}(\mathbf{K}, \omega) = 4 \frac{K^2}{k_0^2} \times \frac{1}{2} [Im(r_s) + Im(r_p)] \exp(-2\gamma_0'' z) \quad (2.62)$$

L'émissivité dépend alors de la composante parallèle  $\mathbf{K}$  du vecteur d'onde (*non localité*) et de la hauteur  $z$  du point d'observation (décroissance exponentielle des ondes évanescentes). L'idée est alors de travailler avec la densité d'énergie électromagnétique au lieu de la luminance pour définir l'émissivité. Cela revient donc à redéfinir la densité d'états.

## 2.6 Spectroscopie locale d'émission thermique en champ proche

Nous présenterons ici une application de notre étude à la spectroscopie locale d'émission thermique pour tenter de reconstruire la constante diélectrique d'un substrat en sondant localement le champ d'émission thermique. Le but est de réaliser de la spectroscopie locale avec une résolution sub-longueur d'onde au moyen d'un microscope optique en champ proche. La faisabilité de la méthode sera montrée en utilisant une méthode exacte de calcul, décrite par Porto *et al.* (2000) ; nous verrons notamment que le niveau de signal théorique permet d'envisager la mise en place d'une expérience de microscopie en champ proche. Nous pourrions alors retrouver la constante diélectrique de l'échantillon considéré.

### 2.6.1 Principe de la manipulation

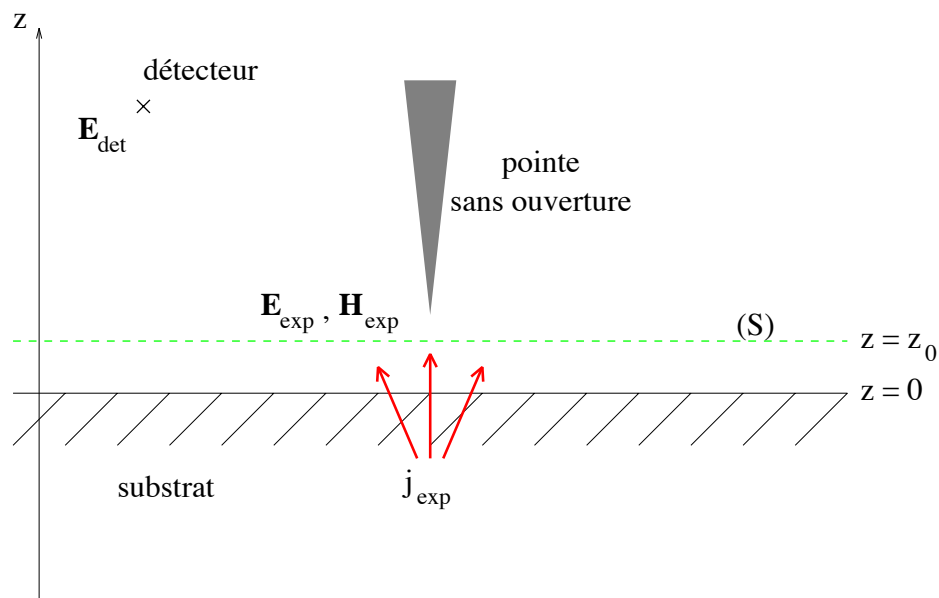
#### Montage expérimental

Nous considérons (*cf.* Fig. 2.24) un échantillon de matériau diélectrique semi-infini, maintenu à la température uniforme  $T$ . Nous détectons le champ électromagnétique émis *thermiquement* grâce à un microscope optique en champ proche avec une pointe métallique sans ouverture (*apertureless* SNOM). Le signal (champ diffracté par la pointe) est mesuré en champ lointain grâce à un détecteur. Nous supposons qu'un analyseur est placé devant le détecteur et que celui-ci est vu sous un angle  $d\Omega$  depuis la pointe<sup>13</sup>. Dans cette situation (appelée situation *expérimentale*), le signal  $S(\omega)$  reçu par le détecteur à une pulsation  $\omega$  est donné par :

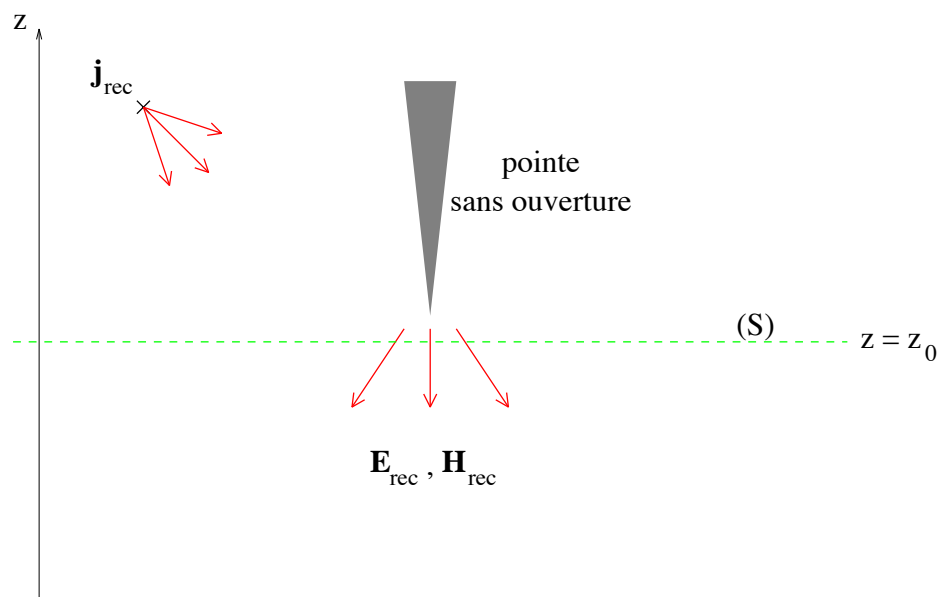
$$\langle S(\omega) \rangle = \frac{\epsilon_0 c}{2} |\mathbf{E}_{det}(\omega)|^2 r^2 d\Omega \quad (2.63)$$

où  $r$  est la distance entre la pointe et le détecteur ;  $\mathbf{E}_{det}$  est le champ électrique à la position du détecteur. Nous allons voir maintenant qu'il est possible de calculer ce signal détecté.

13. Nous supposons par souci de simplicité que  $d\Omega$  est très petit : ceci nous permet de supposer qu'au niveau du détecteur, l'onde (propagative) est *localement* plane.



(a) Situation expérimentale



(b) Situation réciproque

FIG. 2.24 – Vue schématique d'un montage expérimental de microscopie optique en champ proche avec une pointe sans ouverture.

### Calcul du signal mesuré en champ lointain

Notons  $\mathbf{E}_{exp}$  (champ *expérimental*) le champ thermique émis par l'échantillon dans la région entre la surface de celui-ci et la pointe. Ce champ peut être calculé de la même manière que précédemment (*cf.* Sec. 2.2). Pour simplifier ici, nous ferons l'hypothèse que le champ émis thermiquement par la pointe est faible par rapport à celui du substrat<sup>14</sup>. Remarquons alors que le champ  $\mathbf{E}_{exp}$  est le champ émis thermiquement par le substrat – en présence de la pointe –. Suivant la démarche adoptée par Porto *et al.* (2000), il existe une relation exacte entre le signal  $\langle S(\omega) \rangle$  mesuré par le détecteur et la valeur du champ expérimental  $\mathbf{E}_{exp}$ . Pour cela, considérons (*cf.* Fig. 2.24(b)) la situation *fictive* décrite sur la figure 2.24(b) (appelée situation *réciroque*) où l'échantillon a été retiré: un point source  $\mathbf{j}_{rec}$ , situé à la place du détecteur, oscille à la pulsation  $\omega$ ; cet élément de courant est orienté de la même manière que l'analyseur dans la situation expérimentale. Le champ créé alors dans cette situation est noté  $\mathbf{E}_{rec}$ . En utilisant le théorème de réciprocité (Porto *et al.* 2000), le champ sur le détecteur peut être écrit sous la forme :

$$\mathbf{E}_{det}(\omega) \cdot \mathbf{j}_{rec} = \frac{-2i}{\mu_0 \omega} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}_{rec}(\mathbf{R}, z, \omega)}{\partial z} \cdot \mathbf{E}_{exp}(\mathbf{R}, z, \omega) d^2 \mathbf{R} \quad (2.64)$$

où la surface  $S$  d'intégration est un plan  $z = cste$  entre le substrat et la pointe;  $\mathbf{R}$  représente le point courant dans ce plan. L'équation précédente relie le champ au-dessus de la surface,  $\mathbf{E}_{exp}$ , au champ sur le détecteur,  $\mathbf{E}_{det}$ , suivant la direction de l'analyseur. Une relation analogue peut être obtenue en ne faisant intervenir que les champs magnétiques  $\mathbf{H}_{rec}$  et  $\mathbf{H}_{exp}$  en lieu et place des champs électriques  $\mathbf{E}_{rec}$  et  $\mathbf{E}_{exp}$ . Cependant, l'équation précédente est tout à fait générale et contient toute la physique du système: le fait qu'elle ne fasse intervenir que les champs électriques n'implique pas qu'elle ignore l'existence des champs magnétiques<sup>15</sup>. Par ailleurs, il est important de noter que le champ réciroque  $\mathbf{E}_{rec}$  contient toute l'information sur le système de détection. En reportant l'équation (2.63) dans l'équation (2.64), nous obtenons l'expression du signal mesuré :

$$\langle S(\omega) \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{8\pi^2} \int_S \int_S \mathcal{H}_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega) W_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega) d^2 \mathbf{R} d^2 \mathbf{R}' \quad (2.65)$$

Ainsi, il existe une relation linéaire entre le signal détecté et le tenseur des corrélations du champ  $W_{ij}$  défini par :

$$\langle E_{exp,i}(\mathbf{R}, z, \omega) E_{exp,j}^*(\mathbf{R}', z, \omega') \rangle = W_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega) \delta(\omega - \omega') \quad (2.66)$$

Ce tenseur représente les corrélations *spatiales* du champ<sup>16</sup> (émis thermiquement) à la pulsation  $\omega$ : celles-ci ne dépendent que de la constante diélectrique, de la température du substrat et de la géométrie du système.

Par ailleurs,  $\mathcal{H}_{ij}$ , qui représente la *fonction de réponse*, ne dépend que du système de détection et s'écrit en fonction du champ réciroque  $\mathbf{E}_{rec}$  sous la forme :

$$\mathcal{H}_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \omega) = \frac{\partial \mathbf{E}_{rec,i}}{\partial z}(\mathbf{R}, z, \omega) \frac{\partial \mathbf{E}_{rec,j}}{\partial z}(\mathbf{R}', z, \omega) \quad (2.67)$$

D'après l'équation (2.65), il est possible de retrouver la constante diélectrique du substrat à partir du signal mesuré grâce au microscope en champ proche. Nous allons voir de quelle manière dans le paragraphe suivant.

14. Ceci revient à considérer la pointe comme "froide", *i.e.* à une température de 0 K.

15. Porto *et al.* (2000), Sec. II. C.

16. Ces corrélations sont calculées dans le plan d'intégration, c'est-à-dire pour la même hauteur  $z$ .

## 2.6.2 Reconstruction de la constante diélectrique

### Étude du tenseur $W_{ij}$

Il a été montré récemment (Carminati et Greffet 1999 ; Shchegrov *et al.* 2000) que le comportement de  $W_{ij}$  était tout à fait particulier pour le rayonnement thermique en champ proche, émis par des surfaces susceptibles de supporter des polaritons de surface. Comme pour la densité d'énergie,  $W_{ij}$  est *quasi* monochromatique en champ proche et augmenté de plusieurs ordres de grandeurs par rapport à la valeur en champ lointain. De plus, il peut être développé de manière asymptotique en champ proche ( $z \ll \lambda_{max}$ ) sous la forme :

$$W_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega) \approx \frac{\hbar}{8\pi^2 \varepsilon_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right] \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} w_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z) \quad (2.68)$$

où  $w_{ij}$  représente un terme purement géométrique, ne dépendant que de  $\mathbf{R} - \mathbf{R}'$  (à cause de l'invariance par translation du système) et de  $z$ . Ainsi, en champ proche, il est possible de séparer la partie du tenseur qui ne dépend que de  $\omega$  de celle qui ne dépend que des variables d'espace. Si nous étions capables de mesurer le spectre de  $W_{ij}$  et d'étudier le pic de résonance, nous pourrions alors déterminer la constante diélectrique en fonction de la pulsation  $\omega$ . En effet, mesurer  $W_{ij}$  nous permet d'accéder à  $\operatorname{Im} \left[ \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right]$ . Or, la quantité  $\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1}$  peut être vue comme la polarisabilité d'un cylindre de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ . La polarisabilité étant une grandeur causale, alors la quantité  $\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1}$  est également causale. Ainsi, nous pouvons en déduire, grâce aux relations de *Kramers-Kronig*, la valeur de  $\operatorname{Re} \left[ \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right]$ . Aussi, connaissant  $\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1}$ , en déduisons-nous  $\varepsilon(\omega)$ .

Par ailleurs, comme le spectre de  $W_{ij}$  présente un pic très fin à cause de la résonance du polariton de surface, il n'est pas nécessaire de réaliser une mesure sur un spectre large pour utiliser les relations de *Kramers-Kronig*. La figure 2.25 présente justement un exemple de reconstitution de constante diélectrique pour le verre. La courbe en trait plein représente les valeurs de  $\varepsilon(\omega)$  obtenues par des mesures de réflectivité (Palik 1985) et la courbe en traits pointillés verte correspond à la constante diélectrique déduite d'un spectre d'émission en champ proche, pour une hauteur  $z = 100$  nm. Le très bon accord entre mesures expérimentales et théoriques nous permet d'espérer de pouvoir réaliser la mesure en champ proche.

Cependant, l'explication précédente suppose que nous puissions déduire le tenseur  $W_{ij}$  du signal champ lointain mesuré par le détecteur. Ceci est possible si nous connaissons la fonction de réponse  $\mathcal{H}_{ij}$  qui apparaît également dans l'expression du signal mesuré. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que dans le cas d'un microscope en champ proche avec une pointe métallique, sans ouverture et conique, nous pouvons donner une expression précise du signal sur le détecteur.

### Calcul du signal champ lointain obtenu avec une pointe métallique sans ouverture

Nous considérons donc ici une pointe métallique de forme "conique", réalisée – par exemple – à partir d'une fibre optique étirée puis recouverte d'une fine couche de métal. Ce type de pointe a été introduit par Cory *et al.* (1998) et étudié par Bowman *et al.* (1987) dans le cas d'un métal parfaitement conducteur. Ce modèle a été récemment utilisé par Porto *et al.* (2000) pour modéliser la fonction de réponse d'un microscope sans ouverture. Ce modèle prévoit que la dépendance à la pulsation du champ réciproque  $\mathbf{E}_{rec}$  est en  $\omega^\nu$ ,  $\nu$  étant un nombre réel dépendant de l'angle d'ouverture du cône. Ce modèle a été vérifié avec un excellent accord par Aigouy *et al.* (2000) sur une expérience de spectroscopie en champ proche.

Si nous regardons de plus près la fonction de réponse  $\mathcal{H}_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega)$  dans un plan  $z = z_0$ , nous remarquons alors qu'elle ne prend des valeurs significatives que si  $|\mathbf{R}|$  et  $|\mathbf{R}'|$  sont très petites devant la distance entre ce plan et l'extrémité de la pointe. Ainsi, nous pouvons raisonnablement penser que dans le plan  $z = z_0$ , la fonction  $\mathcal{H}_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega)W_{ij}(\mathbf{R}, \mathbf{R}', z, \omega)$  ne prendra des valeurs

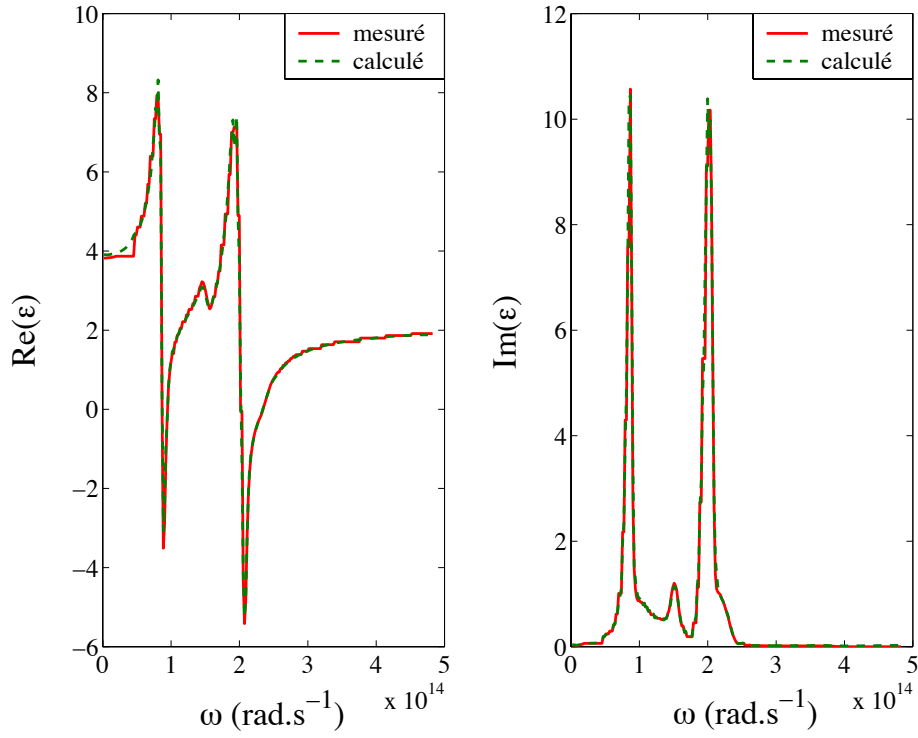


FIG. 2.25 – Exemple de reconstruction de la constante diélectrique du verre dans l'infrarouge :  $\varepsilon_{\text{verre}}$  obtenu à partir d'une mesure classique de réflectivité (rouge) et à partir du calcul proposé de spectroscopie en champ proche (vert).

significatives que sur une zone située juste sous la pointe et dont l'extension spatiale (suivant  $x$  et  $y$ ) est de l'ordre de la distance entre la pointe et le substrat. Le signal  $\langle S(\omega) \rangle$  que nous mesurons en champ lointain correspondra donc à la détection *locale* du champ électromagnétique émis thermiquement par le substrat sur une zone de l'ordre de la distance pointe/substrat.

### Niveau de signal détectable : exemple du carbure de silicium

Maintenant, nous allons essayer d'évaluer, dans le cas d'un substrat de SiC à la température de  $T$ , le niveau de signal pour vérifier qu'il se situe au-dessus du seuil de détection d'un microscope en champ proche. Ce signal se met sous la forme suivante :

$$\langle S(\omega) \rangle = \text{Im} \left[ \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right] \frac{\omega^{2\nu}}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} I(d) \quad (2.69)$$

où  $d$  est la distance entre la pointe et le substrat.  $I(d)$  est une fonction qui ne dépend que de la géométrie du système et pas de la pulsation. Nous l'avons évaluée numériquement en calculant l'intégrale dans l'équation (2.65) : elle varie comme  $1/d^3$  en champ proche, ce qui n'est pas sans rappeler les résultats que nous avons obtenus précédemment pour la densité d'énergie. Dans le cas du SiC, à la température de  $T = 500$  K et pour une distance pointe/substrat  $d = 10$  nm, le signal sur le détecteur est de l'ordre de  $10^{-7}$  W.sr $^{-1}$ , au-dessus du seuil de détection de la plupart des détecteurs infrarouges usuels. Ainsi, une expérience de spectroscopie *locale* d'émission thermique semble réalisable pour retrouver la constante diélectrique d'un substrat. Cependant, la résolution latérale est bien évidemment limitée et est de l'ordre de la distance pointe/échantillon, typiquement 10 nm. Par ailleurs, il est nécessaire de discuter ici du modèle de pointe. En effet, dans la formule donnée en équation (2.69), le paramètre  $\nu$  n'est pas forcément connu précisément (sauf

peut-être dans le cas d'un pointe conique parfaitement conductrice). Cependant, au voisinage de la résonance  $\omega_{res}$ , on aura :

$$\omega^{2\nu} \approx \omega_{res}^{2\nu} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \approx \frac{1}{\exp(\hbar\omega_{res}/k_B T) - 1} \quad (2.70)$$

car la résonance du polariton de surface est extrêmement fine spectralement. Nous pouvons alors réécrire l'équation (2.69) sous la forme :

$$\langle S(\omega) \rangle = Im \left[ \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right] I(d, \omega_{res}) \quad (2.71)$$

Ainsi, une calibration adéquate nous permettra de nous affranchir du terme  $I(d, \omega_{res})$  et de mesurer précisément la quantité  $Im \left[ \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right]$ .

## 2.7 Émission thermique cohérente

### 2.7.1 Introduction

Quel est l'exemple typique d'une source incohérente de lumière ? Souvent, la réponse est : une source *thermique*. En effet, la lumière émise par une telle source est reliée physiquement à l'agitation thermique des électrons du matériau la constituant. Aussi, ce processus étant *aléatoire*, en déduisons-nous que la lumière émise n'a pas de propriété particulière de cohérence. Ainsi, une source thermique usuelle a souvent un spectre d'émission relativement large (ou exempt de résonances très marquées) et son émissivité est quasi isotrope (sauf peut-être en incidence rasante). Par exemple, la figure 2.26 représente l'émissivité directionnelle d'un échantillon *plan* semi-infini de carbure de silicium (*cf.* Fig. 2.27(a)) à la température de 300 K et pour une longueur d'onde  $\lambda = 11.36 \mu\text{m}$ . Celle-ci ressemble à celle d'une source thermique usuelle. Notons par ailleurs que l'émissivité dans ce cas-là est relativement faible, de l'ordre de 0.035 en moyenne : le SiC est donc un mauvais corps noir pour cette longueur d'onde.

Maintenant, sur cette même interface, nous gravons un réseau lamellaire comme décrit sur la figure 2.27(b). Une mesure expérimentale de l'émissivité directionnelle (en polarisation *p*, *i.e.* avec un champ magnétique parallèle aux traits du réseau) réalisée au CEA-CESTA donne le résultat présenté en figure 2.28. L'émissivité maximale atteint presque la valeur de 0.4 soit un ordre de grandeur de plus par rapport à l'interface plane. Mais surtout, notre source thermique est *très directive* : elle rayonne comme une antenne infrarouge ! Notre réseau n'a donc pas du tout une émission isotrope comme pour une source thermique usuelle. Nous allons essayer de comprendre maintenant plus en détail pourquoi cette source a des propriétés si étonnantes.

### 2.7.2 Position du problème

#### Géométrie du système étudié

Nous considérons tout d'abord une interface plane définie par  $z = 0$  et séparant le vide d'un échantillon de matériau linéaire, homogène, isotrope et non magnétique de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ . Sur cette interface plane, un réseau *lamellaire* a été gravé comme présenté sur la figure 2.29. Le réseau a une période  $\Lambda$ , la largeur des traits est notée  $l$  et leur hauteur  $h$ . Ce système physique constitue un réseau de diffraction dont nous pouvons étudier les propriétés électromagnétiques.

#### Méthode d'étude

La diffraction des ondes électromagnétiques par des réseaux a été l'objet de nombreuses études (Maystre 1984, Petit 1980, Nieto-Vesperinas 1991) et il ne s'agit pas ici de décrire une



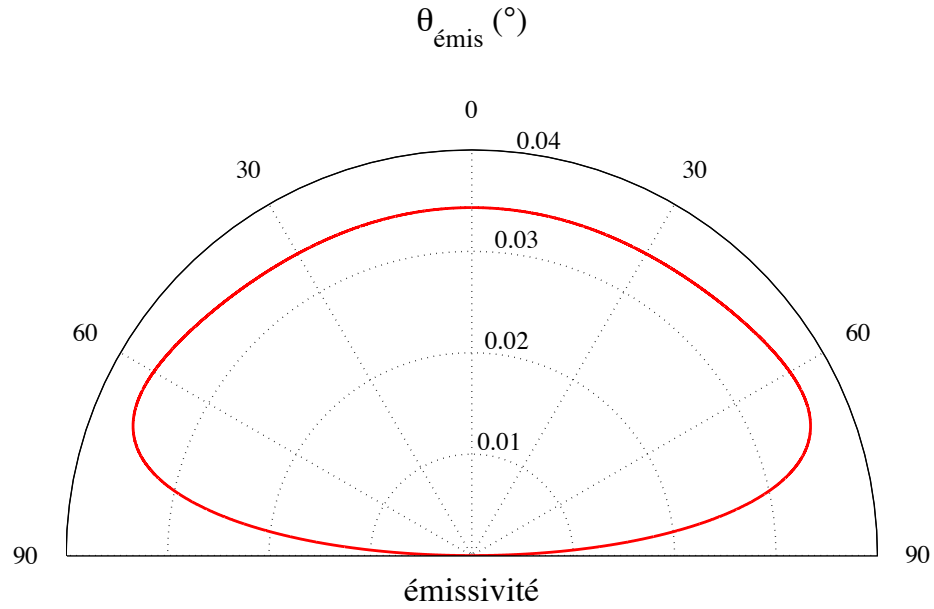
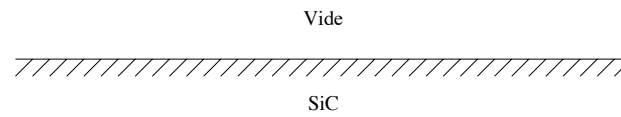
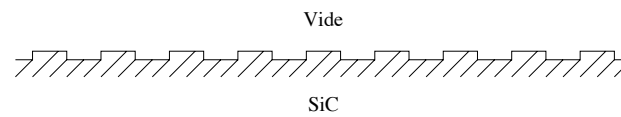


FIG. 2.26 – Émissivité directionnelle d'un échantillon de carbure de silicium à 300 K et pour une longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$ .



(a) Interface plane de SiC



(b) Réseau lamellaire de SiC

FIG. 2.27 – Deux exemples de sources thermiques fabriquées à partir de carbure de silicium.

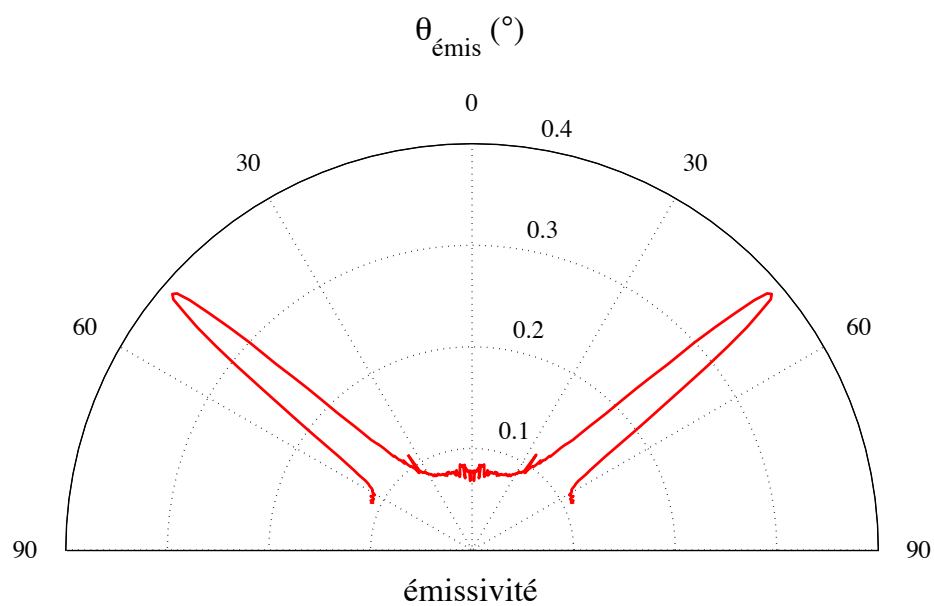


FIG. 2.28 – Émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) d'un réseau de SiC pour une longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$  : mesures expérimentales réalisées au CEA-CESTA.

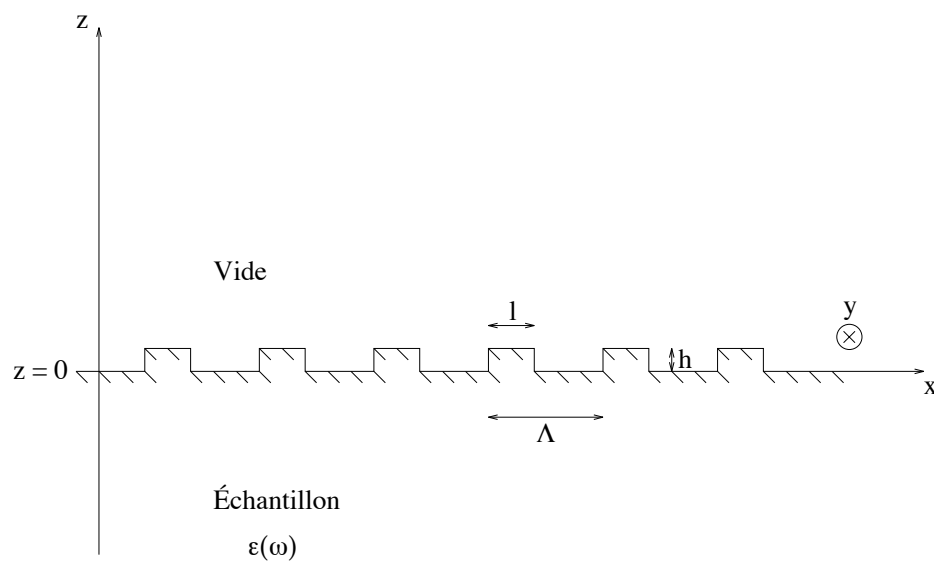


FIG. 2.29 – Géométrie du problème : réseau lamellaire de période  $\Lambda$  (en microns) et de hauteur  $h$  (en microns) ;  $l$  est la largeur des traits du réseau.

nouvelle méthode de calcul. Le formalisme et la méthode numérique que nous avons utilisés ont été développés originellement par Sentenac et Greffet (1992) pour des réseaux profonds inhomogènes<sup>17</sup>, diélectriques ou métalliques. Pour notre part, nous avons appliqué cette méthode aux réseaux homogènes. Une description plus détaillée de la méthode de résolution peut être trouvée en Annexe D (Sec. D.3.3).

### Relation entre la réflectivité et l'émissivité

La méthode que nous avons utilisée nous permet de calculer les efficacités de diffraction, en réflexion et en transmission, pour tous les ordres en fonction de l'angle d'incidence de l'onde qui illumine le réseau. Cependant, nous travaillons principalement avec des matériaux opaques pour lesquels les efficacités de diffraction en transmission sont nulles (le milieu inférieur étant semi-infini). En effet, l'énergie transmise à l'interface est complètement absorbée dans le matériau. Ainsi, la seconde loi de Kirchoff nous permet d'écrire que  $\text{émissivité} = 1 - \text{réflectivité}$ .

À ce stade, il faut comprendre que le réseau que nous avons présenté en introduction n'a pas été choisi au hasard mais que ses paramètres géométriques avaient été optimisés préalablement (grâce à notre code de calcul) pour mettre en évidence les propriétés particulières de ce nouveau type de source thermique.

### Paramètres du réseau de SiC

Notre source thermique est donc constituée d'un réseau lamellaire en carbure de silicium (SiC). Celui-ci possède les caractéristiques *géométriques* suivantes, rapportées à la longueur d'onde de référence  $\lambda_{ref} = 11.36 \mu\text{m}$  :

$$\Lambda = \frac{22\lambda_{ref}}{40}, \quad l = \frac{11\lambda_{ref}}{40}, \quad h = \frac{\lambda_{ref}}{40} \quad (2.72)$$

Ce réseau a donc un facteur de remplissage de 50% (rapport entre la largeur des traits et la période du réseau). Pour déterminer les paramètres du réseau, nous avons donc réalisé quelques simulations numériques préalables afin qu'ils correspondent à une résonance du phonon-polariton dans l'infrarouge. Pour cela, il suffit d'utiliser la relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface *plane vide*/SiC et de choisir un couple  $(\omega, K)$ ,  $K$  correspondant à la composante parallèle à l'interface du champ incident. Pour cela, nous avons supposé que la relation de dispersion est faiblement modifiée par la présence du réseau sur l'interface, ceci semblant valable pour de très faibles hauteurs de traits (ce qui est le cas ici). Nous verrons dans la suite dans quelle mesure cette hypothèse est vérifiée.

Le réseau que nous venons de décrire a été fabriqué par le D<sup>r</sup> Yong Chen du Laboratoire de Photonique et des Nanostructures (Marcoussis, France) par des techniques classiques de photolithographie. La figure 2.30 présente une image du réseau obtenue par microscopie à force atomique. Pour des détails plus complets sur les techniques expérimentales de gravure, on pourra se reporter à Le Gall (1996). Dans ce même ouvrage, on pourra également trouver une description des montages expérimentaux utilisés pour effectuer les mesures de réflectivité ou d'émissivité infrarouges. Celles qui sont présentées ici ont été réalisées par le D<sup>r</sup> Stéphane Mainguy du Commissariat à l'Énergie Atomique au Centre d'Études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine (CEA-CESTA, Le Barp, France).

**Remarque :** les résultats que nous présentons ci-après pour le réseau ont tous été mesurés en polarisation  $p$ . En effet, nous allons voir que seule cette polarisation est intéressante, notamment

17. Lorsque la constante diélectrique des traits gravés n'est pas uniforme dans l'espace.

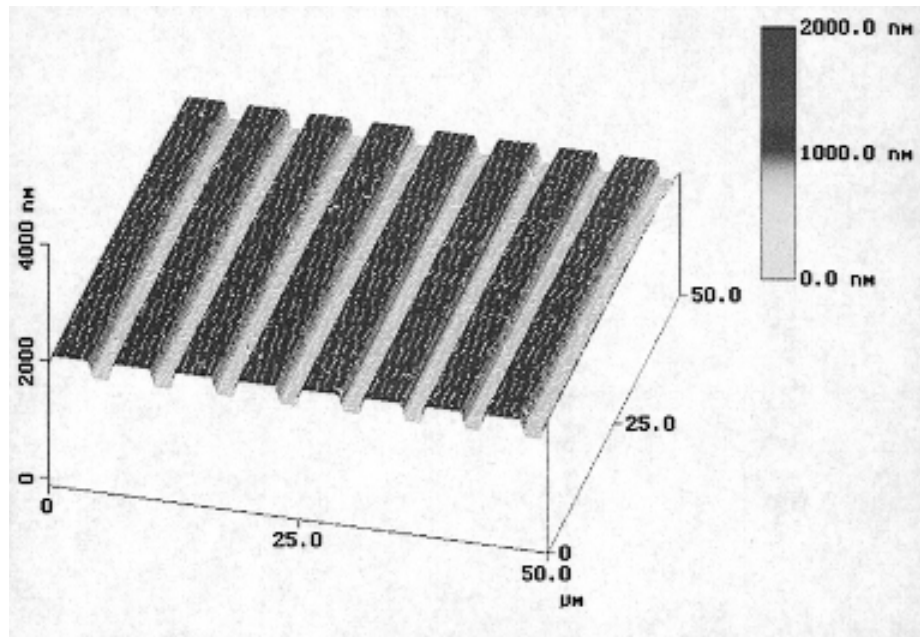


FIG. 2.30 – Image AFM du réseau de SiC étudié.

grâce à la possibilité d'avoir des ondes de surface.

### 2.7.3 Résultats obtenus pour l'émissivité directionnelle avec le réseau de SiC

#### Émissivité directionnelle à $11.36 \mu\text{m}$ (polarisation $p$ )

Nous montrons à nouveau en figure 2.31 le résultat expérimental obtenu pour l'émissivité directionnelle du réseau de SiC à  $11.36 \mu\text{m}$ . Nous retrouvons donc le fait que notre source thermique rayonne comme une antenne infrarouge. Son diagramme d'émission présente en effet deux lobes fins angulairement pour un angle d'émission  $\theta_{\text{emis}} = \pm 49.5^\circ$ , la largeur angulaire étant de l'ordre de  $9^\circ$ .

À ce stade, nous devons apporter une précision au sujet du montage expérimental : comme la mesure est réalisée en mesurant directement l'intensité émise par l'échantillon en champ lointain, il était nécessaire de le chauffer jusqu'à une température de 773 K ( $500^\circ\text{C}$ ) afin d'obtenir un niveau de signal assez important pour être détectable. C'est pour cette raison que si nous essayons de comparer ce résultat expérimental avec une simulation numérique exacte effectuée pour une température d'échantillon à 300 K, nous obtenons le résultat représenté en figure 2.32.

Nous remarquons que les diagrammes d'émissivité sont semblables qualitativement (présence de lobes) mais très différents quantitativement (valeur maximale de l'émissivité, position et finesse des lobes). Ceci semble normal car expérimentalement, le détecteur utilisé a toujours une taille *finie* et une bande passante *limitée*. Pour l'expérience réalisée au CEA-CESTA que nous venons de présenter, par exemple, la résolution spectrale du détecteur (détecteur infrarouge HgCdTe refroidi à l'azote liquide) était de  $0.22 \mu\text{m}$  et la résolution angulaire du montage était d'environ  $3^\circ$ . Si nous intégrons ces données aux simulations numériques (convolution avec des fonctions rectangle), nous retrouvons alors un résultat plus conforme à l'expérience (*cf.* Fig. 2.33). Sur cette dernière figure, nous voyons qu'il y a cependant des différences entre la simulation numérique améliorée et la mesure expérimentale :

1. l'émissivité maximale est plus faible dans le cas expérimental (0.39) que dans le cas théorique (0.46) ;

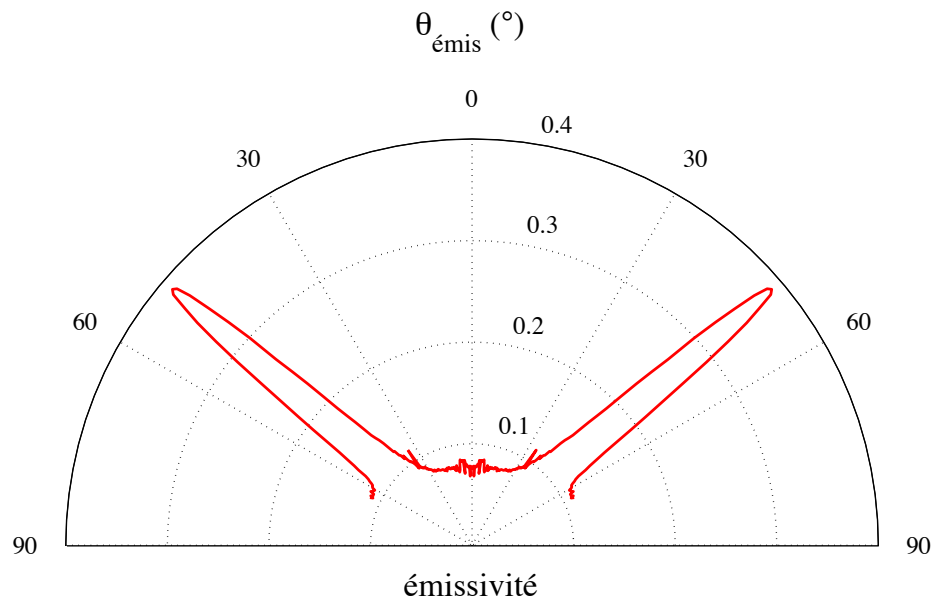


FIG. 2.31 – Émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) du réseau de SiC pour une longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$  : mesures expérimentales réalisées au CEA-CESTA à une température de  $773 \text{ K}$ .

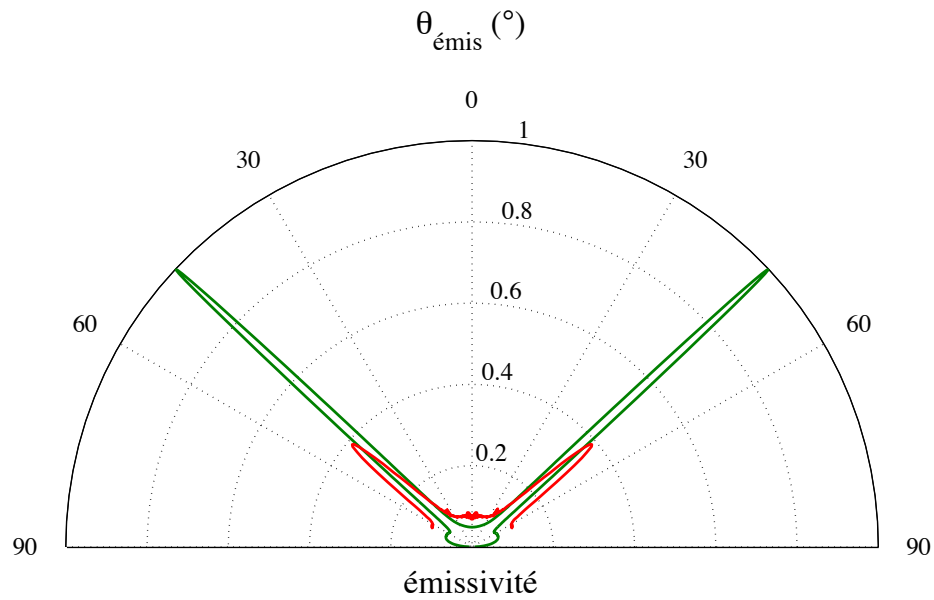


FIG. 2.32 – Émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) du réseau de SiC pour une longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$  : comparaison entre la théorie (vert) et l'expérience (rouge) menée au CEA-CESTA.

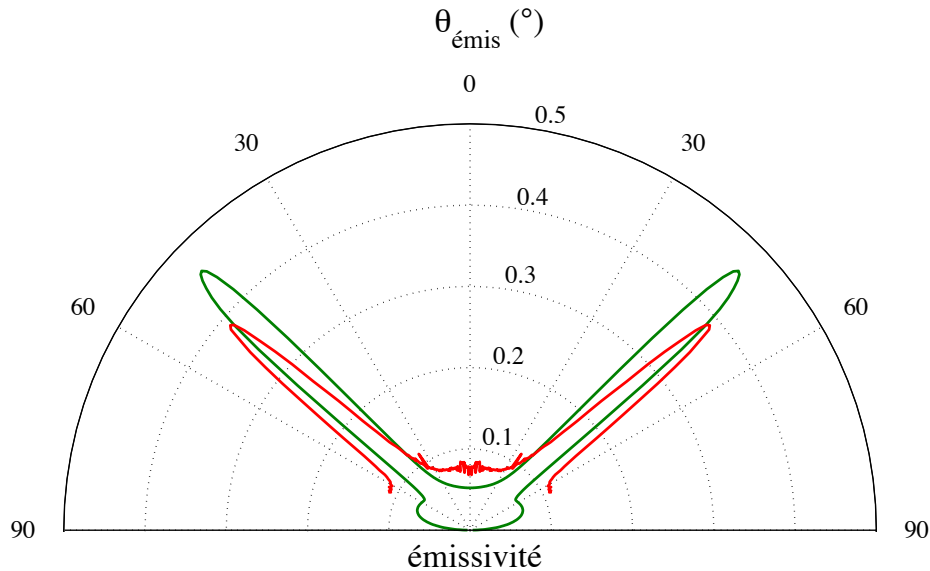


FIG. 2.33 – Émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) du réseau de SiC pour une longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$  : comparaison entre la simulation (vert) et l'expérience (rouge) menée au CEA-CESTA.

2. le maximum d'émissivité n'a pas lieu pour la même valeur de l'angle d'émission :  $49.5^\circ$  mesuré au lieu de  $47^\circ$  prévu par la théorie ;
3. la largeur angulaire est légèrement plus élevée pour la courbe expérimentale.

Ceci est dû au fait que la simulation numérique a été réalisée pour une température d'échantillon de 300 K, pour laquelle nous connaissons la constante diélectrique du SiC. Ainsi, les différences observées sur la figure précédente ont principalement deux origines : l'une liée à la variation de la constante diélectrique avec la température qui n'a pas été prise en compte ; l'autre liée à la variation des caractéristiques géométriques du réseau due notamment à la dilatation mécanique de l'échantillon lorsque celui-ci est chauffé.

Revenons maintenant sur la simulation numérique exacte que nous avons présenté précédemment (*cf.* Fig. 2.32). *Théoriquement*, notre réseau rayonne comme une antenne infrarouge. Il est extrêmement directif : des lobes d'émission très fins angulairement apparaissent pour une direction d'émission de  $\theta_{\text{émis}} = \pm 47^\circ$ . La largeur angulaire des lobes est d'environ  $2.7^\circ$  autour de la direction d'émission maximale. Notons également, que l'émissivité atteint presque la valeur de 1 pour la longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$ , alors que la valeur pour l'interface plane est de 0.035. Ainsi, en gravant à la surface de ce réseau, nous avons radicalement modifié les propriétés radiatives de la surface du carbure de silicium, par rapport à celles de l'interface plane (*cf.* Fig. 2.34). D'une source *quasi* isotrope, nous sommes passés à une source très directive.

### Émissivité directionnelle pour différentes longueurs d'onde : “effet Wolf”

À la vue de ces résultats, nous pouvons légitimement nous poser la question de savoir si l'effet que nous avons observé (autant expérimentalement que théoriquement) existe à d'autres longueurs

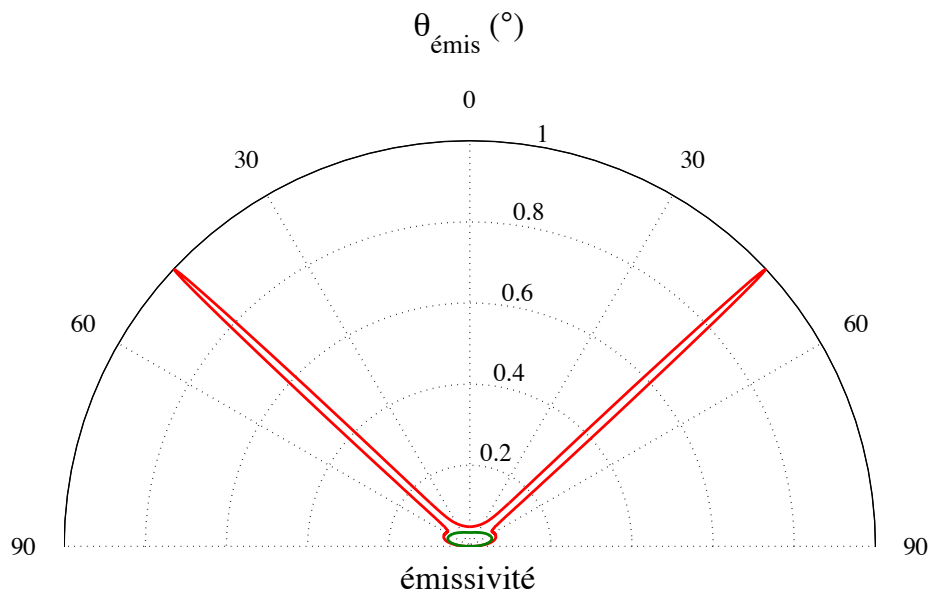


FIG. 2.34 – Émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) du réseau de SiC à 300 K et pour une longueur d'onde de  $11.36 \mu\text{m}$  : comparaison entre une interface plane (vert) et le réseau (rouge).

d'onde. Nous avons donc calculer numériquement l'émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) de notre réseau pour différentes longueurs d'onde:  $11.01$ ,  $11.36$  et  $11.86 \mu\text{m}$ . La figure 2.35 présente les résultats que nous avons ainsi obtenus.

Nous constatons que le pic d'émission est différent pour chacune des longueurs d'onde:  $32^\circ$  pour  $11.01 \mu\text{m}$ ,  $47^\circ$  pour  $11.36 \mu\text{m}$  et  $60^\circ$  pour  $11.86 \mu\text{m}$ . Pour imager cela, nous pouvons dire que la "couleur" de l'échantillon sur lequel nous avons gravé le réseau change fortement en fonction de l'angle d'observation. Ceci est tout-à-fait remarquable par rapport à une source thermique classique. En effet, pour celle-ci, le spectre d'émission varie peu avec l'angle. Nous pouvons dire que notre source thermique montre donc de l'"effet Wolf" (Wolf 1986).

Maintenant, nous pouvons imaginer réaliser l'expérience suivante: nous fixons l'angle d'observation du réseau et nous réalisons un spectre de la lumière émise thermiquement. D'après la figure 2.35, le spectre d'émission devrait présenter des pics d'émission très fins en longueur d'onde. C'est ce que nous allons tenter de voir en étudiant la réflectivité spectrale de notre échantillon en fonction de l'angle d'incidence.

## 2.7.4 Spectres en réflectivité obtenus avec le réseau de SiC

### Spectre de réflectivité en fonction de l'angle d'incidence

Nous considérons donc le réseau que nous avons décrit précédemment et nous l'éclairons avec un champ incident (onde plane) faisant un angle  $\theta_{inc}$  avec la normale ( $Oz$ ). Comme vu précédemment, étudier la réflectivité du réseau revient à étudier son émissivité. Pour trois angles d'incidence différents  $\theta_{inc} = 30^\circ$ ,  $47^\circ$  et  $60^\circ$ , nous avons donc calculé la réflectivité *théorique* de ce réseau en fonction de la longueur d'onde, entre  $\lambda = 9 \mu\text{m}$  et  $\lambda = 12.5 \mu\text{m}$ . Nous obtenons alors les spectres suivants:

La première chose à remarquer est bien évidemment la présence de pics d'absorption dans la

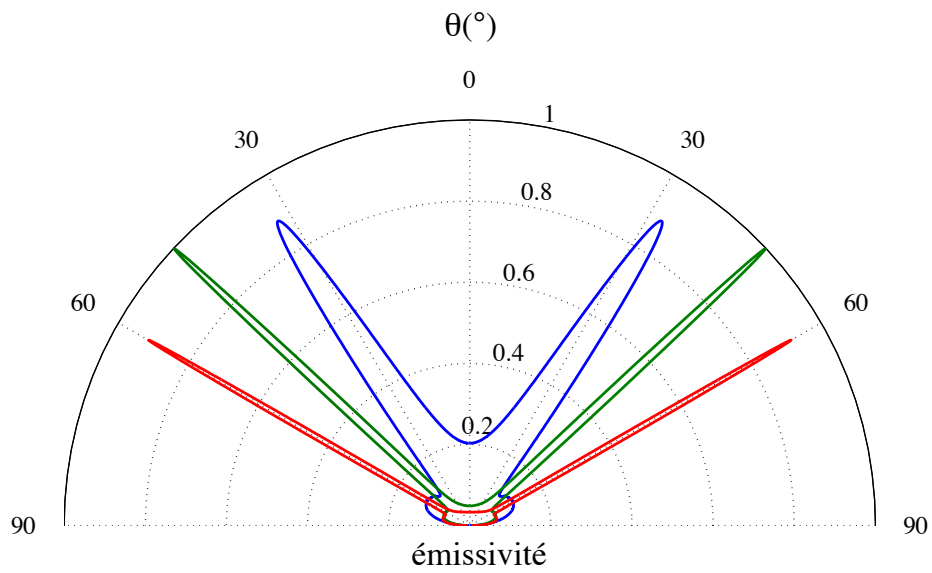


FIG. 2.35 – Émissivité directionnelle (en polarisation  $p$ ) du réseau de SiC à 300 K pour différentes longueurs d'onde : 11.01  $\mu\text{m}$  (bleu), 11.36  $\mu\text{m}$  (vert) et 11.86  $\mu\text{m}$  (rouge).

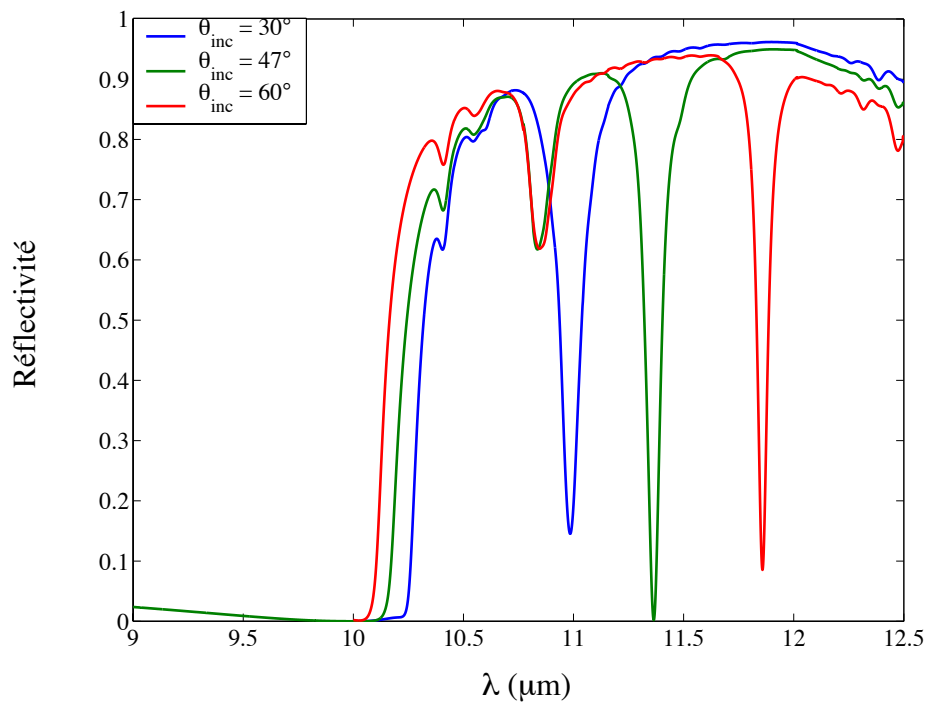


FIG. 2.36 – Réflectivité du réseau de SiC à 300 K pour différents angles : 30° (bleu), 47° (vert) et 60° (rouge).



réflectivité: ils correspondent à l'absorption résonante due à l'excitation du phonon-polariton de surface sur l'interface vide/SiC. Ce phénomène d'absorption par des réseaux n'est pas un phénomène nouveau; il a déjà été observé dans le cas de métaux dans le visible et le proche ultraviolet avec des plasmon-polaritons de surface. Cependant, l'expérience que nous avons réalisée est l'une des premières à montrer de l'absorption totale dans l'infrarouge par un phonon-polariton.

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 1, il n'est pas possible d'exciter un polariton de surface sur une interface plane. D'ailleurs, si nous traçons la réflectivité pour une interface plane (*cf.* Fig. 2.37), pour  $\theta_{inc} = 47^\circ$  par exemple, comparée à celle de notre réseau, nous remarquons alors l'absence de tels pics d'absorption.

Ainsi, l'apparition des pics d'absorption est uniquement due à la présence du réseau sur l'interface

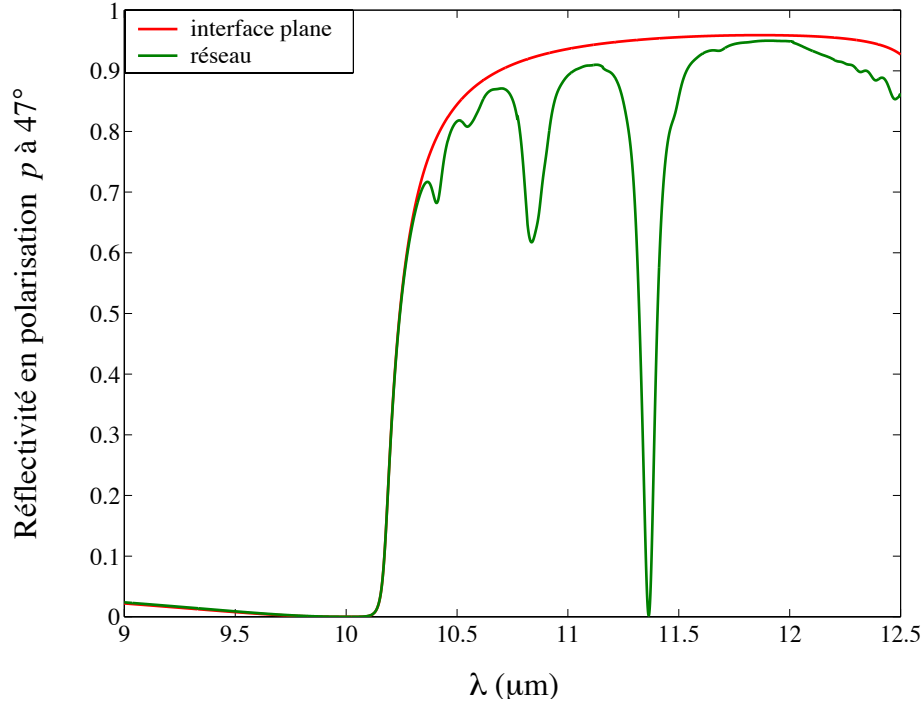


FIG. 2.37 – Réflectivité du SiC à 300 K, en polarisation  $p$  et pour une incidence de  $47^\circ$  : comparaison entre une interface plane et pour le réseau.

plane. C'est pourquoi, le réseau est nécessaire. En effet, si nous examinons la relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC (*cf.* Fig. 2.12), nous constatons que le polariton correspond à un  $K$  supérieur à  $\frac{\omega}{c}$ , c'est-à-dire à une onde évanescente. Par ailleurs, pour le réseau et pour l'onde diffractée dans l'ordre  $n$ , nous avons la relation de Bragg qui stipule que :

$$K_n = K_{inc} + n \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (2.73)$$

où  $K_n$  est la composante parallèle de l'onde diffractée dans l'ordre  $n$  et  $K_{inc}$  celle de l'onde incidente. Ainsi, nous voyons qu'il est possible d'obtenir un  $K$  plus grand que  $\frac{\omega}{c}$  et ainsi d'atteindre celui qui correspond au polariton de surface.

Par ailleurs, la position du pic varie de  $\lambda = 10.98 \mu\text{m}$  pour  $\theta_{inc} = 30^\circ$  à  $\lambda = 11.86 \mu\text{m}$  pour  $\theta_{inc} = 60^\circ$ . Cependant, un écart de plus de  $1 \mu\text{m}$  peut être obtenu entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Ceci peut être compris en examinant à nouveau la relation de dispersion (*cf.* Fig. 2.12). Pour les angles et les longueurs d'onde considérées, nous nous situons sur la première partie de la relation de dispersion, où la pente est relativement importante : ainsi à une faible variation de  $K$  (donc de  $\theta_{inc}$ ) correspond une grande variation de  $\omega$  (donc de  $\lambda$ ).

### Comparaison avec les mesures expérimentales réalisées au CEA-CESTA

Pour confirmer ces effets, des mesures de réflectivité en polarisation  $p$  ont également été effectuées au CEA-CESTA en utilisant un spectromètre infrarouge à transformée de Fourier (FTIR) comme source infrarouge. Ce montage avait une ouverture angulaire très réduite (plus petite que la largeur des pics d'absorption). De plus, toutes les mesures ont été effectuées à la température de 300 K.

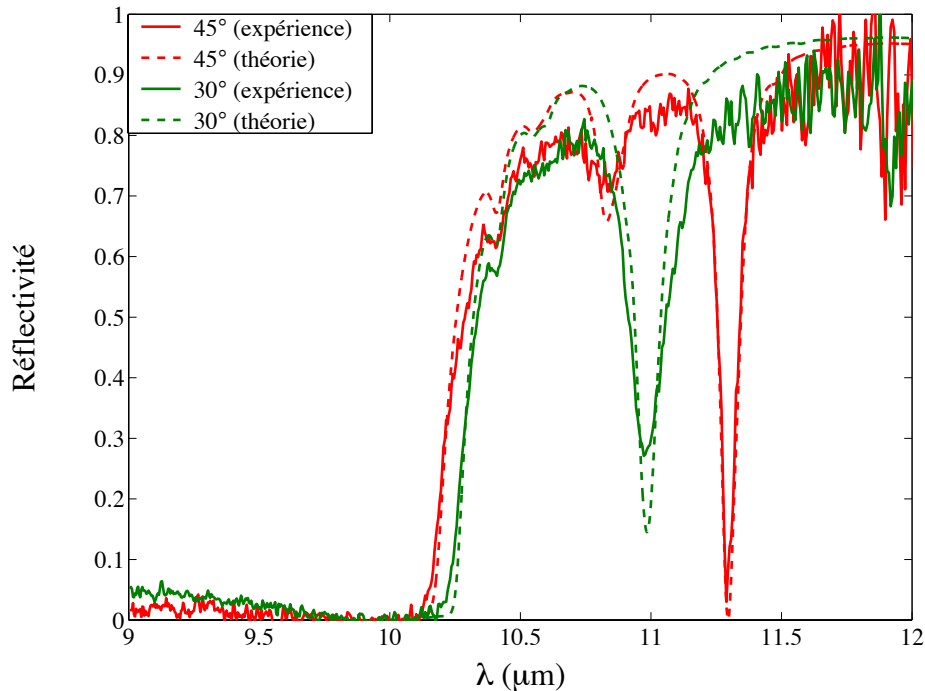


FIG. 2.38 – Réflectivité (en polarisation  $p$ ) pour le réseau de SiC à 300 K pour deux angles d'incidence différents,  $30^\circ$  et  $47^\circ$  : comparaison entre la théorie (traits pointillés) et l'expérience (traits pleins) menée au CEA-CESTA.

Nous constatons alors que l'accord entre les prédictions théoriques et les résultats expérimentaux est excellent malgré la nature résonante du système. Nous remarquons notamment que la position du pic et même son intensité sont correctement reproduites.

### Mise en évidence expérimentale de l'“effet Wolf”

Nous avons déduit (en utilisant la seconde loi de Kirchoff) l'émissivité directionnelle du même échantillon à partir des mesures de réflectivité infrarouge. Les résultats sont reportés sur la figure 2.39. Nous voyons que l'accord entre théorie et expérience est grandement amélioré par rapport à l'expérience précédente (*cf.* Fig. 2.33). Notons de plus que les résultats théoriques sont les résultats exacts (pas de convolutions sur la longueur d'onde ou l'ouverture angulaire).

Enfin, nous pouvons dire que l'expérience que nous avons réalisée avec notre source thermique met en relief pour la première fois l'“effet Wolf”.

### Relation de dispersion du phonon-polariton en présence du réseau

Par ailleurs, il est possible à partir des simulations numériques ou à partir des mesures expérimentales de tracer la relation de dispersion du phonon-polariton de surface à l'interface vide/SiC et en présence du réseau. Nous obtenons alors la courbe  $\omega(K)$ ,  $\omega$  et  $K$  étant en  $\text{cm}^{-1}$ , représentée sur la figure 2.40, où la relation de dispersion est repliée sur la première zone de

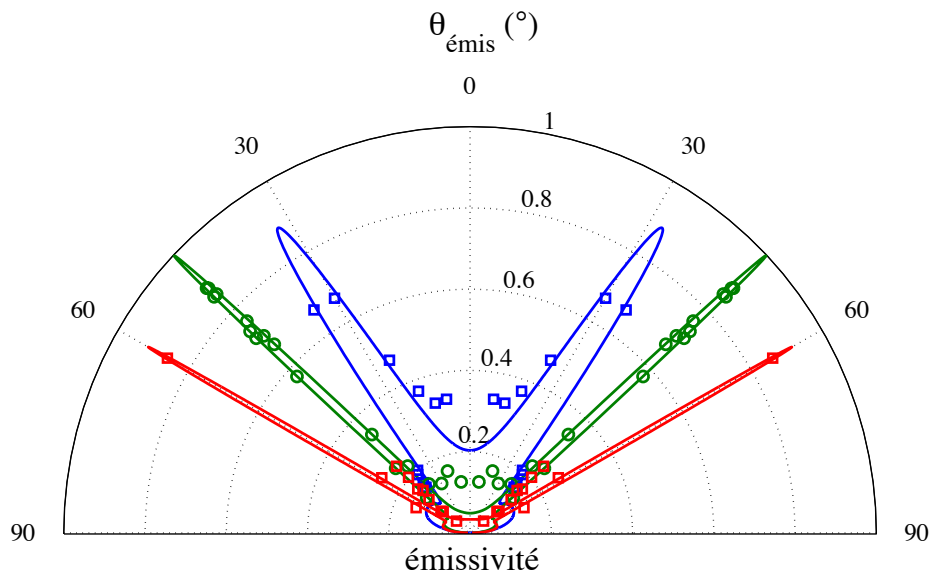


FIG. 2.39 – Émissivité (en polarisation  $p$ ) pour du SiC à 300 K et pour une longueur d’onde de  $11.36 \mu\text{m}$  : comparaison entre la théorie (vert) et l’expérience (rouge) menée au CEA-CESTA.

Brillouin  $[0, \frac{\pi}{\Lambda}]$  : Nous remarquons que par rapport au cas théorique de l’interface plane (courbe rouge pointillée) il y a création d’une “ouverture” (gap) en bord de bande due à l’interaction de l’onde de surface avec le réseau. À noter que les premiers points expérimentaux (pour les pulsations  $\omega$  petites) correspondent aux pics d’absorption les plus importants dans la relation de dispersion. Cette relation de dispersion est une preuve supplémentaire de l’implication des ondes de surfaces dans les phénomènes observés précédemment.

### 2.7.5 Discussion sur l’émission cohérente

L’ensemble des résultats précédents peut être interprété en termes de *cohérence spatiale*. La source thermique que nous venons d’étudier, *i.e.* le réseau de SiC ne ressemble en rien à une source thermique usuelle. Elle rayonne dans des directions bien définies et son spectre d’émission dépend en plus de la direction d’observation (“effet Wolf”). Toutes ces propriétés particulières sont liées à la cohérence spatiale induite par les ondes de surface à l’interface vide/SiC. Notons que ce mécanisme avait été mal compris auparavant, notamment par Hesketh et Zemel (1988a), dans le cas de réseaux de silicium dopé (susceptible de supporter des plasmon-polaritons de surface).

Suivant ce que nous avons observé précédemment, la finesse angulaire des pics d’émission correspond à une grande cohérence spatiale de notre source (source *localement* cohérente). Pour montrer cela, nous utilisons une propriété des sources *quasi* homogènes<sup>18</sup>. Le réseau de SiC que nous avons fabriqué a une taille caractéristique  $L = 5 \text{ cm}$  de côté (plus grande que la longueur de corrélation  $l$ ) ; le matériau et la température étant homogènes, il peut être assimilé à une source *quasi* homogène. Ainsi, nous pouvons supposer que notre réseau constitue une source *quasi* homogène : la relation entre la luminance émise et le degré de cohérence spatiale dans le plan de la source est une simple relation de transformée de Fourier (Mandel et Wolf 1995). Ainsi, la largeur angulaire du lobe d’émission varie pour cette source *localement* cohérente comme  $\frac{\lambda}{l}$  au lieu de  $\frac{\lambda}{L}$  pour une

18. Une source est dite *quasi* homogène lorsque sa taille  $L$  est très grande devant sa longueur de corrélation

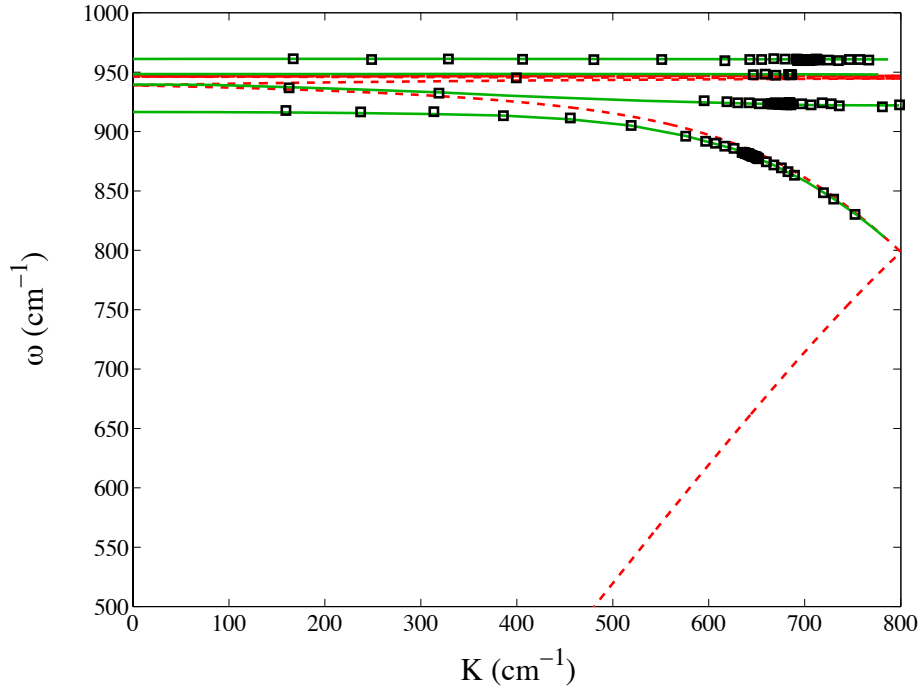


FIG. 2.40 – Relation de dispersion du phonon-polariton de surface pour du SiC à 300 K : courbe théorique pour une interface plane (trait pointillé rouge) ; courbe théorique pour le réseau (trait plein vert) et courbe expérimentale pour le réseau (marques noires).

source *globalement* cohérente. Ainsi, une très faible ouverture angulaire est une signature d’une grande longueur de corrélation spatiale, supérieure à la longueur d’onde. Ceci avait déjà été prévu par Carminati et Greffet (1999) dans le cas d’une interface plane vide/SiC. Par exemple, sur la figure 2.39, le pic d’émission à  $60^\circ$  a une largeur angulaire d’environ  $1^\circ$ , ce qui correspond à une longueur de corrélation spatiale de  $60 \lambda \approx 0.6$  mm.

Revenons maintenant sur l’origine physique de l’“*émission thermique cohérente*”. La question est de savoir comment un mouvement aléatoire de charges – dû à l’agitation thermique – peut générer un courant cohérent le long de l’interface. Physiquement, tout réside dans les propriétés de cohérence des ondes de surfaces, plasmon-polariton ou phonon-polariton, comme démontré par Carminati et Greffet (1999) et Shchegrov *et al.* (2000). Ces deux types d’onde sont des *oscillations collectives* mettant en jeu des charges (*cf.* Chap. 1) et ayant deux propriétés particulières : premièrement, ce sont des modes *mécaniques délocalisés* du système qui peuvent être excités de manière résonante ; deuxièmement, ce sont des ondes susceptibles de générer des champs électromagnétiques. Ainsi, puisque ces ondes sont délocalisées, les champs qui en résultent le sont également. Alors, l’explication physique du phénomène est la suivante : chaque élément de volume de la source thermique rayonne un champ électromagnétique qui excite un mode délocalisé correspondant à l’onde de surface ; néanmoins, cette onde étant évanescence, elle n’est pas observée en champ lointain. En revanche, si nous gravons un réseau à la surface de la source, celui-ci est capable de diffracter l’onde de surface et de la coupler à une onde propagative en champ lointain. Ainsi, notre expérience nous permet de “voir” directement le phonon-polariton de surface (*cf.* Fig. 2.40).

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu qu'il était possible de traiter le problème du rayonnement thermique dans le cadre de l'électromagnétisme. Nous avons pu, grâce à cela, calculer la densité d'énergie électromagnétique associée au champ d'émission thermique rayonné par une source plane dans le vide. Cette méthode, *exacte* dès lors que l'on peut considérer la constante diélectrique comme une grandeur *locale* et que l'on est à l'équilibre thermodynamique local, nous permet de tenir compte de l'ensemble de la physique du système et notamment de prendre en considération tous les modes du champ électromagnétique (modes propagatifs, évanescents et de surface). Lorsque la source thermique considérée supporte des ondes de surface, comme un phonon-polariton pour le SiC dans l'infrarouge, nous avons montré que le spectre de la densité d'énergie était *quasi* monochromatique en champ proche avec un pic très important pour la pulsation de résonance du polariton et que la densité d'énergie totale était alors augmentée de plusieurs ordres de grandeur par rapport à sa valeur en champ lointain (jusqu'à 5 ordres de grandeur à 10 nm par exemple). Nous avons alors imaginé une expérience d'optique de champ proche avec une pointe métallique sans ouverture pour réaliser de la spectroscopie locale d'émission thermique. Le modèle de microscope en champ proche que nous avons utilisé nous a permis d'évaluer le niveau de signal susceptible d'être mesuré avec le montage et sa dépendance spectrale ; celui-ci semblant suffisant, nous avons proposé une méthode de reconstruction de la constante diélectrique, dont nous avons validé, du moins théoriquement et numériquement, le principe.

Par ailleurs, nous avons démontré qu'il était possible de modifier notablement les propriétés radiatives d'une surface en modifiant son état de surface. En effet, une interface plane de SiC – mauvais corps noir dans l'infrarouge – peut présenter une émissivité proche de 1 pour certaines longueurs d'ondes et dans certaines directions d'émission et peut même être transformée en une source cohérente de rayonnement thermique en gravant un réseau convenablement choisi à sa surface. Son émission dépend alors fortement de la direction d'observation avec deux lobes très fins angulairement comme pour le rayonnement d'une antenne : ceci est l'un des premiers exemples de source thermique infrarouge réelle présentant de l'“effet Wolf”. Ces propriétés de cohérence spatiale sont essentiellement liées, encore une fois, aux ondes de surface susceptibles de se propager sur le réseau ; celui-ci réalise simplement un couplage de ces ondes de surface avec des ondes propagatives observables en champ lointain. Ainsi, il est possible de “voir” directement le polariton de surface.

Cette première étude nous a permis de mettre en évidence de nouveaux effets dans le rayonnement thermique des sources infrarouges, notamment des effets d'augmentation de l'émission thermique en champ proche. Ceci nous amène à penser que des phénomènes similaires peuvent exister pour le transfert d'énergie radiative entre corps opaques lorsque ceux-ci sont de taille sub-longueur d'onde ou séparés par une distance inférieure à la longueur d'onde. Ainsi, l'objet de la prochaine partie de ce travail (Chap. 3, 4 et 5) concerne les transferts radiatifs aux courtes échelles de longueur.

## Chapitre 3

# Transfert radiatif entre deux plans à courtes distances

## Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que la densité d'énergie électromagnétique (liée au rayonnement thermique) au-dessus d'une interface plane supportant des polaritons de surface (plasmon-polariton ou phonon-polariton) pouvait être accrue et ce, jusqu'à plusieurs ordres de grandeur au-dessus de sa valeur en espace libre. Ce phénomène n'apparaît qu'en champ proche où l'amplitude des ondes évanescentes et notamment des ondes de surface, est grande. Ainsi, il est naturel et intéressant de s'interroger sur la possibilité pour que le transfert d'énergie (par rayonnement thermique) entre deux corps séparés par une distance sub-longueur d'onde soit également augmenté.

Le développement récent et soutenu des micro et nanotechnologies, pose de nouveaux problèmes – à la fois fondamentaux et technologiques – (Abramson et Tien 1999). La puissance à dissiper (par unité de volume) dans ces dispositifs est de plus en plus importante, à cause notamment de la miniaturisation des systèmes et de l'accroissement des performances. Cette puissance également de plus en plus difficile à évacuer. L'échauffement de nombreux composants électroniques ou opto-électroniques a une incidence sur leurs performances, leur fiabilité et leur durée de vie (Galtier 2002). Ainsi, la mesure et le contrôle de la température à l'échelle micrométrique ou nanométrique devient un enjeu important. Des “microscopes thermiques” ont été mis en place (Williams et Wickramasinghe 1986; Xu 1993) : ils consistent en un micro-thermocouple attaché à l'extrémité d'une pointe de microscope à force atomique. La résolution de tels instruments est de l'ordre de la centaine de nanomètres. Ainsi, il est nécessaire d'évaluer le transfert radiatif en champ proche, notamment à cause des enjeux technologiques.

Dans ce chapitre, nous étudierons le cas de deux milieux semi-infinis séparés par du vide ; les deux interfaces vide/matériau sont des interfaces planes. Dans un premier temps, nous traiterons ce problème d'un point de vue *radiométrique*, c'est-à-dire avec l'approche que l'on utilise habituellement en transferts thermiques à l'aide de la notion de *luminance*. Nous verrons qu'il est possible d'évaluer le flux net échangé entre les deux milieux lorsque ceux-ci sont à des températures différentes. Cependant, cette approche est mise en défaut en champ proche parce qu'elle ne tient pas compte de la nature ondulatoire de la lumière, ni des mécanismes de transfert d'énergie à courte portée (transfert balistique, par exemple). C'est la raison pour laquelle nous avons adopté, dans un deuxième temps, une approche électromagnétique. Le formalisme utilisé est celui qui a été développé par Rytov (1958c). Cette approche a déjà été beaucoup utilisée pour étudier le transfert radiatif entre deux plans. Cravalho *et al.* (1967) ont été les premiers à mettre en avant le rôle des ondes évanescentes dans le transfert radiatif entre deux plans. Cependant, ils ne tinrent pas compte de toutes les ondes évanescentes ; en effet, ils ont oublié celles dont le vecteur d'onde  $K$

parallèle à l'interface (*cf.* chapitre précédent) était supérieur à  $\frac{n\omega}{c}$  ( $n$  étant l'indice optique). Partant de l'approche de Rytov, Polder et van Hove (1971) puis Loomis et Marris (1994) ont évalué le transfert radiatif entre deux milieux semi-infinis<sup>1</sup>. Cependant, ils n'ont considéré que le cas des métaux. L'approche utilisée ici s'applique à tous types de matériaux, y compris les diélectriques et notamment ceux capables de supporter des polaritons de surface (partie réelle de la constante diélectrique négative). Notre apport original a été de mettre en évidence le rôle essentiel que jouent les phonon-polaritons de surface dans le transfert d'énergie. Le transfert radiatif peut être alors augmenté de plusieurs ordres de grandeurs lorsque la distance de séparation entre les deux milieux est inférieure à la longueur d'onde de Planck à la température considérée. Le cas du carbure de silicium (SiC) sera largement étudié et des comparaisons avec un autre diélectrique (le verre) et avec un métal (l'or) seront effectuées. De plus, nous montrerons que le transfert d'énergie se fait préférentiellement à certaines longueurs d'ondes et est *quasi* monochromatique. Cet effet est loin d'être négligeable car le transfert radiatif se situe au même niveau que le transfert convectif dans le gaz dans des conditions usuelles (température ambiante et pression atmosphérique). Enfin, nous avons traité le cas du silicium dopé et étudié notamment l'influence du dopage sur le transfert radiatif.

---

1. L'article original de Polder et van Hove (1971) comporte des erreurs de typographie à la suite des équations (24) et (25) : il n'y a pas d'exposant 2 dans la définition des quantités  $\exp(\kappa\delta_{\parallel})$  et  $\exp(\kappa\delta_{\perp})$ .

### 3.1 Description du système et du problème à résoudre

#### 3.1.1 Géométrie du système considéré

Le système qui sera étudié ici est décrit sur la figure 3.1. L'espace est divisé en trois sous-espaces : le premier milieu (milieu 1) qui remplit l'espace défini par  $z < 0$  est constitué d'un matériau caractérisé par une constante diélectrique  $\varepsilon_1(\omega)$  ; le deuxième milieu (milieu 2) qui remplit l'espace défini par  $z > d$  ( $d$  constante réelle) est constitué d'un matériau caractérisé par une constante diélectrique  $\varepsilon_2(\omega)$  ; enfin , le troisième (milieu 3), défini par  $0 < z < d$  est constitué par du vide. *A priori*, nous ne supposons rien sur la nature des matériaux (métaux, semi-conducteurs dopés ou non, ou matériaux polaires). Les deux milieux semi-infinis sont, en revanche, supposés être à température uniforme (non-nulle), respectivement à  $T_1$  et  $T_2$  (ceci suppose notamment que l'équilibre thermodynamique local est atteint en chacun des points des deux matériaux).

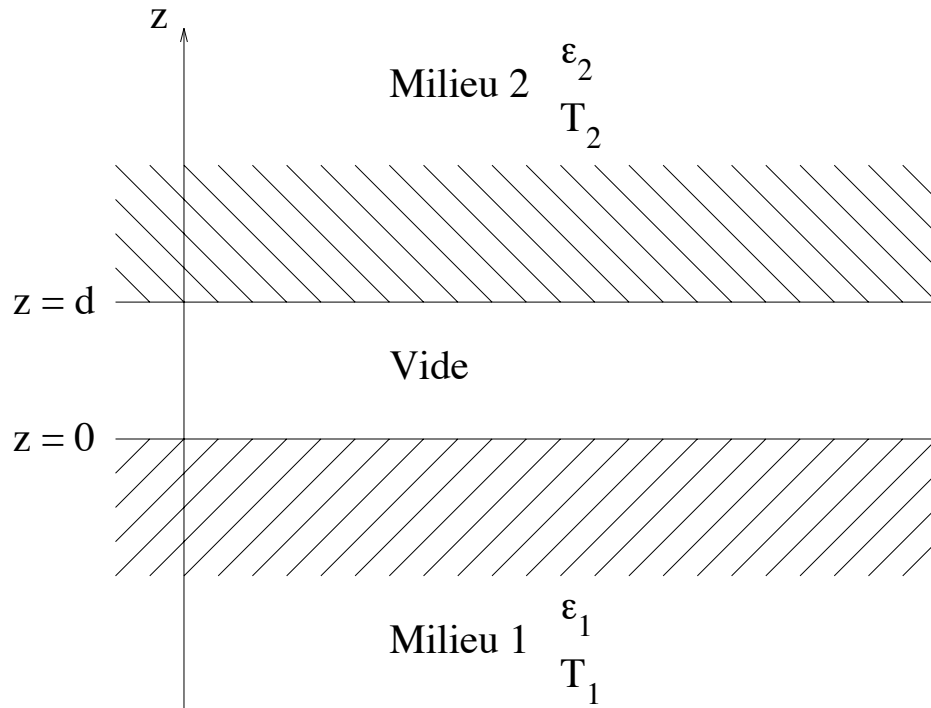


FIG. 3.1 – Géométrie du système.

#### 3.1.2 Position du problème

Les deux corps étant à température non nulle, ils échangent de l'énergie par rayonnement thermique. Il est intéressant de calculer est le *flux net* échangé entre les deux milieux semi-infinis. Par la suite, nous noterons  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  le flux d'énergie allant du milieu 1 vers le milieu 2 et  $\phi_{2 \rightarrow 1}$  le flux d'énergie allant du milieu 2 vers le milieu 1. Notons que le milieu intermédiaire, en l'occurrence le vide, n'émet ni n'absorbe aucun rayonnement. Le flux net échangé  $\Phi_{1,2}$  est défini par :

$$\Phi_{1,2} = \phi_{1 \rightarrow 2} - \phi_{2 \rightarrow 1} \quad (3.1)$$

Nous allons voir que différentes approches physiques sont possibles pour évaluer cette quantité.



## 3.2 Approche radiométrique du transfert radiatif entre les deux plans

### 3.2.1 Calcul *ab initio* du flux d'énergie échangé

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler le résultat que fournit le calcul habituel dans le cadre phénoménologique de la radiométrie (approche utilisée en transferts thermiques). Ce calcul est fondé sur l'optique géométrique et sur la notion de *rayon lumineux*.

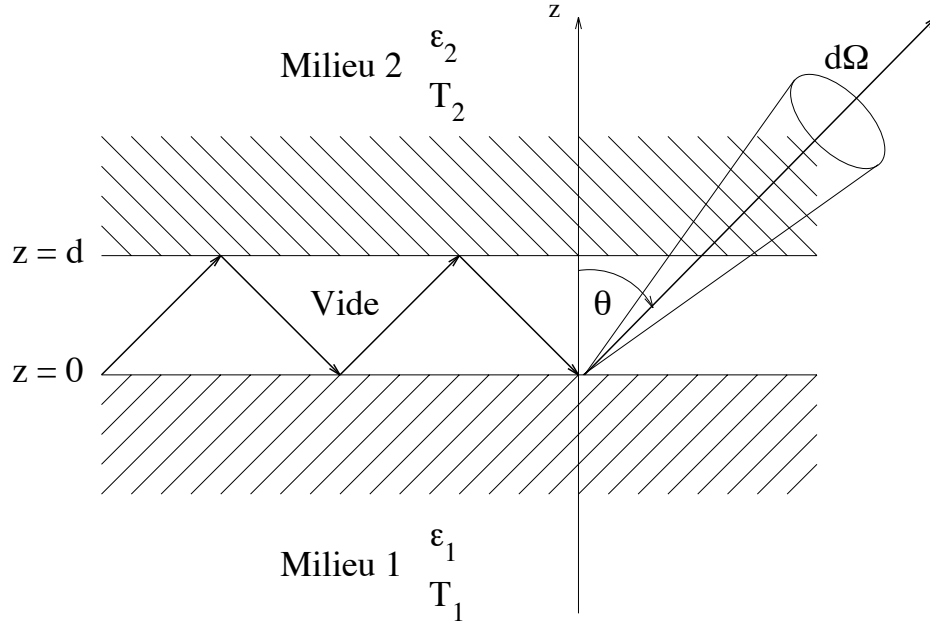


FIG. 3.2 – Réflexions multiples à l'origine du flux d'énergie dans l'angle solide  $d\Omega$ .

Ainsi, considérons la figure (3.2) : le flux élémentaire  $d\phi_{1\rightarrow 2}$  du milieu 1 au milieu 2 dans l'angle solide  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  est la somme *incohérente* des réflexions multiples :

$$d^2\phi_{1\rightarrow 2} = \epsilon'_{1\omega} (1 + \rho'_{1\omega}\rho'_{2\omega} + \rho'_{1\omega}\rho'_{2\omega}\rho'_{1\omega}\rho'_{2\omega} + \dots) \epsilon'_{2\omega} L_{\omega}^0(T_1) \cos\theta d\Omega d\omega \quad (3.2)$$

où  $\epsilon'_{1\omega}$  et  $\epsilon'_{2\omega}$  sont respectivement les émissivités monochromatiques directionnelles des milieux 1 et 2 ; de la même manière  $\rho'_{1\omega}$  et  $\rho'_{2\omega}$  sont respectivement les réflectivités monochromatiques spéculaires des milieux 1 et 2 (en effet, dans notre cas, il n'y a pas de diffusion aux interfaces).  $L_{\omega}^0(T_1)$  est la luminance monochromatique du rayonnement d'équilibre (rayonnement de corps noir, *cf.* Chap. 2) à la température  $T_1$  :

$$L_{\omega}^0(T_1) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T_1) - 1} \quad (3.3)$$

L'équation (3.2) peut alors se réécrire sous la forme d'une somme d'une série géométrique :

$$d^2\phi_{1\rightarrow 2} = \frac{\epsilon'_{1\omega}\epsilon'_{2\omega}}{1 - \rho'_{1\omega}\rho'_{2\omega}} L_{\omega}^0(T_1) \cos\theta d\Omega d\omega \quad (3.4)$$

En intégrant sur le spectre et le demi-espace supérieur (intégration sur  $2\pi$  stéradians,  $\theta$  variant

entre 0 et  $\pi/2$ ), on trouve l'expression du flux  $\phi_{1\rightarrow 2}$  rayonné par le milieu 1 et absorbé par le milieu 2 :

$$\phi_{1\rightarrow 2} = \int_{2\pi} \cos \theta \, d\Omega \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon'_{1\omega} \epsilon'_{2\omega}}{1 - \rho'_{1\omega} \rho'_{2\omega}} L_\omega^0(T_1) \quad (3.5)$$

Nous pouvons faire le même calcul pour le flux émis par le milieu 2 (dans le demi-espace inférieur) et ainsi trouver le flux net échangé par les deux milieux<sup>2</sup> :

$$\Phi_{1,2} = \int_{2\pi} \cos \theta \, d\Omega \int_0^\infty d\omega \frac{\epsilon'_{1\omega} \epsilon'_{2\omega}}{1 - \rho'_{1\omega} \rho'_{2\omega}} \times [L_\omega^0(T_1) - L_\omega^0(T_2)] \quad (3.6)$$

Ainsi,  $\Phi_{1,2} = 0$  si  $T_1 = T_2$  et  $\Phi_{1,2} \propto T^4$  pour des corps *gris* ( $\epsilon'_{1\omega}$ ,  $\epsilon'_{2\omega}$ ,  $\rho'_{1\omega}$  et  $\rho'_{2\omega}$  indépendant de la pulsation  $\omega$ ).

### 3.2.2 Critiques de l'approche radiométrique

Les calculs qui viennent d'être développés s'appuient sur l'optique géométrique et sur la notion de rayon lumineux. Aussi ne tiennent-ils pas compte la nature *ondulatoire* de la lumière et donc négligent-ils les effets d'interférence ou de diffraction. Lorsque le rayonnement n'est pas monochromatique (ce qui est le cas du rayonnement thermique), ces effets disparaissent dès que la distance  $d$  est grande par rapport à la longueur de cohérence  $l_{coh}$ , liée à la largeur spectrale du rayonnement. Le même phénomène se produit, par exemple, lorsque l'on regarde la figure d'interférences donnée par un interféromètre de Michelson éclairé par une source partiellement cohérente. Pour une différence de chemin optique grande devant  $l_{coh}$ , le contraste des franges tend vers zéro. Cet effet d'interférences peut se voir sur la figure 3.3 avec les oscillations qui se produisent entre 1 et 10  $\mu\text{m}$  environ<sup>3</sup>.

La seconde critique que nous pouvons formuler à l'égard de cette approche est qu'elle ignore totalement le rôle des ondes évanescentes. En effet, les ondes évanescentes sont des ondes qui ne se propagent pas et qui ne peuvent pas être décrites en considérant des rayons lumineux qui se réfléchissent à la surface des deux milieux. Pour appréhender physiquement la manière dont l'énergie peut être transmise par une onde évanescente, revenons à l'expérience de la réflexion totale. Nous illuminons (*cf.* Fig.3.4(a)) par exemple, un prisme avec un faisceau laser (onde plane) de longueur d'onde  $\lambda_0$  de telle sorte que l'angle  $\theta_{inc}$  d'incidence à l'interface verre/air soit supérieur à l'angle limite  $\theta_{lim} = \arcsin \left[ \frac{n_{air}(\lambda_0)}{n_{verre}(\lambda_0)} \right]$  (de l'ordre de 40 à 45° pour du verre ordinaire dans le visible). Alors, une onde évanescente apparaît dans l'air. Cette onde ne transporte aucune énergie dans l'air<sup>4</sup>.

Cependant, si nous approchons comme sur la figure 3.4(b) un second prisme du premier, cette onde peut alors être *partiellement* réfléchi et *partiellement* transmise par la seconde interface air/verre (où il n'y a jamais d'angle limite). De l'énergie est donc transmise par l'onde qui n'est évanescente qu'entre les deux prismes. Ce phénomène, appelé la "réflexion totale frustrée", est l'analogue optique (pour les photons) de l'*effet tunnel* (pour les électrons). La part d'énergie qui est transmise est une fonction exponentielle décroissante de la distance de séparation  $e$  entre les deux prismes. Aussi, le transfert n'est-il important que lorsque  $e \ll \frac{\lambda_0}{2\pi}$ . Ainsi, l'approche radiométrique ne peut rendre compte de la totalité des phénomènes physiques

2. Nous pouvons noter ici que, les matériaux étant opaques, le résultat aurait été le même si nous avions pris pour  $T_1$  et  $T_2$  des températures de surface au lieu de températures uniformes dans le volume.

3. Sur la figure  $\omega$  est fixe et c'est  $d$  qui varie : ceci revient à faire varier  $\omega$  en laissant  $d$  fixe car le terme qui compte dans la différence de chemin optique est le produit  $\omega d$

4. Ceci peut être démontré de manière rigoureuse en calculant la valeur moyenne du vecteur de Poynting dans le demi-espace inférieur.

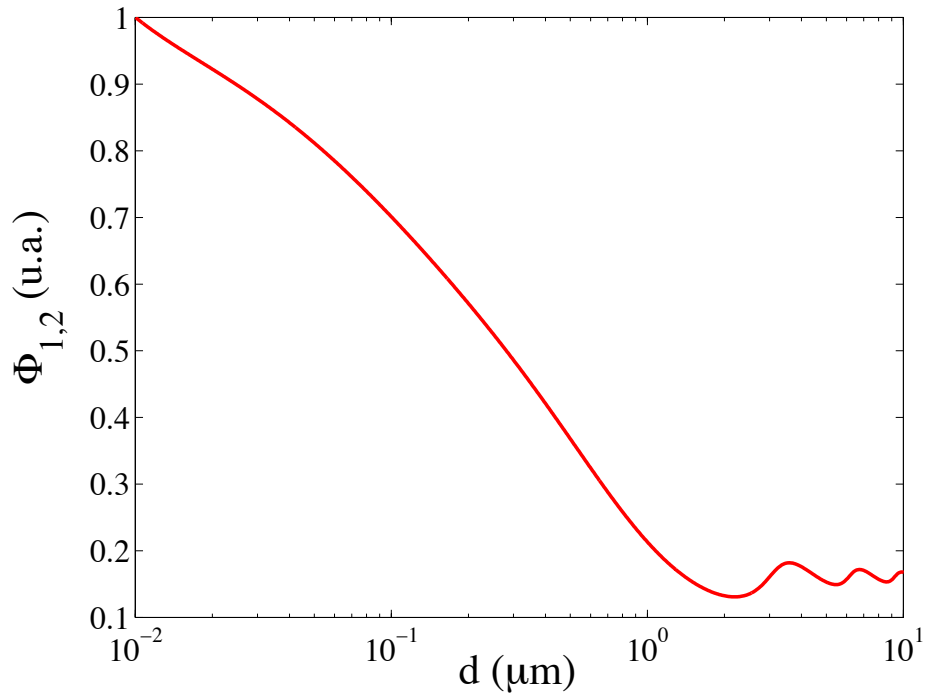


FIG. 3.3 – *Transfert radiatif entre l'or et l'arséniure de gallium (AsGa) à  $6.2 \mu\text{m}$  et à  $300 \text{ K}$  en fonction de la distance entre les deux plans.*

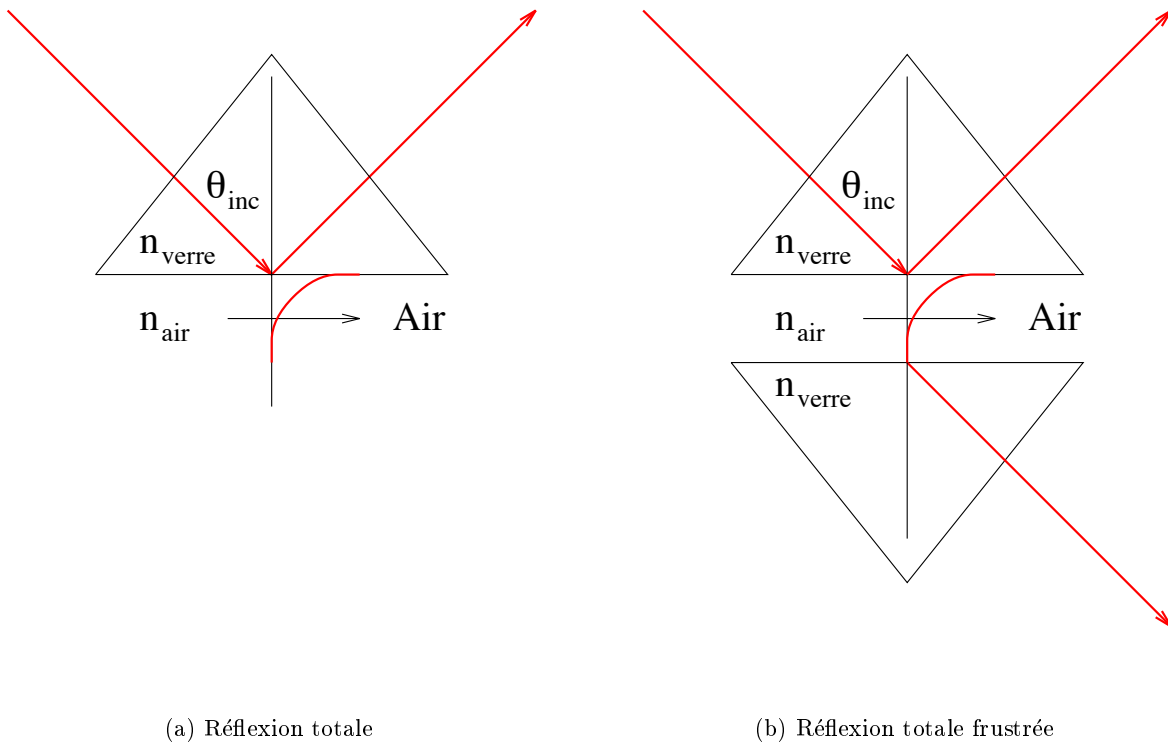


FIG. 3.4 – *Description d'une expérience de réflexion totale frustrée.*

responsables du transfert radiatif puisqu'elle ne tient pas compte des interférences ni de la contribution éventuelle des ondes évanescentes. C'est pourquoi une description plus fondamentale est nécessaire pour modéliser le rayonnement thermique, notamment lorsque les deux milieux sont séparés par des distances nano ou micrométriques.

Un deuxième point de vue peut être utilisé pour décrire ces échanges d'énergie. Plutôt que de raisonner dans l'espace réciproque, nous pouvons considérer le champ produit par un élément de volume (assimilable à un dipole) situé près de l'interface. Lorsque le second milieu s'approche, les termes en  $1/r^2$  et  $1/r^3$  du champ produit par l'élément de volume ne sont plus négligeables. Ce sont ces composantes – de nature électrostatique – qui sont responsables du transfert d'énergie en champ proche.

### 3.3 Approche électromagnétique du transfert radiatif

#### 3.3.1 Définition d'un coefficient de transfert radiatif $h^R$

Les processus physiques responsables du rayonnement thermique dans le système décrit sur la figure 3.1 sont les mêmes que ceux décrits au chapitre 2. Ainsi, les courants fluctuants dans le milieu 1 rayonnent un champ électromagnétique partout dans l'espace et notamment à l'intérieur du milieu 2, où il est absorbé par effet *Joule*. Cette énergie absorbée est la contribution du milieu 1 à l'échange d'énergie entre les deux surfaces. Un échange similaire s'effectue du milieu 2 vers le milieu 1. Une grandeur électromagnétique pertinente pour décrire cet échange d'énergie est le vecteur de *Poynting*, ou plutôt sa valeur moyenne  $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$  qui décrit le flux d'énergie qui traverse une surface par unité de temps (notons que cette grandeur est une grandeur *spectrale* que nous pouvons calculer pour chaque pulsation  $\omega$ ). Les crochets indiquent, comme précédemment, une moyenne statistique sur l'ensemble des réalisations des courants fluctuants (*cf.* Annexe B). Dans la géométrie que nous étudions ici, seule la composante  $\langle \Pi_z \rangle$  suivant la direction  $z$  (normale aux surfaces) du vecteur de Poynting est intéressante<sup>5</sup>. Par ailleurs, comme il y a invariance par translation parallèlement aux interfaces, cette composante ne dépend spatialement que de  $z$ . Ainsi, le flux rayonné par le milieu 1 et absorbé *entièrement* dans le milieu 2 à la pulsation  $\omega$  est égal à  $\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle$ . La notation  $d^+$  signifie que le vecteur de Poynting est calculé à travers une surface plane qui se situe dans le milieu 2 et que l'on fait tendre vers la limite  $z = d$ . De la même manière, le flux rayonné par le milieu 2 et absorbé *entièrement* dans le milieu 1 à la pulsation  $\omega$  est égal à  $\langle \Pi_z(0^-, \omega) \rangle$ . Signalons que chacune de ces deux quantités dépend bien évidemment de  $d$ , de  $\omega$  et des températures  $T_1$  et  $T_2$ . Aussi, noterons-nous  $P(d, \omega, T_1, T_2) = \langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle - \langle \Pi_z(0^-, \omega) \rangle$  le flux net échangé entre les deux milieux semi-infinis. En linéarisant cette grandeur par rapport à la différence de température  $T_1 - T_2$ , nous pouvons définir un *coefficient de transfert radiatif monochromatique*  $h_\omega^R(d, T_1)$  par :

$$h_\omega^R(d, T_1) = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{P(d, \omega, T_1, T_2)}{T_1 - T_2} \quad (\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}.\text{Hz}^{-1}) \quad (3.7)$$

En intégrant sur la totalité du spectre, nous pouvons définir un coefficient de transfert radiatif total  $h^R(d, T)$  pour une distance  $d$  et une température  $T$  :

$$h^R(d, T) = \int_0^\infty d\omega h_\omega^R(d, T) \quad (3.8)$$

De cette manière, si nous voulons calculer le flux net d'énergie  $\Delta\Phi$  par unité de surface échangé

---

5. Un calcul complet montrerait que les composantes suivant  $x$  et  $y$  sont nulles, à cause de l'invariance par translation dans ces deux directions.

par deux milieux semi-infinis, l'un à la température  $T$  et l'autre à la température  $T + \Delta T$  et séparés d'une distance  $d$ , nous écrivons :

$$\Delta\Phi = h^R(d, T) \Delta T \quad (3.9)$$

Ce coefficient est l'analogie du coefficient de transfert conducto-convectif  $h^{cc}$  défini en transferts thermiques (Taine et Petit 1994). Nous allons voir que ce coefficient peut être calculé de manière exacte dans le cadre de l'électrodynamique classique.

### 3.3.2 Calcul électromagnétique complet

Pour évaluer les valeurs des différents vecteurs de Poynting, nous allons utiliser la même méthode que celle adoptée au chapitre 2 pour le calcul de la densité d'énergie électromagnétique au-dessus d'une interface plane. Comme il a été vu précédemment, la quantité intéressante est le vecteur de Poynting ( $\mathbf{\Pi}$ ) à l'intérieur du milieu 2. Par définition, nous avons en un point  $\mathbf{r}$  et pour une pulsation  $\omega$  :

$$\langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 4 \times \left[ \frac{1}{2} \langle \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)] \rangle \right] \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  désignent les champs électrique et magnétique, respectivement (champs *analytiques*). Ces champs sont ceux qui sont rayonnés par les courants fluctuants. Notons, encore une fois, que cette définition du vecteur de Poynting est quatre fois plus grande que la définition usuelle; ceci traduisant le fait que nous travaillons avec des signaux analytiques.

Le calcul complet et détaillé du vecteur de Poynting cherché est fait en Annexe E (Sec. E.3) pour le rayonnement du milieu 1 vers le milieu 2 ( $\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle$ ). Le résultat final prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle &= \pi L_\omega^0(T_1) \left\{ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{(1 - |r_{31}^s|^2)(1 - |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} + \frac{(1 - |r_{31}^p|^2)(1 - |r_{32}^p|^2)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_{k_0}^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{4 \text{Im}(r_{31}^s) \text{Im}(r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_3'' d}|^2} + \frac{4 \text{Im}(r_{31}^p) \text{Im}(r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_3'' d}|^2} \right] e^{-2\gamma_3'' d} \right\} \quad (3.11) \end{aligned}$$

où :

- $L_\omega^0(T_1)$  est la luminance (en  $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}.\text{Hz}^{-1}$ ) du corps noir à la température  $T_1$  et à la pulsation  $\omega$  ;
- $k_0 = \omega/c$  (en  $\text{m}^{-1}$ ) ;
- $r_{31}^{s,p}$  et  $r_{32}^{s,p}$  sont les facteurs de Fresnel en réflexion (*cf.* Fig. 3.5) sur les interfaces vide/milieu 1 et vide/milieu 2, en polarisation  $s$  et  $p$  ;
- $\gamma_3'' = \text{Im}(\gamma_3)$ ,  $\gamma_3$  étant la composante suivant  $z$  du vecteur d'onde dans le milieu 3 (vide).

Revenons sur le dernier point. Le milieu 3 est constitué par du vide de constante diélectrique  $\varepsilon_3(\omega) = 1$  réel, donc en utilisant la relation (E.1) nous pouvons distinguer deux cas :

1.  $0 \leq K \leq k_0 \Rightarrow \gamma_3 = \text{Re}(\gamma_3) = |\gamma_3|$  : l'onde se propage *sans atténuation* ;
2.  $K > k_0 \Rightarrow \gamma_3 = i \text{Im}(\gamma_3) = i |\gamma_3|$  : l'onde est purement *évanescence* et ne se propage pas.

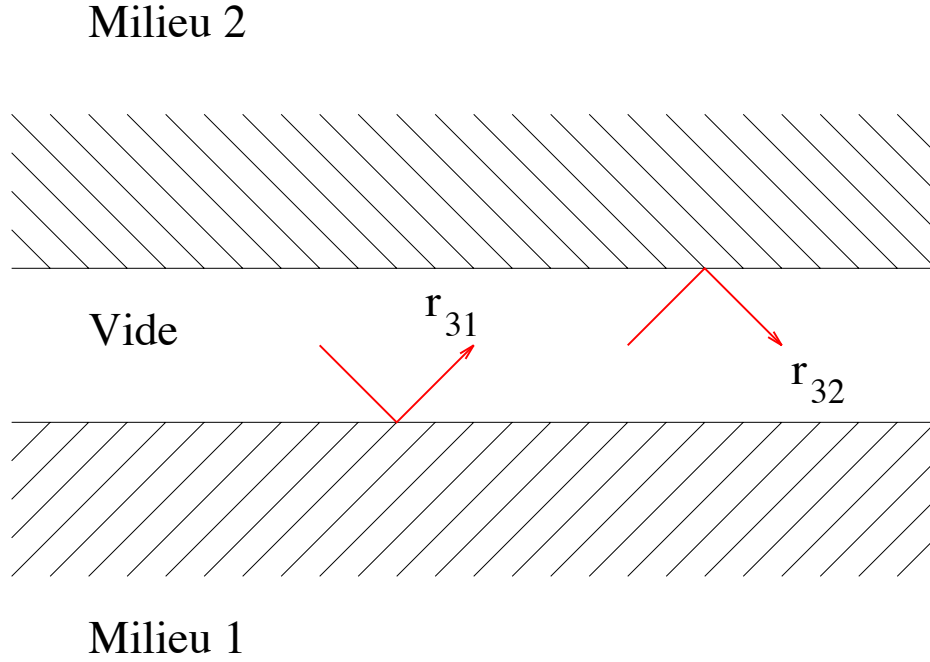


FIG. 3.5 – Facteurs de réflexion de Fresnel  $r_{31}^{s,p}$  et  $r_{32}^{s,p}$ .

Ainsi, dans l'expression de  $\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle$ , nous pouvons identifier la contribution des ondes propagatives (intégration sur  $K$  de 0 à  $k_0$ ) et la contribution des ondes évanescentes (intégration sur  $K$  de  $k_0$  à  $+\infty$ ). Nous interpréterons plus en détail ces différents termes dans la section suivante.

Nous pouvons mener les mêmes calculs afin de trouver l'expression de  $\langle \Pi_z(0^-, \omega) \rangle$  qui est la même que celle de  $\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle$  en remplaçant simplement  $L_\omega^0(T_1)$  par  $L_\omega^0(T_2)$ , les deux milieux n'étant pas *a priori* à la même température. Nous pouvons alors écrire l'expression du flux net  $P(d, \omega, T_1, T_2)$  échangé entre les deux milieux semi-infinis :

$$\begin{aligned}
 P(d, \omega, T_1, T_2) = & \left\{ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{(1 - |r_{31}^s|^2)(1 - |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} + \frac{(1 - |r_{31}^p|^2)(1 - |r_{32}^p|^2)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] \right. \\
 & + \left. \int_{k_0}^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^s) \operatorname{Im}(r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_3'' d}|^2} + \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^p) \operatorname{Im}(r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_3'' d}|^2} \right] e^{-2\gamma_3'' d} \right\} \\
 & \times [\pi L_\omega^0(T_1) - \pi L_\omega^0(T_2)] \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Nous en déduisons alors l'expression du coefficient de transfert radiatif monochromatique pour une distance  $d$  et une température  $T$  :

$$\begin{aligned}
 h_\omega^R(d, T) = & \pi \frac{\partial L_\omega^0}{\partial T}(T) \\
 & \times \left\{ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{(1 - |r_{31}^s|^2)(1 - |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} + \frac{(1 - |r_{31}^p|^2)(1 - |r_{32}^p|^2)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] \right. \\
 & + \left. \int_{k_0}^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^s) \operatorname{Im}(r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_3'' d}|^2} + \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^p) \operatorname{Im}(r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_3'' d}|^2} \right] e^{-2\gamma_3'' d} \right\} \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

6. L'expression entre accolades dans l'équation 3.11 est complètement symétrique par rapport aux indices 1 et 2.

avec :

$$\pi \frac{\partial L_{\omega}^0}{\partial T}(T) = \frac{1}{T} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right)^2} = h_{\omega}^0(T) \quad (3.14)$$

Notons que pour réaliser la linéarisation (dérivation par rapport à la température du flux net échangé), nous avons négligé la variation des constantes diélectriques avec la température. Les modèles ou les données pour les indices des matériaux sont généralement disponibles pour des températures autour de 300 K. Il faut donc rester conscient que les températures doivent être proches de cette valeur si nous voulons une bonne précision sur nos calculs. Cependant, pour avoir un ordre de grandeur pour le transfert radiatif, cette approximation est justifiée.

Le coefficient de transfert radiatif monochromatique peut être séparé en deux, faisant apparaître la contribution  $h_{\omega}^{R,prop}$  des ondes propagatives et la contribution  $h_{\omega}^{R,évan}$  des ondes évanescentes :

$$h_{\omega}^{R,prop}(d, T) = h_{\omega}^0(T) \times \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{(1 - |r_{31}^s|^2)(1 - |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} + \frac{(1 - |r_{31}^p|^2)(1 - |r_{32}^p|^2)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] \quad (3.15)$$

$$h_{\omega}^{R,évan}(d, T) = h_{\omega}^0(T) \times \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^s) \operatorname{Im}(r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_3'' d}|^2} + \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^p) \operatorname{Im}(r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_3'' d}|^2} \right] e^{-2\gamma_3'' d} \quad (3.16)$$

Éq. 3.15 et Éq. 3.16 Nous allons comparer maintenant cette expression avec celle que nous avons obtenu en utilisant une approche radiométrique.

### 3.3.3 Comparaison avec l'approche radiométrique

Rappelons ici l'expression du flux net échangé entre les deux milieux que nous avons trouvée en utilisant une approche radiométrique :

$$\Phi_{1,2}^{radiométrique} = \int_{2\pi} \cos \theta d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \frac{\epsilon'_{1\omega} \epsilon'_{2\omega}}{1 - \rho'_{1\omega} \rho'_{2\omega}} \times [L_{\omega}^0(T_1) - L_{\omega}^0(T_2)] \quad (3.17)$$

et considérons la contribution des ondes propagatives que nous avons déterminée auparavant. Tout d'abord, remarquons que pour les ondes propagatives, nous pouvons définir une *direction de propagation*. En effet, pour chaque onde plane (dans le vide) de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = (\mathbf{K}, \gamma_3)$ , l'angle  $\theta$  (cf. Fig. 3.2) est tel que:  $\sin \theta = \frac{K}{k_0}$ . Ainsi, nous avons :

$$\frac{K dK}{k_0^2} = \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \times \cos \theta d\Omega \quad (3.18)$$

$d\Omega$  étant l'angle solide élémentaire dans la direction  $\theta$ . L'intégration est alors réalisée sur  $\theta$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

La conservation de l'énergie aux interfaces nous permet d'écrire :

$$1 - |r_{31}^{s,p}|^2 = 1 - |r_{13}^{s,p}|^2 = 1 - R_{13}^{s,p} = T_{13}^{s,p} \quad (3.19a)$$

$$1 - |r_{32}^{s,p}|^2 = 1 - |r_{23}^{s,p}|^2 = 1 - R_{23}^{s,p} = T_{23}^{s,p} \quad (3.19b)$$

où  $R_{13}^{s,p}$  et  $R_{23}^{s,p}$  sont les facteurs de réflexion de Fresnel en énergie à l'interface milieu 1/vide et milieu 2/vide en polarisation  $s$  (respectivement en polarisation  $p$ ). De plus, comme les deux milieux sont absorbants et semi-infinis, toute l'énergie transmise au niveau des interfaces est absorbée dans

le milieu (les milieux étant homogènes il n'y a pas de diffusion en volume). Aussi, avec la seconde loi de Kirchoff, pouvons-nous écrire :

$$T_{13}^{s,p} = \epsilon_1^{s,p} \quad (3.20a)$$

$$T_{23}^{s,p} = \epsilon_2^{s,p} \quad (3.20b)$$

où  $\epsilon_1^{s,p}$  et  $\epsilon_2^{s,p}$  étant les émissivités du milieu 1 et du milieu 2 en polarisation  $s$  (respectivement en polarisation  $p$ ).

Par ailleurs, l'approche radiométrique est fondée sur la notion de rayon lumineux et donc sur l'optique géométrique. Pour retrouver cela avec l'approche électromagnétique, il faut considérer la limite des courtes longueurs d'onde (grandes pulsations). En pratique, ceci revient à considérer que le terme de déphasage  $e^{2i\gamma_3 d}$  dans l'expression du flux radiatif oscille très rapidement par rapport aux facteurs de Fresnel  $r_{31}^{s,p}$  et  $r_{32}^{s,p}$ . Alors, avec cette hypothèse, nous pouvons montrer que la valeur moyenne de

$$\frac{1}{|1 - r_{31}^{s,p} r_{32}^{s,p} e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (3.21)$$

sur un intervalle de pulsation  $\Delta\omega$  tel que  $(\Delta\omega)d \gg 1$  vaut

$$\frac{1}{1 - |r_{31}^{s,p}|^2 |r_{32}^{s,p}|^2} \quad (3.22)$$

Ainsi, l'expression du flux net échangé  $\Phi_{1,2}^{\text{électromagnétique}}$ , dérivé de l'approche électromagnétique, se réduit à :

$$\Phi_{1,2}^{\text{électromagnétique}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \int_{2\pi} \cos\theta d\Omega \left[ \frac{\epsilon_1^s \epsilon_2^s}{1 - r_{31}^s r_{32}^s} + \frac{\epsilon_1^p \epsilon_2^p}{1 - r_{31}^p r_{32}^p} \right] \times [L_\omega^0(T_1) - L_\omega^0(T_2)] \quad (3.23)$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  provient du fait qu'en électromagnétisme nous distinguons les deux polarisations  $s$  et  $p$  alors que l'approche radiométrique les ignore. Ainsi, nous obtenons formellement le même résultat pour les ondes propagatives que celui donné par l'approche radiométrique *si nous négligeons les effets d'interférences*. Nous retrouvons donc ici l'un des intérêts d'utiliser une approche électromagnétique pour calculer le transfert radiatif entre les deux milieux : on tient compte de la polarisation et des interférences.

D'après ce que nous venons de voir, l'approche radiométrique ne prédit aucunement la contribution des ondes évanescentes au transfert d'énergie comme le fait apparaître la relation (3.13). Ainsi, cette contribution s'ajoute à celle des ondes propagatives. Nous allons voir maintenant que pour des matériaux supportant des ondes de surface, cette contribution peut être très importante et même *prédominante* lorsque la distance entre les deux milieux est inférieure à la longueur d'onde.

### 3.4 Rôle des ondes de surface dans le transfert radiatif

Dans cette section, nous traiterons le cas où les deux milieux semi-infinis sont de même nature : carbure de silicium, verre ou or. La constante diélectrique commune sera notée  $\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) = \epsilon_2(\omega)$ . Nous rappelons que le calcul de cette constante diélectrique a été discuté en détail dans l'annexe A pour les différents matériaux étudiés. Comme les milieux 1 et 2 sont identiques, nous avons  $r_{31}^{s,p} = r_{32}^{s,p}$  dans les différentes formules précédentes.



### 3.4.1 Transfert radiatif entre deux plans de SiC

Nous nous plaçons ici autour d'une température  $T$  de 300 K et nous étudions le coefficient de transfert radiatif total  $h^R(d)$  en fonction de la distance de séparation  $d$  entre les deux milieux<sup>7</sup>. Le résultat est présenté sur la figure 3.6 (en échelle *log-log*) :

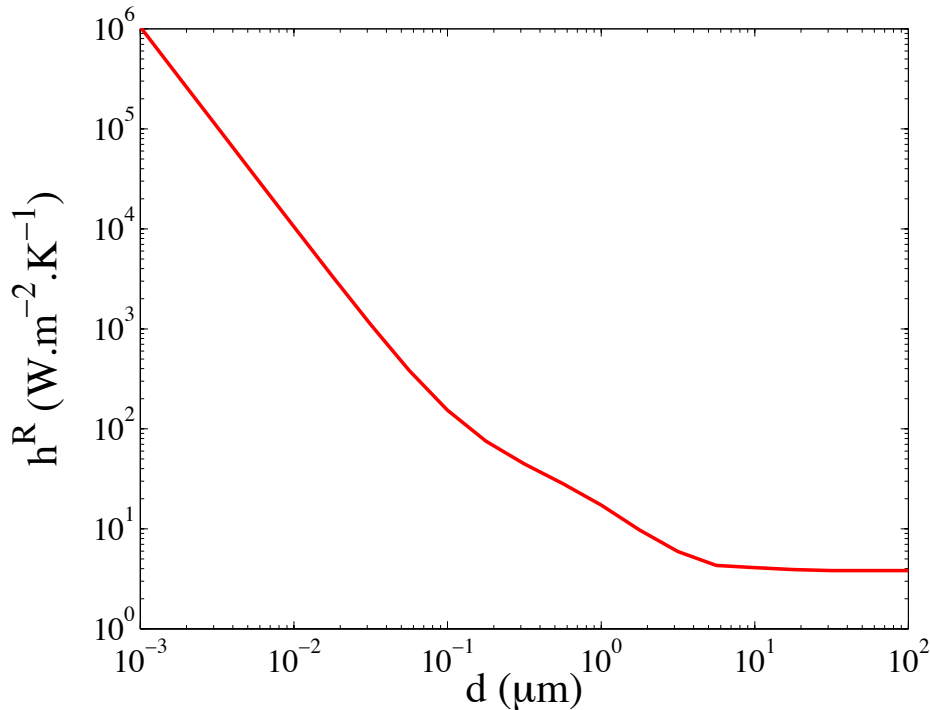


FIG. 3.6 – Coefficient de transfert radiatif total à 300 K entre deux milieux semi-infinis de SiC en fonction de la distance  $d$  de séparation.

Plusieurs choses sont à remarquer sur la figure. La première est l'augmentation du transfert radiatif pour  $d \ll 10 \mu\text{m}$  (correspondant au maximum d'émission du corps noir à la température de 300 K). En étudiant la pente de la courbe pour les courtes distances, nous pouvons en déduire que le coefficient de transfert radiatif diverge comme  $1/d^2$ . Pour  $d = 0.1 \mu\text{m}$ ,  $h^R \approx 20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$  et pour  $d = 1 \text{ nm}$ ,  $h^R \approx 10^6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ . Par ailleurs, nous constatons que pour  $d > 10 \mu\text{m}$ , le coefficient de transfert radiatif tend vers une limite qui ne dépend plus de  $d$  : c'est la limite donnée par l'approche radiométrique, pour laquelle le paramètre  $d$  n'apparaît pas. Cette valeur est – ici – d'environ  $4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ . La valeur donnée par une approche basique de transferts thermiques, où l'on prend souvent  $h^R = 4\bar{\epsilon}\sigma T^3$  pour un corps *gris* d'émissivité  $\bar{\epsilon}$ , est d'environ  $0.6$  ( $\bar{\epsilon} = 0.1$ ) à  $6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$  ( $\bar{\epsilon} = 1$ ) à 300 K. Ainsi, pour  $d = 1 \text{ nm}$ , le coefficient de transfert radiatif calculé est  $2.5 \times 10^5$  fois plus grand que la valeur prédite par la théorie radiométrique. Nous comprenons donc la nécessité d'utiliser une approche électromagnétique pour modéliser le transfert radiatif à courtes distances. Pour mieux comprendre les phénomènes physiques sous-jacents, examinons la figure 3.7. Celle-ci représente la contribution des différentes ondes en fonction de leur type : propagative (notée prop.) ou évanescente (notée évan.) ; et de leur polarisation :  $s$  ou  $p$ . La principale remarque à faire est qu'aux distances sub-longueur d'onde, la contribution prédominante au transfert radiatif entre deux milieux semi-infinis de SiC est celle qui correspond aux ondes évanescentes  $p$ . En effet, nous pouvons voir sur la figure 3.7, que pour  $d < 0.1 \mu\text{m}$ , la courbe correspondant aux ondes évanescentes  $p$  se confond avec celle correspondant à la contribution de toutes les ondes. Aussi, sommes-nous tenter de penser que cette exaltation du transfert radiatif à courtes distances

7. Si l'on veut évaluer le flux net d'énergie échangée, il faut imaginer que  $T_1 = 301 \text{ K}$  et  $T_2 = 300 \text{ K}$  ( $\Delta T = 1 \text{ K}$ ), si bien que  $\Delta\Phi = h^R$ .

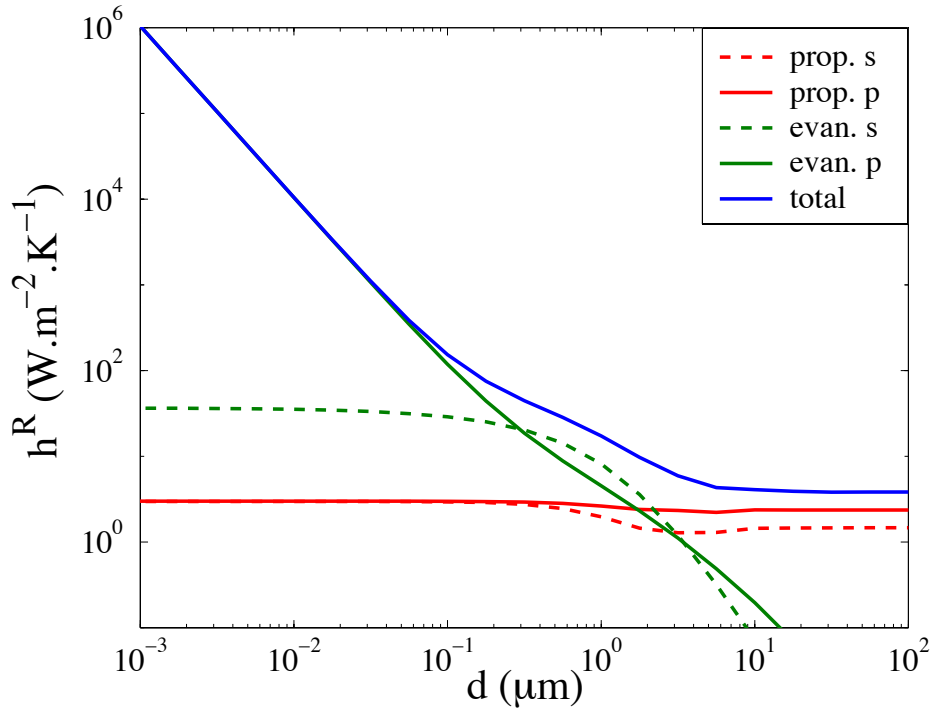


FIG. 3.7 – Coefficient de transfert radiatif total à 300 K entre deux milieux semi-infinis de SiC en fonction de la distance  $d$  de séparation : contributions des différentes ondes.

est due aux ondes de surface et, plus précisément ici, aux phonon-polaritons de surface. Pour confirmer cette hypothèse, nous avons tracé le coefficient de transfert radiatif *monochromatique* à 300 K dans le cas de deux milieux semi-infinis de SiC. Le résultat est représenté sur la figure 3.8 en échelle *log-lin*. Un pic très important apparaît à la pulsation  $\omega_{pic} = 178.6 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$  qui correspond exactement à la pulsation de résonance du phonon-polariton de surface à l'interface SiC/vide (*cf.* Sec. 1.4.1). De plus, d'après cette même figure, nous voyons que le transfert radiatif entre les deux plans est *quasi* monochromatique à la pulsation de résonance du phonon-polariton de surface. La figure 3.9(a) montre un zoom de la courbe précédente autour de la pulsation de résonance du phonon-polariton. Le résultat obtenu avec un calcul exact est donc complètement différent du calcul prédit par la théorie radiométrique. En effet, le carbure de silicium étant un relativement bon corps noir dans l'infrarouge (réflectivité très faible, sauf autour de la pulsation de résonance), son spectre d'émission devrait ressembler plutôt à celui d'un corps noir (*cf.* Fig. 2.18). Cependant, si nous examinons la figure 3.9(b) représentant le coefficient de transfert radiatif monochromatique en échelle *log-log*, nous remarquons d'abord que la courbe ressemble à la courbe de Planck et ensuite que le pic de résonance vient se superposer à cette courbe à peu près au niveau du maximum de la courbe de Planck à 300 K.

Par ailleurs, l'exaltation du transfert radiatif étant due aux ondes de surface, c'est-à-dire à des ondes évanescentes (confinées sur les interfaces), nous nous attendons à ce qu'elle soit plus faible lorsque la distance  $d$  augmente (c'est bien évidemment ce que nous suggère la figure 3.6). En effet, si nous regardons la figure 3.10, nous remarquons que le pic de résonance est beaucoup plus faible pour une distance de  $1 \mu\text{m}$  que pour une distance de  $1 \text{ nm}$  : il y a environ 4 ordres de grandeurs de différence.

Les oscillations qui apparaissent sur la courbe (*cf.* Fig. 3.10) correspondant à  $d = 100 \mu\text{m}$  sont dues aux interférences ayant lieu dans l'intervalle d'air. Celles-ci sont visibles car à cette distance la contribution majeure au transfert radiatif provient des ondes propagatives et que les ondes évanescentes (pour lesquelles il n'y a pas d'interférences) sont négligeables.

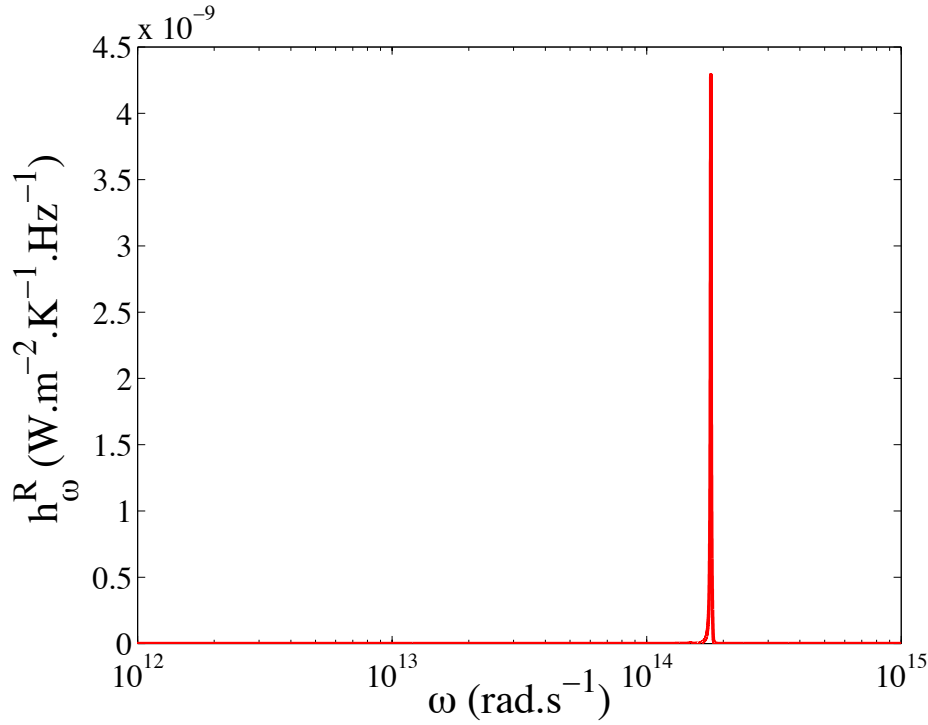


FIG. 3.8 – Coefficient de transfert radiatif monochromatique à 300 K entre deux milieux semi-infinis de SiC séparés par une distance  $d = 10$  nm.

### 3.4.2 Comparaison avec d'autres matériaux

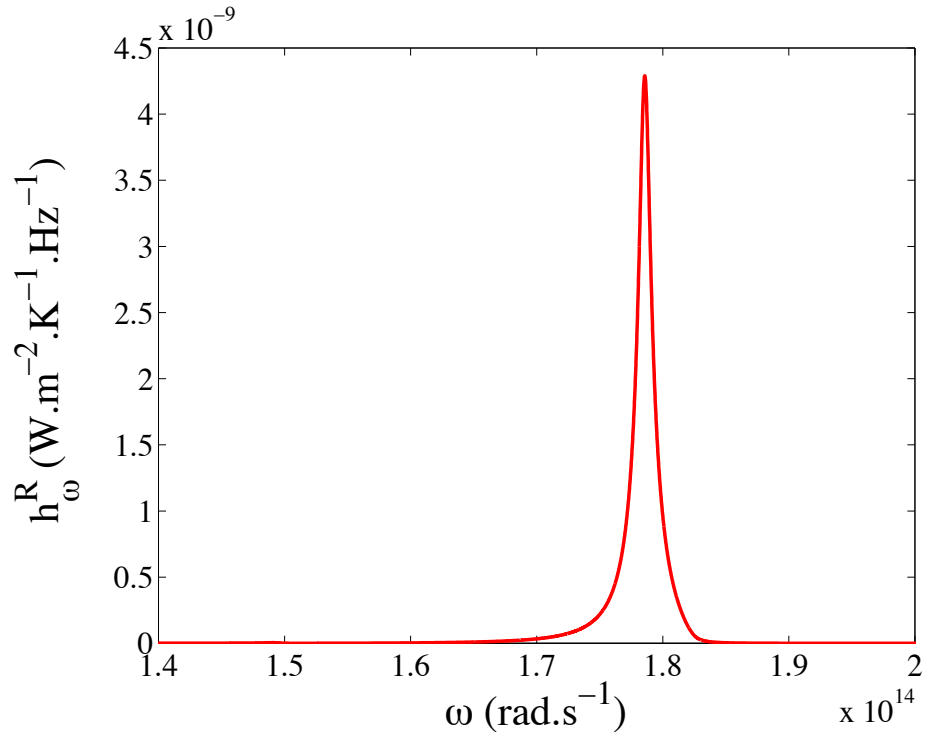
#### Cas d'un matériau polaire : le verre

Après le carbure de silicium, nous nous sommes intéressés au verre dont la constante diélectrique a été tabulée par Philipp (1985) entre 0.1 et 100  $\mu\text{m}$ . Ce matériau est également connu pour supporter des phonon-polaritons de surface dans l'infrarouge, autour de 7 et 20  $\mu\text{m}$ . Nous avons donc calculé le coefficient de transfert radiatif pour deux milieux semi-infinis de verre en fonction de la distance. Les résultats sont représentés sur la figure 3.11 avec ceux obtenus précédemment pour le SiC. L'effet d'exaltation du transfert radiatif en champ proche est aussi important pour le verre que pour le SiC. Nous retrouvons également la divergence en  $1/d^2$  pour les distances sub-longueur d'onde. La valeur radiométrique est, à peu près, la même que celle obtenue pour le SiC. En effet, le verre, comme le SiC, est relativement un bon corps noir dans l'infrarouge. Nous voyons sur la figure 3.12 que, pour le verre, ce sont également les phonon-polaritons dans l'infrarouge qui donnent la contribution majeure au coefficient de transfert radiatif. Ainsi, l'échange d'énergie entre les deux milieux en verre se fait essentiellement aux deux pulsations de résonance des polaritons :  $9.2 \times 10^{13}$   $\text{rad.s}^{-1}$  (20.47  $\mu\text{m}$ ) et  $2.2 \times 10^{14}$   $\text{rad.s}^{-1}$  (8.56  $\mu\text{m}$ ).

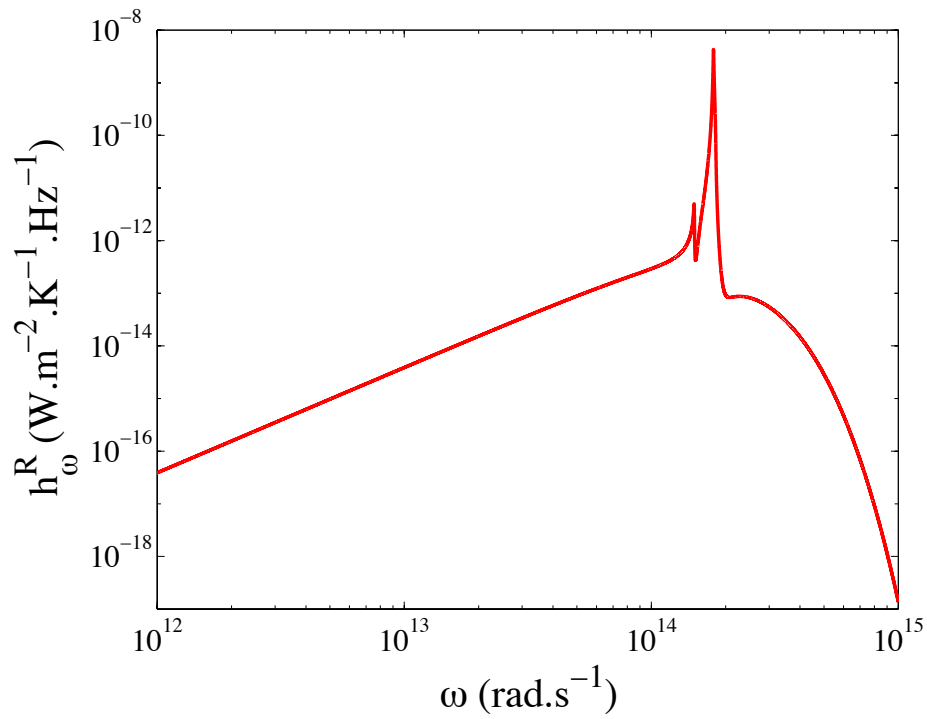
#### Cas d'un métal : l'or

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas d'un métal, en l'occurrence l'or, qui supporte des ondes de surface (du type plasmon-polariton) dans l'ultraviolet. Pour l'or, la pulsation de résonance se situe vers  $4.79 \times 10^{15}$   $\text{rad.s}^{-1}$  ce qui correspond à une longueur d'onde de 0.393  $\mu\text{m}$  (limite du spectre visible). Nous avons donc calculé le coefficient de transfert radiatif entre deux milieux semi-infinis d'or et représenté le résultat sur la figure 3.13

Nous remarquons qu'il y a augmentation du transfert radiatif à courte distance pour  $d < 0.3 \mu\text{m}$ . Cependant, l'exaltation est moins importante puisqu'à 10 nm,  $h^R = 1000 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , c'est-à-dire un ordre de grandeur inférieur que pour le SiC ou le verre; cette valeur est quand



(a) Vue de détail autour du pic de résonance (excitation du phonon-polariton de surface).



(b) Échelle *log-log*

FIG. 3.9 – Coefficient de transfert radiatif monochromatique à 300 K entre deux milieux semi-infinis de SiC séparés par une distance  $d = 10$  nm.

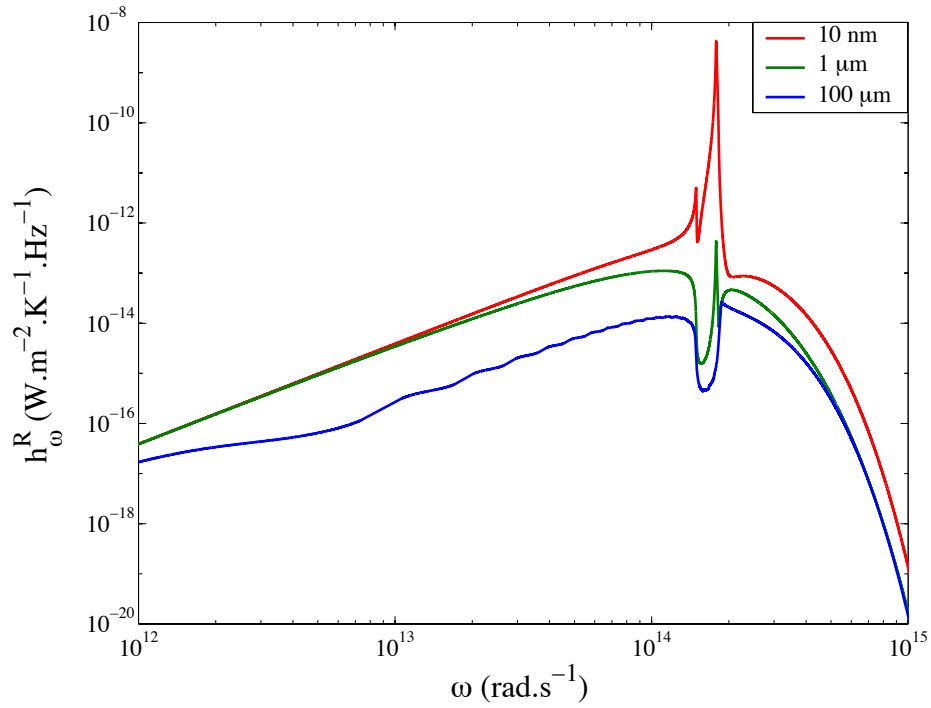


FIG. 3.10 – Coefficient de transfert radiatif monochromatique à 300 K entre deux milieux semi-infinis de SiC pour  $d = 10$  nm (rouge),  $d = 1$   $\mu\text{m}$  (vert) et  $d = 100$   $\mu\text{m}$  (bleu).

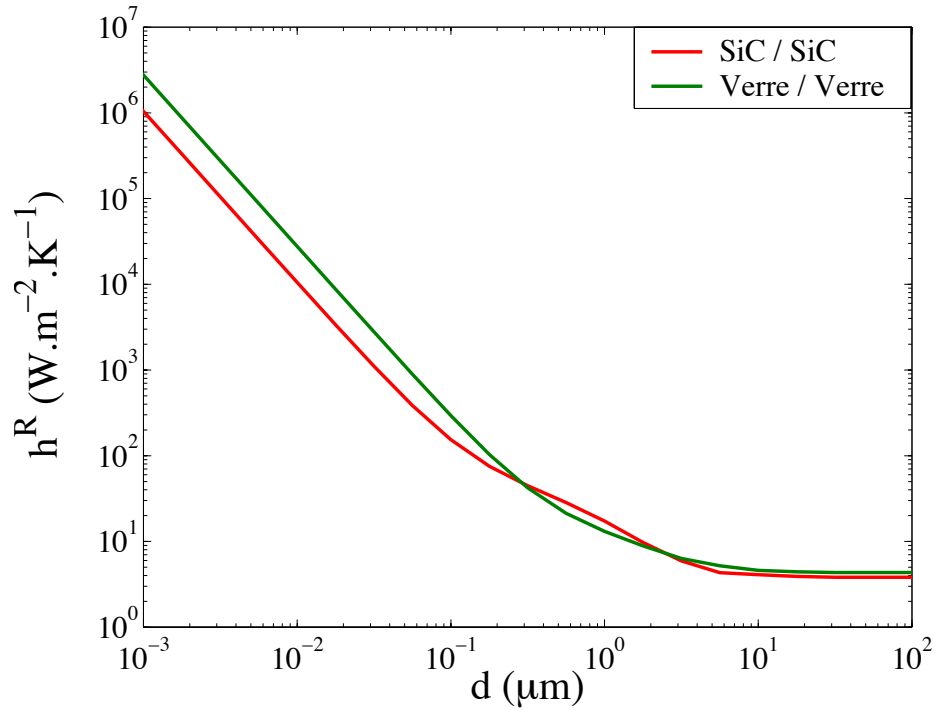


FIG. 3.11 – Coefficient de transfert radiatif total à 300 K entre deux milieux semi-infinis en fonction de la distance  $d$  de séparation : comparaison entre le SiC et le verre.

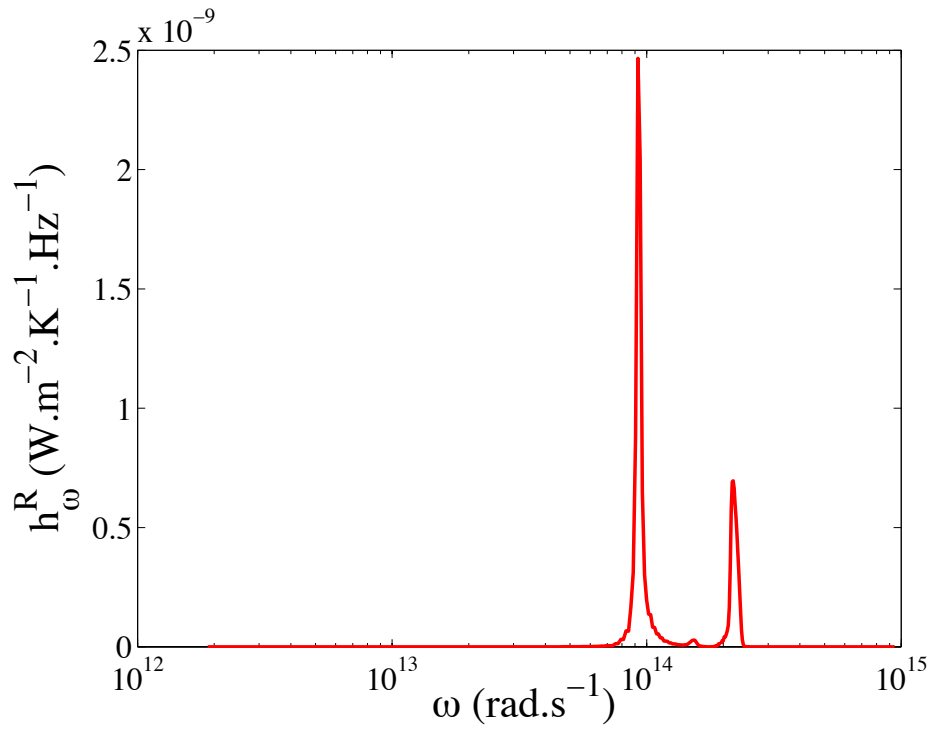


FIG. 3.12 – Coefficient de transfert radiatif monochromatique à 300 K entre deux milieux semi-infinis de verre séparés par une distance  $d = 10$  nm.

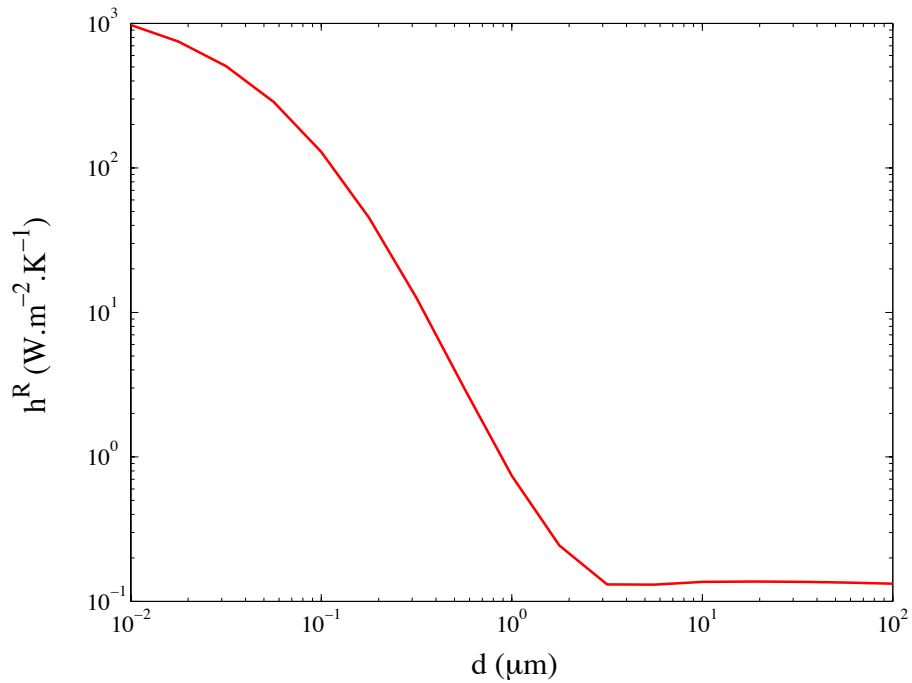


FIG. 3.13 – Coefficient de transfert radiatif total à 300 K entre deux milieux semi-infinis d'or en fonction de la distance  $d$  de séparation.

même 100 fois supérieure à la valeur radiométrique du transfert radiatif. Ceci peut s'expliquer très simplement en examinant le spectre du coefficient de transfert radiatif, par exemple pour une distance de  $d = 10$  nm (*cf.* Fig. 3.14). En effet, nous voyons que la courbe ressemble à une courbe de Planck mais qu'il n'y a aucun pic prononcé. Ceci est normal car le pic de résonance du plasmon-polariton de surface se trouve à très haute fréquence, là où le rayonnement thermique est très faible (*cf.* Fig. 2.2(a)). Ainsi, l'augmentation du transfert radiatif à courte distance n'est pas due aux ondes de surface mais au fait qu'une partie de l'énergie échangée entre les deux milieux se fait *via* les ondes évanescentes.

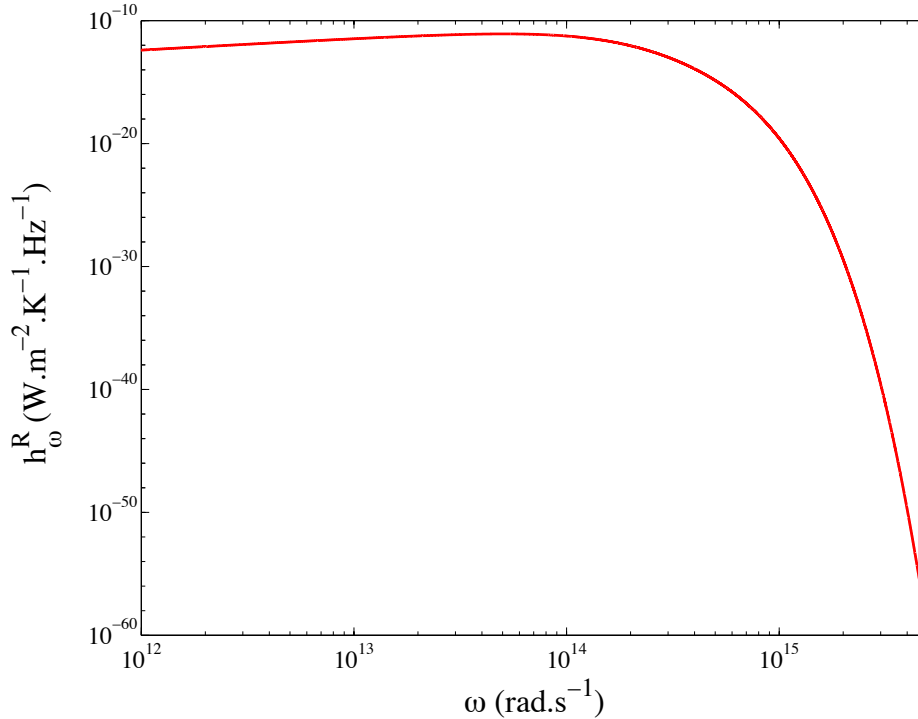


FIG. 3.14 – Coefficient de transfert radiatif monochromatique à 300 K entre deux milieux semi-infinis d'or séparés par une distance  $d = 10$  nm (échelle log-log).

### 3.4.3 Développement asymptotique de $h^R(\omega)$

En partant de l'expression (3.13), nous pouvons réaliser un développement asymptotique du coefficient de transfert radiatif monochromatique autour de la pulsation de résonance du polariton de surface<sup>8</sup>. Le résultat obtenu peut se mettre sous la forme suivante :

$$h_{\omega}^R = \pi \frac{\partial L_{\omega}^0(\omega, T)}{\partial T} \times \frac{4}{k_0^2 d^2} \frac{\varepsilon_1''}{|\varepsilon_1 + 1|^2} \frac{\varepsilon_2''}{|\varepsilon_2 + 1|^2} \quad (3.24)$$

Nous voyons donc que le pic de transfert radiatif correspond à la résonance  $Re[\varepsilon_1] = Re[\varepsilon_2] = -1$ , c'est-à-dire à l'excitation d'un polariton de surface. Par ailleurs, l'amplitude du pic dépend de la distance de séparation entre les deux plans  $d$  comme  $1/d^2$ . Ainsi, comme la contribution majeure (à courte distance) au transfert radiatif est constituée par le pic de résonance *et* comme celui-ci a une amplitude variant comme  $1/d^2$ , le coefficient de transfert radiatif total diverge comme  $1/d^2$  à courte distance.

8. En fait, dans le développement, nous ne considérons que la contribution des ondes évanescentes  $p$ , dominante aux courtes distances.

### 3.4.4 Comparaison avec la conduction

À présent, considérons que l'espace séparant les deux milieux semi-infinis n'est plus vide mais rempli par un gaz à pression atmosphérique ( $P \approx 10^5$  Pa) et température ambiante ( $T \approx 300$  K). Tout d'abord, remarquons que pour cette configuration et pour la plupart des matériaux, le transfert d'énergie par conduction dans l'air est *souvent* supérieur au transfert d'énergie par rayonnement (Xu 1993). Dans le cas où la distance  $d$  entre les deux milieux est inférieur ou égal à  $1 \mu\text{m}$ , le transfert d'énergie se fait par transport balistique des molécules d'un milieu vers l'autre car le libre parcours moyen est très supérieur à la distance  $d$ . À température ambiante, à pression atmosphérique et à courtes distances (pour que l'on puisse faire l'hypothèse d'un transport balistique entre les deux parois), un modèle (Coruccini 1959) évalue le coefficient de transfert conducto-convectif (lorsque la différence de température entre les deux milieux est faible) :

$$h^{cc} = 5.75 \cdot 10^{-5} \times \left( \frac{c_p/c_v + 1}{c_p/c_v - 1} \right) a_0 \frac{p}{\sqrt{MT}} \quad [\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}] \quad (3.25)$$

où  $c_p$  et  $c_v$  sont les chaleurs spécifiques du gaz respectivement à pression et à volume constant ;  $p$  est la pression en Pascal ;  $a_0$  est un "facteur d'accomodation" des surfaces et  $M$  est la masse molaire du gaz (en  $\text{g.mol}^{-1}$ ). Ce facteur d'accomodation est un paramètre *empirique* permettant de rendre compte des valeurs mesurées expérimentalement. Le tableau 3.1 présente quelques valeurs de facteurs d'accomodation tirées de Coruccini (1959).

Température (K)	Hélium	Hydrogène	Air
300	0.3	0.3	0.8 – 0.9
80	0.4	0.5	1
20	0.6	1	-

TAB. 3.1 – Facteurs d'accomodation de différents gaz à différentes températures.

À température ambiante pour l'air,  $h^{cc}$  est de l'ordre de  $1$  à  $10 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . Pour la plupart des matériaux,  $h^R$  reste bien inférieur à  $h^{cc}$ . Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, pour le SiC,  $h^R$  vaut  $4 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  pour  $d = 5 \text{ nm}$ . Ainsi, pour ce matériau (et pour le verre aussi), négliger l'échange d'énergie par rayonnement à courtes distances, revient à oublier 50% du flux échangé entre les deux milieux.

## 3.5 Cas du silicium dopé

Un matériau intéressant et très utilisé dans les micro et nanotechnologies (pour la réalisation de transistors notamment) est le silicium et notamment le silicium dopé . Rappelons que le silicium est un atome *tétravalent* qui cristallise dans une structure *diamant*. Dans le silicium, certains de ces atomes sont remplacés par des donneurs d'électrons (dopage  $n$ ) comme l'arsenic (As) ou par des accepteurs d'électrons (dopage  $p$ ) comme le bore (B). Ce sont ces "impuretés" (ou les électrons libres apportés par celles-ci) qui font que le silicium dopé est susceptible de supporter des plasmon-polaritons de surface dans le proche infrarouge. La pulsation de résonance se situe dans le proche infrarouge et sa position précise dépend de la nature du dopage ( $n$  ou  $p$ ) et de la quantité de dopants (concentration en  $\text{cm}^{-3}$ ). Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier le transfert radiatif entre deux milieux semi-infinis de silicium dopé pour voir si, comme pour le SiC, des effets de transfert exalté apparaissent en champ proche. Nous rappelons au lecteur que le calcul de la constante diélectrique du silicium dopé en fonction du type de dopage et de la quantité de dopants est expliqué en détail dans l'annexe A.



### 3.5.1 Coefficient de transfert radiatif

Nous étudions ici le coefficient de transfert radiatif total à la température de 300 K entre deux milieux semi-infinis de silicium. Le dopage est de type  $n$  et la concentration en dopants est de  $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Le résultat de la simulation numérique est représenté sur la figure 3.15.

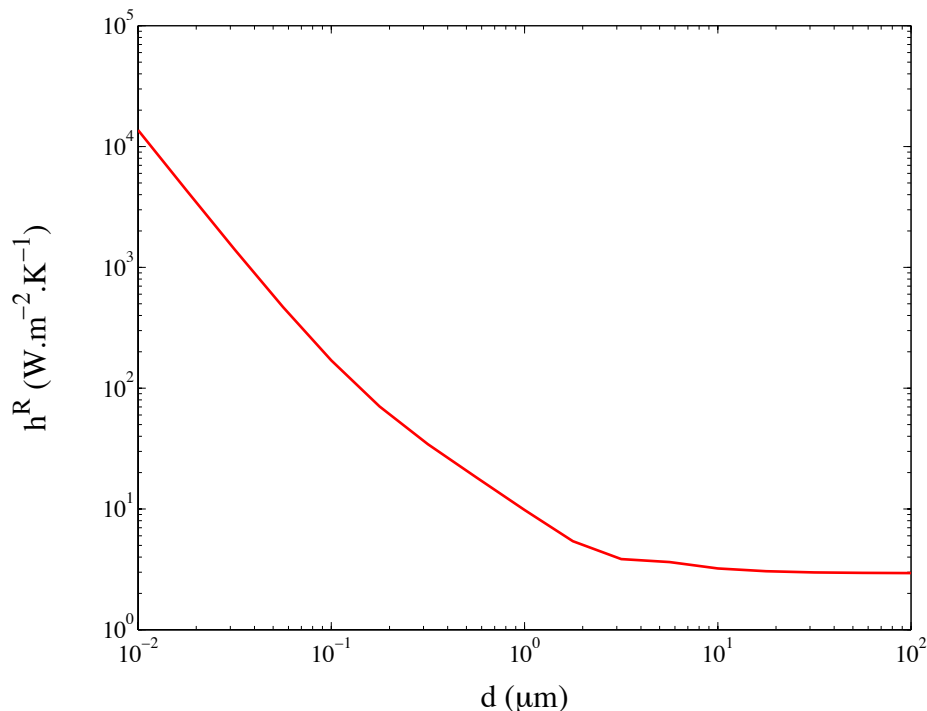


FIG. 3.15 – Coefficient de transfert radiatif total à 300 K entre deux milieux semi-infinis de Si dopé (dopage  $n$  à  $3 \times 10^{19}$  dopants par  $\text{cm}^3$ ) en fonction de la distance  $d$  de séparation.

Comme pour les matériaux précédemment étudiés (SiC, verre), nous remarquons qu'effectivement le transfert radiatif à courtes distances, pour  $d < 1 \mu\text{m}$ , diverge comme  $1/d^2$ . La valeur de  $h^R$  atteint  $1.3 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  pour une distance de séparation entre les deux plans de 10 nm. Si nous regardons maintenant le coefficient de transfert radiatif monochromatique pour une distance  $d$  de 10 nm (*cf.* Fig. 3.16), nous voyons également qu'il y a un pic à la pulsation de  $1.52 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$  c'est-à-dire pour une longueur d'onde de  $12.43 \mu\text{m}$ . La pulsation de résonance ne se situe donc pas très loin du maximum de la courbe de Planck (qui, lui, est vers  $9.66 \mu\text{m}$ ) ; c'est pour cette raison que l'exaltation du transfert radiatif est aussi importante (contrairement au cas de l'or où le plasmon-polariton apparaît dans l'ultraviolet). Nous avons vérifié bien évidemment que ce pic était lié aux ondes évanescentes  $p$ , signature des polaritons de surface. En revanche, par rapport au SiC, au verre ou à l'or, la largeur du pic de résonance est beaucoup plus grande : ceci est normal car la largeur du pic d'absorption dans le silicium est plus large (elle est liée à la partie imaginaire de la constante diélectrique).

### 3.5.2 Influence du dopage sur le transfert radiatif

Nous étudions ici l'influence du dopage sur l'exaltation du transfert radiatif en champ proche. Il y a deux paramètres à étudier : la nature du dopage ( $n$  ou  $p$ ) et la quantité d'impuretés introduite dans le cristal. La figure 3.17 présente ainsi le coefficient de transfert radiatif total entre deux milieux semi-infinis séparés par une distance  $d = 10 \text{ nm}$  de silicium dopé dans le cas d'un dopage  $n$  et d'un dopage  $p$ , pour des concentrations en impuretés allant de  $10^{18}$  à  $10^{21} \text{ cm}^{-3}$ .

Nous remarquons que l'exaltation la plus importante est obtenu pour un dopage de type  $n$  et une concentration en impuretés de  $3 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  ; ce sont les paramètres que nous avons

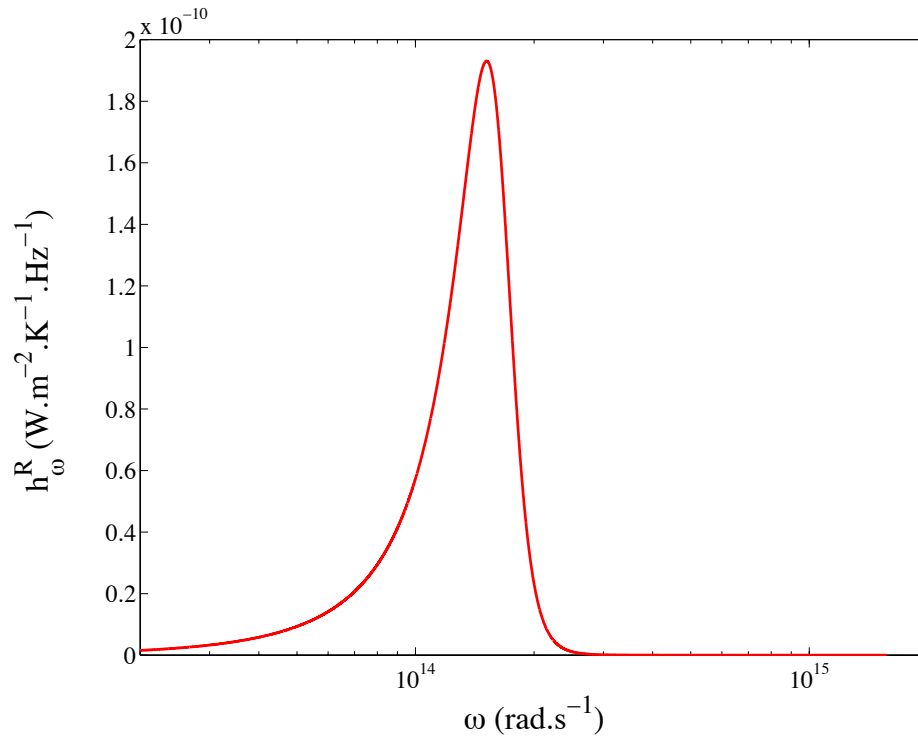


FIG. 3.16 – Coefficient de transfert radiatif monochromatique à 300 K entre deux milieux semi-infinis de Si dopé (dopage n à  $3 \times 10^{19}$  dopants par  $\text{cm}^3$ ) séparés par une distance  $d = 10$  nm.

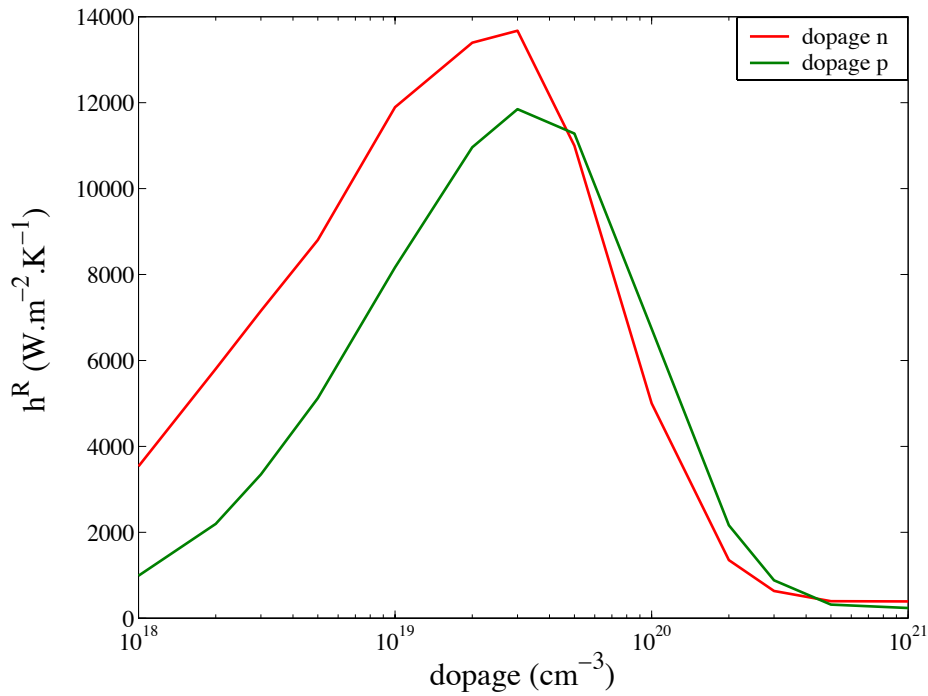


FIG. 3.17 – Coefficient de transfert radiatif total à 300 K entre deux milieux semi-infinis de Si dopé séparés par une distance  $d = 10$  nm : influence du dopage.

utilisés lors des précédentes simulations. Les variations sont essentiellement dues à la position et à la largeur du pic de résonance, elles-mêmes liées à la constante diélectrique (*cf.* Annexe A), *via* notamment la masse effective des électrons ou des trous. Néanmoins, le coefficient de transfert radiatif reste élevé aux autres concentrations puisqu'il est compris entre  $10^3$  et  $10^4$   $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ , c'est-à-dire de l'ordre du coefficient de transfert conducto-convectif (*cf.* Sec. 3.4.4).

## Conclusion

Nous venons de voir qu'une approche radiométrique n'était pas valable lorsque nous voulions traiter du transfert radiatif dans des systèmes de petites dimensions. En effet, cette approche étant fondée sur l'optique géométrique, elle ne tient pas compte des phénomènes de diffraction ou d'interférences ni ne prévoit l'existence d'ondes évanescentes ou de surface. En revanche, une approche électromagnétique a non seulement l'avantage d'être exacte mais aussi celui de prédire l'effet d'exaltation en champ proche du transfert radiatif. L'originalité ici a été de montrer que le transfert radiatif était *quasi* monochromatique lorsque les deux milieux supportent des polaritons de surface, notamment dans le proche infrarouge et qu'alors le coefficient de transfert radiatif *total* variait comme  $1/d^2$  à courte distance. Ce rôle fondamental des ondes de surface n'avait jusqu'alors jamais été mis en évidence. Seule l'exaltation par les ondes évanescentes avait été rapportée. Nous allons voir dans le chapitre suivant que l'effet d'exaltation se produit également lorsqu'on étudie le transfert radiatif entre une surface plane (échantillon) et une petite particule diélectrique située juste au-dessus de l'interface.



## Chapitre 4

# Transfert radiatif à courtes distances entre une particule et un substrat

### Introduction

Au chapitre précédent, nous avons étudié une géométrie simple d'un système à deux interfaces planes afin de mettre en évidence les effets "champ proche" du transfert radiatif. Nous avons également montré la nécessité d'utiliser une approche électromagnétique plutôt qu'une approche radiométrique du transfert radiatif pour rendre compte de l'ensemble des phénomènes physiques (interférences et ondes évanescentes).

Une autre géométrie intéressante était celle d'une petite particule située au-dessus d'une interface. En effet, cette géométrie peut être utilisée pour modéliser la pointe d'un microscope optique en champ proche et évaluer la quantité d'énergie absorbée par l'extrémité de la pointe; celle-ci a toujours un certain rayon de courbure de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres. Ce problème avait déjà été abordé par Dransfeld et Xu (1988).

Nous montrons que les effets mis en évidence pour les deux plans se produisent également dans cette géométrie. En étudiant la puissance rayonnée (thermiquement) par le substrat et absorbée par la particule, nous montrons l'exaltation du transfert d'énergie à courte distance et son caractère quasi monochromatique dû à l'excitation d'ondes de surface pour l'interface plane et également pour la particule *sphérique*. De la même manière, en examinant la puissance qu'une particule "chaude" pourrait déposer dans un substrat, nous nous apercevons que la distribution spatiale de l'énergie est très confinée. Ainsi, l'idée de réaliser un chauffage *localisé* avec une résolution nanométrique est envisagée.

Nous reproduisons ici l'article original que nous avons publié dans *Applied Physics Letters*, Vol. **78**, pp. 2931-2933 (2001) au sujet de cette étude.

## 4.1 Reproduction de l'article paru dans *Applied Physics Letters*, Vol. 78, pp. 2931-2933 (2001)

### Nanoscale radiative heat transfer between a small particle and a plane surface

Jean-Philippe Mulet, Karl Joulain, Rémi Carminati, and Jean-Jacques Greffet  
*Laboratoire d'Énergétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion, Ecole Centrale Paris,  
 Centre National de la Recherche Scientifique, 92295, Châtenay-Malabry Cedex, France*

We study the radiative heat transfer between a small dielectric particle, considered as a point-like dipole, and a surface. In the framework of electrodynamics and using the fluctuation-dissipation theorem, we can evaluate the energy exchange in the near field, which is dominated by the contribution of tunnelling waves. The transfer is enhanced by several orders of magnitude if the surface or the particle can support resonant surface waves. An application to local heating is discussed.

#### 4.1.1 Introduction

New questions about radiative heat transfer (RHT) at nanoscales have been raised by recent developments of nanotechnology (Abramson et Tien 1999). Design of micro and nanostructures requires a thorough understanding of physical phenomena involved in radiative energy exchange, when their sizes become comparable to the thermal mean free path or the thermal radiation wavelength (Chen 1997; Pendry 1999). Modelling RHT between two semi-infinite bodies (Cravalho *et al.* 1967; Hargreaves 1969; Polder et van Hove 1971; Loomis et Marris 1994) or between a tip and a substrate (Dransfeld et Xu 1988) is a challenging problem for all near-field microscopes (STM, AFM) or for Scanning Thermal Microscopes (SThM) (Williams et Wickramasinghe 1986). Our work deals with the problem of RHT between a small particle - considered as a point-like dipole - and a very close plane interface. This particle could be a single molecule, a dust particle or a model for the tip of a microscope probe. Using an electromagnetic approach, in the dipolar approximation, we have derived the expression of the radiative heat power exchanged between the particle and the semi-infinite medium. We show that the transfer increases at small distances and can be enhanced by several orders of magnitude (in comparison with the transfer at large distances) if the particle or the bulk support resonant surface waves. Results of numerical simulations are presented and an application to local heating is discussed.

#### 4.1.2 Évaluation des échanges radiatifs entre la particule et le substrat

In this part, we focus on the derivation of the radiative power exchanged between a small particle (of spherical shape) and a semi-infinite medium. The geometry of the problem is presented in Fig. 4.1.

The upper medium  $z > 0$  is vacuum ( $\varepsilon = 1$ ). A particle ( $P$ ) of radius  $a$  and dielectric constant (frequency dependent)  $\varepsilon_P(\omega) = \varepsilon'_P(\omega) + i\varepsilon''_P(\omega)$  is held at temperature  $T_P$ . The lower medium  $z < 0$ , is filled by a homogeneous, isotropic material (bulk) of dielectric constant  $\varepsilon_B(\omega) = \varepsilon'_B(\omega) + i\varepsilon''_B(\omega)$  and held at temperature  $T_B$ . The center of the particule is at a distance  $d$  above the interface.

We first calculate the mean power  $P_{abs}^{B \rightarrow P}(\omega)$  radiated by the bulk at a given frequency  $\omega$  and absorbed by the particle. We assume that the bulk is in local thermodynamic equilibrium at

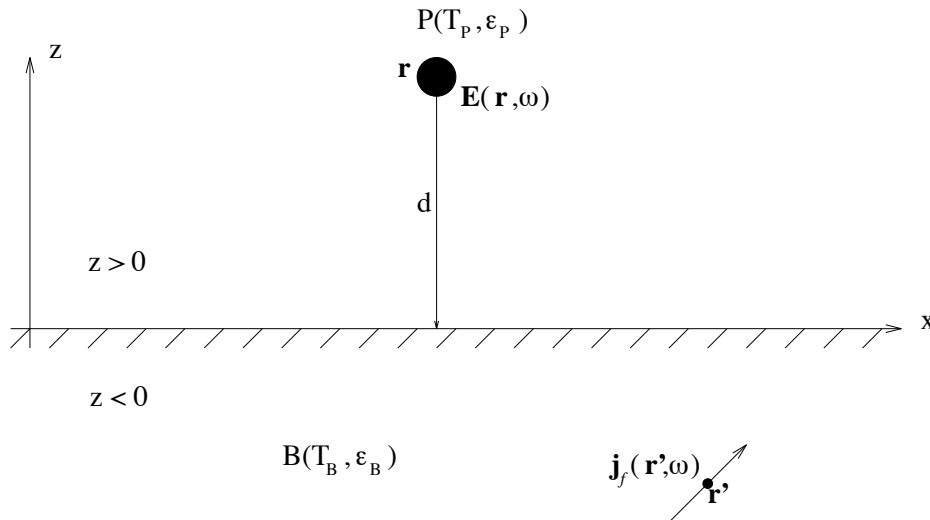


FIG. 4.1 – Géométrie du système

uniform temperature  $T_B \neq 0$ , so that there are fluctuating currents inside the bulk due to thermal fluctuations. These currents inside the bulk radiate an electromagnetic field that illuminates the particle. An elementary fluctuating current  $\mathbf{j}_f(\mathbf{r}', \omega)$  at frequency  $\omega$ , radiates at point  $\mathbf{r}$  inside the particle, an incident electric field  $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}, \omega)$  given by:

$$\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \int_B \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}_f(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (4.1)$$

where  $\mu_0$  is the magnetic permeability of vacuum and  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  is the Green tensor (Carminati et Greffet 1999) of a system constituted by two semi-infinite media whose dielectric constants are either 1 if  $z \geq 0$  or  $\varepsilon_B(\omega)$  if  $z < 0$ . Let us now assume that  $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}, \omega)$  is uniform inside the particle. This amounts to use a dipolar approximation, whose validity in the near field has been already discussed (Chaumet *et al.* 1998). Provided that this condition is satisfied, the small particle behaves as a point-like dipole  $\mathbf{p}_{ind}(\mathbf{r}_P, \omega)$  induced by the incident field  $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_P, \omega)$ . These quantities are related by:  $\mathbf{p}_{ind}(\mathbf{r}_P, \omega) = \varepsilon_0\alpha(\omega) \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}_P, \omega)$ , where  $\varepsilon_0$  is the dielectric permittivity of vacuum and  $\alpha(\omega)$  is the particle polarizability. For a spherical particle of dielectric constant  $\varepsilon_P(\omega)$ , we used the Clausius-Mossotti polarizability (Jackson 2001):

$$\alpha(\omega) = 4\pi a^3 \left[ \frac{\varepsilon_P(\omega) - 1}{\varepsilon_P(\omega) + 2} \right] \quad (4.2)$$

A more precise model (Pincemin *et al.* 1994), taking into account the interaction between the dipole and its image through the interface, leads to the introduction of an effective polarizability. We have verified that, when the distance  $d$  is larger than the particle radius  $a$ , the correction to Eq. (4.2) is negligible. Since we did our calculation for a distance  $d$  larger than  $2a$ , we will consider that Eq. (4.2) is a good approximation for the polarizability in our problem.

We now evaluate the mean radiative power  $P_{abs}^{B \rightarrow P}(\omega)$  dissipated inside the particle. Since the scattered power is negligible (Draine 1988), this quantity is given by:

$$P_{abs}^{B \rightarrow P}(\omega) = 2 \operatorname{Re} \{ \langle -i\omega \mathbf{p}_{ind}(\mathbf{r}_P, \omega) \cdot \mathbf{E}_{inc}^*(\mathbf{r}_P, \omega) \rangle \}$$

where the brackets denote a statistical ensemble average over the fluctuations of the currents inside the bulk. The components  $\langle |E_{inc,i}(\mathbf{r}_P, \omega)|^2 \rangle$  ( $i = x, y, z$ ) depend only on the distance  $d$  and



are given by (Carminati et Greffet 1999; Rytov *et al.* 1989; Shchegrov *et al.* 2000):

$$\langle |E_{inc,i}(\mathbf{r}_P, \omega)|^2 \rangle = \frac{\mu_0^2 \varepsilon_0 \omega^3}{\pi} \text{Im}[\varepsilon_B(\omega)] \Theta(\omega, T_B) \sum_{j=x,y,z} \int_B |G_{i,j}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}', \omega)|^2 d^3 \mathbf{r}' \quad (4.3)$$

where  $\Theta(\omega, T_B) = \hbar\omega / [\exp(\hbar\omega/k_B T_B) - 1]$  is the mean energy of a quantum oscillator in thermal equilibrium at temperature  $T_B$ ;  $2\pi\hbar$  is Planck's constant and  $k_B$  is Boltzmann's constant. Finally, we find the expression of the mean power radiated by the bulk and absorbed by the particle at frequency  $\omega$ :

$$P_{abs}^{B \rightarrow P}(\mathbf{r}_P, \omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega^4}{c^4} \text{Im}[\varepsilon_B(\omega)] \text{Im}[\alpha(\omega)] \Theta(\omega, T_B) \sum_{i,j=x,y,z} \int_B |G_{i,j}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}', \omega)|^2 d^3 \mathbf{r}' \quad (4.4)$$

We now consider the fluctuating currents inside the particle at temperature  $T_P$  that illuminate the bulk. Using the same formalism, we can calculate the power *locally* dissipated per unit volume, at a point  $\mathbf{r}$  inside the bulk, by the following relation:

$$P_{abs}^{P \rightarrow B}(\mathbf{r}, \omega) = 2 \text{Re} \{ \langle \mathbf{j}_{ind}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}_{inc}^*(\mathbf{r}, \omega) \rangle \}$$

It reads:

$$P_{abs}^{P \rightarrow B}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega^4}{c^4} \text{Im}[\varepsilon_B(\omega)] \text{Im}[\alpha(\omega)] \Theta(\omega, T_P) \sum_{i,j=x,y,z} |G_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_P, \omega)|^2 \quad (4.5)$$

### 4.1.3 Résultats numériques

In this part, we present some numerical results obtained with a particle and a surface of silicon carbide (SiC). The optical properties of this material can be described using an oscillator model (Palik 1985):

$$\varepsilon_B(\omega) = \varepsilon_P(\omega) = \varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty \left( 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \right) \quad (4.6)$$

with  $\varepsilon_\infty = 6.7$ ,  $\omega_L = 969 \text{ cm}^{-1}$ ,  $\omega_T = 793 \text{ cm}^{-1}$  and  $\Gamma = 4.76 \text{ cm}^{-1}$ . The bulk can support resonant surface waves, called surface phonon-polaritons, that produce a peak in the density of states at frequency  $\omega_B$  where  $\varepsilon(\omega_B)$  satisfies the relation  $\varepsilon'(\omega_B) = -1$ . The spherical particle supports volume phonon-polaritons at  $\omega_P$  where  $\varepsilon(\omega_P)$  satisfies the relation  $\varepsilon'(\omega_P) = -2$ . Using Eq. (4.6), we find:  $\omega_B = 178.7 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$  and  $\omega_P = 175.6 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$ .

In Fig. 4.2, we plot  $P_{abs}^{B \rightarrow P}(\omega)$  for a spherical particle of radius  $a = 5 \text{ nm}$  at different distances  $d$  above the surface, held at temperature  $T_B = 300 \text{ K}$ .

We note that the figure displays two remarkable peaks at frequency  $\omega_1 \approx 175.6 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$  and  $\omega_2 \approx 178.7 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$ . These two peaks are related to the resonant surface waves: the first corresponds to the resonance of the particle which presents a larger absorption at this frequency; the second is due to a huge increase of electromagnetic energy density close to the surface, demonstrated recently by Shchegrov *et al.* (2000). An asymptotic expansion of Eq. (4.4) for small distance  $d$  yields the radiative power spectrum:

$$P_{abs}^{B \rightarrow P}(d, \omega) \sim \frac{1}{4\pi^2 d^3} \underbrace{4\pi a^3 \frac{3\varepsilon''(\omega)}{|\varepsilon(\omega) + 2|^2}}_{particle} \underbrace{\frac{\varepsilon''(\omega)}{|\varepsilon(\omega) + 1|^2}}_{bulk} \Theta(\omega, T_B) \quad (4.7)$$

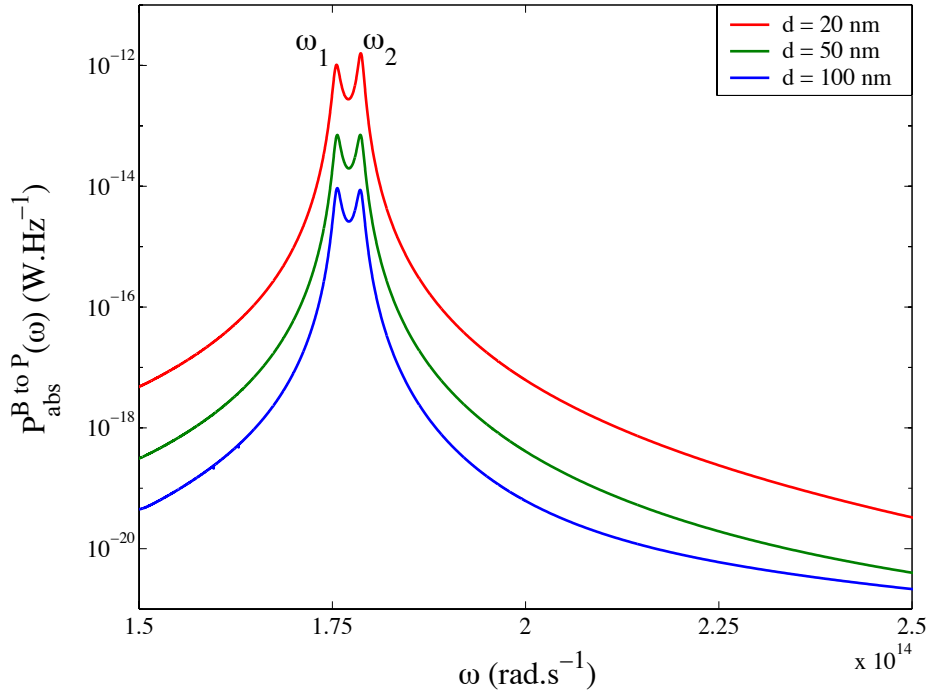


FIG. 4.2 – Puissance moyenne rayonnée par le substrat (à  $T_B = 300$  K) et absorbée par la particule (rayon  $a = 5$  nm) :  $d = 20$  nm (rouge),  $d = 50$  nm (vert),  $d = 100$  nm (bleu).

At this point, we must emphasize that, whereas those surface waves are evanescent waves, an energy exchange between the bulk and the particle takes place because the particle lies in the region (up to many micrometers) where the evanescent field is large, so that there is an efficient coupling between them.

Figure 4.3 shows (in log-log scale) the spectrum of the absorbed power between  $10^{12}$   $\text{rad.s}^{-1}$  and  $10^{15}$   $\text{rad.s}^{-1}$  at two different distances  $d = 20$  nm and  $d = 1$  mm. It is seen that the RHT is almost monochromatic and is larger in the near field. If the particle and the bulk were constituted by two different materials, the RHT spectrum would feature two separate sharp peaks at two different resonance frequencies.

Fig. 4.4 shows the integrated power absorbed by the same particle versus distance  $d$  (the substrate is still held at temperature  $T_B = 300$  K). The near-field RHT increases as  $1/d^3$  and is larger at small distances by several orders of magnitude than the far-field one. Indeed, for  $d = 10$  nm,  $P_{abs} \approx 2.5 \times 10^{-10}$  W and for  $d = 10 \mu\text{m}$ ,  $P_{abs} \approx 9 \times 10^{-18}$  W. This enhancement comes from the contribution of evanescent waves to the energy exchange. Therefore, this contribution cannot be neglected in a near-field calculation. This phenomenon occurs when the materials can support resonant surface waves like III-V or II-VI semi-conductors and because the resonant frequencies take place in the far IR region (up to  $10 \mu\text{m}$ ) where the characteristic wavelength of thermal emission at  $T \approx 300$  K is  $10 \mu\text{m}$ . A lot of materials, like oxides or glass, can also support resonant surface waves in the IR or the visible region.

Reciprocity requires that the same enhanced RHT appears when the particle illuminates the surface. This situation may help us in understanding the radiative heat exchange between a nano-tip (like those used in near-field microscopy) and a sample. It is interesting to study how the energy radiated by the tip is dissipated in the sample. To answer this question, we calculated – using Eq. (4.5) – the total power (integrated over the frequencies) dissipated per unit volume for different points in the sample.

Fig. 4.5 displays a map, in log-scale, of the dissipation rate in the case of a 10 nm-diameter sphere of SiC at  $T_P = 300$  K situated at 100 nm above a sample of SiC. It is seen that the energy

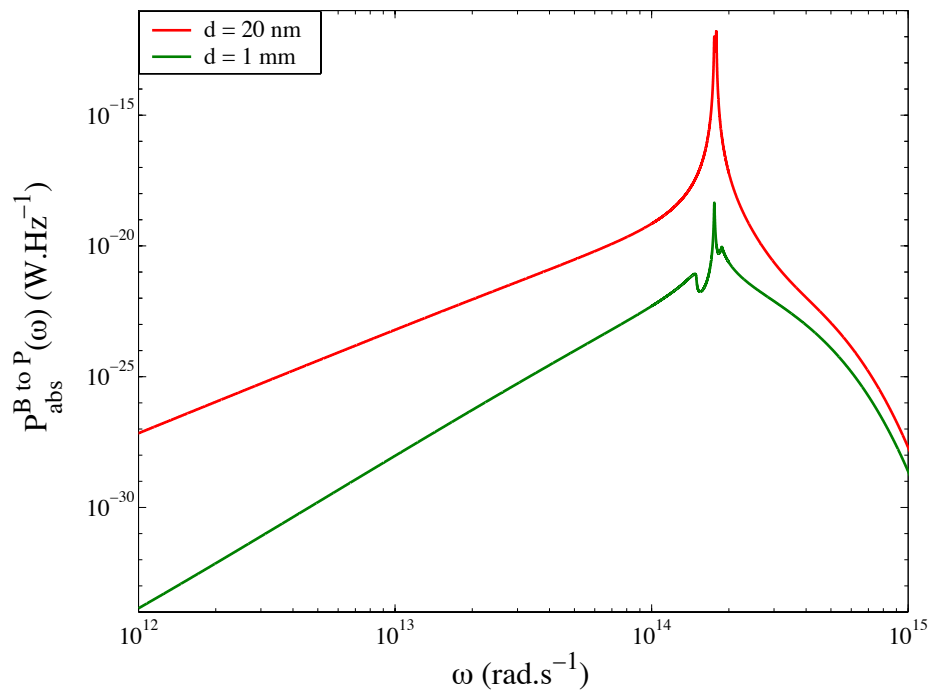


FIG. 4.3 – Puissance moyenne rayonnée par le substrat (à  $T_B = 300$  K) et absorbée par la particule (rayon  $a = 5$  nm) :  $d = 20$  nm (rouge),  $d = 50$  nm (vert) et  $d = 100$  nm (bleu).

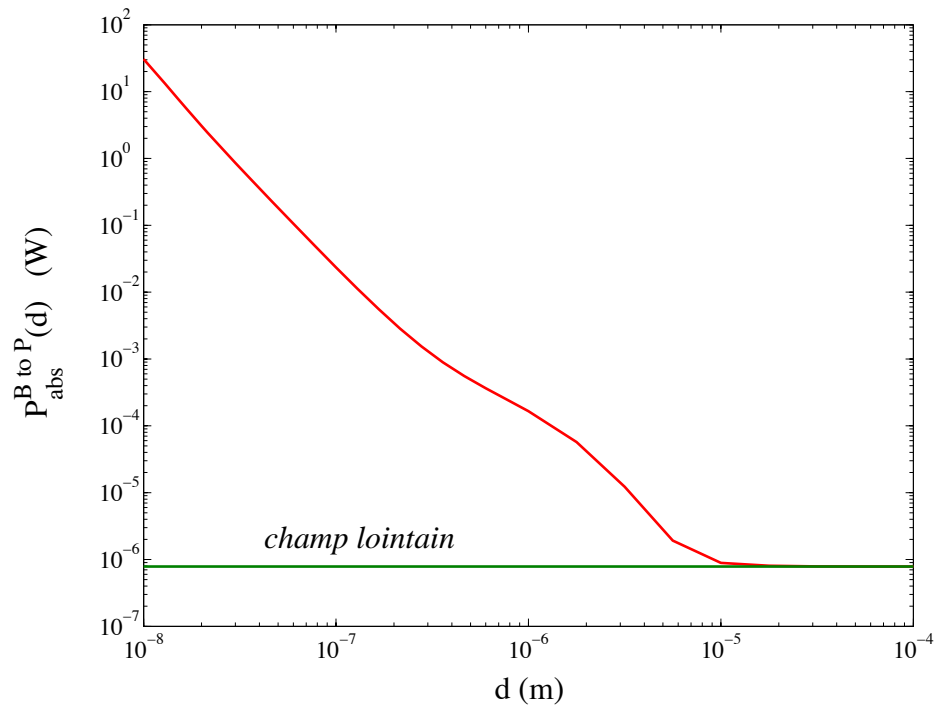


FIG. 4.4 – Puissance totale rayonnée par le substrat (à  $T_B = 300$  K) et absorbée par la particule (rayon  $a = 5$  nm).

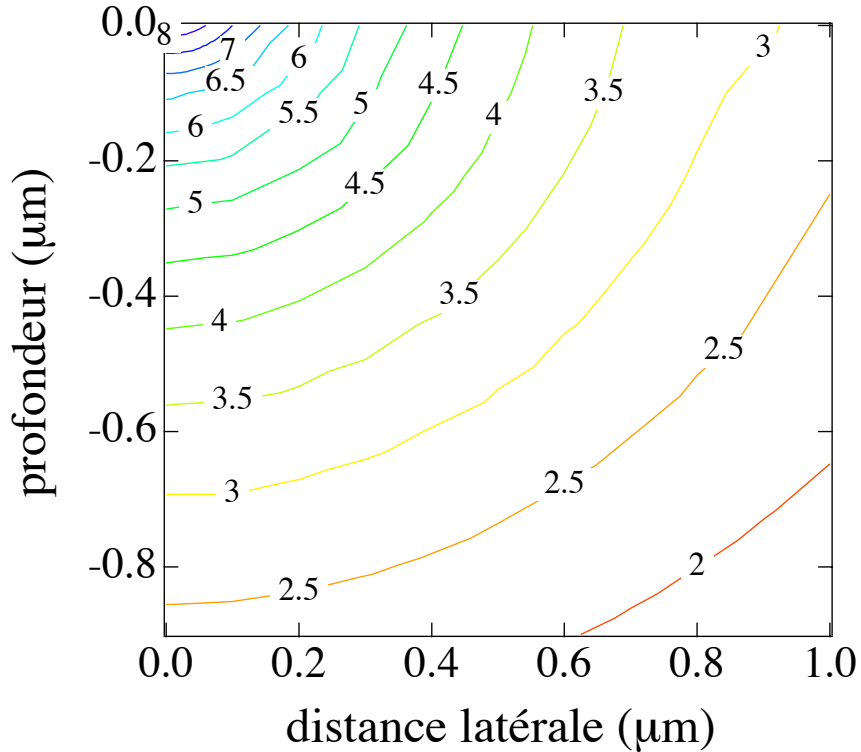


FIG. 4.5 – Puissance déposée par unité de volume à l'intérieur du substrat. La particule a un rayon  $a = 5$  nm et est maintenue à la température de  $T_P = 300$  K.

is dissipated on a scale comparable to the tip-sample distance. The dissipation per unit volume decreases very fast (as  $1/r^6$ ) with the distance  $r$  between the source and the point of the sample where the dissipation is considered (the isocontour labeled with a '6' corresponds to the points where the dissipation per unit volume is  $10^6$  W.m $^{-3}$ ). The amount of energy locally deposited is as large as 100 MW.m $^{-3}$ .

#### 4.1.4 Conclusion

In this letter, we have shown that nanoscale RHT between a sample and a small particle is almost monochromatic and can be enhanced by several orders of magnitude when the materials involved support resonant surface waves. When illuminated by the particle, the distribution of power inside the sample extends over distances of the same order as the particle-sample separation. These results should have broad applications in near-field microscopy, in design of nanostructures and in high density storage processes by local heating.



## Chapitre 5

# Dynamique de la relaxation électronique de nanoparticules métalliques dans une matrice diélectrique

### Introduction

Nous traiterons ici de la dynamique de refroidissement de nanoparticules métalliques situées à l'intérieur d'une matrice transparente et illuminées par une impulsion laser femtoseconde, de faible ou forte fluence. L'un des problèmes est d'étudier le temps de *relaxation* des électrons de la nanoparticule lorsqu'ils sont excités par cette impulsion et de comprendre notamment l'influence de la taille de la particule ou du niveau de fluence sur ce temps de relaxation. Nous montrerons ainsi que l'énergie du gaz d'électrons d'une nanoparticule métallique enfouie dans une matrice diélectrique peut diminuer grâce au couplage électromagnétique *non radiatif* avec les phonons de la matrice. Nous essayerons alors de rendre compte de la dépendance à la taille de la particule du temps de relaxation électronique, à basse et à haute fluence.

## 5.1 Position du problème

### 5.1.1 Un peu de bibliographie

Ces dernières années, de nombreux travaux ont été consacrés aux propriétés optiques des nanoparticules métalliques, et ceci pour plusieurs raisons. En termes d'applications, les composants verre/nanocristaux métalliques ont d'importantes propriétés *non linéaires* et des temps de réponse très courts. Ils pourraient ainsi être utilisés pour réaliser des "interrupteurs optiques" par exemple. Une autre application est liée à leur éventuelle implication en tant qu'initiateur dans l'*endommagement* des composants optiques soumis à de hautes fluences (Grua et Bercegol 2001). D'un point de vue plus général, nous avons vu que les lois macroscopiques du transfert d'énergie radiative ne sont plus valables à ces échelles de longueur. Il en est de même pour les transferts d'énergie conductive (Chen 1998 ; Chen 2001 ; Volz et Lemonnier 2000 ; Volz 2001). Comme la taille de la particule approche ou devient inférieure aux grandeurs caractéristiques du système (longueur d'onde, libre parcours moyen pour les électrons ou les phonons), nous nous attendons à observer des propriétés optiques dépendant de la taille de la particule. À ce sujet, on pourra se reporter à deux articles de revue : Link et El-Sayed 1999 et Voisin *et al.* 2001.

Le problème est le suivant. Après une illumination laser ultra-courte (typiquement, les impulsions font de quelques dizaines à quelques centaines de femtosecondes), il est généralement admis que les électrons *excités* (distribution d'énergie très fortement *hors équilibre*) se thermalisent *via* des collisions électron-électron (e-e) sur une échelle de temps de l'ordre de quelques dizaines de femtosecondes. Ensuite, les électrons "relaxent" par interaction électron-phonon (e-ph) avec une constante de temps de l'ordre de la picoseconde (pour un matériau massif). Enfin, le réseau de la particule se refroidit par conduction. Cet échange d'énergie avec la matrice a lieu sur une échelle de temps de l'ordre de quelques picosecondes.

Cependant, la manière dont l'interaction électron-phonon dépend de la taille de la particule, de la matrice environnante ou du niveau de fluence incidente est encore un problème difficile à cerner. Ceci a motivé de nombreuses études expérimentales (Link et El-Sayed 1999 ; Voisin *et al.* 2001 ; Bigot *et al.* 1995) pour différentes tailles de particule, différents métaux et différents matériaux pour la matrice. Néanmoins, les résultats sont toujours sujet à débat.

Certains résultats (Link et El-Sayed 1999 ; Logunov *et al.* 1997 ; Link *et al.* 1999 ; Hodak *et al.* 1999 ; Hodak *et al.* 2000 ; Bigot *et al.* 1995) indiquent que le temps de relaxation électron-phonon noté  $\tau_{e-ph}$  ne dépend pas de la taille de la particule alors que d'autres (Voisin *et al.* 2000 ; Del Fatti *et al.* 1999 ; Stella *et al.* 1996 ; Nisoli *et al.* 1997) ont mis en évidence une dépendance claire en fonction de la taille de la particule. Cependant, il est important de souligner que ce premier groupe de résultats a été obtenu en travaillant à haute fluence, créant une élévation  $\Delta T_e$  de la température électronique supérieure à 100 K. En revanche, le second groupe de résultats correspondent à des élévations de température électronique inférieure à 100 K.

Par ailleurs, d'autres résultats expérimentaux montrent que le temps de relaxation dépend du matériau constituant la matrice lorsque les mesures sont effectuées à haute énergie alors qu'il n'en dépend pas à basse énergie. On trouvera une discussion détaillée des résultats obtenus dans Voisin *et al.* (2001) et Voisin (2001).

### 5.1.2 Le modèle à deux températures

Pour modéliser la relaxation électronique, nous avons choisi le *modèle à deux températures* qui est couramment utilisé. Il a été introduit par Kaganov *et al.* (1956) (voir également Eesley 1986 ; Elsayed-Ali *et al.* 1987) pour analyser des expériences faites sur des films métalliques minces. Ce modèle est fondée sur l'idée que la thermalisation des électrons due aux collisions électron-électron est beaucoup plus rapide que celle due aux collisions électron-phonon. L'hypothèse est alors que les électrons peuvent être modélisés par un système à l'équilibre thermodynamique

local (ETL) à la température  $T_e$  en interaction avec le réseau métallique de la particule qui, lui, est à la température  $T_l$  ( $l$  pour *lattice*). Le transfert d'énergie entre les électrons et le réseau est habituellement décrit par une constante caractéristique. Ce n'est que récemment que le transfert d'énergie entre le réseau (les phonons dans la particule) et la matrice (les phonons dans la matrice) a été pris en compte (Grua et Bercegol 2001; Hamanaka *et al.* 2001). La matrice est supposée à la température  $T_m$ . Nous obtenons ainsi le système d'équations suivant pour les températures  $T_e$ ,  $T_l$  et  $T_m$  :

$$C_e(T_e) V \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -G V (T_e - T_l) + V P_{abs}(T_e, t) \quad (5.1)$$

$$C_l \frac{\partial T_l}{\partial t}(t) = G (T_e - T_l) + \kappa_l \nabla^2 T_l \quad (5.2)$$

$$C_m \frac{\partial T_m}{\partial t}(t) = \kappa_m \nabla^2 T_m \quad (5.3)$$

où  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$  correspond au volume de la particule. Les grandeurs  $C_e$ ,  $C_l$  et  $C_m$  sont les capacités calorifiques (en  $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ) respectivement pour les électrons, le réseau métallique de la particule et la matrice.  $C_e$  dépend *linéairement* de la température électronique :  $C_e = \Gamma_e T_e$ .  $\kappa_l$  et  $\kappa_m$  sont les conductivités thermiques (en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) respectivement de la particule et de la matrice.  $G$  est une constante de couplage caractéristique (en  $\text{W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ) rendant compte des collisions entre les électrons et les phonons de la particule;  $G$  est relativement indépendant de la différence de température ( $T_e - T_l$ ).

Dans le cas d'une particule d'or dans une matrice de verre, ces différents paramètres valent (Grua et Bercegol 2001, Hamanaka *et al.* 2001) :  $\Gamma_e = 67.3 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-2}$ ,  $G = 3 \times 10^{16} \text{ W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ,  $\frac{\kappa_l}{C_l} = 1.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  et  $C_l = 2.49 \times 10^6 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ,  $\frac{\kappa_m}{C_m} = 8.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$  et  $\kappa_m = 1.38 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Nous pouvons alors remarquer que pour une température électronique  $T_e$  de 400 K, nous avons  $C_e(T_e) \ll C_l$  et  $C_m$  si bien que les températures de la particule et de la matrice vont peu varier au cours du temps, en tout cas pas sur une échelle de temps de l'ordre du temps de relaxation  $\tau_{e-ph}$ . Ainsi, il est légitime de négliger la conduction de ne garder que le système simplifié suivant pour le modèle à deux températures :

$$C_e(T_e) V \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -G V (T_e - T_l) + V P_{abs}(T_e, t) \quad (5.4)$$

$$C_l \frac{\partial T_l}{\partial t}(t) = G (T_e - T_l) \quad (5.5)$$

lorsque l'on s'intéresse à l'évolution de  $T_e$  pendant  $10^{-13}$  à  $10^{-11}$  s. D'ailleurs, nous supposons que la température  $T_l$  reste constante dans cette première phase.

Dans l'équation (5.4),  $P_{abs}(T_e, t)$  est la puissance *volumique* absorbée par la particule à l'instant  $t$  (en  $\text{W.m}^{-3}$ ) en provenance de l'impulsion laser incidente (impulsion gaussienne en temps). Si nous notons  $P_{inc}(t)$  la valeur du module du vecteur de Poynting incident (en  $\text{W.m}^{-2}$ ), nous avons alors (Grua et Bercegol 2001) :

$$P_{abs}(T_e, t) = \frac{\sigma_{abs}(T_e)}{\frac{4}{3}\pi a^3} P_{inc}(t) \quad (5.6)$$

où  $\sigma_{abs}(T_e)$  est la section efficace d'*absorption* de la particule (Bohren et Huffman 1991) qui peut être calculée de manière exacte avec la théorie de *Mie*. La section efficace d'absorption de la particule *dans* la matrice dépend de la température électronique  $T_e$  *via* la constante diélectrique de la particule métallique (contributions interbandes, Del Fatti 1998 et Voisin 2001). Par ailleurs,



indiquons que lorsque nous travaillons à basse fluence ( $\Delta T_e < 100$  K), la section efficace d'absorption varie peu si bien que nous pouvons prendre  $\sigma_{abs}(T_e) \approx \sigma_{abs}(T_e^0)$ ,  $T_e^0$  étant la température de référence (300 K dans notre cas).

Enfin, pour résoudre le système d'équations, il est nécessaire de préciser les conditions aux limites que nous choisissons, lesquelles se réduisent à la *continuité de la température* à l'interface particule-matrice, *i.e.*  $T_l(r = a, t) = T_m(r = a, t)$ .

### 5.1.3 Interaction directe entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice

À ce stade, aucune interaction *directe* entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice n'a été prise en compte. Cependant, nous avons montré précédemment que le transfert d'énergie par ondes électromagnétiques évanescentes pouvait être très efficace. Ce mécanisme de transfert d'énergie a été étudié dans différents contextes. Chance *et al.* (1978) ont montré que la durée de vie de fluorescence d'une molécule pouvait être modifiée de manière significative lorsque la molécule est proche d'une interface, à cause du couplage électromagnétique non radiatif entre la molécule et l'interface. Un modèle classique représentant la molécule par un dipôle ponctuel donne un excellent accord avec les résultats expérimentaux. Plus récemment, Bian *et al.* (1995), Novotny (1996) et Azoulay *et al.* (2000) ont montré que l'interaction entre une molécule et une pointe métallique de taille nanométrique réduisait la durée de vie, à cause d'un couplage *non radiatif* (*i.e.* par ondes évanescentes) de nature électromagnétique.

Dans la suite, nous allons montrer que l'énergie des électrons de la particule, enfouie dans une matrice diélectrique, peut diminuer grâce à un couplage électromagnétique *non radiatif* similaire avec les phonons de la matrice. Ainsi, il y a un "canal supplémentaire" de désexcitation pour les électrons, à prendre en compte dans le modèle à deux températures. Comme ce transfert se réalise entre les électrons de la particule et le réseau cristallin de la matrice, il peut également être vu comme un mécanisme de *collision électron-phonon* avec les phonons de la matrice. Nous allons maintenant voir s'il est possible, en incluant ce nouveau terme, d'expliquer les expériences récentes et notamment la dépendance du temps de relaxation électronique en fonction de la taille de la particule.

## 5.2 Régime basse fluence

Dans tout le paragraphe, les *électrons* désigneront les électrons de la particule métallique et les *phonons* désigneront les phonons de la matrice. Par ailleurs, nous nous placerons en régime "basse fluence", c'est-à-dire que l'élévation de la température des électrons sera au plus de l'ordre de 100 K.

### 5.2.1 Expression théorique du transfert d'énergie entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice

Comme expliqué précédemment, nous considérons ici que les électrons sont à l'équilibre thermodynamique local à la température  $T_e$ . La matrice est à la température  $T_m$ . Ces électrons vont induire un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ ,  $\mathbf{r}$  appartenant à la matrice et  $\omega$  étant la pulsation. Si nous notons  $\mathbf{j}_e(\mathbf{r}', \omega)$  le courant volumique en  $\mathbf{r}'$  associé aux électrons, alors le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  a pour expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}', \omega) \quad (5.7)$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  est le tenseur de Green du système (particule dans une matrice). Soulignons ici, que ce tenseur n'est pas calculé dans le cadre de l'approximation dipolaire comme dans le chapitre 4 mais

en approximation électrostatique. En effet, l'approximation dipolaire n'est plus valable très près de la particule et il est nécessaire de prendre en compte les termes suivants dans le développement multipolaire. Toutefois, les dimensions du problème (quelques nanomètres) étant très petites devant la longueur d'onde et l'épaisseur de peau, il est possible de calculer le tenseur de Green en négligeant les effets de retard. Nous calculons donc  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  dans l'approximation électrostatique. Le problème se ramène alors au calcul du champ créé par un dipôle électrostatique placé à l'intérieur d'une sphère. Les détails du calcul et l'expression de ce tenseur est donnée explicitement en annexe G.

La puissance  $P_{e-m}(\mathbf{r}, T_e)$  rayonnée par les électrons (à  $T_e$ ) et dissipée *par unité de volume* à l'intérieur de la matrice (au point  $\mathbf{r}$ ) vaut alors :

$$P_{e-m}(\mathbf{r}, T_e) = \int_0^\infty \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) d\omega = \int_0^\infty \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, \omega) \cdot \left[ (i\omega\mu_0) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}', \omega) \right]^* d\omega \quad (5.8)$$

où  $\mathbf{j}_m$  correspond au courant *induit* dans la matrice. Cette dernière équation (Éq. 5.8) décrit bien un phénomène de collisions électron-phonon. En effet,  $\mathbf{j}_m$  est le courant induit dans la matrice et correspond essentiellement à la contribution des phonons optiques tandis que  $\mathbf{j}_e$  est le courant fluctuant des électrons. L'expression littérale de cette puissance est donnée en annexe G.

En fait, comme le problème est à symétrie sphérique,  $P_{e-m}$  ne dépend que de la distance  $r$  (et de la température  $T_e$ ). Notons  $Q_{e-m}(T_e)$  la puissance totale cédée par les électrons (à  $T_e$ ) à la matrice, rapportée au volume  $V$  de la particule :

$$Q_{e-m}(T_e) = \frac{1}{V} \int_a^\infty P_{e-m}(r, T_e) 4\pi r^2 dr \quad (5.9)$$

De la même manière, nous noterons  $Q_{m-e}(T_m)$  la puissance totale cédée par la matrice (à  $T_m$ ) aux électrons. Pour calculer ce terme, nous utilisons le fait qu'à l'équilibre thermique ( $T_e = T_m = T_{\text{équi}}$ ), le flux net radiatif est nul, si bien que  $Q_{e-m}(T_{\text{équi}}) = Q_{m-e}(T_{\text{équi}})$ . Le terme décrivant l'échange d'énergie est alors :

$$P_{e-m}(r, T_e) - P_{m-e}(r, T_m) = \frac{1}{2\pi^2 r_0^3} \int_0^\infty d\omega \quad \varepsilon_p''(\omega) \varepsilon_m''(\omega) [\Theta(\omega, T_e) - \Theta(\omega, T_m)] \\ \times \sum_{l=0}^\infty \frac{l(l+1)(2l+1)^2}{|l\varepsilon_p + (l+1)\varepsilon_m|^2} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{2l+1} \quad (5.10)$$

où  $\Theta(\omega, T) = \hbar\omega / \left[ \exp(\frac{\hbar\omega}{k_B T}) - 1 \right]$  ;  $\varepsilon_p''$  et  $\varepsilon_m''$  sont les parties imaginaires des constantes diélectriques respectivement de la particule et de la matrice.

Ainsi, l'équation (5.4) d'évolution de la température des électrons devient désormais :

$$C_e(T_e) V \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -G V (T_e - T_l) + V P_{\text{abs}}(T_e, t) - V [Q_{e-m}(T_e) - Q_{m-e}(T_m)] \quad (5.11)$$

Ce terme supplémentaire dans l'équation de  $T_e$  représente pour les électrons un canal de désexcitation *supplémentaire* par lequel ils peuvent perdre de l'énergie. À notre connaissance, ce terme n'a jamais été pris en compte jusqu'ici.

### 5.2.2 Validité de notre approche

Nous considérons ici une particule d'or de rayon  $a = 3$  nm et illuminée par une impulsion laser telle que la température électronique s'élève de  $\Delta T_e = 100$  K (régime basse fluence). La

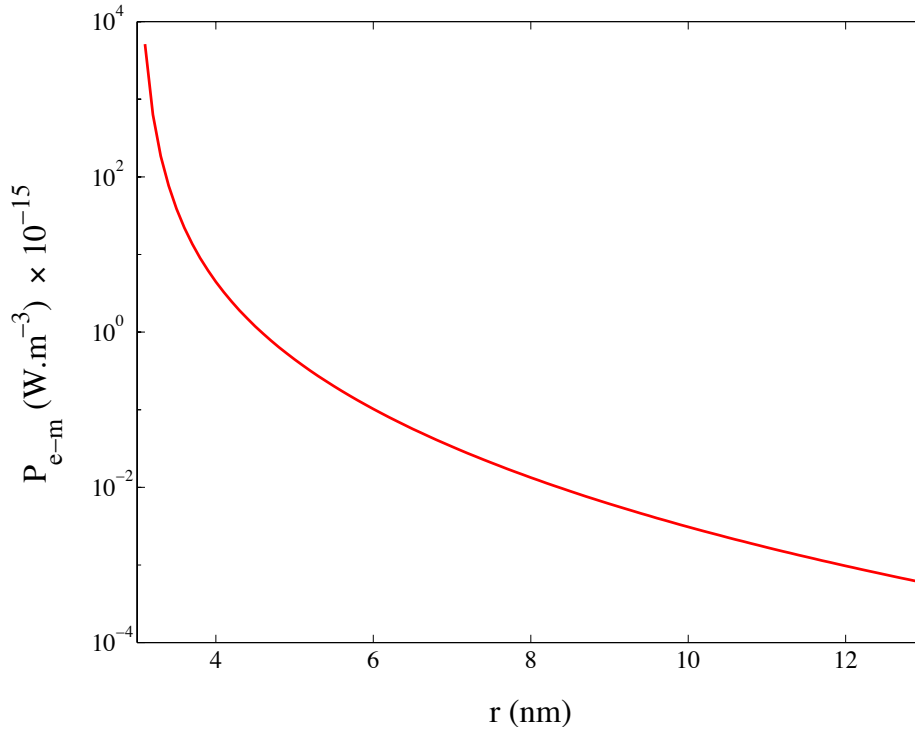


FIG. 5.1 – Puissance rayonnée par les électrons à  $T_e = 400$  K et dissipée par unité de volume à l'intérieur de la matrice en fonction de la distance  $r$  au centre de la particule.

matrice est en verre et supposée à une température de  $T_m = 300$  K. La figure 5.1 représente la puissance  $P_{e-m}(r, T_e)$  rayonnée par les électrons (à  $T_e = 400$  K) et dissipée *par unité de volume* à l'intérieur de la matrice en fonction de la distance  $r$  au centre de la particule.

Nous pouvons remarquer sur cette courbe la divergence de la puissance absorbée par la matrice par collision électron-phonon. Cette divergence est normale et liée à la divergence (singularité) du tenseur de Green à courte distance. Ainsi, nous pouvons dire que toute l'énergie échangée par collision électron-phonon est concentrée sur une épaisseur très faible, à l'interface entre la particule et la matrice.

Pour confirmer que cet échange est essentiellement un mécanisme de collision électron-phonon, nous avons tracé sur la figure 5.2 le spectre de la puissance absorbée par la matrice en fonction de la pulsation  $\omega$ , pour une distance  $r = 3.1$  nm et une température électronique de 400 K. Nous remarquons que l'échange se fait essentiellement autour des deux fréquences de résonance correspondant à l'excitation des phonon-polaritons infrarouge dans le verre à 7 et 20  $\mu\text{m}$  environ.

Ainsi, nous avons donc essentiellement un *chauffage de surface* de la matrice par les électrons de la particule. Cependant, il est clair qu'en dessous d'un nanomètre notre modèle électromagnétique n'est plus valable, car les objets en présence ne sont plus de taille macroscopique. Or la figure 5.1 montre que l'essentiel du transfert a lieu sur une distance inférieure à 1 nm. Ainsi, pour la suite, nous abandonnons l'approche électromagnétique mais nous gardons à l'esprit l'idée que le transfert d'énergie électron-phonon est essentiellement un mécanisme de surface. Par ailleurs, nous gardons à l'esprit que ce terme varie comme  $\int d\omega \varepsilon_p''(\omega) \varepsilon_m''(\omega) \Theta(\omega, T_e)$ . Nous verrons qu'il est possible d'exploiter cette idée pour analyser certaines expériences récentes.

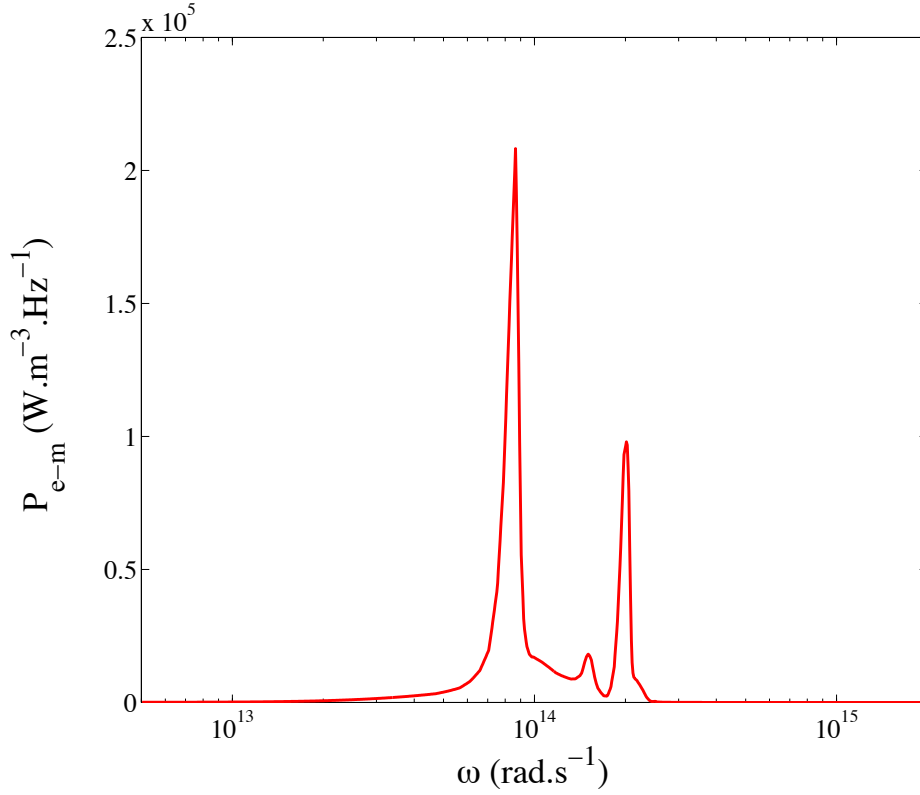


FIG. 5.2 – Puissance rayonnée par les électrons à  $T_e = 400$  K et dissipée par unité de volume à l'intérieur de la matrice et à une distance  $r$  du centre de la particule de 3.1 nm.

### 5.2.3 Modélisation des collisions électron-phonon par un terme de surface

Dans le modèle à deux températures (*cf.* Éq. (5.11)), nous remplaçons le dernier terme par un terme *surfactive* pour aboutir à l'équation d'évolution de la température électronique<sup>1</sup> :

$$C_e(T_e) V \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -GV (T_e - T_l) - G' S\delta (T_e - T_m) \quad (5.12)$$

où  $S = 4\pi a^2$  correspond à la surface de la particule (surface d'échange) et  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$  correspond au volume de la particule. La grandeur  $\delta$  est un paramètre homogène à une longueur qui peut être vu comme l'épaisseur sur laquelle l'échange d'énergie s'effectue entre les électrons et les phonons.  $G'$  est le coefficient d'échange (en  $\text{W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ) correspondant aux collisions électron-phonon. Il n'est *a priori* pas connu pour l'instant. En régime *basse fluence*, nous supposons que  $G'$  (tout comme  $G$ ) est indépendant de la température électronique  $T_e$ .

Nous nous plaçons ici aux courts instants par rapport au temps de conduction dans la particule ou dans la matrice (très supérieurs au temps de thermalisation des électrons). De plus, comme la capacité calorifique des électrons est très inférieure à celle des phonons (dans la particule ou dans la matrice), l'élévation de température dans la particule ou dans la matrice est très inférieure à celle des électrons de la particule. Nous poserons ainsi:  $T_l = T_m = T_a \approx \text{cste}$ . L'équation précédente (Éq. 5.12) peut alors se mettre sous la forme :

$$C_e(T_e) V \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = - [GV + G' S\delta] (T_e - T_a) = -G V \left[ 1 + \frac{G'}{G} \frac{S\delta}{V} \right] (T_e - T_a) \quad (5.13)$$

1. Nous nous plaçons à des instants postérieurs à l'illumination laser, tels que  $P_{abs}(T_e, t) = 0$ .

Or  $S/V = 3/a$  pour une particule sphérique, donc l'équation de la température électronique devient :

$$C_e(T_e) \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -G \left[ 1 + \frac{3G'\delta}{G} \frac{1}{a} \right] (T_e - T_a) \quad (5.14)$$

Pour l'argent, nous avons pour les différents paramètres, les valeurs suivantes<sup>2</sup> :  $\Gamma_e = 65 \text{ J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ,  $G = (3.5 \pm 0.5) \times 10^{16} \text{ W.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$  et  $C_l = 2.4 \times 10^6 \text{ J.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Par ailleurs, les conductivités thermiques du verre ( $\text{SiO}_2$ ) et de l'alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) valent respectivement  $\kappa_m = 1.38 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  et  $\kappa_m = 36 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (Hamanaka *et al.* 2001).

Comme la capacité calorifique des électrons dépend *linéairement* de la température, nous avons :

$$C_e(T_e) = C_e(T_e^0) \frac{T_e}{T_e^0} \quad (5.15)$$

$T_e^0$  étant une température de référence ( $T_e^0 = 300 \text{ K}$  dans notre cas). Ceci nous permet de réécrire l'équation (5.14) sous la forme :

$$\frac{T_e}{T_e^0} \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -\frac{G}{C_e(T_e^0)} \left[ 1 + \frac{6G'\delta}{G} \frac{1}{D} \right] (T_e - T_a) \quad (5.16)$$

où  $D = 2a$  est le diamètre de la particule. Nous posons alors  $\tau_{e-ph}^0 = C_e(T_e^0)/G$  ( $\tau_{e-ph}^0$  en seconde), si bien que l'équation précédente devient

$$\frac{T_e}{T_e^0} \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = -\frac{1}{\tau_{e-ph}^0} \left[ 1 + \frac{6G'\delta}{G} \frac{1}{D} \right] (T_e - T_a) \quad (5.17)$$

$\tau_{e-ph}^0$  correspond au temps de relaxation que nous aurions si la particule avait un diamètre important, c'est donc la valeur pour le métal massif (valeur "bulk"). Dans le cas d'une particule de diamètre  $D$ , l'équation d'évolution de la température électronique peut s'écrire :

$$\frac{T_e}{T_e^0} \frac{\partial T_e}{\partial t}(t) = \frac{1}{\tau_{e-ph}(D)} (T_e - T_a) \quad (5.18)$$

avec

$$\tau_{e-ph}(D) = \frac{\tau_{e-ph}^0}{1 + \frac{6G'\delta}{G} \frac{1}{D}} \quad (5.19)$$

$\tau_{e-ph}^0$  correspond donc au temps de relaxation électronique lorsque la particule a un diamètre  $D$ . Nous pouvons remarquer par ailleurs que l'équation (5.18) est une équation *non linéaire*.

En utilisant ce modèle relativement simple, nous avons essayé d'ajuster les valeurs expérimentales obtenues par Del Fatti *et al.* (2002), les paramètres d'ajustement étant  $\tau_{e-ph}^0$  et  $\frac{6G'\delta}{G}$ . Ainsi, la figure 5.3 représente, en fonction du diamètre  $D$  de la particule, le temps de relaxation des électrons dans des nanoparticules d'argent enfouies dans différents matériaux : verre ( $\text{SiO}_2$ ), alumine ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ),  $\text{MgF}_2$  et en solution. L'analyse des données fournit les valeurs suivantes pour les paramètres d'ajustement :  $\tau_{e-ph}^0 = 0.951 \text{ ps}$  et  $\frac{6G'\delta}{G} = 2.6 \text{ nm}$ .  $\tau_{e-ph}^0$  est du même ordre de grandeur que le temps de relaxation que le matériau massif pour l'argent. De plus, si nous considérons

---

2. Hodak *et al.* 1998

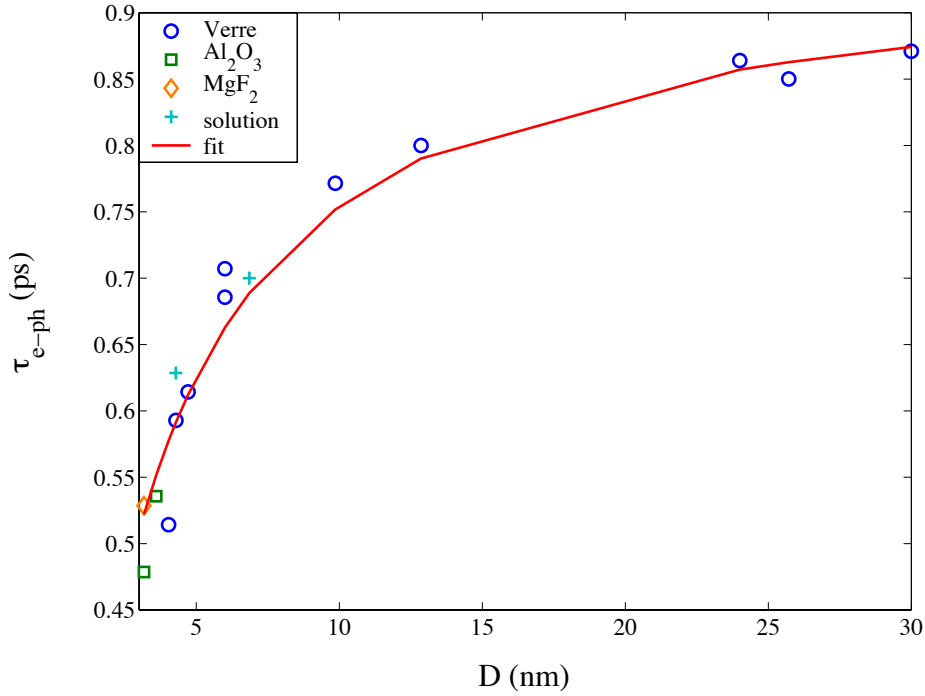


FIG. 5.3 – Temps de relaxation électroniques pour des nanoparticules d’argent enfouies dans différents matériaux : verre, alumine, MgF<sub>2</sub> et en solution : mesures expérimentales (Del Fatti, Langot, et Vallée 2002) et ajustement avec terme de surface (courbe rouge).

que le transfert d’énergie s’effectue sur une épaisseur  $\delta$  de l’ordre de 0.5 nm, alors nous trouvons que  $G'$  est du même ordre de grandeur que  $G$  ( $G' \simeq G$ ), ce qui semble plausible. Ceci montre par ailleurs que la désexcitation des électrons *via* ce processus surfacique n’est pas négligeable par rapport notamment aux collisions électron-phonon (dans la particule).

Néanmoins, à ce stade, il est nécessaire de faire deux remarques importantes. Premièrement, ce modèle simple, avec introduction *phénoménologique* d’un terme d’échange d’énergie surfacique, même s’il permet d’ajuster correctement les valeurs expérimentales, ne prouve pas que ce ne sont que les collisions électron-phonon qui sont responsables de ce comportement. Tout phénomène *surfacique* de perte d’énergie pour les électrons est contenu dans ce modèle.

Enfin, notons que le terme de collision électron-surface qui est pris en compte dans l’étude des collisions électroniques n’intervient pas ici. En effet, il donne une contribution de l’ordre de  $\frac{1}{\tau_{e-s}} = \frac{\pi v_F}{4a} \approx 10^{-15} \text{ s}^{-1}$  (Grua et Bercegol 2001). Ce terme décrit la perte de cohérence des oscillations plasma. Il correspond à l’échelle de temps sur laquelle se fait la thermalisation des électrons mais pas à l’échelle de temps de relaxation de la température électronique.

## 5.3 Régime haute fluence

### 5.3.1 Position du problème

Souvent, les expériences sont réalisées en illuminant fortement les nanoparticules (forte fluence incidente) afin, notamment, d’avoir plus de signal pour réaliser des mesures. Ainsi, le temps de relaxation électronique est souvent étudié en fonction de la puissance absorbée par les électrons de la particule, dans la gamme où les élévations de température électronique sont supérieures à une centaine de kelvins. À partir de ces mesures du temps de relaxation électron-

phonon  $\tau_{e-ph}$ , les valeurs extrapolées à *faible puissance* indiquent que  $\tau_{e-ph}$  dépend peu de la taille de la particule (Bigot *et al.* 1995 ; Logunov *et al.* 1997 ; Link et El-Sayed 1999 ; Link *et al.* 1999 ; Hodak *et al.* 1999 ; Hodak *et al.* 2000). Nous allons voir maintenant si notre modèle à deux températures *étendu* peut rendre compte de ce comportement.

### 5.3.2 Résultats obtenus avec la prise en compte d'un terme surfacique

La figure 5.4 représente le temps de relaxation électronique simulé à l'aide du modèle à deux températures modifié (*cf.* Éq. (5.18)). Nous considérons des nanoparticules d'argent enfouies dans une matrice de verre, pour différents diamètres : 3, 5 et 10 nm. Nous pouvons remarquer que

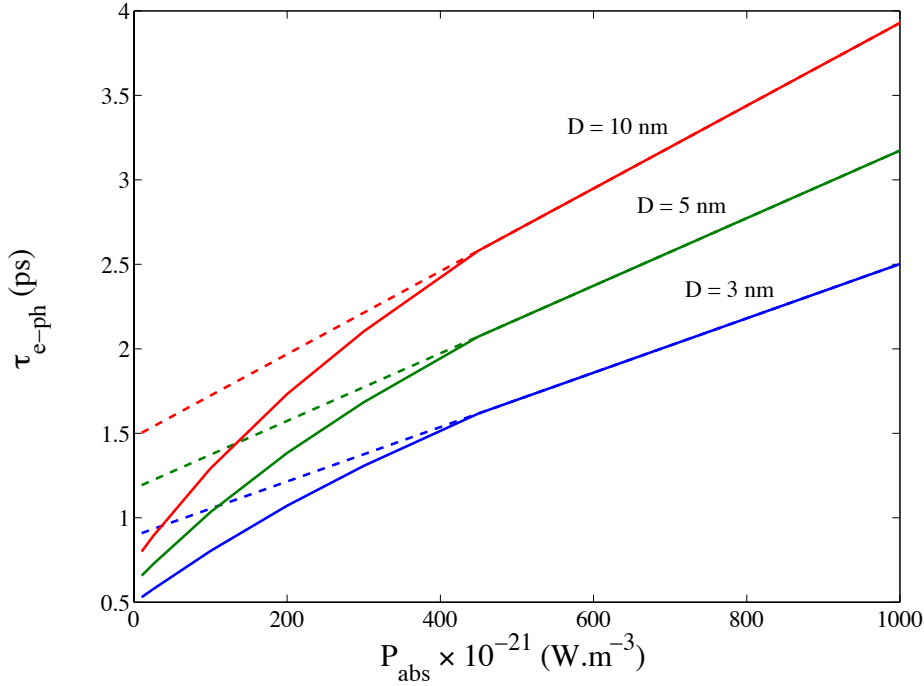


FIG. 5.4 – Temps de relaxation électronique pour des nanoparticules d'argent enfouies dans une matrice de verre en fonction de la puissance absorbée : dépendance en fonction du diamètre  $D$ .

l'extrapolation des résultats aux fortes puissances, obtenus avec notre modèle, conduit à une valeur du temps de relaxation ayant une dispersion relativement importante mais centrée sur la valeur du matériau massif. La dispersion est quand même d'environ  $\pm 25\%$  entre les deux valeurs extrêmes :  $\tau_{e-ph} = 1.5$  ps pour  $D = 10$  nm,  $\tau_{e-ph} = 1.2$  ps pour  $D = 5$  nm et  $\tau_{e-ph} = 0.9$  ps pour  $D = 3$  nm. Ceci confirme donc la "tendance" des observations faites expérimentalement. Il apparaît que la procédure d'extrapolation *linéaire* n'est pas justifiée pour les faibles puissances absorbées par la particule, la variation du temps de relaxation avec la puissance étant *non linéaire* (*cf.* Fig. 5.4). Cette non linéarité est due au fait que la capacité calorifique  $C_e$  dépend de la température et pas au modèle à deux températures étendu.

Le modèle à deux températures étendu permet de rendre compte de la dépendance des résultats en fonction du rayon. Il permet également d'expliquer que la procédure de traitement des mesures à haute température ne retrouve pas la dépendance en  $D$ .

Cependant, un point n'a pas été exploré. En effet, à forte fluence, il semblerait normal que les constantes de couplage électron-phonon  $G$  et  $G'$  dépendent de la température, ce dont le modèle ne tient pas compte.

## Conclusion

Nous avons dans ce chapitre développé un modèle *simple* permettant de décrire la dynamique de la relaxation électronique de nanoparticules métalliques enfouies dans une matrice diélectrique. Nous avons montré que la prise en compte des échanges d'énergie par couplage *non radiatif* entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice conduisait à considérer que les collisions électrons-phonons n'étaient efficaces que très près de la particule (sur une épaisseur de l'ordre du nanomètre). Notre modèle électromagnétique n'étant plus valable à cette échelle, nous n'avons gardé que l'idée d'un mécanisme *supplémentaire* d'échange d'énergie qui serait essentiellement *surfactive*. Avec cette hypothèse simple, nous avons retrouvé dans le régime des basses fluences le comportement expérimental du temps de relaxation électronique en fonction de la taille de la particule : celui-ci diminue lorsque le rayon de la particule diminue également. Cette dépendance permet de déterminer un paramètre de couplage entre les électrons et les phonons de la matrice. Dans le régime des fortes fluences, les résultats expérimentaux sont relativement bien reproduits par le modèle à deux températures étendu.

Cependant, deux questions restent posées. La première concerne la dépendance du coefficient de couplage  $G'$  (électron particule - phonon matrice) par rapport aux températures  $T_e$  et  $T_m$  ; la deuxième porte sur la dépendance de  $G'$  en fonction de la nature du matériau de la matrice.





## Chapitre 6

# La force de Casimir entre deux plans

### Introduction

Ce dernier chapitre concerne l'étude des forces de Casimir dans une configuration plan-plan et ceci dans le cadre de l'électrodynamique. Nous avons été amenés à étudier ce sujet suite à la mise en évidence d'effets d'exaltation du transfert radiatif entre deux milieux semi-infinis comme cela a été décrit au chapitre 3. L'idée était alors de voir si un tel effet ne se produisait pas pour la force d'interaction entre deux plaques. Cela peut être utile notamment lors de mesures expérimentales où souvent la force de Casimir est négligeable par rapport aux autres forces, notamment électrostatiques, et difficile à déterminer précisément.

Il est impossible de parler de l'“effet *Casimir*” sans évoquer le concept de l'énergie du vide. En 1900, Planck formula sa théorie du rayonnement du corps noir. Il établit qu'à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , l'énergie *moyenne* d'un mode du champ électromagnétique est le produit d'un quantum d'énergie  $\hbar\omega$  – le photon – ( $\hbar$  étant ce qu'on appelle désormais la *constante de Planck*) par le nombre moyen  $\bar{n}_\omega$  de photons qui occupent ce mode, donné par :

$$\bar{n}_\omega = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \quad (6.1)$$

Remarquons cependant que, pour Planck, la “quantification” n'était pas une réalité mais une astuce de calcul sans signification. À ce stade, cette loi satisfaisait Planck puisqu'à température nulle, le rayonnement de corps noir était nul ( $\bar{n}_\omega = 0$ ). Il était ainsi possible d'imaginer pouvoir atteindre un jour le vide absolu (absence de matière et de rayonnement). Malgré cela, Planck continue ses recherches et aboutit à une expression différente pour le nombre moyen de photon par mode valant désormais  $\bar{n}_\omega + 1/2$ . Ce résultat établit que même à température nulle, l'espace est rempli d'un rayonnement *résiduel* correspondant à la moitié de l'énergie d'un photon. Cette énergie est appelée l'*énergie du vide* ou énergie de point zéro. Les développements ultérieurs de la théorie quantique (notamment les travaux d'Einstein sur l'effet photo-électrique) et l'introduction de la quantification du champ électromagnétique confirmèrent ce résultat, notamment à la limite classique ( $\hbar\omega(\bar{n}_\omega + \frac{1}{2}) \rightarrow k_B T$  pour les hautes températures). L'énergie du vide est alors associée aux fluctuations quantiques du champ, considéré dans son état fondamental.

Cependant, ce résultat n'est pas sans poser de problèmes. En effet, il conduit à attribuer au vide une énergie par unité de volume *infinie* : c'est le problème de l'énergie du vide, non encore résolue à ce jour. Ceci pose de nombreux problèmes aux scientifiques du début du siècle et il faut savoir que le débat concernant l'énergie du vide est encore ouvert aujourd'hui. Il était d'autant plus difficile, à l'époque, d'appréhender ce concept que les preuves expérimentales de son existence faisaient défaut. C'est alors que Casimir a découvert (Casimir 1948b) que deux miroirs

parfaitement réfléchissants, maintenus parallèles entre eux et à une distance très faible s'attiraient à cause des fluctuations quantiques du vide situé entre eux. Ce fut alors l'une des premières prédictions d'une conséquence de l'énergie du vide.

Dans ce chapitre, nous ferons un bref historique de l'“effet Casimir”, depuis sa découverte jusqu'aux développements les plus récents, en passant par les enjeux scientifiques (théoriques, expérimentaux et technologiques). Ensuite, après avoir précisé l'approche physique que nous avons adoptée pour étudier les forces de Casimir, à savoir celle initialement développée par Lifchitz (1956), nous étudierons ces forces pour des matériaux métalliques et diélectriques. Nous verrons enfin qu'une interprétation simple et originale des forces de Casimir à courte distance peut alors être initiée en termes d'interaction entre polaritons de surface.

## 6.1 Bref historique de l'“effet Casimir”

Nous rappellerons ici le contexte scientifique dans lequel l'“effet Casimir” a été découvert et en quoi il consiste précisément. Quelques contributions théoriques majeures ainsi que leur lien seront alors succinctement évoquées pour souligner les points importants pour l'étude de ce phénomène particulier. Nous examinerons ensuite quelles sont les implications théoriques d'une telle découverte, les efforts expérimentaux mis en oeuvre depuis longtemps pour mesurer la force de Casimir et les applications technologiques potentielles sur lesquelles ces expériences peuvent déboucher.

### 6.1.1 La découverte de Casimir

#### Le problème initial présenté par H. B. G. Casimir<sup>1</sup>

La motivation initiale de Casimir était d'expliquer une partie des travaux de Verwey et Overbeek (Verwey 1947, Verwey et Overbeek 1948) concernant la stabilité des suspensions colloïdales (utilisées notamment pour déposer des films pour les lampes et les tubes cathodiques). Ils étudiaient des poudres de quartz et les expériences qu'ils réalisaient n'étaient pas en accord avec la théorie. Les forces d'interaction entre particules colloïdales ne suivaient pas les lois établies auparavant par van der Waals (1873) puis par London (1930). Une des hypothèses avancée par Verwey et Overbeek était que les effets de retard – dus à la valeur *finie* de la vitesse de la lumière – ne pouvaient pas être négligés dans une modélisation de leur expérience. Casimir et Polder, collègues de Verwey et Overbeek aux Laboratoires *Philips*, ont alors étudié, dans le cadre de *l'électrodynamique quantique*, l'interaction d'un atome neutre avec un plan parfaitement conducteur et montré que la prise en compte du retard dû à la propagation conduisait effectivement à une force d'interaction plus faible que celle de London-van der Waals (Casimir et Polder 1948). Le même résultat a été également démontré dans le cas de l'interaction entre deux atomes neutres.

#### L'“effet Casimir”

La même année, Casimir réinterprète ses résultats en termes de *fluctuations quantiques du vide* et d'*énergie de point zéro*<sup>2</sup>. Cet article est certainement le plus connu de Casimir : c'est celui qui établit ce qu'il est convenu d'appeler désormais l'“effet Casimir”.

Considérons une cavité formée de deux miroirs parfaitement réfléchissants et parallèles entre eux (*cf.* Fig. 6.1), séparés par une épaisseur  $d$  de vide, supposée négligeable devant la surface des miroirs. Nous supposons par ailleurs que les deux miroirs (métalliques) ne sont pas chargés (nous pouvons imaginer par exemple qu'ils sont reliés à la terre).

À température nulle (pas de rayonnement *thermique*), chacun des deux miroirs subit une force par unité de surface (donc une *pression*)  $F_{Cas}$  qui vaut exactement :

$$F_{Cas} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4} \approx \frac{1.3001 \times 10^{-3}}{d^4(\mu\text{m})} \quad (\text{N.m}^{-2}) \quad (6.2)$$

Cette force est *attractive*, c'est-à-dire qu'elle tend à rapprocher les deux miroirs. Elle est désormais connue sous le nom de “force de Casimir”. À l'époque, on a parlé d'“effet Casimir” car cette force était la première manifestation physique des fluctuations quantiques du vide, autrement dit de l'énergie du vide (énergie de point zéro).

1. Casimir et Polder 1948

2. H. B. G. Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap. **51**, 793-795 (1948).

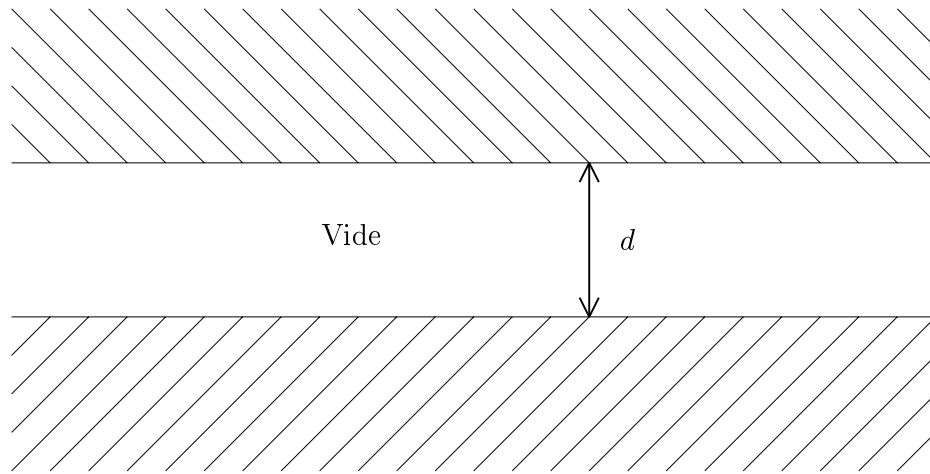


FIG. 6.1 – *Système étudié originellement par H. B. G. Casimir en 1948.*

### Méthode de calcul et interprétation physique

Pour établir ce résultat, Casimir étudie l'énergie de point zéro (énergie du vide) contenue dans la cavité, formée par les deux miroirs parfaits. Celle-ci possède des modes (solutions des équations de Maxwell) qui sont déterminés grâce aux conditions aux limites (relations de continuité des champs aux interfaces) imposées par les miroirs. Chaque mode est caractérisé par une pulsation  $\omega$  et une énergie (de point zéro)  $\hbar\omega/2$  à température nulle. En sommant sur l'ensemble des modes possibles (il y en a une infinité), Casimir obtient l'énergie du vide contenue entre les plaques. Bien évidemment, cette énergie est infinie. Cependant, Casimir retranche à cette quantité l'énergie que nous aurions trouvée si les deux plaques avaient été infiniment éloignées. Il trouve alors une quantité *finie* que nous pourrions considérer comme l'énergie "libre" du système<sup>3</sup>. Nous noterons  $E_{Cas}(d)$  cette énergie "libre". La force se déduit alors de la relation :

$$F_{Cas}(d) = -\frac{dE_{Cas}}{dd} \quad (6.3)$$

Une autre explication de l'"effet Casimir", plus intuitive, est la suivante. Considérons les deux plaques séparées par une distance  $d$ . Si nous imaginons les écarter l'une de l'autre, alors le nombre de modes dans la cavité va augmenter ainsi que l'énergie. Ainsi, il apparaît une force attractive qui s'oppose à l'augmentation de l'énergie du système et qui a tendance à rapprocher les deux plaques.

Finalement, ce qu'il faut retenir, c'est que l'"effet Casimir" est la manifestation macroscopique d'un phénomène quantique, les fluctuations du vide.

Le paragraphe suivant dresse une brève bibliographie d'articles théoriques (liste non exhaustive) traitant de l'"effet Casimir". Même si cet effet a été découvert pour la première fois dans le cadre de l'électrodynamique quantique, la dénomination d'"effet Casimir" est de plus en plus utilisé dans tous les domaines de la physique théorique. Il est notamment invoqué lorsque, dans un système physique de géométrie quelconque, l'imposition de conditions aux limites modifient les états accessibles du vide.

---

3. Cette démarche ressemble au raisonnement que nous faisons pour déterminer l'énergie *de constitution* d'un système de charges où nous imaginons qu'un opérateur apporte de manière réversible les charges depuis l'infini (où les charges ne sont pas en interaction) jusqu'à leur position finale.

## 6.1.2 Les contributions majeures au sujet des forces de Casimir

### Approches classiques fondées sur le théorème de fluctuation-dissipation

Lifchitz (1956) a étudié les forces de Casimir entre deux milieux semi-infinis avec une approche tout-à-fait différente de celle de Casimir. À l'instar de Rytov, il développe une théorie fondée sur l'électrodynamique classique et sur l'introduction de termes sources fluctuants dans les équations de Maxwell. Ces termes sources vérifient le théorème de fluctuation-dissipation et génèrent des champs fluctuants dans l'espace qui interagissent avec la matière pour donner naissance à des forces. Nous détaillerons plus précisément cette méthode dans la section 6.2 car c'est celle que nous avons adoptée pour notre étude. Lifshitz, cependant, traite le cas général de deux milieux semi-infinis caractérisés chacun par une constante diélectrique *complexe* et dépendant de la pulsation. Ceci lui permet de traiter aussi bien le cas des métaux que celui des diélectriques. Dans la limite de deux métaux parfaitement conducteurs (miroirs parfaits) à température *nulle*, il retrouve exactement le résultat de Casimir pour la force. Par ailleurs, il donne quelques résultats asymptotiques sur les limites courte et longue distances ainsi que pour une température non nulle. Une limite de son approche est liée au fait qu'il doit effectuer une intégrale dans le plan complexe. Ceci ne peut pas être réalisé si nous ne disposons pas d'un modèle analytique pour la constante diélectrique.

Cependant, il peut apparemment sembler “bizarre” qu'une approche fondée sur l'électrodynamique classique des champs fluctuants puisse donner le même résultat qu'une approche fondée sur le concept quantique d'énergie de point zéro. En fait, il n'en est rien et Boyer (1968) a résolu ce problème en établissant l'équivalence d'un calcul du type Casimir-Polder et un calcul du type Rytov-Lifshitz.

### Interprétation de la force de Casimir en termes de “modes de surfaces”

van Kampen *et al.* (1968) appliquèrent la méthode de Casimir à l'étude de l'interaction entre deux plans semi-infinis séparés par une distance  $d$ , dans la *limite électrostatique*. Ceci correspond au cas où l'on néglige les effets de retard dus à la propagation, c'est-à-dire au cas des forces de van der Waals. L'idée de van Kampen est de retrouver le résultat établi par Lifchitz (1956) auparavant dans ce cas-là. Il calcule l'énergie “libre” du vide compris entre les plaques, non en comptant explicitement les modes du système et en sommant leur énergie, mais en intégrant, suivant un chemin bien choisi dans le plans complexes, une fonction dont les zéros correspondent aux modes du système. Pour van Kampen, ces modes correspondent aux “modes de surface”<sup>4</sup> du système. Dans le cas *non réaliste* de deux métaux décrits par une constante diélectrique *réelle*, il retrouve la formule de Lifchitz (1956) dans le cas non retardé. Cependant, van Kampen ne dit pas ce que sont ces “modes de surface”, modes guidés (propagatifs) ou polaritons de surface (évanescents). Discutons ainsi ici de la signification précise de ces “surface modes” dont parle van Kampen.

Nous supposons pour simplifier la discussion que les matériaux sont les mêmes. Considérons les solutions en  $K$  et en  $\omega$  ( $K$  et  $\omega$  sont *a priori* complexes) de l'équation :

$$r^2(K, \omega) \exp [2i \gamma_{vide}(K, \omega) d] = 1 \quad (6.4)$$

où  $r = r_s$  ou  $r_p$  sont les facteurs de Fresnel en réflexion (nous considérons que nous avons les deux mêmes matériaux). La grandeur  $\gamma_{vide}$  est définie par :

$$\gamma_{vide}(K, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - K^2} \quad (6.5)$$

---

4. van Kampen utilise le terme de “electrostatic surface modes”.

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

### 1. Cas de milieux sans pertes

En l'absence de pertes (matériau non absorbant), la constante diélectrique est réelle ainsi que les facteurs de Fresnel. Les solutions en  $K$  et  $\omega$  sont alors *réelles* et nous les appellerons “modes de surface”. Nous avons *deux* types de mode (*cf.* Fig. 6.2) :

- onde *guidée* si  $K < \frac{\omega}{c}$  *i.e.*  $\gamma_{vide}$  réel ;
- onde *de surface* si  $K > \frac{\omega}{c}$  *i.e.*  $\gamma_{vide}$  imaginaire pur.

Pour les ondes propagatives, ces solutions correspondent à de *vrais* modes guidés (ondes stationnaires dans la direction  $z$ ) ; pour les ondes évanescentes, si  $d \gg \lambda$ , alors nous avons le polariton habituel sur chaque interface. Quand  $d$  diminue, les polaritons interagissent entre eux.

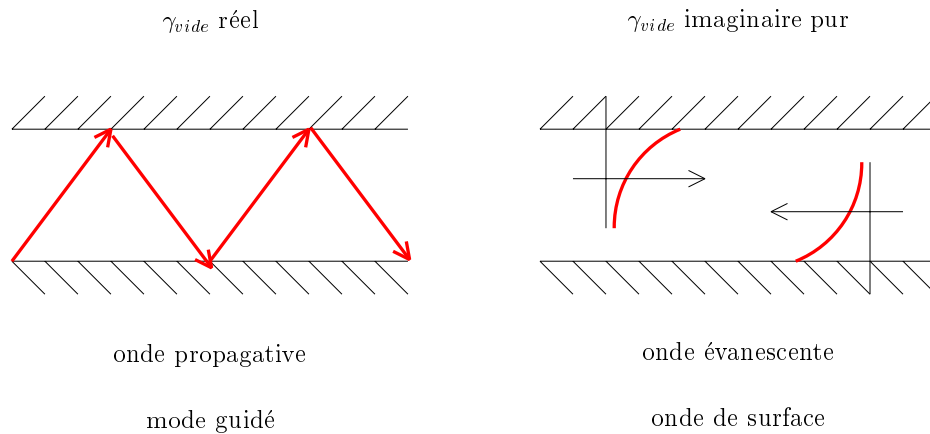


FIG. 6.2 – Signification précise des “modes de surfaces” ( $\gamma_{vide}$  correspond à la composante perpendiculaire aux interfaces du vecteur d’onde dans le vide).

### 2. Cas de milieux avec pertes

En présence de pertes (cas physique le plus général), la constante diélectrique est complexe ainsi que les facteurs de Fresnel. Les solutions en  $K$  et en  $\omega$  sont alors *complexes*. Pour  $K$  réel, la solution n’existe que pour  $\omega$  complexe : le “mode” a une durée de vie limitée (*cf.* discussion faite sur la relation de dispersion du polariton de surface au paragraphe 1.6.3). Nous pouvons également fixer  $\omega$  réel et alors  $K$  est complexe : ceci correspond à la décroissance spatiale du “mode”. Nous continuerons cependant à séparer les “modes” de la manière suivante :

- onde *guidée* si  $Re(K) < \frac{\omega}{c}$  ;
- onde *de surface* si  $Re(K) > \frac{\omega}{c}$ .

Cependant, nous les appellerons “résonances de surface” au lieu de “modes de surface”<sup>5</sup>.

Cette discussion faite, il faut rappeler que van Kampen n’explique pas quels sont les modes qui contribuent *réellement* à la force. Son approche ne permet pas en effet d’étudier en détail ces contributions, elle ne fournit que la résultante (force totale intégrée sur les pulsations).

5. Une autre interprétation de ces résonances de surface est faite à l’annexe E, Sec. E.5.

Peu de temps après, Gerlach (1971) réalise le même type de calcul en l'étendant au cas retardé. Il retrouve bien évidemment le même résultat que van Kampen dans la limite non retardée. Il attribue les forces de Casimir à l'interaction de “plasmons de surface”<sup>6</sup>, même si, pour lui, les plasmons de surface comprennent aussi bien les modes guidés que les *vraies* ondes de surface, et ceci quelle que soit la polarisation.

Ensuite, Schram (1973) montra que Gerlach avait commis quelques erreurs mathématiques dans son travail. Néanmoins, même si Schram fait un calcul plus rigoureux, il aboutit au même résultat que Gerlach, celui-ci ayant oublié des contributions à l'énergie qui disparaissent lorsque nous passons à la force (soit elles ne dépendent pas de la distance  $d$  de séparation, soit elles disparaissent quand on régularise l'énergie du vide par une soustraction d'une géométrie de référence).

Ce qu'il est important de voir dans ces trois travaux, c'est le début d'une interprétation physique de l'“effet Casimir” en termes de “modes de surface”. Cependant, nous pouvons formuler les mêmes critiques vis-à-vis d'eux :

- la signification précise du terme “modes de surface” n'est jamais donnée : nous ne savons pas si ces modes sont propagatifs (ondes guidées) ou évanescents (ondes de surface) ;
- la constante diélectrique est considérée comme une grandeur réelle dépendant de la pulsation : ceci viole la causalité mais cela permet de définir de “vrais” modes pour la cavité.

Soulignons également les articles de Kupiszewska et Mostowski (1990), de Kupiszewska (1992) et de Zhou et Spruch (1995) concernant le problème de la régularisation de l'énergie du vide dans une approche de type Lifshitz.

### Influence de la température et des propriétés des matériaux

À la suite d'un article de Schwinger *et al.* (1978), il est apparu que Lifchitz (1956) avait commis une erreur dans l'un de ces calculs asymptotiques à propos de la force d'interaction entre deux milieux semi-infinis à température *non nulle*. Dans le cas non retardé, il apparaît que la dépendance en température trouvée par Lifshitz, dans la limite des hautes températures ( $T \gg \hbar c/2k_B d$ ) et dans la limite de métaux parfaitement conducteurs (miroirs parfaits), est erronée. Schwinger montre alors que pour trouver la bonne dépendance, il est nécessaire de prendre la limite “miroir parfait” avant la limite “haute température”. Cette prescription est désormais connue sous le nom de “prescription de *Schwinger*”. Pour une étude détaillée de cette polémique (et des suivantes), on pourra se reporter utilement à Genet (2002).

Citons également les recherches menées par Lambrecht, Reynaud et Genet (Lambrecht et Reynaud 2000, Genet *et al.* 2000) concernant l'étude des forces de Casimir à température non nulle pour des métaux réels (conductivité *finie*). Ces travaux représentent un réel effort de modélisation théorique de l'“effet Casimir” afin de prédire très précisément la valeur de la force de Casimir, valeur pouvant servir de référence pour les expérimentateurs. D'autres références sont également intéressantes : Svetovoy et Lokhanin (2001), Matloob et Falinejad (2001) et Dorofeyev *et al.* (2002).

Enfin, on pourra se reporter à Milonni (1993) pour une étude du vide quantique et à quelques articles de revue concernant l'“effet Casimir” (Plunien *et al.* 1986, Bordag *et al.* 2001 et Lamoreaux 1999b).

Nous pouvons observer que l'“effet Casimir” est un sujet très étudié aujourd'hui. Outre le problème de l'énergie du vide, nous allons voir dans la suite qu'il a d'autres implications en physique théorique. C'est la raison pour laquelle de nombreuses expériences ont été menées pour essayer de mesurer les forces de Casimir, avec différents matériaux et dans diverses géométries. Enfin, nous donnerons quelques exemples d'application de l'“effet Casimir” aux nanotechnologies.

---

6. Gerlach utilise également le terme de “surface-charge-density oscillations”.



### 6.1.3 Les enjeux scientifiques et techniques

#### Les implications théoriques

La première implication de l’“effet Casimir” se situe au niveau de la théorie quantique des champs et du problème – toujours non résolu – de l’énergie du vide. Car l’“effet Casimir” est l’une des manifestations physiques *mesurables* des fluctuations du vide et peut donc nous aider à mieux comprendre la signification de ce concept.

La deuxième implication découle de la première et concerne le phénomène de l’expansion de l’Univers. Celle-ci a été prévue par *Einstein* dans sa théorie sur la relativité générale. Cependant, Einstein ne croyant pas à ce résultat, introduisit un paramètre dans ses équations, appelé désormais *constante cosmologique* afin d’obtenir un modèle d’Univers statique. Cette constante sera abandonnée à la suite des découvertes de *Hubble* sur l’expansion de l’Univers. Récemment, des chercheurs ont montré (Goldhaber et Perlmutter 1998) à partir d’observations de supernovae très lointaines, que l’Univers était bien en expansion et que cette expansion allait en s’accéléralant. Cette découverte implique que la constante cosmologique n’est pas nulle mais strictement positive. Elle est alors réinterprétée grâce à l’énergie du vide, dont la force associée serait de sens opposé à la force gravitationnelle.

Enfin, les forces de Casimir interviennent dans les modèles d’unification des interactions<sup>7</sup> où l’on cherche à mettre en évidence l’existence de nouvelles forces prévues par la physique théorique. Les scientifiques cherchent notamment à vérifier la gravité newtonienne à courte distance (distance d’interaction entre  $1\ \mu\text{m}$  et  $1\ \text{nm}$ ). Cependant, l’intensité de ces forces est très faibles et lors des mesures expérimentales, il est nécessaire *a posteriori* de soustraire précisément les forces de Casimir pour les identifier. Ainsi, de nombreux efforts ont été fait ces dernières années tant au niveau du calcul théorique de ces forces de Casimir que de leurs mesures expérimentales. Citons, dans ce cadre-là, le travail de Genet (2002) concernant la comparaison théorie-expérience pour les forces de Casimir. Nous aurons l’occasion d’y revenir (*cf.* Sec. 6.3).

#### Les mesures expérimentales

Les premiers essais de mesures expérimentales de la force de Casimir ont été effectués par Overbeek et Sparnaay (1951) sur du verre. Cependant, les premiers résultats ne sont pas encourageants. Il faudra attendre 1957 pour que Sparnaay réalise enfin des mesures sur des miroirs métalliques en aluminium, chrome ou acier (Sparnaay 1957, Sparnaay 1958). Les problèmes principaux qui se posent alors sont le contrôle de la distance entre les deux miroirs et surtout la conservation du parallélisme entre eux. Sparnaay concluent que ces mesures ne sont pas incohérentes avec le résultat de Casimir; cependant, celles-ci sont quand même représentées avec une incertitude de 100%. Derjaguin et Abrikosova (1957), la même année, réalisent l’expérience entre un milieu diélectrique et une lentille sphérique: ceci leur permet de mieux contrôler parallélisme et distance (mesure interférométrique). De plus, ils développent un modèle (*proximity force theorem*) capable de tenir compte des modifications de géométrie par rapport à la situation de référence (géométrie plan-plan). Plus tard, Blockland et Overbeek (1978) parviendront à atteindre un accord de l’ordre de 30% entre la théorie et l’expérience.

Ce n’est qu’en 1997 qu’enfin une mesure précise de l’“effet Casimir” est réalisée par Lamoreaux (Lamoreaux 1997; Lamoreaux 1998) dans une configuration miroir métallique / sphère métallique pour des distances de séparation comprises entre  $0.6$  et  $6\ \mu\text{m}$ . Le montage expérimental comporte un pendule de torsion électromécanique contrôlé grâce aux forces électrostatiques existant entre le plan et la sphère. Un accord d’environ 5% est obtenu entre les mesures et les

---

7. Il y a 4 interactions fondamentales: l’interaction forte (responsable de la cohésion du noyau atomique), l’interaction faible (responsable de la radioactivité  $\beta$ ), l’interaction électromagnétique (mouvements des particules chargées) et l’interaction gravitationnelle.

predictions de Casimir<sup>8</sup>. Plus récemment, Mohideen et Roy (1998) ont réalisé des expériences dans la même configuration que précédemment : la sphère métallique est placée à l'extrémité de la pointe d'un microscope à force atomique. En tenant compte de la rugosité de surface du miroir, des corrections de conductivité et de température finies, ils obtiennent des résultats avec une différence de l'ordre de 1% entre théorie et expérience. Cependant, ces résultats ont été sujet à polémiques (Lamoreaux 1999a; Mohideen et Roy 1999). Ces dernières années, de nombreuses recherches se sont orientées vers la mesure précises de la force de Casimir et la comparaison avec la théorie (Klimchitskaya *et al.* 1999; Boström et Sernelius 2000; Bordag *et al.* 2000).

## Les applications technologiques

Avec les expériences que nous venons de décrire, nous comprenons que les forces de Casimir peuvent avoir une importance ou un effet notable dans des systèmes de taille micrométrique ou nanométrique. D'ailleurs, ces dernières années, les systèmes microélectromécaniques (ou MEMS en anglais pour "MicroElectroMechanical Systems") se sont beaucoup développés. Ce sont des composants (fonctionnant avec de faibles tensions) fabriqués à partir de matériaux semiconducteurs (Si, Ge) grâce à des techniques issues de la microélectronique. Ils sont utilisés notamment comme capteurs de pression (Airbag), multiplexeurs optomécaniques pour les télécommunications optiques et détecteur/actionneurs micro ou submicrométriques. Récemment, l'équipe de F. Cappa aux Bell Labs (Chan *et al.* 2001a; Chan *et al.* 2001b) a travaillé sur des MEMS constitués d'une sphère de polystyrène et d'une plaque de polysilicium pouvant osciller autour d'un axe. Des effets non linéaires (bistabilité, hystérésis et glissement de fréquence) associés à la force de Casimir ont été observés *expérimentalement* sur de tels systèmes miniaturisés. Ainsi, l'"effet Casimir" peut être utilisé dans de tels oscillateurs pour contrôler le mouvement mécanique des différentes parties d'un MEMS. Néanmoins, Buks et Roukes (2001) ont observé expérimentalement que la force de Casimir (qui est attractive) pouvait également conduire à ce que les différentes parties d'un MEMS se "collent" les uns aux autres, rendant impossible son utilisation. Citons enfin le livre de Mostepanenko et Trunov (1997) sur les diverses applications de l'"effet Casimir".

Ce tour d'horizon montre que l'"effet Casimir" a été une découverte majeure de ces cinquante dernières années et a été largement étudié pour en donner une interprétation physique, notamment en termes de fluctuations du vide. De nombreuses recherches lui ont été consacré car il a non seulement des implications fondamentales en physique théorique mais aussi des applications technologiques potentielles.

## 6.2 Calcul de la force de Casimir entre deux plans semi-infinis

Nous exposerons ici brièvement l'approche que nous avons adoptée pour modéliser les forces de Casimir et la méthode que nous avons utilisée pour réaliser les estimations théoriques de ces forces. Nous soulignerons les avantages et les inconvénients de notre méthode par rapport à celle qui est couramment utilisée et qui est fondée sur le travail de Lifchitz (1956). Une simulation numérique sur un cas simple nous permettra de valider notre méthode.

### 6.2.1 Position du problème

#### Géométrie du système

La géométrie du système est exactement la même que celle du chapitre 3; elle est représentée sur la figure 6.3. L'espace est divisé en trois sous-espaces : le premier milieu (milieu 1) qui remplit l'espace défini par  $z < 0$  est constitué d'un matériau caractérisé par une constante diélectrique

---

8. Lamoreaux n'a pas introduit dans son modèle de correction due au rayonnement thermique.

$\varepsilon_1(\omega)$ ; le deuxième milieu (milieu 2) qui remplit l'espace défini par  $z > d$  ( $d$  constante réelle) est constitué d'un matériau caractérisé par une constante diélectrique  $\varepsilon_2(\omega)$ ; enfin, le troisième, défini par  $0 < z < d$  est constitué par du vide, de constante diélectrique  $\varepsilon_3(\omega) = 1$ .

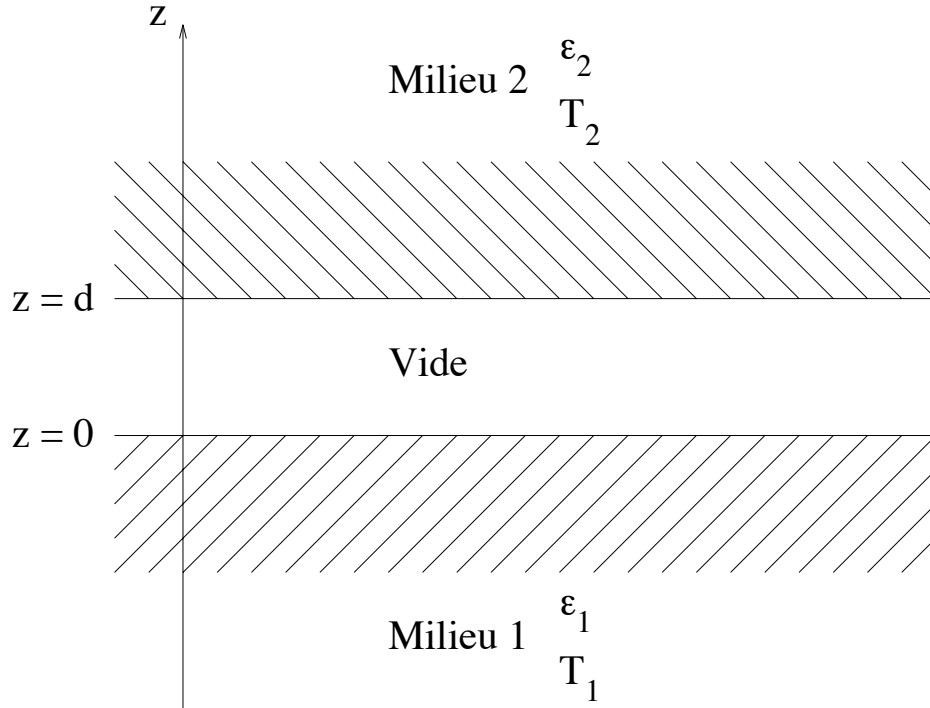


FIG. 6.3 – Géométrie du système.

*A priori*, nous ne supposons rien sur la nature des matériaux (métaux, diélectriques, semi-conducteurs dopés ou non, ou matériaux polaires). Les deux milieux semi-infinis sont, en revanche, supposés être à la même température  $T$  uniforme et à l'équilibre thermodynamique local.

### Approche physique adoptée

Pour modéliser les forces de Casimir, nous avons utilisé le formalisme développé par Lifshitz (1956) dans le cadre de l'électrodynamique classique. Celui-ci consiste à introduire des termes fluctuants dans les équations de Maxwell et à calculer la force d'interaction entre les deux milieux à partir du tenseur des contraintes de Maxwell. Pour calculer la force suivant la direction  $z$ , il faut déterminer la composante  $T_{zz}$  de ce tenseur donnée par<sup>9</sup> :

$$T_{zz}(\mathbf{r}, \omega) = -4 \times \left\langle \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ |E_x|^2 + |E_y|^2 - |E_z|^2 \right] (\mathbf{r}, \omega) + \frac{\mu_0}{4} \left[ |H_x|^2 + |H_y|^2 - |H_z|^2 \right] (\mathbf{r}, \omega) \right\rangle \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont les champs électrique et magnétique oscillant à la pulsation  $\omega$  (signaux *analytiques*). À cause de l'invariance par translation (parallèlement aux plans), la dépendance en  $\mathbf{r}$  se réduit à une dépendance en  $z$  uniquement<sup>10</sup>. Par ailleurs, ce tenseur dépend bien évidemment de la distance de séparation  $d$  entre les milieux 1 et 2.

Nous noterons  $F(d, \omega)$  la force de Casimir à la pulsation  $\omega$ , c'est-à-dire la force d'interaction mutuelle entre les deux plans semi-infinis (à la température  $T$ ) séparés par une distance  $d$  qui est associée au champ électromagnétique rayonné à la pulsation  $\omega$  (fluctuations du vide + émission

9. Jackson (2001).

10. En réalité, le calcul montre que la composante  $T_{zz}$  ne dépend pas non plus de  $z$ .

thermique). Cette force est alors obtenue grâce à la relation simple  $F(d, \omega) = -T_{zz}(z = 0^+, \omega, d)$ . La force *totale* de Casimir résultante vaut ainsi :

$$F(d) = \int_0^\infty F(d, \omega) d\omega \quad (6.7)$$

Avec toutes ces définitions, nous avons finalement :

$$F(d) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{force attractive} \quad (6.8a)$$

$$F(d) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{force répulsive} \quad (6.8b)$$

### Résultats du calcul de la force de Casimir entre les deux milieux semi-infinis

La force  $F(d, \omega)$  peut être décomposée en plusieurs contributions : celle des ondes propagatives (dans l'espace vide entre les deux milieux) notée  $F^{prop}(d, \omega)$  et celle des ondes évanescentes notée  $F^{évan}(d, \omega)$ . Chacune de ces deux contributions se décompose en fonction des polarisations  $s$  et  $p$  :  $F^{prop,s}(d, \omega)$ ,  $F^{prop,p}(d, \omega)$  et  $F^{évan,s}(d, \omega)$ ,  $F^{évan,p}(d, \omega)$ . Un calcul long et fastidieux, détaillé en annexe E, conduit aux expressions suivantes pour les différentes contributions :

$$F^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (6.9)$$

$$F^{prop,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (6.10)$$

$$F^{évan,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_{k_0}^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (6.11)$$

$$F^{évan,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_{k_0}^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (6.12)$$

où  $r_{31}^{s,p}$  et  $r_{32}^{s,p}$  sont les facteurs de Fresnel en réflexion (*cf.* Sec. E.1.3) aux interfaces milieu 3/milieu 1 et milieu 3/milieu 2 respectivement en polarisation  $s$  et en polarisation  $p$ . De plus,  $k_0^2 = \omega^2/c^2$  et la grandeur  $\gamma_3$  est définie telle que :

$$\gamma_3 = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - K^2} & \text{si } 0 \leq K < k_0 \\ i\sqrt{K^2 - k_0^2} & \text{si } K \geq k_0 \end{cases} \quad (6.13)$$

La force totale  $F(d)$  peut se mettre sous la forme simple (et unique) suivante :

$$F(d) = \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \left( \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \right) \right] \quad (6.14)$$

Cette double intégration peut être évaluée numériquement directement. C'est la manière que nous avons choisie pour évaluer la force de Casimir et tous les résultats que nous présenterons dans la suite ont été calculés en utilisant cette expression.

### 6.2.2 Comparaison avec le calcul de Lifshitz

Le résultat précédent est également celui obtenu par Lifshitz (1956). Cependant, nous allons voir que celui-ci va plus loin dans le traitement mathématique. Nous comparerons alors son approche et celle que nous avons adoptée. Nous justifierons enfin l'utilisation de notre calcul pour la suite avec une simulation numérique.

#### L'approche adoptée par Lifshitz

Nous ne détaillerons ici que le cas où les deux milieux sont à température *nulle*. Le cas où la température est non nulle est traité en annexe E.

Pour ce cas où  $T = 0$ , nous avons  $\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) = 1$ . Lifshitz réalise alors plusieurs transformations des expressions précédentes et aboutit à l'expression de la force totale d'interaction entre les deux plans sous la forme :

$$F(d) = \int_0^\infty d\xi \frac{\hbar\xi^3}{2\pi^2 c^3} \int_1^\infty \gamma_0^2 d\gamma_0 \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}}{1 - r_{31}^s r_{31}^s e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}}{1 - r_{31}^p r_{31}^p e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}} \right] \quad (6.15)$$

où  $\xi$  représente la pulsation telle que  $\omega = i\xi$  :  $\omega$  est donc ici une pulsation "imaginaire". Cette double intégration correspond à un chemin d'intégration  $\Gamma'$  représenté sur la figure 6.4.

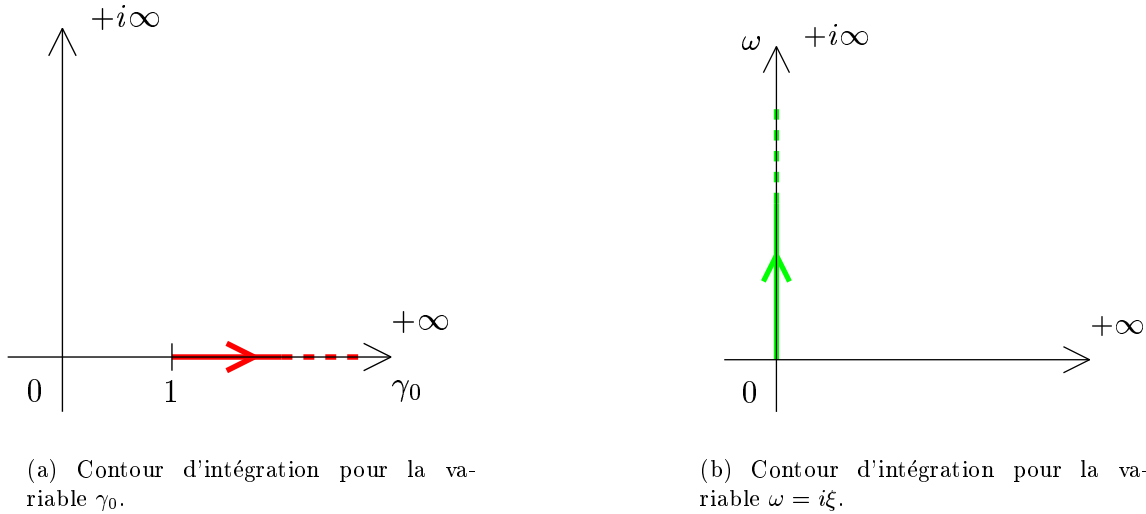


FIG. 6.4 – Contours d'intégration utilisés par Lifshitz à température nulle.

Notons que dans l'intégration précédente (notamment pour le calcul des facteurs de Fresnel), il est nécessaire de connaître la valeur de la constante diélectrique sur l'axe des pulsations *imaginaires pures*, définie par<sup>11</sup> :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 + \xi^2} d\omega' \quad (6.16)$$

Nous remarquons alors que sur cet axe, la constante diélectrique est une grandeur *réelle* et *positive* qui tend vers 1 pour  $\omega$  tendant vers  $i\infty$ . Ceci a notamment le mérite de rendre les facteurs de Fresnel réels. Néanmoins, cette transformation suppose que la constante diélectrique est *analytique* dans le plan complexe et que sa partie imaginaire est connue sur *tout* le spectre.

11. Lifshitz (1956)

## Différences entre les deux approches

Dans leur fondement, les deux approches sont identiques : pour calculer la force de Casimir, nous ne faisons que compter les états du champ électromagnétique et nous leur attribuons une énergie de  $\frac{\hbar\omega}{2}$  à chacun. Les différences résident dans le traitement de la formule finale.

Premièrement, nous intégrons sur une pulsation  $\omega$  réelle dont la signification physique est claire. En revanche, Lifshitz travaille avec une pulsation *imaginaire* sans signification physique. Ainsi, avec notre approche, l'introduction d'un spectre de la force d'interaction est assez intuitive alors qu'avec celle de Lifshitz, la notion de spectre de la force disparaît : il n'est pas possible d'évaluer quelles pulsations contribuent majoritairement à la force.

Deuxièmement, nous intégrons sur un vecteur d'onde  $K$  *réel* qui permet notamment de définir une direction de propagation pour les ondes propagatives et de les séparer clairement des ondes évanescentes. Dans le calcul de Lifshitz, la distinction entre ondes propagatives et ondes évanescentes n'existe plus. Nous verrons dans la suite que cette distinction est relativement importante, notamment lorsqu'il s'agira de discuter de la nature des forces de Casimir. Grâce à notre approche, la définition d'un mode "physique" ( $\omega, K$ ) du système est plus aisée.

Troisièmement, dans notre approche, nous travaillons avec une constante diélectrique *complexe* alors que Lifshitz utilise une constante diélectrique *réelle*. Les avantages de la méthode de Lifshitz sont essentiellement d'ordre numérique car son implémentation est plus aisée (notamment à température non nulle où l'intégration sur la pulsation se réduit à une somme *discrète*) et sa rapidité et sa fiabilité plus grande. Malheureusement, l'interprétation des résultats est plus difficile qu'avec notre méthode.

### 6.2.3 Validation de la méthode numérique adoptée

Pour valider notre méthode, nous avons effectué un cas test simple avec du chrome (Cr). Pour cela, nous avons utilisé un modèle de *Drude* pour la constante diélectrique :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{\omega_P^2}{\xi(\xi + \gamma)} \quad (6.17)$$

avec  $\omega_P = 7.875 \times 10^{15}$  rad.s<sup>-1</sup> et  $\gamma = 1.41 \times 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup>.

Bien évidemment, cette constante diélectrique n'est pas tout-à-fait réaliste (surtout aux hautes fréquences où il y a des contributions interbandes) mais l'essentiel est avant tout de voir que les approches utilisées par Lifshitz et par nous-même fournissent un résultat équivalent. Notons que cette constante diélectrique est analytique et qu'elle vérifie les relations de *Kramers-Kronig* (Jackson 2001).

Nous nous plaçons ici à température  $T = 0$  et nous étudions la force *totale* en fonction de la distance. Nous avons résumé les quelques résultats dans le tableau 6.1.

$d$	Éq. (6.14)	Éq. (6.15)	écart relatif (%)
10 nm	6103.755	6103.764	$-1.5 \times 10^{-4}$
100 nm	3.94099	3.94089	$2.5 \times 10^{-3}$
1 $\mu\text{m}$	$1.0134 \times 10^{-3}$	$1.0133 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$

TAB. 6.1 – Comparaison entre notre calcul (Éq. (6.14)) et celui obtenu avec la méthode de Lifshitz (Éq. (6.15)).

En dehors de toute interprétation des résultats, nous voyons que l'écart relatif entre les deux approches est toujours inférieur au pourcent. Nous pouvons donc dire que l'équivalence entre les deux formulations est validée sur ce modèle simple du modèle de Drude. Pour la suite, nous avons

toujours réalisé nos calculs avec notre méthode, même si celle-ci est beaucoup plus difficile à mettre en oeuvre numériquement et si les temps de calcul sont très longs (ils augmentent avec la taille  $d$  de la cavité). Néanmoins, cette méthode a l'immense avantage de fournir des résultats qui s'interprètent plus facilement, comme nous le verrons par la suite.

### 6.3 Force de Casimir pour un métal

Cette section a essentiellement deux buts : le premier est de montrer ce que vaut la force de Casimir dans des cas réalistes et à température non nulle ; le second est de montrer que nous retrouvons l'essentiel des prédictions faites par Lambrecht et Reynaud (2000) et Genet *et al.* (2000), confirmant ainsi, la validité de notre calcul.

Ici, nous travaillons donc uniquement avec des métaux. Nous étudions successivement le cas de milieux métalliques décrits par un modèle plasma (*cf.* Annexe A) à température nulle, de métaux réels à température nulle et enfin le cas général de métaux réels à température non nulle. Nous verrons quelles sont les différentes déviations à la “loi de Casimir” décrite par l'équation (6.2).

#### 6.3.1 Cas du modèle plasma à température nulle

Un métal décrit par un modèle plasma présente une constante diélectrique du type :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (6.18)$$

où  $\omega_p = (2\pi c)/\lambda_p$ ,  $\lambda_p$  étant la longueur d'onde plasma. Le tableau 6.2 donne des valeurs de  $\lambda_p$  d'après Lambrecht et Reynaud (2000).

Métal	$\lambda_p$ (nm)
Al	108
Au	138
Cu	138

TAB. 6.2 – Longueurs d'onde plasma pour différents métaux : Al, Au et Cu.

Avec ce modèle, les miroirs ne sont pas parfaits sur tout le spectre, ce qui est une différence essentielle avec le cas idéal de Casimir. Nous calculons alors la force totale  $F(d)$  avec ce modèle et nous définissons, à la manière de Lambrecht et Reynaud (2000), le paramètre  $\eta_F$  par :

$$\eta_F = \frac{F}{F_{Cas}} \quad (6.19)$$

Il correspond à un “facteur de réduction” par rapport au cas idéal, représentant ce que l'on appelle la correction de conductivité finie.

La figure 6.5 représente ce facteur en fonction de l'épaisseur *normalisée*  $d/\lambda_p$  de la cavité. Nous retrouvons le comportement courte distance ( $d \ll \lambda_p$ ) de la force de Casimir avec un facteur de réduction de la forme :  $\eta_F = \alpha(d/\lambda_p)$ . À partir de nos calculs, nous avons déduit que  $\alpha \approx 1.198$  au lieu de 1.193 prévu par Lambrecht et Reynaud (2000). À la limite des grandes distances, le modèle plasma tend vers le cas idéal de Casimir car l'épaisseur de peau dans le métal (proportionnelle à  $\lambda_p$ ) devient négligeable par rapport à  $d$ .

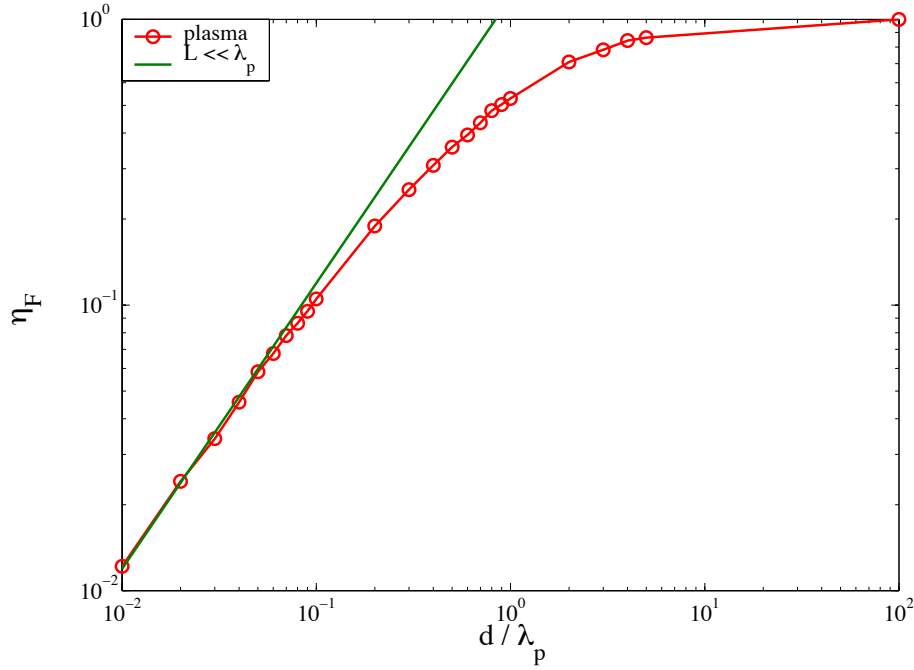


FIG. 6.5 – Facteur de réduction de la force de Casimir à température nulle dans le cas d'un métal de type plasma.

### 6.3.2 Cas d'un métal réel à température nulle : correction de conductivité finie

Pour le métal réel, nous avons choisi d'utiliser l'aluminium dont la constante diélectrique a été tabulée à partir de Palik (1985) entre 1 nm et 100  $\mu\text{m}$ . Signalons ici que le problème de la connaissance de la constante diélectrique d'un matériau est un problème critique pour l'évaluation précise de la force de Casimir. Nous pouvons même dire que c'est le principal facteur limitant du calcul aujourd'hui. C'est pourquoi il est nécessaire de prendre le plus grand soin dans la modélisation des propriétés optiques des matériaux si nous voulons calculer des valeurs de références de la force de Casimir, notamment pour les comparer ensuite à des mesures expérimentales. Cependant, le but ici n'est pas d'atteindre une précision inférieure au pourcent mais plutôt d'esquisser des tendances et de valider notre méthode de calcul.

Ainsi, nous avons déterminé le même facteur de réduction  $\eta_F$  que précédemment, et nous avons alors reporté nos résultats sur la figure 6.6. La première chose à remarquer est que même avec le métal réel, le facteur de réduction tend vers 1 lorsque la distance de séparation entre les deux milieux augmentent. Nous observons également la réduction de la force de Casimir à courte distance: la force pour des miroirs réels peut ainsi être divisée par 2 pour des distances de séparation inférieure à 100nm. À titre de comparaison, nous donnons dans le tableau 6.3 les valeurs que nous avons obtenues par le calcul ainsi que celles calculées par Genet (2002) avec une méthode de type Lifshitz.

$d$ ( $\mu\text{m}$ )	Éq. (6.14)	Genet (2002)
0.1	0.55	0.55
0.5	0.86	0.85
3.0	0.98	0.96

TAB. 6.3 – Facteurs de réduction de la force de Casimir à température nulle dans le cas de l'aluminium : comparaison avec les résultats obtenus par Genet (2002).



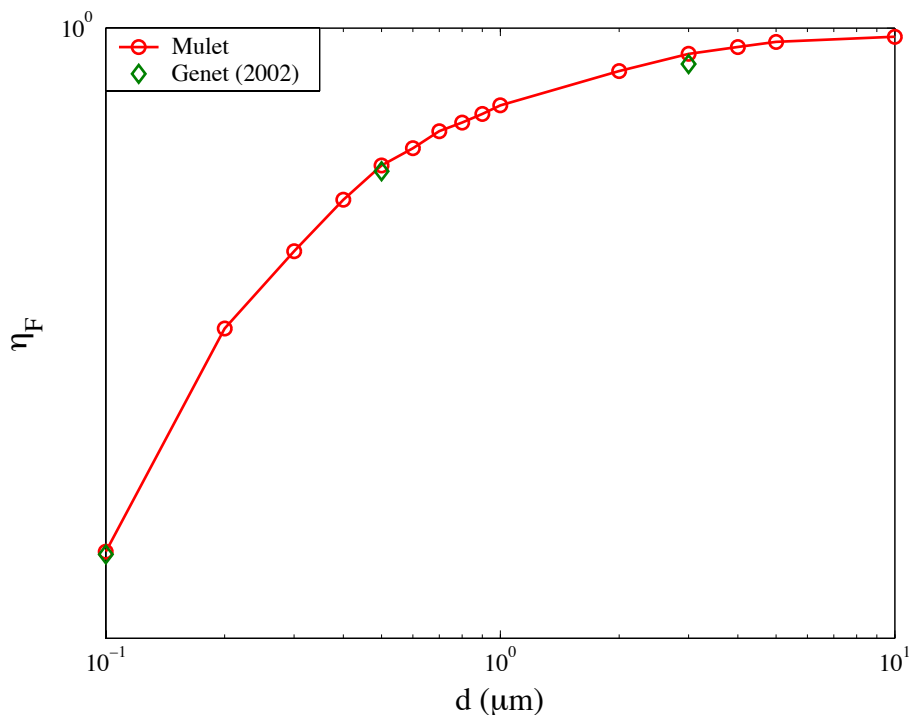


FIG. 6.6 – Facteur de réduction de la force de Casimir à température nulle dans le cas de l’aluminium (échelle log-log).

Les faibles différences entre les deux types de calcul peuvent avoir plusieurs origines mais nous pouvons en souligner 2 :

1. à grande distance, notre méthode numérique converge plus difficilement (par suite notamment des oscillations dues aux ondes propagatives) et la précision de nos calculs n’est pas très bonne ;
2. la méthode de Lifshitz impose de réaliser un pré-traitement de la constante diélectrique (*cf.* Éq. (6.16)) afin de la calculer sur l’axe imaginaire : ce traitement numérique supplémentaire peut introduire des erreurs systématiques sur le résultat final.

### 6.3.3 Cas d’un métal réel à température non nulle : correction de conductivité finie et de température

Jusqu’ici, nous nous étions toujours placé à température nulle si bien que le rayonnement thermique ne jouait aucun rôle dans la force de Casimir. Ici, nous reprenons le cas précédent de l’aluminium (modélisé par une constante diélectrique tabulée à partir de données expérimentales) mais à température non nulle pour observer la correction en température. Encore une fois, le but n’est pas de donner des formules asymptotiques pour le facteur de correction<sup>12</sup> mais plutôt de mettre en évidence des comportements physiques.

La figure 6.7 représente le facteur de correction  $\eta_F$  dans le cas de l’aluminium pour une température de 300 K. Par rapport à la figure précédente, il est intéressant de noter l’augmentation de la force de Casimir pour les grandes distances, c’est-à-dire pour des distances  $d \gg \lambda_T$  où

$$\lambda_T = \frac{\hbar c}{k_B T} \quad (6.20)$$

12. Pour cela, on pourra se reporter utilement à Genet (2002).

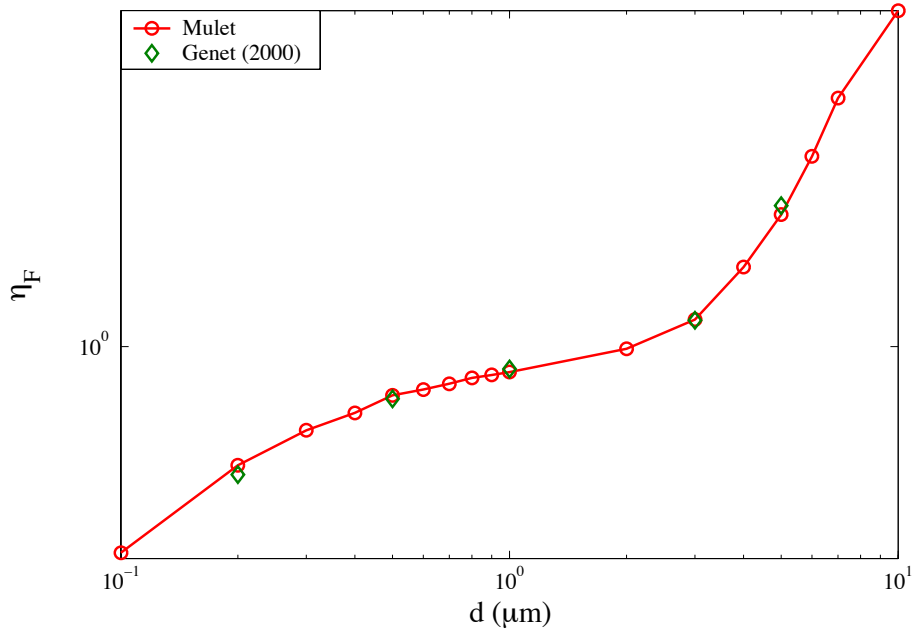


FIG. 6.7 – Facteur de réduction de la force de Casimir à température non nulle (300 K) dans le cas de l’aluminium (échelle log-log).

correspond à la longueur d’onde “thermique” au delà de laquelle la contribution du rayonnement thermique devient supérieure à celle des fluctuations du vide. Pour une température de 300 K, on a  $\lambda_T \approx 7.63 \mu\text{m}$ . Sur la figure, sont également reportées les valeurs calculées par Genet *et al.* (2000). L’accord entre les deux méthodes est encore relativement bon.

## 6.4 Force de Casimir à courte distance

Nous venons de voir la force de Casimir pour les métaux. Nous avons également étudié la force de Casimir pour les diélectriques et plus spécifiquement pour le carbure de silicium (SiC). Nous rappelons que ce matériau est susceptible de supporter des polaritons de surface dans l’infrarouge vers  $10 \mu\text{m}$  (phonon-polariton) et dans l’ultraviolet vers 100 nm (plasmon-polariton). Sur cet exemple du carbure de silicium (nous aurions pu le faire avec tout matériau supportant des polaritons de surface), nous allons montrer successivement que nous retrouvons la loi en  $1/d^3$  à courte distance, que le *spectre* de la force de Casimir présente des pics et que ces pics sont dus aux polaritons de surface du SiC. Nous donnerons alors une interprétation physique originale de nos résultats.

### 6.4.1 Force en fonction de la distance

Dans l’ensemble des résultats que nous allons présenter, nous nous sommes toujours placés à température *nulle* pour calculer la force d’interaction entre les deux milieux semi-infinis. De plus, la constante diélectrique du SiC a été modélisée en utilisant la méthode que nous avons décrite en annexe A. Nous pouvons alors calculer la force de Casimir (par unité de surface) en fonction de la distance  $d$  de séparation entre les deux plaques. Les résultats sont présentés sur la figure 6.8. La force pour  $d = 10 \text{ nm}$  est inférieure à la force de Casimir ( $\eta_F = 0.05$ ) mais nous remarquons que la force est amplifiée pour les courtes distances. Suite aux travaux que nous avons réalisés sur l’exaltation du transfert radiatif en champ proche (Chap. 3), nous avons pensé que cet effet était dû aux ondes évanescentes, notamment celles en polarisation  $p$ . Grâce à notre méthode, nous

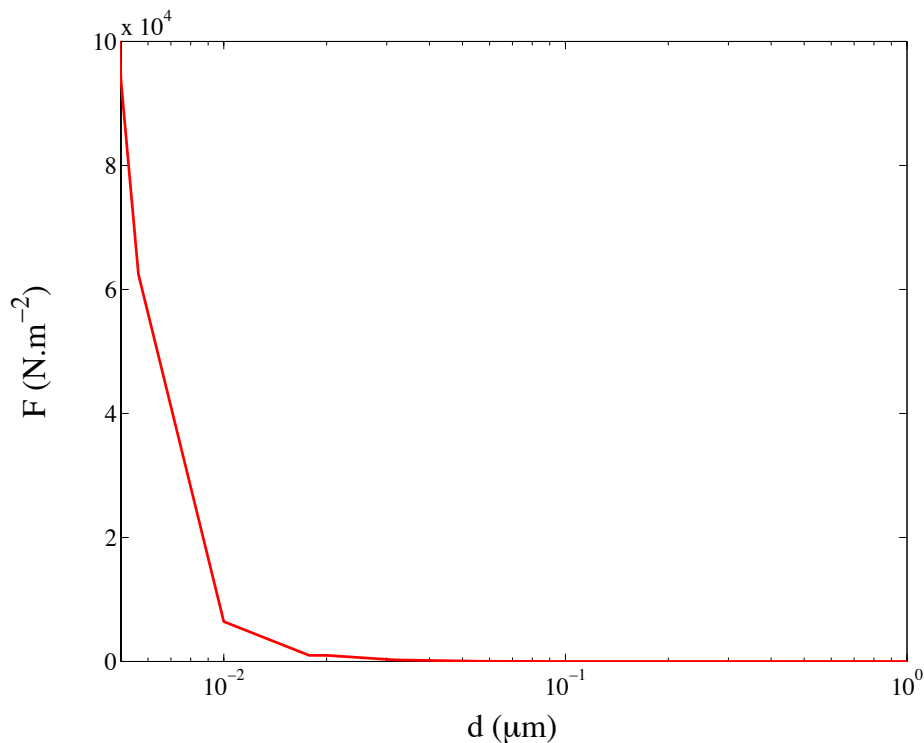


FIG. 6.8 – Force de Casimir à température nulle entre deux milieux semi-infinis de SiC en fonction de la distance  $d$  de séparation.

sommes capables de distinguer et de tracer *séparément* la contribution des ondes propagatives et des ondes évanescentes à la force (*cf.* Fig. 6.9). Nous remarquons ainsi qu’en champ proche la contribution majeure à la force d’interaction est donnée justement par ces ondes évanescentes. De plus, en examinant la figure 6.10, nous pouvons constater que ce sont précisément les ondes évanescentes  $p$  qui donnent la plus grande contribution à la force en champ proche. Celles-ci donnent d’ailleurs une contribution *positive* c’est-à-dire attractive à la force.

La figure 6.11 donne le détail complet des différentes contributions en fonction de la nature de l’onde (propagative ou évanescente) et de sa polarisation ( $s$  ou  $p$ ). Nous pouvons remarquer plusieurs choses. Premièrement, la contribution des ondes propagatives est toujours *positive* c’est-à-dire attractive. Deuxièmement, la contribution des ondes évanescentes  $s$  est toujours négative (répulsive) alors que celle des ondes évanescentes  $p$  est tantôt positive, tantôt négative, la contribution globale des ondes évanescentes étant ainsi soit attractive (en champ proche) soit répulsive (en champ lointain). Ceci étant dit, le fait que les ondes évanescentes  $p$  créent alternativement une force répulsive et une force attractive suivant la distance  $d$  peut sembler étonnant mais nous verrons (Sec. 6.4.3) que nous pouvons en donner une explication claire.

### 6.4.2 Spectre de la force en fonction de la pulsation

L’approche que nous avons adoptée pour réaliser nos calculs va prendre ici tout son sens. En effet, comme nous ne réalisons aucune transformation dans le plan complexe sur la pulsation  $\omega$ , lorsque nous calculons la force  $F(d, \omega)$  nous pouvons affirmer que cette force est due *uniquement* aux fluctuations du vide à la pulsation  $\omega$  (nous sommes toujours à température nulle). En revanche, dans l’approche “à la Lifshitz”, la transformation réalisée sur la pulsation  $\omega$  *vianotamment* l’équation (6.16), conduit à “mélanger” les pulsations. Il se produit la même chose lorsque le chemin d’intégration de la variable  $K$  est déformé : cela conduit à ne plus pouvoir faire la différence entre

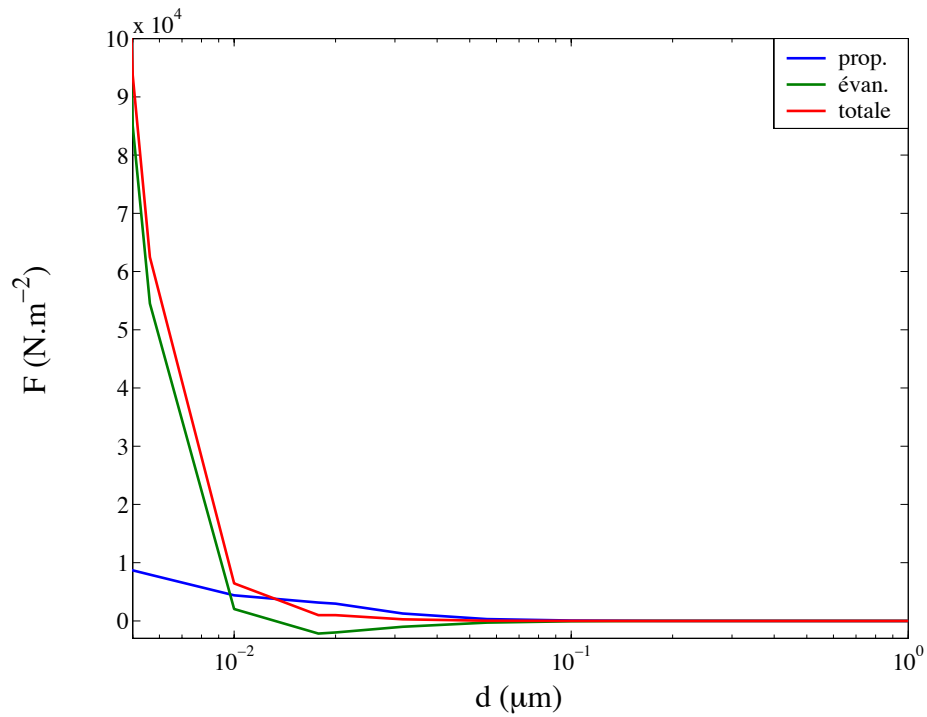


FIG. 6.9 – Force de Casimir à température nulle entre deux milieux semi-infinis de SiC en fonction de la distance de séparation : contribution des ondes propagatives et des ondes évanescentes.

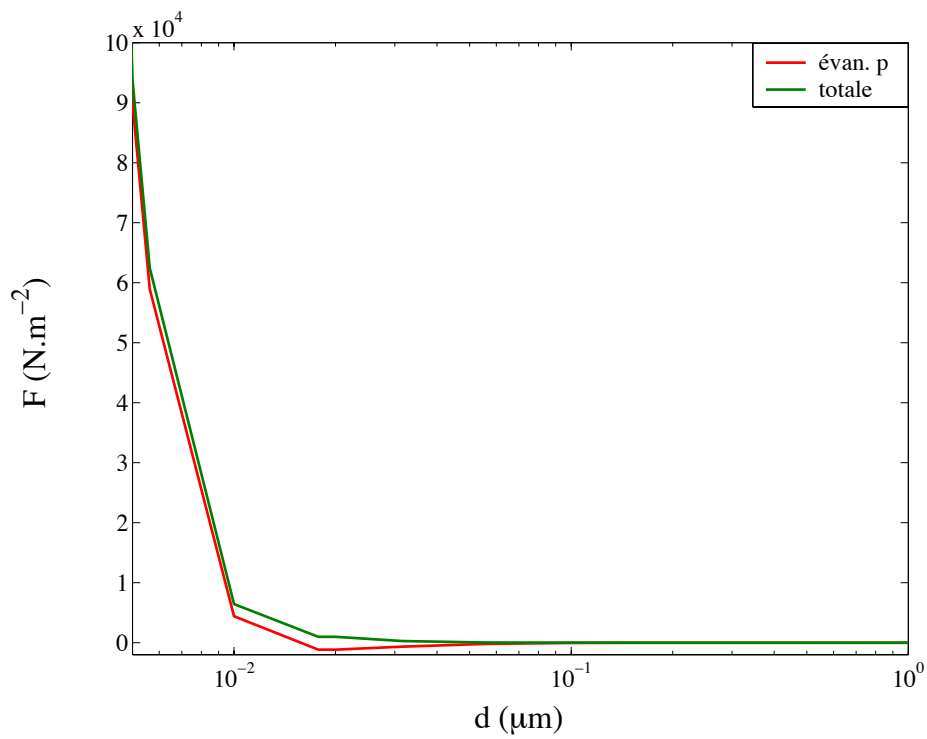


FIG. 6.10 – Force de Casimir à température nulle entre deux milieux semi-infinis de SiC en fonction de la distance de séparation : contribution des ondes évanescentes p à la force totale.

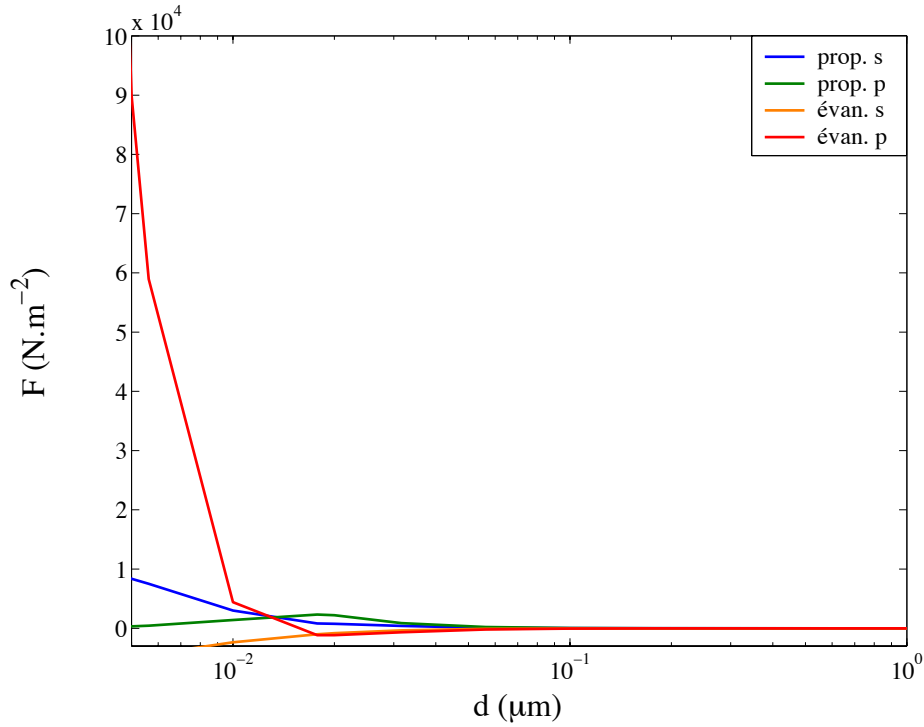


FIG. 6.11 – Force de Casimir à température nulle entre deux milieux semi-infinis de SiC en fonction de la distance de séparation : contribution des ondes propagatives  $s$  et  $p$ , des ondes évanescentes  $s$  et  $p$ .

ondes propagatives et ondes évanescentes. Aussi, même si le calcul de la force *totale* a un sens et est correct, la physique du phénomène est-elle un peu masquée.

Ainsi, nous avons calculé le “spectre” de la force de Casimir à température nulle pour du SiC et une distance de séparation de 10 nm. Les résultats sont représentés sur la figure 6.12. Nous remarquons tout de suite que le spectre de la force présente deux pics très prononcés et bien distincts autour des pulsations  $1.8 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $2.5 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ . Ces fréquences sont les pulsations de résonance des polaritons de surface supportés par le carbure de silicium. La résonance dans l’ultraviolet est nettement moins importante (en intensité et en finesse) que celle qui a lieu dans l’infrarouge car l’absorption dans cette région est beaucoup plus faible. Néanmoins, le polariton UV donne la contribution majeure à la force du fait de la plus grande énergie associée à cette pulsation ( $\frac{1}{2}\hbar\omega$  par mode). Pour mieux voir le rôle prépondérant des polaritons de surface dans la force de Casimir, nous avons tracé (*cf.* Fig. 6.13) les différentes contributions à la force en fonction de la pulsation. L’origine de la force de Casimir à courte distance est ainsi confirmée : elle est essentiellement due aux polaritons de surface susceptibles d’exister sur chacune des deux interfaces SiC/vide. Ces polaritons de surface sont bien évidemment des résonances de surface. van Kampen *et al.* (1968), Gerlach (1971) et Schram (1973) avaient déjà identifié le rôle des “modes de surface” dans la force de Casimir à courte distance (ou dans le cas non retardé) sans cependant préciser que ce n’étaient que les polaritons de surface (ondes évanescentes) qui étaient responsables de l’attraction.

### 6.4.3 Force de Casimir et relation de dispersion du phonon-polariton de surface pour le SiC

Nous pouvons encore aller plus loin dans l’analyse physique en traçant la fonction  $F(K, \omega, d)$  en fonction de  $K$  et de  $\omega$ . Cette grandeur correspond à la force due à une onde se propageant dans la cavité (de largeur  $d$ ) en ayant une composante parallèle  $K$  du vecteur d’onde et oscillant

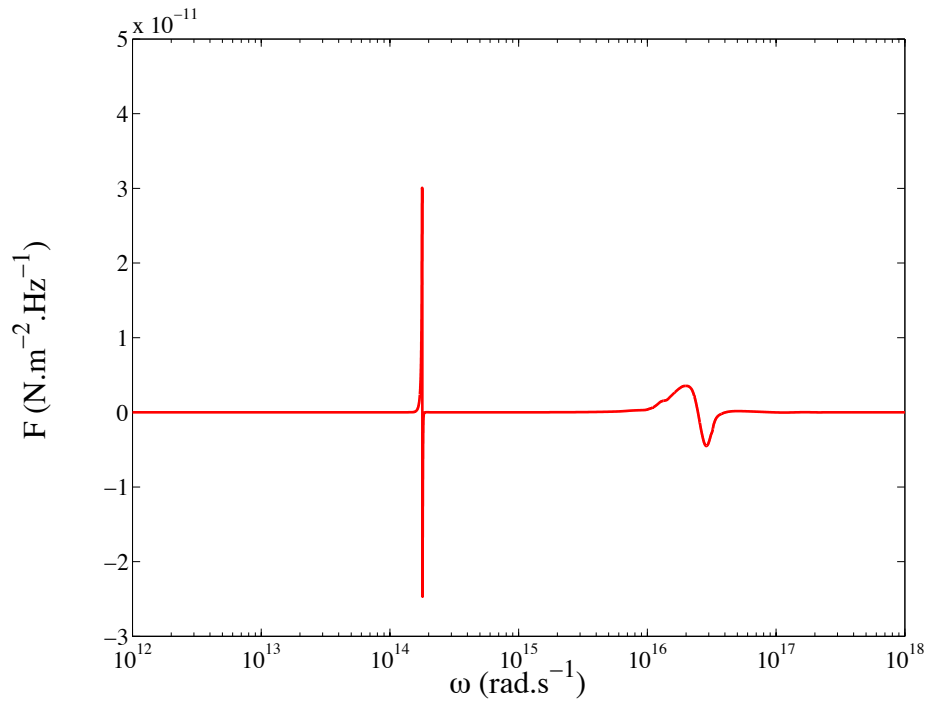


FIG. 6.12 – Spectre en fonction de la pulsation  $\omega$  de la force de Casimir à température nulle entre deux milieux semi-infinis de SiC pour une distance de séparation de 10 nm.

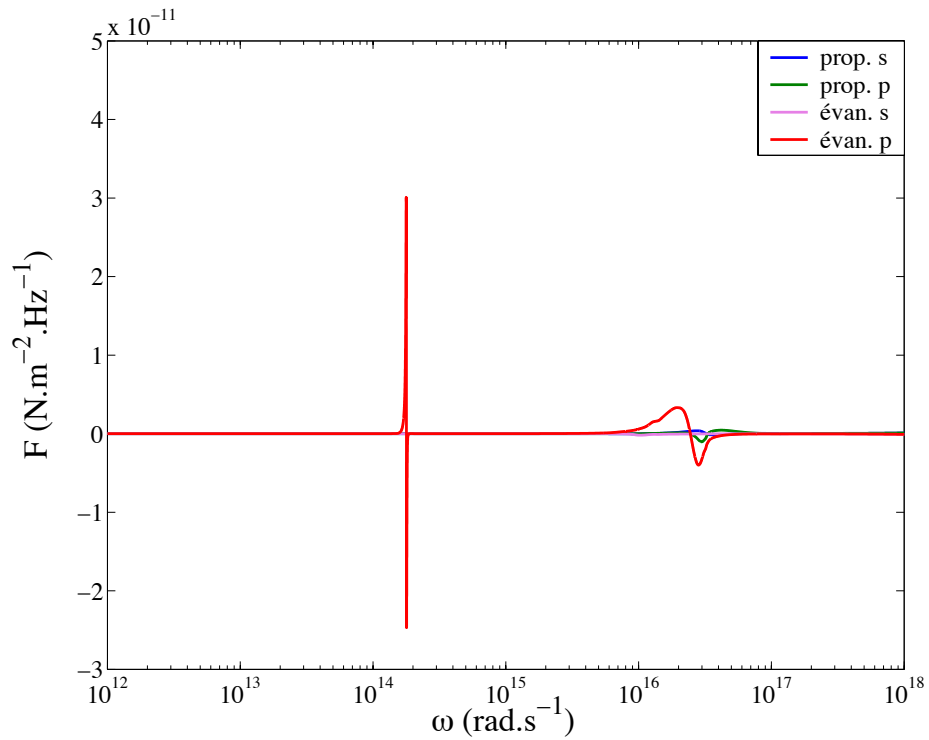


FIG. 6.13 – Spectre en fonction de la pulsation de la force de Casimir à température nulle entre deux milieux semi-infinis de SiC pour une distance de séparation de 10 nm : contribution des ondes propagatives  $s$  et  $p$ , des ondes évanescentes  $s$  et  $p$ .

à la pulsation  $\omega$ . On a bien évidemment la relation :

$$F(\omega, d) = \int_0^\infty dK F(K, \omega, d) \quad (6.21)$$

Nous obtenons alors une image du type de celle décrite sur la figure 6.14. Cette figure est tracée

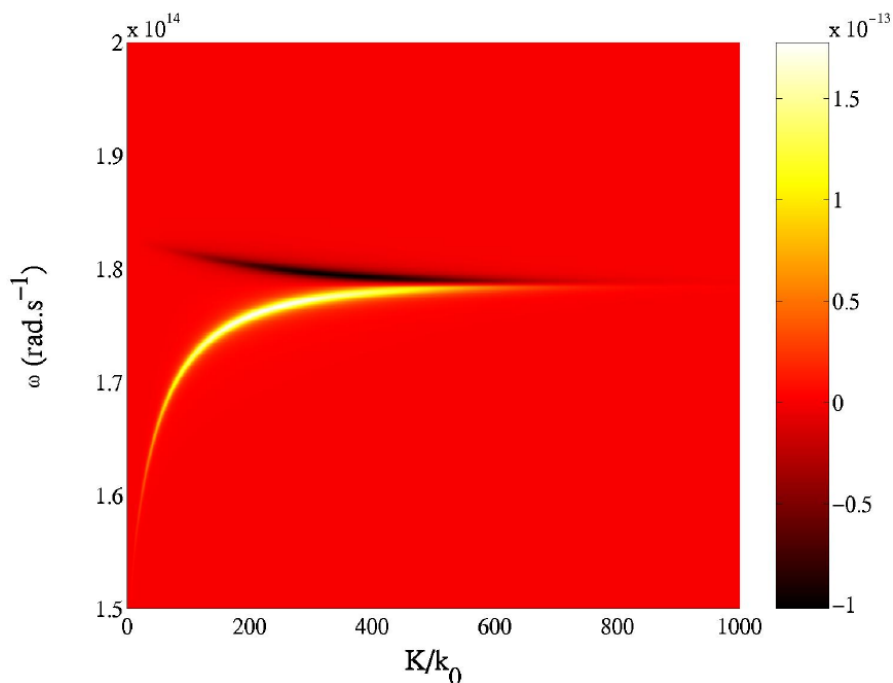


FIG. 6.14 – Relation de dispersion de la force de Casimir entre deux milieux semi-infnis de SiC pour une distance de séparation de 10 nm et une température nulle : contribution du polariton dans l’infrarouge.

pour une pulsation  $\omega$  comprise entre  $1.5 \times 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup> et  $2.0 \times 10^{14}$  rad.s<sup>-1</sup>, région du phonon-polariton IR du SiC. Cette courbe ressemble à une “relation de dispersion” comme celles que nous avons déjà tracées pour des interfaces planes (*cf.* Annexe A). En effet, il faut voir que la force de Casimir peut être calculée juste en intégrant cette courbe le long des deux branches de cette relation de dispersion. Ceci correspond à l’opération que réalisent analytiquement van Kampen *et al.* (1968) ou Gerlach (1971).

Nous pouvons, de la même manière, tracer une “relation de dispersion” pour la force dans le domaine UV, où existe le second polariton de surface du SiC. Nous obtenons alors la figure 6.15 où nous remarquons que la résonance dans cette gamme d’énergie est beaucoup plus “molle” que celle correspondant au polariton IR.

Dans chacune des deux courbes, nous observons deux branches bien distinctes sur les relations de dispersion :

1. la branche supérieure qui donne une contribution négative à la force : ce mode, que nous appellerons “*anti-liant*”, est *répulsif*;
2. la branche inférieure qui donne une contribution positive à la force : ce mode, que nous appellerons “*liant*”, est *attractif*.

Dans le cas de modèle simple pour la constante diélectrique (plasma, Drude, oscillateur), une expression *asymptotique* de ces branches peut être calculée analytiquement (Genet 2002).

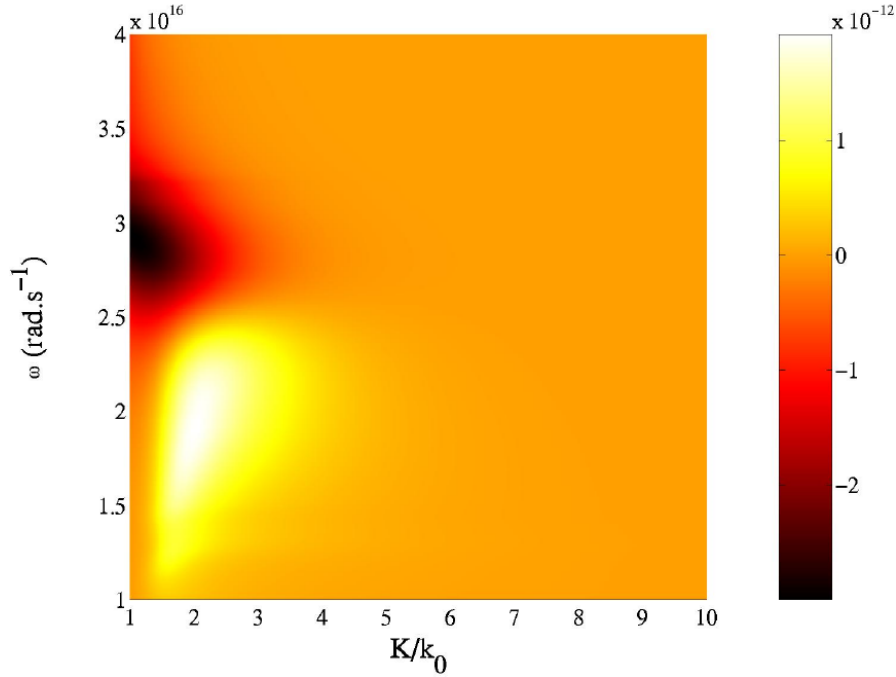


FIG. 6.15 – Relation de dispersion de la force de Casimir entre deux milieux semi-infinis de SiC pour une distance de séparation de 10 nm et une température nulle : contribution du polariton dans l’ultraviolet.

Le polariton du SiC dans l’ultraviolet correspond à une résonance faible car le SiC est très absorbant dans cette région du spectre. C’est pourquoi nous allons poursuivre sur le cas de l’aluminium que nous avons traité précédemment.

#### 6.4.4 Force de Casimir et relation de dispersion d’un plasmon-polariton de surface

Nous prendrons pour simplifier un modèle de Drude pour ce matériau avec comme paramètres :  $\omega_p = 1.7472 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\gamma = 7.5963 \times 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$  ( $\gamma/\omega_p = 0.0043$ ). Nous avons alors étudié la force en fonction de  $K$  et de  $\omega$  pour voir le lien avec les polaritons de surface. Nous avons également étudié la relation de dispersion des ondes de surface couplées lorsque nous avons deux interfaces. Nous examinons en réalité l’allure de la quantité  $p(K, \omega)$  définie par :

$$p(K, \omega) = \frac{1}{|1 - r_p^2 e^{-2\gamma_3'' d}|^2} \quad (6.22)$$

Les résultats représentés sur la figure 6.16 : la colonne de gauche correspond à la force et la colonne de droite à la relation de dispersion (en échelle  $\log$ ). Toutes les images ont pour abscisse  $K/k_0$  ( $k_0 = \omega/c$ ) et pour ordonnée  $\omega$  (en  $\text{rad.s}^{-1}$ ).

La première chose qui apparaît clairement, est que la force de Casimir en champ proche due aux ondes évanescentes  $p$  est clairement liée à l’existence d’onde de surface. La similitude parfaite entre les deux colonnes de la figure est là pour le confirmer. À très courte distance (champ proche = limite électrostatique = limite non retardée), le couplage entre les ondes de surface existant sur chacune des interfaces est fort et la relation de dispersion est *dégénérée* en deux branches bien distinctes : la branche supérieure (mode anti-symétrique) donnant une force répulsive et la branche inférieure (mode symétrique) donnant une force attractive. Il faut noter que sur les courbes 6.16(b),



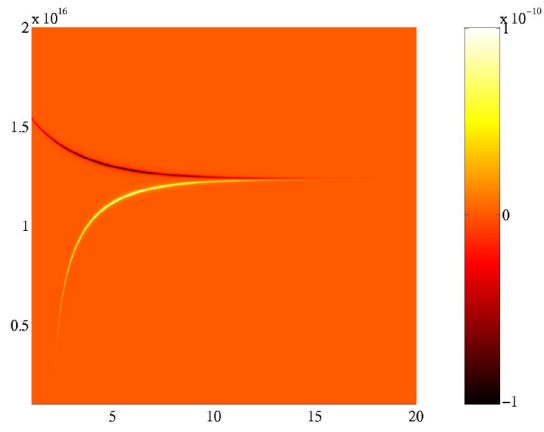
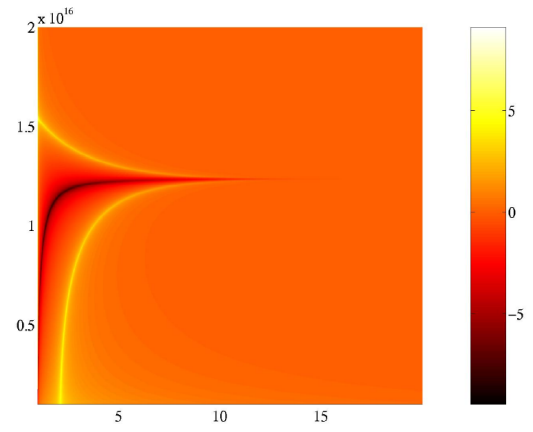
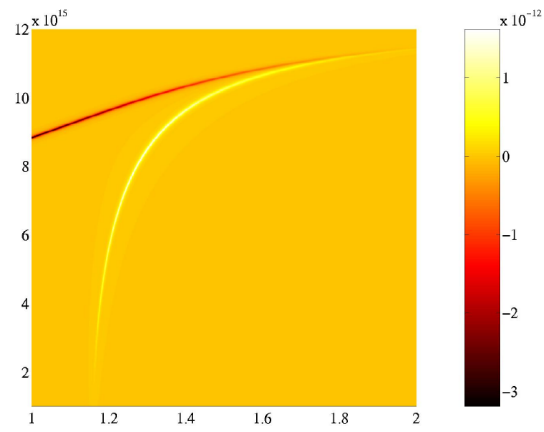
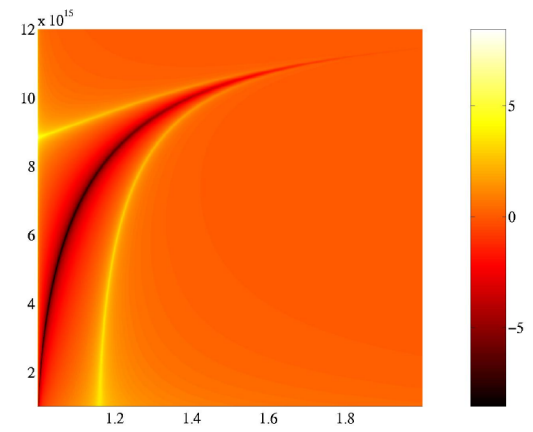
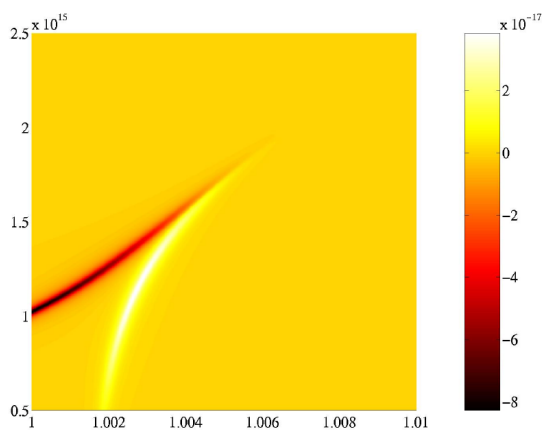
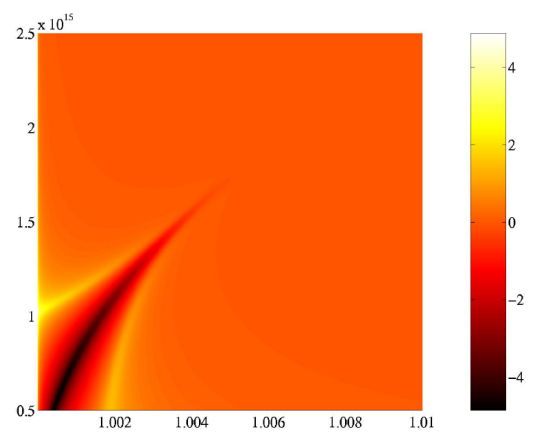
(a)  $d = 10$  nm(b)  $d = 10$  nm(c)  $d = 100$  nm(d)  $d = 100$  nm(e)  $d = 10$   $\mu\text{m}$ (f)  $d = 10$   $\mu\text{m}$ 

FIG. 6.16 – Force de Casimir (pour les ondes évanescentes  $p$ ) et relation de dispersion des plasmons de surface couplés pour différentes distances : 10 nm, 100 nm et 10  $\mu\text{m}$ .

6.16(d) et 6.16(f), la branche en noir correspond aux points où la quantité  $p(K, \omega)$  est *quasi* nulle, ce qui correspond au cas où  $|r_p| \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire au plasmon-polariton de surface de l'interface plane ou *non couplé*. Ainsi, nous voyons sur la figure que si nous éloignons les deux miroirs, alors la force, bien évidemment, diminue puisque le couplage diminue. Ceci entraîne que les deux branches des ondes de surface couplées tendent vers la branche du plasmon-polariton non couplé. Dans un régime de "champ lointain", la dégénéscence n'est levée que pour des vecteurs d'onde  $K$  très proches de  $k_0$  car ils correspondent aux ondes de surface qui pénètrent le plus dans les milieux (épaisseur de peau très grande).

Nous pouvons faire également d'autres remarques. La première est que pour l'aluminium nous retrouvons l'allure de la courbe que nous avons précédemment pour le SiC. Nous montrerions en effet que pour l'aluminium, le spectre de la force en champ proche est également dominé par les ondes évanescentes  $p$ , signature des ondes de surface. Néanmoins, par exemple pour  $d = 10$  nm, les branches de la courbe donnant la force en  $K$  et en  $\omega$  sont beaucoup fines, signe que la résonance dans l'aluminium est très étroite ( $\gamma$  faible). Par ailleurs, nous constatons également que lorsque  $d$  augmente, la contribution de la branche supérieure (branche donnant une force répulsive) devient dominante montrant ainsi que la contribution *totale* des ondes évanescentes  $p$  change de signe en fonction de la distance, phénomène que nous avons entrevu auparavant mais pas encore expliqué.

#### 6.4.5 Classification en termes de modes "liants" et "anti-liants"

Revenons maintenant sur la classification en termes de modes "liants" et "anti-liants". Pour mettre en évidence cette classification, il est nécessaire d'étudier le terme  $r^2 e^{2i\gamma_3 d} / (1 - r^2 e^{2i\gamma_3 d})$  apparaissant dans l'expression de la force de Casimir. Nous pouvons écrire :

$$\frac{r^2 e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r^2 e^{2i\gamma_3 d}} = \frac{1}{2} r^2 e^{2i\gamma_3 d} \left[ \frac{1}{1 - r e^{i\gamma_3 d}} + \frac{1}{1 + r e^{i\gamma_3 d}} \right] \quad (6.23)$$

$$= \frac{1}{2} r e^{i\gamma_3 d} \left[ \frac{1}{1 - r e^{i\gamma_3 d}} - \frac{1}{1 + r e^{i\gamma_3 d}} \right] \quad (6.24)$$

Dans le membre de droite, le premier terme correspond à une résonance *symétrique* ( $r e^{i\gamma_3 d} = 1$ ) et le second à une résonance *anti-symétrique* ( $r e^{i\gamma_3 d} = -1$ ). Par ailleurs, la deuxième égalité indique que ces résonances ont des contributions de signe opposé à la force. Cependant, ces écritures ne nous permettent pas, à elles seules, de dire des résonances symétrique et anti-symétrique, laquelle est liante et laquelle est anti-liante. Il est donc nécessaire de fixer un autre critère de choix pour déterminer si le caractère "liant" ou "anti-liant" est une propriété *intrinsèque* des résonances (au sens que nous lui avons donné plus haut).

Celui-ci est le suivant : la bonne écriture est celle pour laquelle chacune des résonances, prises séparément, donne une intégrale non divergente pour la force. Distinguons alors, puisque nous pouvons le faire, la force des ondes propagatives et celle des ondes évanescentes. Pour les ondes propagatives, la séparation arbitraire que nous avons faite plus haut n'a pas de sens car les termes pris séparément donne une contribution divergente à la force. Pour les ondes évanescentes, la convergence de chacun des termes est assurée par l'exponentielle décroissante en  $e^{i\gamma_3 d} = e^{-|\gamma_3|d}$ . Il apparaît alors que la bonne écriture est la première. Dans ce cas, nous pouvons alors affirmer que ce sont les modes symétriques qui sont liants et qui donnent une contribution attractive à la force. Les modes anti-symétriques, eux, sont anti-liants et donnent une contribution négative à la force.

## Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que l’“effet Casimir”, même s’il a été découvert il y a déjà plus de cinquante ans, était encore un problème très ouvert en physique, car lié notamment au problème non résolu de l’énergie du vide. Ses implications scientifiques et techniques dépassent le simple cadre de l’électrodynamique et les tentatives pour le mesurer précisément sont de plus en plus nombreuses.

Nous avons présenté ici l’approche originellement adoptée par Lifshitz pour étudier les forces d’interaction entre corps solides. Cependant, nous avons privilégié une autre méthode de calcul, certes plus difficile à mettre en oeuvre numériquement, mais plus instructive d’un point de vue de l’interprétation physique. Cette méthode a été validée sur un cas simple et a par ailleurs permis de retrouver les principales caractéristiques de la force de Casimir pour des métaux, à température nulle ou non.

Sur l’exemple du SiC, nous avons ainsi pu calculer le “spectre” de la force de Casimir et mettre alors en évidence le rôle prépondérant des ondes de surface à courte distance. Ce spectre présente, en effet, deux pics très importants autour des pulsations de résonance des polaritons de surface. Grâce à l’étude précise des résonances de la force de Casimir, nous avons été capable d’identifier deux types de modes bien distincts: les modes dits “liants” (modes symétriques) qui conduisent à une force attractive et les modes dits “anti-liants” (modes anti-symétriques) qui conduisent à une force répulsive. Cette analyse nous semble importante quant à l’interprétation physique.

Cependant, pour aller plus en avant dans ce travail, des développements asymptotiques devront être menés afin de donner une estimation très précise des contributions des modes “liants” et “anti-liants”. Par ailleurs, une étude de l’effet Casimir sur des matériaux structurés (multi-couches) pourrait également permettre de concevoir des systèmes avec un effet exalté voire une force répulsive. Enfin, une étude de l’influence de la rugosité devra être menée. L’approche que nous avons adoptée, avec l’utilisation de tenseurs de Green pour le champ électromagnétique, se prête particulièrement bien au traitement de ce problème (développement perturbatif des tenseurs de Green).

## Conclusions et perspectives

Au cours de cette étude, nous avons détaillé le formalisme qui nous a permis d'aborder le rayonnement thermique d'un point de vue électromagnétique. Nous avons pu donner une expression exacte et explicite de la densité d'énergie électromagnétique (due au rayonnement thermique) au-dessus d'une interface plane séparant un milieu quelconque du vide, en explicitant notamment la contribution des ondes *évanescentes*. Nous avons tenté de définir une quantité qui serait l'analogue, pour les ondes évanescentes, de l'émissivité monochromatique directionnelle.

L'expression de la densité d'énergie obtenue montre qu'en champ proche, il est *théoriquement* possible de déterminer *localement* la constante diélectrique d'un substrat en mesurant le champ d'émission thermique qu'il "rayonne" en champ proche. Un montage expérimental est en cours de réalisation à l'ESPCI dans l'équipe de C. Boccara pour mesurer le spectre local d'émission thermique d'un échantillon de SiC. Par ailleurs, un travail en cours vise à montrer qu'un microscope optique en champ proche, détectant le champ d'émission thermique d'un substrat est l'analogue *optique* d'un STM (Scanning Tunneling Microscope) pour les électrons. Nous pourrions ainsi mesurer la densité d'états *locale* du champ électromagnétique.

Utilisant le phénomène d'onde de surface dans l'infrarouge pour le SiC, nous avons été capable de dimensionner une source *thermique* présentant une certaine cohérence spatiale: dans une direction fixée, elle émet préférentiellement à une longueur d'onde et pour une longueur d'onde fixée, elle émet à l'intérieur d'un lobe très étroit angulairement. Les mesures expérimentales confirment avec un excellent accord cette prédiction théorique. Ainsi, la source que nous avons réalisée avec ce réseau de SiC est le premier exemple expérimental de *source thermique partiellement cohérente spatialement*. Par ailleurs, cette source a un spectre d'émission qui dépend de l'angle d'émission, c'est l'"effet Wolf". Les développements actuels au laboratoire concernent la mise en œuvre expérimentale d'une expérience de mesure d'émissivité infrarouge avec un spectromètre à transformée de Fourier. Les efforts ultérieurs devront porter sur une calibration précise du montage, grâce notamment à une mesure de l'émissivité de nos échantillons au point de Christiansen et une comparaison avec des mesures réalisées sur un corps noir de température bien connue. Les premiers résultats sur le même réseau que précédemment sont très encourageants, notamment quant à la précision angulaire et spectrale. Par ailleurs, nous avons été capable de dimensionner une source thermique infrarouge avec du SiC qui puisse émettre de manière quasi isotrope mais à une seule longueur d'onde. Pour cela, l'idée serait alors de réaliser un réseau de période très petite afin que la partie de la relation de dispersion du phonon-polariton de surface repliée dans la première zone de Brillouin corresponde à l'asymptote horizontale.

L'étude du transfert radiatif aux courtes distances entre deux milieux semi-infinis nous a permis de voir que l'approche radiométrique du rayonnement thermique n'est pas valable lorsque les échelles caractéristiques deviennent du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du rayonnement. Nous avons montré alors que les ondes de surface (dont nous ne pouvons rendre compte qu'avec une approche électromagnétique), et plus particulièrement les phonon-polaritons de surface dans le cas du SiC, jouent un rôle fondamental dans le transfert d'énergie électromagnétique. Premièrement, celui-ci est *quasi* monochromatique et présente un pic très prononcé à la fréquence de résonance du polariton de surface qui donne la contribution majeure au transfert. Une expression asymptotique en champ proche du coefficient de transfert radiatif en fonction de la fréquence est également donnée. Deuxièmement, le transfert est amplifié de plusieurs ordres de gran-

deur à courte distance, l'amplification variant comme l'inverse du carré de la distance séparant les deux milieux. Pour le cas de deux milieux de SiC séparés d'une distance de 10 nm, la contribution du rayonnement à l'échange d'énergie est du même ordre de grandeur que celle de la conduction (pour un gaz dans les conditions normales). Il est donc essentiel de ne pas négliger cette contribution du rayonnement dans ce type de systèmes, comme cela est fait couramment. Une application envisagée de ce transfert radiatif concerne l'effet thermo-photovoltaïque amplifié (Whale 2000). L'exploitation de l'effet d'exaltation en champ proche peut déboucher sur deux applications: le refroidissement de composants microélectroniques (comportant souvent du Si dopé) et la production d'électricité par effet photovoltaïque. L'idée est d'utiliser une source thermique ("chaude") de rayonnement et un "collecteur de flux" (froid) situé très près de la source afin de profiter de l'amplification du transfert. Ensuite, l'énergie échangée peut être dissipée par conduction ou récupérée sous la forme d'un courant.

Dans une configuration où nous avons considéré une particule sub-longueur d'onde (approximation dipolaire) située au-dessus d'une interface plane, nous avons mis en évidence le même type d'effets, lorsque la particule et la surface supportent des ondes de surface. La particule absorbe ainsi de manière importante autour de deux fréquences bien précises, correspondant aux fréquences de résonance des ondes de surface. La puissance absorbée par la particule augmente de plusieurs ordres de grandeur en champ proche, variant comme l'inverse de la puissance troisième de la distance entre la particule et le substrat. De la même manière, nous avons réalisé une cartographie de la distribution spatiale de la puissance absorbée par unité de volume à l'intérieur du substrat lorsque celui-ci est éclairé par le champ d'émission thermique de la particule. Nous avons montré que dans le cas d'une particule de SiC au-dessus d'un échantillon de SiC, la densité de puissance pouvait atteindre  $100 \text{ MW.m}^{-3}$ . De plus, la puissance déposée est confinée sur une zone dont la taille typique est de l'ordre de la distance entre la particule et le substrat. Une application de ce travail se situe dans le stockage haute-densité sur des matériaux magnétiques ou à transition de phase. Aujourd'hui, nous nous orientons plutôt vers l'enregistrement thermo-magnétique. L'idée est de chauffer grâce à une pointe (type pointe de SNOM) un substrat en champ proche et de mettre à profit l'exaltation et le confinement de la puissance déposée pour écrire sur un matériau de forte anisotropie magnétique. La suite du travail consistera donc à évaluer les densités de puissances déposées dans des matériaux magnétiques et de réaliser un couplage nécessaire avec la conduction pour étudier la dynamique de refroidissement à l'intérieur du substrat. Un effort important devra notamment être effectué sur la modélisation des propriétés électromagnétiques des matériaux magnétiques.

Par ailleurs, lors de l'étude de la dynamique de la relaxation électronique dans des nanoparticules métalliques, nous avons montré que l'introduction phénoménologique d'un mécanisme supplémentaire d'échange d'énergie entre les électrons et la matrice diélectrique permet de rendre compte de comportements observés expérimentalement. Le premier concerne la dépendance du temps de relaxation électronique en fonction de la taille de la particule lorsque nous sommes dans un régime où la température électronique n'est pas trop élevée ( $< 400 \text{ K}$ ). Le temps de relaxation diminue alors avec le rayon de la particule, montrant que ce mécanisme supplémentaire est essentiellement surfacique. Nous avons alors appliqué notre modèle dans un régime où les températures électroniques sont plus élevées ( $> 400 \text{ K}$ ), correspondant à des expériences où les nanoparticules sont illuminées par des impulsions de forte fluence. Dans ce régime, la prise en compte du mécanisme de surface conduit à deux conclusions: la première est que l'extrapolation des valeurs calculées pour de fortes fluences au régime des faibles fluences montre que le temps de relaxation est relativement indépendant de la taille de la particule; la seconde est que la variation du temps de relaxation est fortement non linéaire en fonction de la fluence incidente. Cependant, de nombreux problèmes restent posés. Par exemple, la relative indépendance du temps de relaxation électronique à la nature du matériau est encore un phénomène mal compris et des recherches supplémentaires, à la fois théoriques et expérimentales, doivent être menées concernant la modélisation des collisions électron-surface, notamment dans les systèmes métalliques confinés.

Enfin, nous avons étudié l’“effet Casimir” en choisissant une méthode de calcul qui nous permet une interprétation physique aisée des résultats. Nous avons alors été capable de tracer le “spectre” de la force de Casimir entre deux milieux semi-infinis de SiC à température nulle. Nous avons montré qu’en champ proche, la contribution majeure (pics dans le spectre) était donnée par les polaritons de surface, notamment celui qui existe dans l’ultraviolet pour le SiC. De plus, la “relation de dispersion” de la force de Casimir montre que cette contribution des ondes de surface *couplées* peut être elle-même divisée en deux : une contribution due à ce que nous avons appelé des modes “liants”, qui sont attractifs et une contribution due à des modes “anti-liants” qui sont répulsifs. Nous avons identifié, pour les ondes évanescentes, dans la formule analytique de la force les termes correspondant à chacun de ces modes. Un travail analytique reste encore à mener afin d’extraire les formes asymptotiques en champ proche de ces contributions. Par ailleurs, il peut être intéressant d’étudier l’influence de la rugosité de surface sur la force de Casimir, qui n’est peut-être plus négligeable aux échelles que nous étudions. Non seulement, la prise en compte de ce phénomène est aisée dans une approche électromagnétique et avec un formalisme de Green, mais cela peut être également un moyen de tester les autres méthodes utilisées pour décrire l’“effet Casimir” en présence de rugosité. Cependant, il nous semble que l’effort majeur doit avant tout porter sur la caractérisation très précise des propriétés électromagnétiques (constante diélectrique) des matériaux, élément clé dans le calcul de la force de Casimir.



## Annexe A

# Modélisation des propriétés électromagnétiques des matériaux

Dans cette annexe, nous distinguerons trois grandes classes de matériaux auxquels nous nous sommes intéressés pour nos différentes études : les métaux, les semi-conducteurs dopés (notamment le silicium) et les matériaux polaires (cristaux ioniques ou semi-conducteurs). Les propriétés électromagnétiques d'un matériau sont entièrement connues dès lors que sa constante (permittivité) diélectrique  $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$  est connue sur la gamme de fréquences considérée.

### A.1 Cas des métaux

Dans les cristaux métalliques, les propriétés électriques sont essentiellement liées aux électrons de conduction, *i.e.* les électrons libres de se déplacer dans le cristal. Un modèle simple, le modèle *plasma* ou modèle de *Drude* sans pertes, décrit justement un métal comme un gaz d'électrons libres. La constante diélectrique calculée par ce modèle prend alors la forme :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (\text{A.1})$$

où  $\omega_p$  est la pulsation plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m^*} \quad (\text{A.2})$$

$N$  étant le nombre d'électrons de conduction par unité de volume et  $m^*$  la masse effective des électrons de conduction (Kittel 1998). Cette masse effective rend compte de la capacité des électrons à se déplacer à l'intérieur du solide. À titre d'exemple, cette masse effective vaut respectivement  $(1.03 \pm 0.06) m$  pour l'argent et  $(1.42 \pm 0.05) m$  pour le cuivre (Ehrenreich et Philipp 1962),  $m$  étant la masse de l'électron *libre*. Une autre image que l'on peut avoir est de dire que les électrons libres ont une masse  $m$  mais qu'ils sont  $N^*$  par unité de volume à participer à la conduction ( $N^*$  est un nombre *effectif* d'électrons de conduction par unité de volume). À partir de  $\omega_p$ , nous pouvons également définir la longueur d'onde plasma  $\lambda_P$  par :

$$\lambda_P = \frac{2\pi c}{\omega_p} \quad (\text{A.3})$$

Pour des métaux classiques, avec  $N$  allant de  $10^{18}$  à  $10^{22}$  électrons par unité de volume,  $\lambda_P$  varie de quelques centaines de nanomètres à quelques dizaines de micromètres. C'est ainsi que l'on dit souvent que les métaux réfléchissent la lumière visible et sont transparents dans l'ultraviolet. En



effet, ce modèle fournit une constante diélectrique *réelle*, positive ou négative, comme on peut le voir sur la figure A.1.

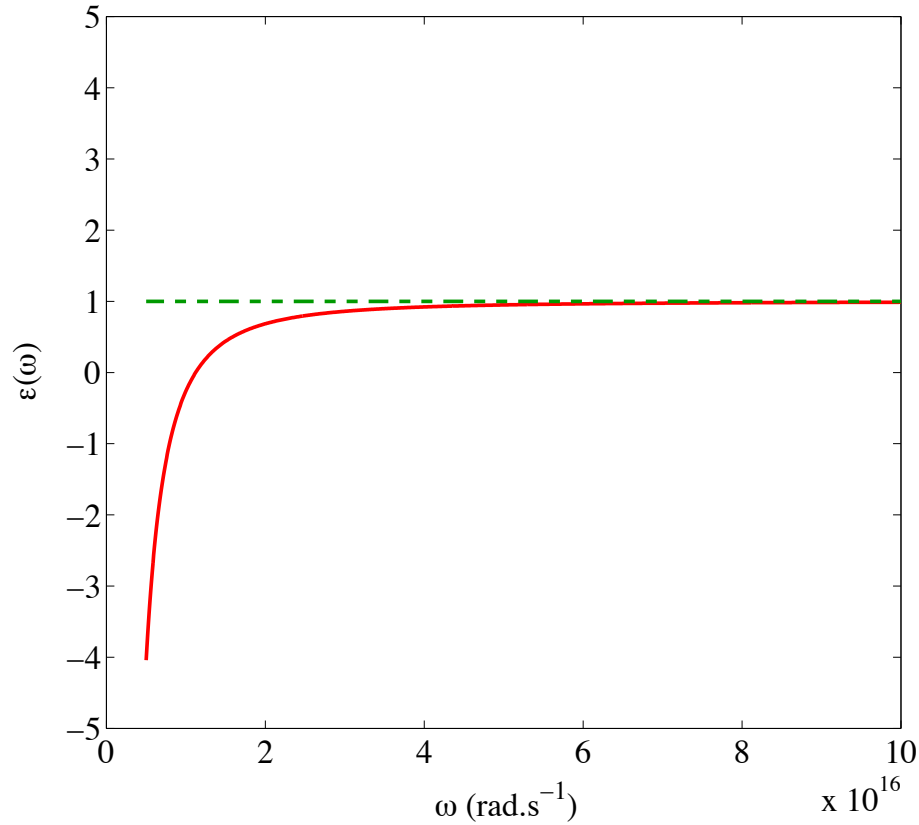


FIG. A.1 – Constante diélectrique du cuivre donnée par le modèle plasma :  $\omega_p = 11.23 \times 10^{15}$  rad.s $^{-1}$ .

L'indice de réfraction (complexe)  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  possède deux domaines distincts de variation :

$$\begin{aligned}
 \omega \leq \omega_p : \varepsilon(\omega) \leq 0 \quad n(\omega) &= i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \Rightarrow \text{réflexion totale} \\
 \omega > \omega_p : \varepsilon(\omega) > 0 \quad n(\omega) &= \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \Rightarrow \text{transmission}
 \end{aligned}
 \tag{A.4}$$

Cependant, le modèle de Drude sans pertes ne rend pas très bien compte de la constante diélectrique aux basses fréquences (grandes longueurs d'ondes) parce qu'il ignore la relaxation des électrons. C'est pourquoi, on utilise plutôt l'expression :

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}
 \tag{A.5}$$

où  $\gamma = 1/\tau > 0$ ,  $\tau$  étant un temps *moyen* de relaxation électronique.  $\gamma$  est un terme purement

phénoménologique qui tient compte des pertes dans le milieu. Il peut parfois dépendre de  $\omega$ . Notons qu'avec cette formule, la partie imaginaire de la constante diélectrique est toujours positive, ce qui est cohérent avec les conventions choisies. En effet :

$$\operatorname{Re}[\varepsilon(\omega)] = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + \gamma^2)} \quad \operatorname{Im}[\varepsilon(\omega)] = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)} \quad (\text{A.6})$$

Par ailleurs, soulignons que ce modèle vérifie les relations de *Kramers-Kronig* Jackson (2001) et les principales règles de somme (Palik 1985). Le tableau suivant rassemble les valeurs de pulsations plasma et de facteur d'amortissement de différents métaux (Ordal *et al.* 1983; Ordal *et al.* 1985) :

Métal	$10^{15} \times \omega_p$ (rad.s <sup>-1</sup> )	$10^{13} \times \gamma$ (s <sup>-1</sup> )
Ag	13.69	2.73
Al	22.42	12.43
Au	13.71	4.05
Co	6.03	5.56
Cu	11.23	1.38
Ti	3.82	7.20

TAB. A.1 – Pulsations plasma et facteurs d'amortissement de différents métaux.

Sur la figure suivante (Fig. A.2), nous avons tracé les parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique et de l'indice de réfraction du chrome en fonction de la fréquence que donnent le modèle de Drude.

Par ailleurs, des problèmes se posent aux très hautes fréquences - à partir d'environ  $10^{15}$  à  $10^{16}$  rad.s<sup>-1</sup> - pour les métaux réels, notamment à cause des transitions interbandes. C'est pourquoi des données plus précises sont nécessaires au-delà de ces fréquences. Ces données brutes, obtenues à partir de mesures optiques, spectroscopiques ou ellipsométriques sont disponibles sous forme de tables<sup>1, 2, 3</sup>. La figure A.3(a) donne un exemple de données brutes obtenues pour l'or. Généralement, ce sont les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction qui sont données plutôt que celles de la constante diélectrique.

La figure suivante (Fig. A.4) présente la comparaison, pour le cuivre, entre la constante diélectrique calculée à partir des données brutes et celle calculée à partir d'un modèle de Drude. Les différences entre les deux courbes proviennent essentiellement du fait que la constante diélectrique s'écrit en réalité :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad (\text{A.7})$$

où  $\varepsilon_r(\omega)$  représente notamment la contribution des transitions interbandes aux hautes fréquences.

## A.2 Cas des semi-conducteurs dopés

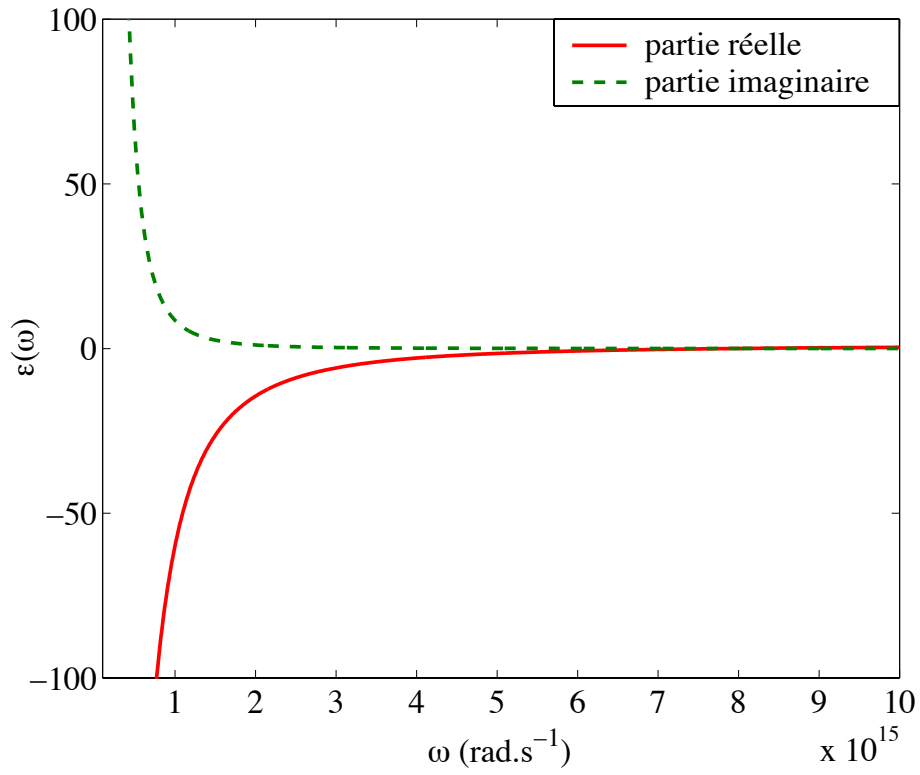
Dans cette partie, nous ne traiterons que du silicium (Si) dopé car c'est le seul matériau de ce type que nous avons étudié lors des différentes simulations. La plupart des résultats de ce paragraphe sont d'ailleurs tirés de Auslender et Hava (1995) et Auslender et Hava (1998).

Le silicium est soit *dopé n* (on parle alors de n-Si) par des atomes d'impuretés qui peuvent s'ioniser en fournissant un électron supplémentaire à la bande de conduction (atomes donneurs

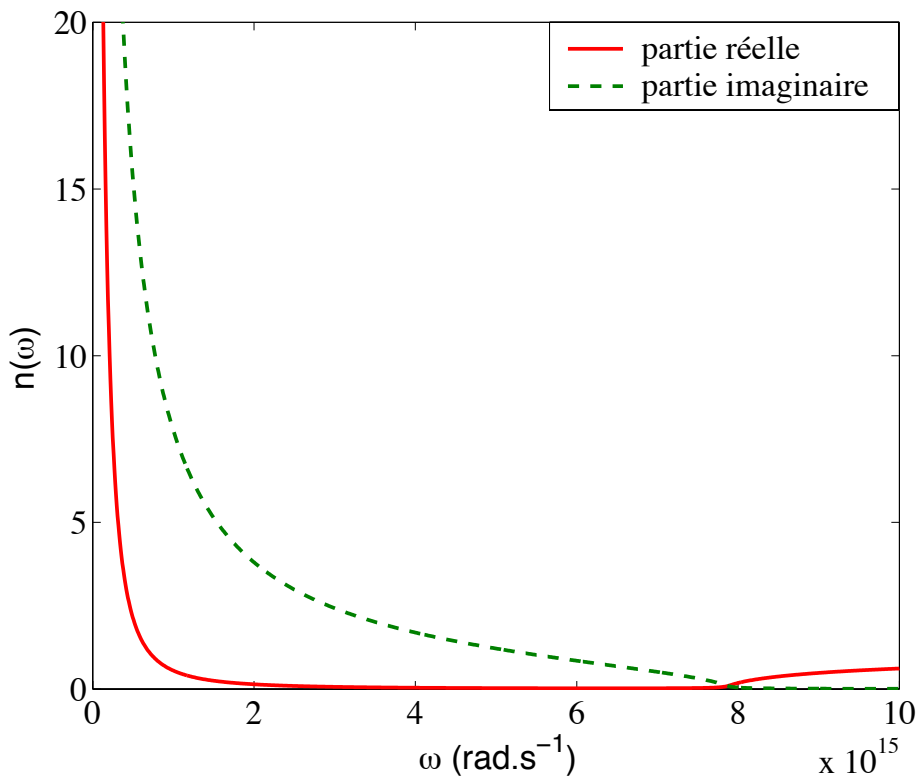
1. Palik 1985 pour Cu, Au, Ir, Mo, Ni, Os, Pt, Rh, Ag, W et Al

2. Palik 1991 pour Li, Na, K, Cr, Fe, Nb, Ta, Be, Co, Hg, Pd et V

3. Palik 1998 pour Mg, Ti, Mn, Ru, In, Sn, Sb et Re.

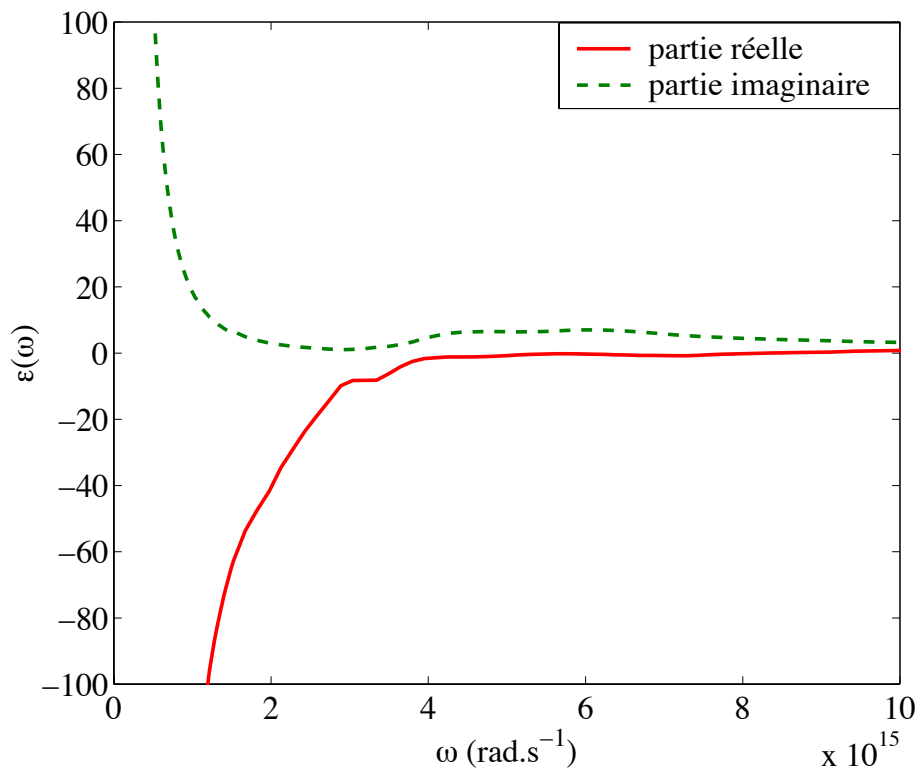


(a) constante diélectrique

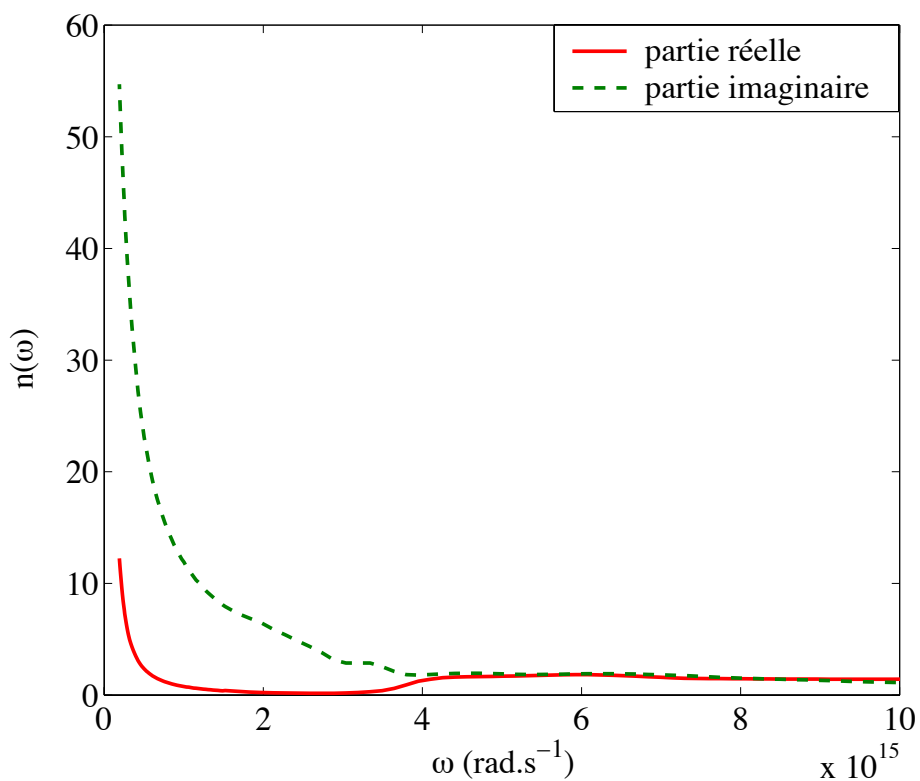


(b) indice de réfraction

FIG. A.2 – Parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique et de l'indice de réfraction du chrome donnés par le modèle de Drude :  $\omega_p = 7.88 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\gamma = 1.41 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$ .



(a) constante diélectrique



(b) indice de réfraction

FIG. A.3 – Parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique et de l'indice de réfraction de l'or (Palik 1985).

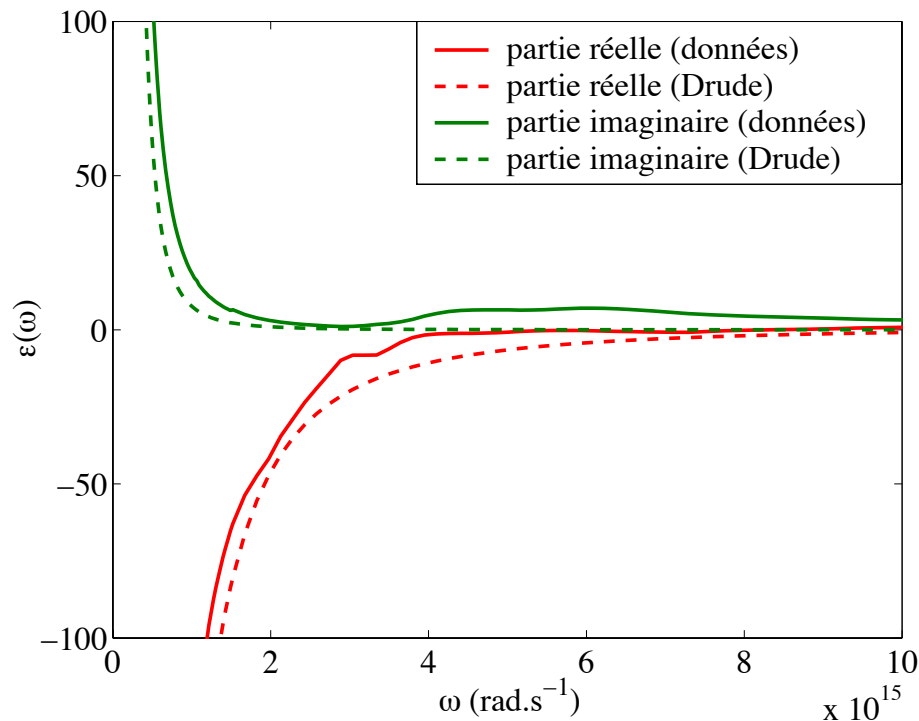


FIG. A.4 – Parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique du cuivre. Trait plein : données brutes (Palik 1985); trait pointillé : modèle de Drude (cf. Tab. A.1).

comme Sb, P ou As) : cet électron peut alors participer à la conduction ; soit il est *dopé p* (p-Si) par des atomes d'impuretés qui peuvent prendre des électrons de la bande de valence (atomes accepteurs comme B, In, Al ou Ga) : un trou *positif* est alors créé pour la conduction.

La constante diélectrique du Si dopé est la somme de deux termes :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega) + \varepsilon_c(\omega) \quad (\text{A.8})$$

où  $\varepsilon_l(\omega)$  représente la contribution du réseau (*lattice*) et  $\varepsilon_c(\omega)$  celle des porteurs (*carriers*).  $\varepsilon_l(\omega)$  dépend du type et de la quantité des dopants (*via* une diminution de la largeur de bande) ; néanmoins cette correction est négligeable dans l'infrarouge pour  $\lambda > 1 \mu\text{m}$ . Nous supposons par la suite que cette approximation est encore vérifiée jusqu'à  $0.1 \mu\text{m}$ . Ainsi, pour la contribution du réseau, nous pouvons utiliser les données disponibles sur le silicium brut (Palik 1985). Pour modéliser la contribution des porteurs *libres*, nous réécrivons  $\varepsilon_c(\omega)$  sous la forme :

$$\varepsilon_c(\omega) = i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \quad (\text{A.9})$$

où  $\sigma(\omega)$  est la conductivité électrique en  $\text{ohm}^{-1}.\text{m}^{-1}$ . Par ailleurs, cette équation peut être décomposée en deux termes, un dû aux électrons (e) et un dû aux trous (h) :

$$\varepsilon_c(\omega) = \varepsilon_e(\omega) + \varepsilon_h(\omega), \quad \varepsilon_{e,h}(\omega) = i \frac{\sigma_{e,h}(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \quad (\text{A.10})$$

Pour calculer la contribution des porteurs *libres*, nous avons alors utilisé le modèle de Drude. Dans ce cadre-là, les conductivités suivent la loi ci-dessous :

$$\sigma_{e,h}(\omega) = i \frac{N_{e,h} e^2}{m_{e,h}} \frac{1}{\omega + i/\tau_{e,h}} \quad (\text{A.11})$$

avec  $N_{e,h}$  le nombre par unité de volume,  $m_{e,h}$  la masse effective et  $\tau_{e,h}$  le temps de relaxation des électrons ou des trous. On remarquera que cette approche ressemble à celle que nous avons utilisée pour les métaux puisque ce sont les mêmes processus physiques qui sont mis en jeu dans les deux cas. Un des paramètres difficile à modéliser est la masse effective car elle dépend de la concentration en impuretés, comme on peut le voir dans le tableau suivant :

$N_e$ (cm <sup>-3</sup> )	$m_e/m$	$N_h$ (cm <sup>-3</sup> )	$m_h/m$
$3.6 \times 10^{18}$	0.27	$9.6 \times 10^{18}$	0.37
$2.2 - 8.5 \times 10^{19}$	0.26-0.28	$4.0 \times 10^{19}$	0.34
$3.5 \times 10^{20}$	0.29	$1.2 \times 10^{20}$	0.35
$5.0 \times 10^{20}$	0.28		

TAB. A.2 – *Masses effectives pour le Si dopé en fonction du dopage et de la concentration en impuretés.*

Pour l'ensemble des calculs, où les concentrations allaient de  $10^{18}$  à  $10^{21}$  cm<sup>-3</sup>, nous avons pris pour masses effectives :  $m_e/m = 0.27$  et  $m_h/m = 0.34$ . L'autre problème est la modélisation du temps de relaxation qui peut être faite en introduisant la résistivité électrique  $\rho(\omega)$  par :

$$\frac{1}{\tau_{e,h}} = \frac{N_{e,h}e^2}{m_{e,h}}\rho(\omega) \quad (\text{A.12})$$

La résistivité est en ohm.m (SI).

La courbe ci-dessous représente la résistivité du silicium dopé en fonction de la concentration en impuretés et du type de dopage (Sze et Irvin 1968).

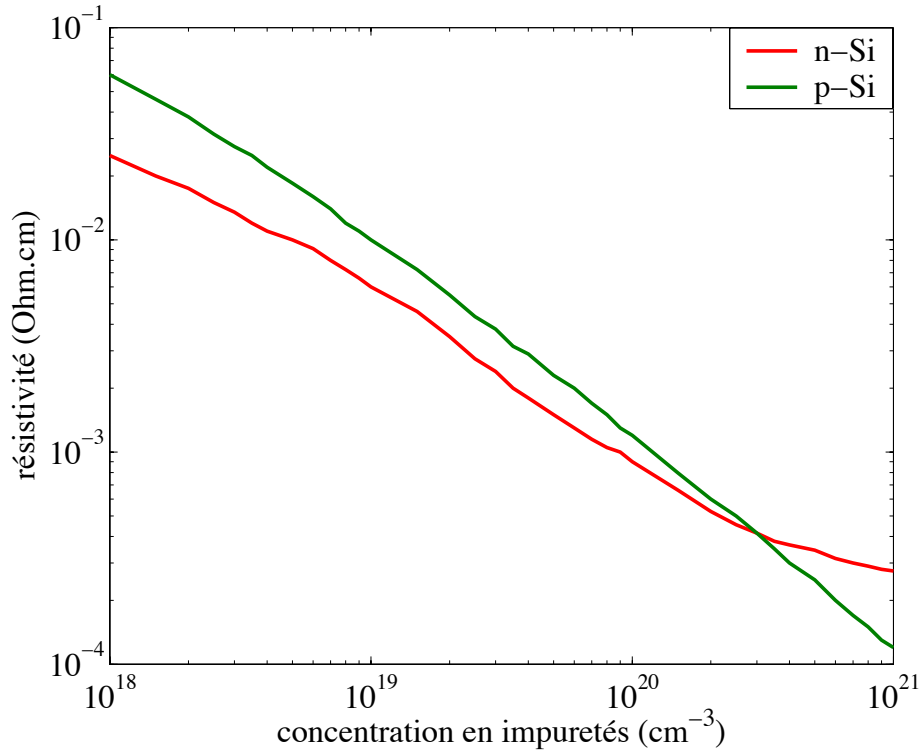


FIG. A.5 – *Résistivité utilisée pour le calcul de la contribution des porteurs à la constante diélectrique du silicium dopé n (rouge) et dopé p (verte).*

Avec tous ces paramètres, nous pouvons désormais calculer la constante diélectrique pour les deux types de dopage et pour différentes concentrations en impuretés. Ainsi, la figure A.6 représente les constantes diélectriques du silicium dopé n (n-Si) et dopé p (p-Si) pour une concentration de  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$  en impuretés :

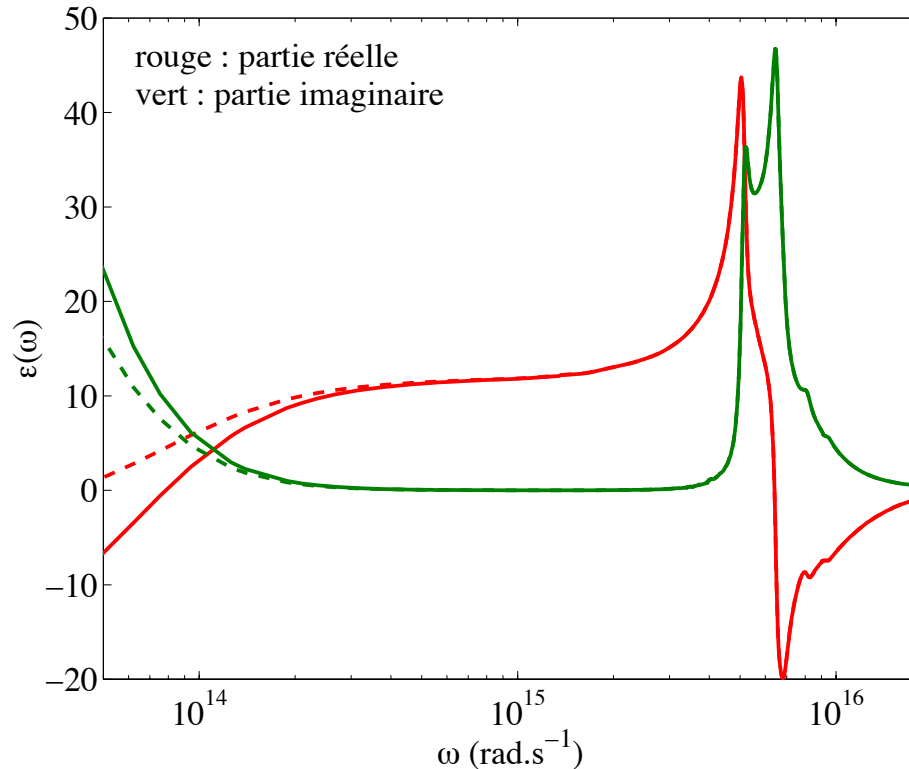


FIG. A.6 – Constante diélectrique du silicium dopé : dopage n avec  $N_e = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  (trait plein) et dopage p avec  $N_h = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  (trait pointillé).

De la même manière, nous pouvons regarder quelle est l'influence de la concentration en impuretés sur la constante diélectrique. Sur la courbe ci-après (cf. Fig. A.7), nous avons représenté les constantes diélectriques du n-Si pour des concentrations de  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$  et de  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Nous pouvons voir que les différences majeures apparaissent en-dessous de  $\omega \approx 5.0 \times 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$  ( $\lambda \approx 4 \mu\text{m}$ ) dues essentiellement aux contributions des porteurs.

### A.3 Cas des matériaux polaires et des semi-conducteurs

La troisième classe de matériaux que nous avons étudiés sont les cristaux polaires et les semi-conducteurs. Ces deux types de matériaux se trouvent avoir des propriétés communes vis-à-vis d'un champ électrique, notamment en ce qui concerne l'existence de polaritons, comme nous le verrons à la section 1.1.5.

Le principal matériau que nous avons étudié est le carbure de silicium (sous sa forme 6H SiC) qui est un semi-conducteur IV-IV (Si et C sont des atomes tétravalents). Pour modéliser la constante diélectrique de ce composé nous nous sommes appuyés sur les travaux de Choyke et Palik (1985). Pour  $\omega < 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  ( $\lambda > 2 \mu\text{m}$ ), nous avons utilisé un modèle d'oscillateur :

$$\varepsilon_{osc}(\omega) = \varepsilon_{\infty} \left[ 1 + \frac{\omega_L^2 - \omega_T^2}{\omega_T^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} \right] \quad (\text{A.13})$$

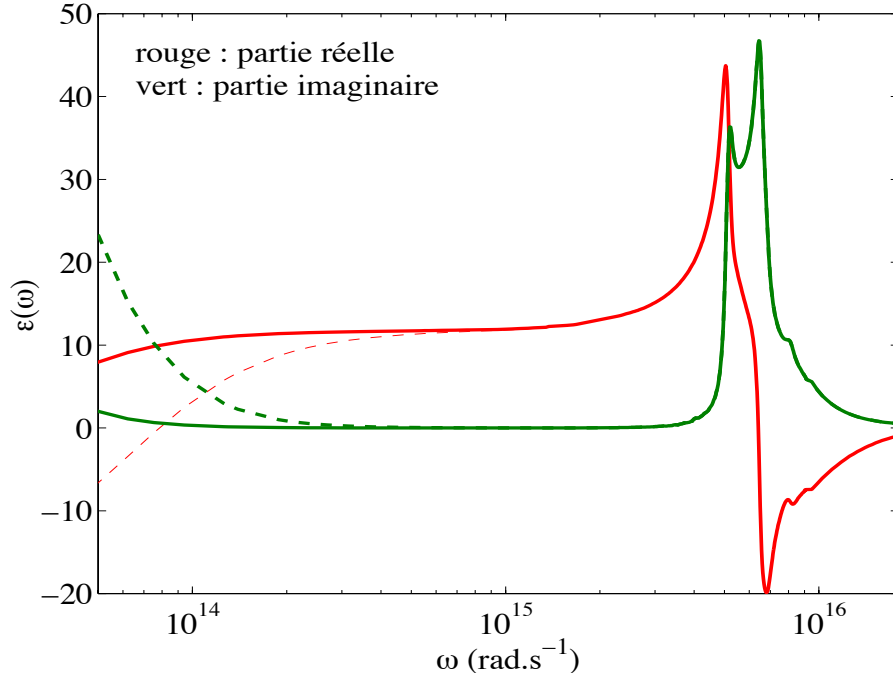


FIG. A.7 – Constante diélectrique du silicium dopé  $n$ :  $N_e = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  (trait plein) et  $N_e = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  (trait pointillé).

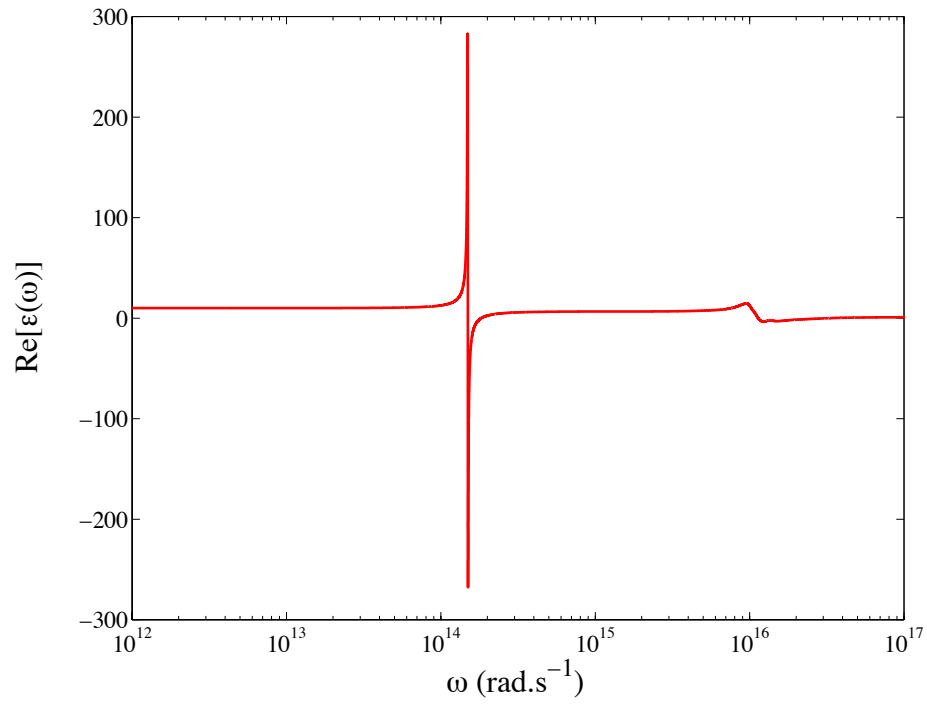
avec  $\varepsilon_\infty = 6.7$ ,  $\omega_L = 969 \text{ cm}^{-1}$  ( $182.53 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$ ),  $\omega_T = 793 \text{ cm}^{-1}$  ( $149.37 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$ ) et  $\Gamma = 4.76 \text{ cm}^{-1}$  ( $89.66 \times 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$ ). Nous verrons que les fréquences  $\omega_L$  et  $\omega_T$  correspondent à des fréquences bien précises dans le matériau (*cf.* Chap. 1).  $\Gamma$  est – comme pour les métaux – un terme introduit dans le modèle pour rendre compte des pertes dans le matériau. Pour  $\omega$  compris entre  $10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $4.55 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ , nous avons exploité les données brutes sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction, dont nous avons déduit la constante diélectrique ( $\varepsilon = n^2$ ). Pour les très hautes fréquences, l'idée a été d'approximer la partie réelle de la constante diélectrique par un modèle plasma comme dans l'équation A.1. Ce modèle est valable pour n'importe quel matériau pourvu que la fréquence soit assez élevée (Smith 1985). On assure notamment le fait que la partie réelle de la constante diélectrique tende vers 1 lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ . Dans le cas du SiC, nous avons pris pour pulsation plasma  $\omega_p = 3.114 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ . Ainsi, nous disposons de la partie réelle de la constante diélectrique sur tout le spectre. Nous pouvons donc, grâce aux *relations de Kramers-Kronig* (Jackson 2001), en déduire la partie imaginaire. En effet, la partie réelle et la partie imaginaire de la constante diélectrique sont reliées par :

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (\text{A.14a})$$

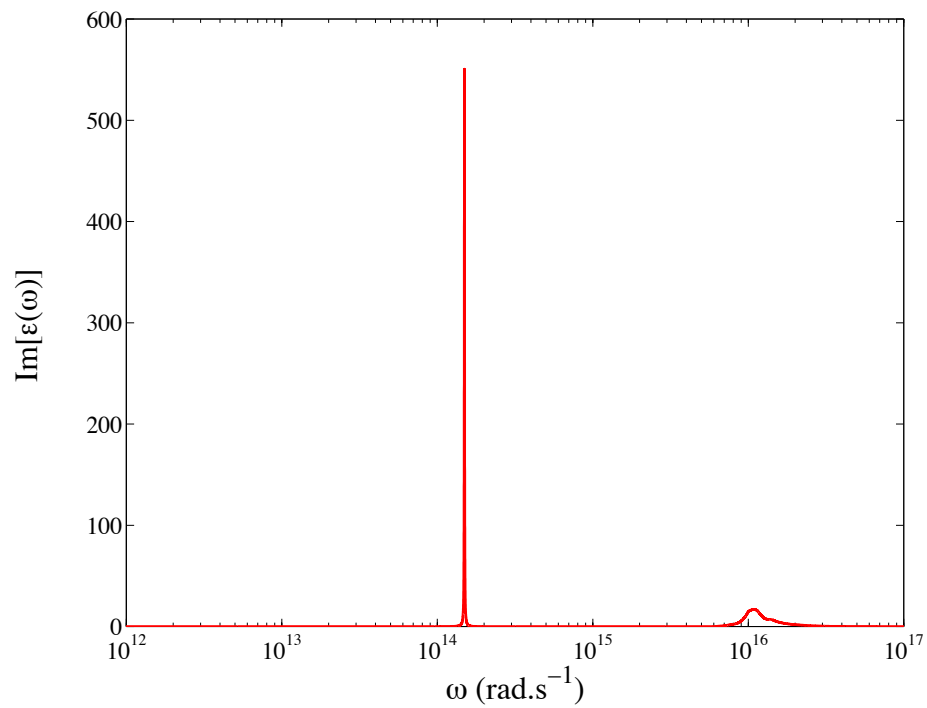
$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (\text{A.14b})$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la partie principale au sens de Cauchy. Pour  $\omega > 4.55 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ , nous pouvons donc évaluer l'intégrale dans l'équation (A.14b) en utilisant les différentes expressions de  $\varepsilon'(\omega)$ . L'ensemble des résultats est représenté sur la figure A.8 où nous avons tracé les parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique entre  $10^{12}$  et  $10^{17} \text{ rad.s}^{-1}$ .





(a) Partie réelle



(b) Partie imaginaire

FIG. A.8 – Parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique du carbure de silicium.

Les figures A.9 et A.10 sont des vues de détail autour des deux pics d'absorption de  $\varepsilon(\omega)$ .

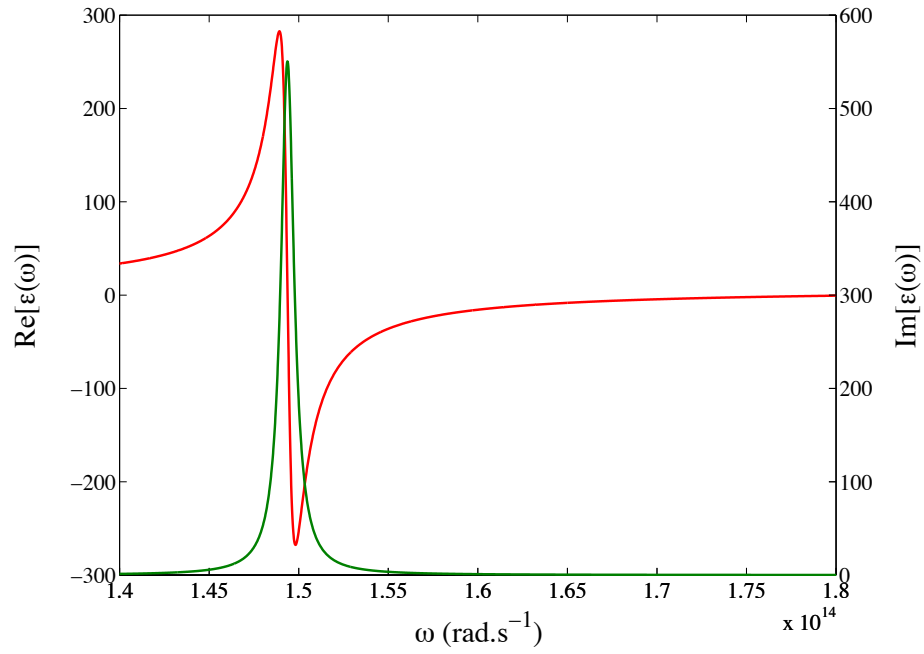


FIG. A.9 – Parties réelle (rouge) et imaginaire (vert) de la constante diélectrique du carbure de silicium entre  $1.4 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $1.8 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$ .

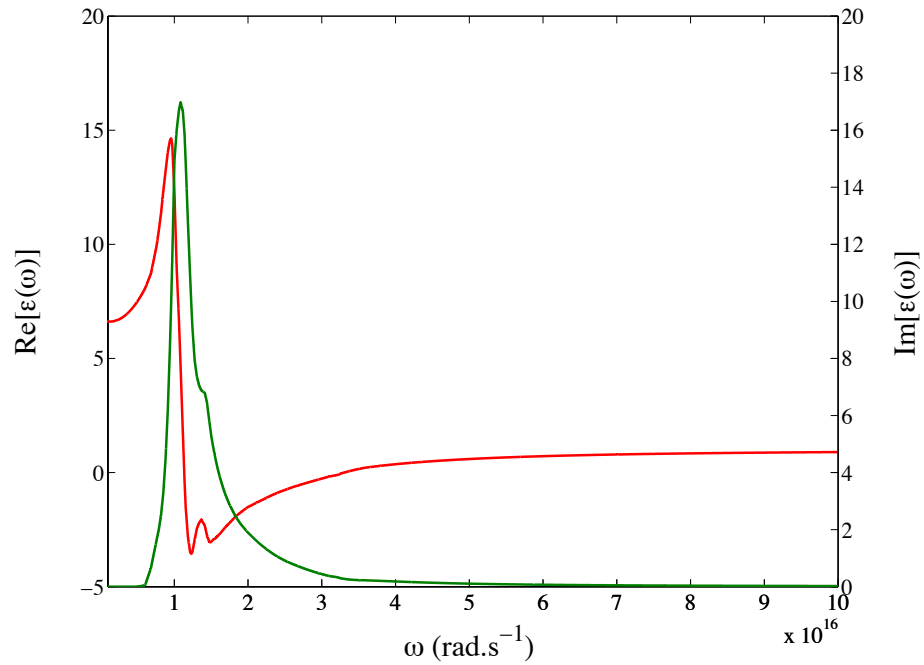


FIG. A.10 – Parties réelle (rouge) et imaginaire (vert) de la constante diélectrique du carbure de silicium entre  $1.0 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$  et  $1.0 \times 10^{17} \text{ rad.s}^{-1}$ .



## Annexe B

# Théorème de Fluctuation-Dissipation

### B.1 Théorème de fluctuation-dissipation

Le théorème de fluctuation-dissipation est un théorème très général qui n'est pas limité au seul domaine de l'électrodynamique. Il a été étudié initialement par Nyquist (1928) puis par Callen et Welton (1951) dans le cadre des fluctuations de tension aux bornes d'un conducteur à cause de l'agitation thermique. Le théorème a ensuite été établi dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire (Réfrégier 1993) et de la physique statistique à l'équilibre<sup>1</sup>. Rytov (1958c) a été le premier à appliquer ce théorème dans le cadre de l'électrodynamique et du rayonnement thermique. Citons également les travaux de Lifchitz (*cf.* Chap. 6), de Polder et van Hove (1971) et de Eckhardt (1982). Après avoir rappelé les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de fluctuation-dissipation, nous en donnerons l'expression la plus générale pour ensuite l'appliquer à des situations concrètes (calcul de la densité d'énergie électromagnétique, calcul d'un flux d'énergie ou d'un flux d'impulsion) que nous avons eues à traiter dans notre travail. Nous reviendrons enfin sur l'hypothèse de localité de la constante diélectrique pour comprendre physiquement à quoi elle correspond.

#### B.1.1 Hypothèses du modèle

Si nous considérons un corps matériel, nous savons que celui-ci est le siège de fluctuations de température, autour d'une température d'équilibre. Cette "agitation thermique" provoque, au niveau microscopique, un mouvement *aléatoire* de particules chargées (ions, électrons, ...). Au niveau macroscopique (*i.e.* celui au niveau duquel nous nous plaçons en électromagnétisme), ce sont les fluctuations thermiques de densités de charge ou de courant (grandeurs *macroscopiques* définies pour un volume  $V$  du matériau<sup>2</sup>) qui sont les grandeurs pertinentes pour décrire ce phénomène. Celles-ci constituent alors des termes sources *fluctuants* (ou aléatoires) supplémentaires dans les équations de Maxwell qui créent alors des champs *fluctuants* électrique et magnétique. Il est important de noter que nous supposons que toutes ces grandeurs sont *stationnaires* dans le temps, au moins au sens large (*cf.* Mandel et Wolf 1995).

Les deux principales hypothèses que nous avons utilisées pour écrire le théorème de fluctuation-dissipation sont les suivantes :

1. l'Équilibre Thermodynamique Local (ETL) est réalisé en chacun des points du système (ou du matériau) et nous pouvons définir une température  $T$  (température d'équilibre thermodynamique) à chaque instant : les fluctuations de température se font autour de cette température d'équilibre ;
2. le système est caractérisé d'un point de vue électromagnétique par une constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  *complexe* dépendant de la pulsation  $\omega$  du champ électromagnétique rayonné.

---

1. La démonstration complète et générale de ce théorème dépasse largement le cadre de notre travail.

2. Jackson (2001), Chap. 6, Sec. 6, pp. 260-270.

Nous supposons, de plus, que le milieu est linéaire (constante diélectrique indépendante de la valeur du champ électromagnétique) et non magnétique ;

3. la constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  est une grandeur *locale* (cf. Sec. B.2). Ceci signifie notamment que la valeur de la polarisation en un point dépend uniquement du champ en ce point.

### B.1.2 La formulation du théorème de fluctuation-dissipation et ses différentes applications

Nous noterons  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}, \omega)$  la densité volumique de courant fluctuant au point  $\mathbf{r}$  et à la pulsation  $\omega$ . Le théorème de fluctuation-dissipation donne la valeur de la fonction de corrélation spatiale (dans le domaine fréquentiel) des fluctuations thermiques de la densité de courant<sup>3</sup> :

$$\left\langle j_{\alpha}^f(\mathbf{r}, \omega) j_{\beta}^{f*}(\mathbf{r}', \omega') \right\rangle = \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0 \varepsilon''(\mathbf{r}, \omega) \Theta(\omega, T) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega') \quad (\text{B.1})$$

avec les notations suivantes :

- $\alpha, \beta = x, y, z$  repèrent les composantes de  $\mathbf{j}^f$  ;
- $\langle \dots \rangle$  signifie que l'on réalise une moyenne d'ensemble sur l'ensemble des réalisations du système ;
- $\varepsilon_0$  est la permittivité diélectrique du vide ;
- $\varepsilon''(\omega) = \text{Im}[\varepsilon(\omega)]$  est la partie imaginaire de la constante diélectrique ;
- $\Theta(\omega, T)$  est l'énergie *moyenne* d'un oscillateur *quantique* à la pulsation  $\omega$  et en équilibre thermique à la température  $T$  ;
- $\delta_{\alpha\beta}$  est le symbole de Kronecker ;
- $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  signifie que les fluctuations sur la densité de courant au point  $\mathbf{r}$  et au point  $\mathbf{r}'$  sont *totalemment* décorrélés : ceci découle directement de l'hypothèse de localité de la constante diélectrique ;
- $\delta(\omega - \omega')$  traduit l'hypothèse de *stationnarité* des grandeurs fluctuantes (Théorème de Wiener-Kitchine, Mandel et Wolf 1995).

À ce stade, nous pouvons faire quelques remarques concernant le théorème de fluctuation-dissipation . Tout d'abord, nous devons préciser que l'expression précédente suppose que le milieu est *isotrope*. Cependant, s'il ne l'est pas, alors il suffit de remplacer  $\varepsilon''(\omega)$  par son élément de matrice  $\varepsilon''_{\alpha\beta}(\omega)$ . De plus, la formule précédente fait apparaître clairement le rôle de l'*absorption* (ou de la *dissipation*) dans le phénomène du rayonnement thermique. En effet, la partie imaginaire de  $\varepsilon(\omega)$  est, par essence, liée à l'absorption dans le matériau et si celle-ci est nulle, les fluctuations sont nulles, de même que le rayonnement thermique<sup>4</sup>.

Enfin, il est important de préciser l'expression de  $\Theta(\omega, T)$  :

$$\Theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} \quad (\text{B.2})$$

---

3. cf. Rytov *et al.* 1989, Éq. (3-26), p. 122

4. Voir les lois de Kirchoff au chapitre 2.

où  $2\pi\hbar$  est la constante de Planck et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Cette expression exacte peut se réécrire sous la forme :

$$\Theta(\omega, T) = \hbar\omega \left( \bar{n}_\omega + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \quad (\text{B.4})$$

où :

$$\bar{n}_\omega = \frac{1}{\exp \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) - 1} \quad (\text{B.5})$$

est la distribution de Bose-Einstein à la température  $T$ .

D'après l'équation (B.3), nous avons  $\Theta(\omega, T) \rightarrow \hbar\omega/2$  (*i.e.*  $\bar{n}_\omega \rightarrow 0$ ) lorsque  $T \rightarrow 0$  : ce terme résiduel correspond aux fluctuations *quantiques* du vide. Il est associé à l'“énergie de point zéro” (*cf.* Chap. 6). Le terme qui dépend de la température dans l'équation (B.2) correspond à ce que l'on appelle le “rayonnement du corps noir” (ou rayonnement de Planck).

Nous allons voir maintenant qu'il n'est pas toujours nécessaire de prendre en compte cette énergie de point zéro suivant les situations physiques étudiées.

### Expression de $\Theta(\omega, T)$ pour un calcul de densité d'énergie

*A priori*, lorsque nous faisons un calcul de densité d'énergie électromagnétique (*cf.* Chap. 2), il faut prendre le terme correspondant aux fluctuations du vide. Cependant, l'énergie associée à ces fluctuations ne peut être mesurée (ou détectée) car cela supposerait que le dispositif de mesure soit capable d'absorber des photons du champ électromagnétique qui, lui, est dans son état fondamental. Ainsi, lorsque nous avons calculé la densité d'énergie au-dessus d'une interface, nous n'avons pas pris en compte le terme correspondant aux fluctuations du vide.

Pour une étude détaillée de la théorie de la photodétection, on pourra se reporter utilement à Mandel et Wolf (1995).

### Expression de $\Theta(\omega, T)$ pour un calcul de flux d'énergie

Pour un calcul de flux d'énergie (*i.e.* de vecteur de Poynting comme dans le chapitre 3), la situation est un peu différente et la réponse a été donnée par Rytov. Généralement, nous supposons que le milieu que nous considérons est l'unique source du champ fluctuant. Cependant, les fluctuations du vide existent même si le milieu est absent et même si la température est nulle. Ainsi, nous pouvons considérer qu'à chaque instant, il y a un équilibre qui s'établit : le flux associé à l'énergie de point zéro émis par un élément de volume est compensé par un flux absorbé venant du reste de l'espace. Ainsi, il n'est pas nécessaire de conserver le premier terme du membre de droite dans l'équation (B.2).

### Expression de $\Theta(\omega, T)$ pour un calcul de flux d'impulsion

Par flux d'impulsion, nous entendons un calcul de force comme nous l'avons fait dans le chapitre 6. Dans ce cas-là, il est nécessaire de garder le terme  $\hbar\omega/2$  puisque celui-ci est responsable de l'“effet Casimir” que nous voulons étudier. Nous verrons dans ce même chapitre, que l'“effet Casimir” est d'ailleurs l'un des premiers effets visibles des fluctuations quantiques du vide qui a été mis en évidence expérimentalement.

## B.2 Localité de la constante diélectrique

Rappelons tout d'abord que la constante diélectrique est introduite en électromagnétisme lorsque que nous étudions les relations *constitutives* des milieux *matériels*. En effet, un problème général d'électromagnétisme fait intervenir 6 inconnues :  $\mathbf{E}$  (champ électrique),  $\mathbf{D}$  (induction électrique),  $\mathbf{P}$  (polarisation),  $\mathbf{H}$  (champ magnétique),  $\mathbf{B}$  (induction magnétique),  $\mathbf{M}$  (aimantation). Les équations de Maxwell sont au nombre de 4, si bien qu'il est nécessaire d'introduire 2 équations supplémentaires reliant  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{P}$  d'une part et  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}$ , d'autre part. Ces équations additionnelles sont appelées relations *constitutives*. Pour un milieu diélectrique, la relation constitutive lie la valeur de la polarisation à la valeur du champ électrique.

Considérons, par exemple, qu'en un point  $\mathbf{r}$  et qu'à un instant  $t$ , le champ électrique soit égal à  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Ce champ peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (\text{B.6})$$

où  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$  est la transformée de Fourier spatio-temporelle du champ :

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3\mathbf{r} \int dt \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (\text{B.7})$$

Cette transformée de Fourier existe au moins dans le cadre des fonctions généralisées. Ce champ crée une polarisation  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  à laquelle est associée sa transformée de Fourier  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega)$ . La relation qu'il existe entre les deux transformées de Fourier est une relation *constitutive* qui s'écrit dans le cas le plus général<sup>5</sup> sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 [\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) - 1] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{B.8})$$

où  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  est la constante diélectrique du milieu pour un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et une fréquence  $\omega$ . À ce stade, faisons deux remarques :

1. pour un milieu non linéaire, la constante diélectrique dépend également de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}^2$ , *etc*;
2. pour un milieu non isotrope, la constante diélectrique s'écrit sous la forme d'un tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{\alpha\beta}]$ , avec  $\alpha, \beta = x, y, z$ .

Supposons maintenant que nous puissions écrire cette constante diélectrique sous la forme d'une somme de deux fonctions :

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\omega) + \Delta\varepsilon(\mathbf{k}) \quad (\text{B.9})$$

où  $\varepsilon(\omega)$  ne dépend que de la fréquence  $\omega$  et  $\Delta\varepsilon(\mathbf{k})$  que du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Physiquement, ces deux fonctions peuvent s'interpréter respectivement comme la limite "faible vecteur d'onde" et comme la limite "basse fréquence" de la constante diélectrique. Avec cette hypothèse, nous avons :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_0 [\varepsilon(\omega) - 1] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) + \varepsilon_0 \Delta\varepsilon(\mathbf{k}) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{B.10})$$

---

5. On se place ici dans le cas d'un milieu linéaire, isotrope et non magnétique.

Si nous effectuons une transformée de Fourier inverse en espace sur l'équation précédente, nous obtenons alors :

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) = \underbrace{\varepsilon_0 [\varepsilon(\omega) - 1] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega)}_{\tilde{\mathbf{P}}_L(\mathbf{r}, \omega)} + \varepsilon_0 \underbrace{\int d^3 \mathbf{r}' \Delta \varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}', \omega)}_{\tilde{\mathbf{P}}_{NL}(\mathbf{r}, \omega)} \quad (\text{B.11})$$

Le terme  $\tilde{\mathbf{P}}_L(\mathbf{r}, \omega)$  correspond à une polarisation *locale* : la polarisation au point  $\mathbf{r}$  ne dépend que du champ en ce même point. Ce terme correspond à la relation constitutive *locale* que nous avons l'habitude d'écrire avec une constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  locale. Le terme  $\tilde{\mathbf{P}}_{NL}(\mathbf{r}, \omega)$  correspond à une polarisation *non locale* : la polarisation en un point dépend du champ dans tout l'espace. Ce terme est un terme supplémentaire à la polarisation *locale* usuelle.

Cependant, les effets non locaux sont négligeables dans la plupart des cas. Il peut être nécessaire d'en tenir compte lorsque l'on traite des interactions électron-réseau et électron-impureté dans un solide ou de l'écrantage électronique pour les interactions électron-électron dans un gaz d'électrons libres. Dans ce dernier cas, un modèle (modèle de *Thomas-Fermi*) donne pour la correction non locale à la constante diélectrique :

$$\Delta \varepsilon(\mathbf{k}) = 1 + \frac{k_s^2}{k^2} \quad (\text{B.12})$$

où  $1/k_s$  correspond à une longueur d'écrantage. Dans le cas du cuivre, celle-ci correspond à une longueur d'environ 55 pm. Aussi, si nous travaillons avec des grandeurs caractéristiques beaucoup plus grande que cette longueur, les effets non locaux sont négligeables et nous pouvons considérer la constante diélectrique comme une grandeur *locale*.





## Annexe C

# Tenseur de Green de l'espace libre

### C.1 Formalisme de Green

#### C.1.1 Position du problème

On se place dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$  (la dépendance en  $\omega$  ne sera, par la suite, plus explicitée mais il faut garder à l'esprit que les calculs suivants sont développés en régime monochromatique). Le milieu est également supposé être non-magnétique ( $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (SI),  $\mu_0$  étant la perméabilité magnétique du vide). Un des problèmes courants que nous avons à traiter est de calculer le rayonnement (*i.e.* le champ électromagnétique) d'un dipôle ou d'un élément de courant, d'un point source  $\mathbf{r}'$  vers un point d'observation  $\mathbf{r}$  (*cf.* Fig. C.1).

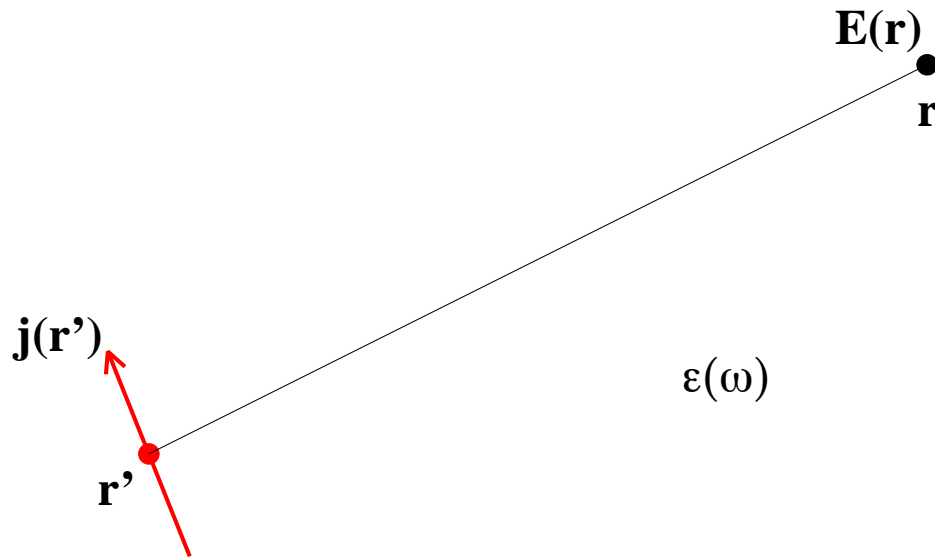


FIG. C.1 – Rayonnement d'un élément de courant dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non magnétique de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ .

#### C.1.2 Introduction du tenseur de Green

Considérons une distribution de courants  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  répartie dans l'espace ; cette distribution peut être continue ou discrète<sup>1</sup>. Notons que  $\mathbf{j}$  est homogène à une densité volumique de courant en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$  (SI). Ces courants “sources” rayonnent un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  au point  $\mathbf{r}$  (et également

1. Dans ce cas-là, on peut écrire :  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{j}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$

un champ magnétique). En combinant les équations de Maxwell dans le milieu, nous pouvons en déduire la relation entre l'élément de courant et le champ :

$$\mathbf{rot}_r \mathbf{rot}_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (i\omega\mu_0) \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (\text{C.1})$$

où  $k_0^2 = \omega^2/c^2$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide.

Maintenant, notons  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E$  le tenseur – dit tenseur de Green<sup>2</sup> – solution de l'équation suivante :

$$\mathbf{rot}_r \mathbf{rot}_r \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_0^2 \varepsilon \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{C.2})$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}}$  est le tenseur unité et  $\delta$  la distribution de Dirac (notons que  $\delta$  est ici homogène à l'inverse d'un volume, c'est-à-dire en  $\text{m}^{-3}$ ).  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E$  doit également vérifier les conditions de rayonnement à l'infini : onde sortante et décroissance. Nous pouvons alors déterminer le champ électrique rayonné au point  $\mathbf{r}$  par l'élément de courant situé en  $\mathbf{r}'$  par la relation :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [(i\omega\mu_0) \mathbf{j}(\mathbf{r}')] \quad (\text{C.3})$$

Pour une distribution volumique de courants, une intégration sur le volume  $V$  des sources est nécessaire :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (i\omega\mu_0) \int_V \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad d^3\mathbf{r}' = dx'dy'dz' \quad (\text{C.4})$$

Ainsi, il existe une relation de linéarité (le milieu étant linéaire) entre les sources (l'excitation) et les champs (la réponse). De plus, le milieu étant homogène et isotrope, le tenseur de Green ne dépend que de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  (et même que de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ).

## C.2 Détermination du tenseur de Green pour le champ électrique

### C.2.1 Transformée de Fourier du tenseur de Green

Dans la plupart des cas, il est assez difficile de déterminer l'expression analytique du tenseur de Green. En revanche, dans le cas de géométrie simple (espace libre, système à une ou plusieurs interfaces planes, ...), il est généralement possible de calculer la transformée de Fourier spatiale de ce tenseur. Dans l'espace libre, puisque le tenseur ne dépend que de  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , nous effectuons le développement de Fourier par rapport à la variable  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  et nous écrivons :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.5})$$

où  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  est le vecteur d'onde (*cf.* Fig. C.1) et  $d^3\mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$ .  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E$  est la transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E$ .

---

2. Cette dénomination n'est pas particulière à l'électromagnétisme.

### C.2.2 Détermination de l'équation vérifiée par $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E$

Si nous prenons le rotationnel de l'équation (C.5), nous pouvons écrire :

$$\mathbf{rot}_r \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{rot}_r \left\{ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E (\mathbf{k}) \exp [i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \right\} \quad (\text{C.6})$$

Il faut donc calculer le terme entre crochets du terme de gauche. Un moyen simple et rapide est de remarquer que ce terme a une forme d'onde plane (du type  $\mathbf{E}_0 \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ). Sachant que pour une onde plane, appliquer l'opérateur  $\mathbf{rot}$  revient à faire une post-multiplication vectorielle par  $i \mathbf{k}$ , nous en déduisons que :

$$\underbrace{\mathbf{rot}_r \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]}_{tenseur} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \underbrace{\left[ i \mathbf{k} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right]}_{tenseur} (\mathbf{k}) \exp [i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.7})$$

avec :

$$\left[ i \mathbf{k} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right]_{jn} (\mathbf{k}) = i \epsilon_{jlm} k_l g_0^E{}_{mn} (\mathbf{k}) \quad (\text{C.8})$$

où  $\epsilon_{jlm}$  est le symbole de *Levi-Civita* défini par :

$$\epsilon_{xyz} = \epsilon_{yzx} = \epsilon_{zxy} = 1 \quad (\text{C.9a})$$

$$\epsilon_{xzy} = \epsilon_{yxz} = \epsilon_{zyx} = -1 \quad (\text{C.9b})$$

$$\text{pour tous les autres } \epsilon_{jlm} = 0 \quad (\text{C.9c})$$

Nous réitérons ensuite la même opération sur  $\mathbf{rot}_r \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E$ , pour finalement obtenir :

$$\mathbf{rot}_r \mathbf{rot}_r \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ i \mathbf{k} \times \left( i \mathbf{k} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right) \right] (\mathbf{k}) \exp [i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.10})$$

On peut montrer, en faisant les calculs sur la première colonne (par exemple) et en utilisant la formule du double produit vectoriel, que :

$$i \mathbf{k} \times \left( i \mathbf{k} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right) = \underbrace{\left( \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \right)}_{tenseur} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E - \underbrace{\left( \mathbf{k} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right)}_{tenseur} \overset{\text{vecteur}}{\mathbf{k}} \quad (\text{C.11})$$

avec :

$$\left( \mathbf{k} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right)_m = k_n g_0^E{}_{mn} (\mathbf{k}) \quad (\text{C.12a})$$

$$\left( \mathbf{k} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right) \mathbf{k} = \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \quad (\text{C.12b})$$

$$\left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right)_{mn} = k_m k_n \quad (\text{C.12c})$$

d'où :

$$i \mathbf{k} \times \left( i \mathbf{k} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right) = \left( \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E - \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \quad (\text{C.13})$$

Ainsi :

$$\mathbf{rot}_r \mathbf{rot}_r \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E - \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E \right] \exp [i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.14})$$

En combinant les équations (C.2) et (C.14), nous obtenons l'équation tensorielle vérifiée par  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E$  :

$$\left[ (k^2 - k_0^2 \varepsilon) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{k}) = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \quad (\text{C.15})$$

$$k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 \quad (\text{C.16})$$

Nous pouvons alors écrire l'expression du tenseur de Green :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ (k^2 - k_0^2 \varepsilon) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right]^{-1} \exp [i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.17})$$

### C.2.3 Inversion formelle du tenseur $\left[ (k^2 - k_0^2 \varepsilon) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right]$

En faisant le calcul, nous remarquons que :  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} = k^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}}$ . Formellement, nous pouvons donc écrire que :

$$\left[ (k^2 - k_0^2 \varepsilon) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right]^{-1} = \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}}}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \right]^{-1} \quad (\text{C.18a})$$

$$= \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}}}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \right)^n \quad (\text{C.18b})$$

Or,  $\forall n \geq 1$ ,  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}}^n = k^{2n-2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}}$ , d'où :

$$\begin{aligned} \left[ (k^2 - k_0^2 \varepsilon) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right]^{-1} &= \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^{2n-2}}{(k^2 - k_0^2 \varepsilon)^n} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \\ &= \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^{2n}}{(k^2 - k_0^2 \varepsilon)^{n+1}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \\ &= \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{k^2}{k^2 - k_0^2 \varepsilon}} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \\ &= \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_0^2 \varepsilon} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons écrire l'expression tensorielle de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E$  :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 - k_0^2 \varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_0^2 \varepsilon} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \quad (\text{C.19})$$

### C.2.4 Expression du tenseur de Green $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$ de l'espace libre

En injectant l'équation (C.19) dans l'équation (C.5), nous obtenons l'expression finale du tenseur de Green  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E$  :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 - k_0^2\varepsilon} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_0^2\varepsilon} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.20})$$

## C.3 Développement de Weyl du tenseur de Green

### C.3.1 Idée du développement de Weyl

L'idée ici est de réaliser l'intégration suivant  $k_z$  de l'équation (C.20). Pour la suite, nous adopterons les notations suivantes :  $\mathbf{r} = (\mathbf{R}, z)$ ,  $\mathbf{r}' = (\mathbf{R}', z')$ ,  $\mathbf{K} = (k_x, k_y, 0)$  et  $K = |\mathbf{K}|$ . Notons  $\gamma$  la grandeur complexe suivante :

$$\gamma = \sqrt{k_0^2\varepsilon - K^2}, \quad \text{avec } Re(\gamma) \geq 0 \text{ et } Im(\gamma) \geq 0 \quad (\text{C.21})$$

Nous avons donc :  $\mathbf{k} = (\mathbf{K}, \gamma)$ .

Réécrivons l'équation (C.20) sous la forme :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^E(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{(2\pi)^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \exp[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \quad (\text{C.22})$$

avec :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') = \int \frac{dk_z}{2\pi} \frac{1}{k_z^2 - \gamma^2} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_0^2\varepsilon} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{k}\mathbf{k}} \right] \exp[ik_z(z - z')] \quad (\text{C.23})$$

L'équation (C.22) est appelée le développement de Weyl du tenseur de Green.

### C.3.2 Expression du tenseur $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z')$

Pour obtenir explicitement les expressions des différentes composantes du tenseur  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z')$ , il suffit de réaliser l'intégration de l'équation (C.23) dans le plan complexe. Cette intégration ne pose pas de problème, sauf pour le cas  $z = z'$  où il existe une singularité. Le détail complet des

calculs peut être trouvé dans Sentenac (1993). Voici les résultats :

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{xx} = \frac{i}{2\gamma} \left( 1 - \frac{k_x^2}{k_0^2 \varepsilon} \right) \exp(i\gamma|z - z'|) \quad (\text{C.24a})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{xy} = -\frac{i}{2\gamma} \frac{k_x k_y}{k_0^2 \varepsilon} \exp(i\gamma|z - z'|) \quad (\text{C.24b})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{xz} = \frac{ik_x}{2k_0^2 \varepsilon} \text{sgn}(z' - z) \exp(i\gamma|z - z'|) \quad (\text{C.24c})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{yx} = \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{xy} \quad (\text{C.24d})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{yy} = \frac{i}{2\gamma} \left( 1 - \frac{k_y^2}{k_0^2 \varepsilon} \right) \exp(i\gamma|z - z'|) \quad (\text{C.24e})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{yz} = \frac{ik_y}{2k_0^2 \varepsilon} \text{sgn}(z' - z) \exp(i\gamma|z - z'|) \quad (\text{C.24f})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{zx} = \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{xz} \quad (\text{C.24g})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{zy} = \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{yz} \quad (\text{C.24h})$$

$$\left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') \right]_{zz} = \frac{iK^2}{2\gamma k_0^2 \varepsilon} \exp(i\gamma|z - z'|) - \frac{1}{k_0^2 \varepsilon} \delta(z - z') \quad (\text{C.24i})$$

où la fonction  $\text{sgn}$  désigne la fonction *signe* :

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u < 0 \\ +1 & \text{si } u \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

### C.3.3 Formalisme de Sipe

Ce paragraphe est inspiré du formalisme développé dans Sipe (1987) pour le cas du tenseur de Green à une interface. L'annexe D reviendra en détail sur ce formalisme. Notons  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  les deux vecteurs unitaires formés à partir des vecteurs  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{z}$ . Définissons à présent les deux vecteurs unitaires  $\hat{\mathbf{s}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}$  par :

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{C.26a})$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{k_0 n} \left[ K \hat{\mathbf{z}} - \text{sgn}(z - z') \gamma \hat{\mathbf{K}} \right] \quad (\text{C.26b})$$

où  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  est l'indice optique du milieu défini tel que :

$$\text{Re}(n) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(n) \geq 0 \quad (\text{C.27})$$

Avec ces notations, nous pouvons montrer que  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E$  prend alors la forme suivante :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') = \frac{i}{2\gamma} (\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) \exp(i\gamma|z - z'|) - \frac{1}{k_0^2 \varepsilon} \delta(z - z') \overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{zz} \quad (\text{C.28})$$

où  $\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}$  sont les tenseurs définis par :

$$\left. \begin{aligned} (\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}})_{\alpha\beta} &= s_\alpha s_\beta \\ (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}})_{\alpha\beta} &= p_\alpha p_\beta \end{aligned} \right\} \alpha, \beta = x, y, z \quad (\text{C.29})$$

et :

$$\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{zz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.30})$$

On voit ici l'intérêt du formalisme de Sipe qui fournit une expression condensée du tenseur de Green. Bien évidemment les notations  $s$  et  $p$  font référence aux différentes polarisations : polarisation  $s$  (ou TE) et polarisation  $p$  (ou TM)<sup>3</sup>. Par ailleurs, cette notation est assez intuitive. En effet, la notation tensorielle  $\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}$  signifie que l'on étudie la contribution au champ polarisé  $s$  ( $\hat{\mathbf{s}}$  de gauche) dû au courant polarisé  $s$  ( $\hat{\mathbf{s}}$  de droite). De même pour la notation  $\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}$ . Nous verrons que ce formalisme sera très utile par la suite lors du calcul du tenseur de Green d'un système à une ou plusieurs interfaces (*cf.* Annexes D et E).

### C.3.4 Expression du tenseur $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H(\mathbf{K}, z, z')$

De la même manière que pour le champ électrique, nous introduisons le tenseur de Green  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^H$  en écrivant que le champ magnétique  $\mathbf{H}$  lui est relié par la relation :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \int_V \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^H(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}', \quad d^3\mathbf{r}' = dx' dy' dz' \quad (\text{C.31})$$

Ensuite, nous définissons  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H$  comme la transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^H$  :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0^H(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{C.32})$$

Nous pouvons alors développer le même formalisme pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Cependant, nous ne détaillerons pas ici les calculs et nous ne donnerons que l'expression (avec les notations de Sipe) de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H(\mathbf{K}, z, z')$  :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H(\mathbf{K}, z, z') = \frac{k_0 n}{2\gamma} (\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{p}}) \exp(i\gamma|z - z'|) + \frac{i}{k_0^2 \varepsilon} \delta(z - z') [k_y \overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{xz} - k_x \overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{yz}] \quad (\text{C.33})$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{xz}$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{yz}$  sont définis de la même manière que  $\overset{\leftrightarrow}{\Gamma}_{zz}$  (un seul élément non-nul).

---

3. Dans l'espace libre, celles-ci n'existent pas vraiment et l'équation (C.28) est purement formelle.





## Annexe D

# Tenseur de Green à une interface

### D.1 Préliminaires

#### D.1.1 Géométrie du problème

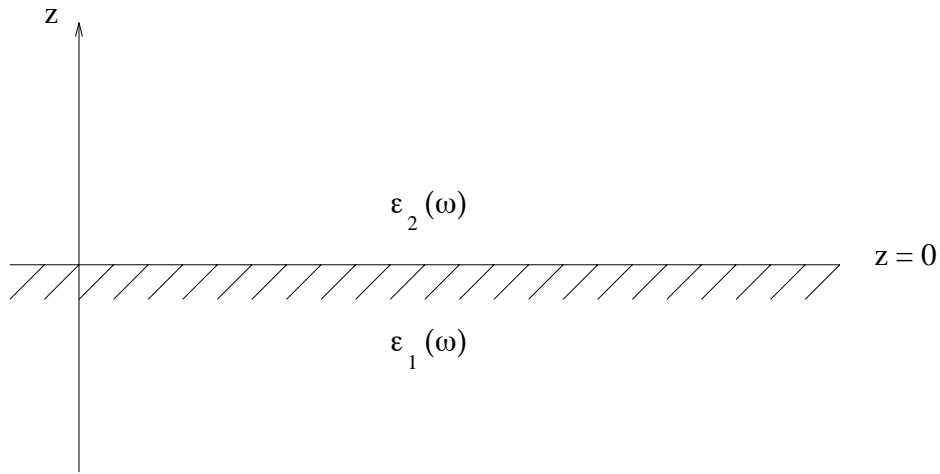


FIG. D.1 – Géométrie du système pour le calcul du tenseur de Green à une interface.

Considérons (*cf.* figure D.1) deux demi-espaces linéaires, homogènes, isotropes et non magnétiques, de constante diélectrique  $\varepsilon_1(\omega)$  pour  $z < 0$  et  $\varepsilon_2(\omega)$  pour  $z > 0$ . L'interface entre ces deux milieux est une interface plane correspondant au plan  $z = 0$ . Nous considérons un point  $\mathbf{r}'$  à l'intérieur du milieu 1 (point source) et un point  $\mathbf{r}$  à l'intérieur du milieu 1 ou du milieu 2 (point d'observation). Dans cette géométrie, nous allons donner les expressions des tenseurs de Green (pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ ) en fonction de la position du point d'observation.

#### D.1.2 Notations de Sipe (Sipe 1987)

Considérons les vecteurs  $\mathbf{k}_i^\pm = (\mathbf{K}, \pm\gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$  avec  $K = |\mathbf{K}| \in [0; \infty[$  et :

$$\gamma_i = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_i - K^2}, \quad \text{avec } \text{Re}(\gamma_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\gamma_i) \geq 0 \quad (\text{D.1})$$

avec  $k_0^2 = \omega^2/c^2$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide. Soient  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  les vecteurs unitaires formés à partir de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{z}$ . De la même manière, notons  $\hat{\mathbf{k}}_i^\pm$  les vecteurs unitaires issus des  $\mathbf{k}_i^\pm$ . On peut remarquer que :

$$\hat{\mathbf{k}}_i^\pm = \frac{1}{k_0 n_i} \left( K \hat{\mathbf{K}} \pm \gamma_i \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (\text{D.2})$$

où  $n_i = \sqrt{\varepsilon_i}$  est l'indice optique du milieu  $i$  tel que  $Re(n_i) \geq 0$  et  $Im(n_i) \geq 0$ . Par ailleurs, conformément aux notations employées par Sipe (1987), nous introduirons les vecteurs suivants :

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{D.3a})$$

$$\hat{\mathbf{p}}_i^\pm = \frac{1}{k_0 n_i} \left( K \hat{\mathbf{z}} \mp \gamma_i \hat{\mathbf{K}} \right) \quad (\text{D.3b})$$

L'ensemble de ces notations est résumé dans la figure suivante :

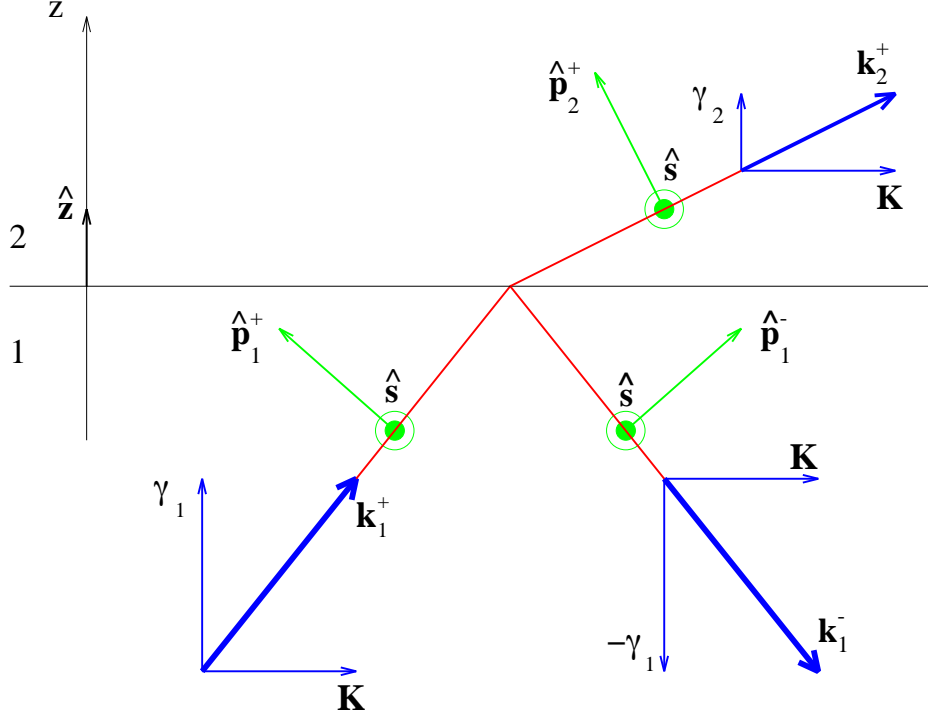


FIG. D.2 – Description des différents vecteurs introduits dans le formalisme de Sipe.

### D.1.3 Définition des facteurs de Fresnel pour une interface plane

Considérons une onde plane d'amplitude  $E_{inc}$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1^+ = (\mathbf{K}, \gamma_1)$ , incidente sur l'interface milieu 1/milieu 2 (cf. Fig. D.2). Cette onde va être réfléchiée dans le milieu 1 suivant le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1^- = (\mathbf{K}, -\gamma_1)$ , avec une amplitude  $E_r^s = r_{12}^s E_{inc}$  si l'onde incidente est polarisée  $s$  ( $\mathbf{E} = E_{inc} \hat{\mathbf{s}}$ ) et avec une amplitude  $E_r^p = r_{12}^p E_{inc}$  si l'onde incidente est polarisée  $p$  ( $\mathbf{E} = E_{inc} \hat{\mathbf{p}}_1^+$ ). Par ailleurs, cette onde va être également transmise dans le milieu 2 suivant le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_2^+ = (\mathbf{K}, \gamma_2)$ , avec une amplitude  $E_t^s = t_{12}^s E_{inc}$  si l'onde incidente est polarisée  $s$  et avec une amplitude  $E_t^p = t_{12}^p E_{inc}$  si l'onde incidente est polarisée  $p$ . Ces différents coefficients  $r_{12}^s, r_{12}^p, t_{12}^s, t_{12}^p$  sont les facteurs de Fresnel respectivement en réflexion et en transmission (respectivement pour la polarisation  $s$  et pour la polarisation  $p$ ) :

$$r_{12}^s = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (\text{D.4a})$$

$$r_{12}^p = \frac{\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2}{\varepsilon_2 \gamma_1 + \varepsilon_1 \gamma_2} \quad (\text{D.4b})$$

$$t_{12}^s = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (\text{D.4c})$$

$$t_{12}^p = \frac{2n_1 n_2 \gamma_1}{\varepsilon_2 \gamma_1 + \varepsilon_1 \gamma_2} \quad (\text{D.4d})$$

On notera que ces facteurs ne dépendent en fait que de  $K = |\mathbf{K}|$  (et bien sûr de  $\omega$ ). Cependant, remarquons qu'ils dépendent également du choix des vecteurs unitaires utilisés pour représenter les champs incident, réfléchi et transmis. Ils sont par ailleurs définis pour  $K > k_0$  (onde *évanescence*).

Nous pouvons, de la même manière, définir des facteurs de réflexion et de transmission lorsque l'onde incidente se situe dans le milieu 2. Si l'on note  $r_{21}^s, r_{21}^p, t_{21}^s, t_{21}^p$  ces facteurs, ceux-ci sont alors reliés aux précédents par les relations suivantes :

$$r_{21}^s = -r_{12}^s \quad (\text{D.5a})$$

$$r_{21}^p = -r_{12}^p \quad (\text{D.5b})$$

$$t_{21}^s = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} t_{12}^s \quad (\text{D.5c})$$

$$t_{21}^p = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} t_{12}^p \quad (\text{D.5d})$$

## D.2 Relations diverses entre facteurs de réflexion et de transmission

### D.2.1 Relations préliminaires sur les vecteurs d'onde

Nous donnons ci-dessous quelques identités utiles qui résultent des définitions données dans la section D.1.3.

$$2 \operatorname{Re}(\gamma) \operatorname{Im}(\gamma) = k_0^2 \operatorname{Im}(\varepsilon) \quad (\text{D.6})$$

$$\operatorname{Re}(\gamma) (|\gamma|^2 + K^2) = k_0^2 \operatorname{Re}(\varepsilon \gamma^*) \quad (\text{D.7})$$

$$\operatorname{Im}(\gamma) (|\gamma|^2 - K^2) = k_0^2 \operatorname{Im}(\varepsilon \gamma^*) \quad (\text{D.8})$$

### D.2.2 Relations sur les facteurs de Fresnel

$$1 + r_{12}^s = t_{12}^s \quad (\text{D.9a})$$

$$1 + r_{12}^p = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^p \quad (\text{D.9b})$$

$$1 - |r_{12}^s|^2 = \operatorname{Re} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) |t_{12}^s|^2 \quad (\text{D.9c})$$

$$1 - |r_{12}^p|^2 = \frac{|n_1|^2}{|n_2|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{\varepsilon_2 \gamma_2^*}{\varepsilon_1 \gamma_1^*} \right) |t_{12}^p|^2 \quad (\text{D.9d})$$

$$(\text{D.9e})$$

Les deux premières équations découlent des relations de continuité des champs électrique et magnétique à l'interface milieu 1/milieu 2. Les deux suivantes peuvent être vues (au moins pour les ondes propagatives) comme des conséquences de la conservation de l'énergie.

### D.2.3 Formules utiles avec les facteurs de Fresnel

Avec les relations précédentes, nous pouvons en déduire d'autres très utiles pour les calculs sur les tenseurs de Green :

$$\frac{Re(\gamma_1)}{|\gamma_1|^2} |t_{12}^s|^2 = \frac{1}{|\gamma_2|^2} \left[ Re(\gamma_2)(1 - |r_{12}^s|^2) - 2Im(\gamma_2)Im(r_{12}^s) \right] \quad (D.10a)$$

$$\frac{Re(\varepsilon_1 \gamma_1^*)}{|n_1|^2 |\gamma_1|^2} |t_{12}^p|^2 = \frac{1}{|\gamma_2|^2} \left[ Re(\gamma_2)(1 - |r_{12}^p|^2) - 2Im(\gamma_2)Im(r_{12}^p) \right] \quad (D.10b)$$

## D.3 Tenseurs de Green à une interface pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$

### D.3.1 Tenseurs de Green en réflexion : $\mathbf{r}$ dans le milieu 1

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{11}^E(\mathbf{K}, z, z') = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E(\mathbf{K}, z, z') + \frac{i}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{s}} r_{12}^s \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_1^- r_{12}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp(i\gamma_1 |z + z'|) \quad (D.11)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{11}^H(\mathbf{K}, z, z') = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H(\mathbf{K}, z, z') + \frac{k_0 n_1}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{p}}_1^- r_{12}^s \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} r_{12}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp(i\gamma_1 |z + z'|) \quad (D.12)$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^E$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_0^H$  sont les tenseurs de Green (en fait leurs transformées de Fourier spatiale) de l'espace libre, constitué ici par le milieu 1, respectivement pour le champ électrique  $\mathbf{E}$  et pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . Ces formules sont très condensées et très intuitives. Par exemple, l'expression de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{11}^E$  peut être interprétée ainsi: la source située au point  $\mathbf{r}'$  "éclaire" le point d'observation  $\mathbf{r}$  suivant deux chemins. Le premier chemin correspond au rayonnement direct (représenté par le tenseur de l'espace libre pour  $\mathbf{E}$ ) et le deuxième chemin correspond au rayonnement qui a été réfléchi par l'interface (représenté par la deuxième partie du tenseur). Ceci peut être visualisé sur la figure D.3.

De la même manière, le tenseur correspondant au rayonnement réfléchi peut être interprété ainsi: une onde émise avec une polarisation  $\hat{\mathbf{s}}$  se réfléchit sur l'interface avec un coefficient de réflexion  $r_{12}^s$  et conserve sa polarisation suivant  $\hat{\mathbf{s}}$ . Le même raisonnement peut être fait pour la polarisation  $p$  ou pour le champ magnétique  $\mathbf{H}$ . On voit ici tout l'intérêt qu'il y a à adopter le formalisme et les notations de Sipe (1987).

### D.3.2 Tenseurs de Green en transmission : $\mathbf{r}$ dans le milieu 2

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^E(\mathbf{K}, z, z') = \frac{i}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{s}} t_{12}^s \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_2^+ t_{12}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(\gamma_2 z - \gamma_1 z')] \quad (D.13)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^H(\mathbf{K}, z, z') = \frac{k_0 n_2}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{p}}_2^+ t_{12}^s \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} t_{12}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(\gamma_2 z - \gamma_1 z')] \quad (D.14)$$

Les expressions de ces deux tenseurs sont assez explicites et l'interprétation des différents termes est aussi aisée que précédemment. C'est pourquoi nous ne la ferons pas ici.

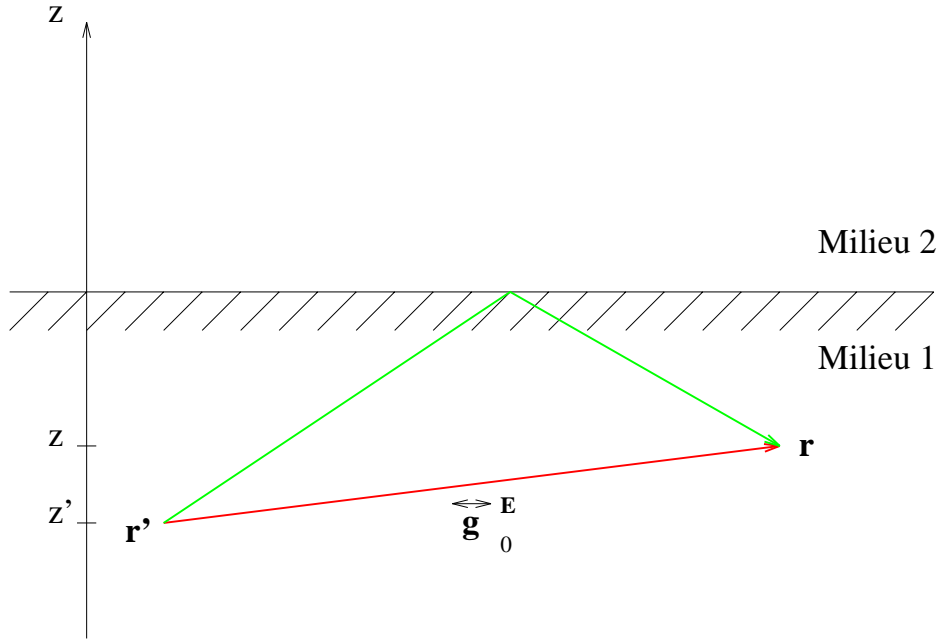


FIG. D.3 – Interprétation du tenseur de Green à une interface en réflexion.

### D.3.3 Principe de la méthode utilisée pour calculer la diffraction électromagnétique par un réseau

Considérons le système simple d'une interface plane de côte  $z = 0$  séparant le vide ( $z > 0$ ) et un milieu semi-infini, linéaire, homogène, isotrope et non magnétique, de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ . Si nous éclairons ce système avec une onde plane incidente  $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}, \omega)$  de fréquence  $\omega$  et faisant un angle  $\theta_{inc}$  avec la normale ( $Oz$ ), alors il y a réflexion à l'interface et le champ total (incident *et* réfléchi pour  $z > 0$  et transmis pour  $z < 0$ ) dans l'espace est noté  $\mathbf{E}_{ref}(\mathbf{r}, \omega)$ . Cette situation sera considérée comme la situation de *référence*. Maintenant, si nous considérons que nous avons gravé un réseau sur l'interface, comme décrit précédemment, et si nous éclairons de la même manière ce système, le champ total  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  aura alors pour expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{ref}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{D.15})$$

où  $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, \omega)$  est le champ *diffraqué* par chacun des traits du réseau. Dans notre cas, où le réseau est lamellaire, il y a invariance le long de la direction  $y$  et tous les champs ne dépendent que de  $x$  et de  $z$ . De plus, comme le réseau est éclairé perpendiculairement aux traits, la polarisation est conservée après diffraction par le réseau : une onde incidente polarisée  $s$  ( $\mathbf{E}_{inc}$  suivant  $y$ ) reste polarisée  $s$  après réflexion (ou transmission) et une onde incidente polarisée  $p$  ( $\mathbf{E}_{inc}$  dans le plan  $x - z$ ) reste polarisée  $p$ . Il peut être montré que le champ *total* vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, z, \omega) &= \mathbf{E}_{ref}(x, z, \omega) \\ &+ \iint_{-\infty}^{+\infty} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(x - x', z, z', \omega) k_0^2 [\varepsilon(x', z', \omega) - 1] \mathbf{E}(x', z', \omega) dx' dz' \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  est un tenseur (type *tenseur de Green*) de la forme :

$$\begin{pmatrix} G_{xx} & 0 & G_{xz} \\ 0 & G_{yy} & 0 \\ G_{zx} & 0 & G_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

L'élément  $G_{yy}$  est relatif à la polarisation  $s$  et les éléments  $G_{xx}$ ,  $G_{xz}$ ,  $G_{zx}$  et  $G_{zz}$  sont relatifs à la polarisation  $p$ . Ce tenseur correspond physiquement au rayonnement d'un dipôle proportionnel à  $\varepsilon_0(\varepsilon(\omega) - 1)\mathbf{E}$ , du point  $(x', z')$  au point  $(x, z)$ . L'équation (D.16) peut être facilement interprétée physiquement : le champ total (avec le réseau) est la somme du champ de référence (sans le réseau) et du champ *diffracté* par le réseau. Ce champ-ci résulte lui-même des interférences entre les différents traits du réseau. Mathématiquement, cette équation n'a pas de solution analytique explicite mais elle peut être résolue par une méthode classique de moments ; la résolution est alors effectuée séparément pour chacune des polarisations. Pour cela, il faut réaliser un maillage du système complet. Cependant, comme nous pouvons le voir dans l'équation (D.16), il n'est nécessaire de mailler que l'espace où  $\varepsilon(x', z', \omega) - 1$  est différent de 0,  $x'$  et  $z'$  décrivant les coordonnées du point courant dans l'intégration. De plus, comme le système est périodique, il peut être montré (Sentenac et Greffet 1992) qu'il est possible de réduire l'intégration à une seule période du réseau si bien que le domaine à mailler est considérablement réduit : il correspond à un seul trait du réseau. La méthode des moments est alors plus facile mathématiquement et moins lourde numériquement à mettre en oeuvre. Cependant, elle reste une méthode lourde comparée à une méthode du type intégrale de surface (Petit 1980) ou ondes couplées (Chateau et Hugonin 1994), lorsque le réseau est très profond ou très rempli.

## Annexe E

# Tenseur de Green à deux interfaces

### E.1 Préliminaires

#### E.1.1 Géométrie du problème

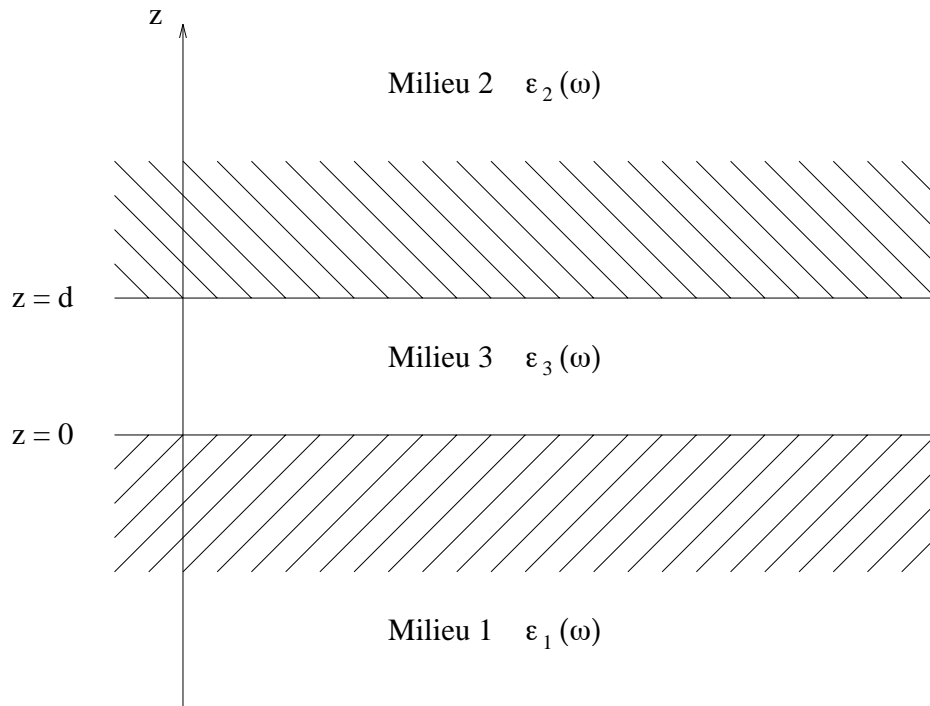


FIG. E.1 – Géométrie du système pour le calcul du tenseur de Green à deux interfaces.

Considérons le système décrit sur la figure E.1. Les trois milieux sont supposés être linéaires, homogènes, isotropes et non-magnétiques<sup>1</sup>. Les interfaces milieu 1/milieu 3 et milieu 3/milieu 2 sont des interfaces planes. On considère un point  $\mathbf{r}'$  à l'intérieur du milieu 1 (point source) et un point  $\mathbf{r}$  à l'intérieur du milieu 2 (point d'observation). Dans cette géométrie, nous allons donner les expressions des tenseurs de Green pour  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  (*cf.* Annexe D).

1. Dans la plupart des simulations que nous avons réalisées, le milieu 3 était constitué par du *vide*.



### E.1.2 Notations de Sipe (Sipe 1987)

Considérons les vecteurs  $\mathbf{k}_i^\pm = (\mathbf{K}, \pm\gamma_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  avec  $K = |\mathbf{K}| \in [0; \infty[$  et :

$$\gamma_i = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_i - K^2}, \quad \text{avec } \operatorname{Re}(\gamma_i) \geq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\gamma_i) \geq 0 \quad (\text{E.1})$$

avec  $k_0^2 = \omega^2/c^2$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide. Soient  $\hat{\mathbf{K}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  les vecteurs unitaires formés à partir de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{z}$ . De la même manière, notons  $\hat{\mathbf{k}}_i^\pm$  les vecteurs unitaires issus des  $\mathbf{k}_i^\pm$ . Nous pouvons d'ailleurs remarquer que :

$$\hat{\mathbf{k}}_i^\pm = \frac{1}{k_0 n_i} \left( K \hat{\mathbf{K}} \pm \gamma_i \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (\text{E.2})$$

Par ailleurs, conformément aux notations employées par Sipe, nous introduirons les vecteurs suivants :

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{E.3a})$$

$$\hat{\mathbf{p}}_i^\pm = \frac{1}{k_0 n_i} \left( |\mathbf{K}| \hat{\mathbf{z}} \mp \gamma_i \hat{\mathbf{K}} \right) \quad (\text{E.3b})$$

L'ensemble de ces notations est résumé sur la figure E.2.

### E.1.3 Définition des facteurs de Fresnel pour un système à deux interfaces planes

Considérons une onde plane d'amplitude unité et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1^+ = (\mathbf{K}, \gamma_1)$ , incidente sur l'interface milieu 1/milieu 3 (cf. Fig. E.2). Cette onde va être notamment transmise dans le milieu 3 suivant le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_3 = (\mathbf{K}, \gamma_3)$ . Par la suite, cette "onde" (elle est en fait la superposition d'une infinité d'ondes qui interfèrent entre elles, à cause des réflexions multiples) va se propager jusqu'à l'interface milieu 3/milieu 2 et être transmise dans le milieu 2 suivant le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_2^+ = (\mathbf{K}, \gamma_2)$ . Elle aura alors une amplitude  $t_{12}^s$  si l'onde incidente (dans le milieu 1) est polarisée s et une amplitude  $t_{12}^p$  si l'onde incidente (dans le milieu 1) est polarisée p. Nous appellerons ces deux facteurs,  $t_{12}^s$  et  $t_{12}^p$ , les facteurs de transmission "globaux" respectivement pour la polarisation s et pour la polarisation p :

$$t_{12}^s = \frac{t_{13}^s t_{32}^s \exp(i\gamma_3 d)}{1 - r_{31}^s r_{32}^s \exp(2i\gamma_3 d)} \quad (\text{E.4a})$$

$$t_{12}^p = \frac{t_{13}^p t_{32}^p \exp(i\gamma_3 d)}{1 - r_{31}^p r_{32}^p \exp(2i\gamma_3 d)} \quad (\text{E.4b})$$

avec les facteurs de Fresnel ( $i, j = 1, 2, 3$ ) :

$$r_{ij}^s = \frac{\gamma_i - \gamma_j}{\gamma_i + \gamma_j} \quad (\text{E.5a})$$

$$r_{ij}^p = \frac{\varepsilon_j \gamma_i - \varepsilon_i \gamma_j}{\varepsilon_j \gamma_i + \varepsilon_i \gamma_j} \quad (\text{E.5b})$$

$$t_{ij}^s = \frac{2\gamma_j}{\gamma_i + \gamma_j} \quad (\text{E.5c})$$

$$t_{ij}^p = \frac{2n_i n_j \gamma_i}{\varepsilon_j \gamma_i + \varepsilon_i \gamma_j} \quad (\text{E.5d})$$

Les deux facteurs de transmission,  $t_{12}^s$  et  $t_{12}^p$ , ressemblent à des facteurs de transmission "Fabry-Pérot". Nous allons voir qu'ils sont utiles pour exprimer le tenseur de Green en transmission (du milieu 1 vers le milieu 2) du système.

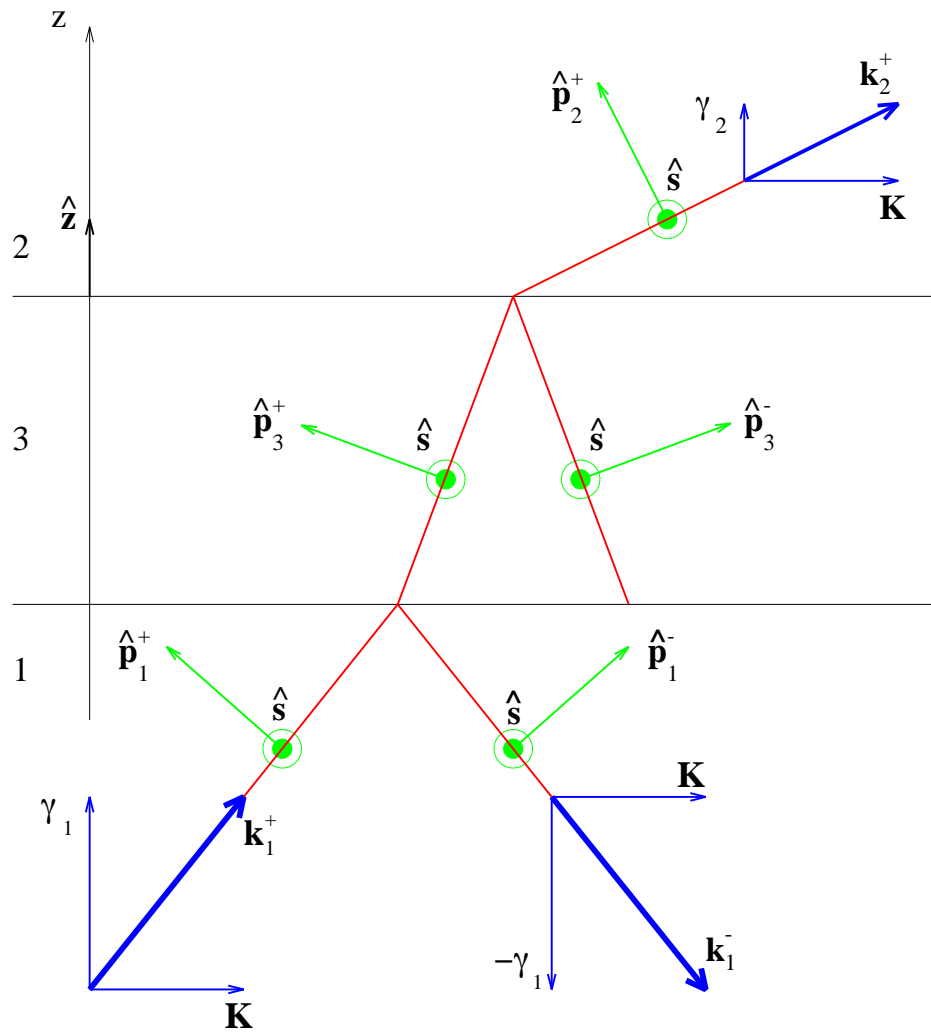


FIG. E.2 – Description des différents vecteurs introduits dans le formalisme de Sipe.

## E.2 Tenseurs de Green à deux interfaces pour E et H

### E.2.1 Tenseurs de Green en transmission du milieu 1 vers le milieu 2

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^E(\mathbf{K}, z, z') = \frac{i}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{s}} t_{12}^s \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_2^+ t_{12}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(\gamma_2(z-d) - \gamma_1 z')] \quad (\text{E.6})$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^H(\mathbf{K}, z, z') = \frac{k_0 n_2}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{p}}_2^+ t_{12}^s \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} t_{12}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(\gamma_2(z-d) - \gamma_1 z')] \quad (\text{E.7})$$

L'interprétation des tenseurs peut être faite de la même manière qu'à l'annexe D.

### E.2.2 Tenseurs de Green en transmission du milieu 1 vers le milieu 3

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{13}^E(\mathbf{K}, z, z') &= \frac{i}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{s}} \tau_{13}^s \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_3^+ \tau_{13}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(\gamma_3 z - \gamma_1 z')] \\ &+ \frac{i}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{s}} \tau_{13}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d} \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_3^- \tau_{13}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d} \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(-\gamma_3 z - \gamma_1 z')] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{13}^H(\mathbf{K}, z, z') &= \frac{k_0 n_3}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{p}}_3^+ \tau_{13}^s \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} \tau_{13}^p \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(\gamma_3 z - \gamma_1 z')] \\ &+ \frac{k_0 n_3}{2\gamma_1} (\hat{\mathbf{p}}_3^- \tau_{13}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d} \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} \tau_{13}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d} \hat{\mathbf{p}}_1^+) \exp [i(-\gamma_3 z - \gamma_1 z')] \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

où  $\tau_{13}^s$  et  $\tau_{13}^p$  sont définis par :

$$\tau_{13}^s = \frac{t_{13}^s}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \quad (\text{E.10a})$$

$$\tau_{13}^p = \frac{t_{13}^p}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \quad (\text{E.10b})$$

Ces deux termes peuvent être vus comme des facteurs de transmission du milieu 1 vers le milieu 3, *en présence* du milieu 2, en polarisation *s* et en polarisation *p*. On notera par ailleurs que les tenseurs de Green sont en fait composés de deux termes : l'un en  $\exp [i(\gamma_3 z - \gamma_1 z')]$  qui correspond à une onde qui se propage vers les  $z$  croissants ; l'autre en  $\exp [i(-\gamma_3 z - \gamma_1 z')]$  qui correspond à une onde qui se propage vers les  $z$  décroissants.

### E.2.3 Tenseurs de Green en transmission du milieu 2 vers le milieu 3

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{23}^E(\mathbf{K}, z, z') &= \frac{i}{2\gamma_2} (\hat{\mathbf{s}} \tau_{23}^s \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_3^- \tau_{23}^p \hat{\mathbf{p}}_2^-) \exp [i\gamma_3(d-z)] \exp [-i\gamma_2(d-z')] \\ &+ \frac{i}{2\gamma_2} (\hat{\mathbf{s}} \tau_{23}^s r_{31}^s \hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{p}}_3^+ \tau_{23}^p r_{31}^p \hat{\mathbf{p}}_2^-) \exp [i\gamma_3(z+d)] \exp [-i\gamma_2(d-z')] \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\begin{aligned} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{23}^H(\mathbf{K}, z, z') &= \frac{k_0 n_3}{2\gamma_2} (\hat{\mathbf{p}}_3^- \tau_{23}^s \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} \tau_{23}^p \hat{\mathbf{p}}_2^-) \exp [i\gamma_3(d-z)] \exp [-i\gamma_2(d-z')] \\ &+ \frac{k_0 n_3}{2\gamma_2} (\hat{\mathbf{p}}_3^+ \tau_{23}^s r_{31}^s \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} \tau_{23}^p r_{31}^p \hat{\mathbf{p}}_2^-) \exp [i\gamma_3(z+d)] \exp [-i\gamma_2(d-z')] \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Les facteurs  $\tau_{23}^s$  et  $\tau_{23}^p$  sont définis de la même manière que précédemment.

### E.3 Calcul du vecteur de Poynting du milieu 1 vers le milieu 2

Ce paragraphe détaille le calcul du vecteur de Poynting nécessaire pour déterminer le transfert radiatif entre deux plans (*cf.* section 3.3).

#### E.3.1 Position du problème

La géométrie du système est la même que celle décrite sur la figure E.1, le milieu 3 étant constitué par du vide ( $\varepsilon_3(\omega) = 1$ ). Le problème physique est celui du rayonnement au point  $\mathbf{r}$  d'un ensemble de sources fluctuantes, caractérisé par une densité volumique de courant fluctuant  $\mathbf{j}_f(\mathbf{r}', \omega)$ . Soient  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  et  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  les champs électrique et magnétique, respectivement, rayonnés au point  $\mathbf{r}$  et à la fréquence  $\omega$ . Ces champs (analytiques) sont reliés aux densités de courant fluctuant  $\mathbf{j}_f(\mathbf{r}', \omega)$  par les relations suivantes :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \int_V \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{E.13a})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int_V \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{E.13b})$$

où  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  sont les tenseurs de Green du système, respectivement pour le champ électrique et pour le champ magnétique. Nous définissons alors le vecteur de *Poynting* par :

$$\langle \Pi(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 2 \langle \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)] \rangle \quad (\text{E.14})$$

où le symbole  $\langle \dots \rangle$  signifie que nous réalisons une moyenne statistique d'ensemble sur l'ensemble des réalisations du système. Notons encore une fois que cette définition du vecteur de Poynting est 4 fois plus grande que la définition usuelle; ceci traduit le fait que nous travaillons avec des signaux analytiques (*cf.* Chap. 2).

En fait, pour déterminer le coefficient de transfert radiatif entre les deux milieux, il suffit de calculer :

- $\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle$  : composante suivant  $z$  du vecteur de Poynting calculé dans le plan  $z = d$ , considéré dans le milieu 2. Ce terme correspond au rayonnement thermique du milieu 1 ( $\mathbf{r}'$  dans le milieu 1) vers le milieu 2 ( $\mathbf{r}$  dans le milieu 2) à la fréquence  $\omega$  ;
- $\langle \Pi_z(0^-, \omega) \rangle$  : composante suivant  $z$  du vecteur de Poynting calculé dans le plan  $z = 0$ , considéré dans le milieu 1. Ce terme correspond au rayonnement thermique du milieu 2 ( $\mathbf{r}'$  dans le milieu 2) vers le milieu 1 ( $\mathbf{r}$  dans le milieu 1) à la fréquence  $\omega$ .

#### E.3.2 Calcul du vecteur de Poynting du milieu 1 vers le milieu 2

Nous ne détaillerons ici que le calcul de  $\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle$ . Pour ce terme, le volume  $V$  d'intégration (*cf.* Éqs. (E.13)) correspond alors au milieu 1 tout entier. De plus, pour effectuer ce calcul, il est nécessaire de connaître les deux tenseurs  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  pour  $\mathbf{r}$  dans le milieu 2 (point d'observation),  $\mathbf{r}'$  dans le milieu 1 (point d'émission) et pour tout  $\omega$ . Nous noterons ces tenseurs  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{12}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{12}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ . Ceux-ci ne sont connus que via leurs transformées de Fourier spatiales  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^E$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^H$  calculées précédemment (*cf.* Éqs. (E.6) et (E.7)) :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{12}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) \exp [i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \quad (\text{E.15a})$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{12}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^H(\mathbf{K}, z, z', \omega) \exp [i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}')] \quad (\text{E.15b})$$

Réécrivons maintenant le vecteur de Poynting sous la forme développée suivante :

$$\langle \Pi_z(\mathbf{r}, \omega) \rangle = 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle [E_x H_y^* - H_x^* E_y](\mathbf{r}, \omega) \rangle \right\} \quad (\text{E.16})$$

Les différentes composantes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  peuvent être exprimées grâce aux équations (E.13) :

$$\begin{aligned} \langle E_x H_y^* \rangle &= \left\langle \left( i\omega\mu_0 \int_V G_{12x\alpha}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) j_{f\alpha}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \int_V G_{12y\beta}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega) j_{f\beta}(\mathbf{r}'', \omega) d^3\mathbf{r}'' \right)^* \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{E.17a})$$

$$= i\omega\mu_0 \int_V \int_V G_{12x\alpha}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{12y\beta}^{H*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega) \langle j_{f\alpha}(\mathbf{r}', \omega) j_{f\beta}^*(\mathbf{r}'', \omega) \rangle d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}'' \quad (\text{E.17b})$$

où une somme implicite est réalisée sur les indices répétés  $\alpha, \beta = x, y, z$ . En utilisant le théorème de fluctuation-dissipation pour les courants fluctuants existant dans le milieu 1 (supposé à l'équilibre thermodynamique local à la température  $T_1$ ), nous pouvons écrire :

$$\langle j_{f\alpha}(\mathbf{r}', \omega) j_{f\beta}^*(\mathbf{r}'', \omega) \rangle = \frac{\omega\varepsilon_0}{\pi} \varepsilon_1''(\omega) \Theta(\omega, T_1) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \quad (\text{E.18})$$

où  $\Theta(\omega, T_1) = \hbar\omega / [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]$  (*cf.* Annexe B).

Avec cette équation, nous avons donc :

$$\langle E_x H_y^* \rangle = i\omega\mu_0 \times \frac{\omega\varepsilon_0}{\pi} \varepsilon_1''(\omega) \Theta(\omega, T_1) \int_V G_{12x\alpha}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{12y\alpha}^{H*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{E.19})$$

On notera qu'une sommation est réalisée implicitement sur l'indice répété  $\alpha$ .

Par ailleurs, nous pouvons montrer comme au chapitre 2 que :

$$\int_V G_{12x\alpha}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{12y\alpha}^{H*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' = \int \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^0 dz' g_{12x\alpha}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{12y\alpha}^{H*}(\mathbf{K}, z, z', \omega) \right) \quad (\text{E.20})$$

De plus, les expressions de  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^E$  et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{g}}_{12}^H$  montrent que :

$$g_{12x\alpha}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) = g_{12x\alpha}^E(\mathbf{K}, z, \omega) \exp(-i\gamma_1 z') \quad (\text{E.21})$$

$$g_{12y\alpha}^H(\mathbf{K}, z, z', \omega) = g_{12y\alpha}^H(\mathbf{K}, z, \omega) \exp(-i\gamma_1 z') \quad (\text{E.22})$$

si bien que l'intégration précédente sur  $z'$  se simplifie en :

$$\int_{-\infty}^0 dz' g_{12x\alpha}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{12y\alpha}^{H*}(\mathbf{K}, z, z', \omega) = \frac{1}{2\gamma_1''} g_{12x\alpha}^E(\mathbf{K}, z, \omega) g_{12y\alpha}^{H*}(\mathbf{K}, z, \omega) \quad (\text{E.23})$$

où  $\gamma_1'' = \operatorname{Im}(\gamma_1)$  (*cf.* section E.1).

L'expression de  $\langle E_x H_y^* \rangle$  se réduit alors à :

$$\langle E_x H_y^* \rangle = i \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1''(\omega) \frac{\Theta(\omega, T_1)}{\pi} \int \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \frac{1}{2\gamma_1''} g_{12x\alpha}^E(\mathbf{K}, z, \omega) g_{12y\alpha}^{H*}(\mathbf{K}, z, \omega) \quad (\text{E.24})$$

Ainsi, nous pouvons enfin donner l'expression de la composante  $z$  du vecteur de Poynting recherché (remarquant notamment qu'il ne dépend plus que de  $z$  et de  $\omega$ ) :

$$\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle = 2 \operatorname{Re} \left\{ i \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1''(\omega) \frac{\Theta(\omega, T_1)}{\pi} \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \frac{1}{2\gamma_1''} \left[ g_{12x\alpha}^E g_{12y\alpha}^{H*} - g_{12x\alpha}^{H*} g_{12y\alpha}^E \right] (\mathbf{K}, d^+, \omega) \right\} \quad (\text{E.25})$$

Nous remplaçons alors les tenseurs par leurs expressions respectives (*cf.* Éqs. (E.6) et (E.7)) et nous effectuons le changement :

$$\int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \longrightarrow \int \frac{K dK}{2\pi} \quad (\text{E.26})$$

pour finalement obtenir :

$$\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle = \frac{\Theta(\omega, T_1)}{4\pi^2} \int_0^\infty K dK \left[ \operatorname{Re}(\gamma_1) \operatorname{Re}(\gamma_2) \frac{|t_{12}^s|^2}{|\gamma_1|^2} + \operatorname{Re}(\varepsilon_1 \gamma_1^*) \operatorname{Re}(\varepsilon_2 \gamma_2^*) \frac{|t_{12}^p|^2}{|n_1|^2 |n_2|^2 |\gamma_1|^2} \right] \quad (\text{E.27})$$

Par ailleurs, nous avons une relation qui lie  $\Theta(\omega, T_1)$  à la luminance de rayonnement d'équilibre  $L_\omega^0(T_1)$  :

$$\frac{\Theta(\omega, T_1)}{4\pi^2} = \frac{1}{k_0^2} \pi L_\omega^0(T_1) \quad (\text{E.28})$$

### E.3.3 Contribution des ondes propagatives et évanescentes au transfert radiatif

À ce stade du calcul, nous allons distinguer les ondes propagatives ( $K \leq k_0$ ) des ondes évanescentes ( $K > k_0$ ) dans l'intégration sur  $K$  de 0 à  $+\infty$ . Commençons d'abord par les ondes propagatives. Pour ces ondes, nous avons  $\gamma_3$  (composante suivant  $z$  du vecteur d'onde dans le vide) qui est réel. Aussi pouvons-nous utiliser les relations (D.10) pour écrire :

$$\operatorname{Re}(\gamma_1) \operatorname{Re}(\gamma_2) \frac{|t_{12}^s|^2}{|\gamma_1|^2} = \frac{(1 - |r_{31}^s|^2)(1 - |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.29a})$$

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_1 \gamma_1^*) \operatorname{Re}(\varepsilon_2 \gamma_2^*) \frac{|t_{12}^p|^2}{|n_1|^2 |n_2|^2 |\gamma_1|^2} = \frac{(1 - |r_{31}^p|^2)(1 - |r_{32}^p|^2)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.29b})$$

De la même manière, pour les ondes évanescentes, nous avons  $\gamma_3$  qui est imaginaire pur si bien que les équations précédentes se mettent sous la forme suivante :

$$\operatorname{Re}(\gamma_1) \operatorname{Re}(\gamma_2) \frac{|t_{12}^s|^2}{|\gamma_1|^2} = 4 \frac{\operatorname{Im}(r_{31}^s) \operatorname{Im}(r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_3'' d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} \quad (\text{E.30})$$

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_1 \gamma_1^*) \operatorname{Re}(\varepsilon_2 \gamma_2^*) \frac{|t_{12}^p|^2}{|n_1|^2 |n_2|^2 |\gamma_1|^2} = 4 \frac{\operatorname{Im}(r_{31}^p) \operatorname{Im}(r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_3'' d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} \quad (\text{E.31})$$

Nous obtenons alors l'expression définitive du vecteur de Poynting cherché :

$$\langle \Pi_z(d^+, \omega) \rangle = \pi L_\omega^0(T_1) \left\{ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{(1 - |r_{31}^s|^2)(1 - |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} + \frac{(1 - |r_{31}^p|^2)(1 - |r_{32}^p|^2)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] + \int_{k_0}^\infty \frac{K dK}{k_0^2} \left[ \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^s) \operatorname{Im}(r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_3'' d}|^2} + \frac{4 \operatorname{Im}(r_{31}^p) \operatorname{Im}(r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_3'' d}|^2} \right] e^{-2\gamma_3'' d} \right\} \quad (\text{E.32})$$

## E.4 Calcul de la force de Casimir entre deux milieux semi-infinis

**Remarque :** dans la suite, nous parlerons toujours de “force” (exprimée en unité SI en Newtons), étant sous-entendu que ce que nous calculons est une force *par unité de surface* (c’est-à-dire une pression, exprimée en unité SI en Newtons/m<sup>2</sup>).

### E.4.1 Position du problème

Nous nous plaçons ici dans la même géométrie que pour le calcul du vecteur de Poynting fait précédemment. Nous supposons par ailleurs que le milieu 1 et le milieu 2 sont à la même température  $T$  et que l’équilibre thermodynamique local est réalisé en tout point du système. L’idée est de calculer la force mutuelle d’interaction entre le milieu 1 et le milieu 2 due aux champs électromagnétiques rayonnés par ces deux milieux. Nous noterons  $F(d, \omega)$  la force (par unité de surface donc) due au champ électromagnétique à la fréquence  $\omega$  et  $F(d)$  la force *totale* intégrée sur tout le spectre :

$$F(d) = \int_0^\infty F(d, \omega) d\omega \quad (\text{E.33})$$

Pour évaluer cette force, une méthode consiste à déterminer le tenseur  $\overleftrightarrow{T}$  des contraintes de *Maxwell*<sup>2</sup>. Ici, comme nous voulons uniquement calculer la force suivant la direction  $z$ , il suffit de trouver la composante  $T_{zz}$  de ce tenseur ; celle-ci est donnée par :

$$T_{zz}(\mathbf{r}, \omega) = -4 \times \left\langle \frac{\varepsilon_0}{4} \left[ |E_x|^2 + |E_y|^2 - |E_z|^2 \right] (\mathbf{r}, \omega) + \frac{\mu_0}{4} \left[ |H_x|^2 + |H_y|^2 - |H_z|^2 \right] (\mathbf{r}, \omega) \right\rangle \quad (\text{E.34})$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont les champs électrique et magnétique émis (à la pulsation  $\omega$ ) par le milieu 1 et le milieu 2 dans le milieu 3 ( $\mathbf{r}$  appartient donc au milieu 3). Ce tenseur dépend bien évidemment de la distance de séparation  $d$  entre les milieux 1 et 2. La force *par unité de surface* est alors obtenue grâce à la relation simple  $F(d, \omega) = -T_{zz}$ . Avec cette définition du tenseur, nous avons :

$$F(d) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{force attractive} \quad (\text{E.35a})$$

$$F(d) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{force répulsive} \quad (\text{E.35b})$$

Nous allons maintenant détailler le calcul de la composante  $T_{zz}$ .

### E.4.2 Calcul du tenseur des contraintes de Maxwell

Comme il y a invariance par translation dans le plan  $x - y$ , cette composante ne dépend que de  $z$ . Nous verrons par la suite qu’en réalité, la composante ne dépend même pas de  $z$ , et que nous pouvons la calculer dans n’importe quel plan  $z = \text{constante}$  situé dans l’espace intermédiaire. Les calculs complets permettant d’aboutir au résultat final sont longs. C’est la raison pour laquelle, nous allons effectuer, dans un premier temps, le calcul de la contribution du milieu 1 à la force d’interaction. Si nous notons  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  les champs émis dans le milieu 3 respectivement par le milieu 1 et par le milieu 2, nous avons alors la relation suivante pour le champ électrique (nous aurions évidemment la même pour le champ magnétique) :

$$\langle |E_\alpha|^2 \rangle = \langle |E_{1,\alpha} + E_{2,\alpha}|^2 \rangle = \langle |E_{1,\alpha}|^2 \rangle + \langle |E_{2,\alpha}|^2 \rangle + \langle 2Re(E_{1,\alpha} E_{2,\alpha}^*) \rangle \quad (\text{E.36})$$

2. Jackson, Chap. 6, page 274. La force agissant sur un objet est égale à l’opposé du flux du tenseur des contraintes au travers d’une surface fermée entourant cet objet, la normale étant orientée vers l’extérieur de la surface.

où  $\alpha = x, y, z$ . Or le dernier terme est nul car la moyenne d'ensemble sur les corrélations entre les champs électriques émis par les deux milieux extrêmes est nulle (les fluctuations dans chacun des deux milieux sont complètement *décorrélées*). Donc nous avons le droit de faire séparément le calcul de  $\langle |E_{1,\alpha}|^2 \rangle$  et de  $\langle |E_{2,\alpha}|^2 \rangle$ .

Par la suite, nous ne détaillerons dans un premier temps que le calcul pour le champ électrique émis par le milieu 1 que nous supposons à la température  $T_1$ . Suivant la méthode utilisée précédemment pour calculer le vecteur de *Poynting*, nous avons :

$$\langle |E_{1,\alpha}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle = \frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{\pi \varepsilon_0 c^4} \varepsilon_1''(\omega) \times \sum_{\beta=x,y,z} \int_V G_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{13\alpha\beta}^{E*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}' \quad (\text{E.37})$$

Conformément à ce que nous avons vu en annexe B, la fonction  $\Theta$  qui intervient *via* le théorème de fluctuation-dissipation s'écrit cette fois-ci comme :

$$\Theta(\omega, T_1) = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k_B T_1) - 1} = \frac{\hbar \omega}{2} \coth \frac{\hbar \omega}{2 k_B T_1} \quad (\text{E.38})$$

Le volume  $V$  correspond au milieu 1 tout entier ( $z' < 0$ ). Par ailleurs, nous pouvons montrer comme au chapitre 2 que pour tout indice *alpha*,  $\beta$  :

$$\int_V G_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) G_{13\alpha\beta}^{E*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}' = \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \left( \int_{-\infty}^0 dz' g_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{13\alpha\beta}^{E*}(\mathbf{K}, z, z', \omega) \right) \quad (\text{E.39})$$

Or, la dépendance en  $z'$  de  $g_{13\alpha\beta}^E$  est de la forme  $\exp[-i\gamma_1 z']$  (*cf.* Eq. (E.8)). L'intégration précédente conduit donc à :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dz' g_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{K}, z, z', \omega) g_{13\alpha\beta}^{E*}(\mathbf{K}, z, z', \omega) &= \frac{1}{2\gamma_1''} g_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{K}, z, \omega) g_{13\alpha\beta}^{E*}(\mathbf{K}, z, \omega) \\ &= \frac{1}{2\gamma_1''} \left| g_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{K}, z, \omega) \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Ainsi, avec les deux équations précédentes, nous pouvons réécrire  $\langle |E_{1,\alpha}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle$  sous la forme :

$$\langle |E_{1,\alpha}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle = \frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{\pi \varepsilon_0 c^4} \times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_1''(\omega)}{2\gamma_1''} \left| g_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{K}, z, \omega) \right|^2 \quad (\text{E.41})$$

De la même manière, les carrés des composantes du champ magnétique ont pour expression :

$$\langle |H_{1,\alpha}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle = \frac{\omega \Theta(\omega, T_1)}{\pi \mu_0 c^2} \times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \frac{\varepsilon_1''(\omega)}{2\gamma_1''} \left| g_{13\alpha\beta}^H(\mathbf{K}, z, \omega) \right|^2 \quad (\text{E.42})$$

En utilisant la relation (D.6), nous pouvons alors simplifier les termes comme suit :

$$\langle |E_{1,\alpha}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\omega \Theta(\omega, T_1)}{\pi c^2} \times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \gamma_1' \left| g_{13\alpha\beta}^E(\mathbf{K}, z, \omega) \right|^2 \quad (\text{E.43})$$

$$\langle |H_{1,\alpha}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0} \frac{\omega \Theta(\omega, T_1)}{\pi c^2} \times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{d^2 \mathbf{K}}{4\pi^2} \gamma_1' \frac{\left| g_{13\alpha\beta}^H(\mathbf{K}, z, \omega) \right|^2}{k_0^2} \quad (\text{E.44})$$



À ce stade, il faut remarquer que les champs ne dépendent que de  $z$  et que tous les termes ( $\gamma'_1, g_{13\alpha\beta}^E$  et  $g_{13\alpha\beta}^H$ ) sous l'intégrale ne dépendent en fait que de  $K = |\mathbf{K}|$  si bien que la double intégration sur  $\mathbf{K}$  peut être réalisée en effectuant la transformation

$$\int \frac{d^2\mathbf{K}}{4\pi^2} \longrightarrow \int \frac{KdK}{2\pi} \quad (\text{E.45})$$

Ainsi, nous obtenons les expressions finales suivantes :

$$\langle |E_{1,\alpha}(z, \omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{2\pi^2 c^4} \times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{KdK}{k_0^2} \gamma'_1 \left| g_{13\alpha\beta}^E(K, z, \omega) \right|^2 \quad (\text{E.46})$$

$$\langle |H_{1,\alpha}(z, \omega)|^2 \rangle = \frac{1}{\mu_0} \frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{2\pi^2 c^4} \times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{KdK}{k_0^2} \gamma'_1 \frac{\left| g_{13\alpha\beta}^H(K, z, \omega) \right|^2}{k_0^2} \quad (\text{E.47})$$

Finalement, la composante  $T_{1,zz}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{1,zz}(z, \omega) &= -\frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{2\pi^2 c^4} \\ &\times \sum_{\beta=x,y,z} \int \frac{KdK}{k_0^2} \gamma'_1 \left\{ \left[ \left| g_{13x\beta}^E \right|^2 + \left| g_{13y\beta}^E \right|^2 - \left| g_{13z\beta}^E \right|^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_0^2} \left[ \left| g_{13x\beta}^H \right|^2 + \left| g_{13y\beta}^H \right|^2 - \left| g_{13z\beta}^H \right|^2 \right] \right\} (K, z, \omega) \quad (\text{E.48}) \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons détailler le calcul pour la polarisation  $s$ , celui de la polarisation  $p$  se menant de la même manière. En utilisant les expressions (E.8) et (E.9), nous pouvons écrire pour le terme  $s$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=x,y,z} \left[ \left| g_{13x\beta}^E \right|^2 + \left| g_{13y\beta}^E \right|^2 - \left| g_{13z\beta}^E \right|^2 \right]_s (K, z, \omega) &= \\ \frac{|\tau_{13}^s|^2}{4|\gamma_1|^2} \left[ e^{-2\gamma_3''z} + |\rho_{32}^s|^2 e^{2\gamma_3''z} + 2\text{Re} \left( \rho_{32}^s e^{-2i\gamma_3'z} \right) \right] \quad (\text{E.49}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=x,y,z} \left[ \left| g_{13x\beta}^H \right|^2 + \left| g_{13y\beta}^H \right|^2 - \left| g_{13z\beta}^H \right|^2 \right]_s (K, z, \omega) &= \\ \frac{|\tau_{13}^s|^2}{4|\gamma_1|^2} \left\{ |\gamma_3|^2 \left( 1 - \frac{K^2}{|\gamma_3|^2} \right) \left[ e^{-2\gamma_3''z} + |\rho_{32}^s|^2 e^{2\gamma_3''z} \right] \right. \\ \left. - |\gamma_3|^2 \left( 1 + \frac{K^2}{|\gamma_3|^2} \right) \left[ 2\text{Re} \left( \rho_{32}^s e^{-2i\gamma_3'z} \right) \right] \right\} \quad (\text{E.50}) \end{aligned}$$

où  $\rho_{32}^s = r_{32}^s e^{-2\gamma_3''d}$ .

Ainsi, nous pouvons réécrire la composante  $T_{1,zz}^s$  sous la forme :

$$\begin{aligned} T_{1,zz}^s(z, \omega) &= -\frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{8\pi^2 c^4} \\ &\times \int \frac{KdK}{k_0^2} \frac{\gamma'_1 |\tau_{13}^s|^2}{|\gamma_1|^2} \left\{ \frac{(k_0^2 - K^2) + |\gamma_3|^2}{k_0^2} \left[ e^{-2\gamma_3''z} + |\rho_{32}^s|^2 e^{2\gamma_3''z} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k_0^2 - K^2) - |\gamma_3|^2}{k_0^2} \left[ 2\text{Re} \left( \rho_{32}^s e^{-2i\gamma_3'z} \right) \right] \right\} \quad (\text{E.51}) \end{aligned}$$

### E.4.3 Contribution des ondes propagatives et évanescentes

À ce stade, nous devons une nouvelle fois faire la distinction entre les ondes propagatives ( $K \leq k_0$ ) et évanescentes ( $K > k_0$ ).

#### Contribution des ondes propagatives

Pour ce type d'onde, nous avons :

$$\gamma_3 = \gamma_3' = |\gamma_3| = \sqrt{k_0^2 - K^2} \quad \text{et} \quad \gamma_3'' = 0 \quad (\text{E.52})$$

Nous en déduisons alors, grâce notamment à l'équation (D.10a), les relations suivantes :

$$e^{-2\gamma_3''z} = e^{2\gamma_3''z} = 1 \quad (\text{E.53})$$

$$|\rho_{32}^s|^2 = |r_{32}^s|^2 \quad (\text{E.54})$$

$$\frac{\gamma_1' |\tau_{13}^s|^2}{|\gamma_1|^2} = \frac{1}{|\gamma_3|^2} \frac{\text{Re}(\gamma_3) (1 - |r_{31}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.55})$$

$$\frac{(k_0^2 - K^2) + |\gamma_3|^2}{k_0^2} = \frac{2|\gamma_3|^2}{k_0^2} \quad (\text{E.56})$$

$$\frac{(k_0^2 - K^2) - |\gamma_3|^2}{k_0^2} = 0 \quad (\text{E.57})$$

Ainsi, nous trouvons la contribution des forces propagatives (en polarisation  $s$ ) au tenseur des contraintes de Maxwell :

$$T_{1,zz}^{prop,s}(z, d, \omega) = -\frac{\omega^3 \Theta(\omega, T_1)}{8\pi^2 c^4} \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \times \frac{2\text{Re}(\gamma_3)}{k_0^2} \frac{(1 - |r_{31}^s|^2) (1 + |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.58})$$

On remarquera donc que le tenseur des contraintes ne dépend plus du tout de  $z$  mais de  $d$  et de  $\omega$ . C'est pourquoi nous avons anticipé la notation de la force  $F(d, \omega)$ . Si nous réarrangeons alors un peu les termes et si nous explicitons  $\Theta(\omega, T_1)$ , nous obtenons :

$$F_1^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_1}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\text{Re}(\gamma_3)}{k_0} \frac{(1 - |r_{31}^s|^2) (1 + |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.59})$$

#### Contribution des ondes évanescentes

Pour ce type d'onde, nous avons :

$$\gamma_3 = i\gamma_3'' = i|\gamma_3| = \sqrt{k_0^2 - K^2} \quad \text{et} \quad \gamma_3' = 0 \quad (\text{E.60})$$

Comme pour les ondes propagatives, nous en déduisons alors les relations suivantes :

$$e^{-2i\gamma'_3 z} = 1 \quad (\text{E.61})$$

$$\text{Re} \left( \rho_{32}^s e^{-2i\gamma'_3 z} \right) = \text{Re} (\rho_{32}^s) = \text{Re} (r_{32}^s) e^{-2\gamma''_3 d} \quad (\text{E.62})$$

$$\frac{\gamma'_1 |\tau_{13}^s|^2}{|\gamma_1|^2} = \frac{1}{|\gamma_3|^2} \frac{2 \text{Im} (\gamma_3) \text{Im} (r_{31}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.63})$$

$$\frac{(k_0^2 - K^2) + |\gamma_3|^2}{k_0^2} = 0 \quad (\text{E.64})$$

$$\frac{(k_0^2 - K^2) - |\gamma_3|^2}{k_0^2} = -\frac{2|\gamma_3|^2}{k_0^2} \quad (\text{E.65})$$

D'où la contribution des ondes évanescentes à la force (le tenseur des contraintes est aussi dans ce cas indépendant de  $z$ ) :

$$F_1^{\text{évan},s}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{8\pi^2 c^3} \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_1} \right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\text{Im} (\gamma_3)}{k_0} 4 \frac{\text{Re} (r_{32}^s) \text{Im} (r_{31}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma''_3 d} \quad (\text{E.66})$$

### Les autres contributions

Nous allons maintenant ajouter “à la main” (tous les calculs sont les mêmes) les autres contributions. Commençons tout d'abord par la contribution du milieu 2 au tenseur des contraintes. Nous supposons ici que le milieu 2 est à la température  $T_2$ . Pour cela, il suffit d'intervertir les indices 1 et 2 (l'indice 3 restant inchangé) dans les formules précédentes :

$$F_2^{\text{prop},s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^2 c^3} \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\text{Re} (\gamma_3)}{k_0} \frac{(1 - |r_{32}^s|^2) (1 + |r_{31}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.67})$$

$$F_2^{\text{évan},s}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\text{Im} (\gamma_3)}{k_0} \frac{\text{Re} (r_{31}^s) \text{Im} (r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma''_3 d} \quad (\text{E.68})$$

Ceci montre que notre approche nous permet de traiter deux milieux à des températures différentes  $T_1$  et  $T_2$ . C'est une situation hors équilibre qu'il peut être intéressant de traiter. Cependant, nous n'irons pas plus loin dans les calculs pour cette situation hors équilibre. Ainsi, nous prendrons pour la suite:  $T_1 = T_2 = T$ .

En additionnant les contributions des deux milieux, nous obtenons alors la force due aux ondes polarisées  $s$  :

$$F^{\text{prop},s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^2 c^3} \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \times \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\text{Re} (\gamma_3)}{k_0} \frac{(1 - |r_{32}^s|^2) (1 + |r_{31}^s|^2) + (1 - |r_{31}^s|^2) (1 + |r_{32}^s|^2)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.69})$$

$$F^{\text{évan},s}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \times \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\text{Im} (\gamma_3)}{k_0} \frac{\text{Re} (r_{31}^s) \text{Im} (r_{32}^s) + \text{Re} (r_{32}^s) \text{Im} (r_{31}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma''_3 d} \quad (\text{E.70})$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} \left(1 - |r_{32}^s|^2\right) \left(1 + |r_{31}^s|^2\right) + \left(1 - |r_{31}^s|^2\right) \left(1 + |r_{32}^s|^2\right) &= 2 \left(1 - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2\right) \\ \operatorname{Re} \left(r_{31}^s\right) \operatorname{Im} \left(r_{32}^s\right) + \operatorname{Re} \left(r_{32}^s\right) \operatorname{Im} \left(r_{31}^s\right) &= \operatorname{Im} \left(r_{31}^s r_{32}^s\right) \end{aligned} \quad (\text{E.71})$$

nous pouvons alors écrire :

$$F^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Re}(\gamma_3)}{k_0} \frac{1 - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.72})$$

$$F^{évan,s}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Im}(\gamma_3)}{k_0} \frac{\operatorname{Im}(r_{31}^s r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} \quad (\text{E.73})$$

Maintenant, il reste à ajouter les contributions des ondes polarisées  $p$  à la force d'interaction. Ceci peut se faire simplement en reprenant les expressions précédentes et en remplaçant  $s$  par  $p$  :

$$F^{prop,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Re}(\gamma_3)}{k_0} \frac{1 - |r_{31}^p|^2 |r_{32}^p|^2}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.74})$$

$$F^{évan,p}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Im}(\gamma_3)}{k_0} \frac{\operatorname{Im}(r_{31}^p r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} \quad (\text{E.75})$$

#### E.4.4 Résultat final

Nous résumons ici l'ensemble des résultats trouvés pour la force d'interaction mutuelle entre les deux milieux semi-infinis :

$$F^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Re}(\gamma_3)}{k_0} \frac{1 - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.76})$$

$$F^{prop,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Re}(\gamma_3)}{k_0} \frac{1 - |r_{31}^p|^2 |r_{32}^p|^2}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.77})$$

$$F^{évan,s}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Im}(\gamma_3)}{k_0} \frac{\operatorname{Im}(r_{31}^s r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} \quad (\text{E.78})$$

$$F^{évan,p}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\operatorname{Im}(\gamma_3)}{k_0} \frac{\operatorname{Im}(r_{31}^p r_{32}^p)}{|1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} \quad (\text{E.79})$$

En fait, il reste encore à effectuer une dernière mise en forme. Pour les ondes propagatives (par exemple  $s$ ), il faut écrire les relations suivantes ( $\gamma_3$  réel) :

$$1 - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2 = 1 - |r_{31}^s r_{32}^s|^2 = 1 - \left| r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d} \right|^2 \quad (\text{E.80a})$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \left(1 + r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}\right) \left(1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2i\gamma_3 d}\right) \right] \quad (\text{E.80b})$$

d'où :

$$\frac{1 - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} = \frac{\operatorname{Re} [(1 + r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}) (1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2i\gamma_3 d})]}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.81a})$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \frac{(1 + r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}) (1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2i\gamma_3 d})}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] \quad (\text{E.81b})$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \frac{(1 + r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}) (1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2i\gamma_3 d})}{(1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}) (1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2i\gamma_3 d})} \right] \quad (\text{E.81c})$$

$$= \operatorname{Re} \left[ \frac{1 + r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.81d})$$

$$= \operatorname{Re} \left[ 1 + 2 \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.81e})$$

Ainsi :

$$\frac{1 - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} = 1 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.82})$$

De la même manière, pour les ondes évanescentes (par exemple  $s$ ), nous avons ( $\gamma_3$  imaginaire pur) :

$$\operatorname{Im} (r_{31}^s r_{32}^s) = \operatorname{Im} \left[ r_{31}^s r_{32}^s - |r_{31}^s|^2 |r_{32}^s|^2 e^{-2\gamma_3'' d} \right] \quad (\text{E.83a})$$

$$= \operatorname{Im} \left[ r_{31}^s r_{32}^s \left( 1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2\gamma_3'' d} \right) \right] \quad (\text{E.83b})$$

d'où :

$$\frac{\operatorname{Im} [r_{31}^s r_{32}^s]}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} = \frac{\operatorname{Im} \left[ r_{31}^s r_{32}^s \left( 1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2\gamma_3'' d} \right) \right]}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \quad (\text{E.84a})$$

$$= \operatorname{Im} \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s \left( 1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2\gamma_3'' d} \right)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} \right] \quad (\text{E.84b})$$

$$= \operatorname{Im} \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s \left( 1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2\gamma_3'' d} \right)}{(1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}) (1 - r_{31}^{s*} r_{32}^{s*} e^{-2i\gamma_3 d})} \right] \quad (\text{E.84c})$$

$$= \operatorname{Im} \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.84d})$$

Ainsi :

$$\frac{\operatorname{Im} (r_{31}^s r_{32}^s)}{|1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}|^2} e^{-2\gamma_3'' d} = \operatorname{Im} \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.85})$$

Nous obtenons alors de nouvelles expressions pour les différentes contributions à la force :

$$F^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Re(\gamma_3)}{k_0} Re\left[\frac{1}{2} + \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.86})$$

$$F^{prop,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Re(\gamma_3)}{k_0} Re\left[\frac{1}{2} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.87})$$

$$F^{évan,s}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Im(\gamma_3)}{k_0} Im\left[\frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.88})$$

$$F^{évan,p}(d, \omega) = -\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Im(\gamma_3)}{k_0} Im\left[\frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.89})$$

À ce stade, il faut remarquer que le terme constant égal à  $\frac{1}{2}$  dans les équations (E.87) et (E.88) conduit à une contribution divergente (lorsque l'on intègre sur le spectre) pour les ondes propagatives, de la forme :

$$\frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Re(\gamma_3)}{k_0} = \frac{\hbar\omega^3}{12\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \quad (\text{E.90})$$

Mathématiquement, ce terme ne dépend pas de la distance  $d$  de séparation entre les deux milieux semi-infinis et donc n'a *a priori* rien à voir avec la force d'interaction mutuelle. Celle-ci étant une grandeur physique mesurable expérimentalement, elle ne peut pas avoir de valeur infinie. Physiquement le terme divergent correspond à l'“auto-éclairage” du milieu sur lui-même et est compensé par une force de même amplitude (mais de sens opposé) de l'autre côté du milieu (Lifchitz 1956). Donc, finalement ces termes divergents doivent être supprimés de l'intégrale.

Cette suppression conduit aux expressions suivantes pour les forces propagatives ( $\gamma_3 = i|\gamma_3|$ ) :

$$F^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Re(\gamma_3)}{k_0} Re\left[\frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.91})$$

$$F^{prop,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{Re(\gamma_3)}{k_0} Re\left[\frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.92})$$

La dernière chose à remarquer est que pour les ondes propagatives  $s$  ( $\gamma_3 = |\gamma_3|$ ), par exemple :

$$\frac{K dK}{k_0^2} \frac{Re(\gamma_3)}{k_0} Re\left[\frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] = Re\left[\frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.93})$$

et pour les ondes évanescentes  $s$  ( $\gamma_3 = i|\gamma_3|$ ), par exemple :

$$-\frac{K dK}{k_0^2} \frac{Im(\gamma_3)}{k_0} Im\left[\frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] = Re\left[\frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}\right] \quad (\text{E.94})$$

Nous obtenons alors enfin les expressions  *finales*  des différentes contributions à la force d'interaction mutuelle entre les deux milieux semi-infinis :

$$F^{prop,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.95})$$

$$F^{prop,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_0^{k_0} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.96})$$

$$F^{évan,s}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.97})$$

$$F^{évan,p}(d, \omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_{k_0}^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \right] \quad (\text{E.98})$$

Ainsi, nous disposons d'une formulation  *unique*  pour l'expression de la force d'interaction  *totale*  sous la forme :

$$F(d) = \int_0^{\infty} d\omega \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} \left( \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^s r_{32}^s e^{2i\gamma_3 d}} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}}{1 - r_{31}^p r_{32}^p e^{2i\gamma_3 d}} \right) \right] \quad (\text{E.99})$$

#### E.4.5 Approche adoptée par Lifshitz

##### Transformations du chemin d'intégration

À partir de l'expression précédente, Lifshitz réalise plusieurs transformations dans le chemin d'intégration.

Effectuons tout d'abord le changement de variable (homothétie)  $K' = K/k_0$  et introduisons la variable  $\gamma_0 = \sqrt{1 - K'^2}$ . Nous avons alors :

$$\int_0^{\infty} \frac{K dK}{k_0^2} \frac{\gamma_3}{k_0} (...) = \int_0^{\infty} K' dK' \gamma_0 (...) \quad (\text{E.100})$$

En remarquant ensuite que :

$$K' dK' = -\gamma_0 d\gamma_0 \quad \Rightarrow \quad K' dK' \gamma_0 = -\gamma_0^2 d\gamma_0 \quad (\text{E.101})$$

nous avons alors :

$$\int_0^{\infty} K' dK' \gamma_0 (...) = \int_{\Gamma} \gamma_0^2 d\gamma_0 (...) \quad (\text{E.102})$$

où  $\Gamma$  est le contour d'intégration décrit sur la figure E.3(b) (les flèches indiquent le "sens" dans lequel l'intégration est effectuée).

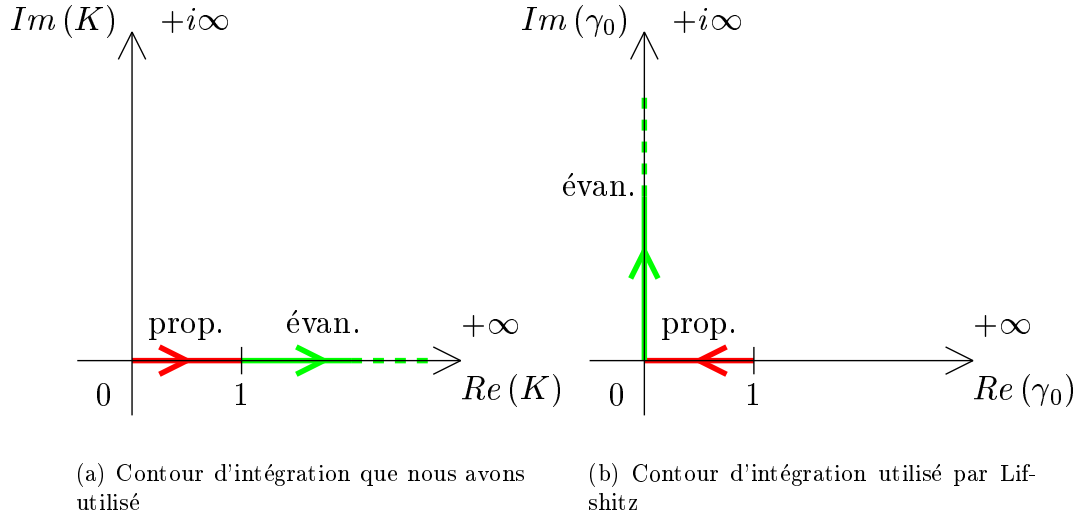


FIG. E.3 – Contours d'intégration utilisés pour les deux approches.

Cependant, nous pouvons voir dans l'expression de la force totale (cf. Éq. (E.99)) que le terme  $\exp(2i\gamma_3 d)$  oscille très vite lorsque  $(\omega/c)d \gg 1$  pour les ondes propagatives<sup>3</sup>. Et lors de l'intégration (numérique), des problèmes peuvent apparaître. C'est la raison pour laquelle Lifshitz réalise une deuxième transformation, plus compliquée, pour modifier le chemin d'intégration. Nous n'allons pas détailler ici les arguments qui permettent de justifier la validité de ce changement dans le plan complexe mais nous ne donnerons que le résultat. Il faut distinguer deux cas : le cas où les deux corps sont à température nulle et le cas où ils sont à une température non nulle.

### Milieux à température nulle

La force d'interaction entre les deux milieux semi-infinis se met alors sous la forme :

$$F(d) = \int_0^\infty d\xi \frac{\hbar \xi^3}{2\pi^2 c^3} \int_1^\infty \gamma_0^2 d\gamma_0 \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}}{1 - r_{31}^s r_{31}^s e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}}{1 - r_{31}^p r_{31}^p e^{-2\gamma_0 \frac{\xi}{c} d}} \right] \quad (\text{E.103})$$

où  $\xi$  représente la fréquence telle que  $\omega = i\xi$  :  $\omega$  est donc ici une fréquence "imaginaire". Cette double intégration correspond à un chemin d'intégration  $\Gamma'$  représenté sur la figure E.4.

Nous voyons que dans ce cas-là il n'y a plus d'exponentielle oscillante, celle-ci étant remplacée par une exponentielle décroissante. Notons que dans l'intégration précédente (notamment pour le calcul des facteurs de Fresnel), il est nécessaire de connaître la valeur de la constante diélectrique pour une fréquence  $\omega$  *imaginaire*, définie par Lifshitz (1956) :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon(i\xi) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{\omega^2 + \xi^2} d\omega \quad (\text{E.104})$$

Ceci suppose notamment que la constante diélectrique est *analytique* dans le plan complexe et que sa partie imaginaire est connue sur tout le spectre.

3. Pour les ondes évanescentes, ce terme se transforme en une exponentielle réelle décroissante, assurant la convergence rapide de l'intégration numérique.



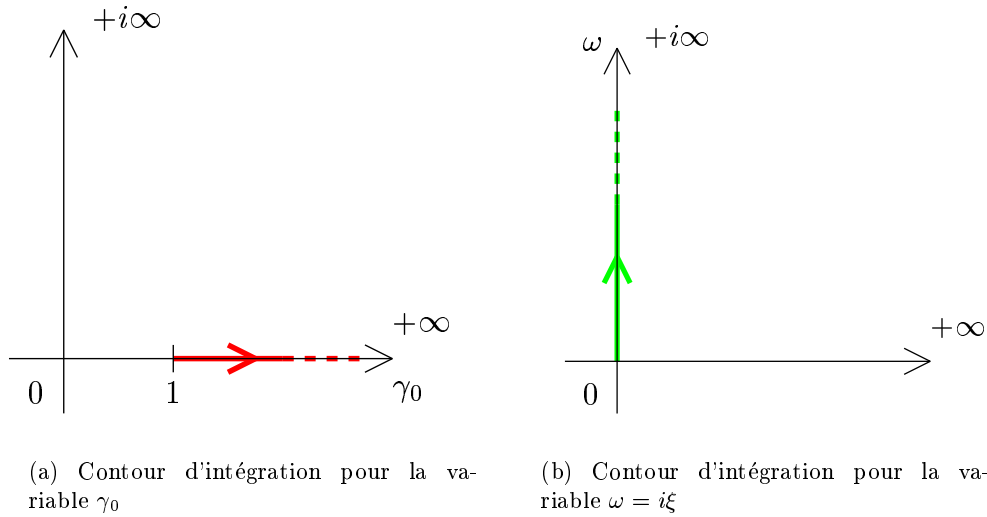


FIG. E.4 – Contours d'intégration utilisés par Lifshitz à température nulle.

### Milieux à température non nulle

La force d'interaction entre les deux milieux semi-infinis se met alors sous la forme :

$$F(d) = \frac{k_B T}{\pi c^3} \sum'_{n=0} \xi_n^3 \int_1^\infty \gamma_0^2 d\gamma_0 \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{-2\gamma_0 \frac{\xi_n}{c} d}}{1 - r_{31}^s r_{31}^s e^{-2\gamma_0 \frac{\xi_n}{c} d}} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{-2\gamma_0 \frac{\xi_n}{c} d}}{1 - r_{31}^p r_{31}^p e^{-2\gamma_0 \frac{\xi_n}{c} d}} \right] \quad (\text{E.105})$$

où le symbole  $\sum'$  signifie que le terme de la somme d'indice  $n = 0$  est pris avec un facteur  $1/2$ . L'intégration sur  $\gamma_0$  se fait le long de l'axe réel, de 1 à  $+\infty$ . Les fréquences  $\xi_n$  correspondent aux pôles de la fonction  $\coth$  sur l'axe imaginaire ( $\coth(i\xi_n) = +\infty$ ) :

$$\xi_n = n \frac{2\pi k_B T}{\hbar} \quad (\text{E.106})$$

Ces fréquences sont souvent appelées "fréquences de Matsubara". Par ailleurs, notons  $\varepsilon_{1,n} = \varepsilon_1(i\xi_n)$  et  $\varepsilon_{2,n} = \varepsilon_2(i\xi_n)$  les constantes diélectriques respectivement du milieu 1 et du milieu 2 aux fréquences de Matsubara. Les composantes perpendiculaires du vecteur d'onde pourront alors s'exprimer sous la forme :

$$\gamma_{1,n} = \sqrt{\varepsilon_{1,n} - 1 + \gamma_0^2} \quad (\text{E.107})$$

$$\gamma_{2,n} = \sqrt{\varepsilon_{2,n} - 1 + \gamma_0^2} \quad (\text{E.108})$$

Ainsi, nous obtenons pour les facteurs de Fresnel :

$$r_{31}^s = \frac{\gamma_0 - \gamma_{1,n}}{\gamma_0 + \gamma_{1,n}} \quad (\text{E.109})$$

$$r_{31}^p = \frac{\varepsilon_{1,n} \gamma_0 - \gamma_{1,n}}{\varepsilon_{1,n} \gamma_0 + \gamma_{1,n}} \quad (\text{E.110})$$

$$r_{32}^s = \frac{\gamma_0 - \gamma_{2,n}}{\gamma_0 + \gamma_{2,n}} \quad (\text{E.111})$$

$$r_{32}^p = \frac{\varepsilon_{2,n} \gamma_0 - \gamma_{2,n}}{\varepsilon_{2,n} \gamma_0 + \gamma_{2,n}} \quad (\text{E.112})$$

L'équation (E.105) résulte donc de la contribution de chacun des pôles à la force de Casimir : le terme  $n = 0$  donne la contribution des fluctuations du vide et les termes  $n \geq 1$  donnent la contribution du rayonnement thermique.

Si nous faisons le changement de variable  $x = n\gamma_0$  et si nous posons  $\omega_T = \frac{2\pi k_B T}{\hbar}$ , alors la force à température non nulle se met sous la forme suivante :

$$F(d) = \frac{8\pi^2 k_B^4 T^4}{\hbar^3 c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{\infty} x^2 dx \left[ \frac{r_{31}^s r_{32}^s e^{-2x \frac{\omega_T}{c} d}}{1 - r_{31}^s r_{31}^s e^{-2x \frac{\omega_T}{c} d}} + \frac{r_{31}^p r_{32}^p e^{-2x \frac{\omega_T}{c} d}}{1 - r_{31}^p r_{31}^p e^{-2x \frac{\omega_T}{c} d}} \right] \quad (\text{E.113})$$

Ainsi, à température non nulle, la méthode de Lifshitz fournit un calcul très facile à mettre en oeuvre numériquement et qui converge rapidement (présence de l'exponentielle réelle décroissante). Le seul travail un peu fastidieux consiste à calculer les fréquences de Matsubara, qui dépendent de la température mais pas de la distance de séparation  $d$  entre les miroirs.

Notons par ailleurs, qu'une approche différente (Genet 2002) peut être développée à température non nulle, permettant notamment de régler le problème des miroirs parfaits à haute température (*cf.* prescription de *Schwinger* au chapitre 6).

## E.5 “Mode” de surface ou “résonance” de surface

Dans l'étude des forces de Casimir, le terme “modes de surface” a été employé pour la première fois par van Kampen *et al.* (1968). Nous allons un peu préciser cette notion.

Considérons les solutions  $(K, \omega)$  de l'équation :

$$r^2(K, \omega) \exp[2i\gamma_3(K, \omega)d] = 1 \quad (\text{E.114})$$

où  $r = r_s$  ou  $r_p$  sont les facteurs de Fresnel en réflexion (nous considérons pour simplifier que nous avons deux matériaux identiques) ;  $\gamma_3(K, \omega) = \sqrt{\omega^2/c^2 - K^2}$ .

En l'absence de pertes (matériau non absorbant), la constante diélectrique est réelle ainsi que les facteurs de Fresnel. Les solutions en  $K$  et  $\omega$  sont alors *réelles* et nous les appellerons “modes de surface”. Pour les ondes propagatives, ces solutions correspondent à de *vrais* modes guidés (ondes stationnaires dans la direction  $z$ ). Ce sont les “surface modes” que considèrent van Kampen *et al.* (1968), Gerlach (1971) et Schram (1973).

En présence de pertes (cas *physique* le plus général), la constante diélectrique est complexe ainsi que les facteurs de Fresnel. Les solutions en  $K$  et en  $\omega$  sont alors *complexes* et nous les appellerons “résonances de surface”. Dans ce cas-là, nous avons pour les ondes propagatives  $|r(K, \omega)| < 1$  si bien que nous ne pouvons pas véritablement parler de “modes” (par analogie avec les modes guidés).

Dans la description que nous avons faite, nous nous sommes toujours placés en régime *stationnaire* ce qui implique une pulsation  $\omega$  *réelle*. De plus, l'invariance par translation nous a conduit à décomposer le champ électromagnétique sous forme d'une somme d'ondes planes (transformée de Fourier 2D) avec un vecteur d'onde parallèle  $\mathbf{K}$  *réel*. Ainsi, dans notre approche et notre calcul, il nous est impossible de “tomber” sur les résonances de surface (les pôles n'étant pas situés sur les axes réel ou imaginaire).

Une autre manière de voir le problème est la suivante : les résonances de surface correspondent aux solutions du problème *homogène* (sans terme source) ; or le calcul que nous réalisons est essentiellement *inhomogène* puisque qu'il contient des termes sources. Comme la solution homogène s'amortit aux temps longs, seule la solution particulière (inhomogène) survit en régime stationnaire.



## Annexe F

# Approximation dipolaire pour une particule sphérique

### F.1 Le modèle dipolaire pour une particule sphérique

Nous n'allons pas ici refaire toute la théorie sur le champ local mais juste donner quelques formules sur l'approximation dipolaire dans le cas d'une particule sphérique, diélectrique ou métallique.

#### F.1.1 Hypothèses de l'approximation dipolaire

Tout d'abord, rappelons brièvement en quoi consiste l'approximation dipolaire. Considérons une particule sphérique au point  $\mathbf{r}$ , de rayon  $a$  et de constante diélectrique  $\varepsilon_p(\omega)$ , soumise à un champ électromagnétique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  de pulsation  $\omega = 2\pi c/\lambda_0$ , où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Nous notons alors  $\lambda = \lambda_0/n_p$  la longueur d'onde dans la particule,  $n_p = \sqrt{\varepsilon_p}$  étant l'indice optique de celle-ci. L'approximation dipolaire est vérifiée lorsque la condition suivante est respectée :

$$\frac{2a}{\lambda} \ll 1 \quad (\text{F.1})$$

Ainsi, nous pouvons considérer que le champ à l'intérieur de la particule est uniforme. Alors, celle-ci peut-être modélisée d'un point de vue électromagnétique par un dipôle ponctuel  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \omega)$  induit par le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ . Ces deux grandeurs sont reliées l'une à l'autre grâce à la polarisabilité  $\alpha(\omega)$  de la particule définie par :

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{F.2})$$

Notons que  $\alpha(\omega)$  est homogène à un volume, en  $\text{m}^3$  (SI).

Nous allons donner maintenant l'expression de cette polarisabilité dans des cas concrets que nous avons étudiés.

#### F.1.2 Polarisation d'une particule sphérique

##### Polarisation dans le vide

Pour une particule *sphérique*, le modèle de Clausius-Mossotti (Jackson 2001) fournit :

$$\alpha(\omega) = \frac{4}{3} \pi a^3 \frac{\varepsilon_p(\omega) - 1}{\varepsilon_p(\omega) + 2} \quad (\text{F.3})$$

On remarquera que la polarisabilité est directement proportionnelle au volume  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$  de la particule. La condition  $Re(\varepsilon_p) = -2$  définit la condition de résonance pour la particule (résonance de *Mie*).

### Polarisabilité dans un milieu hôte

Si la particule est située dans une matrice de constante diélectrique  $\varepsilon_m(\omega)$  (*a priori* complexe), il suffit de changer  $\varepsilon_0$  en  $\varepsilon_0\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_p$  en  $\varepsilon_p/\varepsilon_m$ . La polarisabilité s'écrit alors :

$$\alpha(\omega) = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{3\varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_p(\omega) + 2\varepsilon_m(\omega)} \frac{\varepsilon_p(\omega) - \varepsilon_m(\omega)}{\varepsilon_p(\omega) + 2\varepsilon_m(\omega)} \quad (\text{F.4})$$

La condition de résonance pour la particule s'écrit alors :  $Re(\varepsilon_p) = -2Re(\varepsilon_m)$ .

## F.2 Théorème de fluctuation-dissipation pour des dipôles fluctuants

L'idée de ce paragraphe est de formuler le théorème de fluctuation-dissipation (*cf.* Annexe B) pour un ou des dipôles *fluctuants* dans le vide. Nous supposons que les conditions d'application de ce théorème sont remplies ici. Pour une particule sphérique (située au point  $\mathbf{r}_p$ ), nous pouvons décrire les courants fluctuants par la grandeur  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega)$ ,  $\mathbf{r}'$  appartenant à l'intérieur de la particule. Nous supposons que cette particule peut être décrite par l'approximation dipolaire. Dans ce cas-là, l'ensemble des courants fluctuants va être modélisé par un dipôle fluctuant  $\mathbf{p}^f(\mathbf{r}', \omega)$ .

Pour les courants fluctuants à l'intérieur de la particule, le théorème de fluctuation-dissipation s'écrit :

$$\left\langle j_\alpha^f(\mathbf{r}, \omega) j_\beta^{f*}(\mathbf{r}', \omega') \right\rangle = \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0 \varepsilon_p''(\mathbf{r}, \omega) \Theta(\omega, T_p) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega') \quad (\text{F.5})$$

où  $T_p$  est la température de la particule (température supposée uniforme).

Maintenant, il faut trouver le lien qui existe entre  $\mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega)$  et  $\mathbf{p}^f(\mathbf{r}_p, \omega)$ . Pour cela, écrivons que (particule *dans le vide*) :

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{p}^f(\mathbf{r}_p, \omega) \cdot \mathbf{E}_{ext} &= \int_{\delta V} \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) dV \\ &= \int_{\delta V} \mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \cdot \frac{3}{\varepsilon_p + 2} \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}', \omega) dV \\ &= \frac{3}{\varepsilon_p + 2} \mathbf{j}^f(\mathbf{r}_p, \omega) \cdot \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}_p, \omega) \delta V \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Nous pouvons alors effectuer les transformations suivantes :

$$\mathbf{j}^f(\mathbf{r}', \omega) \longrightarrow \frac{\varepsilon_p + 2}{3} \frac{-i\omega}{\delta V} \mathbf{p}^f(\mathbf{r}_p, \omega) \quad (\text{F.7})$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \longrightarrow \frac{1}{\delta V} \quad (\text{F.8})$$

et réécrire ainsi le théorème de fluctuation-dissipation pour  $\mathbf{p}^f$  sous la forme :

$$\left\langle p_{\alpha}^f(\mathbf{r}_p, \omega) p_{\beta}^{f*}(\mathbf{r}_p, \omega') \right\rangle = \left| \frac{3\delta V}{(\varepsilon_p + 2)\omega} \right|^2 \frac{\omega}{\pi} \varepsilon_0 \varepsilon_p''(\mathbf{r}, \omega) \Theta(\omega, T_p) \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{\delta V} \delta(\omega - \omega') \quad (\text{F.9})$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{\pi\omega} \Theta(\omega, T) \delta_{\alpha\beta} \delta(\omega - \omega') \underbrace{9\delta V \frac{\varepsilon_p''}{|\varepsilon_p + 2|^2}}_{\text{F.10}} \quad (\text{F.10})$$

Or

$$\delta V = \frac{4}{3}\pi a^3 \quad (\text{F.11})$$

$$\frac{\varepsilon_p''}{|\varepsilon_p + 2|^2} = \frac{1}{3} \text{Im} \left( \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} \right) \quad (\text{F.12})$$

Donc

$$\left\langle p_{\alpha}^f(\mathbf{r}_p, \omega) p_{\beta}^{f*}(\mathbf{r}_p, \omega') \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 \Theta(\omega, T_p)}{\pi\omega} \delta_{\alpha\beta} \delta(\omega - \omega') \underbrace{4\pi a^3 \text{Im} \left( \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} \right)}_{\text{Im}[\alpha(\omega)]} \quad (\text{F.13})$$

Nous obtenons alors l'expression finale du théorème de fluctuation-dissipation pour une particule sphérique dans le vide en fonction de sa polarisabilité  $\alpha(\omega)$  :

$$\left\langle p_{\alpha}^f(\mathbf{r}_p, \omega) p_{\beta}^{f*}(\mathbf{r}_p, \omega') \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 \Theta(\omega, T_p)}{\pi\omega} \text{Im}[\alpha(\omega)] \delta_{\alpha\beta} \delta(\omega - \omega') \quad (\text{F.14})$$

Ainsi, si la particule est transparente,  $\alpha(\omega)$  est réelle et les corrélations sur  $\mathbf{p}^f(\mathbf{r}_p, \omega)$  sont nulles, la dissipation étant nulle.

### F.3 Tenseur de Green pour un dipôle

Nous considérons ici un dipôle  $\mathbf{p}(\mathbf{r}_p, \omega)$  situé au point  $\mathbf{r}_p$  et oscillant à la fréquence  $\omega$ . Ce dipôle est situé dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et non magnétique, de constante diélectrique  $\varepsilon(\omega)$ ; il rayonne un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  au point  $\mathbf{r}$  et à la fréquence  $\omega$ . Nous définissons alors le tenseur de Green  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{dip}$  par la relation :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{dip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p, \omega) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}_p, \omega) \quad (\text{F.15})$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N.A}^{-2}$ ). Nous pouvons alors montrer que l'expression de ce tenseur est la suivante :

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}^{dip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_p, \omega) = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R} \left\{ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \mathbf{u}\mathbf{u} - \left[ \frac{1}{ikR} - \frac{1}{(ikR)^2} \right] \left( \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - 3\mathbf{u}\mathbf{u} \right) \right\} \quad (\text{F.16})$$

avec  $k(\omega) = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  la valeur du vecteur d'onde dans le milieu.  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|$  et le vecteur  $\mathbf{u}$  est alors le vecteur unitaire défini par :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|} \quad (\text{F.17})$$

Par ailleurs,  $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$  est le tenseur identité et  $\mathbf{uu}$  est le tenseur :

$$(\mathbf{uu})_{ij} = u_i u_j \quad i, j = x, y, z \quad (\text{F.18})$$

Nous retrouvons bien, lorsque les effets de retard sont négligeables ( $c \rightarrow \infty$  à fréquence *fixée*), c'est-à-dire dans l'approximation électrostatique, le champ électrostatique créé par un dipôle :

$$\mathbf{E}^{stat}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{u} - \mathbf{p}] \quad (\text{F.19})$$

## Annexe G

# Tenseur de Green en approximation électrostatique pour un système sphère-dipôle

Le but de cette annexe est d'établir l'expression du tenseur de Green en approximation électrostatique pour une particule sphérique dans une matrice. Nous utiliserons ensuite le résultat pour exprimer la puissance *non radiative* échangée entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice (*cf.* Chap. 5).

### G.1 Position du problème

#### G.1.1 Géométrie du système considéré

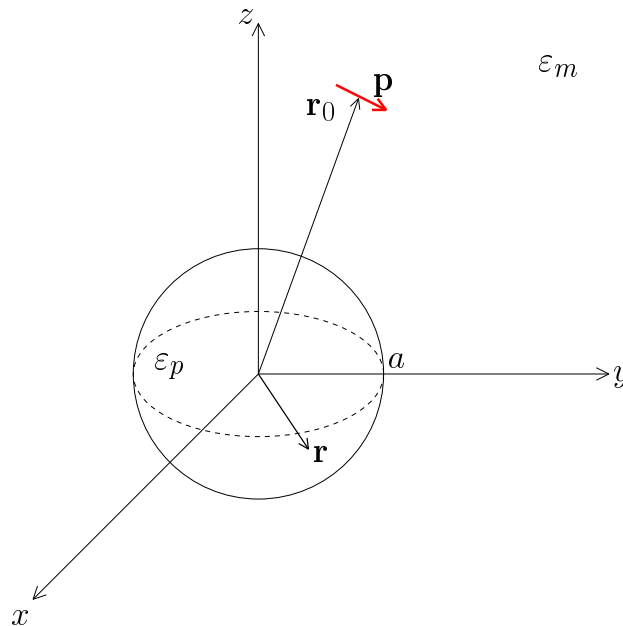


FIG. G.1 – Géométrie du système

Soit une particule sphérique de rayon  $a$ , de constante diélectrique *complexe*  $\epsilon_p(\omega)$  située à l'intérieur d'un milieu hôte (nous l'appellerons "matrice" par la suite) de constante diélectrique *complexe*  $\epsilon_m(\omega)$ . Le point courant à l'intérieur de la particule est repéré par le vecteur  $\mathbf{r}$  dont les



coordonnées sphériques sont  $(r, \phi, \theta)$  telles que :

$$\mathbf{r} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{x} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{y} + \sin \theta \mathbf{z} \quad (\text{G.1})$$

Nous considérons un dipôle ponctuel  $\mathbf{p}$  situé au point  $\mathbf{r}_0$  de coordonnées  $(r_0, \phi_0, \theta_0)$ . Enfin, nous noterons  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$  le volume de la particule.

### G.1.2 Calcul de la fonction de Green électrostatique

Nous nous plaçons dans le cadre de l'approximation électrostatique, c'est-à-dire que nous négligeons les effets de retard dus à la propagation. Cette approximation est notamment valable lorsque nous nous plaçons en champ proche, comme c'est le cas ici ( $r_0 \approx a \ll \lambda$ ).

Considérons maintenant une distribution de charge  $\rho(\mathbf{r}')$  située à l'intérieur de la matrice. Cette distribution crée un potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  en tout point  $\mathbf{r}$  de la particule telle que :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (\text{G.2})$$

où  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est la *fonction* de Green électrostatique pour le potentiel dans le cas d'une sphère dans un diélectrique.

Cette fonction de Green électrostatique s'écrit alors (Stratton 1941) :

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (\text{G.3})$$

avec  $\cos \gamma = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0)$ .  $P_l$  est le polynôme de *Legendre* d'ordre  $l$  défini par la formule de *Rodrigues*<sup>1</sup> :

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d}{du^l} (u^2 - 1)^l \quad (\text{G.4})$$

### G.1.3 Tenseur de Green électrostatique pour une particule sphérique

Par ailleurs, la densité de charge associée au dipôle élémentaire  $\mathbf{p}$  situé en  $\mathbf{r}_0$  s'exprime sous la forme

$$\rho(\mathbf{r}') = -\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (\text{G.5})$$

En reportant cette expression de la densité de charge dans celle du potentiel, nous trouvons alors que le potentiel créé par un dipôle  $\mathbf{p}$  au point  $\mathbf{r}_0$  à l'extérieur de la particule, au point  $\mathbf{r}$  à l'intérieur de la particule est :

$$\Phi_{dip}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (\text{G.6})$$

En déduisant le champ électrique créé par un dipôle de l'expression du potentiel ( $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla_{\mathbf{r}} \Phi(\mathbf{r})$ ), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{dip}(\mathbf{r}) &= -\nabla_{\mathbf{r}} \Phi_{dip}(\mathbf{r}) \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}} [\mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)] \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}_0} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p} \\ &= \overset{\leftrightarrow}{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

---

1. Jackson 2001, chap. 3, sec. 2, Éq. (3.16)

Nous avons donc une expression de la fonction de Green du champ (dipôle) à partir de celle du potentiel électrostatique (charge ponctuelle). Nous en déduisons :

$$\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -\nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}_0} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \quad (\text{G.8})$$

$\overleftrightarrow{\Gamma}$  correspond au tenseur de Green défini également en annexe F. Nous pouvons expliciter (en coordonnées cartésiennes) son expression sous la forme :

$$\Gamma_{\alpha\beta} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{0\beta}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \quad \alpha, \beta = x, y, z \quad (\text{G.9})$$

Le tenseur de Green  $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$  a été défini précédemment en fonction du courant par la relation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{j}_{dip}(\mathbf{r}_0, \omega) \quad (\text{G.10})$$

En écrivant que  $\mathbf{j}_{dip} = -i\omega\mathbf{p}$ , nous en déduisons la relation entre le tenseur  $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$  et  $\overleftrightarrow{\Gamma}$  :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) = \frac{1}{\mu_0\omega^2} \overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \quad (\text{G.11})$$

Nous plaçons maintenant le dipôle à une position  $\mathbf{r}_0$  telle que  $\theta_0 = 0$  et  $\phi_0 = 0$  : comme nous sommes à symétrie sphérique, la puissance rayonnée par la particule ne dépend ni de  $\theta_0$  ni de  $\phi_0$ , d'où ce choix arbitraire. En revanche, le champ électrique, lui, dépend de  $\theta_0$  ni de  $\phi_0$ . Nous pouvons alors calculer, en coordonnées sphériques, les neuf termes du tenseur de Green. Pour cela, rappelons tout d'abord les expressions suivantes :

$$\frac{\partial \cos \gamma}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \theta_0 + \cos \theta \sin \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12a})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \phi} = -\sin \theta_0 \sin(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12b})$$

$$\frac{\partial \cos \gamma}{\partial \theta_0} = -\cos \theta \sin \theta_0 + \sin \theta \cos \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12c})$$

$$\frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \phi_0} = \sin \theta \sin(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12d})$$

$$\frac{\partial^2 \cos \gamma}{\partial \theta_0 \partial \theta} = \sin \theta \sin \theta_0 + \cos \theta \cos \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12e})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \cos \gamma}{\partial \phi \partial \theta_0} = -\cos \theta_0 \sin(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12f})$$

$$\frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial^2 \cos \gamma}{\partial \theta \partial \phi_0} = \cos \theta \sin(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12g})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial^2 \cos \gamma}{\partial \phi \partial \phi_0} = \cos(\phi - \phi_0) \quad (\text{G.12h})$$

Nous en déduisons donc que pour un dipôle situé en  $\mathbf{r}_0$ , les éléments du tenseur s'écrivent

sous la forme :

$$\Gamma_{rr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} P_l(\cos\theta) \quad (\text{G.13a})$$

$$\Gamma_{r\phi} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} P'_l(\cos\theta) \sin\theta \sin\phi \quad (\text{G.13b})$$

$$\Gamma_{r\theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} P'_l(\cos\theta) \sin\theta \cos\phi \quad (\text{G.13c})$$

$$\Gamma_{\phi r} = 0 \quad (\text{G.13d})$$

$$\Gamma_{\phi\phi} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} P'_l(\cos\theta) \cos\phi \quad (\text{G.13e})$$

$$\Gamma_{\phi\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} P'_l(\cos\theta) \sin\phi \quad (\text{G.13f})$$

$$\Gamma_{\theta r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} P'_l(\cos\theta) \sin\theta \quad (\text{G.13g})$$

$$\Gamma_{\theta\phi} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} [P'_l(\cos\theta) \cos\theta - P''_l(\cos\theta) \sin^2\theta] \sin\phi \quad (\text{G.13h})$$

$$\Gamma_{\theta\theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{l-1} [P'_l(\cos\theta) \cos\theta - P''_l(\cos\theta) \sin^2\theta] \cos\phi \quad (\text{G.13i})$$

## G.2 Puissance nette échangée entre les électrons de la particule et les phonons de la matrice

### G.2.1 Méthode de calcul

Nous considérons ici que les électrons de la particule sont à l'équilibre thermodynamique local à la température  $T_e$ , la température du réseau constituant la particule étant notée  $T_l$  (comme *lattice*). La matrice, elle, est supposée être à une température  $T_m$  (la même pour les électrons et le réseau cristallin).

La puissance dissipée dans la particule suite à l'interaction entre les électrons de la particule et un dipôle situé à l'extérieur de celle-ci (en  $\mathbf{r}_0$ ) vaut :

$$P_{m-e} = \int_0^{\infty} d\omega \omega \epsilon_0 \epsilon_p''(\omega) \int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d^3\mathbf{r} \quad (\text{G.14})$$

où

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = (i\omega\mu_0) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \cdot \mathbf{j}_{dip}(\mathbf{r}_0, \omega) \quad (\text{G.15})$$

$\mathbf{j}_{dip}$  le courant volumique élémentaire situé à la position du dipôle et  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  le tenseur de Green du système.

Dans le cas de courant thermique, la moyenne statistique de la fonction de corrélation des courants est donnée par le théorème de fluctuation-dissipation (*cf.* Annexe B) :

$$\langle j_{\alpha}(\mathbf{r}, \omega) j_{\beta}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = \frac{\omega\epsilon_0}{\pi} \epsilon_m''(\omega) \Theta(\omega, T_m) \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\omega - \omega') \quad (\text{G.16})$$

avec  $\Theta(\omega, T) = \hbar\omega / \left[ \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right]$ .

Ainsi,

$$P_{m-e} = \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4}{2\pi c^4} \Theta(\omega, T_m) \varepsilon_p''(\omega) \varepsilon_m''(\omega) \sum_{\alpha, \beta} \int_V |G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega)|^2 d^3\mathbf{r} \quad (\text{G.17})$$

De même, la puissance dissipée par un élément de volume dans la matrice, situé à l'endroit du dipôle vaut :

$$P_{e-m} = \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4}{2\pi c^4} \Theta(\omega, T_e) \varepsilon_p''(\omega) \varepsilon_m''(\omega) \sum_{\alpha, \beta} \int_V |G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \omega)|^2 d^3\mathbf{r} \quad (\text{G.18})$$

En écrivant, par réciprocité du tenseur de Green, que :

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) = G_{\alpha\beta}^*(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}, \omega) \quad (\text{G.19})$$

et que le système est à l'équilibre thermique quand les températures sont égales, nous trouvons que le taux de chauffage  $P_{e-m}(r, T_e) - P_{m-e}(r, T_m)$  (cf. Chap. 5) est :

$$\begin{aligned} P_{e-m}(r, T_e) - P_{m-e}(r, T_m) &= \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^4}{2\pi c^4} [\Theta(\omega, T_e) - \Theta(\omega, T_m)] \varepsilon_p''(\omega) \varepsilon_m''(\omega) \\ &\quad \times \sum_{\alpha, \beta} \int_V |G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega)|^2 d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

L'expression du taux de chauffage à l'extérieur de la bille sera donc connue lorsque la quantité

$$\sum_{\alpha, \beta} \int_V |G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega)|^2 d^3\mathbf{r} \quad (\text{G.21})$$

sera calculée.

### G.2.2 Quelques relations sur les polynômes de Legendre

Posons  $u = \cos\theta$  et considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{du} \left[ (1-u^2) \frac{dP}{du} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2} \right] P = 0 \quad (\text{G.22})$$

avec  $l$  entier naturel et  $m$  entier relatif. Cette équation différentielle est l'équation de *Legendre* généralisée et ses solutions sont les fonctions de *Legendre* associées. Les polynômes de *Legendre*  $P_l$  (fonctions de *Legendre* ordinaires) définis précédemment sont les solutions de cette équation différentielle prise pour  $m = 0$ . Pour  $m \neq 0$ , les fonctions de *Legendre* associées sont notées  $P_l^m$ . Nous pouvons montrer que seules les fonctions telles que  $m$  prenne les valeurs  $-l, -(l-1), -(l-2), \dots, 0, \dots, (l+2), (l+1), l$  sont *physiques* (solution finie sur l'intervalle  $[-1, 1]$ ). Nous pouvons écrire, comme pour  $P_l$ , une formule analogue sur  $P_l^m$  :

$$P_l^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-u^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2-1)^l \quad (\text{G.23})$$

De plus, nous pouvons montrer qu'il existe une relation entre  $P_l^{-m}$  et  $P_l^m$  de la forme :

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m \quad (\text{G.24})$$

Ainsi, nous avons les relations suivantes sur les polynomes de Legendre ( $n$  est un entier naturel) :

$$\int_{-1}^1 P_l(u) P_{l'}(u) \, du = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (\text{G.25})$$

$$\int_{-1}^1 P_l^m(u) P_{l'}^m(u) \, du = \frac{2l}{(2l+1)} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \quad (\text{G.26})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_l^1(u) P_{l'}^1(u)}{1-u^2} \, du = l(l+1) \quad \text{si } l = l' + 2n \quad (\text{G.27})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{P_l^1(u) P_{l'}^1(u)}{1-u^2} \, du = 0 \quad \text{si } l = l' + (2n+1) \quad (\text{G.28})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u P_l^1(u) P_{l'}^2(u)}{\sqrt{1-u^2}} \, du = -\frac{2l(l^2-1)}{2l+1} \quad (\text{G.29})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u P_l^1(u) P_{l'}^2(u)}{\sqrt{1-u^2}} \, du = -l(l+1) \quad \text{si } l = l' + 2n \quad \text{et } n > 0 \quad (\text{G.30})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u P_l^1(u) P_{l'}^2(u)}{\sqrt{1-u^2}} \, du = 0 \quad \text{si } l = l' + (2n+1) \quad (\text{G.31})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u^2 P_l^1(u) P_{l'}^1(u)}{1-u^2} \, du = l(l+1) \quad \text{si } l = l' + 2n \quad (\text{G.32})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u^2 P_l^1(u) P_{l'}^1(u)}{1-u^2} \, du = 0 \quad \text{si } l = l' + (2n+1) \quad (\text{G.33})$$

### G.2.3 Expression du taux de chauffage

L'intégrale finale sur le volume de la particule s'effectue en coordonnées sphériques :

$$\int_V |\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega)|^2 \, d^3\mathbf{r} = \int_0^a r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta |\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega)|^2 \quad (\text{G.34})$$

Ainsi (calculs longs et fastidieux) :

$$\sum_{\alpha,\beta} \int_V |\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega)|^2 \, d^3\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2 r_0^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)(2l+1)^2}{|l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m|^2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{2l+1} \quad (\text{G.35})$$

Nous obtenons alors l'expression finale du taux de chauffage à l'extérieur de la particule :

$$P_{e-m}(r, T_e) - P_{m-e}(r, T_m) = \frac{1}{2\pi^2 r_0^3} \int_0^\infty d\omega \quad \epsilon_p''(\omega) \epsilon_m''(\omega) [\Theta(\omega, T_e) - \Theta(\omega, T_m)] \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)(2l+1)^2}{|l\epsilon_p + (l+1)\epsilon_m|^2} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{2l+1} \quad (\text{G.36})$$

# Références

- Abramowitz M. et Stegun I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover.
- Abramson A. R. et Tien C. L. (1999). Recent developments in microscale thermophysical engineering. *Microscale Thermophys. Eng.* 3, 229–244.
- Agarwal G. S. (1975a). Quantum electrodynamics in the presence of dielectrics and conductors. I. Electromagnetic-field response functions and black-body fluctuations in finite geometries. *Phys. Rev. A* 11, 230–242.
- Agarwal G. S. (1975b). Quantum electrodynamics in the presence of dielectrics and conductors. II. Theory of dispersion forces. *Phys. Rev. A* 11, 243–252.
- Agarwal G. S. (1975c). Quantum electrodynamics in the presence of dielectrics and conductors. III. Relations among one-photon transition probabilities in stationary fields, density of states, the field-correlation functions, and surface-dependent response functions. *Phys. Rev. A* 11, 253–264.
- Agranovich V. M. et Mills D. L. (Éds.) (1982). *Surface polaritons*. Amsterdam: North Holland.
- Aigouy L., Andréani F.-X., Boccara A.-C., Rivoal J.-C., Porto J. A., Carminati R., Greffet J.-J., et Mégy R. (2000). Near-field optical spectroscopy using an incoherent light source. *Appl. Phys. Lett.* 76, 397–399.
- Ashcroft N. W. et Mermin N. D. (1976). *Solid State Physics*. Philadelphia, PA: Saunders College.
- Auslender M. et Hava S. (1995). Zero infrared reflectance anomaly in doped silicon lamellar gratings. I. From antireflection to total absorption. *Infrared Phys. Technol.* 36, 1077–1088.
- Auslender M. et Hava S. (1998). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 3, Chapitre 6. San Diego, CA: Academic Press.
- Azoulay J., Debarre A., Richard A., et Tchenio P. (2000). Quenching and enhancement of single-molecule fluorescence under metallic and dielectric tips. *Europhys. Lett.* 51, 374–380.
- Bian R. X., Dunn R. C., Xie X. S., et Leung P. T. (1995). Single molecule emission characteristics in near-field microscopy. *Phys. Rev. Lett.* 75, 4772–4775.
- Bigot J., Merle J., Cregut O., et Daunois A. (1995). Electron dynamics in copper metallic nanoparticles probed with femtosecond optical pulses. *Phys. Rev. Lett.* 75, 4702–4705.
- Blockland P. H. G. M. et Overbeek J. T. G. (1978). *J. Chem. Soc. Farad. Trans. I* 74, 2637.
- Boehm R. F. et Tien C. L. (1970). Small spacing analysis of radiative transfer between parallel metallic surfaces. *J. Heat Transfer* 92, 405–411.
- Bohren C. F. et Huffman D. R. (1991). *Absorption and scattering of light by small particles*. New York: Wiley-Interscience.
- Bordag M., Geyer B., Klimchitskaya G. L., et Mostepanenko V. M. (2000). Casimir force at both non zero temperature and finite conductivity. *Phys. Rev. Lett.* 85, 503–506.
- Bordag M., Mohideen U., et M. M. V. (2001). New developments in the Casimir effect. *Phys. Rep.* 353, 1–205.

- Boström M. et Sernelius B. E. (2000). Thermal effects on the Casimir force in the 0.1-5  $\mu\text{m}$  range. *Phys. Rev. Lett.* *84*, 4757–4760.
- Bowman J. J., Senior T. B. A., et Uslenghi P. L. E. (1987). *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. New York: Hemisphere. p. 662.
- Boyer T. H. (1968). Quantum electromagnetic zero-point energy and retarded dispersion forces. *Phys. Rev.* *174*, 1631–1638.
- Boyer T. H. (2000). L'infiniment vide n'existe pas. *Pour la science* *278*, 128–137.
- Buks E. et Roukes M. L. (2001). Stiction, adhesion energy, and the Casimir effect in micromechanical systems. *Phys. Rev. B* *63*, 033402 (4 pages).
- Callen H. B. et Welton T. A. (1951). Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev.* *83*, 34–40.
- Caren R. P. (1972a). Radiation energy density and radiation heat flux in small rectangular cavities. *J. Heat Trans., Trans. ASME Series C* *94*, 289–294.
- Caren R. P. (1972b). Radiation heat transfer between closely spaced metal surfaces at low temperature: the impact of discrete modes of the radiation field. *J. Heat Trans., Trans. ASME Series C* *94*, 295–299.
- Carminati R. et Greffet J.-J. (1999). Near-field effects in spatial coherence of thermal sources. *Phys. Rev. Lett.* *82*, 1660–1663.
- Casimir H. B. G. (1948a). Colloque sur la théorie de la liaison chimique, Paris, France.
- Casimir H. B. G. (1948b). On the attraction between two perfectly conducting plates. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.* *51*, 793–795.
- Casimir H. B. G. et Polder D. (1948). The influence of retardation on the London-van der Waals forces. *Phys. Rev.* *73*, 360–372.
- Chan H. B., Aksyuk V. A., Kleiman R. N., Bishop D. J., et Capasso F. (2001b). Nonlinear micromechanical Casimir oscillator. *Phys. Rev. Lett.* *87*, 211801.
- Chan H. B., Aksyuk V. A., Kleiman R. N., Bishop D. J., et Capasso F. (2001a). Quantum mechanical actuation of MicroElectroMechanical Systems by the Casimir force. *Science* *291*, 1941–1944.
- Chance R. R., Prock A., et Silbey R. (1978). In I. Prigogine et S. A. Rice (Éds.), *Advances in Chemical Physics*, Volume 37, pp. 1–65. New York: Wiley.
- Chateau N. et Hugonin J.-P. (1994). Algorithm for the rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am. A* *11*, 1321–1331.
- Chaumet P. C., Rahmani A., de Fornel F., et Dufour J.-P. (1998). Evanescent light scattering: the validity of the dipole approximation. *Phys. Rev. B* *58*, 2310–2315.
- Chen G. (1997). Wave effects on radiative transfer in absorbing and emitting thin-film media. *Microscale Thermophys. Eng.* *1*, 215–224.
- Chen G. (1998). Thermal conductivity and ballistic-phonon transport in the cross-plane direction of superlattices. *Phys. Rev. B* *57*, 14958–14973.
- Chen G. (2001). Ballistic-diffusive heat-conduction equations. *Phys. Rev. Lett.* *86*, 2297–2300.
- Chen G. et Tien C. L. (1992). Partial coherence theory of thin film radiative properties. *J. Heat Transfer* *114*, 636–643.
- Choyke W. J. et Palik E. D. (1985). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 1, pp. 587–595. San Diego, CA: Academic Press.
- Colas des Francs G., Girard C., Weeber J. C., Chicane C., David T., Dereux A., et Peyrade D. (2001). Optical analogy to electronic quantum corrals. *Phys. Rev. Lett.* *86*, 4950–4953.

- Coruccini R. J. (1959). Gaseous heat conduction at low pressures and temperatures. *Vacuum* 7, 19–29.
- Cory H., Boccarda A.-C., Rivoal J.-C., et Lahrech A. (1998). Electric field intensity variation in the vicinity of a perfectly conducting conical probe: application to near-field microscopy. *Microwave Opt. Technol. Lett.* 18, 120–124.
- Cravalho E. G., Tien C. L., et Caren R. P. (1967). Effect of small spacings on radiative transfer between two dielectrics. *J. Heat Transfer* 89, 351–358.
- Del Fatti N. (1998). *Dynamique électronique femtoseconde dans les systèmes métalliques massifs et confinés*. Thèse de Doctorat, École Polytechnique.
- Del Fatti N., Flytzanis C., et Vallée F. (1999). Femtosecond induced electron-surface scattering in confined metallic systems. *Appl. Phys. B* 68, 433–437.
- Del Fatti N., Langot P., et Vallée F. (2002). Electron-phonon scattering in metal clusters: size effects. In *OSA Trends in Optics and Photonics, Quantum Electronics and Laser Science Conference*, Volume 74, pp. 180.
- Dereux A., Girard C., et Weeber J. C. (2000). Theoretical principles of near-field optical microscopies and spectroscopies. *J. Chem. Phys.* 112, 7775–7789.
- Derjaguin B. V. et Abrikosova I. I. (1957). *JETP* 3, 819.
- Di Stefano O., Savasta S., et Girlanda R. (2000). Three-dimensional electromagnetic field quantization in absorbing and dispersive bounded dielectrics. *Phys. Rev. A* 61, 023803–023814.
- Domoto G. A., Boehm R. F., et Tien C. L. (1970). Experimental investigation of radiative transfer between metallic surfaces at cryogenic temperatures. *J. Heat Transfer* 92, 412–417.
- Dorofeyev I. A. (1998a). Energy dissipation rate of a sample-induced thermal fluctuating field in the tip of a probe microscope. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31, 600–601.
- Dorofeyev I. A. (1998b). The force of attraction between two solids with different temperatures. *J. Phys. A: Math. Gen.* 31, 4369–4380.
- Dorofeyev I. A., Fuchs H., et Jersch J. (2002). Spectral properties of fluctuating electromagnetic fields in a plane cavity: implication for nanoscale physics. *Phys. Rev. E* 65, 026610 (15 pages).
- Draine B. T. (1988). The discrete dipole approximation and its application to interstellar graphite grains. *Astrophys. Journal* 333, 848–872.
- Dransfeld K. et Xu J. (1988). The heat transfer between a heated tip and a substrate: fast thermal microscopy. *J. of Microscopy* 152, 35–42.
- Eckhardt W. (1982). First and second fluctuation-dissipation theorem in electromagnetic fluctuation theory. *Opt. Comm.* 41, 305–309.
- Eesley G. L. (1986). Generation of nonequilibrium electron and lattice temperatures in copper by picosecond laser pulses. *Phys. Rev. B* 33, 2144–2151.
- Ehrenreich H. et Philipp H. R. (1962). Optical properties of Ag and Cu. *Phys. Rev.* 128, 1622–1629.
- Einstein A. (1907). *Ann. der Phys.* 22, 180.
- Einstein A. (1916). *Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*.
- Elsayed-Ali H. E., Norris T. B., Pessot M. A., et Mourou G. A. (1987). Time-resolved observation of electron-phonon relaxation in copper. *Phys. Rev. Lett.* 58, 1212–1215.
- Ford L. H. (1988). Spectrum of the Casimir effect. *Phys. Rev. D* 38, 528–532.
- Ford L. H. (1993). Spectrum of the Casimir effect and the Lifshitz theory. *Phys. Rev. A* 48, 2962–2967.



- Galtier P. (2002). Thermometrie à haute résolution ; application aux mesures thermiques sub-microniques sur composants. Paris, France. Journée thématique de la SFT "Transferts radiatifs et conductifs aux courtes échelles : de l'énergie aux nanotechnologies".
- Genet C. (2002). *La force de Casimir entre deux miroirs métalliques à température non nulle*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI.
- Genet C., Lambrecht A., et Reynaud S. (2000). Temperature dependence of the Casimir effect between metallic mirrors. *Phys. Rev. A* *62*, 012110–1–012110–8.
- Gerlach E. (1971). Equivalence of van der Waals forces between solids and the surface-plasmon interaction. *Phys. Rev. B* *4*, 393–396.
- Girard C., Joachim C., et Gauthier S. (2000). The physics of the near field. *Rep. Prog. Phys.* *63*, 893–938.
- Goldhaber G. et Perlmutter S. (1998). A study of 42 type Ia supernovae and a resulting measurement of  $\Omega_M$  and  $\Omega_\Lambda$ . *Phys. Rep.* *307*, 325–331.
- Gordon J. P. (1973). Radiation forces and momenta in dielectric media. *Phys. Rev. A* *8*, 14–21.
- Gradshteyn I. S. et Ryzhik I. M. (1980). *Tables of integrals, Series and products*. New York: Academic Press.
- Greffet J.-J. et Carminati R. (1997). Image formation in near-field optics. *Prog. Surf. Sci.* *56*, 133–237.
- Greffet J.-J., Carminati R., Joulain K., Mulet J.-P., Mainguy S., et Chen Y. (2002). Coherent emission of light by thermal sources. *Nature* *416*, 61–64.
- Grua P. et Bercegol H. (2001). In G. J. Exarhos, A. H. Guenther, M. R. Kozlowski, K. L. Lewis, et M. J. Soileau (Éds.), *Laser-induced damage in optical materials*, Volume 4347, pp. 579–587. SPIE.
- Hamanaka Y., Kuwabata J., Tanahashi I., Omi S., et Nakamura A. (2001). Ultrafast electron relaxation via breathing vibration of gold nanocrystals embedded in a dielectric medium. *Phys. Rev. B* *63*, 104302–104306.
- Hargreaves C. M. (1969). Anomalous radiative transfer between closely-spaced bodies. *Phys. Lett.* *30A*, 491–492.
- Henkel C., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2000). Spatial coherence of thermal near fields. *Opt. Comm.* *186*, 57–67.
- Henkel C., Joulain K., Mulet J.-P., et Greffet J.-J. (2002). Radiation forces on small particles in thermal near fields. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* *4*, S–109–S–114.
- Hesketh P. J. et Zemel J. N. (1988a). Polarized spectral emittance from periodic micromachined surfaces. I. Doped silicon: the normal direction. *Phys. Rev. B* *37*, 10795–10802.
- Hesketh P. J. et Zemel J. N. (1988b). Polarized spectral emittance from periodic micromachined surfaces. II. Doped silicon: angular variation. *Phys. Rev. B* *37*, 10803–10813.
- Hesketh P. J., Zemel J. N., et Gebhart B. (1986). Organ pipe radiant modes of periodic micromachined silicon surfaces. *Nature* *324*, 549–551.
- Hodak J., Martini I., et Hartland G. V. (1998). Spectroscopy and Dynamics of Nanometer Sized Noble Metal Particles. *J. Phys. Chem B* *102*, 6958–6967.
- Hodak J. H., Henglein A., et Hartland G. V. (1999). Size-dependent properties of Au particles: coherent excitation and dephasing of acoustic vibrational modes. *J. Chem. Phys.* *111*, 8613–8621.
- Hodak J. H., Henglein A., et Hartland G. V. (2000). Electron-phonon coupling dynamics in very small (between 2 and 8 nm) Au nanoparticles. *J. Chem. Phys.* *112*, 5942–5947.

- Jackson J. D. (2001). *Électrodynamique classique*. Paris: Dunod.
- Joulain K., Mulet J.-P., Carminati R., et Greffet J.-J. (2002). Nanoscale radiative heating of a sample with a probe. *J. Magnetism and Mag. Materials* 249, 462–465.
- Joulain K., Mulet J.-P., Carminati R., Greffet J.-J., et Shchegrov A. V. (2000). Modification of the thermal emission spectrum at short distances. In G. P. Celata (Éd.), *Heat Transfer and Transport Phenomena in Microsystems*, New York, pp. 347–351. Begell House.
- Kaganov M. I., Lifshitz I. M., et Tanatarov L. V. (1956). *J. Exp. Theor. Phys.* 31, 232.
- Kittel C. (1998). *Physique de l'état solide* (7<sup>ème</sup> éd.), Paris: Dunod.
- Klimchitskaya G. L., Roy A., Mohideen U., et Mostepanenko V. M. (1999). Complete roughness and conductivity corrections for Casimir force measurement. *Phys. Rev. A* 60, 3487–3495.
- Kretschmann E. (1968). Die Bestimmung optischer Konstanten von Metallen durch Anregung von Oberflächenplasmaschwingungen. *Z. Phys.* 216, 398–410.
- Kupiszewska D. (1992). Casimir effect in absorbing media. *Phys. Rev. A* 46, 2286–2294.
- Kupiszewska D. et Mostowski J. (1990). Casimir effect for dielectric plates. *Phys. Rev. A* 41, 4636–4644.
- Lambrecht A. (2002). The Casimir effect: a force from nothing. *Physics world*, 29–32.
- Lambrecht A. et Reynaud S. (2000). Casimir force between metallic mirrors. *Eur. Phys. J. D* 8, 309–318.
- Lamoreaux S. K. (1997). Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  range. *Phys. Rev. Lett.* 78, 5–8.
- Lamoreaux S. K. (1998). Erratum: Demonstration of the Casimir force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  range. *Phys. Rev. Lett.* 81, 5475–5476.
- Lamoreaux S. K. (1999a). Comment on “Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$ ”. *Phys. Rev. Lett.* 83, 3340.
- Lamoreaux S. K. (1999b). Resource Letter CF-1: Casimir force. *Am. J. Phys.* 67, 850–861.
- Landau L. D., Lifchitz E. M., et Pitaevskii L. P. (1980). *Statistical Physics* (3<sup>ème</sup> éd.), Oxford: Pergamon Press.
- Le Gall J. (1996). *Étude expérimentale et théorique de la propagation des ondes de surface sur un réseau. Application à la modification des propriétés radiatives infrarouges de matériaux*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris.
- Le Gall J., Olivier M., et Greffet J.-J. (1997). Experimental and theoretical study of reflection and coherent thermal emission by a SiC grating supporting a surface-phonon polariton. *Phys. Rev. B* 55, 10105–10114.
- Levin M. L., Polevoi V. G., et Rytov S. M. (1980). Contribution to the theory of heat exchange due to a fluctuating electromagnetic field. *Sov. Phys. JETP* 52, 1054–1063.
- Lifchitz E. M. (1956). The theory of molecular attractive forces between solids. *Soviet Phys. JETP* 2, 73–83.
- Link S., Burda C., Wang Z., et El-Sayed M. A. (1999). Electron dynamics in gold and gold-silver alloy nanoparticles: the influence of a nonequilibrium electron distribution and the size dependence of the electron-phonon relaxation. *J. Chem. Phys.* 111, 1255–1264.
- Link S. et El-Sayed A. (1999). Spectral properties and relaxation dynamics of surface plasmon electronic oscillations in gold and silver nanodots and nanorods. *J. Phys. Chem B* 103, 8410–8426.

- Logunov S. L., Ahmadi T. S., El-Sayed M. A., Khoury J. T., et Wetten R. L. (1997). Electron dynamics of passivated gold nanocrystals probed by subpicosecond transient absorption spectroscopy. *J. Phys. Chem B* *101*, 3713–3719.
- London F. (1930a). *Zeit. Phys.* *63*, 245.
- London F. (1930b). *Zeit. Phys. Chem. B* *11*, 222.
- Loomis J. L. et Marris H. J. (1994). Theory of heat transfer by evanescent electromagnetic waves. *Phys. Rev. B* *50*, 18517–18524.
- Lydanne R. H., Sachs R. G., et Teller E. (1941). On the polar vibrations of alkali halides. *Phys. Rev.* *59*, 673–676.
- Mandel L. et Wolf E. (1995). *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- Maradudin A. A. (2001). Comment on "Radiative transfer over small distances from a heated metal". *Opt. Lett.* *26*, 479.
- Matloob R. et Falinejad H. (2001). Casimir force between two dielectric slabs. *Phys. Rev. A* *64*, 042102 (11 pages).
- Maystre D. (1984). Rigorous vector theories of diffraction gratings. In E. Wolf (Éd.), *Progress in Optics*, Volume XXI. Amsterdam: North Holland.
- Meyzonnette J.-L. et Lépine T. (1997). Radiophotométrie. Cours de l'École Supérieure d'Optique.
- Meyzonnette J.-L. et Lépine T. (2001). *Bases de radiométrie optique* (2<sup>ème</sup> éd.), Toulouse: Cépaduès Éditions.
- Milonni P. W. (1993). *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press.
- Mohideen U. et Roy A. (1998). Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$ . *Phys. Rev. Lett.* *81*, 4549–4552.
- Mohideen U. et Roy A. (1999). Reply to comment on "Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$ ". *Phys. Rev. Lett.* *83*, 3341.
- Mostepanenko V. M. et Trunov N. N. (1997). *The Casimir effect and its applications*. Oxford: Clarendon Press.
- Mulet J.-P., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2000). Enhanced radiative heat transfer at nanometric distances. In G. P. Celata (Éd.), *Heat Transfer and Transport Phenomena in Microsystems*, New York, pp. 352–357. Begell House.
- Mulet J.-P., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2001a). Comment on "Radiative transfer over small distances from a heated metal". *Opt. Lett.* *26*, 480–481.
- Mulet J.-P., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2001b). Nanoscale radiative heat transfer between a small particle and a plane surface. *Appl. Phys. Lett.* *78*, 2931–2933.
- Mulet J.-P., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2002b). Enhanced radiative heat transfer at nanometric distances. *Microscale Thermophys. Eng.* *6*, 209–222.
- Mulet J.-P., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2002a). Transfert radiatif entre une petite particule et un diélectrique: application au chauffage local. *J. Phys. IV* *12*, 291–292.
- Nieto-Vesperinas M. (1991). *Scattering and diffraction in physical optics*. New York: Wiley.
- Nisoli M., Stagira S., De Silvestri S., Stella A., Tognini P., Cheyssac P., et Kofman R. (1997). Ultrafast Electronic Dynamics in Solid and Liquid Gallium Nanoparticles. *Phys. Rev. Lett.* *78*, 3575–3578.

- Novotny L. (1996). Single molecule fluorescence in inhomogeneous environments. *Appl. Phys. Lett.* *69*, 3806–3808.
- Nyquist H. (1928). Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* *32*, 110–113.
- Olivei A. (1968). Transfert d'énergie thermique rayonnante entre deux diélectriques aux très basses températures. *Revue de Physique Appliquée* *3*, 225–230.
- Ordal M. A., Bell R. J., Alexander R. W. J., Long L. L., et Querry M. R. (1985). Optical properties of fourteen metals in the infrared and far infrared: Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Mo, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, V, and W. *Appl. Opt.* *24*, 4493–4499.
- Ordal M. A., Long L. L., Bell R. J., Bell S. E., Bell R. R., Alexander R. W. J., et Ward C. A. (1983). Optical properties of the metals Al, Co, Cu, Au, Fe, Pb, Ni, Pd, Pt, Ag, Ti, and W in the infrared and far infrared. *Appl. Opt.* *22*, 1099–1119.
- Otto A. (1971). Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection. *Z. Phys.* *241*, 313–324.
- Overbeek J. T. G. et Sparnaay M. J. (1951). In *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.*, Volume 54, pp. 387.
- Palik E. D. (Éd.) (1985). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 1. San Diego, CA: Academic Press.
- Palik E. D. (Éd.) (1991). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 2. San Diego, CA: Academic Press.
- Palik E. D. (Éd.) (1998). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 3. San Diego, CA: Academic Press.
- Pan J. L. (2000). Radiative transfer over small distances from a heated metal. *Opt. Lett.* *25*, 369–371.
- Pan J. L. (2001). Reply to comments on "Radiative transfer over small distances from a heated metal". *Opt. Lett.* *26*, 482–484.
- Pendry J. B. (1999). Radiative exchange of heat between nanostructures. *J. Phys.: Condens. Matter* *11*, 6621–6633.
- Petit R. (1980). *Electromagnetic theory of gratings*. New York: Springer Verlag.
- Phillipp H. R. (1985). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 1, pp. 749–763. San Diego, CA: Academic Press.
- Pincemin F., Maradudin A. A., Boardman A. D., et Greffet J.-J. (1994). Scattering of a surface plasmon polariton by a surface defect. *Phys. Rev. B* *50*, 15261–15275.
- Pincemin F., Sentenac A., et Greffet J.-J. (1994). Near field scattered by a dielectric rod below a metallic surface. *J. Opt. Soc. Am. A* *11*, 1117–1127.
- Planck M. (1901). *Annalen der Physik* *4*, 553–563.
- Plunien G., Müller B., et Greiner W. (1986). The Casimir effect. *Phys. Rep.* *134*, 87–193.
- Pohl D. W. et Courjon D. (Éds.) (1993). *Near-field optics*. Dordrecht: Kluwer.
- Polder D. et van Hove M. (1971). Theory of radiative heat transfer between closely spaced bodies. *Phys. Rev. B* *4*, 3303–3314.
- Porto J. A., Carminati R., et Greffet J.-J. (2000). Theory of electromagnetic field imaging and spectroscopy in scanning near-field optical microscopy. *J. Appl. Phys.* *88*, 4845–4850.
- Raether H. (1988). *Surface plasmons*. Berlin: Springer Verlag.
- Réfrégier P. (1993). *Théorie du signal: signal, information, fluctuations*. Paris: Masson.

- Rytov S. M. (1958a). Correlation theory for Rayleigh scattering of light I. *Sov. Phys. JETP* 6, 401.
- Rytov S. M. (1958b). Correlation theory for Rayleigh scattering of light II. *Sov. Phys. JETP* 6, 513.
- Rytov S. M. (1958c). Correlation theory of thermal fluctuations in an isotropic medium. *Sov. Phys. JETP* 6, 130.
- Rytov S. M., Kravtsov Y. A., et Tatarskii V. I. (1989). *Principles of Statistical Radiophysics*, Volume 3. Berlin: Springer Verlag.
- Schram K. (1973). On the macroscopic theory of retarded van der Waals forces. *Phys. Lett.* 43A, 282–284.
- Schwinger J., De Raad L. L., et Milton K. A. (1978). Casimir effects in dielectrics. *Annals of Physics* 115, 1–23.
- Sentenac A. (1993). *Étude de la diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Application à la conception de surfaces sélectives*. Thèse de Doctorat, École Centrale Paris.
- Sentenac A. et Greffet J.-J. (1992). Scattering by deep inhomogeneous gratings. *J. Opt. Soc. Am. A* 9, 996–1006.
- Sentenac A. et Greffet J.-J. (1994). Design of surface microrelief with selective radiative properties. *Int. J. Heat and Mass Transf.* 37, 553–558.
- Shchegrov A. V., Joulain K., Carminati R., et Greffet J.-J. (2000). Near-field spectral effects due to electromagnetic surface excitations. *Phys. Rev. Lett.* 85, 1548–1551.
- Sipe J. E. (1987). New Green-function formalism for surface optics. *J. Opt. Soc. Am. B* 4, 481–489.
- Smith D. Y. (1985). *Handbook of optical constants of solids*, Volume 1, Chapitre 3, pp. 35–68. San Diego, CA: Academic Press.
- Sparnaay M. (1957). *Nature* 180, 334.
- Sparnaay M. (1958). *Physica* 24, 751.
- Srivastava G. P. (1990). *The physics of phonons*. Bristol: IOP Publishing.
- Stella A., Nisoli M., De Silvestri S., Svelto O., Lanzani G., Cheyssac P., et Kofman R. (1996). Size effects in the ultrafast electronic dynamics of metallic tin nanoparticles. *Phys. Rev. B* 53, 15497–15500.
- Stratton J. A. (1941). *Electromagnetic theory*. New York: McGraw-Hill.
- Svetovoy V. B. et Lokhanin M. V. (2001). Linear temperature correction to the Casimir force. *Phys. Lett. A* 280, 177–181.
- Sze S. M. et Irvin J. C. (1968). Resistivity, mobility and impurity levels in GaAs, Ge, and Si at 300 K. *Solid-State Electron.* 11, 599–602.
- Taine J. et Petit J.-P. (1994). *Transferts thermiques : cours et données de base* (2<sup>ème</sup> éd.),. Paris: Dunod.
- Tuntomo A. et Tien C. L. (1992). Transient heat transfer in a conducting Particle with internal radiant absorption. *J. Heat Transfer* 114, 304–309.
- van der Waals J. D. (1873). *Akademisch Proefschrift Leiden*.
- Verwey E. J. W. (1947). *J. Phys. and Colloid Chem.* 51, 631.
- Verwey E. J. W. et Overbeek J. T. G. (1948). *Theory of the stability of lyophobic colloids*. Amsterdam: Elsevier.

- van Kampen N. G., Nijboer B. R. A., et Schram K. (1968). On the macroscopic theory of van der Waals forces. *Phys. Lett.* *26A*, 307–308.
- Voisin C. (2001). *Étude femtoseconde de la dynamique électronique et vibrationnelle dans des nanoparticules métalliques*. Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud XI.
- Voisin C., Christofilos D., Del Fatti N., Vallée F., Prével B., Cottancin E., Lermé J., Pellarin M., et Broyer M. (2000). Size-dependent electron-electron interactions in metal nanoparticles. *Phys. Rev. Lett.* *85*, 2200–2203.
- Voisin C., Del Fatti N., Christofilos D., et Vallée F. (2001). Ultrafast electron dynamics and optical nonlinearities in metal nanoparticles. *J. Phys. Chem B* *105*, 2264–2280.
- Volokitin A. I. et Persson B. N. J. (2001). Radiative heat transfer between nanostructures. *Phys. Rev. B* *63*, 205404 (11 pages).
- Volz S. (2001). Thermal insulating behaviour in crystals at high frequencies. *Phys. Rev. Lett.* *87*, 074301–074304.
- Volz S. et Lemonnier D. (2000). Confined phonon and size effects on nanowire thermal conductivity. The radiative transfer approach. *Phys. of Low-Dimensional Struct.* *5-6*, 91.
- Wang T. K. et Zemel J. N. (1991). Polarized spectral emittance from periodic micromachined surfaces. III. Undoped silicon: the normal direction in shallow lamellar gratings. *Infrared Phys.* *32*, 477–488.
- Wang T. K. et Zemel J. N. (1992). Polarized spectral emittance from periodic micromachined surfaces. IV. Undoped silicon: normal direction in deep lamellar gratings. *Appl. Opt.* *31*, 732–736.
- Whale M. M. (2000). Optimization of the spacing effects of thermal radiation for microscale thermophovoltaic devices. In G. P. Celata (Éd.), *Heat Transfer and Transport Phenomena in Microsystems*, New York, pp. 339–346. Begell House.
- Williams C. C. et Wickramasinghe K. (1986). Scanning thermal profiler. *Appl. Phys. Lett.* *49*, 1587–1589.
- Wolf E. (1986). Invariance of the spectrum of light on propagation. *Phys. Rev. Lett.* *56*, 1370–1372.
- Xu J. (1993). *Heat transfer between metallic surfaces at small distance*. Thèse de Doctorat, University of Konstanz.
- Zhou F. et Spruch L. (1995). van der Waals and retardation (Casimir) interactions of an electron or an atom with multilayered walls. *Phys. Rev. A* *52*, 297–310.
- Ziman J. M. (1960). *Electrons and phonons*. Oxford: Oxford University Press.