



**HAL**  
open science

# Écoulements granulaires bidisperses sur plans inclinés rugueux

Celine Goujon

► **To cite this version:**

Celine Goujon. Écoulements granulaires bidisperses sur plans inclinés rugueux. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2004. Français. NNT: . tel-00008984

**HAL Id: tel-00008984**

**<https://theses.hal.science/tel-00008984>**

Submitted on 8 Apr 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
Ecole Polytechnique Universitaire de Marseille  
IUSTI UMR CNRS 6595

**THÈSE DE DOCTORAT**

*présentée par*

**Céline GOUJON**

*pour obtenir le grade de*

**Docteur de l'Université de Provence**

Ecole doctorale Mécanique, Physique et Modélisation

*intitulée*

**Écoulements granulaires  
bidisperses sur  
plans inclinés rugueux**

Soutenue le 16 décembre 2004 devant le jury composé de :

H. Berthiaux	Invité
D. Bideau	Examineur
F. Chevoir	Rapporteur
B. Dalloz-Dubrujeaud	Directrice de thèse
P. Gondret	Rapporteur
R. Saurel	Examineur
N. Thomas	Directrice de thèse



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Etat des connaissances</b>	<b>3</b>
2.1	Géométries d'écoulement . . . . .	3
2.2	Écoulements denses . . . . .	4
2.2.1	Diagramme de phase $(h, \theta)$ pour les écoulements granulaires	5
2.2.2	Equations moyennées dans l'épaisseur . . . . .	6
2.2.3	Loi de friction . . . . .	8
2.2.4	Rhéologie locale des écoulements granulaires . . . . .	10
2.3	Ségrégation . . . . .	12
2.3.1	Ségrégation sous vibration . . . . .	13
2.3.2	Ségrégation sur plans inclinés . . . . .	13
2.3.3	Ségrégation en tambour . . . . .	15
2.4	Influence de la rugosité du plan . . . . .	16
2.4.1	Écoulements denses . . . . .	16
2.4.2	Écoulement d'une bille sur un plan rugueux . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Configuration Expérimentale</b>	<b>25</b>
3.1	Plans inclinés rugueux. . . . .	25
3.2	Matériau granulaire utilisé pour les écoulements . . . . .	27
3.3	Mesures des épaisseur, vitesse, longueur et largeur des écoulements.	30
3.3.1	Mesure d'épaisseur . . . . .	30
3.3.2	Mesure de vitesse . . . . .	31
3.3.3	Mesure de la longueur et de la largeur du dépôt . . . . .	31
<b>I</b>	<b>Influence du plan rugueux pour des écoulements monodisperses</b>	<b>35</b>
<b>4</b>	<b>Existence d'un maximum de friction</b>	<b>39</b>
4.1	Résultats expérimentaux sur le plan de $425 \mu m$ . . . . .	39
4.1.1	Etude de la longueur des lâchers . . . . .	39
4.1.2	Etude de la vitesse . . . . .	40

4.1.3	Etude de $h_{stop}$ . . . . .	41
4.2	Résultats expérimentaux sur les autres plans . . . . .	41
4.2.1	$d_c$ fonction linéaire de $\lambda$ ? . . . . .	43
4.3	Interprétation . . . . .	44
4.4	Interprétation en termes de friction . . . . .	46
4.5	Résultats expérimentaux sur les autres plans . . . . .	48
4.5.1	Remplissage des trous du plan . . . . .	48
4.5.2	Remarque : influence de la sphéricité des particules . . . . .	51
4.6	Conclusion . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Modèle de stabilité d'une bille sur le plan</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Angle minimal de stabilité . . . . .	55
5.1.1	Courbes de $h_{stop}$ et $\theta_2$ . . . . .	55
5.1.2	$\theta_2$ présente un extremum pour le maximum de friction . . . . .	56
5.1.3	Bases du modèle . . . . .	57
5.2	Présentation du modèle à deux dimensions . . . . .	58
5.2.1	Choix de la bille . . . . .	59
5.2.2	Critère de stabilité . . . . .	59
5.3	Présentation du modèle à trois dimensions . . . . .	60
5.3.1	Choix de la bille . . . . .	61
5.3.2	Critère de stabilité . . . . .	63
5.3.3	Calculs de l'angle de stabilité . . . . .	63
5.4	Comparaison modèle-expérience . . . . .	66
5.4.1	Comportement global . . . . .	66
5.5	Friction . . . . .	70
5.6	Conclusion . . . . .	71
<b>II</b>	<b>Ecoulements granulaires bidisperses</b> . . . . .	<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Écoulements bidisperses sur plans inclinés rugueux</b> . . . . .	<b>75</b>
6.1	Observations préliminaires . . . . .	75
6.1.1	Des morphologies variées . . . . .	76
6.1.2	Ségrégation : deux conséquences . . . . .	76
6.2	Configuration expérimentale . . . . .	80
6.2.1	Système expérimental . . . . .	80
6.2.2	État de référence . . . . .	81
6.3	Différents régimes . . . . .	83
6.3.1	$d_p < d_c$ et $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ . . . . .	83
6.3.2	$d_p < d_c$ et $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$ . . . . .	89
6.3.3	$d_c < d_p < d_g$ . . . . .	94
6.3.4	Conclusion . . . . .	97
6.4	Mécanismes . . . . .	97

---

6.4.1	Effet de ligne . . . . .	97
6.4.2	Effet d'interfaces . . . . .	103
6.5	Conclusion . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Entraînement</b> . . . . .	<b>111</b>
7.1	Conditions expérimentales pour lesquelles seul l'entraînement intervient . . . . .	111
7.2	Lâcher d'une masse constante de matériau granulaire . . . . .	112
7.3	Écoulements stationnaires . . . . .	115
7.3.1	Conditions d'écoulements stationnaires . . . . .	115
7.3.2	Vitesses des écoulements . . . . .	116
7.3.3	Épaisseurs des dépôts . . . . .	117
7.4	Conclusion . . . . .	119
7.5	Entraînement par érosion . . . . .	119
7.6	Entraînement par accélération de la couche de petites billes . . . . .	121
7.6.1	Interprétation en termes de friction . . . . .	126
7.7	Conclusion . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b> . . . . .	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Appendices</b> . . . . .	<b>133</b>
A.1	Fabrication des plans rugueux . . . . .	133
A.2	Tri des billes par sphéricité . . . . .	134
A.2.1	Principe et Dispositif Expérimental . . . . .	134
A.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	136
A.3	Copie de l'article . . . . .	137

# Chapitre 1

## Introduction

La matière en grains nous est familière et abonde autour de nous. Pourtant, la physique des milieux granulaires est encore mal comprise. Ces matériaux présentent en effet une variété de comportements et de propriétés exceptionnelles. Assez solides pour soutenir le poids d'un immeuble, ils peuvent aussi s'envoler par une brise légère pour former des dunes ou couler comme de l'eau dans un sablier. La compréhension des milieux granulaires, et en particulier de leurs propriétés d'écoulements, est d'autant plus importante qu'ils interviennent dans de nombreux domaines. De façon générale, les milieux granulaires sont au centre de nombreuses activités industrielles : génie civil (bétons, stabilité des sols), agro-alimentaire (stockage et transport des céréales), pharmaceutique (médicaments, cosmétiques) ou génie chimique. L'autre grand domaine d'application des milieux granulaires est la géophysique. La nature offre en effet des exemples spectaculaires de phénomènes et de structures où intervient la matière en grains : dunes de sable, avalanches de roches lors d'éruptions volcaniques, glissements de terrain.

Quand on aborde les écoulements granulaires dit bidisperses, c'est-à-dire composés de deux tailles de particules, plusieurs points viennent tout de suite à l'esprit. D'abord, malgré la complexité du système, on a le désir de replacer leur comportement dans un cadre "connu", ou tout du moins commun avec les écoulements granulaires monodisperses en taille. On pense alors à chercher des lois générales pour la friction du matériau qui prendront en compte leur caractère bidisperse. Mais, ce qui frappe tout de suite, c'est qu'un matériau bidisperse est essentiellement un matériau qui ne reste pas homogène lors de l'écoulement. Cette inhomogénéité pose un réel problème pour une modélisation globale, qui ne nécessiterait pas de détailler et de modéliser chaque interaction de chaque type de particules. En effet, comment dans ce cas, définir des grandeurs locales, caractéristiques du matériau ? De plus, la géométrie de cet état ségrégué évolue dans le temps, avec des effets qui sont réellement en trois dimensions. Par exemple, on constate que les grandes particules ayant ségrégué en surface, vont migrer au front de l'écoulement plus vite que les petites, vont être éventuellement recyclées dans l'écoulement, ou s'accumuler dans les bordures latérales.... D'un état

seulement stratifié verticalement, on obtient rapidement une non homogénéité dans les trois directions de l'espace. Comment donc définir une rhéologie d'un matériau inhomogène, et dont le caractère inhomogène évolue dans le temps, et dépend probablement du type d'écoulement ? On pourrait même se demander si cela a un sens d'essayer de replacer dans un cadre général la dynamique de ces matériaux, qu'on pourra difficilement dissocier de la géométrie de l'écoulement. Pourtant les écoulements bidisperses ou polydisperses méritent qu'on s'intéresse à eux. Certaines observations sont surprenantes, comme ces écoulements naturels (glissements de terrain, avalanches, écoulements de ponces) qui s'écoulent sur des pentes très faibles, et se propagent beaucoup plus loin que ne le laisseraient attendre les lois établies pour les écoulements granulaires. Evidemment, la polydispersité du matériau n'est pas la seule différence entre un système naturel et un écoulement fait en laboratoire, mais elle part comme le candidat favori pour expliquer cette grande mobilité des écoulements naturels. On s'attend à ce que de nombreux effets, qu'on ne sait pas actuellement modéliser, interviennent dans la dynamique d'un écoulement bidisperse : interactions entre les deux types de particules, interaction avec le substrat... On voit alors la nécessité de revenir dans un premier temps à des grandeurs macroscopiques (longueur d'un écoulement par exemple) pour définir une dynamique, vu l'impossibilité de définir immédiatement des grandeurs locales rhéologiques (équivalentes à une viscosité par exemple) ou de modéliser une par une toutes les interactions. C'est la démarche qu'on a choisie de suivre dans cette thèse. Bien sûr, les questions sous-jacentes auxquelles on aimerait répondre malgré le caractère fondamentalement exploratoire de cette étude, sont les suivantes. Une loi rhéologique existe-t-elle pour ces matériaux alors qu'on est en présence d'effets à trois dimensions, profondément inhomogènes, dépendants de la géométrie de l'écoulement ? Quel est l'importance des conditions aux limites (substrat) ? Quelle est l'influence entre la ségrégation mise en place lors de l'écoulement et la dynamique de ce même écoulement ? Cette influence est-elle purement la conséquence d'une organisation spatiale des différentes espèces, ou la mise en place de cet état ségrégué impose-t-elle une modification profonde de la dynamique de l'écoulement ? Comment aborder l'étude générale de la dynamique des matériaux bidisperses au-delà de l'étude d'un type particulier d'écoulement bidisperse ?



# Chapitre 2

## Etat des connaissances

Beaucoup d'écoulements naturels et industriels ne se propagent pas sur des rugosités composées de particules de la même taille que celles de l'écoulement. D'ailleurs, ces écoulements sont souvent polydisperses en taille. Par exemple, les événements géophysiques font intervenir des matériaux granulaires complexes faits de particules de tailles variables (du micron au mètre) et souvent mélangés avec des fluides. Pour de tels matériaux polydisperses, il est bien connu que la ségrégation a lieu, et que les grosses particules sont à la surface libre de l'écoulement et au front [16, 20, 54]. Notre étude portant sur les écoulements polydisperses sur plans inclinés rugueux, trois sujets vont nous intéresser :

- les écoulements sur plans inclinés,
- la ségrégation,
- les effets de la rugosité du plan.

Ce premier chapitre a pour objet de donner quelques informations générales sur les matériaux granulaires utiles pour l'étude des écoulements de matériaux granulaires polydisperses sur plans inclinés rugueux.

### 2.1 Géométries d'écoulement

Les écoulements granulaires denses ont été étudiés largement dans six configurations où se produit un cisaillement simple, les propriétés rhéologiques pouvant être mesurées. Ces différentes géométries peuvent être séparées en deux familles : les écoulements confinés, et les écoulements à surface libre.

Les écoulements confinés sont le cisaillement plan (fig.2.1(a)) où le cisaillement est dû au mouvement d'une paroi ; le cisaillement annulaire (fig.2.1(b)), dans lequel le matériau, confiné entre deux cylindres, est cisailé par la mise en rotation du cylindre intérieur et l'écoulement en conduite verticale (fig.2.1(c)), dans laquelle le matériau s'écoule par gravité entre deux plaques rugueuses verticales. Les écoulements à surface libre sont les écoulements sur plan incliné rugueux (fig.2.1(d)), les écoulements sur fond meuble (fig.2.1(e)) et les écoulements en

tambour tournant (fig.2.1(f)). Dans la suite, nous nous intéresserons principale-

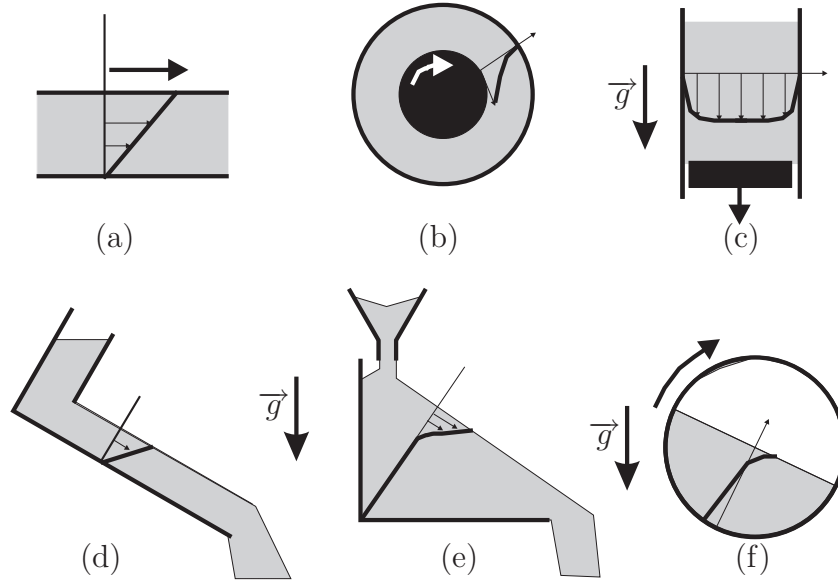


FIG. 2.1 – Six géométries d’écoulement : (a) le cisaillement plan, (b) le cisaillement annulaire, (c) la conduite verticale, (d) le plan incliné, (e) le socle meuble, (f) le tambour tournant. Seuls les écoulements sur plans inclinés seront étudiés dans les chapitres suivants (figure extraite de [22])

ment aux écoulements à surface libre et à bords libres sur plans inclinés. Cependant différents comportements ont été observés dans plusieurs configurations que nous évoquerons dans cette première partie.

## 2.2 Ecoulements denses

Le régime d’écoulement dense fait l’objet, à l’heure actuelle, de nombreuses recherches, mais les équations constitutives ne sont pas encore établies [45, 48, 22]. Des approches hydrodynamiques proposées récemment permettent toutefois de décrire certaines configurations. La configuration que nous allons discuter est l’écoulement d’un matériau granulaire sur un plan incliné présentée sur la figure 2.2 : le milieu s’écoule sous l’effet de la gravité sur une pente rigide plus ou moins rugueuse. Cette configuration préfigure des situations géophysiques d’éboulements de terrain.

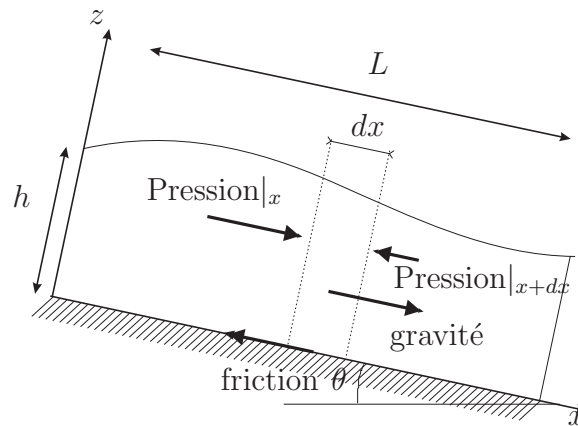


FIG. 2.2 – Les équations moyennées dans l'épaisseur reviennent à écrire la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour une tranche élémentaire verticale du matériau

### 2.2.1 Diagramme de phase $(h, \theta)$ pour les écoulements granulaires

Une revue détaillée des études expérimentales et numériques pourra être consultée dans [6, 48]. En outre, des études numériques récentes ont été effectuées par Ertas et Silbert [62, 63, 64, 65, 18] (systèmes de l'ordre de 10000 sphères élastiques en 2D ou 3D) et par Pronchow [48] (systèmes de l'ordre de 5000 disques rigides en 2D).

Soit une couche de grains d'épaisseur  $h$  stable sur le plan, l'angle d'inclinaison du plan est noté  $\theta$ . Si on augmente l'angle d'inclinaison du plan, la couche de grains va se déstabiliser et s'écouler sur le plan incliné. L'angle pour lequel la couche d'épaisseur  $h$  se déstabilise est noté  $\theta_{start}$ . Lorsque l'écoulement s'arrête, il reste, sur le plan rugueux, une couche de grains d'épaisseur  $h_{stop}$ . Cette couche est stable : en effet, si on perturbe cette couche de grains, elle restera immobile. A partir de ces considérations il est possible de tracer la courbe  $\theta_{start}(h)$ , mais aussi  $h_{start}(\theta)$  : cette courbe représente pour un angle d'inclinaison du plan  $\theta$ , l'épaisseur de la couche de grains  $h_{start}$  qui se déstabilisera. Il est aussi possible de déterminer la courbe  $h_{stop}(\theta)$  [41, 44, 12] : cette courbe représente l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt laissé après un écoulement pour un angle d'inclinaison donné. Ces courbes permettent de séparer l'espace des paramètres  $(h, \theta)$  en trois régimes (fig. 2.3) :

- une région où l'écoulement stationnaire uniforme est impossible  $h < h_{stop}$  ;
- une région métastable où il peut exister à la fois une couche en écoulement et une couche statique  $h_{stop} < h < h_{start}$  ;
- une région instable où l'écoulement est obligatoire  $h > h_{start}$ .

A partir des courbes de  $h_{stop}(\theta)$ , il est possible de déterminer deux angles

d'inclinaison  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Ces angles sont définis par :

- pour  $\theta = \theta_1$ ,  $h_{stop} \rightarrow \infty$ ,
- pour  $\theta = \theta_2$ ,  $h_{stop} = 0$ .

Pour des angles d'inclinaison inférieurs à  $\theta_1$  aucun écoulement stationnaire uniforme n'est possible.

Dans les conditions métastables ou instables, l'écoulement est stationnaire et uniforme pour des inclinaisons modérées et il devient accéléré pour des inclinaisons plus importantes.

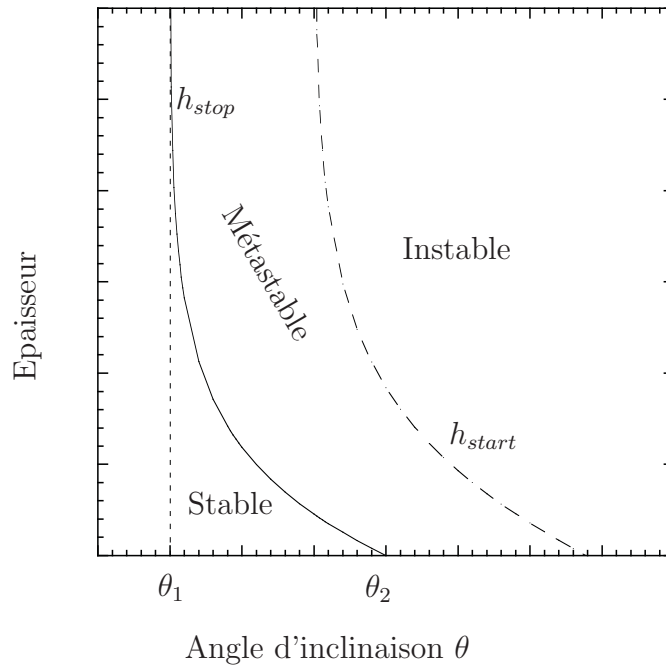


FIG. 2.3 – Épaisseur d'arrêt  $h_{stop}$  (en trait plein) et de démarrage  $h_{start}$  (en pointillé) en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ .

### 2.2.2 Equations moyennées dans l'épaisseur

Une approche hydrodynamique des écoulements granulaires sur plan rigide a été proposée en 1989 par Savage et Hutter [58] s'inspirant des équations de St Venant pour les couches minces. Elle repose sur l'hypothèse que la couche qui coule est fine devant les longueurs caractéristiques de l'écoulement. C'est le cas dans de nombreux écoulements géophysiques où une couche de matériaux de quelques dizaines de mètres s'écoule sur des kilomètres. La configuration typique que nous allons étudier est celle de la figure 2.2. Une couche coule sur une pente inclinée à un angle  $\theta$ . L'idée des équations de St Venant est de tirer profit de l'hypothèse de couche mince pour négliger les variations des paramètres selon  $z$  par rapport

aux variations des paramètres selon  $x$ , et essayer de décrire l'écoulement par son épaisseur locale  $h(x, t)$  et sa vitesse moyenne selon  $x$ .

Pour obtenir les équations moyennées dans l'épaisseur ou équations de St Venant, la première hypothèse consiste à considérer le matériau comme un milieu fluide incompressible. L'incompressibilité est justifiée pour les écoulements granulaires denses car leur fraction volumique varie peu, entre 0,5 et 0,6. Avec cette hypothèse, il est possible d'écrire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Considérons le cas de l'écoulement sur une pente  $\theta$  (figure 2.2) d'un matériau de densité  $\rho$  ayant une vitesse  $\vec{u} = u(x, z, t)\vec{e}_x + v(x, z, t)\vec{e}_z$ . La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

Les équations de la quantité de mouvement s'écrivent, en termes du tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g \sin \theta - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (2.3)$$

L'obtention des équations moyennées s'effectue en tirant partie de l'hypothèse de couche mince pour négliger des termes dans les équations précédentes et en intégrant les équations suivant  $z$ . Le calcul est fait en détail dans l'article de Savage et Hutter [58] et nous ne le détaillerons pas. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement moyennées dans l'épaisseur s'écrivent donc :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + a \frac{\partial h\bar{u}^2}{\partial x} \right) = \rho g \cos \theta \left( \tan \theta - \frac{\tau}{\rho g h \cos \theta} - k \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (2.5)$$

On peut cependant faire quelques remarques concernant ces équations. Il faut garder à l'esprit les hypothèses utilisées pour écrire ces équations : l'hypothèse de couche mince, c'est à dire  $\frac{\partial h}{\partial x} \ll 1$ , l'hypothèse de profil de vitesse établi dans l'épaisseur et relié à  $a$  (ce coefficient  $a$  dépend du profil de vitesse supposé dans la couche en écoulement, pour un profil de vitesse linéaire  $a = 4/3$ ) et la proportionnalité entre les contraintes normales selon  $x$  et  $z$  reliées par le paramètre  $k$ . Il faut aussi noter que les variations temporelles doivent être lentes. Une seconde remarque concerne le terme de gradient d'épaisseur. Ce terme est a priori négligeable, mais pour décrire les écoulements granulaires, seul ce terme peut régulariser la surface. Dans l'équation 2.5, l'accélération est compensée par une force de gravité, une force de friction à la base de l'écoulement et une force

d'étalement. En écrivant ces équations, nous nous sommes affranchis de la description précise du comportement du matériau dans la couche. La rhéologie du matériau est comprise dans le terme d'interface  $\tau$  qui décrit la contrainte qui s'exerce à l'interface entre la couche qui coule et le fond rigide.

### 2.2.3 Loi de friction

Pour un milieu granulaire, nous ne savons pas quelle est la rhéologie dans le régime dense. Savage et Hutter [58] ont proposé de choisir pour la contrainte  $\tau$  à l'interface entre la couche qui coule et le fond rugueux, une loi de friction, c'est à dire une contrainte tangentielle proportionnelle à la contrainte normale :

$$\tau = \mu \rho g h \cos \theta \quad (2.6)$$

où  $\mu$  est le coefficient de friction.

Ce choix a été motivé par des expériences en cellule de cisaillement qui montrent que le rapport forces tangentielles sur forces normales varie peu avec la vitesse de cisaillement [58]. Les premières tentatives d'application du modèle ont donc été faites avec un coefficient de friction  $\mu$  constant. Savage et Hutter ont réalisé des expériences consistant à lâcher une masse de sable sur un plan incliné rugueux et à suivre son étalement et sa propagation jusqu'à l'arrêt. Le modèle des équations moyennées dans l'épaisseur permet de rendre compte quantitativement de ce mouvement. D'autres expériences à trois dimensions et sur des profils plus complexes ont été réalisées et montrent la pertinence de cette approche [24, 23]. Cependant le choix d'un coefficient constant dans la loi (2.6) reste une approximation grossière. Elle semble suffisante pour décrire des écoulements sur des fonds peu rugueux et très inclinés [58, 23] mais échoue dès que la rugosité devient de l'ordre de la taille des grains qui coulent. En effet, dans ces conditions, les expériences montrent qu'il existe une gamme d'inclinaisons de l'ordre de 10-12 ° pour lesquels on observe des écoulements stationnaires uniformes [12, 41, 44]. Or d'après les équations (2.5 et 2.6), un écoulement stationnaire et uniforme vérifie la relation :

$$\tan \theta = \mu \quad (2.7)$$

Donc si  $\mu$  était constant, il n'existerait qu'un seul angle d'inclinaison où les écoulements stationnaires uniformes seraient observés, ce qui est en contradiction avec les observations expérimentales [12, 41, 44]. Des études sont donc menées actuellement pour proposer des lois de friction plus réalistes et plus complexes où le coefficient de friction devient une fonction de l'épaisseur et de la vitesse locale  $\mu(u, h)$  [41, 44].

D'une manière générale, on définit le coefficient de friction  $\mu$  dans un matériau granulaire comme étant le rapport des contraintes tangentielles ( $\tau$ ) sur les contraintes normales ( $P$ ) :

$$\mu = \frac{\tau}{P} \quad (2.8)$$

La variation du coefficient de friction  $\mu$  avec le taux de cisaillement nous renseigne sur la loi de comportement du milieu granulaire.

Dans le régime d'écoulement stationnaire uniforme, si l'on suppose un régime dense, les équations permettent de prédire le profil de vitesse. A compacité constante, la pression de la couche de grains est proportionnelle à  $h - z$ , on a alors :

$$\frac{du}{dz} \sim \sqrt{h - z} \quad (2.9)$$

ce qui donne un profil de vitesse variant en  $z^{3/2}$ , de type Bagnold. Les simulations numériques [48, 62, 25] indiquent que le profil de vitesse est effectivement de ce type :

$$\frac{u(z)}{\sqrt{gd}} = A(\theta) \frac{h^{3/2} - (h - z)^{3/2}}{d^{3/2}} \quad (2.10)$$

où

- $g$  : la constante gravitationnelle  $g=9,81 \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$
- $d$  : le diamètre des billes ( $m$ )
- $h$  : l'épaisseur de la couche en écoulement ( $m$ )

mais le préfacteur  $A(\theta)$  met en évidence un effet de seuil.

Les mesures expérimentales systématiques de la vitesse moyenne  $u = \langle u(z) \rangle$  ont permis de mettre en évidence une loi d'échelle entre le nombre de Froude  $\left(\frac{u}{\sqrt{gh}}\right)$  et la hauteur de l'écoulement  $h$  adimensionnée par  $h_{stop}$  [48, 65, 41] :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \alpha + \beta \frac{h}{h_{stop}(\theta)} \quad (2.11)$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent des caractéristiques du système. Notons que pour les billes de verre  $\alpha = 0$  (fig.2.4) [41].

Etant donné que  $\tan\theta = \mu$  (eq 2.7), le coefficient de friction est obtenu en remplaçant  $\theta$  dans l'équation (2.11) et en inversant la relation [41, 44]. Il est alors possible de mesurer le coefficient de friction en fonction du nombre de Froude. Toutefois, étant donné que la loi d'échelle précédente prédit une vitesse non nulle pour  $h = h_{stop}$ , la mesure ne peut se faire pour  $Fr < \beta$ . Il faut alors proposer un raccordement [42]. Pour une hauteur donnée, le coefficient de friction  $\mu$  augmente avec la vitesse et tend vers une limite finie,  $\tan\theta_2$ , aux grandes vitesses, qui est indépendante de l'épaisseur  $h$ . Pour une vitesse donnée, le coefficient de friction  $\mu$  est une fonction décroissante de l'épaisseur. Cette loi de friction (fig. 2.5) appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord l'existence d'une limite supérieure aux fortes vitesses pour la friction implique qu'il n'existe pas d'écoulement stationnaire uniforme pour des angles d'inclinaison supérieurs à  $\theta_2$ . Ce résultat est compatible avec l'observation d'écoulements accélérés pour des grands angles d'inclinaison [28]. De plus, la loi de friction, qui décrit l'interaction entre la couche de

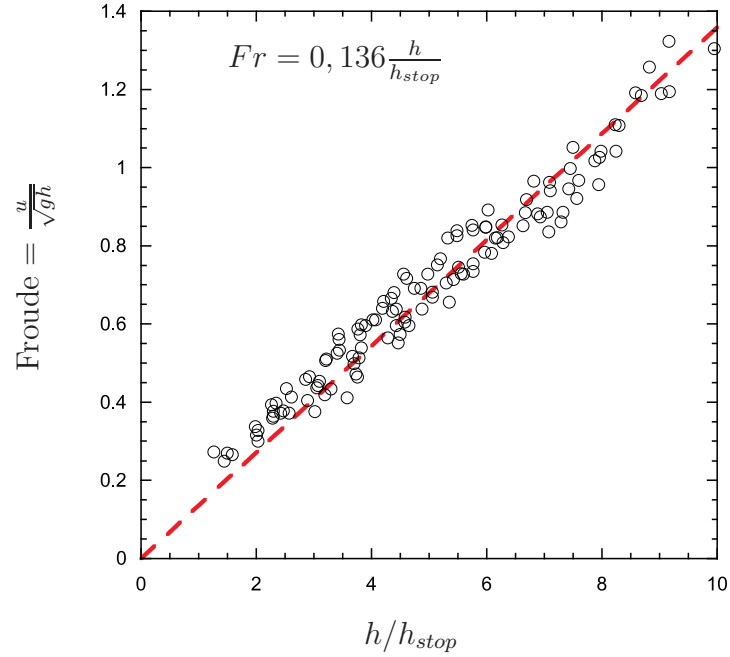


FIG. 2.4 – Nombre de Froude  $Fr$  en fonction du rapport  $h/h_{stop}$  pour des billes de verre, figure tirée de [41]

matériau granulaire et le fond rugueux, est entièrement déterminée par la mesure des dépôts aux différents angles d'inclinaison  $h_{stop}(\theta)$ . Il a été possible de prédire quantitativement à partir de cette loi de friction, la forme stationnaire des fronts d'écoulement le long du plan [42] ainsi que l'étalement d'une masse granulaire sur une pente rugueuse du démarrage jusqu'à l'arrêt [44].

### 2.2.4 Rhéologie locale des écoulements granulaires

Dans cette partie, nous présentons les résultats tirés de [22]. Dans le cas d'écoulements granulaires simplement cisailés (fig.2.6), en faisant les hypothèses que les particules sont rigides et l'hypothèse de localité, c'est-à-dire que  $\tau(z) = \dot{\gamma}(z)$  les paramètres du cisaillement simple sont :

- $\tau$  : la contrainte de cisaillement,
- $P$  : la pression de confinement,
- $\dot{\gamma}$  : le taux de cisaillement,
- $d$  : le diamètre des particules,
- $\rho$  : la masse volumique des particules.

Les paramètres d'une expérience en cisaillement simple permettent de définir deux nombres adimensionnels indépendants :

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{\frac{P}{\rho}}} \quad (2.12)$$



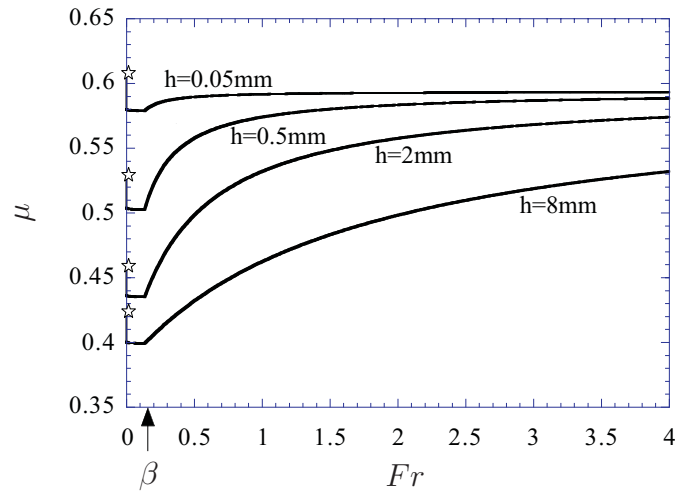


FIG. 2.5 – Variation du coefficient de frottement avec le nombre de Froude  $Fr$  pour différentes épaisseurs  $h$ , dans le cas de billes de verre sur plan incliné. Figure tirée de [44]

$$\mu = \frac{\tau}{P} \quad (2.13)$$

Le nombre sans dimension  $I$  représente le taux de cisaillement adimensionné et peut être interprété comme le rapport de deux temps [22], le paramètre  $\mu$  représente le coefficient de friction. S'il existe une rhéologie locale unique, il doit exister une relation unique entre le coefficient de friction  $\mu$  et le taux de cisaillement adimensionné  $I$  (fig.2.7).

Ce nombre sans dimension  $I$  sera nommé nombre inertiel. Une petite valeur de  $I$  (petit  $v$  et/ou grand  $P$ ) correspond à un régime où l'inertie des grains ne compte pas : c'est le régime "quasi-statique". A l'inverse une grande valeur de  $I$  (grand  $v$  et/ou petit  $P$ ) correspond au régime "inertiel" ou encore "dynamique".

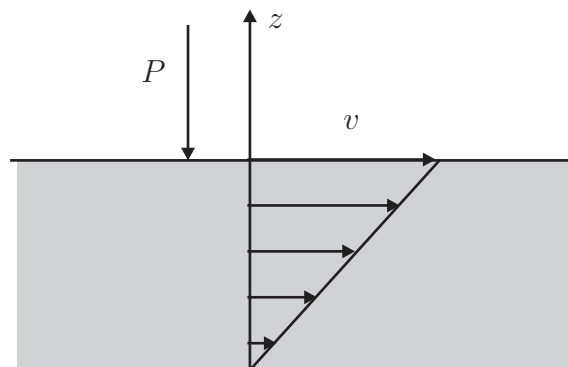


FIG. 2.6 – Cisaillement simple d'une couche de matériau granulaire

Dans le cas d'écoulements à surface libre, la pression augmente avec la profondeur  $P = \rho g(h - z) \cos \theta$  et la contrainte de cisaillement peut s'écrire sous la forme  $\tau = \rho g(h - z) \sin \theta$ . On en déduit alors :

$$\tau/P = \tan \theta = \mu(I)$$

Le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est alors déterminé à partir de la relation :

$$I = \frac{\dot{\gamma}(z)d}{\sqrt{P(z)/\rho}} = \mu^{-1}(\tan(\theta))$$

En intégrant  $\dot{\gamma}$  à partir de la relation précédente, le profil est assimilé à un profil de Bagnold :

$$\frac{v(z)}{\sqrt{gd}} = A(\theta) \frac{(h^{3/2} - (h - z)^{3/2})}{d^{3/2}} \quad (2.14)$$

Cette description des écoulements granulaires par cette rhéologie locale permet

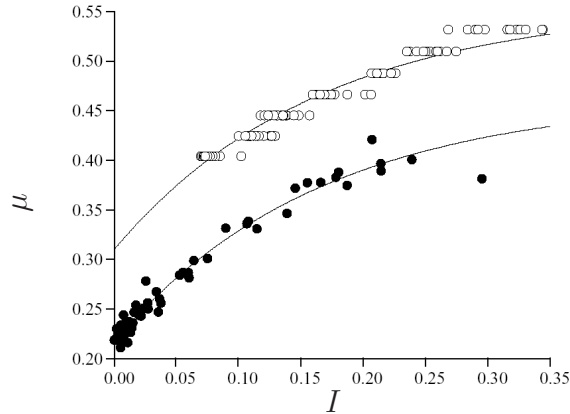


FIG. 2.7 – Coefficient de friction  $\mu$  en fonction du paramètre inertiel  $I$  dans deux configurations (○) plan incliné, (●) cisaillement plan. Figure tirée de [22]

de déterminer que le profil de vitesse dans la couche est de type Bagnold, ce qui est en accord avec les simulations numériques [48, 62, 25]

## 2.3 Ségrégation

Le phénomène de ségrégation se rencontre dès que l'on manipule des mélanges de grains de propriétés différentes. A la différence des liquides qu'il est souvent facile de mélanger, un mélange homogène de grains est difficile à obtenir dès qu'il existe des différences de taille, de masse, de propriétés mécaniques (friction,...).

### 2.3.1 Ségrégation sous vibration

Lorsque l'on fait vibrer un milieu granulaire polydisperse, les gros grains se retrouvent souvent à la surface libre. La ségrégation par vibration a donné lieu à de nombreuses expériences qui ont exhibé l'existence de plusieurs mécanismes pouvant expliquer la remontée des grosses particules. Un premier mécanisme invoqué est la percolation des petites particules sous les grosses lors de la vibration [55, 32] : dans la phase de vol libre de la vibration, des petits grains peuvent s'infiltrer sous les gros, les poussant ainsi vers la surface libre (fig. 2.8a).

Un autre mécanisme a été mis en évidence faisant intervenir des mouvements collectifs de convection dans le récipient [33]. Lorsque l'on fait vibrer un récipient rempli de grains, des rouleaux se forment, les grains remontant au centre et redescendant sur les côtés (fig. 2.8b) : la zone de redescente est petite, de l'ordre de quelques grains. Si une grosse particule se trouve dans le milieu, elle est remontée avec les autres au centre mais ne peut pas être réinjectée dans les fines couches de redescente et reste coincée à la surface.

Les deux phénomènes sont présents lors de la vibration d'un milieu granulaire ce qui rend l'interprétation des expériences de ségrégation sous vibration délicate.

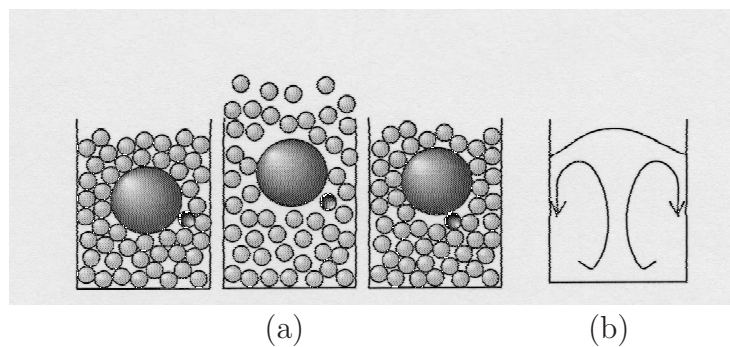


FIG. 2.8 – Deux mécanismes de ségrégation sous vibration a) infiltration des petites sous les grosses ; b) mouvement de convection. Figure tirée de [43]

### 2.3.2 Ségrégation sur plans inclinés

Considérons un mélange homogène de gros et petits grains que l'on fait s'écouler sur un plan incliné rugueux. Très rapidement le long de la pente, les gros grains remontent à la surface libre. Lors de l'écoulement, les grains bougent continuellement les uns par rapport aux autres et des trous se forment entre eux dans lesquels des particules de la couche du dessus peuvent tomber. Les gros grains ne peuvent tomber que dans les gros trous, tandis que les petits grains peuvent tomber dans les petits et gros trous. Cette asymétrie dans les mouvements fluctuants d'échanges entre les couches donne lieu à la ségrégation (tamisage dynamique).

Un modèle quantitatif basé sur cette idée a été proposé par Savage et Lunn [59]. Cependant, pour certaines configurations expérimentales (rapport de densité et rapport de taille), la ségrégation inverse peut être observée [21]. La ségrégation inverse, dans le cas où la densité des deux classes de billes est la même, se produit pour des rapports de taille supérieurs à 40 : les grosses billes sont alors à la base de l'écoulement. Cependant pour des rapports de taille supérieurs à 5, les grosses billes ne sont plus en surface de l'écoulement, elles se situent à l'intérieur de la couche en écoulement (fig. 2.9).

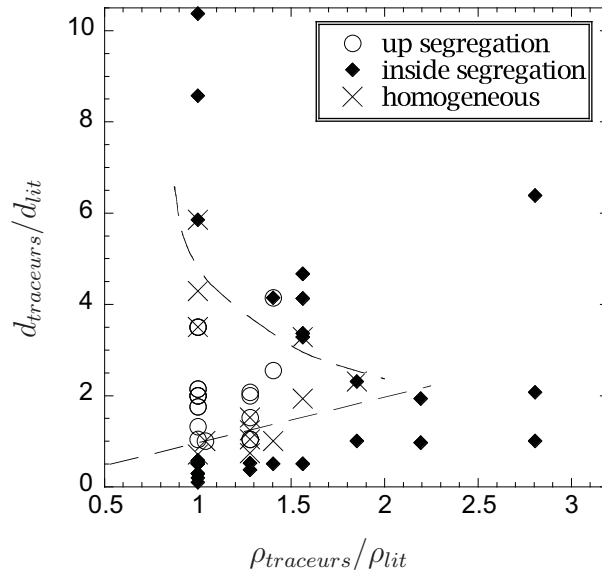


FIG. 2.9 – Domaines de ségrégation pour des écoulements dans un canal : ( $\circ$ ) les traceurs recouvrent la surface (“up segregation”), ( $\blacklozenge$ ) les traceurs sont à l’intérieur du dépôt ou à la base (“inside segregation”), ( $\times$ ) les traceurs sont à l’intérieur du dépôt et à la surface (“homogeneous”). Pour des rapports de densité  $\rho_{traceurs}/\rho_{lit}$  égal à 1, les traceurs sont à l’intérieur du dépôt pour des rapports de taille  $d_{traceurs}/d_{lit}$  supérieurs à 5 (Figure extraite de [21]).

Pour les écoulements géophysiques, cette ségrégation peut avoir une grande importance, elle pourrait être la cause d’une grande mobilité des écoulements naturels. De plus, les gros blocs se retrouvent sur le dessus de l’écoulement où la vitesse est la plus grande : ils se rassemblent donc au front et peuvent modifier la propagation de l’avalanche [60]. Un exemple de l’influence de cette accumulation de gros blocs au front est la digitation qui est observée sur le terrain et en laboratoire [46, 47] (Fig. 2.10). Quelle que soit la polydispersité d’un écoulement, la ségrégation est systématique et est capable de modifier le comportement d’un écoulement.

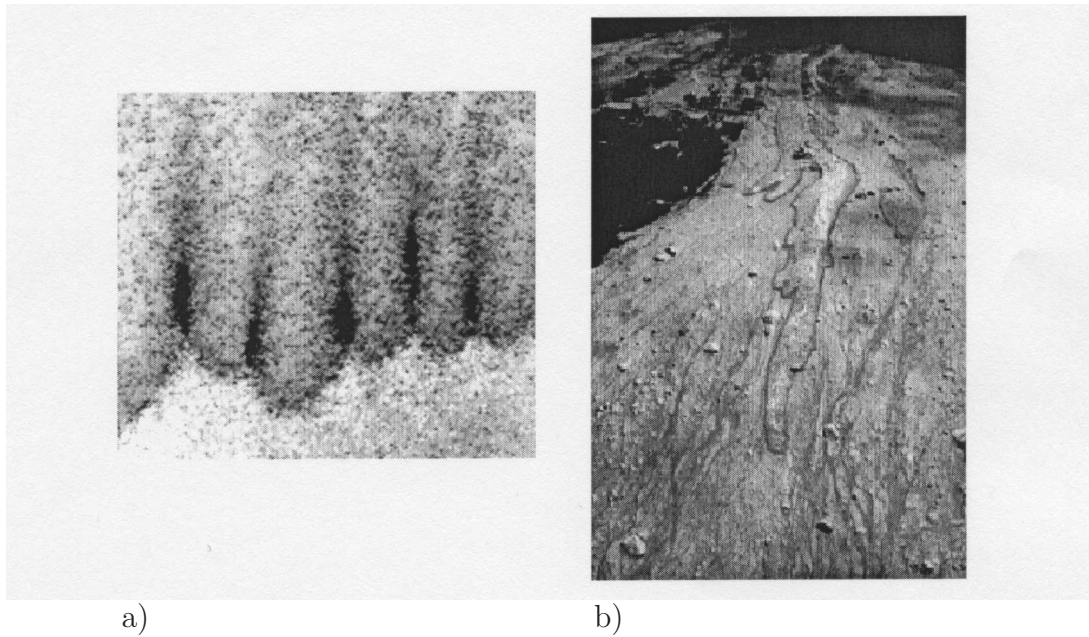


FIG. 2.10 – Figures de digitation observées au front d'un écoulement contenant des grosses particules. a) en laboratoire : les gros grains sont en noir [40]; b) sur le terrain.

### 2.3.3 Ségrégation en tambour

Une configuration où la ségrégation est très étudiée est le tambour tournant. Lorsqu'un mélange de grosses et petites particules est entraîné dans un tambour bidimensionnel comme celui de la figure 2.11(a), on retrouve très rapidement les petites particules au centre du tambour et les grosses à la périphérie [10]. La ségrégation a lieu de la même manière que dans un écoulement sur plans inclinés. Pour des vitesses de rotation faibles, l'écoulement devient très mince. La ségrégation s'explique alors par le fait que les petites billes voient une rugosité relative plus importante que les grosses, et ont donc une probabilité plus grande de se piéger avant d'atteindre le bord du tambour. Il est à noter que des expériences récentes ont montré que cette ségrégation peut être inversée suivant le rapport de taille des billes [68], comme dans le cas des écoulements sur plans inclinés. Lorsque le tambour devient tridimensionnel, des structures plus complexes apparaissent. On observe la formation spontanée de bandes alternées de grosses et de petites particules comme sur la figure 2.11(b) [27].

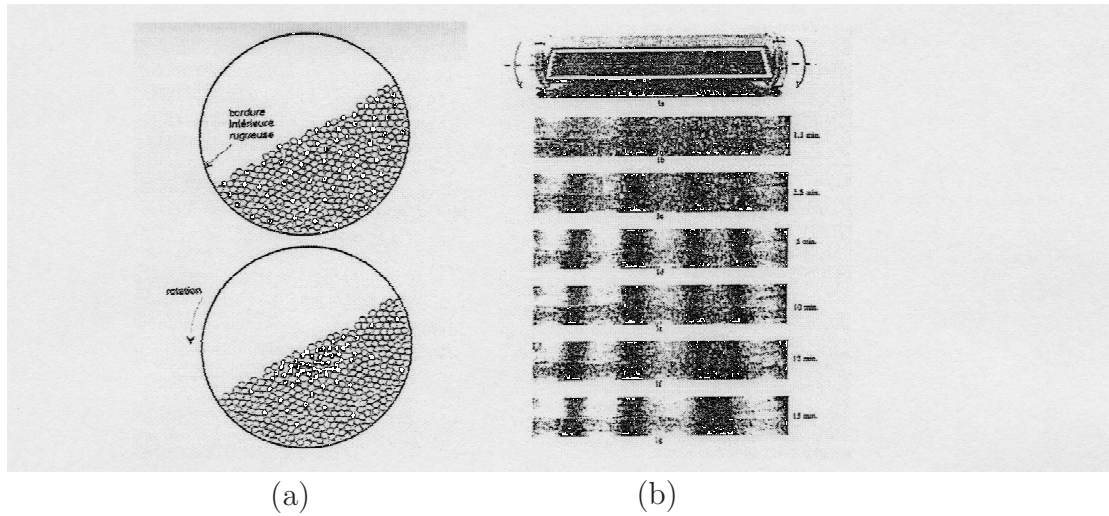


FIG. 2.11 – Ségrégation en tambour tournant. a) à 2D ; b) à 3D. Figure tirée de [27]

## 2.4 Influence de la rugosité du plan

A cause de la ségrégation décrite précédemment, lorsqu'un mélange polydispersé s'écoule sur un plan incliné, les particules les plus petites seront à la base de l'écoulement, les grosses particules se trouveront au front de l'écoulement. Cette répartition des particules entraînera une rhéologie complexe. Pour comprendre ces écoulements il apparaît important de connaître l'influence de la rugosité du fond sur des écoulements monodispersés. Des études ont été menées en faisant des écoulements du même matériau sur différents supports, ou des écoulements de différents matériaux sur le même support [11]. Le mouvement d'une seule bille sur divers supports sera aussi présenté.

### 2.4.1 Ecoulements denses

Les courbes d'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt donnent une information sur la dynamique de l'écoulement. Des expériences consistent à déterminer les caractéristiques du dépôt (épaisseur  $h_{stop}$ ) après un écoulement stationnaire uniforme en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan. Des expériences concernant l'écoulement de billes de verre sur un plan rugueux (constitué de billes de verre) ont été réalisées [41]. Ces résultats expérimentaux, montrent que l'influence du fond rugueux est très importante. D'autres études récentes [11] ont été menées (fig. 2.12). Ces dernières études ont montré l'influence de la sphéricité des grains (les grains sphériques sont des billes de verre et des graines de moutarde, les grains non-sphériques sont du sable), de la taille des grains et de la rugosité du

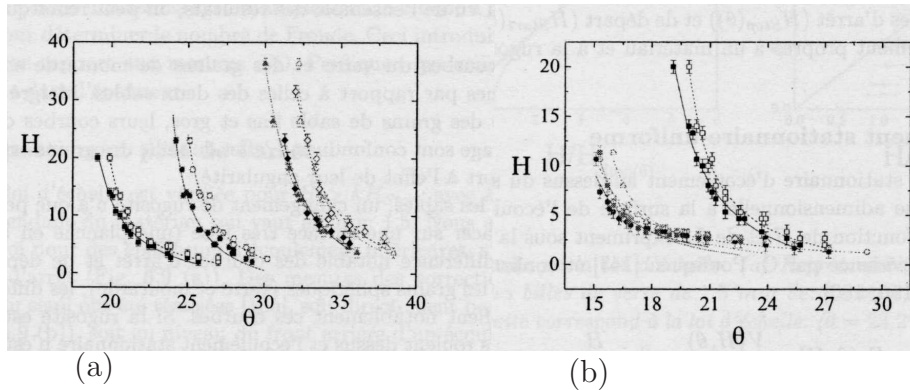


FIG. 2.12 – épaisseur  $h_{stop}$  (symboles pleins) et  $h_{start}$  (symboles ouverts) en fonction de l'angle d'inclinaison du plan, pour différents matériaux et différentes rugosités. (a) : différents matériaux et même rugosité, (b) : différentes rugosités et même matériau (billes de verres). Les comportements dépendent fortement des matériaux et de la rugosité du plan. Figure extraite de [11]

plan sur les épaisseurs  $h_{stop}$  et  $h_{start}$ . En effet, les épaisseurs  $h_{stop}$  dans le cas de billes de verre ou de graines de moutarde sont relativement proches par rapport à celle des deux sables (fig. 2.12 (a)). Cela implique que l'effet de la taille des grains est négligeable par rapport à l'effet de leur angularité. Pour les sables, un changement de rugosité n'a que peu d'effet. Il faut se placer sur une surface très lisse pour avoir une différence notable des courbes d'arrêt et de départ. Par contre pour les grains sphériques (verre et moutarde), les différentes rugosités modifient notablement ces courbes (fig. 2.12 (b)). Cela implique que l'effet de la rugosité est important pour un matériau à grains sphériques mais limité pour des grains anguleux.

Cependant, aucune étude systématique concernant l'influence de la rugosité sur un écoulement monodisperse de grains n'a été faite. Les seules études systématiques concernant l'influence de la rugosité ont été réalisées dans le cas de l'écoulement d'une seule bille, le long d'un plan incliné.

### 2.4.2 Ecoulement d'une bille sur un plan rugueux

Beaucoup d'auteurs ont étudié les trajectoires d'une seule particule sur un plan rugueux. Ces études sont limitées au cas où le diamètre de la bille  $d$  est supérieur au diamètre des billes collées  $\lambda$ . Les trajectoires de ces billes sont très dépendantes du rapport  $d/\lambda$ . Une bille de grand diamètre a une probabilité plus grande d'atteindre la fin du plan rugueux qu'une bille de petit diamètre. Les résultats expérimentaux [51, 52, 26, 1], théoriques [26, 52, 7, 8, 69, 4] et numériques [51, 26, 62, 64, 13, 14, 15] montrent que les mêmes trois régimes que ceux existants pour les écoulements granulaires (écoulements décélérés,

écoulements avec une vitesse moyenne constante, et écoulements accélérés) peuvent être observés dans le cas d'une seule bille. Tous ces régimes dépendent significativement de l'inclinaison du plan, et du diamètre relatif de la bille  $d/\lambda$ . Le diagramme de phase de la figure 2.13 présente les domaines correspondant aux différents régimes observés, dans une représentation prenant pour variables  $d/\lambda$  et  $\theta$ . Le premier régime (A) correspond à un régime décéléré, la bille s'arrête très rapidement quelle que soit l'énergie cinétique initiale qu'on lui fournit. Le second régime est caractérisé par une vitesse moyenne constante. Ce second régime est séparé en deux zones (B et C) : dans la zone (B), la majorité des billes lancées s'immobilisent sur le plan, tandis que dans la zone (C), la majorité des billes vont jusqu'au bout du plan. Les arrêts des particules dans la zone (B) sont liés au désordre de la monocouche constituant la rugosité. Le troisième régime (D) est défini par une augmentation de la vitesse moyenne (régime accéléré) : la bille progresse par sauts le long de la pente. La géométrie du plan rugueux (espace-

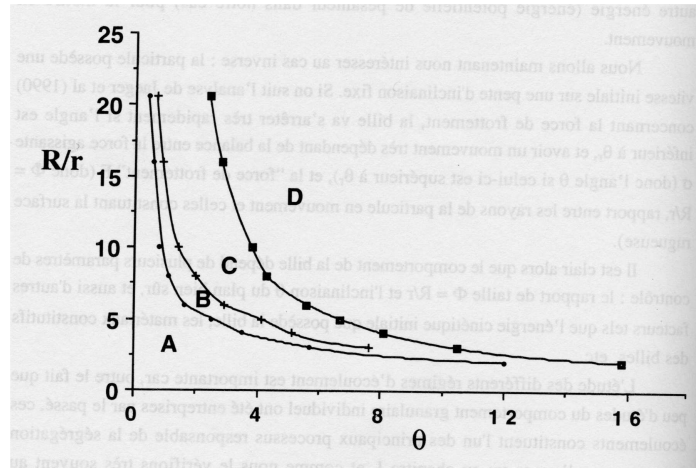


FIG. 2.13 – Diagramme de phase présentant les différents régimes d'écoulements sur le plan incliné ( $R/r$  représente le rapport entre le diamètre de la bille qui coule et le diamètre des billes collées, c'est à dire  $d/\lambda$ ). La zone (A) correspond à un mouvement décéléré, les zones (B) et (C) à un mouvement à vitesse constante, et la zone (D) à un régime de sauts. Figure tirée de [53]

ment aléatoire [7, 15], espacement régulier [15]) et le coefficient de restitution [13, 15] jouent un rôle très important sur le mouvement de la bille. Cependant, les résultats [15] d'une bille s'écoulant sur une ligne rugueuse montrent que l'introduction d'un espacement aléatoire entre les billes collées a la même influence sur le mouvement de la bille qu'un espacement régulier bien choisi entre les billes collées, l'espacement régulier étant égal à la moyenne des espacements aléatoires.

En conclusion, la présence des trois régimes (décéléré, régime à vitesse constante, et régime accéléré) dans le cas du mouvement d'une seule bille sur un plan incliné rugueux, permet de montrer que le mouvement d'une bille est



plan n°	1	2	3
diamètre $\lambda$ des billes collées (mm)	0.535	0.98	2.04
compacité	0.72	0.72	0.74

TAB. 2.1 – Caractéristiques des plans utilisés par Riguidel [53]

analogue à celui des écoulements granulaires sur plans inclinés rugueux.

### Etude statique

Ces différentes études ont montré l'existence d'un seuil statique [53]. Considérons une bille stable posée sur le plan. En inclinant progressivement le plan, les conditions d'équilibre de la bille avec la surface rugueuse sont modifiées. Le seuil statique peut être défini, pour un diamètre de bille donné, comme l'angle pour lequel il y aura rupture d'équilibre, pour lequel la bille se mettra en mouvement. Les résultats obtenus montrent que l'angle de stabilité  $\theta_s$  diminue avec le rapport de taille  $d/\lambda$  où  $d$  est le diamètre des billes en écoulement et  $\lambda$  le diamètre des billes collées sur le plan, ce rapport variant de 1 à 21 (fig. 2.14). D'après ces résultats expérimentaux, il apparaît que l'angle de stabilité  $\theta_s$  varie peu avec la rugosité absolue du plan, et ne dépend que du rapport  $d/\lambda$ . Il est à noter que ces expériences ont été réalisées sur trois plans différents, mais que la compacité des plans est identique (table 2.1).

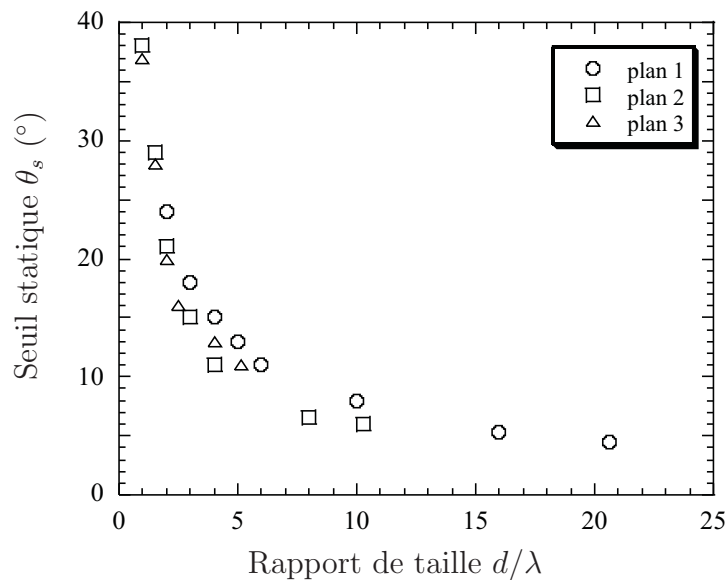


FIG. 2.14 – Résultats expérimentaux obtenus par Riguidel [53] : Le seuil statique  $\theta_s$  diminue avec le rapport de taille  $d/\lambda$ , mais il est indépendant du fond rugueux.

### Etude dynamique

Dans le cas des expériences concernant le mouvement d'une seule bille sur un plan incliné rugueux, les études ont montré l'existence comme dans les écoulements granulaires de trois régimes d'écoulement (décéléré, à vitesse constante et accéléré). L'étude de la dynamique d'une seule bille coulant sur un plan incliné rugueux permet de s'intéresser aux distances parcourues par les billes avant de s'arrêter.

**Distances d'arrêt** Lorsqu'on se place dans le domaine (B) du diagramme de phase (fig. 2.13), c'est à dire dans la zone où les billes ont une vitesse moyenne constante, mais où la majorité des billes s'immobilisent sur le plan, la distribution des distances d'arrêt (c'est-à-dire distances atteintes par les billes avant de s'arrêter) peut être étudiée. Ce "libre parcours moyen"  $L_p$  ou "distance moyenne d'arrêt" des particules est défini de façon statistique (c'est à dire comme la distance en dessous de laquelle la moitié des billes lancées sont immobilisées, les expériences étant réalisées pour 2000 billes).  $L_p$  dépend fortement du rapport de diamètre  $d/\lambda$  et de l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  (fig. 2.15). L'écart d'angle

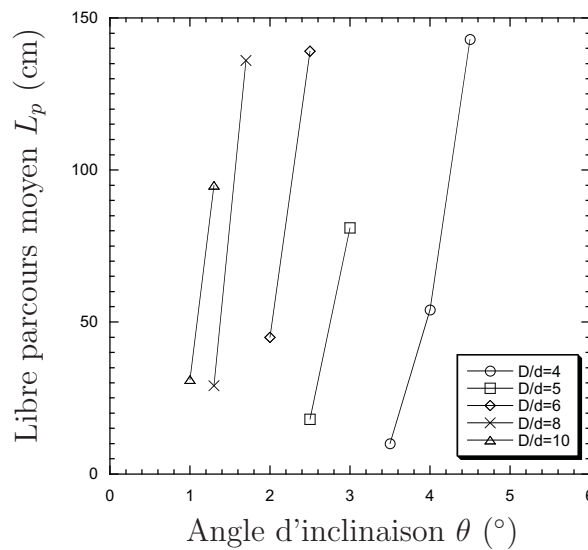


FIG. 2.15 – Le libre parcours moyen  $L_p$  augmente très fortement avec l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$

séparant le cas où  $L=0$  de celui où  $L \geq 2m$  est très faible (inférieur à  $2^\circ$  quel que soit le rapport de diamètre  $d/\lambda$ ). Pour les rapports de taille utilisés ( $d/\lambda$  variant de 4 à 10), il est rare de trouver un angle  $\theta$  pour lequel  $L$  est défini en même temps pour deux tailles de billes.

**Vitesse** Dans le régime stationnaire (vitesse de la bille constante), les résultats expérimentaux et numériques [51, 15] montrent que la vitesse augmente avec

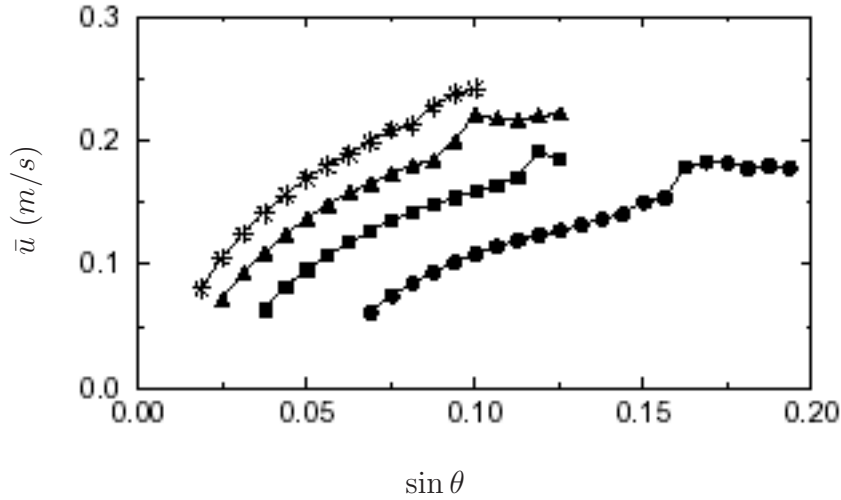


FIG. 2.16 – Dépendance de la vitesse moyenne  $\bar{u}$  avec l’inclinaison du plan rugueux pour différents rapports de taille  $d/\lambda$  : ( $\bullet$ )  $d/\lambda=1,5$ ; ( $\square$ )  $d/\lambda=2,0$ ; ( $\blacktriangle$ )  $d/\lambda=2,5$ ; ( $*$ )  $d/\lambda=3,0$

le rapport de taille  $d/\lambda$  et avec l’angle d’inclinaison  $\theta$  du plan : en effet,  $\bar{u} = \left(\frac{d}{\lambda}\right)^{3/2} \sin \theta$  (fig.2.16).

Une simulation numérique [15] montre l’importance du fond rugueux sur ces écoulements. Une bille s’écoule sur une ligne rugueuse constituée de billes espacées d’une grandeur notée  $\epsilon$ . La vitesse de cette bille (constante) pour un rapport de taille  $d/\lambda$  donné (égal à 2,25) en fonction de la répartition des espacements  $\epsilon$  est étudiée. Les résultats présentés en figure 2.17 montrent comment la vitesse moyenne d’une bille est affectée par l’introduction de désordre dans le plan rugueux. La vitesse moyenne  $\bar{u}$  diminue avec l’augmentation des espacements du plan  $\epsilon$ . De plus, la vitesse moyenne d’une bille s’écoulant sur un plan rugueux tel que les espacements entre les billes soient compris entre 0 et  $0,2d$ , peut être approximée par la vitesse d’une bille s’écoulant sur un plan rugueux tel que l’espacement entre les billes soit constant et égal à  $0,1d$ , qui correspond à l’espacement moyen dans le cas du plan non-ordonné.

En résumé, les résultats concernant le mouvement d’une seule bille sont les suivants :

- L’angle  $\theta_s$ , pour lequel il y a une transition entre le régime décéléré et le régime où la vitesse est constante, décroît avec l’augmentation du rapport de taille  $d/\lambda$  [15].
- Dans le régime stationnaire (B), le “libre parcours moyen”  $L_p$  augmente avec le rapport de taille et avec l’angle d’inclinaison [26].
- Dans le régime stationnaire (vitesse de la bille constante), la vitesse augmente avec le rapport de taille et avec l’angle d’inclinaison [7, 13, 15].

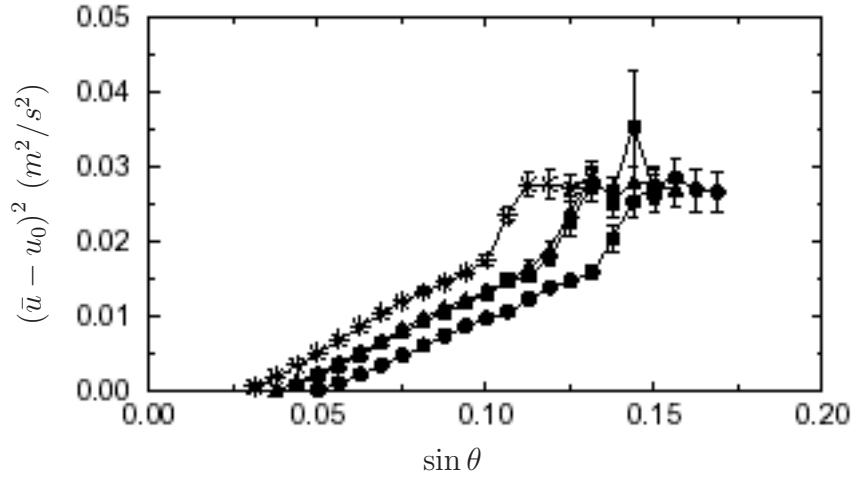


FIG. 2.17 – Dépendance de  $(\bar{u} - u_0)^2$  avec l'inclinaison  $\theta$  du plan rugueux, pour différents espacements  $\epsilon$  entre les billes du fond rugueux : espacement constant : (\*)  $\epsilon = 0$ ; (▲)  $\epsilon = 0,1d$ ; (●)  $\epsilon = 0,2d$ ; espacement variable avec (■) :  $\bar{\epsilon} = 0,1$  (points confondus avec le cas (▲))

- Dans le régime stationnaire, l'introduction d'un espacement aléatoire entre les billes collées a la même influence sur le mouvement de la bille que celui d'un espacement régulier entre les billes collées, si la moyenne des espacements est la même dans les deux cas [15].

Ces résultats obtenus dans le cas d'une seule bille coulant sur un plan incliné rugueux apparaissent très intéressants pour modéliser et comprendre les écoulements monodisperses.

En conclusion, les écoulements polydisperses sur plans inclinés rugueux font intervenir la ségrégation et la variation de la rugosité relative suivant la taille des grains en contact avec le plan rugueux. L'étude des écoulements polydisperses impose donc la compréhension de l'influence de la rugosité sur les écoulements monodisperses. L'influence de la rugosité a été mise en évidence pour l'étude du mouvement d'une bille isolée sur le plan. De plus, ces écoulements semblent analogues aux écoulements granulaires, car les trois régimes (décéléré, à vitesse constante et accéléré) sont observés dans ces deux types d'écoulements. Pour ces écoulements monodisperses, il nous semble intéressant d'étudier les épaisseurs  $h_{stop}$  des dépôts obtenus après des écoulements stationnaires, puisqu'elles donnent une information sur la dynamique de ces écoulements. En effet, l'épaisseur  $h_{stop}$  varie avec de nombreux paramètres (rugosité du plan, sphéricité des grains, diamètre relatif des grains). Malheureusement, aucune étude systématique des variations de l'épaisseur  $h_{stop}$  avec ces paramètres n'a encore été réalisée. L'étude des écoulements polydisperses va donc passer par deux étapes :

- 
- l'étude de l'influence de la rugosité relative pour des écoulements monodisperses ;
  - l'effet de la ségrégation sur l'écoulement.



# Chapitre 3

## Configuration Expérimentale

Ce chapitre présente la configuration expérimentale que nous allons étudier dans ce travail : les écoulements granulaires sur plans inclinés rugueux. Cette configuration a déjà été largement utilisée pour étudier les écoulements granulaires [12, 41, 20, 48].

### 3.1 Plans inclinés rugueux.

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure 3.1. Il s'agit d'un plan incliné constitué d'une plaque de verre (longueur 1m50, largeur 50 cm) sur laquelle est posée le fond rugueux. Le plan rugueux est réalisé en collant une monocouche de billes de verre monodisperses sur un support. Les différentes techniques de collage sont présentées dans l'annexe A.

Les différents plans que nous avons utilisés sont présentés table 3.1 (les diamètres des billes collées vont de 200  $\mu m$  à 5  $mm$ ). Les grandeurs caractéristiques des plans rugueux sont le diamètre des billes collées  $\lambda$  et la compacité du plan  $C$ . La compacité du plan  $C$  (surface occupée par les billes divisée par la surface totale) est déterminée par analyse d'images. La connaissance de la compacité  $C$  permet d'estimer l'espacement moyen entre les billes du plan  $\epsilon_c$ , en supposant que le plan peut être modélisé par un réseau triangulaire. L'espacement moyen entre les billes est la distance entre les deux centres des billes moins le diamètre moyen des billes. Si deux billes du plan sont en contact, alors l'espacement entre les deux billes est nul.

Avec cette hypothèse, on a :

$$C = \frac{\pi\lambda^2}{(\lambda + \epsilon_c)^2 \sqrt{3}}$$

et donc :

$$\epsilon_c = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2C\sqrt{3}}} - 1 \right) \lambda$$

avec

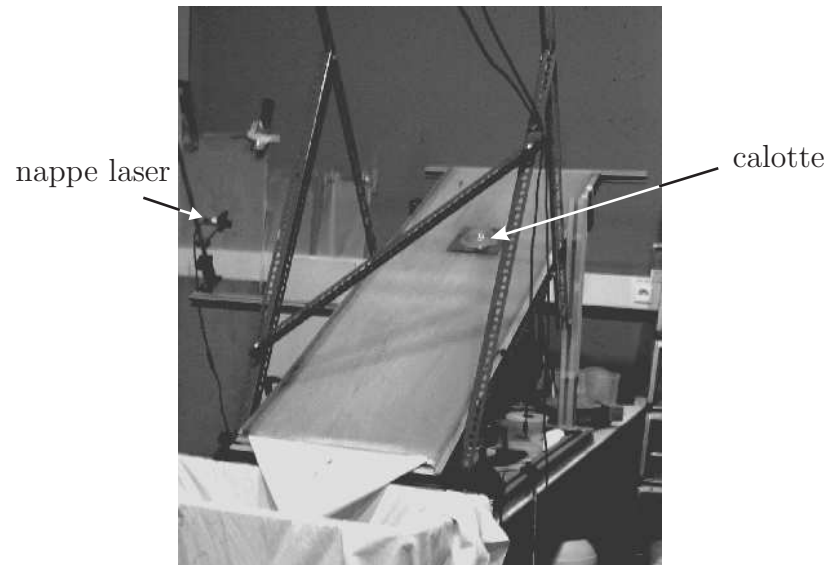


FIG. 3.1 – Dispositif expérimental

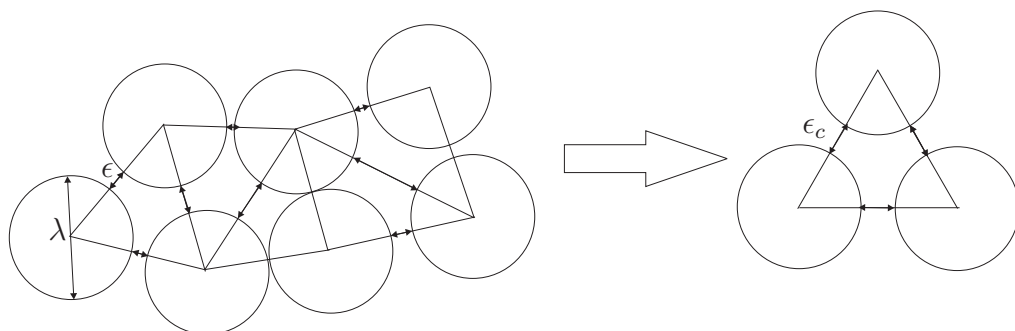


FIG. 3.2 – Représentation schématique du plan rugueux et modélisation du plan rugueux selon un réseau triangulaire : la compacité est la même dans les deux configurations.



- $\lambda$  : diamètre moyen des billes collées ( $\mu m$ ),
- $\epsilon_c$  : espacement moyen entre les billes ( $\mu m$ ),
- $C$  : compacité moyenne du plan.

Il est aussi possible de déterminer à partir des images du plan (figure 3.3) la distribution des espacements  $\epsilon$  entre chaque bille du plan. En effet, pour chaque image d'un plan, il est possible de déterminer le centre de chaque bille ainsi que son diamètre : ceci permet de déterminer les espacements de chaque bille avec ses voisines. Les voisines d'une bille donnée, sont telles que la distance centre à centre soit inférieure à  $2\lambda$ . La figure 3.3 représente les distributions pour les plans rugueux constitués de billes de 2 mm et 5 mm. Pour le plan rugueux constitué de billes de 5 mm, la distribution des espacements est de type gaussienne, présentant un maximum pour des espacements proches de  $\epsilon_c$ . La queue de distribution (c'est à dire pour des espacements compris entre 1200  $\mu m$  et 3200  $\mu m$ ) est due à la présence de quelques lacunes dans le réseau triangulaire supposé. Pour le plan rugueux constitué de billes de 2 mm, la distribution présente un pic pour des espacements nuls et la distribution présente des pourcentages importants d'espacements grands. Ceci s'explique par le fait que le plan de 2 mm est moins ordonné que le plan de 5 mm. En effet, on peut, dans le cas du plan de 2 mm, nettement distinguer deux zones sur la photo : une zone de forte compacité où toutes les billes sont en contact (ce qui explique un fort pourcentage d'espacements nuls), et une zone de très faible compacité (ce qui implique des proportions élevées pour des espacements grands). Avec ces deux méthodes de calcul, l'espacement moyen du plan  $\epsilon$  (moyenne de tous les espacements entre deux billes) est identique à l'espacement  $\epsilon_c$ , calculé à partir de la compacité en supposant un réseau triangulaire (voir table 3.1). Dans la suite, les caractéristiques d'un plan rugueux, seront données par le diamètre des billes collées sur le plan  $\lambda$ , la compacité du plan  $C$  ou l'espacement moyen entre deux billes  $\epsilon_c$ .

L'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan est contrôlé par un cric de voiture placé sous le plan. Ainsi, on peut faire varier l'angle d'inclinaison tout en supportant le poids du plan. Une règle graduée est disposée le long du plan, l'intersection de cette règle avec un axe vertical, permet de définir une relation entre l'angle d'inclinaison et l'abscisse lue sur la règle. Cette relation permet d'avoir une très bonne reproductibilité de l'angle d'inclinaison ( $\sim 0,1^\circ$ ).

## 3.2 Matériau granulaire utilisé pour les écoulements

Pour réaliser nos expériences, nous avons utilisé des billes de verre de diamètre compris entre 150  $\mu m$  et 5 mm. Les billes ont été tamisées pour obtenir différentes classes de billes considérées comme monodisperses (fig. 3.4). Les différentes classes de billes sont répertoriées dans la table 3.2. Les différentes gammes de billes sont

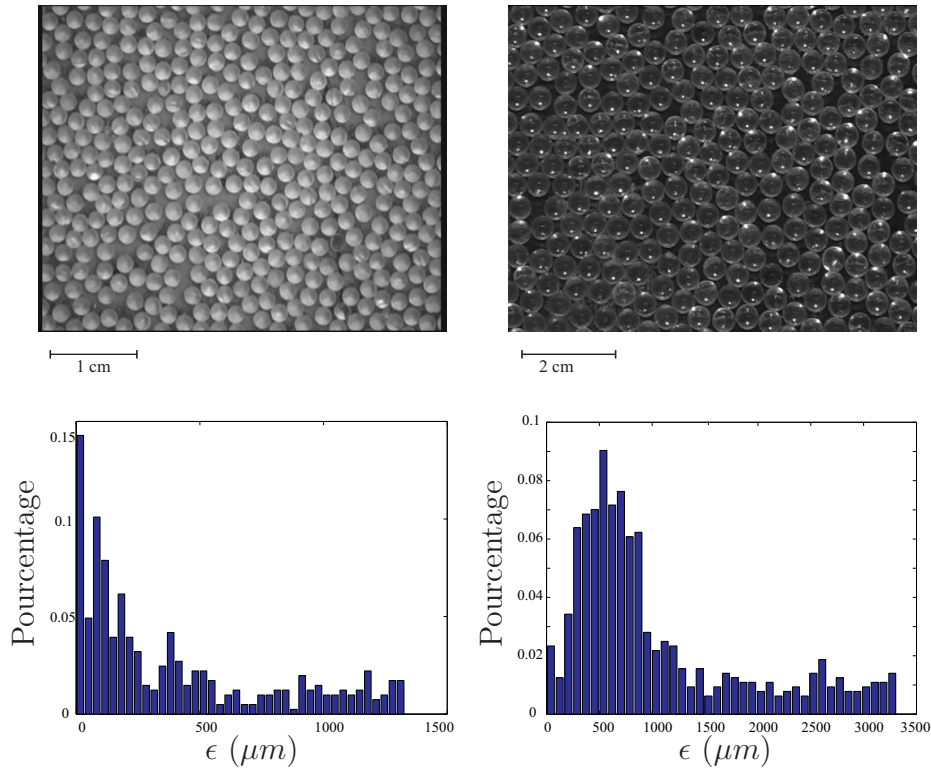


FIG. 3.3 – Répartition des espacements entre les billes sur les plans de 2 mm (à gauche) et 5 mm (à droite)

plan n°	$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$\epsilon$ ( $\mu\text{m}$ )	écart type de $\epsilon$ ( $\mu\text{m}$ )	compacité $C$	$\epsilon_c$ ( $\mu\text{m}$ )
1	225	46	41	$0,63 \pm 0,03$	44
2	425	121	79	$0,55 \pm 0,04$	120
3	655	160	129	$0,57 \pm 0,03$	171
4	1400	401	300	$0,56 \pm 0,04$	382
5	2000	393	376	$0,65 \pm 0,05$	362
6	5000	732	703	$0,7 \pm 0,03$	691

TAB. 3.1 – Plans rugueux utilisés avec  $\lambda$  : diamètre des billes collées sur le plan,  $\epsilon$  : moyenne des espacements, écart type de  $\epsilon$  : écart type obtenu à partir de la distribution des espacements (fig. 3.3),  $C$  : compacité moyenne du plan,  $\epsilon_c$  : espacement moyen en supposant que le plan est modélisé par un réseau triangulaire. On note que pour tous les plans, les valeurs de  $\epsilon_c$  et  $\epsilon$  sont proches.

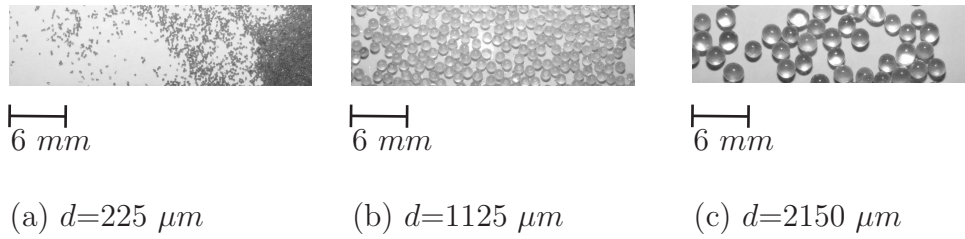


FIG. 3.4 – Matériaux utilisés : billes de verre de diamètre moyen : (a)  $225 \mu m$ , (b)  $1125 \mu m$  et (c)  $2150 \mu m$

considérées comme monodisperses, car la largeur de la distribution est faible (la largeur de la distribution représente environ 10 % du diamètre moyen). Cette largeur de distribution est donnée à partir de la taille des tamis utilisés. Il est cependant difficile de réduire de manière significative la largeur de cette distribution. En plus du tamisage, les billes ont été triées, pour ne conserver que les billes sphériques (annexe A.2). La sphéricité est mesurée par traitement d'image : chaque projection de particule peut être fittée à l'aide d'une ellipse. Si les diamètres principaux de l'ellipse sont égaux, la projection de la particule est donc circulaire et la bille est sphérique. En pratique, si le rapport des diamètres principaux de la projection de la particule est compris entre 1 et 1,1, la particule est alors considérée comme sphérique, pour des rapports plus élevés, la bille est considérée comme non-sphérique.

diamètre moyen ( $\mu m$ )	gamme de taille ( $\mu m$ )	diamètre moyen ( $\mu m$ )	gamme de taille ( $\mu m$ )
150	140 - 160	615	600 - 630
180	160 - 200	655	610 - 700
225	200 - 250	670	630 - 710
275	250 - 300	780	710 - 850
300	290 - 310	925	850 - 1000
327	300 - 355	1125	1000 - 1250
377	355 - 400	1400	1250 - 1550
425	400 - 450	1850	1700 - 2000
475	450 - 500	2000	1900 - 2100
530	500 - 560	2150	2000 - 2300
580	560 - 600	5000	4900 - 5100

TAB. 3.2 – Diamètres moyens des billes et gammes de taille correspondantes imposées par le tamisage

### 3.3 Mesures des épaisseur, vitesse, longueur et largeur des écoulements.

Lors de l'écoulement d'un matériau granulaire sur un plan incliné, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement sont :

- l'épaisseur  $h$ ,
- la vitesse  $u$  du front.

Les grandeurs caractéristiques du dépôt sont :

- la longueur  $L$ ,
- le profil de largeur  $W$  et la largeur maximale  $W_{max}$ ,
- l'épaisseur  $h_{stop}$ .

Nous donnons ici les techniques de mesure que nous utiliserons largement par la suite.

#### 3.3.1 Mesure d'épaisseur

Pour mesurer avec précision les épaisseurs de l'écoulement ou du dépôt, nous utilisons deux méthodes : la première permet une mesure locale de l'épaisseur de la couche de grains considérée, la seconde donne l'épaisseur en tout point du dépôt.

La première consiste à projeter une nappe laser en incidence rasante sur la surface de l'écoulement. En présence d'une couche de grains d'épaisseur  $h$ , la projection de la nappe laser sur la surface est décalée par rapport à la projection sur le fond rugueux d'une quantité  $\Delta = \frac{h}{\tan\delta}$ , où  $\delta$  est l'angle d'inclinaison de la nappe laser par rapport au plan (figure 3.5). Dans nos expériences,  $\delta$  est égal à  $10^\circ$ . Cette technique permet d'amplifier la mesure de l'épaisseur de l'écoulement  $h$  par un facteur  $\frac{1}{\tan\delta}$ . On peut alors mesurer des couches fines avec une bonne précision (de l'ordre de quelques dizaines de microns). En pratique la mesure de la déviation de la nappe laser  $\Delta$  se fait à l'aide d'une caméra vidéo qui filme l'écoulement par dessus. On soustrait l'image en présence de la couche de grains d'épaisseur  $h$  de l'image qui a été prise sans la couche de grain. Un logiciel de traitement d'image (NIH image) permet ensuite de mesurer le décalage  $\Delta$  en pixels (figure 3.6). Pour connaître l'épaisseur  $h$  en millimètres, il suffit de calibrer le système à l'aide d'une cale d'épaisseur connue. On remarque que cette technique permet de mesurer des couches d'épaisseur moyenne inférieure à la taille d'un grain. En effet, l'image de la nappe laser projetée sur le plan, possède une certaine largeur ( $\sim 5\text{ mm}$ ) et moyenne spatialement la mesure de  $h$  sur plusieurs grains.

La seconde méthode est une méthode développée par O. Pouliquen et Y. Forterre [44] inspirée d'une méthode du Moiré [56]. Une grille formée de lignes horizontales est projetée sur le plan rugueux à l'aide d'un projecteur (figure 3.7). L'angle de projection est choisi de telle sorte que la présence d'une masse de grain sur la surface induise une déformation significative de la grille projetée (figure 3.8).

Les images du plan sont obtenues à l'aide d'une caméra placée perpendiculairement au plan. Le décalage local des lignes observé entre la grille déformée due à la présence de la masse de grain et la grille régulière obtenue lorsqu'il n'y a pas de bille sur le plan est proportionnel à l'épaisseur locale de la couche de grains. Cette méthode est utilisée dans le cas où les épaisseurs ne sont pas constantes sur tout le dépôt. La précision de cette mesure est de l'ordre de  $200 \mu m$ .

### 3.3.2 Mesure de vitesse

La mesure de vitesse est obtenue en réalisant des diagrammes spatio-temporels des différents écoulements (figure 3.9). Une calibration reliant les distances (en  $cm$ ) aux pixels de notre image permet une mesure précise des vitesses dans le cas d'écoulements stationnaires uniformes. L'erreur sur les vitesses est de l'ordre de  $3 mm/s$ . Dans le cas d'écoulements instationnaires, c'est-à-dire pour des lâchers instantanés d'un volume constant de matériau granulaire, les diagrammes spatio-temporels nous donnent la variation de la vitesse au cours du temps.

### 3.3.3 Mesure de la longueur et de la largeur du dépôt

La mesure de la largeur du dépôt se fait par détection de contour en observant les variations en niveaux de gris de notre image (fig. 3.10). Le fond rugueux est noir, alors que le dépôt de billes est de couleur gris clair ou blanche. Les variations de niveaux de gris, déterminés sur des lignes perpendiculaires à  $x$ , la direction de l'écoulement, permettent de déterminer la largeur du dépôt avec une précision de  $1,4 mm$ . Les mêmes résultats peuvent être obtenus à partir des mesures faites par la méthode du Moiré (l'erreur sur la largeur est aussi dans ce cas là de  $1,4 mm$ ). L'épaisseur en tout point du dépôt étant déterminée, le contour correspond à la zone de transition entre une épaisseur nulle et une épaisseur non nulle. La forme du dépôt étant connue, il est possible de déterminer la largeur du dépôt pour différentes abscisses ainsi que la longueur totale du dépôt. Cependant, la mesure des longueurs est plutôt faite directement à l'aide d'un mètre ruban, la précision de ces mesures est de l'ordre du millimètre.

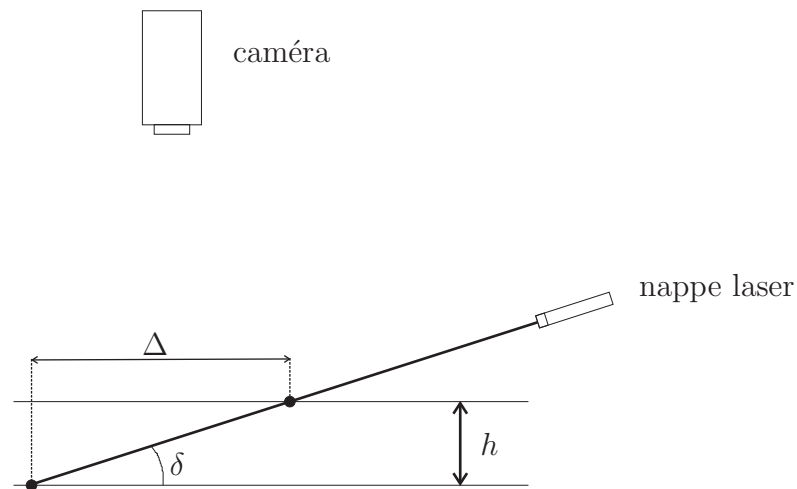


FIG. 3.5 – Principe de la mesure de  $h$  par une nappe laser projetée en incidence rasante. Il y a un décalage  $\Delta$  de la projection de la nappe dans le cas d'une couche de grains d'épaisseur  $h$

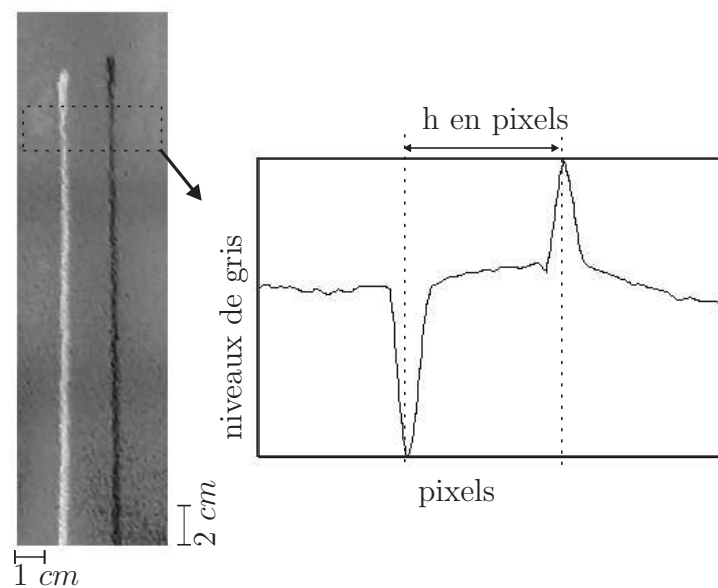


FIG. 3.6 – Mesure de l'épaisseur de l'écoulement par la nappe laser. A gauche : projection de la nappe laser sans écoulement (trace noire) sur la même image que la projection de la nappe laser sur un dépôt granulaire (trace blanche). Le logiciel NIH permet de mesurer le décalage entre ces deux traces (à droite).

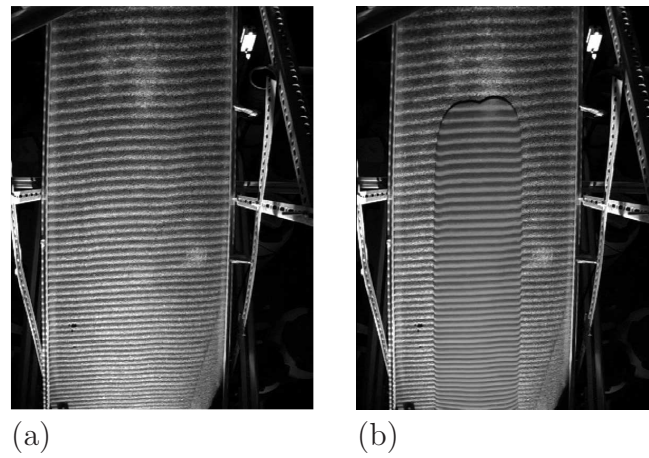


FIG. 3.7 – Principe de mesure d'épaisseur par la méthode du Moiré : des lignes horizontales sont projetées sur le plan incliné à l'aide d'un projecteur (a), le décalage des lignes dû à la présence d'un dépôt granulaire (b) permet de calculer l'épaisseur en tout point de ce dépôt. L'épaisseur du dépôt est alors calculée en moyennant le profil d'épaisseur.

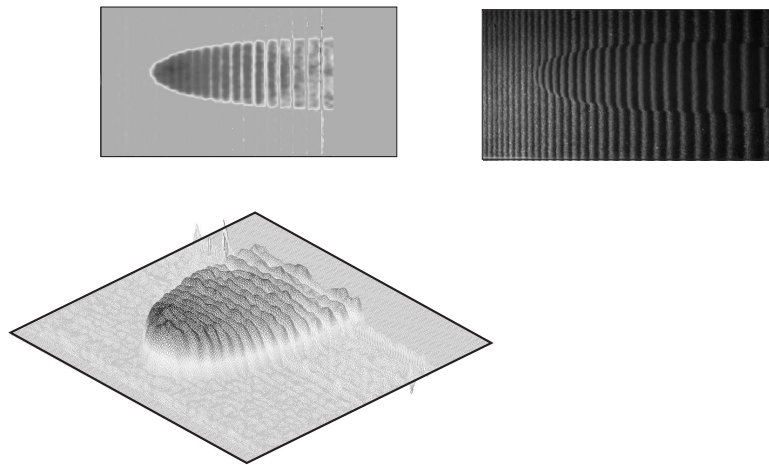


FIG. 3.8 – Dépôt réel (à droite), la présence d'une masse de grain déforme les lignes projetées. Dépôt calculé (à gauche) obtenu à partir de la déviation des lignes projetées. En bas, mise en évidence des variations d'épaisseur en tout point du dépôt. Un espacement trop important des lignes projetées sur le plan ne permet pas de déterminer avec précision l'épaisseur du dépôt.

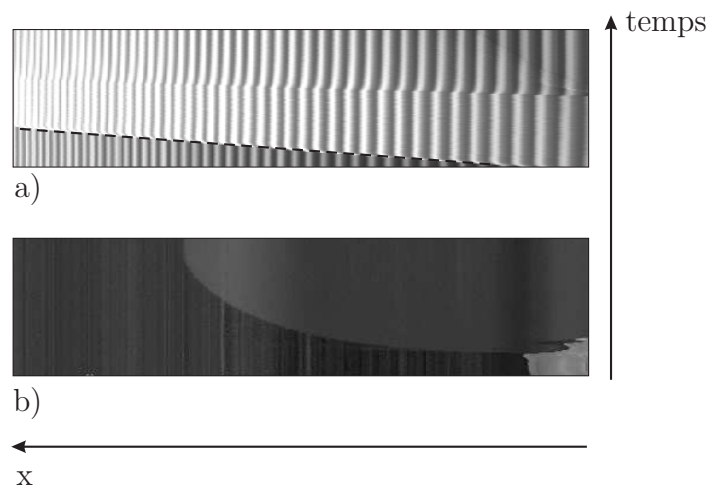


FIG. 3.9 – Diagrammes spatio-temporels a) obtenu dans le cas d'un écoulement stationnaire uniforme : la vitesse est constante (trait pointillé) b) obtenu dans le cas d'un écoulement non stationnaire uniforme : la vitesse décroît et est égale à 0 à la fin de l'écoulement.

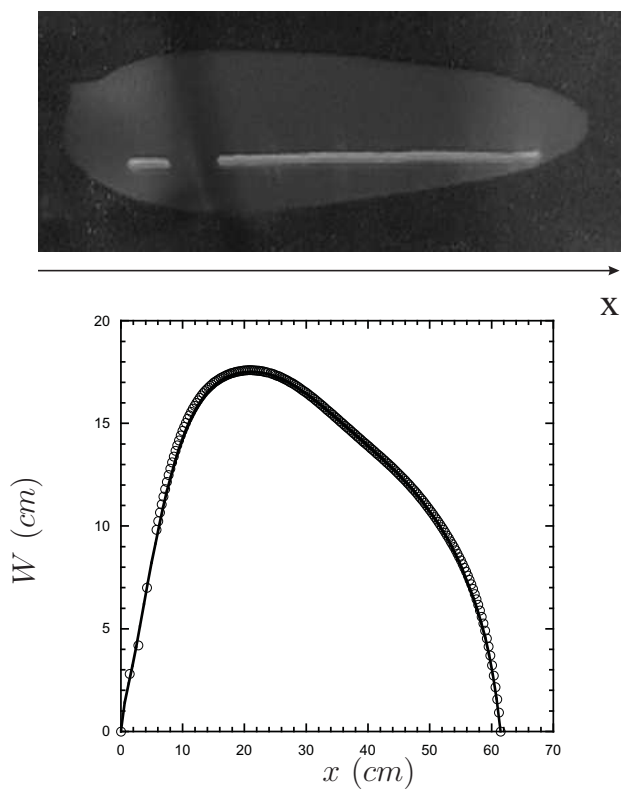


FIG. 3.10 – Photo du dépôt et largeur du dépôt en fonction de la distance le long du plan ( $x$ ) à partir de la détection du contour du dépôt.



## Première partie

# Influence du plan rugueux pour des écoulements monodisperses



Cette première partie vise à comprendre l'effet de la rugosité relative du plan sur la dynamique d'un écoulement monodisperse de billes.

Pour étudier l'influence de la rugosité relative, on fera successivement varier le diamètre  $d$  des billes qui coulent sur un plan de rugosité donnée et varier le diamètre  $\lambda$  des billes collées sur le plan. Ces écoulements sont monodisperses, c'est à dire qu'ils sont constitués d'une seule taille de bille. Ces variations systématiques permettent alors de déterminer, pour une large gamme de rugosité relative,  $d/\lambda$  variant de 0,1 à 12, l'influence de la rugosité relative sur la dynamique des écoulements granulaires secs monodisperses.

Sur chaque type de plan, trois types d'expériences ont été menées (figure 3.11). Le premier consiste en un lâcher instantané d'une masse constante de billes placée sur le plan. Cette masse est placée dans une calotte hémisphérique de diamètre 9,3 cm qui est retournée sur le plan, ouverte puis instantanément enlevée. Le matériau granulaire s'écoule alors sur la pente, s'étale et s'arrête, laissant un dépôt en forme de larme (fig 3.11a). Ce dépôt est caractérisé par sa longueur  $L$ , et sa largeur maximale  $W_{max}$ . Pour contrôler précisément la quantité de matériau dans la calotte, la masse de billes présente dans la calotte est pesée avant chaque expérience et est égale à 176 g. On s'intéresse avec ce type d'expérience principalement aux variations des longueurs de coulée en fonction de la rugosité relative.

Dans le second type d'expérience, nous étudions, pour chaque taille de billes sur chaque plan, l'évolution de l'épaisseur du dépôt ( $h_{stop}$ ), laissé par un écoulement à bords libres, pour plusieurs angles d'inclinaison du plan ( $\theta$ ). Ces expériences sont réalisées avec une grande quantité de matériau ( $\sim 800$  g), le flux de billes est à peu près constant et égal à 80 g/s. La largeur de l'écoulement est de l'ordre de 40 cm. La figure 3.11b représente faussement la réalité, l'écoulement de billes est très large mais n'est pas confiné.

Finalement, nous étudions la vitesse du front  $u$  d'un écoulement stationnaire produit par un flux de billes imposé constant. Dans ces expériences, contrairement aux expériences précédentes, le flux imposé est de l'ordre de 10 g/s, le matériau granulaire s'écoule sur la pente avec une largeur constante (de quelques centimètres), laissant un dépôt d'épaisseur  $h_{stop}$  (fig. 3.11c). L'écoulement n'étant pas très large, la présence des bordures influence parfois la valeur de  $h_{stop}$ , du moins en périphérie du dépôt. La comparaison avec les expériences précédentes permet de tester leur influence. Ces expériences permettent de s'intéresser à la rhéologie des écoulements granulaires. Les grandeurs mesurées  $h$ ,  $h_{stop}$  et  $u$  permettent d'obtenir une loi rhéologique pour ces écoulements. Les paramètres de cette étude sont :

- $d$  : le diamètre des billes qui coulent ( $\mu m$ ),
- $\lambda$  : le diamètre des billes collées sur le plan ( $\mu m$ ),
- $C$  : la compacité de la monocouche de billes collées sur le plan,
- $\epsilon_c$  : l'espacement moyen entre deux billes collées sur le plan déterminé à partir de la compacité du plan en supposant que le réseau est triangulaire

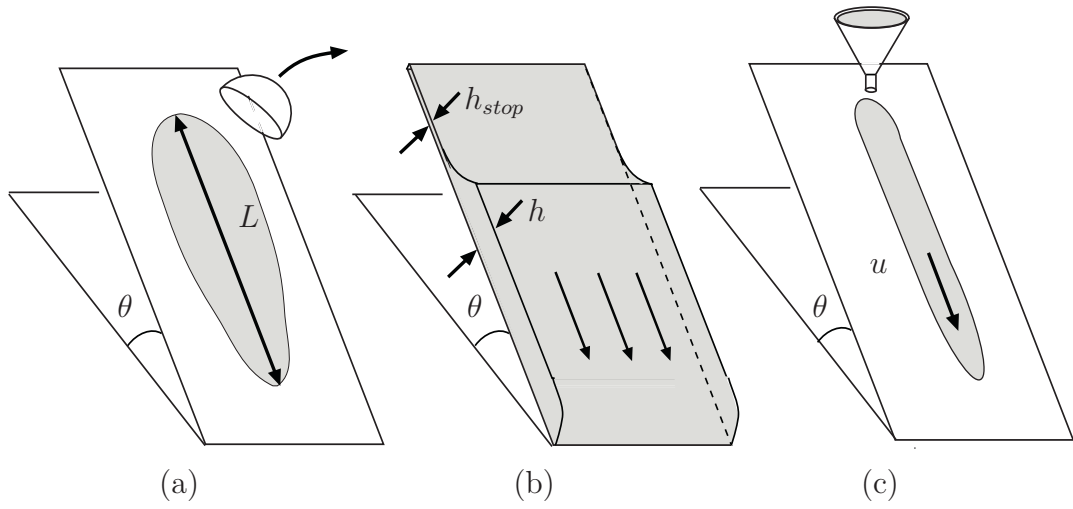


FIG. 3.11 – Les trois types d’expérience menées sur un plan rugueux : (a) lâcher d’une masse constante de billes, (b) mesure de l’épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  après un écoulement large, (c) mesure de la vitesse du front  $u$  dans le cas d’un écoulement stationnaire à bords libres provenant d’une alimentation constante

$$\epsilon_c = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2C\sqrt{3}}} - 1 \right) \lambda,$$

–  $\theta$  : l’angle d’inclinaison du plan.

# Chapitre 4

## Existence d'un maximum de friction

Nous présentons d'abord dans cette partie, les résultats obtenus sur le plan n°2, c'est à dire, sur le plan sur lequel sont collées des billes de diamètre moyen  $425 \mu m$  (voir partie 3). Les mêmes études ont été réalisées sur d'autres plans rugueux et seront présentées dans la suite.

### 4.1 Résultats expérimentaux sur le plan de $425 \mu m$

Cette étude a donc été faite en gardant la rugosité du plan constante, et en faisant varier le diamètre  $d$  des billes qui coulent : les billes sont alors soumises à une rugosité relative  $d/\lambda$  variable. Dans ces expériences, la rugosité relative varie de 0,35 à 12.

#### 4.1.1 Etude de la longueur des lâchers

Les expériences de lâcher d'une masse constante de matériau granulaire monodisperse ont été menées pour étudier les variations de la longueur du dépôt  $L$  en fonction de la taille des billes qui coulent. Ces expériences ont été réalisées pour différents angles d'inclinaison ( $\theta$ ). Les résultats obtenus sont présentés figure 4.1. La longueur du dépôt présente un minimum pour une certaine taille de billes, appelée  $d_c$ . Nous pouvons remarquer que ce diamètre est indépendant de l'angle d'inclinaison du plan, mais les variations de longueur sont d'autant plus importantes que l'angle d'inclinaison du plan est grand. Il faut noter que pour un angle d'inclinaison du plan égal à  $28^\circ$ , les mesures de longueur sont sous-estimées pour les billes ayant un diamètre supérieur à  $425 \mu m$  ( $425 \mu m$ ,  $475 \mu m$  et  $550 \mu m$ ), parce qu'un certain nombre de billes ne restent pas sur le plan. Pour ces tailles, le pourcentage de billes perdues est, respectivement égal à 3, 8

et 13%. Pour des angles d'inclinaison inférieurs à  $28^\circ$ , toutes les billes restent sur le plan et participent donc au dépôt final.

Dans ce type d'expérience, nous nous sommes aussi intéressés aux largeurs  $W$  des différents dépôts et en particulier à la largeur maximale du dépôt  $W_{max}$  (fig. 4.2). Cette grandeur ne présente aucune variation avec le diamètre des billes qui coulent  $d$ . La morphologie des dépôts change avec le diamètre des billes qui coulent, mais la largeur maximale du dépôt est indépendante de ce diamètre. On remarque, de plus, en réalisant des expériences où on change le diamètre de la calotte, et donc la masse de matériau granulaire qui s'écoule, que la largeur maximale du dépôt  $W_{max}$  dépend linéairement du diamètre de la calotte (fig. 4.2). La largeur maximale du dépôt est fixée par le diamètre de la calotte  $d_{cal}$ .

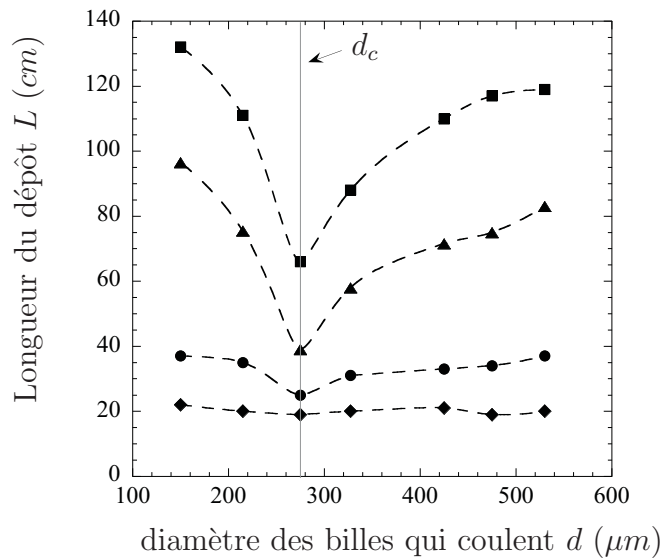


FIG. 4.1 – Longueur du dépôt en fonction de  $d$  pour différents angles d'inclinaison ■  $\theta=28,3^\circ$  ; ▲  $\theta=25,7^\circ$  ; ●  $\theta=22,8^\circ$  ; ◆  $\theta=18,4^\circ$ . Il existe un diamètre  $d_c$  pour lequel la longueur présente un minimum.  $d_c$  est indépendant de  $\theta$

#### 4.1.2 Etude de la vitesse

Les secondes expériences s'intéressent aux variations de vitesse du front ( $u$ ) lors d'écoulements stationnaires à bords libres. Ces expériences sont réalisées en imposant un flux constant égal à  $10\text{ g/s}$  à l'aide d'un entonnoir. Le flux de billes imposé est indépendant du diamètre des billes qui coulent  $d$ . Les billes s'écoulent sur le plan, sur une largeur constante, on peut à l'aide de diagrammes spatio-temporels mesurer la vitesse du front de l'écoulement. Les écoulements étant stationnaires, la conservation de la masse implique que la vitesse du front est exactement égale à la vitesse moyenne de l'écoulement. Comme dans les expériences précédentes, la vitesse de ces différents écoulements présente une singularité pour

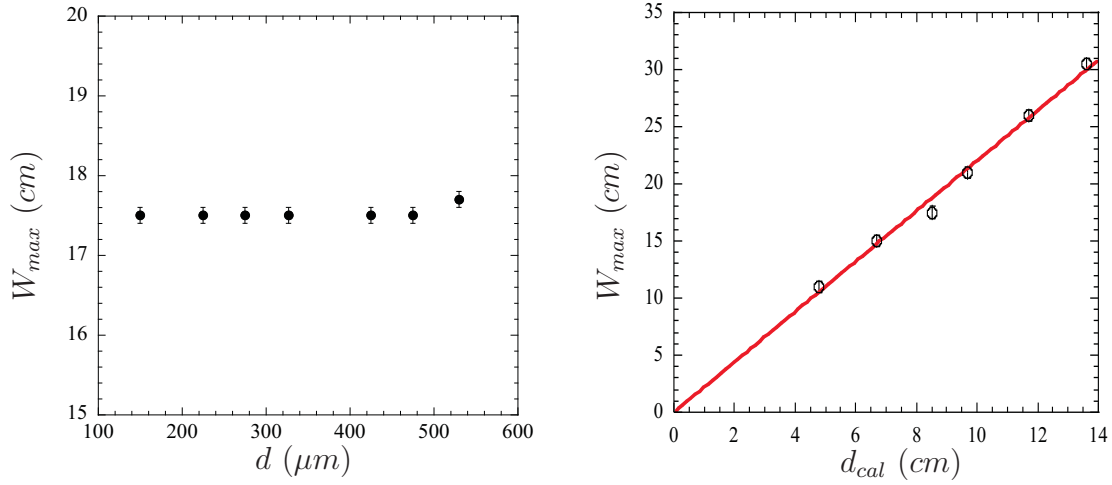


FIG. 4.2 – La largeur maximale du dépôt  $W_{max}$  est indépendante de la taille des billes qui coulent  $d$  ( $\theta=25.7^\circ$ ), mais dépend linéairement du diamètre de la calotte  $W_{max} = 2,22d_{cal}$ .

$d = d_c$  (figure 4.3), la vitesse du front de l'écoulement est minimum pour cette valeur du diamètre.

### 4.1.3 Etude de $h_{stop}$

Les dernières expériences réalisées permettent d'étudier les variations de l'épaisseur du dépôt ( $h_{stop}$ ) laissé par un écoulement à bords libres. Dans ces expériences, la taille des billes qui coulent et l'angle d'inclinaison varient. Les résultats regroupant les variations de  $h_{stop}$  en fonction de l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  pour différentes tailles de billes qui coulent sont présentés en figure 4.4. Nous constatons dans un premier temps que les courbes sont classées dans toute la gamme d'angles que nous avons étudiée. La figure 4.5 présente les variations de  $h_{stop}$  en fonction de  $d$  pour différents angles d'inclinaison. On remarque que quel que soit l'angle d'inclinaison  $\theta$ , les variations de  $h_{stop}$  sont les mêmes :  $h_{stop}$  est maximum pour  $d = d_c$ .

## 4.2 Résultats expérimentaux sur les autres plans

Afin de vérifier que la rugosité relative est le paramètre contrôlant l'écoulement, nous avons effectué des expériences similaires sur d'autres plans ( $225 \mu m < \lambda < 5000 \mu m$ ). Ces expériences permettent aussi de faire varier les caractéristiques du plan (le diamètre  $\lambda$  des billes collées, la compacité  $C$  du plan et donc l'espacement  $\epsilon_c$  entre les billes collées) (voir chap. 3, table. 3.1). Les

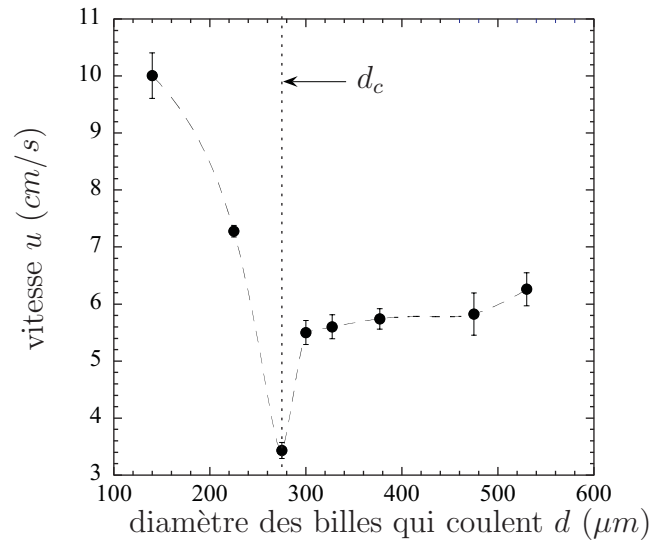


FIG. 4.3 – Vitesse moyenne des écoulements stationnaires en fonction de  $d$ . Pour  $d = d_c$  ( $=275 \mu\text{m}$ ), la vitesse  $u$  est minimum ( $\theta=25.7^\circ$ )

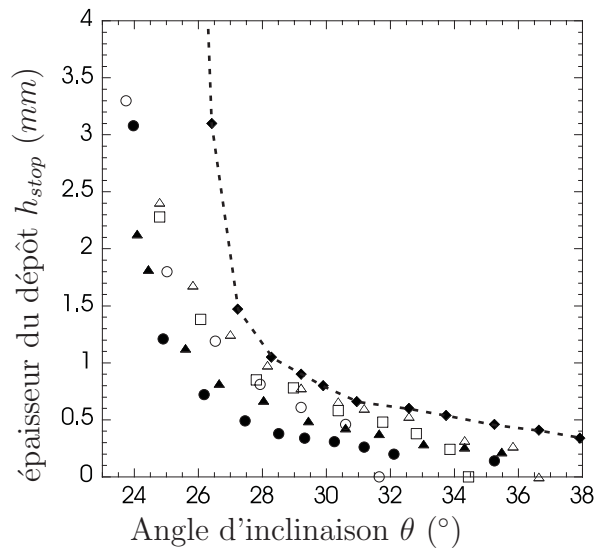


FIG. 4.4 – Epaisseur du dépôt  $h_{stop}$  pour différentes tailles de billes :  $\bullet$   $d=150 \mu\text{m}$  ;  $\blacktriangle$   $d=225 \mu\text{m}$  ;  $\blacklozenge$   $d=275 \mu\text{m}$  ;  $\triangle$   $d=327 \mu\text{m}$  ;  $\square$   $d=425 \mu\text{m}$  ;  $\circ$   $d=530 \mu\text{m}$ . Quelque soit l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  est maximum pour  $d = d_c$  ( $d_c = 275 \mu\text{m}$ )



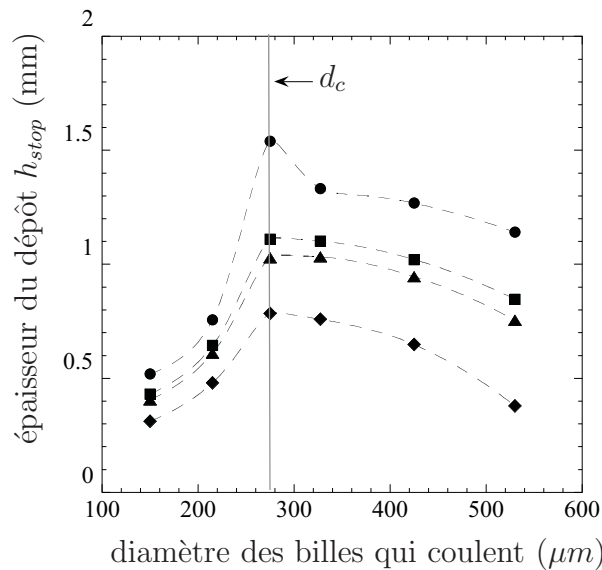


FIG. 4.5 – Épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  pour différents angles d'inclinaisons : ●  $\theta=27^\circ$  ; ■  $\theta=28^\circ$  ; ▲  $\theta=28.3^\circ$  ; ◆  $\theta=30^\circ$ . Pour  $d = d_c$ ,  $h_{stop}$  est maximum.

mêmes expériences de lâcher d'une masse donnée (mesure de longueur de dépôt  $L$ ), et d'écoulements stationnaires (mesure d'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt laissé par l'écoulement) ont été menées. Dans ces différentes configurations, il existe toujours un diamètre de billes qui coulent,  $d_c$ , pour lequel la longueur du dépôt  $L$  est minimum et l'épaisseur  $h_{stop}$  est maximum.

#### 4.2.1 $d_c$ fonction linéaire de $\lambda$ ?

On remarque tout d'abord que le diamètre  $d_c$  n'est pas toujours le même. Ce maximum de friction n'est donc pas un artéfact expérimental dû aux caractéristiques particulières d'un lot de billes. Ce diamètre  $d_c$  semble varier linéairement avec le diamètre des billes collées sur le plan  $\lambda$ . En effet, nous constatons que quelle que soit la taille des billes collées sur le plan ( $\lambda$ ),  $d_c$  est approximativement égal à  $\lambda/2$  avec de légères variations par rapport à cette valeur (figure 4.6). Cependant dans toutes nos expériences, les variations de  $d$  sont discontinues, ce qui ne nous permet pas d'avoir avec précision la valeur de  $d_c$  pour laquelle la friction basale est maximale. L'intervalle entre deux gammes de taille de chaque lot "monodisperse" est de  $50 \mu m$  environ. L'erreur sur la valeur de  $d_c$  pour laquelle la friction est maximale est donc de l'ordre de  $\pm 100 \mu m$ .

Pour les différents plans sur lesquels les expériences ont été réalisées, il existe un diamètre  $d_c$  de billes qui coulent pour lequel la friction est maximale.

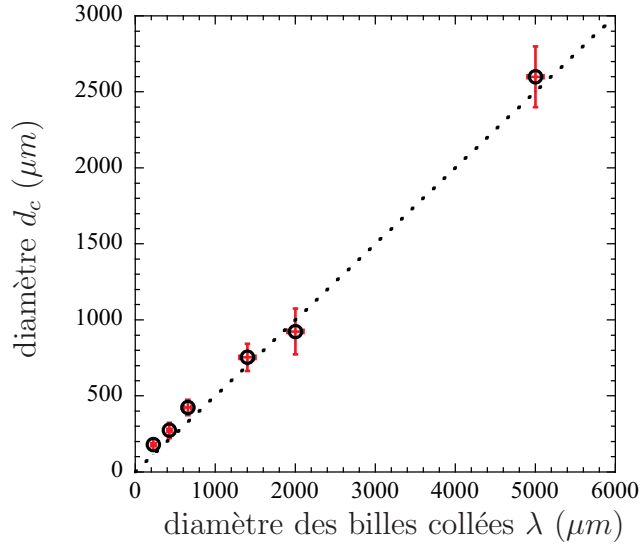


FIG. 4.6 –  $d_c$  obtenu sur différents plans est proche de  $\lambda/2$  (ligne pointillée). Les barres d'erreur (axe  $d_c$ ) sont dues au fait que la valeur de  $d_c$  n'est pas connue précisément à cause des discontinuités de  $d$ . Les barres d'erreur (axe  $\lambda$ ) prennent en compte la gamme de taille des billes collées.

### 4.3 Interprétation

Les résultats expérimentaux obtenus sur les différents plans sont interprétés dans cette partie. Seuls les résultats obtenus sur le plan de  $425 \mu\text{m}$  seront détaillés, mais l'interprétation reste la même pour les expériences sur les autres plans présentées précédemment.

Nous rappelons qu'il existe un diamètre de bille  $d_c$  pour lequel :

- la longueur du dépôt  $L$  est minimum,
- l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  est maximum,
- la vitesse moyenne du front de l'écoulement stationnaire  $u$  est minimum.

Les expériences montrent que le diamètre  $d_c$  est indépendant de l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$ .

La présence pour  $d = d_c$  d'un extremum pour  $h_{stop}$  et  $L$  est prévisible, car les deux grandeurs mesurées sont liées. Nous pouvons, pour les expériences de lâcher de volume constant, supposer en première approximation que la surface du dépôt est proportionnelle à celle d'un rectangle et dans ce cas, le volume est égal à :

$$V = aW L h_{stop}$$

où  $a$  est un coefficient qui dépend de la forme du dépôt. Comme le volume de billes est constant et que la largeur maximale  $W_{max}$  du dépôt est indépendante du diamètre des billes qui coulent  $d$  (fig. 4.2), on déduit que  $L$  et  $h_{stop}$  sont

inversement proportionnels.

L'existence d'un minimum d'étalement pour  $L$  peut être interprétée pour les deux cas limites :  $d \gg \lambda$  et  $d \ll \lambda$ .

- **Pour**  $d \gg \lambda$ , la longueur  $L$  et la vitesse  $u$  augmentent avec la taille  $d$  des billes qui coulent. Dans ce cas, les billes sont plus grandes que les rugosités du plan  $\lambda$  et que les espacements entre les billes collées sur le plan  $\epsilon_c$ . La rugosité relative est donc faible et les billes coulent facilement. L'écoulement est soumis à une friction décroissante quand la taille des billes qui coulent augmente. De plus, lorsque  $d$  augmente,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  diminuent (pour  $\theta = \theta_1$ ,  $h_{stop} \rightarrow \infty$ , pour  $\theta = \theta_2$ ,  $h_{stop}=0$ ). La plage d'angles d'inclinaison  $[\theta_1; \theta_2]$  pour laquelle un écoulement stationnaire uniforme est possible diminue quand  $d$  augmente. Pour des tailles de billes très grandes, cette plage d'angles est très petite (cas de  $d=1 \text{ mm}$ ) et tend vers 0 ( $d=2 \text{ mm}$ ,  $d=5 \text{ mm}$ ) : on observe un raidissement des courbes de  $h_{stop}$  (figure 4.7). Pour ces grands diamètres de billes, nous pouvons seulement définir un seul angle. Pour un angle d'inclinaison supérieur à cet angle, aucun dépôt ne reste sur le plan. Pour un angle d'inclinaison inférieur à cet angle, aucun écoulement stationnaire uniforme n'est observé. Quand  $d$  croît, la valeur de cet angle décroît, les billes de diamètre  $d$  peuvent alors couler sur des pentes de plus en plus faibles.

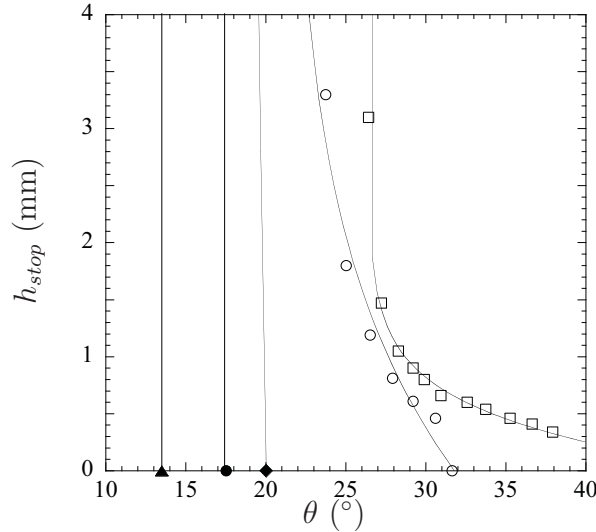


FIG. 4.7 –  $h_{stop}$  pour différentes tailles de billes :  $\square$   $d=275 \mu\text{m}$ ;  $\circ$   $d=530 \mu\text{m}$ ;  $\blacklozenge$   $d=1 \text{ mm}$  (pour  $\theta=19,4^\circ$ ,  $h_{stop}=4,5 \text{ mm}$ );  $\bullet$   $d=2 \text{ mm}$ ;  $\blacktriangle$   $d=5 \text{ mm}$ . La plage d'angles d'inclinaison  $[\theta_1; \theta_2]$  pour laquelle les écoulements stationnaires ont lieu décroît quand le diamètre des billes  $d$  augmente et tend vers 0 pour des grandes rugosités relatives  $d/\lambda$ .

On peut comparer ces résultats à ceux obtenus dans le cas du mouvement

d'une seule bille sur un plan rugueux [53]; ces résultats ont été obtenus dans le cas où le diamètre  $d$  de la bille qui coule est supérieur ou égal au diamètre des billes collées sur le plan  $\lambda$ . En effet, dans ces expériences, la vitesse ou la longueur caractéristique de piégeage d'une bille augmente avec le rapport de taille : la bille est soumise à une friction décroissante quand sa taille augmente.

Le décalage global des courbes de  $h_{stop}$  vers les petits angles quand  $d$  augmente est, lui aussi, cohérent avec les résultats obtenus lors des expériences d'une seule bille sur un plan rugueux. En effet, la courbe représentant  $h_{stop}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  permet de séparer dans l'espace  $(h, \theta)$  une région où aucun écoulement stationnaire uniforme ne peut être observé ( $h(\theta) < h_{stop}(\theta)$ ) : écoulement décéléré d'une région où les écoulements stationnaires uniformes sont observés ( $h(\theta) > h_{stop}(\theta)$ ). Le cas d'une seule bille pourrait se rapprocher du cas  $h \rightarrow 0$  pour les écoulements granulaires. Dans les expériences menées concernant le mouvement d'une seule bille sur un plan incliné [53], l'angle séparant le mouvement uniforme du mouvement décéléré d'une seule bille diminue quand le rapport de taille augmente, de même façon que  $\theta_2$  diminue.

- **Pour**  $d \ll \lambda$  la longueur  $L$  du dépôt croît avec la diminution du diamètre  $d$  des billes qui coulent. Ce comportement est plus surprenant, mais l'interprétation que nous en faisons est le remplissage des trous du plan par les petites billes, qui diminue la rugosité du plan, et permet aux petites billes de s'écouler plus facilement sur ce plan. Cette interprétation est confirmée par les observations directes du plan.

## 4.4 Interprétation en termes de friction

Dans cette partie, nous interprétons les résultats obtenus sur le plan de  $425 \mu m$  en termes de friction basale du matériau granulaire sur le plan incliné rugueux. En effet, le coefficient de friction  $\mu$  à la base de l'écoulement granulaire est défini par :  $\mu = \tan \theta$ . Comme on l'a vu dans la partie 2, la friction basale  $\mu$  peut être reliée au paramètre inertiel  $I$  défini par :

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{\frac{P}{\rho}}}$$

avec

- $P$  : la contrainte normale avec  $P = \rho gh \cos \theta$ ,
- $\dot{\gamma}$  : le taux de cisaillement avec  $\dot{\gamma} = u/h$ ,
- $\rho$  : la masse volumique de la couche granulaire.

On peut calculer  $P$  et  $\dot{\gamma}$  pour chaque expérience et en déduire les courbes de  $\mu(I)$  pour chaque taille de bille utilisée.

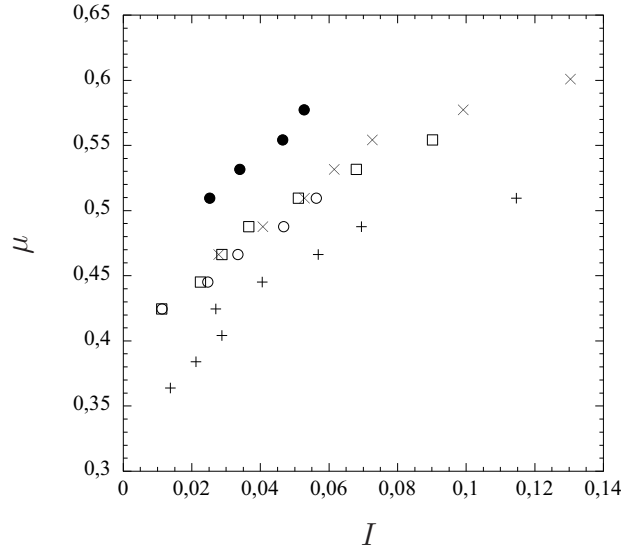


FIG. 4.8 – La friction basale augmente avec le paramètre inertiel  $I$  pour différents diamètres  $d$  de billes qui coulent :  $\circ$   $d=132 \mu\text{m}$ ,  $\square$   $d=225 \mu\text{m}$ ,  $\bullet$   $d=275 \mu\text{m}$ ,  $\times$   $d=325 \mu\text{m}$ ,  $+$   $d=450 \mu\text{m}$ . La friction basale est maximum pour  $d = d_c$ .

Les courbes de friction basale  $\mu$  en fonction du paramètre inertiel  $I$  se classent pour les différents diamètres de billes qui coulent (fig. 4.8). Pour  $d < d_c$ , la friction basale croît avec le diamètre des billes qui coulent  $d$ , pour  $d > d_c$ , la friction basale décroît avec le diamètre  $d$  des billes. La friction basale est maximale pour  $d = d_c$ .

Après s'être intéressé à la rhéologie locale de ces écoulements granulaires monodisperses, on peut s'intéresser à la loi d'échelle qui régit ces écoulements. Cette loi d'échelle relie le nombre de Froude ( $Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$ ) et la hauteur de l'écoulement adimensionnée par  $h_{stop}$  :

$$\frac{u}{\sqrt{gh}} = \beta \frac{h}{h_{stop}}$$

Avec les résultats présentés précédemment, on peut calculer le nombre de Froude. On voit que cette loi d'échelle est vérifiée, et on trouve  $\beta = 0,14$  (fig 4.9). On retrouve une valeur du coefficient  $\beta$  identique à celle trouvée par O. Pouliquen [41] ( $\beta = 0,136$ ).

Cette interprétation montre que la rhéologie globale des écoulements granulaires monodisperses est indépendante de la rugosité relative, c'est-à-dire, que quelque soit le diamètre  $d$  des billes qui coulent,  $Fr = \beta h/h_{stop}$ , avec le même coefficient  $\beta$ . Cependant, les résultats concernant la friction basale en fonction du nombre inertiel  $I$  montrent que pour un diamètre de billes  $d_c$ , la friction basale est maximum. Cela montre que l'influence de la rugosité sur les écoulements

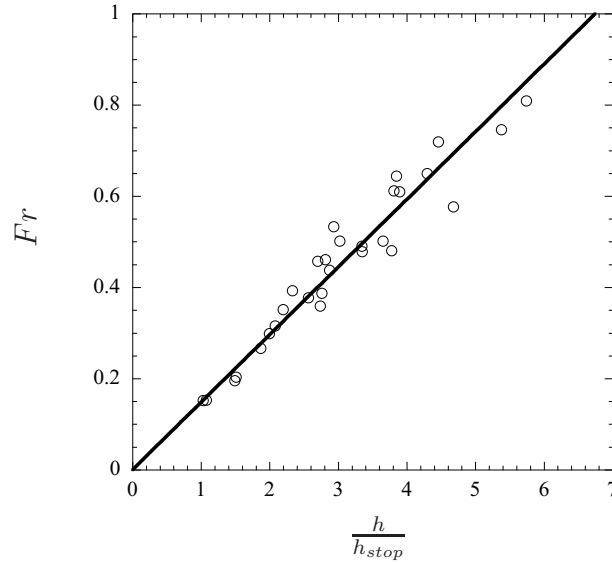


FIG. 4.9 – Nombre de Froude en fonction du rapport  $\frac{h}{h_{stop}}$  pour des billes de verre :  $Fr = 0,14 \frac{h}{h_{stop}}$  (avec  $d=132 \mu m, 225 \mu m, 275 \mu m, 325 \mu m$  et  $450 \mu m$ , coulant sur le plan n°2).

granulaires est prise en compte dans l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$ .

## 4.5 Résultats expérimentaux sur les autres plans

Dans cette partie, nous présentons des résultats obtenus sur les autres plans rugueux. Dans un premier temps, nous nous intéresserons au remplissage des trous du plan dans le cas où la rugosité relative  $d/\lambda$  est faible, et à l'influence de ce remplissage sur la friction basale des écoulements monodisperses. Dans un second temps, l'influence sur l'écoulement de la sphéricité des matériaux utilisés sera présentée.

### 4.5.1 Remplissage des trous du plan

#### Influence sur la friction

Afin de comprendre l'impact sur la friction basale du remplissage des trous du plan, on se place dans le cas où le diamètre des billes qui coulent est très petit devant le diamètre des billes collées sur le plan. Pour faire varier largement le diamètre des petites billes, sans utiliser des petites billes cohésives de diamètre inférieur à  $150 \mu m$ , nous utilisons un plan sur lequel on a collé des billes de  $2 mm$  (tab. 3.1). Les petites billes, pour lesquelles le ratio  $d/\lambda$  est très petit,

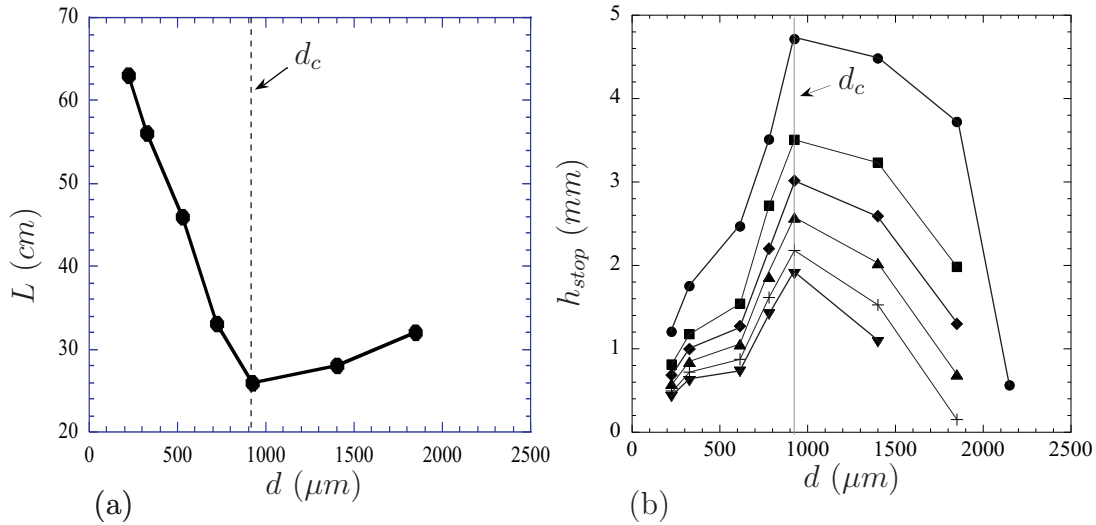


FIG. 4.10 – (a) Longueur du dépôt en fonction du diamètre  $d$  des billes qui coulent ( $\theta=26^\circ$ ); (b)  $h_{stop}$  pour différents angles d’inclinaison :  $\bullet$   $\theta=24^\circ$ ;  $\blacksquare$   $\theta=26^\circ$ ;  $\blacklozenge$   $\theta=27^\circ$ ;  $\blacktriangle$   $\theta=28^\circ$ ;  $+$   $\theta=29^\circ$ ;  $\blacktriangledown$   $\theta=30^\circ$ . Pour  $d_c=925$   $\mu\text{m}$ ,  $L$  est minimum et  $h_{stop}$  est maximum (plan n°4,  $\lambda=2\text{mm}$ ).

remplissent les trous du plan. Par exemple, dans le cas de billes de  $225$   $\mu\text{m}$ , un trou du plan contient approximativement 30 billes. Les mêmes expériences que précédemment ont été menées. Le comportement global est le même que celui décrit précédemment avec  $h_{stop}$  maximum,  $L$  minimum et  $u$  minimum pour  $d_c=925$   $\mu\text{m}$  (fig. 4.10). Dans la suite, on s’intéressera seulement aux variations de  $h_{stop}$ .

Si on s’intéresse aux épaisseurs du dépôt en terme de nombre de billes ( $h_{stop}/d$ ) (fig. 4.11), on remarque que :

- $d_c$  peut être un extremum local (la friction peut être plus importante pour les petites billes),
- les valeurs de  $h_{stop}/d$  correspondant à  $d=225$   $\mu\text{m}$  et  $d=327$   $\mu\text{m}$  sont les mêmes.

Bien qu’il n’y ait que deux valeurs de diamètre de billes, la valeur de  $h_{stop}/d$  semble tendre vers une valeur constante quand  $d \rightarrow 0$ . Ce comportement n’a pas été observé sur les autres plans, car la plage des petites tailles des billes qui coulent par rapport à la taille des billes collées n’est pas assez large.

Pour les petites billes, tous les trous du plan sont remplis, et le plan est alors constitué d’un mélange de grosses billes ( $2$   $\text{mm}$ ) collées et de petites billes ( $225$   $\mu\text{m}$  ou  $327$   $\mu\text{m}$ ). Une possibilité d’interprétation du fait que  $h_{stop}/d$  est constant pour  $d=225$   $\mu\text{m}$  et  $d=327$   $\mu\text{m}$  revient à considérer que la friction est principalement due à la présence de petites billes dans les trous, le sommet des grosses billes ayant une influence négligeable sur la friction. On peut donc supposer que les billes coulent sur un plan constitué de billes de la même taille qu’elles (c’est-à-dire constitué

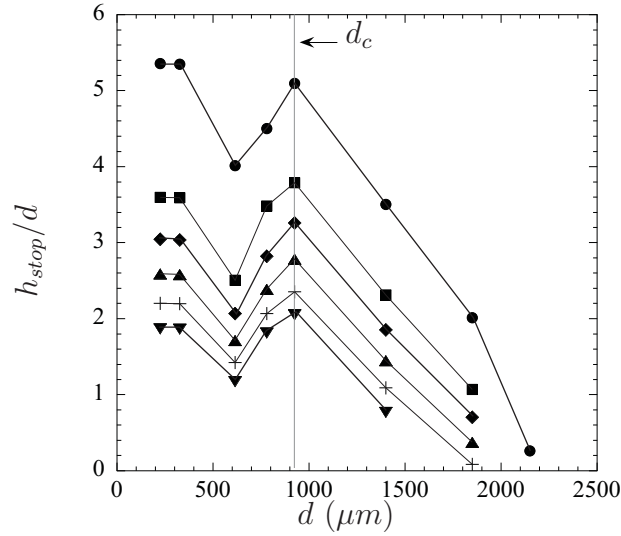


FIG. 4.11 –  $h_{stop}/d$  pour différents angles d'inclinaison :  $\bullet$   $\theta=24^\circ$  ;  $\blacksquare$   $\theta=26^\circ$  ;  $\blacklozenge$   $\theta=27^\circ$  ;  $\blacktriangle$   $\theta=28^\circ$  ;  $+$   $\theta=29^\circ$  ;  $\blacktriangledown$   $\theta=30^\circ$ . Il existe un diamètre  $d_c$  pour lequel  $h_{stop}/d$  est un maximum local.

de celles qui remplissent les trous du plan). Dans ce cas, le comportement est indépendant de la taille des petites billes, ce qui explique les valeurs identiques de  $h_{stop}/d$  pour  $d=225\mu m$  et  $d=327\mu m$ . Cette conclusion est valable si les billes sont suffisamment petites pour remplir les trous du plan sous forme d'un réseau aléatoire.

### Lissage de la rugosité

A cause du remplissage des trous du plan, nous supposons aussi que le comportement de billes de  $225\mu m$  coulant sur un plan de  $2mm$  est le même que celui des billes de  $225\mu m$  coulant sur un plan de  $225\mu m$ , à condition que les compacités du plan de  $225\mu m$  et des trous remplis du plan de  $2mm$  soient similaires. Il est alors intéressant de comparer les billes de  $225\mu m$  s'écoulant sur :

- le plan de  $225\mu m$  ( $C=0,63$ ) ;
- le plan de  $2mm$  ( $C=0,65$ ).

Dans le second cas, les billes coulent sur un plan constitué de petites billes de  $225\mu m$  non collées retenues par les billes de  $2mm$  collées dont seule la surface arrondie et lisse des sommets apparaît (fig. 5.5(c)). A l'intérieur des trous, les billes de  $225\mu m$  sont distribuées aléatoirement avec une compacité comprise entre 0,5 et 0,7. Cette compacité est aussi la compacité d'une section plane d'un empilement aléatoire tridimensionnel. Elle est proche de celle du plan n°1 ( $\lambda=225\mu m$ ).

Les résultats montrent que les courbes de  $h_{stop}$  sont très proches l'une de l'autre pour les deux plans à partir d'un angle d'inclinaison  $\theta \sim 27^\circ$  (fig. 4.12), bien que pour des angles d'inclinaison plus faibles, les courbes ne soient pas les



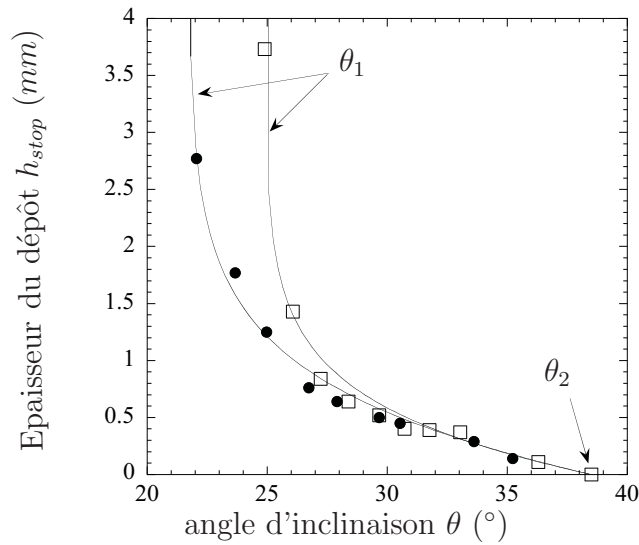


FIG. 4.12 –  $h_{stop}$  en fonction de  $\theta$  pour les mêmes billes de  $225 \mu m$  s'écoulant sur différents plans : • ( $\lambda = 225 \mu m$ ) ; □ ( $\lambda = 2 mm$ ). Les courbes représentent les données de  $h_{stop}$  fittées par la fonction 5.1 et les deux paramètres associés  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

mêmes.

A partir de ces résultats, on en déduit que le comportement des billes de  $225 \mu m$  coulant sur un plan de  $2 mm$  semble équivalent à celui de billes de  $225 \mu m$  coulant sur un plan de  $225 \mu m$ . Ce résultat est surprenant parce que cela signifie qu'il y a peu d'influence du sommet lisse des grosses billes. Il est d'autant plus surprenant que l'équivalence semble surtout vraie pour des écoulements minces pour lesquels on s'attendrait à une influence plus marquée de la structure du fond rugueux. Cependant, la rugosité d'un ensemble de billes collées sur un même plan est différente de celle d'un empilement aléatoire 3D : cette différence de rugosité pourrait être une des explications concernant la différence des courbes de  $h_{stop}$  pour les faibles angles d'inclinaison du plan  $\theta$ .

#### 4.5.2 Remarque : influence de la sphéricité des particules

Tous les résultats présentés précédemment ont été obtenus en travaillant sur des plans rugueux constitués d'une monocouche de billes sphériques. La qualité des billes qui coulent et celles qui sont collées sur le plan ont-elle une influence sur la rhéologie de ces écoulements granulaires ?

Pour cela, nous avons tout d'abord étudié l'influence de la sphéricité des billes qui coulent. Tous les lots de billes "non sphériques" sont constitués d'environ 60% de billes sphériques, 25 % de billes non sphériques et 15 % d'échardes, avec le critère de sphéricité défini en Annexe A.2. Les échardes sont des fragments de billes.

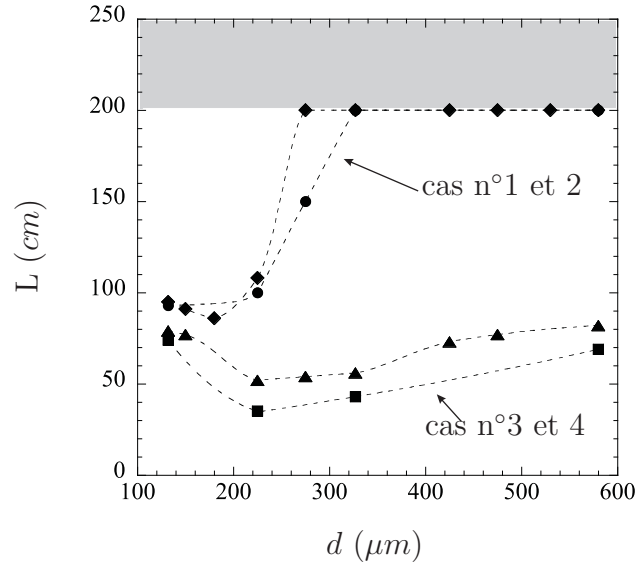


FIG. 4.13 – Longueur en fonction du diamètre des billes qui coulent  $d$  : ◆ billes sphériques coulant sur un plan constitué d’une monocouche de billes sphériques (cas 1); ● billes non sphériques coulant sur un plan constitué d’une monocouche de billes sphériques (cas 2); ▲ billes sphériques coulant sur un plan composé de plusieurs couches de billes (cas 3); ■ billes non sphériques coulant sur un plan constitué de plusieurs couches de billes (cas 4).  $\lambda=225 \mu m$ ;  $\theta=25,7^\circ$ . Dans les expériences pour lesquelles il ne reste pas de dépôt sur le plan, on a fixé  $L=200 cm$ .

Nous avons ensuite étudié l’influence d’un plan rugueux constitué de plusieurs couches de ce lot de billes “non sphériques”. Il existe sur ce plan une variation spatiale du nombre de couches de billes. La longueur du dépôt ( $L$ ) a été étudiée dans les quatre configurations suivantes :

- billes sphériques coulant sur le plan n°1 constitué d’une monocouche de billes sphériques, appelé par la suite “bon” plan (cas 1);
- billes “non-sphériques” coulant sur le “bon” plan (cas 2);
- billes sphériques coulant sur un plan sur lequel sont collées, suivant la position, une à trois couches de billes de  $225 \mu m$  non-sphériques, appelé par la suite “mauvais” plan (cas 3);
- billes “non-sphériques” coulant sur le “mauvais” plan (cas 4).

On remarque qu’il existe, dans les quatre configurations, un diamètre pour lequel la longueur d’étalement est minimum.

En comparant les résultats obtenus dans les configurations d’un côté 1 et 2, de l’autre 3 et 4, c’est à dire dans les configurations où billes sphériques et billes non sphériques coulent sur le même plan, on remarque que les courbes de longueurs obtenues sur le même plan sont similaires. En fait, durant l’écoulement,

à cause de la ségrégation, les écharde, qui représentent 15 % du volume initial, sont présentes à la surface de l'écoulement, et elles ont ainsi peu d'influence sur la friction basale de l'écoulement. Cependant, pour les expériences réalisées sur le mauvais plan (cas n°3 et 4), les longueurs pour les billes non sphériques sont 1,6 fois plus petites que les longueurs pour les billes sphériques (fig 4.13). La sphéricité des billes qui coulent semble avoir une légère influence sur l'étalement. En comparant les résultats expérimentaux obtenus dans les configurations 1 et 3, c'est à dire des billes sphériques coulant sur un "bon" plan et sur un "mauvais" plan, on remarque que la qualité du plan est très importante. Le même effet est observé en comparant les configurations 2 et 4. Tout d'abord, la longueur dans le cas d'un "bon plan" est plus grande que dans le cas d'un "mauvais plan". Ce résultat peut s'expliquer par le fait que la présence des écharde augmente la rugosité du "mauvais plan". On remarque aussi dans le cas du "bon plan", que pour des billes supérieures à une certaine taille ( $275 \mu m$  pour ces expériences), aucun dépôt ne reste sur le plan, c'est à dire  $h_{stop} = 0$  (la longueur du dépôt est tracée arbitrairement égale à  $200 cm$  dans ce cas). Dans le cas du "mauvais" plan, pour des tailles de billes supérieures à  $275 \mu m$ , il existe toujours des dépôts, c'est à dire  $h_{stop} \neq 0$ . Le comportement des billes, dans le cas où  $d \gg d_c$ , est vraiment différent. On peut interpréter ce résultat en considérant que le "mauvais" plan est plus rugueux que le "bon" plan. Mais on voit aussi qu'il ne s'agit pas juste d'une augmentation de rugosité similaire à celle qu'on aurait obtenue en augmentant la taille des rugosités puisque la valeur de  $d_c$  ne semble pas avoir changé de manière significative.

Ces résultats sont en accord avec ceux présentés par F. Da Cruz [11]. En effet, pour un même matériau (billes de verre) s'écoulant sur différentes rugosités, les courbes de  $h_{stop}$  se décalent vers les grands angles pour une augmentation de la rugosité du plan (fig. 2.12). Cela implique alors que pour un angle donné, l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  est plus importante dans le cas d'un plan plus rugueux. Dans le cas de matériau non-sphérique (sable) s'écoulant sur différentes rugosités, les résultats présentés par Da Cruz [11] montrent que l'influence de la rugosité est faible sur ces écoulements : les courbes de  $h_{stop}$  sont les mêmes pour différentes rugosités.

En conclusion, la sphéricité des billes qui coulent a seulement une légère influence sur le comportement global. Par contre, la qualité du plan est très importante : l'effet principal est que la rugosité relative d'un plan peut être totalement lisse (cas 1 et 2) ou rugueuse (cas 3 et 4) pour des billes de diamètre supérieur à  $d_c$ .

## 4.6 Conclusion

On a montré pour les écoulements granulaires monodisperses, qu'il existe un diamètre  $d_c$  pour lequel

- la longueur du dépôt  $L$  est minimum,

- l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt est maximum,
- la vitesse moyenne du front de l'écoulement stationnaire  $u$  est minimum.

Ces résultats sur  $L$ ,  $h_{stop}$  et  $u$  sont compatibles avec l'existence d'un maximum de friction. Pour  $d < d_c$ , la friction croît avec le diamètre des billes qui coulent  $d$ , pour  $d > d_c$ , la friction décroît avec le diamètre des billes  $d$ , et la friction est maximale pour  $d = d_c$ . Ce diamètre  $d_c$  ne dépend pas de l'angle d'inclinaison du plan rugueux. Il semble fixé par la taille des rugosités du plan. Pour cette raison, on va aborder son étude dans la partie suivante au moyen de considérations purement géométriques sur les rugosités du plan.

# Chapitre 5

## Modèle de stabilité d'une bille sur le plan

### 5.1 Angle minimal de stabilité

#### 5.1.1 Courbes de $h_{stop}$ et $\theta_2$

Pour un angle d'inclinaison  $\theta$  du plan, une couche de matériau granulaire s'écoule avec une épaisseur  $h$  constante. Le dépôt laissé par l'écoulement a une épaisseur notée  $h_{stop}$ . Ceci permet de tracer la courbe  $h_{stop}(\theta)$ . Comme on l'a déjà dit, cette courbe divise l'espace des paramètres  $(h, \theta)$  en deux régions : une région où l'écoulement stationnaire est impossible ( $h < h_{stop}$ ), et une région où l'écoulement stationnaire est possible ( $h > h_{stop}$ ).

A partir des courbes de  $h_{stop}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ , on peut définir deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Pour des angles d'inclinaison inférieurs à  $\theta_1$ , aucun écoulement stationnaire ne peut être observé quelque soit l'épaisseur de la couche de matériau granulaire ( $\theta_1$  correspond au cas où  $h_{stop} \rightarrow \infty$ ). Pour des angles d'inclinaison supérieurs à  $\theta_2$ , aucun dépôt ne reste sur le plan (cela correspond au cas où  $h_{stop} = 0$ ) (fig. 5.1).

Dans nos expériences, on peut déterminer expérimentalement les valeurs de  $\theta_2$ . En effet, pour un angle d'inclinaison  $\theta$  proche de  $\theta_2$ , les billes s'écoulent laissant un dépôt d'épaisseur  $h_{stop}$  faible et proche de 0. On augmente alors un peu l'angle d'inclinaison du plan et on refait l'expérience. Si  $h_{stop} = 0$ , on diminue l'angle et on refait l'expérience. Par itérations successives, on peut déterminer l'angle d'inclinaison  $\theta$  pour lequel l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  est nulle. Cette détermination expérimentale donne une précision sur la valeur de  $\theta_2$  de l'ordre de 0,5 °.

On peut aussi déterminer les valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  à partir de toutes les données expérimentales de  $h_{stop}$  en les fittant par la fonction suivante (proposée par Pou-

liquen [41]) :

$$\tan \theta = \tan \theta_1 + (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \exp\left(\frac{-h_{stop}}{ld}\right) \quad (5.1)$$

où  $d$  est le diamètre des billes qui coulent et  $l$  est un paramètre ajustable représentant l'épaisseur caractéristique sur laquelle  $h_{stop}$  varie. Cette détermination donne une précision sur la valeur de  $\theta_2$  de l'ordre de  $0,3^\circ$ .

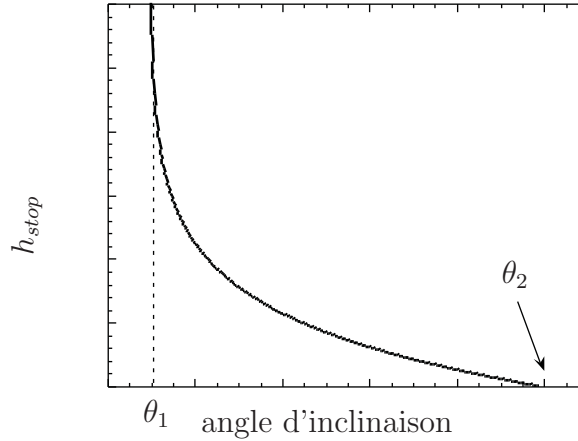


FIG. 5.1 – Courbe théorique de  $h_{stop}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$ . Pour  $\theta < \theta_1$ , il n'existe pas d'écoulement stationnaire uniforme, pour  $\theta > \theta_2$ ,  $h_{stop}=0$  : il ne reste plus de bille sur le plan après le passage de l'écoulement.

### 5.1.2 $\theta_2$ présente un extremum pour le maximum de friction

Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence l'existence d'un diamètre  $d_c$  pour lequel la friction est maximale, c'est à dire pour lequel les grandeurs caractéristiques de l'écoulement présentent un extremum (longueur du dépôt  $L$  minimum, épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  maximum, et vitesse  $u$  minimum). A partir des courbes de  $h_{stop}$  précédemment obtenues (fig 4.4), on peut déterminer les variations de  $\theta_2$  en fonction du diamètre  $d$  des billes qui coulent (fig 5.2).

On remarque tout d'abord que les courbes de  $h_{stop}$  étant classées, un maximum de friction pour  $d = d_c$  se traduit aussi par un maximum de  $\theta_2$ . De plus, les angles  $\theta_2$  déterminés à partir des courbes de  $h_{stop}$  ou mesurés directement expérimentalement sont très proches. On voit que dans tous les cas  $\theta_2$  présente un maximum pour  $d = d_c$ .

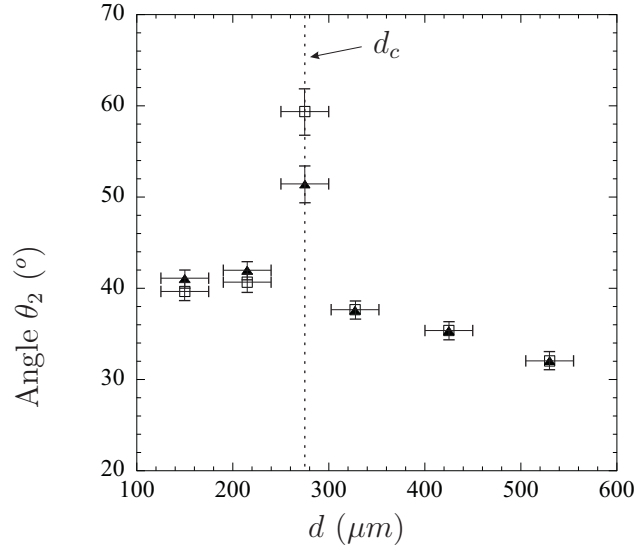


FIG. 5.2 –  $\theta_2$  en fonction de  $d$  : ▲ mesures directes, □ résultats obtenus à partir des courbes de  $h_{stop}$  (plan n°2).

### 5.1.3 Bases du modèle

On a vu précédemment que  $\theta_2$  est l'angle minimal pour lequel aucun dépôt ne reste sur le plan incliné, c'est-à-dire pour lequel  $h_{stop} = 0$ .  $\theta_2$  est l'angle pour lequel on passe d'une configuration où  $h_{stop} \neq 0$  à une configuration où  $h_{stop} = 0$ . Le niveau  $h_{stop} = 0$  a d'abord dû être défini expérimentalement : on remarque qu'en remplissant les trous du plan (plan n°5) avec des petites billes, aucune déviation de la nappe laser (ce qui implique que l'épaisseur est égale à 0) n'est observée tant que les petites billes sont en dessous du sommet des billes collées sur le plan. Cela signifie qu'un plan où seulement les trous sont remplis de petites billes est considéré comme n'ayant aucun dépôt avec notre méthode de mesure. De cette observation expérimentale, on déduit que le niveau  $h_{stop} = 0$  correspond au plan tangent au sommet des billes collées sur le plan.

Considérons une seule bille, de diamètre  $d$  plus grand que le diamètre  $\lambda$  des rugosités, posée immobile sur le plan rugueux. La bille est initialement stable sur le plan, et son sommet est au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$ . On peut déterminer l'angle pour lequel la bille va tomber, c'est-à-dire l'angle pour lequel la bille ne sera plus dans sa position stable. Cet angle est son angle de stabilité. Pour un angle d'inclinaison inférieur à cet angle de stabilité, on a  $h_{stop} \neq 0$ , étant donné que le sommet de la bille est au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$ . Pour un angle d'inclinaison  $\theta$  supérieur à cet angle de stabilité,  $h_{stop}$  devient égal à 0, car il n'y a plus de bille présente au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$ . Dans le cas d'écoulements granulaires, on peut considérer que dans la limite  $h_{stop} \rightarrow 0$ , les billes vont réagir

comme des billes isolées, c'est pourquoi on s'intéresse par la suite à la stabilité de la bille la plus stable qui est au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$  : cette bille est alors la dernière bille qui tombera quand on augmentera l'angle et qui entraînera  $h_{stop} = 0$ . Alors, l'angle de stabilité pour lequel cette bille particulière devient instable, est l'angle pour lequel toutes les billes au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$  ne seront plus présentes sur le plan et donc on aura bien  $h_{stop} = 0$ .

Notre modèle est basé sur le calcul de cet angle de stabilité. L'angle  $\theta_2$  pourra être comparé avec cet angle de stabilité.  $\theta_2$  est expérimentalement l'angle pour lequel aucun dépôt ne reste sur le plan après un écoulement. Par conséquent, les mesures de  $h_{stop}$  et donc de  $\theta_2$  sont déterminées par un phénomène d'arrêt. Cependant, l'angle de stabilité est déterminé à partir d'un phénomène de "start", car nous considérons la stabilité d'une bille initialement au repos. L'angle de stabilité est l'angle pour lequel la bille devient instable et non pas l'angle pour lequel une bille en mouvement ne s'arrête pas. Les travaux concernant le mouvement d'une seule bille sur un plan rugueux [51] montrent que le "libre parcours moyen" dépend fortement du rapport de taille  $d/\lambda$  et de l'angle d'inclinaison. Cependant, l'écart d'angle séparant la configuration où la bille s'arrête sur le plan de la configuration où la distance parcourue par la bille est supérieure à la longueur du plan, est inférieur à  $2^\circ$  quelque soit le rapport de taille  $d/\lambda$ . Ces résultats montrent que dans le cas du mouvement d'une seule bille, l'angle de stabilité  $\theta_s$  peut être supposé égal à l'angle  $\theta_2$ .

Pour notre modèle de stabilité, le plan rugueux est défini par deux paramètres : le diamètre des billes collées  $\lambda$  et la compacité du plan  $C$ . La compacité permet de déterminer, en supposant que le plan est ordonné selon un réseau triangulaire, l'espacement moyen  $\epsilon_c$  entre deux billes collées sur le plan. Le modèle consiste donc à déterminer géométriquement l'angle correspondant à la limite de stabilité d'une seule bille posée sur le plan. Cet angle de stabilité dépend de la position de la bille et du critère de stabilité choisi. Nous présenterons le modèle dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels.

## 5.2 Présentation du modèle à deux dimensions

Dans cette partie, nous présentons le modèle de stabilité dans le cas à deux dimensions. Le plan rugueux est alors constitué d'une série de billes, l'espacement entre deux billes est calculé à partir de la compacité moyenne de la ligne rugueuse. Cette modélisation du support rugueux à l'aide d'une valeur moyenne semble pertinente à la vue des résultats d'une bille coulant sur un support rugueux. En effet, des simulations numériques [15] ont montré que la vitesse moyenne de la bille  $\bar{u}$  coulant sur un plan rugueux non ordonné peut être approximée par la vitesse moyenne d'une bille coulant sur un plan rugueux régulièrement espacé, tel que les espacements soient égaux à la moyenne des espacements dans le cas



désordonné (fig.2.17).

La position de la bille dont on étudie la stabilité dépend de son diamètre. On peut définir tout d'abord le diamètre  $d_h$  qui correspond au diamètre de la bille touchant deux billes adjacentes du plan et tangente au niveau  $h_{stop} = 0$  (fig 5.3.b). Ce diamètre  $d_h$  vérifie :

$$d_h = \frac{(\lambda + \epsilon_c)^2}{4\lambda}$$

### 5.2.1 Choix de la bille

Le point fondamental de notre modèle est que suivant son diamètre, le choix de la bille dont on étudie la stabilité sera différent.

Pour des diamètres de billes supérieurs à  $d_h$ , le choix de la bille est simple : la bille considérée est tangente aux deux billes du plan, et le sommet de cette bille est au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$  (fig 5.3.a). La chute de cette bille entraînera donc  $h_{stop} = 0$ . Mais dans le cas de billes ayant un diamètre inférieur à  $d_h$ , les trous du plan seront remplis de petites billes. La position exacte de la bille dont on étudie la stabilité n'est pas connue, car elle dépend de l'empilement des billes dans les trous du plan. Nous ne pouvons pas déterminer la répartition exacte des billes dans les trous du plan. Cependant, la position de la bille la plus stable, qui imposera lors de sa chute  $h_{stop} = 0$ , est bien définie : c'est la bille tangente à une bille du plan et tangente au niveau  $h_{stop} = 0$  (fig 5.3.c). En effet, toute bille située plus haut sera plus instable, toute bille située plus bas n'entraîne pas  $h_{stop} \neq 0$ . Le choix de la bille dont on étudie la stabilité étant maintenant clairement défini dans toutes les configurations, on s'intéresse alors au critère de stabilité.

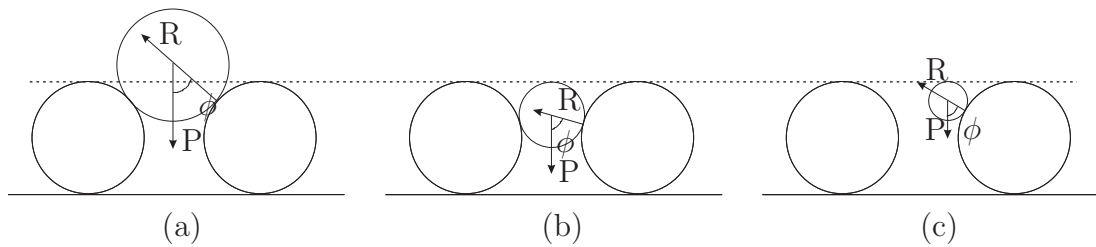


FIG. 5.3 – Bille choisie et critère de stabilité dans les différents cas : (a)  $d > d_h$  ; (b)  $d = d_h$  et (c)  $d < d_h$ . La ligne pointillée représente le niveau  $h_{stop} = 0$ . La stabilité de la bille est maximum pour  $d = d_h$ . Représentation pour un angle d'inclinaison  $\theta=0$ .

### 5.2.2 Critère de stabilité

La bille considérée est soumise à deux forces, son poids  $\vec{P}$  et la force de contact  $\vec{R}$  entre la bille considérée et la bille du plan. La direction de  $\vec{R}$  dépend de l'angle

d'inclinaison  $\theta$  du plan et du rapport de taille entre les deux billes. L'angle entre les deux forces  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  est noté  $\phi$  (angle non orienté). L'angle  $\theta_2$  est l'angle pour lequel la bille considérée, initialement au repos, est instable. Le critère de stabilité de la bille considérée est équivalent à un critère sur  $\phi$ . Si  $\phi = 0$ , la bille considérée est instable, si  $\phi > 0$  la bille est stable. Il est à noter que la valeur de l'angle  $\theta_2$  est liée à la valeur de l'angle  $\phi$ . En effet, si on incline le plan d'un angle  $\theta$ , le poids est toujours vertical et dirigé vers le bas. Le vecteur représentant la force de contact entre la bille considérée et la bille du plan va tourner d'un angle  $\theta$ . La condition pour laquelle la bille est instable,  $\phi = 0$ , correspond au cas où l'angle d'inclinaison du plan est égal à  $\theta_2$ . On en déduit que l'angle  $\theta_2$  est égal à l'angle  $\phi$  pris dans le cas où  $\theta = 0$ .

Avec ce critère de stabilité et le critère de choix de la dernière bille qui tombe précédemment décrit, l'angle de stabilité est maximum pour la bille dont le centre est le plus bas, c'est à dire pour la bille de diamètre  $d_h$ , avec :

$$d_h = \frac{(\lambda + \epsilon_c)^2}{4\lambda}$$

On voit que le maximum de friction, aussi décrit par un maximum de l'angle  $\theta_2$ , correspond à un maximum de l'angle de stabilité : il est donc dû à des raisons purement géométriques.

### 5.3 Présentation du modèle à trois dimensions

Dans cette partie, nous présentons le modèle de stabilité dans le cas à trois dimensions. Le plan rugueux est alors modélisé comme dans le chapitre 3 : le plan est ordonné selon un réseau triangulaire (figure 5.4), l'espacement  $\epsilon_c$  entre les billes du plan est déterminé à partir de la compacité  $C$  du plan. On peut comme dans la partie précédente définir deux diamètres.

- le diamètre  $d_h$  correspondant à la bille tangente aux trois billes du plan et au niveau  $h_{stop} = 0$  (fig 5.4), ce diamètre est équivalent au diamètre  $d_h$  défini précédemment à deux dimensions, mais la valeur de ce diamètre est différente en deux dimensions et en trois dimensions.  $d_h$  vérifie la relation :

$$d_h = \frac{(\lambda + \epsilon_c)^2}{3\lambda} = \frac{\pi}{6C\sqrt{3}}\lambda$$

- le diamètre maximum de la bille qui passe entre les trois billes du plan (fig 5.4). Ce diamètre  $d_m$  est défini par :

$$d_m = \frac{2(\lambda + \epsilon_c)}{\sqrt{3}} - \lambda$$

Avec les compacités de nos plans, le calcul donne les relations suivantes  $d_h < \lambda$  et  $d_m < d_h$

### 5.3.1 Choix de la bille

Comme dans le cas à deux dimensions, le choix de la bille dont on étudie la stabilité dépend de son diamètre  $d$ .

Pour des diamètres de bille supérieurs à  $d_h$ , le choix de la bille est facilement défini. La bille considérée est tangente aux trois billes du plan, et est au dessus du niveau  $h_{stop} = 0$  : on retrouve la même configuration que dans le cas à deux dimensions (fig. 5.5(a)).

Pour des diamètres de bille inférieurs à  $d_h$ , il peut y avoir remplissage aléatoire ou non des trous du plans. Cependant la limite, pour laquelle le remplissage des trous est aléatoire, n'est pas clairement définie. Pour des diamètres de billes grands tels que  $d < d_h$ , on ne peut pas considérer qu'il y ait un réel remplissage aléatoire des trous : en effet, le trou entre les trois billes collées sur le plan peut contenir suivant le diamètre des billes seulement 2 à 5 billes. Dans ce cas, la bille dont on étudie la stabilité est tangente à deux billes du plan et au niveau  $h_{stop} = 0$  (fig. 5.5(b)). Ce cas est alors similaire au cas  $d < d_h$  dans le modèle à deux dimensions.

Cependant pour des billes ayant un diamètre  $d$  très inférieur à  $d_m$ , les petites billes remplissent sous forme d'un empilement aléatoire les trous entre les billes collées sur le plan. A cause du remplissage des trous du plan, nous ne connaissons pas la position de la bille la plus stable qui dépasse le niveau  $h_{stop} = 0$  : cette bille peut être tangente à une des billes collées du plan, ou être posée sur l'empilement aléatoire de petites billes. On peut calculer la stabilité d'une petite bille qui touche une grande (calcul analogue au cas présenté en figure 5.5(b) tant que  $d > \epsilon_c$ ) et la stabilité d'une petite bille sur l'empilement des petites situées dans les trous du plan (fig. 5.5(c)) Ce dernier calcul va être exposé juste après.  $\theta_2$  sera le maximum de ces deux angles de stabilité puisqu'il entraînera la chute de la bille qui était dans la configuration la plus stable.

La bille choisie est alors une bille posée sur un empilement aléatoire compact de petites billes. Pour cette raison, on s'attend à ce que l'angle de stabilité ne varie pas avec la taille des petites billes. La bille choisie est donc tangente à trois petites billes dont on ne connaît pas la position et tangente au niveau  $h_{stop} = 0$ . La position des trois billes, constituant le "support" pour la bille dont on étudie la stabilité, a été choisie selon un réseau triangulaire. De plus, l'hypothèse que les sommets des trois petites billes sont situés sur un plan parallèle au plan rugueux a été faite pour le calcul présenté plus tard. Cette hypothèse introduit une erreur dans nos calculs mais est faite faute de pouvoir modéliser l'ensemble des positions des petites billes "support". Dans nos calculs, la compacité entre les petites billes du "support" a été choisie égale à  $C_p = 0,57$  : cette compacité est indépendante du diamètre des billes tant que l'hypothèse de remplissage aléatoire est vérifiée, c'est-à-dire pour  $d \ll d_m$ . Ceci détermine l'espacement entre les billes constituant le "support" et donc leur position suivant la verticale puisqu'on suppose que la bille instable posée sur elles sera juste tangente à  $h_{stop} = 0$ . Cette modélisation, certes

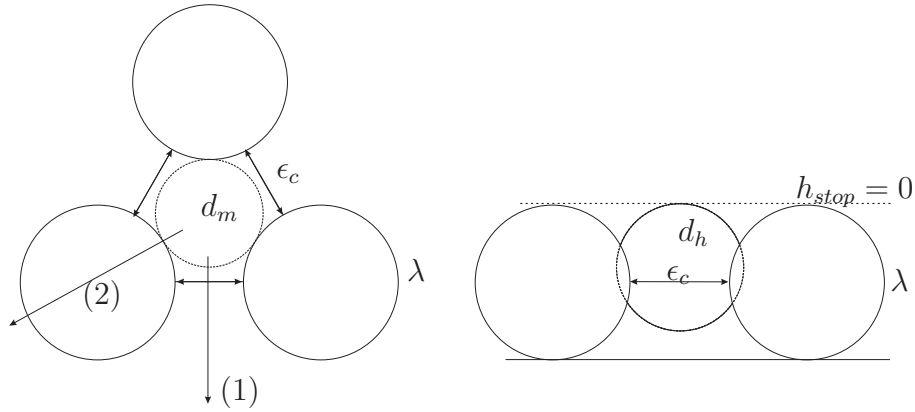


FIG. 5.4 – Représentation du plan rugueux (réseau triangulaire d'espacement  $\epsilon_c$ ),  $d_m$  est le diamètre maximal de la bille qui peut être placée entre les trois billes du plan rugueux. La direction (1) correspond à une bille qui passe entre deux billes du plan, la direction (2) à une bille qui passe au dessus d'une des billes du plan.  $d_h$  est le diamètre de la bille tangente aux trois billes du plan et au niveau  $h_{stop} = 0$

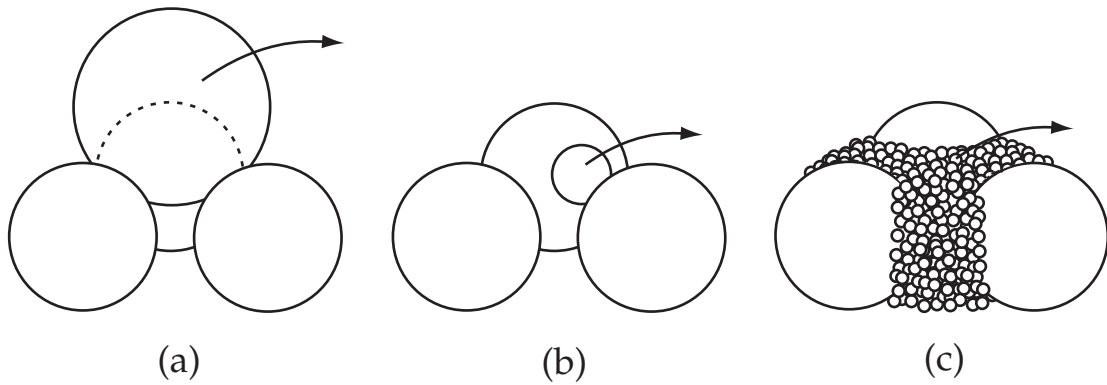


FIG. 5.5 – Le choix de la bille en 3D : (a)  $d > d_h$  tangente aux trois billes du plan et au-dessus de  $h_{stop} = 0$ , (b)  $d < d_h$  tangente à deux billes du plan et tangente au niveau  $h_{stop} = 0$ , (c) tangente à trois petites billes et tangente au niveau  $h_{stop} = 0$

peu représentative de la réalité, entraîne sur le calcul de l'angle de stabilité des erreurs importantes. Cependant, le résultat important semble être que cet angle de stabilité est constant quand  $d \rightarrow 0$ , même si la valeur de la constante est difficilement calculable.

### 5.3.2 Critère de stabilité

Le critère de stabilité est le même que celui présenté dans le modèle à deux dimensions. Cependant quelques modifications restent à faire.

Intéressons nous au cas où la bille considérée est tangente à deux ou trois billes du plan (fig. 5.5). Selon la trajectoire suivie par la bille (fig. 5.4), on peut définir une plage d'angles de stabilité. En effet, l'angle de stabilité dépend de la trajectoire de la bille lorsqu'elle quitte sa position stable. Le plus petit angle de stabilité est obtenu pour la bille passant dans l'espace entre les billes du plan (fig 5.4, direction 1), le plus grand est obtenu pour la bille qui passe au-dessus d'une des billes collées sur le plan (figure 5.4, direction 2). Le choix de la trajectoire est imposé par la direction de la plus grande pente. Sur le plan, comme toutes les configurations existent, on peut imaginer qu'il y aura au moins une bille telle que la trajectoire suivie soit la direction (2). Ce serait la bille la plus stable et donc la dernière bille à tomber. Mais en pratique, l'expérience [53] montre que la bille en mouvement contourne la bille collée du plan plutôt que de passer par-dessus. Il nous semble donc plus judicieux de calculer la stabilité d'une bille selon la trajectoire (1).

Le critère de stabilité est lui aussi modifié. Dans cette configuration, il existe deux forces de contact  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  et le poids de la petite bille  $\vec{P}$ . Soit  $\phi$  l'angle entre les deux forces  $\vec{P}$  et  $\sum \vec{R}_i$ . Si  $\phi=0$ , la bille considérée est instable, si  $\phi > 0$ , la bille est stable.

### 5.3.3 Calculs de l'angle de stabilité

Pour les calculs de l'angle de stabilité, on se place dans un repère orthonormé d'origine le centre d'une des billes du plan. Les coordonnées des centres des trois billes du plan sont :

$$A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} \lambda + \epsilon_c \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\lambda + \epsilon_c}{2} \\ (\lambda + \epsilon_c) \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Dans le cas où  $d \geq d_h$ , les coordonnées du centre de la bille  $D$  dont on étudie la stabilité, sont telles que la bille est tangente aux trois billes du plan (fig. 5.5(a)) :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\lambda + \epsilon_c}{2} \\ \frac{\lambda + \epsilon_c}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{(\lambda + d)^2}{4} - \frac{(\lambda + \epsilon_c)^2}{3}} \end{vmatrix}$$

Dans cette configuration, l'angle  $\theta_2$  est défini par :

$$\theta_2 = \arccos \left( \sqrt{\frac{\frac{(\lambda+d)^2}{4} - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{3}}{\frac{(\lambda+d)^2}{4} - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{4}}} \right) \quad (5.2)$$

Ce calcul montre que l'angle  $\theta_2$  diminue lorsque le diamètre  $d$  de la bille augmente. On retrouve ici les mêmes résultats que ceux obtenus dans le cas d'une seule bille coulant sur un plan incliné [53].

Dans le cas où  $d < d_h$ , la bille dont nous étudions la stabilité est tangente aux deux billes du plan et tangente au niveau  $h_{stop} = 0$  (fig. 5.5(b)). La position du

centre de cette bille est définie par :  $D = \begin{matrix} \frac{\lambda+\epsilon_c}{2} \\ \sqrt{\lambda d - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{4}} \\ \frac{\lambda-d}{2} \end{matrix}$

L'angle de stabilité  $\theta_2$  de cette bille est alors défini par :

$$\theta_2 = \arccos \left( \frac{\frac{\lambda-d}{2}}{\sqrt{\lambda d - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{4} + \left(\frac{\lambda-d}{2}\right)^2}} \right)$$

Ce calcul montre que l'angle de stabilité  $\theta_2$  augmente avec le diamètre  $d$  de la bille.

Dans le cas où  $d \ll d_m$ , on considère que les billes sont suffisamment petites pour pouvoir remplir les trous du plan. On a donc un empilement aléatoire de billes de taille  $d$  dans les interstices du plan. La bille, dont on va étudier la stabilité, repose sur un lit de petites billes de compacité  $C_p$  qui ont le même diamètre qu'elle. Il n'y a plus d'interactions entre les grandes billes collées du plan rugueux et la bille choisie. Les billes, constituant le support pour la bille choisie, sont supposées dans un plan parallèle au plan rugueux et à une hauteur telle que la bille choisie soit tangente au niveau  $h_{stop} = 0$ . En se basant sur la formule 5.2, en posant  $\lambda = d$ , on peut en déduire l'angle de stabilité :

$$\theta_2 = \arccos \left( \sqrt{\frac{d^2 - \frac{(d+\epsilon_p)^2}{3}}{d^2 - \frac{(d+\epsilon_p)^2}{4}}} \right) \quad (5.3)$$

avec  $\epsilon_p$  l'espacement des petites billes "support".

Or dans le cas d'un empilement aléatoire, on a :

$$\epsilon_p = \left( \sqrt{\frac{\pi}{2C_p\sqrt{3}}} - 1 \right) d$$

L'espacement est alors proportionnel au diamètre des billes  $d$ . Par ailleurs, le rapport de taille entre les billes "support" et la bille choisie est toujours égal à 1. L'angle de stabilité dans cette configuration est donc constant quelque soit le diamètre des petites billes.

En effet, l'équation 5.3 s'écrit :

$$\theta_2 = \arccos \left( \frac{1 - \frac{\pi}{6C_p\sqrt{3}}}{1 - \frac{\pi}{8C_p\sqrt{3}}} \right)$$

L'angle de stabilité de la bille considérée ne dépend que de la compacité d'un empilement aléatoire de billes dans les trous du plan. On peut estimer la compacité aléatoire d'un empilement 3D à 0,57. On va supposer que l'espacement entre les billes situées à la surface d'un empilement 3D aléatoire est le même que l'espacement de billes dans l'empilement 3D. Il y a probablement une erreur dans le calcul de cet angle, à cause de l'hypothèse de trois billes "support" dans un plan parallèle au plan rugueux, mais cette erreur est la même pour tous les diamètres  $d$ . L'angle de stabilité est indépendant du diamètre des billes, tant que l'hypothèse de remplissage des trous du plan avec un empilement aléatoire est vérifiée.

Par ailleurs, on a calculé  $\theta_2$  dans les cas  $d < d_h$  et  $d \ll d_m$ . On peut se demander quand passer d'un cas à l'autre. Comme le modèle de stabilité repose sur la détermination de l'angle maximum de stabilité, l'angle de stabilité  $\theta_2$  sera pris égal au maximum des angles de stabilité calculés dans ces deux configurations. D'après ces calculs, l'angle de stabilité est constant pour des diamètres de billes très inférieurs à  $d_m$ . Pour des diamètres compris entre  $d_m$  et  $d_h$ , l'angle de stabilité augmente fortement avec le diamètre  $d$  des billes qui coulent. On prendra la borne entre les calculs pour les cas  $d < d_h$  et  $d \ll d_m$  à l'intersection des courbes (fig. 5.6). Bien qu'on ne puisse pas déterminer avec précision la valeur de la constante et donc de l'intersection, on sait qu'elle a lieu à peu près pour  $d = d_m$  car la croissance de  $\theta_2$  pour  $d > d_h$  est très forte.

En résumé, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} d < d_m & \theta_2 = \arccos \left( \frac{1 - \frac{\pi}{6C_p\sqrt{3}}}{1 - \frac{\pi}{8C_p\sqrt{3}}} \right) \\ d \leq d_h & \theta_2 = \arccos \left( \frac{\frac{\lambda-d}{2}}{\sqrt{\lambda d - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{4} + \left(\frac{\lambda-d}{2}\right)^2}} \right) \\ d \geq d_h & \theta_2 = \arccos \left( \sqrt{\frac{\frac{(\lambda+d)^2}{4} - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{3}}{\frac{(\lambda+d)^2}{4} - \frac{(\lambda+\epsilon_c)^2}{4}}} \right) \end{array} \right.$$

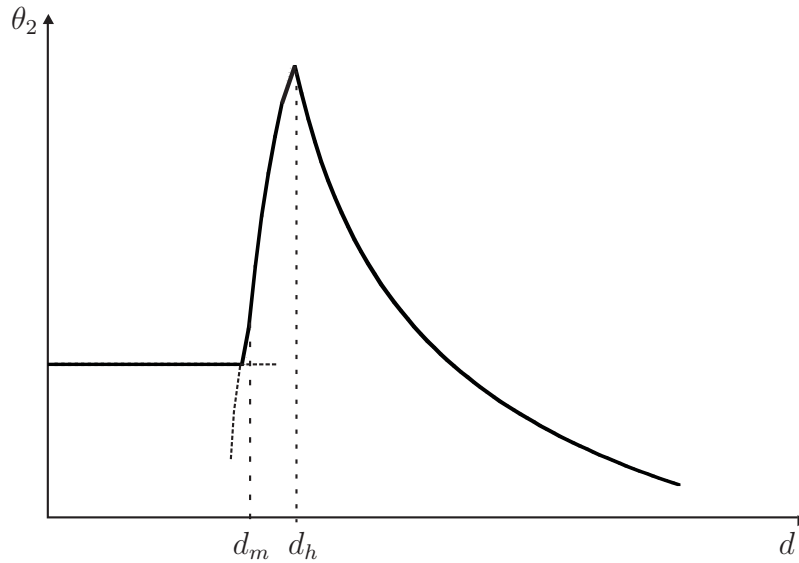


FIG. 5.6 – L'angle de stabilité  $\theta_2$  présente un maximum pour  $d = d_h$ . Il est constant pour  $d < d_m$ . Avec le choix de la compacité aléatoire pour le calcul de la stabilité d'une petite bille sur l'empilement, les courbes se croisent presque pour  $d = d_m$ .

On voit que l'angle de stabilité est maximum pour  $d = d_h$  et décroît avec le diamètre  $d$  pour  $d > d_h$  (fig. 5.6). Comme dans le cas à deux dimensions, le maximum de l'angle de stabilité est dû à une raison purement géométrique. On peut montrer que l'équation pour  $\theta_2$  dans le cas où  $d \geq d_h$  est la même que celle trouvée par Riguidel [53].

## 5.4 Comparaison modèle-expérience

### 5.4.1 Comportement global

En figures 5.7, 5.9, 5.8, on compare pour chaque plan, les résultats expérimentaux, et les résultats obtenus par le modèle.

Le comportement global des résultats expérimentaux et du modèle sont les mêmes :

- pour  $d < d_m$ ,  $\theta_2$  est constant
- pour  $d_m < d < d_h$ , l'angle  $\theta_2$  augmente avec  $d$
- pour  $d > d_h$ ,  $\theta_2$  décroît avec  $d$

De plus, l'accord quantitatif est bon. On présente ici deux plans composés de billes de tailles extrêmes (2 mm et 225  $\mu m$ ) et un composé de billes de taille moyenne (425  $\mu m$ ) par rapport aux billes utilisées dans nos écoulements. Les deux plans extrêmes permettent d'étudier plus précisément le cas des petits rapports  $d/\lambda$  (pour le plan n°5  $\lambda = 2mm$ ) et le cas des grands rapports  $d/\lambda$  (pour le plan



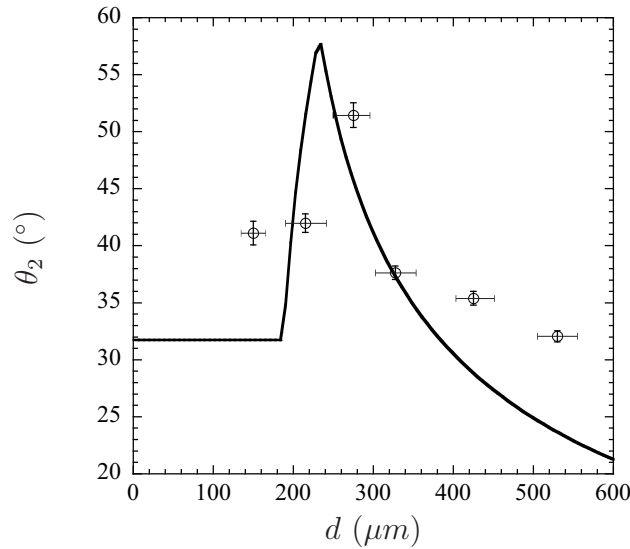


FIG. 5.7 –  $\theta_2$  sur le plan n°2 en fonction de  $d$ . La courbe représente les résultats obtenus par le modèle avec  $\lambda=425\mu m$  et  $C=0,55$ , le modèle donne  $d_m = 205 \mu m$ ,  $d_h = 234 \mu m$

n°1 ( $\lambda=225 \mu m$ ) tandis que le plan n°2 ( $\lambda=425 \mu m$ ) permet de mieux cerner le phénomène de part et d'autre du maximum.

Trois points sont mis en évidence par ces résultats :

- On observe un maximum pour  $\theta_2$  en  $d = d_c$ . Dans les expériences, la plage de diamètre étudiée n'est pas continue, ce qui ne permet pas de connaître avec précision la valeur du diamètre  $d_c$ . Cependant le modèle donne une valeur précise du diamètre pour lequel la friction est maximale,  $d_c = d_h$ . L'erreur sur la valeur de  $d_c$  donnée par les expériences est de l'ordre de  $\pm 100 \mu m$ . Avec cette barre d'erreur, le maximum est correctement prédit par le modèle pour les plans n°2 et n°5, un peu moins bien pour le plan n°1.
- Dans le cas  $d < d_h$ , le diamètre pour lequel on passe dans la configuration où le remplissage des trous forme un empilement aléatoire est défini par l'intersection des courbes (fig. 5.6). On remarque d'après les calculs, que la valeur de ce diamètre est proche de  $d_m$ . Ce résultat montre qu'on peut supposer qu'il y a remplissage des trous du plan par un empilement aléatoire de petites billes si leur diamètre est inférieur à  $d_m$ . Pour les petits diamètres de billes qui coulent (c'est à dire pour  $d < d_m$ ),  $\theta_2$  mesuré est constant conformément au modèle. Mais la valeur du palier donnée par le modèle est sous estimée par rapport aux valeurs expérimentales (fig. 5.8, 5.7). Le critère de stabilité défini précédemment se révèle imprécis dans ce cas. Ceci n'est pas vraiment surprenant. Comme on l'a déjà mentionné, la valeur de l'angle de stabilité dépend de la taille des rugosités, mais aussi

de leur disposition. Dans nos calculs, on a considéré la stabilité d'une petite bille sur un empilement de petites billes. La compacité de l'empilement aléatoire de petites billes dans les trous du plan a été choisie égale à 0,57. Cependant, il apparaît difficile de calculer avec précision l'angle de stabilité à la surface d'un empilement aléatoire. En effet, le sommet d'un empilement aléatoire de petites billes ne peut pas être modélisé par une monocouche de billes parallèle au plan rugueux avec une certaine compacité car dans le cas de l'empilement le sommet de chaque bille "support" ne se trouve probablement pas à la même hauteur.

- Pour  $d > d_c$ , on observe une décroissance de  $\theta_2$  (fig.5.7, 5.8, 5.9). Cette décroissance est surtout bien visible sur les nombreux points expérimentaux de la figure 5.9. Les résultats donnés par le modèle sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Ce bon accord est probablement dû au fait que dans le modèle, la position de la bille dont on étudie la stabilité est très bien définie, ainsi que le critère de sa stabilité.

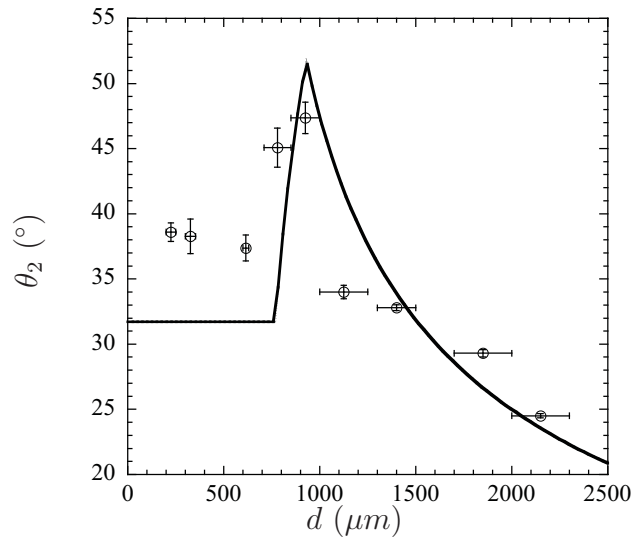


FIG. 5.8 –  $\theta_2$  sur le plan n°5 en fonction du diamètre  $d$  des billes qui coulent, la courbe représente les résultats obtenus par le modèle avec  $\lambda=2000\mu m$  et  $C=0,65$ ,  $d_m=728\mu m$ ,  $d_h=930\mu m$ .

En figure 5.10, les valeurs de  $d_c$  obtenues pour tous les plans par le modèle (c'est-à-dire  $d_h$ ) sont représentées en fonction du diamètre des billes collées  $\lambda$ . On voit que  $d_c$  donné par la formule de  $d_h$  est proportionnel à  $\lambda$  pour une même compacité du plan :

$$d_c = \frac{\pi}{6C\sqrt{3}}\lambda$$

Mais les compacités des différents plans ne sont pas les mêmes (voir table 3.1), c'est pourquoi les points ne sont pas alignés sur une droite. Cependant les points

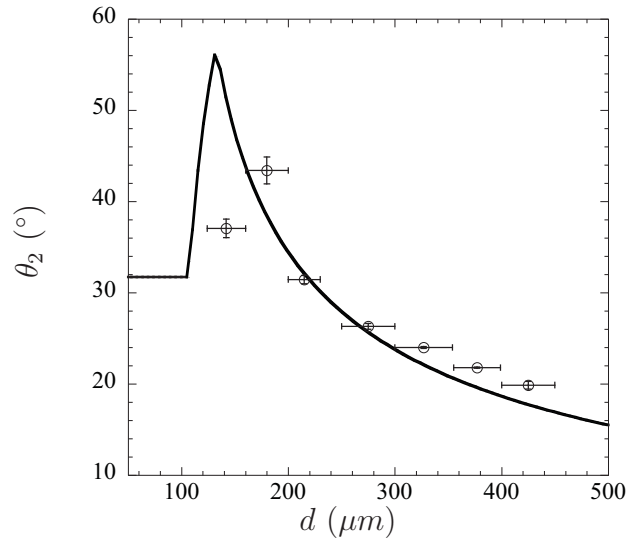


FIG. 5.9 –  $\theta_2$  sur le plan n°1 en fonction du diamètre  $d$  des billes qui coulent, la courbe représente les résultats obtenus par le modèle avec  $\lambda=225\mu\text{m}$  et  $C=0,63$ ,  $d_m=79\mu\text{m}$  et  $d_h=103\mu\text{m}$ .

expérimentaux se situent entre les deux droites déterminées pour des compacités de 0,5 et 0,7 ce qui est en accord avec les compacités des plans mesurées. On remarque, de plus, que les résultats sont proches de la droite  $\frac{\lambda}{2}$ , ce qui correspond à une compacité de 0,60, valeur moyenne de la compacité de tous les plans étudiés. Si on calcule  $d_c$  pour chaque plan en utilisant la compacité mesurée, on constate un très bon accord entre le modèle et les résultats expérimentaux.

Par ailleurs, on a fait l'hypothèse dans le modèle que seule la valeur moyenne de la compacité était le paramètre important et non la variabilité de la compacité autour de cette valeur moyenne. On pourrait cependant s'attendre à ce que la valeur maximale de l'espacement (qui donnerait la meilleure stabilité de la bille qui coule) impose la valeur de  $\theta_2$ . Cependant des simulations de dynamique moléculaire sur le mouvement d'une seule particule sur un plan incliné rugueux [7, 15] ont montré que le fait de rajouter du désordre n'a pas d'influence sur le mouvement de la bille quand la valeur moyenne de l'espacement est gardée constante.

En conclusion, le modèle montre qu'il existe un diamètre  $d_c$  pour lequel l'angle de stabilité  $\theta_2$  est maximum, la valeur de ce diamètre est en très bon accord avec celui trouvé expérimentalement. Le diamètre pour lequel la friction est maximum ne dépend que de considérations géométriques, c'est-à-dire la taille des rugosités du plan, et l'espacement entre ces rugosités.

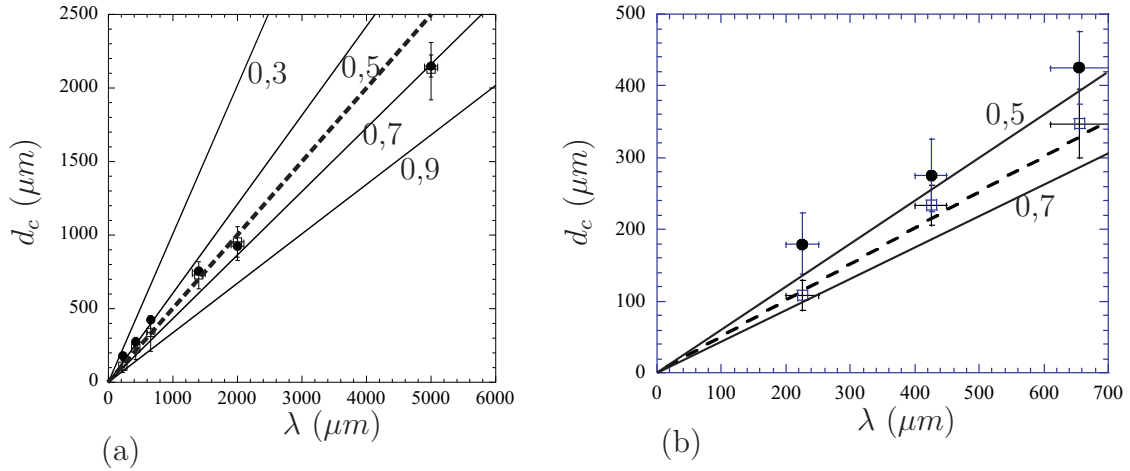


FIG. 5.10 – (●) résultats expérimentaux ; (□) résultats obtenus à partir du modèle tenant compte des variations de compacité d'un plan à l'autre. Le modèle prédit avec précision la valeur de  $d_c$ . Les barres d'erreur pour le modèle sont dues aux incertitudes sur les valeurs de  $C$  et  $\lambda$ . Pour les résultats expérimentaux,  $d_c$  n'est pas précisément connu à cause des discontinuités des valeurs de  $d$ . Les barres d'erreur (axe  $\lambda$ ), prenant en compte la gamme de taille des billes collées, sont les mêmes pour le modèle et les expériences. Les droites représentent les résultats du modèle en prenant en compte différentes compacités  $C$  indiquées sur chaque droite. A cause des faibles variations de la compacité  $C$  d'un plan à l'autre,  $d_c$  obtenus sur différents plans rugueux sont approximativement égaux à  $\lambda/2$  (ligne pointillée). En (b), zoom du graphe (a) pour les petites diamètres de billes collées ( $\lambda$ )

## 5.5 Friction

On a montré dans cette partie, qu'il existe, pour un plan rugueux donné, un diamètre de billes  $d_c$  pour lequel la friction basale est maximum. Ce maximum de friction se traduit par :

- un minimum de la longueur du dépôt  $L$ ,
- un minimum de la vitesse du front  $u$ ,
- un maximum de l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$ ,
- un maximum de l'angle de stabilité  $\theta_2$ .

Comme on l'a montré aussi, en s'intéressant aux variations du coefficient de friction basale  $\mu$  des écoulements monodisperses en fonction du paramètre inertiel  $I$ , pour  $d = d_c$ , la friction basale est maximum (fig. 4.8). Pour  $I \rightarrow 0$  la friction basale est égale à  $\tan \theta_1$  où  $\theta_1$  est l'angle en dessous duquel l'écoulement stationnaire uniforme est impossible. Pour  $I \rightarrow \infty$ , la friction basale tend vers l'asymptote  $\mu(I \rightarrow \infty) = \mu_2 = \tan \theta_2$ , où  $\theta_2$  est l'angle pour lequel aucun dépôt ne reste sur le plan.

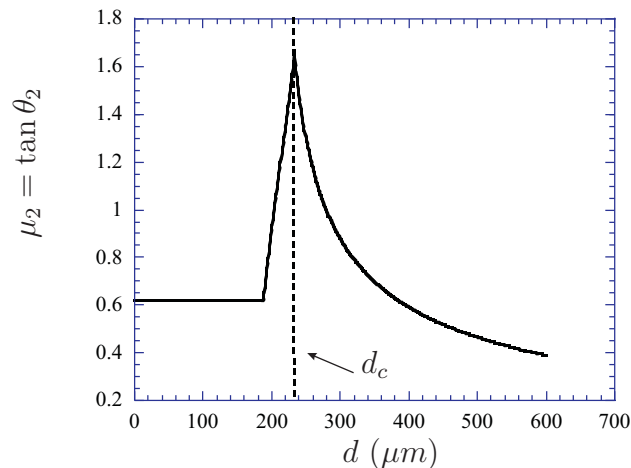


FIG. 5.11 – Coefficient de friction  $\mu_2 = \tan \theta_2$  en fonction du diamètre des billes qui coulent  $d$  calculé à partir du modèle de stabilité. Le coefficient de friction  $\mu_2$  est maximum pour  $d = d_c$ .

On a montré dans la partie précédente, que pour le plan n°2 ( $\lambda=425 \mu m$ ), les courbes représentant la friction basale en fonction du paramètre inertiel  $I$  se classent et ne se croisent pas (fig. 5.12). De ce constat, il vient que la connaissance des limites asymptotiques de la friction basale pour  $I \rightarrow \infty$  permet de connaître le classement des courbes de friction en fonction du diamètre des billes qui coulent  $d$  et de déterminer ainsi le diamètre des billes  $d$  pour lequel la friction est maximum. Pour  $d = d_c$ ,  $\theta_2$  et donc  $\tan \theta_2 = \mu_2$  présentent un maximum. Le maximum de friction est donc bien conforme à la variation de sa limite pour  $I \rightarrow \infty$ . En conséquence, le modèle géométrique permettant de déterminer la valeur de l'angle de stabilité, c'est-à-dire de l'angle  $\theta_2$ , permet aussi de donner une information sur les frictions basales en fonction du diamètre des billes qui coulent  $d$ . Il est possible, à partir de ce modèle, de déterminer quantitativement les variations de  $\mu_2 = \tan \theta_2$  en fonction de  $d$  (fig. 5.11).

Le modèle présenté, permet donc de déterminer le diamètre  $d_c$  pour lequel la friction est maximum, mais aussi de donner une information quantitative sur la friction basale des écoulements granulaires dans la limite où le paramètre inertiel  $I \rightarrow \infty$ .

## 5.6 Conclusion

Lors d'écoulements monodisperses sur plans inclinés rugueux, on a mis en évidence l'existence d'un diamètre de billes pour lequel la friction basale est maximale.

Le maximum de friction se traduit par un minimum de la longueur  $L$  du dépôt, un maximum d'épaisseur  $h_{stop}$ , et un minimum de vitesse  $u$ . Ce maximum

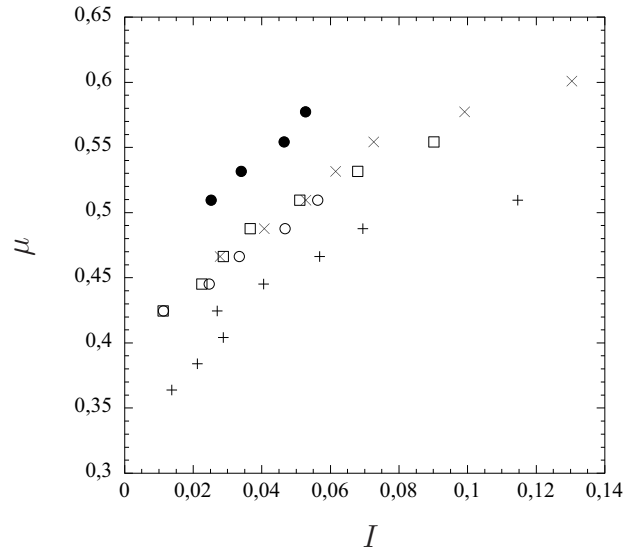


FIG. 5.12 – Le coefficient de friction  $\mu$  augmente avec le paramètre inertiel  $I$  pour différents diamètres  $d$  de billes qui coulent :  $\circ$   $d=132 \mu m$ ,  $\square$   $d=225 \mu m$ ,  $\bullet$   $d=275 \mu m$ ,  $\times$   $d=325 \mu m$ ,  $+$   $d=450 \mu m$ . Le coefficient de friction est maximum pour  $d = d_c$  (plan n°2)

de friction se traduit aussi par un maximum de  $\theta_2$ ,  $\theta_2$  étant l'angle minimal pour lequel  $h_{stop} = 0$ . Un modèle géométrique de stabilité permet de déterminer  $\theta_2$  et donc de manière précise ( $\sim 100 \mu m$  d'erreur) la valeur du diamètre  $d_c$  pour laquelle la friction est maximum. Ce diamètre dépend très fortement du diamètre des billes collées sur le plan (dépendance linéaire), et est inversement proportionnel à la compacité du plan. Ce modèle permet également de calculer la valeur du coefficient de friction quand le paramètre inertiel  $I \rightarrow \infty$ .

L'existence de ce diamètre  $d_c$  pour lequel la friction est maximum conduira à étudier diverses configurations pour les écoulements bidisperses en fonction des tailles des billes par rapport au diamètre  $d_c$ .

Deuxième partie

Écoulements granulaires  
bidisperses





# Chapitre 6

## Écoulements bidisperses sur plans inclinés rugueux

Dans la partie précédente, on a montré que pour un plan rugueux, il existe un diamètre de billes  $d_c$  pour lequel la friction est maximum. Dans cette partie, on s'intéresse aux écoulements bidisperses, c'est-à-dire à des mélanges constitués de deux diamètres de billes. Lors des écoulements, à cause de la ségrégation, les grosses billes seront à la surface de l'écoulement et les petites billes seront à la base de l'écoulement. De plus, à cause du gradient de vitesse, les grosses billes présentes à la surface de l'écoulement, ont une vitesse plus grande que les petites billes. Cette différence de vitesse, implique que les grosses particules seront au front et sur les côtés. La disposition sur les côtés de l'écoulement est due à l'étalement latéral du front [20]. Plusieurs mécanismes peuvent intervenir pour modifier le comportement de ces écoulements : ségrégation, modification de la friction basale, ... La première manifestation de ces modifications est le changement de morphologie du dépôt laissé par un écoulement bidisperse. À partir de ces observations, nous avons proposé différents mécanismes permettant d'expliquer les modifications et nous avons particulièrement développé le rôle joué par les grosses billes (chapitre 7).

### 6.1 Observations préliminaires

On avait vu que dans le cas d'écoulements granulaires monodisperses, la morphologie des dépôts laissés par des lâchers de masse constante est très peu sensible au diamètre  $d$  des billes qui coulent et à la rugosité relative. Dans tous les cas, quelque soit l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$ , nous obtenons un dépôt en forme de larme (fig. 6.1(a)), dont la largeur maximale est fixée par le diamètre de la calotte. Par contre, les premières observations des dépôts laissés par l'écoulement d'une masse finie d'un mélange bidisperse, font apparaître une plus grande diversité dans les morphologies des dépôts. La ségrégation, qui a lieu lors de ces

écoulements, à cause de la différence de taille des billes présentes dans le mélange initial, entraînera une répartition spatiale des billes durant l'écoulement, ainsi que sur le dépôt final. Ces dépôts peuvent être caractérisés, certes par leur forme, mais aussi par la disposition sur ce dépôt de chaque classe de bille.

### 6.1.1 Des morphologies variées

Différents mélanges bidisperses ont été étudiés. Des exemples des différents dépôts obtenus sont présentés en figure 6.1. La morphologie des dépôts laissés par des écoulements bidisperses est souvent très différente de celle des dépôts laissés par des écoulements monodisperses (6.1(a)). Néanmoins comme précédemment, ces dépôts bidisperses sont caractérisés par leur longueur, le profil longitudinal de la largeur du dépôt, le type de billes restant dans le dépôt et leur épaisseur en tout point. Les morphologies peuvent être regroupées en quatre catégories :

- rétrécissement rapide du dépôt (fig. 6.1 c, e, f, g),
- formation d'un ou plusieurs doigts (fig. 6.1 f, g),
- largeur presque constante du dépôt le long du plan (fig. 6.1 b),
- forme identique à celle obtenue après des écoulements monodisperses (fig. 6.1 d).

D'autre part, on observe sur tous les dépôts une séparation nette des grosses billes et des petites billes, due à la ségrégation.

### 6.1.2 Ségrégation : deux conséquences

Lors des écoulements bidisperses, la ségrégation, due à une différence de diamètre des deux classes de billes composant le mélange, est un phénomène très rapide. Dans la suite, on supposera que la ségrégation est totale, c'est-à-dire que les différentes classes de billes sont totalement séparées et que la ségrégation est instantanée, c'est-à-dire que les deux phases sont rapidement séparées. On suppose, en effet, que l'écoulement bidisperse peut être modélisé comme sur la figure 6.2. Verticalement, on peut distinguer trois zones :

- une zone pure de petites billes de diamètre  $d_p$  (c),
- une zone où il y a mélange des petites billes et des grosses billes (b),
- une zone pure de grosses billes de diamètre  $d_g$  (a),

Cette hypothèse de modélisation de l'écoulement bidisperse sera discutée dans le chapitre suivant, mais les observations expérimentales des écoulements bidisperses permettent de supposer que cette hypothèse est valable. Cependant l'épaisseur de la zone où il y a coexistence des deux phases, est faible. Il est aussi à noter que nous ne nous trouvons jamais dans le cadre de nos expériences dans le cas de ségrégation inverse (grosses billes à la base de l'écoulement). D'autre part, pendant l'écoulement, on observe les grosses particules non seulement à la surface, mais également à la périphérie de l'écoulement (fig.6.3). A cause de l'étalement du front à l'avant, les grosses particules se retrouvent sur les

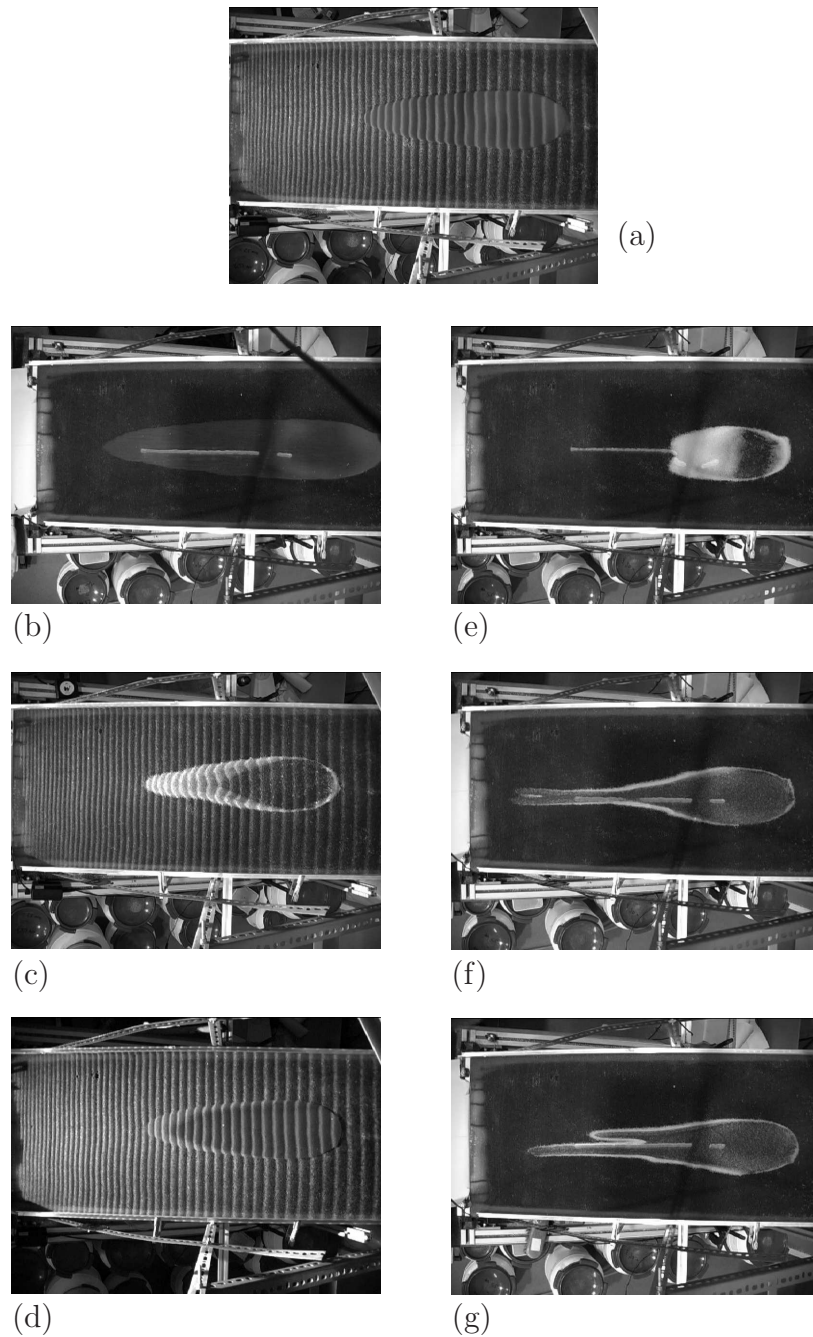


FIG. 6.1 – Morphologie des dépôts laissés par : (a) un écoulement monodisperse ; des écoulements bidisperses : (b) la largeur du dépôt semble peu varier le long du dépôt, (c) rétrécissement de la largeur du dépôt, (d) séparation des deux classes de billes, (e) arrêt très rapide de l'écoulement et séparation des deux classes de billes très nette, (f) formation d'un doigt, (g) formation de deux doigts. Selon la taille des billes et le pourcentage de grosses billes présentes dans le mélange, la morphologie des dépôts laissés par des écoulements bidisperses est d'une grande diversité.

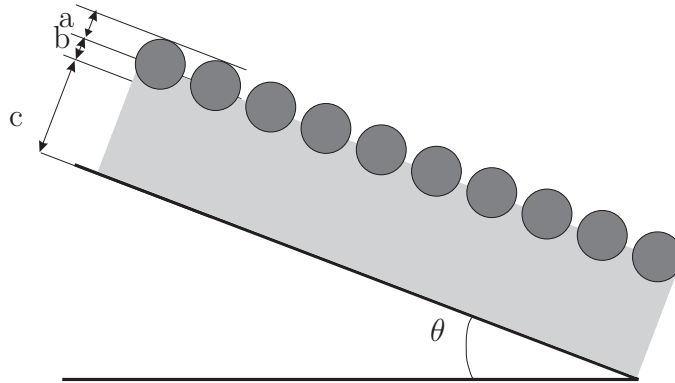


FIG. 6.2 – Modélisation de l'écoulement granulaire bidisperse : on distingue trois zones, une zone pure composée de petites billes à la base de l'écoulement (c), une zone où les deux tailles de billes sont mélangées (b), et une zone pure en grosses billes (a) (à la surface libre de l'écoulement).

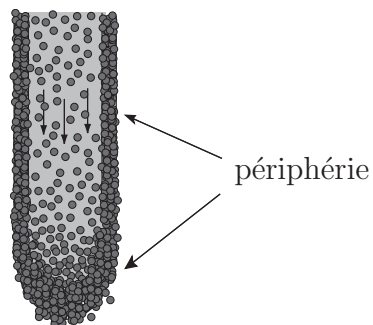


FIG. 6.3 – Modélisation de l'écoulement granulaire bidisperse : les grosses billes se trouvent à la périphérie (sur les côtés et au front) de l'écoulement

côtés du front, puis avec l'avancée du front dans les zones statiques sur les côtés de l'écoulement. Lors de l'arrêt de l'écoulement, on observe la couche de grosses particules qui se propage sur les petites, formant un front arrière (limite amont de la couche de grosses billes) souvent bien défini. On s'intéressera à sa vitesse lors des expériences. Cette répartition des grosses billes (à la surface de l'écoulement et à la périphérie) pendant la propagation de l'écoulement permet de considérer deux effets dans le cadre de la ségrégation.

Le premier effet est un "effet de ligne" : les grosses billes, se trouvant à la périphérie de l'écoulement (sur les côtés et au front), auront une influence sur la forme du dépôt laissé par un écoulement bidisperse. Cet effet de ligne dépendra très fortement des frictions respectives de chaque classe de billes sur le plan rugueux.

Le second phénomène est quant à lui un "effet d'interfaces". Cet effet comprend l'interaction des petites billes avec le plan rugueux, et l'interaction des grosses billes avec les petites billes en écoulement.

La combinaison de ces deux effets lors des écoulements bidisperses va conduire à des comportements des mélanges bidisperses très différents.

Afin de comprendre comment ces effets peuvent modifier l'écoulement, nous considérons différentes configurations de mélange qui prennent en compte :

- la position de  $d_p$  par rapport à  $d_c$  qui fixera la rugosité basale de l'écoulement puisque les petites particules sont à la base de l'écoulement,
- la comparaison entre les frictions  $\mu_{2,p}$  et  $\mu_{2,g}$  des petites et grosses billes sur le plan, qui conditionneront éventuellement un effet de ligne (à la périphérie de l'écoulement).

Le paramètre  $\mu_2$  permet de donner un cadre à nos résultats.  $\mu_2$  est défini comme la limite de  $\mu(I)$  quand  $I \rightarrow \infty$  (partie I). Il est possible à partir du modèle de stabilité présenté dans la partie I, de déterminer les valeurs théoriques de la friction basale  $\mu_2$ . La friction basale est égale à  $\mu_2 = \tan \theta_2$  dont on connaît la courbe en fonction de  $d$  (fig. 6.4).

On a montré dans la partie précédente que pour des écoulements monodisperses, les courbes de friction basale  $\mu(I)$  se classent, et ne se croisent pas. La connaissance des valeurs limites  $\mu_2$  et le classement de ces valeurs limites permet de déterminer, quel que soit le paramètre inertiel  $I$ , le classement des courbes de friction  $\mu(I)$ . Cela implique que si  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$  (resp.  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ ), alors quel que soit  $I$ ,  $\mu_g(I) < \mu_p(I)$  (resp.  $\mu_g(I) > \mu_p(I)$ ) : la friction basale des grosses billes sur le plan rugueux est inférieure (resp. supérieure) à celle des petites billes sur le plan rugueux. Dans la suite, on ne parlera qu'en termes de  $\mu_2$ .

Dans cette optique, les différentes configurations de mélange sont les suivantes (fig. 6.4) :

- $d_p > d_c$ , dans ce cas la friction des grosses billes  $\mu_{2,g}$  est toujours inférieure à la friction des petites billes  $\mu_{2,p}$  ;
- $d_p < d_c$  :

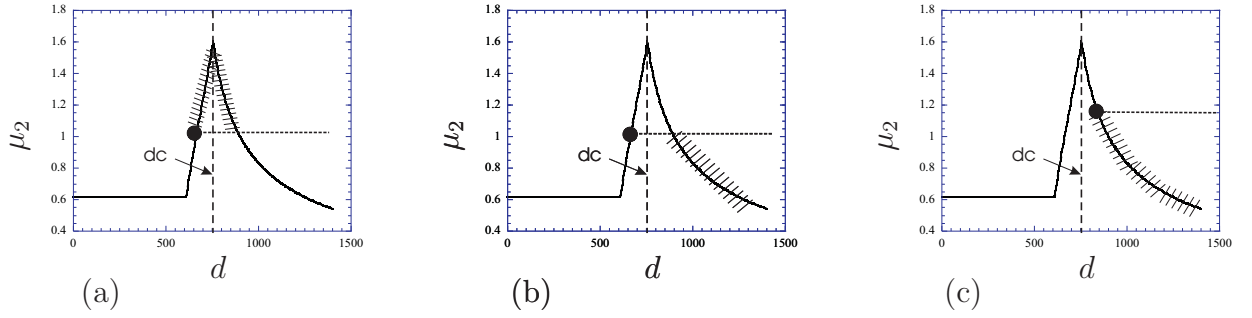


FIG. 6.4 – Friction  $\mu_2$  (avec  $\mu_2 = \lim_{I \rightarrow \infty} \mu(I)$ ) en fonction du diamètre  $d$  des billes qui coulent. Cette courbe est obtenue à partir du modèle de stabilité décrit dans la partie I. La zone hachurée correspond aux diamètres des grosses billes donnant les configurations de mélange suivantes : (a)  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$  ; (b)  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ , (c) si  $d_p > d_c$ , alors  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ , quelle que soit la valeur de  $d_g$ . Le point (●) représente la valeur de  $d_p$  choisie.

- soit  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ ,
  - soit  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ .
- selon la valeur du diamètre des grosses billes  $d_g$ .

Nous avons alors balayé toutes ces configurations de mélanges possibles (fig. 6.4).

Pour ces trois cas, la fraction des deux types de bille dans le mélange intervient également dans la détermination de la morphologie du dépôt.

## 6.2 Configuration expérimentale

### 6.2.1 Système expérimental

Les expériences présentées dans la suite ont été réalisées sur le plan n°4, sur lequel les billes collées ont un diamètre de 1,4 mm, et dont la compacité est de 0,56. L'étude des écoulements monodisperses sur ce plan, ont permis de déterminer le diamètre  $d_c$  pour lequel la friction est maximale (fig. 6.5). On trouve  $d_c = 755 \mu m$ .

Pour l'étude des trois cas définis précédemment, les billes utilisées seront dans le cas où :

- $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} < \mu_{2,g}$  : pour  $d_p = 327 ; 450 ; 550 \mu m$  et  $d_g = 550 ; 670 ; 755 \mu m$ ,
- $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$  : pour  $d_p = 327 ; 450 \mu m$  et  $d_g = 925 ; 1125 ; 1325 ; 1750 ; 1850 ; 2150 ; 2925 \mu m$ ,
- $d_p > d_c$  : pour  $d_p = 1125 \mu m$  et  $d_g = 1325 \mu m$ .

Les différentes expériences réalisées pour l'étude des écoulements bidisperses sont les mêmes que celles étudiées dans le cas monodisperse :

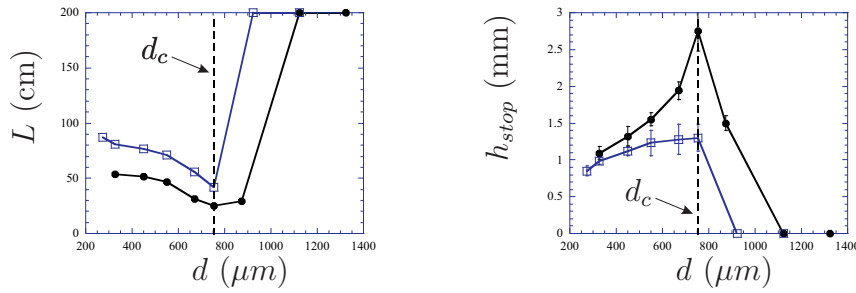


FIG. 6.5 – Mesure de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt pour des écoulements monodisperses sur le plan n°4 pour différents angles d'inclinaison  $\theta$  : (●)  $\theta=25^\circ$ ; (□)  $\theta=27^\circ$ . La friction basale ( $\mu_2 = \tan\theta_2$ ) est maximum pour  $d = d_c=755 \mu\text{m}$ .

- lâcher d'une masse constante de matériau granulaire,
- écoulement du matériau granulaire bidisperse à flux constant (15 g/s).

Pour ces expériences, l'homogénéité du mélange initial semble être un paramètre important. Cependant, à cause des effets de ségrégation, il est difficile de faire un mélange homogène. Deux méthodes ont été utilisées pour réaliser des mélanges "homogènes" : la première consiste à "touiller" le mélange de billes afin d'avoir un mélange le plus homogène possible. L'homogénéité du mélange est visible du fait des différentes couleurs des billes utilisées. La seconde méthode consiste à remplir la calotte de strates en alternant chaque classe de billes. L'épaisseur de ces strates est d'environ 1,5 mm ce qui représente approximativement 1 à 4 tailles de billes suivant les billes utilisées. Il est alors possible dans la calotte de réaliser une quinzaine de strates. Nous discuterons, par la suite, de l'importance de l'homogénéité du mélange bidisperse présent dans la calotte pour les résultats expérimentaux obtenus. Les mélanges, pour les expériences faites en imposant un flux constant, qui seront détaillés uniquement dans le chapitre 7 sont obtenus par mélange des deux classes de billes, et non par stratification. Pour toutes les expériences, les grandeurs caractéristiques de ces écoulements sont les suivantes :

- la vitesse du front avant  $u$ ,
- la vitesse du front arrière des grosses billes  $u_g$ .

Les caractéristiques du dépôt sont les suivantes :

- l'épaisseur du dépôt total  $h_{stop}$ ,
- la longueur du dépôt  $L$ ,
- le profil longitudinal de largeur  $W(x)$ .

Pour étudier ces écoulements bidisperses, il faut définir un état de référence.

### 6.2.2 État de référence

Afin de quantifier les modifications de morphologie d'un écoulement bidisperse par rapport à un écoulement monodisperse, il est nécessaire de définir un état de

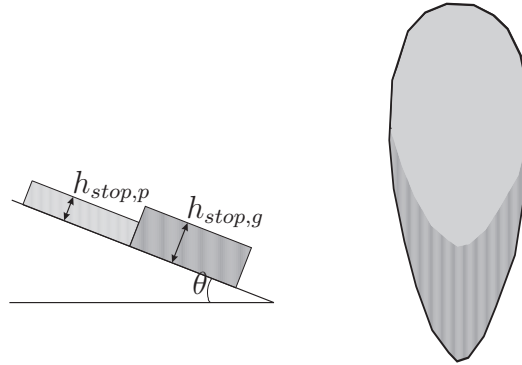


FIG. 6.6 – Schématisation de l'état de référence pour les écoulements bidisperses : il n'y a pas d'interaction entre les deux classes de billes composant le mélange bidisperse.

référence. Les différents états de référence que l'on peut considérer, pourraient être des écoulements monodisperses de billes de diamètre  $d_p$  ou  $d_g$ . Or, comme dans les expériences, un des paramètres importants est la fraction massique des billes présentes dans le mélange, il apparaît qu'un état mixte semble le meilleur état de référence. Cet état est basé sur l'hypothèse que la ségrégation étant totale et les grosses billes étant présentes en surface, les deux types de bille se déposent successivement sur le plan (fig. 6.6). Alors le dépôt est constitué de deux dépôts successifs, le premier constitué uniquement de petites billes, et le second constitué uniquement de grosses billes. Cette hypothèse permet de déterminer la longueur totale du dépôt à partir des longueurs d'écoulements monodisperses de chaque espèce. Cette hypothèse consiste en fait à supposer qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux classes de billes composant le mélange : ce qui se traduit, d'une part, par le fait que l'épaisseur du dépôt est, dans la zone où il n'y a que des petites billes, égale à  $h_{stop,p}$  (c'est-à-dire  $h_{stop}$  d'un écoulement monodisperse de petites billes), et dans la zone où il n'y a que des grosses billes, égale à  $h_{stop,g}$  (c'est-à-dire  $h_{stop}$  d'un écoulement monodisperse de grosses billes) et, d'autre part, par le fait que la largeur maximale du dépôt est égale à la largeur maximale de l'écoulement monodisperse.

La loi de mélange s'écrit alors pour les écoulements bidisperses sous la forme :

$$L = \frac{\%g}{100} L_g + \left(1 - \frac{\%g}{100}\right) L_p \quad (6.1)$$

où

- $L$  est la longueur modélisée de l'écoulement bidisperse,
- $L_p$  (resp.  $L_g$ ) est la longueur d'un écoulement monodisperse constitué de petites (resp. grosses) billes,
- $\%g$  représente le pourcentage massique de grosses billes présentes dans le mélange.



Cette loi de mélange représente le cas où il n'y a pas d'interaction entre les deux classes de billes.

L'état de référence est donc tel que l'épaisseur  $h_{stop}$  de chaque classe de billes n'est pas affectée par la présence de l'autre classe de bille, que le profil de largeur n'est pas modifié et que la longueur suit la loi de mélange proposée par l'équation 6.1.

## 6.3 Différents régimes

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats caractéristiques des dépôts obtenus après des écoulements bidisperses d'une masse constante de mélange granulaire. La morphologie des dépôts présentant une grande diversité par rapport aux dépôts monodisperses, notre attention se portera particulièrement sur la longueur du dépôt bidisperse  $L$ , l'évolution longitudinale de la largeur  $W(x)$  et l'épaisseur  $h_{stop}$ .

Pour les trois différentes configurations,

- $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ ,
- $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ ,
- $d_p > d_c$ .

nous décrirons, pour un pourcentage fixé de grosses billes, la forme du dépôt. La dynamique de ces écoulements a également été observée, du fait de l'existence de deux fronts : le front avant de l'écoulement (qui est parfois confondu avec le front avant des petites billes), et le front arrière de grosses billes s'écoulant sur les petites billes lors de l'arrêt de l'écoulement. Finalement, on s'intéressera aux évolutions de ces différentes morphologies en fonction du pourcentage massique de grosses billes  $\%g$  et des diamètres  $d_p$  et  $d_g$ .

### 6.3.1 $d_p < d_c$ et $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$

#### description du dépôt

Le dépôt laissé par l'écoulement bidisperse semble être confiné (fig. 6.7). On observe une diminution brutale de la largeur par rapport à un dépôt obtenu dans le cas monodisperse. Il y a formation d'un doigt de largeur à peu près constante. Dans cette expérience, les petites billes se trouvent au centre du dépôt et au centre du doigt, les grosses billes sont à la périphérie du dépôt. On peut, de plus, distinguer sur la figure 6.7 que quelques grosses billes restent sur le dépôt de petites. L'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  dans la zone centrale est constante le long du dépôt (fig. 6.8 (a)). Si on s'intéresse aux variations de l'épaisseur perpendiculairement à l'écoulement, on constate que l'on peut définir deux zones. La zone centrale, constituée de petites billes et de quelques grosses billes a une

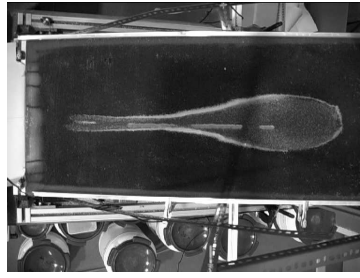


FIG. 6.7 – Les grosses billes (blanches) sont à la périphérie du dépôt, les petites billes (grises) sont au centre. La largeur du dépôt diminue rapidement, et on observe la formation d'un doigt de largeur constante ( $d_p=327 \mu m$ ,  $d_g=755 \mu m$ ,  $\%g=40$  et  $\theta=25^\circ$ ).

épaisseur à peu près constante. De part et d'autre de cette zone centrale, on observe des "levées". L'épaisseur de ces "levées" est beaucoup plus importante que l'épaisseur du dépôt dans la zone centrale (fig. 6.8 (b)). Si on s'intéresse à ces profils d'épaisseur pris perpendiculairement à l'écoulement (suivant  $y$ ), le long du dépôt (suivant  $x$ ), le même profil d'épaisseur constitué des deux zones est observé. Par ailleurs, la largeur maximale du dépôt  $W_{max}$  est la même que celle pour des écoulements monodisperses. L'angle d'inclinaison du plan est pris égal à  $25^\circ$  dans cette série d'expériences.

### dynamique

Dans ces expériences, on s'est intéressé à la dynamique de ces écoulements. On remarque pour ces expériences, que les vitesses du front avant, et du front arrière de grosses billes ne sont pas constantes au cours du temps (fig. 6.9).

### évolution avec $\%g$

Les résultats précédents sont déduits des observations faites pour un mélange bidisperse, le pourcentage de grosses billes étant constant et égal à 40 %. En figure 6.10, sont présentés les différents dépôts obtenus pour des pourcentages massiques de grosses billes variant de 0 à 90 %. On remarque dans toutes les expériences que la morphologie du dépôt est différente de celle d'un dépôt laissé par un écoulement monodisperse. Dans toutes ces expériences, on observe une diminution rapide de la largeur. On remarque que la disposition des billes sur le dépôt est la même que dans le cas précédemment développé : les petites billes sont au centre du dépôt, les grosses se trouvant principalement à la périphérie. Cependant on distingue quelques grosses billes sur le dépôt de petites billes. La formation d'un doigt n'apparaît pas pour tous les pourcentages de grosses billes. On remarque d'après la figure 6.10 que le doigt se forme pour des pourcentages de grosses billes compris entre 30% et 70%. Pour des pourcentages plus faibles de

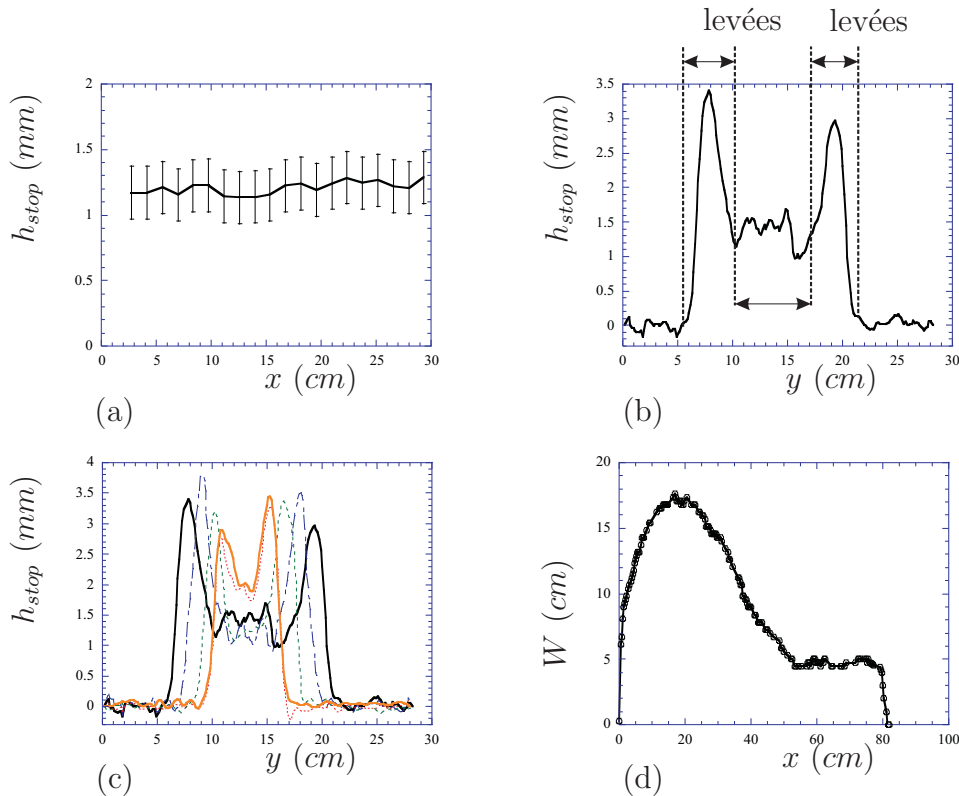


FIG. 6.8 – (a) l'épaisseur du dépôt est constante le long du dépôt (direction  $x$ ). (b) l'épaisseur du dépôt, perpendiculairement à la direction de l'écoulement (direction  $y$ ), est constante dans la partie centrale du dépôt, mais présente de part et d'autre de cette partie centrale, une épaisseur plus importante : les “levées”, (c) épaisseurs du dépôt dans le “doigt” pour différentes abscisses : l'épaisseur des levées est à peu près constante, l'épaisseur dans la zone centrale augmente légèrement à l'approche du front, (d) profil de largeur du dépôt  $W(x)$ , le doigt (pour  $x > 50$  cm) est de largeur constante ( $d_p=327 \mu m$ ,  $d_g=755 \mu m$ ,  $\%g=40$  et  $\theta=25^\circ$ ).

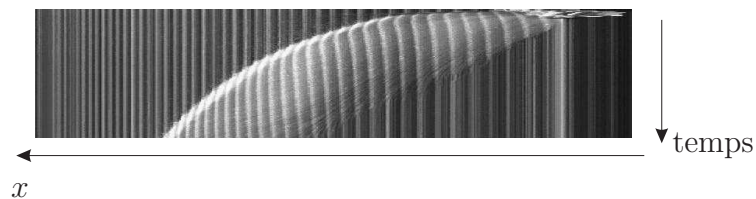


FIG. 6.9 – Diagramme spatio-temporel obtenu lors d'un écoulement bidisperse tel que  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ . Les vitesses (du front avant et du front arrière de grosses billes) ne sont pas constantes au cours du temps ( $d_p=327 \mu m$ ,  $d_g=755 \mu m$ ,  $\%g=40$  et  $\theta=25^\circ$ ).

grosses billes, on ne distingue pas beaucoup de grosses billes au front du dépôt ainsi que sur les côtés. Pour des pourcentages plus élevés, on constate que les grosses billes sont accumulées au front du dépôt.

On peut s'intéresser aussi aux longueurs des dépôts pour un mélange bidisperse en fonction du pourcentage de grosses billes. La longueur des dépôts obtenus après des écoulements bidisperses est, quel que soit le pourcentage massique des grosses billes présentes dans le mélange, supérieure à la longueur donnée par la loi de mélange (état de référence) (fig. 6.11). On peut remarquer sur ces courbes une zone (pour des pourcentages compris entre 30 et 70 %) où les longueurs sont très importantes, cette zone correspond aux expériences où il y a formation de doigt. L'épaisseur du dépôt dans la zone constituée de petites billes diminue avec le pourcentage de grosses billes  $\%g$  dans le mélange initial (fig. 6.11). L'augmentation de la longueur du dépôt est donc corrélée à la diminution de l'épaisseur de la couche de petites billes par rapport au cas monodisperse et à la diminution brutale de la largeur.

### évolution avec $d_g$ et $d_p$

On a montré dans ce qui précède que pour cette configuration, la longueur du dépôt, quel que soit le pourcentage de grosses billes, est supérieure à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange. Ce résultat a été obtenu pour un mélange donné de tailles de billes. Les mêmes expériences de lâcher d'une masse constante de matériau granulaire bidisperse ont été réalisées en changeant le diamètre des classes de billes en gardant  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} < \mu_{2,g}$  (fig. 6.12 et 6.13). On remarque dans toutes ces expériences, que les mêmes conclusions sont valables. Cependant dans le cas d'un mélange constitué de billes ayant des diamètres proches ( $d_p = 327 \mu m$  et  $d_g = 450 \mu m$ ), l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt est supérieure à l'épaisseur  $h_{stop,p}$  (où  $h_{stop,p}$  est l'épaisseur du dépôt laissé par un écoulement monodisperse de petites billes). Ceci s'explique par le fait que les grosses billes sont piégées dans le dépôt de petites. D'après les longueurs des dépôts en fonction des différents mélanges étudiés, on constate qu'il existe pour un pourcentage donné, un maximum de la longueur du dépôt par rapport à la loi de mélange. Ce maximum est plus important quand le diamètre des grosses billes est proche de  $d_c$  (fig. 6.12).

Si on s'intéresse aux variations des longueurs dans le cas où le diamètre des grosses billes  $d_g$  est constant (fig. 6.13), on remarque que les longueurs des dépôts sont les plus importantes dans le cas où le diamètre des petites billes est le plus faible. La même conclusion est valable pour les épaisseurs; en effet les épaisseurs du dépôt  $h_{stop}$  sont d'autant plus faibles que le diamètre des petites billes  $d_p$  est faible. Pour une même friction à la périphérie, et probablement un même effet de confinement, on observe dans ce cas l'effet d'un plus grand rapport  $d_g/d_p$ . On remarque, de plus, que dans le cas où les petites billes ont des diamètres supérieurs ou égaux à  $450 \mu m$  (fig. 6.13) que l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  est plus importante que l'épaisseur du dépôt monodisperse de petites billes. Ce

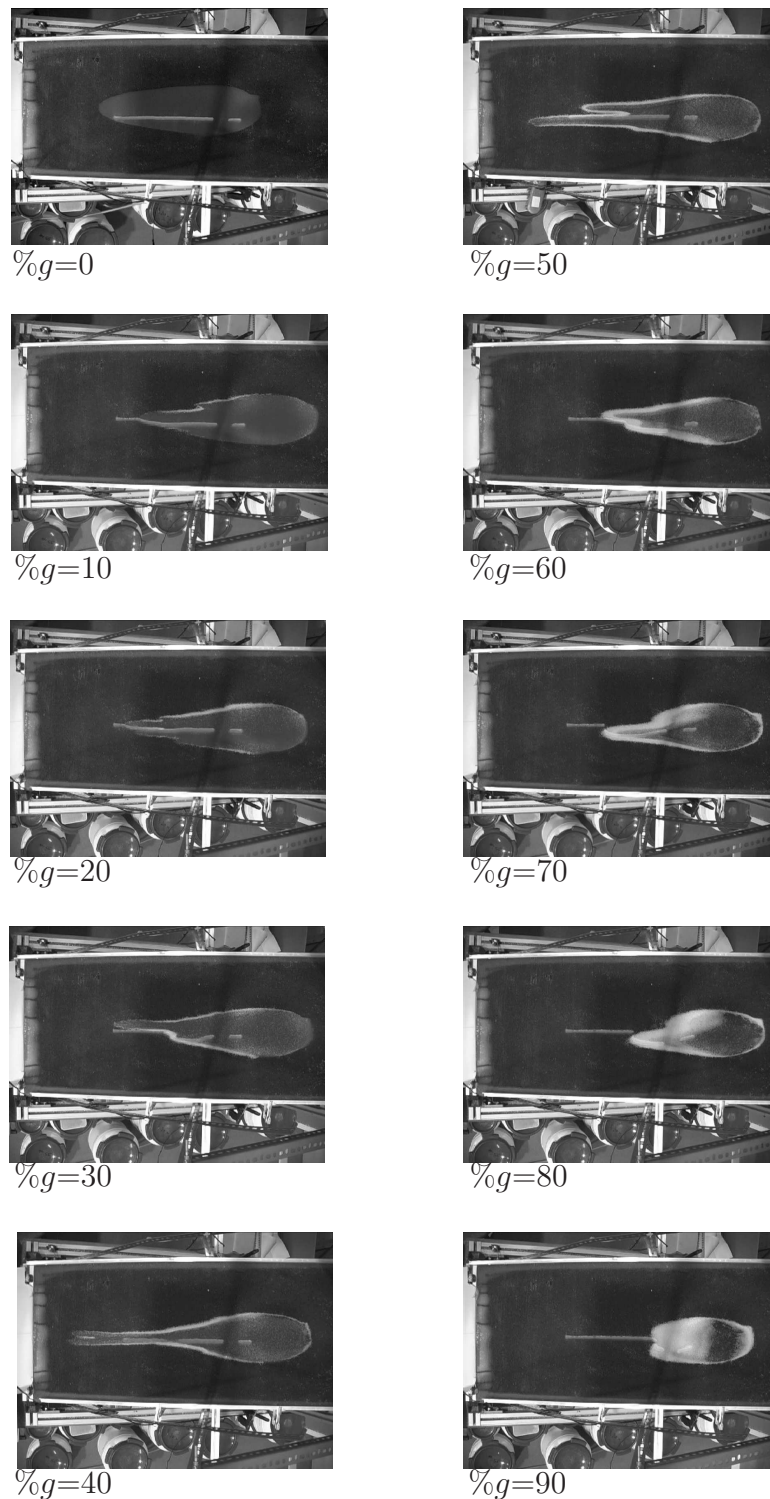


FIG. 6.10 – Dépôts obtenus dans le cas où  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$  avec  $d_p=327\mu m$ ,  $d_g=755\mu m$   $\theta=25^\circ$ . La largeur du dépôt diminue rapidement. La formation d'un doigt a lieu pour des pourcentages compris entre 30% et 70%. Pour des pourcentages plus faibles de grosses billes, très peu de grosses billes sont présentes à la périphérie du dépôt. Pour des pourcentages plus élevés de grosses billes, il y a une accumulation de grosses billes au front du dépôt.

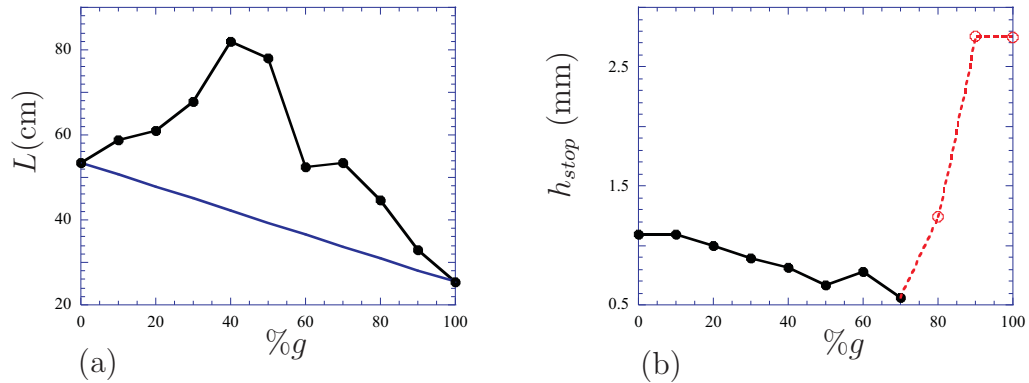


FIG. 6.11 – (a) la longueur du dépôt bidisperse est supérieure à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange quel que soit le pourcentage massique de grosses billes. (b) l'épaisseur du dépôt diminue avec le pourcentage massique de grosses billes  $\%g$  ( $\bullet$  : épaisseur du dépôt dans la zone du dépôt uniquement constituée de petites billes,  $\circ$  : épaisseur totale du dépôt, mélange de petites billes et de grosses billes) ( $d_p=327\mu m$ ,  $d_g=755\mu m$ ,  $\theta=25^\circ$ ).

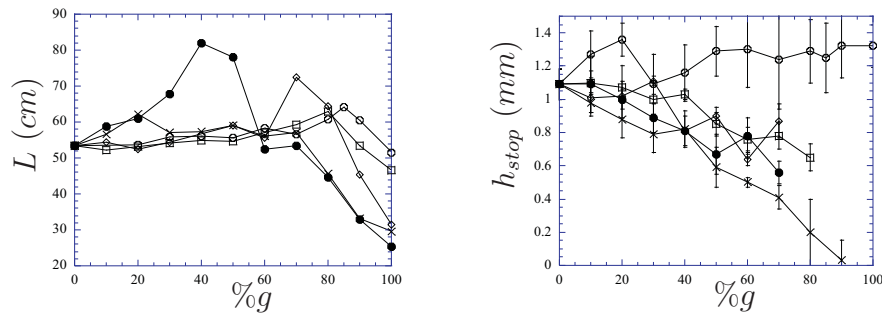


FIG. 6.12 – (a) Longueur  $L$  et (b) épaisseur  $h_{stop}$  des dépôts pour  $d_p$  constant égal à  $327\mu m$  et  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$  avec :  $\circ$   $d_g=450\mu m$ ;  $\square$   $d_g=550\mu m$ ;  $\diamond$   $d_g=670\mu m$ ;  $\bullet$   $d_g=755\mu m$ ;  $\times$   $d_g=925\mu m$ . Les longueurs sont supérieures, quel que soit le pourcentage de grosses billes aux longueurs définies par chaque loi de mélange. L'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt diminue avec le pourcentage de grosses billes. Il est à noter que pour  $d_g=450\mu m$ , l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt est supérieure à  $h_{stop,p}$  ( $h_{stop}$  pour  $\%g=0$ ), cela s'explique par le fait que beaucoup de grosses billes de diamètre  $d_g$  sont piégées dans le dépôt de petites billes.

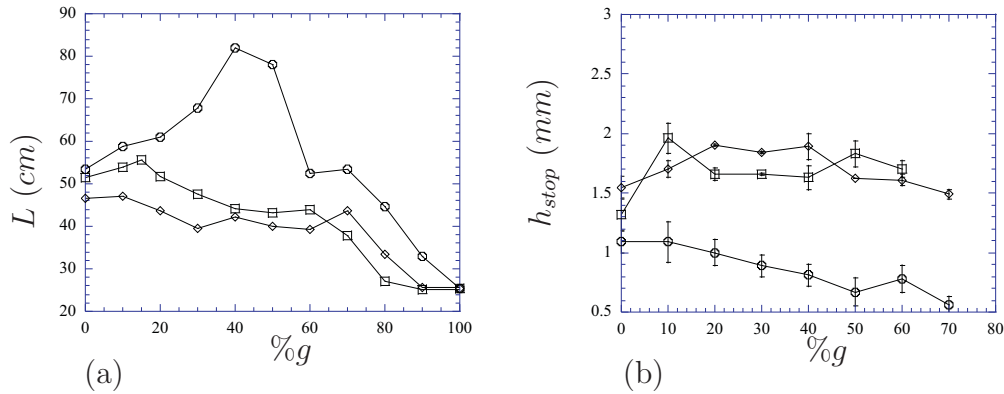


FIG. 6.13 – Longueur (a) et épaisseur (b) du dépôt avec  $d_g = d_c = 755 \mu m$  et  $d_p$  : (○)  $327 \mu m$ ; (□)  $450 \mu m$ ; (◇)  $550 \mu m$ . La longueur est d'autant plus importante que le diamètre  $d_p$  est petit. L'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  est d'autant plus faible que le diamètre  $d_p$  est petit.

résultat s'explique par le fait que beaucoup de grosses billes restent à la surface libre du dépôt, la mesure de l'épaisseur  $h_{stop}$  prenant en compte la présence de ces grosses billes.

En conclusion, pour  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} < \mu_{2,g}$ , on observe :

- une augmentation de la longueur  $L$  du dépôt par rapport à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange,
- une diminution de l'épaisseur  $h_{stop,p}$  de la couche de petites billes (quand elle est mesurable) par rapport au cas monodisperse,
- une diminution brutale de la largeur  $W$ , cette diminution pouvant entraîner une des deux possibilités suivantes :
  - la formation d'un doigt de largeur constante,
  - l'arrêt très rapide de l'écoulement.

Ces phénomènes sont amplifiés pour  $d_g$  proche de  $d_c$ . De plus, le rapport des diamètres  $d_g/d_p$  joue également un rôle important sur la dynamique de ces écoulements : un fort rapport  $d_g/d_p$  accentue la diminution de  $h_{stop}$  et l'augmentation de  $L$ . Bien sûr, ces observations sur les longueurs de dépôts, les épaisseurs et le profil longitudinal de largeur sont liées. On interprète l'augmentation de la longueur du dépôt  $L$  par une diminution de la largeur  $W$  et de l'épaisseur  $h_{stop}$ .

### 6.3.2 $d_p < d_c$ et $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$

Cette condition implique que la friction basale  $\mu_{2,g}$  des grosses billes est inférieure à la friction basale  $\mu_{2,p}$  des petites billes. De cette condition sur les frictions basales de chaque classe de billes, on en déduit qu'il existe une plage d'angles d'inclinaison du plan  $\theta$  tels que les grosses billes ne sont pas stables sur

le plan ( $\theta > \theta_{2,g}$ ), alors que les petites billes sont stables ( $\theta < \theta_{2,p}$ ). Dans la suite, l'angle d'inclinaison du plan a été choisi tel que les grosses billes ne restent pas sur le plan ( $\theta=25^\circ$ ).

### description du dépôt

Dans cette configuration, le dépôt, laissé par un écoulement bidisperse, est constitué uniquement de petites billes, les grosses billes n'étant pas stables sur le plan. Il arrive toutefois que quelques grosses billes restent sur le dépôt de petites. La morphologie du dépôt est différente de celle des dépôts obtenus dans le cas monodisperse. On remarque qu'il existe une largeur maximale  $W_{max}$ , cependant, la diminution de largeur le long du dépôt est très lente par rapport au cas monodisperse (fig. 6.14). L'épaisseur du dépôt constitué uniquement de petites billes est constante le long du dépôt (fig. 6.15). Si on s'intéresse aux profils d'épaisseur perpendiculairement à l'écoulement, on constate que l'épaisseur est constante dans la zone centrale du dépôt.

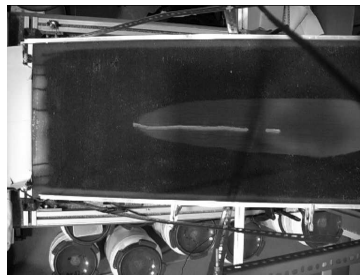


FIG. 6.14 – La largeur du dépôt varie peu le long du dépôt, la diminution de largeur est très lente comparée au cas monodisperse, ( $d_p=327 \mu m$ ,  $d_g=2925 \mu m$ ,  $\%g=20$ ,  $\theta=25^\circ$ ).

### dynamique

Si on s'intéresse à la dynamique de ces écoulements granulaires, on constate que la vitesse du front avant n'est pas constante au cours du temps. Comme les grosses billes ne restent pas au front de l'écoulement, cette vitesse est la vitesse du front avant de l'écoulement de petites billes. Cependant, la vitesse du front arrière de grosses billes est constante au cours du temps (fig. 6.16). Pour cette configuration ( $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ ), nous nous intéresserons plus en détail à la dynamique dans le chapitre 7, qui concerne des écoulements stationnaires.

### évolution avec $\%g$

En figure 6.17, sont présentés les différents dépôts obtenus, pour des pourcentages massiques de grosses billes variant de 0 à 90 %. On remarque dans toutes les



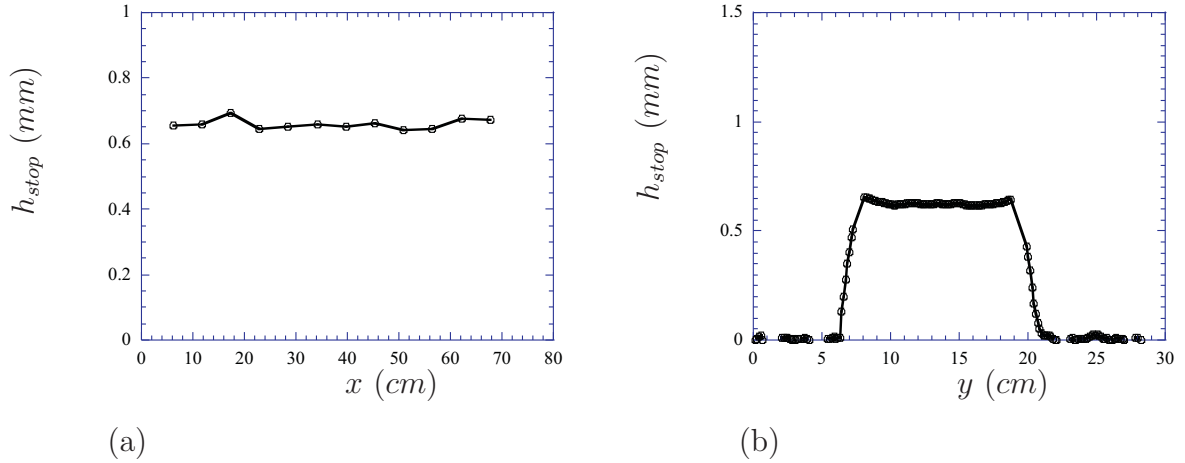


FIG. 6.15 – (a) l'épaisseur du dépôt est constante le long du dépôt (direction  $x$ ), l'épaisseur du dépôt, perpendiculairement à la direction de l'écoulement (selon  $y$ ), est également presque constante ( $d_p=327 \mu m$ ,  $d_g=2925 \mu m$ ,  $\%g=20$ ,  $\theta=25^\circ$ ).

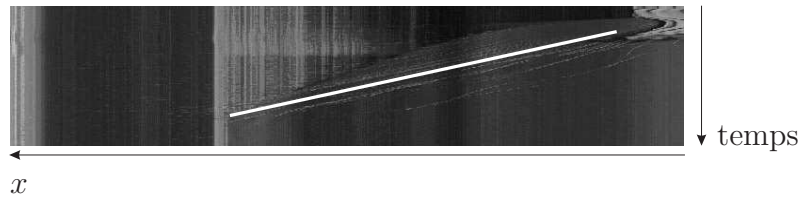


FIG. 6.16 – Diagramme spatio-temporel : la vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes (matérialisée par la ligne blanche) est constante au cours du temps ( $d_p=327 \mu m$ ,  $d_g=2925 \mu m$ ,  $\%g=20$ ,  $\theta=25^\circ$ ).

expériences que la morphologie du dépôt est différente de celle d'un dépôt laissé par un écoulement monodisperse. Dans toutes ces expériences, on observe une diminution lente de la largeur. De plus, quelque soit le pourcentage de grosses billes, le dépôt est constitué uniquement de petites billes. On remarque cependant, que pour des pourcentages élevés (c'est-à-dire supérieurs à 80 %), le dépôt de petites billes sur le plan est diffus. En effet, pour des pourcentages très élevés de grosses billes, l'écoulement bidisperse n'a pas le temps de s'établir avec une ségrégation totale : les petites billes coincées entre les grosses billes vont se déposer le long du plan dans les trous du plan. On ne distingue pas de forme nette du dépôt dans ces expériences. Les mesures d'épaisseur pour ces expériences sont délicates et on trouve des épaisseurs proches de 0.

On peut s'intéresser aussi aux longueurs des dépôts pour un mélange bidisperse en fonction du pourcentage de grosses billes. La longueur des dépôts obtenus après des écoulements bidisperses est, quel que soit le pourcentage massique des grosses billes présentes dans le mélange, supérieure à la longueur donnée par la loi de mélange (état de référence) (fig. 6.18). L'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt, constitué uniquement de petites billes ( $h_{stop,p}$ ), diminue avec le pourcentage de grosses billes  $\%g$  (fig. 6.18). La diminution rapide de l'épaisseur pour des pourcentages  $\%g$  supérieurs à 80%, s'explique par le fait que le dépôt n'est pas clairement défini pour ces expériences, comme le montre les photos en figure 6.17. Dans toutes ces expériences, le dépôt est uniquement constitué de petites billes.

L'augmentation de la longueur du dépôt par rapport à la loi de mélange, dans le cas où  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$ , peut donc être reliée à la diminution de l'épaisseur de la couche de petites  $h_{stop,p}$ . Cependant une augmentation de la largeur par rapport au cas monodisperse devrait entraîner une diminution de la longueur. On conclut que, dans ce cas, les variations d'épaisseur  $h_{stop,p}$  dans le cas bidisperse par rapport au cas monodisperse l'emportent sur les variations d'augmentation de la largeur entre le cas bidisperse et le cas monodisperse.

### évolution avec $d_g$

Les mêmes expériences de lâcher d'une masse constante de matériau granulaire ont été faites en changeant les diamètres des billes constituant chaque classe présente dans le mélange. On remarque que dans toutes les configurations, telles que  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$ , les longueurs des dépôts sont supérieures aux longueurs obtenues à partir de la loi de mélange quel que soit le pourcentage massique de grosses billes (fig. 6.19). Il existe un pourcentage de grosses billes pour lequel la longueur du dépôt est maximum. D'après ces résultats, la longueur maximum varie avec le diamètre des grosses billes  $d_g$  et semble présenter un maximum pour un diamètre de grosses billes  $d_g = 1750 \mu m$ .

L'augmentation de la longueur est corrélée à une diminution de l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt constitué uniquement de petites billes.

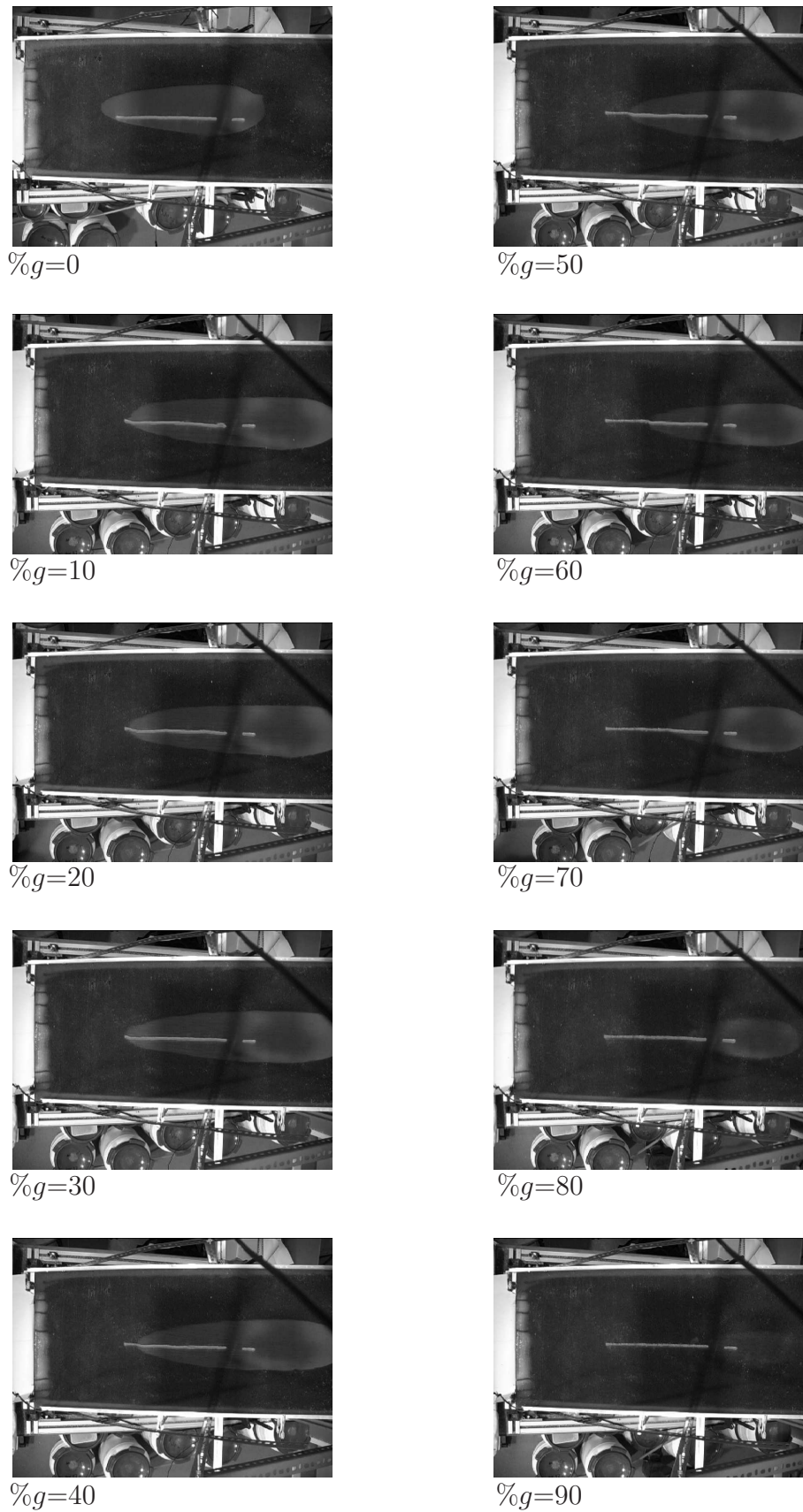


FIG. 6.17 – Dépôts obtenus dans le cas où  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$  avec  $d_p=327\mu\text{m}$ ,  $d_g=2925\mu\text{m}$ ,  $\theta=25^\circ$ . Le dépôt est uniquement constitué de petites billes. La diminution de la largeur est très lente le long du dépôt.

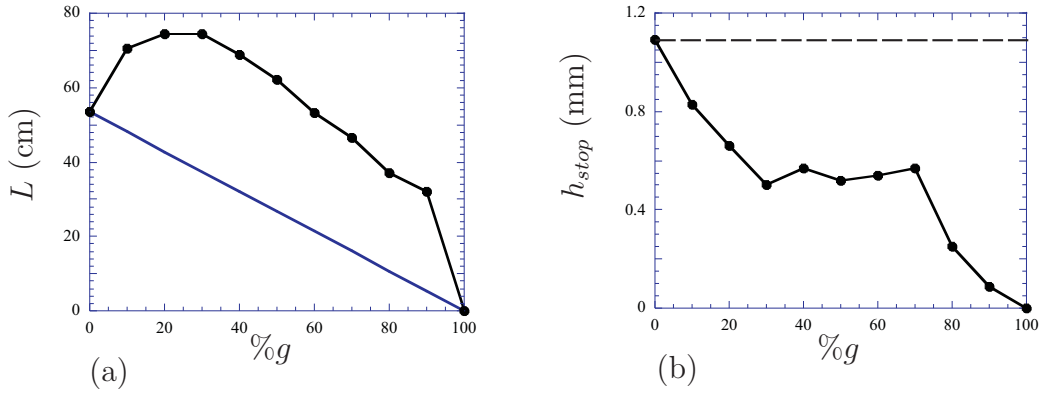


FIG. 6.18 – (a) La longueur  $L$  du dépôt bidisperse est supérieure à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange quelque soit le pourcentage massique de grosses billes. (b) L'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt, constitué uniquement de petites billes, diminue avec le pourcentage massique de grosses billes ( $d_p = 327 \mu m$ ,  $d_g = 2925 \mu m$ ,  $\theta = 25^\circ$ ).

En conclusion, pour  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$ , on observe :

- une augmentation de la longueur  $L$  du dépôt par rapport à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange,
- une diminution de l'épaisseur  $h_{stop,p}$  de la couche de petites billes par rapport au cas monodisperse,
- une variation lente de la largeur  $W$  le long du dépôt.

Le fait que la longueur du dépôt dans le cas bidisperse soit plus importante que la longueur obtenue à partir de la loi de mélange montre que les variations d'épaisseur entre le cas monodisperse et le cas bidisperse sont plus importantes que les variations de la surface totale du dépôt liées à une augmentation de la largeur par rapport au cas monodisperse.

### 6.3.3 $d_c < d_p < d_g$

Dans cette configuration, les diamètres des deux classes de billes sont supérieurs à  $d_c$ , la friction des grosses billes  $\mu_{2,g}$  est donc inférieure à la friction des petites billes  $\mu_{2,p}$  c'est-à-dire  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ .

#### description du dépôt

Dans cette configuration, le dépôt laissé par un écoulement bidisperse est constitué des deux classes de billes, les petites billes se trouvant à la base du dépôt, les grosses billes à la surface. L'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  est plus faible que dans les expériences précédentes ( $\theta = 19^\circ$ ) : en effet, pour le même angle d'inclinaison que dans les expériences précédentes ( $25^\circ$ ), il ne reste pas de dépôt

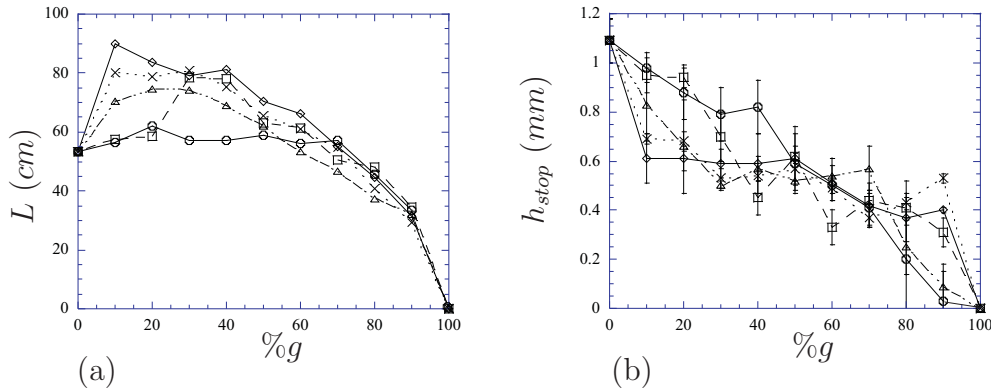


FIG. 6.19 – (a) Longueurs et (b) épaisseurs des dépôts avec  $d_p=327 \mu m$  et  $d_g$  : ( $\circ$ )  $1125 \mu m$ ; ( $\square$ )  $1325 \mu m$ ; ( $\diamond$ )  $1750 \mu m$ ; ( $\times$ )  $2150 \mu m$  et ( $\triangle$ )  $2925 \mu m$ . Les longueurs des dépôts  $L$  sont supérieures aux longueurs déduites de la loi de mélange (état de référence). Les épaisseurs  $h_{stop}$  du dépôt diminuent avec le pourcentage massique de grosses billes

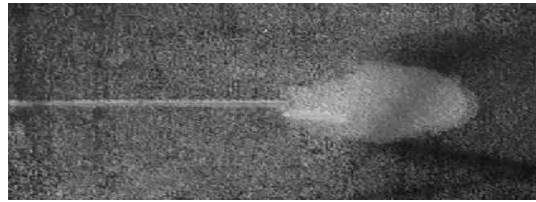


FIG. 6.20 – Le dépôt est constitué des deux classes de billes, les grosses billes étant à la surface libre ( $d_p=1125 \mu m$ ,  $d_g=1325 \mu m$ ,  $\%g=40$  et  $\theta=19^\circ$ ).

car l'angle ( $25^\circ$ ) est supérieur aux angles  $\theta_2$  de chaque classe de billes. Cependant, quelques grosses billes continuent leur mouvement une fois arrivées au front et ne restent pas sur le plan, ce qui implique que le dépôt n'est pas bien défini au front (fig. 6.20).

### dynamique

Pour ces écoulements, la vitesse du front avant n'est pas constante au cours du temps, il n'existe pas de front arrière des grosses billes coulant sur les petites billes.

### évolution avec $\%g$

Les résultats précédents sont déduits des observations faites pour un mélange bidisperse, le pourcentage de grosses billes étant égal à  $\%g = 40$ . Pour des pourcentages de grosses billes différents, on remarque dans toutes les expériences que

la morphologie du dépôt est différente par rapport au cas d'un dépôt laissé par un écoulement monodisperse. Quel que soit le pourcentage de grosses billes, le dépôt est constitué des deux classes de billes superposées, les grosses billes sont piégées sur le dépôt de petites billes, et elles sont aussi présentes au front. Il est à noter que quelques grosses billes ne participent pas au dépôt, car elles ne restent pas sur le plan : c'est pourquoi le dépôt n'est pas bien défini au front. L'évolution avec le pourcentage massique de grosses billes n'est pas représentée ici car les photos de ces dépôts ne sont pas très visibles.

On peut s'intéresser aux longueurs des dépôts pour un mélange bidisperse en fonction du pourcentage de grosses billes. La longueur des dépôts obtenus

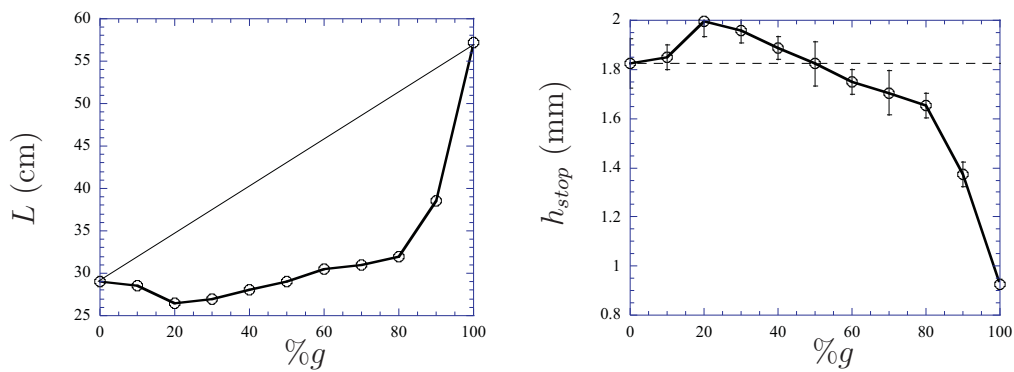


FIG. 6.21 – La longueur du dépôt bidisperse est inférieure à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange quelque soit le pourcentage massique de grosses billes.

après des écoulements bidisperses est, quel que soit le pourcentage massique des grosses billes présentes dans le mélange, inférieure à la longueur donnée par la loi de mélange (état de référence). Comme on l'a vu, le dépôt est constitué des deux classes de billes, le front de l'écoulement n'est constitué que des grosses billes. Le fait que ces grosses billes ne participent pas au dépôt, implique que la longueur du dépôt mesurée est sous-estimée par rapport à la longueur qu'aurait le dépôt si toutes les billes restaient sur le plan. Cependant, le pourcentage de grosses billes qui ne restent pas sur le plan est de l'ordre de 10 % de la masse de la calotte, cette perte ne permet pas d'expliquer le fait que la longueur des dépôts soit inférieure à la loi de mélange. Cette perte entraîne une diminution de la longueur de 10 % de la longueur des grosses billes en monodisperse, soit environ 6cm. Même une fois corrigées de cet effet, les longueurs (fig. 6.21) restent bien en dessous de la droite de mélange. La diminution de longueur vient du fait qu'une certaine quantité de grosses billes est piégée sur le dépôt de petites billes. Le piégeage des grosses billes entraîne alors une augmentation de l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  (fig. 6.21).

En conclusion, pour  $d_c < d_p$ , on observe une diminution de la longueur  $L$  du dépôt par rapport à la longueur obtenue à partir de la loi de mélange.

La diminution de la longueur du dépôt  $L$  est due au piégeage des grosses billes sur le dépôt de petites billes.

### 6.3.4 Conclusion

Trois régimes, déterminés à partir des positions relatives des diamètres de chaque classe de billes par rapport au diamètre  $d_c$  et donc des frictions relatives de chaque classe de billes sur le plan, ont été présentés (récapitulatif en fig. 6.22). Cette étude montre que les écoulements bidisperses sont régis par deux classes de mécanismes différents :

- un effet de “ligne” dû à la présence ou non de grosses billes “frottantes” à la périphérie de l’écoulement ;
- deux effets d’“interfaces” dus à l’interaction des petites billes avec le plan rugueux d’une part, et à l’interaction des petites billes avec les grosses billes à l’interface entre les deux couches de l’écoulement d’autre part.

Ces deux mécanismes sont présentés par la suite pour les trois régimes.

## 6.4 Mécanismes

En supposant que la ségrégation est totale et instantanée, les écoulements bidisperses peuvent être représentés de manière schématique comme sur la figure 6.23. Ces écoulements bidisperses seront contrôlés par les différentes interactions :

- interaction des petites billes avec le plan rugueux,
- interaction des petites billes avec les grosses billes,
- interaction des grosses billes avec le plan rugueux.

Ces différentes interactions peuvent être regroupées en deux effets. Tout d’abord un effet de ligne qui comprendra les interactions des grosses billes avec le plan rugueux sur le contour de l’écoulement. Ensuite, les effets d’interfaces qui prendront en compte les interactions des petites billes avec le plan rugueux, et les interactions des petites billes avec les grosses billes au niveau de l’interface entre les deux couches. Les effets de ligne ont une forte influence sur la morphologie du dépôt. Les effets d’interface, quant à eux, auront surtout une influence sur l’épaisseur totale du dépôt  $h_{stop}$ .

### 6.4.1 Effet de ligne

Les effets de ligne, comme on l’a vu, prennent en compte les interactions des grosses billes avec le plan rugueux, au front et sur les côtés, soit à la périphérie de l’écoulement. Ces effets de ligne peuvent être interprétés en s’intéressant aux frictions basales  $\mu_{2,p}$  (respectivement  $\mu_{2,g}$ ) pour les petites (respectivement grosses) billes sur le plan.

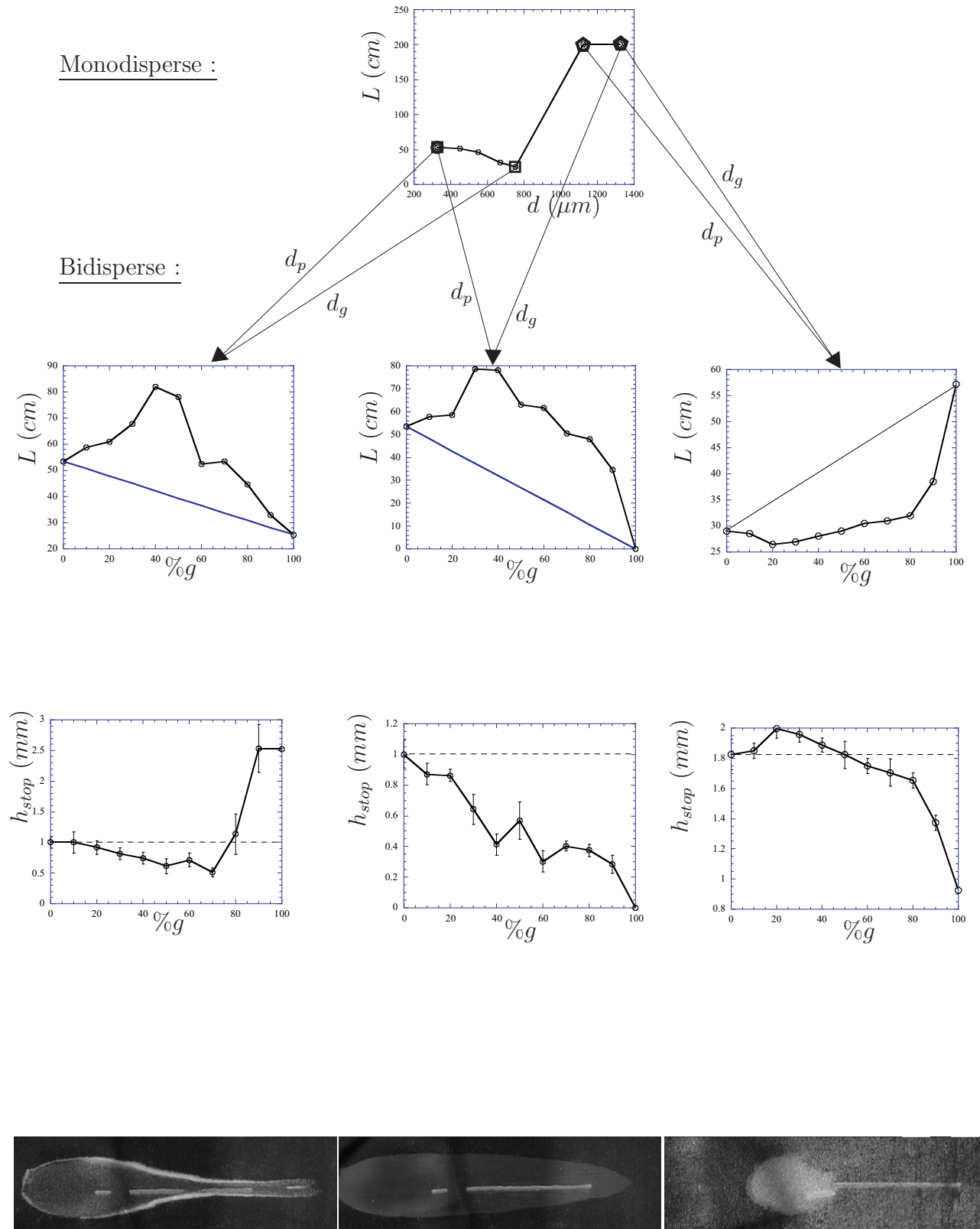


FIG. 6.22 – Trois régimes observés pour les écoulements bidisperses. Ces régimes dépendent du diamètre des petites billes  $d_p$  par rapport à  $d_c$  et des frictions basales des deux classes de billes ( $\mu_{2,p}$ ,  $\mu_{2,g}$ ) composant le mélange



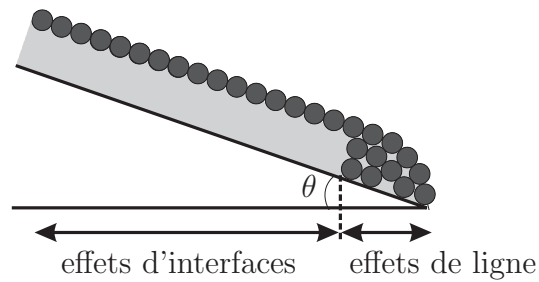


FIG. 6.23 – Représentation des écoulements bidisperses sur plan incliné rugueux, en supposant que la ségrégation est totale et instantanée.

- Si  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ , la friction basale des grosses billes est supérieure à la friction basale des petites billes. Les grosses billes se trouvant à la périphérie de l’écoulement vont freiner et confiner l’écoulement. La largeur de l’écoulement diminuera alors plus rapidement pour ce mélange bidisperse que dans le cas monodisperse. Une des explications de ce mécanisme, appelé par la suite confinement de l’écoulement, peut être représentée de manière schématique (fig. 6.24). Les grosses billes peuvent créer une sorte de barrière au front de l’écoulement. La barrière freine l’écoulement dans sa progression vers le bas, mais aussi freine l’étalement du front empêchant l’écoulement de s’établir avec la largeur qu’il aurait si l’écoulement était monodisperse. Cette barrière peut ou non céder à cause de l’écoulement de petites et grosses billes en amont. Les conditions pour lesquelles, cette barrière constituée de grosses billes se casse n’ont pas été modélisées. Cependant, on remarque que si la barrière ne cède pas (fig. 6.24 a), l’écoulement s’arrêtera très rapidement (fig. 6.1 e). Dans le cas où la barrière cède (fig. 6.24 b), la largeur de l’écoulement diminue brutalement, et le dépôt est composé d’un ou plusieurs doigts de largeur constante (fig. 6.1 f, g). La diminution de la largeur de l’écoulement (et donc du dépôt) entraînera une augmentation de la longueur totale du dépôt.
- Si  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ , la friction basale des grosses billes est inférieure à la friction basale des petites billes. Cette configuration existe dans les cas suivants :
  - $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$
  - $d_c < d_p < d_g$

Les grosses billes se trouvant à la périphérie de l’écoulement n’auront pas d’influence sur la morphologie du dépôt. Dans ce cas, le dépôt n’est plus confiné, les morphologies des dépôts bidisperses devraient être comparables à celles des dépôts laissés par des écoulements monodisperses de petites billes, si l’effet de “ligne” était le seul effet régissant les écoulements granulaires bidisperses.

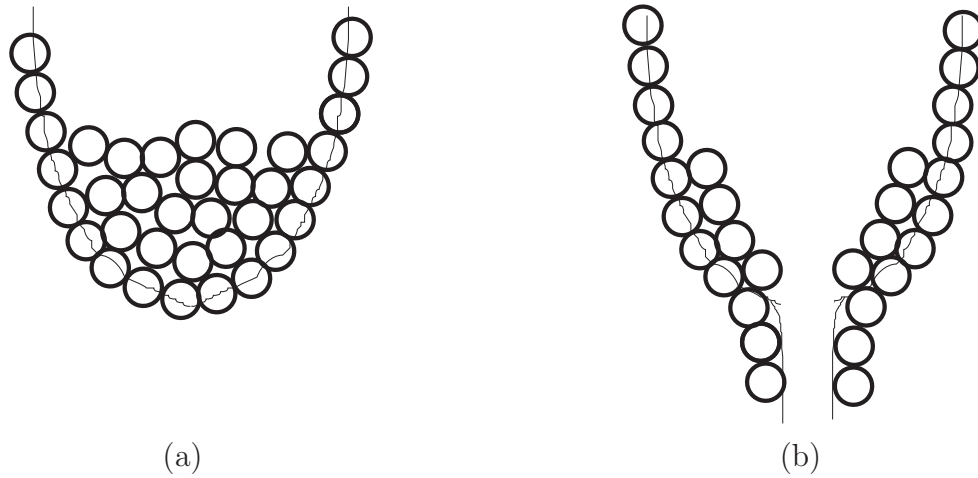


FIG. 6.24 – Lors d'un écoulement bidisperse, les grosses billes sont à la surface de l'écoulement, les petites billes à la base. Si  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ , les grosses billes créent une barrière à l'avant de l'écoulement. Au final, deux comportements sont possibles : (a) l'écoulement s'arrête, (b) la barrière se casse, les petites billes s'écoulent sur une largeur constante plus petite, il y a formation de doigts.

### Confinement

On a montré que les effets de ligne influent sur la morphologie du dépôt. Ces effets peuvent être quantifiés à partir des profils de largeur des différents dépôts bidisperses. Les profils de largeur selon  $x$  ont été déterminés pour différents écoulements. En figure 6.25, ils sont représentés pour différents mélanges, le pourcentage massique de grosses billes étant constant, égal à  $\%g=50$ . On constate tout d'abord que le profil de largeur dans la zone croissante de largeur, est le même pour tous les mélanges et que le maximum de largeur est lui aussi indépendant des mélanges. Cela s'explique par le fait que la largeur maximum est imposée par le diamètre de la calotte. On peut comparer ces profils de largeur avec celui d'un dépôt monodisperse constitué de petites billes (courbe noire). Dans la zone décroissante de largeur, si la pente de la courbe de largeur est plus importante (en valeur absolue) dans le cas bidisperse que dans le cas monodisperse, on peut considérer que le dépôt bidisperse est confiné par rapport au dépôt monodisperse. Les résultats, présentés en figure 6.25, sont obtenus pour différents diamètres de grosses billes. On constate que pour des diamètres de grosses billes tels que  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$  (c'est-à-dire  $d_g = 670 \mu m$  et  $d_g = 755 \mu m$ ), la pente de la courbe de largeur est plus importante que celle obtenue dans le cas de dépôt monodisperse, le dépôt est donc confiné. Il apparaît, de plus, que pour des diamètres de grosses billes proches de  $d_c$ , l'efficacité du confinement est plus importante. Pour des diamètres de grosses billes, tel que  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ , la pente de la courbe

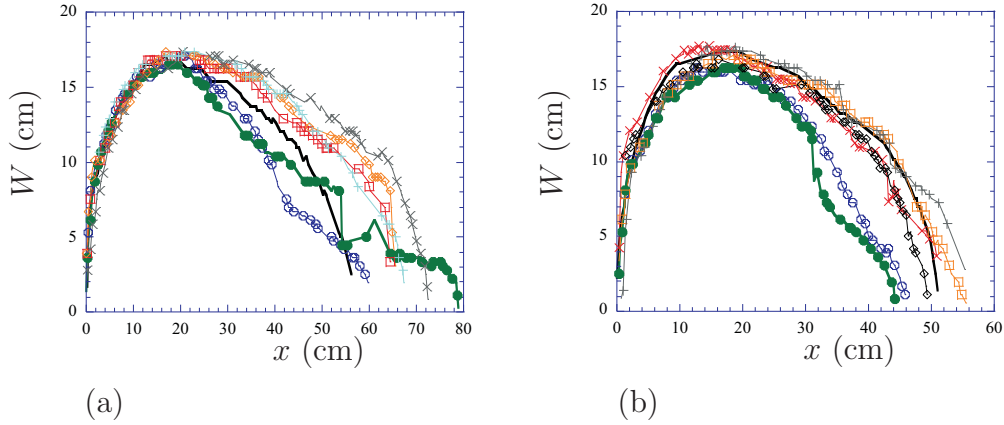


FIG. 6.25 – Profil de largeur en fonction de la distance le long du plan ( $\theta=25^\circ$ ) avec (a)  $d_p=327 \mu m$  et différents  $d_g$  :  $\circ d_g=670 \mu m$ ,  $\bullet d_g=755 \mu m$ ,  $\square d_g=1125 \mu m$ ,  $\diamond d_g=1325 \mu m$ ,  $\times d_g=1750 \mu m$ ,  $+ d_g=2150 \mu m$ ; (b)  $d_p=450 \mu m$  et différents  $d_g$  :  $\circ d_g=670 \mu m$ ,  $\bullet d_g=755 \mu m$ ,  $\times d_g=1750 \mu m$ ,  $\square d_g=1850 \mu m$ ,  $+ d_g=2150 \mu m$ ,  $\diamond d_g=3150 \mu m$ . La courbe noire représente le profil de largeur pour des dépôts monodisperses. Le pourcentage de grosses billes est dans tous les cas égal à  $\%g = 50$ . Le confinement des écoulements est déterminé à partir de la dérivée seconde du profil de largeur prise au maximum de la largeur. La présence d'un point d'inflexion sur certaines de ces courbes est caractéristique de la rupture du barrage et de la formation d'un doigt de largeur presque constante.

de largeur est moins importante dans le cas bidisperse que dans le cas monodisperse : l'écoulement bidisperse n'est pas confiné par rapport à l'écoulement monodisperse.

A partir des profils de largeur, on montre donc que le confinement de l'écoulement, et donc du dépôt, a lieu pour des diamètres tels que  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ . L'efficacité du confinement est d'autant plus importante que le diamètre des grosses billes est proche de  $d_c$ . Les mêmes expériences ont été réalisées en changeant le diamètre des petites billes ( $d_p=450 \mu m$  au lieu de  $d_p=327 \mu m$ ) (fig. 6.25 (b)), les mêmes conclusions restent valables.

Cette réduction de largeur brutale dans les dépôts bidisperses par rapport à celle des dépôts obtenus après des écoulements monodisperses peut être mise en évidence quantitativement en s'intéressant à la valeur de la dérivée seconde  $W''(x)$  du profil de largeur calculée au maximum de largeur  $W''_{bi,max}$ . Cette quantité représente en effet l'inverse du rayon de courbure de  $W(x)$  au maximum de largeur. Elle peut être comparée à la dérivée seconde du profil de largeur pour un dépôt monodisperse de petites billes  $W''_{mono,max}$ . Le rapport  $W''_{bi,max}/W''_{mono,max}$  semble être le paramètre permettant de quantifier les effets de confinement. Les différents profils de largeur sont présentés en figure 6.25. Si l'écoulement

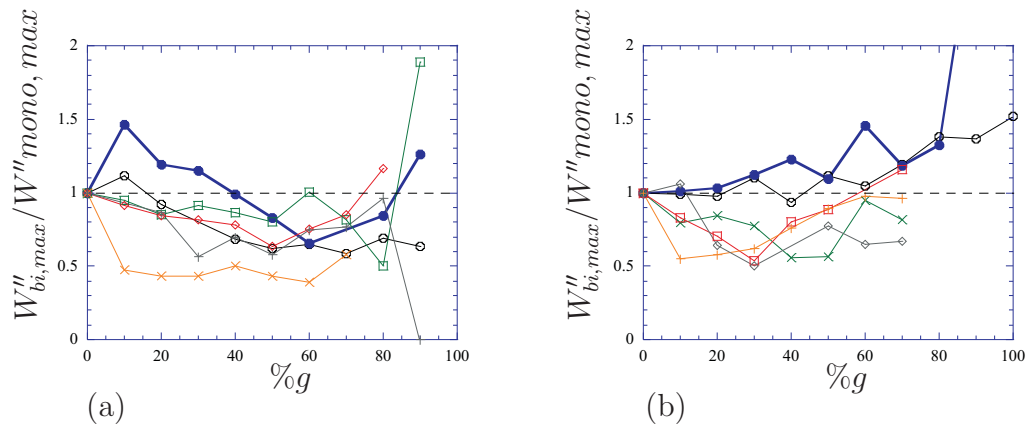


FIG. 6.26 – Le rapport  $W''_{bi,max}/W''_{mono,max}$ , caractéristique du confinement, en fonction du pourcentage massique de grosses billes pour différents mélanges (a)  $d_p=327 \mu m$  et différents  $d_g$  :  $\circ d_g=670 \mu m$ ,  $\bullet d_g=755 \mu m$ ,  $\square d_g=1125 \mu m$ ,  $\diamond d_g=1325 \mu m$ ,  $\times d_g=1750 \mu m$ ,  $+ d_g=2150 \mu m$ ; (b)  $d_p=450 \mu m$  et différents  $d_g$  :  $\circ d_g=670 \mu m$ ,  $\bullet d_g=755 \mu m$ ,  $\times d_g=1750 \mu m$ ,  $\square d_g=1850 \mu m$ ,  $+ d_g=2150 \mu m$ ,  $\diamond d_g=3150 \mu m$ . Les courbes étant classées, le confinement est le plus important pour des diamètres de grosses billes, proches de  $d_c$ .

est confiné par rapport à l'écoulement monodisperse constitué de petites billes,  $W''_{bi,max} < W''_{mono,max} < 0$ , c'est à dire que le rapport  $W''_{bi,max}/W''_{mono,max}$  sera supérieur à 1. Dans le cas d'un écoulement non confiné par rapport à l'écoulement monodisperse, le rapport  $W''_{bi,max}/W''_{mono,max}$  sera inférieur à 1. Ce paramètre, caractéristique du confinement, a été étudié pour différents mélanges en fonction du pourcentage massique de grosses billes (fig. 6.26). Les fluctuations des rapports  $W''_{bi,max}/W''_{mono,max}$  sont très importantes : ceci est dû aux fluctuations naturelles de la largeur entraînant une erreur très importante sur la dérivée seconde de ce profil. Néanmoins, on remarque (fig. 6.26) que le confinement du dépôt semble apparaître pour  $d_g=755 \mu m$  et parfois pour  $d_g=670 \mu m$ , c'est-à-dire, lorsque le diamètre des grosses billes est tel que  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ . De plus, les courbes pour  $d_g=670 \mu m$  et  $d_g=755 \mu m$  se classent approximativement, l'efficacité du confinement est d'autant plus grande que le diamètre des grosses billes est proche de  $d_c$ .

A partir des résultats présentés en figure 6.25, on peut aussi définir un critère pour lequel il y a formation d'un doigt de largeur constante. En effet, si les courbes de largeur présentent un point d'inflexion ( $W''(x) = 0$ ), cela implique qu'il y a formation d'un doigt. De plus, la largeur de ce doigt est constante si la courbe présente un palier ( $W = cte$ ).

Par ailleurs, dans le cas du confinement, l'homogénéité du mélange a une très forte influence sur la morphologie du dépôt. Des expériences ont été faites en faisant s'écouler sur le plan, une masse constante de matériau granulaire. Le mélange bidisperse peut être stratifié ou juste mélangé à la main dans la calotte. Le mélange à la main est beaucoup moins homogène que le mélange stratifié.

Avec ces expériences, on remarque que :

- si le mélange initial est stratifié, la reproductibilité des expériences est bonne, la digitation de l'écoulement apparaît pour les mêmes conditions expérimentales, les longueurs et les épaisseurs des dépôts sont reproductibles
- si le mélange initial n'est pas homogène, on observe des comportements différents suivant l'homogénéité du mélange, en particulier la formation d'un doigt devient aléatoire si les conditions expérimentales sont telles qu'on se place en limite de condition de rupture de "barrage".

Cela peut s'expliquer par le fait que dans un mélange stratifié, la répartition spatiale des billes dans la calotte est la même pour toutes les expériences faites. Dans le cas de mélanges faits à la main, la répartition spatiale des billes dans la calotte varie d'une expérience à l'autre. Il est aisé de comprendre que la morphologie du dépôt sera modifiée s'il y a une accumulation de grosses billes à un endroit particulier dans la calotte et donc dans l'écoulement.

Cependant, malgré ces limitations, il apparaît clairement que le confinement est d'autant plus efficace que la friction des grosses billes sur le plan est grande, c'est-à-dire que les grosses billes ont un diamètre proche de  $d_c$ .

En conclusion, les effets de ligne, impliquant un confinement de l'écoulement bidisperse, sont présents dans les configurations où  $d_p < d_g$  et  $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ . Dans ces configurations, l'augmentation de longueur du dépôt bidisperse par rapport aux longueurs obtenues à partir de la loi de mélange, est due en partie à la diminution brutale de la largeur des écoulements bidisperses par rapport aux écoulements monodisperses.

## 6.4.2 Effet d'interfaces

Les effets d'interfaces sont :

- les interactions des petites billes avec le fond rugueux (étudiée en partie I),
- les interactions des petites billes et des grosses billes.

Comme on l'a déjà vu, l'interaction des petites billes avec le plan rugueux fait intervenir la rugosité relative de la surface du plan, soit les diamètres  $d_p$  et  $d_c$ , c'est-à-dire  $d_p$ ,  $\lambda$  et  $C$ . De la même manière, l'effet d'interfaces entre les petites et les grosses billes va faire intervenir une sorte de rugosité d'interface donc le diamètre des petites billes  $d_p$  comparé au diamètre des grosses billes  $d_g$  en contact et peut être également les compacités des couches de petites billes, et de grosses billes. D'autre part, ces interactions rugueuses n'ont plus lieu sur des billes collées impossible à mettre en mouvement, mais sur des billes mobiles. On voit que va intervenir le rapport de masse entre petites et grosses billes dans la possibilité que les unes poussent les autres. Au total, les paramètres de cet effet d'interface entre petites et grosses billes sont le rapport de diamètre  $d_g/d_p$  qui intervient

dans la rugosité d'interface et dans le rapport de masse, et les compacités des deux couches de billes.

Dans la suite, nous nous intéressons à la combinaison de ces interactions selon les valeurs de ces paramètres.

### Interaction des petites billes et des grosses billes

Lors des écoulements de matériau bidisperse, les grosses billes étant à la surface libre de l'écoulement, il existe des interactions entre les petites billes et les grosses billes en écoulement. L'effet des petites billes peut être de retenir et piéger les grosses dans le dépôt. Réciproquement, les grandes peuvent pousser les petites. Cet entraînement peut être quantifié en s'intéressant aux épaisseurs  $h_{stop,bi}$  du dépôt laissé par un écoulement bidisperse, par rapport aux épaisseurs  $h_{stop,mono}$  du dépôt après un écoulement monodisperse de petites billes. Si on regarde les résultats expérimentaux présentés en partie 6.3, l'épaisseur du dépôt de petites billes est inférieure dans le cas bidisperse par rapport au cas monodisperse (fig. 6.19). Cette interaction des petites billes et des grosses billes a pour effet une diminution de l'épaisseur de la couche de petites billes. Ces interactions seront qualifiées dans la suite de mécanisme d'entraînement et seront développées dans le chapitre suivant. Par ailleurs, cette interaction se complique quand la présence du fond rugueux se fait sentir sur la couche de grosses billes en écoulement.

### Influence sur les grosses billes de l'interaction des petites billes avec le fond rugueux

Lors des écoulements granulaires bidisperses, les petites billes sont à la base de l'écoulement. L'interaction des petites billes avec le plan rugueux peut avoir une influence sur les grosses billes coulant sur les petites billes. Pour comprendre cet effet, on fait l'hypothèse que les grosses billes coulent sur un plan fictif formé des petites billes en écoulement. Nous nous intéressons au piégeage des grosses particules sur le lit de petites particules dans le dépôt. Nous aborderons dans un premier temps l'influence d'une couche épaisse de petites billes sur les grosses billes. Dans un second temps, nous nous intéresserons à l'influence d'une couche mince de petites billes sur les grosses billes.

- **Couche épaisse** : L'épaisseur de la couche de petites billes est supposée très grande. Les hypothèses suivantes ont été faites :
  - le plan "fictif" est supposé réagir comme un plan rugueux fixe
  - la compacité de ce plan "fictif" est indépendante du diamètre des petites billes, donnée par l'hypothèse d'une compacité aléatoire lâche dans l'écoulement

Les grosses billes coulent donc sur un plan "fictif" constitué de petites billes dont l'espacement est donné par la compacité de l'écoulement de petites billes. Sur ce plan "fictif", on peut définir un angle  $\theta_2$  maximal de

stabilité pour une grosse bille, comme cela a été fait pour le plan rugueux dans la partie I. D'après les résultats obtenus en partie I, il est possible de déterminer les variations de l'angle  $\theta_2$  en fonction du diamètre des grosses billes. Cet angle  $\theta_2$  étant l'angle pour lequel les grosses billes ne restent pas sur le plan "fictif" constitué de petites billes, on pourra donc relier cet angle au piégeage des grosses billes sur le dépôt de petites.

Pour un plan donné, le diamètre  $d_c$  pour lequel la friction est maximale est obtenu à partir des caractéristiques du plan, avec la formule :

$$d_c = \frac{\pi}{6C\sqrt{3}}\lambda$$

avec dans notre configuration de plan fictif,  $\lambda = d_p$  et  $C$  est la compacité du plan fictif formé par les petites billes de diamètre  $d_p$ . La compacité de ce plan est estimée à 0,57. Cette valeur est incertaine, mais on peut déduire de manière certaine que  $d_c < d_p$  car on sait que pour des compacités comprises entre 0,3 et 0,9, le diamètre  $d_c$  est inférieur au diamètre des billes du plan. Les variations de l'angle  $\theta_2$  des grosses billes, coulant sur le plan "fictif" constitué de petites billes, sont représentées schématiquement en figure 6.27. D'après cette modélisation, quel que soit le diamètre des petites billes  $d_p$ , il existe une plage de diamètres de grosses billes pour laquelle les grosses billes seront piégées sur le plan constitué de petites billes. Cette plage de diamètre dépend du diamètre  $d_p$  des petites billes et de l'angle d'inclinaison du plan choisi pour les expériences  $\theta_{plan}$ . Comme on suppose que la compacité de la dernière couche de l'empilement de petites billes est indépendante du diamètre des petites billes  $d_p$ , les courbes de  $\theta_2$  ne sont fonction que du rapport  $d_g/d_p$ . Ce résultat implique que la plage de diamètres pour laquelle il y a piégeage des grosses particules sur le lit de petites billes est indépendante de  $d_g/d_p$ .

- **Couche mince** : Dans nos expériences, la couche de petites billes à la base de l'écoulement est souvent mince ( $h/d_p < 10$ ). Dans cette configuration, on supposera toujours que le plan "fictif" constitué des billes de diamètre  $d_p$  réagit comme un plan fixe. L'influence sur les grosses billes de la rugosité du plan réel au travers de la couche de petites billes dépendra de la position du diamètre des petites billes  $d_p$  par rapport à  $d_c$  du plan rugueux réel.
- $d_p \ll d_c$  : dans ce cas, comme on l'a montré dans la partie I, les petites billes peuvent remplir les trous du plan. Tout se passe comme si elles coulaient sur un plan rugueux composé de petites billes de compacité égale à celle d'un empilement aléatoire. On en déduit que le plan rugueux ne modifie pas la compacité de l'écoulement de petites billes. Le plan fictif est donc un plan constitué de petites billes ayant un espacement donné par la compacité aléatoire. Même si l'épaisseur de la couche de petites

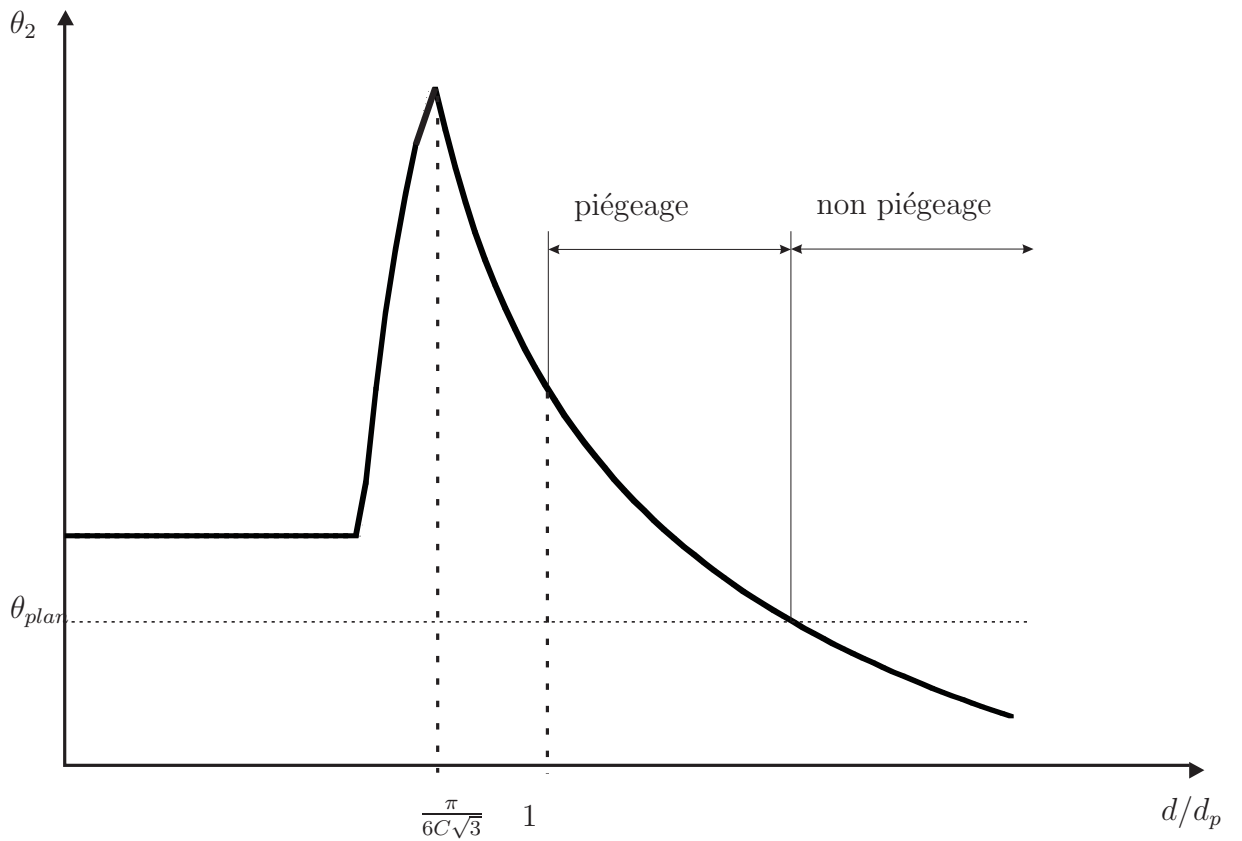


FIG. 6.27 – Angle de stabilité  $\theta_2$  des grosses billes coulant sur un plan “fictif” constitué de petites billes ( $\lambda = d_p$  et  $d_c = \pi\lambda/6C\sqrt{3}$ , avec  $C$  la compacité du plan “fictif”). Pour une couche épaisse de petites billes, on considère que la compacité  $C$  est celle d’un empilement aléatoire lâche. Pour un angle d’inclinaison du plan  $\theta_{plan}$ , il existe une plage de diamètres pour laquelle les grosses billes seront piégées sur le dépôt constitué de petites billes. Pour cette courbe de  $\theta_2$  (donnée par la valeur de  $C$ ), la plage de diamètres est fixée par le diamètre des petites billes, et par l’angle d’inclinaison du plan.



billes est faible, les résultats sont les mêmes que ceux obtenus dans le cas d'une couche épaisse. La gamme de diamètres pour laquelle les grosses billes sont piégées dans le lit de petites billes est la même qu'en couche épaisse (fig. 6.28 trait pointillé).

- $d_p > d_c$  : dans ce cas, les petites billes ne peuvent pas remplir les trous du plan. L'ordre des petites billes à la base de la couche de petites billes, ne sera donc plus aléatoire comme dans le cas développé précédemment. L'ordre du plan rugueux sera transmis à la couche de petites billes. Comme la couche de petites billes est mince, la compacité de la dernière couche formant le plan "fictif" sera également influencée et plus faible que la compacité aléatoire. Cette diminution de compacité, comme on l'a vu dans la partie I, entraînera une augmentation du diamètre  $d_c$  du plan fictif et une augmentation des angles  $\theta_2$ . D'après la figure 6.28, le piégeage, quel que soit l'angle d'inclinaison du plan, a lieu sur une plage de diamètres plus grande que dans le cas des couches épaisses.

Nous avons présenté ici un modèle simple permettant d'aborder l'influence de l'interaction des petites billes avec le plan rugueux sur les grosses billes s'écoulant au-dessus de la couche de petites billes. L'influence sur les grosses billes de l'interaction des petites billes avec le plan rugueux est caractérisée par le piégeage des grosses billes sur le lit de petites billes. Ce modèle, géométrique, repose sur le modèle de stabilité présenté en partie I. Ce modèle explique que pour des couches minces et dans le cas où le diamètre des petites billes est supérieur à  $d_c$ , la plage de diamètre pour laquelle le piégeage des grosses billes a lieu est plus grande que dans le cas où le diamètre des petites billes est inférieur à  $d_c$ . Ce résultat est cohérent avec les expériences présentées dans le cas où  $d_c < d_p < d_g$  (fig. 6.20). Dans le cas où le diamètre des petites billes est inférieur à  $d_c$ , le modèle montre qu'il existe une faible plage de diamètres de grosses billes pour laquelle les grosses billes sont piégées. En effet, dans les expériences pour lesquelles,  $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$  (fig. 6.19), on constate, que pour un même  $d_p$ , quelques grosses billes restent sur le lit de petites pour les faibles diamètres de grosses billes. Expérimentalement, ce piégeage disparaît dès que  $d_g$  augmente confirmant que la plage de diamètres du piégeage est petite.

## 6.5 Conclusion

Cette étude permet de mettre en évidence les différents mécanismes régissant les écoulements granulaires bidisperses. Ces mécanismes se décomposent en deux effets, les effets de ligne, et les effets d'interfaces. Les effets de ligne sont présents dans le cas où la friction basale des grosses billes sur le plan rugueux est supérieure à la friction basale des petites billes sur le plan rugueux ( $\mu_{2,g} > \mu_{2,p}$ ). Cet effet, appelé confinement, est d'autant plus important que la friction des grosses billes sur le plan est importante (c'est-à-dire pour  $d_g = d_c$ ). Cet effet ne peut pas avoir

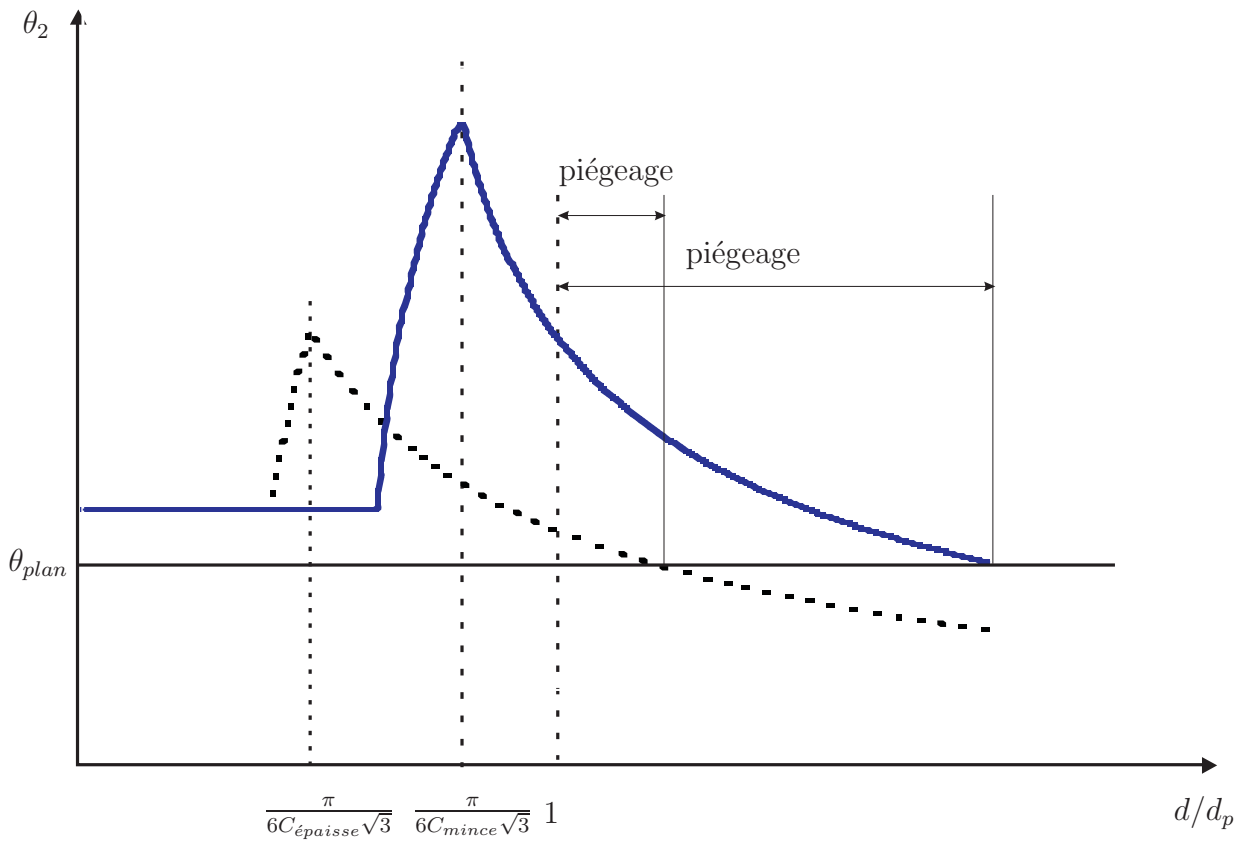


FIG. 6.28 – Zones de piégeage pour un écoulement mince de petites billes pour les configurations  $d_p < d_c$  (trait pointillé, identique au cas de couches épaisses) et  $d_p > d_c$  (trait plein) : la zone de piégeage est plus importante dans le cas où  $d_p > d_c$ , ceci est dû à une diminution de la compacité du plan “fictif” due à la transmission de l’ordre du plan rugueux au travers de la couche mince de petites billes.

lieu dans le cas où  $d_p > d_c$ . En effet, la friction des grosses billes sera inférieure à la friction des petites billes quel que soit le diamètre des grosses billes. D'autre part, les effets d'interfaces sont toujours présents. Il est possible de décomposer ces effets d'interface en modification de la rugosité basale et entraînement (ou piégeage). L'influence de l'interaction des petites billes avec le plan sur les grosses billes coulant sur les petites billes a été également envisagée. L'interaction avec le plan a pour conséquence une augmentation de la zone de piégeage des grosses billes sur le lit de petites billes. Le modèle de stabilité permet de déterminer les plages de diamètres de grosses billes pour lesquelles ces dernières seront piégées. Ce modèle permet aussi de montrer que la friction des grosses billes sur le lit de petites est plus importante dans le cas d'une couche mince de petites billes de diamètre supérieur au diamètre  $d_c$  que dans le cas où le diamètre des petites billes est inférieur à  $d_c$ .

On peut, pour chacun des régimes présentés précédemment, définir les mécanismes régissant ces écoulements bidisperses :

- $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} < \mu_{2,g}$  : entraînement et confinement
- $d_p < d_c$  et  $\mu_{2,p} > \mu_{2,g}$  : entraînement
- $d_c < d_p < d_g$  : entraînement et influence du plan

Rappelons que pour tous ces cas, une modification de la rugosité basale selon la valeur de  $d_p$  en contact avec le plan intervient également dans la dynamique de l'écoulement bidisperse.

Dans la partie suivante, nous nous intéressons à l'interaction entre les petites billes et les grosses billes : l'entraînement des petites billes par les grosses billes dans le cas particulier où il n'y a pas de piégeage des grosses billes.



# Chapitre 7

## Entraînement

Les écoulements bidisperses, comme on l'a vu précédemment, sont régis par deux effets, les effets de ligne et les effets d'interface. Les effets de ligne ont une influence sur la forme du dépôt. Les effets d'interface ont une influence sur d'autres caractéristiques du dépôt, en particulier sur son épaisseur  $h_{stop}$  et sa longueur  $L$ , celle-ci étant fortement reliée à l'épaisseur  $h_{stop}$ . Plusieurs mécanismes ont été mis en évidence dans le cadre de cette description. Mais les mécanismes se couplent pour créer le comportement du mélange bidisperse. C'est ce couplage qui rend difficile l'étude de chaque mécanisme individuellement. Cependant, dans certaines conditions expérimentales, il est possible d'en limiter certains et d'en favoriser d'autres. C'est ce que nous avons fait pour tenter de comprendre le mécanisme d'entraînement.

### 7.1 Conditions expérimentales pour lesquelles seul l'entraînement intervient

Dans toutes les configurations présentées précédemment, les effets d'interface sont toujours présents. Cependant les effets de ligne peuvent être négligeables ou inexistant. En effet, on a vu que le confinement de l'écoulement est présent seulement si la friction basale des grosses billes sur le plan rugueux est supérieure à la friction des petites billes. Pour ne pas avoir cet effet dans nos expériences, il suffit de choisir le diamètre des classes de billes tel que  $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$ . De plus, si l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$  est choisi supérieur à l'angle  $\theta_{2,g}$  des grosses billes, les grosses billes sont instables sur le plan. Le dépôt obtenu après un écoulement bidisperse ne présentera aucune grosse bille à sa périphérie : il ne peut pas exister d'effets de ligne. Cependant quelques grosses billes pourront rester sur le dépôt de petites. De plus, le diamètre des petites billes a été choisi de telle sorte que  $d_p < d_c$  pour limiter le piégeage des grosses billes sur le lit de petites et pouvoir mesurer l'épaisseur d'un dépôt constitué uniquement de petites billes.

Ce choix de conditions expérimentales permet d'isoler les "effets d'interfa-

ce”. Les conditions expérimentales favorables pour l’étude de l’entraînement sans “confinement” seront donc :

- $d_p < d_c$
- $\mu_{2,g} < \mu_{2,p}$
- $\theta > \theta_{2,g}$

Deux types d’expérience ont été réalisées, des lâchers d’une masse constante de matériau granulaire bidisperse, présent initialement dans une calotte, et des écoulements en imposant un flux constant d’un mélange de billes.

## 7.2 Lâcher d’une masse constante de matériau granulaire

Le plan est celui constitué de billes collées de diamètre 1,4 mm (plan n°4). L’angle d’inclinaison du plan est choisi égal à 25 °, tel que cet angle d’inclinaison soit supérieur à l’angle  $\theta_{2,g}$  des grosses billes composant les mélanges, quel que soit le diamètre des grosses billes utilisées (de 1125  $\mu m$  à 2925  $\mu m$ ).

Les caractéristiques de ces dépôts sont :

- la longueur  $L$  du dépôt
- l’épaisseur  $h_{stop,bi}$  du dépôt

Dans le cas où il n’y a pas de grosses particules piégées dans le dépôt de petites, le rapport  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  (où  $h_{stop,mono}$  est l’épaisseur du dépôt laissé par un écoulement monodisperse constitué de petites billes) nous renseigne sur l’efficacité de l’entraînement. Dans ce cas,  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  est toujours inférieur à 1 et l’entraînement sera qualifié d’autant plus efficace que ce rapport tend vers 0.

La figure 7.1(a) présente les résultats obtenus pour différents mélanges avec  $d_p=327 \mu m$ . La décroissance continue du rapport  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  montre clairement que l’efficacité de l’entraînement augmente avec le pourcentage de grosses billes %g. Dans le cas où les petites billes du mélange sont des billes de diamètre  $d_p=450 \mu m$  (fig. 7.1(b)) pour certains écoulements le piégeage n’a pu être évité (points entourés sur la figure 7.1(b)); pour ces points, l’épaisseur du dépôt est donc surestimée par rapport à l’épaisseur de la couche de petites billes. Mais pour les cas où il n’y a pas piégeage, la tendance est la même que pour les résultats précédents. Dans tous les cas, l’entraînement est d’autant plus efficace que le pourcentage de grosses billes %g augmente.

L’efficacité de l’entraînement est aussi influencée par le diamètre des billes (fig. 7.2). Pour cela, on s’intéresse aux variations de  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  en fonction du rapport des diamètres  $d_g/d_p$  pour différents diamètres de petites billes ( $d_p=327 \mu m$  et  $d_p=450 \mu m$ ), et différents pourcentages de grosses billes. La dépendance avec le rapport  $d_g/d_p$  ou avec  $d_g$  ne ressort pas nettement de nos données. Par contre, on voit que l’efficacité de l’entraînement augmente quand le diamètre des

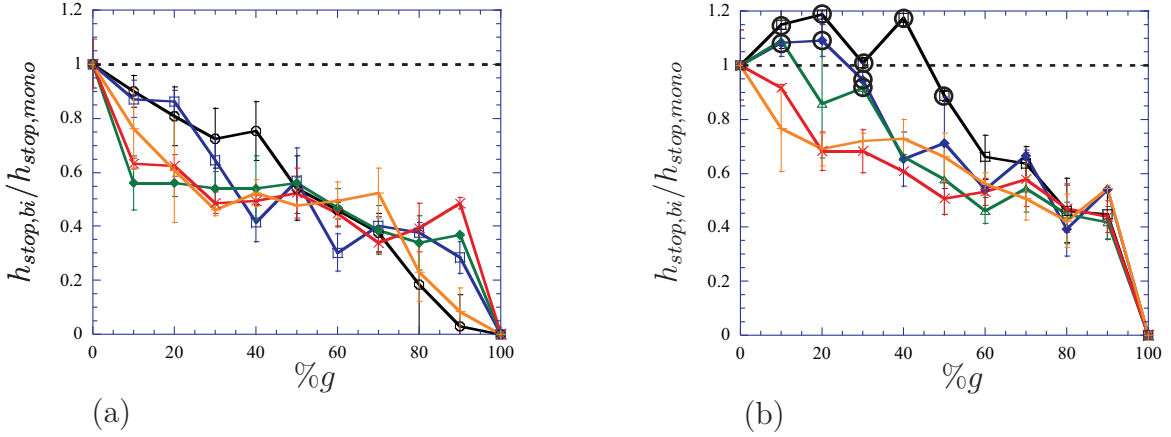


FIG. 7.1 – L'efficacité de l'entraînement augmente avec le pourcentage massique de grosses billes  $\%g$  : (a)  $d_p=327\mu m$  et ( $\circ$ )  $d_g=1125\mu m$ ; ( $\square$ )  $d_g=1325\mu m$ ; ( $\blacklozenge$ )  $d_g=1750\mu m$ ; ( $\times$ )  $d_g=2150\mu m$ ; ( $+$ )  $d_g=2925\mu m$ , (b)  $d_p=450\mu m$  et ( $\square$ )  $d_g=1325\mu m$ ; ( $\blacklozenge$ )  $d_g=1750\mu m$ ; ( $\triangle$ )  $d_g=1850\mu m$ , ( $\times$ )  $d_g=2150\mu m$ ; ( $+$ )  $d_g=2925\mu m$ . Les points entourés correspondent au cas où des grosses billes sont piégées sur le dépôt de petites billes, ce qui augmente de manière erronée la valeur de l'épaisseur de la couche de petites billes.

petites billes diminue. Cette observation est valable pour toutes les configurations étudiées (c'est-à-dire pour différents diamètres de grosses billes, et différents pourcentages).

Pour des étalements de masse, le front arrière de la monocouche de grosses particules se trouvant à la surface libre s'écoule à une vitesse constante (voir chapitre II). Cette constatation nous a amené à étudier plus précisément la dynamique de ces écoulements. Lors de ces écoulements bidisperses instationnaires, la vitesse du front arrière de grosses billes  $u_g$  augmente avec le pourcentage de grosses billes et avec le diamètre des grosses billes  $d_g$  (fig. 7.3).

Dans le cas d'expériences consistant à lâcher une masse constante de matériau granulaire bidisperse, on a montré expérimentalement que l'efficacité de l'entraînement définie par le rapport  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  augmente avec le pourcentage massique de grosses billes et diminue avec le diamètre des petites billes  $d_p$ . En parallèle, la vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes  $u_g$  augmente avec le pourcentage de grosses billes  $\%g$  et avec le diamètre des grosses billes  $d_g$ . Il semble donc que les variations d'épaisseur du dépôt sont corrélées aux variations de vitesse de la monocouche de grosses billes. Les expériences réalisées étant instationnaires (la vitesse du front avant n'est pas constante au cours du temps), nous nous intéressons par la suite à des écoulements en imposant un flux constant de matériau granulaire bidisperse.

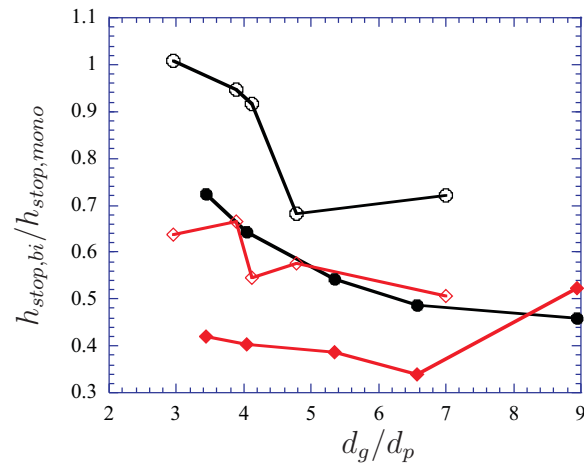


FIG. 7.2 – L’efficacité de l’entraînement en fonction du rapport des diamètres  $d_g/d_p$ . Les symboles pleins représentent les résultats obtenus dans le cas où  $d_p=327 \mu m$ , les symboles vides dans le cas où  $d_p=450 \mu m$ , pour différents pourcentages de grosses billes ( $\bullet$  et  $\circ$   $\%g = 30$ ,  $\blacklozenge$  et  $\diamond$   $\%g = 70$ ). L’entraînement est d’autant plus efficace que le diamètre des petites billes est petit.

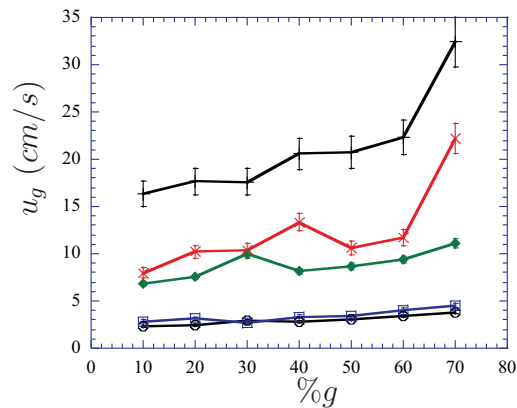


FIG. 7.3 – La vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes augmente avec le pourcentage massique de grosses billes  $\%g$  et avec le diamètre  $d_g$  des grosses billes :  $d_p=327 \mu m$  et  $\circ$   $d_g=1125 \mu m$ ;  $\square$   $d_g=1325 \mu m$ ;  $\blacklozenge$   $d_g=1750 \mu m$ ;  $\times$   $d_g=2150 + d_g=2925 \mu m$ .



## 7.3 Écoulements stationnaires

L'étude des écoulements stationnaires, si ils existent, semble intéressante pour comprendre l'effet d'entraînement.

Les écoulements stationnaires pour des écoulements monodisperses existent pour des angles d'inclinaisons du plan compris entre  $\theta_1$  (angle pour lequel  $h_{stop} \rightarrow \infty$ ) et  $\theta_2$  (angle minimal pour lequel  $h_{stop} = 0$ ). Ces limites d'écoulements stationnaires dépendent du diamètre des billes qui coulent pour un plan de rugosité donnée. Les caractéristiques de l'écoulement d'un matériau granulaire bidisperse sont :

- la vitesse du front avant  $u$
- la vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes  $u_g$
- l'épaisseur  $h$  de l'écoulement

La vitesse du front arrière des grosses billes, du fait que la couche de grosses billes est une monocouche, peut être assimilée à la vitesse en tout point de la couche de grosses billes.

Dans le cas des écoulements bidisperses, les écoulements stationnaires, caractérisés par une indépendance temporelle des caractéristiques de l'écoulement ( $u$ ,  $u_g$  et  $h$ ), existent-ils ? Dans le cadre de ces expériences, nous avons travaillé avec un mélange défini par  $d_p=327 \mu m$  et  $d_g=1325 \mu m$  sur le plan n° 4.

### 7.3.1 Conditions d'écoulements stationnaires

On s'attend à ce que les petites billes du mélange imposent la plage d'angles pour laquelle les écoulements bidisperses stationnaires sont possibles. En effet, si l'écoulement des petites billes n'est pas stationnaire, celui du mélange ne le sera probablement pas non plus. On a réalisé des expériences en imposant un flux constant égal à  $15 g/s$  pour des angles d'inclinaison  $\theta$  variant de  $21^\circ$  à  $31^\circ$ . Pour des angles d'inclinaison du plan  $\theta$  inférieurs à  $22^\circ$ , nous avons fait les expériences mais aucune mesure n'est représentée, le régime est intermittent c'est-à-dire qu'aucun écoulement stationnaire n'est observé. Pour des angles d'inclinaison supérieurs à  $22^\circ$ , il existe des écoulements stationnaires pour les écoulements bidisperses (fig. 7.4) :  $h$ ,  $u$ , et  $u_g$  sont constants au cours du temps.

Comme pour les lâchers de masse constante, le dépôt est constitué uniquement de petites billes. En figure 7.5, sont présentées les variations de  $h_{stop,bi}$  pour des angles d'inclinaison du plan variant de  $22^\circ$  à  $31^\circ$ . Si l'on compare les courbes  $h_{stop,bi}$  à celle de  $h_{stop,mono}$  où  $h_{stop,mono}$  représente la courbe de  $h_{stop}$  pour un écoulement monodisperse de petites billes  $d_p=327 \mu m$ , on constate que les courbes se classent et ne se croisent pas.  $h_{stop,bi}$  diminue avec le pourcentage de grosses billes  $\%g$ . Cette diminution est très forte pour les faibles angles et presque inexistante pour les forts angles d'inclinaison. Pour les forts angles d'inclinaison, il est possible que la valeur de  $h_{stop,bi}$  sature à une valeur minimale en dessous de laquelle l'entraînement est inefficace. Par ailleurs, il est difficile de conclure sur

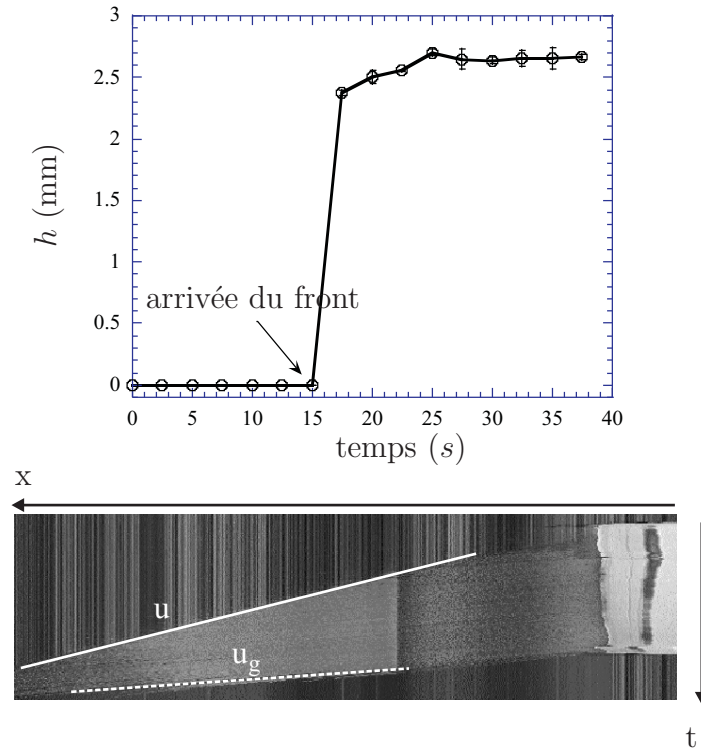


FIG. 7.4 – Les grandeurs caractéristiques de l'écoulement (vitesse  $u$  du front avant, vitesse  $u_g$  du front arrière de la monocouche de grosses billes coulant sur les petites billes, et épaisseur  $h$  de l'écoulement) sont indépendantes du temps. Il existe bien des écoulements bidisperses stationnaires ( $d_p = 327 \mu\text{m}$ ,  $d_g = 1325 \mu\text{m}$ ,  $\%g = 50$ ,  $\theta = 26^\circ$ ).

les valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  pour un écoulement bidisperse.  $\theta_1$  semble inchangé, mais la forme des courbes pour des angles d'inclinaison proches de  $\theta_{1,mono,p}$  semble très affectée par la valeur du pourcentage de grosses billes. Du classement des courbes, on peut conclure de manière certaine que  $\theta_{1,bi} \leq \theta_{1,mono,p}$ . D'après nos expériences, on sait que  $\theta_{1,bi} > 21^\circ$ . On en déduit que la valeur de  $\theta_1$  est probablement la même pour les écoulements bidisperse et monodisperse. De plus, l'épaisseur du dépôt laissé par un écoulement bidisperse  $h_{stop,bi}$  est toujours inférieure à l'épaisseur du dépôt laissé par un écoulement monodisperse constitué de petites billes. Cela implique que l'angle  $\theta_{2,bi}$  est inférieur ou égal à l'angle  $\theta_{2,mono,p}$ .

### 7.3.2 Vitesses des écoulements

Dans ces expériences, la vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes a pu être déterminée (fig. 7.6) : la vitesse  $u_g$  augmente avec le pourcentage massique de grosses billes comme cela a été aussi observé dans le cas d'écoulements bidisperses instationnaires (fig. 7.3), et aussi avec l'angle d'incli-

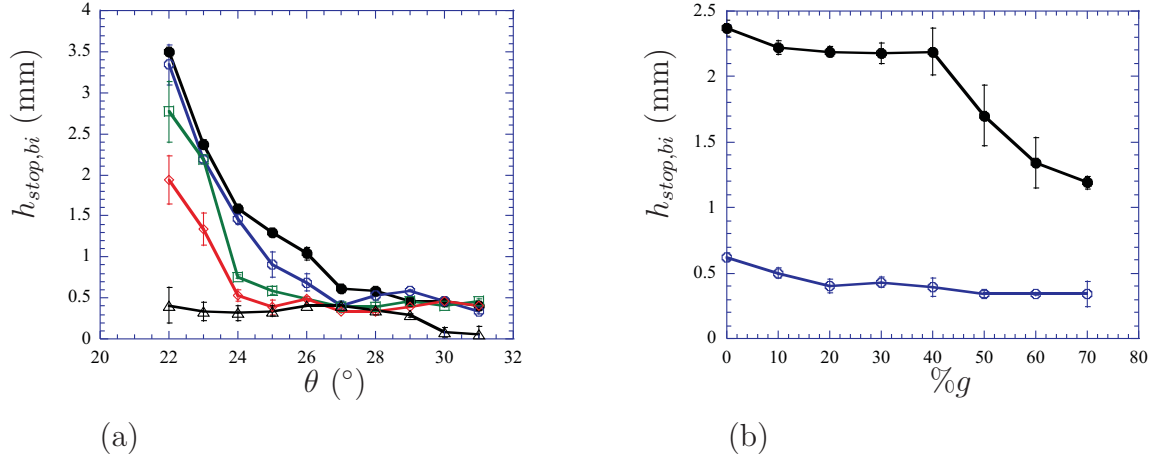


FIG. 7.5 – (a) l'épaisseur du dépôt  $h_{stop,bi}$  de petites billes décroît avec l'angle d'inclinaison et avec le pourcentage massique de grosses billes ( $\bullet$ )  $\%g=0$  (monodisperse); ( $\circ$ )  $\%g=20$ ; ( $\square$ )  $\%g=40$ ; ( $\diamond$ )  $\%g=60$ ; ( $\triangle$ )  $\%g=80$ , (b), l'épaisseur  $h_{stop,p}$  en fonction du pourcentage pour deux angles d'inclinaison ( $\bullet$ )  $\theta=23^\circ$ , ( $\circ$ )  $\theta=27^\circ$  ( $d_p=327\mu m$ ,  $d_g=1325\mu m$ ).

raison du plan  $\theta$ . Etant donné que l'angle d'inclinaison du plan est supérieur à l'angle  $\theta_2$  des grosses billes, il n'y a pas d'interaction entre les petites billes et une éventuelle zone d'accumulation de grosses billes au front. De plus, lors des expériences, il est possible de mesurer la vitesse du front avant ( $u$ ) qui est aussi constante au cours du temps (fig. 7.4). Cette vitesse est la vitesse du front avant des petites billes, dans ce cas particulier où les grosses billes ne participent pas au front. Si l'on représente sur un même graphe, la vitesse du front arrière des grosses billes  $u_g$  en fonction de la vitesse du front avant  $u$ , on remarque que pour la plupart des expériences, ces points s'alignent sur une droite de pente 2, ce qui signifie  $u_g = 2u$ . Certains points ne s'alignent pas sur cette droite; pour ces expériences, la vitesse des grosses particules est toujours supérieure au double de celle du front de petites billes. Une des explications possibles semble être que dans certains cas les grosses billes roulent sur le lit de petites. On observe effectivement ce roulement lors des expériences. Le cas de ces expériences sera discuté plus précisément un peu plus loin.

### 7.3.3 Epaisseurs des dépôts

Pour ces expériences, réalisées en imposant un flux constant, l'efficacité de l'entraînement, déterminée par le rapport des épaisseurs des dépôts  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  a été étudiée en fonction de l'angle d'inclinaison (fig. 7.5) et en fonction du pourcentage de grosses billes (fig. 7.8). D'après ces résultats, l'efficacité de l'entraînement augmente avec le pourcentage massique de grosses billes  $\%g$ . Cette

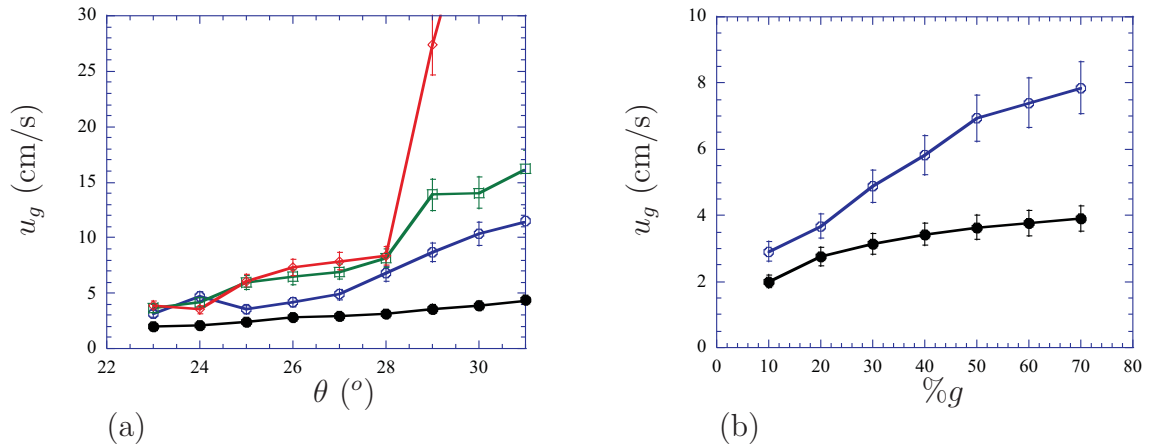


FIG. 7.6 – (a) La vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes  $u_g$  augmente avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  et le pourcentage de grosses billes, ( $\bullet$ )  $\%g=10$ ; ( $\circ$ )  $\%g=30$ ; ( $\square$ )  $\%g=50$ ; ( $\diamond$ )  $\%g=70$ , (b) la vitesse  $u_g$  augmente avec le pourcentage de grosses billes ( $\bullet$ )  $\theta=23^\circ$ ; ( $\circ$ )  $\theta=27^\circ$  ( $d_p=327\mu m$ ,  $d_g=1325\mu m$ ).

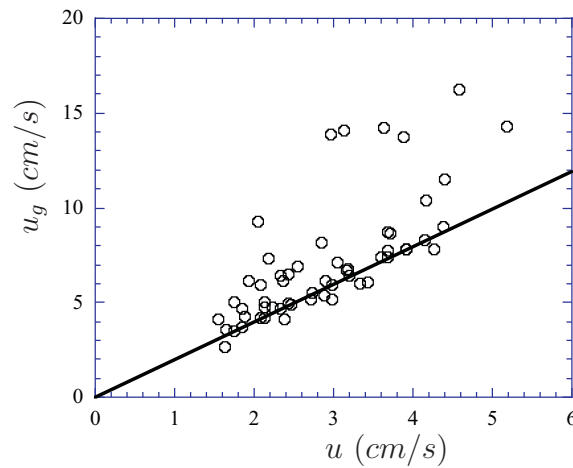


FIG. 7.7 – La vitesse de surface de la monocouche de grosses billes  $u_g$  est égale au double de la vitesse du front des petites billes  $u$ ;  $u_g = 2u$ . Les symboles ( $\circ$ ) représentent toutes les mesures de vitesses dans le cas d'écoulement stationnaire pour  $\theta$  variant de  $22^\circ$  à  $31^\circ$ . Quelques points ne vérifient pas la relation  $u_g = 2u$ .

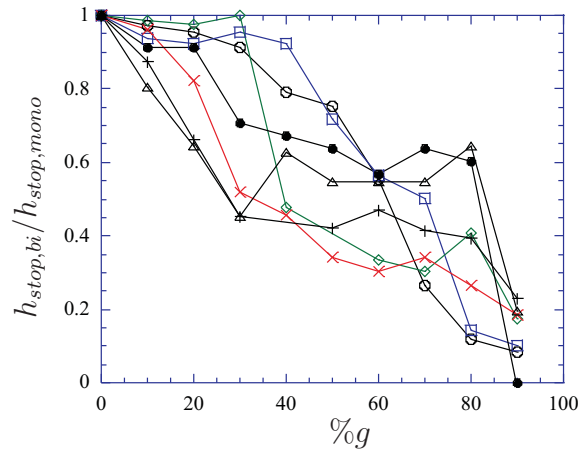


FIG. 7.8 – le rapport des épaisseurs  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$  diminue avec le pourcentage de grosses billes quel que soit l'angle d'inclinaison du plan :  $\circ$   $\theta=22^\circ$  ;  $\square$   $\theta=23^\circ$  ;  $\diamond$   $\theta=24^\circ$  ;  $\times$   $\theta=25^\circ$  ;  $+$   $\theta=26^\circ$  ;  $\triangle$   $\theta=27^\circ$  ;  $\bullet$   $\theta=28^\circ$

évolution est comparable à celle observée pour les écoulements instationnaires (fig. 7.1).

## 7.4 Conclusion

L'efficacité de l'entraînement est quantifiée par le rapport des épaisseurs  $h_{stop,bi}/h_{stop,mono}$ . On a montré dans les deux types d'expériences, stationnaire et instationnaire que l'entraînement est d'autant plus efficace que le pourcentage de grosses billes  $\%g$  est élevé. De plus, dans les deux types d'écoulement, la vitesse du front arrière de la monocouche de grosses billes, augmente aussi avec le pourcentage massique de grosses billes. Il apparaît alors que l'efficacité de l'entraînement est corrélée aux variations de la vitesse de la monocouche de grosses billes  $u_g$ .

Par ailleurs, la vitesse de la couche de grosses billes  $u_g$  a pu être reliée à la vitesse de la couche de petites billes. On va donc rechercher un mécanisme qui puisse expliquer la diminution d'épaisseur  $h_{stop,bi}$  en faisant appel à une augmentation de la vitesse moyenne des petites billes.

## 7.5 Entraînement par érosion

Lors de l'écoulement d'un matériau granulaire bidisperse, la ségrégation est immédiate et totale et on observe expérimentalement une monocouche de grosses billes coulant sur la couche de petites billes. Pour de forts rapports de diamètre  $d_g/d_p$ , les grosses billes s'enfoncent légèrement dans la couche de petites billes. Un des mécanismes supposés pour la diminution de l'épaisseur des petites

billes  $h_{stop,bi}$  pourrait être l'érosion. Pour ces diamètres de bille ( $d_p=327 \mu m$  et  $d_g=1325 \mu m$ ), lors de l'écoulement, les grosses billes s'enfoncent dans le lit de petites billes d'une fraction de leur diamètre. Le mécanisme d'érosion est lié à cet enfoncement. En effet, lors de leur passage, les grosses billes peuvent "pousser" et "ratisser" les petites billes qui sont situées entre elles (fig. 7.9). Ce mécanisme peut avoir lieu tout au long de l'écoulement provoquant une augmentation de la vitesse moyenne du front  $u$ , mais seul son impact une fois l'écoulement sous jacent de petites billes arrêté peut expliquer une diminution de  $h_{stop,bi}$ . Alors l'épaisseur  $h_{stop,bi}$  de la couche de petites billes correspond à l'épaisseur  $h_p$  de petites billes présente sous les grosses billes au moment ( $t_1$ ) du passage du front arrière des grosses billes :  $h_{stop,bi} = h_p(t_1)$ . On peut donc obtenir par ce mécanisme une diminution de l'épaisseur  $h_{stop}$  des petites billes.

Après l'arrêt de l'alimentation, il se propage une zone où l'écoulement s'arrête (cette zone comprend le front arrière des grosses billes). Dans cette zone, l'épaisseur totale de l'écoulement de petites  $h_{p,t}$  diminue au cours du temps. Quand  $h_{p,t} = h_{stop,mono}$  et si on suppose que la présence des grosses billes ne modifie pas le gradient de vitesse dans la couche de petites billes, l'écoulement des petites billes devrait s'arrêter. Deux cas se présentent alors :

- les grosses billes ne sont pas présentes à ce moment. Alors l'écoulement s'arrête avec  $h_p = h_{p,t} = h_{stop,mono}$  : l'épaisseur du dépôt de petites billes est égale à celle du dépôt dans le cas monodisperse
- les grosses particules sont présentes à la surface, enfoncées d'une fraction de leur diamètre, que l'on note  $e$ . Alors, bien que l'écoulement des petites billes s'arrête, les grosses billes peuvent ratisser la couche de petites billes entre elles en s'écoulant. Dans ce cas, et en supposant que seule l'érosion agit, c'est-à-dire que le passage de grandes billes ne met pas en mouvement les petites billes situées sous elles, l'épaisseur de la couche de petites billes est donnée par  $h_{stop,bi} = h_p = h_{stop,mono} - ed_g$

Une des questions qui nous intéresse est de savoir si ce mécanisme est le seul qui intervient dans la diminution de l'épaisseur  $h_{stop}$  par rapport au cas monodisperse. Si le seul mécanisme était l'érosion, alors la variation d'épaisseur  $h_{stop,bi} - h_{stop,mono}$  devrait être fixée par le taux d'enfoncement des grosses billes dans la couche de petites. On suppose que ce taux d'enfoncement ne dépend que du rapport  $d_g/d_p$  et est indépendant de l'angle d'inclinaison du plan  $\theta$ . Cette indépendance en  $\theta$  peut être discutable dans l'optique où on travaille avec des couches minces. On peut supposer qu'en couche très mince, l'enfoncement pourrait être limité par la présence du fond : plus l'angle d'inclinaison  $\theta$  est grand, plus la couche est mince et plus l'enfoncement serait réduit. Par ailleurs, l'augmentation de l'angle d'inclinaison induisant une augmentation de la vitesse, cela pourrait provoquer un enfoncement plus élevé causé par la réduction de la compacité de l'écoulement. Mais dans nos expériences, même pour les angles élevés, les écoulements sont toujours dans le régime d'écoulements denses pour lequel la compacité de l'écoulement ne

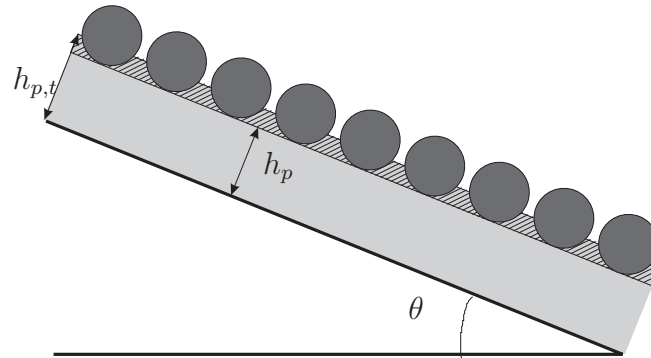


FIG. 7.9 – Schéma représentant le mécanisme d'érosion : les grosses billes lors de leur passage sur les petites billes vont pousser les petites billes présentes entre elles. L'épaisseur du dépôt de petites billes  $h_{stop,bi}$  sera égale à l'épaisseur sous les grosses billes,  $h_p$  au moment du passage du front arrière des grosses billes.  $h_{p,t}$  représente l'épaisseur totale de petites billes.

varie pas. Ces deux considérations nous poussent à supposer que l'érosion sera, soit constante avec l'angle d'inclinaison  $\theta$ , soit éventuellement décroissante avec  $\theta$ . On montre expérimentalement que  $(h_{stop,mono} - h_{stop,bi})/d_g$  décroît avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan (fig. 7.10). Cette décroissance ne permet donc pas de statuer sur le fait que l'érosion est le seul mécanisme responsable ou non de la diminution de  $h_{stop}$ . Mais par ailleurs, on remarque que, pour les faibles angles d'inclinaison,  $(h_{stop,mono} - h_{stop,bi})/d_g$  est supérieur à 0,5 et même supérieur à 1. Si la variation d'épaisseur était due à l'érosion, cela impliquerait que les grosses billes s'enfoncent de plus de moitié, ou même de plus de leur diamètre dans le lit de petites. Or si il est très difficile de mesurer avec précision l'enfoncement des grosses billes dans le lit de petites, il est clairement possible de voir si l'enfoncement des grosses billes est supérieur à leur rayon, ou si les grandes billes ne sont plus visibles en surface. En effet, dans ces cas, la surface apparente des grosses billes diminue. Dans nos expériences, on constate visuellement que les grosses billes sont enfoncées de moins de moitié. Leur enfoncement, inférieur à leur rayon implique  $(h_{stop,mono} - h_{stop,bi})/d_g < 0,5$ . On en conclut que le mécanisme responsable de la diminution d'épaisseur de la couche de petites billes  $h_{stop,p}$  n'est probablement pas uniquement de l'érosion. Il convient alors pour expliquer cette diminution d'épaisseur de rechercher un autre mécanisme.

## 7.6 Entraînement par accélération de la couche de petites billes

On peut aussi supposer que le passage des grosses billes va mettre en mouvement, ou accélérer la couche de petites billes située sous elles. Les résultats

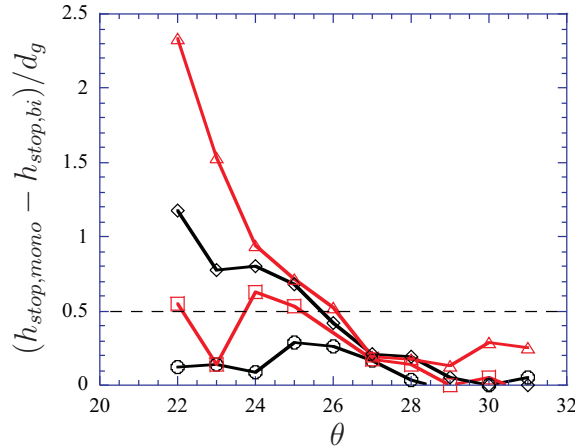


FIG. 7.10 – Les variations d'épaisseur ne sont pas constantes avec l'angle d'inclinaison  $\theta$  du plan et dépassent la valeur 0,5 impliquant que l'enfoncement des grosses billes est supérieure à la moitié de leur diamètre ( $d_p=327\mu m$ ,  $d_g=1325\mu m$ ,  $\circ$  %g = 20,  $\square$  %g = 40,  $\diamond$  %g = 60,  $\triangle$  %g = 80). Le mécanisme conduisant à une diminution de l'épaisseur  $h_{stop}$  de petites billes dans le cas bidisperse par rapport au cas monodisperse n'est pas uniquement l'érosion.

précédents pour des écoulements stationnaires montrent que  $u_g = 2u$ . Etant donné que l'angle d'inclinaison du plan est supérieur à l'angle  $\theta_2$  des grosses billes, il n'y a pas d'interactions entre les petites billes et une zone d'accumulation de grosses billes au front. De plus, l'épaisseur des écoulements étant faible, on peut faire l'hypothèse que le profil de vitesse dans la couche de petites billes est linéaire. De la non présence de grosses billes au front de l'écoulement, et de l'hypothèse de profil linéaire, on peut déduire que la vitesse de la couche de petites billes  $u_p$  à l'interface petites billes-grosses billes est égale à deux fois la vitesse du front  $u$ , c'est-à-dire  $u_p = 2u$  : cela suppose de négliger le volume de petites billes entre les grosses, c'est-à-dire de négliger l'érosion. Ceci nous semble justifié vu le faible taux d'enfoncement et la forte compacité de la monocouche de grosses billes. Il nous semble également intéressant de faire cette hypothèse pour voir si on peut modéliser l'entraînement par l'accélération. D'après les résultats présentés en figure 7.7, les vitesses  $u_p$  et  $u_g$  semblent être égales sauf quelques cas où  $u_g$  est supérieure à  $2u$ . Ces cas seront discutés plus précisément un peu plus loin. Cela implique qu'il y a la plupart du temps continuité des vitesses entre la couche de petites billes et la monocouche de grosses billes. Comme la vitesse  $u_g$  augmente avec le pourcentage massique de grosses billes, il y a une augmentation de la vitesse  $u_p$  avec le pourcentage de grosses billes. Ceci montre que la vitesse moyenne des petites billes est modifiée par la présence des grosses billes.

La continuité des vitesses entre les petites et les grosses billes permet de modéliser les écoulements bidisperses comme suit. La couche à la base de l'écoulement est constituée de petites billes, d'épaisseur  $h_p$  et présente un gra-



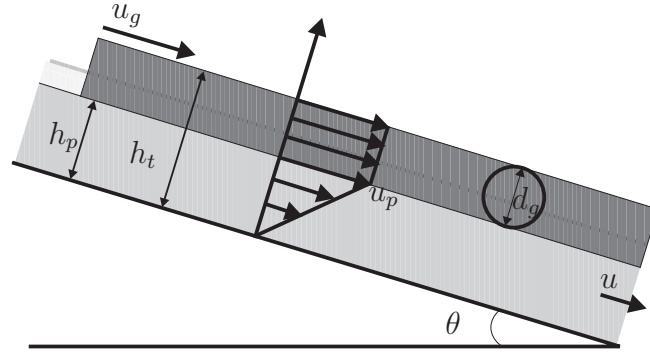


FIG. 7.11 – Modélisation des écoulements bidisperses : la monocouche de grosses billes impose sa vitesse  $u_g$  à la couche de petites billes (vitesse du haut de la couche des petites billes  $u_p = u_g$ ) d'épaisseur  $h_p$ . L'épaisseur totale de l'écoulement est égale à  $h_t = h_p + d_g$ .

dient de vitesse. A la surface libre de l'écoulement, la couche est une monocouche de grosses billes entourée de petites billes, coulant avec une vitesse constante  $u_g$ . Nous allons alors considérer ce système comme équivalent à une couche de petites billes d'épaisseur  $h_p$  s'écoulant sur un plan rugueux, avec une vitesse de surface égale à  $u_g$ . A partir de cette géométrie, il est possible, en connaissant l'épaisseur de la couche de petites billes  $h_p$  et la vitesse à la surface de la couche de petites billes  $u_p$ , de déterminer les épaisseurs du dépôt des petites  $h_{stop,bi}$ . En effet, on écrit que :

$$h_{stop,bi} = \beta \frac{h_p^{3/2} g^{1/2}}{u_p/2} \quad (7.1)$$

Il apparaît clairement que pour une même épaisseur, une augmentation de la vitesse  $u_p$ , c'est-à-dire une augmentation du gradient  $\dot{\gamma} = u_p/h_p$ , conduira à une diminution de l'épaisseur  $h_{stop,bi}$ . L'effet des grandes billes serait donc d'imposer un gradient de vitesse plus élevé dans la couche de petites billes.

Expérimentalement, l'épaisseur  $h_p$  des petites billes est déterminée à partir de la mesure de l'épaisseur totale de l'écoulement  $h_t$  et du diamètre des grosses billes  $d_g$ , on a, en effet,  $h_p = h_t - d_g$ . Avec ces considérations, on peut dans le cas des écoulements stationnaires déterminer les épaisseurs  $h_{stop,bi}$  du dépôt de petites billes d'après la formule (7.1). Les résultats sont présentés en figure 7.12. L'accord entre les épaisseurs mesurées expérimentalement et celles déterminées à partir de la relation 7.1, est bon. Par ailleurs, la corrélation entre  $Fr$  et  $h_p/h_{stop,bi}$  ne semble pas très bonne (fig.7.13).

On a supposé que la diminution de l'épaisseur  $h_{stop,bi}$  de la couche de petites billes est due à l'augmentation du gradient de vitesse dans la couche de petites billes. Ce gradient de vitesse est imposé par la vitesse des grosses billes. Si on compare la vitesse du front arrière des grosses billes  $u_g$  à celle du front avant  $u$ , il

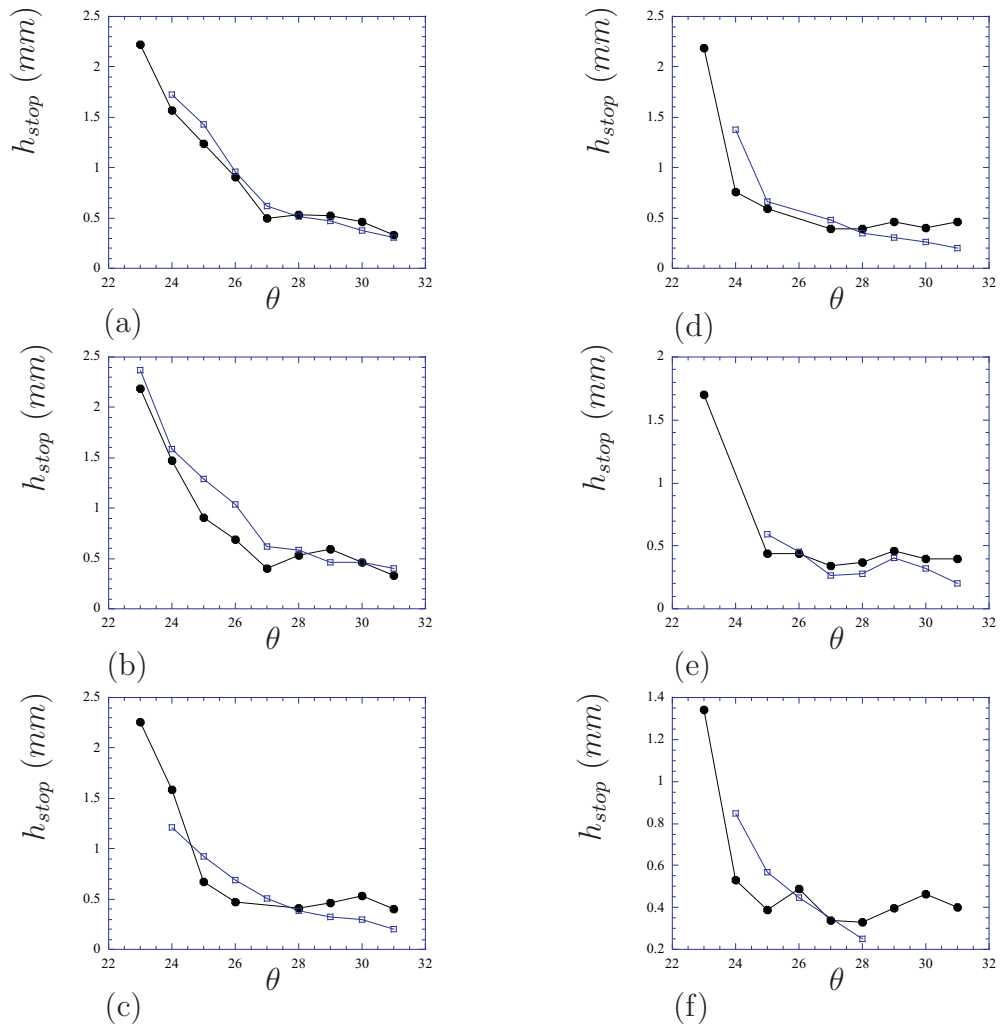


FIG. 7.12 – Epaisseur du dépôt  $h_{stop,p}$  expérimentales (●) et déduites de l'équation 7.1 (avec  $\beta = 0, 11$ ) (□) pour différents pourcentages de grosses billes : (a) %g = 10 ; (b) %g = 20 ; (c) %g = 30 ; (d) %g = 40 ; (e) %g = 50 ; (f) %g = 60.

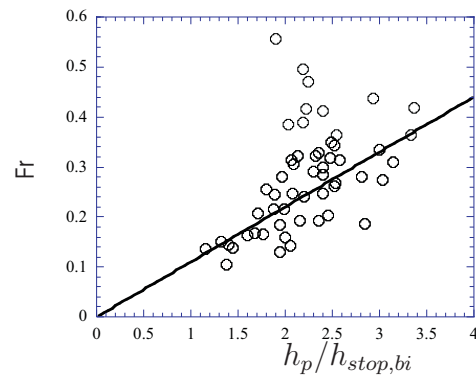


FIG. 7.13 – Nombre de Froude en fonction du rapport  $h_p/h_{stop,bi}$  : la corrélation ne semble pas très bonne

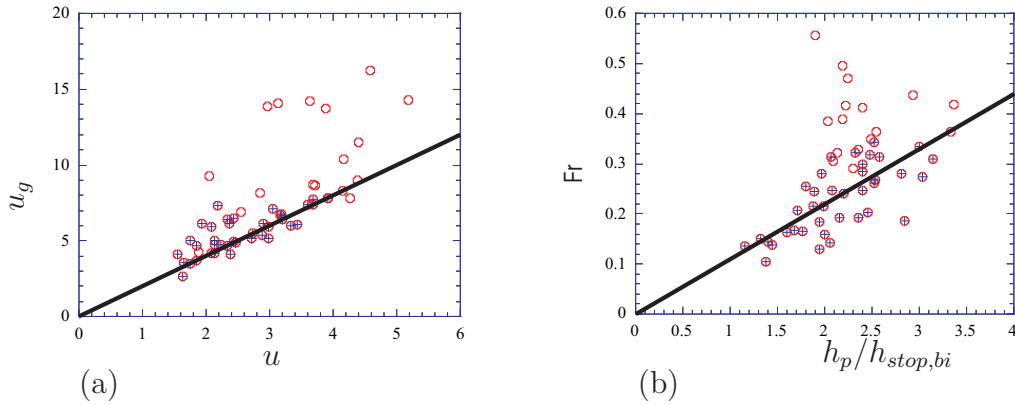


FIG. 7.14 – (a) Vitesse du front arrière des grosses billes en fonction de la vitesse du front avant des petites ( $\circ$  : tous les points expérimentaux  $+$  : résultats expérimentaux tels que le gradient  $\dot{\gamma} < 60s^{-1}$ ). (b) Nombre de Froude en fonction du rapport  $h_p/h_{stop,bi}$  ( $\circ$  : tous les points expérimentaux  $+$  : résultats expérimentaux tels que le gradient  $\dot{\gamma} < 60s^{-1}$ ).

semble pour la majorité des expériences, qu'il y ait continuité des vitesses entre la couche de petites billes et la monocouche de grosses billes : cette continuité des vitesses se traduit par  $u_g = 2u = u_p$  (fig. 7.7). Cependant, d'après ces résultats expérimentaux, quelques points ne vérifient pas cette relation, la vitesse de la monocouche de grosses billes est alors supérieure au double de la vitesse du front  $u$  des petites billes. Une des explications possibles est que dans ces expériences, les grosses billes roulent sur le lit constitué de petites billes. On peut alors se demander quelle est la raison du roulement.

On peut considérer le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  imposé par la monocouche de grosses billes à la couche de petites billes. Si ce taux de cisaillement est trop élevé, on peut supposer que la continuité des vitesses entre la couche de grosses billes et la couche de petites billes ne sera pas vérifiée. Il existerait une valeur limite de  $\dot{\gamma}$ , au dessus de laquelle la monocouche de grosses billes ne pourrait pas transmettre la totalité de sa vitesses à la couche de petites billes. Alors, les grandes billes se mettraient à rouler. Cependant, nous ne connaissons pas cette valeur limite du gradient. On remarque que si on se limite aux cas des expériences où le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est inférieur à  $60 s^{-1}$ , la vitesse de la couche de petites billes  $u_p$  à l'interface petites-grosses billes (avec  $u_p = 2u$ ) est égale à la vitesse de la monocouche de grosses billes (fig. 7.14 a). En choisissant une valeur limite plus faible pour  $\dot{\gamma}$ , on obtient la même tendance avec un accord meilleur pour la relation  $u_g = 2u$ . Il apparaît donc qu'au-delà d'une certaine valeur du taux de cisaillement imposé par la monocouche de grosses billes à la couche de petites billes, la continuité des vitesses entre ces deux couches n'est plus vérifiée. Avec cette limitation du taux de cisaillement inférieur à  $60 s^{-1}$ , la corrélation entre le nombre de Froude et  $h_p/h_{stop,bi}$  est meilleure (fig. 7.14 b).

Donc, tant que la continuité des vitesses entre les deux couches, est respectée, la même loi  $Fr = \beta h/h_{stop}$  est valable pour les écoulements granulaires monodisperses et bidisperses. On trouve expérimentalement  $\beta = 0,11$ . On remarque que la valeur du coefficient  $\beta$  diffère très légèrement des coefficients  $\beta$  déterminés pour des écoulements monodisperses ( $\beta = 0,14$ ). Cette loi est valable pour les écoulements bidisperses dans le cas où seuls les effets d'interface sont présents et où le dépôt est uniquement constitué de petites billes.

### 7.6.1 Interprétation en termes de friction

Comme on l'a montré dans la partie 2, la friction peut être déterminée à partir des courbes  $\mu(I)$ . La friction basale  $\mu$  est définie par le rapport des contraintes normales sur les contraintes tangentielles. Dans ce cas, on a :

$$\tau = g(\rho_p h_p + \rho_g d_g) \sin \theta$$

et

$$P = g(\rho_p h_p + \rho_g d_g) \cos \theta$$

avec

- $\rho_p$  : masse volumique de la couche de petites billes
- $\rho_g$  : masse volumique de la monocouche de grosses billes
- $\theta$  : angle d'inclinaison du plan
- $h_p$  : épaisseur de la couche de petites billes en écoulement
- $d_g$  : diamètre des grosses billes

On a alors :

$$\mu = \tau/P = \tan \theta$$

Quel que soit l'angle d'inclinaison du plan, le paramètre inertiel  $I$  est défini par  $I = \mu^{-1}(\tan \theta)$ . Cela implique que les courbes de  $\mu(I)$  devraient être les mêmes dans le cas monodisperse que dans le cas bidisperse. D'après [22], il est possible de déterminer l'épaisseur  $h_{stop}$  du dépôt, à partir de la courbe  $\mu(I)$ . En effet, on a :  $h_{stop} \sim \sqrt{\mu(I) \frac{d}{I}}$ .

L'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  dans le cas bidisperse serait alors égale à l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$  dans le cas monodisperse. Ce n'est pas ce qu'on constate expérimentalement. Il semble que les contraintes tangentielles soient accentuées par rapport aux contraintes normales et qu'elles ne respectent plus le rapport donné par une direction verticale sur une pente d'angle  $\theta$ . Dans le cas des écoulements bidisperses, on pourrait interpréter ce déséquilibre des contraintes comme étant dû à un effet "dynamique" de la ségrégation, les grandes billes sont portées par l'écoulement et maintenues dans cet état ségrégué. Ce sont les chocs dans la direction de l'écoulement qui maintiennent la géométrie de cet état ségrégué. Il y a probablement une transmission de contraintes entre les directions parallèles et perpendiculaires à l'écoulement. Pour une modélisation,

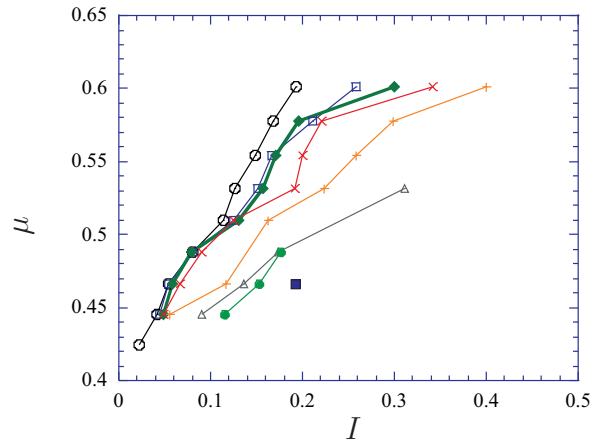


FIG. 7.15 – Friction à la base d’un écoulement bidisperse en fonction du paramètre inertiel  $I$  pour différents pourcentages massiques de grosses billes : ( $\circ$ ) %g = 0; ( $\square$ ) %g = 10; ( $\blacklozenge$ ) %g = 20; ( $\times$ ) %g = 30; ( $+$ ) %g = 40; ( $\triangle$ ) %g = 50; ( $\bullet$ ) %g = 60; ( $\blacksquare$ ) %g = 70.

on pourrait à la limite négliger la contrainte normale supplémentaire imposée par le poids des grandes billes et ne tenir compte que de la contrainte tangentielle supplémentaire. Cette géométrie pose évidemment un problème puisque nous nous affranchissons de la force normale imposée par la couche de grosses billes sur la couche de petites billes. Mais elle se traduit par une modification du gradient de vitesse dans la couche de petites billes, imposée par la monocouche de grosses billes, et elle permet de comprendre la tendance des résultats expérimentaux obtenus.

Par ailleurs, il est possible à partir des résultats expérimentaux de déterminer les valeurs prises par le paramètre inertiel  $I$  et de tracer les lois rhéologiques  $\mu(I)$ . En effet, ce paramètre  $I$  est défini par :

$$I = \frac{\dot{\gamma} d_p}{\sqrt{P/\rho}}$$

avec

- $\dot{\gamma}$  : le taux de cisaillement  $\dot{\gamma} = u_p/h_p$
- $d_p$  : le diamètre des petites billes
- $P$  : la contrainte normale
- $\rho$  : la masse volumique du matériau granulaire

Les courbes de  $\mu(I)$  représentent la friction basale des écoulements bidisperses en fonction du paramètre inertiel  $I$ . Elles se classent et montrent que la friction basale des écoulements bidisperses diminue avec le pourcentage massique de grosses billes (pour un mélange de deux tailles de billes donné) (fig. 7.15). Ce résultat est cohérent avec les diminutions d’épaisseur  $h_{stop}$  avec le pourcentage

de grosses billes présentes dans le mélange. Ce résultat montre que la couche de petites billes n'impose pas à elle seule la rhéologie des écoulements bidisperses. On peut considérer que les différents mélanges bidisperses se comportent comme des matériaux différents. Cette étude n'a pas été étendue au cas d'autres tailles de billes, mais on peut imaginer que les courbes  $\mu(I)$  vont dépendre des diamètres  $d_p$  et  $d_g$ . Alors la rhéologie d'un matériau granulaire (sur un plan donné) est fonction des diamètres de chaque classe de bille ( $d_p, d_g$ ), et du pourcentage de grosses billes  $\%g$ .

## 7.7 Conclusion

En se plaçant dans des conditions où il n'y a ni effet de ligne, ni piégeage des grosses billes, on a pu montrer qu'il y avait entraînement de la couche de petites billes par les grosses billes coulant au-dessus d'elles. Cet entraînement par érosion ou par augmentation de la vitesse des petites billes se traduit par une diminution de l'épaisseur de la couche de petites billes  $h_{stop,bi}$ . L'érosion ne semblant pas expliquer à elle seule cette diminution, on a supposé que la vitesse des grosses billes était transmise à l'écoulement de petites. Le gradient de vitesse est alors modifié dans l'épaisseur de la couche de petites billes. Ceci a deux implications :

- il est possible de définir une rhéologie pour les écoulements granulaires bidisperses dans cette géométrie d'écoulement. Un mélange de deux classes de billes présentera des comportements différents (courbe de friction  $\mu(I)$ ) en fonction du pourcentage de grosses billes présents dans le mélange. Alors on définira une friction par la donnée des trois paramètres  $d_p, d_g$  et  $\%g$ .
- l'influence du plan existe toujours comme pour les écoulements monodisperses, on tient compte du plan au moyen de la normalisation par l'épaisseur du dépôt  $h_{stop}$ . De la même façon que les écoulements monodisperses, les écoulements granulaires bidisperses vérifient une loi du type  $Fr = \beta h/h_{stop}$ .

Cependant l'explication proposée pour la modification du gradient de vitesse revient à considérer que les grosses billes imposent une contrainte tangentielle supérieure à celle donnée par le rapport des contraintes normales et tangentielles due au poids sur une pente  $\theta$ . Cette interprétation permet de retrouver les résultats expérimentaux mais n'a pas été expliquée au niveau des interactions entre les billes, même si on suspecte un effet dû à la ségrégation.

# Chapitre 8

## Conclusions et perspectives

Dans cette étude, nous avons tenté de comprendre les écoulements de milieux granulaires bidisperses en taille. Ces écoulements sont essentiellement inhomogènes, parce que faisant intervenir des processus de ségrégation. La conséquence première de cette ségrégation est d'organiser l'écoulement sous forme de deux couches de billes coulant l'une sur l'autre. Cette organisation verticale entraîne, du fait du champ de vitesse, une hétérogénéité spatiale latérale et longitudinale. Pour un mélange de grandes et petites billes, on retrouve les grandes billes en surface, au front et sur les côtés, les petites billes à la base de l'écoulement. Cette géométrie particulière provoque plusieurs effets qui jouent chacun sur la dynamique générale de l'écoulement.

- un effet dû à la présence des grandes particules sur le contour de l'écoulement (front et côtés)
- une interaction entre les deux couches de particules superposées
- une modification de la rugosité basale selon la taille des billes en contact avec le fond rugueux.

Si on recherche une loi rhéologique générale pour ces écoulements, on est tenté de s'intéresser à la friction basale des écoulements afin de les replacer dans le cadre des équations moyennées dans l'épaisseur. D'après les études antérieures sur les écoulement granulaires monodisperses, la friction basale des écoulements bidisperses devrait être fixée par l'interaction des petites particules avec le plan rugueux. Mais nos résultats montrent que cette interaction ne conditionne pas à elle seule, la rhéologie globale du système bidisperse ségrégué. On a pu montrer que cette rhéologie globale dépend bien sûr de la rugosité du plan et de la taille des petites billes, mais aussi de la taille des grandes billes et du pourcentage relatif de chacune des deux espèces. L'interaction du plan et des billes au contact n'est donc qu'un volet parmi plusieurs effets.

Néanmoins, l'étude de l'interaction des petites particules prises seules (monodisperse) avec le plan rugueux a donné non seulement la réponse à l'effet de la modification de la rugosité basale, mais aussi un cadre pour l'interprétation des divers comportement bidisperses. Elle a, entre autres, mis en évidence un maxi-

mum de friction pour une rugosité relative donnée. On aborde alors les variations de la rugosité basale en comparant la taille des petites billes à la taille correspondant au maximum de friction. De plus, à partir des caractéristiques géométriques du plan rugueux (tailles des rugosités, compacité), il est possible de calculer la valeur de la friction basale pour n'importe quelle taille de bille monodisperse coulant sur ce plan.

Grâce à une comparaison entre les frictions sur le plan rugueux calculées dans les cas monodisperses des grandes et des petites billes, on peut cerner les limites de l'effet de contour. Si la friction des grandes est supérieure à celle des petites, l'écoulement bidisperse est confiné par la forte friction qui s'exerce sur son contour. Divers phénomènes en résultent : barrage et réduction de la largeur et de la longueur, rupture du barrage formation d'un doigt et augmentation de la longueur. Bien sûr, si la friction est inférieure, aucune force ne s'exerce au niveau du contour de l'écoulement.

Par ailleurs, en choisissant judicieusement les tailles des billes dans l'écoulement bidisperse, on a pu s'affranchir de ces effets essentiellement dus à l'inhomogénéité latérale de l'écoulement. Il ne reste alors que les effets d'interactions entre les couches de billes et l'effet de la rugosité du plan. En se plaçant en dehors des conditions pour lesquelles il y a piégeage des grandes billes dans le dépôt de petites, nous avons montré que le rôle des grandes billes est essentiellement d'imposer un gradient de vitesse dans la couche de petites billes supérieur à celui qu'elles auraient lors d'un écoulement monodisperse de même épaisseur : il y a entraînement des petites billes par les grandes. Ce résultat est surprenant puisqu'il revient à considérer que les grandes billes imposent une force tangentielle supérieure à celle qu'on attendrait au vu de la force normale qu'elles exercent. L'interprétation de ce phénomène reste ouverte. Néanmoins, on constate que c'est une des raisons pour lesquelles la loi rhéologique du matériau ne dépend pas que de la rugosité basale, mais aussi des caractéristiques et de la fraction des grandes particules. Il semble que la ségrégation ne soit pas qu'un phénomène anecdotique, mais que le maintien de son organisation spatiale ait une influence sur la dynamique de l'écoulement.

De nombreuses questions se posent à la suite de ce travail. Nous proposons ici quelques pistes de réflexion, dans son prolongement.

L'identification des différents mécanismes intervenant lors des écoulements bidisperses donne un cadre nouveau pour l'étude de ces écoulements. Bien sûr, ces mécanismes demandent chacun une étude plus détaillée et approfondie avant de pouvoir proposer une loi rhéologique les prenant en compte.

D'autre part, on peut se demander ce que deviendront ces mécanismes dans le cas où les épaisseurs des écoulements sont plus importantes, en particulier pour des écoulements confinés latéralement pour lesquels les épaisseurs peuvent être grandes, impliquant deux couches épaisses superposées. Que deviendra le confinement dans le cas de ces écoulements en nappe ? Pourra-t-on faire un parallèle avec une instabilité de type digitation du front ?



Si on revient à l'enjeu principal de cette étude, qui est l'établissement de lois rhéologiques, on peut se demander, avant d'aller plus en avant vers une étude des écoulements polydispersés en taille, si ces lois seront valables seulement pour un type de géométrie d'écoulement (ici l'écoulement à surface libre sur plan incliné). Il serait souhaitable d'envisager de placer ces mélanges bidispersés dans d'autres configurations expérimentales (cellule de cisaillement...) où l'état de ségrégation ne sera pas le même. Pour un granulaire monodisperse, on savait que le plan intervenait dans la loi rhéologique, qu'on pouvait envisager comme une rhéologie du couple (plan-matériau). A-t-on une rhéologie du triplet (plan-matériau-état de ségrégation) dans le cas d'un matériau bidisperse en taille ? Une comparaison entre plusieurs systèmes permettrait peut être d'isoler la contribution de chacun de ces paramètres dans la dynamique de l'ensemble.

Bien sûr, avant toute application à des cas naturels d'écoulement, on se demande si une rhéologie pour des mélanges polydispersés pourra un jour être proposée. Il faudra donc une extension de ce travail à des matériaux polydispersés en taille. On prévoit une éventuelle modification de l'état ségrégué, mais surtout on se demande si d'autres phénomènes interviendront ou si la seule combinaison des mécanismes décrits dans ce travail suffira à donner un cadre pour ces écoulements. De jolies couleurs en perspective au labo...

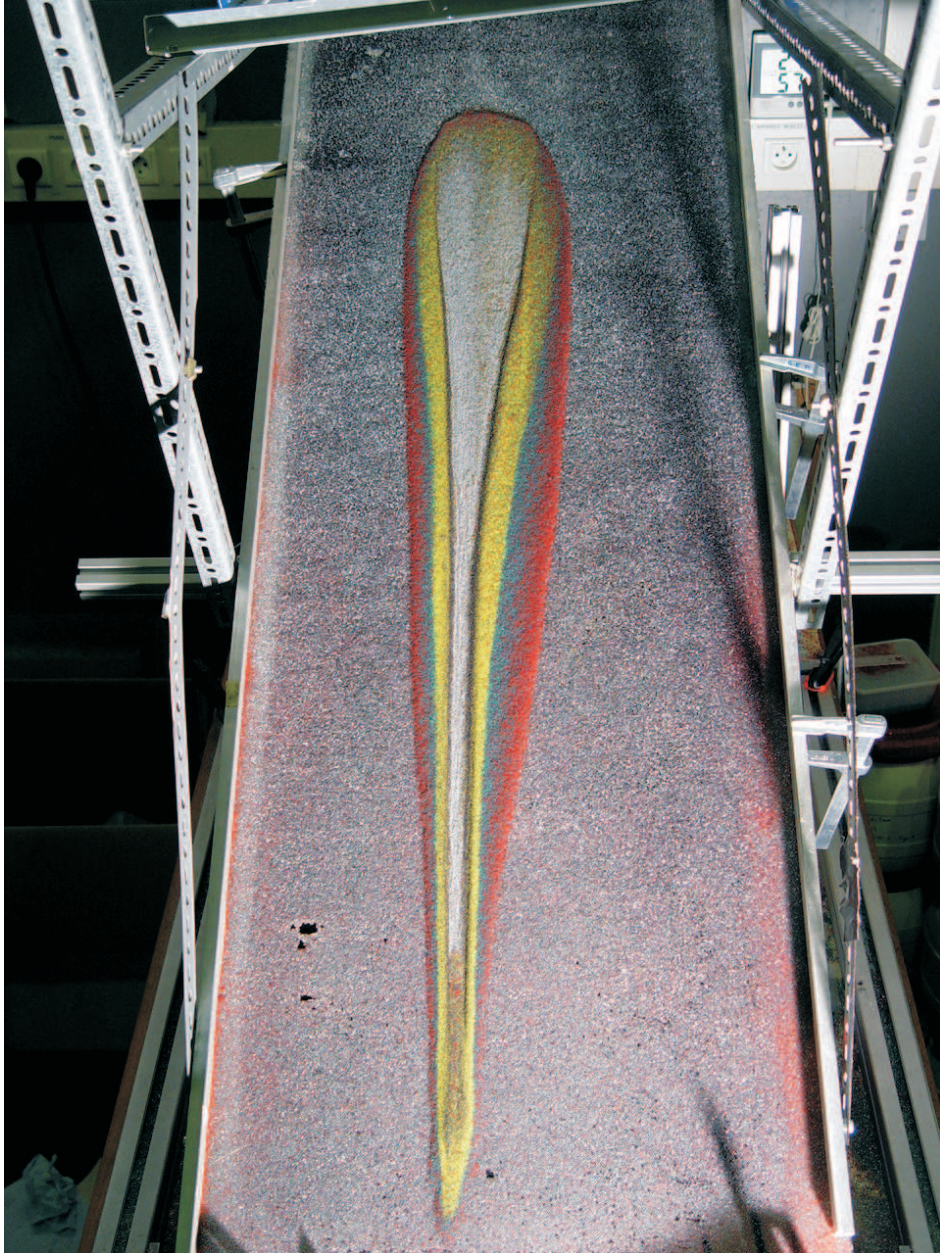


FIG. 8.1 – Dépôt obtenu après un écoulement polydisperse en taille.

# Annexe A

## Appendices

### A.1 Fabrication des plans rugueux

La fabrication des plans rugueux a demandé un travail conséquent. En effet, pour pouvoir modéliser la rugosité du plan et comprendre les différents écoulements que nous avons étudiés, les plans rugueux devaient être constitués d'une monocouche de billes. L'empilement des billes sur le plan est alors aléatoire compact. Pour réaliser les différents plans, nous avons remarqué que nous ne pouvions pas utiliser le même procédé pour toutes les tailles de billes.

Pour des tailles de billes inférieures à  $600\ \mu\text{m}$ , on utilise une feuille collante de type *Venilia*. La face non collante est posée sur le plan tandis que la face collante est couverte de grains. En disposant une couche épaisse de particules sur la colle que l'on tasse, puis en enlevant le surplus, on parvient à créer une monocouche de grains dans un empilement aléatoire compact. Pour stabiliser et fixer définitivement la monocouche de particules, il convient de réaliser quelques écoulements avec les mêmes particules que celles qui sont collées. En effet, cette phase de "vieillissement" du fond rugueux permet à certaines particules de se réarranger et à d'autres de s'incruster dans le plan.

Pour des tailles de billes comprises entre  $600\ \mu\text{m}$  et  $1.4\ \text{mm}$ , il convient d'utiliser une autre méthode. Le procédé de fabrication consiste à utiliser une colle plus résistante que la colle présente sur le film *Venilia*. Le collage s'effectue sur une plaque de *PVC* sur laquelle est disposée du scotch double face. Une couche épaisse de grains est alors disposée sur la face collante du plan et tassée, après la phase de vieillissement précédemment décrite, on obtient un plan rugueux constitué d'une monocouche de billes. Cependant pour des plans constitués de grosses billes (environ  $1\ \text{mm}$ ), les trous dans les espaces du plan sont de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{m}$ . Lors des premières expériences réalisées avec des billes de petit diamètre, ces billes peuvent remplir les trous du plan et rester collées sur ce dernier. Pour éviter cette variation de la rugosité du plan, due à nos expériences, il convient alors de pré-remplir les trous du plans avec des petites

billes (0-50  $\mu m$ ). Seules les petites billes en contact avec le plan resteront collées. La taille des petites billes qui remplissent les trous du plan représente environ  $1/20^{eme}$  de la taille des billes collées sur le plan et n'ont donc pas d'influence sur la rugosité du plan lors des écoulements.

Pour des billes ayant une taille supérieure à 1.4 mm, les particules sont collées sur une plaque de verre avec une résine epoxy, l'araldite. La difficulté de cette méthode réside dans le fait de n'obtenir qu'une seule couche de billes collées sur la plaque. L'épaisseur de colle mise sur la plaque de verre est donc très importante, la colle est passée au pinceau puis lissée à l'aide d'une tige cylindrique. Cette méthode consiste donc dans un premier temps à réaliser un plan sur du papier *Venilia*, le principe est le même que décrit précédemment. Ce plan rugueux provisoire est ensuite retourné et collé sur la plaque de verre qu'on a enduite d'une couche de colle. L'ensemble est ensuite tassé au travers du film *Venilia*. Il est assez aisé d'enlever le papier *Venilia* en passant le plan sous l'eau lorsque les billes sont collées sur la plaque de verre (quelques jours).

Tous les plans que nous avons fabriqués ont une compacité comprise entre  $c_{min}$  et  $c_{max}$ .  $c_{max}$  est la compacité pour laquelle toutes les billes collées sur le plan sont en contact. Cette compacité est égale à  $c_{max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,9$  pour des tailles de billes monodisperses. Le minimum de compacité est déterminé par le procédé de fabrication des plans rugueux. En effet, pour réduire les espacements entre les billes collées, nous appuyons sur l'excédent de billes lors de la fabrication du plan et les billes non collées peuvent remplir des trous. Aucun trou plus grand que le diamètre d'une bille ne restera inoccupé. Le minimum de compacité est donc obtenu dans le cas où l'espacement entre trois billes du plan est égal au diamètre d'une bille, ce qui donne une compacité égale à 0,3.

## A.2 Tri des billes par sphéricité

### A.2.1 Principe et Dispositif Expérimental

On a constaté que les billes achetées dans le commerce n'étaient pas de très bonne qualité, c'est à dire non sphériques. Pour mesurer la non-sphéricité des billes, on peut fitter la projection de chaque bille par une ellipse (voir figure A.1). A partir de ce fit, les deux diamètres principaux ( $d_1$  et  $d_2$ , avec  $d_2 > d_1$ ) de la bille sont connus. Les billes sont alors considérées sphériques si le rapport des deux diamètres (c'est à dire  $\frac{d_2}{d_1}$ ) est inférieure à 1,1, l'erreur autorisée sur les diamètres est de 10%. Les billes sont analysées à l'aide d'un logiciel de traitement d'image (NIH Image). Les mesures sont faites sur des échantillons de 400 billes pour avoir une distribution représentative de notre échantillon. L'échantillon initial est constitué d'environ 40 % de billes non sphériques d'où l'intérêt du tri (figure A.2). Pour les trier, nous nous sommes intéressés aux rebonds de ces billes sur une plaque de verre inclinée. En effet, suivant la forme des billes la trajectoire

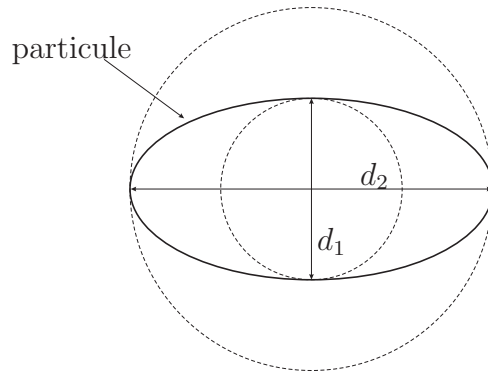


FIG. A.1 – Définition des 2 diamètres ( $d_1$  et  $d_2$ ) d'une particule non sphérique

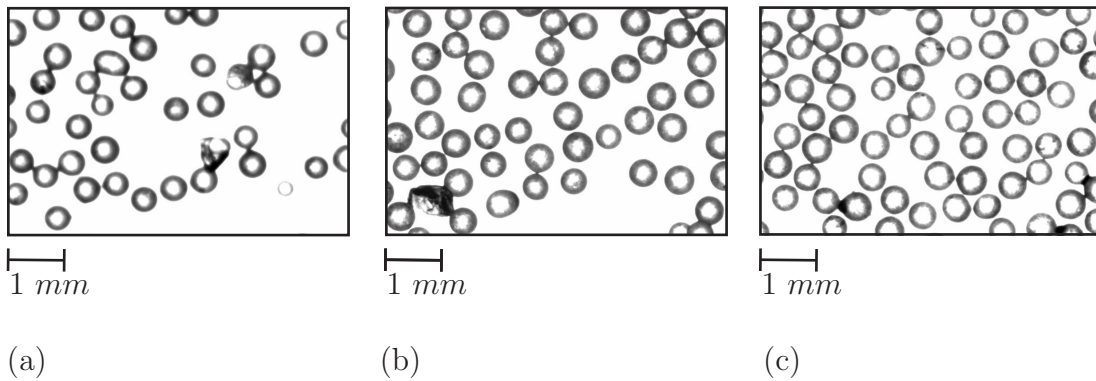


FIG. A.2 – Tri des billes ( $d=580 \mu m$ ) par sphéricité (a) lot initial, (b) billes récupérées après un passage, (c) billes récupérées après un second passage

après rebond ne sera pas la même. En nous basant sur ces observations, nous avons mis au point un dispositif expérimental pour trier les billes par sphéricité. Celui-ci comprend deux plaques de verre et un entonnoir en fente (fig. A.3). La plaque supérieure est aussi munie d'un fin film de plastique pour faire une délimitation précise et éviter que les billes ne rebondissent sur la tranche de la vitre. L'expérience consiste en un lâcher de billes avec un flux constant et le plus faible possible sur la plaque de verre. La position de la seconde plaque sera ajustée de telle manière à ne récupérer qu'une certaine catégorie de billes. Les paramètres de contrôle sont les suivants :

- Angle d'inclinaison des deux plaques de verre  $\theta_a$  et  $\theta_b$  par rapport à l'horizontale,
- Hauteur de lâcher  $h$ ,
- Espacement entre les deux plaques de verre  $e$ .

Cette étude a pour objet de séparer les billes sphériques ou vérifiant un certain critère de sphéricité, dans une population de billes quelconques. En effet, lors-

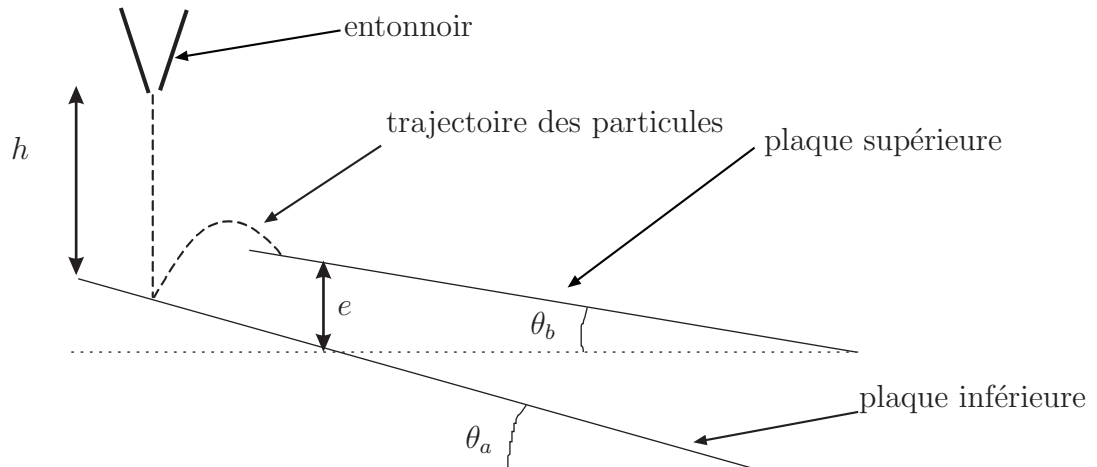


FIG. A.3 – Dispositif expérimental pour le tri de billes par sphéricité

qu'une bille rebondit sur une plaque de verre, sa trajectoire est parabolique, cependant les caractéristiques de cette parabole dépendent de la sphéricité de la bille considérée. Nous avons utilisé une caméra rapide pour suivre la trajectoire des particules et ajusté la plaque supérieure pour ne récupérer que 50 % des billes. Nous avons étudié l'efficacité d'un tri par rebond, les résultats sont présentés dans la partie suivante.

### A.2.2 Résultats expérimentaux

Les expériences ont été réalisées avec différents lots de billes (de diamètre  $300 \mu m$ ,  $580 \mu m$ ,  $800 \mu m$ ) pour différents angles d'inclinaisons  $\theta_a$  ( $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ), en effet seul l'angle d'inclinaison  $\theta_a$  est important dans ces expériences, car la trajectoire des billes est fonction de cet angle d'inclinaison. L'angle d'inclinaison  $\theta_b$  est ajusté de telle sorte que les billes s'écoulent sur la plaque de verre située au dessus, c'est à dire un angle d'inclinaison faible de l'ordre de quelques degrés. Les pourcentages de billes sphériques présents dans les différents lots de billes sont respectivement de 55%, 60% et 70% (en nombre).

En figure A.4 sont représentés les pourcentages de billes sphériques obtenus après un ou deux passages. Ces résultats ont été obtenus pour différents diamètres de billes, et différents angles d'inclinaison  $\theta_a$ . Les expériences réalisées montrent qu'il existe un angle  $\theta_a$  optimal pour le tri des billes, cet angle est compris entre  $25^\circ$  et  $30^\circ$ . Le second résultat important est qu'un seul passage permet d'augmenter significativement le pourcentage de billes sphériques (fig. A.4). Pour un angle d'inclinaison  $\theta_a$ , pour chaque lot de billes, le pourcentage de billes sphériques est respectivement de 69, 80 et 83. On montre avec ces expériences que lors du second passage, le pourcentage de billes sphériques augmente légèrement (respectivement de 72, 85 et 88). Cependant, on remarque que lors du premier passage, les billes

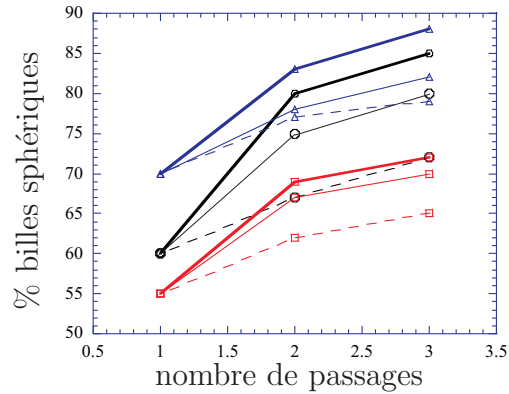


FIG. A.4 – Pourcentage de billes sphériques en fonction du nombre de passage dans la “trieuse” pour différents diamètres de billes  $\square d=300 \mu m$ ,  $\circ d=580 \mu m$  et  $\triangle d=800 \mu m$ . L’efficacité du tri a été étudié pour différents angles d’inclinaison  $\theta_a$  de la plaque inférieure (– –)  $\theta_a = 20^\circ$ , (ligne épaisse)  $\theta_a = 25^\circ$ , (—)  $\theta_a = 30^\circ$ . Le tri est le plus efficace pour un angle de  $25^\circ$ .

les moins sphériques (le rapport des diamètres  $d_2/d_1$  de ces billes est supérieur 1,2) sont supprimées du lot initial. Malgré sa simplicité, cette méthode s’avère efficace pour augmenter significativement le pourcentage de billes sphériques. Par ailleurs, si on souhaite obtenir des billes très sphériques, il suffit de passer les billes dans la trieuse un nombre élevé de fois.

### A.3 Copie de l'article





# Bibliographie

- [1] M.A. Aguirre, I. Ippolito, A. Calvo, C. Henrique and D. Bideau, Effects of geometry on the characteristics of the motion of a particle rolling down a rough surface, *Powder Technology* **92**, 75-80 (1997).
- [2] E. Aharonov and D. Sparks, On phase transition and self-organized critical state in granular packings, *Phys. Rev. E* **65** : 051302 (2002).
- [3] H. Ahn, C.E. Brennen and R.H. Sabersky, Measurements of velocity, velocity fluctuation, density and stresses in chute flows of granular materials, *ASME, J. Appl. Mech.*
- [4] C. Ancey, P. Evesque and P. Coussot, Motion of a single bead on a bead row : theoretical investigations, *J. Phys. I* **6**, 725-751 (1996).
- [5] D.A. Augenstein and R. Hogg, Friction factors for powder flow, *Powder Technology* **10**, 43 (1974).
- [6] E. Azanza, Ecoulements granulaires bidimensionnels sur plan incliné, Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1998).
- [7] G.G. Batrouni, S. Dippel and L. Samson, Stochastic model for the motion of a particle on an inclined rough plane and the onset of viscous friction, *Phys. Rev. E* **53**, 066496-066503 (1996).
- [8] L. Bocquet, J. Errami and T.C. Lubensky, Hydrodynamic Model for a Dynamical Jammed-to-Flowing Transition in Gravity Driven Granular Media, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 184301 (2002).
- [9] C.S. Campbell, P.W. Cleary and M. Hopkins, Large-scale landslide simulations : Global deformations, velocities and basal friction, *J. Geophys. Res.* **100**, 8267 (1995).
- [10] F. Cantelaube and D. Bideau, *Europhys. Lett.* **30**, 133 (1995).
- [11] F. Da Cruz, Écoulements de grains secs : Frottement et blocage, Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (2004).
- [12] A. Daerr, Dynamique des avalanches, Thèse, Université Denis Diderot Paris 7 (2000).

- 
- [13] S. Dippel, G.G. Batrouni and D.E. Wolf, How transversal fluctuations affect the friction of a particle on a rough inclined plane, *Phys. Rev. E* **56**, 3645-3656 (1997).
- [14] S. Dippel, D.E. Wolf, Molecular Dynamics simulations of granular chute flow, *Computer Physics Communications* **121**, 284-289 (1999).
- [15] S. Dippel, G.G. Batrouni and D.E. Wolf, Collision-induced friction in the motion of a single particle on a bumpy inclined line, *Phys. Rev. E* **54**, 6845-6856 (1996).
- [16] J.A. Drahn and J. Bridgwater, The mechanisms of free surface segregation, *Powder Technology* **36**, 39-53 (1983).
- [17] T.G. Drake, Granular flow : physical experiments and their implications for microstructural theories, *J. Fluid. Mech.* **225**, 121-152, (1991).
- [18] D. Ertas, G.S. Grest, T.C. Halsey, D. Levine, and L.E. Silbert, Gravity driven dense granular flows, *Europhys. Lett.* **56**, 214-220, (2001).
- [19] D. Ertas and T.C. Halsey, Granular gravitational collapse and chute flow, *Europhys. Lett.* **60** :931 (2002).
- [20] G. Félix and N. Thomas, Relation between granular flow regimes and morphology of the deposits : formation of levées in pyroclastic deposit, *Earth Planet. Sci. Lett.* **221**, 197-213 (2004).
- [21] G. Félix and N. Thomas, Evidence of two effects in the size segregation process in a dry granular media, *Phys. Rev. E*, (sous presse) (2004)
- [22] GdR MiDi (article collectif), On dense granular flows, *Eur. Phys. J. E*, (2004).
- [23] J.M.N.T. Gray, M. Wieland and K. Hutter, Gravity driven free surface flow of granular avalanches over complex basal topography, *Proc. R. Soc. Lond. A* **455**, 1841-1874 (1999).
- [24] R. Greve, T. Koch and K. Hutter, Unconfined flow of granular avalanches along a partly curved surface, part 1 and 2, *Proc. R. Soc. Lond. A* **445**, 399-413 and 415-435 (1994).
- [25] T.C. Halsey and A.J. Levine, How sandcastles fall, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3141, (1998).
- [26] C. Henrique, M.A. Aguirre, A. Calvo, I. Ippolito, S. Dippel, G.G. Batrouni and D. Bideau, Energy dissipation and trapping of particles moving on a rough surface, *Phys. Rev. E* **57**, 4743-4750 (1998).

- [27] K.M. Hill, A. Caprihan and J. Kakalios, Axial segregation of granular media rotated in a drum mixer : pattern evolution, *Phys. Rev. E* **56**, 4386-4393 (1997).
- [28] O. Hungr, N.R. Morgenstern, Experiments on the flow behavior of granular materials at high velocity in an open channel, *Géotechnique* **34**, 405-413 (1984).
- [29] H.M. Jaeger, S.R. Nagel et R.P. Behringer, Granular solids, liquids and gases, *Rev. Modern Phys.* **68**, 1259-1273 (1996).
- [30] H.M. Jaeger, C.H. Liu, S.R. Nagel, *Europhys. Lett.* **11**, 619, (1990).
- [31] P.C. Johnson, P. Nott and R. Jackson, Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes, *J. Fluid. Mech.* **210**, 501-535 (1990).
- [32] R. Jullien, P. Meakin and A. Pavlovitch, Three dimensional model for particle size segregation by shaking, *Phys. Rev. Lett.*, **69** 640-643 (1992).
- [33] J.B. Knight, H.M. Jaeger and S.R. Nagel, Vibration induced size separation in granular media, the convection connection, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3728-3731 (1993).
- [34] M.Y. Louge and S.C. Keast, On dense granular flows down flat frictional inclines, *Phys. Fluids* **13**, 1213-1233 (2001).
- [35] C.K.K. Lun and A.A. Bent, Numerical simulation of inelastic frictional spheres in a simple shear flow model, *J. Fluid Mech.* 335-353 (1994).
- [36] M. Naaim, S. Vial and R. Couture, Saint-Venant approach for rock avalanches modelling, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris (1997).
- [37] G.Y. Onoda and E.G. Liniger, Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset, *Phys. Rev. Lett.* 86-111 (2001).
- [38] A.V. Orpe and D.V. Kakhar, Scaling relations in quasi 2D cylinders. *Phys. Rev. E* **64**, 031302 (2001).
- [39] J.S. Patton, C.E. Brennen and R.H. Sabersky, Shear flows of rapidly flowing granular materials, *ASME, J. Appl. Mech.* **52**, (1987) 172. **59**, 119 (1991).
- [40] O. Pouliquen, J. Delour and S.B. Savage, Fingering in granular flows, *Nature* **386**, 816-817 (1997).
- [41] O. Pouliquen, Scaling laws in granular flows down a rough inclined plane, *Phys. Fluids* **11**, 542-548 (1999).

- 
- [42] O. Pouliquen, On the shape of granular fronts down rough inclined planes, *Phys. Fluids* **11**, 1956-1958 (1999).
- [43] O. Pouliquen, Cours écoulements denses, École d'été Millieux Divisés. Porquerolles (2001).
- [44] O. Pouliquen and Y. Forterre, Friction law for dense granular flow : application to the motion of a mass down a rough inclined plane, *J. Fluid. Mech.* **453**, 133-151 (2002).
- [45] O. Pouliquen and F. Chevoir, Dense flows of dry granular materials, *C. R. Physique* **3**, 163-175 (2002).
- [46] O. Pouliquen, J. Delour and S.B. Savage, Fingering in granular flows, *Nature* **386**, 816-818 (1997).
- [47] O. Pouliquen and J.W. Vallance, Segregation induced instabilities of granular fronts, *Chaos* **9**, 621-62, (1999).
- [48] M. Pronchow, Ecoulements denses de grains secs, Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (2002).
- [49] O. Reynolds, On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, *Phil. Mag. Ser.*, 5 (20) 469-481 (1885).
- [50] K. Ridgway and R. Rupp, Flow of granular material down chutes, *Chemical and Process Eng.*, 82-85 (1970).
- [51] F.X. Rigidel, A. Hansen and D. Bideau, Gravity-Driven motion of a particle on an inclined plane with controlled roughness, *Europhys. Lett.* **28**, 13 (1994).
- [52] F.X. Rigidel, R. Jullien, G. Ristow, A. Hansen and D. Bideau, Behaviour of a sphere on a rough inclined plane *J. Phys. I* **4**, 261 (1994).
- [53] F. X. Rigidel, Thèse, Ecoulements de particules sur un plan rugueux incliné, Université de Rennes I (1994).
- [54] D.A. Robinson and S.P. Friedman, Observations of the effects of particle shape and particle size distribution on avalanching of granular media, *Physica A* **311**, 97-110 (2002).
- [55] A. Rosato *et al*, Why the brazil nuts are on top : size segregation of particulate matter by shaking, *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1038-1040 (1987).
- [56] G. Sansoni, M. Carocci, and R. Rodella, 3D vision based on the combination of gray code and phase shift light projection : analysis and compensation of the systematic errors, *Appl. Opt.* **31**, 6565-6573 (1999).
- [57] A.C. Santomaso and P. Canu, Transition to movement in granular chute flows, *Chem. Eng. Sci.* **56**, 3563-3573 (2001).

- 
- [58] S.B. Savage and K.H. Hutter, The motion of a finite mass of granular material down an rough incline, *J. Fluid. Mech.* **199**, 177 (1989).
- [59] S.B. Savage and C.K.K. Lun, Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids, *J. Fluid. Mech.* **189**, 311-335, (1988).
- [60] S.B. Savage in *Theoretical and applied mechanics*, (eds germain, Piau, Caillerie) 241-266 (elsevier, Amsterdam, 1989).
- [61] S.B. Savage, Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels, *J. Fluid Mech.* **92**, 53-96 (1979).
- [62] S.L. Silbert, J.W. Landry and G.S. Grest, Granular Flow down a rough inclined plane : transition between thin and thick piles, *Phys. of Fluids* **15**, 1-10 (2003).
- [63] S.L. Silbert, D. Ertas, G.S. Grest, T.C. Halsey and D. Levine, Analogies between granular jamming and the liquid-glass transition, *Phys. Rev. E* **65**, 051307 (2002).
- [64] S.L. Silbert, D. Ertas, G.S. Grest, T.C. Halsey, D. Levine and S.V. Plimpton, Granular flow down an inclined plane, *Phys. Rev. E* **64**, 385-403 (2001).
- [65] S.L. Silbert, G.S. Grest, S.J. Plimpton, and D. Levine, Boundary effects and self-organisation in dense granular flows, *Phys. of Fluids* **14** (2002).
- [66] K. Takahashi, On the dynamical properties of granular mass, *Geophys. Mag.* **11**, 165-176 (1937).
- [67] T. Takahashi, Debris Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **13**, 57 (1981).
- [68] N. Thomas, Reverse and intermediate segregation of large beads in dry granular media, *Phys. Rev. E* **62**, 961-974 (2000).
- [69] G.L. Vasconcelos and J.J.P. Veerman, Geometrical model for a particle on a rough inclined surface, *Phys. Rev. E* **59**, 5641-5646 (1999).



## **Écoulements granulaires bidisperses sur plans inclinés rugueux**

**Résumé** - Pour comprendre la grande mobilité des écoulements naturels, nous nous sommes intéressés à l'étude des écoulements granulaires monodisperses et bidisperses. L'étude des écoulements granulaires monodisperses a montré l'existence d'un diamètre de billes pour lequel la friction est maximum. Ce diamètre dépend des caractéristiques du plan rugueux (diamètre des rugosités et espacement entre les rugosités), et peut être déterminé à l'aide d'un modèle de stabilité sans paramètre ajustable. L'étude des écoulements bidisperses a mis en évidence, du fait de la répartition inhomogène des billes lors de l'écoulement de nombreuses interactions, réparties suivant deux effets : les "effets de lignes" qui ont une influence sur la morphologie du dépôt (formation ou non de doigt) et les "effets d'interface" (interactions des petites billes avec le plan rugueux et interaction des petites billes avec les grosses billes) qui ont une influence sur l'épaisseur du dépôt et sur la rhéologie de ces écoulements.

**Mots-clés** : Écoulements granulaires, rhéologie, ségrégation, friction.

## **Bidisperse granular flows on rough inclined planes**

**Abstract** - For understanding the large mobility of natural flows, we interest to the study of monodisperse and bidisperse granular flows. The study of monodisperse granular flows shows the existence of a diameter of beads for which the friction is maximum. This diameter depends on the characteristics of the rough plane (diameter of the roughness, spacing between the roughness) and can be determined by a model of stability without adjustable parameter. The study of bidisperse flows, give rise to, due to the inhomogeneous repartition of the beads during the flow, a lot of interactions dividing in two effects : the "line effects" which have an influence on the morphology of the final deposit (formation of a finger or not) and the "interface effects" (interactions between small beads and the rough plane and interactions between the small beads and the large beads) which have an influence on the thickness of the deposit and on the rheology of these flows.

**Keywords** : granular flows, rheology, segregation, friction.