



HAL
open science

Téledétection de la surface terrestre par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture : principes de mesure, traitement des données interférométriques et méthodes de reconstruction régularisées

Bruno Picard

► **To cite this version:**

Bruno Picard. Téledétection de la surface terrestre par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture : principes de mesure, traitement des données interférométriques et méthodes de reconstruction régularisées. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Migration - université en cours d'affectation, 2004. Français. NNT : . tel-00009029v2

HAL Id: tel-00009029

<https://theses.hal.science/tel-00009029v2>

Submitted on 18 Apr 2005 (v2), last revised 28 Jul 2005 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Versailles - St Quentin

Spécialité : MÉTHODES PHYSIQUES EN TÉLÉDÉTECTION

par

Bruno Picard

**Téledétection de la surface terrestre
par un radiomètre imageur
à synthèse d'ouverture :
principes de mesure,
traitement des données interférométriques
et méthodes de reconstruction régularisées.**

Soutenue le 19 Novembre 2004 devant le jury composé de :

Président : M. Philippe WALDTEUFEL

Rapporteurs : M. Stéphane GUILLOTEAU
M. Volker WITTMANN

Examineur : M. Yann H. KERR

Directeurs de thèse : M. Eric ANTERRIEU - M. Gérard CAUDAL

Mis en page avec la classe thloria.

Table des matières

Table des figures	vii
Liste des tableaux	xi
Table des éclaircissements	xiii
Table des Biographies	xv
Introduction	1
Partie I Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d’Ouverture	5
Chapitre 1 Télédétection de l’humidité des sols et de la salinité de surface des océans	7
1.1 Contraintes instrumentales sur la mesure de l’humidité et de la salinité	7
1.1.1 Avec un radar ou un radiomètre ? A quelle longueur d’onde?	7
1.1.2 Télédétection de l’humidité des sols	10
1.1.3 Télédétection de la salinité des océans	10
1.2 Radiomètre à puissance totale	11
1.2.1 L’antenne	13
1.2.2 Le récepteur	16
1.2.3 Grandeurs caractéristiques	20
Bibliographie	23
Chapitre 2 Principes fondamentaux de l’imagerie par interférométrie	25
2.1 Présentation générale des radiomètres à synthèse d’ouverture	25
2.2 Fondements mathématiques : la transformée de FOURIER	31
2.2.1 Fréquences temporelles - Fréquences spatiales	31

2.2.2	Les transformées de FOURIER à deux dimensions	31
2.3	Fondements physiques : l'expérience des trous d'Young	37
2.3.1	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 = 0$	38
2.3.2	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$	39
2.3.3	Cas d'une source primaire étendue entre $-r_s$ et $+r_s$	39
Bibliographie		47
Chapitre 3 Le théorème de Van Cittert-Zernike		49
3.1	Corrélation des champs reçus par deux antennes	49
3.2	Instrumentation	52
3.2.1	Les LICEF	52
3.2.2	Le corrélateur	53
3.2.3	Les NIR	53
3.3	Relation fondamentale entre les visibilitées et la température de brillance	55
3.3.1	Les gains d'antennes	55
3.3.2	Le phénomène de décorrélation spatiale	55
3.3.3	Relation Fondamentale	57
Bibliographie		59
Partie II Traitements des données interférométriques		61
Chapitre 4 Cadre mathématique		63
4.1	Couvertures fréquentielles expérimentales et grilles d'échantillonnage	63
4.1.1	Configuration en U et maillage cartésien	65
4.1.2	Configuration en Y et maillage hexagonal	69
4.2	Espaces et opérateurs	74
4.2.1	Espaces des objets, des données et sous-espaces associés	74
4.2.2	Les opérateurs clés	75
4.3	\mathbf{G} , opérateur de modélisation	76
4.3.1	Action des opérateurs \mathbf{G} et \mathbf{G}^*	76
4.3.2	Propriétés de la matrice \mathbf{G}	77
Bibliographie		83
Chapitre 5 Apodisation		85
5.1	Rappels sur l'apodisation et les facteurs de mérite	86

5.1.1	L'apodisation	86
5.1.2	Les facteurs de mérite.	89
5.2	Les fenêtres d'apodisation 2D	93
5.3	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante	101
5.3.1	Dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}	101
5.3.2	Dépendance radiale et angulaire du paramètre ρ_{max}	104
Bibliographie		109
Chapitre 6 Passage au repère terrestre et multi-fenêtrage		111
6.1	Champ de vue observé, champ de vue reconstruit	112
6.1.1	Champ de vue observé	112
6.1.2	Champ de vue reconstruit et repliement	116
6.1.3	Champ de vue reconstruit et passage au repère terrestre	120
6.2	Rééchantillonnage des champs reconstruits	124
6.2.1	Depuis une grille cartésienne	124
6.2.2	Depuis une grille hexagonale	125
6.2.3	Propriété de translation du rééchantillonnage de FOURIER.	125
6.3	Application du multi-fenêtrage à un instrument de type MIRAS	126
Bibliographie		133
Partie III Reconstruction d'image		135
Chapitre 7 Exposition du problème inverse et méthodes de reconstructions non régularisées.		137
7.1	Problème direct - Problème inverse	137
7.2	Méthodes de reconstruction non régularisées	139
7.2.1	La transformée de FOURIER inverse	139
7.2.2	La méthode CLEAN	142
7.2.3	L'algorithme de calibration par points chauds	143
Bibliographie		145
Chapitre 8 Méthodes de reconstruction régularisées		147
8.1	Régularisation mathématique	148
8.1.1	La solution de norme minimale	148

8.1.2	Régularisation mathématique par décomposition en valeurs singulières tronquée	149
8.2	Régularisation au sens de TIKHONOV	149
8.3	Régularisation physique dite méthode à bande passante limitée	150
8.4	Comparaison des méthodes de régularisation	151
8.4.1	Valeurs optimales pour les paramètres de régularisation	152
8.4.2	Point de vue informatique	156
8.5	Article : comparaison de méthodes d'inversion régularisées	158
Bibliographie		167
Chapitre 9 Modélisation et auto-caractérisation des paramètres instrumentaux		169
9.1	Simulations des instruments de type HUT2D et MIRAS.	169
9.1.1	Modélisation d'un instrument réaliste	170
9.1.2	Modélisation d'un instrument idéal	179
9.2	Auto-caractérisation des paramètres de modélisation de \mathbf{G}	180
Bibliographie		183
Chapitre 10 Erreur de reconstruction systématique		185
10.1	Erreur systématique en l'absence de repliement	186
10.1.1	Erreur systématique et qualité de l'instrument.	186
10.1.2	Erreur RMS, propriété de la scène et apodisation.	188
10.2	Erreur systématique et repliement	194
Bibliographie		201
Chapitre 11 Propagation des erreurs		203
11.1	Propagation des erreurs aléatoires sur les données	203
11.2	Propagation des erreurs de modélisation	207
Bibliographie		211
Chapitre 12 Impact du rayonnement solaire sur la télédétection de la salinité de surface		213
12.1	Température de brillance du soleil et de son reflet sur la période 2007-2010	214
12.2	Positions du soleil et du point spéculaire dans le champ de vue de SMOS	214
12.3	Impact du rayonnement solaire sur la qualité de la reconstruction d'image	217
12.4	Discussion et résultats	219

Bibliographie	223
Chapitre 13 Extension de la reconstruction au mode de polarisation totale	225
13.1 Relation de VAN CITTERT-ZERNIKE en mode de polarisation totale	225
13.2 Modélisation du diagramme de rayonnement des antennes	227
13.3 Simulations et résultats	229
Bibliographie	235
Conclusions & Perspectives	237
Annexes	241
Annexe A Article	243
A.1 Revue « Traitement du Signal », vol. 21, n° 1	244
Annexe B Actes de Congrès	259
B.1 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2002	260
B.2 Colloque GRETSI, Traitement Signal et Image 2003	263
B.3 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2003	268
B.4 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2004	274
Annexe C Le Nouveau Chapitre de Thèse	283
C.1 Présentation succincte	284
C.2 L'environnement scientifique	285
C.3 Un contexte concurrentiel	285
C.4 Positionnement personnel et compétences acquises	286
C.5 Evaluation du coût consolidé de la thèse	287
C.6 Impact de la thèse	288

Table des figures

Partie I Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d’Ouverture	5
1.1 Sources de contributions à la température d’antenne en bande L.	12
1.2 Exemple d’un diagramme de rayonnement d’une antenne.	14
1.3 Résolution spatiale d’un radiomètre à puissance totale.	15
1.4 Mélange de la fréquence RF et de la fréquence de l’oscillateur local.	18
1.5 Description des composants d’un radiomètre à puissance totale de type super-hétérodyne.	19
2.1 Vue d’artiste du satellite SMOS.	30
2.2 Schéma du dispositif instrumental du HUT-2D.	30
2.3 L’accord de La mineur vu comme la superposition de ses quatre fondamentales.	32
2.4 « Le bassin aux nymphéas », de CLAUDE MONNET (1899, <i>Musée d’Orsay</i>) et sa transformée de Fourier 2D.	36
2.5 Composantes basse et haute fréquence du « bassin aux nymphéas ».	36
2.6 Dispositif de l’expérience des trous d’Young.	38
2.7 Variation de l’intensité sur une figure d’interférence obtenue par une expérience de trous d’Young.	42
2.8 Variation de la visibilité en fonction de la distance entre les trous d’une expérience d’Young.	42
3.1 Description du référentiel lié à un couple d’antenne.	52
3.2 Light weight Cost-Effective Front-end, LICEF.	53
3.3 Schéma descriptif d’une ligne de base.	54
Partie II Traitements des données interférométriques	61
4.1 Configurations en Y et en U de deux réseaux interférométriques : maillage hexagonal et cartésien.	64
4.2 Cellule élémentaire du domaine de FOURIER pour un maillage cartésien.	68
4.3 Cellule élémentaire du domaine spatial pour un maillage cartésien.	68
4.4 Cellule élémentaire du domaine de FOURIER pour un maillage hexagonal.	71
4.5 Cellule élémentaire du domaine spatial pour un maillage hexagonal.	71
4.6 Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de FOURIER.	73
4.7 Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de spatial.	73
4.8 La matrice de modélisation \mathbf{G} pour un instrument réaliste de type MIRAS.	78

5.1	Oscillations de GIBBS.	87
5.2	Fuite radiométrique et dégradation de la résolution spatiale.	87
5.3	Deux exemples d'apodisation.	88
5.4	Facteurs de mérite « linéaires ».	90
5.5	Facteurs de mérite « quadratiques ».	90
5.6	Facteurs de mérite « logarithmiques ».	92
5.7	Distance de plus courte approche (SACR).	92
5.8	Fenêtre d'apodisation de BLACKMAN approchée.	94
5.9	Facteurs de mérite des fenêtres d'apodisation pour une configuration en Y.	97
5.10	Facteurs de mérite des fenêtres d'apodisation pour une configuration en U.	98
5.11	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}	102
5.12	Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim}	103
5.13	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire et radiale du paramètre ρ_{max}	104
5.14	Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la distance ρ_{lim}	105
5.15	Variation du SACR (1%) pour les fenêtres de KAISER et de MAAS en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la distance limite ρ_{lim}	106
6.1	Référentiels utilisés dans la caractérisation du champ de vue observé d'un RISO.	113
6.2	Modification de la forme de la terre dans le repère des cosinus directeurs avec l'inclinaison de l'instrument.	115
6.3	Composition du champ de vue du HUT2D pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférométrique.	118
6.4	Composition du champ de vue de MIRAS pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférométrique.	119
6.5	Déformation de la fonction de transfert instrumentale lors du passage du repère des antennes au repère terrestre.	122
6.6	Déformation d'une grille régulière dans le repère terrestre lors du passage dans le repère des antennes.	122
6.7	Renversement de l'image lors du passage du repère des antennes au repère terrestre.	123
6.8	Distances mesurées par rapport au point sub-satellite et variation de l'angle d'incidence de la mesure dans le champ de vue reconstruit, repère terrestre.	123
6.9	Propriété de translation de deux méthodes d'interpolation.	126
6.10	La fenêtre de KAISER pour deux valeurs du paramètre α	127
6.11	Paramétrisation linéaire du paramètre α de la famille de fenêtre KAISER.	128
6.12	Illustration de la déformation de la fenêtre de KAISER par la paramétrisation de α	128
6.13	Paramètres α_1 , α_2 et φ_1 optimisés pour une résolution isotrope D=55km dans le repère terrestre.	129
6.14	Projection de la carte de température reconstruite et apodisée par la fenêtre de KAISER dans le repère terrestre.	130
6.15	Application du multi-fenêtrage sur la scène reconstruite.	130
6.16	Hauteur des lobes secondaires et efficacité du lobe principal dans le repère terrestre pour une résolution isotrope D=55km.	131

Partie III Reconstruction d'image	135
7.1 Composantes de FOURIER et visibilitées mesurées pour une scène T_o à son plus haut niveau de résolution.	140
7.2 Composantes de FOURIER et visibilitées mesurées pour la version « basses fréquences » de T_o	140
7.3 Visibilitées mesurées pour une scène composée d'une distribution uniforme, de température égale à la température moyenne de T_o	141
7.4 Composantes de FOURIER et visibilitées mesurées pour la version « hautes fréquences » de T_o	141
8.1 La matrice résolvante \mathbf{A} pour un instrument réaliste de type MIRAS. Notons que des éléments de cette matrice ont une valeur de quelques unités (l'échelle de couleur a été choisie ici pour un meilleure contraste).	151
8.2 Variation de $\ V - \mathbf{G}T_r\ _F$ avec $\ T_r\ _E$ pour les méthodes régularisées.	152
8.3 Scène observée à son plus haut niveau de résolution et au niveau de résolution de l'instrument et apodisée par la fenêtre de HANNING.	153
8.4 Valeurs singulières de la matrice \mathbf{G}	153
8.5 Solution à bande passante limitée.	154
8.6 Cartes de température reconstruites à l'aide de la régularisation de TIKHONOV.	155
8.7 Cartes de température reconstruites à l'aide de la régularisation mathématique.	155
9.1 Erreur sur l'estimation de l'amplitude et de la phase d'une antenne.	182
10.1 Variation du biais et de l'erreur RMS de reconstruction avec la position de l'antenne perturbée.	188
10.2 Variation du biais et de l'erreur RMS de reconstruction avec la largeur du lobe de l'antenne perturbée.	188
10.3 Scènes synthétiques pour le calcul de l'erreur systématique (configuration en U).	191
10.4 Scènes synthétiques pour le calcul de l'erreur systématique (configuration en Y).	191
10.5 Scène observée à la résolution maximale et reconstruction de référence : distribution réaliste de températures de brillance en Europe de l'Ouest.	194
10.6 Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, pour un instrument idéal et un instrument réaliste, à partir d'une simulation des températures de brillance en Europe de l'Ouest.	194
10.7 Composantes en polarisation H et V d'une scène de température uniforme à 110 K : variation simplifiée de la température de brillance sur les océans avec l'angle d'incidence.	196
10.8 Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, pour un instrument réaliste, à partir d'une simulation de la température de brillance sur l'océan, en polarisation H et V.	196
10.9 Variation du biais et de l'erreur systématique de reconstruction avec une température uniforme sur Terre.	197
10.10 Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, pour un instrument réaliste, après traitement des visibilitées mesurées.	198
10.11 Erreur RMS et biais de reconstruction en obtenus après traitement des visibilitées mesurées en fonction de la température moyenne considérée.	199
12.1 Variation de la position du soleil et et du point spéculaire tels que vus par MIRAS durant le solstice d'hiver.	215
12.2 Fréquence d'occurrence des évènements de pollution par les alias du soleil durant l'année 2007.	216
12.3 Etendues des régions polluées par les alias du soleil durant une année.	216

12.4	Carte des erreurs de reconstruction établie à partir des mesures interférométriques contaminés par le soleil au solstice d'hiver.	218
13.1	Diagrammes des antennes co- et cross-polaires.	228
13.2	Matrice de modélisation \mathbf{G} pour un mode de polarisation totale.	229
13.3	Composantes polarimétriques de la scène observée à son plus haut niveau de résolution.	229
13.4	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites simultanément à l'aide de $\mathbf{G}_m^{+ full}$ pour un couplage de -25 dB.	230
13.5	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites simultanément à l'aide de $\mathbf{A}^{+ full}$ pour un couplage de -25 dB.	230
13.6	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites simultanément à l'aide de $\mathbf{A}^{+ full}$ pour un couplage de -10 dB.	232
13.7	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites successivement à l'aide de 4 opérateurs $\mathbf{A}^{+ bloc}$ et pour une matrice \mathbf{G} bloc-diagonale pour un couplage de -25 dB.	233

Liste des tableaux

Partie I Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d’Ouverture	5
2.1 Caractéristiques de la mission spatiale SMOS et de l’instrument HUT-2D.	29
Partie II Traitements des données interférométriques	61
4.1 Relations entre le nombre d’antennes, le nombre de visibilité mesurées et le nombre de fréquence dans la bande passante.	75
4.2 Caractéristiques informatiques de G	79
5.1 Fonctions d’apodisation traditionnelles définies dans l’intervalle $\bar{\rho} \in [-1, 1]$	96
5.2 Facteurs de mérite des fonctions d’apodisation pour une configuration en Y.	99
5.3 Facteurs de mérite des fonctions d’apodisation pour une configuration en U.	100
5.4 Paramètres optimaux $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ conduisant à une amélioration du SACR pour les fenêtres KAISER et MAAS.	106
6.1 Fauchée et gamme des angles d’incidences.	129
6.2 Statistiques sur la variable centrée ζ	131
Partie III Reconstruction d’image	135
8.1 Tailles des opérateurs et temps de calcul pour la régularisation mathématique et la méthode à bande passante limitée (instrument type MIRAS).	157
9.1 Paramètres des gains d’antennes pour un instrument simulé de type MIRAS.	172
9.2 Paramètres des diagrammes de rayonnement des antennes pour un instrument simulé de type HUT2D.	174
9.3 Statistiques sur les paramètres des gains d’antennes de MIRAS.	175
9.4 Statistiques sur la phase à -3dB des gains d’antennes de MIRAS.	175
9.5 Statistiques sur les paramètres des gains d’antennes du HUT2D.	175
9.6 Statistiques sur la phase à -3dB des gains d’antennes du HUT2D.	175
9.7 Spécifications ESA sur les gains d’antennes de MIRAS et du HUT2D.	175
9.8 Paramètres des filtres des récepteurs de MIRAS.	176
9.9 Paramètres des filtres des récepteurs du HUT2D.	178
9.10 Statistiques sur les paramètres des filtres des récepteurs de MIRAS.	179

9.11	Statistiques sur les paramètres des filtres des récepteurs du HUT2D.	179
9.12	Spécifications ESA sur les filtres des récepteurs de MIRAS et du HUT2D.	179
9.13	Valeur maximale du retard géométrique et valeur minimale de la fonction de décorrélation spatiale pour les deux types d'instruments.	179
9.14	Déviatoin standard moyenne de l'écart entre les paramètres estimés et les para- mètres réels pour l'ensemble des paramètres de modélisation des antennes.	181
9.15	Déviatoin standard moyenne de l'écart entre l'amplitude et la phase des dia- grammes estimés et des diagrammes réels.	182
10.1	Variation de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ avec la scène observée et la fenêtre d'apo- disation (HUT2D).	192
10.2	Variation de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ avec la scène observée et la fenêtre d'apo- disation (MIRAS).	193
10.3	Erreur systématique avant et après traitement des visibilitées mesurées.	197
11.1	Variation du facteur d'amplification ([K/K]) avec la fenêtre d'apodisation pour MIRAS et HUT2D : estimation analytique.	205
11.2	Variation du facteur d'amplification ([K/K]) avec la fenêtre d'apodisation pour MIRAS : estimation après simulation.	205
11.3	Impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction : erreurs de modélisation de l'ordre de l'erreur sur l'estimation des paramètres par auto- caractérisation.	207
11.4	Impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction : erreurs de modélisation de l'ordre de l'erreur de calibration des paramètres.	208
12.1	Erreurs de reconstruction [K] pour les différents scénarii.	220
13.1	Paramètres de modélisation des gains co- et cross-polaires.	228
13.2	Dimensions des opérateurs intervenant dans la reconstruction pour un instrument en Y comprenant 10 antennes.	228
13.3	Erreur RMS systématique en mode de polarisation totale : couplage à -25 dB. . .	231
13.4	Erreur RMS systématique en mode de polarisation totale : couplage à -10 dB. . .	231

Table des éclaircissements

I.1	ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE, LONGUEUR D'ONDE, DOMAINE MICRO-ONDE, BANDE L	8
I.2	CORPS NOIR ET TEMPÉRATURE DE BRILLANCE	8
I.3	TEMPÉRATURE DE BRILLANCE T_b [K]	9
I.4	RÉSOLUTION ANGULAIRE ($\delta\theta$ [RAD])/SPATIALE (δx [KM]) ET SENSIBILITÉ RA- DIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À PUISSANCE TOTALE	12
I.5	DIAGRAMME DE RAYONNEMENT $F_n(\theta, \phi)$	13
I.6	TEMPÉRATURE D'ANTENNE [K]	13
I.7	RÉSOLUTION SPATIALE (δx [KM]) POUR UN RADIOMÈTRE À SYNTHÈSE D'OU- VERTURE)	26
I.8	SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À RADIOMÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE)	27
I.9	ÉGALITÉ DE PARSEVAL	32
I.10	PROPRIÉTÉ DE CONVOLUTION DE LA \mathcal{TF}	33
I.11	PROPRIÉTÉ DE TRANSLATION DE LA \mathcal{TF}	33
I.12	\mathcal{TF} D'UN PEIGNE DE DIRAC	33
I.13	LE CRITÈRE DE SHANNON-NYQUIST	34
I.14	FRÉQUENCES SPATIALES ANGULAIRES, LIGNE DE BASE, COSINUS DIRECTEURS . .	51
II.1	ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE \mathbf{G}	78
II.2	FWHM - LARGEUR À MI-HAUTEUR	89
II.3	HSL - PLUS GRANDE AMPLITUDE DES LOBE SECONDAIRES	91
III.1	RANG, SVD ET CONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE	148
III.2	L'INSTRUMENT IDÉAL	180

Table des Biographies

1.1	PLANK, Max Karl Ernst Ludwig (23 Avril 1858, Kiel, Allemagne- 4 Octobre 1947, Göttingen, Allemagne)	22
2.1	FIZEAU, Armand Hippolyte Louis (23 Septembre 1819, Paris, France- 18 Septembre 1896, Venteuil, France)	43
2.2	MICHELSON, Albert Abraham (19 Décembre 1852, Strzelno, Pologne - 9 Mai 1931, Pasadena, Californie, Etats-Unis)	44
2.3	YOUNG, Thomas (13 Juin 1773, Milverton, Angleterre - 10 Mai 1829, Londres, Angleterre)	45
2.4	FOURIER, Jean Baptiste Joseph (21 Mars 1768, Auxerre, France - 16 Mai 1830, Paris, France)	46
3.1	ZERNIKE, Frits (16 Juillet 1888, Amsterdam, Pays-Bas - 1966, Naarden, Pays-Bas)	58
4.1	SHANNON, Claude Elwood (30 Avril 1916, Gaylord, Etats-Unis - 24 Février 2001, Medford, Etats-Unis)	80
4.2	NYQUIST, Harry (7 Février 1889, Nilsby, Suède - 4 Avril 1976)	81
5.1	GIBBS, Josiah Willard (11 Février 1839, New Haven, Etats-Unis - 28 Avril 1903, New Haven, Etats-Unis)	107
6.1	BESSEL, Friedrich Wilhelm (22 Juillet 1784, Minden, Westphalie - 17 Mars 1846, Königsberg, Prusse)	132
7.1	HADAMARD, Jacques Salomon (8 décembre 1865, Versailles, France - 17 Octobre 1963, Paris, France)	144
8.1	TIKHONOV, Andrei Nikolaevich (30 Octobre 1906, Gzhatska, Russie - 1993)	166
11.1	FROEBENIUS, Ferdinand Georg (26 Octobre 1849, Berlin, Prusse - 3 Août 1917, Berlin, Allemagne)	209

Introduction

La perspective d'un changement climatique au cours des prochains siècles fait son chemin auprès du grand public. La communauté scientifique se doit de disposer des meilleurs outils pour répondre de manière précise aux questions de plus en plus nombreuses que ne manqueront pas de se poser à la fois les simples citoyens, et, relayant leurs voix, la classe politique qui aura à prendre des décisions lourdes de conséquences sur l'avenir de la planète et le quotidien des citoyens. Les climatologues et les prévisionnistes devront alors être capables de donner des estimations précises de ce que sera le climat de demain.

Or, deux paramètres géophysiques font actuellement défaut, freinant ainsi la progression dans ces domaines : l'humidité des sols et la salinité des océans. Le premier contrôle la croissance des plantes et les échanges d'énergie entre les continents et l'atmosphère. Il est nécessaire à une meilleure précision du temps à court et moyen terme. Le second est un bon indicateur de la circulation océanique. Ainsi, les courants, tels que le *Gulf-stream*, jouent un rôle important dans la régulation du climat sur le long terme. Il manque une mesure systématique de ces paramètres géophysiques que pourrait combler une mission spécialement dédiée à leur observation. Seule une mission spatiale peut fournir des données sur une couverture globale et à un rythme satisfaisant.

Cependant, les technologies classiques de télédétection ne répondent pas aux fortes contraintes de résolution spatiale imposées pour la mesure de l'humidité et de la salinité. La radiométrie à synthèse d'ouverture est une technologie prometteuse initialement développée pour la radio-astronomie. Cet instrument passif ne mesure pas directement la température de brillance émise par la surface terrestre mais ce qui se rapproche de la transformée de FOURIER de cette température. La capacité d'imagerie de tels instruments et la possibilité d'obtenir des mesures pour différents angles d'incidences et polarisations en font des instruments bien adaptés à la mesure de l'humidité et de la salinité.

Ainsi la mission spatiale SMOS, *Soil Moisture and Ocean Salinity mission*, portée par l'Agence Spatiale Européenne (ASE) et dont le lancement est prévu en janvier 2007, aura pour but, durant les cinq années de son activité, de fournir les premières cartes globales d'humidité des sols et de salinité de surface des océans. L'interféromètre MIRAS, dont les bras initialement repliés se déploieront en orbite pour former un Y, synthétisera une antenne classique d'un diamètre d'environ 4 m pour un encombrement compatible avec une mission spatiale légère. D'autre part, l'Université Technologique d'Helsinki développe actuellement, sous l'égide de l'ASE, le HUT2D, un radiomètre imageur de dimensions réduites et dans une configuration en U, destiné à fournir à moyen terme des données sur l'observation de la Terre à travers des campagnes de mesure aéroportées et ainsi valider les concepts élaborés pour l'exploitation de la mission SMOS.

La première partie de cette thèse est consacrée au principe instrumental de la radiométrie à synthèse d'ouverture. Après avoir montré comment la radiométrie à synthèse d'ouverture s'est imposée comme une réponse appropriée au problème posé, il m'a paru nécessaire d'introduire les fondements mathématiques et physiques sous-jacents à cette technique novatrice pour l'observation de la Terre, afin que la communauté chargée de l'estimation des paramètres géophysiques et de leur utilisation puisse se faire une idée plus précise des concepts à la base de la mesure interférométrique.

Une rapide introduction des propriétés de la transformée de FOURIER à deux dimensions et de l'expérience des trous d'YOUNG, fondatrice de l'interférométrie, permettront ainsi une meilleure compréhension des phénomènes complexes intervenant au cours de la reconstruction d'image. Finalement, le théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE, établissant la relation entre les mesures interférométriques et la carte de températures de brillance que l'on cherche à estimer, est détaillé point par point.

La seconde partie débute par la définition du cadre théorique de la reconstruction d'image, cadre tant géométrique, à travers la définition des grilles d'échantillonnage, qu'algébrique, à travers la définition des espaces et des opérateurs clés. Sur le modèle des grilles hexagonales intervenant dans le traitement des données mesurées par un instrument dans une configuration en Y, de type MIRAS, j'ai défini les propriétés des grilles cartésiennes associées à un instrument dans une configuration en U, de type HUT2D. L'ensemble des outils que j'ai été amené à développer au cours de cette thèse autour de cette configuration permettront, à moyen terme, le traitement des premières données réelles mesurées par un radiomètre à synthèse d'ouverture dédié à l'observation de la Terre.

L'apodisation est une étape importante dès lors que l'on est amené à travailler sur une bande spectrale limitée. La coupure brusque en fréquence dégrade la sensibilité radiométrique. Après avoir établi les caractéristiques des fenêtres d'apodisation pour une configuration en U et rappelé les résultats obtenus pour une configuration en Y, j'expose les résultats de mes travaux sur le développement de fenêtres d'apodisation particulièrement adaptées aux deux configurations et donc à la forme spécifique de leur bande passante respective.

Le passage du repère des antennes au repère terrestre entraîne une déformation de la grille d'échantillonnage et modifie la résolution spatiale, qui varie alors dans le champ reconstruit. Or, le traitement des paramètres géophysiques impose de travailler sur des grilles régulières dans le repère terrestre et à résolution constante. Après avoir défini les propriétés de ce changement de repère et la technique de rééchantillonnage performante qu'autorise la manipulation d'images à bande passante limitée, j'expose les résultats d'un travail que nous avons effectué sur le multi-fenêtrage. Alors que l'apodisation classique consiste à appliquer la même fenêtre à l'ensemble des pixels de l'image reconstruite, le multi-fenêtrage ou « *strip adaptive processing* » consiste à appliquer une fenêtre particulière à chacun de ces pixels afin d'obtenir une résolution constante dans le champ reconstruit, une fois celui-ci projeté dans le repère terrestre.

Enfin, la troisième partie est entièrement consacrée à la reconstruction d'image pour les radiomètres à synthèse d'ouverture. Mon activité principale au cours de cette thèse s'est axée sur les méthodes de reconstruction régularisées. Outre la méthode dite à bande passante limitée, développée par E. Anterrieu, j'ai participé au développement et à la caractérisation d'une méthode basée sur une décomposition en valeurs singulières de la matrice de modélisation de l'instrument et d'une autre basée sur une régularisation au sens de TIKHONOV. Ces méthodes, standards dans le cadre général de la reconstruction d'image, sont pour la première fois utilisées dans le traitement de données que fourniront des radiomètres à synthèse d'ouverture observant la Terre. Leur comparaison a permis de mieux discerner les caractéristiques et les spécificités de chacune de ces méthodes de reconstruction régularisées.

Afin de quantifier au mieux certaines sources d'erreur de reconstruction pour ces méthodes, j'ai dans un premier temps procédé à la simulation de paramètres de modélisation réalistes pour

un instrument de type MIRAS et un instrument de type HUT2D, compte tenu des spécificités imposées par l'ASE. Les méthodes de reconstruction régularisées étant basées sur l'utilisation de la matrice de modélisation instrumentale, je présente aussi les résultats d'un travail sur l'auto-caractérisation des paramètres de modélisation d'un instrument réaliste de type MIRAS, montrant ainsi qu'il est possible d'estimer en vol la valeur de ces paramètres.

L'étude suivante traite d'une erreur de reconstruction systématique due à l'incapacité des radiomètres à synthèse d'ouverture à prendre en compte les hautes fréquences contenues dans la scène observée. J'ai étudié les variations de cette erreur avec la qualité de l'instrument, la nature de la scène observée, le type de fenêtre d'apodisation utilisée et la méthode de reconstruction employée. J'ai ensuite proposé une solution à l'augmentation significative de l'erreur systématique en présence de repliement, lors de l'observation de la Terre par un instrument en orbite.

Une collaboration avec S. Gratton, chercheur au Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS, Toulouse), mon laboratoire d'accueil pour cette thèse, a permis d'établir une relation analytique entre un bruit radiométrique gaussien venant perturber les données instrumentales et l'erreur de reconstruction qui en découle pour tout opérateur de reconstruction. J'ai ainsi pu vérifier que le facteur d'amplification du bruit sur les mesures ainsi calculé était un très bon estimateur du facteur d'amplification obtenu après simulation. Suite au travail sur l'auto-caractérisation des paramètres, la propagation des erreurs de modélisation est aussi étudiée pour un instrument et une distribution de température de brillance réalistes, dans le cadre d'une reconstruction à l'aide d'une méthode régularisée.

Une autre collaboration avec N. Reul, chercheur à l'IFREMER, a débouché sur une étude de l'impact du rayonnement solaire sur la télédétection de la surface terrestre. La simulation de la position du soleil dans le champ de vue de MIRAS et des températures de brillance de son reflet sur la surface des océans compte tenu des propriétés de surface a conduit à une série de simulations et reconstructions portant sur l'impact de la présence du soleil et de son reflet sur la qualité de la reconstruction. Une solution est proposée afin d'éliminer la contribution de ces deux sources de pollutions des données instrumentales.

Enfin, un dernier chapitre est consacré à l'extension de la reconstruction au mode de fonctionnement de l'instrument en polarisation totale. Cette étude préliminaire menée pour un instrument de type MIRAS mais de dimensions réduites par rapport à l'instrument réel a permis de confirmer la faisabilité d'une telle approche et le bon comportement des méthodes de reconstruction régularisées.

Première partie

Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d'Ouverture

Les récents évènements météorologiques intenses, comme la tempête de 1999 ou encore la canicule de l'été 2003, ont rendu tangible auprès du public la problématique du changement climatique. Or, l'absence de mesures globales de l'humidité des sols et de la salinité des océans limite la capacité de la communauté scientifique à prévoir, de façon précise, à la fois le temps de demain et le climat du siècle qui débute.

Il existe donc un besoin d'une mesure systématique de ces deux paramètres physiques. Or, les contraintes sur la résolution spatiale et sur la sensibilité radiométrique sont telles que l'utilisation d'un instrument de conception « classique » (un radiomètre de puissance totale à balayage par exemple) n'est pas vraiment envisageable dans le cadre d'une mission spatiale, compte tenues des exigences de la communauté demandeuse d'humidité des sols et de salinité des océans.

Dans cette partie, nous dégagerons dans un premier temps les principales caractéristiques d'un satellite dédié à l'observation de l'humidité et de la salinité afin de comprendre en quoi la technique de synthèse d'ouverture appliquée à l'observation de la Terre est une technique innovante et prometteuse. Ensuite, nous introduirons le théorème à la base de l'imagerie par interférométrie, celui de VAN CITTERT-ZERNIKE, en nous basant sur une expérience fondatrice, celle des trous d'YOUNG. Finalement, un cas simplifié à deux antennes nous permettra de compléter ces premiers résultats pour aboutir à la formulation utilisée dans les parties suivantes.

Chapitre 1

Téledétection de l'humidité des sols et de la salinité de surface des océans

Sommaire

1.1	Contraintes instrumentales sur la mesure de l'humidité et de la salinité	7
1.1.1	Avec un radar ou un radiomètre ? A quelle longueur d'onde?	7
1.1.2	Téledétection de l'humidité des sols	10
1.1.3	Téledétection de la salinité des océans	10
1.2	Radiomètre à puissance totale	11
1.2.1	L'antenne	13
1.2.2	Le récepteur	16
1.2.3	Grandeurs caractéristiques	20

Il y a des milliers de millions d'années, une race d'hyper-intelligences pan-dimensionnelles en eut tellement marre de ces querelles perpétuelles sur la signification de la vie qu'elles décidèrent de s'asseoir un moment pour résoudre leurs problèmes une bonne fois pour toute...

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

1.1 Contraintes instrumentales sur la mesure de l'humidité et de la salinité

1.1.1 Avec un radar ou un radiomètre ? A quelle longueur d'onde ?

Dans le domaine des hyperfréquences, les instruments de téledétection peuvent être classés dans deux grandes familles : celle des radars, instruments actifs, et celle des radiomètres, instruments passifs. Ces instruments ont en commun qu'ils mesurent le rayonnement électromagnétique, pour une longueur d'onde donnée, provenant de cibles éloignées. Le but est de déduire les caractéristiques physiques des cibles observées, ici l'humidité ou la salinité de surface, en choisissant au mieux le type d'instrument et la longueur d'onde utilisée.

Eclaircissement I.1: ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE, LONGUEUR D'ONDE, DOMAINE MICRO-ONDE, BANDE L

La lumière visible est une onde électromagnétique dont la longueur d'onde est située dans la bande « visible ». Chaque couleur que nous percevons indique une longueur d'onde différente : les deux valeurs extrêmes que nous pouvons distinguer sont $0.4 \mu\text{m}$ (violet) et $0.7 \mu\text{m}$ (rouge). Le domaine des hyperfréquences, dit encore des micro-ondes, s'étend dans des longueurs d'onde beaucoup plus grandes. Ce domaine est lui même divisé en bande, la bande L s'étendant entre 20 cm et 80 cm, soit, en fréquence, entre 0.390 GHz et 1.550 GHz.

Les radars sont des instruments actifs. Une onde électromagnétique est envoyée par une antenne sur une cible qui, suivant ses propriétés physiques, va plus ou moins absorber ce rayonnement. Cette même antenne (ou une antenne différente) est alors utilisée pour mesurer la puissance du signal renvoyé et l'on en déduit ainsi les caractéristiques de la cible. Lorsque la cible est une surface naturelle, la puissance rétro-diffusée est toutefois très sensible à la topographie de la surface observée (rugosité du sol, de la végétation ou de la mer) qui doit donc être prise en compte pour interpréter les mesures.

La seconde famille est celle des instruments passifs. Aucune onde n'est envoyée, l'antenne d'un radiomètre ne fonctionnant qu'en réception. Seule l'émission naturelle du rayonnement par la surface est mesurée : cette émission naturelle est caractérisée par une quantité appelée température de brillance (T_b).

Eclaircissement I.2: CORPS NOIR ET TEMPÉRATURE DE BRILLANCE

Un corps noir est un corps idéal absorbant toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit : s'il n'est pas chauffé, il n'émet aucun rayonnement, il est donc noir. Lorsqu'il est chauffé, il rayonne pour contrebalancer l'énergie qu'il reçoit et, tout comme la braise d'un feu de cheminée, la longueur d'onde de ce rayonnement (sa « couleur ») change en fonction de la température.

Dans un cas idéal, MAX PLANCK a montré, en 1900, que l'énergie rayonnée par un corps noir à une longueur d'onde donnée ne dépend que de sa température.

L'énergie rayonnée par une surface quelconque, elle, ne dépend pas que de sa température. La température de brillance de cette surface est la température qu'aurait un corps noir rayonnant la même énergie.

Comme il le sera précisé dans les paragraphes suivants, la précision contraignante sur la mesure de l'humidité et de la salinité, ainsi que les effets importants de la topographie des surfaces observées, font que les radiomètres sont dans ce cas préférés aux radars. D'autre part, l'utilisation de la longueur d'onde $\lambda_0 = 21 \text{ cm}$ (fréquence centrale $f_0 = 1.41 \text{ GHz}$), au sein de la bande L, offre plusieurs avantages :

- cette partie de la bande L est dite protégée c.-à-d. qu'il est (normalement) interdit d'émettre (relais et téléphones portables, radars d'aéroport...) autour de cette fréquence.
- l'atténuation du signal par la vapeur d'eau et l'eau liquide, contenue notamment dans les nuages, est quasi-nulle

- la température de brillance dépend fortement de la présence d'eau à la surface du sol (3 à 5 cm de profondeur contre seulement 1 cm à plus haute fréquence)
- la sensibilité radiométrique à la salinité de surface est optimale.

Eclaircissement I.3: TEMPÉRATURE DE BRILLANCE T_b [K]

En 1900, MAX PLANCK établit grâce à une loi empirique la variation de la luminance \mathcal{L} d'un corps noir en fonction de sa température T et de la longueur d'onde λ du rayonnement émis [1] :

$$\mathcal{L}(\lambda, T) = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (1.1)$$

où la luminance \mathcal{L} est une puissance par unité surface, par stéradian et par longueur d'onde ($[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}]$), c est la vitesse de la lumière ($[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$), k la constante de BOLTZMANN et h la constante de PLANCK ($[\text{J}\cdot\text{s}]$).

Dans le domaine micro-onde, le rapport $(hc)/(\lambda kT)$ est de l'ordre de 2×10^{-4} pour $\lambda = 21$ cm et $T = 300$ K, l'approximation de Rayleigh-Jeans est alors possible :

$$\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT} \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4} \quad (1.3)$$

Alors que le rayonnement du corps noir est isotrope (identique dans toutes les directions), celui d'un corps réel peut dépendre de la direction d'observation (θ, ϕ) (coordonnées sphériques traditionnelles). L'émissivité e est introduite pour faire le lien entre la luminance d'un corps réel et celle du corps noir :

$$e(\lambda, T, \theta, \phi) = \frac{\mathcal{L}_{\text{corps réel}}(\lambda, T, \theta, \phi)}{\mathcal{L}_{\text{corps noir}}(\lambda, T)} \quad (1.4)$$

La température de brillance $T_b(\theta, \phi)$ d'une surface quelconque est la température T que devrait avoir un corps noir pour que sa luminance soit semblable à celle de ce corps réel.

La température de brillance est donc telle que :

$$\mathcal{L}_{\text{corps réel}} = \frac{2ckT_b(\theta, \phi)}{\lambda^4} \quad (1.5)$$

Donc, d'après (1.3) :

$$e(\lambda, T, \theta, \phi) \frac{2ckT}{\lambda^4} = \frac{2ckT_b(\theta, \phi)}{\lambda^4} \quad (1.6)$$

Soit la relation entre la température de brillance et la température physique, pour une longueur d'onde fixée :

$$T_b(\theta, \phi) = e(\theta, \phi)T \quad (1.7)$$

avec $0 \leq e \leq 1$.

1.1.2 Télédétection de l'humidité des sols

La température de brillance (T_b) d'une surface continentale dépend principalement de l'humidité de surface du sol w_s [m^3/m^3], de l'épaisseur optique de la couverture végétale τ [Nepers] et de sa température de surface T_s [K] [2] [3]. D'autres effets comme la topographie, la rugosité du terrain, le type de sol ou encore la nature de la couverture végétale sont aussi à prendre en compte. Cependant, étant donné qu'ils sont constants dans le temps, des données externes (modèles numériques de terrain, données satellites...) peuvent être utilisées pour corriger ces contributions.

En bande L, le modèle de transfert radiatif du premier ordre dit modèle « $\tau - \omega$ », où ω est l'albédo de la végétation) relie indirectement les trois paramètres physiques (w_s , τ et T_s) à T_b . La couverture végétale est le principal obstacle entre l'instrument et le sol. **Il est impératif de disposer de mesures indépendantes de T_b pour des configurations variées, en terme d'angles d'incidence, de polarisation ou de fréquence pour pouvoir éliminer la contribution de la canopée**, la capacité de mesure multi-angulaire étant sans doute la plus efficace [4]. A cette condition, l'humidité de surface des sols reste mesurable pour une densité surfacique de la biomasse inférieure à 5 kg m^{-2} , ce qui représente 65% des terres émergées [5]. Une fois l'humidité de surface connue avec une précision suffisante, il est possible de retrouver l'humidité du sol dans la zone vadose, la zone dans laquelle la végétation va puiser une partie de son eau [6].

En conclusion, pour que la mesure de l'humidité de surface soit exploitable, elle devra être effectuée au moins tous les trois jours par un radiomètre fonctionnant en bande L (1.4 GHz), ayant une sensibilité radiométrique d'au moins 1 K, et fournissant des mesures indépendantes à différents angles d'incidence, dans une gamme suffisamment large et bien couverte. L'humidité variant globalement entre $0 \text{ m}^3/\text{m}^3$ et $0.5 \text{ m}^3/\text{m}^3$, la précision recherchée pour la mesure est $0.04 \text{ m}^3/\text{m}^3$.

1.1.3 Télédétection de la salinité des océans

La salinité est définie comme le rapport entre la masse de sel et la masse d'eau de mer, en gramme de sel par kilogramme d'eau de mer : $1\text{g/kg} = 1\text{psu}$, *practical salinity unit*. Or, la situation est différente du cas de la mesure de l'humidité. En effet, la salinité de l'eau de mer fait peu varier la température de brillance des océans¹. Même si, là encore, la bande L semble la plus indiquée, le signal reste faible. Cette donnée, combinée avec une contrainte forte sur la précision de la mesure (0.1 psu), conduit à faire de la modélisation du problème direct une étape majeure dans le processus d'estimation de la salinité de surface des océans (*SSS* pour *Sea surface Salinity*) à partir des températures de brillance.

La température de brillance des océans va varier en fonction de 3 facteurs principaux : la salinité, bien sûr, mais aussi la température de surface (*SST* pour *Sea Surface Temperature*) et enfin la rugosité de la mer, principalement liée à la vitesse du vent. Ainsi, $T_{\text{océan}}$ peut être vu comme la somme de deux contributions :

$$T_{\text{océan}} = T_{\text{plat}} + T_{\text{vent}} \quad (1.8)$$

¹voir la thèse d'Emmanuel Dinat [7] pour une étude plus complète « De la détermination de la salinité de surface des océans à partir de mesures radiométriques hyperfréquences en bande L » (Paris VI, 2003)

La contribution principale $T_{b_{\text{plat}}}$ est celle d'une mer sans vague, une mer idéale plate. La contribution secondaire $T_{b_{\text{vent}}}$ est celle de la rugosité de la mer : la formation des vagues, de l'écume et de la houle induite par le vent va apporter une correction non négligeable aux valeurs obtenues par le modèle précédent.

Même si le radiomètre possède une sensibilité de l'ordre du Kelvin, ce qui, on le verra dans la section suivante, représente une forte contrainte instrumentale, l'erreur sur l'estimation de la *SSS* est alors de 2 psu. Or, la précision doit être de l'ordre de 0.1 psu pour que la salinité soit utilisable scientifiquement.

Afin d'atteindre ce seuil, des mesures élémentaires indépendantes devront être moyennées. Il est donc important de pouvoir obtenir le maximum de mesures indépendantes pour un même pixel au cours d'un seul passage de l'instrument.

Ces mesures pourront aussi être moyennées spatialement, sur des zones de 200 km \times 200 km, et temporellement, sur 10 jours. Contrairement à ce qui se passe pour l'humidité, ce n'est donc pas tant la résolution spatiale que la stabilité et l'étalonnage de l'instrument qui devront être le trait dominant du radiomètre, sans pour autant négliger la sensibilité radiométrique.

De même que pour l'humidité, des données de *SST* et de vent (vitesse et direction) issues de mesures satellites ou de sorties de modèles météorologiques doivent être intégrées avec une précision suffisante afin de pouvoir inverser la relation établie entre la température de brillance et la salinité.

En conclusion, pour que la mesure de la salinité soit exploitable, elle devra être effectuée par un radiomètre fonctionnant en bande L (1.4 GHz), permettant l'acquisition de plusieurs mesures indépendantes au cours d'un passage, avec une faible dérive instrumentale sur 10 jours et une sensibilité radiométrique de l'ordre de 1 K.

1.2 Radiomètre à puissance totale

Depuis le début de l'histoire de la radiométrie micro-onde, l'observation de la surface de la terre bénéficie des avancées technologiques dans l'observation de la voûte céleste. Ainsi, les premiers instruments ont été développés dans les années 30 et 40 par la communauté des astrophysiciens, les premières expériences de télédétection de la surface terrestre n'ayant lieu qu'à la fin des années 50 [1]. Depuis la fin des années 60, de nombreux satellites ont embarqué des radiomètres fonctionnant à diverses fréquences au sein du domaine micro-onde, fournissant ainsi des informations sur l'état de l'atmosphère (contenu en vapeur d'eau, en eau liquide, profils de températures, précipitation) et de la surface (*SST*, classification de la glace, de la couverture neigeuse, vitesse et direction du vent au dessus des océans...).

Le schéma 1.5 décrit les éléments principaux composant un radiomètre à puissance totale, qui est un dispositif à antenne réelle, par opposition aux interféromètres imageurs qui, on le verra par la suite, « synthétisent » une antenne. Tous les composants situés après l'antenne forment le récepteur. A eux deux, l'antenne et le récepteur vont définir deux caractéristiques importantes dans la télédétection par un radiomètre : la résolution spatiale et la sensibilité radiométrique. Les descriptions et les notions abordées par la suite seront utilisées dans les parties suivantes de ce document.

Eclaircissement I.4: RÉSOLUTION ANGULAIRE ($\delta\theta$ [RAD])/SPATIALE (δx [KM]) ET SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À PUISSANCE TOTALE

- la **résolution angulaire/spatiale**, indique la taille du plus petit détail que l'instrument peut distinguer dans la scène observée. La température de brillance mesurée à un instant donné est donc la température moyenne dans une zone dont la taille est définie par $\delta\theta$ ou δx . La résolution spatiale dépend fortement du diamètre D de l'antenne, de la longueur d'onde λ , ainsi que de l'altitude H de l'instrument :

$$\delta x = H \frac{\lambda}{D} \quad (1.9)$$

- la **sensibilité radiométrique** indique le plus petit écart de température que peut discerner l'instrument. Ainsi, la même température sera mesurée pour une scène de température T ou $T \pm \Delta T$. La sensibilité radiométrique dépend fortement des caractéristiques du récepteur, sa température de bruit T_{rec} , sa bande passante B , le temps d'intégration τ et bien sûr, de la température d'antenne T_A :

$$\Delta T = \frac{T_A + T_{\text{rec}}}{\sqrt{B\tau}} \quad (1.10)$$

où la température d'antenne est proportionnelle à la température de brillance arrivant sur l'antenne pondérée par le gain (voir paragraphe 1.2.1).

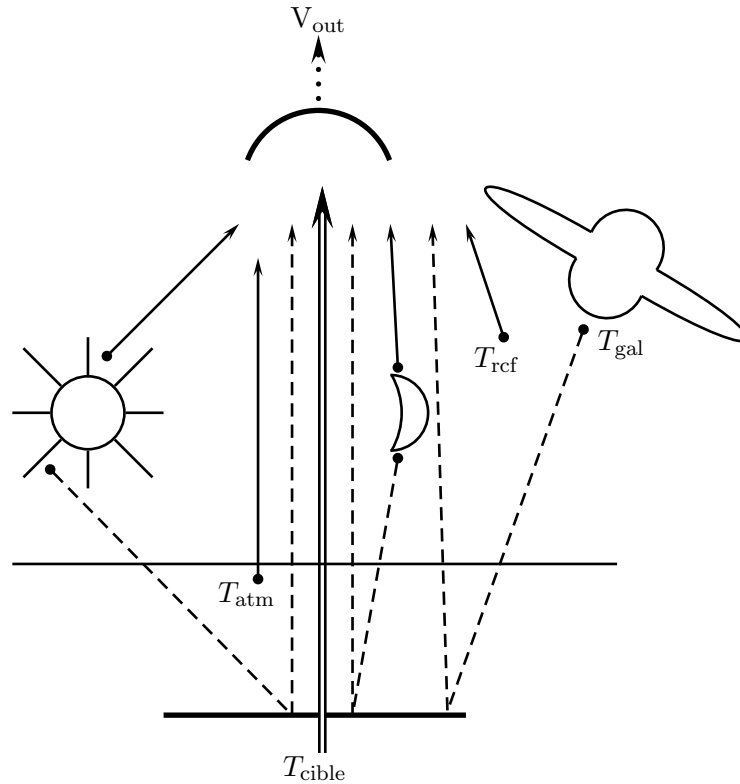


FIG. 1.1 – Sources de contributions à la température d'antenne en bande L : l'antenne observe non seulement la température de la cible mais aussi le rayonnement, direct ou réfléchi par la surface, issu du soleil, de la lune, de l'atmosphère (T_{atm}), de la galaxie (T_{gal}), ou du rayonnement fossile (T_{rcf}).

1.2.1 L'antenne

L'antenne est l'élément qui fait le lien entre une onde électromagnétique se propageant librement (liée à la température de brillance mesurée) et un courant électrique oscillant se propageant au sein d'une ligne de transmission.

Avant tout, il faut bien comprendre que la température T_A , appelée température d'antenne et qui caractérise le champ électromagnétique arrivant sur l'antenne, n'est pas strictement égale à la température T_{cible} de la scène observée. D'autres sources, directes ou indirectes (voir Fig. 1.1), **absolument non négligeables**, vont venir s'ajouter à celle-ci : citons le soleil, la lune, la galaxie, le rayonnement cosmique fossile et enfin l'atmosphère. Chacune de ses sources peuvent émettre dans la bande L mais aussi se refléter sur la surface observée [8].

De plus, le signal reçu est plus ou moins atténué suivant sa direction d'incidence : on dit que l'antenne n'est pas isotrope.

Eclaircissement I.5: DIAGRAMME DE RAYONNEMENT $F_n(\theta, \phi)$

Le diagramme de rayonnement (ou diagramme d'antenne) la capacité d'une antenne à concentrer les ondes radio dans une direction (θ, ϕ) donnée, où θ est l'angle d'incidence et ϕ , l'azimut.

La température d'antenne est alors définie comme suit :

Eclaircissement I.6: TEMPÉRATURE D'ANTENNE [K]

La température d'antenne est la distribution de température de brillance T_{AP} arrivant sur l'antenne (contribution de scène observée et contributions secondaires) pondérée par le gain d'antenne et normalisée par la somme du gain dans tout l'espace observé :

$$T_A = \frac{\iint_{4\pi} T_{AP}(\theta, \phi) F_n(\theta, \phi) d\Omega}{\iint_{4\pi} F_n(\theta, \phi) d\Omega} \quad (1.11)$$

L'efficacité η d'une antenne est reliée la proportion du signal capté par le lobe principal. Pour une antenne (hypothétique) isotrope :

$$F_n(\theta, \phi) = 1 \quad \forall(\theta, \phi) \quad (1.12)$$

$$\eta = 1 \quad (1.13)$$

Pour une antenne réelle, l'efficacité est inférieure à 1. La puissance véritablement transmise par une antenne de température physique T_p est alors :

$$P'_A = kT'_A B \quad (1.14)$$

$$\text{avec } T'_A = \eta T_A + (1 - \eta) T_p \quad (1.15)$$

RÉSOLUTION ANGULAIRE/SPATIALE

Comme on peut le voir sur la figure 1.5, une propriété importante d'une antenne est de posséder un lobe principale, une région de l'espace dans laquelle la majeure partie du signal est reçue. La largeur à mi-hauteur (ou à -3dB) du lobe principal, notée $\beta_{1/2}$, est sa largeur mesurée lorsque son intensité vaut la moitié de son intensité maximale : plus $\beta_{1/2}$ est petit, plus l'antenne est dite directive c.-à-d. plus elle sera capable de discerner de petits détails. $\beta_{1/2}$ est directement lié aux dimensions de l'antenne (son diamètre D pour une antenne circulaire) et à la longueur d'onde d'observation. La résolution angulaire d'un radiomètre est donc :

$$\delta\theta = \beta_{1/2} \approx \frac{\lambda}{D} \text{ [radians]} \quad (1.16)$$

Dans le cas plus réaliste d'un rayonnement non-uniforme, un coefficient c_f (généralement supérieur à 1) vient pondérer cette relation :

$$\delta\theta = c_f \frac{\lambda}{D} \quad (1.17)$$

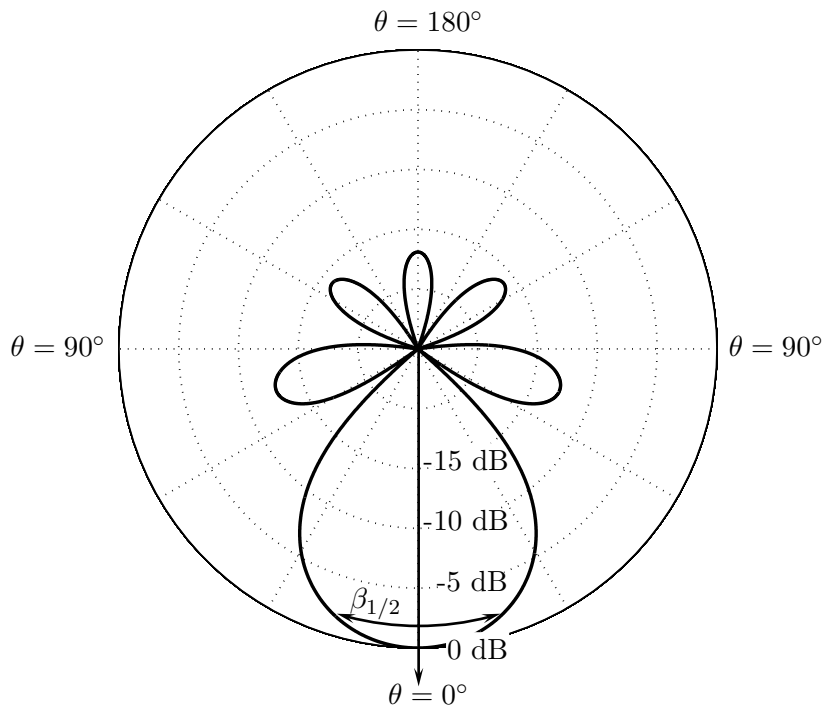


FIG. 1.2 – Exemple d'un diagramme de rayonnement d'une antenne : les cercles concentriques indiquent l'amplitude en décibels. La largeur à mi-hauteur, notée $\beta_{1/2}$, est indiquée ici à -3 dB. θ varie le long de chacun de ces cercles, de 0° (visée au nadir) à 180° . Une part importante de la puissance délivrée par l'antenne est issue du lobe principal mais la contribution des lobes secondaires (à 80° et 280°) et des lobes arrière ($\theta > 90^\circ$) peut être non négligeable et diminuer le rapport signal sur bruit.

Une bonne approximation de la résolution spatiale (δx) d'un radiomètre situé à une altitude H à la verticale de la scène observée (nadir pour l'instrument, zénith pour la scène) consiste à calculer l'étalement du lobe principal à l'intersection de la surface (la terre est supposée plate, voir Fig. 1.3) :

$$\delta x \approx 2H \tan\left(\frac{\beta_{1/2}}{2}\right) \quad (1.18)$$

$$\delta x \approx 2H \tan\left(c_f \frac{\lambda}{2D}\right) \quad (1.19)$$

En bande L, la longueur d'onde est de l'ordre de la dizaine de centimètres alors que les paraboles ont des diamètres de l'ordre du mètre. Par conséquent, une bonne approximation de la relation (3.6) est :

$$\delta x = Hc_f \frac{\lambda}{D} \quad (1.20)$$

A diamètre et altitude fixés, la résolution spatiale est améliorée si la longueur d'onde est diminuée : on retrouve là un principe général de la mesure à distance qui dit que la taille du plus petit détail visible par un instrument est proportionnelle à la longueur d'onde d'observation. A longueur d'onde et altitude fixées, la résolution spatiale est améliorée si le diamètre de l'antenne est augmenté et donc si la largeur du lobe principal diminue : si l'on était amené à décrire un objet les yeux fermés, à distance, à l'aide d'une baguette, notre analyse serait d'autant plus précise que le diamètre de la baguette serait réduit. Il en va de même pour la largeur à mi-hauteur du lobe principal de l'antenne, qui représente la taille de la « baguette » du radiomètre.

Pour finir, si l'antenne est inclinée d'un angle θ_i (voir Fig. 1.3), et en considérant une cible située à $\theta_i + \delta\theta_i$, la relation (1.20) devient :

$$\delta x(\theta_i, \delta\theta_i) = Hc_f \frac{\lambda}{D} \times \frac{1}{\cos^2 \theta_i} \times \frac{1}{\cos \delta\theta_i} \quad (1.21)$$

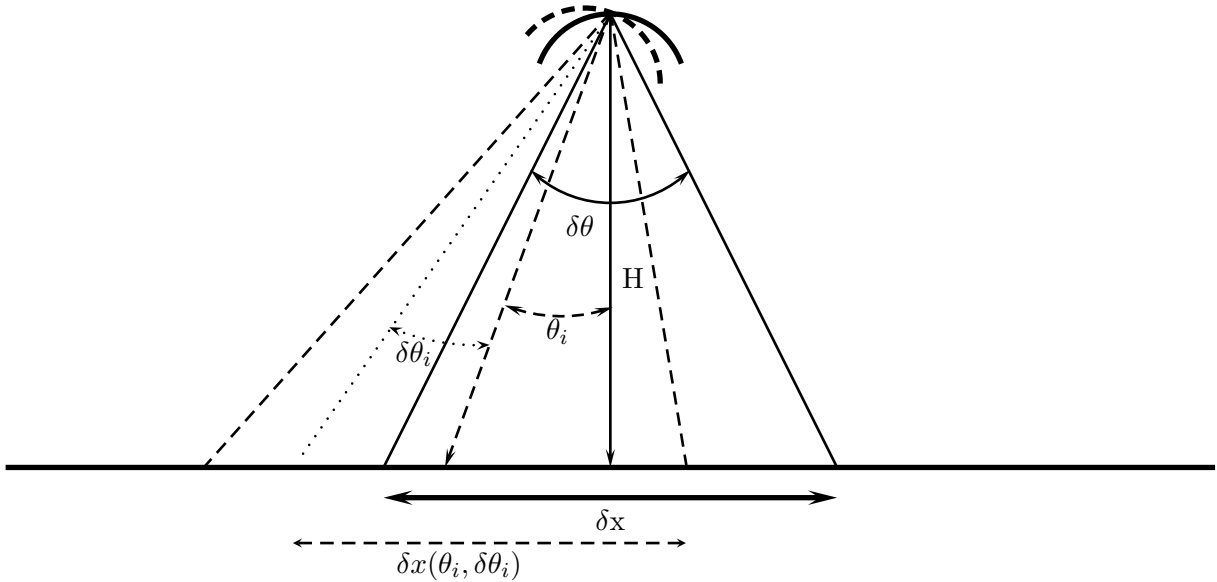


FIG. 1.3 – Résolution spatiale δx d'un radiomètre à puissance totale situé à une altitude H : elle est évaluée d'après l'intersection du lobe principal de largeur à mi-hauteur $\beta_{1/2}$ avec la surface de la Terre supposée plate. En tirets, la configuration pour une antenne inclinée d'un angle θ_i visant une cible en $\theta + \delta\theta_i$.

1.2.2 Le récepteur

Outre la résolution spatiale, en partie caractérisée par les propriétés de l'antenne, la précision radiométrique est une propriété importante d'un radiomètre : elle détermine l'imprécision sur la mesure de la température de brillance et dépend de la qualité des éléments qui composent la chaîne de réception.

La figure 1.5 montre un récepteur dit super-hétérodyne. Son but est de fournir en sortie un courant V_{out} mesurable et proportionnel à la puissance reçue par l'antenne. Pour cela, la puissance à la sortie de l'antenne est amplifiée et la fréquence du signal translatée vers des domaines plus facilement manipulables par l'électronique. Or, ces opérations vont ajouter un bruit à la température d'antenne, dégradant la précision radiométrique.

Ainsi, la tension V_{out} mesuré à la fin de la chaîne de réception n'est pas proportionnelle à la puissance P'_A délivrée par l'antenne mais à la puissance P_{sys} du système qui fait intervenir la température de bruit T_{rec} générée par l'ensemble des systèmes de traitement.

$$P_{\text{sys}} = P'_A + P_{\text{rec}} \quad (1.22)$$

$$P_{\text{sys}} = kT_{\text{sys}}B = k(T'_A + T_{\text{rec}})B \quad (1.23)$$

où k est la constante de BOLTZMANN et B est la bande passante du récepteur.

Le gain G d'un élément de la chaîne de réception caractérise le facteur d'amplification de la puissance d'entrée P_{in} . Il s'exprime généralement en décibels :

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{dP_{\text{out}}}{dP_{\text{in}}} \right) \quad (1.24)$$

où P_{out} est la puissance de sortie.

Si le bruit en entrée est caractérisé par une température T_0 et que la propre température de bruit de l'élément considéré est T_{Nr} , alors la puissance du bruit en sortie P_{Nout} sera :

$$P_{\text{Nout}} = k(GT_0 + T_{\text{Nr}})B \quad (1.25)$$

La figure de bruit de ce même élément exprime la dégradation du rapport signal sur bruit entre l'entrée et la sortie :

$$F = \frac{P_{\text{in}}/P_{\text{Nin}}}{P_{\text{out}}/P_{\text{Nout}}} \quad (1.26)$$

Elle est calculée dans la pratique en reliant l'entrée de l'élément à une résistance de référence d'une température T_0 de 290 K [1] [8] :

$$F = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \frac{P_{\text{Nout}}}{P_{\text{Nin}}} \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

$$F = \frac{1}{G} \frac{GkT_0B + kT_{\text{Nr}}B}{kT_0B} \quad (1.29)$$

$$(1.30)$$

$$F = 1 + \frac{T_{\text{Nr}}}{T_0} \quad (1.31)$$

La température de bruit d'un élément de la chaîne de réception est donc proportionnelle à la température de bruit en entrée :

$$T_{\text{Nr}} = T_0(F - 1) \quad (1.32)$$

Le gain d'un récepteur composé de N éléments est simplement le produit des gains de chacun de ces éléments :

$$G = g_1 \times g_2 \times g_3 \dots \times g_N \quad (1.33)$$

La contribution de la température de bruit d'un composant à la température de bruit du récepteur T_{rec} est pondérée par le gain des composants qui le précède :

$$T_{\text{rec}} = T_1 + \frac{T_2}{g_1} + \frac{T_3}{g_1 \times g_2} \dots \quad (1.34)$$

Etant donné que les gains typiques sont de l'ordre de la dizaine de dB (facteur 100 à 1000), le bruit du récepteur dépendra donc fortement de la température de bruit du premier élément de la chaîne de réception.

Le facteur de perte L , l'inverse du gain G caractérise la « fuite » de puissance qui intervient tout au long de la chaîne de réception :

$$L = \frac{1}{G} \quad (1.35)$$

La température de bruit véritablement induite par un récepteur de température physique T_p est alors :

$$T'_{\text{rec}} = LT_{\text{rec}} + (L - 1)T_p \quad (1.36)$$

Les différents composants d'un récepteur de type super-hétérodyne sont décrits ci-dessous.

• L'amplificateur Radio-Fréquence (RF)

Sa fonction est d'amplifier le signal puisque la puissance à la sortie de l'antenne est de l'ordre de 10^{-20} W [1] [9]. Le gain typique d'un tel amplificateur est de l'ordre $G_{\text{RF}} = 30$ dB. Comme il est rappelé ci-dessus, cette étape est critique pour la sensibilité radiométrique.

• Le filtre passe-bande

Bien entendu, le signal RF reçu et transmis par l'antenne comporte une large gamme de fréquences. Or, en bande L, seule une étroite zone est protégée des émissions artificielles comme les ondes de télécommunications (téléphones portables, relais...) ou encore les radars des aéroports. Le filtre passe-bande a pour objectif de sélectionner le signal à l'intérieur de cette zone. Toutefois, ce n'est pas ce filtre qui définit la bande passante de l'ensemble du récepteur, mais celui situé après l'amplificateur à fréquence intermédiaire. La bande passante est ici un peu plus large que la bande passante nominale du récepteur.

• Le mélangeur

Le signal RF à l'entrée du mélangeur est centré sur la fréquence centrale d'observation f_{RF} (≈ 1.41 GHz en bande L). L'objectif du mélangeur est d'abaisser fortement la fréquence de l'onde porteuse du signal RF pour l'amener à une fréquence intermédiaire f_{FI} de l'ordre de 5 à 30 MHz. Ainsi, le signal sera plus facilement traitable par l'électronique et, en cas de fuite de signal, on évitera un retour vers l'antenne, une boucle positive et une oscillation de l'ensemble du récepteur [9].

Le mélange consiste à multiplier le signal RF par une sinusoïde de fréquence f_{OL} . La fréquence intermédiaire f_{FI} est alors définie par :

$$f_{\text{FI}} = |f_{\text{RF}} - f_{\text{OL}}| \quad (1.37)$$

Or, comme on peut le voir sur la figure 1.4, deux fréquences f_{RF} et f_{IM} situées de part et d'autre de la fréquence de l'oscillateur local définissent la même fréquence f_{FI} .

Si la bande passante du signal RF est trop large (\tilde{B} sur la figure 1.4) ou si le fonctionnement du filtre est dégradé, le signal image, centré en f_{IM} , va venir s'ajouter au signal RF pour former le signal FI. Cette configuration est appelée « *Double sideband* » et à pour conséquence de multiplier par deux la puissance du signal à la sortie du mélangeur, ce qui peut être utile pour des radiomètres fonctionnant dans les longueurs d'onde millimétriques. Mais dans le cas de la bande L, comme on l'a vu plus haut, le signal image risque de comporter des émissions artificielles et donc de dégrader le rapport signal sur bruit du récepteur. C'est pourquoi, dans ce cas, les récepteurs sont dits « *single sideband* » et seul le signal RF est conservé lors du mélange vers la fréquence intermédiaire (la bande passante est B (Fig. 1.4)).

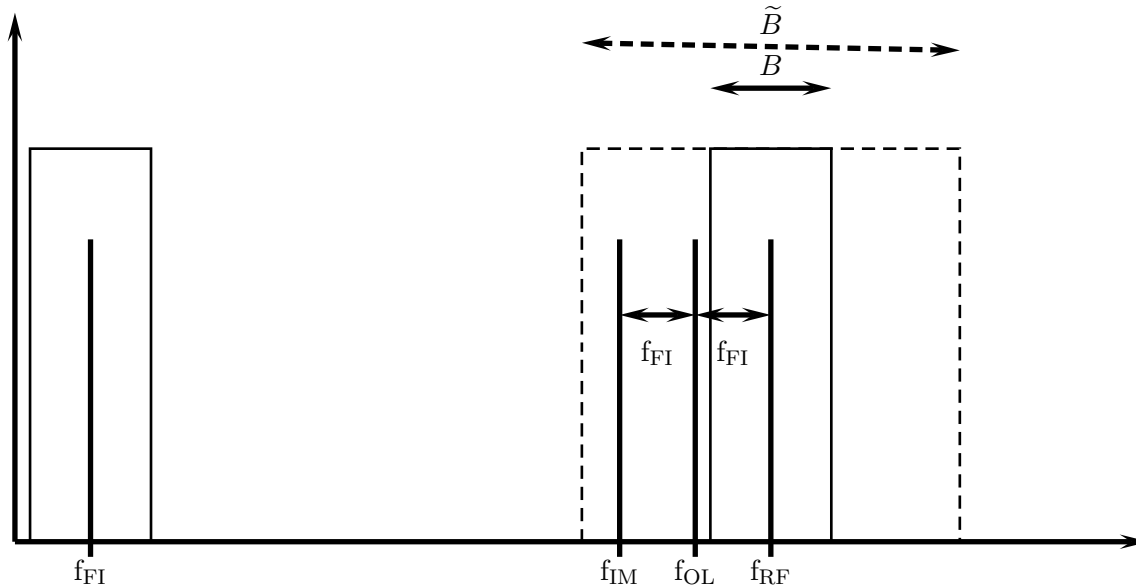


FIG. 1.4 – Mélange de la fréquence RF f_{RF} et de la fréquence de l'oscillateur local f_{OL} : la fréquence intermédiaire f_{FI} à la sortie du mélangeur est définie par l'écart entre f_{RF} et f_{OL} mais aussi pour la fréquence image f_{IM} de la fréquence RF. Cette image peut bruite le signal RF si la bande passante B est trop large (\tilde{B} , en tirets).

- **L'amplificateur à fréquence intermédiaire**

Tout comme l'amplificateur RF, l'amplificateur FI va multiplier la puissance du signal à l'entrée par un facteur 1000 ($G_{FI} = 30$ dB).

- **Le filtre passe-bande**

C'est la bande passante de ce filtre qui définira la bande passante du récepteur.

- **Le détecteur quadratique**

Le but est d'obtenir en sortie un courant dont la tension sera proportionnelle au carré du courant en entrée et donc proportionnelle à la puissance P_{sys} délivrée par l'ensemble de la chaîne d'acquisition. En entrée, le signal est alternatif, en sortie, il est continu. Un détecteur typique est une simple diode.

• Le filtre passe-bas ou Intégrateur

A l'entrée de ce composant, le courant continu comporte encore de fortes fluctuations hautes-fréquences qui, si elles n'étaient pas éliminées, réduiraient fortement la sensibilité radiométrique de l'instrument. Le lissage du signal est réalisé par un filtre passe-bas caractérisé par un temps de lissage, ou temps d'intégration τ . Ce filtre passe-bas est donc aussi appelé intégrateur puisque le courant en sortie est une moyenne du courant d'entrée sur un temps τ . Le plus simple des intégrateurs est un circuit RC avec $\tau = RC$.

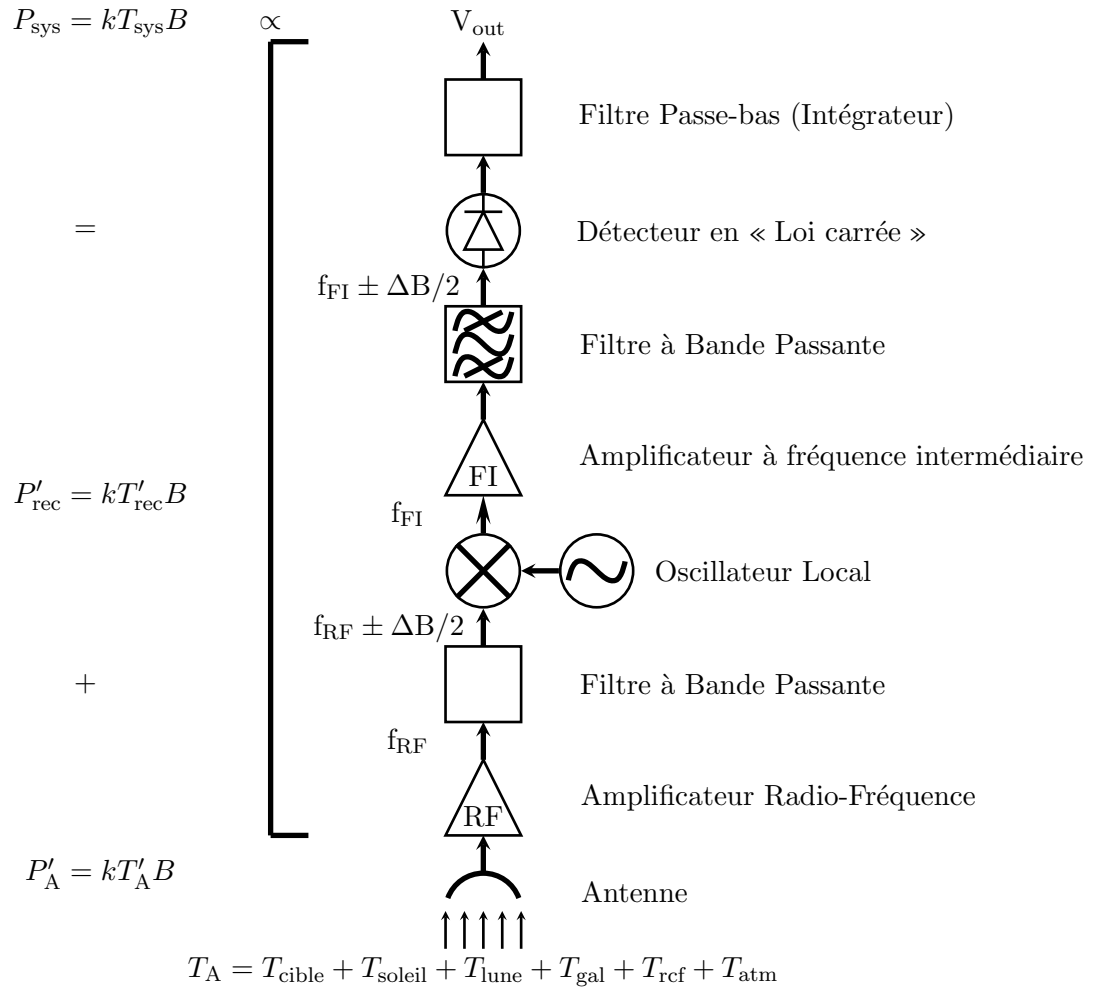


FIG. 1.5 – Description des composants d'un radiomètre à puissance totale de type super-hétérodyne : l'appellation « hétérodyne » vient du mélange de la fréquence RF vers la fréquence intermédiaire. Le courant de sortie V_{out} est proportionnelle à la puissance du système issue de la contribution de la température d'antenne T'_A et de la température de bruit du récepteur T'_{rec} .

Par la suite, la températures physique T_p de l'antenne et du récepteur ainsi que l'efficacité η et le facteur de perte L sont supposés connus, ce qui permet d'établir la sensibilité radiométrique de l'instrument en fonction de la température d'antenne T_A et la température de bruit du récepteur T_{rec} .

SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE

L'équation du radiomètre donne la sensibilité radiométrique ΔT en fonction de la température système T_{sys} , de la largeur de bande B du récepteur et du temps d'intégration τ :

$$\Delta T = \frac{T_{sys}}{\sqrt{B\tau}} \quad (1.38)$$

$$\Delta T = \frac{T_A + T_{rec}}{\sqrt{B\tau}} \quad (1.39)$$

Cette sensibilité radiométrique ne tient pas compte des variations possibles du gain G_{sys} du récepteur. Ce dernier peut être défini comme le coefficient de proportionnalité entre V_{out} et T_{sys} :

$$V_{out} = G_{sys}T_{sys} \quad (1.40)$$

L'objet même de l'étalonnage est de quantifier G_{sys} . Si l'on suppose que la relation (1.40) est linéaire, une mesure du courant de sortie pour deux températures de bruit, l'une « froide » l'autre « chaude », directement injectées à la sortie de l'antenne, permet de retrouver G_{sys} . Cependant, cela ne peut prendre en compte les variations rapides du gain du récepteur, entre chaque procédure d'étalonnage. La sensibilité radiométrique ΔT_N de la relation (1.39), dont l'origine est la température de bruit du récepteur, est distinguée de la sensibilité ΔT_G , dont l'origine est la variation du gain G_{sys} :

$$\Delta T_G = T_{sys} \left(\frac{\Delta G_{sys}}{G_{sys}} \right) \quad (1.41)$$

On peut alors compléter l'expression de la sensibilité radiométrique pour y intégrer cette nouvelle source, indépendante de la précédente. Par conséquent :

$$\Delta T = [(\Delta T_N)^2 + (\Delta T_G)^2]^{1/2} \quad (1.42)$$

$$\Delta T = T_{sys} \left[\frac{1}{B\tau} + \left(\frac{\Delta G_{sys}}{G_{sys}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.43)$$

1.2.3 Grandeurs caractéristiques

Etant donnée la relation (1.20), pour obtenir une résolution spatiale, au nadir, de 50 km à 750 km d'altitude, pour une longueur d'onde de 20 cm et un coefficient $c_f = 1.4$, un radiomètre doit posséder une antenne d'un diamètre d'un diamètre de :

$$D = \frac{750}{50} \times 1.4 \times 0.2 \approx 4.2 \text{ m} \quad (1.44)$$

Cette application numérique montre les limites de l'utilisation d'un dispositif à antenne réelle, tel qu'un radiomètre à puissance totale, dans une mission spatiale de mesure de l'humidité de surface : il est difficile de déployer dans l'espace une antenne d'un tel diamètre. Notons cependant que la mission Aquarius [10] prévoit l'utilisation d'un tel instrument pour la mesure depuis l'espace ($H = 600$ km) de la *SSS*, puisque dans ce cas, la stabilité radiométrique est prépondérante sur la résolution spatiale. Il est prévu d'utiliser un réflecteur parabolique illuminé par 3

lobes fournissant des mesures à des angles d'incidence de 23.3° , 33.7° et 41.7° , correspondant (relation (1.21)) à des résolutions spatiales de 65 km, 80 km et 100 km.

D'après l'équation (1.34), T_{rec} dépend largement de la température de bruit de l'amplificateur RF. La figure de bruit de ce dernier étant de l'ordre de 2.3 dB et, d'après (1.32), sa température de bruit est :

$$T_{\text{rec}} \approx T_{\text{RF}} = (10^{0.23} - 1) \times 290 \approx 203 \text{ K} \quad (1.45)$$

Pour $B = 20$ MHz, $\tau = 1.5$ s et $T_A = 250$ K, ΔT vaut (équation (1.39)) :

$$\Delta T = \frac{250 + 200}{\sqrt{20 \cdot 10^6 \times 1.5}} \approx 0.08 \text{ K} \quad (1.46)$$

A la condition que les variations du gain G_{sys} puissent être maîtrisées, un radiomètre à puissance totale est donc tout à fait indiqué pour la mesure de la salinité.

Cependant, pour ce qui est de la résolution spatiale et de la propriété de mesure multi-angulaire, une autre technique de mesure doit être envisagée. Le chapitre suivant expose les principes fondamentaux de la technique de synthèse d'ouverture.

Biographie(s)

Biographie 1.1: **PLANK, Max Karl Ernst Ludwig**

(23 Avril 1858, Kiel, Allemagne- 4 Octobre 1947, Göttingen, Allemagne)



Max Planck est issu d'une lignée universitaire, son père étant professeur de droit constitutionnel et son grand-père professeur de théologie. Il passe une enfance tranquille à Kiel où il semble plus enclin à la musique qu'aux sciences. Sous l'influence de son professeur HERMANN MÜLLER, il se découvre un nouvel intérêt pour la physique à travers la loi de la conservation de l'énergie et finit par opter en 1874 pour des études scientifiques à Munich puis à partir de 1877 à Berlin.

A l'âge de 21 ans, en Juillet 1879, il soutient une thèse intitulée « Sur la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur ». Simple enseignant à Munich pendant 5 ans, il obtient la chaire de physique théorique à Kiel en 1885. A la mort de KIRCHHOFF qui fut son professeur à Berlin, il obtient, soutenu par HELMHOLTZ, le poste de professeur de physique théorique de l'université de Berlin en 1888 et devient la même année, direc-

teur de l'Institut de Physique Théorique. C'est à Berlin qu'il fit ses plus grandes découvertes, ouvrant la voie à ce qui sera la mécanique quantique. En 1900, combinant les formules de WIEN et de RAYLEIGH, Planck annonce une loi donnant la distribution de l'énergie en fonction de la longueur d'onde et introduit, deux mois plus tard, le quanta d'énergie, à la suite de quoi il reçoit le Prix Nobel de Physique en 1918. Chose impensable quelques années plus tôt, tant par la communauté scientifique que par lui-même, il renonce ainsi à une formulation classique de la physique, affirmant :

« [...] le cheminement dans son ensemble était un acte de désespoir, car une interprétation théorique devait être trouvée, quel qu'en soit le prix, aussi élevé soit il. ».

Il faudra cependant attendre les travaux de NIELS BOHR en 1913 pour qu'il soit complètement convaincu par les conséquences de ses propres travaux :

« Mes vaines tentatives de faire entrer le quanta élémentaire dans le cadre de la théorie classique ont continué pendant de nombreuses années et m'ont coûté de gros efforts. ».

Il fut président de la *Kaiser Wilhelm Gesellschaft*, plus tard renommée Société Max Planck, de 1930 à 1937, date à laquelle le parti Nazi réorganisa cette société, ce qu'il ne put accepter et le poussa à démissionner. Il demeura Berlin jusqu'en 1943 puis résida Rogätz jusqu'à la fin de la guerre. Un de ses fils fut exécuté à cette époque, accusé d'avoir participé à une tentative d'assassinat sur Hitler. Âgé de 87 ans en 1945, il reprit la tête de la *Kaiser Wilhelm Gesellschaft* et aida à la refonte de la recherche allemande.

Bibliographie

- [1] Fawwaz ULABY, Richard MOORE et Adrian FUNG : *Microwave Remote Sensing : Fundamentals and Radiometry*, volume 1. Artech House, 1981.
- [2] Jean-Pierre WIGNERON, Philippe WALDTEUFEL, A. CHANZY, Jean-Christophe CALVET, O. MARLOIE, J.-F. HANOCQ et Yann KERR : Retrieval capabilities of l-band 2-d interferometric radiometry over land surfaces (smos mission). *Microwave Radiometry Remote Sensing of Earth's Surface and Atmosphere*, pages 485–492, 2000.
- [3] Jean-Pierre WIGNERON, Philippe WALDTEUFEL, A. CHANZY, Jean-Christophe CALVET et Yann H. KERR : Two dimensional microwave interferometer retrieval capabilities over land surfaces (smos mission). *Remote sensing of environment*, 73:270–282, 2000.
- [4] Jean-Pierre WIGNERON, Jean-Christophe CALVET, Philippe WALDTEUFEL, Thierry PELLARIN, A. Van de GRIEND, Michael BERGER et P. FERRAZZOLI : Retrieving near surface soil moisture from microwave radiometric observations : current status and future plans. *Remote Sensing of environment*, 85:489–506, 2003.
- [5] Yann KERR, Jordi FONT, Philippe WALDTEUFEL et Michael BERGER : The soil moisture and ocean salinity mission - smos. *Earth Explorer Missions*, pages 18–25, 2000.
- [6] Jean-Christophe CALVET, J. NOILHAN et P. BESSEMOULIN : Retrieving the root-zone soil moisture from surface soil moisture or temperature estimates : a feasibility study based on field measurements. *J. Appl. Meteor.*, 37:371–386, 1998.
- [7] Emmanuel DINAT : *De la détermination de la salinité de surface des océans à partir de mesures radiométriques hyperfréquences en bande L*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.
- [8] Hugh D. ALLER : Astronomy 361 part III : Radio astronomical instrumentation and techniques. 2001.
- [9] C.J. SALTER : The measurement process with full-filled aperture.
- [10] C.J. KOBLINSKY, P. HILDEBRAND, Y. CHAO, A. DECHARON, W. EDELSTEIN, G. LAGERLOEF, D. LEVINE, F. PELLERANO, Y. RAHMAT-SAMII, C. RUF, F. WENTZ, W. WILSON et S. YUEH : Sea surface salinity from space : science goals and measurement approach.

Chapitre 2

Principes fondamentaux de l'imagerie par interférométrie

Sommaire

2.1	Présentation générale des radiomètres à synthèse d'ouverture . . .	25
2.2	Fondements mathématiques : la transformée de Fourier	31
2.2.1	Fréquences temporelles - Fréquences spatiales	31
2.2.2	Les transformées de FOURIER à deux dimensions	31
2.3	Fondements physiques : l'expérience des trous d'Young	37
2.3.1	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 = 0$	38
2.3.2	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$	39
2.3.3	Cas d'une source primaire étendue entre $-r_s$ et $+r_s$	39

Et à cette fin, elles se construisirent un stupéfiant super-ordinateur si fantastiquement intelligent qu'avant même d'être raccordé à ses banques de données, il en était, partant de : Je pense donc je suis, déjà parvenu à en déduire l'existence du gâteau de semoule et l'impôt sur le revenu avant qu'on ait eu le temps de l'éteindre...

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

2.1 Présentation générale des radiomètres à synthèse d'ouverture

Tout comme la radiométrie à puissance totale, la radiométrie à synthèse d'ouverture trouve ses origines dans l'observation astronomique, et plus particulièrement dans l'application de l'interférométrie. Dès 1868, le physicien français ARMAND-HIPPOLYTE LOUIS FIZEAU affirme : « *Il existe en effet pour la plupart des phénomènes d'interférence, [...] une relation remarquable et nécessaire entre la dimension des franges et celle de la source lumineuse, [...], d'où, pour le dire en passant, il peut être permis d'espérer qu'[...] il deviendra possible d'obtenir quelques données nouvelles sur les diamètres angulaires des astres* »[1].

L'interférométrie permet de tirer des informations sur les propriétés d'une source lumineuse en séparant en deux le signal issu de cette source et en combinant ces signaux secondaires

afin de faire apparaître des franges lumineuses. Ces franges apparaissent du fait de la nature ondulatoire de la lumière. Une analogie possible est de considérer la rencontre des vagues causées par la chute de deux pierres dans un étang : lorsque deux crêtes se rencontrent, leur hauteur s'additionne pour former une vague deux fois plus haute et lorsque une crête rencontre un creux, leur influence respective s'annule. Ainsi, en interférométrie optique, sous certaines conditions, on voit apparaître une succession de franges lumineuses et sombres. Il a été démontré que le pouvoir séparateur d'un système interférométrique, sa résolution spatiale, est amélioré lorsque la distance entre les sources secondaires est augmentée.

Il faudra attendre 1920 pour que le physicien américain ALBERT ABRAHAM MICHELSON mesure pour la première fois le diamètre d'une étoile hors du système solaire à l'aide de l'interférométrie mais l'interférométrie optique se heurtera encore longtemps à la trop grande précision instrumentale requise. Le premier radio-interféromètre est constitué, en 1950, de deux antennes fixes, et l'interféromètre de Owen's Valley, Californie, construit en 1957 à partir d'un couple d'antennes orientables, est à l'origine de la découverte des quasars.

Depuis, les distances entre les antennes élémentaires n'ont cessé de s'accroître. Citons l'interféromètre « *1 mile* » (1964) qui utilisa la rotation de la Terre pour réaliser pour la première fois une synthèse d'ouverture et ainsi obtenir une image dont la précision était celle d'un télescope 1.5 km de diamètre, le « *Very Large Array* » (VLA, pour Très Grand Réseau, fin des années 70) à Socorro, Nouveau Mexique composé de 27 antennes formant un Y et synthétisant une antenne d'un diamètre de 36 km, et enfin le « *Very Long Baseline Array* » (VLBA, pour Réseau à Très Grande Ligne de Base, 1985), qui en combinant les signaux issus de 10 radio télescopes situés entre Hawaï et les Îles Vierges, synthétisa un radio télescope d'un diamètre égal à celui de la Terre. Certains projets en cours prévoient même d'utiliser des instruments embarqués à bord de satellites pour simuler des antennes d'un diamètre égal à plusieurs fois celui de la Terre.

Le principe de la synthèse d'ouverture est donc de combiner les signaux issus d'au moins deux antennes observant la même scène et dont on fait varier l'espacement. L'instrument ainsi composé, appelé interféromètre, ne fournit pas directement une tension proportionnelle à la température de brillance de la scène observée mais une mesure de la cohérence spatiale de cette scène, à partir de laquelle T_b est estimé dans un deuxième temps.

Cette technique permet notamment de synthétiser une antenne d'un diamètre égal à la plus grande distance séparant deux antennes élémentaires du radiomètre à synthèse d'ouverture.

Eclaircissement I.7: RÉOLUTION SPATIALE (δx [KM]) POUR UN RADIOMÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE)

La résolution spatiale d'un tel instrument, dont l'espacement maximal entre deux antennes est noté D , est celle d'un dispositif à antenne réelle doté d'une antenne de diamètre D :

$$\delta x_{SO} = H \frac{\lambda}{D}, \quad (2.1)$$

H étant la distance entre l'instrument et la cible.

Les antennes doivent avoir un champ de vue se recouvrant afin de pouvoir combiner leurs signaux. Elles doivent donc posséder un lobe principal large c.-à-d. un diamètre d proche de la

longueur d'onde (≈ 20 cm) :

$$0.5\lambda \leq d \leq \lambda \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow 60^\circ \leq \beta_{1/2} \leq 110^\circ \quad (2.3)$$

D'un point de vue pratique, il est plus facile de déployer dans l'espace un ou plusieurs bras sur lesquels sont fixés des antennes de petite dimension plutôt qu'une large parabole.

En faisant varier la distance entre deux antennes ou en disposant un réseau d'antennes sur un plan (en formant par exemple un Y, un U ou un T), la température de brillance reconstruite sera une carte à 2 dimensions. Au cours du survol d'un scène par un instrument, un même élément de cette scène est vu successivement sous plusieurs angles d'incidence : on retrouve là la capacité de mesure multi-angulaire (pour la mesure de l'humidité) et les mesures indépendantes au cours d'un même survol (mesure de la salinité).

Il faut cependant noter que la distance D ne peut être augmentée sans dégrader la sensibilité radiométrique.

Eclaircissement I.8: SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À RADIO-MÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE)

En synthèse d'ouverture [2], la sensibilité radiométrique est telle que :

$$\Delta T_{SO} = \frac{T_A + T_{rec}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{B\tau}} \times \frac{A_{syn}}{N \times A_{el}} \quad (2.4)$$

où A_{syn} est la surface de la parabole synthétisée, N est le nombre d'antenne et A_{el} est la surface d'une antenne élémentaire de diamètre d .

Pour $N = 2$, ΔT_{SO} augmente alors avec le carré de la distance entre les antennes :

$$\Delta T_{SO} = \frac{T_A + T_{rec}}{\sqrt{2B\tau}} \times \frac{1}{2} \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad (2.5)$$

Cette relation ne fournit cependant qu'une valeur approximative de la sensibilité radiométrique puisque la mesure de T_b n'est pas directe et que l'imprécision sur cette mesure dépend notamment des méthodes mises en oeuvre pour estimer les températures de brillances à partir des mesures instrumentales.

La mission spatiale SMOS (pour « *Soil Moisture and Ocean Salinity* », humidité des sols et salinité des océans) représente la première tentative d'application de la technique de synthèse d'ouverture à la télédétection de la surface de la Terre. Ce projet, financé par l'Agence Spatiale Européenne, a été initié en 1999 dans le cadre du programme « Exploration de la Terre ». Son objectif est de fournir, à la suite de son lancement prévu en 2007, une mesure globale et scientifiquement exploitable de l'humidité des continents et de la salinité des océans. Il offre aussi l'occasion pour la communauté scientifique de valider pour de futures missions le concept prometteur d'imagerie par interférométrie passive.

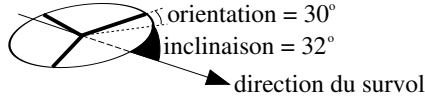
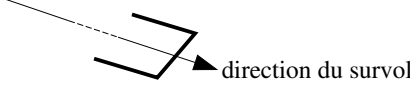
Cette mission regroupe une centaine de chercheurs de divers pays européens (France, Espagne, Allemagne, Finlande...) ainsi que quelques chercheurs des Etats-Unis. Seuls une dizaine

de chercheurs, issus de l'Université Polytechnique de Catalogne (Espagne), du Centre Allemand d'aéro- et astronautique (DLR, Allemagne), et du Centre Européen de Recherche et de Formation en Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS, France), se consacrent spécifiquement aux méthodes de reconstruction d'image.

L'instrument de mesure proprement dit, appelé MIRAS (*Microwave Imaging Radiometer with Aperture Synthesis*), en cours de construction, sera composé de 69 antennes régulièrement réparties sur 3 bras formant un réseau en Y (voir Fig. 2.1). Il sera installé sur une plateforme placée sur une orbite polaire à environ 755 km d'altitude, avec un temps de revisite de l'ordre de 3 jours. Afin de valider expérimentalement le principe de mesure, l'Université Technologique de Helsinki (HUT, Finlande) a construit le HUT-2D, un réseau en U composé de 36 antennes et prévu pour des missions aéroportées (voir Fig. 2.2). Le tableau 2.1 rappelle les caractéristiques principales de ces deux instruments.

Quelque soit la géométrie, en U ou en Y, le fonctionnement est le même : la corrélation des signaux issus de chaque couple d'antennes fournira une mesure instrumentale du degré de cohérence spatiale de la scène observée. La reconstruction d'image pour les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture consiste en un ensemble cohérent d'outils mathématiques adaptés à la géométrie du réseau et permettant au final une estimation de la carte à deux dimensions de la distribution de températures de brillance à partir des mesures interférométriques délivrées par l'instrument. Ses objectifs se placent autant au niveau d'une définition rigoureuse des espaces de travail (réseaux hexagonaux ou cartésiens, directs ou réciproques), d'une élaboration et d'une caractérisation d'outils adaptés à ces espaces (fenêtres d'apodisation à deux dimensions, optimisation de la forme de ces fenêtres, facteurs de mérites spécifiques...) [PARTIE II] que dans le développement et l'analyse de méthodes d'inversion robustes, rapides et adaptées aux spécificités instrumentales [PARTIE III].

Les sections suivantes abordent les principes mathématiques et physiques fondamentaux permettant d'introduire les concepts qui seront développés dans la partie II.

	MIRAS	HUT-2D
Configuration	Y	U
Type de mission	spatiale / orbite polaire héliosynchrone	aéroportée
Période d'activité	courant 2007 → ≈ 2012	en cours
Altitude	755 km	3 km
Orientation Inclinaison		
Nombre d'antennes	(21 « avants » + 2 « arrières »)x3 = 69	12x3 = 36
Espacement inter-antennes	0.875 λ	0.7 λ
Dimension des bras	≈ 3.90 m	≈ 1.8 m
Plus grande distance entre deux antennes	≈ 6.70 m	≈ 2.70 m
Champ de vue	±60° ⇔ ≈1600 km x 1000 km	±30°
Résolution spatiale	30 km δx <math>< 100</math> km	$\delta x \approx 300$ m
Erreur attendue sur la T_b reconstruite	≈ 1 K	≈ 1 K
Largeur à -3 dB du lobe principal (nominal)	66°	66°
Fréquence centrale (nominale)	1.4135 GHz	1.4135 GHz
Longueur d'onde (λ)(nominale)	≈ 21.21 cm	≈ 21.21 cm
Bande Passante (nominale)	20 MHz	8 MHz
Temps d'intégration	1.5 s	1.5 s
Nombre de visibilités complexes mesurées	4692	1260
Nombre de pixels de la carte de T_b reconstruite	128x128 = 16384	64x64 = 4096

TAB. 2.1 – Caractéristiques de la mission spatiale SMOS et de l'instrument HUT-2D.

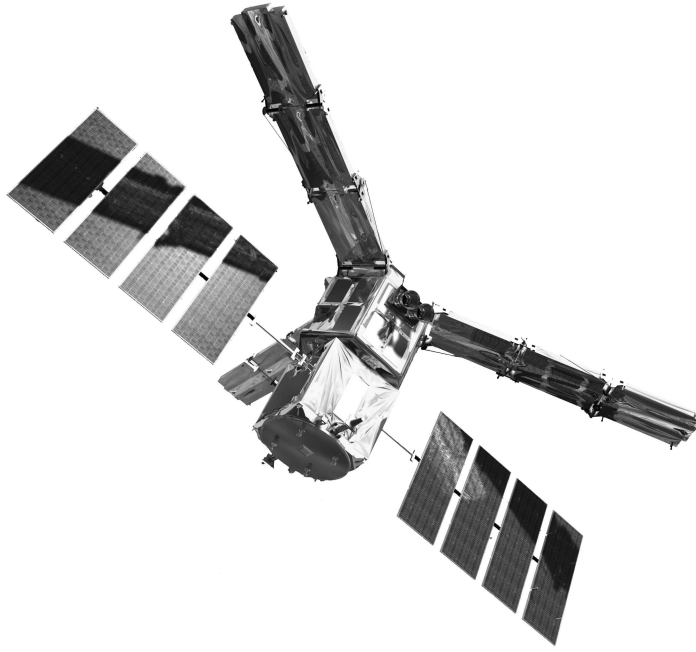


FIG. 2.1 – Vue d'artiste du satellite SMOS : 69 antennes sont régulièrement réparties sur les 3 bras en Y.

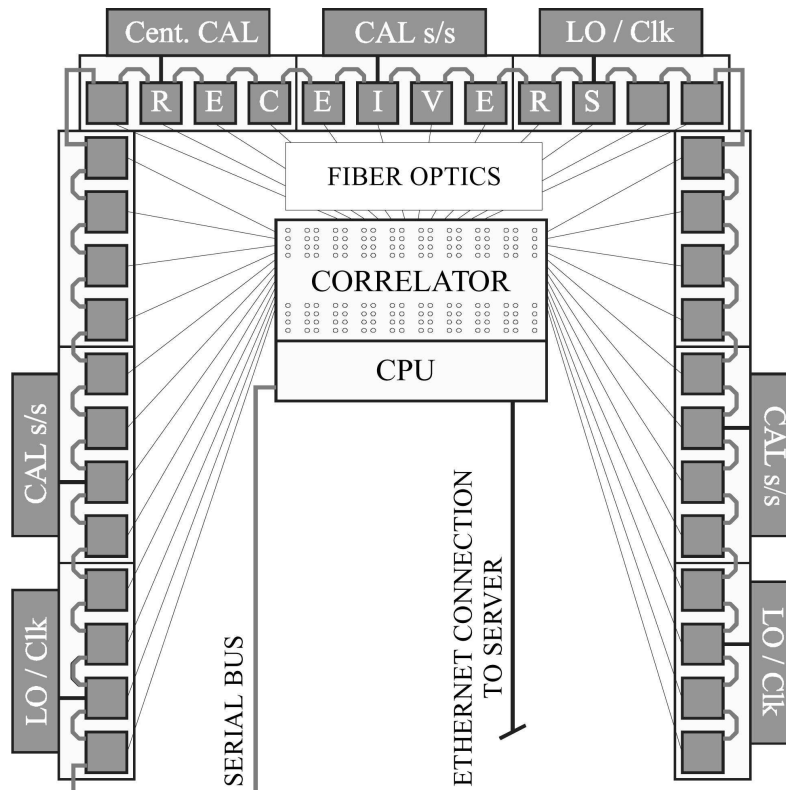


FIG. 2.2 – Schéma du dispositif instrumental du HUT-2D : chacune des antennes disposées en U est reliée aux autres via le corrélateur (ici au centre).

2.2 Fondements mathématiques : la transformée de Fourier

2.2.1 Fréquences temporelles - Fréquences spatiales

Prenons l'exemple d'un accord de « La mineur » joué par un piano et obtenu par la pression simultanée sur quatre touches : La (grave), Mi, Do et de nouveau La (aigu). Le son entendu correspond à une vibration des cordes transmise à l'air puis à notre tympan : il se propage comme une onde, une variation périodique de la pression de l'air. Près de notre oreille vont donc se succéder plusieurs fois par seconde des zones de pressions, alternativement fortes et faibles. La hauteur du son est déterminé par la distance entre deux extrema (la longueur d'onde [m]) ou encore, ce qui est équivalent, par le nombre d'oscillations par seconde (la fréquence temporelle exprimée en HERTZ) : plus la longueur d'onde est grande, plus la fréquence est petite et plus le son est grave et inversement, plus la longueur d'onde est petite, plus la fréquence est grande et plus le son est aigu. Ainsi, les quatre notes formant l'accord de La mineur ont les fréquences suivantes : La (grave) = 220 Hz (220 « battements » par seconde), Mi = 329.6 Hz, La (aigu) = 440 Hz, Do = 523.3 Hz.

La figure 2.3 illustre la superposition de ces notes : en haut, un accord de La mineur sur une portée ouverte par une clé de sol, au centre les variations de pressions au cours du temps pour cet accord et en bas, les quatre notes, les quatre vibrations élémentaires. Un musicien expérimenté peut discerner les notes composant un accord à son écoute mais cette distinction est plus difficile pour un néophyte. JOSEPH FOURIER a été le premier à présenter une méthode permettant de décomposer tout signal en une superposition de signaux périodiques de fréquence donnée [3] [4]. L'objet de la transformée de Fourier est d'indiquer quelles fréquences sont présentes dans ce signal et avec quelle « importance ». Ainsi, la figure 2.3 montre aussi la transformée de Fourier de l'onde sonore (appelée spectre de fréquence) engendrée par un accord de La mineur : on y retrouve les quatre fréquences des notes qui le composent, avec la même importance dans un cas idéal.

2.2.2 Les transformées de Fourier à deux dimensions

La transformée de FOURIER (notée \mathcal{TF} par la suite) peut aussi s'appliquer à l'étude de signaux variant non pas en fonction du temps mais en fonction d'une distance. Les fréquences ne sont alors plus temporelles mais spatiales. En réalité, il est abusif de parler de « la » transformée de FOURIER, puisque les relations changent selon que le signal étudié est continu ou discret, périodique ou non. Dans ce paragraphe, nous parcourrons les différentes transformées de FOURIER pour aboutir à la transformée de FOURIER discrète de signaux périodiques et discrets.

Les relations entre une image $T(x, y)$ définie continûment dans tout l'espace et sa transformée de Fourier $\hat{T}(u, v)$ sont les suivantes :

$$\hat{T}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) e^{-2j\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.6)$$

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(u, v) e^{2j\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.7)$$

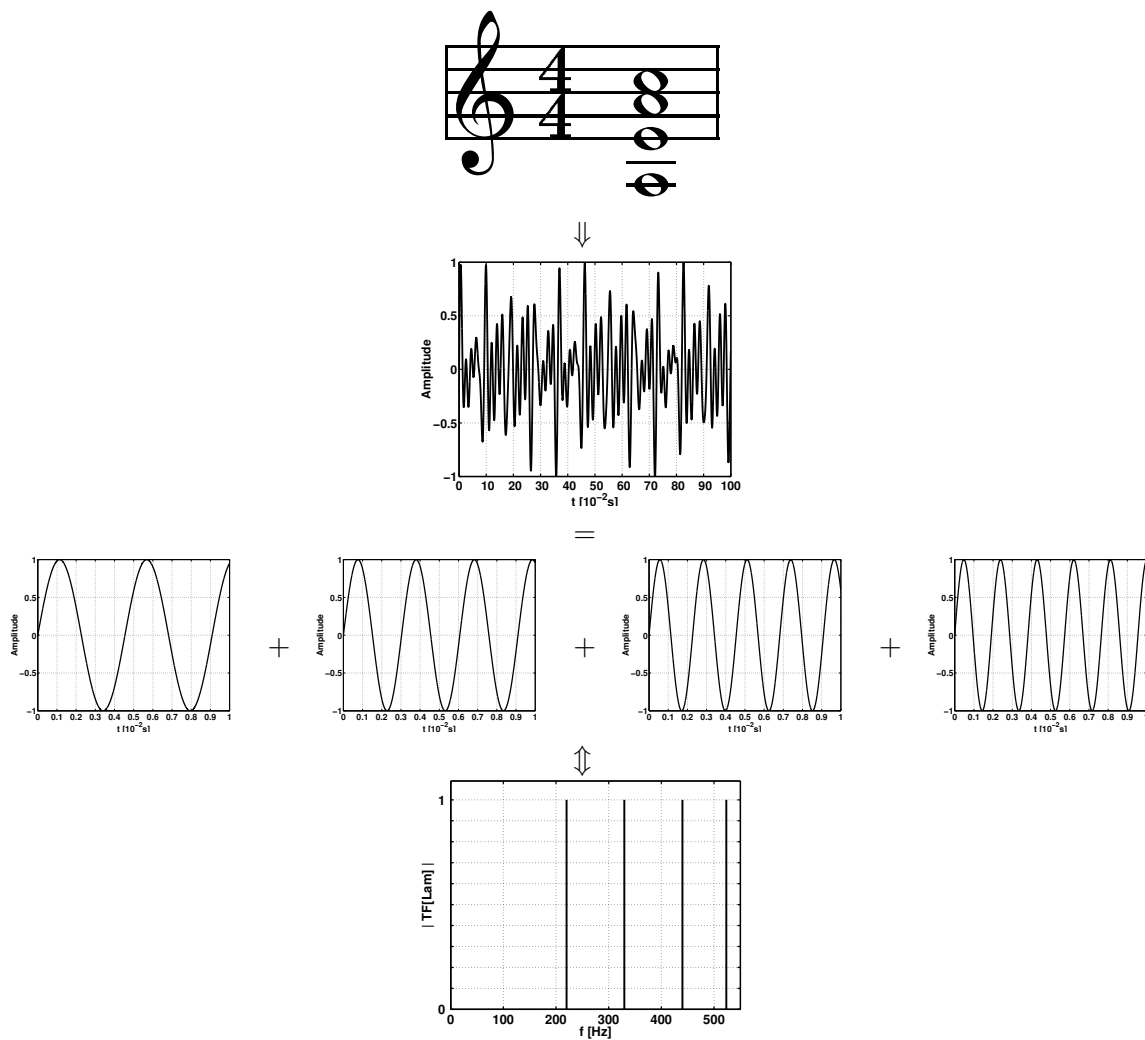


FIG. 2.3 – L'accord de La mineur vu comme la superposition de ses quatre fondamentales : en haut, cet accord écrit sur une portée, en dessous, les variations correspondantes de pression au cours du temps, 3^{ème} ligne, les variations de pression pour (de gauche à droite) un La (grave), un Mi, un Do et un La (aigu). En bas, la transformée de Fourier du signal fait apparaître les quatre fréquences qui le composent.

Rappelons quelques propriétés de la transformée de FOURIER continue d'un signal continu.

Eclaircissement I.9: EGALITÉ DE PARSEVAL

L'énergie contenue dans l'image est conservée par la \mathcal{TF} :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |T(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{T}(u, v)|^2 du dv \quad (2.8)$$

Eclaircissement I.10: PROPRIÉTÉ DE CONVOLUTION DE LA \mathcal{TF}

La \mathcal{TF} d'un produit de deux fonctions f_1 et f_2 est égale à la convolution de leur \mathcal{TF} respective, \widehat{f}_1 et \widehat{f}_2 :

$$\mathcal{TF}\{f_1(x, y) \times f_2(x, y)\} = \widehat{f}_1(u, v) * \widehat{f}_2(u, v) \quad (2.9)$$

Eclaircissement I.11: PROPRIÉTÉ DE TRANSLATION DE LA \mathcal{TF}

La translation d'une image se traduit par un déphasage de son spectre :

$$f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0) \Rightarrow \widehat{f}_2(u, v) = \widehat{f}_1(u, v)e^{-2j\pi(ux_0 + vy_0)} \quad (2.10)$$

Eclaircissement I.12: \mathcal{TF} D'UN PEIGNE DE DIRAC

La transformée de Fourier d'un peigne de DIRAC caractérisé par un pas δx est un peigne de DIRAC caractérisé par un pas $1/\delta x$ et dont l'amplitude est multipliée par $1/(\delta x)^2$:

$$\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\delta x, y - l\delta x) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{TF}\{\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y)\} = \frac{1}{(\delta x)^2} \Pi_{1/\delta x, 1/\delta x}(u, v) \quad (2.12)$$

Dans la pratique, deux caractéristiques de l'acquisition numérique d'une scène 2D vont venir modifier les propriétés de son spectre : l'échantillonnage d'une image va conduire à une périodisation de son spectre et la périodisation de cette image va conduire à l'échantillonnage de son spectre.

a. Echantillonnage d'une image

Les seules quantités manipulables par un ordinateur sont discrètes. Cet échantillonnage $T[k, l]$ de pas δx peut être vu comme la multiplication de la scène continue $T(x, y)$ par un peigne de DIRAC 2D $\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y)$:

$$T[k, l] = T(k\delta x, l\delta x) = T(x, y)\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y) \quad (2.13)$$

Ainsi, l'échantillonnage va conduire, dans le calcul de la transformée de FOURIER, à une convolution des \mathcal{TF} de l'image et du peigne de DIRAC et à une périodisation $\widehat{T}_p(u, v)$ du spectre :

$$\widehat{T}_p(u, v) = \mathcal{TF} \{T(x, y)\Pi_{\delta x}(x, y)\} \quad (2.14)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \widehat{T}(u, v) * \frac{1}{(\delta x)^2} \Pi_{1/\delta x, 1/\delta x}(u, v) \quad (2.15)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u', v') \Pi_{1/\delta x, 1/\delta x}(u - u', v - v') du' dv' \quad (2.16)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u', v') \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{m}{\delta x} - u', v - \frac{n}{\delta x} - v') du' dv' \quad (2.17)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u - \frac{m}{\delta x}, v - \frac{n}{\delta x}) \quad (2.18)$$

où $\widehat{T}_p(u, v)$ est une fonction $1/\delta x$ -périodique.

On peut alors se demander quelle doit être la finesse du pas δx pour que l'échantillonnage d'une image continue se fasse sans perte d'information.

Eclaircissement I.13: LE CRITÈRE DE SHANNON-NYQUIST

L'échantillonnage d'un signal continu, dont le spectre est borné par une fréquence maximale f_m , se fait sans perte d'information si le pas d'échantillonnage vérifie $\delta x \leq \frac{1}{2f_m}$.

Reprenons alors le résultat (2.18). Il peut être vu comme une relation entre la transformée de FOURIER $\widehat{T}_{ech}(u, v)$ du signal échantillonné $T(k\delta x, \delta x)$ et la \mathcal{TF} $\widehat{T}_{cont}(u, v)$ du signal continu $T(x, y)$:

$$\widehat{T}_{ech}(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{T}_{cont}(u - \frac{m}{\delta x}, v - \frac{n}{\delta x}) \quad (2.19)$$

Or, si le critère de SHANNON est respecté, $\widehat{T}_{cont}(u, v)$ est nul pour $u > 1/(2\delta x)$ et $v > 1/(2\delta x)$. On obtient donc une relation entre la \mathcal{TF} d'un signal échantillonné et la \mathcal{TF} de ce même signal dans sa version continue :

$$\widehat{T}_{ech}(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \widehat{T}_{cont}(u, v) \quad (2.20)$$

Les relations entre un signal discret non périodique et sa \mathcal{TF} sont les suivantes :

$$\widehat{T}(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} T[k, l] e^{-2j\pi(uk\delta x + vl\delta x)} \quad (2.21)$$

$$T[k, l] = \frac{1}{(\delta x)^2} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \widehat{T}(u, v) e^{-2j\pi(uk\delta x + vl\delta x)} dudv \quad (2.22)$$

b. Limitation de la taille d'une image

L'acquisition d'une image implique de limiter ses dimensions : afin de pouvoir appliquer la transformée de Fourier, on considérera une répétition de cette image dans tout l'espace. Une telle périodisation de la scène implique la discrétisation de son spectre. Les relations entre un signal 2D discret périodique de dimensions $M \times N$ et sa \mathcal{TF} sont alors les suivantes :

$$\widehat{T}[m, n] = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} T[k, l] e^{-2j\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (2.23)$$

$$T[k, l] = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{T}[m, n] e^{2j\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (2.24)$$

Ces relations définissent la transformée de FOURIER à deux dimensions (\mathcal{TFD}). Le calcul de $\widehat{T}[m, n]$ à l'aide de la relation (2.24) implique $M^2 + N^2$ opérations. Des algorithmes ont été développés afin de réduire de nombre d'opérations à $M \log_2 M + N \log_2 N$: on appelle ces méthodes des transformées de FOURIER rapides ou FFT pour *Fast FOURIER Transform*.

Un exemple illustre les relations précédentes : il s'agit d'un tableau de CLAUDE MONNET, « Le bassin aux nymphéas », peint en 1899 et représentant une scène souvent utilisée par Monnet, celle du pont japonais enjambant un bassin couvert par des nénuphars. La figure 2.4 montre à gauche un échantillonnage de l'oeuvre originale, chacun des $500 \times 333 = 166500$ pixels qui la composent portant une information sur la couleur.

La \mathcal{TF} d'une image étant une quantité complexe, le spectre présenté à droite sur la figure 2.4 est lié au spectre d'amplitude $|\widehat{T}(u, v)|$. Certaines caractéristiques de l'image peuvent apparaître par une simple étude de sa transformée de Fourier. Ainsi, la relation 2.23 montre que la valeur de la \mathcal{TF} à la fréquence nulle $(0, 0)$ est la valeur moyenne de la quantité $T(x, y)$, dans le cas de notre image, sa couleur moyenne. L'essentiel de l'énergie d'une image est contenue dans cette valeur, c'est pourquoi l'écart entre la valeur d'une \mathcal{TF} à la fréquence nulle et à une fréquence non nulle, même faible, est grande. La figure 2.4 représente donc la transformée de Fourier en échelle logarithmique, $\log \frac{|\widehat{T}(u, v)|}{|\widehat{T}(0, 0)|}$. En reconstruisant une image à partir des seules fréquences contenues à l'intérieur du cercle en pointillé de la figure 2.4, on obtient une version basse fréquence dans laquelle apparaît une information sur le contraste, sur les grandes échelles de l'oeuvre originale. Au contraire, la version haute fréquence obtenue à partir des fréquences extérieures cercle en pointillé donne une information sur les contours et sur les détails.

La reconstruction basse fréquence montrée sur la figure 2.5 est un exemple de signal à spectre borné, dit encore à bande passante limitée : les composantes de Fourier de cette image sont nulles pour les fréquences situées au delà du cercle pointillé. La bande passante a ici la forme d'un disque dont le rayon est égal à la fréquence de coupure. Il est alors intéressant de noter qu'une image à bande passante possède une résolution (un niveau de détail) plus faible que l'image originale.

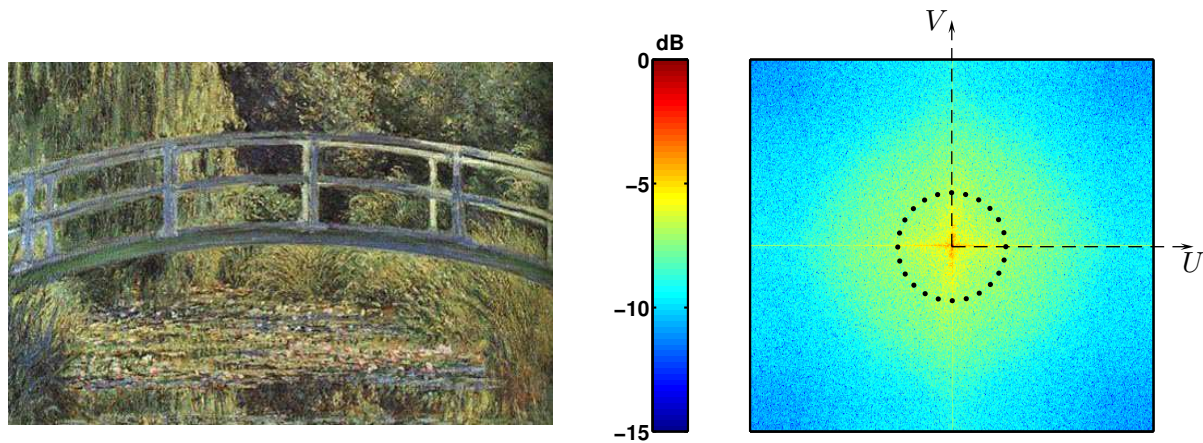


FIG. 2.4 – A gauche, « Le bassin aux nymphéas », de CLAUDE MONNET (1899, *Musée d'Orsay*). A droite, sa transformée de Fourier à deux dimensions.

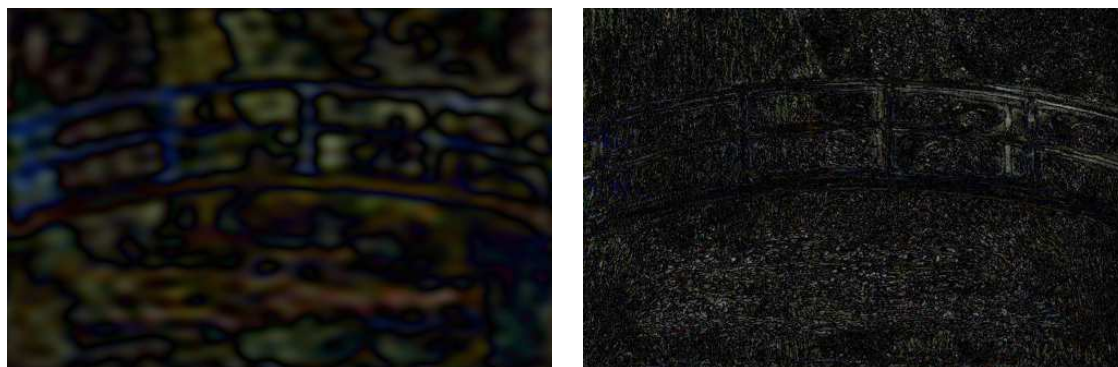


FIG. 2.5 – A gauche, la composante basse fréquence du « bassin aux nymphéas », à droite, la composante haute fréquence.

2.3 Fondements physiques : l'expérience des trous d'Young

Le principe d'interférométrie qui prédomine dans la synthèse d'ouverture est parfaitement illustré par l'expérience des trous d'Young [5], dont le dispositif est décrit par la figure 2.6. Cet exemple permet de se familiariser intuitivement avec les phénomènes plus complexes qui seront étudiés par la suite, tout en faisant émerger des relations importantes pour la suite, comme le théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE, à la base de tout le travail de reconstruction en synthèse d'ouverture.

Une source primaire S_0 éclaire un masque percé de deux trous et situé à une distance H . La figure d'interférence est observée sur un écran placé à une distance L des trous. Les proportions suivantes seront considérées par la suite :

- le diamètre des trous est négligeable devant toutes les autres dimensions.
- la distance D entre les trous est négligeable devant les longueurs H et L .
- la largeur de la figure d'interférence est petite devant les longueurs H et L .

Etant données ces hypothèses nécessaires à l'obtention d'interférences, l'étude est menée dans le plan du schéma et les positions des sources sont reportées sur l'axe X .

D'après le principe de HUYGENS, chaque trou placé en (S_1) et (S_2) devient une source secondaire au passage de l'onde issue de (S_0) . Le champ électromagnétique \vec{s} arrivant sur l'écran est donc la somme des deux champs \vec{s}_1 et \vec{s}_2 :

$$\vec{s}(x, t) = \vec{s}_1(x, t) + \vec{s}_2(x, t) \quad (2.25)$$

$$\vec{s}(x, t) = a_1 \exp j(\omega t + \phi_1(x)) \vec{u}_1 + a_2 \exp j(\omega t + \phi_2(x)) \vec{u}_2 \quad (2.26)$$

où a_i et ϕ_i sont l'amplitude et la phase de l'onde issue de (S_i) se propageant le long de \vec{u}_i , avec $i = 1, 2$. La pulsation ω est telle que $\omega = 2\pi f_0$, avec f_0 fréquence du champ émis en (S_0) et λ_0 sa longueur d'onde.

L'intensité $I(x)$ mesuré en P est définie par :

$$I(x) = \langle \vec{s}(x, t) \cdot \vec{s}^*(x, t) \rangle \quad (2.27)$$

En supposant les amplitudes des ondes secondaires égales à l'amplitude a_0 de l'onde primaire :

$$I(x) = 2a_0^2 + a_0 (\exp j(\omega t + \phi_1) + \exp -j(\omega t + \phi_2)) \quad (2.28)$$

$$I(x) = 2I_0 (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \quad (2.29)$$

où I_0 est l'intensité de la source (S_0) .

La phase $\phi = \phi_1 - \phi_2$ est liée à la différence de marche δ entre les chemins (S_0S_1P) et (S_0S_2P) :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \quad (2.30)$$

$$\text{avec } \delta = (S_0S_1P) - (S_0S_2P) \quad (2.31)$$

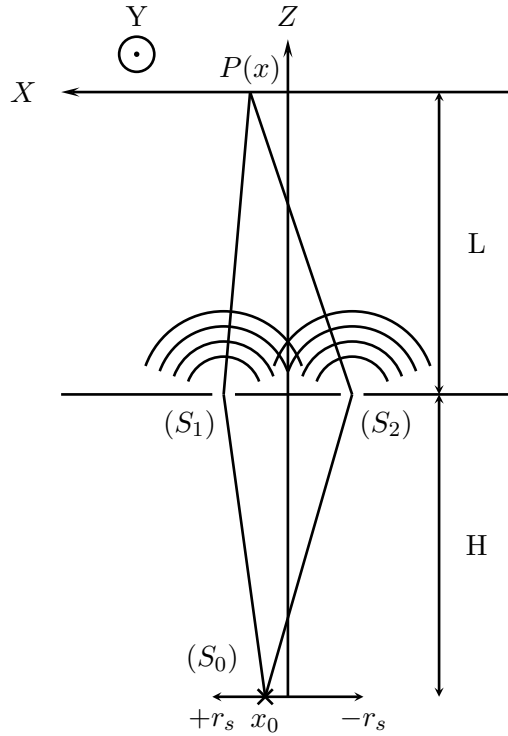


FIG. 2.6 – Dispositif de l'expérience des trous d'Young : une source ponctuelle (S_0), placée en x_0 , ou étendue entre $-r_s$ et $+r_s$, rayonne en direction d'un masque, éloigné d'une distance H et percé de deux trous (S_1) et (S_2). Une figure d'interférence apparaît sous certaines conditions sur un écran placé à une distance L du masque. L'intensité des raies est mesurée au point $P(x)$, le long de l'axe X .

2.3.1 Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 = 0$

Dans ce cas, δ ne dépend que de $S_1P - S_2P$, avec :

$$(S_1P)^2 = L^2 + \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 \quad (2.32)$$

$$\text{et } (S_2P)^2 = L^2 + \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 \quad (2.33)$$

Pour $L \gg D$ et $L \gg x$, on peut appliquer l'approximation $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$:

$$S_1P = L + \frac{1}{2L} \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 \quad (2.34)$$

$$\text{et } S_2P = L + \frac{1}{2L} \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 \quad (2.35)$$

soit :

$$\delta = \frac{1}{2L} \left[\left(\frac{D}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 \right] \quad (2.36)$$

$$\delta = -\frac{Dx}{L} \quad (2.37)$$

Donc d'après les relations (2.29) et (2.30), l'intensité au point P résultant de l'interférence d'une source ponctuelle placée en $x_0 = 0$ est :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi Dx}{\lambda_0 L} \right) \right] \quad (2.38)$$

2.3.2 Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$

Dans ce cas, δ dépend aussi des chemins (S_0S_1) et (S_0S_2) :

$$(S_0S_1)^2 = H^2 + \left(\frac{D}{2} - x_0 \right)^2 \quad (2.39)$$

$$\text{et } (S_0S_2)^2 = H^2 + \left(\frac{D}{2} + x_0 \right)^2 \quad (2.40)$$

Pour $H \gg D$ et $H \gg x_0$, on peut appliquer l'approximation $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$:

$$S_0S_1 = H + \frac{1}{2H} \left(\frac{D}{2} - x_0 \right)^2 \quad (2.41)$$

$$\text{et } S_0S_2 = H + \frac{1}{2H} \left(\frac{D}{2} + x_0 \right)^2 \quad (2.42)$$

soit :

$$\delta = \frac{1}{2L} \left[\left(\frac{D}{2} - x \right)^2 - \left(\frac{D}{2} + x \right)^2 \right] + \frac{1}{2H} \left[\left(\frac{D}{2} - x_0 \right)^2 - \left(\frac{D}{2} + x_0 \right)^2 \right] \quad (2.43)$$

$$\delta = -\frac{Dx}{L} - \frac{Dx_0}{H} \quad (2.44)$$

Donc d'après les relations (2.29) et (2.30), l'intensité au point P résultant de l'interférence d'une source ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$ est :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Dx}{L} + \frac{Dx_0}{H} \right) \right) \right] \quad (2.45)$$

2.3.3 Cas d'une source primaire étendue entre $-r_s$ et $+r_s$

La figure d'interférence d'une source étendue est la somme en intensité des figures d'interférences des sources « ponctuelles » constituant la source étendue. L'intensité mesurée en P est donc :

$$I(x) = \int_{-r_s}^{+r_s} 2I_i(x_0) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta(x_0)}{\lambda_0} \right) \right] dx_0 \quad (2.46)$$

$$\text{avec } \delta(x_0) = -\frac{Dx}{L} - \frac{Dx_0}{H} \quad (2.47)$$

où $I_i(x_0)$ est l'intensité élémentaire émise par chaque source ponctuelle. L'intensité totale I_0 de la source étendue est donc telle que :

$$I_0 = \int_{-r_s}^{+r_s} I_i(x_0) dx_0 \quad (2.48)$$

et l'intensité élémentaire normalisée $I_i^n(x_0)$ est définie par :

$$I_i^n(x_0) = \frac{I_i(x_0)}{I_0} \quad (2.49)$$

La relation (2.46) devient donc :

$$I(x) = 2I_0 + 2 \int_{-r_s}^{+r_s} I_i(x_0) \cos\left(\frac{2\pi\delta(x_0)}{\lambda_0}\right) dx_0 \quad (2.50)$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \cos\left(\frac{2\pi\delta(x_0)}{\lambda_0}\right) dx_0 \right] \quad (2.51)$$

Puisque $I_i^n(x_0)$ est réel et positif, cette relation peut aussi s'écrire :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp\left(j2\pi\frac{\delta(x_0)}{\lambda_0}\right) dx_0 \right\} \right] \quad (2.52)$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp\left(j2\pi\left(-\frac{Dx}{\lambda_0 L} - \frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right)\right) dx_0 \right\} \right]$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \exp\left(-i2\pi\frac{Dx}{\lambda_0 L}\right) \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp\left(-j2\pi\frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right) dx_0 \right\} \right]$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \exp\left(-i2\pi\frac{Dx}{\lambda_0 L}\right) \gamma_i(u) \right\} \right] \quad (2.53)$$

$$\text{avec } u = \frac{D}{\lambda_0 H} \quad \text{et} \quad \gamma_i(u) = \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp(-j2\pi ux_0) dx_0 \quad (2.54)$$

Les relations (2.53) et (2.54) font intervenir γ_i , le degré complexe de cohérence spatiale, quantité complexe telle que $\gamma_i = |\gamma_i| \exp(i\alpha_i)$. Ainsi, l'intensité mesurée en P est de la forme :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + |\gamma_i| \cos\left(\frac{2\pi Dx}{\lambda_0 L} - \alpha_i\right) \right] \quad (2.55)$$

Le facteur de visibilité V donne une mesure du contraste des franges d'interférence :

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.56)$$

Or d'après (2.55) :

$$I_{min} = 2I_0(1 - |\gamma_i|) \quad (2.57)$$

$$I_{max} = 2I_0(1 + |\gamma_i|) \quad (2.58)$$

En conclusion, les relations suivantes existent entre le facteur de visibilité, le degré de cohérence spatiale et la distribution spatiale d'intensité :

$$\gamma_i(u) = \int I_i^n(x_0) \exp(-j2\pi ux_0) dx_0 \quad \text{avec } u = \frac{D}{\lambda_0 H} \quad (2.59)$$

$$\text{et } V = |\gamma_i(u)| \quad (2.60)$$

La relation (2.59) est connue sous le nom de théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE[6][7][8]. On reconnaît dans cette expression (2.59) une relation de transformée de Fourier entre le degré de cohérence spatiale et la distribution spatiale d'intensité. La quantité u ayant la dimension de l'inverse d'une longueur, elle est appelée fréquence spatiale, notion qui sera explicitée dans la section suivante.

Si la distribution d'intensité de la source étendue est uniforme, alors l'intensité élémentaire est telle que :

$$I_i^n(x_0) = \frac{1}{2r_s} \text{ pour } -r_s < x_0 < +r_s, \quad (2.61)$$

Le degré de cohérence spatiale est :

$$\gamma_i = \int_{-r_s}^{+r_s} \frac{1}{2r_s} \exp\left(-j2\pi \frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right) dx_0 \quad (2.62)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2r_s} \frac{\lambda_0 H}{-j2\pi D} \left[\exp\left(-2j\pi \frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right) \right]_{-r_s}^{+r_s} \quad (2.63)$$

$$\gamma_i = \frac{\sin(\pi D 2r_s / \lambda_0 H)}{\pi D 2r_s / \lambda_0 H} \quad (2.64)$$

$$\gamma_i = \text{sinc}(D 2r_s / \lambda_0 H) \quad (2.65)$$

L'intensité mesurée en P est alors :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + |\text{sinc}(D 2r_s / \lambda_0 H)| \cos\left(\frac{2\pi D x}{\lambda_0 L}\right) \right]. \quad (2.66)$$

Ainsi, comme le présentait FIZEAU en 1868, il est possible de mesurer le diamètre d'une étoile grâce à sa figure d'interférence. En effet, il suffit de mesurer la distance entre les trous pour laquelle le facteur de visibilité est nul, puisque, d'après (2.65), cette distance est telle que :

$$D \propto \frac{\lambda_0 H}{4r_s} \quad (2.67)$$

où $2r_s$ est le diamètre de l'étoile observée.

La relation (2.66) permet aussi de se rapprocher des propriétés de la synthèse d'ouverture évoquée dans le chapitre 3 de la première partie. En effet, en identifiant chacun des trous à une antenne d'un radiomètre à synthèse d'ouverture, l'augmentation de la distance D va conduire à une meilleure localisation des franges d'interférences (terme en cosinus de la relation (2.66)) ce qui peut s'apparenter à une meilleur résolution spatiale (voir aussi Fig. 2.7), alors que le contraste sera d'autant plus faible (terme en sinus cardinal de la relation (2.66)) ce qui peut s'apparenter à une plus faible résolution radiométrique (voir Fig. 2.8).

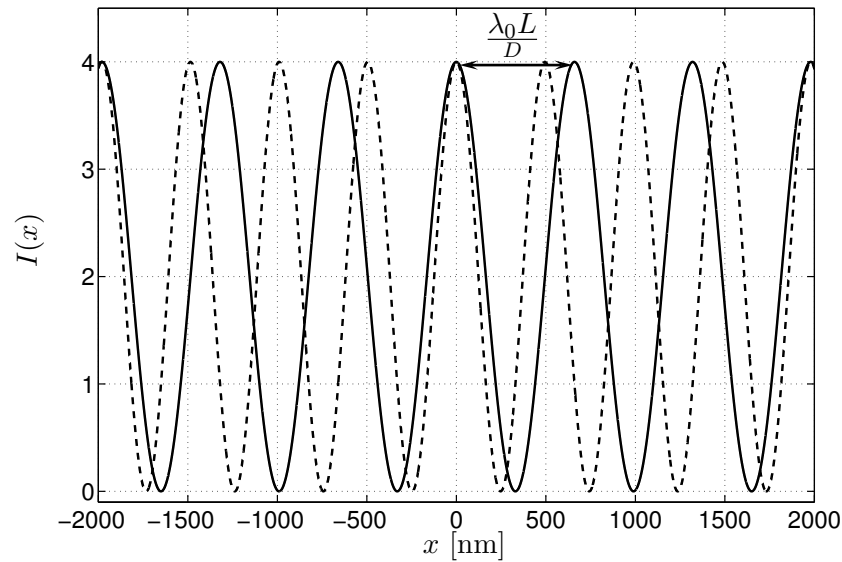


FIG. 2.7 – Variation de l'intensité sur une figure d'interférence obtenue par une expérience de trous d'Young (trait plein) : cas d'une source étendue. La distance entre deux maxima est fonction de la distance D entre les trous : lorsque cette distance augmente, les franges se rapprochent et sont mieux localisées (tirets).

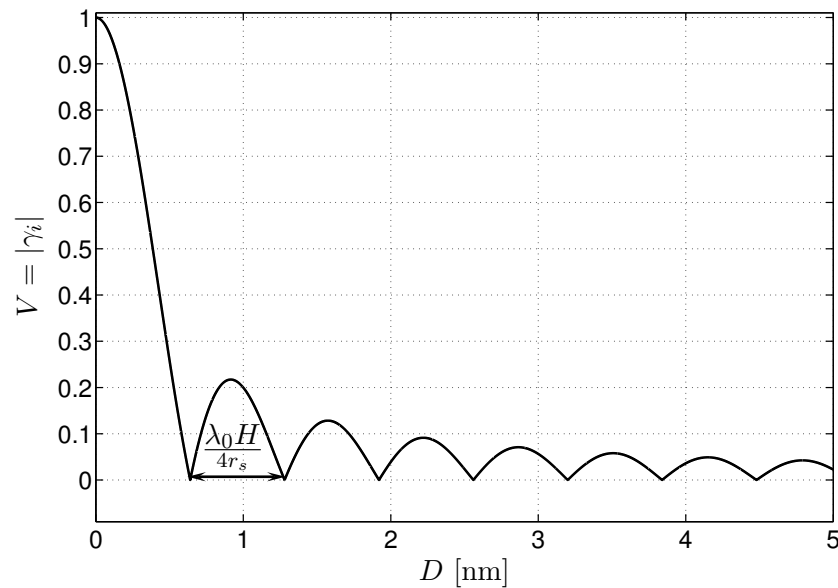


FIG. 2.8 – Variation de la visibilité en fonction de la distance entre les trous d'une expérience d'Young : cas d'une source étendue. La distance entre deux minima, correspondant à la disparition de la figure d'interférence, dépend de l'étendue $2r_s$ de la source.

Biographie(s)

Biographie 2.1: FIZEAU, Armand Hippolyte Louis

(23 Septembre 1819, Paris, France- 18 Septembre 1896, Venteuil, France)



Fils d'un professeur à la faculté de médecine, Fizeau débute des études de médecine au Collège Stanislas, interrompues par une santé fragile. Il suit alors les cours d'astronomie de FRANÇOIS ARAGO à l'observatoire de Paris, ceux d'optique de VICTOR REGNAULT et, à l'aide des notes de cours que lui fait parvenir son frère, ceux dispensés à l'Ecole Polytechnique. En 1839, il perfectionne la dagguerréotypie, améliorant son temps de vie grâce à l'utilisation de sels d'or et en renforçant le contraste de l'image.

En 1845, il débute une collaboration fructueuse avec FOUCAULT. Ils réalisent ensemble le premier dagguerréotype de la surface de soleil. Obtenant des franges dagguerréotype des franges d'interférence à partir d'une source de chaleur, ils illustrent la nature semblable de la lumière et de la chaleur.

En 1848, Fizeau démontre que le son en provenance d'une source mobile sera perçu différemment par un témoin immobile selon la direction de son mouvement : si la source se rapproche, le son est de plus en plus aigu, si elle s'éloigne, le son est de plus en plus grave. Il en est de même pour la lumière, la lumière d'une source mobile se rapprochant étant décalée vers le violet, celle d'une source s'éloignant étant décalée vers le rouge. Cette effet, nommé Doppler-Fizeau, du nom du physicien arrivé indépendamment à la même conclusion, permet, après les travaux complémentaires de KICHHOFF et BUNSEN, d'étudier le mouvement des astres.

En 1849, il donne une bonne approximation de la vitesse de la lumière (315000 km/s) grâce à un système ingénieux. Un rayon lumineux est projeté à travers une roue dentée en direction d'un miroir placé à une très grande distance. Pour certaines vitesses de la roue, le rayon passe entre deux dents, est réfléchi par le miroir et revient à sa source. La durée de ce parcours, et donc la vitesse de la lumière, est lié à la vitesse de la roue dont on mesure la vitesse de rotation. Une version améliorée de ce dispositif permettra à ALFRED CORNU, en 1870, d'obtenir une valeur très précise de la vitesse de la lumière.

Alors que la communauté scientifique croit encore à l'existence de « l'éther », support invisible de la propagation de la lumière, FRESNEL fait l'hypothèse qu'un corps en mouvement dans cet éther, l'entraîne en partie dans sa course. Fizeau confirme cette hypothèse en 1851, pourtant faite sur des bases fausses, grâce là encore à l'interférométrie. Il montre qu'un rayon lumineux projeté dans un tuyau dans lequel circule de l'eau, se propage moins vite dans le sens opposé au courant.

Biographie 2.2: MICHELSON, Albert Abraham

(19 Décembre 1852, Strzelno, Pologne - 9 Mai 1931, Pasadena, Californie, Etats-Unis)



Alors âgé de trois ans, Michelson suit sa famille qui quitte la Pologne pour San Francisco, Californie en 1855. A 17 ans, il entre à l'Académie Navale à Annapolis, Maryland, où il se trouve plus d'affinité avec les sciences qu'avec la mer. Diplômé en 1873, il enseigne les sciences dans cette même académie jusqu'en 1879.

Dès 1878, Michelson débute la course qu'il mènera en tête jusqu'à la fin de sa vie : la mesure toujours plus précise de la vitesse de la lumière (c , célérité). Il est dit qu'il réalise sa première mesure à l'aide d'un équipement valant moins de 10 Dollars! Ressentant le besoin de se perfectionner en optique, il part pour l'Europe en 1880 et passe deux ans à Berlin, Heidelberg et Paris.

A Berlin, il construit son premier interféromètre. Ce dispositif est principalement composé de deux bras perpendiculaires : un rayon issu d'une source éloignée est séparé en deux par un miroir semi-argenté. Chacun des deux nouveaux rayons se propagent le long des bras, se réfléchissent sur des miroirs fixés à leur extrémité et viennent interférer après avoir été recombinaés. Tout tient à l'un des deux miroirs qui est mobile et à la précision, de l'ordre de la longueur d'onde du signal étudié, avec laquelle il est déplacé. La grande qualité de Michelson était la subtilité des dispositifs qu'il mettait en place, subtilité telle qu'il a parfois été le seul à pouvoir les faire fonctionner.

Avec l'aide du chimiste américain WILLIAMS MORLEY, il est à l'origine d'un « non résultat » éclatant. Le but de l'expérience de Morley-Michelson est de démontrer l'existence de l'éther : la Terre entraînant l'éther avec elle, et si l'un des bras de l'interféromètre est orienté dans le sens de son mouvement, la durée du trajet des deux rayons se propageant le long de chacun des bras doit être différent et donc produire des franges. A partir de 1887 et devant l'absence de résultat, Michelson n'a cessé d'améliorer la sensibilité de son dispositif, sans pour autant obtenir de frange. Ce non résultat a permis d'infirmer l'hypothèse de l'éther et a contribué à confirmer la théorie de la relativité établie par ALBERT EINSTEIN.

En 1893, partisan de calibrer le mètre étalon d'après une longueur d'onde donnée (idée adoptée en 1960), il donne une mesure du mètre en fonction de la longueur d'onde du cadmium. En 1920, il mesure le diamètre de Betelgeuse à l'aide d'un interféromètre et en 1923, à la tête d'un dispositif incluant deux pics séparés d'un quarantaine de kilomètres, un prisme octogonal sur l'un, un miroir sur l'autre, et la mesure, par triangulation, au quart de pouce près, de la distance les séparant, il établit une nouvelle valeur pour c à 299 798 km/s.

Pour sa dernière expérience, il utilisa un tube dans lequel le vide régnait : la lumière y effectuait des allers-retours jusqu'à parcourir près de 16 km. Les résultats parus en 1933 donnaient une vitesse de 299 774 km/s, soit moins de 2 km/s d'écart avec la valeur adoptée dans les années 70.

Biographie 2.3: YOUNG, Thomas

(13 Juin 1773, Milverton, Angleterre - 10 Mai 1829, Londres, Angleterre)



Thomas Young était en enfant précoce, lisant couramment à l'âge de deux ans et maîtrisant à 16 ans, le latin, le grec ancien et huit autres langues classiques et modernes. Sa curiosité l'a amené à s'illustrer dans de nombreux domaines parmi lesquels la médecine, la physique et l'archéologie.

En 1793, il débute des études de médecine et seulement un an plus tard, il présente devant la « *Royal Society* » les résultats de ses recherches sur l'accommodation de la forme de la cornée en fonction de la distance de l'objet observé. Il obtient son diplôme en 1796 et s'installe à Londres en 1799. En 1801, il démontre que l'astigmatie résulte d'une déficience de la courbure de la cornée.

En 1802, il publie ses travaux sur la théorie de la couleur, connue sous le nom de théorie de Young-Helmholtz. Il établit que la perception de l'ensemble des couleurs est due à la stimulation plus ou moins importante de seulement trois couleurs principales, rouge, vert et bleu.

En 1803, il décrit ses travaux sur l'interférence lumineuse et sur la formation de franges lorsqu'un rayon traverse un masque percé de deux trous très fins et très proches. A cette époque, c'est l'hypothèse corpusculaire émise par ISAAC NEWTON qui prédomine. Ce dispositif, connu sous le nom d'expérience des trous d'Young, permettait dès lors d'établir la nature ondulatoire de la lumière, mais, à cause de l'influence de Newton, cette hypothèse n'a été prise en compte que près de 15 ans plus tard, à la suite des travaux d'AUGUSTIN FRESNEL.

Parmi les contributions de Young, on trouve la notion d'énergie comme le produit de la masse et du carré de la vitesse, celle du travail comme le produit de la force par une distance, le « module d'Young » décrivant l'élasticité d'un solide, et des hypothèses sur les couleurs des bulles de savons. En 1813, il tente de déchiffrer les hiéroglyphes égyptiens et travaille sur la Pierre de Rosette à partir de 1814. En 1823, il publie une comparaison de ses travaux et de ceux de CHAMPOLLION, tentant par là de contester, sans succès, la primauté de Champollion. Son Dictionnaire Egyptien est publié à titre posthume en 1830.

Biographie 2.4: **FOURIER, Jean Baptiste Joseph**

(21 Mars 1768, Auxerre, France - 16 Mai 1830, Paris, France)



Dès l'âge de 10 ans, Joseph Fourier se retrouve orphelin, ayant perdu sa mère très tôt, tandis que son père et sa seconde femme meurt l'un après l'autre.

Il entre alors à l'école de Pallais que dirige le maître de musique de la cathédrale. En 1780, il entre à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre où il montre vite de grandes dispositions pour les mathématiques.

Sa première voie est celle des ordres : il entre au séminaire de l'abbaye bénédictine de Saint-Benoit-sur-Loire. Il reste cependant tiraillé entre la prêtrise et les mathématiques, écrivant dans une de ces lettres à BONARD à Paris : « *Hier j'ai fêté mes 21 ans, l'âge auquel Newton et Pascal avait déjà acquis assez de reconnaissance pour atteindre l'immortalité.* ».

Il ne prononce pas ses vœux et enseigne à partir de 1790 au collège bénédictin et à l'Ecole Royale Militaire à Auxerre. Alors qu'il hésite encore entre une vie consacrée à la foi et une

carrière scientifique, le climat politique décide pour lui et il s'implique dans le comité local de la Révolution. Animé par un espoir d'égalité, il est sur le point de démissionner alors que la Terreur fait rage, mais prisonnier des luttes intestines au sein de la Révolution, il est contraint de rester. Envoyé à Orléans, il fréquente des factions minoritaires surveillées par le pouvoir en place, ce qui lui vaut d'être emprisonné en 1794. A la mort de Robespierre, le climat se détend et il rejoint l'Ecole Normale nouvellement créée en 1795. Il fait là la connaissance de LAPLACE, LAGRANGE et MONGE enseignant à l'Ecole Normale. Après un nouveau passage en prison, de nouveau pour les incidents d'Orléans, il enseigne à la nouvelle Ecole Polytechnique dirigée par LAZARE CARNOT et Gaspard Monge. En 1797, il succède à Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique.

En 1798, il rejoint Napoléon pour sa campagne d'Egypte. Bloqué sur place à la suite de la bataille du Nil, il administre Le Caire, dirige les fouilles archéologiques et fonde l'Institut du Caire au sein duquel il siège, dans le département de mathématiques, en compagnie de Monge, MALUS... et Napoléon. De retour en France en 1801, il souhaite reprendre son poste de professeur à l'Ecole Polytechnique mais Napoléon a d'autres projets pour lui et le nomme Préfet de l'Isère, en siège à Grenoble. Contre mauvaise fortune bon cœur, il dirige les travaux de drainage de Bourgoin et la construction d'une voie rapide rejoignant Grenoble et Turin.

Parallèlement, il rédige de 1804 à 1807 son fameux traité « Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides » qu'il soumet à l'Institut de Paris dont le comité de lecture est composé de Lagrange, Laplace, Monge et LACROIX. Ceux-ci restent très sceptiques sur la qualité du document et notamment sur le développement des fonctions en séries trigonométriques. De plus, BIOT lui reproche de ne pas faire référence à ses propres travaux sur la dérivation des équations de transfert de chaleur paru en 1804, rejoint bientôt avec les mêmes objections par Laplace et POISSON. Et lorsque l'Institut lance une compétition sur la propagation de la chaleur en 1811, Fourier est le seul à soumettre ses travaux et gagne le prix, sans toutefois vraiment convaincre.

Alors que Napoléon est envoyé en exil, Fourier, pour éviter une confrontation périlleuse, le convainc de ne pas passer par Grenoble. Alors que l'Empereur effectue son retour d'Elbe, Fourier tente de convaincre la population de prêter allégeance au Roi et s'enfuit de Grenoble. Il trouve cependant les mots pour expliquer son comportement à Napoléon qui finit par lui pardonner et le nomme Préfet du Rhone.

De retour à Paris, Fourier est nommé à l'Académie des Sciences en 1817. En 1822, son essai « Théorie analytique de la chaleur » paraît enfin.

Bibliographie

- [1] Armand Hippolyte Louis FIZEAU : Rapport sur le prix bordin. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 1868.
- [2] Philippe WALDTEUFEL : Radiometric sensitivity of smos. *Notes Techniques pour SMOS*, 2000.
- [3] Jean Baptiste Joseph FOURIER : Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. 1807.
- [4] Jean Baptiste Joseph FOURIER : Théorie analytique de la chaleur. *Bulletin de la Société philomatique*, 1812.
- [5] Thomas YOUNG : Course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. 1807.
- [6] Pieter Hendrike VAN CITTERT : *Z. Physik*, 69:298, 1931.
- [7] Pieter Hendrike VAN CITTERT : Die wahrscheinliche schwingungsverteilung in einer von einer lichtquelle direkt oder mittels einer linse beleuchteten ebene. *Physica*, 1:201–210, 1934.
- [8] Frits ZERNIKE : The concept of degree of coherence and its application to optical problems. *Physica*, 5:785–795, 1938.

Chapitre 3

La relation entre les visibilités et la carte de température de brillance observée : le théorème de Van Cittert-Zernike

Sommaire

3.1	Corrélation des champs reçus par deux antennes	49
3.2	Instrumentation	52
3.2.1	Les LICEF	52
3.2.2	Le corrélateur	53
3.2.3	Les NIR	53
3.3	Relation fondamentale entre les visibilités et la température de brillance	55
3.3.1	Les gains d'antennes	55
3.3.2	Le phénomène de décorrélation spatiale	55
3.3.3	Relation Fondamentale	57

Le Jour de la Grande Mise en Route [...], il leur dit :
« - Quelle est la noble tâche pour laquelle moi, Le Grand Compute-Un, le second plus grand ordinateur dans l'univers du temps et de l'espace, ai-je été appelé à l'existence ?
- O Grand Compute-Un, la tâche pour laquelle nous t'avons conçu est celle-ci : nous voudrions que tu nous donnes..(une pause).. la Réponse!... »

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

3.1 Corrélation des champs reçus par deux antennes

Quelque soit la géométrie du réseau d'antenne d'un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture, le dispositif élémentaire est formé par un couple d'antennes dont la corrélation des signaux va fournir une mesure du degré de cohérence spatiale à la fréquence angulaire déterminée par la distance entre les antennes. La démonstration suivante, qui dans un premier temps ne fait

pas intervenir les caractéristiques instrumentales, permet d'établir, pour ce couple d'antenne, le théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE reliant la visibilité V à la distribution spatiale d'intensité T_b .

Le champ électromagnétique résultant de la présence d'une distribution de charge alternative ϵ placée en $\vec{\rho}_i$ est mesurée par une antenne placée en \vec{r}_i (voir Fig. 3.1). Sous les hypothèses suivantes :

- la polarisation du champ est ignorée : le champ E est considéré comme une quantité scalaire (cette supposition n'est pas nécessaire mais rend la démonstration plus claire),
- le champ résulte uniquement d'une distribution **surfactive** de charges,
- le principe de Huygens est appliqué (l'amplitude du champ varie en $|\vec{\rho}_i - \vec{r}_i|^{-1}$ et sa phase dépend du chemin parcouru de la source à la réception),

le champ E mesuré en \vec{r}_i est de la forme :

$$E(\vec{r}_i) = \int_{S_i} \epsilon(\vec{\rho}_i) \frac{e^{2j\pi \frac{|\vec{\rho}_i - \vec{r}_i|}{\lambda}}}{|\vec{\rho}_i - \vec{r}_i|} dS_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

La corrélation des champs mesurés en \vec{r}_1 et \vec{r}_2 est alors :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle E(\vec{r}_1) E^*(\vec{r}_2) \rangle \quad (3.2)$$

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \iint \langle \epsilon(\vec{\rho}_1) \epsilon^*(\vec{\rho}_2) \rangle \frac{e^{2j\pi \frac{|\vec{\rho}_1 - \vec{r}_1|}{\lambda}}}{|\vec{\rho}_1 - \vec{r}_1|} \frac{e^{-2j\pi \frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{r}_2|}{\lambda}}}{|\vec{\rho}_2 - \vec{r}_2|} dS_1 dS_2 \quad (3.3)$$

La source est supposée spatialement incohérente, ce qui implique que $\langle \epsilon(\vec{\rho}_1) \epsilon^*(\vec{\rho}_2) \rangle \neq 0$ uniquement pour $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}$, soit :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_S \langle |\epsilon(\vec{\rho})|^2 \rangle \frac{e^{2j\pi \frac{|\vec{\rho} - \vec{r}_1|}{\lambda}}}{|\vec{\rho} - \vec{r}_1|} \frac{e^{-2j\pi \frac{|\vec{\rho} - \vec{r}_2|}{\lambda}}}{|\vec{\rho} - \vec{r}_2|} dS \quad (3.4)$$

La géométrie du dispositif étudié, illustré par la figure 3.1, permet d'établir les relations suivantes :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_i| = \sqrt{\rho^2 + r_i^2 - 2\vec{\rho} \cdot \vec{r}_i} \quad (3.5)$$

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_i| = \rho \sqrt{1 + \left(\frac{r_i}{\rho}\right)^2 - 2\frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_i}{\rho^2}} \quad (3.6)$$

Or, la distance à la source est beaucoup plus grande que la distance entre les antennes, $\rho \gg r_i$:

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_i| \approx \rho + \frac{r_i^2}{2\rho} - \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_i}{\rho}, \quad (3.7)$$

ce qui conduit à :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2| = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\rho} + \frac{1}{\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 - \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1). \quad (3.8)$$

et à :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_1| |\vec{\rho} - \vec{r}_2| = \rho^2 \quad (3.9)$$

En remarquant que $r_1^2 = r_2^2 = d^2$, l'expression 3.8 se simplifie :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2| = \frac{1}{\rho}(\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 - \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1). \quad (3.10)$$

Il reste alors à exprimer les deux produits scalaires :

$$\vec{\rho} \cdot \vec{r}_1 = \frac{1}{2}(\rho^2 + r_1^2 - \rho_1^2) \quad (3.11)$$

$$\text{avec } \rho_1^2 = H^2 \left[1 + \frac{(x + d_1/2)^2}{H^2} + \frac{(d_2/2 - y)^2}{H^2} \right] \quad (3.12)$$

$$\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 = \frac{1}{2}(\rho^2 + r_2^2 - \rho_2^2) \quad (3.13)$$

$$\text{avec } \rho_2^2 = H^2 \left[1 + \frac{(x - d_1/2)^2}{H^2} + \frac{(d_2/2 + y)^2}{H^2} \right] \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{1}{\rho}(|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2|) = (d_1/2 + x)^2 - (d_1/2 - x)^2 + (d_2/2 - y)^2 - (d_2/2 + y)^2 \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\rho}(|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2|) = \frac{-(d_1x + d_2y)}{\rho} \quad (3.17)$$

Le report des deux résultats 3.17 et 3.9 dans la relation 3.4 conduit à l'expression suivante de la corrélation des champs reçus par les deux antennes :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_S \langle |\epsilon(\vec{\rho})|^2 \rangle \frac{e^{-2j\pi \frac{(d_1x + d_2y)}{\lambda\rho}}}{\rho^2} dS \quad (3.18)$$

Les définitions suivantes sont introduites :

Eclaircissement I.14: FRÉQUENCES SPATIALES ANGULAIRES, LIGNE DE BASE, COSINUS DIRECTEURS

- les quantités $u = \frac{d_1}{\lambda}$ et $v = \frac{d_2}{\lambda}$ sont des **fréquences spatiales angulaires**, avec d_1 et d_2 les projections du vecteur liant les deux antennes sur les axes du référentiel attaché à l'instrument et λ la longueur d'onde d'observation

- le couple (u, v) est appelé **ligne de base**

- $\xi = \sin \theta \cos \phi$ et $\eta = \sin \theta \sin \phi$ sont appelés **cosinus directeurs**

En introduisant $d\Omega = \frac{dS}{\rho^2}$, la relation 3.18 conduit au théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE[1][2][3] liant la distribution spatiale d'intensité $T_b(\xi, \eta) = \langle |\epsilon(\vec{\rho})|^2 \rangle$ à la valeur du degré de cohérence spatiale à la fréquence (u, v) :

$$V(u, v) = \int_{4\pi} T_b(\xi, \eta) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} d\Omega \quad (3.19)$$

$$V(u, v) = \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} \frac{T_b(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta \quad (3.20)$$

Ainsi, **en négligeant tous les aspects instrumentaux**, la corrélation des signaux reçus par deux antennes ayant un champ de vue se recouvrant, fournit une mesure la transformée de Fourier à la fréquence (u, v) de la quantité $\tilde{T}_b(\xi, \eta) = \frac{T_b(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}$ appelée température de brillance modifiée. La section suivante va montrer comment les caractéristiques instrumentales vont venir modifier cette expression.

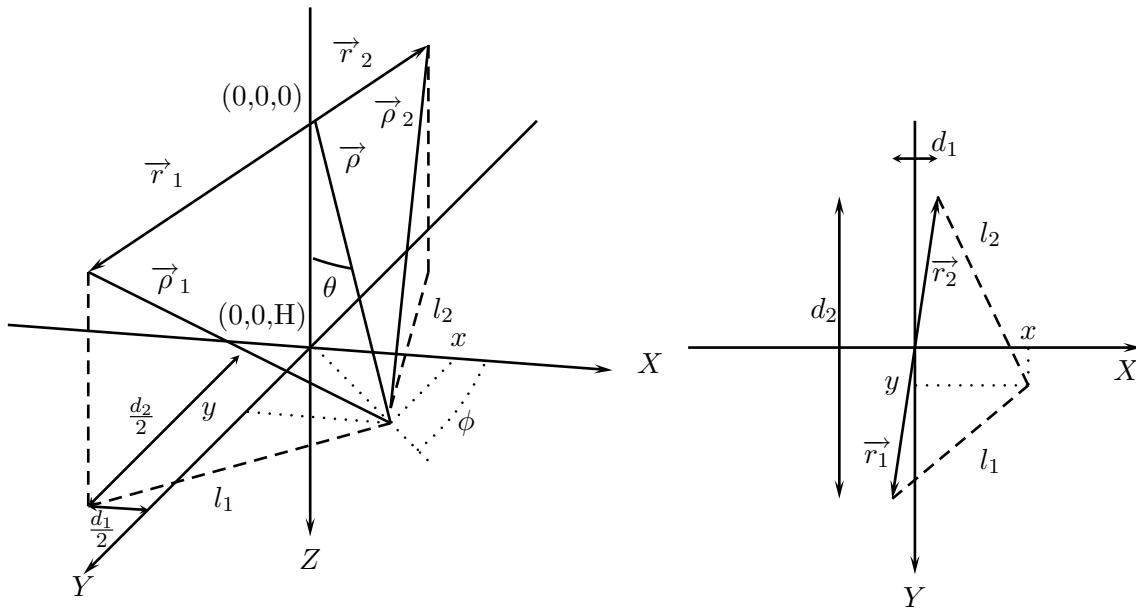


FIG. 3.1 – Description du référentiel lié à un couple d'antenne. L'origine est située à mi-distance de deux antennes placées à l'extrémité des vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . La projection de $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ sur l'axe X est notée d_1 , celle sur l'axe Y , d_2 . Les antennes observent une distribution surfacique ϵ sur le plan $Z = H$ (projection sur ce plan à droite). Les coordonnées d'un point de ce plan sont notées (x, y, H) ou (ρ, θ, ϕ) .

3.2 Instrumentation

3.2.1 Les LICEF

Chacun des capteurs formant séparément un radiomètre de puissance totale, on retrouve les éléments décrits dans le chapitre 1, première partie. L'antenne et la partie « puissance totale » du récepteur sont rassemblées au sein du LICEF [4] (*Light weight Cost-Effective Front-end*) (voir Fig. 3.2), qui intègre les fonctions suivantes :

- **un déphasage de $\pi/2$** : les visibilité étant des quantités complexes, le signal à la sortie du premier filtrage et de l'amplification RF est séparé en deux parties, dont l'une, déphasée de $\pi/2$, est dite en quadrature de phase (notée Q) tandis que l'autre, inchangée est dite en phase (notée I). Cette opération est réalisée lors du mélange IF : chaque LICEF est bien sûr relié au même oscillateur et les câbles les reliant ont tous la même longueur afin de prévenir tout déphasage.

- **l'échantillonnage** : celui-ci est nécessaire à la numérisation du signal et est réalisé par un échantillonneur « 1 bit » à la cadence de 56 Mbit/s. Cette étape n'implique par de perte d'information, l'échantillonnage du signal respectant les conditions de Shannon.

- **la quantification** : ce sont les valeurs quantifiées du signal qui seront numériquement corrélées dans l'étape suivante. Or, la corrélation de signaux numérisés n'est pas équivalente à la corrélation de ces mêmes signaux dans leur version analogique : cela va induire une modification de la relation entre les visibilité et la température de brillance et sur laquelle nous reviendrons par la suite



FIG. 3.2 – *Light weight Cost-Effective Front-end* deuxième génération : LICEF-2, développé par les sociétés MIER et EADS-CASA (Espagne). Ce dispositif intègre l'antenne et une chaîne de réception de type radiomètre de puissance totale.

3.2.2 Le corrélateur

Le corrélateur est schématiquement composé de deux éléments : un multiplicateur et un intégrateur. Pour un couple d'antennes donné, un signal en phase est multiplié à un autre signal en phase pour obtenir la partie réelle d'une visibilité et avec un signal en quadrature de phase pour obtenir la partie imaginaire. Les produits de corrélation élémentaires sont alors intégrés (moyennés) durant un temps d'intégration τ .

3.2.3 Les NIR

Un ou plusieurs éléments (3 pour l'instrument MIRAS) sont dédiés spécifiquement à la mesure de la fonction de cohérence spatiale à la fréquence nulle, fournissant donc une mesure rattachée à la température moyenne de la scène observée. Ce sont des radiomètres à injection de bruit (*Noise Injection Radiometer*), de type radiomètre de DICKE. Ils permettent notamment la mesure de la température d'antenne et seront utilisés lors des phases de calibration de chaque récepteur.

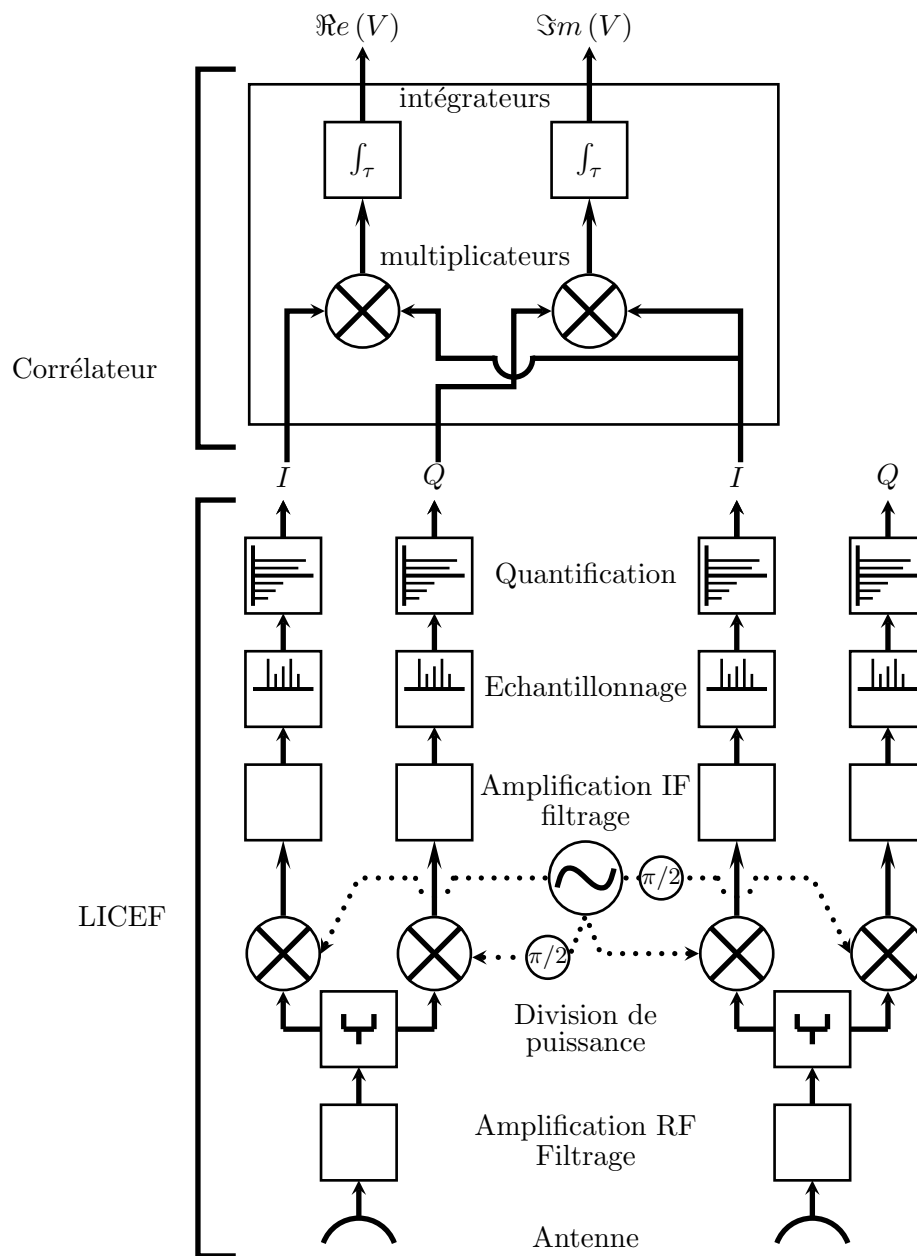


FIG. 3.3 – Schéma simplifié résumant les différents traitements opérés sur les signaux délivrés par deux antennes dans le but final d'obtenir une mesure de la visibilité.

3.3 Relation fondamentale entre les visibilitées et la température de brillance

3.3.1 Les gains d'antennes

Dès lors qu'un instrument réaliste est considéré, il est naturel d'introduire dans la relation (3.20) une pondération de la température de brillance par les gains des antennes considérées. Ainsi, pour deux antennes A_k et A_l données dont les gains, en tension, respectifs sont notés $F_k(\xi, \eta)$ et $F_l(\xi, \eta)$ et les angles solides équivalents Ω_k et Ω_l , la relation entre la visibilité V_{kl} correspondante et la température de brillance T_b de la scène observée devient :

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} F_k(\xi, \eta) F_l^*(\xi, \eta) T_b(\xi, \eta) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad (3.21)$$

avec (u, v) la fréquence angulaire définie par la distance entre les antennes, la notation F^* signalant le complexe conjugué du gain.

Les radiomètres à synthèse d'ouverture offrent la possibilité de mesurer le champ incident sous différentes polarisations. Ainsi, chaque antenne est équipée de deux ports orthogonaux situés dans le plan de l'instrument, le port X et le port Y . Chacun permet la mesure d'une composante du champ incident. Dans ce qui suit, on considérera que toutes les antennes fonctionnent sur le même port. La cas dit de polarisation totale dans lequel les antennes d'un même couple fonctionnent sur des ports différents fera l'objet d'une étude spécifique.

Les visibilitées sont donc obtenues par les produits de corrélations suivants :

$$V_{kl}^{XX} \propto \langle E_k^X E_l^{X*} \rangle \quad (3.22)$$

$$\text{ou } V_{kl}^{YY} \propto \langle E_k^Y E_l^{Y*} \rangle \quad (3.23)$$

Les gains F de la relation (3.21) désignent alors les gains co-polaires, et T , la composante de la température de brillance selon X ou Y .

3.3.2 Le phénomène de décorrélation spatiale

La relation (3.20) a été établie en supposant que le signal était mesuré à la fréquence centrale f_0 (ou à la longueur d'onde $\lambda = c/f$ avec c , vitesse de la lumière). Or, le signal est en fait filtré autour de f_0 et pour une bande passante B . Pour tenir compte de cette remarque et en supposant que les filtres sont parfaits (filtres rectangles centré en f_0), la relation (3.20) est sommée pour $f_0 - B/2 \leq f \leq f_0 + B/2$, en rappelant l'expression des fréquences angulaires $u = d_1/\lambda$ et $v = d_2/\lambda$:

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{B} \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \left\{ \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} T_b(\xi, \eta) e^{-\frac{2j\pi f}{c}(d_1\xi + d_2\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} \right\} df \quad (3.24)$$

où le coefficient $\frac{1}{B}$ est introduit par la normalisation. Seule l'exponentielle dépend de la fréquence, la fonction $I_{kl}(\xi, \eta)$ définie ci-dessous est donc calculée séparément (pour ne pas alourdir la

notation, la dépendance en u et v est rappelée par les indices kl) :

$$I_{kl}(\xi, \eta) = \frac{1}{B} \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} e^{-\frac{2j\pi f}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} df \quad (3.25)$$

$$I_{kl}(\xi, \eta) = -\frac{1}{B} \frac{1}{\frac{2j\pi}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \left[e^{-\frac{2j\pi f}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \right]_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \quad (3.26)$$

$$I_{kl}(\xi, \eta) = \frac{1}{B} \frac{e^{-\frac{2j\pi f_0}{c}(d_1\xi+d_2\eta)}}{\frac{2j\pi}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \left\{ e^{+\frac{2j\pi B/2}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} - e^{-\frac{2j\pi B/2}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \right\} \quad (3.27)$$

$$I_{kl}(\xi, \eta) = e^{-2j\pi f_0 \frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c}} \operatorname{sinc} \left(B \frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c} \right) \quad (3.28)$$

La relation (3.17) permet d'identifier la quantité $\frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c}$ comme le retard géométrique noté τ_{kl}^g : l'onde plane issue d'un point de la scène observée atteint une antenne du couple avec un retard τ_{kl}^g par rapport à l'autre. Il est donc défini par les relations :

$$\tau_{kl}^g(\xi, \eta) = \frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c} \quad (3.29)$$

$$\tau_{kl}^g(\xi, \eta) = \frac{(u\xi+v\eta)}{f_0} \quad (3.30)$$

La fonction $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$, exprimant le phénomène de « lavage des franges » (*fringe wash*) est alors introduite :

$$\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) = \operatorname{sinc}(B\tau_{kl}^g) \quad (3.31)$$

En intégrant les expressions (3.31) et (3.28) dans la relation (3.24), on obtient :

$$V_{kl}(u, v) = \iint_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leq 1} T_b(\xi, \eta) \tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) e^{-\frac{2j\pi f_0}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \quad (3.32)$$

Le phénomène de *fringe-wash* tient son nom de son rôle dans la dégradation du rapport signal sur bruit. En effet, il intervient comme un coefficient (complexe pour dès lors que les filtres ne sont pas identiques), dont le module est inférieur à 1 et qui va diminuer l'amplitude du signal T_b . Ses caractéristiques principales sont facilement lisibles dans la relation (3.29). Le rapport signal sur bruit est d'autant plus dégradé ($\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$ est d'autant plus proche de 0) que :

- la distance entre les antennes est grande : le phénomène de décorrélation spatiale est donc très pénalisant pour les grandes lignes de bases, c.-à-d. pour les petits détails de la scène observée,

- les cosinus directeurs sont grands : le phénomène de décorrélation spatiale est donc très pénalisant pour les points situés au bords du champ de vue.

La définition de la fonction $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$ pour des filtres quelconques est :

$$\hat{r}_{kl}(\tau_{kl}^g) = \frac{1}{\sqrt{B_k B_l}} e^{-2j\pi\tau_{kl}^g f_0} \int_0^{+\infty} H_k(f) H_l^*(f) e^{2j\pi\tau_{kl}^g f} df \quad (3.33)$$

avec H_i la fonction caractéristique du filtre i dont la bande passante B_i est définie par :

$$B_i = \int_0^{+\infty} |H_i(f)|^2 df \quad (3.34)$$

Pour des filtres rectangles, avec des largeurs de bande et des fréquences centrales différentes, il existe une expression analytique pour la fonction de fringe-wash [5]. On considère alors la fonction caractéristique suivante :

$$|H_i(f)| = \begin{cases} 1 & \text{pour } f_i - B_i/2 \leq f \leq f_i + B_i/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\text{et } H_i(f) = |H_i(f)| e^{j(\tau_i f + \phi_i)} \quad (3.36)$$

où f_i et B_i désigne la fréquence centrale et la bande passante du filtre i dont la phase varie linéairement avec la fréquence, τ_i étant le retard de groupe et ϕ_i la phase au retard nul.

$$\begin{aligned} f_a &= \max \{f_1 - B_1/2 - f_0, f_2 - B_2/2 - f_0\} \\ f_b &= \min \{f_1 + B_1/2 - f_0, f_2 + B_2/2 - f_0\} \\ \hat{r}_{kl}(\tau_{kl}^g) &= e^{j(\phi_1 - \phi_2)} e^{2j\pi f_0(\tau_1 - \tau_2)} e^{-2j\pi(\tau_1 f_1 - \tau_2 f_2)} e^{j\pi(\tau_1 - \tau_2 + \tau_{kl}^g)(f_a + f_b)} \\ &\quad \frac{\text{sinc}((\tau_1 - \tau_2 + \tau_{kl}^g)(f_b - f_a))}{\sqrt{B_1 B_2}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3.3 Relation Fondamentale

Les résultats précédents permettent donc d'établir la relation suivante entre les visibilitées V et la température de brillance de la scène observée T_b , dans laquelle les caractéristiques instrumentales sont prises en compte :

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} F_k(\xi, \eta) F_l^*(\xi, \eta) T_b(\xi, \eta) \tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} \quad (3.38)$$

où $F_k(\xi, \eta)$ et $F_l(\xi, \eta)$ désignent les gains des antennes k et l et $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$ est la fonction de décorrélation spatiale.

Biographie(s)

Biographie 3.1: **ZERNIKE, Frits**

(16 Juillet 1888, Amsterdam, Pays-Bas - 1966, Naarden, Pays-Bas)



Deuxième fils d'une famille comptant six enfants, Frits Zernike est le fils de deux enseignants en mathématiques. Enfant, curieux et ingénieux, il recrée un laboratoire à partir d'objets amassés ici ou là et se lance dans la photographie couleur, synthétisant son propre éther et assemblant, à l'aide d'un tourne-disque et d'un horloge, un observatoire miniature lui permettant de photographier les comètes.

Il entre à l'université d'Amsterdam en 1905 et ses travaux en mathématiques sont récompensés dès 1908 par une médaille d'or de l'université de Groningen. Le jury de la Société Hollandaise des Sciences, composé entre autres de LORENTZ et VAN DER WALLS, le récompense en 1912 pour ses travaux sur l'opalescence, qui formera la base de sa thèse (1916). En 1915, il obtient son premier poste à l'université de Groningen où il est fait professeur en 1920.

A partir de 1930, il oriente ses recherches vers l'optique. C'est à cette date qu'il fait sa grande découverte du phénomène de contraste de phase mais ce n'est qu'en 1941, sous l'occupation allemande des Pays-Bas, que sont développés les premiers microscope fonctionnant sur ce principe.

Pour cette découverte, il est récompensé par la Microscopical Royal Society, la médaille Rumford de la Royal Society et enfin, le prix Nobel de physique en 1953.

Bibliographie

- [1] Pieter Hendrike VAN CITTERT : *Z. Physik*, 69:298, 1931.
- [2] Pieter Hendrike VAN CITTERT : Die wahrscheinliche schwingungsverteilung in einer von einer lichtquelle direkt oder mittels einer linse beleuchteten ebene. *Physica*, 1:201–210, 1934.
- [3] Frits ZERNIKE : The concept of degree of coherence and its application to optical problems. *Physica*, 5:785–795, 1938.
- [4] M. MARTIN-NEIRA, P. PIIRONEN, S. RIBO, E. PANARO, J. FONT-ROSELLO, J. MARTI-CANALES, I. ZAYER, A. MARTIN-POLEGRE, P. IVERSEN, A. RIVADA, R. ROUMEAS, M. AGUIRRE et P. SILVESTRIN : The miras demonstrator pilot project - toward smos. *ESA Bulletin*, (111B):123–131, Août 2002.
- [5] B. PICARD, E. ANTERRIEU, G. CAUDAL et P. WALDTEUFEL : Impact of the fringe washing function on the spatial resolution and on the radiometric sensitivity of the smos instrument. *Proc. of IGARSS'03*, pages 3067–3069, 2003.

Deuxième partie

Traitements des données interférométriques

Le traitement des données interférométriques fournies par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture demande un cadre géométrique rigoureux. La configuration du réseau va déterminer les caractéristiques de la bande passante sur lequel est échantillonnée la fonction de cohérence spatiale et par conséquent le maillage sur lequel se fera la reconstruction. L'espacement entre les antennes va, lui, déterminer la géométrie du champ de vue reconstruit véritablement exploitable. D'autre part, si le maillage est régulier dans le repère des antennes, il ne l'est plus dans le repère terrestre : dans le cas particulier des cartes de température de brillance à bande limitée, une méthode d'interpolation adaptée au traitement des mesures instrumentales des RISO permet de palier à ce problème.

Lorsque le cadre géométrique est fixé, il est possible de développer des fenêtres d'apodisation 2D qui vont contribuer à diminuer les oscillations de GIBBS causées par une coupure abrupte du signal au bord de la bande passante. Une adaptation de la forme de ces fenêtres à la forme spécifique de cette bande passante permet d'améliorer les caractéristiques de ces fenêtres.

L'apodisation classique n'est pas suffisante face à une contrainte imposée par le traitement des cartes de température de brillance pour l'estimation des paramètres géophysiques : la résolution spatiale doit être constante dans tout le champ reconstruit, ce qui n'est pas le cas lors du passage au référentiel terrestre. Le multi-fenêtrage, appelé aussi « strip adaptive processing », offre une solution permettant d'obtenir une résolution isotrope dans le champ reconstruit.

Chapitre 4

Cadre mathématique

Sommaire

4.1	Couvertures fréquentielles expérimentales et grilles d'échantillonnage	63
4.1.1	Configuration en U et maillage cartésien	65
4.1.2	Configuration en Y et maillage hexagonal	69
4.2	Espaces et opérateurs	74
4.2.1	Espaces des objets, des données et sous-espaces associés	74
4.2.2	Les opérateurs clés	75
4.3	G, opérateur de modélisation	76
4.3.1	Action des opérateurs G et G*	76
4.3.2	Propriétés de la matrice G	77

*« - La Réponse ? La Réponse à quoi ?
- A la Vie ! A l'Univers ! et au Reste ! »
Computer-Un ménagea un instant de réflexion.
« C'est coton
- Mais peux-tu le faire ?
- Oui, [...] mais il va falloir que j'y réfléchisse.
Toutefois, le déroulement de ce programme va
prendre un petit moment...Sept millions et demi
d'années. »...*

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

4.1 Couvertures fréquentielles expérimentales et grilles d'échantillonnage

Les fréquences spatiales angulaires pour lesquelles est échantillonnée la fonction de cohérence spatiale sont déterminées par la position relative des antennes du réseau interférométrique. La géométrie de ce réseau conditionne donc les caractéristiques de la grille d'échantillonnage sur les noeuds de laquelle peuvent coïncider les mesures interférométriques [1]. De plus, les dimensions limitées de l'instrument vont confiner les fréquences spatiales des mesures interférométriques à l'intérieur d'une région bornée du domaine de FOURIER. L'échantillonnage du signal mesuré dans

ce domaine et la périodisation de la couverture fréquentielle vont amener à définir un maillage périodique à deux dimensions sur lequel se fera la reconstruction.

Deux géométries envisageables pour un réseau destiné à l'observation de la Terre sont étudiées ci-dessous : une géométrie en Y, conduisant à un échantillonnage sur un maillage hexagonal et une géométrie en U, conduisant à un échantillonnage sur un maillage cartésien. Les deux grilles étudiées constituent les deux seuls maillages périodiques permettant de paver tout le plan. D'autres géométries, en T ou en L par exemple, changent la forme de la couverture expérimentale mais pas le maillage sous-jacent.

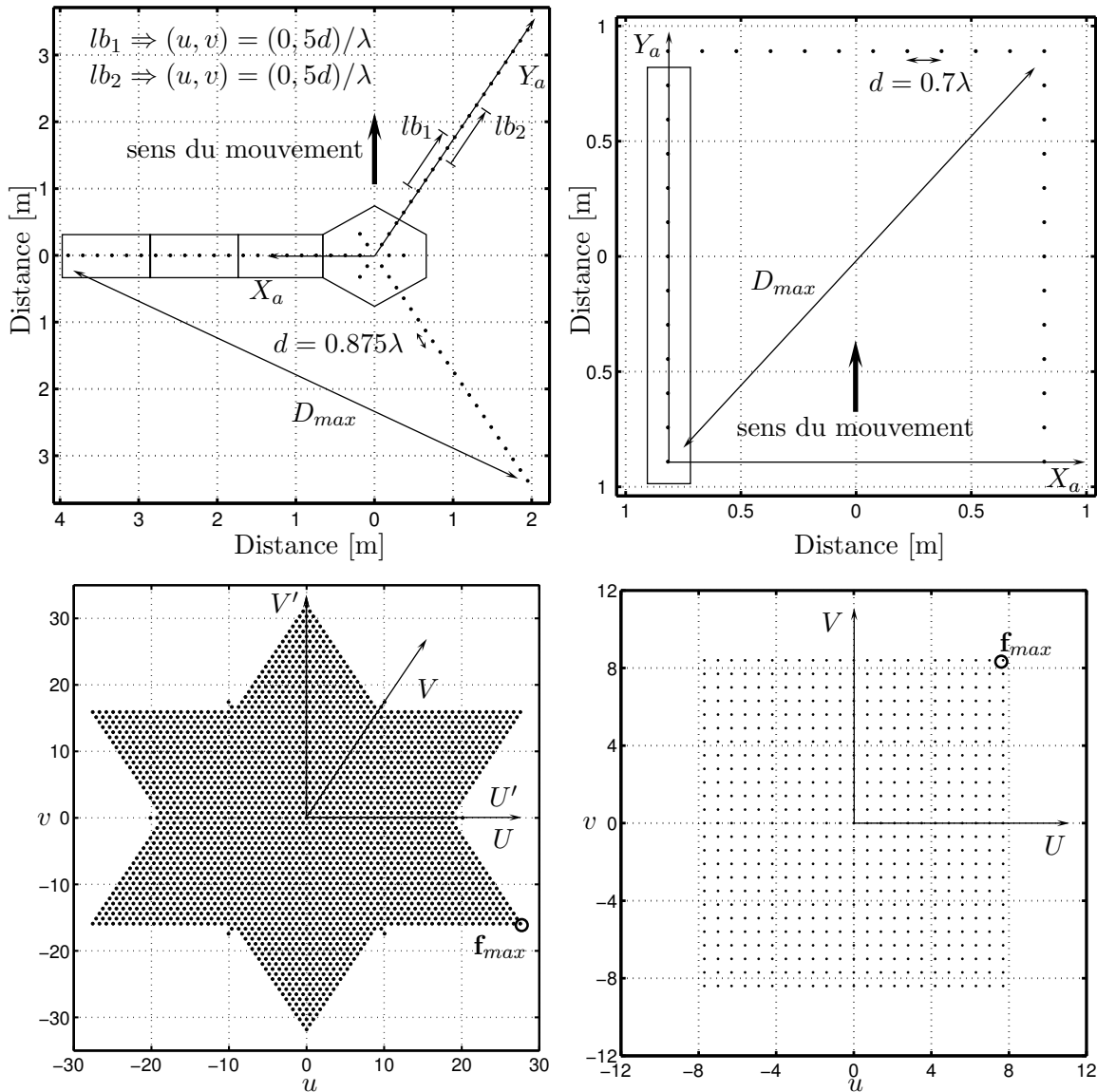


FIG. 4.1 – Deux configurations de réseau interférométrique conduisant à la définition de deux maillages différents. A gauche, une configuration en Y, proche de celle de MIRAS (en haut) et sa couverture fréquentielle caractéristique en étoile (en bas) définie sur un maillage hexagonal. A droite, une configuration en U, proche de celle du HUT2D, et sa couverture rectangulaire définie sur un maillage cartésien.

4.1.1 Configuration en U et maillage cartésien

J'ai été amené au cours de cette thèse à développer des outils de simulation et des méthodes de reconstruction adaptés à une configuration proche de celle de l'instrument HUT2D : 3 bras comportant chacun 12 antennes sont disposés en U, l'espace entre les antennes valant $d = 0.7\lambda$ [2]. J'expose ci-dessous les principales relations permettant de définir le domaine de FOURIER et le domaine spatial pour un maillage cartésien.

a. Domaine de Fourier

Les lignes de base, calculées à partir des positions relatives des antennes, définissent, dans le domaine de FOURIER, les fréquences spatiales angulaires pour lesquelles seront effectuées les mesures interférométriques. Les dimensions finies de l'instrument confinent les mesures à l'intérieur d'une couverture fréquentielle expérimentale H , dont la forme est caractéristique d'une géométrie du réseau interférométrique (voir Fig. 4.1, en bas). Une propriété importante des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture émerge alors : ce sont des instruments à bande passante limitée.

On peut aussi d'ores et déjà remarquer que deux différents couples d'antennes peuvent engendrer la même fréquence spatiale (voir les lignes de bases lb_1 et lb_2 sur la figure 4.1 en haut à gauche). On distinguera alors le nombre de lignes de base et donc de mesures instrumentales, du nombre de fréquences à l'intérieur de H .

Les mesures réalisées par un réseau en U sont effectuées à des fréquences spatiales coïncidant avec les noeuds d'un maillage cartésien. La couverture fréquentielle expérimentale H a la forme d'un rectangle, le maillage cartésienne qui la prolonge étant caractérisé par :

$$\mathcal{H} = \{ \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{u} + q_2 \mathbf{v}, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}, \quad (4.1)$$

et les vecteurs de translation \mathbf{u} et \mathbf{v} de ce réseau sont tels que :

$$\mathbf{u} = (\delta u, 0) \text{ et } \mathbf{v} = (0, \delta u) \text{ dans } (U, V) \quad (4.2)$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \delta u \quad (4.3)$$

avec $\delta u = d/\lambda = 0.7$.

La fréquence la plus grande \mathbf{f}_{max} est déterminée par la plus grande distance D_{max} entre deux antennes :

$$D_{max} = d\sqrt{(L-1)^2 + L^2} \quad \text{avec } L, \text{ nombre d'antenne par bras} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{f}_{max} = ((L-1)\delta u, L\delta u) \quad \text{dans } (U, V) \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{f}_{max}\| = \delta u\sqrt{(L-1)^2 + L^2} \quad (4.6)$$

La taille de la maille élémentaire du réseau cartésien est choisie de façon à contenir entièrement la couverture fréquentielle H . De plus, pour faciliter l'utilisation d'algorithme de transformée de FOURIER rapide (FFT pour *Fast Fourier Transform*), N est choisi comme une puissance de 2. Le réseau cartésien est alors caractérisé par :

$$N\mathcal{H} = \{ \mathbf{U}_{\mathbf{Q}} = Q_1 \mathbf{U} + Q_2 \mathbf{V}, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.7)$$

avec $\mathbf{U} = N\mathbf{u}$ et $\mathbf{V} = N\mathbf{v}$, les vecteurs de translation.

Etant données les dimensions de l'instrument considéré, la fréquence la plus grande est telle que $\|\mathbf{f}_{max}\| \approx 11.40$ et une maille élémentaire comprenant $N \times N = 32 \times 32$ pixels a une taille

suffisante pour contenir la bande passante. Toutefois, afin d'obtenir une représentation plus fine des résultats présentés par la suite, le nombre de pixels est fixé à $N \times N = 64 \times 64$.

La figure 4.2 illustre les relations précédentes pour un instrument comportant 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\sigma_{\mathbf{U}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(N\mathcal{H})$ des réseaux périodiques sont respectivement égales à $(\delta u)^2$ et $(\Delta u)^2$ où $\Delta u = N \delta u$.

b. Domaine spatial

C'est dans ce domaine que les cartes de températures de brillance sont reconstruites. Considérons alors \mathcal{H}^* le réseau réciproque de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}^* = \{ \boldsymbol{\Xi}_{\mathbf{P}} = P_1 \boldsymbol{\Xi} + P_2 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.8)$$

Les deux vecteurs de translation $\boldsymbol{\Xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$ sont tels que $\|\boldsymbol{\Xi}\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \Delta \xi$, où $\Delta \xi$ joue le rôle dual de δu . D'après la définition des réseaux réciproques [3], ils satisfont les relations d'orthogonalité suivantes : $\boldsymbol{\Xi} \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v} = 1$ et $\boldsymbol{\Xi} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = 0$.

La cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N , le réseau réciproque de $N\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^*/N = \{ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}} = p_1 \boldsymbol{\xi} + p_2 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.9)$$

et les vecteurs $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}/N$ et $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}/N$ sont tels que :

$$\boldsymbol{\xi} = (\delta \xi, 0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = (0, \delta \xi) \quad \text{dans} \quad (\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.10)$$

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \delta \xi = \Delta \xi / N \quad (4.11)$$

où $\delta \xi$ joue le rôle réciproque de Δu .

La figure 4.3 illustre les relations précédentes pour un instrument comportant 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$ et $\sigma_{\boldsymbol{\Xi}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ de ces réseaux périodiques cartésiens sont respectivement égales à $(\delta \xi)^2$ et $(\Delta \xi)^2$.

c. Relations caractéristiques

D'après une propriété bien connue des réseaux réciproques, le produit des surfaces des cellules élémentaires de deux réseaux réciproques est unitaire : $\sigma_{\mathbf{u}} \sigma_{\boldsymbol{\Xi}} = \sigma_{\mathbf{U}} \sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 1$. Par conséquent, les relations entre l'intervalle d'échantillonnage de FOURIER δu et l'étendue du champ de vue $\Delta \xi$ d'une part et la largeur de bande spectrale Δu et le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial $\delta \xi$ d'autre part sont telles que :

$$\Delta \xi \delta u = \Delta u \delta \xi = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta \xi = N \delta \xi, \\ \Delta u = N \delta u. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour $\delta u = 0.7$ et $N = 64$, l'étendue du champ de vue vaut $\Delta \xi \approx 1.43$ et le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial vaut $\delta \xi \approx 0.02$.

d. Grilles d'échantillonnage

Soient les N^2 entiers,

$$\mathbb{G}(N\mathcal{H}) = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in \mathcal{C}(N\mathcal{H}) \}. \quad (4.13)$$

$$\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 : \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^*) \}, \quad (4.14)$$

Comme $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ est échantillonné aux noeuds de $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$, $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ n'est autre que la grille spatiale bornée représentée sur la figure 4.3. La surface des pixels de cette grille est bien entendu égale à σ_{ξ} . De même, $\mathbb{G}(N\mathcal{H}) \delta u$ est la grille de FOURIER bornée représentée sur la figure 4.2, ici la surface de la cellule élémentaire $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ est bien sûr égale à $\sigma_{\mathbf{u}}$.

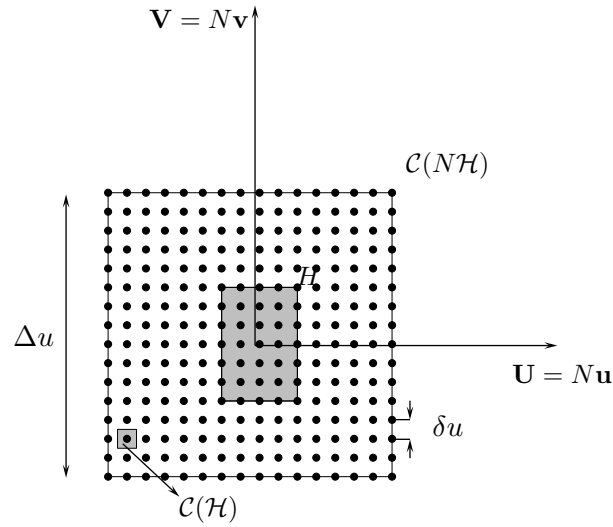


FIG. 4.2 – Cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$ échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H} , et couverture fréquentielle expérimentale H d'un réseau interférométrique en forme de U composé de 3 antennes pour chaque bras. Ici, N est égal à 16 de sorte que la couverture fréquentielle expérimentale H est contenue dans une cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$: $\delta u = d/\lambda$ est l'intervalle d'échantillonnage de FOURIER, et $\Delta u = N \delta u$ est la largeur de bande spectrale.

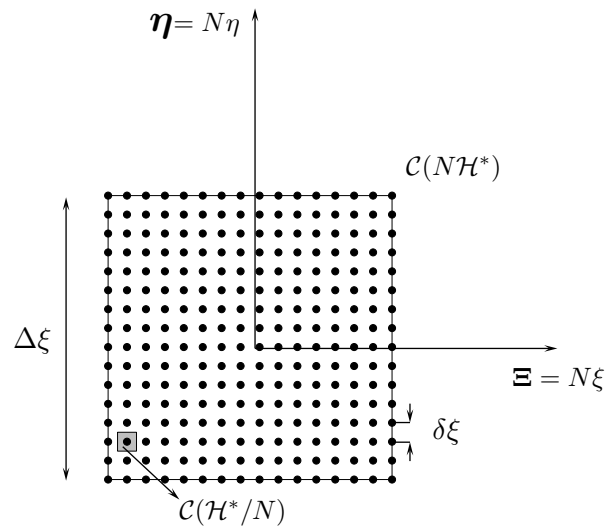


FIG. 4.3 – Cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N . Là encore, N est égal à 16, $\delta\xi$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial, et $\Delta\xi = N \delta\xi$ est l'étendue du champ de vue.

4.1.2 Configuration en Y et maillage hexagonal

La figure 4.1 montre un réseau interférométrique en Y avec une configuration, proche de celle de l'instrument MIRAS, comportant 21 antennes « avant » disposées régulièrement sur chacun des 3 bras (18 antennes sur 3 segments déployables et 3 antennes sur le « hub » central) et 2 antennes « arrières », appelées aussi « redondantes ». L'espace d entre les antennes est tel que $d = 0.875\lambda$. L'essentiel des caractérisations des grilles d'échantillonnage pour une configuration en Y a été défini par Anterrieu *et al.*[4].

a. Domaine de Fourier

Pour un réseau interférométrique en Y, les fréquences spatiales (u, v) , confinées à l'intérieur d'une bande passante H en forme d'étoile, coïncident avec les noeuds d'une grille hexagonale [5]. Le traitement des données interférométriques se fera alors sur des grilles hexagonales [6] [7].

Le choix d'un repère orienté selon (U, V) est naturel dès lors que le maillage est hexagonal. Toutefois, il peut être utile d'utiliser un repère orthonormé. Le passage d'un système d'axe à l'autre se fait donc à l'aide des relations suivantes :

$$U' = U + \frac{V}{2} \quad \text{et} \quad V' = \frac{\sqrt{3}}{2}V \quad (4.15)$$

$$U = U' - \frac{1}{\sqrt{3}}V' \quad \text{et} \quad V = \frac{2}{\sqrt{3}}V' \quad (4.16)$$

avec $\delta u = d/\lambda = 0.875$.

La grille hexagonale \mathcal{H} prolongeant la couverture fréquentielle expérimentale H est caractérisée ainsi :

$$\mathcal{H} = \{ \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{u} + q_2 \mathbf{v}, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}, \quad (4.17)$$

où les deux vecteurs de translation \mathbf{u} et \mathbf{v} de ce réseau sont tels que :

$$\mathbf{u} = (\delta u, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = (0, \delta u) \quad \text{dans } (U, V) \quad (4.18)$$

$$\mathbf{u} = (\delta u, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = (\delta u/2, \delta u\sqrt{3}/2) \quad \text{dans } (U', V') \quad (4.19)$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \delta u \quad (4.20)$$

La fréquence la plus grande \mathbf{f}_{max} , que l'on retrouve aux pointes de l'étoile, est déterminée par la plus grande distance D_{max} entre deux antennes :

$$D_{max} = \sqrt{3}Ld \quad \text{avec } L, \text{ nombre d'antennes par bras} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{f}_{max} = \left(\frac{D_{max}}{\sqrt{3}\lambda}, \frac{D_{max}}{\sqrt{3}\lambda} \right) = (L\delta u, L\delta u) \quad \text{dans } (U, V) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{f}_{max} = \left(\frac{3D_{max}}{2\sqrt{3}\lambda}, \frac{D_{max}}{2\lambda} \right) = \left(\frac{3L\delta u}{2}, \frac{\sqrt{3}L\delta u}{2} \right) \quad \text{dans } (U', V') \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{f}_{max}\| = \sqrt{3}L\delta u \quad (4.24)$$

Le réseau est alors caractérisé par :

$$N\mathcal{H} = \{ \mathbf{U}_{\mathbf{Q}} = Q_1 \mathbf{U} + Q_2 \mathbf{V}, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.25)$$

avec $\mathbf{U} = N\mathbf{u}$ et $\mathbf{V} = N\mathbf{v}$, les vecteurs de translation.

Etant données les dimensions de l'instrument considéré, la norme de la fréquence la plus grande vaut $\|\mathbf{f}_{max}\| = 31.8$ et une maille élémentaire comprenant $N \times N = 64 \times 64$ pixels a

une taille suffisante pour contenir la bande passante. Toutefois, la réorganisation du stockage des données de la maille élémentaire (voir paragraphe d. de cette section) impose de choisir une maille plus étendue avec $N \times N = 128 \times 128$ pixels.

Afin d'illustrer les relations précédentes, la cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$ échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H} est montrée dans la figure 4.4, pour un instrument ne comptant que 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\sigma_{\mathbf{U}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(n\mathcal{H})$ des réseaux périodiques sont respectivement égales à $(\delta u)^2 \sqrt{3}/2$ et $(\Delta u)^2 \sqrt{3}/2$ où $\Delta u = N \delta u$.

b. Domaine spatial

Considérons \mathcal{H}^* le réseau réciproque de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}^* = \{ \mathbf{\Xi}_{\mathbf{P}} = P_1 \mathbf{\Xi} + P_2 \mathbf{\eta}, \mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{Z}^2 \} . \quad (4.26)$$

Les deux vecteurs de translation $\mathbf{\Xi}$ et $\mathbf{\eta}$ sont tels que $\|\mathbf{\Xi}\| = \|\mathbf{\eta}\| = \Delta \xi$, où $\Delta \xi$ joue le rôle dual de δu . Dans ce qui suit, la cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N , le réseau réciproque de $N\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^*/N = \{ \mathbf{\xi}_{\mathbf{p}} = p_1 \mathbf{\xi} + p_2 \mathbf{\eta}, \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 \} . \quad (4.27)$$

les vecteurs $\mathbf{\xi} = \mathbf{\Xi}/N$ et $\mathbf{\eta} = \mathbf{\eta}/N$ sont tels que :

$$\mathbf{\xi} = (\delta \xi, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{\eta} = (0, \delta \xi) \quad \text{dans} \quad (\mathbf{\Xi}, \mathbf{\eta}) \quad (4.28)$$

$$\mathbf{\xi} = (\delta \xi \sqrt{3}/2, \delta \xi/2) \quad \text{et} \quad \mathbf{\eta} = (0, \delta \xi) \quad \text{dans} \quad (\mathbf{\Xi}', \mathbf{\eta}') \quad (4.29)$$

$$\|\mathbf{\xi}\| = \|\mathbf{\eta}\| = \delta \xi = \Delta \xi / N \quad (4.30)$$

où $\delta \xi$ joue le rôle réciproque de Δu . Ils satisfont aussi aux relations d'orthogonalité suivantes : $\mathbf{\xi} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{\eta} \cdot \mathbf{V} = 1$ et $\mathbf{\xi} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{\eta} \cdot \mathbf{U} = 0$.

Afin d'illustrer les relations précédentes, une cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnées aux noeuds de \mathcal{H}^*/N est montrée sur la figure 4.5, pour un instrument ne comptant que 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\mathbf{\xi}}$ et $\sigma_{\mathbf{\Xi}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ de ces réseaux périodiques hexagonaux sont respectivement égales à $(\delta \xi)^2 \sqrt{3}/2$ et $(\Delta \xi)^2 \sqrt{3}/2$.

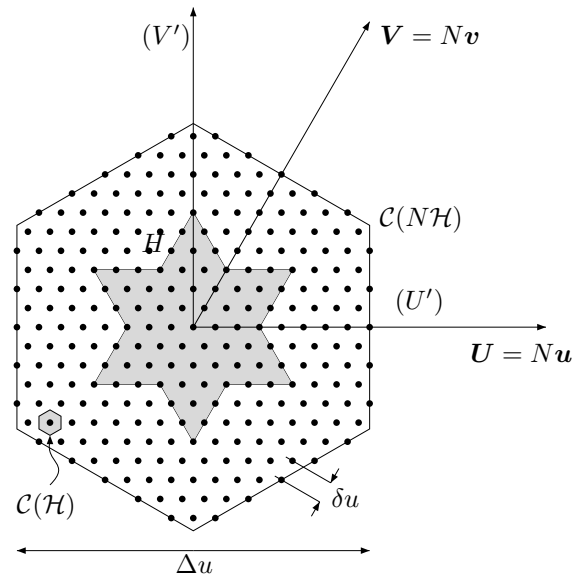


FIG. 4.4 – Cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$ échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H} , et couverture fréquentielle expérimentale H d'un réseau interférométrique en forme de Y composé de 3 antennes pour chaque bras et d'une antenne centrale. Ici, N est égal à 16 de sorte de que la couverture fréquentielle expérimentale H est contenue dans une cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$: $\delta u = d/\lambda$ est l'intervalle d'échantillonnage de FOURIER, et $\Delta u = N \delta u$ est la largeur de bande spectrale.

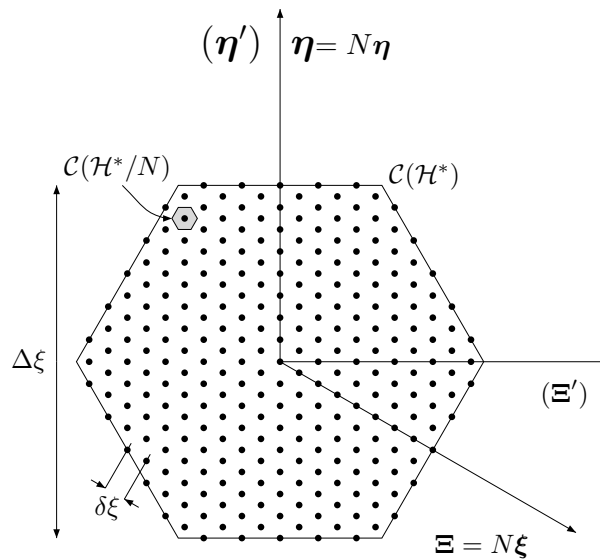


FIG. 4.5 – Cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N . Là encore, N est égal à 16, $\delta \xi$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial, et $\Delta \xi = N \delta \xi$ est l'étendue du champ de vue.

c. Relations caractéristiques

De l'expression des aires des cellules élémentaires de chacun des réseaux et de la relation entre les surfaces des réseaux réciproques, il vient dans le cas spécifique des réseaux périodiques hexagonaux :

$$\Delta\xi \delta u = \Delta u \delta\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ avec } \begin{cases} \Delta\xi = N \delta\xi, \\ \Delta u = N \delta u. \end{cases} \quad (4.31)$$

Pour $\delta u = 0.875$ et $N = 128$, l'étendue du champ de vue vaut $\Delta\xi \approx 1.32$ et le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial vaut $\delta\xi \approx 0.01$

d. Grilles d'échantillonnage

Soient les N^2 entiers,

$$\mathbb{G}(N\mathcal{H}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in \mathcal{C}(N\mathcal{H})\}. \quad (4.32)$$

$$\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 : \xi_{\mathbf{p}} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^*)\}, \quad (4.33)$$

Comme $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ est échantillonné aux noeuds de $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$, $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ n'est autre que la grille spatiale bornée représentée sur la figure 4.5. La surface des pixels de cette grille est bien entendu égale à σ_{ξ} . De même, $\mathbb{G}(N\mathcal{H}) \delta u$ est la grille de FOURIER bornée représentée sur la figure 4.4, ici la surface de la cellule élémentaire $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ est bien sûr égale à $\sigma_{\mathbf{u}}$.

e. Stockage des données et Transformée de Fourier Rapide sur un maillage hexagonal

Les grilles ne sont pas adaptées à l'utilisation des algorithmes de Transformée de FOURIER Rapide (FFT), développés pour des grilles cartésiennes. Une solution consiste en l'implémentation d'un algorithme spécifiquement étudié pour des grilles hexagonales [8]. Toutefois, une telle approche condamne son utilisateur à ne pas profiter des avancées faites sur les FFT pour les grilles cartésiennes.

Une autre solution est de redéfinir la maille élémentaire, en utilisant non pas un hexagone mais le rhomboïde, maille élémentaire traditionnelle des maillages hexagonaux en cristallographie [3]. La réorganisation des données échantillonnées sur les hexagones $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ et $\mathbb{G}(N\mathcal{H}) \delta u$ permet de construire les losanges $\mathbb{G}'(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ et $\mathbb{G}'(N\mathcal{H}) \delta u$, mieux adaptés au calcul matriciel et définis ainsi :

$$\mathbb{G}'(N\mathcal{H}) = \{\mathbf{q}' = \mathbf{q} \text{ modulo } N, \mathbf{q} \in \mathbb{G}(N\mathcal{H})\} \quad (4.34)$$

$$\mathbb{G}'(\mathcal{H}^*) = \{\mathbf{p}' = \mathbf{p} \text{ modulo } N, \mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\} \quad (4.35)$$

La FFT est appliquée sur ces grilles (voir Fig. 4.6 et 4.7) et les résultats sont réorganisés pour retrouver l'hexagone de la grille réciproque, méthode permettant de profiter des dernières avancées sur les algorithmes standards pour les grilles cartésiennes [4].

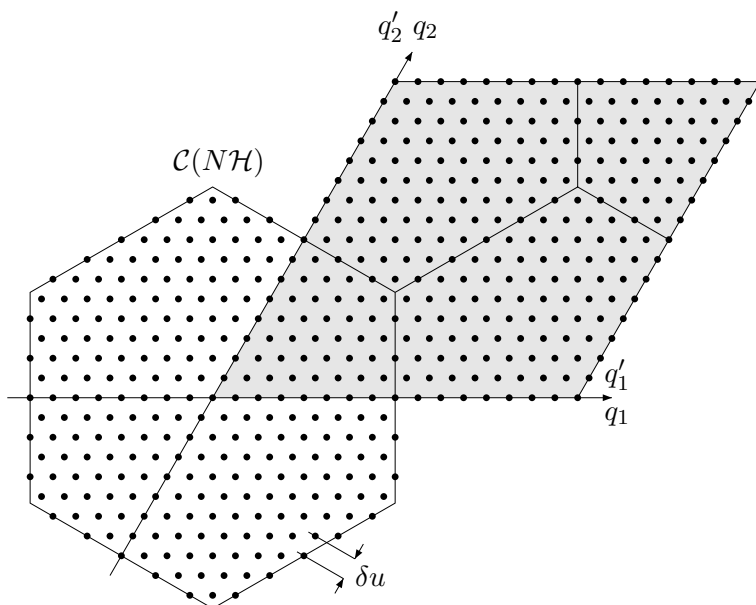


FIG. 4.6 – Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de FOURIER.

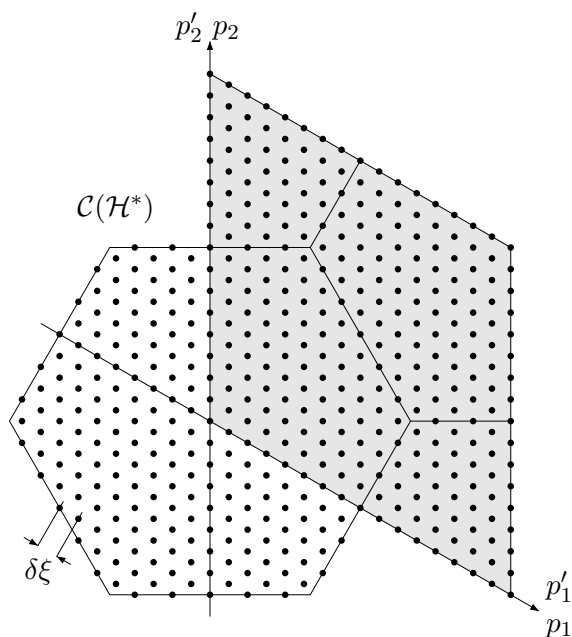


FIG. 4.7 – Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de spatial.

4.2 Espaces et opérateurs

Les paragraphes suivants décrivent les espaces de travail entre lesquels seront définis les opérateurs intervenant dans la reconstruction [4] [9]. configuration en Y.

4.2.1 Espaces des objets, des données et sous-espaces associés

a. E espace des objets

Il s'agit de l'espace des fonctions T de distribution des températures de brillance échantillonnées qui prennent leurs valeurs $T_{\mathbf{p}} \equiv T(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}})$ aux noeuds $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}}$ de la grille spatiale $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ [10] [11].

L'espace dual \widehat{E} est l'image de E par l'opérateur de transformée de FOURIER. Autrement dit, c'est l'espace des transformées de FOURIER \widehat{T} prenant leurs valeurs $\widehat{T}_{\mathbf{q}} \equiv \widehat{T}(\mathbf{u}_{\mathbf{q}})$ aux noeuds $\mathbf{u}_{\mathbf{q}}$ de la grille de FOURIER $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$.

b. \mathcal{E} , sous espace de E des fonctions à bande passante limitée.

Les fonctions \mathcal{T} à bande limitée dans H , définies comme étant les fonctions dont la transformée de FOURIER $\widehat{\mathcal{T}}$ est confinée dans la couverture fréquentielle expérimentale H , joue un rôle important dans la synthèse de FOURIER [11]. Elles appartiennent au sous-espace \mathcal{E} de E , dont l'image par l'opérateur de transformée de FOURIER est le sous-espace $\widehat{\mathcal{E}}$ de \widehat{E} . Les fonctions $\widehat{\mathcal{T}}$ prennent leurs valeurs $\widehat{\mathcal{T}}_{\mathbf{q}} \equiv \widehat{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathbf{q}})$ aux noeuds $\mathbf{u}_{\mathbf{q}}$ de la grille de FOURIER uniquement contenue dans H .

c. F , espace des données

Les fréquences spatiales \mathbf{u}_{kl} , associées à chaque couple d'antennes A_k et A_l de l'instrument, appartiennent à une liste finie \mathcal{L} dans le domaine de FOURIER :

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{u}_{kl} : 1 \leq k, l \leq N_a\} \quad (4.36)$$

où N_a est le nombre d'antennes de l'interféromètre. Comme il a déjà été précisé précédemment, cette liste peut être redondante : deux différentes paires d'antennes peuvent engendrer la même fréquence spatiale. L'espace des données F est l'espace des fonctions complexes hermitiennes V prenant leurs valeurs $V_{kl} \equiv V(\mathbf{u}_{kl})$ dans \mathcal{L} .

d. Propriété d'hermiticité des espaces

D'après les propriétés d'hermiticité de la transformée de FOURIER des fonctions réelles, et celles des visibilitées complexes, les espace duaux \widehat{E} et $\widehat{\mathcal{E}}$ peuvent être définis sur la moitié seulement des noeuds des grilles utilisées. La même remarque vaut pour l'espace des données F et la liste des fréquences expérimentales \mathcal{L} .

Cependant, afin d'introduire confortablement ces espaces et leurs normes, il était préférable de ne faire cette remarque qu'en dernier lieu plutôt que d'introduire une difficulté supplémentaire, et par là même une dose de confusion, dans leur définition.

Ainsi, pour un instrument de type MIRAS possédant L antennes « avant » et LL antennes « arrières » par bras, soit $N_a = 3(L + LL)$ antennes au total, et $N = 3L$ pour un instrument de type HUT2D qui ne possède pas d'antennes arrières, le nombre de visibilitées complexes mesurées est $N_a(N_a - 1)/2$ auquel il convient d'ajouter une mesure réelle à la fréquence nulle fournie par

les « NIR », soient $N_b = 1 + N_a(N_a - 1)/2$ visibilitées au total. L'espace des données F est donc isomorphe à \mathbb{C}^{N_b} , et donc \mathbb{C}^{2347} pour MIRAS et \mathbb{C}^{631} pour HUT2D.

De même, le nombre de fréquences contenues dans la bande passante est $6(L(L + 1) + LL)$ pour MIRAS et $(2L - 1)(2L + 1) - 1$ pour le HUT2D, auquel il convient d'ajouter la fréquence nulle. L'espace dual \widehat{E} est donc isomorphe à \mathbb{C}^{N_f} , avec $N_f = 3(L(L + 1) + LL) + 1$ pour MIRAS et $N_f = ((2L - 1)(2L + 1) - 1)/2 + 1$, soit \mathbb{C}^{1393} pour MIRAS et \mathbb{C}^{288} pour HUT2D.

Pour finir, l'espace des objets E est isomorphe à $\mathbb{R}^{N \times N}$, soit \mathbb{R}^{16384} ($N = 128$) pour MIRAS et à \mathbb{R}^{4096} ($N = 64$) pour HUT2D. De même, compte tenu de la propriété d'hermiticité, $\widehat{\mathcal{E}}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^{N \times N}$, soit \mathbb{C}^{16384} pour MIRAS et à \mathbb{C}^{4096} pour HUT2D. Le tableau 4.1 résume ces quelques résultats pour MIRAS et HUT2D.

TAB. 4.1 – Relations entre le nombre d'antennes, le nombre de visibilitées mesurées et le nombre de fréquence dans la bande passante.

	Nombre total d'antennes N_a	Nombre de visibilitées mesurées N_b	Nombre utile de fréquences N_f
MIRAS	$3(L + LL) = 69$	$N_a(N_a - 1)/2 + 1 = 2347$	$3(L(L + 1) + LL) + 1 = 1393$
HUT2D	$3L = 36$	$N_a(N_a - 1)/2 + 1 = 631$	$((2L - 1)(2L + 1 - 1))/2 + 1 = 288$

4.2.2 Les opérateurs clés

a. \mathbf{U} , opérateur de transformée de Fourier

Le passage du domaine de FOURIER au domaine spatiale, et inversement, est une opération courante en synthèse de FOURIER.

Soit, donc, l'opérateur de transformée de FOURIER \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} : E &\longrightarrow \widehat{E} \\ T &\longmapsto \mathbf{U}T = \widehat{T} \end{aligned}$$

avec, pour tout \mathbf{q} dans $\mathbb{G}(n\mathcal{H})$:

$$\widehat{T}_{\mathbf{q}} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} T_{\mathbf{p}} e^{-2j\pi \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{n}} . \quad (4.37)$$

où σ_{ξ} est la surface d'une cellule de $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)$.

b. \mathbf{Z} , opérateur de remplissage de zéros

Dès lors que l'on est amené à considérer des instruments à bande passante limitée, il est nécessaire de disposer d'un opérateur permettant compléter avec des zéros la grille contenant les données interférométriques.

Soit, maintenant, \mathbf{Z} l'opérateur de remplissage de zéros (*zero-padding*) au-delà de la couverture fréquentielle expérimentale H :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} : \widehat{\mathcal{E}} &\longrightarrow \widehat{E} \\ \widehat{T} &\longmapsto \mathbf{Z}\widehat{T} = \widehat{T} \end{aligned}$$

avec, pour tout \mathbf{q} dans $\mathbb{G}(n\mathcal{H})$:

$$\widehat{T}_{\mathbf{q}} = \begin{cases} \widehat{T}_{\mathbf{q}} & \text{si } \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.38)$$

L'action de son adjoint, \mathbf{Z}^* , qui consiste à ne garder que les composantes $\widehat{T}_{\mathbf{q}}$ de \widehat{T} à l'intérieur de H , est donc telle que $\mathbf{Z}^*\mathbf{Z} = \mathbf{I}$.

c. \mathbf{P}_H , projecteur sur \mathcal{E}

La présence d'un sous-espace des fonctions à bande passante limitée rend nécessaire la définition d'un projecteur permettant le passage de E à \mathcal{E} .

Etant données les définitions précédentes, il est possible d'introduire \mathbf{P}_H :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*\mathbf{U} \quad (4.39)$$

dont l'action est celle d'un projecteur sur l'espace \mathcal{E} des fonctions à bande limitée dans H puisqu'il est facilement démontrable que $\mathbf{P}_H^* = \mathbf{P}_H$ et $\mathbf{P}_H^2 = \mathbf{P}_H$.

4.3 G, opérateur de modélisation

L'opérateur de modélisation \mathbf{G} joue un rôle central dans la reconstruction d'image par des méthodes régularisées. Cette section caractérise l'action de \mathbf{G} mais aussi celle de son adjoint \mathbf{G}^* qui intervient dans la définition de certains opérateurs de reconstruction. La représentation matricielle de l'opérateur de modélisation est elle aussi explicitée.

4.3.1 Action des opérateurs \mathbf{G} et \mathbf{G}^*

L'opérateur de modélisation est l'opérateur \mathbf{G} de l'espace des objets E vers celui des données F décrivant la relation (3.38) entre les visibilité complexes et la distribution des températures de brillance de la scène observée :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : E &\longrightarrow F \\ T &\longmapsto \mathbf{G}T = V \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec, pour chaque paire d'antenne A_k et A_l :

$$V_{kl} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} T_{\mathbf{p}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl}\xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi\mathbf{u}_{kl}\xi_{\mathbf{p}}}. \quad (4.41)$$

Avant de déterminer l'expression de l'opérateur adjoint \mathbf{G}^* , il est nécessaire d'expliciter la définition des produits scalaires dans E et F :

$$(T^{(1)} | T^{(2)})_E \equiv \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \bar{T}_{\mathbf{p}}^{(1)} T_{\mathbf{p}}^{(2)}, \quad (4.42)$$

et

$$(V^{(1)} | V^{(2)})_F \equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl}^{(1)} V_{kl}^{(2)}. \quad (4.43)$$

Il vient alors :

$$(V | \mathbf{G}T)_F \equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} (\mathbf{G}T)_{kl} \quad (4.44)$$

$$= \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \quad (4.45)$$

$$= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} T_{\mathbf{p}} \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} \bar{V}_{kl}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \quad (4.46)$$

$$= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \overline{(\mathbf{G}^*V)_{\mathbf{p}}} T_{\mathbf{p}} \equiv (\mathbf{G}^*V | T)_E. \quad (4.47)$$

La définition de \mathbf{G}^* , adjoint de l'opérateur de modélisation \mathbf{G} est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* : F &\longrightarrow E \\ V &\longmapsto \mathbf{G}^* V = T \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec, pour tout \mathbf{p} dans $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)$:

$$T_{\mathbf{p}} = \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{\bar{F}_{k,\mathbf{p}} F_{l,\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} V_{kl} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{+2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}. \quad (4.49)$$

4.3.2 Propriétés de la matrice \mathbf{G}

Afin d'assurer le caractère réel des températures de brillance reconstruites, il est préférable de construire la matrice \mathbf{G} , correspondant à l'opérateur de modélisation, comme une matrice réelle. Ainsi, la première ligne contient des informations sur la contribution de chaque pixel à la fonction de cohérence spatiale à la fréquence nulle (valeur réelle de fait). Les $N_b - 1$ lignes suivantes contiennent la partie réelle de la contribution de chaque pixel à la fonction de cohérence spatiale et les $N_b - 1$ dernières lignes contiennent la partie imaginaire de cette contribution (voir Fig. 4.8).

Le principe de construction de cette matrice est alors simple : il s'agit de calculer la contribution aux visibilités de chacun des pixels composant la carte des températures T . On parcourt donc la grille d'échantillonnage en simulant une impulsion unité sur le pixel courant, $T(\xi_{\mathbf{p}}) = 1$, la température étant nulle ailleurs.

L'algorithme de construction de \mathbf{G} est donc le suivant :

Eclaircissement II.1: ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE \mathbf{G}

```

Do p = 1:N2
  G[1,p] = ||F1[p]||2  $\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{1-||\xi[p]||^2}}$ 
EndDo
Do b = 2:Nb
  Do p = 1:N2
    DXDY = e-2jπ(u[b]ξ[p])  $\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{1-||\xi[p]||^2}}$ 

    G[b,p] = Re { Fk[p]  $\bar{F}_l$ [p]  $\tilde{r}$ [b,p] DXDY }
    G[b+Nb-1,p] = Im { Fk[p]  $\bar{F}_l$ [p]  $\tilde{r}$ [b,p] DXDY }
  EndDo
EndDo

```

où l'indice \mathbf{b} parcourt la liste \mathcal{L} des lignes de base, F_k et F_l désignant les gains des antennes correspondants, l'indice p parcourt la grille d'échantillonnage sur laquelle est défini T et σ_ξ est l'élément d'intégration ($\sqrt{3}(d\xi)^2/2$ pour un maillage hexagonal, $(d\xi)^2$ pour un maillage cartésien).

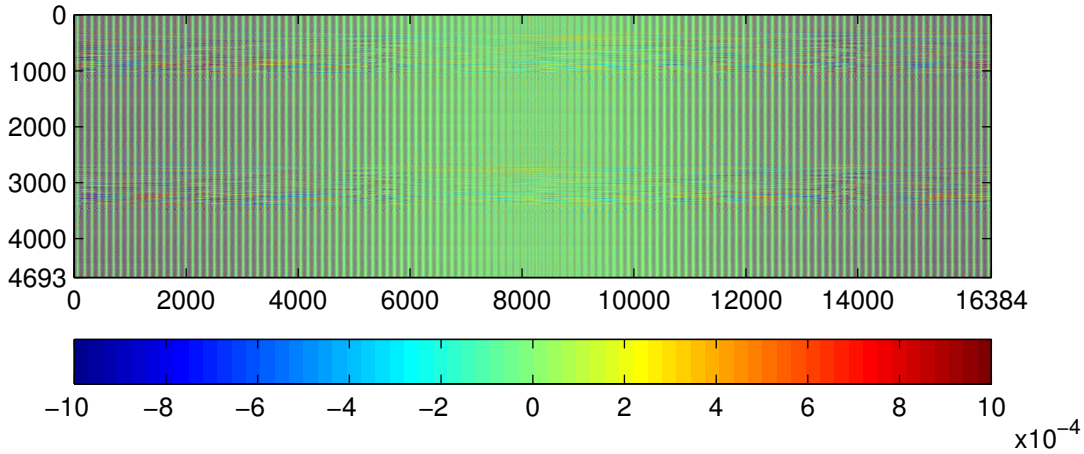


FIG. 4.8 – La matrice de modélisation \mathbf{G} pour un instrument réaliste de type MIRAS.

Le tableau 4.2 résume les caractéristiques de la matrice de modélisation d'un point de vue informatique.

TAB. 4.2 – Caractéristiques informatiques de \mathbf{G} : la taille est donnée pour une déclaration en double précision (8 octets) et le temps de calcul est mesuré sur un COMPAQ α SERVER SC 45 et une parallélisation sur 4 processeurs.

	Dimensions $(2N_b - 1) \times N^2$	Taille	Temps de calcul
MIRAS	4693×16384	586.6 Mo	15 s
HUT2D	1261×4096	39.6 Mo	1 s

Biographie(s)

Biographie 4.1: SHANNON, Claude Elwood

(30 Avril 1916, Gaylord, Etats-Unis - 24 Février 2001, Medford, Etats-Unis)



Claude Shannon est diplômé de l'université du Michigan en 1936, en mathématiques et en ingénierie électrique et il intègre le MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) au sein duquel il passe un *master* en ingénierie électrique et une thèse en mathématiques en 1940.

De 1941 à 1972, il travaille pour la société *AT&T Bell* dans le New Jersey, dont il parcourt les couloirs... juché sur un monocycle. En 1948, il révolutionne le domaine de la communication en publiant *A Mathematical Theory of Communication* dans lequel il suggère un codage de l'information sous la forme de bits, pour *binary digit*, introduisant la possibilité de transmettre l'information sous une forme discrète et non plus continue.

Lors de la dernière partie de sa carrière, il travaille sur l'intelligence artificielle. Il développe notamment les premiers programmes permettant aux machines de jouer aux échecs...et un monocycle à deux places.

Biographie 4.2: **NYQUIST, Harry**(7 Février 1889, Nilsby, Suède - 4 Avril 1976)



Harry Nyquist passe des premières années universitaires à l'université du Nord Dakota de 1912 à 1915 où il reçoit un diplôme en ingénierie électrique. Il passe sa thèse à l'université de Yale en 1917.

De 1917 à 1934, il est employé de l'American Telephone and Telegraph Company au sein du département de recherche et développement en transmission où il se consacre à l'étude de la transmission de l'image et de la voix par le télégraphe. De 1934 jusqu'à sa retraite en 1954, il travaille pour la société Bell Telephone Laboratories pour laquelle il continue ses recherches en transmission et particulièrement sur les systèmes de transmission. Parmi ses principales contribution, on trouve notamment la première formulation quantitative du bruit thermique ou encore le développement du diagramme de Nyquist, permettant d'établir la stabilité des systèmes en « *feedback* ».

Bibliographie

- [1] A. TERRAS : Fourier analysis on finite groups and applications. *Cambridge University Press*, 1999.
- [2] B. PICARD, E. ANTERRIEU, G. CAUDAL et P. WALDTEUFEL : Improved windowing functions for synthetic aperture imaging radiometers. *Proc. of IGARSS'02*, pages 2756–2758, 2002.
- [3] C. KITTEL : Introduction to solid state physics. *7th ed., New-York :Wiley*, 1995.
- [4] E. ANTERRIEU, P. WALDTEUFEL et A. LANNES : Apodization functions for 2-d hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 40(12):2531–2542, 2002.
- [5] A. LANNES et E. ANTERRIEU : Image reconstruction methods for remote sensing by aperture synthesis. *Proc. of IGARSS'94*, pages 2892–2903, 1994.
- [6] A. CAMPS, J. BARA, I. CORBELLA et F. TORRES : Visibility inversion algorithms over hexagonal sampling grids. *Proc. of Soil Moisture and Ocean Salinity Measurements and Radiometers Techniques*, Meeting ESA-ESTEC, 21 April 1995.
- [7] A. CAMPS, J. BARA, I. CORBELLA et F. TORRES : The processing of hexagonally sampled signals with standard rectangular techniques : application to 2d large aperture synthetic interferometric radiometers. *IEEE TGRS*, 35:183–190, 1997.
- [8] R.M. MERSEREAU : The processing of hexagonally sampled two-dimensional signals. *Proc. IEEE*, 67:930–949, 1979.
- [9] E. ANTERRIEU : A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 42(8):1649–1656, 2004.
- [10] André LANNES, Eric ANTERRIEU et Karim BOUYOUCEF : Fourier interpolation and reconstruction via shannon-type techniques ; part i : Regularization principle. *Journal of Modern Optics*, 41(8):1537–1574, 1994.
- [11] André LANNES, Eric ANTERRIEU et Karim BOUYOUCEF : Fourier interpolation and reconstruction via shannon-type techniques ; part ii : technical developments and applications. *Journal of Modern Optics*, 43(1):105–138, 1996.

Chapitre 5

Apodisation

Sommaire

5.1	Rappels sur l'apodisation et les facteurs de mérite	86
5.1.1	L'apodisation	86
5.1.2	Les facteurs de mérite.	89
5.2	Les fenêtres d'apodisation 2D	93
5.3	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante	101
5.3.1	Dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}	101
5.3.2	Dépendance radiale et angulaire du paramètre ρ_{max}	104

[Sept millions et demi d'années plus tard]
« Bonjour ! dit enfin Compute-Un
-Euh... Bonjour, ô Compute-Un. Est-ce que tu n'aurais pas... euh... c'est-à-dire...
- Une réponse pour vous ? Oui j'en ai une. La réponse à la Grande Question... De la Vie, de l'Univers et du Reste...
- Oui... !
- C'est...
- Oui... !!! ... ?
- Quarante-deux.

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

Comme l'a précisé le chapitre précédent, les dimensions finies des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture en font des instruments à bande passante limitée. Lors du processus de reconstruction et quelle qu'en soit la nature, la brusque coupure au bord cette bande passante dans le domaine de Fourier va se traduire, dans le domaine spatial, par des oscillations radio-métriques dans les images reconstruites. Le but de l'apodisation est littéralement d'« enlever les pieds » autrement dit de réduire l'amplitude de ces oscillations dites oscillations ou phénomène de GIBBS.

Dans le cadre de la reconstruction d'image pour les RISO, l'apodisation sera effectuée sur les cartes de températures reconstruites, et non pas sur les visibilités mesurées. Il s'agit de conserver lors de la reconstruction l'intégralité de l'information contenue dans les données instrumentales, notamment celle apportée par les lignes de bases redondantes.

L'exemple suivant illustré par les figures 5.1, 5.2 et 5.3 tend à introduire, à travers un exemple à 1 dimension, le concept de l'apodisation comme une réponse au problème des oscillations de GIBBS.

5.1 Rappels sur l'apodisation et les facteurs de mérite

5.1.1 L'apodisation

La figure 5.1-a représente la distribution 1D $T(x)$ des températures de brillance observées par l'instrument. La figure e 5.1-b montre la transformée de Fourier $\hat{T}(u)$ de cette distribution. En considérant que les visibilitées et les températures de brillance sont liées par une simple transformée de FOURIER, les mesures instrumentales sont les composantes de Fourier comprises entre $-L$ et $+L$, $2L$ étant la bande passante de l'instrument (voir Fig. 5.1-c) : autrement dit, le signal dans le domaine de Fourier est multiplié par une fonction rectangle qui vaut 1 pour $-L \leq u \leq +L$ et 0 sinon. Cette multiplication dans le domaine de Fourier se traduit, dans le domaine spatial, par une convolution par un sinus cardinal (voir Fig. 5.1-d) : les oscillations de GIBBS dans la distribution $T_W = T * W$ sont la conséquence de cette convolution.

Les notions de fuite radiométrique et de dégradation de la résolution spatiale émergent de la comparaison de la distribution initiale T avec la distribution reconstruite T_W . La première de ces deux sources de dégradation de la qualité de la reconstruction est due aux oscillations que l'on observe aux bords des créneaux (voir Fig. 5.2-a) : alors que la température observée a une valeur constante, la température reconstruite comporte des variations de l'ordre de 10% autour d'une valeur moyenne. D'autre part, la dégradation de la résolution spatiale apparaît clairement dans la difficulté à localiser précisément les limites du créneau reconstruit (voir Fig. 5.2-b).

Puisque ces phénomènes sont causés par une coupure brusque aux bords de la bande passante, le principe moteur de l'apodisation consiste à remplacer la fonction rectangle par des fonctions conduisant à une transition plus douce et ainsi diminuer l'amplitude des oscillations.

Cependant, ainsi que le montre la figure 5.3, cette opération a un coût : la meilleure résolution spatiale compte tenu des caractéristiques de l'instrument est celle obtenue avec la fenêtre rectangle et l'utilisation de n'importe quelle autre fenêtre conduira a une dégradation de cette résolution. Le choix de la fenêtre d'apodisation à appliquer dépend donc des objectifs finaux de la reconstruction : jusqu'où est-on prêt à dégrader la résolution spatiale afin d'améliorer la sensibilité radiométrique? Les facteurs de mérite des fenêtres, caractérisant leurs propriétés en terme de résolution ou de sensibilité radiométrique, vont offrir une aide précieuse quant à ce choix.

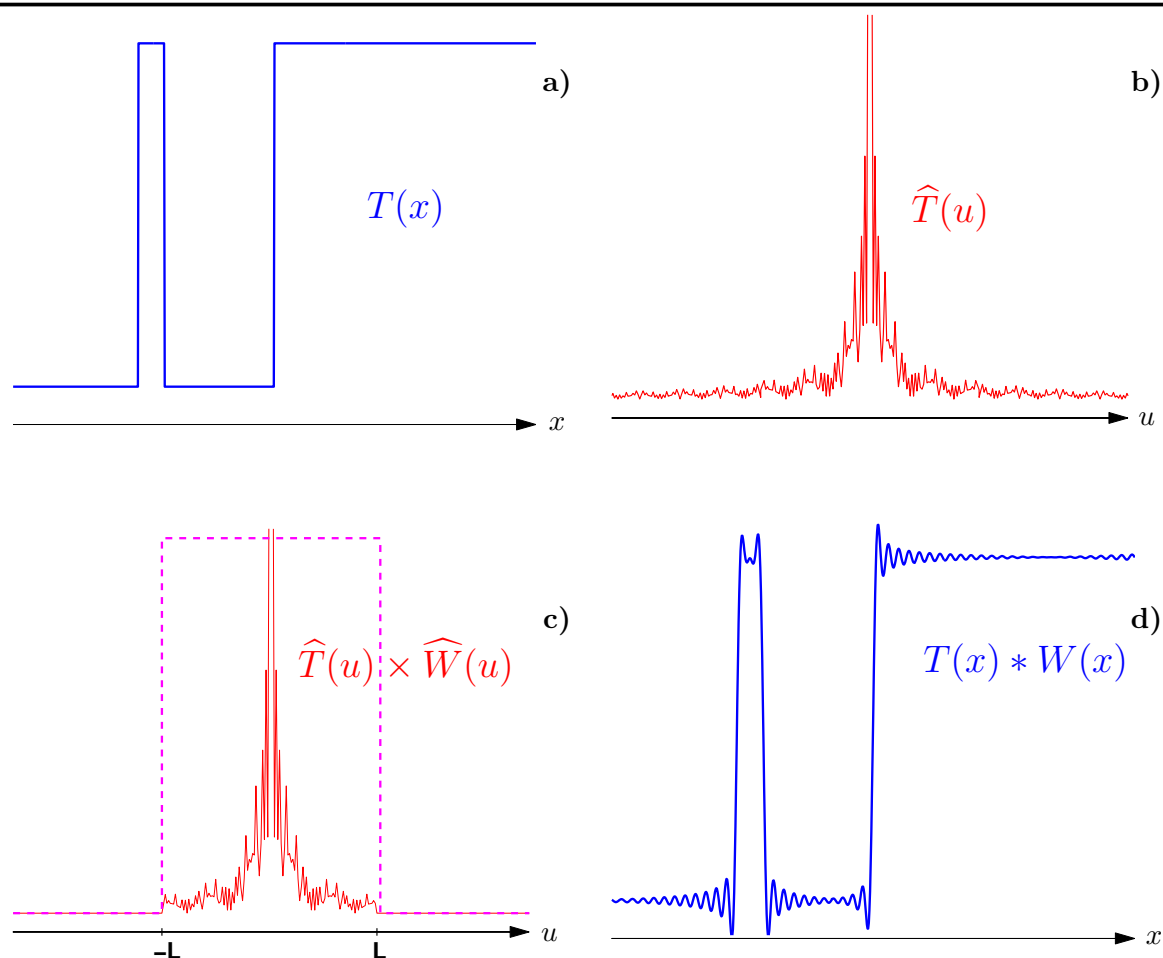


FIG. 5.1 – Oscillations de GIBBS : **a)** $T(x)$, distribution des T_b observée. **b)** $\hat{T}(u)$, la transformée de Fourier de $T(x)$. **c)** $\hat{T}\hat{W}$, les mesures instrumentales sont contenues à l'intérieur d'une bande passante limitée. **d)** $T_W = \hat{T} * \hat{W}$, la distribution de T_b reconstruite.

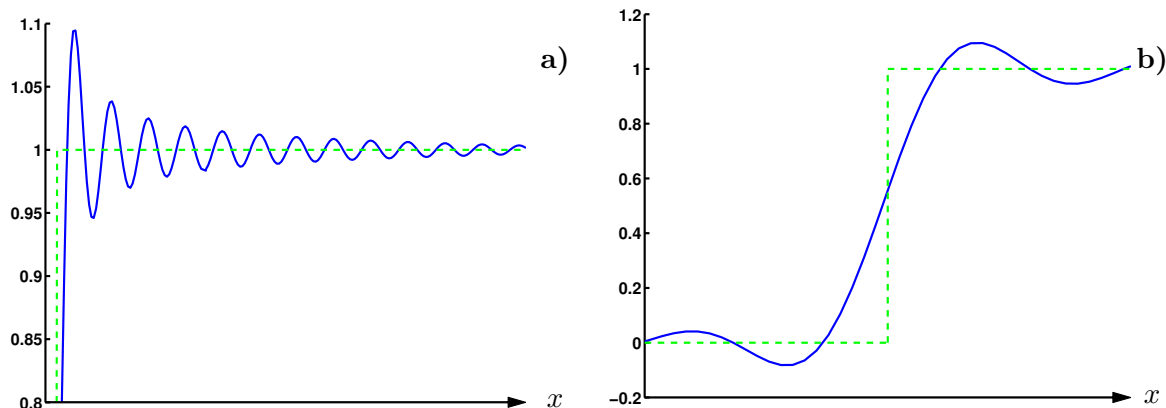


FIG. 5.2 – Fuite radiométrique et dégradation de la résolution spatiale : **a)** La température constante observée (tirets) est corrompue par des oscillations. **b)** la limite entre les deux plateaux reconstruits est moins bien localisée que dans le cas initial.

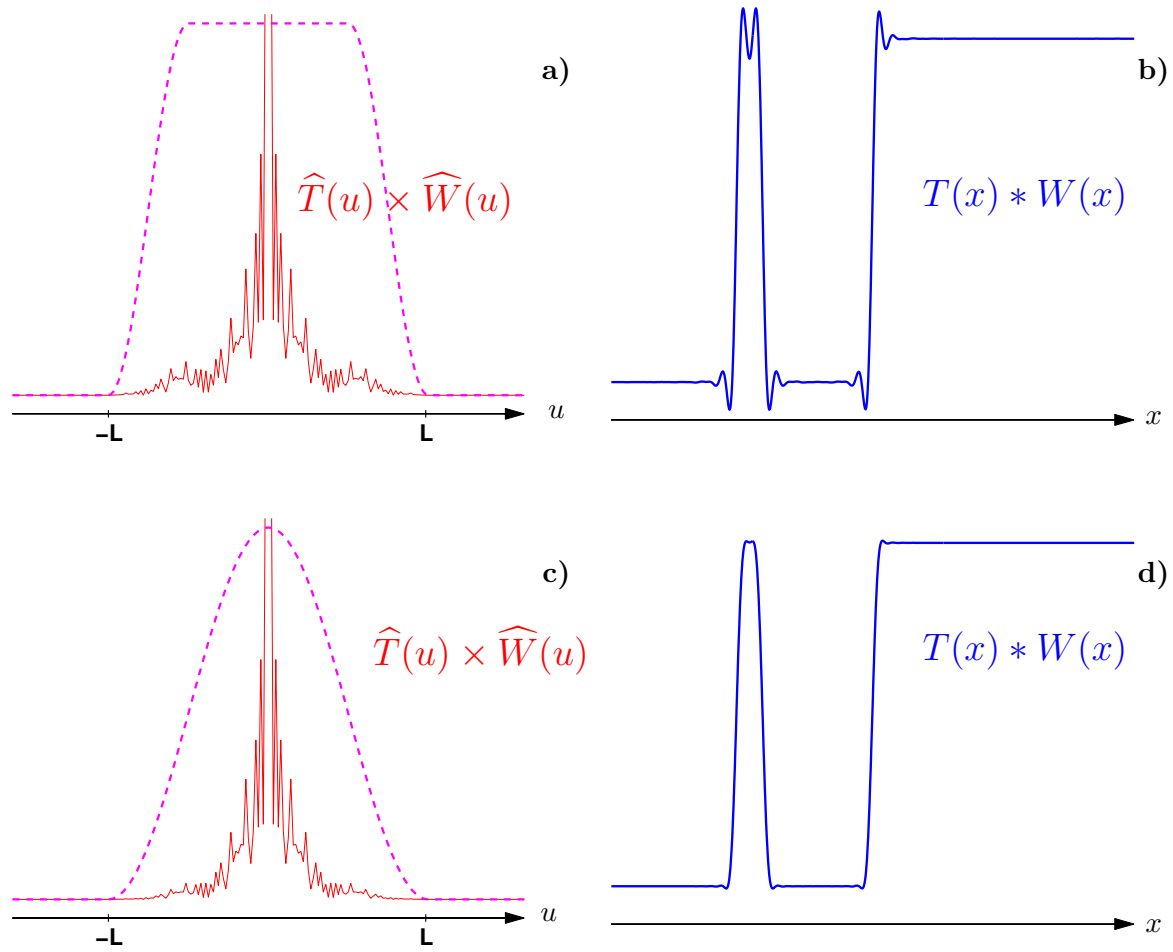


FIG. 5.3 – Deux exemples d’apodisation : le fait d’adoucir la transition au passage à zéro aux bords de la bande passante (**a**) et **c**) conduit à réduire l’amplitude des oscillations dans le domaine spatial mais aussi à dégrader la résolution spatiale (**b**) et **d**).

5.1.2 Les facteurs de mérite.

Les facteurs de mérite forment un ensemble de critères caractérisant le comportement des fenêtres d'apodisation dans le domaine spatial. Trois catégories sont distinguées selon qu'ils quantifient des propriétés de la fenêtre elle-même, du carré de son module ou du logarithme de son module.

a. ...« linéaires »

Ils caractérisent les propriétés de la fenêtre ($W(x)$) dans le domaine spatial (voir Fig. 5.4).

Eclaircissement II.2: FWHM - LARGEUR À MI-HAUTEUR

La largeur à mi-hauteur (noté FWHM pour *Full Width at Half-Maximum*) est la largeur du lobe principal de la fenêtre d'apodisation dans le domaine spatial, généralement mesurée à -3 dB (par rapport au maximum de la fonction).

La largeur du lobe principal (noté MBW pour *Main Beam Width*) est mesurée entre les deux premiers zéros de chaque côté du lobe principal.

Ces deux facteurs de mérite caractérisent principalement la résolution spatiale : plus leur valeur est faible, plus la résolution spatiale est précise.

b. ... « quadratiques »

Ils caractérisent les propriétés du module au carré de la fenêtre ($|W(x)|^2$) dans le domaine spatial (voir Fig. 5.5).

L'efficacité du lobe principal (noté MBE pour *Main Beam Efficiency*) est la quantité d'énergie contenue dans le lobe principal, exprimée comme un pourcentage de la quantité d'énergie totale contenue dans tous les lobes.

L'efficacité à mi-hauteur du lobe principal (noté BEHM pour *Beam Efficiency at Half-Maximum*) est elle-aussi un pourcentage de la quantité d'énergie totale, mais calculée à partir de la quantité d'énergie contenue à l'intérieur de la largeur à mi-hauteur.

Ces deux facteurs donnent là encore une indication sur la résolution spatiale mais aussi sur la sensibilité radiométrique, puisque l'énergie dans les lobes secondaires est prise en compte : plus leur énergie résiduelle est faible, plus les fenêtres sont efficaces.

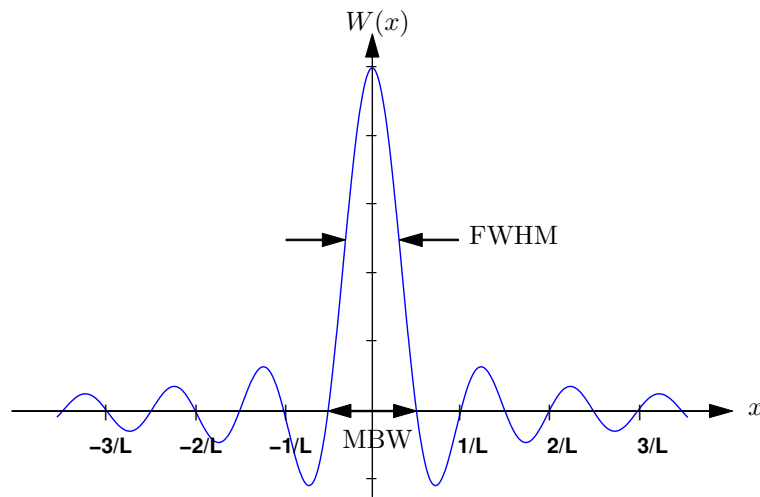


FIG. 5.4 – Facteurs de mérite « linéaires » : la largeur à mi-hauteur du lobe principal est liée à la résolution spatiale. L'axe des abscisses est gradué en unités de $1/L$ où $2L$ est la largeur de la bande passante.

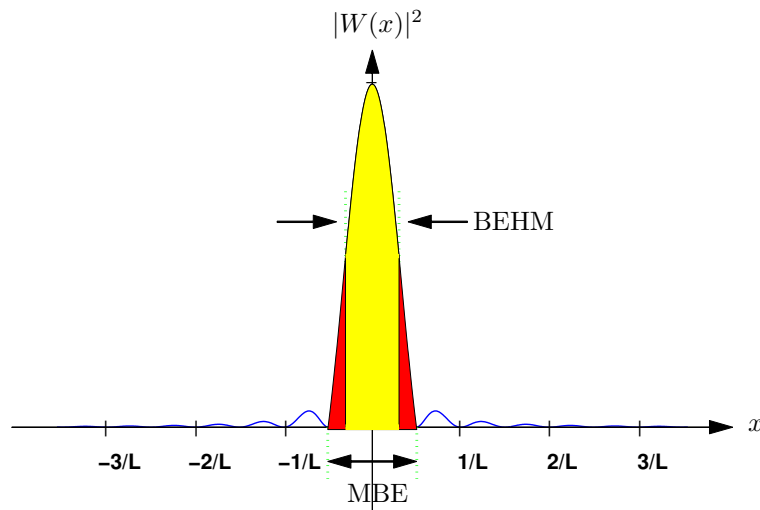


FIG. 5.5 – Facteurs de mérite « quadratiques » : l'efficacité du lobe principal et son efficacité à mi-hauteur sont liées à l'efficacité de la fenêtre.

c. ... « logarithmiques »

Ils caractérisent les propriétés du logarithme du module de la fenêtre ($\log |W(x)|$) dans le domaine spatial (voir Fig. 5.6).

Eclaircissement II.3: HSSL - PLUS GRANDE AMPLITUDE DES LOBE SECONDAIRES

La plus grande amplitude des lobes secondaires (HSSL pour *Highest Side-Lobe Level*), exprimée en dB (par rapport au lobe principal) est lié de près à la fuite radiométrique dans les premiers lobes secondaires : plus sa valeur est faible, plus la fuite radiométrique est faible dans les lobes secondaires les plus proches du lobe principal.

La décroissance asymptotique des lobes secondaires [1] (notée ADSL pour *Asymptotic Decay of Side-Lobes*) est la pente de la droite joignant les maximum des lobes secondaires (en dB par octave) : plus sa valeur est faible, plus la fuite radiométrique est faible dans les lobes secondaires les plus éloignés du lobe principal.

Or, puisque l'amélioration de la sensibilité radiométrique entraîne obligatoirement une dégradation de la résolution spatiale, la variation, par exemple, de la largeur à mi-hauteur en fonction du HSSL pour l'ensemble des fonctions d'apodisation est monotone. Un nouveau facteur de mérite, adapté à l'observation de distributions de T_b sur la Terre, a ainsi été développé, de façon à pouvoir procéder à un choix objectif d'une fenêtre d'apodisation optimale.

d. Distance de plus courte approche

Anterrieu *et al.* [2] ont introduit un nouveau facteur de mérite, spécifiquement développé pour la caractérisation des fenêtres d'apodisation dans un contexte de télédétection de la surface terrestre. La distance de plus courte approche (SACR, *Side Area Contribution Radius*) est la distance, mesurée depuis une marche entre deux températures initialement constantes (T_{min} et T_{max}), au delà de laquelle la l'énergie contenue dans les oscillations est inférieure à un pourcentage fixé de la différence $T_{max} - T_{min}$.

Cette marche est rencontrée dès lors que la scène observée contient une forte discontinuité comme une ligne de côte. La valeur fixée pour le pourcentage peut être adaptée aux spécifications instrumentales en terme de résolution spatiale et de fuite radiométrique. Plus le SACR est faible, plus se réduit la taille de la région dans laquelle la fuite radiométrique est significative. Il caractérise donc la contamination, par les lobes secondaires, d'une région proche d'une zone ayant des caractéristiques géophysiques différentes.

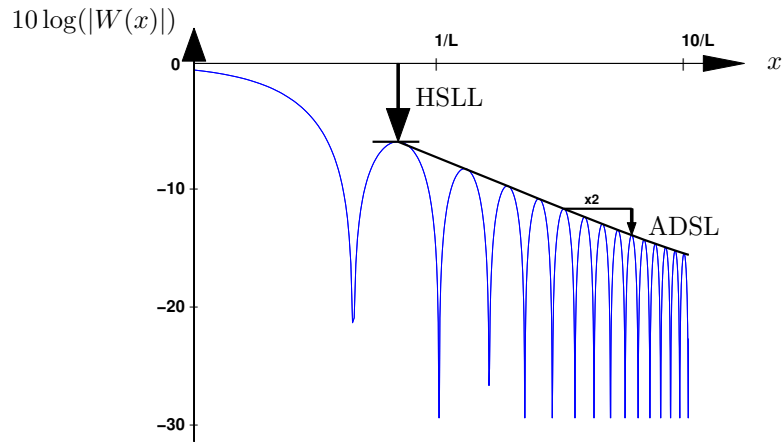


FIG. 5.6 – Facteurs de mérite « logarithmiques » : la plus grande amplitude des lobes secondaires et la décroissance asymptotique des lobes secondaires sont liées à la sensibilité radiométrique.

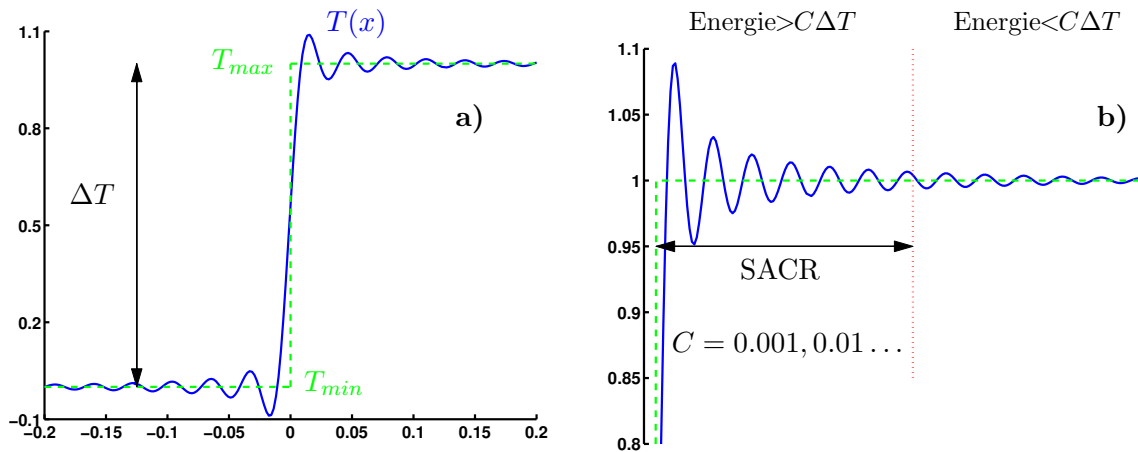


FIG. 5.7 – Distance de plus courte approche. **a)** le SACR est utile lorsque la scène observée contient un saut (ΔT) entre deux températures de brillance (T_{min} et T_{max}) comme le long de lignes de côtes. **b)** un zoom autour de T_{max} : le SACR est la distance mesurée à partir de la mi-hauteur de la marche jusqu'à la ligne pointillée délimitant deux régions.

5.2 Les fenêtres d'apodisation 2D

Les fenêtres d'apodisation 2D peuvent être directement adaptées des traditionnelles fenêtres 1D [1] [3] [4] [5] [6] : pour chaque point (u, v) de la bande passante de l'instrument, la valeur de la fenêtre 2D dépend de la variable radiale normalisée $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$, avec $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ et $\rho_{max} = \max_{(u,v)} \{\rho\}$ [7]. La fonction $\widehat{W} = \widehat{W}(u, v)$ ainsi construite est centro-symétrique dans le domaine de FOURIER et son support à la forme de la bande passante. Dans le domaine spatial, la fenêtre est notée $W = W(\xi, \eta)$ et elle présente une symétrie liée à la forme de la bande passante.

Anterrieu *et al.* [2] ont étudié les caractéristiques de plus de 20 fenêtres 2D définies sur un maillage hexagonal (voir Tab. 5.1) et pour un instrument en Y comportant 27 antennes par bras et un espace entre les antennes $\delta u = 0.875$. Parmi les fenêtres étudiées, certaines dépendent d'un paramètre et forment alors une famille de fenêtres (CAUCHY, POISSON, ..., KAISER, VAN DER MASS). Le tableau 5.2 et la figure 5.9 reprennent les principaux résultats. Pour les familles de fenêtres, les facteurs de mérite sont calculés pour la plus petite et la plus grande des valeurs du paramètre ainsi que pour les valeurs optimales du point de vue du SACR.

J'ai complété ces travaux en caractérisant ces mêmes fenêtres pour une configuration instrumentale en U et un maillage cartésien. Le tableau 5.3 et la figure 5.10 reprennent les principaux résultats.

Afin de faciliter la comparaison et étant donné que les propriétés des fenêtres d'apodisation dépendent naturellement des dimensions de l'instrument, les fréquences spatiales angulaires sont exprimées en unités de $[L_b/\lambda]$ où λ est la longueur d'onde d'observation et L_b la longueur de chaque bras et les facteurs de mérite sont donnés en unités de $[\lambda/L_b]$.

Les figures 5.8-a, b, c et d illustrent les valeurs prises par la fenêtre de BLACKMAN (approchée) dans le domaine de FOURIER (a et c) et dans le domaine spatial (b et d) pour une configuration en Y (a et b) et une configuration en U (c et d). Les contours tracés sous les fenêtres dans le domaine spatial permettent d'apprécier la répartition des maxima des lobes secondaires selon les axes de symétrie des bandes passantes correspondantes.

En comparant les caractéristiques des fenêtres pour les deux géométries étudiées, deux propriétés émergent : les fenêtres d'apodisation pour une configuration en Y sont plus étroites que pour une configuration en U, alors que les lobes secondaires sont plus élevés. En effet, à nombre d'antennes par bras et espace inter-antenne égaux, une configuration en Y possède une meilleure résolution spatiale (FWHM) mais une moins bonne sensibilité radiométrique (HSSL) qu'une configuration en U.

Les différences observées sur le FWHM s'expliquent en observant que la plus grande distance entre deux antennes d'un instrument en Y vaut $\sqrt{3}L_b$, ce qui est supérieur à la plus grande distance entre deux antennes d'un instrument en U, $\sqrt{(L_b - 1)^2 + L_b^2} \approx \sqrt{2}L_b$. Ainsi, comme le montrent les figures 5.8-a et 5.8-c, pour une même longueur L_b , H , la bande passante en étoile est plus étendue que la bande passante rectangulaire.

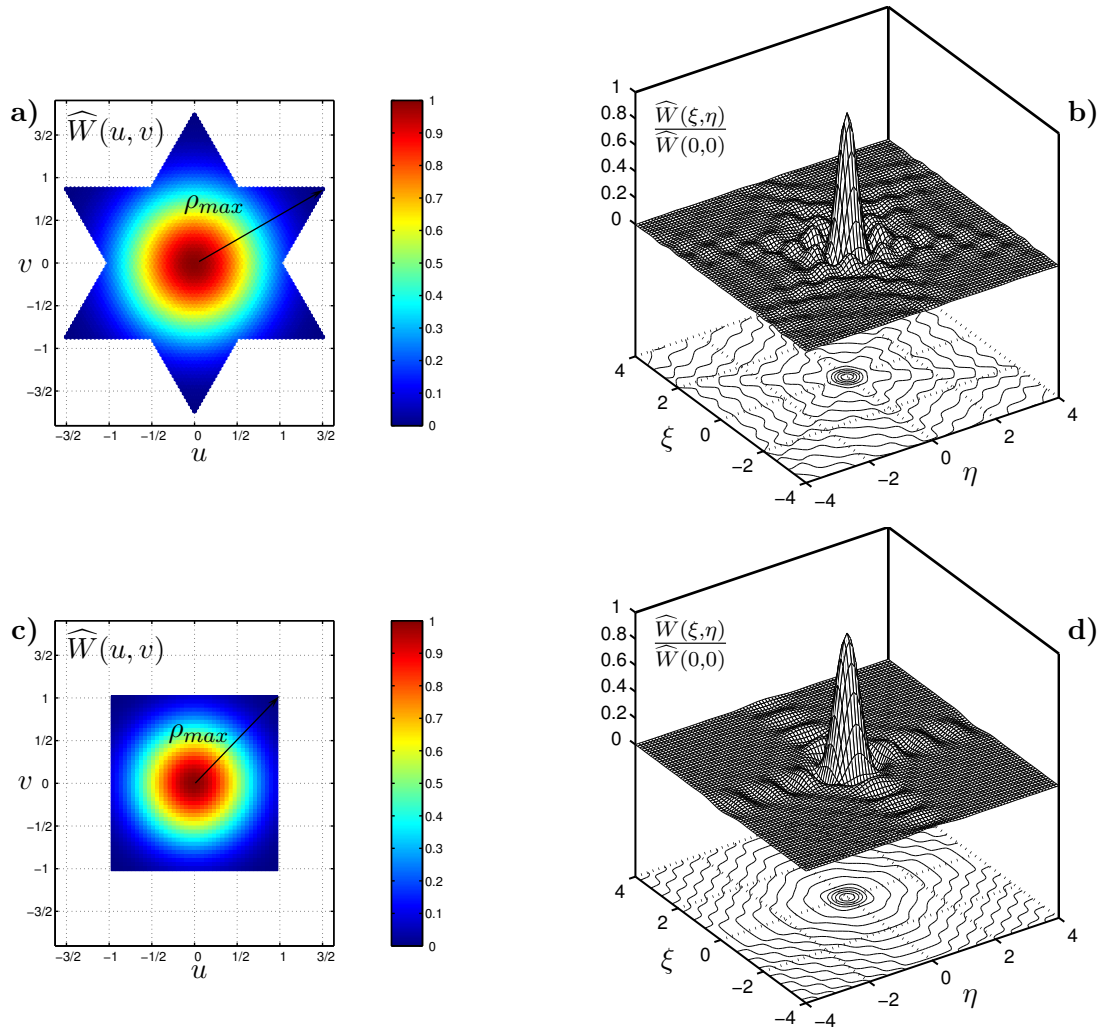


FIG. 5.8 – Fenêtre d’apodisation de BLACKMAN approchée. **A gauche**, les fenêtres d’apodisation traditionnelles 1D sont généralisées au cas 2D à l’aide du paramètre $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$, où ρ_{max} est la distance entre la fréquence nulle et la plus grande fréquence de la bande passante. **A droite**, dans le domaine spatial, on retrouve la symétrie de la bande passante dans la répartition des lobes secondaires autour du lobe principal.

Les différences observées sur le HSSL s’expliquent par la géométrie des bandes passantes. Les fonctions d’apodisation sont construites de façon à ce que W soit nul pour la plus grande fréquence présente dans la bande passante. Ainsi, ρ_{max} vaut $\sqrt{3} [L_b/\lambda]$ dans l’étoile et $\sqrt{(1 - 1/\delta u)^2 + 1} [L_b/\lambda] \approx \sqrt{2} [L_b/\lambda]$ dans la bande passante rectangulaire. La plus petite valeur de r au bord de l’étoile est donc $1/\sqrt{3}$, ce qui est inférieur à la plus petite valeur de r au bord du rectangle, $\approx 1/\sqrt{2}$. Comme les fonctions d’apodisation sont toutes des fonctions décroissantes de r , la plus grande valeur de W au bord de l’étoile est plus grande qu’au bord de la bande passante rectangulaire (voir Fig. 5.8-a et 5.8-c). La hauteur des lobes secondaires étant directement liée aux valeurs de W au bord de la bande passante, le HSSL est plus élevé pour une configuration en Y que pour une configuration en U.

D'autre part, le classement des fenêtres en termes de FWHM, HSSL ou BEHM n'est pas modifié par la configuration de l'instrument. Par exemple, parmi les fenêtres ne dépendant pas d'un paramètre, PARZEN, LANZOS NUTALL « min 3-termes » et HARRIS « min 4-termes » possèdent le lobe central le plus large et une hauteur des lobes secondaires la plus faible, et ce dans les deux cas. Parmi les familles de fenêtres, GAUSS, KAISER et MASS ont leur lobe principal de plus en plus large et une hauteur des lobes de plus en plus faible au fur et à mesure que la valeur du paramètre dont elles dépendent augmente. Citons toutefois FILLER « exacte » qui semble avoir un meilleur comportement comparé à MASS pour une configuration en U, ce qui n'est pas le cas pour une configuration en Y.

Comme on l'a vu précédemment, le SACR a été élaboré de manière à permettre un choix objectif parmi l'ensemble des fenêtres disponibles. Notons préalablement que, pour une configuration en U, le SACR n'offrait pas de résultats probants pour un seuil de 0.1% (seul un petit nombre de fenêtre remplissait ce critère), les résultats présentés dans la figure 5.10 et le tableau 5.3 correspondent à un seuil de 0.5%. Les fenêtres les plus performantes, quelque soit la configuration de l'instrument, sont les familles de fenêtres, à condition de choisir la valeur optimale pour leur paramètre. Cette valeur est différente selon le seuil choisi pour le calcul du SACR et la configuration de l'instrument.

Toutefois, alors que la fenêtre de MASS est optimale du point de vue du SACR pour une géométrie en Y, c'est la fenêtre de FILLER « D » qui est la plus performante pour une configuration en U.

En conclusion, les caractéristiques des fenêtres d'apodisation changent avec la configuration du réseau interférométrique. Une géométrie en Y conduit à une meilleure résolution radiométrique alors qu'une géométrie en U permet d'atteindre une meilleure sensibilité radiométrique. J'ai aussi montré que les fenêtres les plus performantes du point de vue du SACR changent selon cette configuration. Selon ce critère et pour un seuil de 1%, dans le cas d'une configuration en U, la fenêtre de FILLER « D » calculée pour un paramètre $\alpha = 0.06$ permet un compromis optimal entre la résolution spatiale et la sensibilité radiométrique.

Ces résultats ont été établis pour des fenêtres possédant une symétrie circulaire alors que les bandes passantes ont une anisotropie propre à la géométrie de l'instrument. Par la suite, j'ai donc modifié le calcul de la variable $\bar{\rho}$ afin de tenir compte de cette anisotropie et ainsi améliorer la sensibilité radiométrique des fenêtres.

TAB. 5.1 – Fonctions d'apodisation traditionnelles définies dans l'intervalle $\bar{\rho} \in [-1, 1]$.

Rectangle	1
Bartlett	$1 - \bar{\rho} $
Welch	$1 - \bar{\rho}^2$
Lanczos	$\frac{\sin \pi \bar{\rho}}{\pi \bar{\rho}}$
Papoulis	$\frac{1}{\pi} \sin \pi \bar{\rho} + (1 - \bar{\rho}) \cos \pi \bar{\rho}$
Parzen	$\begin{cases} 1 - 6\bar{\rho}^2(1 - \bar{\rho}) & \bar{\rho} \leq 1/2 \\ 2(1 - \bar{\rho})^3 & \bar{\rho} \geq 1/2 \end{cases}$
Connes	$(1 - \bar{\rho}^2)^2$
Cosine	$\cos \frac{\pi \bar{\rho}}{2}$
Hanning	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi \bar{\rho}$
Hamming ¹	$0.54 + 0.46 \cos \pi \bar{\rho}$
Hamming ²	$\frac{25}{46} + \frac{21}{46} \cos \pi \bar{\rho}$
Blackman ¹	$0.42 + 0.5 \cos \pi \bar{\rho} + 0.08 \cos 2\pi \bar{\rho}$
Blackman ²	$\frac{3969}{9304} + \frac{4620}{9304} \cos \pi \bar{\rho} + \frac{715}{9304} \cos 2\pi \bar{\rho}$
Nutall ³	$0.42323 + 0.49755 \cos \pi \bar{\rho} + 0.07922 \cos 2\pi \bar{\rho}$
Nutall ⁴	$0.44959 + 0.49364 \cos \pi \bar{\rho} + 0.05677 \cos 2\pi \bar{\rho}$
Harris ⁵	$0.35875 + 0.48829 \cos \pi \bar{\rho} + 0.14128 \cos 2\pi \bar{\rho} + 0.01168 \cos 3\pi \bar{\rho}$
Harris ⁶	$0.40217 + 0.49703 \cos \pi \bar{\rho} + 0.09892 \cos 2\pi \bar{\rho} + 0.00188 \cos 3\pi \bar{\rho}$
Norton-Beer ⁷	$0.548 - 0.0833(1 - \bar{\rho}^2) + 0.5353(1 - \bar{\rho}^2)^2$
Norton-Beer ⁸	$0.26 - 0.154838(1 - \bar{\rho}^2) + 0.894838(1 - \bar{\rho}^2)^2$
Norton-Beer ⁹	$0.09 + 0.5875(1 - \bar{\rho}^2)^2 + 0.3225(1 - \bar{\rho}^2)^4$
Cauchy	$\frac{1}{1 + (\alpha \bar{\rho})^2}$
Poisson	$e^{-\alpha \bar{\rho} }, \alpha \geq 0$
Gauss	$e^{-\alpha \bar{\rho}^2}, \alpha \geq 0$
Filler (D)	$\frac{1}{1 + \alpha} \left(\cos \frac{\pi \bar{\rho}}{2} + \alpha \cos \frac{3\pi \bar{\rho}}{2} \right), \alpha \geq 0$
Filler (E)	$\frac{1}{2 + 2\alpha} \left(1 + (1 + \alpha) \cos \pi \bar{\rho} + \alpha \cos 2\pi \bar{\rho} \right), \alpha \geq 0$
Tuckey	$\begin{cases} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi \frac{ \bar{\rho} - \alpha}{1 - \alpha} & \bar{\rho} \geq \alpha, 1 \geq \alpha \geq 0 \\ 1 & \bar{\rho} \leq \alpha \end{cases}$
Kaiser	$\frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - \bar{\rho}^2})}{I_0(\alpha)}, \alpha \geq 0$
Van der Maas	$\frac{I_1(\alpha \sqrt{1 - \bar{\rho}^2})}{I_1(\alpha) \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}}, \alpha \geq 0$

¹approchée, ²exacte, ³3-termes, ⁴min 3-termes, ⁵4-termes, ⁶min 4-termes, ⁷forte, ⁸medium, ⁹faible.

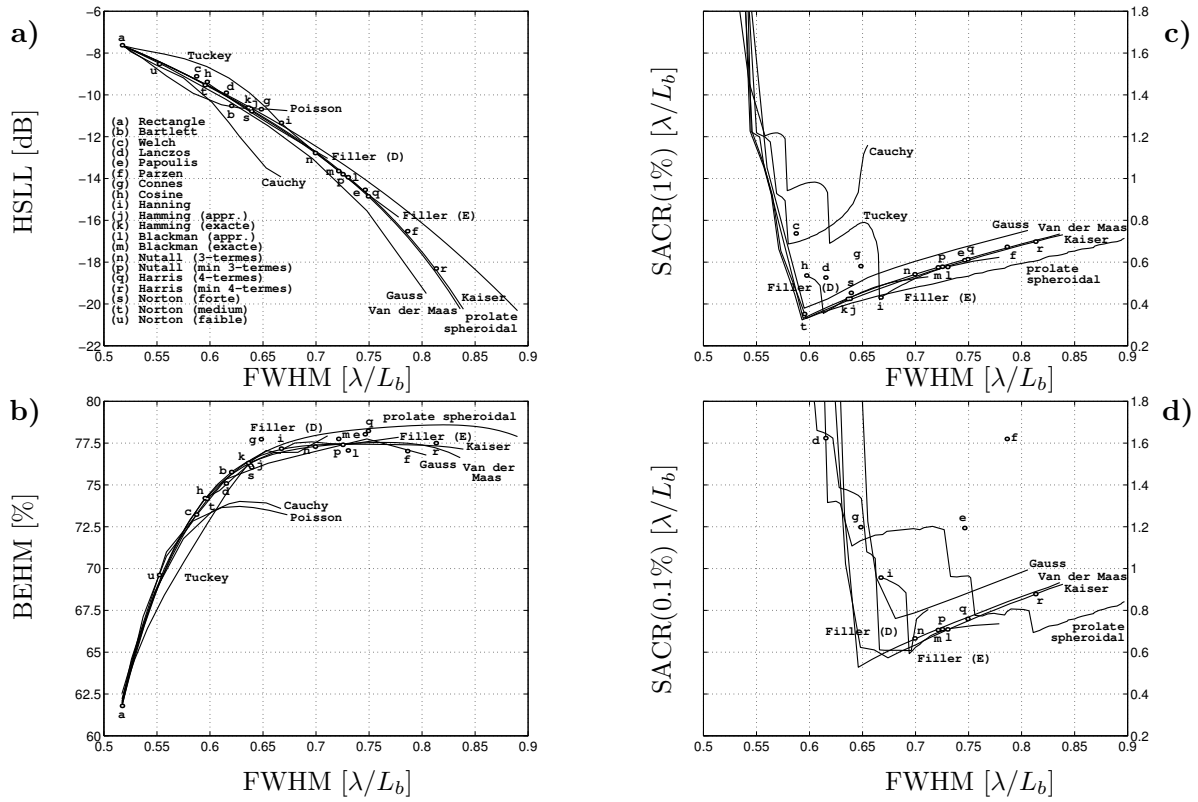


FIG. 5.9 – Facteurs de mérite des fenêtres d'apodisation pour une configuration en Y. **a)**, hauteur des lobes secondaires et **b)**, efficacité à -3dB du lobe principal en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal. Distance de plus courte approche pour, **c)**, un seuil de 1%, **c)**, un seuil de 0.1% en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal.

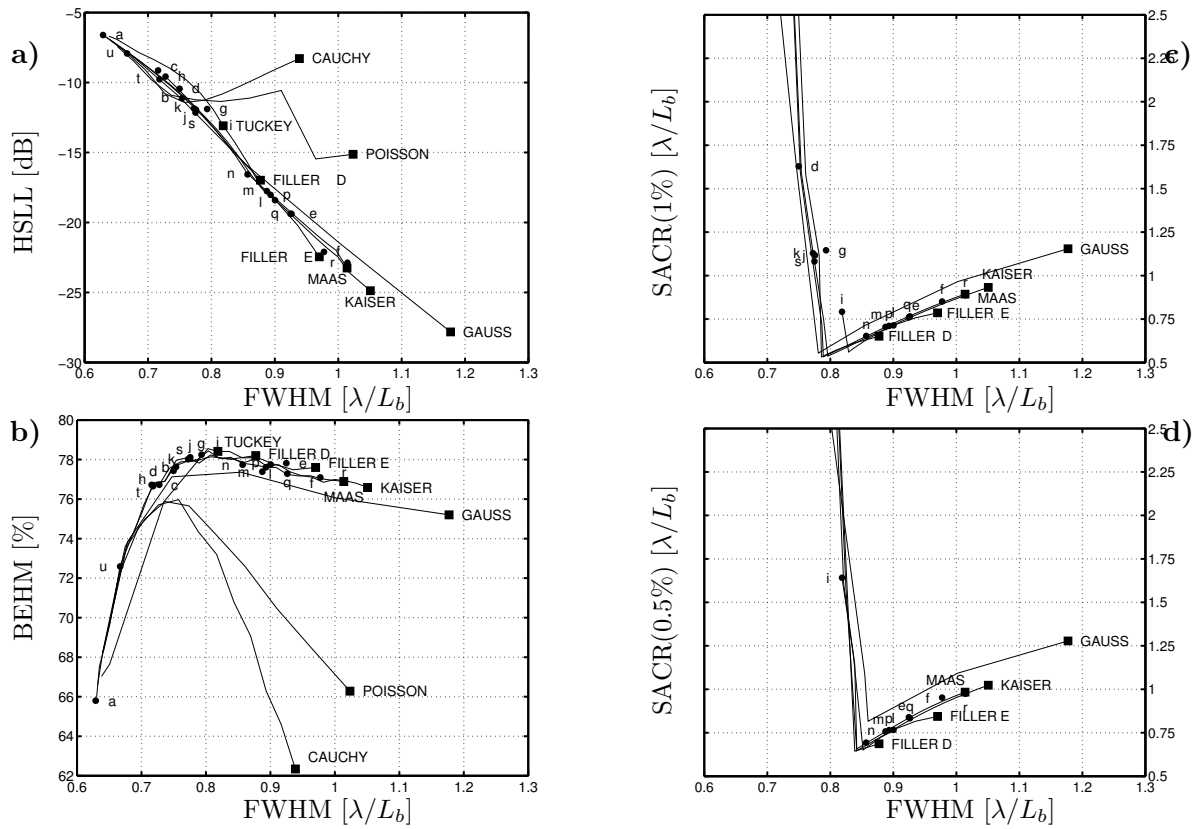


FIG. 5.10 – Facteurs de mérite des fenêtres d’apodisation pour une configuration en U. **a)**, hauteur des lobes secondaires et **b)**, efficacité à -3dB du lobe principal en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal. Distance de plus courte approche pour, **c)**, un seuil de 1%, **c)**, un seuil de 0.5% en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal.

TAB. 5.2 – Facteurs de mérite des fonctions d'apodisation pour une configuration en Y.

	FWHM [λ/L_b]	HSL [dB]	BEHM [%]	SACR(1%) [λ/L_b]	SACR(0.1%) [λ/L_b]	
Rectangle	0.517	-7.626	61.79			
Bartlett	0.620	-10.524	75.77	3.161		
Welch	0.587	-9.110	73.23	0.737	2.491	
Lanczos	0.615	-9.898	75.09	0.526	1.624	
Papoulis	0.746	-14.542	78.03	0.609	1.194	
Parzen	0.786	-16.520	77.02	0.673	1.620	
Connes	0.648	-10.684	77.73	0.581	1.198	
Cosine	0.597	-9.377	74.17	0.536	2.184	
Hanning	0.667	-11.339	77.17	0.431	0.957	
Hamming ¹	0.638	-10.663	76.16	0.425		
Hamming ²	0.636	-10.609	76.31	0.424		
Blackman ¹	0.730	-13.940	77.06	0.577	0.709	
Blackman ²	0.721	-13.644	77.75	0.575	0.706	
Nutall ³	0.699	-12.779	77.29	0.542	0.666	
Nutall ⁴	0.725	-13.796	77.40	0.578	0.710	
Harris ⁵	0.749	-14.852	78.23	0.614	0.759	
Harris ⁶	0.813	-18.304	77.50	0.698	0.878	
Norton-Beer ⁷	0.639	-10.782	76.05	0.453		
Norton-Beer ⁸	0.595	-9.535	74.21	0.352		
Norton-Beer ⁹	0.552	-8.522	69.61	2.014		
Cauchy	1.0 1.53 $\alpha=3.0$ 0.653	0.548 0.578 -9.397 -13.785	-8.459 -9.397 -13.785	68.92 70.92 74.03	1.219 0.686 1.160	
Poisson	1.0 $\alpha=3.0$ 0.673	0.559 0.673	-9.043 -10.733	70.92 73.14		
Gauss	1.0 1.22 1.84 $\alpha=2.5$ 0.804	0.559 0.582 0.670 0.804	-8.656 -9.582 -11.985 -19.505	71.13 72.22 76.40 76.81	1.052 0.316 0.555 0.752	0.749 0.994
Filler (D)	0.0 0.06 0.27 $\alpha=0.3$ 0.711	0.597 0.613 0.695 0.711	-9.377 -9.919 -12.533 -13.036	74.17 75.21 77.68 77.96	0.536 0.355 0.518 0.530	2.184 1.651 0.608 0.804
Filler (E)	0.0 0.09 $\alpha=0.3$ 0.778	0.667 0.694 0.778	-11.339 -12.442 -15.852	77.17 77.97 77.82	0.431 0.508 0.623	0.957 0.593 0.736
Kaiser	1.0 3.47 6.01 $\alpha=13.0$ 0.839	0.527 0.592 0.661 0.839	-7.844 -9.388 -11.393 -20.270	64.16 74.39 77.47 76.99	3.174 0.322 0.464 0.731	0.539 0.925
Van der Maas	1.0 4.16 6.43 $\alpha=13.0$ 0.812	0.522 0.585 0.644 0.812	-7.739 -9.244 -10.913 -18.416	63.68 73.38 76.76 77.47	4.301 0.311 0.444 0.703	0.521 0.888

¹approchée, ²exacte, ³3-termes, ⁴min 3-termes, ⁵4-termes, ⁶min 4-termes, ⁷forte, ⁸medium, ⁹faible.

TAB. 5.3 – Facteurs de mérite des fonctions d’apodisation pour une configuration en U.

	FWHM [λ/L_b]	HSLI [dB]	BEHM [%]	SACR(1%) [λ/L_b]	SACR(0.5%) [λ/L_b]
Rectangle	0.629	-6.604	65.80		
Bartlett	0.754	-11.126	77.63		
Welch	0.716	-9.138	76.72		
Lanczos	0.750	-10.443	77.43	1.629	
Papoulis	0.924	-19.388	77.82	0.761	0.839
Parzen	0.977	-22.101	77.09	0.852	0.952
Connes	0.793	-11.894	78.25	1.146	
Cosine	0.728	-9.577	76.73		
Hanning	0.819	-13.087	78.41	0.792	1.641
Hamming ¹	0.776	-11.947	78.11	1.117	
Hamming ²	0.772	-11.853	78.02	1.129	
Blackman ¹	0.900	-18.411	77.75	0.713	0.766
Blackman ²	0.888	-17.759	77.39	0.704	0.757
Nutall ³	0.857	-16.566	77.74	0.652	0.694
Nutall ⁴	0.893	-18.029	77.61	0.711	0.765
Harris ⁵	0.926	-19.380	77.29	0.765	0.833
Harris ⁶	1.015	-22.875	76.90	0.887	0.975
Norton-Beer ⁷	0.775	-12.148	78.05	1.082	
Norton-Beer ⁸	0.718	-9.768	76.65		
Norton-Beer ⁹	0.667	-7.926	72.59		
Cauchy	0.5 $\alpha=6.0$	0.640 0.939	-6.947 -8.287	68.23 62.34	
Poisson	0.5 $\alpha=5.0$	0.652 1.023	-7.429 -15.129	69.89 66.28	
Gauss	0.5 1.68 2.02 $\alpha=3.0$	0.641 0.781 0.860 1.177	-6.977 -12.604 -16.019 -27.822	68.32 77.64 77.29 75.20	0.554 0.724 0.816 1.278
Filler (D)	0.0 0.16 0.25 $\alpha=0.3$	0.728 0.786 0.839 0.877	-9.577 -12.376 -15.127 -16.980	76.73 78.07 78.02 78.20	0.533 0.613 0.644 0.651
Filler (E)	0.0 0.03 0.09 $\alpha=0.3$	0.819 0.829 0.852 0.970	-13.09 -13.766 -15.394 -22.454	78.41 78.10 78.22 77.60	0.792 0.561 0.620 0.651 0.786
Tuckey	0.0 $\alpha=0.9$	0.819 0.638	-13.087 -6.689	78.41 67.03	0.792 1.641
Kaiser	0.5 5.69 6.99 $\alpha=13.0$	0.632 0.796 0.842 1.051	-6.6.692 -12.743 -15.227 -24.878	66.57 77.87 78.06 76.59	0.537 0.615 0.646 1.024
Van der Maas	0.5 6.56 8.08 $\alpha=13.0$	0.630 0.789 0.842 1.014	-6.648 -12.522 -15.457 -23.256	65.969 77.82 77.99 76.888	0.533 0.624 0.657 0.894

¹approchée, ²exacte, ³3-termes, ⁴min 3-termes, ⁵4-termes, ⁶min 4-termes, ⁷forte, ⁸medium, ⁹faible.

5.3 Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante

Jusqu'à présent, les fenêtres d'apodisation sont des fonctions bidimensionnelles de la variable radiale $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$, où ρ est la distance $\sqrt{u^2 + v^2}$ mesurée depuis la fréquence nulle à l'intérieur de la bande passante, et où ρ_{max} est égal à la plus grande de ces distances. Ainsi, il subsiste des valeurs non nulles aux bords de la bande passante dans le domaine de Fourier, autour des creux de l'étoile pour une configuration en Y ou au centre des cotés du rectangle pour une configuration en U. Ces valeurs non nulles vont se traduire par une plus grande amplitude des oscillations de Gibbs dans le domaine spatial. En modifiant l'expression de ρ_{max} , il est possible d'adapter la forme des fenêtres à la forme des bandes passantes et ainsi de réduire les valeurs non nulles subsistant sur leurs bords, diminuant au final l'amplitude des oscillations de Gibbs [8].

5.3.1 Dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}

L'introduction d'une dépendance angulaire dans le calcul de ρ_{max} permet d'adapter complètement la forme de la fenêtre à la forme de la bande passante (voir Fig. 5.11-a,-c). Il est pour cela nécessaire de calculer, pour chaque point (u, v) de la bande passante, la longueur $\rho_{H,R}(\theta)$ du segment joignant la fréquence nulle, la fréquence (u, v) le bord de H . Cette longueur est paramétrée par l'angle θ mesuré depuis l'axe liant la fréquence nulle à la fréquence la plus grande de la bande passante (une pointe de l'étoile ou un sommet du rectangle). Etant données les symétries des bandes passante, pour une configuration en Y, θ varie dans l'intervalle $[0^\circ \ 30^\circ]$ et $\rho_H(\theta)$ s'exprime ainsi :

$$\rho_H(\theta) = \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} \tag{5.1}$$

Pour une configuration en U, θ varie dans l'intervalle $[0 \ \arctan \frac{L}{L-1}]$ et $\rho_R(\theta)$ s'exprime ainsi :

$$\rho_R(\theta) = \frac{L-1}{\cos \theta} \tag{5.2}$$

avec $\theta \in [0^\circ \ (\arctan \frac{L}{L-1}) \pi/180^\circ]$

Il est alors possible de circonscrire l'adaptation de la forme de la fenêtre à la forme de la bande passante à l'intérieur d'une région donnée, délimitée par la valeur d'un angle limite θ_{lim} (voir Fig. 5.11-b,-d). Ainsi, pour chaque point de la bande passante, la distance ρ_{max} est paramétrée par l'angle θ correspondant :

$$\begin{aligned} \rho_{max}(\theta) &= \rho_{H,R}(\theta) && \text{pour } 0 \leq \theta \leq \theta_{lim} \\ \rho_{max}(\theta) &= \rho_{H,R}(\theta_{lim}) && \text{pour } \theta > \theta_{lim} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Lorsque θ_{lim} est nul, on retrouve le cas d'une symétrie circulaire avec ρ_{max} constant. Lorsque $\theta_{lim} = 30^\circ$ ou $\theta_{lim} = \arctan \frac{L}{L-1}$, la forme de la fenêtre d'apodisation colle parfaitement à la forme en étoile de la bande passante.

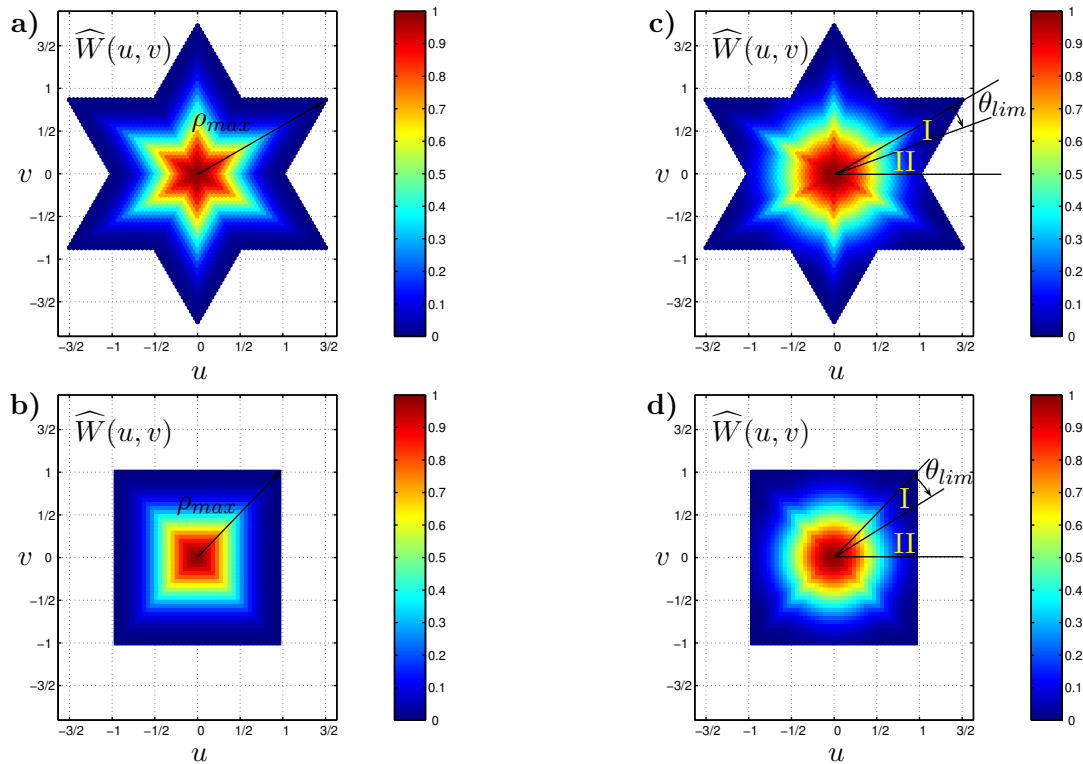


FIG. 5.11 – Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire du paramètre ρ_{max} . **a)** et **b)**, adaptation parfaite à la forme de la bande passante, $\theta_{lim} = 30^\circ$. **c)** et **d)**, adaptation partielle : dans la zone I, la forme de la fenêtre épouse la forme de la bande passante ($\rho_{max} = \rho_{max}(\theta)$), dans la zone II, la fenêtre est à symétrie circulaire ($\rho_{max} = cste = \rho(\theta_{lim})$)

L'adaptation progressive de la forme de la fenêtre à la forme de la bande passante, θ_{lim} variant de 0 à sa valeur maximale, a pour conséquence de faire apparaître un angle optimal pour lequel la hauteur des lobes secondaires est inférieure à celle calculée dans le cas de référence ($\theta_{lim} = 0$, pas de déformation). Cet angle optimal θ_{opt} , pour une fenêtre de BLACKMAN, vaut 6.5° pour l'étoile et 10.9° pour la bande passante rectangulaire (voir Fig. 5.12-a,-d).

La valeur des lobes secondaires pour une fenêtre donnée est conditionnée par de multiples caractéristiques dont les valeurs qu'elle prend au bord de la bande passante, bien entendu, mais aussi l'allure de la décroissance depuis la fréquence nulle. Il est donc difficile de prévoir la valeur de cet angle optimal, qui est différent pour chacune des fenêtre, mais l'on peut avancer quelques hypothèse pour expliquer son existence.

La décroissance de la hauteur des lobes est due à une diminution de la valeur de la fenêtre au bord de la bande passante dans la zone I. Cependant, l'adaptation de forme fait aussi apparaître un angle aigu le long de l'axe de symétrie orienté vers la pointe de l'étoile ($\theta = 30^\circ$) : cette arête va augmenter la hauteur des lobes secondaires au delà même de la valeur initiale. Pour les faibles valeurs de θ_{lim} , la diminution des valeurs au bord de la bande passante dans la zone I l'emporte sur l'apparition cette arête dans la zone II, l'effet s'inversant par la suite, d'où l'existence d'un angle optimal.

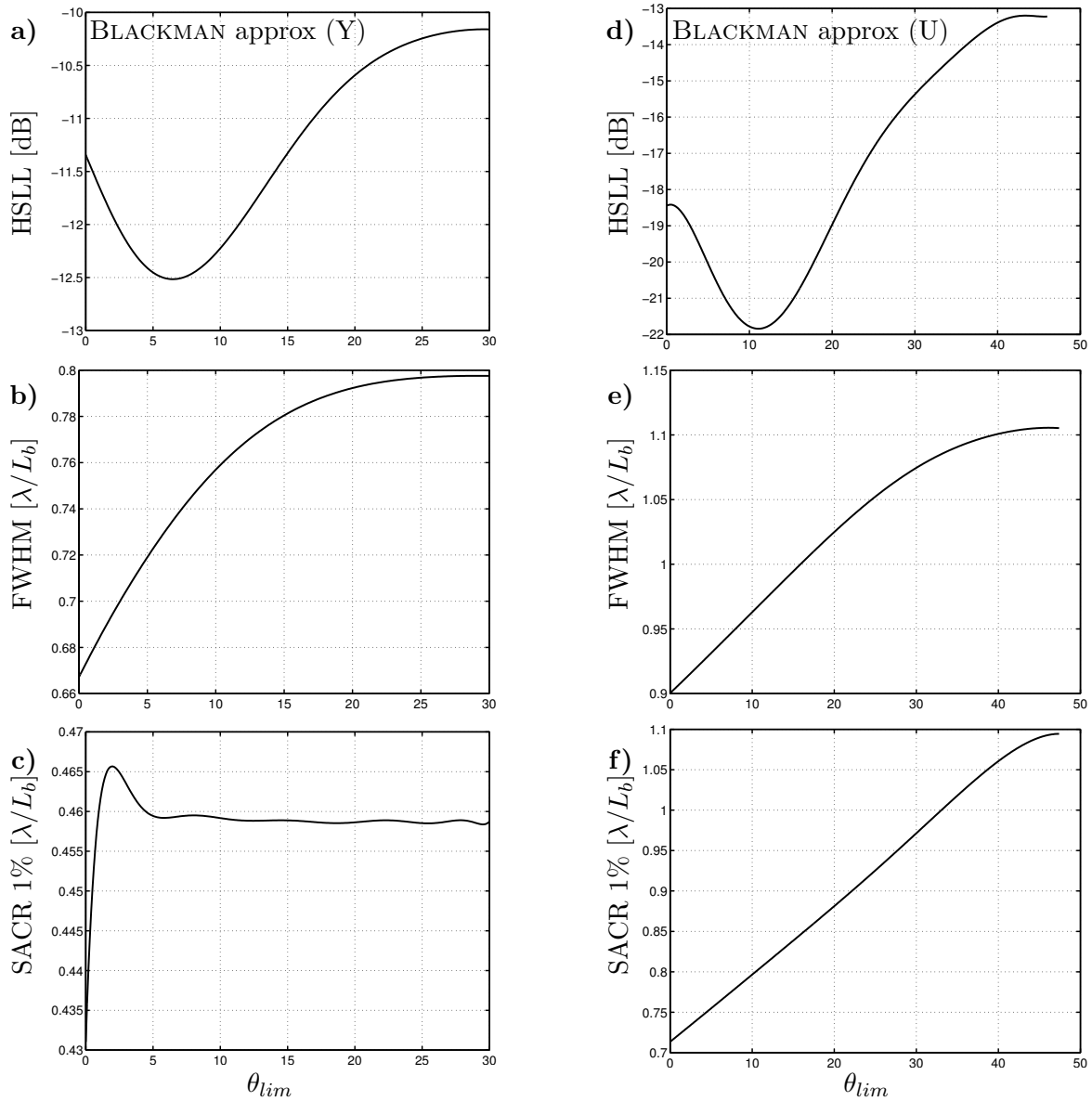


FIG. 5.12 – Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} , **à gauche**, pour une configuration en Y, **à droite**, pour une configuration en U. L'adaptation de forme permet de diminuer la hauteur des lobes pour un angle limite $\theta_{lim} = 11.1^\circ$ pour une géométrie en U et $\theta_{lim} = 6.5^\circ$ pour une géométrie en Y.

Cependant, la largeur à mi-hauteur du lobe principal, elle, augmente continûment avec θ_{lim} (voir Fig. 5.12-b,-e). Le calcul du SACR permet de plus de montrer que la diminution de la hauteur des lobes secondaires ne compense pas cette dégradation de la résolution spatiale, puisque quelque soit quelque soit θ_{lim} , le SACR est supérieur au cas initial (voir Fig. 5.12-c,-f).

5.3.2 Dépendance radiale et angulaire du paramètre ρ_{max}

Puisque la zone sensible du point de vue de la hauteur des lobes secondaires est liée à la présence d'un angle aigu le long de l'axe de symétrie dirigé vers la pointe de l'étoile, il a été envisagé d'introduire une dépendance radiale dans le calcul de ρ_{max} , en plus de la dépendance angulaire. Ainsi, il sera possible de restreindre l'adaptation de forme de la fenêtre aux fréquences situées à une distance ρ au delà d'un rayon limite ρ_{lim} (voir Fig. 5.13). Pour chaque point de la bande passante, la distance ρ_{max} est paramétrée par l'angle θ et la distance ρ correspondant :

$$\rho_{max}(\theta, \rho) = \rho_{H,R} \left(\theta_{lim} - \frac{1 - \rho_{lim}/\rho}{1 - \rho_{lim}/\rho_{H,R}(\theta_{lim})} \times (\theta - \theta_{lim}) \right) \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \theta_{lim} \text{ et } \rho \geq \rho_{lim}$$

$$\rho_{max}(\theta, \rho) = \rho_{H,R}(\theta_{lim}) \quad \text{pour } \theta > \theta_{lim} \text{ ou } \rho \leq \rho_{lim} \quad (5.4)$$

Les contraintes de continuité à la frontière entre la zone d'adaptation de forme et la zone à symétrie radiale adoucissent alors la variation autour de l'angle $\theta = 30^\circ$. Pour $\theta_{lim} = 0$ et $\rho_{lim} = 0$, on retrouve le cas initial d'un fenêtre à symétrie circulaire, de même que pour ρ_{lim} égal à la fréquence maximale de la bande passante. A partir de cette limite supérieure pour ρ_{lim} , l'intérêt de l'adaptation de forme disparaît puisque le signal mesuré aux hautes fréquences de la bande passante est alors complètement atténué par la fenêtre.

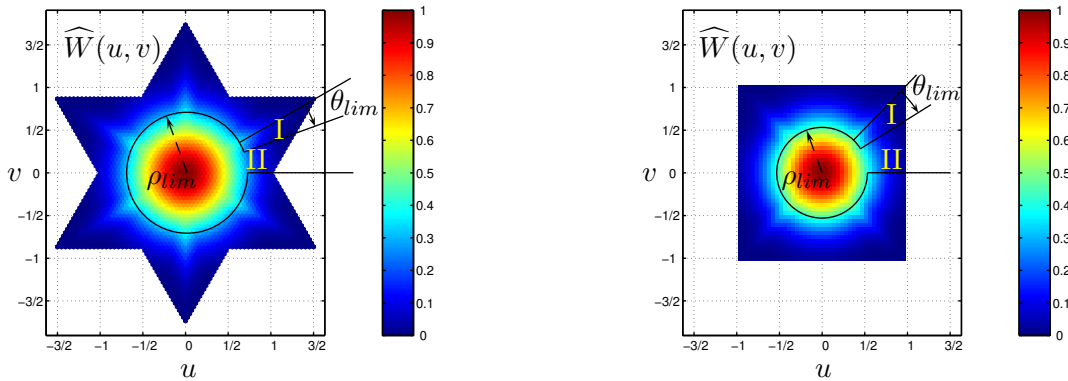


FIG. 5.13 – Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire et radiale du paramètre ρ_{max} . Dans la zone I, la forme de la fenêtre épouse la forme de la bande passante ($\rho_{max} = \rho_{max}(\theta, \rho)$), dans la zone II, la fenêtre est à symétrie circulaire ($\rho_{max} = cste = \rho_{H,R}(\theta_{lim})$)

L'introduction de la distance limite ρ_{lim} permet effectivement de diminuer la hauteur des lobes secondaires, comparée à la valeur obtenue pour $\rho_{lim} = 0$. Cependant, là encore, cette diminution s'accompagne d'un élargissement du lobe principal.

En configuration U, le gain sur le HSLL ne compense pas la perte sur le FWHM, même si la distance de plus courte approche diminue avec ρ_{lim} croissant, elle reste supérieure au cas initial 5.14.

En configuration Y, cela reste vrai pour les fenêtres « simples », ne dépendant pas d'un paramètre, mais on observe une légère amélioration du SACR pour les familles de fenêtres et notamment pour KAISER et MASS.

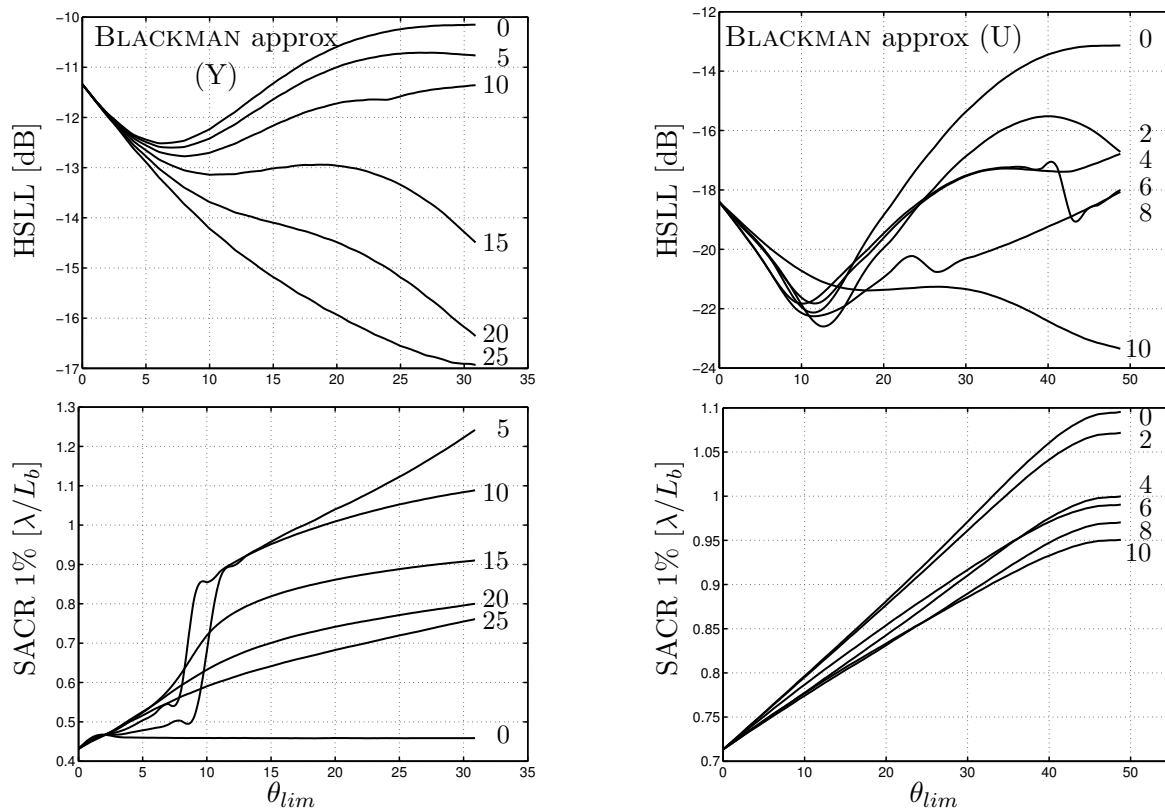


FIG. 5.14 – Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la distance ρ_{lim} , **à gauche**, pour une configuration en Y, **à droite**, pour une configuration en U. L'introduction d'une distance limite ρ_{lim} , en deçà de laquelle la symétrie circulaire de la forme de la fenêtre est conservée, permet de diminuer la hauteur des lobes secondaires (-4 dB pour $\theta_{lim} = 10.7^\circ$ et $\rho_{lim} = 2$, (U)). Cependant le SACR reste supérieur au cas initial, la diminution de la hauteur des lobes secondaires ne compensant pas l'élargissement du lobe principal.

Dans ce cas, il existe un couple $(\theta_{lim}, \rho_{lim})$ pour lequel la distance de plus courte approche est inférieure à la valeur initiale (voir Fig. 5.15).

Là encore, il est difficile de trouver une seule explication à la présence de ce minimum. On peut toutefois remarquer que les familles de fenêtres FILLER, KAISER et MAAS, de part la présence d'un paramètre α modifiant finement l'allure de la décroissance entre la fréquence nulle et le bord de la bande passante, sont déjà les familles les plus performante du point de vue du SACR. La combinaison de l'action de α et de l'introduction d'une dépendance angulaire et radiale sur ρ_{max} , autorise une souplesse dans la déformation de de ces fenêtres que n'ont pas les fenêtres « simple », et permet de diminuer la hauteur des lobes secondaires tout en maintenant la dégradation de la largeur du lobe principal sous contrôle.

Le tableau 5.4 donne pour KAISER et MAAS, le triplet $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ et la valeur améliorée correspondante pour le SACR 1%, constituant les meilleures performances pour l'ensemble des fenêtres.

TAB. 5.4 – Paramètres optimaux $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ conduisant à une amélioration du SACR pour les fenêtres KAISER et MAAS.

Fenêtre	Paramètre	θ_{lim}	ρ_{lim}	SACR (1%) $[\lambda/L_b]$
KAISER	$\alpha = \mathbf{3.9}$	1.5	20	0.294
MAAS	$\alpha = \mathbf{4.6}$	1.3	25	0.300

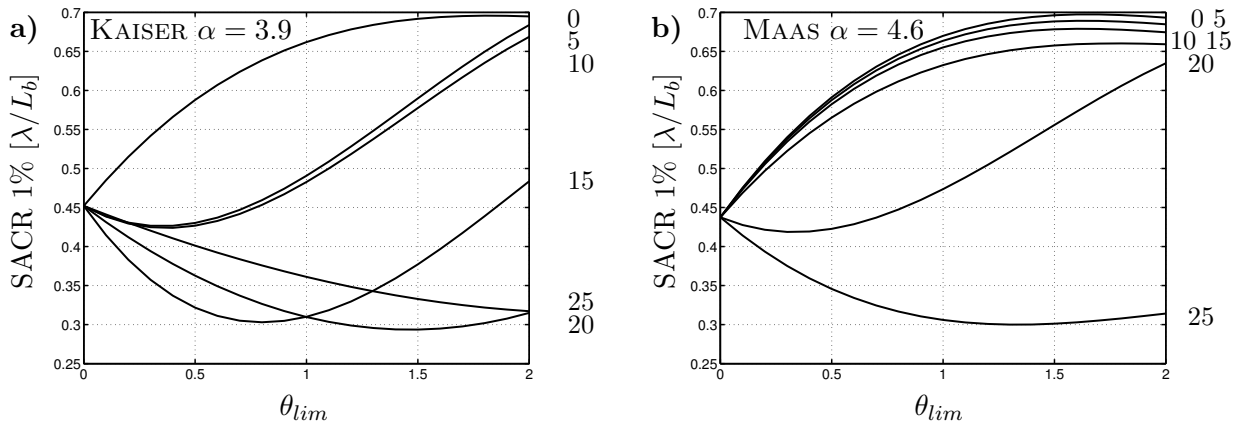


FIG. 5.15 – Variation du SACR (1%) pour les fenêtres de **a)** KAISER et **b)** MAAS en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la distance limite ρ_{lim} .

En conclusion, le bilan de ce travail sur l'adaptation de la forme de la fenêtre est partagé. Si la déformation des fenêtres permet effectivement d'améliorer la hauteur des lobes secondaires, et par là même la sensibilité radiométrique, la largeur du lobe principal est augmentée, dégradant la résolution spatiale. Toutefois, pour une configuration en Y, il existe un triplet $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ pour lequel le SACR est légèrement amélioré. Sans doute le principal avantage de cette paramétrisation des fenêtres d'apodisation est-il de donner la possibilité de faire varier finement le compromis entre hauteur des lobes secondaires et largeur du lobe principal, permettant ainsi à un utilisateur de trouver l'adaptation de forme qui lui convient compte tenu de ses objectifs et des contraintes sur l'estimation des paramètres géophysiques.

Biographie(s)

Biographie 5.1: GIBBS, Josiah Willard

(11 Février 1839, New Haven, Etats-Unis - 28 Avril 1903, New Haven, Etats-Unis)



Gibbs a passé la quasi totalité de sa vie dans la maison de ses parents à New Haven, à deux pas du collège où il avait débuté ses études et de l'université de Yale où il travailla jusqu'à la fin de sa vie.

En 1863, il soutient la première thèse d'ingénierie des Etats-Unis, dont le sujet porte sur des méthodes géométriques pour la fabrication des engrenages.

Après 3 ans passé en Europe, à Paris, Berlin et Heidelberg, où il est influencé par Kirchhoff et Helmholtz, il retourne à Yale en 1869 et obtient un poste de professeur de mathématiques appliquées à la physique en 1871. En 1873, il publie *Méthodes graphiques en thermodynamique des fluides* et *Une méthode de représentation géométrique des propriétés thermodynamiques des*

substances par l'utilisation des aires. En 1876 et 1878, il publie les deux tomes de l'ouvrage qui le rendra célèbre *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*. A travers ces trois publications, il définit un ensemble de méthodes simples qui vont révolutionner l'étude des procédés thermodynamiques et l'étude des moteurs à vapeur.

A partir de 1901, il travaille à l'analyse vectorielle qu'il applique à l'étude de l'orbite des comètes. Il étudie aussi la théorie électromagnétique de la lumière et, par ses travaux en mécanique statistique, pose les bases mathématiques de la mécanique quantique et des théories de Maxwell.

Bibliographie

- [1] F. J. HARRIS : On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proc. IEEE*, 66:51–83, 1978.
- [2] E. ANTERRIEU, P. WALDTEUFEL et A. LANNES : Apodization functions for 2-d hexagonally sampled sunthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 40(12):2531–2542, 2002.
- [3] N.C. GEÇKINLI et D. YAVUZ : Some novel windows and a concise tutorial for comparison of window families. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 26:501–507, 1978.
- [4] A. S. FILLER : Apodization and interpolation in fourier-transform spectroscopy. *J. Opt. Soc. Am.*, 54(6):762–767, 1964.
- [5] R.H. NORTON et R. BEER : New apodizing functions for fourier spectroscopy. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3):259–264, 1976.
- [6] A.H. NUTTALL : Some windows with very good sidelobe behavior. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 29:84–91, 1981.
- [7] A. LANNES et E. ANTERRIEU : Image reconstruction methods for remote sensing by aperture synthesis. *Proc. of IGARSS'94*, pages 2892–2903, 1994.
- [8] B. PICARD, E. ANTERRIEU, G. CAUDAL et P. WALDTEUFEL : Improved windowing functions for synthetic aperture imaging radiometers. *Proc. of IGARSS'02*, pages 2756–2758, 2002.

Chapitre 6

Passage au repère terrestre et multi-fenêtrage

Sommaire

6.1	Champ de vue observé, champ de vue reconstruit	112
6.1.1	Champ de vue observé	112
6.1.2	Champ de vue reconstruit et repliement	116
6.1.3	Champ de vue reconstruit et passage au repère terrestre	120
6.2	Rééchantillonnage des champs reconstruits	124
6.2.1	Depuis une grille cartésienne	124
6.2.2	Depuis une grille hexagonale	125
6.2.3	Propriété de translation du rééchantillonnage de FOURIER.	125
6.3	Application du multi-fenêtrage à un instrument de type MIRAS . .	126

- Quarante-deux ! Et c'est tout ce que t'as à nous montrer au bout de sept millions et demi d'années de boulot ?

- J'ai vérifié très soigneusement et c'est incontestablement la réponse exact. Je crois que le problème, pour être tout à fait franc avec vous, est que vous n'avez jamais vraiment bien saisi la question.

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

Le passage du repère des antennes à celui de la Terre conduit à une résolution spatiale inégale dans le champ de vue reconstruit et à une déformation du maillage initialement régulier. Or, le traitement des cartes de température de brillance dans le but de retrouver les quantités physiques (humidité et salinité) impose de combiner des mesures à différents angles d'incidence sur des grilles régulières. La variation, dans le champ reconstruit, des caractéristiques de la fonction de transfert de l'instrument peut augmenter significativement les erreurs pour les pixels contenant de fortes hétérogénéités.

Une première partie de cette section est consacrée à la composition des champ de vue observés et reconstruits ainsi qu'aux propriétés du passage du repère des antennes au repère terrestre. Une seconde aborde le problème du rééchantillonnage des données.

Concernant le problème de la résolution spatiale variant dans le champ reconstruit, le Groupe de Conseils Scientifiques (SAG pour *Science Advisory Group*) de la mission SMOS, durant sa cinquième réunion, a suggéré l'étude de la technique de multi-fenêtrage, dite encore « Strip adaptive » [1]. Alors que la simple apodisation consiste à convoluer la scène reconstruite par une seule et même fenêtre pour l'ensemble des pixels, le multi-fenêtrage vise à appliquer une fenêtre différente à chaque pixel dans le but d'obtenir une résolution constante dans le repère terrestre. Les résultats présentés sont tirés d'une étude présentant les conséquences de cette technique sur la qualité de l'estimation de l'humidité des sols à laquelle j'ai participé [2].

6.1 Champ de vue observé, champ de vue reconstruit

6.1.1 Champ de vue observé

Si les lobes arrières des antennes sont négligés, le radiomètre imageur à synthèse d'ouverture observe l'intégralité du demi-espace situé devant lui. Dans le repère des cosinus directeurs appelé aussi repère instrumental ou repère des antennes, cet espace est contenu dans le cercle unité (voir Fig. 6.2). L'étendue du champ de vue observé vaut alors $\Delta\xi = 2$. A l'intérieur de ce cercle, la température d'antenne dépend de la contribution de la terre et de la portion visible de la voûte céleste, appelée simplement « Ciel » par la suite.

Or, la position et la forme de la terre à l'intérieur du cercle unité dépendent notamment de l'inclinaison α de l'instrument. Ce paramètre peut être ajusté de façon à augmenter la largeur de fauchée dans le champ de vue reconstruit [3]. La figure 6.1 décrit les référentiels qui entrent en jeu lors de la paramétrisation de la position de la terre et du ciel dans le champ de vue observé. Rappelons que le déplacement de l'instrument se fait selon l'axe Y .

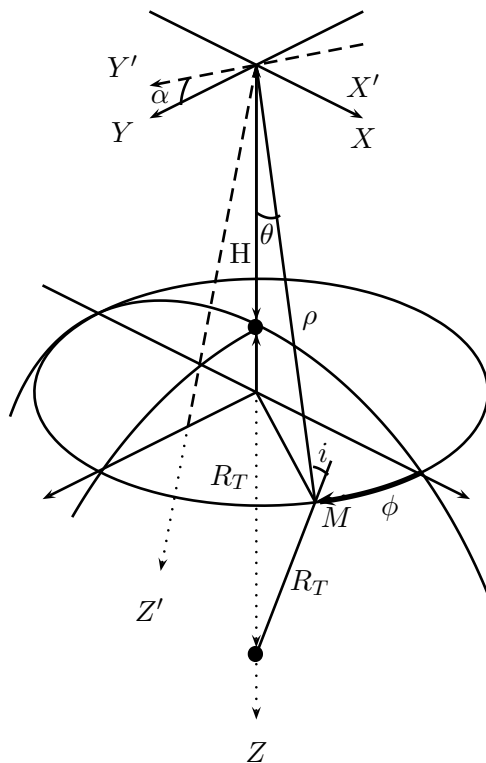


FIG. 6.1 – Référentiels utilisés dans la caractérisation du champ de vue observé d'un RISO. Le déplacement se fait le long de l'axe Y. Il peut être choisi d'incliner le plan contenant le réseau interférométrique d'un angle α . Les cosinus directeurs ξ et η sont directement liés aux coordonnées polaires (ρ, θ, ϕ) désignant respectivement la distance à la source, la colatitude et l'azimut : $\xi = x/\rho = \sin \theta \cos \phi$ et $\eta = y/\rho = \sin \theta \sin \phi$.

Cas $\alpha = 0$

Le repère considéré est alors $(OXYZ)$. L'instrument étant situé à une altitude H , la position du point M observé est définie par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou par ses coordonnées polaires (ρ, θ, ϕ) où ρ est la distance mesurée depuis O , θ la colatitude et ϕ l'azimut. L'incidence en ce point est donnée par l'angle i . Les cosinus directeurs sont alors :

$$\xi = \sin \theta \cos \phi \quad (6.1)$$

$$\eta = \sin \theta \sin \phi \quad (6.2)$$

L'horizon terrestre qui détermine la limite entre la terre et le ciel est caractérisé par une incidence $i = \theta_h$. La colatitude pour les points de l'horizon est :

$$\sin \theta_h = \frac{R_T}{R_T + H} \quad (6.3)$$

où R_T est le rayon de la terre supposée sphérique. Dans le repère des cosinus directeurs (ξ, η) , la terre est alors un disque de rayon $r = \sin \theta_h$ centré en $(0, 0)$, dont le périmètre est caractérisé par l'équation de l'horizon terrestre :

$$\left(\frac{\xi}{\sin \theta_h} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sin \theta_h} \right)^2 = 1 \quad (6.4)$$

Cas $\alpha \leq \pi/2 - \theta_h$

Pour $\alpha > 0$, le repère considéré est $(OX'Y'Z')$ et les cosinus directeurs sont ξ' et η' . Le passage du référentiel $(OXYZ)$ à ce référentiel se fait simplement à l'aide de la matrice de rotation d'angle α :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

ce qui, pour les cosinus directeurs, revient à :

$$\xi' = \xi \quad (6.6)$$

$$\eta' = \eta \cos \alpha - \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \sin \alpha \quad (6.7)$$

Le passage de $(OX'Y'Z')$ à (OXY) se fait simplement à l'aide de la matrice de rotation d'angle $-\alpha$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Dans le repère des cosinus directeurs, le passage d'un repère à l'autre se fait alors ainsi :

$$\begin{cases} \xi = \xi' \\ \eta = \eta' \cos \alpha + \eta' \sin \alpha \end{cases} \quad (6.9)$$

Dans le repère (ξ', η') , la terre est alors délimitée par une ellipse de grand axe $\sin \theta_h$ et de petit axe $\sin \theta_h \cos \alpha$ centrée en $(0, -\cos \theta_h \sin \alpha)$:

$$\left(\frac{\xi'}{\sin \theta_h} \right)^2 + \left(\frac{\eta' + \cos \theta_h \sin \alpha}{\sin \theta_h \cos \alpha} \right)^2 = 1 \quad (6.10)$$

Cas $\alpha > \pi/2 - \theta_h$

La relation (6.10) n'est valable que pour des inclinaisons telles que $\alpha < \pi/2 - \theta_h$. Au delà de cette limite, une partie de la terre est située dans le demi-espace arrière de l'instrument. Dans le repère des cosinus directeurs, l'ellipse vient couper le cercle unité aux points d'intersections :

$$\xi'_{lim} = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \theta_h}}{\sin \alpha}, \quad \eta'_{lim} = -\frac{\cos \theta_h}{\sin \alpha} \quad (6.11)$$

La terre est délimitée par l'ellipse décrite par la relation (6.11) au dessus de ces points et par le cercle unité en dessous.

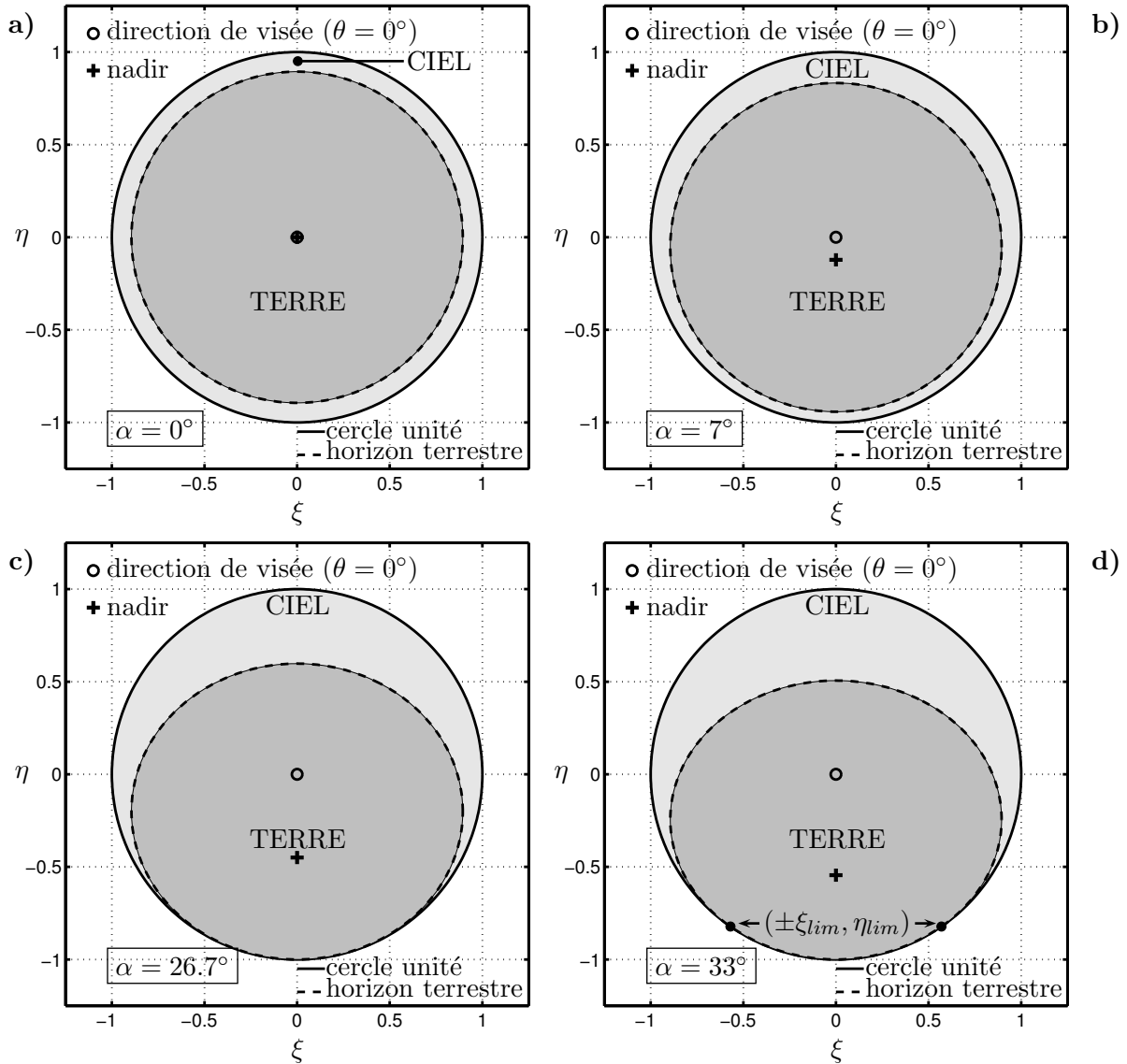


FIG. 6.2 – Modification de la forme de la terre dans le repère des cosinus directeurs avec l'inclinaison de l'instrument ($H=775$ km et $\delta u = 0.875$). **a)** L'horizon terrestre est un cercle pour une inclinaison nulle et **b)** une ellipse pour une inclinaison faible. **c)** L'inclinaison $\alpha = 26.7^\circ$ est l'inclinaison critique $\pi/2 - \theta_h$. **d)** L'inclinaison $\alpha = 33^\circ$ est proche de l'inclinaison prévue pour MIRAS. Dans ce cas, l'horizon terrestre décrit une ellipse dans sa partie supérieure et le cercle unité dans sa partie inférieure.

La figure 6.2 illustre la position de la terre dans le cercle unité pour quatre inclinaisons de l'instrument : $\alpha = 0$, $\alpha < \pi/2 - \theta_h$, $\alpha = \pi/2 - \theta_h$, $\alpha > \pi/2 - \theta_h$, avec $H = 755$ km. Dans le dernier cas, l'inclinaison $\alpha = 33^\circ$ est proche de l'inclinaison qu'aura l'instrument MIRAS.

6.1.2 Champ de vue reconstruit et repliement

Les relations entre le champ de vue et l'intervalle d'échantillonnage du domaine de FOURIER exprimées plus haut permettent de trouver la valeur de δu remplissant le critère de SHANNON-NYQUIST. La largeur du champ de vue observé étant $\Delta\xi = 2$ (diamètre du cercle unité), l'intervalle d'échantillonnage doit être tel que :

$$\delta u = \frac{2}{\sqrt{3}\Delta xi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 \quad (6.12)$$

pour un maillage hexagonal, et :

$$\delta u = \frac{1}{\Delta xi} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (6.13)$$

pour un maillage cartésien. Or, que ce soit dans le cas de MIRAS ou du HUT2D, il a été choisi une distance entre les antennes conduisant à un sous-échantillonnage du domaine de FOURIER ($\delta u = 0.875$ pour MIRAS et $\delta u = 0.7$ pour HUT2D) et donc à un repliement du cercle unité à l'intérieur du champ de vue reconstruit. Ce choix se justifie en remarquant qu'en augmentant la distance entre les antennes, la plus grande distance entre deux antennes du réseau interférométrique augmente elle aussi, améliorant ainsi la résolution spatiale δxi . On remarquera que les repliements (aussi nommés *alias*) peuvent tout aussi bien être vus comme les chevauchements de répliques situées dans les mailles contiguës.

Pour le HUT2D, on distingue à l'intérieur du champ de vue reconstruit (FOV pour *Field Of View*, ici un carré de 64×64 pixels) le champ de vue exempt de repliement (AFFOV pour *Alias Free Field Of View*). Etant donnée l'altitude standard de vol pour le HUT2D, ces zones « aliasées » correspondent uniquement au repliement de la terre dans le FOV (voir Fig. 6.3).

Pour MIRAS, le champ de vue observé est composée de la Terre et du Ciel. Dans un deuxième temps, on distingue donc différentes zones à l'intérieur du champ de vue reconstruit (un hexagone de 128×128 pixels) :

- **la zone exempte d'aliasing**. Elle est elle-même composée de deux zones :

- une zone ne comportant aucun repliement (un hexagone déformé au centre du champ de vue, en rouge sur la figure 6.4-c)

- une zone dans laquelle vient s'étendre une réplique du Ciel (en orange Fig. 6.4-c). Il est possible de retrouver la valeur de la température de brillance T_{AFFOV} dans une zone « élargie » en retranchant aux visibilitées mesurées par l'instrument les visibilitées correspondant à la contribution du Ciel, à condition de connaître la distribution des températures de brillances T_{Ciel} dans cette zone. Il suffit de remarquer que la relation entre les visibilitées et la température de brillance (3.38) est linéaire.

La carte de température de brillance dans cette zone « élargie » *exempte* d'aliasing sera donc reconstruite à partir des visibilitées V_{Terre} , corrigées de la contribution du Ciel. Par la suite, les cartes de T_b seront reconstruites dans toute cette zone (appelée abusivement zone exempte d'aliasing ou AFFOV) et les visibilitées V désigneront les visibilitées corrigées.

- **la zone aliasée**. Cette zone ne pourra pas être exploitée lors de la reconstruction. On distingue quatre catégories dans cette zone :

-
- le ciel. Cette zone étant située au-delà de l'horizon terrestre, elle n'est pas exploitée (en bleu nuit dans Fig. 6.4-c).
 - les repliements dus à :
 - une réplique la Terre (cyan, Fig. 6.4)
 - une réplique de la Terre et à une réplique du Ciel (azur, Fig. 6.4)
 - deux répliques de Terre (bleu foncé, Fig. 6.4)

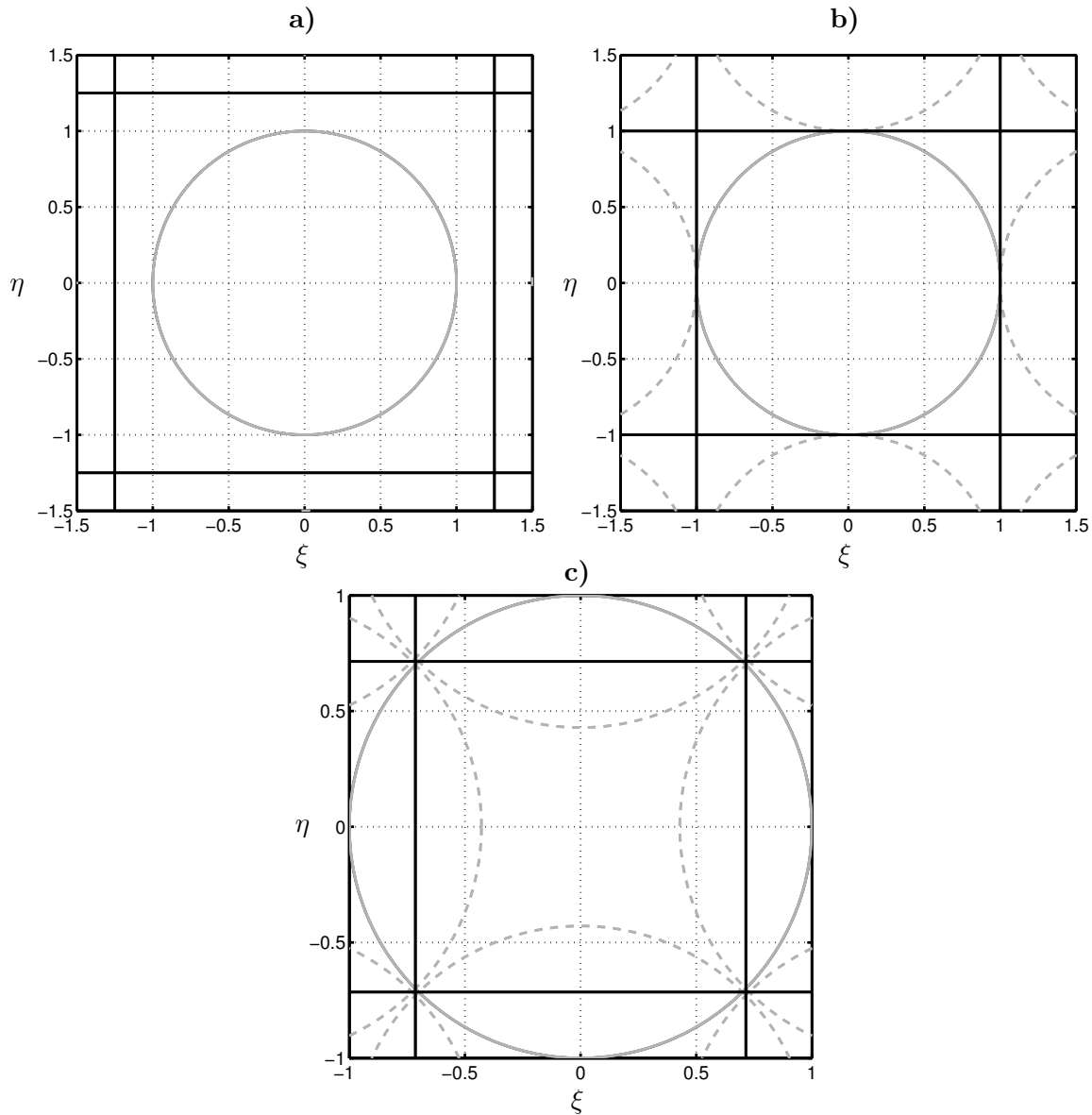


FIG. 6.3 – Composition du champ de vue reconstruit du HUT2D pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférométrique. A l'intérieur de la maille carrée (64×64 pixels), on retrouve le cercle unité (traits pleins) qui représente le demi-espace qu'observe l'instrument. **a)** L'espace $d = \delta u \lambda$ entre les antennes conduit à un sur-échantillonnage du domaine de FOURIER ($\delta u < 0.5$) et le cercle unité est largement compris dans le champ de vue reconstruit. **b)** L'espace entre les antennes est choisi de façon à parfaitement répondre au critère de SHANNON-NYQUIST, $\delta u = 0.5$ et le cercle unité est tangent au bord de la maille. **c)** La valeur retenue $\delta u = 0.7$ pour l'instrument réel, conduit à un sous-échantillonnage du domaine de FOURIER et au repliement du cercle unité à l'intérieur du champ de vue reconstruit (traits pointillés). La zone exempte de repliement (AFFOV), contenue à l'intérieur des pointillés, est la seule zone exploitable après la reconstruction.

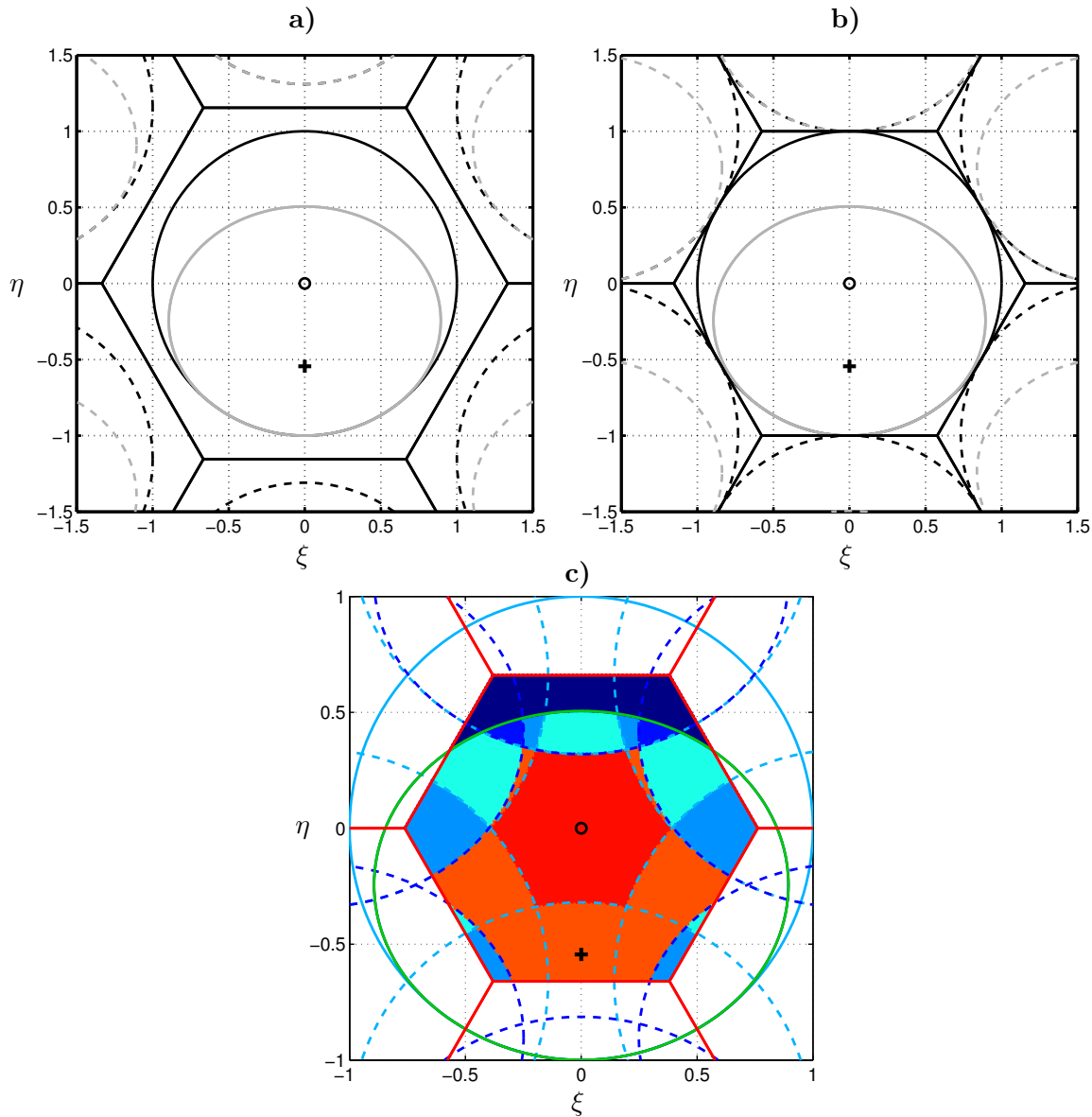


FIG. 6.4 – Composition du champ de vue reconstruit de MIRAS pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférométrique. A l'intérieur de la maille hexagonale (128×128 pixels), on retrouve le cercle unité (traits pleins en noir) dans lequel on distingue l'ellipse représentant la Terre (traits plein en gris), et le Ciel (entre l'ellipse et le cercle unité). **a)** L'espace $d = \delta u \lambda$ entre les antennes conduit à un sur-échantillonnage du domaine de FOURIER ($\delta u < 1/\sqrt{3}$) et le cercle unité est largement compris dans le champ de vue reconstruit. **b)** L'espace entre les antennes est choisi de façon à parfaitement répondre au critère de SHANNON-NYQUIST, $\delta u = 1/\sqrt{3}$ et le cercle unité est tangent au bord de la maille. **c)** La valeur retenue $\delta u = 0.875$ pour l'instrument réel, conduit à un sous-échantillonnage du domaine de FOURIER et au repliement du cercle unité à l'intérieur du champ de vue reconstruit (traits pointillés). Une zone élargie, abusivement dite exempte de repliement, représentée par les zones remplies des deux gris les plus clairs, est la seule zone exploitable après la reconstruction.

6.1.3 Champ de vue reconstruit et passage au repère terrestre

Le passage du repère des antennes dont les coordonnées sont les cosinus directeurs au repère terrestre dont les coordonnées sont les couples (latitude, longitude) est décrit ci-dessous.

La première étape consiste à passer, le cas échéant, des coordonnées (ξ', η') correspondant à un instrument incliné, aux coordonnées (ξ, η) ainsi que décrit dans la section précédente par la relation 6.9.

Dans un deuxième temps, il s'agit de passer du repère des antennes au repère terrestre (OXYZ), en considérant l'altitude H de l'instrument et R_T le rayon terrestre :

$$\sin \theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (6.14)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (6.15)$$

$$\Rightarrow \rho = (R_T + H) \cos \theta - \sqrt{(R_T + H)^2 \cos^2 \theta - H(2R_T + H)} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho \xi \\ y = \rho \eta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad (6.17)$$

Dans un troisième temps, si Lon_{sat} et Lat_{sat} sont respectivement la longitude et latitude du point sub-satellite (en radian), le passage au repère terrestre se fait alors à l'aide de deux matrices de rotation R_x et R_z , respectivement d'un angle $a = -Lat_{sat} - \pi/2$ autour de l'axe X et d'un angle $b = -Lon_{sat} + \pi/2$ autour de l'axe Z :

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$$R_Z = \begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Les coordonnées cartésiennes (x_G, y_G, z_G) dans le repère de Greenwich sont alors :

$$[x_G \ y_G \ z_G] = R_Z R_X \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - (R_T + H) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Finalement, la longitude Lon et la latitude Lat du point courant sont :

$$\begin{cases} Lon = \arctan\left(\frac{y_G}{x_G}\right) \\ Lat = \arctan\left(\frac{z_G}{\sqrt{x_G^2 + y_G^2}}\right) \end{cases} \quad (6.21)$$

Les figures 6.5, 6.6 et 6.7 illustrent les caractéristiques du passage du repère des antennes au repère terrestre pour l'instrument MIRAS ($H=755$ km, $\alpha = 33^\circ$).

La figure 6.5 montrent comment la résolution spatiale varie dans le champ de vue reconstruit projeté dans le repère terrestre. Alors que la résolution spatiale est isotrope dans tout le plan des cosinus directeurs (symbolisé par des cercles de rayons $3\delta\xi$ dans la figure 6.5-a), elle varie

selon les directions et la position du pixel considéré dans le champ de vue reconstruit dans le repère terrestre. La résolution spatiale en ce pixel est déterminée par le grand axe d'une ellipse (résolution radiale) et, dans une direction orthogonale, par son petit axe (résolution transverse).

Cette déformation se comprend simplement en faisant l'hypothèse d'une terre plate et en se rappelant que la résolution spatiale d'un RISO est celle d'une antenne dont le diamètre est égale à la plus grande distance entre deux antennes. Dans le cas d'un instrument non incliné, l'intersection du gain de cette antenne « synthétisée » avec une surface plane est un cercle centré sur le point sub-satellite (la résolution spatiale est isotrope) et va naturellement s'allonger en une ellipse au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre du champ de vue.

A ce phénomène s'ajoute l'effet de la rotondité de la Terre qui va conduire à une modification de l'orientation de l'ellipse au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe Y , le long du déplacement du satellite, ainsi que l'on peut le remarquer sur la figure 6.5-d. Ainsi, la résolution n'est isotrope que pour deux pixels situés de part et d'autre de l'axe Y , proches du centre des deux cercles marqués de rouge sur cette même figure.

D'autre part, comme le montre la figure (6.6), une grille régulière dans le repère terrestre n'est pas dans le repère des cosinus directeurs. Le paragraphe suivant est consacré aux rééchantillonnages nécessaires à l'obtention d'une grille régulière dans le repère terrestre.

Les figures 6.8-a et 6.8-b permettent d'établir respectivement, d'une part la variation de la distance mesurée par rapport au point sub-satellite et les dimensions du champ de vue reconstruit et d'autre part la variation de l'angle d'incidence sous lequel est effectuée la mesure, rappelant dans le même temps la capacité multi-angulaire des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture.

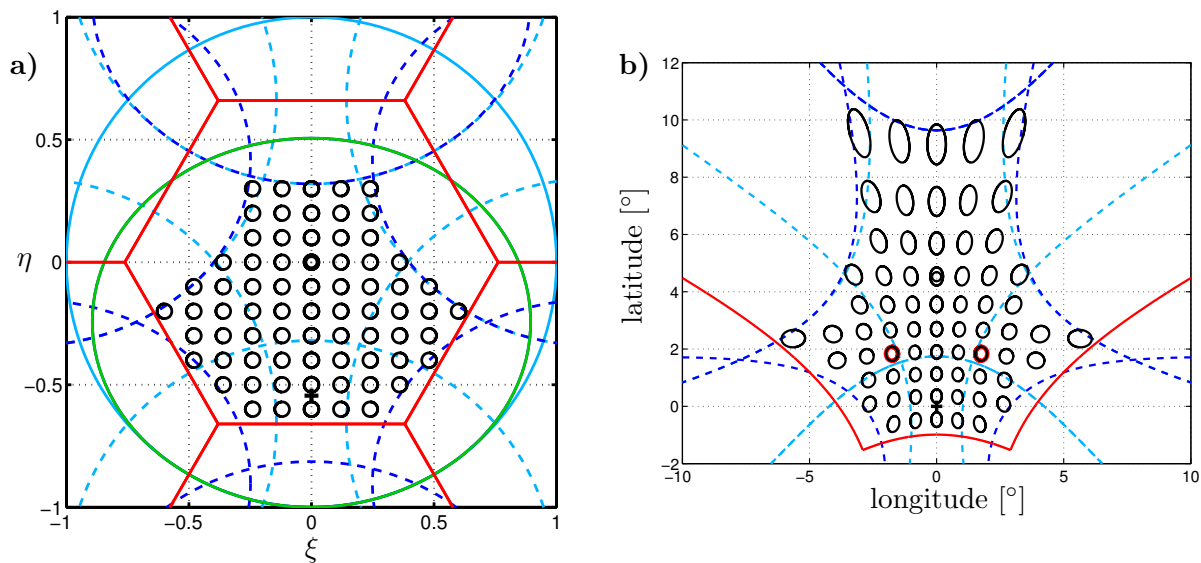


FIG. 6.5 – Déformation de la fonction de transfert instrumentale lors du passage du repère des antennes au repère terrestre : **a)**, la résolution spatiale est isotrope pour tout les pixels du plan des cosinus directeurs alors que **b)**, dans le repère terrestre, elle varie selon les directions et la position du pixel dans le champ de vue reconstruit. On observe aussi la déformation de la grille régulière dans le domaine des antennes à travers la courbure des lignes joignant le centre des ellipses.

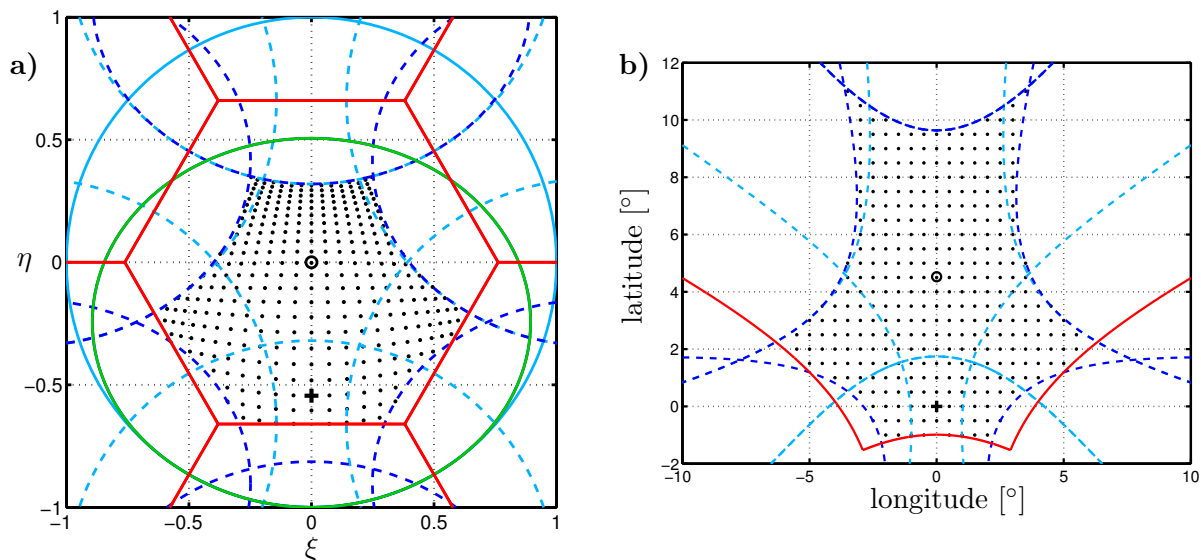


FIG. 6.6 – Déformation d'une grille régulière dans le repère terrestre lors du passage dans le repère des antennes. Le traitement des paramètres géophysiques demande à travailler sur une grille régulière dans le repère terrestre. Il est donc nécessaire d'interpoler la carte de température de brillance dans le domaine des cosinus directeurs, puisque ces points ne correspondent pas aux noeuds de la grille d'échantillonnage.

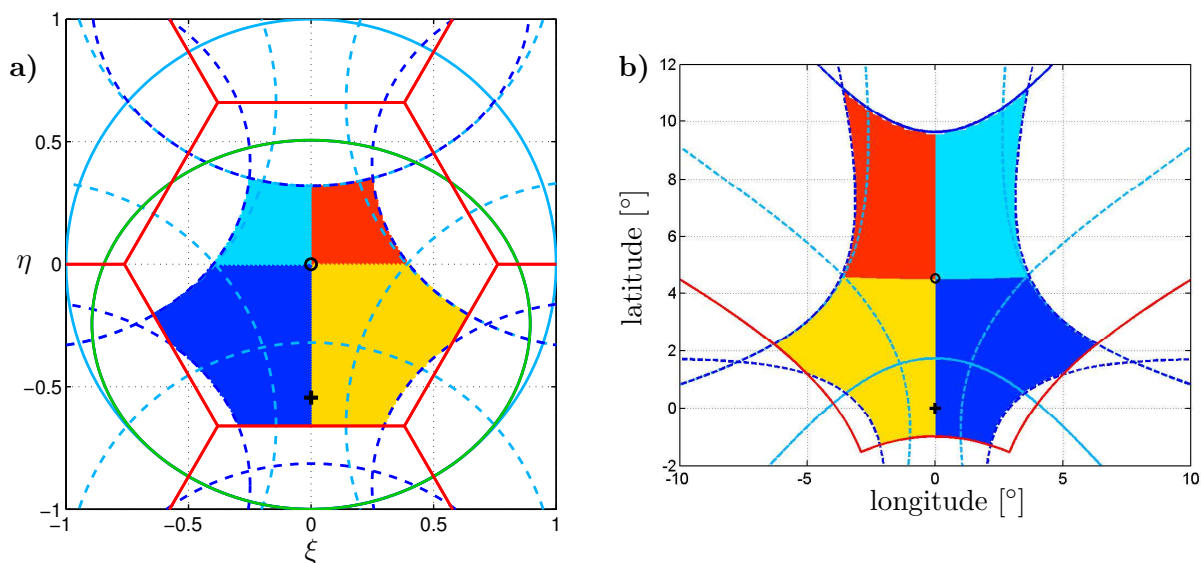


FIG. 6.7 – Renversement de l'image lors du passage **a)** du repère des antennes **b)** au repère terrestre : le changement de repère conduit à un renversement de l'image par rapport à l'axe ($\xi = 0$)

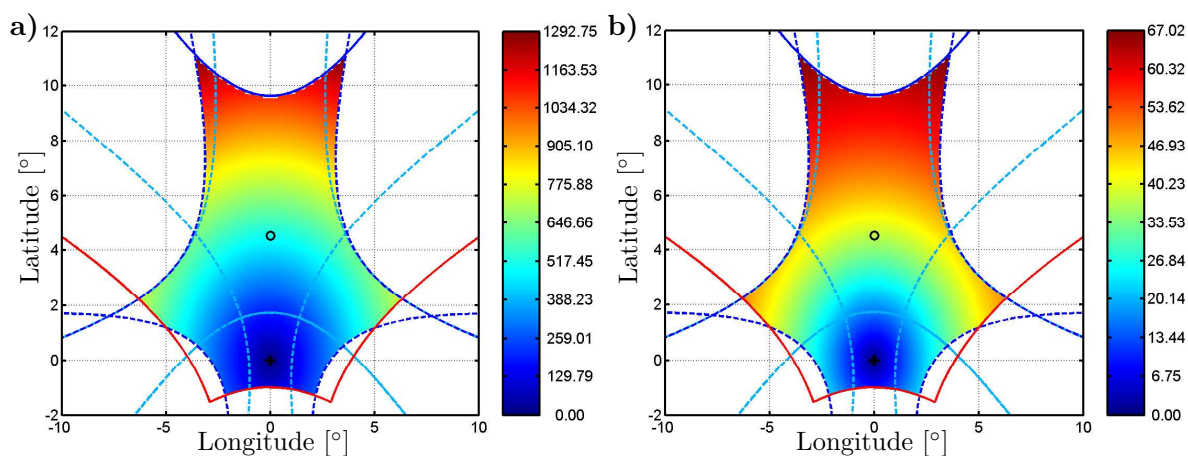


FIG. 6.8 – **a)** Distances ([km]) mesurées par rapport au point sub-satellite et **b)** variation de l'angle d'incidence ([°]) de la mesure (champ de vue reconstruit, repère terrestre).

6.2 Rééchantillonnage des champs reconstruits

Comme il est démontré dans le paragraphe précédent, la grille d'échantillonnage des cartes de températures de brillances n'est pas régulière dans le repère terrestre. Il est toutefois possible, **sous certaines conditions**, d'obtenir la valeur de la température de brillance en tout point (ξ, η) ne coïncidant pas avec les noeuds de la grille d'échantillonnage \mathbb{G}_ξ et donc de rééchantillonner la carte de température de brillance dans le repère terrestre sur une grille régulière, et ce, sans perte d'information ni déformation.

Pour cela, seront considérées dans ce paragraphe **des cartes de températures à bande passante limitée**, soit que la méthode de reconstruction conduise directement à ce cas particulier, soit que ces cartes aient été apodisées.

Nous allons rappeler ici les expressions des fonctions de rééchantillonnage, dites aussi d'interpolation, selon que les données sont initialement échantillonnées sur une grille cartésienne ou hexagonale.

6.2.1 Depuis une grille cartésienne

Considérons l'image $T(k\delta x, l\delta x)$, échantillonnée sur une grille cartésienne régulière à maille carrée avec $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, $l = 0, 1, \dots, (N-1)$ et δx le pas d'échantillonnage. La valeur de T au point (ξ', η') est liée à la transformée de FOURIER continue $\widehat{T}(u, v)$ de T :

$$T(\xi', \eta') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u, v) e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} dudv \quad (6.22)$$

Si le critère de SHANNON est respecté, les composantes de FOURIER de T sont non nulles uniquement pour $|u| \leq 1/(2\delta x)$ et $|v| \leq 1/(2\delta x)$. Dans ce cas, le spectre $\widehat{T}(u, v)$ du signal continu est lié au spectre $\widehat{T}_d(u, v)$ du signal discret par $\widehat{T}(u, v) = (\delta x)^2 \widehat{T}_d(u, v)$. La relation précédente devient alors :

$$T(\xi', \eta') = \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} (\delta x)^2 \widehat{T}_d(u, v) e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} dudv \quad (6.23)$$

Or, le spectre discret $\widehat{T}_d(u, v)$ est lié par une transformée de FOURIER discrète à $T(k\delta x, l\delta x)$:

$$T(\xi', \eta') = (\delta x)^2 \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} T(k\delta x, l\delta x) e^{-2j\pi(uk\delta x + vl\delta x)} \right) e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} dudv \quad (6.24)$$

$$T(\xi', \eta') = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} T(k\delta x, l\delta x) \left(\int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \delta x e^{2j\pi u(\xi' - k\delta x)} du \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \delta x e^{2j\pi v(\eta' - l\delta x)} dv \right) \quad (6.25)$$

$$T(\xi', \eta') = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} T(k\delta x, l\delta x) \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi' - k\delta x}{\delta x}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\eta' - l\delta x}{\delta x}\right) \quad (6.26)$$

Cette dernière relation généralise simplement la fonction d'interpolation de SHANNON dans un cas à deux dimensions :

$$e_o(x_1, x_2) = \operatorname{sinc}(x_1/\delta x) \operatorname{sinc}(x_2/\delta x) \quad (6.27)$$

avec $x_1 = (\xi' - k\delta x)$ et $x_2 = (\eta' - l\delta x)$.

6.2.2 Depuis une grille hexagonale

La relation est considérablement compliquée dans le cas d'un maillage hexagonal. Anterrieu *et al.*[4] ont établi la fonction d'interpolation dans ce cas :

$$e_0(x_1, x_2) = \frac{1}{6} \left(\frac{\sin \pi \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3\delta x}}{\pi \frac{\sqrt{3}x_2}{3\delta x}} \operatorname{sinc} \frac{x_1 - \sqrt{3}x_2}{3\delta x} - \frac{\sin \pi \frac{3x_1 - \sqrt{3}x_2}{3\delta x}}{\pi \frac{\sqrt{3}x_2}{3\delta x}} \operatorname{sinc} \frac{x_1 + \sqrt{3}x_2}{3\delta x} + 4 \operatorname{sinc} \frac{2x_1}{3\delta x} \operatorname{sinc} \frac{2\sqrt{3}x_2}{3\delta x} \right) \quad (6.28)$$

avec $x_1 = (\xi' - k\sqrt{3}\delta x/2)$ et $x_2 = (\eta' - l\delta x)$.

6.2.3 Propriété de translation du rééchantillonnage de Fourier.

Dans le cas de cartes de températures de brillance à bande passante limitée, l'interpolation en point donnée (ξ', η') peut être effectuée à l'aide d'une simple transformée de FOURIER discrète inverse du spectre $\widehat{T}(u, v)$ (obtenu par exemple par une FFT de l'image initiale) :

$$T(\xi', \eta') = \sum_{u, v \in H, R} \{ \mathbf{U}T(\xi, \eta) \} e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} \quad (6.29)$$

où \mathbf{U} est l'opérateur de transformée de FOURIER.

De plus, d'après la propriété de translation de la transformée de FOURIER, les composantes de FOURIER de $T(\xi + \xi', \eta + \eta')$ sont égales à $\widehat{T}(u, v) \exp[-2j\pi(u\xi' + v\eta')]$. La méthode d'interpolation ou de rééchantillonnage employée devrait alors être indépendante de toute translation. Or, la figure 6.9 montre que, si l'interpolation de SHANNON est bien indépendante de la translation, une interpolation bilinéaire, telle qu'utilisée par Camps *et al.* [5] ne l'est clairement pas, l'image rééchantillonnée faisant apparaître des artefacts dus à l'échantillonnage hexagonal de l'image initiale.

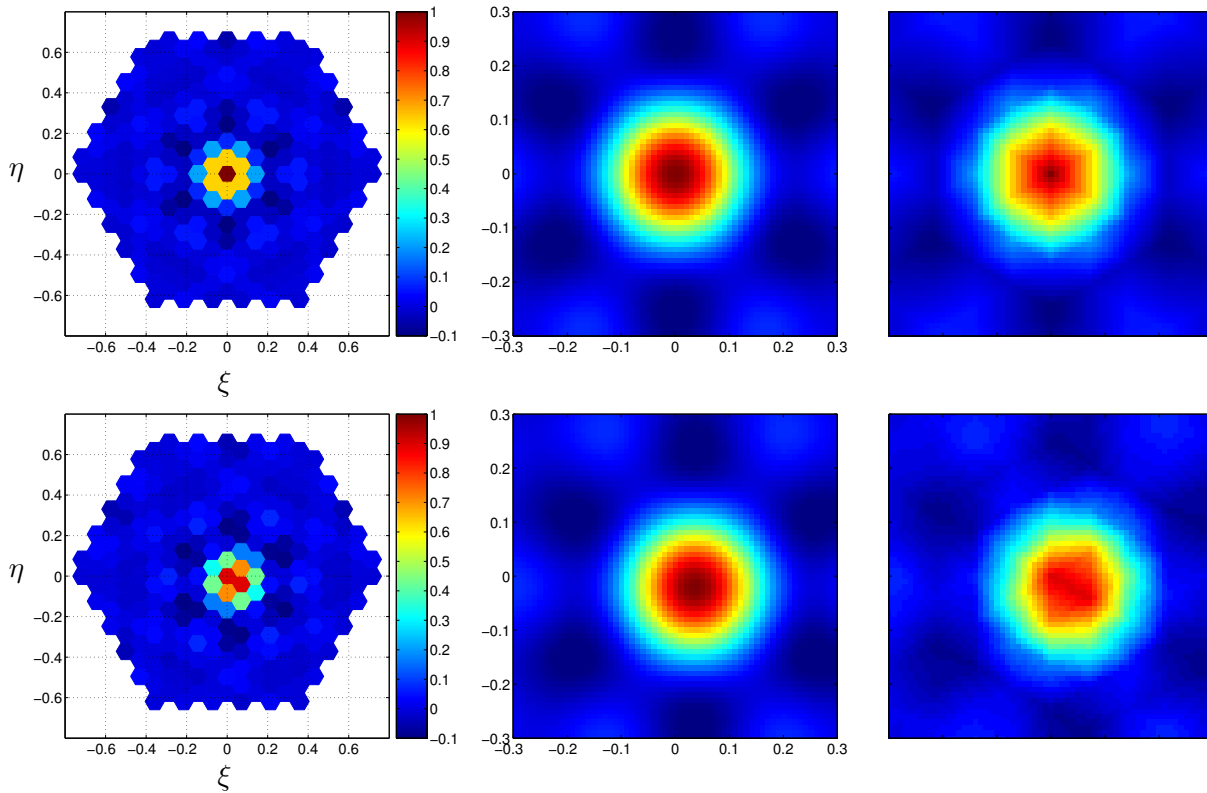


FIG. 6.9 – Propriété de translation de deux méthodes d'interpolation, cas d'un maillage hexagonal avec $N=256$ pixels. **En haut** : même lorsque la carte n'est pas translatée (à gauche), l'interpolation de FOURIER (au centre) et une interpolation bilinéaire (à droite) ne conduisent pas au même résultat, ici rééchantillonné sur une grille cartésienne. Ce dernier comprend des artefacts dû au maillage hexagonal initial, que l'on ne retrouve pas dans le premier cas. **En bas**, lorsque la carte est translatée vers un point (ξ', η') n'appartenant pas au maillage initial (à gauche), le résultat est clairement la translation du cas précédent pour l'interpolation de FOURIER (au centre), ce qui n'est pas le cas pour l'interpolation bilinéaire (à droite).

6.3 Application du multi-fenêtrage à un instrument de type MIRAS

La famille de fenêtre de KAISER [6] a été sélectionnée pour être à la base de la construction des fenêtres qui seront appliquées à chaque pixel du champ reconstruit :

$$\widehat{W}(u, v) = \frac{I_0\left(\alpha\sqrt{1-\bar{\rho}^2}\right)}{I_0(\alpha)} \quad (6.30)$$

où I_0 est la fonction de BESSEL modifiée d'ordre 0, $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$ et α est un réel positif (pour $\alpha = 0$, on obtient une fenêtre rectangle). La valeur de ce paramètre modifie la décroissance de la fenêtre $\widehat{W}(u, v)$ depuis la fréquence nulle jusqu'au bord de la bande passante, modifiant ainsi les caractéristiques de $W(\xi, \eta)$ dans le repère des antennes. Pour un pixel (ξ, η) et un paramètre α donné, la fonction de transfert est à symétrie circulaire dans le repère des cosinus directeurs et elliptique le repère terrestre (voir Fig. 6.10).

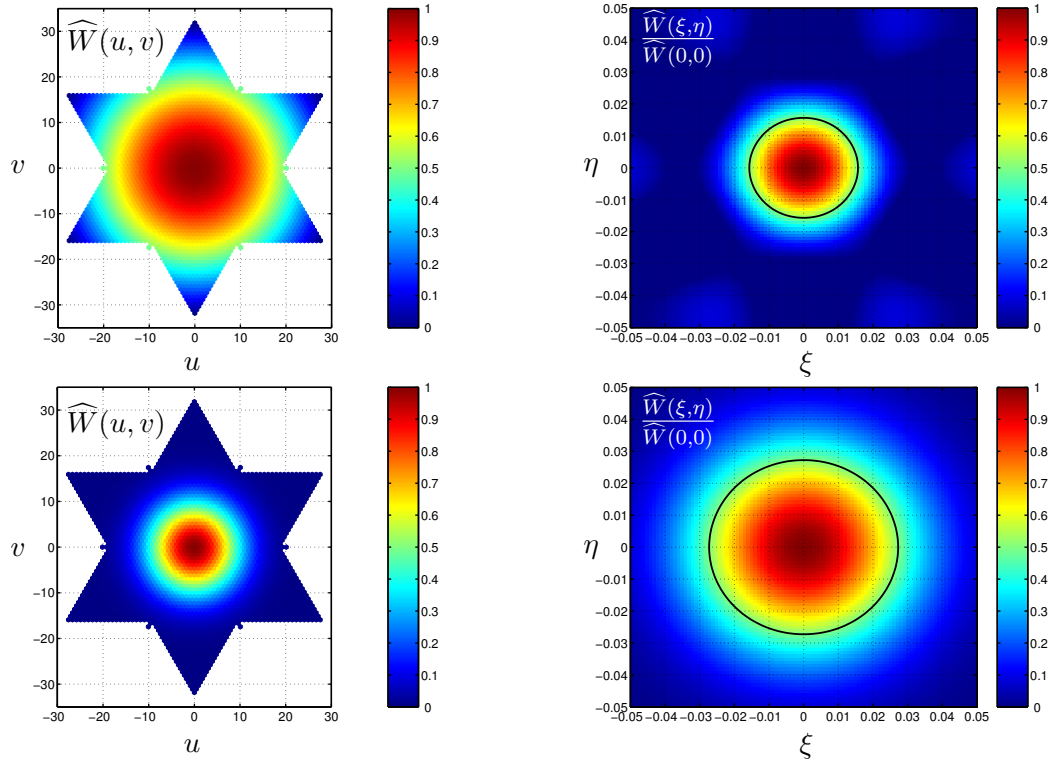


FIG. 6.10 – La fenêtre de KAISER pour deux valeurs du paramètre α . **A gauche**, la fenêtre a une symétrie circulaire dans le domaine de FOURIER mais, **à droite**, une symétrie elliptique dans le domaine spatial (l'ellipse trace le contour à -3dB).

L'idée sous-jacente au multi-fenêtrage est d'appliquer une fenêtre d'apodisation propre à chaque pixel (ξ, η) (sur une grille régulière dans le repère terrestre) pour obtenir une résolution isotrope dans le champ reconstruit projeté sur Terre.

$$T_w(\xi, \eta) = \sum_{u,v} \sum_{\in H,R} \widehat{W}_{\xi,\eta}(u, v) e^{+2j\pi(u\xi + v\eta)} \quad (6.31)$$

Le paramètre α contrôlant la forme de la fenêtre, il lui est ajouté une dépendance angulaire à l'intérieur de la bande passante, de façon à rendre la fenêtre elliptique dans le repère des cosinus directeurs, et donc, avec la bonne inclinaison et la bonne ellipticité, à symétrie circulaire dans le repère terrestre. Pour un pixel donné (ξ, η) et pour chaque point (u, v) de la bande passante, le paramètre α est calculé à partir d'une simple relation linéaire :

$$\alpha = \alpha(u, v) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (6.32)$$

où $\tan \varphi = v/u$ et $\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, α_1 et α_2 définis comme sur la figure 6.11. Cette relation a été élaborée de façon à faire varier α linéairement entre α_1 et α_2 pour $\varphi \in [\varphi_1 \varphi_2]$ et à conserver la symétrie de la fenêtre $\widehat{W}(u, v)$. La figure 6.12 montre que les valeurs de ces 3 paramètres (φ_2 est lié à φ_1) contrôlent bien l'ellipticité de la fenêtre dans le domaine de FOURIER et donc dans le domaine spatial.

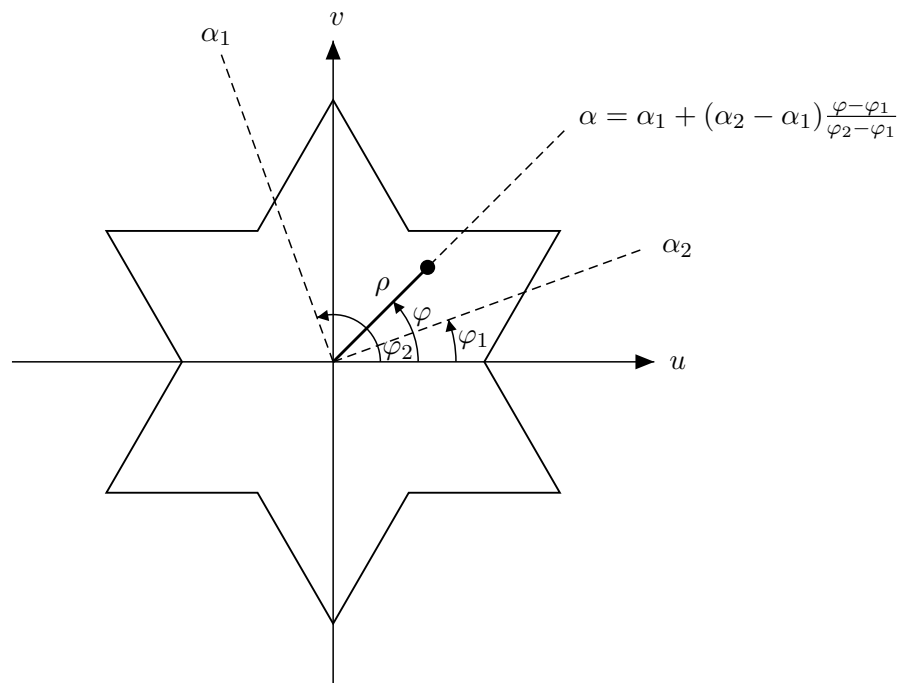


FIG. 6.11 – Paramétrisation linéaire du paramètre α de la famille de fenêtre KAISER.

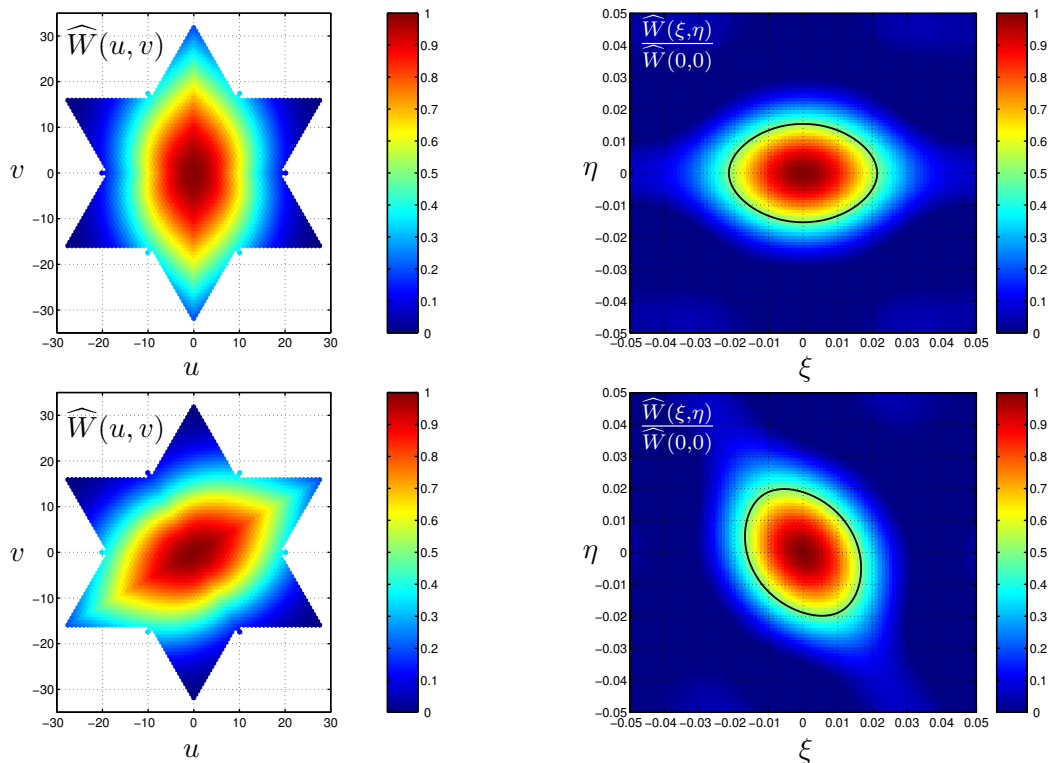


FIG. 6.12 – Illustration de la déformation de la fenêtre de KAISER par la paramétrisation de α . La dépendance en α_1 , α_2 , φ_1 et φ_2 permet d'imprimer une symétrie elliptique à la fenêtre dans le domaine de FOURIER et modifier ainsi sa symétrie dans le domaine spatial.

Reste à trouver les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1$ pour lesquels la fenêtre est à symétrie circulaire sur la Terre. Pour une résolution donnée D , après initialisation, un algorithme d'ajustement des paramètres d'une ellipse fournit l'inclinaison Ψ et l'ellipticité a/b de la fonction de transfert à -3dB dans le repère terrestre [7]. Une méthode d'optimisation non linéaire de type BFGS nous permet de minimiser le critère :

$$\min \{F = (D - a)^2 + (D - b)^2\}, \quad (6.33)$$

et ainsi de trouver les paramètres α_1, α_2 et φ_1 qui conduisent une résolution isotrope pour $a = b = D$, Ψ n'étant pas défini pour un cercle.

Bien entendu, la résolution D imposée ne peut être atteinte dans l'ensemble du champ de vue reconstruit. La figure 6.15 montre comment le multi-fenêtrage a été appliqué à la scène présentée sur la figure 6.14 pour une résolution $D = 55$ km. L'effet est particulièrement probant le long des côtes britanniques, la zone de transition entre les terres et la mer s'élargissant nettement lorsque l'on s'éloigne du point sub-satellite avec une apodisation classique, alors qu'elle est constante avec le multi-fenêtrage. La contrepartie est double : la résolution est dégradée au centre du champ de vue reconstruit et la fauchée ainsi que la gamme des angles d'incidence disponibles sont réduites. Plus D est petit, plus le champ reconstruit se réduit, comme l'illustre le tableau 6.1 résumant les caractéristique du champ reconstruit pour les différentes résolutions testées.

TAB. 6.1 – Fauchée et gamme des angles d'incidences.

résolution isotrope au sol	fauchée	gamme d'angle d'incidences
55 km	1300 km	0°/55°
44 km	1100 km	0°/50°
33 km	850 km	0°/40°

Les valeurs optimisées des paramètres α_1, α_2 et φ_1 sont montrées sur la figure 6.13. Les faibles valeurs atteintes par α_2 dans certaines zones conduisent à des amplitudes des oscillations de GIBBS importantes. La hauteur des lobes secondaires est alors proche de celle d'une fenêtre rectangle. Les valeurs des deux facteurs de mérite (HSSL et BEHM) de la figure 6.16 sont à comparer avec celles de la fenêtre de BLACKMAN : HSSL = -13.6 dB et BEHM = 98.7%.

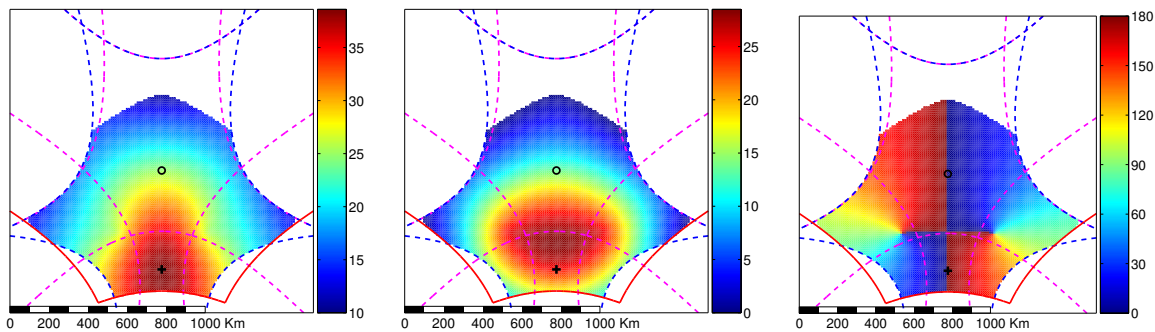


FIG. 6.13 – (De gauche à droite), paramètres α_1, α_2 et φ_1 optimisés pour une résolution isotrope $D=55$ km dans le repère terrestre.

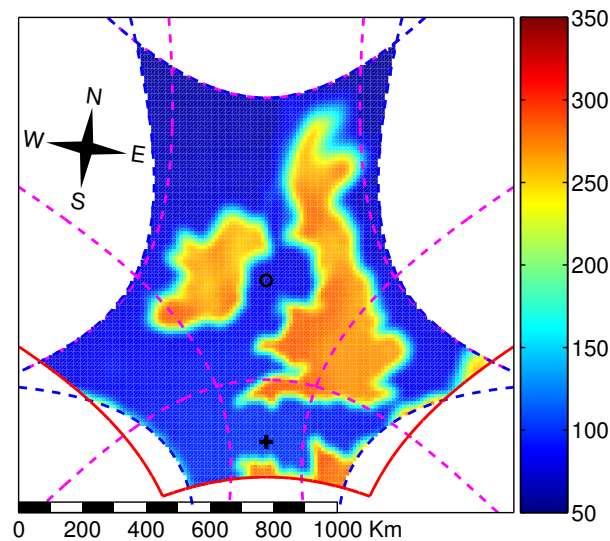


FIG. 6.14 – Projection de la carte de température reconstruite et apodisée par la fenêtre de KAISER($\alpha = 9$) dans le repère terrestre. L'utilisation d'une seule fenêtre pour l'ensemble des pixels conduit à une dégradation de la résolution spatiale au fur et à mesure que l'on se rapproche du bord du champ de vue : de 25 km sur la côte sud de l'Angleterre, elle passe à 100 km au nord de l'Ecosse.

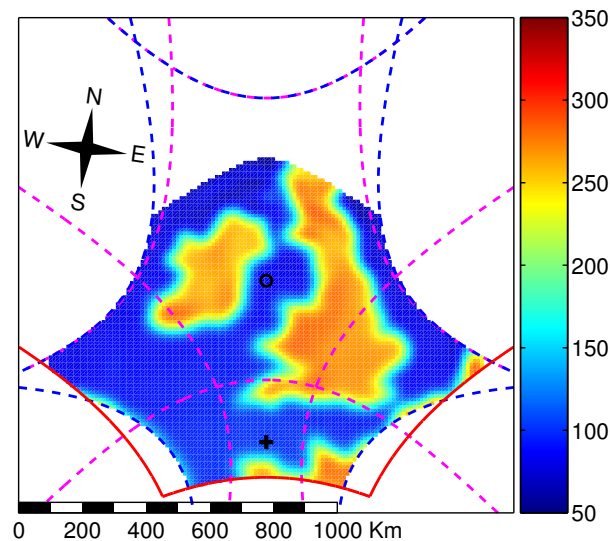


FIG. 6.15 – Application du multi-fenêtrage sur la scène reconstruite : chaque pixel est apodisé par une fenêtre de KAISER dont les paramètres ont été ajustés de façon à obtenir une résolution spatiale isotrope de 55 km. Notons que cette technique a pour conséquence de réduire le champ de vue exploitable.

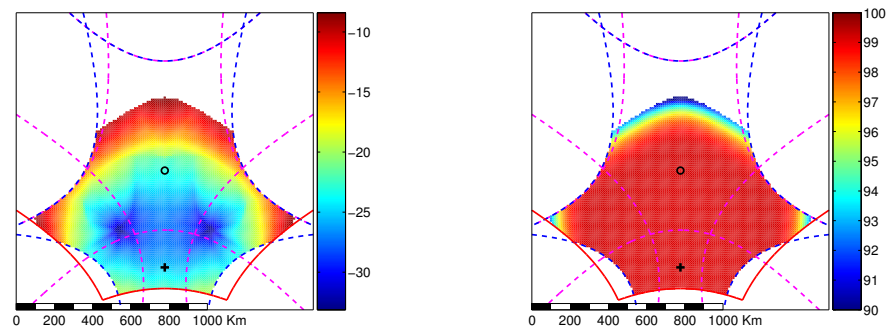


FIG. 6.16 – **A Gauche**, hauteur des lobes secondaires en dB et, **à droite**, efficacité du lobe principal en % dans le repère terrestre pour une résolution isotrope $D=55\text{km}$.

Les effets de ces lobes secondaires sur la qualité de l'estimation des paramètres géophysiques ont été étudiés à travers l'étude du comportement de la variable centrée $\zeta = (SM - SM_0)/\sigma_{SM}$, SM_0 étant la valeur réelle de l'humidité du sol, SM la valeur estimée et σ_{SM} l'incertitude sur cette estimation. ζ doit suivre une loi gaussienne, avec une valeur moyenne $\langle \zeta \rangle = 0$ et une déviation standard $\sigma_\zeta = 1$. Une valeur non nulle pour $\langle \zeta \rangle$ traduit un biais sur l'estimation de l'humidité tandis qu'une déviation standard plus grande que 1 conduit à des valeurs estimées peu fiables, ce qui traduit sans doute une sous-estimation.

Les statistiques reportées dans le tableau 6.2 sont celles de la variable centrée ζ pour l'Europe de l'Ouest calculée lorsque sont appliqués une fenêtre de BLACKMAN ou le multi-fenêtrage, en choisissant la fonction de pondération exacte, dépendant de l'angle d'incidence, ou au contraire une fonction de pondération moyenne. Chaque pixel contenant une fraction pondérée de couvert végétal supérieure à 20% est retenu.

Alors qu'il est normalement possible de choisir la fonction de pondération exacte pour chaque pixel lors de l'estimation de l'humidité, il est plus simple de supposer cette fonction identique dans tout le champ reconstruit. Cependant, dans ce cas, les lobes secondaires viennent dégrader les résultats lorsque le multi-fenêtrage est utilisé. Les performances restent toutefois meilleures pour le multi-fenêtrage que pour une apodisation classique lorsque une fonction de pondération moyenne est appliquée.

TAB. 6.2 – Statistiques sur la variable centrée ζ .

Fenêtre appliquée	Fonction de pondération	$\langle \zeta \rangle$	σ_ζ
BLACKMAN	moyenne	+0.66	1.84
BLACKMAN	réelle	-0.04	0.99
Multi-fenêtrage	moyenne	+0.17	1.45
Multi-fenêtrage	réelle	-0.09	1.05

Biographie(s)

Biographie 6.1: **BESSEL, Friedrich Wilhelm**

(22 Juillet 1784, Minden, Westphalie - 17 Mars 1846, Königsberg, Prusse)



Bessel ne s'est tourné vers les sciences que relativement tard. Agé de 14 ans, il quitte l'école pour devenir apprenti dans une société commerciale d'import-export à Bremen.

Alors qu'il ne touche aucun salaire, les activités et les partenariats de cette société le pousse à étudier en parallèle la géographie, l'espagnol et l'anglais. Il s'oriente alors vers les problèmes de navigation liés au positionnement des navires en pleine mer. Finalement, cette démarche le pousse vers les mathématiques et l'astronomie.

En 1804, il écrit un mémoire sur ses calculs de l'orbite de la comète de Halley effectués à partir de mesures réalisées par Harriot en 1607. Heinrich Olbers, à qui il envoie ce papier, reconnaît là un talent particulier et le pousse à continuer dans cette voie. En 1806, il abandonne une vie financièrement stable pour devenir assistant à l'observatoire de Lilienthal. Continuant

ses recherches sur la position des étoiles, il devient directeur du nouvel observatoire de Königsberg, encore en construction, en 1810. Sous la recommandation de Gauss, il reçoit le titre de docteur de l'université de Göttingen, ce qui lui permet de devenir officiellement professeur en astronomie et d'enseigner.

Bessel a été l'un des premiers astronomes à reconnaître l'importance de l'estimation des erreurs de mesures dans la détermination de la position des astres. Il réduit les données de Bradley sur la position de quelques milliers d'étoiles, déduisant les erreurs instrumentales causées par la réfraction, éliminant les effets du déplacement de la Terre.

Il introduit la fonction de Bessel dès 1817 lors d'une étude du problème à 3 corps de Kepler. En 1824, il publie un traité sur la perturbation des orbites des planètes dans lequel il complète l'analyse de ces fonctions.

En 1830, il publie la position moyenne et apparente de 38 étoiles sur la période 1750-1850. En 1841, il déduit de la variation périodique des trajectoires de Sirius et Procyon la présence de systèmes doubles, 21 ans avant leur observation.

Bibliographie

- [1] M. MARTIN-NEIRA : Strip adaptative processing. *SMOS SAG-5*, 30 Mars 2001.
- [2] E. ANTERRIEU, B. PICARD, Manuel MARTIN-NEIRA, P. WALDTEUFEL, M. SUESS, J.-L. VERGELY, Y. KERR et S. ROQUES : A strip adaptative processing approach for the smos space mission. *accepted in IGARSS'04*, 2004.
- [3] Philippe WALDTEUFEL, E. ANTERRIEU, J.M. GOUTOULE et Y.H. KERR : Field of view characteristics of a microwave 2d interferometric antenna as illustrated by the miras concept. *Proc. of microRAD'99*, pages 477–483, 1999.
- [4] E. ANTERRIEU, P. WALDTEUFEL et A. LANNES : Apodization functions for 2-d hexagonally sampled sunthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 40(12):2531–2542, 2002.
- [5] A. CAMPS, J. BARA, I. CORBELLA et F. TORRES : Visibility inversion algorithms over hexagonal sampling grids. *Proc. of Soil Moisture and Ocean Salinity Measurements and Radiometers Techniques*, Meeting ESA-ESTEC, 21 April 1995.
- [6] J.F. KAISER et R.W. SCHAFER : On the use of the i_0 -sinh window for spectrum analysis. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 28(1):105–107, 1980.
- [7] A.W. FITZGIBBON, M. PILU et R.B. FISHER : Direct least-squares fitting of ellipses. *IEEE Trans. on patter analysis and machine intelligence*, 21(5):476–480, 1999.

