



HAL
open science

Téledétection de la surface terrestre par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture : principes de mesure, traitement des données interférométriques et méthodes de reconstruction régularisées

Bruno Picard

► **To cite this version:**

Bruno Picard. Téledétection de la surface terrestre par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture : principes de mesure, traitement des données interférométriques et méthodes de reconstruction régularisées. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004. Français. NNT : . tel-00009029v3

HAL Id: tel-00009029

<https://theses.hal.science/tel-00009029v3>

Submitted on 28 Jul 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Versailles - St Quentin

Spécialité : MÉTHODES PHYSIQUES EN TÉLÉDÉTECTION

par

Bruno Picard

**Téledétection de la surface terrestre
par un radiomètre imageur
à synthèse d'ouverture :
principes de mesure,
traitement des données interférométriques
et méthodes de reconstruction régularisées.**

Soutenue le 19 Novembre 2004 devant le jury composé de :

Président : M. Philippe WALDTEUFEL

Rapporteurs : M. Stéphane GUILLOTEAU
M. Volker WITTMANN

Examineur : M. Yann H. KERR

Directeurs de thèse : M. Eric ANTERRIEU - M. Gérard CAUDAL

Mis en page avec la classe thloria.

Digressions & remerciements...

Cette thèse a été mon objectif tout au long de ma scolarité et, même si c'est un autre domaine de la physique qui m'a initialement porté, je crois que c'est avant tout ce diplôme en lui-même que je visais.

Comme une litanie, j'ai entendu que cette voie serait difficile, alors que ma famille, mes amis, me poussaient chacun à leur manière à poursuivre vers ce que je désirais plutôt que vers ce qui était raisonnable. Je voulais cette thèse parce que l'on m'a répété que ce serait difficile, voire impossible. Je voulais cette thèse, parce que 10% des étudiants des premiers cycles universitaires sont fils d'ouvriers, et ils ne sont plus que 5% en troisième cycle ¹. Je voulais cette thèse parce ma bourse universitaire, sans laquelle je n'aurais sans doute pas pu faire des études supérieures, n'a cessé de diminuer au fur et à mesure des années, jusqu'à m'obliger à travailler les dernières années. Je voulais cette thèse, parce que, lorsqu'elle débute et qu'elle est financée par l'Etat à hauteur de 984 Euros net par mois en 2001, les trois premiers mois ne sont versés que fin décembre, comptant pour 80% de la somme due, à titre, et je cite, « d'avance ». Je voulais cette thèse parce que lorsque l'on est vacataire à l'université pour compléter cette même bourse, le premier versement ne se fait que 8 mois après le début des cours, voire (véridique) l'année d'après.

Que j'écrive ces lignes prouve que c'est possible, pourvu qu'on le rêve assez fort. Je ne suis pas aigri, je rêve encore, et mon cas n'est certainement pas exceptionnel, car j'ai la chance d'avoir été soutenu, parfois même par des personnes que je connaissais pas ou peu. Je voulais juste profiter de ces remerciements pour apporter mon éclairage sur le chemin qui reste à faire pour assurer l'égalité d'accès à l'éducation, tout en soulignant l'importance des bourses, des chambres et des restos universitaires. En espérant que la notion d'égalité associée à celle de service public ne soit jamais pervertie par l'application d'un quelconque Service d'Intérêt Economique Général ou autre Accord Général sur le Commerce des Services.

Cela étant dit, merci !

A Eric Anterrieu pour sa première expérience d'encadrement de thèse. On s'est plutôt bien débrouillé ! Je garderai le souvenir d'un véritable échange qui m'a fait progresser comme je ne l'avais imaginé et dans lequel, j'espère, l'échange d'information (convenablement échantillonnée et sans repliement !) et d'expérience n'aura pas été à sens unique.

A Gérard Caudal, pour son encadrement dont la qualité est inversement proportionnelle à la distance qui nous séparait une grande partie de l'année. Vous avez toujours su être présent pour la moindre de mes hésitations, la moindre de mes difficultés, et vous avez été une source de motivation pour continuer d'avancer.

A Philippe Waldteufel, pour avoir accepté la présidence de ce jury et surtout, pour le rôle actif et essentiel qu'il a joué dans la direction prise par mes travaux de recherche au cours de cette thèse. Vous avez constamment su mettre le doigt là où ça fait mal...et je vous en remercie !

A Yann H. Kerr pour sa participation à cette thèse et pour m'avoir proposé ce post-doc...que j'ai refusé !, à Volker Wittmann pour avoir accepté d'être rapporteur d'une thèse en français, que vous maîtrisez parfaitement, quoique vous en disiez (*vielen Dank!*), à Stéphane Guilloteau, pour sa lecture attentive et son avis apprécié et enfin, à Bernard Gérard pour son support moral, son soutien actif : votre entrain communicatif et votre ambition ont été contagieux et vous êtes pour beaucoup dans ma situation professionnelle actuelle, à laquelle je n'osais rêver.

A Jean-Claude André pour m'avoir accueilli au sein du CERFACS, à toute l'équipe administrative pour sa disponibilité, et en particulier à Isabelle Moity, dont le professionnalisme et la

¹<http://www.education.gouv.fr/stateval/rers/repere2003.htm#6>

qualité de travail ont permis que cette thèse se déroule dans les meilleures conditions matérielles... et humaine!, et à Olivier Thual pour nous avoir adoptés au sein de son équipe pleine de PTT et autres SIESTE.

A toute l'équipe CSG, pour sa disponibilité et... sa patience : ils sont l'exemple qu'il est possible de poser une question de débutant sans passer pour un abruti et de la reposer 2 jours plus tard sans se faire lapider. Qu'aurais-je mis dans cette thèse sans vos interventions techniques et autres débogages... ?

A la GlobC team pour toutes ces pauses cafés, ces auberges espagnoles, ces pots de départ, d'arrivée, de thèse, de soutenance et autres collations sans raison apparente! Toutes mes excuses à Cyril, Julien, Nicolas D et Nicolas B : notre association au sein d'une jeune et dynamique entreprise de vente de pizzas à domicile est compromise... j'ai trouvé du taf!

A Serge Gratton pour ses conseils, ses nombreuses explications et son soutien apprécié et à Nicolas Reul, pour sa collaboration, ses conseils et son soutien : je ne désespère pas de finir par te rencontrer en personne, plutôt que par courrier ou téléphone.

Pour en terminer avec le domaine professionnel, Mme Katia Laval, je ne sais comment vous remercier de m'avoir offert cette opportunité de rejoindre le DEA que vous dirigiez. Au delà de l'ouverture à un domaine scientifique nouveau, à la problématique du changement climatique qui a influencé mon quotidien, vous avez contribué à un nouveau départ, amorcé tout au long de cette thèse, et dont les conséquences vont bien au-delà du cadre professionnel.

A vous qui suivez, je ne vous remercie pas pour cette thèse, parce que, quoiqu'il en soit, ce n'est rien à côté de ce que vous m'apportez, vous qui êtes ma Famille. Je vous remercie pour avoir été et être à mes côtés.

A mes amis. Je suis en partie ce que vous êtes, ce que vous faites. Vous êtes mes Témoins, ceux par qui on sait que l'on existe, de ceux qui vous poussent à être, à être juste. Les distances nous séparent, dans le temps et dans l'espace, notre amitié est parfois en sommeil, mais sachez que tous, vous êtes ici, là. Par ordre approximatif d'apparition à l'écran, juste merci à édouardanthonylaurentCguillaumeBsabineguillaumeGjuliettedelphinexavierstephanienicoMfloestellelaurentMnicoDvavaarnaud.

A mes parents Geneviève et Jean-Paul, à ma maman, pour l'avenir que tu m'as offert et pour m'avoir fait découvrir les livres, ce trésor qui me rend riche, qui emplit mes rêves, à papa, pour m'avoir inspiré cette curiosité, pour être celui à qui je veux ressembler quand je serai grand. A mon petit(?) frère Christophe, à ma soeur Estelle et à mon autre frère Stéphane et aux puces, car ma vie est plus riche grâce à la votre, car je vis tellement d'autres choses à travers vous, à travers vos vies. Soyez fiers tous les sept, fiers de vos vies, de vos actes, présents et à venir. Ne laissez jamais tomber les bras, ne laissez personne orienter votre vie là où vous ne voulez pas aller. Vivez! Rêvez!

Julie. La Vie ne vaut que par nos regards partagés, nos souffles mêlés, nos corps emmêlés, nos coeurs échangés. Je ne suis que parce que tu es. Tu es mon Rêve.

Table des matières

Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Table des éclaircissements	xv
Table des biographies	xvii
Introduction	1
Partie I Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d'Ouverture	5
Chapitre 1 Télédétection de l'humidité des sols et de la salinité de surface des océans	7
1.1 Contraintes instrumentales sur la mesure de l'humidité et de la salinité	7
1.1.1 Avec un radar ou un radiomètre ? A quelle longueur d'onde?	7
1.1.2 Télédétection de l'humidité des sols	10
1.1.3 Télédétection de la salinité des océans	10
1.2 Radiomètre à puissance totale	11
1.2.1 L'antenne	13
1.2.2 Le récepteur	16
1.2.3 Grandeurs caractéristiques	20
Bibliographie	23
Chapitre 2 Principes fondamentaux de l'imagerie par interférométrie	25
2.1 Présentation générale des radiomètres à synthèse d'ouverture	25
2.2 Fondements mathématiques : la transformée de FOURIER	31
2.2.1 Fréquences temporelles - Fréquences spatiales	31

2.2.2	Les transformées de FOURIER à deux dimensions	31
2.3	Fondements physiques : l'expérience des trous d'Young	37
2.3.1	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 = 0$	38
2.3.2	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$	39
2.3.3	Cas d'une source primaire étendue entre $-r_s$ et $+r_s$	39
Bibliographie		47
Chapitre 3 Le théorème de Van Cittert-Zernike		49
3.1	Corrélation des champs reçus par deux antennes	49
3.2	Instrumentation	52
3.2.1	Les LICEF	52
3.2.2	Le corrélateur	53
3.2.3	Les NIR	53
3.3	Relation fondamentale entre les visibilitées et la température de brillance	55
3.3.1	Les gains d'antennes	55
3.3.2	Le phénomène de décorrélation spatiale	55
3.3.3	Relation Fondamentale	57
Bibliographie		59
Partie II Traitements des données interférométriques		61
Chapitre 4 Cadre mathématique		63
4.1	Couvertures fréquentielles expérimentales et grilles d'échantillonnage	63
4.1.1	Configuration en U et maillage cartésien	65
4.1.2	Configuration en Y et maillage hexagonal	69
4.2	Espaces et opérateurs	74
4.2.1	Espaces des objets, des données et sous-espaces associés	74
4.2.2	Les opérateurs clés	75
4.3	\mathbf{G} , opérateur de modélisation	76
4.3.1	Action des opérateurs \mathbf{G} et \mathbf{G}^*	76
4.3.2	Propriétés de la matrice \mathbf{G}	77
Bibliographie		83
Chapitre 5 Apodisation		85
5.1	Rappels sur l'apodisation et les facteurs de mérite	86

5.1.1	L'apodisation	86
5.1.2	Les facteurs de mérite.	89
5.2	Les fenêtres d'apodisation 2D	93
5.3	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante	101
5.3.1	Dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}	101
5.3.2	Dépendance radiale et angulaire du paramètre ρ_{max}	104
Bibliographie		109
Chapitre 6 Passage au repère terrestre et multi-fenêtrage		111
6.1	Champ de vue observé, champ de vue reconstruit	112
6.1.1	Champ de vue observé	112
6.1.2	Champ de vue reconstruit et repliement	116
6.1.3	Champ de vue reconstruit et passage au repère terrestre	120
6.2	Rééchantillonnage des champs reconstruits	124
6.2.1	Depuis une grille cartésienne	124
6.2.2	Depuis une grille hexagonale	125
6.2.3	Propriété de translation du rééchantillonnage de FOURIER.	125
6.3	Application du multi-fenêtrage à un instrument de type MIRAS	126
Bibliographie		133
Partie III Reconstruction d'image		135
Chapitre 7 Exposition du problème inverse et méthodes de reconstruction non régularisées		137
7.1	Problème direct - Problème inverse	137
7.2	Méthodes de reconstruction non régularisées	139
7.2.1	La transformée de FOURIER inverse	139
7.2.2	La méthode CLEAN	142
7.2.3	L'algorithme de calibration par points chauds	143
Bibliographie		145
Chapitre 8 Méthodes de reconstruction régularisées		147
8.1	Régularisation mathématique	148
8.1.1	La solution de norme minimale	148
8.1.2	Régularisation mathématique par décomposition en valeurs singulières tronquée	149

8.2	Régularisation au sens de TIKHONOV	149
8.3	Régularisation physique dite méthode à bande passante limitée	150
8.4	Comparaison des méthodes de régularisation	151
8.4.1	Valeurs optimales pour les paramètres de régularisation	152
8.4.2	Point de vue informatique	156
8.5	Article : comparaison de méthodes d'inversion régularisées	158
Bibliographie		167
Chapitre 9 Modélisation et auto-caractérisation des paramètres instrumentaux		169
9.1	Simulations des instruments de type HUT2D et MIRAS.	169
9.1.1	Modélisation d'un instrument réaliste	170
9.1.2	Modélisation d'un instrument idéal	179
9.2	Auto-caractérisation des paramètres de modélisation de G	180
Bibliographie		183
Chapitre 10 Erreur de reconstruction systématique		185
10.1	Erreur systématique en l'absence de repliement	185
10.1.1	Erreur systématique et qualité de l'instrument.	186
10.1.2	Erreur RMS, propriété de la scène et apodisation.	188
10.2	Erreur systématique et repliement	194
Bibliographie		201
Chapitre 11 Propagation des erreurs		203
11.1	Propagation des erreurs aléatoires sur les données	203
11.2	Propagation des erreurs de modélisation	207
Bibliographie		211
Chapitre 12 Impact du rayonnement solaire sur la télédétection de la salinité de surface		213
12.1	Température de brillance du soleil et de son reflet sur la période 2007-2010	214
12.2	Positions du soleil et du point spéculaire dans le champ de vue de SMOS	214
12.3	Impact du rayonnement solaire sur la qualité de la reconstruction d'image	217
12.4	Discussion et résultats	219
Bibliographie		223

Chapitre 13 Extension de la reconstruction au mode de polarisation totale	225
13.1 Relation de VAN CITTERT-ZERNIKE en mode de polarisation totale	225
13.2 Modélisation du diagramme de rayonnement des antennes	227
13.3 Simulations et résultats	229
Bibliographie	235
Conclusions & Perspectives	237
Annexes	241
Annexe A Article	243
A.1 Revue « Traitement du Signal », vol. 21, n° 1	244
Annexe B Actes de Congrès	259
B.1 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2002	261
B.2 Colloque GRETSI, Traitement Signal et Image 2003	264
B.3 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2003	270
B.4 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2004	277
Annexe C Le Nouveau Chapitre de Thèse	285
C.1 Présentation succincte	286
C.2 L’environnement scientifique	287
C.3 Un contexte concurrentiel	287
C.4 Positionnement personnel et compétences acquises	288
C.5 Evaluation du coût consolidé de la thèse	289
C.6 Impact de la thèse	290

Table des figures

Partie I Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d'Ouverture 5

1.1	Sources de contributions à la température d'antenne en bande L.	12
1.2	Exemple d'un diagramme de rayonnement d'une antenne.	14
1.3	Résolution spatiale d'un radiomètre à puissance totale.	15
1.4	Mélange de la fréquence RF et de la fréquence de l'oscillateur local.	18
1.5	Description des composants d'un radiomètre à puissance totale de type super-hétérodyne.	19
2.1	Vue d'artiste du satellite SMOS.	30
2.2	Schéma du dispositif instrumental du HUT-2D.	30
2.3	L'accord de La mineur vu comme la superposition de ses quatre fondamentales.	32
2.4	« Le bassin aux nymphéas », de CLAUDE MONNET (1899, <i>Musée d'Orsay</i>) et sa transformée de Fourier.	32
2.5	Composantes basse et haute fréquence du « bassin aux nymphéas ».	36
2.6	Dispositif de l'expérience des trous d'Young.	38
2.7	Variation de l'intensité sur une figure d'interférence obtenue par une expérience de trous d'Young.	42
2.8	Variation de la visibilité en fonction de la distance entre les trous d'une expérience d'Young.	42
3.1	Description du référentiel lié à un couple d'antenne.	52
3.2	Light weight Cost-Effective Front-end, LICEF.	53
3.3	Schéma descriptif d'une ligne de base.	54

Partie II Traitements des données interférométriques 61

4.1	Configurations en Y et en U de deux réseaux interférométriques : maillage hexagonal et cartésien.	64
4.2	Cellule élémentaire du domaine de FOURIER pour un maillage cartésien.	68
4.3	Cellule élémentaire du domaine spatial pour un maillage cartésien.	68
4.4	Cellule élémentaire du domaine de FOURIER pour un maillage hexagonal.	71
4.5	Cellule élémentaire du domaine spatial pour un maillage hexagonal.	71
4.6	Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de	
4.7	Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de	
4.8	La matrice de modélisation \mathbf{G} pour un instrument réaliste de type MIRAS.	78
5.1	Oscillations de GIBBS.	87
5.2	Fuite radiométrique et dégradation de la résolution spatiale.	87
5.3	Deux exemples d'apodisation.	88
5.4	Facteurs de mérite « linéaires ».	90
5.5	Facteurs de mérite « quadratiques ».	90
5.6	Facteurs de mérite « logarithmiques ».	92
5.7	Distance de plus courte approche (SACR).	92

5.8	Fenêtre d'apodisation de BLACKMAN approchée.	94
5.9	Facteurs de mérite des fenêtres d'apodisation pour une configuration en Y. . . .	97
5.10	Facteurs de mérite des fenêtres d'apodisation pour une configuration en U. . . .	98
5.11	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire du paramètre ρ	
5.12	Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} .	103
5.13	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire et radiale du pa	
5.14	Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de	
5.15	Variation du SACR (1%) pour les fenêtres de KAISER et de MAAS en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la	
6.1	Référentiels utilisés dans la caractérisation du champ de vue observé d'un RISO.	113
6.2	Modification de la forme de la terre dans le repère des cosinus directeurs avec l'inclinaison de l'instrument.	114
6.3	Composition du champ de vue du HUT2D pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférom	
6.4	Composition du champ de vue de MIRAS pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférom	
6.5	Déformation de la fonction de transfert instrumentale lors du passage du repère des antennes au repère terre	
6.6	Déformation d'une grille régulière dans le repère terrestre lors du passage dans le repère des antennes.	122
6.7	Renversement de l'image lors du passage du repère des antennes au repère terrestre.	123
6.8	Distances mesurées par rapport au point sub-satellite et variation de l'angle d'incidence de la mesure dans l	
6.9	Propriété de translation de deux méthodes d'interpolation.	126
6.10	La fenêtre de KAISER pour deux valeurs du paramètre α	127
6.11	Paramétrisation linéaire du paramètre α de la famille de fenêtre KAISER.	128
6.12	Illustration de la déformation de la fenêtre de KAISER par la paramétrisation de α .	128
6.13	Paramètres α_1 , α_2 et φ_1 optimisés pour une résolution isotrope D=55km dans le repère terrestre.	129
6.14	Projection de la carte de température reconstruite et apodisée par la fenêtre de KAISER dans le repère terre	
6.15	Application du multi-fenêtrage sur la scène reconstruite.	130
6.16	Hauteur des lobes secondaires et efficacité du lobe principal dans le repère terrestre pour une résolution isot	

Partie III Reconstruction d'image

135

7.1	Composantes de FOURIER et visibilité mesurées pour une scène T_o à son plus haut niveau de résolution.	140
7.2	Composantes de FOURIER et visibilité mesurées pour la version « basses fréquences » de T_o .	140
7.3	Visibilités mesurées pour une scène composée d'une distribution uniforme, de température égale à la tempér	
7.4	Composantes de FOURIER et visibilité mesurées pour la version « hautes fréquences » de T_o .	141
8.1	La matrice résolvante \mathbf{A} pour un instrument réaliste de type MIRAS. Notons que des éléments de cette mat	
8.2	Variation de $\ V - \mathbf{G}T_r\ _F$ avec $\ T_r\ _E$ pour les méthodes régularisées.	152
8.3	Scène observée à son plus haut niveau de résolution et au niveau de résolution de l'instrument et apodisée p	
8.4	Valeurs singulières de la matrice \mathbf{G}	153
8.5	Solution à bande passante limitée.	154
8.6	Cartes de température reconstruites à l'aide de la régularisation de TIKHONOV.	155
8.7	Cartes de température reconstruites à l'aide de la régularisation mathématique.	155
9.1	Erreur sur l'estimation de l'amplitude et de la phase d'une antenne.	182
10.1	Variation du biais et de l'erreur RMS de reconstruction avec la position de l'antenne perturbée.	188
10.2	Variation du biais et de l'erreur RMS de reconstruction avec la largeur du lobe de l'antenne perturbée.	188
10.3	Scènes synthétiques pour le calcul de l'erreur systématique (configuration en U).	191
10.4	Scènes synthétiques pour le calcul de l'erreur systématique (configuration en Y).	191
10.5	Scène observée à la résolution maximale et reconstruction de référence : distribution réaliste de température	
10.6	Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, pour un inst	
10.7	Composantes en polarisation H et V d'une scène de température uniforme à 110 K : variation simplifiée de	
10.8	Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, pour un inst	
10.9	Variation du biais et de l'erreur systématique de reconstruction avec une température uniforme sur Terre.	19

10.10	Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, pour u	
10.11	Erreur RMS et biais de reconstruction en obtenus après traitement des visibilité mesurées en fonction	
12.1	Variation de la position du soleil et et du point spéculaire tels que vus par MIRAS durant le solstice c	
12.2	Fréquence d'occurrence des évènements de pollution par les alias du soleil durant l'année 2007.	216
12.3	Etendues des régions polluées par les alias du soleil durant une année.	216
12.4	Carte des erreurs de reconstruction établie à partir des mesures interférométriques contaminées par le	
13.1	Diagrammes des antennes co- et cross-polaires.	228
13.2	Matrice de modélisation \mathbf{G} pour un mode de polarisation totale.	229
13.3	Composantes polarimétriques de la scène observée à son plus haut niveau de résolution.	229
13.4	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites simultanément à l'aide de \mathbf{G}_m^+	
13.5	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites simultanément à l'aide de \mathbf{A}^+	
13.6	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites simultanément à l'aide de \mathbf{A}^+	
13.7	Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites successivement à l'aide de 4 op	

Liste des tableaux

Partie I Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d'Ouverture 5

2.1	Caractéristiques de la mission spatiale SMOS et de l'instrument HUT-2D.	29
-----	---	----

Partie II Traitements des données interférométriques 61

4.1	Relations entre le nombre d'antennes, le nombre de visibilité mesurées et le nombre de fréquence dans l'intervalle $\Delta\nu$	72
4.2	Caractéristiques informatiques de \mathbf{G}	79
5.1	Fonctions d'apodisation traditionnelles définies dans l'intervalle $\bar{\rho} \in [-1, 1]$	96
5.2	Facteurs de mérite des fonctions d'apodisation pour une configuration en Y.	99
5.3	Facteurs de mérite des fonctions d'apodisation pour une configuration en U.	100
5.4	Paramètres optimaux $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ conduisant à une amélioration du SACR pour les fenêtres KAISER.	100
6.1	Fauchée et gamme des angles d'incidences.	129
6.2	Statistiques sur la variable centrée ζ	131

Partie III Reconstruction d'image 135

8.1	Tailles des opérateurs et temps de calcul pour la régularisation mathématique et la méthode à bande passante limitée.	135
9.1	Paramètres des gains d'antennes pour un instrument simulé de type MIRAS.	172
9.2	Paramètres des diagrammes de rayonnement des antennes pour un instrument simulé de type HUT2D.	172
9.3	Statistiques sur les paramètres des gains d'antennes de MIRAS.	175
9.4	Statistiques sur la phase à -3dB des gains d'antennes de MIRAS.	175
9.5	Statistiques sur les paramètres des gains d'antennes du HUT2D.	175
9.6	Statistiques sur la phase à -3dB des gains d'antennes du HUT2D.	175
9.7	Spécifications ESA sur les gains d'antennes de MIRAS et du HUT2D.	175
9.8	Paramètres des filtres des récepteurs de MIRAS.	176
9.9	Paramètres des filtres des récepteurs du HUT2D.	178
9.10	Statistiques sur les paramètres des filtres des récepteurs de MIRAS.	179
9.11	Statistiques sur les paramètres des filtres des récepteurs du HUT2D.	179
9.12	Spécifications ESA sur les filtres des récepteurs de MIRAS et du HUT2D.	179
9.13	Valeur maximale du retard géométrique et valeur minimale de la fonction de décorrélation spatiale pour un instrument simulé de type HUT2D.	179
9.14	Déviations standard moyennes de l'écart entre les paramètres estimés et les paramètres réels pour l'ensemble des paramètres.	179

9.15	Déviati�n standard moyenne de l'écart entre l'amplitude et la phase des diagrammes estimés et des diagrammes de référence.	192
10.1	Variati�n de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ avec la scène observée et la fenêtre d'apodisation (HUT2D).	192
10.2	Variati�n de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ avec la scène observée et la fenêtre d'apodisation (MIRAS).	193
10.3	Erreur systématique avant et après traitement des visibilités mesurées.	197
11.1	Variati�n du facteur d'amplification ([K/K]) avec la fenêtre d'apodisation pour MIRAS et HUT2D : estimati�n.	200
11.2	Variati�n du facteur d'amplification ([K/K]) avec la fenêtre d'apodisation pour MIRAS : estimati�n après sélection.	200
11.3	Impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction : erreurs de modélisation de l'ordre de l'écart type.	200
11.4	Impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction : erreurs de modélisation de l'ordre de l'écart type.	200
12.1	Erreurs de reconstruction [K] pour les différents scénarii.	220
13.1	Paramètres de modélisation des gains co- et cross-polaires.	228
13.2	Dimensions des opérateurs intervenant dans la reconstruction pour un instrument en Y comprenant 10 antennes.	231
13.3	Erreur RMS systématique en mode de polarisation totale : couplage à -25 dB. . .	231
13.4	Erreur RMS systématique en mode de polarisation totale : couplage à -10 dB. . .	231

Table des éclaircissements

I.1	ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE, LONGUEUR D'ONDE, DOMAINE MICRO-ONDE, BANDE L	8
I.2	CORPS NOIR ET TEMPÉRATURE DE BRILLANCE	8
I.3	TEMPÉRATURE DE BRILLANCE T_b [K]	9
I.4	RÉSOLUTION ANGULAIRE ($\delta\theta$ [RAD])/SPATIALE (δx [KM]) ET SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K])	26
I.5	DIAGRAMME DE RAYONNEMENT $F_n(\theta, \phi)$	13
I.6	TEMPÉRATURE D'ANTENNE [K]	13
I.7	RÉSOLUTION SPATIALE (δx [KM]) POUR UN RADIOMÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE	26
I.8	SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE	26
I.9	ÉGALITÉ DE PARSEVAL	32
I.10	PROPRIÉTÉ DE CONVOLUTION DE LA \mathcal{TF}	33
I.11	PROPRIÉTÉ DE TRANSLATION DE LA \mathcal{TF}	33
I.12	\mathcal{TF} D'UN PEIGNE DE DIRAC	33
I.13	LE CRITÈRE DE SHANNON-NYQUIST	34
I.14	FRÉQUENCES SPATIALES ANGULAIRES, LIGNE DE BASE, COSINUS DIRECTEURS	51
II.1	ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE \mathbf{G}	78
II.2	FWHM - LARGEUR À MI-HAUTEUR	89
II.3	HSSL - PLUS GRANDE AMPLITUDE DES LOBE SECONDAIRES	91
III.1	RANG, SVD ET CONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE	148
III.2	L'INSTRUMENT IDÉAL	180

Table des biographies

1.1	PLANK, Max Karl Ernst Ludwig (23 Avril 1858, Kiel, Allemagne- 4 Octobre 1947, Göttingen, A	
2.1	FIZEAU, Armand Hippolyte Louis (23 Septembre 1819, Paris, France- 18 Septembre 1896, Vente	
2.2	MICHELSON, Albert Abraham (19 Décembre 1852, Strzelno, Pologne - 9 Mai 1931, Pasadena, C	
2.3	YOUNG, Thomas (13 Juin 1773, Milverton, Angleterre - 10 Mai 1829, Londres, Angleterre)	45
2.4	FOURIER, Jean Baptiste Joseph (21 Mars 1768, Auxerre, France - 16 Mai 1830, Paris, France)	4
3.1	ZERNIKE, Frits (16 Juillet 1888, Amsterdam, Pays-Bas - 1966, Naarden, Pays-Bas)	58
4.1	SHANNON, Claude Elwood (30 Avril 1916, Gaylord, Etats-Unis - 24 Février 2001, Medford, Etat	
4.2	NYQUIST, Harry (7 Février 1889, Nilsby, Suède - 4 Avril 1976) 81
5.1	GIBBS, Josiah Willard (11 Février 1839, New Haven, Etats-Unis - 28 Avril 1903, New Haven, Etat	
6.1	BESSEL, Friedrich Wilhelm (22 Juillet 1784, Minden, Westphalie - 17 Mars 1846, Königsberg, Pr	
7.1	HADAMARD, Jacques Salomon (8 décembre 1865, Versailles, France - 17 Octobre 1963, Paris, F	
8.1	TIKHONOV, Andrei Nikolaevich (30 Octobre 1906, Gzhatska, Russie - 1993)	166
11.1	FROEBENIUS, Ferdinand Georg (26 Octobre 1849, Berlin, Prusse - 3 Août 1917, Berlin, Allema	

Introduction

La perspective d'un changement climatique au cours des prochains siècles fait son chemin auprès du grand public. La communauté scientifique se doit de disposer des meilleurs outils pour répondre de manière précise aux questions de plus en plus nombreuses que ne manqueront pas de se poser à la fois les simples citoyens, et, relayant leurs voix, la classe politique qui aura à prendre des décisions lourdes de conséquences sur l'avenir de la planète et le quotidien des citoyens. Les climatologues et les prévisionnistes devront alors être capables de donner des estimations précises de ce que sera le climat de demain.

Or, deux paramètres géophysiques font actuellement défaut, freinant ainsi la progression dans ces domaines : l'humidité des sols et la salinité des océans. Le premier contrôle la croissance des plantes et les échanges d'énergie entre les continents et l'atmosphère. Il est nécessaire à une meilleure prévision du temps à court et moyen terme. Le second est un bon indicateur de la circulation océanique. Ainsi, les courants, tels que le *Gulf-stream*, jouent un rôle important dans la régulation du climat sur le long terme. Il manque une mesure systématique de ces paramètres géophysiques que pourrait combler une mission spécialement dédiée à leur observation. Seule une mission spatiale peut fournir des données sur une couverture globale et à un rythme satisfaisant.

Cependant, les technologies classiques de télédétection ne répondent pas aux fortes contraintes de résolution spatiale imposées pour la mesure de l'humidité et de la salinité. La radiométrie à synthèse d'ouverture est une technologie prometteuse initialement développée pour la radio-astronomie. Cet instrument passif ne mesure pas directement la température de brillance émise par la surface terrestre mais ce qui se rapproche de la transformée de FOURIER de cette température. La capacité d'imagerie de tels instruments et la possibilité d'obtenir des mesures pour différents angles d'incidences et polarisations en font des instruments bien adaptés à la mesure de l'humidité et de la salinité.

Ainsi la mission spatiale SMOS, *Soil Moisture and Ocean Salinity mission*, portée par l'Agence Spatiale Européenne (ASE) et dont le lancement est prévu en janvier 2007, aura pour but, durant les cinq années de son activité, de fournir les premières cartes globales d'humidité des sols et de salinité de surface des océans. L'interféromètre MIRAS, dont les bras initialement repliés se déploieront en orbite pour former un Y, synthétisera une antenne classique d'un diamètre d'environ 4 m pour un encombrement compatible avec une mission spatiale légère. D'autre part, l'Université Technologique d'Helsinki développe actuellement, sous l'égide de l'ASE, le HUT2D, un radiomètre imageur de dimensions réduites et dans une configuration en U, destiné à fournir à moyen terme des données sur l'observation de la Terre à travers des campagnes de mesure aéroportées et ainsi valider les concepts élaborés pour l'exploitation de la mission SMOS.

La première partie de cette thèse est consacrée au principe instrumental de la radiométrie à synthèse d'ouverture. Après avoir montré comment la radiométrie à synthèse d'ouverture s'est imposée comme une réponse appropriée au problème posé, il m'a paru nécessaire d'introduire les fondements mathématiques et physiques sous-jacents à cette technique novatrice pour l'observation de la Terre, afin que la communauté chargée de l'estimation des paramètres géophysiques et de leur utilisation puisse se faire une idée plus précise des concepts à la base de la mesure interférométrique.

Une rapide introduction des propriétés de la transformée de FOURIER à deux dimensions et de l'expérience des trous d'YOUNG, fondatrice de l'interférométrie, permettront ainsi une meilleure compréhension des phénomènes complexes intervenant au cours de la reconstruction d'image. Finalement, le théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE, établissant la relation entre les mesures interférométriques et la carte des températures de brillance que l'on cherche à estimer, est détaillé point par point.

La seconde partie débute par la définition du cadre théorique de la reconstruction d'image, cadre tant géométrique, à travers la définition des grilles d'échantillonnage, qu'algébrique, à travers la définition des espaces et des opérateurs clés. Sur le modèle des grilles hexagonales intervenant dans le traitement des données mesurées par un instrument dans une configuration en Y, de type MIRAS, j'ai défini les propriétés des grilles cartésiennes associées à un instrument dans une configuration en U, de type HUT2D. L'ensemble des outils que j'ai été amené à développer au cours de cette thèse autour de cette configuration permettront, à moyen terme, le traitement des premières données réelles mesurées par un radiomètre à synthèse d'ouverture dédié à l'observation de la Terre.

L'apodisation est une étape importante dès lors que l'on est amené à travailler sur une bande spectrale limitée. La coupure brusque en fréquence dégrade la sensibilité radiométrique. Après avoir établi les caractéristiques des fenêtres d'apodisation pour une configuration en U et rappelé les résultats obtenus pour une configuration en Y, j'expose les résultats de mes travaux sur le développement de fenêtres d'apodisation particulièrement adaptées aux deux configurations et donc à la forme spécifique de leur bande passante respective.

Le passage du repère des antennes au repère terrestre entraîne une déformation de la grille d'échantillonnage et modifie la résolution spatiale, qui varie alors dans le champ reconstruit. Or, le traitement des paramètres géophysiques impose de travailler sur des grilles régulières dans le repère terrestre et à résolution constante. Après avoir défini les propriétés de ce changement de repère et la technique de rééchantillonnage performante qu'autorise la manipulation d'images à bande passante limitée, j'expose les résultats d'un travail que nous avons effectué sur le multi-fenêtrage. Alors que l'apodisation classique consiste à appliquer la même fenêtre à l'ensemble des pixels de l'image reconstruite, le multi-fenêtrage ou « *strip adaptive processing* » consiste à appliquer une fenêtre particulière à chacun de ces pixels afin d'obtenir une résolution constante dans le champ reconstruit, une fois celui-ci projeté dans le repère terrestre.

Enfin, la troisième partie est entièrement consacrée à la reconstruction d'image pour les radiomètres à synthèse d'ouverture. Mon activité principale au cours de cette thèse s'est axée sur les méthodes de reconstruction régularisées. Outre la méthode dite à bande passante limitée, développée par E. Anterrieu, j'ai participé au développement et à la caractérisation d'une méthode basée sur une décomposition en valeurs singulières de la matrice de modélisation de l'instrument et d'une autre basée sur une régularisation au sens de TIKHONOV. Ces méthodes, standards dans le cadre général de la reconstruction d'image, sont pour la première fois utilisées dans le traitement de données que fourniront des radiomètres à synthèse d'ouverture observant la Terre. Leur comparaison a permis de mieux discerner les caractéristiques et les spécificités de chacune de ces méthodes de reconstruction régularisées.

Afin de quantifier au mieux certaines sources d'erreur de reconstruction pour ces méthodes, j'ai dans un premier temps procédé à la simulation de paramètres de modélisation réalistes pour

un instrument de type MIRAS et un instrument de type HUT2D, compte tenu des spécificités imposées par l'ASE. Les méthodes de reconstruction régularisées étant basées sur l'utilisation de la matrice de modélisation instrumentale, je présente aussi les résultats d'un travail sur l'auto-caractérisation des paramètres de modélisation d'un instrument réaliste de type MIRAS, montrant ainsi qu'il est possible d'estimer en vol la valeur de ces paramètres.

L'étude suivante traite d'une erreur de reconstruction systématique due à l'incapacité des radiomètres à synthèse d'ouverture à prendre en compte les hautes fréquences contenues dans la scène observée. J'ai étudié les variations de cette erreur avec la qualité de l'instrument, la nature de la scène observée, le type de fenêtre d'apodisation utilisée et la méthode de reconstruction employée. J'ai ensuite proposé une solution à l'augmentation significative de l'erreur systématique en présence de repliement, lors de l'observation de la Terre par un instrument en orbite.

Une collaboration avec S. Gratton, chercheur au Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS, Toulouse), mon laboratoire d'accueil pour cette thèse, a permis d'établir une relation analytique entre un bruit radiométrique gaussien venant perturber les données instrumentales et l'erreur de reconstruction qui en découle pour tout opérateur de reconstruction. J'ai ainsi pu vérifier que le facteur d'amplification du bruit sur les mesures ainsi calculé était un très bon estimateur du facteur d'amplification obtenu après simulation. Suite au travail sur l'auto-caractérisation des paramètres, la propagation des erreurs de modélisation est aussi étudiée pour un instrument et une distribution de température de brillance réalistes, dans le cadre d'une reconstruction à l'aide d'une méthode régularisée.

Une autre collaboration avec N. Reul, chercheur à l'IFREMER, a débouché sur une étude de l'impact du rayonnement solaire sur la télédétection de la surface terrestre. La simulation de la position du soleil dans le champ de vue de MIRAS et des températures de brillance de son reflet sur la surface des océans compte tenu des propriétés de surface a conduit à une série de simulations et reconstructions portant sur l'impact de la présence du soleil et de son reflet sur la qualité de la reconstruction. Une solution est proposée afin d'éliminer la contribution de ces deux sources de pollutions des données instrumentales.

Enfin, un dernier chapitre est consacré à l'extension de la reconstruction au mode de fonctionnement de l'instrument en polarisation totale. Cette étude préliminaire menée pour un instrument de type MIRAS mais de dimensions réduites par rapport à l'instrument réel a permis de confirmer la faisabilité d'une telle approche et le bon comportement des méthodes de reconstruction régularisées.

Première partie

Principe instrumental des Radiomètres Imageurs à Synthèse d'Ouverture

Les récents évènements météorologiques intenses, comme la tempête de 1999 ou encore la canicule de l'été 2003, ont rendu tangible auprès du public la problématique du changement climatique. Or, l'absence de mesures globales de l'humidité des sols et de la salinité des océans limite la capacité de la communauté scientifique à prévoir, de façon précise, à la fois le temps de demain et le climat du siècle qui débute.

Il existe donc un besoin d'une mesure systématique de ces deux paramètres physiques. Or, les contraintes sur la résolution spatiale et sur la sensibilité radiométrique sont telles que l'utilisation d'un instrument de conception « classique » (un radiomètre de puissance totale à balayage par exemple) n'est pas vraiment envisageable dans le cadre d'une mission spatiale, compte tenues des exigences de la communauté demandeuse d'humidité des sols et de salinité des océans.

Dans cette partie, nous dégagerons dans un premier temps les principales caractéristiques d'un satellite dédié à l'observation de l'humidité et de la salinité afin de comprendre en quoi la technique de synthèse d'ouverture appliquée à l'observation de la Terre est une technique innovante et prometteuse. Ensuite, nous introduirons le théorème à la base de l'imagerie par interférométrie, celui de VAN CITTERT-ZERNIKE, en nous basant sur une expérience fondatrice, celle des trous d'YOUNG. Finalement, un cas simplifié à deux antennes nous permettra de compléter ces premiers résultats pour aboutir à la formulation utilisée dans les parties suivantes.

Chapitre 1

Téledétection de l'humidité des sols et de la salinité de surface des océans

Sommaire

1.1	Contraintes instrumentales sur la mesure de l'humidité et de la salinité	7
1.1.1	Avec un radar ou un radiomètre ? A quelle longueur d'onde?	7
1.1.2	Téledétection de l'humidité des sols	10
1.1.3	Téledétection de la salinité des océans	10
1.2	Radiomètre à puissance totale	11
1.2.1	L'antenne	13
1.2.2	Le récepteur	16
1.2.3	Grandeurs caractéristiques	20

Il y a des milliers de millions d'années, une race d'hyper-intelligences pan-dimensionnelles en eut tellement marre de ces querelles perpétuelles sur la signification de la vie q'elles décidèrent de s'asseoir un moment pour résoudre leurs problèmes une bonne fois pour toutes...

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

1.1 Contraintes instrumentales sur la mesure de l'humidité et de la salinité

1.1.1 Avec un radar ou un radiomètre ? A quelle longueur d'onde ?

Dans le domaine des hyperfréquences, les instruments de téledétection peuvent être classés dans deux grandes familles : celle des radars, instruments actifs, et celle des radiomètres, instruments passifs. Ces instruments ont en commun qu'ils mesurent le rayonnement électromagnétique, pour une longueur d'onde donnée, provenant de cibles éloignées. Le but est de déduire les caractéristiques physiques des cibles observées, ici l'humidité ou la salinité de surface, en choisissant au mieux le type d'instrument et la longueur d'onde utilisée.

Eclaircissement I.1: ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE, LONGUEUR D'ONDE, DOMAINE MICRO-ONDE, BANDE L

La lumière visible est une onde électromagnétique dont la longueur d'onde est située dans la bande « visible ». Chaque couleur que nous percevons indique une longueur d'onde différente : les deux valeurs extrêmes que nous pouvons distinguer sont $0.4 \mu\text{m}$ (violet) et $0.7 \mu\text{m}$ (rouge). Le domaine des hyperfréquences, dit encore des micro-ondes, s'étend dans des longueurs d'onde beaucoup plus grandes. Ce domaine est lui même divisé en bande, la bande L s'étendant entre 20 cm et 80 cm, soit, en fréquence, entre 0.390 GHz et 1.550 GHz.

Les radars sont des instruments actifs. Une onde électromagnétique est envoyée par une antenne sur une cible qui, suivant ses propriétés physiques, va plus ou moins absorber ce rayonnement. Cette même antenne (ou une antenne différente) est alors utilisée pour mesurer la puissance du signal renvoyé et l'on en déduit ainsi les caractéristiques de la cible. Lorsque la cible est une surface naturelle, la puissance rétro-diffusée est toutefois très sensible à la topographie de la surface observée (rugosité du sol, de la végétation ou de la mer) qui doit donc être prise en compte pour interpréter les mesures.

La seconde famille est celle des instruments passifs. Aucune onde n'est envoyée, l'antenne d'un radiomètre ne fonctionnant qu'en réception. Seule l'émission naturelle du rayonnement par la surface est mesurée : cette émission naturelle est caractérisée par une quantité appelée température de brillance (T_b).

Eclaircissement I.2: CORPS NOIR ET TEMPÉRATURE DE BRILLANCE

Un corps noir est un corps idéal absorbant toute l'énergie électromagnétique qu'il reçoit : s'il n'est pas chauffé, il n'émet aucun rayonnement, il est donc noir. Lorsqu'il est chauffé, il rayonne pour contrebalancer l'énergie qu'il reçoit et, tout comme la braise d'un feu de cheminée, la longueur d'onde de ce rayonnement (sa « couleur ») change en fonction de la température.

Dans un cas idéal, MAX PLANCK a montré, en 1900, que l'énergie rayonnée par un corps noir à une longueur d'onde donnée ne dépend que de sa température.

L'énergie rayonnée par une surface quelconque, elle, ne dépend pas que de sa température. La température de brillance de cette surface est la température qu'aurait un corps noir rayonnant la même énergie.

Comme il le sera précisé dans les paragraphes suivants, la précision contraignante sur la mesure de l'humidité et de la salinité, ainsi que les effets importants de la topographie des surfaces observées, font que les radiomètres sont dans ce cas préférés aux radars. D'autre part, l'utilisation de la longueur d'onde $\lambda_0 = 21 \text{ cm}$ (fréquence centrale $f_0 = 1.41 \text{ GHz}$), au sein de la bande L, offre plusieurs avantages :

- cette partie de la bande L est dite protégée c.-à-d. qu'il est (normalement) interdit d'émettre (relais et téléphones portables, radars d'aéroport...) autour de cette fréquence.

- l'atténuation du signal par la vapeur d'eau et l'eau liquide, contenue notamment dans les nuages, est quasi-nulle

- la température de brillance dépend fortement de la présence d'eau à la surface du sol (3 à 5 cm de profondeur contre seulement 1 cm à plus haute fréquence)
- la sensibilité radiométrique à la salinité de surface est optimale.

Eclaircissement I.3: TEMPÉRATURE DE BRILLANCE T_b [K]

En 1900, MAX PLANCK établit grâce à une loi empirique la variation de la luminance \mathcal{L} d'un corps noir en fonction de sa température T et de la longueur d'onde λ du rayonnement émis [1] :

$$\mathcal{L}(\lambda, T) = \frac{2hc^2\lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} \quad (1.1)$$

où la luminance \mathcal{L} est une puissance par unité surface, par stéradian et par longueur d'onde ($[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}]$), c est la vitesse de la lumière ($[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$), k la constante de BOLTZMANN et h la constante de PLANCK ($[\text{J}\cdot\text{s}]$).

Dans le domaine micro-onde, le rapport $(hc)/(\lambda kT)$ est de l'ordre de 2×10^{-4} pour $\lambda = 21$ cm et $T = 300$ K, l'approximation de Rayleigh-Jeans est alors possible :

$$\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1 \Rightarrow \exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT} \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\lambda, T) = \frac{2ckT}{\lambda^4} \quad (1.3)$$

Alors que le rayonnement du corps noir est isotrope (identique dans toutes les directions), celui d'un corps réel peut dépendre de la direction d'observation (θ, ϕ) (coordonnées sphériques traditionnelles). L'émissivité e est introduite pour faire le lien entre la luminance d'un corps réel et celle du corps noir :

$$e(\lambda, T, \theta, \phi) = \frac{\mathcal{L}_{\text{corps réel}}(\lambda, T, \theta, \phi)}{\mathcal{L}_{\text{corps noir}}(\lambda, T)} \quad (1.4)$$

La température de brillance $T_b(\theta, \phi)$ d'une surface quelconque est la température T que devrait avoir un corps noir pour que sa luminance soit semblable à celle de ce corps réel.

La température de brillance est donc telle que :

$$\mathcal{L}_{\text{corps réel}} = \frac{2ckT_b(\theta, \phi)}{\lambda^4} \quad (1.5)$$

Donc, d'après (1.3) :

$$e(\lambda, T, \theta, \phi) \frac{2ckT}{\lambda^4} = \frac{2ckT_b(\theta, \phi)}{\lambda^4} \quad (1.6)$$

Soit la relation entre la température de brillance et la température physique, pour une longueur d'onde fixée :

$$T_b(\theta, \phi) = e(\theta, \phi)T \quad (1.7)$$

avec $0 \leq e \leq 1$.

1.1.2 Télédétection de l'humidité des sols

La température de brillance (T_b) d'une surface continentale dépend principalement de l'humidité de surface du sol w_s [m^3/m^3], de l'épaisseur optique de la couverture végétale τ [Nepers] et de sa température de surface T_s [K] [2] [3]. D'autres effets comme la topographie, la rugosité du terrain, le type de sol ou encore la nature de la couverture végétale sont aussi à prendre en compte. Cependant, étant donné qu'ils sont constants dans le temps, des données externes (modèles numériques de terrain, données satellites...) peuvent être utilisées pour corriger ces contributions.

En bande L, le modèle de transfert radiatif du premier ordre dit modèle « $\tau - \omega$ », où ω est l'albédo de la végétation) relie indirectement les trois paramètres physiques (w_s , τ et T_s) à T_b . La couverture végétale est le principal obstacle entre l'instrument et le sol. **Il est impératif de disposer de mesures indépendantes de T_b pour des configurations variées, en terme d'angles d'incidence, de polarisation ou de fréquence pour pouvoir éliminer la contribution de la canopée**, la capacité de mesure multi-angulaire étant sans doute la plus efficace [4]. A cette condition, l'humidité de surface des sols reste mesurable pour une densité surfacique de la biomasse inférieure à 5 kg m^{-2} , ce qui représente 65% des terres émergées [5]. Une fois l'humidité de surface connue avec une précision suffisante, il est possible de retrouver l'humidité du sol dans la zone vadose, la zone dans laquelle la végétation va puiser une partie de son eau [6].

En conclusion, pour que la mesure de l'humidité de surface soit exploitable, elle devra être effectuée au moins tous les trois jours par un radiomètre fonctionnant en bande L (1.4 GHz), ayant une sensibilité radiométrique d'au moins 1 K, et fournissant des mesures indépendantes à différents angles d'incidence, dans une gamme suffisamment large et bien couverte. L'humidité variant globalement entre $0 \text{ m}^3/\text{m}^3$ et $0.5 \text{ m}^3/\text{m}^3$, la précision recherchée pour la mesure est $0.04 \text{ m}^3/\text{m}^3$.

1.1.3 Télédétection de la salinité des océans

La salinité est définie comme le rapport entre la masse de sel et la masse d'eau de mer, en gramme de sel par kilogramme d'eau de mer : $1\text{g/kg} = 1\text{psu}$, *practical salinity unit*. Or, la situation est différente du cas de la mesure de l'humidité. En effet, la salinité de l'eau de mer fait peu varier la température de brillance des océans². Même si, là encore, la bande L semble la plus indiquée, le signal reste faible. Cette donnée, combinée avec une contrainte forte sur la précision de la mesure (0.1 psu), conduit à faire de la modélisation du problème direct une étape majeure dans le processus d'estimation de la salinité de surface des océans (*SSS* pour *Sea surface Salinity*) à partir des températures de brillance.

La température de brillance des océans va varier en fonction de 3 facteurs principaux : la salinité, bien sûr, mais aussi la température de surface (*SST* pour *Sea Surface Temperature*) et enfin la rugosité de la mer, principalement liée à la vitesse du vent. Ainsi, $T_{\text{océan}}$ peut être vu comme la somme de deux contributions :

$$T_{\text{océan}} = T_{\text{plat}} + T_{\text{vent}} \quad (1.8)$$

²voir la thèse d'Emmanuel Dinat [7] pour une étude plus complète « De la détermination de la salinité de surface des océans à partir de mesures radiométriques hyperfréquences en bande L » (Paris VI, 2003)

La contribution principale $T_{b_{\text{plat}}}$ est celle d'une mer sans vague, une mer idéale plate. La contribution secondaire $T_{b_{\text{vent}}}$ est celle de la rugosité de la mer : la formation des vagues, de l'écume et de la houle induite par le vent va apporter une correction non négligeable aux valeurs obtenues par le modèle précédent.

Même si le radiomètre possède une sensibilité de l'ordre du Kelvin, ce qui, on le verra dans la section suivante, représente une forte contrainte instrumentale, l'erreur sur l'estimation de la *SSS* est alors de 2 psu. Or, la précision doit être de l'ordre de 0.1 psu pour que la salinité soit utilisable scientifiquement.

Afin d'atteindre ce seuil, des mesures élémentaires indépendantes devront être moyennées. Il est donc important de pouvoir obtenir le maximum de mesures indépendantes pour un même pixel au cours d'un seul passage de l'instrument.

Ces mesures pourront aussi être moyennées spatialement, sur des zones de 200 km \times 200 km, et temporellement, sur 10 jours. Contrairement à ce qui se passe pour l'humidité, ce n'est donc pas tant la résolution spatiale que la stabilité et l'étalonnage de l'instrument qui devront être le trait dominant du radiomètre, sans pour autant négliger la sensibilité radiométrique.

De même que pour l'humidité, des données de *SST* et de vent (vitesse et direction) issues de mesures satellites ou de sorties de modèles météorologiques doivent être intégrées avec une précision suffisante afin de pouvoir inverser la relation établie entre la température de brillance et la salinité.

En conclusion, pour que la mesure de la salinité soit exploitable, elle devra être effectuée par un radiomètre fonctionnant en bande L (1.4 GHz), permettant l'acquisition de plusieurs mesures indépendantes au cours d'un passage, avec une faible dérive instrumentale sur 10 jours et une sensibilité radiométrique de l'ordre de 1 K.

1.2 Radiomètre à puissance totale

Depuis le début de l'histoire de la radiométrie micro-onde, l'observation de la surface de la terre bénéficie des avancées technologiques dans l'observation de la voûte céleste. Ainsi, les premiers instruments ont été développés dans les années 30 et 40 par la communauté des astrophysiciens, les premières expériences de télédétection de la surface terrestre n'ayant lieu qu'à la fin des années 50 [1]. Depuis la fin des années 60, de nombreux satellites ont embarqué des radiomètres fonctionnant à diverses fréquences au sein du domaine micro-onde, fournissant ainsi des informations sur l'état de l'atmosphère (contenu en vapeur d'eau, en eau liquide, profils de températures, précipitation) et de la surface (*SST*, classification de la glace, de la couverture neigeuse, vitesse et direction du vent au dessus des océans...).

Le schéma 1.5 décrit les éléments principaux composant un radiomètre à puissance totale, qui est un dispositif à antenne réelle, par opposition aux interféromètres imageurs qui, on le verra par la suite, « synthétisent » une antenne. Tous les composants situés après l'antenne forment le récepteur. A eux deux, l'antenne et le récepteur vont définir deux caractéristiques importantes dans la télédétection par un radiomètre : la résolution spatiale et la sensibilité radiométrique. Les descriptions et les notions abordées par la suite seront utilisées dans les parties suivantes de ce document.

Eclaircissement I.4: RÉSOLUTION ANGULAIRE ($\delta\theta$ [RAD])/SPATIALE (δx [KM]) ET SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À PUISSANCE TOTALE

- la **résolution angulaire/spatiale**, indique la taille du plus petit détail que l'instrument peut distinguer dans la scène observée. La température de brillance mesurée à un instant donné est donc la température moyenne dans une zone dont la taille est définie par $\delta\theta$ ou δx . La résolution spatiale dépend fortement du diamètre D de l'antenne, de la longueur d'onde λ , ainsi que de l'altitude H de l'instrument :

$$\delta x = H \frac{\lambda}{D} \quad (1.9)$$

- la **sensibilité radiométrique** indique le plus petit écart de température que peut discerner l'instrument. Ainsi, la même température sera mesurée pour une scène de température T ou $T \pm \Delta T$. La sensibilité radiométrique dépend fortement des caractéristiques du récepteur, sa température de bruit T_{rec} , sa bande passante B , le temps d'intégration τ et bien sûr, de la température d'antenne T_A :

$$\Delta T = \frac{T_A + T_{\text{rec}}}{\sqrt{B\tau}} \quad (1.10)$$

où la température d'antenne est proportionnelle à la température de brillance arrivant sur l'antenne pondérée par le gain (voir paragraphe 1.2.1).

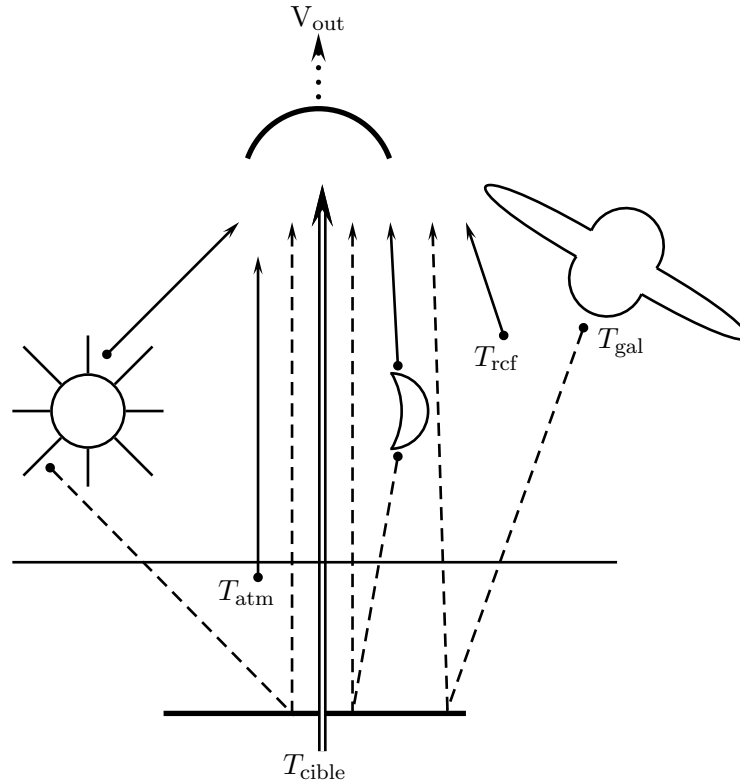


FIG. 1.1 – Sources de contributions à la température d'antenne en bande L : l'antenne observe non seulement la température de la cible mais aussi le rayonnement, direct ou réfléchi par la surface, issu du soleil, de la lune, de l'atmosphère (T_{atm}), de la galaxie (T_{gal}), ou du rayonnement fossile (T_{rcf}).

1.2.1 L'antenne

L'antenne est l'élément qui fait le lien entre une onde électromagnétique se propageant librement (liée à la température de brillance mesurée) et un courant électrique oscillant se propageant au sein d'une ligne de transmission.

Avant tout, il faut bien comprendre que la température T_A , appelée température d'antenne et qui caractérise le champ électromagnétique arrivant sur l'antenne, n'est pas strictement égale à la température T_{cible} de la scène observée. D'autres sources, directes ou indirectes (voir Fig. 1.1), **absolument non négligeables**, vont venir s'ajouter à celle-ci : citons le soleil, la lune, la galaxie, le rayonnement cosmique fossile et enfin l'atmosphère. Chacune de ses sources peuvent émettre dans la bande L mais aussi se refléter sur la surface observée [8].

De plus, le signal reçu est plus ou moins atténué suivant sa direction d'incidence : on dit que l'antenne n'est pas isotrope.

Eclaircissement I.5: DIAGRAMME DE RAYONNEMENT $F_n(\theta, \phi)$

Le diagramme de rayonnement (ou diagramme d'antenne) quantifie la capacité d'une antenne à concentrer les ondes radio dans une direction (θ, ϕ) donnée, où θ est l'angle d'incidence et ϕ , l'azimut.

La température d'antenne est alors définie comme suit :

Eclaircissement I.6: TEMPÉRATURE D'ANTENNE [K]

La température d'antenne est la distribution de température de brillance T_{AP} arrivant sur l'antenne (contribution de scène observée et contributions secondaires) pondérée par le gain d'antenne et normalisée par la somme du gain dans tout l'espace observé :

$$T_A = \frac{\iint_{4\pi} T_{AP}(\theta, \phi) F_n(\theta, \phi) d\Omega}{\iint_{4\pi} F_n(\theta, \phi) d\Omega} \quad (1.11)$$

L'efficacité η d'une antenne est reliée la proportion du signal capté par le lobe principal. Pour une antenne (hypothétique) isotrope :

$$F_n(\theta, \phi) = 1 \quad \forall(\theta, \phi) \quad (1.12)$$

$$\eta = 1 \quad (1.13)$$

Pour une antenne réelle, l'efficacité est inférieure à 1. La puissance véritablement transmise par une antenne de température physique T_p est alors :

$$P'_A = kT'_A B \quad (1.14)$$

$$\text{avec } T'_A = \eta T_A + (1 - \eta) T_p \quad (1.15)$$

RÉSOLUTION ANGULAIRE/SPATIALE

Comme on peut le voir sur la figure 1.2, une propriété importante d'une antenne est de posséder un lobe principal, une région de l'espace dans laquelle la majeure partie du signal est reçue. La largeur à mi-hauteur (ou à -3dB) du lobe principal, notée $\beta_{1/2}$, est sa largeur mesurée lorsque son intensité vaut la moitié de son intensité maximale : plus $\beta_{1/2}$ est petit, plus l'antenne est dite directive c.-à-d. plus elle sera capable de discerner de petits détails. $\beta_{1/2}$ est directement lié aux dimensions de l'antenne (son diamètre D pour une antenne circulaire) et à la longueur d'onde d'observation. La résolution angulaire d'un radiomètre est donc :

$$\delta\theta = \beta_{1/2} \approx \frac{\lambda}{D} \text{ [radians]} \quad (1.16)$$

Dans le cas plus réaliste d'un rayonnement non-uniforme, un coefficient c_f (généralement supérieur à 1) vient pondérer cette relation :

$$\delta\theta = c_f \frac{\lambda}{D} \quad (1.17)$$

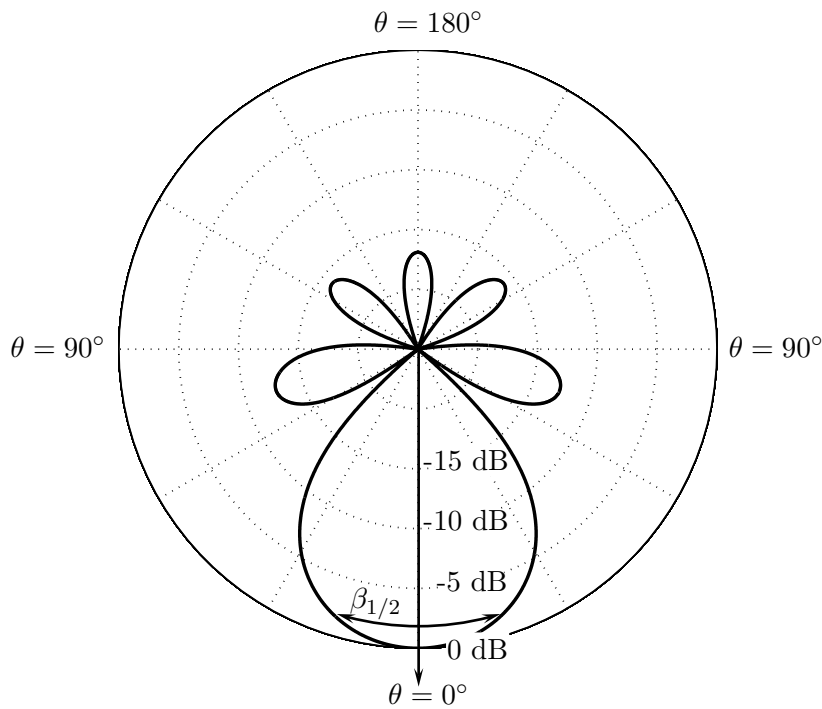


FIG. 1.2 – Exemple d'un diagramme de rayonnement d'une antenne : les cercles concentriques indiquent l'amplitude en décibels. La largeur à mi-hauteur, notée $\beta_{1/2}$, est indiquée ici à -3 dB. θ varie le long de chacun de ces cercles, de 0° (visée au nadir) à 180° . Une part importante de la puissance délivrée par l'antenne est issue du lobe principal mais la contribution des lobes secondaires (à 80°) et des lobes arrière ($\theta > 90^\circ$) peut être non négligeable et diminuer le rapport signal sur bruit.

Une bonne approximation de la résolution spatiale (δx) d'un radiomètre situé à une altitude H à la verticale de la scène observée (nadir pour l'instrument, zénith pour la scène) consiste à calculer l'étalement du lobe principal à l'intersection de la surface (la terre est supposée plate, voir Fig. 1.3) :

$$\delta x \approx 2H \tan\left(\frac{\beta_{1/2}}{2}\right) \quad (1.18)$$

$$\delta x \approx 2H \tan\left(c_f \frac{\lambda}{2D}\right) \quad (1.19)$$

En bande L, la longueur d'onde est de l'ordre de la dizaine de centimètres alors que les paraboles ont des diamètres de l'ordre du mètre. Par conséquent, une bonne approximation de la relation (3.6) est :

$$\delta x = Hc_f \frac{\lambda}{D} \quad (1.20)$$

A diamètre et altitude fixés, la résolution spatiale est améliorée si la longueur d'onde est diminuée : on retrouve là un principe général de la mesure à distance qui dit que la taille du plus petit détail visible par un instrument est proportionnelle à la longueur d'onde d'observation. A longueur d'onde et altitude fixées, la résolution spatiale est améliorée si le diamètre de l'antenne est augmenté et donc si la largeur du lobe principal diminue : si l'on était amené à décrire un objet les yeux fermés, à distance, à l'aide d'une baguette, notre analyse serait d'autant plus précise que le diamètre de la baguette serait réduit. Il en va de même pour la largeur à mi-hauteur du lobe principal de l'antenne, qui représente la taille de la « baguette » du radiomètre.

Pour finir, si l'antenne est inclinée d'un angle θ_i (voir Fig. 1.3), et en considérant une cible située à $\theta_i + \delta\theta_i$, la relation (1.20) devient :

$$\delta x(\theta_i, \delta\theta_i) = Hc_f \frac{\lambda}{D} \times \frac{1}{\cos^2 \theta_i} \times \frac{1}{\cos \delta\theta_i} \quad (1.21)$$

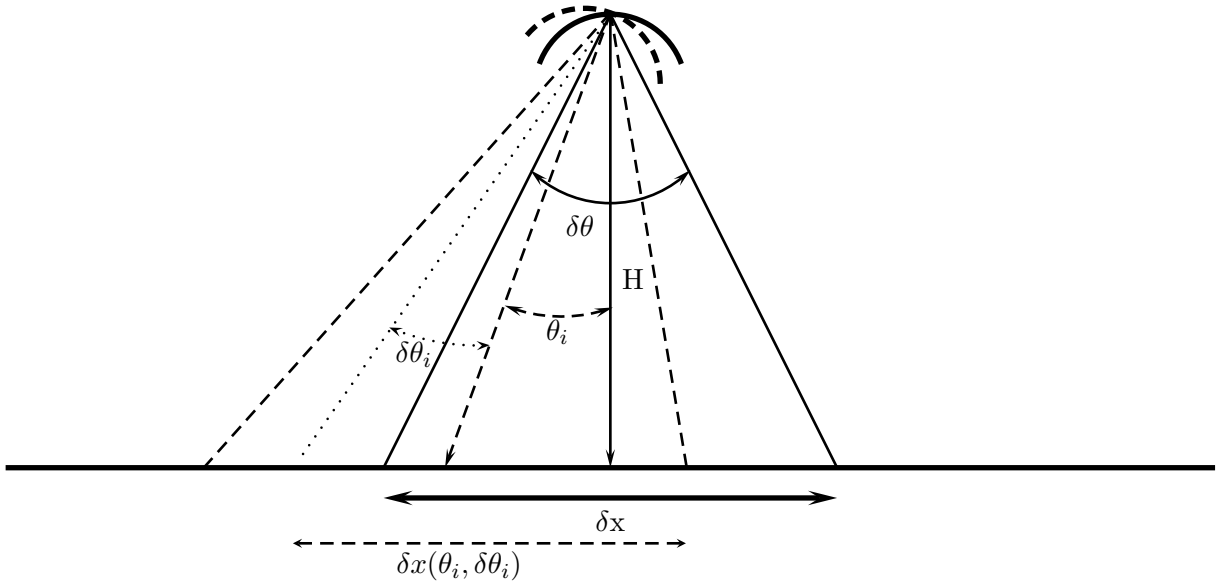


FIG. 1.3 – Résolution spatiale δx d'un radiomètre à puissance totale situé à une altitude H : elle est évaluée d'après l'intersection du lobe principal de largeur à mi-hauteur $\beta_{1/2}$ avec la surface de la Terre supposée plate. En tirets, la configuration pour une antenne inclinée d'un angle θ_i visant une cible en $\theta + \delta\theta_i$.

1.2.2 Le récepteur

Outre la résolution spatiale, en partie caractérisée par les propriétés de l'antenne, la précision radiométrique est une propriété importante d'un radiomètre : elle détermine l'imprécision sur la mesure de la température de brillance et dépend de la qualité des éléments qui composent la chaîne de réception.

La figure 1.5 montre un récepteur dit super-hétérodyne. Son but est de fournir en sortie un courant V_{out} mesurable et proportionnel à la puissance reçue par l'antenne. Pour cela, la puissance à la sortie de l'antenne est amplifiée et la fréquence du signal translatée vers des domaines plus facilement manipulables par l'électronique. Or, ces opérations vont ajouter un bruit à la température d'antenne, dégradant la précision radiométrique.

Ainsi, la tension V_{out} mesurée à la fin de la chaîne de réception n'est pas proportionnelle à la puissance P'_A délivrée par l'antenne mais à la puissance P_{sys} du système qui fait intervenir la température de bruit T_{rec} générée par l'ensemble des systèmes de traitement.

$$P_{\text{sys}} = P'_A + P_{\text{rec}} \quad (1.22)$$

$$P_{\text{sys}} = kT_{\text{sys}}B = k(T'_A + T_{\text{rec}})B \quad (1.23)$$

où k est la constante de BOLTZMANN et B est la bande passante du récepteur.

Le gain G d'un élément de la chaîne de réception caractérise le facteur d'amplification de la puissance d'entrée P_{in} . Il s'exprime généralement en décibels :

$$G_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{dP_{\text{out}}}{dP_{\text{in}}} \right) \quad (1.24)$$

où P_{out} est la puissance de sortie.

Si le bruit en entrée est caractérisé par une température T_0 et que la propre température de bruit de l'élément considéré est T_{Nr} , alors la puissance du bruit en sortie P_{Nout} sera :

$$P_{\text{Nout}} = k(GT_0 + T_{\text{Nr}})B \quad (1.25)$$

La figure de bruit de ce même élément exprime la dégradation du rapport signal sur bruit entre l'entrée et la sortie :

$$F = \frac{P_{\text{in}}/P_{\text{Nin}}}{P_{\text{out}}/P_{\text{Nout}}} \quad (1.26)$$

Elle est calculée dans la pratique en reliant l'entrée de l'élément à une résistance de référence d'une température T_0 de 290 K [1] [8] :

$$F = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \frac{P_{\text{Nout}}}{P_{\text{Nin}}} \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

$$F = \frac{1}{G} \frac{GkT_0B + kT_{\text{Nr}}B}{kT_0B} \quad (1.29)$$

$$(1.30)$$

$$F = 1 + \frac{T_{\text{Nr}}}{T_0} \quad (1.31)$$

La température de bruit d'un élément de la chaîne de réception est donc proportionnelle à la température de bruit en entrée :

$$T_{\text{Nr}} = T_0(F - 1) \quad (1.32)$$

Le gain d'un récepteur composé de N éléments est simplement le produit des gains de chacun de ces éléments :

$$G = g_1 \times g_2 \times g_3 \dots \times g_N \quad (1.33)$$

La contribution de la température de bruit d'un composant à la température de bruit du récepteur T_{rec} est pondérée par le gain des composants qui le précède :

$$T_{\text{rec}} = T_1 + \frac{T_2}{g_1} + \frac{T_3}{g_1 \times g_2} \dots \quad (1.34)$$

Etant donné que les gains typiques sont de l'ordre de la dizaine de dB (facteur 100 à 1000), le bruit du récepteur dépendra donc fortement de la température de bruit du premier élément de la chaîne de réception.

Le facteur de perte L , l'inverse du gain G caractérise la « fuite » de puissance qui intervient tout au long de la chaîne de réception :

$$L = \frac{1}{G} \quad (1.35)$$

La température de bruit véritablement induite par un récepteur de température physique T_p est alors :

$$T'_{\text{rec}} = LT_{\text{rec}} + (L - 1)T_p \quad (1.36)$$

Les différents composants d'un récepteur de type super-hétérodyne sont décrits ci-dessous.

• L'amplificateur Radio-Fréquence (RF)

Sa fonction est d'amplifier le signal puisque la puissance à la sortie de l'antenne est de l'ordre de 10^{-20} W [1] [9]. Le gain typique d'un tel amplificateur est de l'ordre $G_{\text{RF}} = 30$ dB. Comme il est rappelé ci-dessus, cette étape est critique pour la sensibilité radiométrique.

• Le filtre passe-bande

Bien entendu, le signal RF reçu et transmis par l'antenne comporte une large gamme de fréquences. Or, en bande L, seule une étroite zone est protégée des émissions artificielles comme les ondes de télécommunications (téléphones portables, relais...) ou encore les radars des aéroports. Le filtre passe-bande a pour objectif de sélectionner le signal à l'intérieur de cette zone. Toutefois, ce n'est pas ce filtre qui définit la bande passante de l'ensemble du récepteur, mais celui situé après l'amplificateur à fréquence intermédiaire. La bande passante est ici un peu plus large que la bande passante nominale du récepteur.

• Le mélangeur

Le signal RF à l'entrée du mélangeur est centré sur la fréquence centrale d'observation f_{RF} (≈ 1.41 GHz en bande L). L'objectif du mélangeur est d'abaisser fortement la fréquence de l'onde porteuse du signal RF pour l'amener à une fréquence intermédiaire f_{FI} de l'ordre de 5 à 30 MHz. Ainsi, le signal sera plus facilement traitable par l'électronique et, en cas de fuite de signal, on évitera un retour vers l'antenne, une boucle positive et une oscillation de l'ensemble du récepteur [9].

Le mélange consiste à multiplier le signal RF par une sinusoïde de fréquence f_{OL} . La fréquence intermédiaire f_{FI} est alors définie par :

$$f_{\text{FI}} = |f_{\text{RF}} - f_{\text{OL}}| \quad (1.37)$$

Or, comme on peut le voir sur la figure 1.4, deux fréquences f_{RF} et f_{IM} situées de part et d'autre de la fréquence de l'oscillateur local définissent la même fréquence f_{FI} .

Si la bande passante du signal RF est trop large (\tilde{B} sur la figure 1.4) ou si le fonctionnement du filtre est dégradé, le signal image, centré en f_{IM} , va venir s'ajouter au signal RF pour former le signal FI. Cette configuration est appelée « *double sideband* » et à pour conséquence de multiplier par deux la puissance du signal à la sortie du mélangeur, ce qui peut être utile pour des radiomètres fonctionnant dans les longueurs d'onde millimétriques. Mais dans le cas de la bande L, comme on l'a vu plus haut, le signal image risque de comporter des émissions artificielles et donc de dégrader le rapport signal sur bruit du récepteur. C'est pourquoi, dans ce cas, les récepteurs sont dits « *single sideband* » et seul le signal RF est conservé lors du mélange vers la fréquence intermédiaire (la bande passante est B (Fig. 1.4)).

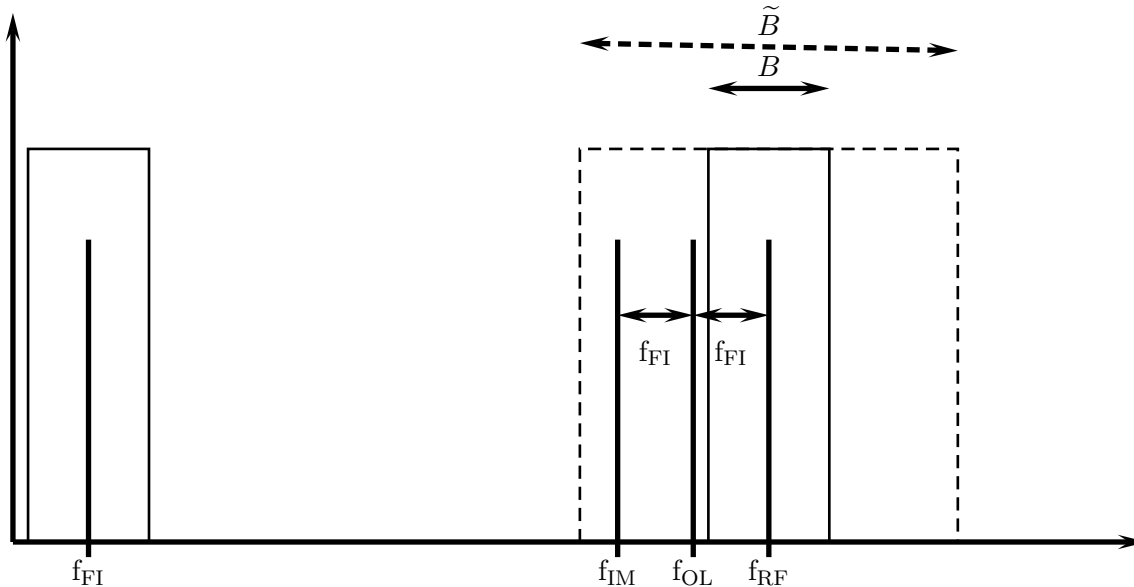


FIG. 1.4 – Mélange de la fréquence RF f_{RF} et de la fréquence de l'oscillateur local f_{OL} : la fréquence intermédiaire f_{FI} à la sortie du mélangeur est définie par l'écart entre f_{RF} et f_{OL} mais aussi pour la fréquence image f_{IM} de la fréquence RF. Cette image peut bruite le signal RF si la bande passante B est trop large (\tilde{B} , en tirets).

- **L'amplificateur à fréquence intermédiaire**

Tout comme l'amplificateur RF, l'amplificateur FI va multiplier la puissance du signal à l'entrée par un facteur 1000 ($G_{FI} = 30$ dB).

- **Le filtre passe-bande**

C'est la bande passante de ce filtre qui définira la bande passante du récepteur.

- **Le détecteur quadratique**

Le but est d'obtenir en sortie un courant dont la tension sera proportionnelle au carré du courant en entrée et donc proportionnelle à la puissance P_{sys} délivrée par l'ensemble de la chaîne d'acquisition. En entrée, le signal est alternatif, en sortie, il est continu. Un détecteur typique est une simple diode.

• Le filtre passe-bas ou Intégrateur

A l'entrée de ce composant, le courant continu comporte encore de fortes fluctuations hautes-fréquences qui, si elles n'étaient pas éliminées, réduiraient fortement la sensibilité radiométrique de l'instrument. Le lissage du signal est réalisé par un filtre passe-bas caractérisé par un temps de lissage, ou temps d'intégration τ . Ce filtre passe-bas est donc aussi appelé intégrateur puisque le courant en sortie est une moyenne du courant d'entrée sur un temps τ . Le plus simple des intégrateurs est un circuit RC avec $\tau = RC$.

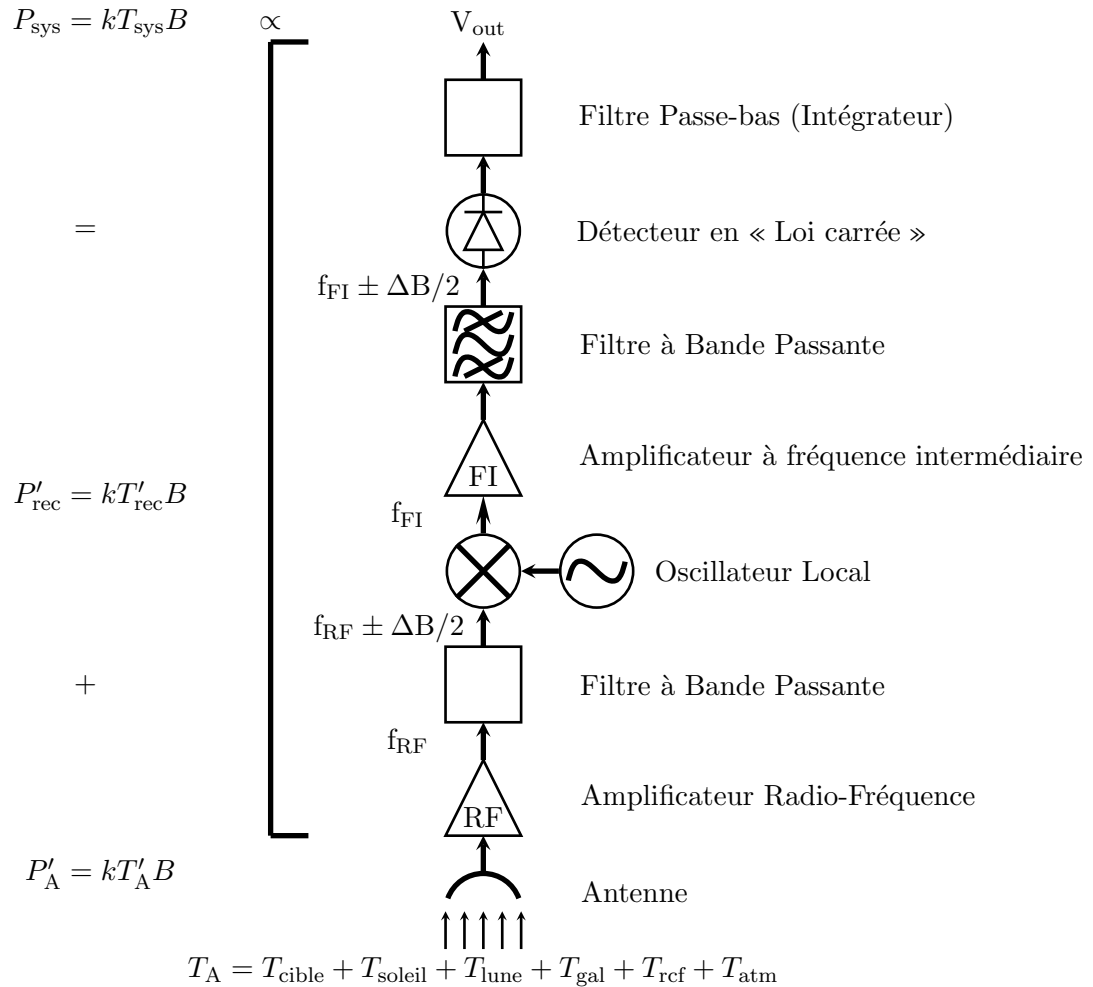


FIG. 1.5 – Description des composants d'un radiomètre à puissance totale de type super-hétérodyne : l'appellation « hétérodyne » vient du mélange de la fréquence RF vers la fréquence intermédiaire. Le courant de sortie V_{out} est proportionnelle à la puissance du système issue de la contribution de la température d'antenne T'_A et de la température de bruit du récepteur T'_{rec} .

Par la suite, la températures physique T_p de l'antenne et du récepteur ainsi que l'efficacité η et le facteur de perte L sont supposées connues, ce qui permet d'établir la sensibilité radiométrique de l'instrument en fonction de la température d'antenne T_A et la température de bruit du récepteur T_{rec} .

SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE

L'équation du radiomètre donne la sensibilité radiométrique ΔT en fonction de la température système T_{sys} , de la largeur de bande B du récepteur et du temps d'intégration τ :

$$\Delta T = \frac{T_{sys}}{\sqrt{B\tau}} \quad (1.38)$$

$$\Delta T = \frac{T_A + T_{rec}}{\sqrt{B\tau}} \quad (1.39)$$

Cette sensibilité radiométrique ne tient pas compte des variations possibles du gain G_{sys} du récepteur. Ce dernier peut être défini comme le coefficient de proportionnalité entre V_{out} et T_{sys} :

$$V_{out} = G_{sys} T_{sys} \quad (1.40)$$

L'objet même de l'étalonnage est de quantifier G_{sys} . Si l'on suppose que la relation (1.40) est linéaire, une mesure du courant de sortie pour deux températures de bruit, l'une « froide », l'autre « chaude », directement injectées à la sortie de l'antenne, permet de retrouver G_{sys} . Cependant, cela ne peut prendre en compte les variations rapides du gain du récepteur, entre chaque procédure d'étalonnage. La sensibilité radiométrique ΔT_N de la relation (1.39), dont l'origine est la température de bruit du récepteur, est distinguée de la sensibilité ΔT_G , dont l'origine est la variation du gain G_{sys} :

$$\Delta T_G = T_{sys} \left(\frac{\Delta G_{sys}}{G_{sys}} \right) \quad (1.41)$$

On peut alors compléter l'expression de la sensibilité radiométrique pour y intégrer cette nouvelle source, indépendante de la précédente. Par conséquent :

$$\Delta T = [(\Delta T_N)^2 + (\Delta T_G)^2]^{1/2} \quad (1.42)$$

$$\Delta T = T_{sys} \left[\frac{1}{B\tau} + \left(\frac{\Delta G_{sys}}{G_{sys}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.43)$$

1.2.3 Grandeurs caractéristiques

Etant donnée la relation (1.20), pour obtenir une résolution spatiale de 50 km (au nadir) à 750 km d'altitude, pour une longueur d'onde de 20 cm et un coefficient $c_f = 1.4$, un radiomètre doit posséder une antenne d'un diamètre de :

$$D = \frac{750}{50} \times 1.4 \times 0.2 \approx 4.2 \text{ m} \quad (1.44)$$

Cette application numérique montre les limites de l'utilisation d'un dispositif à antenne réelle, tel qu'un radiomètre à puissance totale, dans une mission spatiale de mesure de l'humidité de surface : il est difficile de déployer dans l'espace une antenne d'un tel diamètre. Notons cependant que la mission Aquarius [10] prévoit l'utilisation d'un tel instrument pour la mesure depuis l'espace ($H = 600$ km) de la *SSS*, puisque dans ce cas, la stabilité radiométrique est prépondérante sur la résolution spatiale. Il est prévu d'utiliser un réflecteur parabolique illuminé par 3

lobes fournissant des mesures à des angles d'incidence de 23.3° , 33.7° et 41.7° , correspondant (relation (1.21)) à des résolutions spatiales de 65 km, 80 km et 100 km.

D'après l'équation (1.34), T_{rec} dépend largement de la température de bruit de l'amplificateur RF. La figure de bruit de ce dernier étant de l'ordre de 2.3 dB et, d'après (1.32), sa température de bruit est :

$$T_{\text{rec}} \approx T_{\text{RF}} = (10^{0.23} - 1) \times 290 \approx 203 \text{ K} \quad (1.45)$$

Pour $B = 20$ MHz, $\tau = 1.5$ s et $T_A = 250$ K, ΔT vaut (équation (1.39)) :

$$\Delta T = \frac{250 + 200}{\sqrt{20 \cdot 10^6 \times 1.5}} \approx 0.08 \text{ K} \quad (1.46)$$

A la condition que les variations du gain G_{sys} puissent être maîtrisées, un radiomètre à puissance totale est donc tout à fait indiqué pour la mesure de la salinité.

Cependant, pour ce qui est de la résolution spatiale et de la propriété de mesure multi-angulaire, une autre technique de mesure doit être envisagée. Le chapitre suivant expose les principes fondamentaux de la technique de synthèse d'ouverture.

Biographie(s)

Biographie 1.1: PLANK, Max Karl Ernst Ludwig

(23 Avril 1858, Kiel, Allemagne- 4 Octobre 1947, Göttingen, Allemagne)



Max Planck est issu d'une lignée universitaire, son père étant professeur de droit constitutionnel et son grand-père professeur de théologie. Il passe une enfance tranquille à Kiel où il semble plus enclin à la musique qu'aux sciences. Sous l'influence de son professeur HERMANN MÜLLER, il se découvre un nouvel intérêt pour la physique à travers la loi de la conservation de l'énergie et finit par opter en 1874 pour des études scientifiques à Munich puis à partir de 1877 à Berlin.

A l'âge de 21 ans, en Juillet 1879, il soutient une thèse intitulée « Sur la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur ». Simple enseignant à Munich pendant 5 ans, il obtient la chaire de physique théorique à Kiel en 1885. A la mort de KIRCHHOFF qui fut son professeur à Berlin, il obtient, soutenu par HELMHOLTZ, le poste de professeur de physique théorique de l'université de Berlin en 1888 et devient la même année, direc-

teur de l'Institut de Physique Théorique. C'est à Berlin qu'il fit ses plus grandes découvertes, ouvrant la voie à ce qui sera la mécanique quantique. En 1900, combinant les formules de WIEN et de RAYLEIGH, Planck annonce une loi donnant la distribution de l'énergie en fonction de la longueur d'onde et introduit, deux mois plus tard, le quanta d'énergie, à la suite de quoi il reçoit le Prix Nobel de Physique en 1918. Chose impensable quelques années plus tôt, tant par la communauté scientifique que par lui-même, il renonce ainsi à une formulation classique de la physique, affirmant :

« [...] le cheminement dans son ensemble était un acte de désespoir, car une interprétation théorique devait être trouvée, quel qu'en soit le prix, aussi élevé soit il. ».

Il faudra cependant attendre les travaux de NIELS BOHR en 1913 pour qu'il soit complètement convaincu par les conséquences de ses propres travaux :

« Mes vaines tentatives de faire entrer le quanta élémentaire dans le cadre de la théorie classique ont continué pendant de nombreuses années et m'ont coûté de gros efforts. ».

Il fut président de la *Kaiser Wilhelm Gesellschaft*, plus tard renommée Société Max Planck, de 1930 à 1937, date à laquelle le parti Nazi réorganisa cette société, ce qu'il ne put accepter et le poussa à démissionner. Il demeura Berlin jusqu'en 1943 puis résida Rogätz jusqu'à la fin de la guerre. Un de ses fils fut exécuté à cette époque, accusé d'avoir participé à une tentative d'assassinat sur Hitler. Âgé de 87 ans en 1945, il reprit la tête de la *Kaiser Wilhelm Gesellschaft* et aida à la refonte de la recherche allemande.

Bibliographie

- [1] Fawwaz ULABY, Richard MOORE et Adrian FUNG : *Microwave Remote Sensing : Fundamentals and Radiometry*, volume 1. Artech House, 1981.
- [2] Jean-Pierre WIGNERON, Philippe WALDTEUFEL, A. CHANZY, Jean-Christophe CALVET, O. MARLOIE, J.-F. HANOCQ et Yann KERR : Retrieval capabilities of l-band 2-d interferometric radiometry over land surfaces (smos mission). *Microwave Radiometry Remote Sensing of Earth's Surface and Atmosphere*, pages 485–492, 2000.
- [3] Jean-Pierre WIGNERON, Philippe WALDTEUFEL, A. CHANZY, Jean-Christophe CALVET et Yann H. KERR : Two dimensional microwave interferometer retrieval capabilities over land surfaces (smos mission). *Remote sensing of environment*, 73:270–282, 2000.
- [4] Jean-Pierre WIGNERON, Jean-Christophe CALVET, Philippe WALDTEUFEL, Thierry PELLARIN, A. Van de GRIEND, Michael BERGER et P. FERRAZZOLI : Retrieving near surface soil moisture from microwave radiometric observations : current status and future plans. *Remote Sensing of environment*, 85:489–506, 2003.
- [5] Yann KERR, Jordi FONT, Philippe WALDTEUFEL et Michael BERGER : The soil moisture and ocean salinity mission - smos. *Earth Explorer Missions*, pages 18–25, 2000.
- [6] Jean-Christophe CALVET, J. NOILHAN et P. BESSEMOULIN : Retrieving the root-zone soil moisture from surface soil moisture or temperature estimates : a feasibility study based on field measurements. *J. Appl. Meteor.*, 37:371–386, 1998.
- [7] Emmanuel DINAT : *De la détermination de la salinité de surface des océans à partir de mesures radiométriques hyperfréquences en bande L*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2003.
- [8] Hugh D. ALLER : Astronomy 361 part III : Radio astronomical instrumentation and techniques. 2001.
- [9] C.J. SALTER : The measurement process with full-filled aperture.
- [10] C.J. KOBLINSKY, P. HILDEBRAND, Y. CHAO, A. DECHARON, W. EDELSTEIN, G. LAGERLOEF, D. LEVINE, F. PELLERANO, Y. RAHMAT-SAMII, C. RUF, F. WENTZ, W. WILSON et S. YUEH : Sea surface salinity from space : science goals and measurement approach.

Chapitre 2

Principes fondamentaux de l'imagerie par interférométrie

Sommaire

2.1	Présentation générale des radiomètres à synthèse d'ouverture . . .	25
2.2	Fondements mathématiques : la transformée de Fourier	31
2.2.1	Fréquences temporelles - Fréquences spatiales	31
2.2.2	Les transformées de FOURIER à deux dimensions	31
2.3	Fondements physiques : l'expérience des trous d'Young	37
2.3.1	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 = 0$	38
2.3.2	Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$	39
2.3.3	Cas d'une source primaire étendue entre $-r_s$ et $+r_s$	39

Et à cette fin, elles se construisirent un stupéfiant super-ordinateur si fantastiquement intelligent qu'avant même d'être raccordé à ses banques de données, il en était, partant de : Je pense donc je suis, déjà parvenu à en déduire l'existence du gâteau de semoule et l'impôt sur le revenu avant qu'on ait eu le temps de l'éteindre...

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

2.1 Présentation générale des radiomètres à synthèse d'ouverture

Tout comme la radiométrie à puissance totale, la radiométrie à synthèse d'ouverture trouve ses origines dans l'observation astronomique, et plus particulièrement dans l'application de l'interférométrie. Dès 1868, le physicien français ARMAND-HIPPOLYTE LOUIS FIZEAU affirme : « *Il existe en effet pour la plupart des phénomènes d'interférence, [...] une relation remarquable et nécessaire entre la dimension des franges et celle de la source lumineuse, [...], d'où, pour le dire en passant, il peut être permis d'espérer qu'[...] il deviendra possible d'obtenir quelques données nouvelles sur les diamètre angulaire des astres* »[1].

L'interférométrie permet de tirer des informations sur les propriétés d'une source lumineuse en séparant en deux le signal issu de cette source et en combinant ces signaux secondaires afin de faire apparaître des franges lumineuses. Ces franges apparaissent du fait de la nature

ondulatoire de la lumière. Une analogie possible est de considérer la rencontre des vagues causées par la chute de deux pierres dans un étang : lorsque deux crêtes se rencontrent, leur hauteur s'additionne pour former une vague deux fois plus haute et lorsque une crête rencontre un creux, leur influence respective s'annule. Ainsi, en interférométrie optique, sous certaines conditions, on voit apparaître une succession de franges lumineuses et sombres. Il a été démontré que le pouvoir séparateur d'un système interférométrique, sa résolution spatiale, est amélioré lorsque la distance entre les sources secondaires est augmentée.

Il faudra attendre 1920 pour que le physicien américain ALBERT ABRAHAM MICHELSON mesure pour la première fois le diamètre d'une étoile hors du système solaire à l'aide de l'interférométrie mais l'interférométrie optique se heurtera encore longtemps à la trop grande précision instrumentale requise. Le premier radio-interféromètre est constitué, en 1950, de deux antennes fixes, et l'interféromètre de Owen's Valley, Californie, construit en 1957 à partir d'un couple d'antennes orientables, est à l'origine de la découverte des quasars.

Depuis, les distances entre les antennes élémentaires n'ont cessé de s'accroître. Citons l'interféromètre « *1 mile* » (1964) qui utilisa la rotation de la Terre pour réaliser pour la première fois une synthèse d'ouverture et ainsi obtenir une image dont la précision était celle d'un télescope 1.5 km de diamètre, le « *Very Large Array* » (VLA, pour Très Grand Réseau, fin des années 70) à Socorro, Nouveau Mexique composé de 27 antennes formant un Y et synthétisant une antenne d'un diamètre de 36 km, et enfin le « *Very Long Baseline Array* » (VLBA, pour Réseau à Très Grande Ligne de Base, 1985), qui en combinant les signaux issus de 10 radio télescopes situés entre Hawaï et les Îles Vierges, synthétisa un radio télescope d'un diamètre égal à celui de la Terre. Certains projets en cours prévoient même d'utiliser des instruments embarqués à bord de satellites pour simuler des antennes d'un diamètre égal à plusieurs fois celui de la Terre.

Le principe de la synthèse d'ouverture est donc de combiner les signaux issus d'au moins deux antennes observant la même scène et dont on fait varier l'espacement. L'instrument ainsi composé, appelé interféromètre, ne fournit pas directement une tension proportionnelle à la température de brillance de la scène observée mais une mesure de la cohérence spatiale de cette scène, à partir de laquelle T_b est estimé dans un deuxième temps.

Cette technique permet notamment de synthétiser une antenne d'un diamètre égal à la plus grande distance séparant deux antennes élémentaires du radiomètre à synthèse d'ouverture.

Eclaircissement I.7: RÉOLUTION SPATIALE (δx [KM]) POUR UN RADIOMÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE)

La résolution spatiale d'un tel instrument, dont l'espacement maximal entre deux antennes est noté D , est celle d'un dispositif à antenne réelle doté d'une antenne de diamètre D :

$$\delta x_{SO} = H \frac{\lambda}{D}, \quad (2.1)$$

H étant la distance entre l'instrument et la cible.

Les antennes doivent avoir un champ de vue se recouvrant afin de pouvoir combiner leurs signaux. Elles doivent donc posséder un lobe principal large c.-à-d. un diamètre d proche de la

longueur d'onde (≈ 20 cm) :

$$0.5\lambda \leq d \leq \lambda \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow 60^\circ \leq \beta_{1/2} \leq 110^\circ \quad (2.3)$$

D'un point de vue pratique, il est plus facile de déployer dans l'espace un ou plusieurs bras sur lesquels sont fixés des antennes de petite dimension plutôt qu'une large parabole.

En faisant varier la distance entre deux antennes ou en disposant un réseau d'antennes sur un plan (en formant par exemple un Y, un U ou un T), la température de brillance reconstruite sera une carte à 2 dimensions. Au cours du survol d'une scène par un instrument, un même élément de cette scène est vu successivement sous plusieurs angles d'incidence : on retrouve là la capacité de mesure multi-angulaire (pour la mesure de l'humidité) et les mesures indépendantes au cours d'un même survol (mesure de la salinité).

Il faut cependant noter que la distance D ne peut être augmentée sans dégrader la sensibilité radiométrique.

Eclaircissement I.8: SENSIBILITÉ RADIOMÉTRIQUE (ΔT [K]) POUR UN RADIOMÈTRE À RADIO-MÈTRE À SYNTHÈSE D'OUVERTURE)

En synthèse d'ouverture [2], la sensibilité radiométrique est telle que :

$$\Delta T_{SO} = \frac{T_A + T_{rec}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{B\tau}} \times \frac{A_{syn}}{N \times A_{el}} \quad (2.4)$$

où A_{syn} est la surface de la parabole synthétisée, N est le nombre d'antenne et A_{el} est la surface d'une antenne élémentaire de diamètre d .

Pour $N = 2$, ΔT_{SO} augmente alors avec le carré de la distance entre les antennes :

$$\Delta T_{SO} = \frac{T_A + T_{rec}}{\sqrt{2B\tau}} \times \frac{1}{2} \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad (2.5)$$

Cette relation ne fournit cependant qu'une valeur approximative de la sensibilité radiométrique puisque la mesure de T_b n'est pas directe et que l'imprécision sur cette mesure dépend notamment des méthodes mises en oeuvre pour estimer les températures de brillances à partir des mesures instrumentales.

La mission spatiale SMOS (pour « *Soil Moisture and Ocean Salinity* », humidité des sols et salinité des océans) représente la première tentative d'application de la technique de synthèse d'ouverture à la télédétection de la surface de la Terre. Ce projet, financé par l'Agence Spatiale Européenne, a été initié en 1999 dans le cadre du programme « Exploration de la Terre ». Son objectif est de fournir, à la suite de son lancement prévu en 2007, une mesure globale et scientifiquement exploitable de l'humidité des continents et de la salinité des océans. Il offre aussi l'occasion pour la communauté scientifique de valider pour de futures missions le concept prometteur d'imagerie par interférométrie passive.

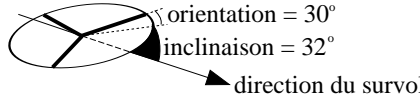
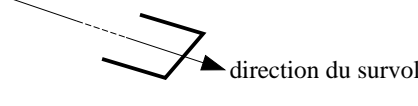
Cette mission regroupe une centaine de chercheurs de divers pays européens (France, Espagne, Allemagne, Finlande...) ainsi que quelques chercheurs des Etats-Unis. Seuls une dizaine

de chercheurs, issus de l'Université Polytechnique de Catalogne (Espagne), du Centre Allemand d'aéro- et astronautique (DLR, Allemagne), et du Centre Européen de Recherche et de Formation en Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS, France), se consacrent spécifiquement aux méthodes de reconstruction d'image.

L'instrument de mesure proprement dit, appelé MIRAS (*Microwave Imaging Radiometer with Aperture Synthesis*), en cours de construction, sera composé de 69 antennes régulièrement réparties sur 3 bras formant un réseau en Y (voir Fig. 2.1). Il sera installé sur une plateforme placée sur une orbite polaire à environ 755 km d'altitude, avec un temps de revisite de l'ordre de 3 jours. Afin de valider expérimentalement le principe de mesure, l'Université Technologique de Helsinki (HUT, Finlande) a construit le HUT2D, un réseau en U composé de 36 antennes et prévu pour des missions aéroportées (voir Fig. 2.2). Le tableau 2.1 rappelle les caractéristiques principales de ces deux instruments.

Quelque soit la géométrie, en U ou en Y, le fonctionnement est le même : la corrélation des signaux issus de chaque couple d'antennes fournira une mesure instrumentale du degré de cohérence spatiale de la scène observée. La reconstruction d'image pour les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture consiste en un ensemble cohérent d'outils mathématiques adaptés à la géométrie du réseau et permettant au final une estimation de la carte à deux dimensions de la distribution de températures de brillance à partir des mesures interférométriques délivrées par l'instrument. Ses objectifs se placent autant au niveau d'une définition rigoureuse des espaces de travail (réseaux hexagonaux ou cartésiens, directs ou réciproques), d'une élaboration et d'une caractérisation d'outils adaptés à ces espaces (fenêtres d'apodisation à deux dimensions, optimisation de la forme de ces fenêtres, facteurs de mérites spécifiques...) [PARTIE II] que dans le développement et l'analyse de méthodes d'inversion robustes, rapides et adaptées aux spécificités instrumentales [PARTIE III].

Les sections suivantes abordent les principes mathématiques et physiques fondamentaux permettant d'introduire les concepts qui seront développés dans la partie II.

	MIRAS	HUT-2D
Configuration	Y	U
Type de mission	spatiale / orbite polaire héliosynchrone	aéroportée
Période d'activité	courant 2007 \rightarrow \approx 2012	en cours
Altitude	755 km	3 km
Orientation Inclinaison		
Nombre d'antennes	(21 « avants » + 2 « arrières »)x3 = 69	12x3 = 36
Espacement inter-antennes	0.875 λ	0.7 λ
Dimension des bras	\approx 3.90 m	\approx 1.8 m
Plus grande distance entre deux antennes	\approx 6.70 m	\approx 2.70 m
Champ de vue	$\pm 60^\circ \Leftrightarrow \approx 1600$ km x 1000 km	$\pm 30^\circ$
Résolution spatiale	30 km $< \delta x <$ 100 km	$\delta x \approx 300$ m
Erreur attendue sur la T_b reconstruite	≈ 1 K	≈ 1 K
Largeur à -3 dB du lobe principal (nominal)	66°	66°
Fréquence centrale (nominale)	1.4135 GHz	1.4135 GHz
Longueur d'onde (λ)(nominale)	≈ 21.21 cm	≈ 21.21 cm
Bande Passante (nominale)	20 MHz	8 MHz
Temps d'intégration	1.5 s	1.5 s
Nombre de visibilités complexes mesurées	4692	1260
Nombre de pixels de la carte de T_b reconstruite	128x128 = 16384	64x64 = 4096

TAB. 2.1 – Caractéristiques de la mission spatiale SMOS et de l'instrument HUT-2D.

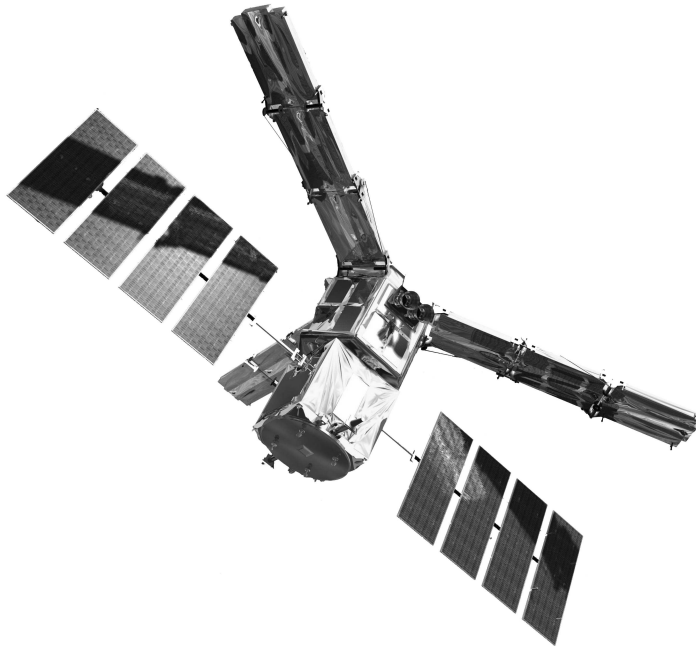


FIG. 2.1 – Vue d'artiste du satellite SMOS : 69 antennes sont régulièrement réparties sur les 3 bras en Y.

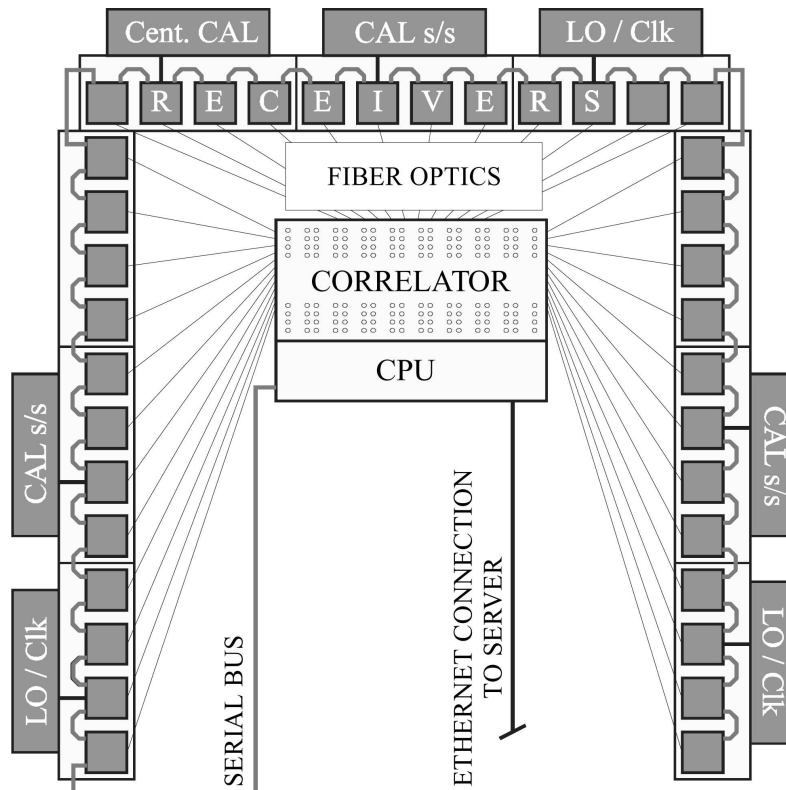


FIG. 2.2 – Schéma du dispositif instrumental du HUT-2D : chacune des antennes disposées en U est reliée aux autres via le corrélateur (ici au centre).

2.2 Fondements mathématiques : la transformée de Fourier

2.2.1 Fréquences temporelles - Fréquences spatiales

Prenons l'exemple d'un accord de « La mineur » joué par un piano et obtenu par la pression simultanée sur quatre touches : La (grave), Mi, Do et de nouveau La (aigu). Le son entendu correspond à une vibration des cordes transmise à l'air puis à notre tympan : il se propage comme une onde, une variation périodique de la pression de l'air. Près de notre oreille vont donc se succéder plusieurs fois par seconde des zones de pressions, alternativement fortes et faibles. La hauteur du son est déterminé par la distance entre deux extrema (la longueur d'onde [m]) ou encore, ce qui est équivalent, par le nombre d'oscillations par seconde (la fréquence temporelle exprimée en HERTZ) : plus la longueur d'onde est grande, plus la fréquence est basse et plus le son est grave et inversement, plus la longueur d'onde est petite, plus la fréquence est élevée et plus le son est aigu. Ainsi, les quatre notes formant l'accord de La mineur ont les fréquences suivantes : La (grave) = 220 Hz (220 « battements » par seconde), Mi = 329.6 Hz, La (aigu) = 440 Hz, Do = 523.3 Hz.

La figure 2.3 illustre la superposition de ces notes : en haut, un accord de La mineur sur une portée ouverte par une clé de sol, au centre les variations de pressions au cours du temps pour cet accord et en bas, les quatre notes, les quatre vibrations élémentaires. Un musicien expérimenté peut discerner les notes composant un accord à son écoute mais cette distinction est plus difficile pour un néophyte. JOSEPH FOURIER a été le premier à présenter une méthode permettant de décomposer tout signal en une superposition de signaux périodiques de fréquence donnée [3] [4]. L'objet de la transformée de FOURIER est d'indiquer quelles fréquences sont présentes dans ce signal et avec quelle « importance ». Ainsi, la figure 2.3 montre aussi la transformée de FOURIER de l'onde sonore (appelée spectre de fréquence) engendrée par un accord de La mineur : on y retrouve les quatre fréquences des notes qui le composent, avec la même importance dans un cas idéal.

2.2.2 Les transformées de Fourier à deux dimensions

La transformée de FOURIER (notée \mathcal{TF} par la suite) peut aussi s'appliquer à l'étude de signaux variant non pas en fonction du temps mais en fonction d'une distance. Les fréquences ne sont alors plus temporelles mais spatiales. En réalité, il est abusif de parler de « la » transformée de FOURIER, puisque les relations changent selon que le signal étudié est continu ou discret, périodique ou non. Dans ce paragraphe, nous parcourrons les différentes transformées de FOURIER pour aboutir à la transformée de FOURIER discrète de signaux périodiques et discrets.

Les relations entre une image $T(x, y)$ définie continûment dans tout l'espace et sa transformée de FOURIER $\hat{T}(u, v)$ sont les suivantes :

$$\hat{T}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x, y) e^{-2j\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.6)$$

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}(u, v) e^{2j\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.7)$$

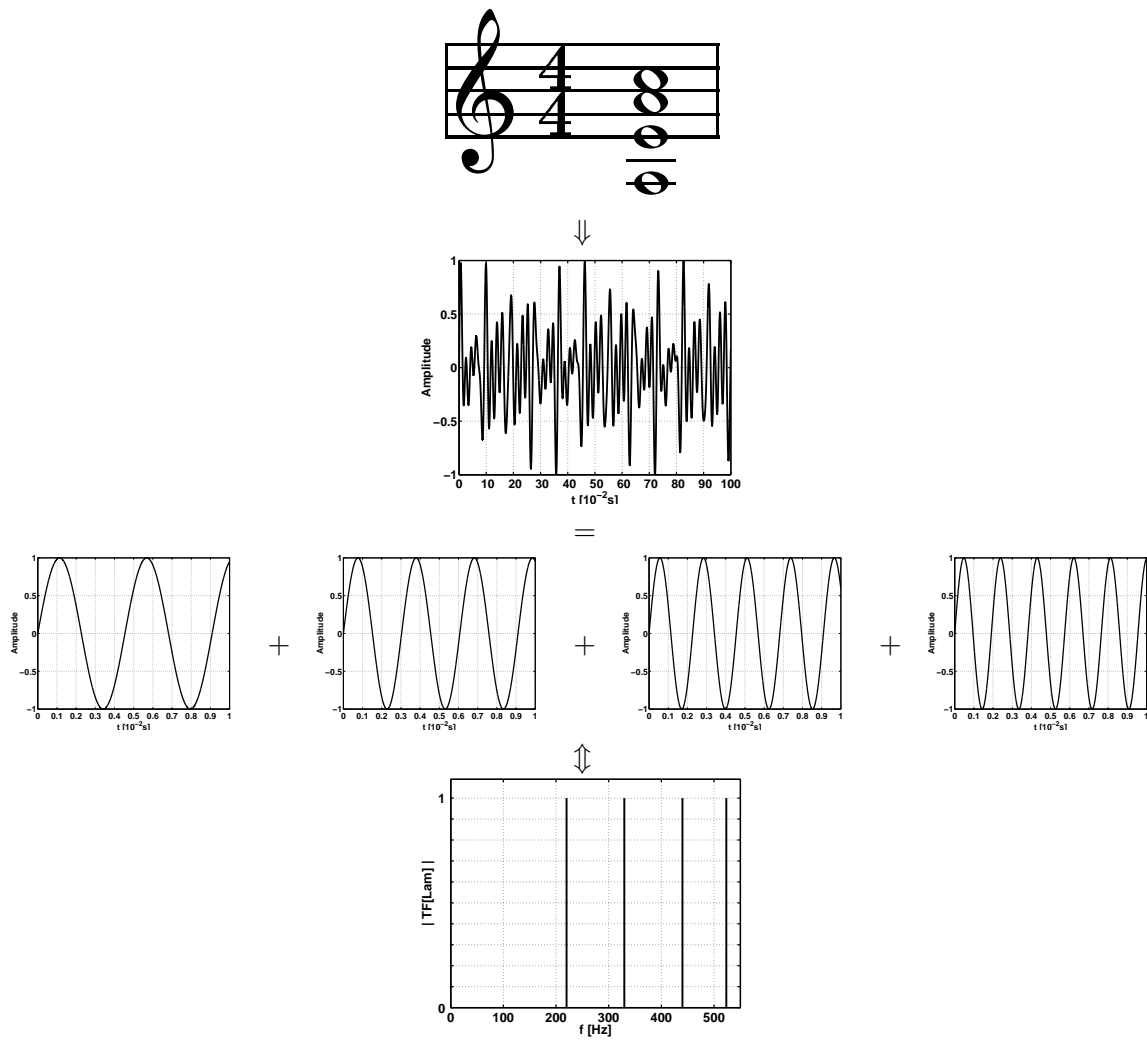


FIG. 2.3 – L'accord de La mineur vu comme la superposition de ses quatre fondamentales : en haut, cet accord écrit sur une portée, en dessous, les variations correspondantes de pression au cours du temps, 3^{ème} ligne, les variations de pression pour (de gauche à droite) un La (grave), un Mi, un Do et un La (aigu). En bas, la transformée de Fourier du signal fait apparaître les quatre fréquences qui le composent.

Rappelons quelques propriétés de la transformée de FOURIER continue d'un signal continu.

Eclaircissement I.9: EGALITÉ DE PARSEVAL

L'énergie contenue dans l'image est conservée par la \mathcal{TF} :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |T(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{T}(u, v)|^2 du dv \quad (2.8)$$

Eclaircissement I.10: PROPRIÉTÉ DE CONVOLUTION DE LA \mathcal{TF}

La \mathcal{TF} d'un produit de deux fonctions f_1 et f_2 est égale à la convolution de leur \mathcal{TF} respective, \widehat{f}_1 et \widehat{f}_2 :

$$\mathcal{TF}\{f_1(x, y) \times f_2(x, y)\} = \widehat{f}_1(u, v) * \widehat{f}_2(u, v) \quad (2.9)$$

Eclaircissement I.11: PROPRIÉTÉ DE TRANSLATION DE LA \mathcal{TF}

La translation d'une image se traduit par un déphasage de son spectre :

$$f_2(x, y) = f_1(x - x_0, y - y_0) \Rightarrow \widehat{f}_2(u, v) = \widehat{f}_1(u, v)e^{-2j\pi(ux_0 + vy_0)} \quad (2.10)$$

Eclaircissement I.12: \mathcal{TF} D'UN PEIGNE DE DIRAC

La transformée de Fourier d'un peigne de DIRAC caractérisé par un pas δx est un peigne de DIRAC caractérisé par un pas $1/\delta x$ et dont l'amplitude est multipliée par $1/(\delta x)^2$:

$$\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\delta x, y - l\delta x) \quad (2.11)$$

$$\mathcal{TF}\{\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y)\} = \frac{1}{(\delta x)^2} \Pi_{1/\delta x, 1/\delta x}(u, v) \quad (2.12)$$

Dans la pratique, deux caractéristiques de l'acquisition numérique d'une scène 2D vont venir modifier les propriétés de son spectre : l'échantillonnage d'une image va conduire à une périodisation de son spectre et la périodisation de cette image va conduire à l'échantillonnage de son spectre.

a. Echantillonnage d'une image

Les seules quantités manipulables par un ordinateur sont discrètes. Cet échantillonnage $T[k, l]$ de pas δx peut être vu comme la multiplication de la scène continue $T(x, y)$ par un peigne de DIRAC 2D $\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y)$:

$$T[k, l] = T(k\delta x, l\delta x) = T(x, y)\Pi_{\delta x, \delta x}(x, y) \quad (2.13)$$

Ainsi, l'échantillonnage va conduire, dans le calcul de la transformée de FOURIER, à une convolution des \mathcal{TF} de l'image et du peigne de DIRAC et à une périodisation $\widehat{T}_p(u, v)$ du spectre :

$$\widehat{T}_p(u, v) = \mathcal{TF} \{T(x, y)\Pi_{\delta x}(x, y)\} \quad (2.14)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \widehat{T}(u, v) * \frac{1}{(\delta x)^2} \Pi_{1/\delta x, 1/\delta x}(u, v) \quad (2.15)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u', v') \Pi_{1/\delta x, 1/\delta x}(u - u', v - v') du' dv' \quad (2.16)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u', v') \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{m}{\delta x} - u', v - \frac{n}{\delta x} - v') du' dv' \quad (2.17)$$

$$\widehat{T}_p(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u - \frac{m}{\delta x}, v - \frac{n}{\delta x}) \quad (2.18)$$

où $\widehat{T}_p(u, v)$ est une fonction $1/\delta x$ -périodique.

On peut alors se demander quelle doit être la finesse du pas δx pour que l'échantillonnage d'une image continue se fasse sans perte d'information.

Eclaircissement I.13: LE CRITÈRE DE SHANNON-NYQUIST

L'échantillonnage d'un signal continu, dont le spectre est borné par une fréquence maximale f_m , se fait sans perte d'information si le pas d'échantillonnage vérifie $\delta x \leq \frac{1}{2f_m}$.

Reprenons alors le résultat (2.18). Il peut être vu comme une relation entre la transformée de FOURIER $\widehat{T}_{ech}(u, v)$ du signal échantillonné $T(k\delta x, \delta x)$ et la \mathcal{TF} $\widehat{T}_{cont}(u, v)$ du signal continu $T(x, y)$:

$$\widehat{T}_{ech}(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{T}_{cont}(u - \frac{m}{\delta x}, v - \frac{n}{\delta x}) \quad (2.19)$$

Or, si le critère de SHANNON est respecté, $\widehat{T}_{cont}(u, v)$ est nul pour $u > 1/(2\delta x)$ et $v > 1/(2\delta x)$. On obtient donc une relation entre la \mathcal{TF} d'un signal échantillonné et la \mathcal{TF} de ce même signal dans sa version continue :

$$\widehat{T}_{ech}(u, v) = \frac{1}{(\delta x)^2} \widehat{T}_{cont}(u, v) \quad (2.20)$$

Les relations entre un signal discret non périodique et sa \mathcal{TF} sont les suivantes :

$$\widehat{T}(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} T[k, l] e^{-2j\pi(uk\delta x + vl\delta x)} \quad (2.21)$$

$$T[k, l] = \frac{1}{(\delta x)^2} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \widehat{T}(u, v) e^{-2j\pi(uk\delta x + vl\delta x)} dudv \quad (2.22)$$

b. Limitation de la taille d'une image

L'acquisition d'une image implique de limiter ses dimensions : afin de pouvoir appliquer la transformée de Fourier, on considérera une répétition de cette image dans tout l'espace. Une telle périodisation de la scène implique la discrétisation de son spectre. Les relations entre un signal 2D discret périodique de dimensions $M \times N$ et sa \mathcal{TF} sont alors les suivantes :

$$\widehat{T}[m, n] = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} T[k, l] e^{-2j\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (2.23)$$

$$T[k, l] = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{T}[m, n] e^{2j\pi(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N})} \quad (2.24)$$

Ces relations définissent la transformée de FOURIER à deux dimensions ($\mathcal{TF}2D$). Le calcul de $\widehat{T}[m, n]$ à l'aide de la relation (2.24) implique $M^2 + N^2$ opérations. Des algorithmes ont été développés afin de réduire le nombre d'opérations à $M \log_2 M + N \log_2 N$: on appelle ces méthodes des transformées de FOURIER rapides ou FFT pour *Fast FOURIER Transform*.

Un exemple illustre les relations précédentes : il s'agit d'un tableau de CLAUDE MONNET, « Le bassin aux nymphéas », peint en 1899 et représentant une scène souvent utilisée par Monnet, celle du pont japonais enjambant un bassin couvert par des nénuphars. La figure 2.4 montre à gauche un échantillonnage de l'oeuvre originale, chacun des $500 \times 333 = 166500$ pixels qui la composent portant une information sur la couleur.

La \mathcal{TF} d'une image étant une quantité complexe, le spectre présenté à droite sur la figure 2.4 est lié au spectre d'amplitude $|\widehat{T}(u, v)|$. Certaines caractéristiques de l'image peuvent apparaître par une simple étude de sa transformée de FOURIER. Ainsi, la relation 2.23 montre que la valeur de la \mathcal{TF} à la fréquence nulle $(0, 0)$ est la valeur moyenne de la quantité $T(x, y)$, dans le cas de notre image, sa couleur moyenne. L'essentiel de l'énergie d'une image est contenue dans cette valeur, c'est pourquoi l'écart entre la valeur d'une \mathcal{TF} à la fréquence nulle et à une fréquence non nulle, même faible, est grande. La figure 2.4 représente donc la transformée de FOURIER en échelle logarithmique, $\log \frac{|\widehat{T}(u, v)|}{|\widehat{T}(0, 0)|}$. En reconstruisant une image à partir des seules fréquences contenues à l'intérieur du cercle en pointillé de la figure 2.4, on obtient une version basse fréquence dans laquelle apparaît une information sur le contraste, sur les grandes échelles de l'oeuvre originale. Au contraire, la version haute fréquence obtenue à partir des fréquences extérieures au cercle en pointillé donne une information sur les contours et sur les détails.

La reconstruction basse fréquence montrée sur la figure 2.5 est un exemple de signal à spectre borné, dit encore à bande passante limitée : les composantes de Fourier de cette image sont nulles pour les fréquences situées au delà du cercle pointillé. La bande passante a ici la forme d'un disque dont le rayon est égal à la fréquence de coupure. Il est alors intéressant de noter qu'une image à bande limitée passante possède une résolution (un niveau de détail) plus faible que l'image originale.

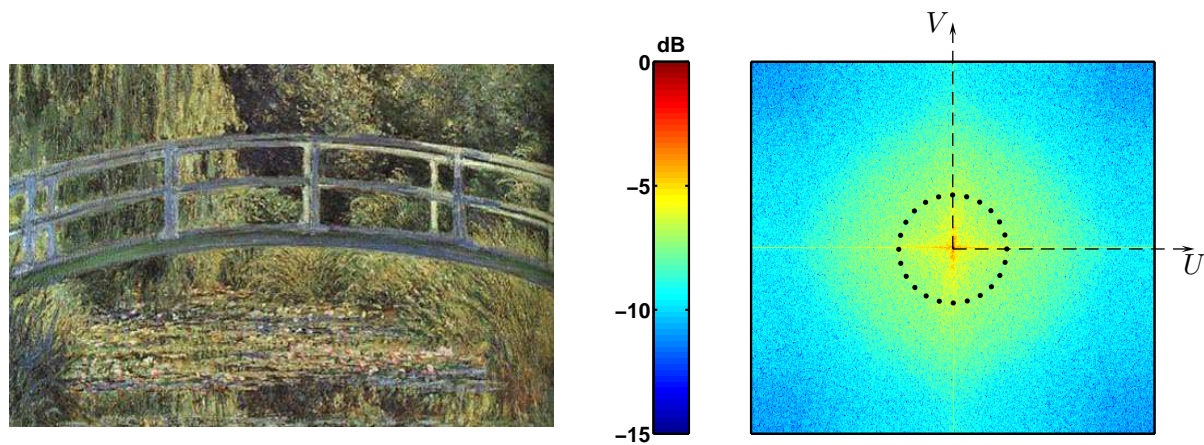


FIG. 2.4 – A gauche, « Le bassin aux nymphéas », de CLAUDE MONNET (1899, *Musée d'Orsay*). A droite, sa transformée de Fourier à deux dimensions.

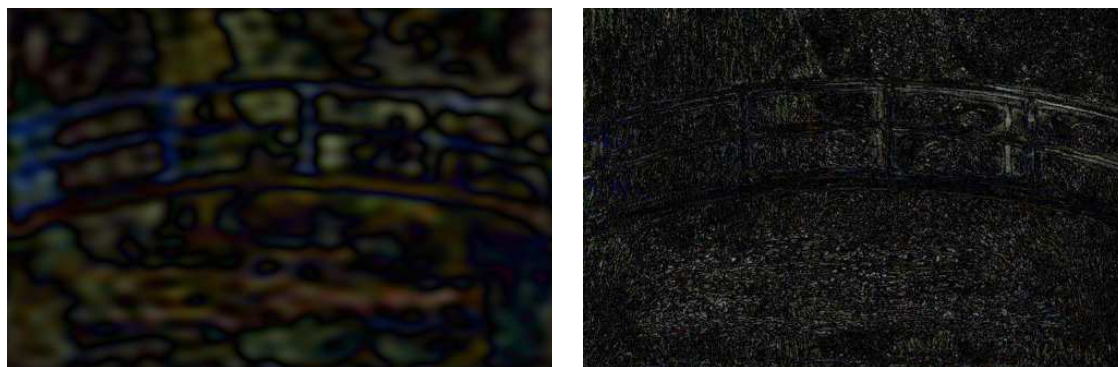


FIG. 2.5 – A gauche, la composante basse fréquence du « bassin aux nymphéas », à droite, la composante haute fréquence.

2.3 Fondements physiques : l'expérience des trous d'Young

Le principe d'interférométrie qui prédomine dans la synthèse d'ouverture est parfaitement illustré par l'expérience des trous d'Young [5], dont le dispositif est décrit par la figure 2.6. Cet exemple permet de se familiariser intuitivement avec les phénomènes plus complexes qui seront étudiés par la suite, tout en faisant émerger des relations importantes pour la suite, comme le théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE, à la base de tout le travail de reconstruction en synthèse d'ouverture.

Une source primaire S_0 éclaire un masque percé de deux trous et situé à une distance H . La figure d'interférence est observée sur un écran placé à une distance L des trous. Les proportions suivantes seront considérées par la suite :

- le diamètre des trous est négligeable devant toutes les autres dimensions.
- la distance D entre les trous est négligeable devant les longueurs H et L .
- la largeur de la figure d'interférence est petite devant les longueurs H et L .

Etant données ces hypothèses nécessaires à l'obtention d'interférences, l'étude est menée dans le plan du schéma et les positions des sources sont reportées sur l'axe X .

D'après le principe de HUYGENS, chaque trou placé en (S_1) et (S_2) devient une source secondaire au passage de l'onde issue de (S_0) . Le champ électromagnétique \vec{s} arrivant sur l'écran est donc la somme des deux champs \vec{s}_1 et \vec{s}_2 :

$$\vec{s}(x, t) = \vec{s}_1(x, t) + \vec{s}_2(x, t) \quad (2.25)$$

$$\vec{s}(x, t) = a_1 \exp j(\omega t + \phi_1(x)) \vec{u}_1 + a_2 \exp j(\omega t + \phi_2(x)) \vec{u}_2 \quad (2.26)$$

où a_i et ϕ_i sont l'amplitude et la phase de l'onde issue de (S_i) se propageant le long de \vec{u}_i , avec $i = 1, 2$. La pulsation ω est telle que $\omega = 2\pi f_0$, avec f_0 fréquence du champ émis en (S_0) et λ_0 sa longueur d'onde.

L'intensité $I(x)$ mesuré en P est définie par :

$$I(x) = \langle \vec{s}(x, t) \cdot \vec{s}^*(x, t) \rangle \quad (2.27)$$

En supposant les amplitudes des ondes secondaires égales à l'amplitude a_0 de l'onde primaire :

$$I(x) = 2a_0^2 + a_0 (\exp j(\omega t + \phi_1) + \exp -j(\omega t + \phi_2)) \quad (2.28)$$

$$I(x) = 2I_0 (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \quad (2.29)$$

où I_0 est l'intensité de la source (S_0) .

La phase $\phi = \phi_1 - \phi_2$ est liée à la différence de marche δ entre les chemins (S_0S_1P) et (S_0S_2P) :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \quad (2.30)$$

$$\text{avec } \delta = (S_0S_1P) - (S_0S_2P) \quad (2.31)$$

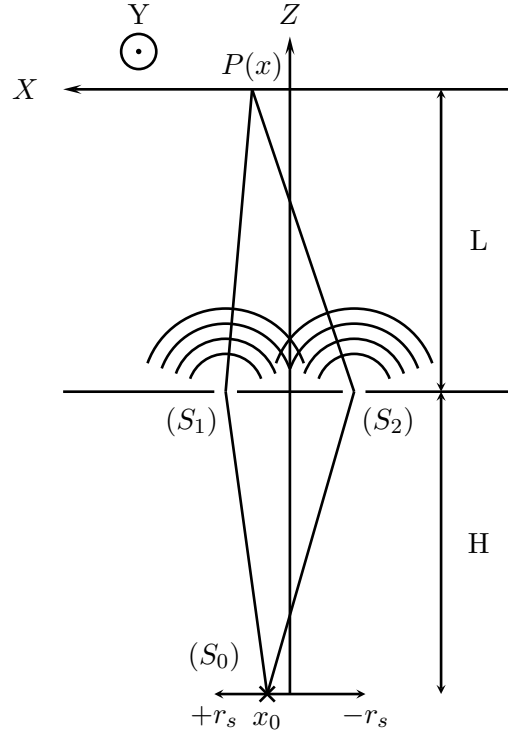


FIG. 2.6 – Dispositif de l'expérience des trous d'Young : une source ponctuelle (S_0), placée en x_0 , ou étendue entre $-r_s$ et $+r_s$, rayonne en direction d'un masque, éloigné d'une distance H et percé de deux trous (S_1) et (S_2). Une figure d'interférence apparaît sous certaines conditions sur un écran placé à une distance L du masque. L'intensité des raies est mesurée au point $P(x)$, le long de l'axe X .

2.3.1 Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 = 0$

Dans ce cas, δ ne dépend que de $S_1P - S_2P$, avec :

$$(S_1P)^2 = L^2 + \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 \quad (2.32)$$

$$\text{et } (S_2P)^2 = L^2 + \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 \quad (2.33)$$

Pour $L \gg D$ et $L \gg x$, on peut appliquer l'approximation $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$:

$$S_1P = L + \frac{1}{2L} \left(\frac{D}{2} - x\right)^2 \quad (2.34)$$

$$\text{et } S_2P = L + \frac{1}{2L} \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 \quad (2.35)$$

soit :

$$\delta = \frac{1}{2L} \left[\left(\frac{D}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{D}{2} + x\right)^2 \right] \quad (2.36)$$

$$\delta = -\frac{Dx}{L} \quad (2.37)$$

Donc d'après les relations (2.29) et (2.30), l'intensité au point P résultant de l'interférence d'une source ponctuelle placée en $x_0 = 0$ est :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi Dx}{\lambda_0 L} \right) \right] \quad (2.38)$$

2.3.2 Cas d'une source primaire ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$

Dans ce cas, δ dépend aussi des chemins (S_0S_1) et (S_0S_2) :

$$(S_0S_1)^2 = H^2 + \left(\frac{D}{2} - x_0 \right)^2 \quad (2.39)$$

$$\text{et } (S_0S_2)^2 = H^2 + \left(\frac{D}{2} + x_0 \right)^2 \quad (2.40)$$

Pour $H \gg D$ et $H \gg x_0$, on peut appliquer l'approximation $\sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$:

$$S_0S_1 = H + \frac{1}{2H} \left(\frac{D}{2} - x_0 \right)^2 \quad (2.41)$$

$$\text{et } S_0S_2 = H + \frac{1}{2H} \left(\frac{D}{2} + x_0 \right)^2 \quad (2.42)$$

soit :

$$\delta = \frac{1}{2L} \left[\left(\frac{D}{2} - x \right)^2 - \left(\frac{D}{2} + x \right)^2 \right] + \frac{1}{2H} \left[\left(\frac{D}{2} - x_0 \right)^2 - \left(\frac{D}{2} + x_0 \right)^2 \right] \quad (2.43)$$

$$\delta = -\frac{Dx}{L} - \frac{Dx_0}{H} \quad (2.44)$$

Donc d'après les relations (2.29) et (2.30), l'intensité au point P résultant de l'interférence d'une source ponctuelle placée en $x_0 \neq 0$ est :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \left(\frac{Dx}{L} + \frac{Dx_0}{H} \right) \right) \right] \quad (2.45)$$

2.3.3 Cas d'une source primaire étendue entre $-r_s$ et $+r_s$

La figure d'interférence d'une source étendue est la somme en intensité des figures d'interférences des sources « ponctuelles » constituant la source étendue. L'intensité mesurée en P est donc :

$$I(x) = \int_{-r_s}^{+r_s} 2I_i(x_0) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta(x_0)}{\lambda_0} \right) \right] dx_0 \quad (2.46)$$

$$\text{avec } \delta(x_0) = -\frac{Dx}{L} - \frac{Dx_0}{H} \quad (2.47)$$

où $I_i(x_0)$ est l'intensité élémentaire émise par chaque source ponctuelle. L'intensité totale I_0 de la source étendue est donc telle que :

$$I_0 = \int_{-r_s}^{+r_s} I_i(x_0) dx_0 \quad (2.48)$$

et l'intensité élémentaire normalisée $I_i^n(x_0)$ est définie par :

$$I_i^n(x_0) = \frac{I_i(x_0)}{I_0} \quad (2.49)$$

La relation (2.46) devient donc :

$$I(x) = 2I_0 + 2 \int_{-r_s}^{+r_s} I_i(x_0) \cos\left(\frac{2\pi\delta(x_0)}{\lambda_0}\right) dx_0 \quad (2.50)$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \cos\left(\frac{2\pi\delta(x_0)}{\lambda_0}\right) dx_0 \right] \quad (2.51)$$

Puisque $I_i^n(x_0)$ est réel et positif, cette relation peut aussi s'écrire :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp\left(j2\pi\frac{\delta(x_0)}{\lambda_0}\right) dx_0 \right\} \right] \quad (2.52)$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp\left(j2\pi\left(-\frac{Dx}{\lambda_0 L} - \frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right)\right) dx_0 \right\} \right]$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \exp\left(-i2\pi\frac{Dx}{\lambda_0 L}\right) \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp\left(-j2\pi\frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right) dx_0 \right\} \right]$$

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \Re e \left\{ \exp\left(-i2\pi\frac{Dx}{\lambda_0 L}\right) \gamma_i(u) \right\} \right] \quad (2.53)$$

$$\text{avec } u = \frac{D}{\lambda_0 H} \quad \text{et} \quad \gamma_i(u) = \int_{-r_s}^{+r_s} I_i^n(x_0) \exp(-j2\pi ux_0) dx_0 \quad (2.54)$$

Les relations (2.53) et (2.54) font intervenir γ_i , le degré complexe de cohérence spatiale, quantité complexe telle que $\gamma_i = |\gamma_i| \exp(i\alpha_i)$. Ainsi, l'intensité mesurée en P est de la forme :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + |\gamma_i| \cos\left(\frac{2\pi Dx}{\lambda_0 L} - \alpha_i\right) \right] \quad (2.55)$$

Le facteur de visibilité V donne une mesure du contraste des franges d'interférence :

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.56)$$

Or d'après (2.55) :

$$I_{min} = 2I_0(1 - |\gamma_i|) \quad (2.57)$$

$$I_{max} = 2I_0(1 + |\gamma_i|) \quad (2.58)$$

En conclusion, les relations suivantes existent entre le facteur de visibilité, le degré de cohérence spatiale et la distribution spatiale d'intensité :

$$\gamma_i(u) = \int I_i^n(x_0) \exp(-j2\pi ux_0) dx_0 \quad \text{avec } u = \frac{D}{\lambda_0 H} \quad (2.59)$$

$$\text{et } V = |\gamma_i(u)| \quad (2.60)$$

La relation (2.59) est connue sous le nom de théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE[6][7][8]. On reconnaît dans cette expression (2.59) une relation de transformée de Fourier entre le degré de cohérence spatiale et la distribution spatiale d'intensité. La quantité u ayant la dimension de l'inverse d'une longueur, elle est appelée fréquence spatiale, notion qui sera explicitée dans la section suivante.

Si la distribution d'intensité de la source étendue est uniforme, alors l'intensité élémentaire est telle que :

$$I_i^n(x_0) = \frac{1}{2r_s} \text{ pour } -r_s < x_0 < +r_s, \quad (2.61)$$

Le degré de cohérence spatiale est :

$$\gamma_i = \int_{-r_s}^{+r_s} \frac{1}{2r_s} \exp\left(-j2\pi \frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right) dx_0 \quad (2.62)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2r_s} \frac{\lambda_0 H}{-j2\pi D} \left[\exp\left(-2j\pi \frac{Dx_0}{\lambda_0 H}\right) \right]_{-r_s}^{+r_s} \quad (2.63)$$

$$\gamma_i = \frac{\sin(\pi D 2r_s / \lambda_0 H)}{\pi D 2r_s / \lambda_0 H} \quad (2.64)$$

$$\gamma_i = \text{sinc}(D 2r_s / \lambda_0 H) \quad (2.65)$$

L'intensité mesurée en P est alors :

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + |\text{sinc}(D 2r_s / \lambda_0 H)| \cos\left(\frac{2\pi D x}{\lambda_0 L}\right) \right]. \quad (2.66)$$

Ainsi, comme le présentait FIZEAU en 1868, il est possible de mesurer le diamètre d'une étoile grâce à sa figure d'interférence. En effet, il suffit de mesurer la distance entre les trous pour laquelle le facteur de visibilité est nul, puisque, d'après (2.65), cette distance est telle que :

$$D \propto \frac{\lambda_0 H}{4r_s} \quad (2.67)$$

où $2r_s$ est le diamètre de l'étoile observée.

La relation (2.66) permet aussi de se rapprocher des propriétés de la synthèse d'ouverture évoquée dans le chapitre 3 de la première partie. En effet, en identifiant chacun des trous à une antenne d'un radiomètre à synthèse d'ouverture, l'augmentation de la distance D va conduire à une meilleure localisation des franges d'interférences (terme en cosinus de la relation (2.66)) ce qui peut s'apparenter à une meilleur résolution spatiale (voir aussi Fig. 2.7), alors que le contraste sera d'autant plus faible (terme en sinus cardinal de la relation (2.66)) ce qui peut s'apparenter à une plus faible résolution radiométrique (voir Fig. 2.8).

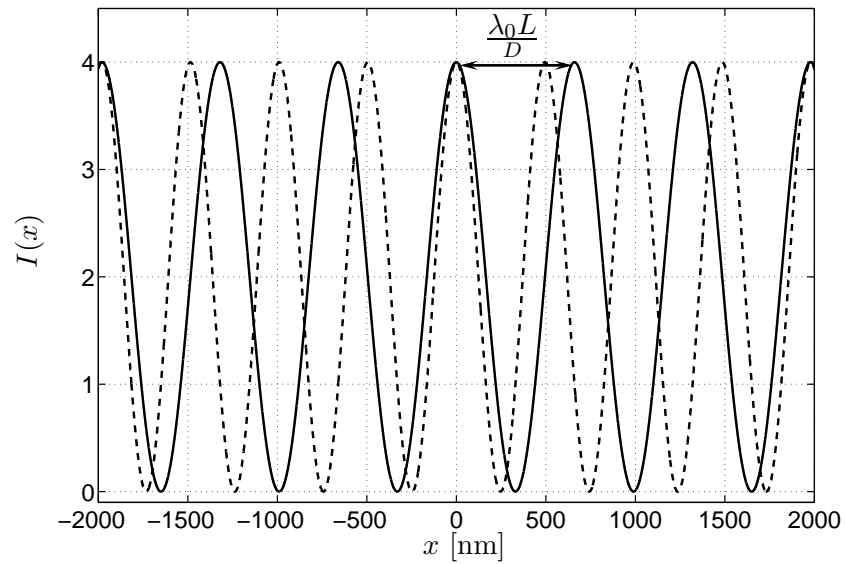


FIG. 2.7 – Variation de l'intensité sur une figure d'interférence obtenue par une expérience de trous d'Young (trait plein) : cas d'une source étendue. La distance entre deux maxima est fonction de la distance D entre les trous : lorsque cette distance augmente, les franges se rapprochent et sont mieux localisées (tirets).

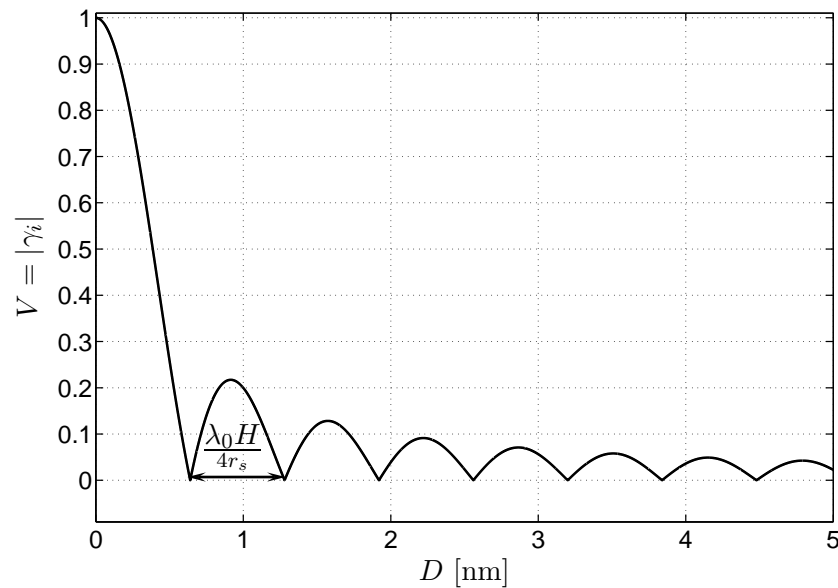
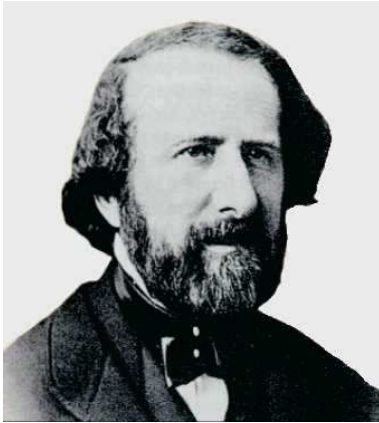


FIG. 2.8 – Variation de la visibilité en fonction de la distance entre les trous d'une expérience d'Young : cas d'une source étendue. La distance entre deux minima, correspondant à la disparition de la figure d'interférence, dépend de l'étendue $2r_s$ de la source.

Biographie(s)

Biographie 2.1: FIZEAU, Armand Hippolyte Louis

(23 Septembre 1819, Paris, France- 18 Septembre 1896, Venteuil, France)



Fils d'un professeur à la faculté de médecine, Fizeau débute des études de médecine au Collège Stanislas, interrompues par une santé fragile. Il suit alors les cours d'astronomie de FRANÇOIS ARAGO à l'observatoire de Paris, ceux d'optique de VICTOR REGNAULT et, à l'aide des notes de cours que lui fait parvenir son frère, ceux dispensés à l'Ecole Polytechnique. En 1839, il perfectionne la dagguerréotypie, améliorant son temps de vie grâce à l'utilisation de sels d'or et en renforçant le contraste de l'image.

En 1845, il débute une collaboration fructueuse avec FOUCAULT. Ils réalisent ensemble le premier dagguerréotype de la surface de soleil. Obtenant des franges dagguerréotype des franges d'interférence à partir d'une source de chaleur, ils illustrent la nature semblable de la lumière et de la chaleur.

En 1848, Fizeau démontre que le son en provenance d'une source mobile sera perçu différemment par un témoin immobile selon la direction de son mouvement : si la source se rapproche, le son est de plus en plus aigu, si elle s'éloigne, le son est de plus en plus grave. Il en est de même pour la lumière, la lumière d'une source mobile se rapprochant étant décalée vers le violet, celle d'une source s'éloignant étant décalée vers le rouge. Cette effet, nommé Doppler-Fizeau, du nom du physicien arrivé indépendamment à la même conclusion, permet, après les travaux complémentaires de KICHHOFF et BUNSEN, d'étudier le mouvement des astres.

En 1849, il donne une bonne approximation de la vitesse de la lumière (315000 km/s) grâce à un système ingénieux. Un rayon lumineux est projeté à travers une roue dentée en direction d'un miroir placé à une très grande distance. Pour certaines vitesses de la roue, le rayon passe entre deux dents, est réfléchi par le miroir et revient à sa source. La durée de ce parcours, et donc la vitesse de la lumière, est lié à la vitesse de la roue dont on mesure la vitesse de rotation. Une version améliorée de ce dispositif permettra à ALFRED CORNU, en 1870, d'obtenir une valeur très précise de la vitesse de la lumière.

Alors que la communauté scientifique croit encore à l'existence de « l'éther », support invisible de la propagation de la lumière, FRESNEL fait l'hypothèse qu'un corps en mouvement dans cet éther, l'entraîne en partie dans sa course. Fizeau confirme cette hypothèse en 1851, pourtant faite sur des bases fausses, grâce là encore à l'interférométrie. Il montre qu'un rayon lumineux projeté dans un tuyau dans lequel circule de l'eau, se propage moins vite dans le sens opposé au courant.

Biographie 2.2: MICHELSON, Albert Abraham

(19 Décembre 1852, Strzelno, Pologne - 9 Mai 1931, Pasadena, Californie, Etats-Unis)



Alors âgé de trois ans, Michelson suit sa famille qui quitte la Pologne pour San Francisco, Californie en 1855. A 17 ans, il entre à l'Académie Navale à Annapolis, Maryland, où il se trouve plus d'affinité avec les sciences qu'avec la mer. Diplômé en 1873, il enseigne les sciences dans cette même académie jusqu'en 1879.

Dès 1878, Michelson débute la course qu'il mènera en tête jusqu'à la fin de sa vie : la mesure toujours plus précise de la vitesse de la lumière (c , célérité). Il est dit qu'il réalise sa première mesure à l'aide d'un équipement valant moins de 10 Dollars! Ressentant le besoin de se perfectionner en optique, il part pour l'Europe en 1880 et passe deux ans à Berlin, Heidelberg et Paris.

A Berlin, il construit son premier interféromètre. Ce dispositif est principalement composé de deux bras perpendiculaires : un rayon issu d'une source éloignée est séparé en deux par un miroir semi-argenté. Chacun des deux nouveaux rayons se propagent le long des bras, se réfléchissent sur des miroirs fixés à leur extrémité et viennent interférer après avoir été recombinaés. Tout tient à l'un des deux miroirs qui est mobile et à la précision, de l'ordre de la longueur d'onde du signal étudié, avec laquelle il est déplacé. La grande qualité de Michelson était la subtilité des dispositifs qu'il mettait en place, subtilité telle qu'il a parfois été le seul à pouvoir les faire fonctionner.

Avec l'aide du chimiste américain WILLIAMS MORLEY, il est à l'origine d'un « non résultat » éclatant. Le but de l'expérience de Morley-Michelson est de démontrer l'existence de l'éther : la Terre entraînant l'éther avec elle, et si l'un des bras de l'interféromètre est orienté dans le sens de son mouvement, la durée du trajet des deux rayons se propageant le long de chacun des bras doit être différent et donc produire des franges. A partir de 1887 et devant l'absence de résultat, Michelson n'a cessé d'améliorer la sensibilité de son dispositif, sans pour autant obtenir de frange. Ce non résultat a permis d'infirmer l'hypothèse de l'éther et a contribué à confirmer la théorie de la relativité établie par ALBERT EINSTEIN.

En 1893, partisan de calibrer le mètre étalon d'après une longueur d'onde donnée (idée adoptée en 1960), il donne une mesure du mètre en fonction de la longueur d'onde du cadmium. En 1920, il mesure le diamètre de Betelgeuse à l'aide d'un interféromètre et en 1923, à la tête d'un dispositif incluant deux pics séparés d'un quarantaine de kilomètres, un prisme octogonal sur l'un, un miroir sur l'autre, et la mesure, par triangulation, au quart de pouce près, de la distance les séparant, il établit une nouvelle valeur pour c à 299 798 km/s.

Pour sa dernière expérience, il utilisa un tube dans lequel le vide régnait : la lumière y effectuait des allers-retours jusqu'à parcourir près de 16 km. Les résultats parus en 1933 donnaient une vitesse de 299 774 km/s, soit moins de 2 km/s d'écart avec la valeur adoptée dans les années 70.

Biographie 2.3: YOUNG, Thomas

(13 Juin 1773, Milverton, Angleterre - 10 Mai 1829, Londres, Angleterre)



Thomas Young était un enfant précoce, lisant couramment à l'âge de deux ans et maîtrisant à 16 ans, le latin, le grec ancien et huit autres langues classiques et modernes. Sa curiosité l'a amené à s'illustrer dans de nombreux domaines parmi lesquels la médecine, la physique et l'archéologie.

En 1793, il débute des études de médecine et seulement un an plus tard, il présente devant la « *Royal Society* » les résultats de ses recherches sur l'accommodation de la forme de la cornée en fonction de la distance de l'objet observé. Il obtient son diplôme en 1796 et s'installe à Londres en 1799. En 1801, il démontre que l'astigmatie résulte d'une déficience de la courbure de la cornée.

En 1802, il publie ses travaux sur la théorie de la couleur, connue sous le nom de théorie de Young-Helmholtz. Il établit que la perception de l'ensemble des couleurs est due à la stimulation plus ou moins importante de seulement trois couleurs principales, rouge, vert et bleu.

En 1803, il décrit ses travaux sur l'interférence lumineuse et sur la formation de franges lorsqu'un rayon traverse un masque percé de deux trous très fins et très proches. A cette époque, c'est l'hypothèse corpusculaire émise par ISAAC NEWTON qui prédomine. Ce dispositif, connu sous le nom d'expérience des trous d'Young, permettait dès lors d'établir la nature ondulatoire de la lumière, mais, à cause de l'influence de Newton, cette hypothèse n'a été prise en compte que près de 15 ans plus tard, à la suite des travaux d'AUGUSTIN FRESNEL.

Parmi les contributions de Young, on trouve la notion d'énergie comme le produit de la masse et du carré de la vitesse, celle du travail comme le produit de la force par une distance, le « module d'Young » décrivant l'élasticité d'un solide, et des hypothèses sur les couleurs des bulles de savons. En 1813, il tente de déchiffrer les hiéroglyphes égyptiens et travaille sur la Pierre de Rosette à partir de 1814. En 1823, il publie une comparaison de ses travaux et de ceux de CHAMPOLLION, tentant par là de contester, sans succès, la primauté de Champollion. Son Dictionnaire Egyptien est publié à titre posthume en 1830.

Biographie 2.4: **FOURIER, Jean Baptiste Joseph**

(21 Mars 1768, Auxerre, France - 16 Mai 1830, Paris, France)



Dès l'âge de 10 ans, Joseph Fourier se retrouve orphelin, ayant perdu sa mère très tôt, tandis que son père et sa seconde femme meurt l'un après l'autre.

Il entre alors à l'école de Pallais que dirige le maître de musique de la cathédrale. En 1780, il entre à l'Ecole Royale Militaire d'Auxerre où il montre vite de grandes dispositions pour les mathématiques.

Sa première voie est celle des ordres : il entre au séminaire de l'abbaye bénédictine de Saint-Benoit-sur-Loire. Il reste cependant tiraillé entre la prêtrise et les mathématiques, écrivant dans une de ces lettres à BONARD à Paris : « *Hier j'ai fêté mes 21 ans, l'âge auquel Newton et Pascal avait déjà acquis assez de reconnaissance pour atteindre l'immortalité.* ».

Il ne prononce pas ses vœux et enseigne à partir de 1790 au collège bénédictin et à l'Ecole Royale Militaire à Auxerre.

Alors qu'il hésite encore entre une vie consacrée à la foi et une carrière scientifique, le climat politique décide pour lui et il s'implique dans le comité local de la Révolution. Animé par un espoir d'égalité, il est sur le point de démissionner alors que la Terreur fait rage, mais prisonnier des luttes intestines au sein de la Révolution, il est contraint de rester. Envoyé à Orléans, il fréquente des factions minoritaires surveillées par le pouvoir en place, ce qui lui vaut d'être emprisonné en 1794. A la mort de ROBESPIERRE, le climat se détend et il rejoint l'Ecole Normale nouvellement créée en 1795. Il fait là la connaissance de LAPLACE, LAGRANGE et MONGE, enseignants à l'Ecole Normale. Après un nouveau passage en prison, de nouveau pour les incidents d'Orléans, il enseigne à la nouvelle Ecole Polytechnique dirigée par LAZARE CARNOT et GASPARD MONGE. En 1797, il succède à LAGRANGE à la chaire d'analyse et de mécanique.

En 1798, il rejoint NAPOLÉON pour sa campagne d'Egypte. Bloqué sur place à la suite de la bataille du Nil, il administre Le Caire, dirige les fouilles archéologiques et fonde l'Institut du Caire au sein duquel il siège, dans le département de mathématiques, en compagnie de MONGE, MALUS... et NAPOLÉON. De retour en France en 1801, il souhaite reprendre son poste de professeur à l'Ecole Polytechnique mais NAPOLÉON a d'autres projets pour lui et le nomme Préfet de l'Isère, en siège à Grenoble. Contre mauvaise fortune bon cœur, il dirige les travaux de drainage de Bourgoin et la construction d'une voie rapide rejoignant Grenoble et Turin.

Parallèlement, il rédige de 1804 à 1807 son fameux traité « Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides » qu'il soumet à l'Institut de Paris dont le comité de lecture est composé de LAGRANGE, LAPLACE, MONGE et LACROIX. Ceux-ci restent très sceptiques sur la qualité du document et notamment sur le développement des fonctions en séries trigonométriques. De plus, BIOT lui reproche de ne pas faire référence à ses propres travaux sur la dérivation des équations de transfert de chaleur parus en 1804, rejoint bientôt avec les mêmes objections par LAPLACE et POISSON. Et lorsque l'Institut lance une compétition sur la propagation de la chaleur en 1811, Fourier est le seul à soumettre ses travaux et gagne le prix, sans toutefois vraiment convaincre.

Alors que NAPOLÉON est envoyé en exil, Fourier, pour éviter une confrontation périlleuse, le convainc de ne pas passer par Grenoble. Alors que l'Empereur effectue son retour d'Elbe, Fourier tente de convaincre la population de prêter allégeance au Roi et s'enfuit de Grenoble. Il trouve cependant les mots pour expliquer son comportement à NAPOLÉON qui finit par lui pardonner et le nomme Préfet du Rhone.

De retour à Paris, Fourier est nommé à l'Académie des Sciences en 1817. En 1822, son essai « Théorie analytique de la chaleur » paraît enfin.

Bibliographie

- [1] Armand Hippolyte Louis FIZEAU : Rapport sur le prix bordin. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 1868.
- [2] Philippe WALDTEUFEL : Radiometric sensitivity of smos. *Notes Techniques pour SMOS*, 2000.
- [3] Jean Baptiste Joseph FOURIER : Sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. 1807.
- [4] Jean Baptiste Joseph FOURIER : Théorie analytique de la chaleur. *Bulletin de la Société philomatique*, 1812.
- [5] Thomas YOUNG : Course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. 1807.
- [6] Pieter Hendrike VAN CITTERT : *Z. Physik*, 69:298, 1931.
- [7] Pieter Hendrike VAN CITTERT : Die wahrscheinliche schwingungsverteilung in einer von einer lichtquelle direkt oder mittels einer linse beleuchteten ebene. *Physica*, 1:201–210, 1934.
- [8] Frits ZERNIKE : The concept of degree of coherence and its application to optical problems. *Physica*, 5:785–795, 1938.

Chapitre 3

La relation entre les visibilités et la carte de température de brillance observée : le théorème de Van Cittert-Zernike

Sommaire

3.1	Corrélation des champs reçus par deux antennes	49
3.2	Instrumentation	52
3.2.1	Les LICEF	52
3.2.2	Le corrélateur	53
3.2.3	Les NIR	53
3.3	Relation fondamentale entre les visibilités et la température de brillance	55
3.3.1	Les gains d'antennes	55
3.3.2	Le phénomène de décorrélation spatiale	55
3.3.3	Relation Fondamentale	57

Le Jour de la Grande Mise en Route [...], il leur dit :
« - Quelle est la noble tâche pour laquelle moi, Le Grand Compute-Un, le second plus grand ordinateur dans l'univers du temps et de l'espace, ai-je été appelé à l'existence ?
- O Grand Compute-Un, la tâche pour laquelle nous t'avons conçu est celle-ci : nous voudrions que tu nous donnes..(une pause).. la Réponse!... »

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

3.1 Corrélation des champs reçus par deux antennes

Quelque soit la géométrie du réseau d'antenne d'un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture, le dispositif élémentaire est formé par un couple d'antennes dont la corrélation des signaux va fournir une mesure du degré de cohérence spatiale à la fréquence angulaire déterminée par la distance entre les antennes. La démonstration suivante, qui dans un premier temps ne fait pas intervenir les caractéristiques instrumentales, permet d'établir, pour ce couple d'antenne, le

théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE reliant la visibilité V à la distribution spatiale d'intensité T_b .

Le champ électromagnétique résultant de la présence d'une distribution de charges alternatives ϵ placées en $\vec{\rho}_i$ est mesurée par une antenne placée en \vec{r}_i (voir Fig. 3.1). Sous les hypothèses suivantes :

- la polarisation du champ est ignorée : le champ E est considéré comme une quantité scalaire (cette supposition n'est pas nécessaire mais rend la démonstration plus claire),
- le champ résulte uniquement d'une distribution **surfactive** de charges,
- le principe de HUYGENS est appliqué (l'amplitude du champ varie en $|\vec{\rho}_i - \vec{r}_i|^{-1}$ et sa phase dépend du chemin parcouru de la source à la réception),

le champ E mesuré en \vec{r}_i est de la forme :

$$E(\vec{r}_i) = \int_{S_i} \epsilon(\vec{\rho}_i) \frac{e^{2j\pi \frac{|\vec{\rho}_i - \vec{r}_i|}{\lambda}}}{|\vec{\rho}_i - \vec{r}_i|} dS_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

La corrélation des champs mesurés en \vec{r}_1 et \vec{r}_2 est alors :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle E(\vec{r}_1) E^*(\vec{r}_2) \rangle \quad (3.2)$$

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \iint \langle \epsilon(\vec{\rho}_1) \epsilon^*(\vec{\rho}_2) \rangle \frac{e^{2j\pi \frac{|\vec{\rho}_1 - \vec{r}_1|}{\lambda}}}{|\vec{\rho}_1 - \vec{r}_1|} \frac{e^{-2j\pi \frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{r}_2|}{\lambda}}}{|\vec{\rho}_2 - \vec{r}_2|} dS_1 dS_2 \quad (3.3)$$

La source est supposée spatialement incohérente, ce qui implique que $\langle \epsilon(\vec{\rho}_1) \epsilon^*(\vec{\rho}_2) \rangle \neq 0$ uniquement pour $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}$, soit :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_S \langle |\epsilon(\vec{\rho})|^2 \rangle \frac{e^{2j\pi \frac{|\vec{\rho} - \vec{r}_1|}{\lambda}}}{|\vec{\rho} - \vec{r}_1|} \frac{e^{-2j\pi \frac{|\vec{\rho} - \vec{r}_2|}{\lambda}}}{|\vec{\rho} - \vec{r}_2|} dS \quad (3.4)$$

La géométrie du dispositif étudié, illustré par la figure 3.1, permet d'établir les relations suivantes :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_i| = \sqrt{\rho^2 + r_i^2 - 2\vec{\rho} \cdot \vec{r}_i} \quad (3.5)$$

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_i| = \rho \sqrt{1 + \left(\frac{r_i}{\rho}\right)^2 - 2\frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_i}{\rho^2}} \quad (3.6)$$

Or, la distance à la source est beaucoup plus grande que la distance entre les antennes, $\rho \gg r_i$:

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_i| \approx \rho + \frac{r_i^2}{2\rho} - \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{r}_i}{\rho}, \quad (3.7)$$

ce qui conduit à :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2| = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2\rho} + \frac{1}{\rho} (\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 - \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1). \quad (3.8)$$

et à :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_1| |\vec{\rho} - \vec{r}_2| = \rho^2 \quad (3.9)$$

En remarquant que $r_1^2 = r_2^2 = d^2$, l'expression 3.8 se simplifie :

$$|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2| = \frac{1}{\rho}(\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 - \vec{\rho} \cdot \vec{r}_1). \quad (3.10)$$

Il reste alors à exprimer les deux produits scalaires :

$$\vec{\rho} \cdot \vec{r}_1 = \frac{1}{2}(\rho^2 + r_1^2 - \rho_1^2) \quad (3.11)$$

$$\text{avec } \rho_1^2 = H^2 \left[1 + \frac{(x + d_1/2)^2}{H^2} + \frac{(d_2/2 - y)^2}{H^2} \right] \quad (3.12)$$

$$\vec{\rho} \cdot \vec{r}_2 = \frac{1}{2}(\rho^2 + r_2^2 - \rho_2^2) \quad (3.13)$$

$$\text{avec } \rho_2^2 = H^2 \left[1 + \frac{(x - d_1/2)^2}{H^2} + \frac{(d_2/2 + y)^2}{H^2} \right] \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{1}{\rho}(|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2|) = (d_1/2 + x)^2 - (d_1/2 - x)^2 + (d_2/2 - y)^2 - (d_2/2 + y)^2 \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\rho}(|\vec{\rho} - \vec{r}_1| - |\vec{\rho} - \vec{r}_2|) = \frac{-(d_1x + d_2y)}{\rho} \quad (3.17)$$

Le report des deux résultats 3.17 et 3.9 dans la relation 3.4 conduit à l'expression suivante de la corrélation des champs reçus par les deux antennes :

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int_S \langle |\epsilon(\vec{\rho})|^2 \rangle \frac{e^{-2j\pi \frac{(d_1x + d_2y)}{\lambda\rho}}}{\rho^2} dS \quad (3.18)$$

Les définitions suivantes sont introduites :

Eclaircissement I.14: FRÉQUENCES SPATIALES ANGULAIRES, LIGNE DE BASE, COSINUS DIRECTEURS

- les quantités $u = \frac{d_1}{\lambda}$ et $v = \frac{d_2}{\lambda}$ sont des **fréquences spatiales angulaires**, avec d_1 et d_2 les projections du vecteur liant les deux antennes sur les axes du référentiel attaché à l'instrument et λ la longueur d'onde d'observation

- le couple (u, v) est appelé **ligne de base**

- $\xi = \sin \theta \cos \phi$ et $\eta = \sin \theta \sin \phi$ sont appelés **cosinus directeurs**

En introduisant $d\Omega = \frac{dS}{\rho^2}$, la relation 3.18 conduit au théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE[1][2][3] liant la distribution spatiale d'intensité $T_b(\xi, \eta) = \langle |\epsilon(\vec{\rho})|^2 \rangle$ à la valeur du degré de cohérence spatiale à la fréquence (u, v) :

$$V(u, v) = \int_{4\pi} T_b(\xi, \eta) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} d\Omega \quad (3.19)$$

$$V(u, v) = \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} \frac{T_b(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta \quad (3.20)$$

Ainsi, **en négligeant tous les aspects instrumentaux**, la corrélation des signaux reçus par deux antennes ayant un champ de vue se recouvrant, fournit une mesure la transformée de FOURIER à la fréquence (u, v) de la quantité $\tilde{T}_b(\xi, \eta) = \frac{T_b(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}$ appelée température de brillance modifiée. La section suivante va montrer comment les caractéristiques instrumentales vont venir modifier cette expression.

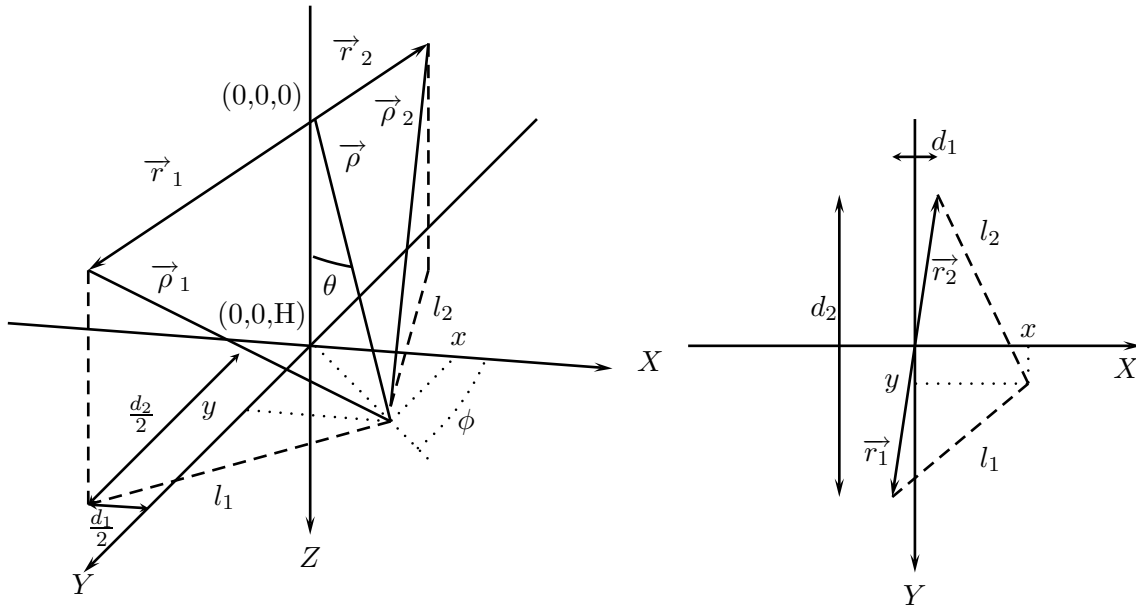


FIG. 3.1 – Description du référentiel lié à un couple d'antenne. L'origine est située à mi-distance de deux antennes placées à l'extrémité des vecteurs \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . La projection de $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ sur l'axe X est notée d_1 , celle sur l'axe Y , d_2 . Les antennes observent une distribution surfacique ϵ sur le plan $Z = H$ (projection sur ce plan à droite). Les coordonnées d'un point de ce plan sont notées (x, y, H) ou (ρ, θ, ϕ) .

3.2 Instrumentation

3.2.1 Les LICEF

Chacun des capteurs formant séparément un radiomètre de puissance totale, on retrouve les éléments décrits dans le chapitre 1, première partie. L'antenne et la partie « puissance totale » du récepteur sont rassemblées au sein du LICEF [4] (*Light weight Cost-Effective Front-end*) (voir Fig. 3.2), qui intègre les fonctions suivantes :

- **un déphasage de $\pi/2$** : les visibilitées étant des quantités complexes, le signal à la sortie du premier filtrage et de l'amplification RF est séparé en deux parties, dont l'une, déphasée de $\pi/2$, est dite en quadrature de phase (notée Q) tandis que l'autre, inchangée est dite en phase (notée I). Cette opération est réalisée lors du mélange IF : chaque LICEF est bien sûr relié au même oscillateur et les câbles les reliant ont tous la même longueur afin de prévenir tout déphasage.

- **l'échantillonnage** : celui-ci est nécessaire à la numérisation du signal et est réalisé par un échantillonneur « 1 bit » à la cadence de 56 Mbit/s. Cette étape n'implique par de perte d'information, l'échantillonnage du signal respectant les conditions de Shannon.

- **la quantification** : ce sont les valeurs quantifiées du signal qui seront numériquement corrélées dans l'étape suivante. Or, la corrélation de signaux numérisés n'est pas équivalente à la corrélation de ces mêmes signaux dans leur version analogique : cela va induire une modification de la relation entre les visibilitées et la température de brillance.



FIG. 3.2 – *Light weight Cost-Effective Front-end* deuxième génération : LICEF-2, développé par les sociétés MIER et EADS-CASA (Espagne). Ce dispositif intègre l'antenne et une chaîne de réception de type radiomètre de puissance totale.

3.2.2 Le corrélateur

Le corrélateur est schématiquement composé de deux éléments : un multiplicateur et un intégrateur. Pour un couple d'antennes donné, un signal en phase est multiplié à un autre signal en phase pour obtenir la partie réelle d'une visibilité et avec un signal en quadrature de phase pour obtenir la partie imaginaire. Les produits de corrélation élémentaires sont alors intégrés (moyennés) durant un temps d'intégration τ .

3.2.3 Les NIR

Un ou plusieurs éléments (3 pour l'instrument MIRAS) sont dédiés spécifiquement à la mesure de la fonction de cohérence spatiale à la fréquence nulle, fournissant donc une mesure rattachée à la température moyenne de la scène observée. Ce sont des radiomètres à injection de bruit (*Noise Injection Radiometer*), de type radiomètre de DICKE. Ils permettent notamment la mesure de la température d'antenne et seront utilisés lors des phases de calibration de chaque récepteur.

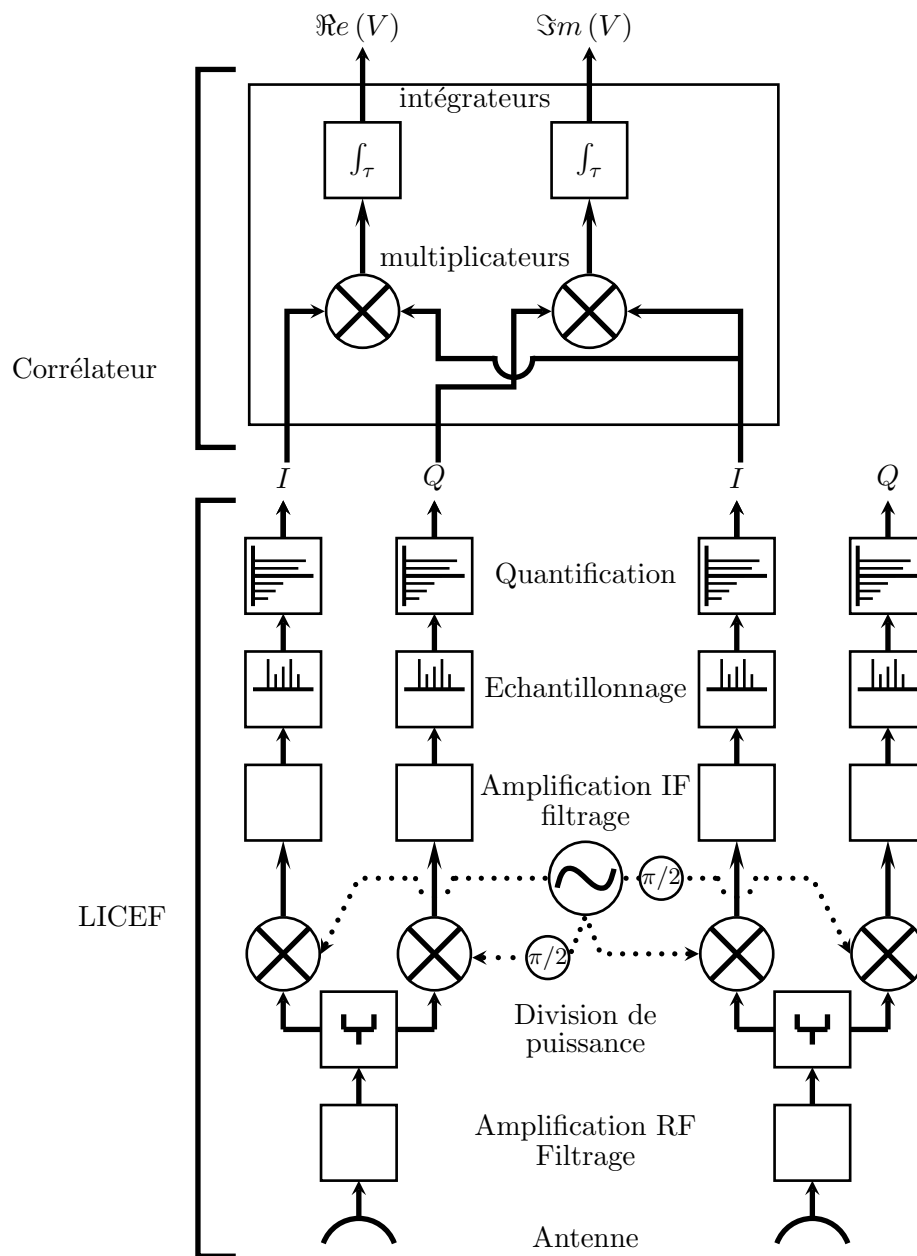


FIG. 3.3 – Schéma simplifié résumant les différents traitements opérés sur les signaux délivrés par deux antennes dans le but final d'obtenir une mesure de la visibilité.

3.3 Relation fondamentale entre les visibilitées et la température de brillance

3.3.1 Les gains d'antennes

Dès lors qu'un instrument réaliste est considéré, il est naturel d'introduire dans la relation (3.20) une pondération de la température de brillance par les gains des antennes considérées. Ainsi, pour deux antennes A_k et A_l données dont les gains, en tension, respectifs sont notés $F_k(\xi, \eta)$ et $F_l(\xi, \eta)$ et les angles solides équivalents Ω_k et Ω_l , la relation entre la visibilité V_{kl} correspondante et la température de brillance T_b de la scène observée devient :

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} F_k(\xi, \eta) F_l^*(\xi, \eta) T_b(\xi, \eta) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad (3.21)$$

avec (u, v) la fréquence angulaire définie par la distance entre les antennes, la notation F^* signalant le complexe conjugué du gain.

Les radiomètres à synthèse d'ouverture offrent la possibilité de mesurer le champ incident sous différentes polarisations. Ainsi, chaque antenne est équipée de deux ports orthogonaux situés dans le plan de l'instrument, le port X et le port Y . Chacun permet la mesure d'une composante du champ incident. Dans ce qui suit, on considérera que toutes les antennes fonctionnent sur le même port. Le cas dit de polarisation totale dans lequel les antennes d'un même couple fonctionnent sur des ports différents fera l'objet d'une étude spécifique.

Les visibilitées sont donc obtenues par les produits de corrélations suivants :

$$V_{kl}^{XX} \propto \langle E_k^X E_l^{X*} \rangle \quad (3.22)$$

$$\text{ou } V_{kl}^{YY} \propto \langle E_k^Y E_l^{Y*} \rangle \quad (3.23)$$

Les gains F de la relation (3.21) désignent alors les gains co-polaires, et T , la composante de la température de brillance selon X ou Y .

3.3.2 Le phénomène de décorrélation spatiale

La relation (3.20) a été établie en supposant que le signal était mesuré à la fréquence centrale f_0 (ou à la longueur d'onde $\lambda = c/f$ avec c , vitesse de la lumière). Or, le signal est en fait filtré autour de f_0 et pour une bande passante B . Pour tenir compte de cette remarque et en supposant que les filtres sont parfaits (filtres rectangles centrés en f_0), la relation (3.20) est sommée pour $f_0 - B/2 \leq f \leq f_0 + B/2$, en rappelant l'expression des fréquences angulaires $u = d_1/\lambda$ et $v = d_2/\lambda$:

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{B} \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \left\{ \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} T_b(\xi, \eta) e^{-\frac{2j\pi f}{c}(d_1\xi + d_2\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} \right\} df \quad (3.24)$$

où le coefficient $\frac{1}{B}$ est introduit par la normalisation. Seule l'exponentielle dépend de la fréquence, la fonction $I_{kl}(\xi, \eta)$ définie ci-dessous est donc calculée séparément (pour ne pas alourdir la

notation, la dépendance en u et v est rappelée par les indices kl) :

$$I_{kl}(\xi, \eta) = \frac{1}{B} \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} e^{-\frac{2j\pi f}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} df \quad (3.25)$$

$$I_{kl}(\xi, \eta) = -\frac{1}{B} \frac{1}{\frac{2j\pi}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \left[e^{-\frac{2j\pi f}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \right]_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \quad (3.26)$$

$$I_{kl}(\xi, \eta) = \frac{1}{B} \frac{e^{-\frac{2j\pi f_0}{c}(d_1\xi+d_2\eta)}}{\frac{2j\pi}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \left\{ e^{+\frac{2j\pi B/2}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} - e^{-\frac{2j\pi B/2}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \right\} \quad (3.27)$$

$$I_{kl}(\xi, \eta) = e^{-2j\pi f_0 \frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c}} \text{sinc} \left(B \frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c} \right) \quad (3.28)$$

La relation (3.17) permet d'identifier la quantité $\frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c}$ comme le retard géométrique noté τ_{kl}^g : l'onde plane issue d'un point de la scène observée atteint une antenne du couple avec un retard τ_{kl}^g par rapport à l'autre. Il est donc défini par les relations :

$$\tau_{kl}^g(\xi, \eta) = \frac{(d_1\xi+d_2\eta)}{c} \quad (3.29)$$

$$\tau_{kl}^g(\xi, \eta) = \frac{(u\xi+v\eta)}{f_0} \quad (3.30)$$

La fonction $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$, exprimant le phénomène de « lavage des franges » (*fringe wash*) est alors introduite :

$$\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) = \text{sinc}(B\tau_{kl}^g) \quad (3.31)$$

En intégrant les expressions (3.31) et (3.28) dans la relation (3.24), on obtient :

$$V_{kl}(u, v) = \iint_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leq 1} T_b(\xi, \eta) \tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) e^{-\frac{2j\pi f_0}{c}(d_1\xi+d_2\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} \quad (3.32)$$

Le phénomène de *fringe-wash* tient son nom de son rôle dans la dégradation du rapport signal sur bruit. En effet, il intervient comme un coefficient (complexe dès lors que les filtres ne sont pas identiques), dont le module est inférieur à 1 et qui va diminuer l'amplitude du signal T_b . Ses caractéristiques principales sont facilement lisibles dans la relation (3.29). Le rapport signal sur bruit est d'autant plus dégradé ($\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$ est d'autant plus proche de 0) que :

- la distance entre les antennes est grande : le phénomène de décorrélation spatiale est donc très pénalisant pour les grandes lignes de bases, c.-à-d. pour les petits détails de la scène observée,

- les cosinus directeurs sont grands : le phénomène de décorrélation spatiale est donc très pénalisant pour les points situés au bords du champ de vue.

La définition de la fonction $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$ pour des filtres quelconques est :

$$\hat{r}_{kl}(\tau_{kl}^g) = \frac{1}{\sqrt{B_k B_l}} e^{-2j\pi\tau_{kl}^g f_0} \int_0^{+\infty} H_k(f) H_l^*(f) e^{2j\pi\tau_{kl}^g f} df \quad (3.33)$$

avec H_i la fonction caractéristique du filtre i dont la bande passante B_i est définie par :

$$B_i = \int_0^{+\infty} |H_i(f)|^2 df \quad (3.34)$$

Pour des filtres rectangles, avec des largeurs de bande et des fréquences centrales différentes, il existe une expression analytique pour la fonction de fringe-wash [5]. On considère alors la fonction caractéristique suivante :

$$|H_i(f)| = \begin{cases} 1 & \text{pour } f_i - B_i/2 \leq f \leq f_i + B_i/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\text{et } H_i(f) = |H_i(f)| e^{j(\tau_i f + \phi_i)} \quad (3.36)$$

où f_i et B_i désigne la fréquence centrale et la bande passante du filtre i dont la phase varie linéairement avec la fréquence, τ_i étant le retard de groupe et ϕ_i la phase au retard nul.

$$\begin{aligned} f_a &= \max \{f_1 - B_1/2 - f_0, f_2 - B_2/2 - f_0\} \\ f_b &= \min \{f_1 + B_1/2 - f_0, f_2 + B_2/2 - f_0\} \\ \hat{r}_{kl}(\tau_{kl}^g) &= e^{j(\phi_1 - \phi_2)} e^{2j\pi f_0(\tau_1 - \tau_2)} e^{-2j\pi(\tau_1 f_1 - \tau_2 f_2)} e^{j\pi(\tau_1 - \tau_2 + \tau_{kl}^g)(f_a + f_b)} \\ &\quad \frac{\text{sinc}((\tau_1 - \tau_2 + \tau_{kl}^g)(f_b - f_a))}{\sqrt{B_1 B_2}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.3.3 Relation Fondamentale

Les résultats précédents permettent donc d'établir la relation suivante entre les visibilitées V et la température de brillance de la scène observée T_b , dans laquelle les caractéristiques instrumentales sont prises en compte :

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} <= 1} F_k(\xi, \eta) F_l^*(\xi, \eta) T_b(\xi, \eta) \tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} \quad (3.38)$$

où $F_k(\xi, \eta)$ et $F_l(\xi, \eta)$ désignent les gains des antennes k et l et $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta)$ est la fonction de décorrélation spatiale.

Biographie(s)

Biographie 3.1: ZERNIKE, Frits

(16 Juillet 1888, Amsterdam, Pays-Bas - 1966, Naarden, Pays-Bas)



Deuxième fils d'une famille comptant six enfants, Frits Zernike est le fils de deux enseignants en mathématiques. Enfant, curieux et ingénieux, il recrée un laboratoire à partir d'objets amassés ici ou là et se lance dans la photographie couleur, synthétisant son propre éther et assemblant, à l'aide d'un tourne-disque et d'un horloge, un observatoire miniature lui permettant de photographier les comètes.

Il entre à l'université d'Amsterdam en 1905 et ses travaux en mathématiques sont récompensés dès 1908 par une médaille d'or de l'université de Groningen. Le jury de la Société Hollandaise des Sciences, composé entre autres de LORENTZ et VAN DER WALLS, le récompense en 1912 pour ses travaux sur l'opalescence, qui formera la base de sa thèse (1916). En 1915, il obtient son premier poste à l'université de Groningen où il est fait professeur en 1920.

A partir de 1930, il oriente ses recherches vers l'optique. C'est à cette date qu'il fait sa grande découverte du phénomène de contraste de phase mais ce n'est qu'en 1941, sous l'occupation allemande des Pays-Bas, que sont développés les premiers microscopes fonctionnant sur ce principe.

Pour cette découverte, il est récompensé par la Microscopical Royal Society, la médaille Rumford de la Royal Society et enfin, le prix Nobel de physique en 1953.

Bibliographie

- [1] Pieter Hendrike VAN CITTERT : *Z. Physik*, 69:298, 1931.
- [2] Pieter Hendrike VAN CITTERT : Die wahrscheinliche schwingungsverteilung in einer von einer lichtquelle direkt oder mittels einer linse beleuchteten ebene. *Physica*, 1:201–210, 1934.
- [3] Frits ZERNIKE : The concept of degree of coherence and its application to optical problems. *Physica*, 5:785–795, 1938.
- [4] M. MARTIN-NEIRA, P. PIIRONEN, S. RIBO, E. PANARO, J. FONT-ROSELLO, J. MARTI-CANALES, I. ZAYER, A. MARTIN-POLEGRE, P. IVERSEN, A. RIVADA, R. ROUMEAS, M. AGUIRRE et P. SILVESTRIN : The miras demonstrator pilot project - toward smos. *ESA Bulletin*, (111B):123–131, Août 2002.
- [5] B. PICARD, E. ANTERRIEU, G. CAUDAL et P. WALDTEUFEL : Impact of the fringe washing function on the spatial resolution and on the radiometric sensitivity of the smos instrument. *Proc. of IGARSS'03*, pages 3067–3069, 2003.

Deuxième partie

Traitements des données interférométriques

Le traitement des données interférométriques fournies par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture demande un cadre géométrique rigoureux. La configuration du réseau va déterminer les caractéristiques de la bande passante sur laquelle est échantillonnée la fonction de cohérence spatiale et par conséquent le maillage sur lequel se fera la reconstruction. L'espacement entre les antennes va, lui, déterminer la géométrie du champ de vue reconstruit véritablement exploitable. D'autre part, si le maillage est régulier dans le repère des antennes, il ne l'est plus dans le repère terrestre : dans le cas particulier des cartes de température de brillance à bande passante limitée, une méthode d'interpolation adaptée au traitement des mesures instrumentales des RISO permet de palier à ce problème.

Lorsque le cadre géométrique est fixé, il est possible de développer des fenêtres d'apodisation 2D qui vont contribuer à diminuer les oscillations de GIBBS causées par une coupure abrupte du signal au bord de la bande passante. Une adaptation de la forme de ces fenêtres à la forme spécifique de cette bande passante permet d'améliorer les caractéristiques de ces fenêtres.

L'apodisation classique n'est pas suffisante face à une contrainte imposée par le traitement des cartes de température de brillance pour l'estimation des paramètres géophysiques : la résolution spatiale doit être constante dans tout le champ reconstruit, ce qui n'est pas le cas lors du passage au référentiel terrestre. Le multi-fenêtrage, appelé aussi « *strip adaptive processing* », offre une solution permettant d'obtenir une résolution isotrope dans le champ reconstruit.

Chapitre 4

Cadre mathématique

Sommaire

4.1	Couvertures fréquentielles expérimentales et grilles d'échantillonnage	63
4.1.1	Configuration en U et maillage cartésien	65
4.1.2	Configuration en Y et maillage hexagonal	69
4.2	Espaces et opérateurs	74
4.2.1	Espaces des objets, des données et sous-espaces associés	74
4.2.2	Les opérateurs clés	75
4.3	G, opérateur de modélisation	76
4.3.1	Action des opérateurs G et G*	76
4.3.2	Propriétés de la matrice G	77

*« - La Réponse ? La Réponse à quoi ?
- A la Vie ! A l'Univers ! et au Reste ! »
Computer-Un ménagea un instant de réflexion.
« C'est coton
- Mais peux-tu le faire ?
- Oui, [...] mais il va falloir que j'y réfléchisse.
Toutefois, le déroulement de ce programme va
prendre un petit moment...Sept millions et demi
d'années. »...*

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

4.1 Couvertures fréquentielles expérimentales et grilles d'échantillonnage

Les fréquences spatiales angulaires pour lesquelles est échantillonnée la fonction de cohérence spatiale sont déterminées par la position relative des antennes du réseau interférométrique. La géométrie de ce réseau conditionne donc les caractéristiques de la grille d'échantillonnage sur les noeuds de laquelle peuvent coïncider les mesures interférométriques [1]. De plus, les dimensions limitées de l'instrument vont confiner les fréquences spatiales des mesures interférométriques à l'intérieur d'une région bornée du domaine de FOURIER. L'échantillonnage du signal mesuré dans ce domaine et la périodisation de la couverture fréquentielle vont amener à définir un maillage périodique à deux dimensions sur lequel se fera la reconstruction.

Deux géométries envisageables pour un réseau destiné à l'observation de la Terre sont étudiées ci-dessous : une géométrie en Y, conduisant à un échantillonnage sur un maillage hexagonal et une géométrie en U, conduisant à un échantillonnage sur un maillage cartésien. Les deux grilles étudiées constituent les deux seuls maillages périodiques permettant de paver tout le plan. D'autres géométries, en T ou en L par exemple, changent la forme de la couverture expérimentale mais pas le maillage sous-jacent.

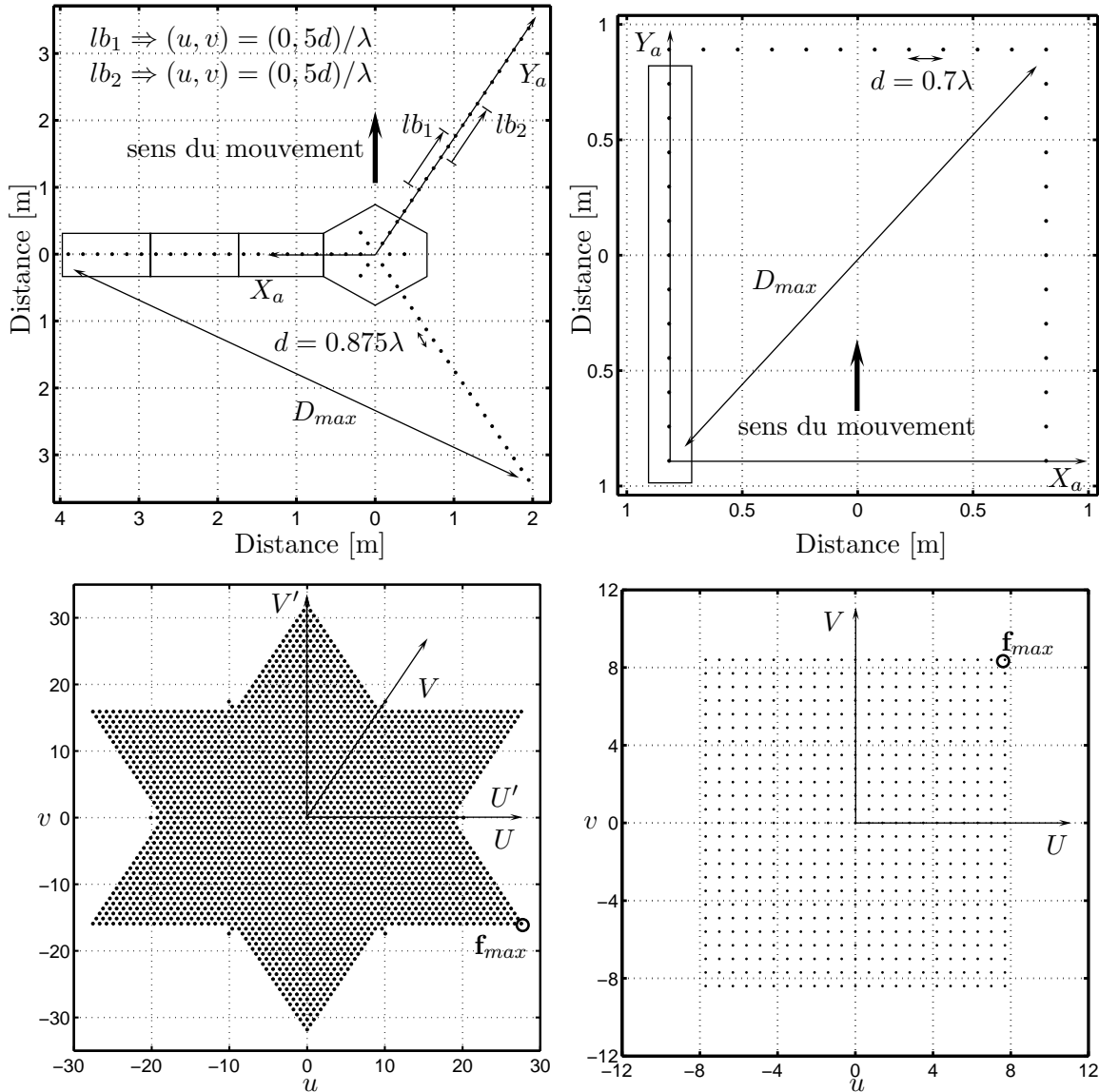


FIG. 4.1 – Deux configurations de réseau interférométrique conduisant à la définition de deux maillages différents. A gauche, une configuration en Y, proche de celle de MIRAS (en haut) et sa couverture fréquentielle caractéristique en étoile (en bas) définie sur un maillage hexagonal. A droite, une configuration en U, proche de celle du HUT2D, et sa couverture rectangulaire définie sur un maillage cartésien.

4.1.1 Configuration en U et maillage cartésien

J'ai été amené au cours de cette thèse à développer des outils de simulation et des méthodes de reconstruction adaptés à une configuration proche de celle de l'instrument HUT2D : 3 bras comportant chacun 12 antennes sont disposés en U, l'espace entre les antennes valant $d = 0.7\lambda$ [2]. J'expose ci-dessous les principales relations permettant de définir le domaine de FOURIER et le domaine spatial pour un maillage cartésien.

a. Domaine de Fourier

Les lignes de base, calculées à partir des positions relatives des antennes, définissent, dans le domaine de FOURIER, les fréquences spatiales angulaires pour lesquelles seront effectuées les mesures interférométriques. Les dimensions finies de l'instrument confinent les mesures à l'intérieur d'une couverture fréquentielle expérimentale H , dont la forme est caractéristique d'une géométrie du réseau interférométrique (voir Fig. 4.1, en bas). Une propriété importante des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture émerge alors : ce sont des instruments à bande passante limitée.

On peut aussi d'ores et déjà remarquer que deux différents couples d'antennes peuvent engendrer la même fréquence spatiale (voir les lignes de bases lb_1 et lb_2 sur la figure 4.1 en haut à gauche). On distinguera alors le nombre de lignes de base et donc de mesures instrumentales, du nombre de fréquences à l'intérieur de H .

Les mesures réalisées par un réseau en U sont effectuées à des fréquences spatiales coïncidant avec les noeuds d'un maillage cartésien. La couverture fréquentielle expérimentale H a la forme d'un rectangle, le maillage cartésienne qui la prolonge étant caractérisé par :

$$\mathcal{H} = \{ \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{u} + q_2 \mathbf{v}, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}, \quad (4.1)$$

et les vecteurs de translation \mathbf{u} et \mathbf{v} de ce réseau sont tels que :

$$\mathbf{u} = (\delta u, 0) \text{ et } \mathbf{v} = (0, \delta u) \text{ dans } (U, V) \quad (4.2)$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \delta u \quad (4.3)$$

avec $\delta u = d/\lambda = 0.7$.

La fréquence la plus grande \mathbf{f}_{max} est déterminée par la plus grande distance D_{max} entre deux antennes :

$$D_{max} = d\sqrt{(L-1)^2 + L^2} \quad \text{avec } L, \text{ nombre d'antenne par bras} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{f}_{max} = ((L-1)\delta u, L\delta u) \quad \text{dans } (U, V) \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{f}_{max}\| = \delta u\sqrt{(L-1)^2 + L^2} \quad (4.6)$$

La taille de la maille élémentaire du réseau cartésien est choisie de façon à contenir entièrement la couverture fréquentielle H . De plus, pour faciliter l'utilisation d'algorithmes de transformée de FOURIER rapide (FFT pour *Fast Fourier Transform*), N est choisi comme une puissance de 2. Le réseau cartésien est alors caractérisé par :

$$N\mathcal{H} = \{ \mathbf{U}_{\mathbf{Q}} = Q_1 \mathbf{U} + Q_2 \mathbf{V}, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.7)$$

avec $\mathbf{U} = N\mathbf{u}$ et $\mathbf{V} = N\mathbf{v}$, les vecteurs de translation.

Etant données les dimensions de l'instrument considéré, la fréquence la plus grande est telle que $\|\mathbf{f}_{max}\| \approx 11.40$ et une maille élémentaire comprenant $N \times N = 32 \times 32$ pixels a une taille

suffisante pour contenir la bande passante. Toutefois, afin d'obtenir une représentation plus fine des résultats présentés par la suite, le nombre de pixels est fixé à $N \times N = 64 \times 64$.

La figure 4.2 illustre les relations précédentes pour un instrument comportant 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\sigma_{\mathbf{U}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(N\mathcal{H})$ des réseaux périodiques sont respectivement égales à $(\delta u)^2$ et $(\Delta u)^2$ où $\Delta u = N \delta u$.

b. Domaine spatial

C'est dans ce domaine que les cartes de températures de brillance sont reconstruites. Considérons alors \mathcal{H}^* le réseau réciproque de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}^* = \{ \boldsymbol{\Xi}_{\mathbf{P}} = P_1 \boldsymbol{\Xi} + P_2 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.8)$$

Les deux vecteurs de translation $\boldsymbol{\Xi}$ et $\boldsymbol{\eta}$ sont tels que $\|\boldsymbol{\Xi}\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \Delta \xi$, où $\Delta \xi$ joue le rôle dual de δu . D'après la définition des réseaux réciproques [3], ils satisfont les relations d'orthogonalité suivantes : $\boldsymbol{\Xi} \cdot \mathbf{u} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{v} = 1$ et $\boldsymbol{\Xi} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{u} = 0$.

La cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N , le réseau réciproque de $N\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^*/N = \{ \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}} = p_1 \boldsymbol{\xi} + p_2 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.9)$$

et les vecteurs $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Xi}/N$ et $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}/N$ sont tels que :

$$\boldsymbol{\xi} = (\delta \xi, 0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = (0, \delta \xi) \quad \text{dans} \quad (\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.10)$$

$$\|\boldsymbol{\xi}\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \delta \xi = \Delta \xi / N \quad (4.11)$$

où $\delta \xi$ joue le rôle réciproque de Δu .

La figure 4.3 illustre les relations précédentes pour un instrument comportant 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\boldsymbol{\xi}}$ et $\sigma_{\boldsymbol{\Xi}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ de ces réseaux périodiques cartésiens sont respectivement égales à $(\delta \xi)^2$ et $(\Delta \xi)^2$.

c. Relations caractéristiques

D'après une propriété bien connue des réseaux réciproques, le produit des surfaces des cellules élémentaires de deux réseaux réciproques est unitaire : $\sigma_{\mathbf{u}} \sigma_{\boldsymbol{\Xi}} = \sigma_{\mathbf{U}} \sigma_{\boldsymbol{\xi}} = 1$. Par conséquent, les relations entre l'intervalle d'échantillonnage de FOURIER δu et l'étendue du champ de vue $\Delta \xi$ d'une part et la largeur de bande spectrale Δu et le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial $\delta \xi$ d'autre part sont telles que :

$$\Delta \xi \delta u = \Delta u \delta \xi = 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta \xi = N \delta \xi, \\ \Delta u = N \delta u. \end{cases} \quad (4.12)$$

Pour $\delta u = 0.7$ et $N = 64$, l'étendue du champ de vue vaut $\Delta \xi \approx 1.43$ et le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial vaut $\delta \xi \approx 0.02$.

d. Grilles d'échantillonnage

Soient les N^2 entiers,

$$\mathbb{G}(N\mathcal{H}) = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in \mathcal{C}(N\mathcal{H}) \}. \quad (4.13)$$

$$\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) = \{ \mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 : \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^*) \}, \quad (4.14)$$

Comme $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ est échantillonné aux noeuds de $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$, $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ n'est autre que la grille spatiale bornée représentée sur la figure 4.3. La surface des pixels de cette grille est bien entendu égale à σ_{ξ} . De même, $\mathbb{G}(N\mathcal{H}) \delta u$ est la grille de FOURIER bornée représentée sur la figure 4.2, ici la surface de la cellule élémentaire $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ est bien sûr égale à $\sigma_{\mathbf{u}}$.

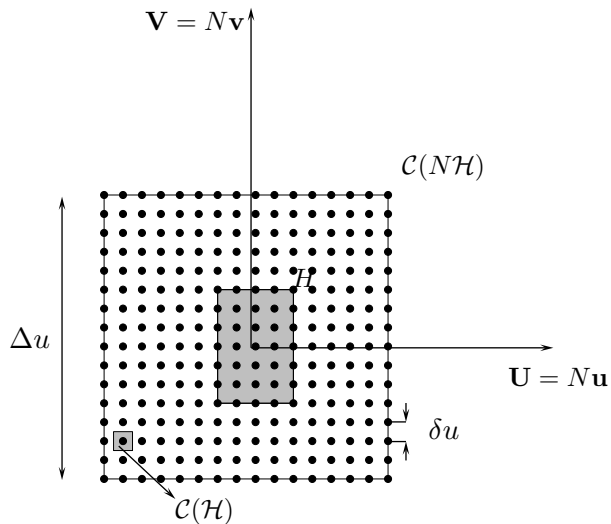


FIG. 4.2 – Cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$ échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H} , et couverture fréquentielle expérimentale H d'un réseau interférométrique en forme de U composé de 3 antennes pour chaque bras. Ici, N est égal à 16 de sorte que la couverture fréquentielle expérimentale H est contenue dans une cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$: $\delta u = d/\lambda$ est l'intervalle d'échantillonnage de FOURIER, et $\Delta u = N \delta u$ est la largeur de bande spectrale.

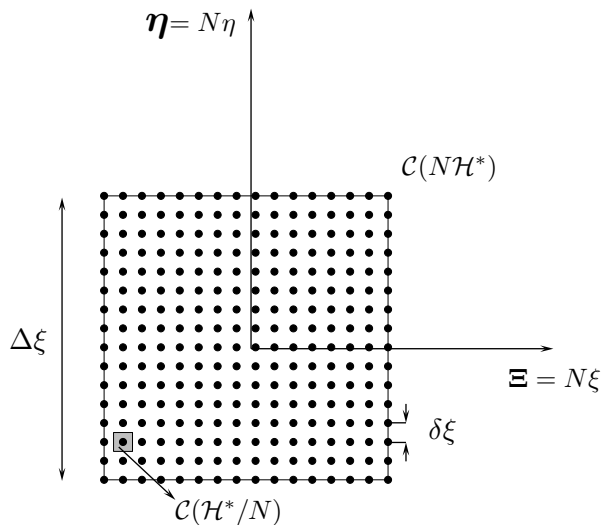


FIG. 4.3 – Cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N . Là encore, N est égal à 16, $\delta\xi$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial, et $\Delta\xi = N \delta\xi$ est l'étendue du champ de vue.

4.1.2 Configuration en Y et maillage hexagonal

La figure 4.1 montre un réseau interférométrique en Y avec une configuration, proche de celle de l'instrument MIRAS, comportant 21 antennes « avant » disposées régulièrement sur chacun des 3 bras (18 antennes sur 3 segments déployables et 3 antennes sur le « hub » central) et 2 antennes « arrières », appelées aussi « redondantes ». L'espace d entre les antennes est tel que $d = 0.875\lambda$. L'essentiel des caractérisations des grilles d'échantillonnage pour une configuration en Y a été défini par Anterrieu *et al.*[4].

a. Domaine de Fourier

Pour un réseau interférométrique en Y, les fréquences spatiales (u, v) , confinées à l'intérieur d'une bande passante H en forme d'étoile, coïncident avec les noeuds d'une grille hexagonale [5]. Le traitement des données interférométriques se fera alors sur des grilles hexagonales [6] [7].

Le choix d'un repère orienté selon (U, V) est naturel dès lors que le maillage est hexagonal. Toutefois, il peut être utile d'utiliser un repère orthonormé. Le passage d'un système d'axe à l'autre se fait donc à l'aide des relations suivantes :

$$U' = U + \frac{V}{2} \quad \text{et} \quad V' = \frac{\sqrt{3}}{2}V \quad (4.15)$$

$$U = U' - \frac{1}{\sqrt{3}}V' \quad \text{et} \quad V = \frac{2}{\sqrt{3}}V' \quad (4.16)$$

avec $\delta u = d/\lambda = 0.875$.

La grille hexagonale \mathcal{H} prolongeant la couverture fréquentielle expérimentale H est caractérisée ainsi :

$$\mathcal{H} = \{ \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{u} + q_2 \mathbf{v}, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}, \quad (4.17)$$

où les deux vecteurs de translation \mathbf{u} et \mathbf{v} de ce réseau sont tels que :

$$\mathbf{u} = (\delta u, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = (0, \delta u) \quad \text{dans } (U, V) \quad (4.18)$$

$$\mathbf{u} = (\delta u, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = (\delta u/2, \delta u\sqrt{3}/2) \quad \text{dans } (U', V') \quad (4.19)$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \delta u \quad (4.20)$$

La fréquence la plus grande \mathbf{f}_{max} , que l'on retrouve aux pointes de l'étoile, est déterminée par la plus grande distance D_{max} entre deux antennes :

$$D_{max} = \sqrt{3}Ld \quad \text{avec } L, \text{ nombre d'antennes par bras} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{f}_{max} = \left(\frac{D_{max}}{\sqrt{3}\lambda}, \frac{D_{max}}{\sqrt{3}\lambda} \right) = (L\delta u, L\delta u) \quad \text{dans } (U, V) \quad (4.22)$$

$$\mathbf{f}_{max} = \left(\frac{3D_{max}}{2\sqrt{3}\lambda}, \frac{D_{max}}{2\lambda} \right) = \left(\frac{3L\delta u}{2}, \frac{\sqrt{3}L\delta u}{2} \right) \quad \text{dans } (U', V') \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{f}_{max}\| = \sqrt{3}L\delta u \quad (4.24)$$

Le réseau est alors caractérisé par :

$$N\mathcal{H} = \{ \mathbf{U}_{\mathbf{Q}} = Q_1 \mathbf{U} + Q_2 \mathbf{V}, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Z}^2 \}. \quad (4.25)$$

avec $\mathbf{U} = N\mathbf{u}$ et $\mathbf{V} = N\mathbf{v}$, les vecteurs de translation.

Etant données les dimensions de l'instrument considéré, la norme de la fréquence la plus grande vaut $\|\mathbf{f}_{max}\| = 31.8$ et une maille élémentaire comprenant $N \times N = 64 \times 64$ pixels a

une taille suffisante pour contenir la bande passante. Toutefois, la réorganisation du stockage des données de la maille élémentaire (voir paragraphe d. de cette section) impose de choisir une maille plus étendue avec $N \times N = 128 \times 128$ pixels.

Afin d'illustrer les relations précédentes, la cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$ échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H} est montrée dans la figure 4.4, pour un instrument ne comptant que 3 antennes par bras. Les surfaces $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\sigma_{\mathbf{U}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(N\mathcal{H})$ des réseaux périodiques sont respectivement égales à $(\delta u)^2 \sqrt{3}/2$ et $(\Delta u)^2 \sqrt{3}/2$ où $\Delta u = N \delta u$.

b. Domaine spatial

Considérons \mathcal{H}^* le réseau réciproque de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}^* = \{ \Xi_{\mathbf{P}} = P_1 \Xi + P_2 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{P} = (P_1, P_2) \in \mathbb{Z}^2 \} . \quad (4.26)$$

Les deux vecteurs de translation Ξ et $\boldsymbol{\eta}$ sont tels que $\|\Xi\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \Delta \xi$, où $\Delta \xi$ joue le rôle dual de δu . Dans ce qui suit, la cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N , le réseau réciproque de $N\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^*/N = \{ \xi_{\mathbf{p}} = p_1 \xi + p_2 \boldsymbol{\eta}, \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 \} . \quad (4.27)$$

les vecteurs $\xi = \Xi/N$ et $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}/N$ sont tels que :

$$\xi = (\delta \xi, 0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = (0, \delta \xi) \quad \text{dans} \quad (\Xi, \boldsymbol{\eta}) \quad (4.28)$$

$$\xi = (\delta \xi \sqrt{3}/2, \delta \xi/2) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = (0, \delta \xi) \quad \text{dans} \quad (\Xi', \boldsymbol{\eta}') \quad (4.29)$$

$$\|\xi\| = \|\boldsymbol{\eta}\| = \delta \xi = \Delta \xi/N \quad (4.30)$$

où $\delta \xi$ joue le rôle réciproque de Δu . Ils satisfont aussi aux relations d'orthogonalité suivantes : $\xi \cdot \mathbf{U} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{V} = 1$ et $\xi \cdot \mathbf{V} = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{U} = 0$.

Afin d'illustrer les relations précédentes, une cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N est montrée sur la figure 4.5, pour un instrument ne comptant que 3 antennes par bras. Les surfaces σ_{ξ} et σ_{Ξ} des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ de ces réseaux périodiques hexagonaux sont respectivement égales à $(\delta \xi)^2 \sqrt{3}/2$ et $(\Delta \xi)^2 \sqrt{3}/2$.

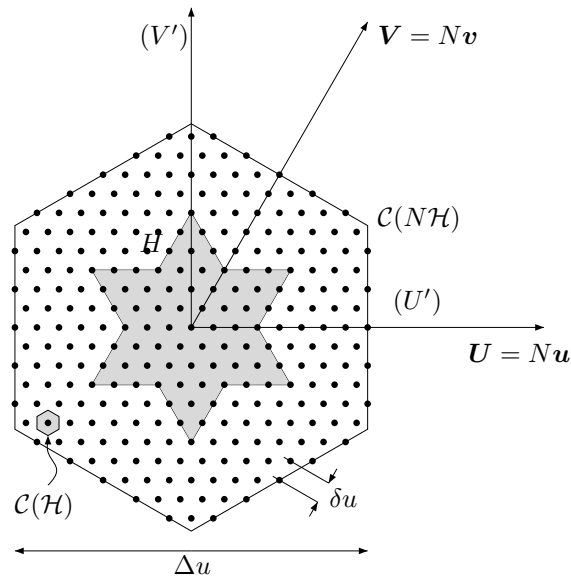


FIG. 4.4 – Cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$ échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H} , et couverture fréquentielle expérimentale H d'un réseau interférométrique en forme de Y composé de 3 antennes pour chaque bras et d'une antenne centrale. Ici, N est égal à 16 de sorte de que la couverture fréquentielle expérimentale H est contenue dans une cellule élémentaire de $N\mathcal{H}$: $\delta u = d/\lambda$ est l'intervalle d'échantillonnage de FOURIER, et $\Delta u = N \delta u$ est la largeur de bande spectrale.

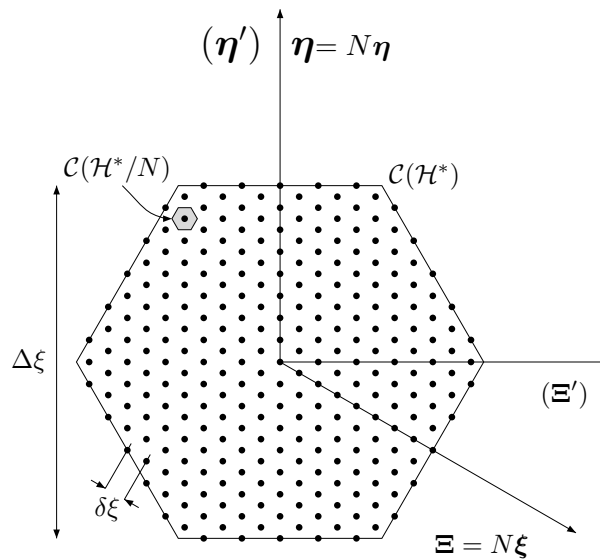


FIG. 4.5 – Cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux noeuds de \mathcal{H}^*/N . Là encore, N est égal à 16, $\delta \xi$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial, et $\Delta \xi = N \delta \xi$ est l'étendue du champ de vue.

c. Relations caractéristiques

De l'expression des aires des cellules élémentaires de chacun des réseaux et de la relation entre les surfaces des réseaux réciproques, il vient dans le cas spécifique des réseaux périodiques hexagonaux :

$$\Delta\xi \delta u = \Delta u \delta\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ avec } \begin{cases} \Delta\xi = N \delta\xi, \\ \Delta u = N \delta u. \end{cases} \quad (4.31)$$

Pour $\delta u = 0.875$ et $N = 128$, l'étendue du champ de vue vaut $\Delta\xi \approx 1.32$ et le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial vaut $\delta\xi \approx 0.01$

d. Grilles d'échantillonnage

Soient les N^2 entiers,

$$\mathbb{G}(N\mathcal{H}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in \mathcal{C}(N\mathcal{H})\}. \quad (4.32)$$

$$\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 : \xi_{\mathbf{p}} \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^*)\}, \quad (4.33)$$

Comme $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ est échantillonné aux noeuds de $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/N)$, $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ n'est autre que la grille spatiale bornée représentée sur la figure 4.5. La surface des pixels de cette grille est bien entendu égale à σ_{ξ} . De même, $\mathbb{G}(N\mathcal{H})\delta u$ est la grille de FOURIER bornée représentée sur la figure 4.4, ici la surface de la cellule élémentaire $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ est bien sûr égale à $\sigma_{\mathbf{u}}$.

e. Stockage des données et Transformée de Fourier Rapide sur un maillage hexagonal

Les grilles ne sont pas adaptées à l'utilisation des algorithmes de Transformée de FOURIER Rapide (FFT), développés pour des grilles cartésiennes. Une solution consiste en l'implémentation d'un algorithme spécifiquement étudié pour des grilles hexagonales [8]. Toutefois, une telle approche condamne son utilisateur à ne pas profiter des avancées faites sur les FFT pour les grilles cartésiennes.

Une autre solution est de redéfinir la maille élémentaire, en utilisant non pas un hexagone mais le rhomboïde, maille élémentaire traditionnelle des maillages hexagonaux en cristallographie [3]. La réorganisation des données échantillonnées sur les hexagones $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ et $\mathbb{G}(N\mathcal{H})\delta u$ permet de construire les losanges $\mathbb{G}'(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ et $\mathbb{G}'(N\mathcal{H})\delta u$, mieux adaptés au calcul matriciel et définis ainsi :

$$\mathbb{G}'(N\mathcal{H}) = \{\mathbf{q}' = \mathbf{q} \text{ modulo } N, \mathbf{q} \in \mathbb{G}(N\mathcal{H})\} \quad (4.34)$$

$$\mathbb{G}'(\mathcal{H}^*) = \{\mathbf{p}' = \mathbf{p} \text{ modulo } N, \mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\} \quad (4.35)$$

La FFT est appliquée sur ces grilles (voir Fig. 4.6 et 4.7) et les résultats sont réorganisés pour retrouver l'hexagone de la grille réciproque, méthode permettant de profiter des dernières avancées sur les algorithmes standards pour les grilles cartésiennes [4].

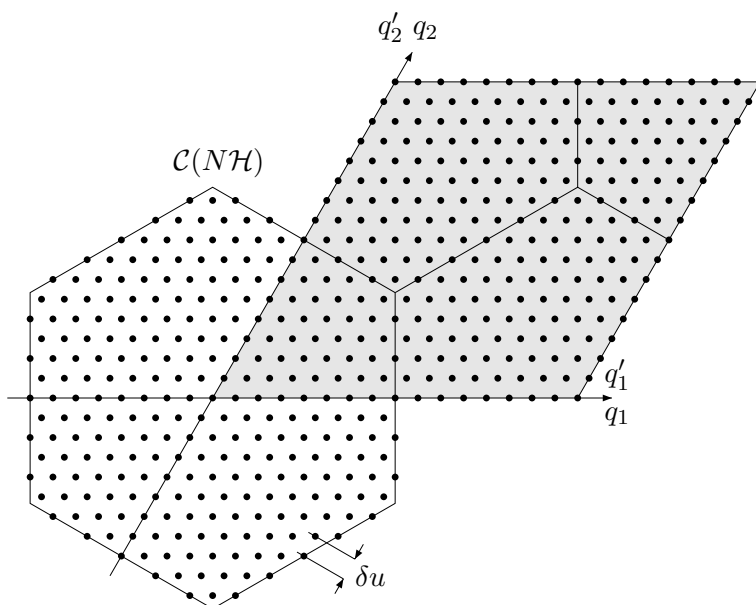


FIG. 4.6 – Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine de FOURIER.

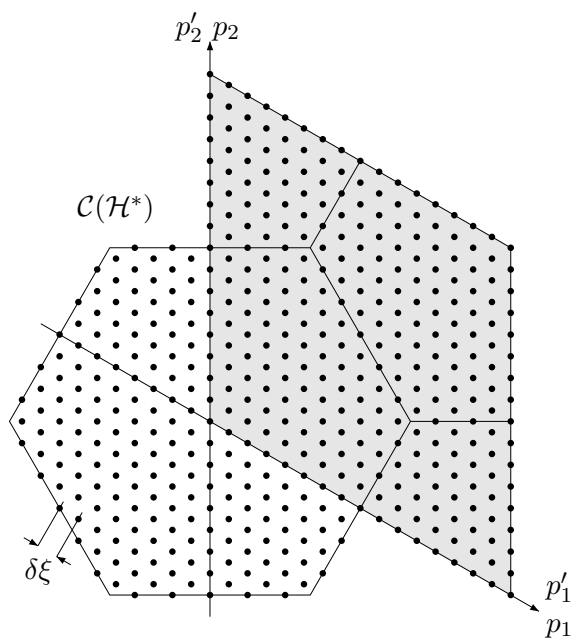


FIG. 4.7 – Réorganisation du stockage des données échantillonnées sur une grille hexagonale dans le domaine spatial.

4.2 Espaces et opérateurs

Les paragraphes suivants décrivent les espaces de travail entre lesquels seront définis les opérateurs intervenant dans la reconstruction [4] [9].

4.2.1 Espaces des objets, des données et sous-espaces associés

a. E espace des objets

Il s'agit de l'espace des fonctions T de distribution des températures de brillance échantillonnées qui prennent leurs valeurs $T_{\mathbf{p}} \equiv T(\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}})$ aux noeuds $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{p}}$ de la grille spatiale $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ [10] [11].

L'espace dual \widehat{E} est l'image de E par l'opérateur de transformée de FOURIER. Autrement dit, c'est l'espace des transformées de FOURIER \widehat{T} prenant leurs valeurs $\widehat{T}_{\mathbf{q}} \equiv \widehat{T}(\mathbf{u}_{\mathbf{q}})$ aux noeuds $\mathbf{u}_{\mathbf{q}}$ de la grille de FOURIER $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$.

b. \mathcal{E} , sous espace de E des fonctions à bande passante limitée.

Les fonctions \mathcal{T} à bande limitée dans H , définies comme étant les fonctions dont la transformée de FOURIER $\widehat{\mathcal{T}}$ est confinée dans la couverture fréquentielle expérimentale H , jouent un rôle important dans la synthèse de FOURIER [11]. Elles appartiennent au sous-espace \mathcal{E} de E , dont l'image par l'opérateur de transformée de FOURIER est le sous-espace $\widehat{\mathcal{E}}$ de \widehat{E} . Les fonctions $\widehat{\mathcal{T}}$ prennent leurs valeurs $\widehat{\mathcal{T}}_{\mathbf{q}} \equiv \widehat{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathbf{q}})$ aux noeuds $\mathbf{u}_{\mathbf{q}}$ de la grille de FOURIER uniquement contenue dans H .

c. F , espace des données

Les fréquences spatiales \mathbf{u}_{kl} , associées à chaque couple d'antennes A_k et A_l de l'instrument, appartiennent à une liste finie \mathcal{L} dans le domaine de FOURIER :

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{u}_{kl} : 1 \leq k, l \leq N_a\} \quad (4.36)$$

où N_a est le nombre d'antennes de l'interféromètre. Comme il a déjà été précisé précédemment, cette liste peut être redondante : deux différentes paires d'antennes peuvent engendrer la même fréquence spatiale. L'espace des données F est l'espace des fonctions complexes hermitiennes V prenant leurs valeurs $V_{kl} \equiv V(\mathbf{u}_{kl})$ dans \mathcal{L} .

d. Propriété d'hermiticité des espaces

D'après les propriétés d'hermiticité de la transformée de FOURIER des fonctions réelles, et celles des visibilité complexes, les espace duaux \widehat{E} et $\widehat{\mathcal{E}}$ peuvent être définis sur la moitié seulement des noeuds des grilles utilisées. La même remarque vaut pour l'espace des données F et la liste des fréquences expérimentales \mathcal{L} .

Cependant, afin d'introduire confortablement ces espaces et leurs normes, il était préférable de ne faire cette remarque qu'en dernier lieu plutôt que d'introduire une difficulté supplémentaire, et par là même une dose de confusion, dans leur définition.

Ainsi, pour un instrument de type MIRAS possédant L antennes « avant » et LL antennes « arrières » par bras, soit $N_a = 3(L + LL)$ antennes au total, et $N = 3L$ pour un instrument de type HUT2D qui ne possède pas d'antennes arrières, le nombre de visibilité complexes mesurées est $N_a(N_a - 1)/2$ auquel il convient d'ajouter une mesure réelle à la fréquence nulle fournie par

les « NIR », soient $N_b = 1 + N_a(N_a - 1)/2$ visibilitées au total. L'espace des données F est donc isomorphe à \mathbb{C}^{N_b} , et donc \mathbb{C}^{2347} pour MIRAS et \mathbb{C}^{631} pour HUT2D.

De même, le nombre de fréquences contenues dans la bande passante est $6(L(L + 1) + LL)$ pour MIRAS et $(2L - 1)(2L + 1) - 1$ pour le HUT2D, auquel il convient d'ajouter la fréquence nulle. L'espace dual \widehat{E} est donc isomorphe à \mathbb{C}^{N_f} , avec $N_f = 3(L(L + 1) + LL) + 1$ pour MIRAS et $N_f = ((2L - 1)(2L + 1) - 1)/2 + 1$, soit \mathbb{C}^{1393} pour MIRAS et \mathbb{C}^{288} pour HUT2D.

Pour finir, l'espace des objets E est isomorphe à $\mathbb{R}^{N \times N}$, soit \mathbb{R}^{16384} ($N = 128$) pour MIRAS et à \mathbb{R}^{4096} ($N = 64$) pour HUT2D. De même, compte tenu de la propriété d'hermiticité, \widehat{E} est isomorphe à $\mathbb{C}^{N \times N}$, soit \mathbb{C}^{16384} pour MIRAS et à \mathbb{C}^{4096} pour HUT2D. Le tableau 4.1 résume ces quelques résultats pour MIRAS et HUT2D.

TAB. 4.1 – Relations entre le nombre d'antennes, le nombre de visibilitées mesurées et le nombre de fréquence dans la bande passante.

	Nombre total d'antennes N_a	Nombre de visibilitées mesurées N_b	Nombre utile de fréquences N_f
MIRAS	$3(L + LL) = 69$	$N_a(N_a - 1)/2 + 1 = 2347$	$3(L(L + 1) + LL) + 1 = 1393$
HUT2D	$3L = 36$	$N_a(N_a - 1)/2 + 1 = 631$	$((2L - 1)(2L + 1 - 1))/2 + 1 = 288$

4.2.2 Les opérateurs clés

a. \mathbf{U} , opérateur de transformée de Fourier

Le passage du domaine de FOURIER au domaine spatial, et inversement, est une opération courante en synthèse de FOURIER.

Soit, donc, l'opérateur de transformée de FOURIER \mathbf{U} :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} : E &\longrightarrow \widehat{E} \\ T &\longmapsto \mathbf{U}T = \widehat{T} \end{aligned}$$

avec, pour tout \mathbf{q} dans $\mathbb{G}(n\mathcal{H})$:

$$\widehat{T}_{\mathbf{q}} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} T_{\mathbf{p}} e^{-2j\pi \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{n}} . \quad (4.37)$$

où σ_{ξ} est la surface d'une cellule de $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)$.

b. \mathbf{Z} , opérateur de remplissage de zéros

Dès lors que l'on est amené à considérer des instruments à bande passante limitée, il est nécessaire de disposer d'un opérateur permettant compléter avec des zéros la grille contenant les données interférométriques.

Soit, maintenant, \mathbf{Z} l'opérateur de remplissage de zéros (*zero-padding*) au-delà de la couverture fréquentielle expérimentale H :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} : \widehat{E} &\longrightarrow \widehat{E} \\ \widehat{T} &\longmapsto \mathbf{Z}\widehat{T} = \widehat{T} \end{aligned}$$

avec, pour tout \mathbf{q} dans $\mathbb{G}(n\mathcal{H})$:

$$\widehat{T}_{\mathbf{q}} = \begin{cases} \widehat{T}_{\mathbf{q}} & \text{si } \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.38)$$

L'action de son adjoint, \mathbf{Z}^* , qui consiste à ne garder que les composantes $\widehat{T}_{\mathbf{q}}$ de \widehat{T} à l'intérieur de H , est donc telle que $\mathbf{Z}^*\mathbf{Z} = \mathbf{I}$.

c. \mathbf{P}_H , projecteur sur \mathcal{E}

La présence d'un sous-espace des fonctions à bande passante limitée rend nécessaire la définition d'un projecteur permettant le passage de E à \mathcal{E} .

Etant données les définitions précédentes, il est possible d'introduire \mathbf{P}_H :

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*\mathbf{U} \quad (4.39)$$

dont l'action est celle d'un projecteur sur l'espace \mathcal{E} des fonctions à bande limitée dans H puisqu'il est facilement démontrable que $\mathbf{P}_H^* = \mathbf{P}_H$ et $\mathbf{P}_H^2 = \mathbf{P}_H$.

4.3 G, opérateur de modélisation

L'opérateur de modélisation \mathbf{G} joue un rôle central dans la reconstruction d'image par des méthodes régularisées. Cette section caractérise l'action de \mathbf{G} mais aussi celle de son adjoint \mathbf{G}^* qui intervient dans la définition de certains opérateurs de reconstruction. La représentation matricielle de l'opérateur de modélisation est elle aussi explicitée.

4.3.1 Action des opérateurs \mathbf{G} et \mathbf{G}^*

L'opérateur de modélisation est l'opérateur \mathbf{G} de l'espace des objets E vers celui des données F décrivant la relation (3.38) entre les visibilité complexes et la distribution des températures de brillance de la scène observée :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : E &\longrightarrow F \\ T &\longmapsto \mathbf{G}T = V \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec, pour chaque paire d'antenne A_k et A_l :

$$V_{kl} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \overline{F_{l,\mathbf{p}}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} T_{\mathbf{p}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl}\xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi\mathbf{u}_{kl}\xi_{\mathbf{p}}}. \quad (4.41)$$

Avant de déterminer l'expression de l'opérateur adjoint \mathbf{G}^* , il est nécessaire d'expliciter la définition des produits scalaires dans E et F :

$$(T^{(1)} | T^{(2)})_E \equiv \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \overline{T_{\mathbf{p}}^{(1)}} T_{\mathbf{p}}^{(2)}, \quad (4.42)$$

et

$$(V^{(1)} | V^{(2)})_F \equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \overline{V_{kl}^{(1)}} V_{kl}^{(2)}. \quad (4.43)$$

Il vient alors :

$$(V | \mathbf{G}T)_F \equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} (\mathbf{G}T)_{kl} \quad (4.44)$$

$$= \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \quad (4.45)$$

$$= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} T_{\mathbf{p}} \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} \bar{V}_{kl}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \quad (4.46)$$

$$= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \overline{(\mathbf{G}^*V)_{\mathbf{p}}} T_{\mathbf{p}} \equiv (\mathbf{G}^*V | T)_E. \quad (4.47)$$

La définition de \mathbf{G}^* , adjoint de l'opérateur de modélisation \mathbf{G} est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* : F &\longrightarrow E \\ V &\longmapsto \mathbf{G}^*V = T \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec, pour tout \mathbf{p} dans $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)$:

$$T_{\mathbf{p}} = \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{\bar{F}_{k,\mathbf{p}} F_{l,\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} V_{kl} \bar{\tilde{r}}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{+2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}. \quad (4.49)$$

4.3.2 Propriétés de la matrice \mathbf{G}

Afin d'assurer le caractère réel des températures de brillance reconstruites, il est préférable de construire la matrice \mathbf{G} , correspondant à l'opérateur de modélisation, comme une matrice réelle. Ainsi, la première ligne contient des informations sur la contribution de chaque pixel à la fonction de cohérence spatiale à la fréquence nulle (valeur réelle de fait). Les $N_b - 1$ lignes suivantes contiennent la partie réelle de la contribution de chaque pixel à la fonction de cohérence spatiale et les $N_b - 1$ dernières lignes contiennent la partie imaginaire de cette contribution (voir Fig. 4.8).

Le principe de construction de cette matrice est alors simple : il s'agit de calculer la contribution aux visibilités de chacun des pixels composant la carte des températures T . On parcourt donc la grille d'échantillonnage en simulant une impulsion unité sur le pixel courant, $T(\xi_{\mathbf{p}}) = 1$, la température étant nulle ailleurs.

L'algorithme de construction de \mathbf{G} est donc le suivant :

Eclaircissement II.1: ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE \mathbf{G}

```

Do p = 1:N2
  G[1,p] = ||F1[p]||2  $\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{1-||\xi[p]||^2}}$ 
EndDo
Do b = 2:Nb
  Do p = 1:N2
    DXDY = e-2jπ(u[b]ξ[p])  $\frac{\sigma_\xi}{\sqrt{1-||\xi[p]||^2}}$ 

    G[b,p] = Re { Fk[p]  $\bar{F}_l$ [p]  $\tilde{r}$ [b,p] DXDY }
    G[b+Nb-1,p] = Im { Fk[p]  $\bar{F}_l$ [p]  $\tilde{r}$ [b,p] DXDY }
  EndDo
EndDo

```

où l'indice \mathbf{b} parcourt la liste \mathcal{L} des lignes de base, F_k et F_l désignant les gains des antennes correspondants, l'indice p parcourt la grille d'échantillonnage sur laquelle est défini T et σ_ξ est l'élément d'intégration ($\sqrt{3}(d\xi)^2/2$ pour un maillage hexagonal, $(d\xi)^2$ pour un maillage cartésien).

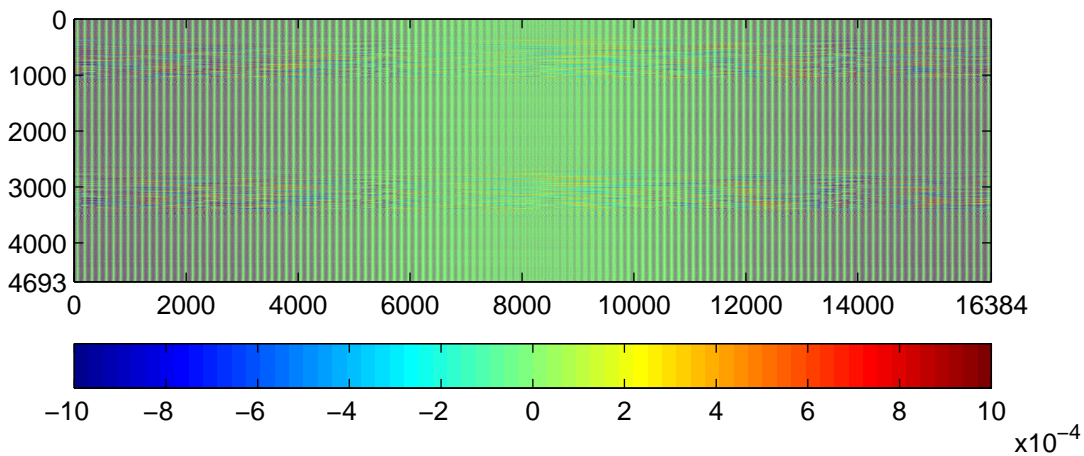


FIG. 4.8 – La matrice de modélisation \mathbf{G} pour un instrument réaliste de type MIRAS.

Le tableau 4.2 résume les caractéristiques de la matrice de modélisation d'un point de vue informatique.

TAB. 4.2 – Caractéristiques informatiques de \mathbf{G} : la taille est donnée pour une déclaration en double précision (8 octets) et le temps de calcul est mesuré sur un COMPAQ α SERVER SC 45 et une parallélisation sur 4 processeurs.

	Dimensions $(2N_b - 1) \times N^2$	Taille	Temps de calcul
MIRAS	4693×16384	586.6 Mo	15 s
HUT2D	1261×4096	39.6 Mo	1 s

Biographie(s)

Biographie 4.1: SHANNON, Claude Elwood

(30 Avril 1916, Gaylord, Etats-Unis - 24 Février 2001, Medford, Etats-Unis)



Claude Shannon est diplômé de l'université du Michigan en 1936, en mathématiques et en ingénierie électrique et il intègre le MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) au sein duquel il passe un *master* en ingénierie électrique et une thèse en mathématiques en 1940.

De 1941 à 1972, il travaille pour la société *AT&T Bell* dans le New Jersey, dont il parcourt les couloirs... juché sur un monocycle. En 1948, il révolutionne le domaine de la communication en publiant *A Mathematical Theory of Communication* dans lequel il suggère un codage de l'information sous la forme de bits, pour *binary digit*, introduisant la possibilité de transmettre l'information sous une forme discrète et non plus continue.

Lors de la dernière partie de sa carrière, il travaille sur l'intelligence artificielle. Il développe notamment les premiers programmes permettant aux machines de jouer aux échecs...et un monocycle à deux places.

Biographie 4.2: **NYQUIST, Harry**(7 Février 1889, Nilsby, Suède - 4 Avril 1976)

Harry Nyquist passe des premières années universitaires à l'université du Nord Dakota de 1912 à 1915 où il reçoit un diplôme en ingénierie électrique. Il passe sa thèse à l'université de Yale en 1917.

De 1917 à 1934, il est employé de l'American Telephone and Telegraph Company au sein du département de recherche et développement en transmission où il se consacre à l'étude de la transmission de l'image et de la voix par le télégraphe. De 1934 jusqu'à sa retraite en 1954, il travaille pour la société Bell Telephone Laboratories pour laquelle il continue ses recherches en transmission et particulièrement sur les systèmes de transmission. Parmi ses principales contributions, on trouve notamment la première formulation quantitative du bruit thermique ou encore le développement du diagramme de Nyquist, permettant d'établir la stabilité des systèmes en « *feedback* ».

Bibliographie

- [1] A. TERRAS : Fourier analysis on finite groups and applications. *Cambridge University Press*, 1999.
- [2] B. PICARD, E. ANTERRIEU, G. CAUDAL et P. WALDTEUFEL : Improved windowing functions for synthetic aperture imaging radiometers. *Proc. of IGARSS'02*, pages 2756–2758, 2002.
- [3] C. KITTEL : Introduction to solid state physics. *7th ed., New-York :Wiley*, 1995.
- [4] E. ANTERRIEU, P. WALDTEUFEL et A. LANNES : Apodization functions for 2-d hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 40(12):2531–2542, 2002.
- [5] A. LANNES et E. ANTERRIEU : Image reconstruction methods for remote sensing by aperture synthesis. *Proc. of IGARSS'94*, pages 2892–2903, 1994.
- [6] A. CAMPS, J. BARA, I. CORBELLA et F. TORRES : Visibility inversion algorithms over hexagonal sampling grids. *Proc. of Soil Moisture and Ocean Salinity Measurements and Radiometers Techniques*, Meeting ESA-ESTEC, 21 April 1995.
- [7] A. CAMPS, J. BARA, I. CORBELLA et F. TORRES : The processing of hexagonally sampled signals with standard rectangular techniques : application to 2d large aperture synthetic interferometric radiometers. *IEEE TGRS*, 35:183–190, 1997.
- [8] R.M. MERSEREAU : The processing of hexagonally sampled two-dimensional signals. *Proc. IEEE*, 67:930–949, 1979.
- [9] E. ANTERRIEU : A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 42(8):1649–1656, 2004.
- [10] André LANNES, Eric ANTERRIEU et Karim BOUYOUCEF : Fourier interpolation and reconstruction via shannon-type techniques ; part i : Regularization principle. *Journal of Modern Optics*, 41(8):1537–1574, 1994.
- [11] André LANNES, Eric ANTERRIEU et Karim BOUYOUCEF : Fourier interpolation and reconstruction via shannon-type techniques ; part ii : technical developments and applications. *Journal of Modern Optics*, 43(1):105–138, 1996.

Chapitre 5

Apodisation

Sommaire

5.1	Rappels sur l'apodisation et les facteurs de mérite	86
5.1.1	L'apodisation	86
5.1.2	Les facteurs de mérite.	89
5.2	Les fenêtres d'apodisation 2D	93
5.3	Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante	101
5.3.1	Dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}	101
5.3.2	Dépendance radiale et angulaire du paramètre ρ_{max}	104

[Sept millions et demi d'années plus tard]
« Bonjour ! dit enfin Compute-Un
- Euh... Bonjour, ô Compute-Un. Est-ce que tu n'aurais pas... euh... c'est-à-dire...
- Une réponse pour vous ? Oui j'en ai une. La réponse à la Grande Question... De la Vie, de l'Univers et du Reste...
- Oui... !
- C'est...
- Oui... !!! ... ?
- Quarante-deux.

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

Comme l'a précisé le chapitre précédent, les dimensions finies des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture en font des instruments à bande passante limitée. Lors du processus de reconstruction et quelle qu'en soit la nature, la brusque coupure au bord cette bande passante dans le domaine de Fourier va se traduire, dans le domaine spatial, par des oscillations radio-métriques dans les images reconstruites. Le but de l'apodisation est littéralement d'« enlever les pieds » autrement dit de réduire l'amplitude de ces oscillations dites oscillations ou phénomène de GIBBS.

Dans le cadre de la reconstruction d'image pour les RISO, l'apodisation sera effectuée sur les cartes de températures reconstruites, et non pas sur les visibilitées mesurées. Il s'agit de conserver lors de la reconstruction l'intégralité de l'information contenue dans les données instrumentales, notamment celle apportée par les lignes de bases redondantes.

L'exemple suivant illustré par les figures 5.1, 5.2 et 5.3 tend à introduire, à travers un exemple à 1 dimension, le concept de l'apodisation comme une réponse au problème des oscillations de GIBBS.

5.1 Rappels sur l'apodisation et les facteurs de mérite

5.1.1 L'apodisation

La figure 5.1-a représente la distribution 1D $T(x)$ des températures de brillance observées par l'instrument. La figure 5.1-b montre la transformée de FOURIER $\hat{T}(u)$ de cette distribution. En considérant que les visibilitées et les températures de brillance sont liées par une simple transformée de FOURIER, les mesures instrumentales sont les composantes de Fourier comprises entre $-L$ et $+L$, $2L$ étant la bande passante de l'instrument (voir Fig. 5.1-c) : autrement dit, le signal dans le domaine de Fourier est multiplié par une fonction rectangle qui vaut 1 pour $-L \leq u \leq +L$ et 0 sinon. Cette multiplication dans le domaine de FOURIER se traduit, dans le domaine spatial, par une convolution par un sinus cardinal (voir Fig. 5.1-d) : les oscillations de GIBBS dans la distribution $T_W = T * W$ sont la conséquence de cette convolution.

Les notions de fuite radiométrique et de dégradation de la résolution spatiale émergent de la comparaison de la distribution initiale T avec la distribution reconstruite T_W . La première de ces deux sources de dégradation de la qualité de la reconstruction est due aux oscillations que l'on observe aux bords des créneaux (voir Fig. 5.2-a) : alors que la température observée a une valeur constante, la température reconstruite comporte des variations de l'ordre de 10% autour d'une valeur moyenne. D'autre part, la dégradation de la résolution spatiale apparaît clairement dans la difficulté à localiser précisément les limites du créneau reconstruit (voir Fig. 5.2-b).

Puisque ces phénomènes sont causés par une coupure brusque aux bords de la bande passante, le principe moteur de l'apodisation consiste à remplacer la fonction rectangle par des fonctions conduisant à une transition plus douce et ainsi diminuer l'amplitude des oscillations.

Cependant, ainsi que le montre la figure 5.3, cette opération a un coût : la meilleure résolution spatiale compte tenu des caractéristiques de l'instrument est celle obtenue avec la fenêtre rectangle et l'utilisation de n'importe quelle autre fenêtre conduira à une dégradation de cette résolution. Le choix de la fenêtre d'apodisation à appliquer dépend donc des objectifs finaux de la reconstruction : jusqu'où est-on prêt à dégrader la résolution spatiale afin d'améliorer la sensibilité radiométrique ? Les facteurs de mérite des fenêtres, caractérisant leurs propriétés en terme de résolution ou de sensibilité radiométrique, vont offrir une aide précieuse quant à ce choix.

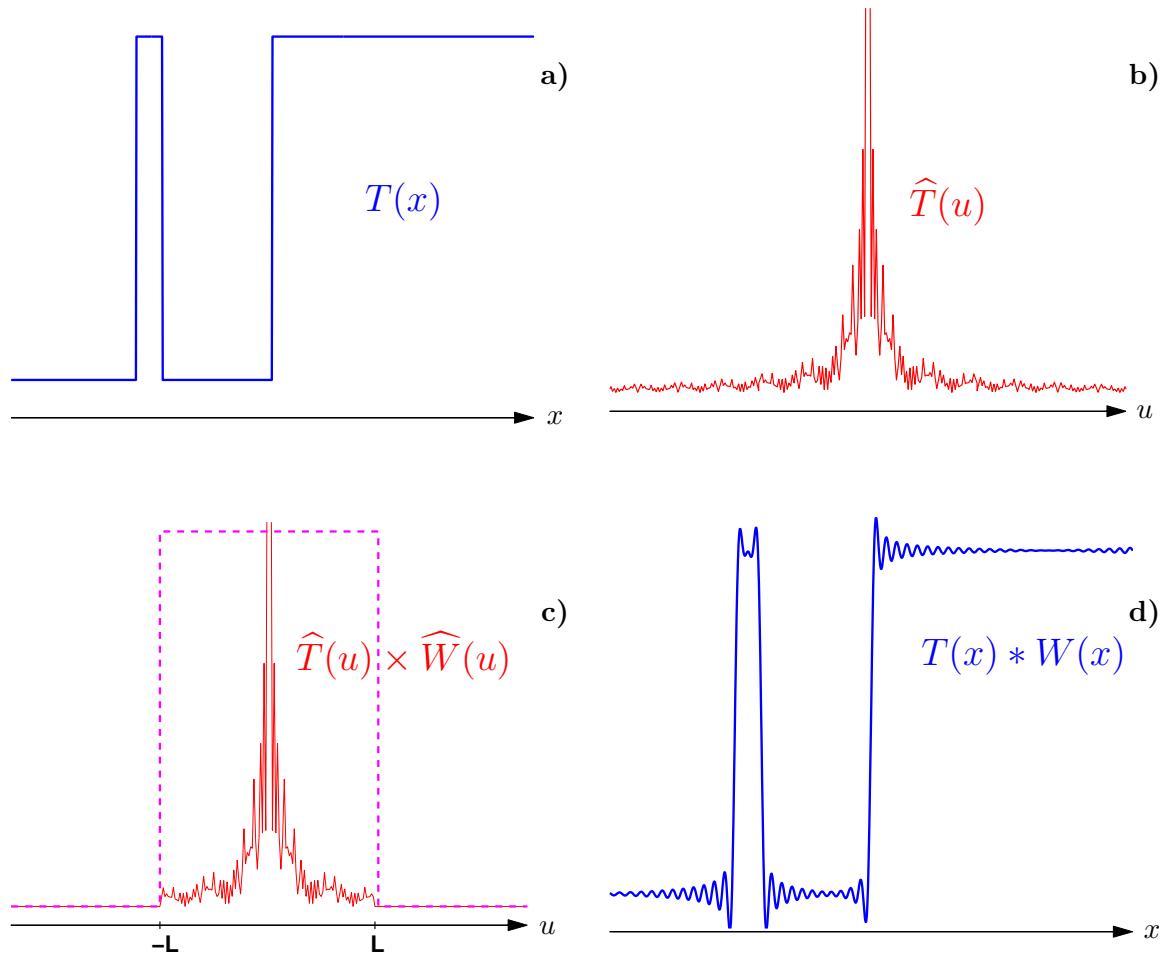


FIG. 5.1 – Oscillations de GIBBS : **a)** $T(x)$, distribution des T_b observée. **b)** $\hat{T}(u)$, la transformée de Fourier de $T(x)$. **c)** $\hat{T}\hat{W}$, les mesures instrumentales sont contenues à l'intérieur d'une bande passante limitée. **d)** $T_W = \hat{T} * \hat{W}$, la distribution de T_b reconstruite.

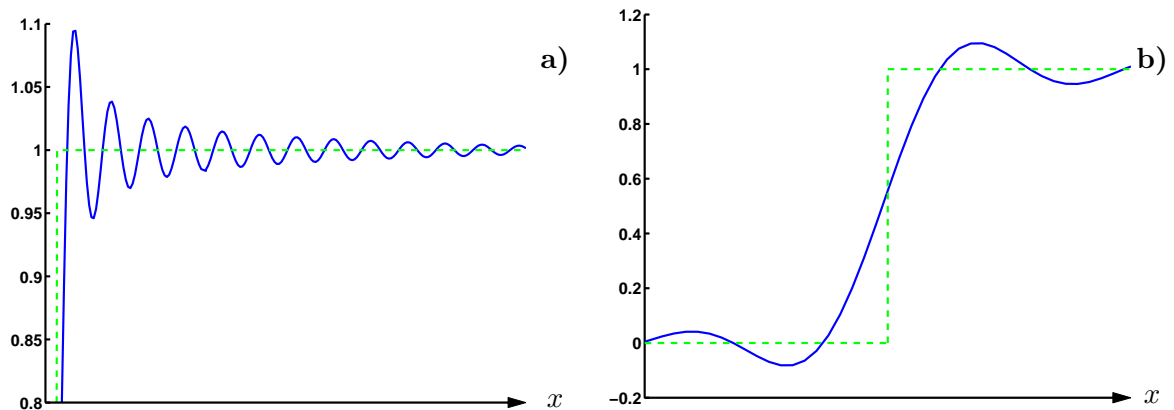


FIG. 5.2 – Fuite radiométrique et dégradation de la résolution spatiale : **a)** La température constante observée (tirets) est corrompue par des oscillations. **b)** la limite entre les deux plateaux reconstruits est moins bien localisée que dans le cas initial.

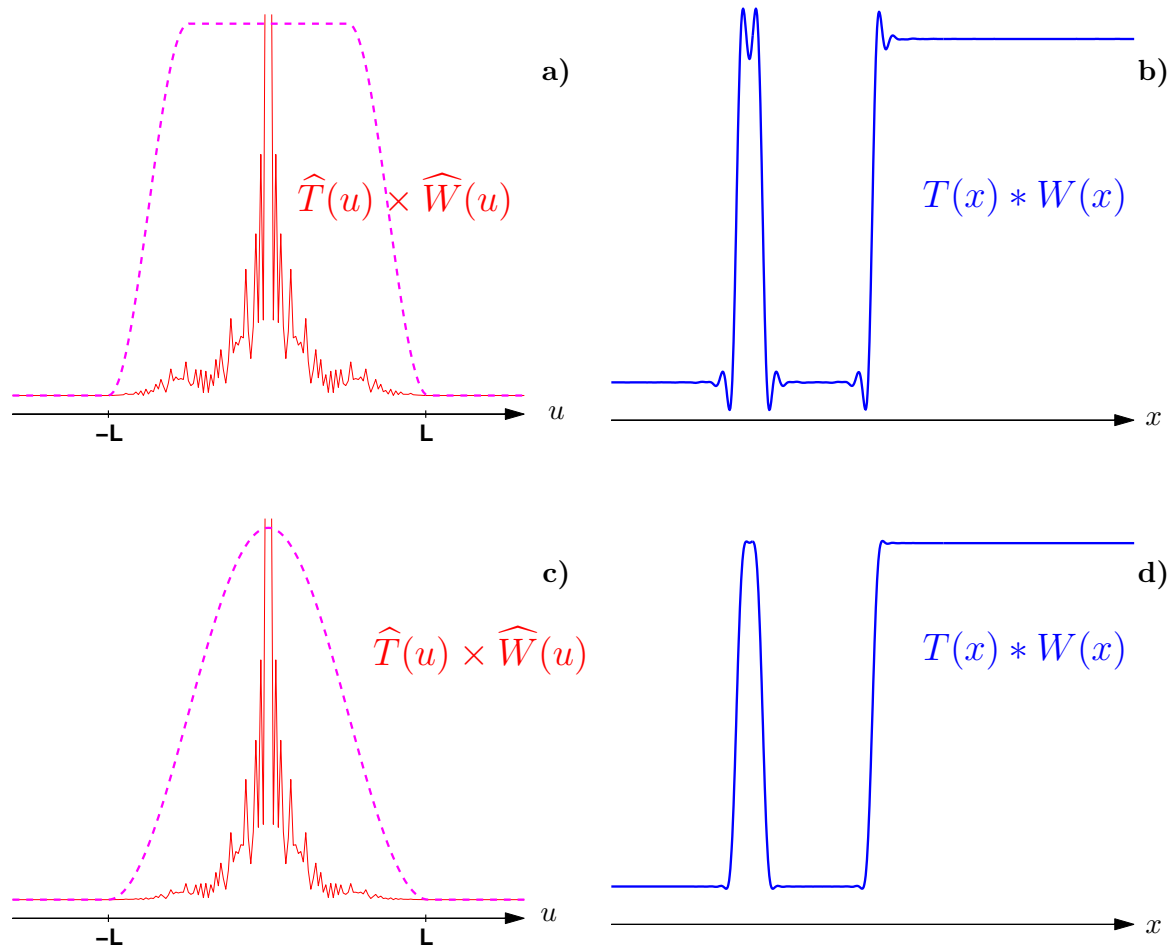


FIG. 5.3 – Deux exemples d'apodisation : le fait d'adoucir la transition au passage à zéro aux bords de la bande passante (a) et c)) conduit à réduire l'amplitude des oscillations dans le domaine spatial mais aussi à dégrader la résolution spatiale (b) et d)).

5.1.2 Les facteurs de mérite.

Les facteurs de mérite forment un ensemble de critères caractérisant le comportement des fenêtres d'apodisation dans le domaine spatial. Trois catégories sont distinguées selon qu'ils quantifient des propriétés de la fenêtre elle-même, du carré de son module ou du logarithme de son module.

a. ...« linéaires »

Ils caractérisent les propriétés de la fenêtre ($W(x)$) dans le domaine spatial (voir Fig. 5.4).

Eclaircissement II.2: FWHM - LARGEUR À MI-HAUTEUR

La largeur à mi-hauteur (noté FWHM pour *Full Width at Half-Maximum*) est la largeur du lobe principal de la fenêtre d'apodisation dans le domaine spatial, généralement mesurée à -3 dB (par rapport au maximum de la fonction).

La largeur du lobe principal (noté MBW pour *Main Beam Width*) est mesurée entre les deux premiers zéros de chaque côté du lobe principal.

Ces deux facteurs de mérite caractérisent principalement la résolution spatiale : plus leur valeur est faible, plus la résolution spatiale est précise.

b. ... « quadratiques »

Ils caractérisent les propriétés du module au carré de la fenêtre ($|W(x)|^2$) dans le domaine spatial (voir Fig. 5.5).

L'efficacité du lobe principal (noté MBE pour *Main Beam Efficiency*) est la quantité d'énergie contenue dans le lobe principal, exprimée comme un pourcentage de la quantité d'énergie totale contenue dans tous les lobes.

L'efficacité à mi-hauteur du lobe principal (noté BEHM pour *Beam Efficiency at Half-Maximum*) est elle-aussi un pourcentage de la quantité d'énergie totale, mais calculée à partir de la quantité d'énergie contenue à l'intérieur de la largeur à mi-hauteur.

Ces deux facteurs donnent là encore une indication sur la résolution spatiale mais aussi sur la sensibilité radiométrique, puisque l'énergie dans les lobes secondaires est prise en compte : plus leur énergie résiduelle est faible, plus les fenêtres sont efficaces.

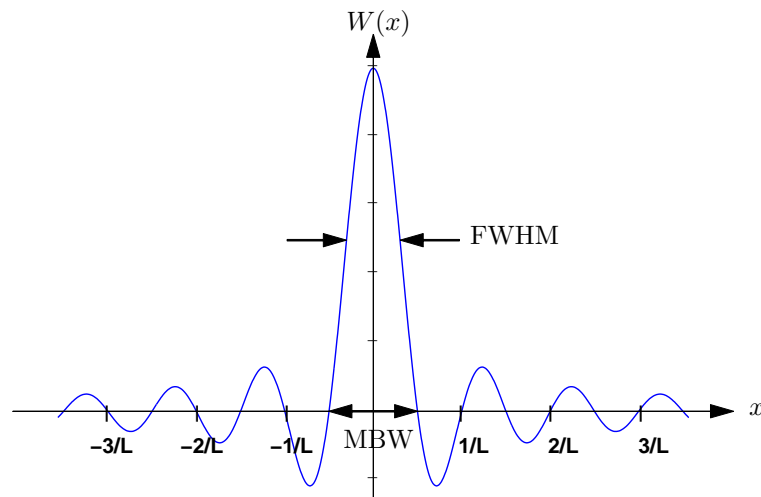


FIG. 5.4 – Facteurs de mérite « linéaires » : la largeur à mi-hauteur du lobe principal est liée à la résolution spatiale. L'axe des abscisses est gradué en unités de $1/L$ où $2L$ est la largeur de la bande passante.

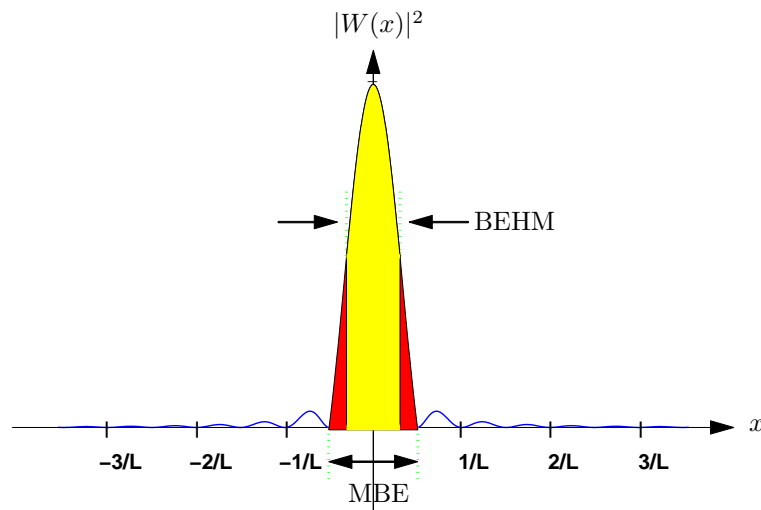


FIG. 5.5 – Facteurs de mérite « quadratiques » : l'efficacité du lobe principal et son efficacité à mi-hauteur sont liées à l'efficacité de la fenêtre.

c. ... « logarithmiques »

Ils caractérisent les propriétés du logarithme du module de la fenêtre ($\log |W(x)|$) dans le domaine spatial (voir Fig. 5.6).

Eclaircissement II.3: HSSL - PLUS GRANDE AMPLITUDE DES LOBE SECONDAIRES

La plus grande amplitude des lobes secondaires (HSSL pour *Highest Side-Lobe Level*), exprimée en dB (par rapport au lobe principal) est liée de près à la fuite radiométrique dans les premiers lobes secondaires : plus sa valeur est faible, plus la fuite radiométrique est faible dans les lobes secondaires les plus proches du lobe principal.

La décroissance asymptotique des lobes secondaires [1] (notée ADSL pour *Asymptotic Decay of Side-Lobes*) est la pente de la droite joignant les maximum des lobes secondaires (en dB par octave) : plus sa valeur est faible, plus la fuite radiométrique est faible dans les lobes secondaires les plus éloignés du lobe principal.

Or, puisque l'amélioration de la sensibilité radiométrique entraîne obligatoirement une dégradation de la résolution spatiale, la variation, par exemple, de la largeur à mi-hauteur en fonction du HSSL pour l'ensemble des fonctions d'apodisation est monotone. Un nouveau facteur de mérite, adapté à l'observation de distributions de T_b sur la Terre, a ainsi été développé, de façon à pouvoir procéder à un choix objectif d'une fenêtre d'apodisation optimale.

d. Distance de plus courte approche

Anterrieu *et al.* [2] ont introduit un nouveau facteur de mérite, spécifiquement développé pour la caractérisation des fenêtres d'apodisation dans un contexte de télédétection de la surface terrestre. La distance de plus courte approche (SACR, *Side Area Contribution Radius*) est la distance, mesurée depuis une marche entre deux températures initialement constantes (T_{min} et T_{max}), au delà de laquelle la l'énergie contenue dans les oscillations est inférieure à un pourcentage fixé de la différence $T_{max} - T_{min}$.

Cette marche est rencontrée dès lors que la scène observée contient une forte discontinuité comme une ligne de côte. La valeur fixée pour le pourcentage peut être adaptée aux spécifications instrumentales en terme de résolution spatiale et de fuite radiométrique. Plus le SACR est faible, plus se réduit la taille de la région dans laquelle la fuite radiométrique est significative. Il caractérise donc la contamination, par les lobes secondaires, d'une région proche d'une zone ayant des caractéristiques géophysiques différentes.

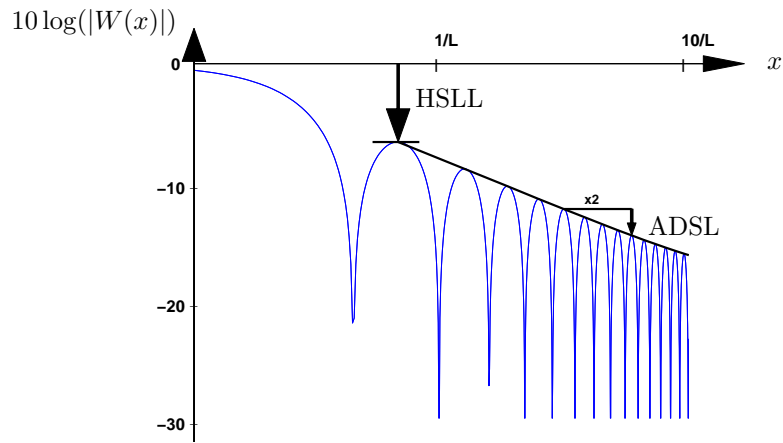


FIG. 5.6 – Facteurs de mérite « logarithmiques » : la plus grande amplitude des lobes secondaires et la décroissance asymptotique des lobes secondaires sont liées à la sensibilité radiométrique.

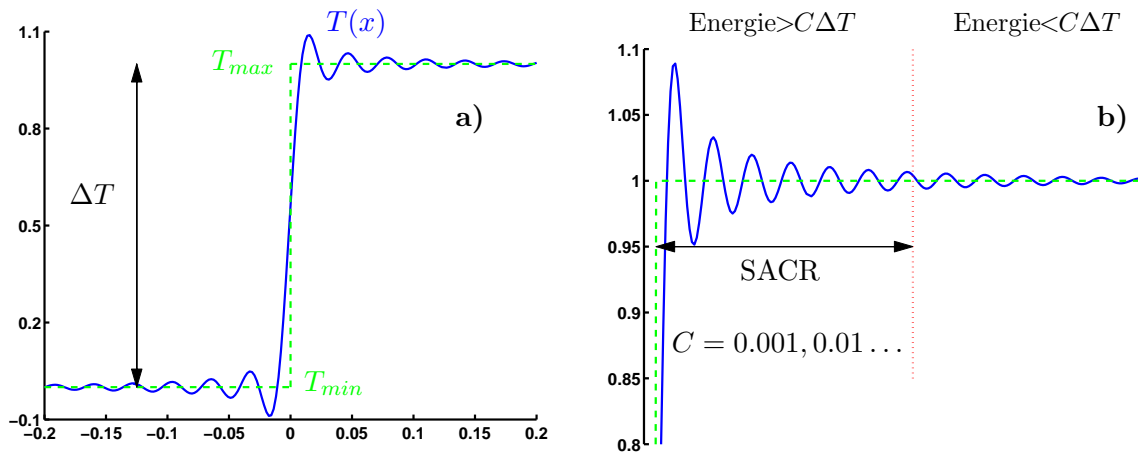


FIG. 5.7 – Distance de plus courte approche. **a)** le SACR est utile lorsque la scène observée contient un saut (ΔT) entre deux températures de brillance (T_{min} et T_{max}) comme le long de lignes de côtes. **b)** un zoom autour de T_{max} : le SACR est la distance mesurée à partir de la mi-hauteur de la marche jusqu'à la ligne pointillée délimitant deux régions.

5.2 Les fenêtres d'apodisation 2D

Les fenêtres d'apodisation 2D peuvent être directement adaptées des traditionnelles fenêtres 1D [1] [3] [4] [5] [6] : pour chaque point (u, v) de la bande passante de l'instrument, la valeur de la fenêtre 2D dépend de la variable radiale normalisée $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$, avec $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ et $\rho_{max} = \max_{(u,v)} \{\rho\}$ [7]. La fonction $\widehat{W} = \widehat{W}(u, v)$ ainsi construite est centro-symétrique dans le domaine de FOURIER et son support a la forme de la bande passante. Dans le domaine spatial, la fenêtre est notée $W = W(\xi, \eta)$ et elle présente une symétrie liée à la forme de la bande passante.

Anterrieu *et al.* [2] ont étudié les caractéristiques de plus de 20 fenêtres 2D définies sur un maillage hexagonal (voir Tab. 5.1) et pour un instrument en Y comportant 27 antennes par bras et un espace entre les antennes $\delta u = 0.875$. Parmi les fenêtres étudiées, certaines dépendent d'un paramètre et forment alors une famille de fenêtres (CAUCHY, POISSON, ..., KAISER, VAN DER MASS). Le tableau 5.2 et la figure 5.9 reprennent les principaux résultats. Pour les familles de fenêtres, les facteurs de mérite sont calculés pour la plus petite et la plus grande des valeurs du paramètre ainsi que pour les valeurs optimales du point de vue du SACR.

J'ai complété ces travaux en caractérisant ces mêmes fenêtres pour une configuration instrumentale en U et un maillage cartésien. Le tableau 5.3 et la figure 5.10 reprennent les principaux résultats.

Afin de faciliter la comparaison et étant donné que les propriétés des fenêtres d'apodisation dépendent naturellement des dimensions de l'instrument, les fréquences spatiales angulaires sont exprimées en unités de $[L_b/\lambda]$ où λ est la longueur d'onde d'observation et L_b la longueur de chaque bras et les facteurs de mérite sont donnés en unités de $[\lambda/L_b]$.

Les figures 5.8-a, b, c et d illustrent les valeurs prises par la fenêtre de BLACKMAN (approchée) dans le domaine de FOURIER (a et c) et dans le domaine spatial (b et d) pour une configuration en Y (a et b) et une configuration en U (c et d). Les contours tracés sous les fenêtres dans le domaine spatial permettent d'apprécier la répartition des maxima des lobes secondaires selon les axes de symétrie des bandes passantes correspondantes.

En comparant les caractéristiques des fenêtres pour les deux géométries étudiées, deux propriétés émergent : les fenêtres d'apodisation pour une configuration en Y sont plus étroites que pour une configuration en U, alors que les lobes secondaires sont plus élevés. En effet, à nombre d'antennes par bras et espace inter-antenne égaux, une configuration en Y possède une meilleure résolution spatiale (FWHM) mais une moins bonne sensibilité radiométrique (HSSL) qu'une configuration en U.

Les différences observées sur le FWHM s'expliquent en observant que la plus grande distance entre deux antennes d'un instrument en Y vaut $\sqrt{3}L_b$, ce qui est supérieur à la plus grande distance entre deux antennes d'un instrument en U, $\sqrt{(L_b - 1)^2 + L_b^2} \approx \sqrt{2}L_b$. Ainsi, comme le montrent les figures 5.8-a et 5.8-c, pour une même longueur L_b , H , la bande passante en étoile est plus étendue que la bande passante rectangulaire.

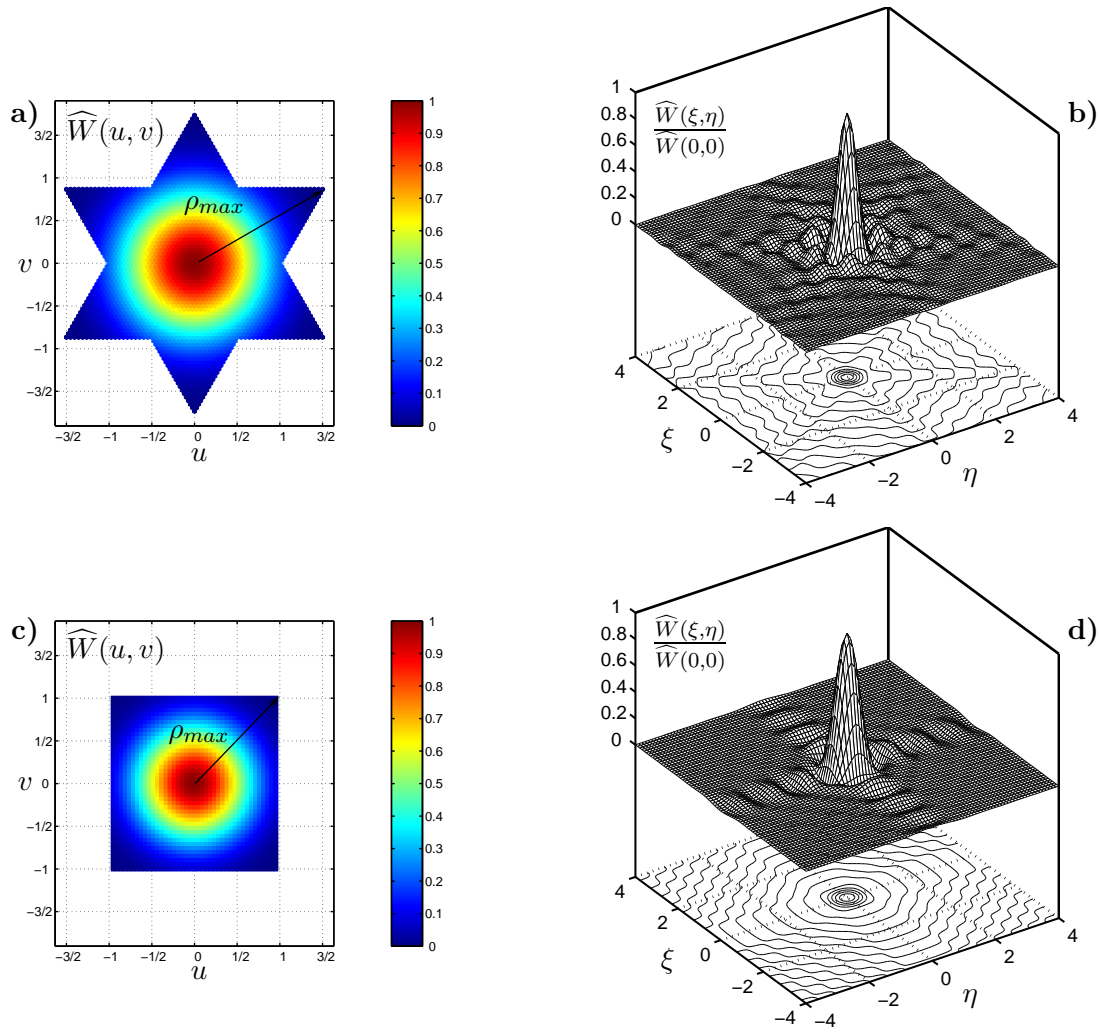


FIG. 5.8 – Fenêtre d’apodisation de BLACKMAN approchée. **A gauche**, les fenêtres d’apodisation traditionnelles 1D sont généralisées au cas 2D à l’aide du paramètre $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$, où ρ_{max} est la distance entre la fréquence nulle et la plus grande fréquence de la bande passante. **A droite**, dans le domaine spatial, on retrouve la symétrie de la bande passante dans la répartition des lobes secondaires autour du lobe principal.

Les différences observées sur le HSSL s’expliquent par la géométrie des bandes passantes. Les fonctions d’apodisation sont construites de façon à ce que W soit nul pour la plus grande fréquence présente dans la bande passante. Ainsi, ρ_{max} vaut $\sqrt{3} [L_b/\lambda]$ dans l’étoile et $\sqrt{(1 - 1/\delta u)^2 + 1} [L_b/\lambda] \approx \sqrt{2} [L_b/\lambda]$ dans la bande passante rectangulaire. La plus petite valeur de r au bord de l’étoile est donc $1/\sqrt{3}$, ce qui est inférieur à la plus petite valeur de r au bord du rectangle, $\approx 1/\sqrt{2}$. Comme les fonctions d’apodisation sont toutes des fonctions décroissantes de r , la plus grande valeur de W au bord de l’étoile est plus grande qu’au bord de la bande passante rectangulaire (voir Fig. 5.8-a et 5.8-c). La hauteur des lobes secondaires étant directement liée aux valeurs de W au bord de la bande passante, le HSSL est plus élevé pour une configuration en Y que pour une configuration en U.

D'autre part, le classement des fenêtres en termes de FWHM, HSSL ou BEHM n'est pas modifié par la configuration de l'instrument. Par exemple, parmi les fenêtres ne dépendant pas d'un paramètre, PARZEN, LANZOS, NUTALL « min 3-termes » et HARRIS « min 4-termes » possèdent le lobe central le plus large et une hauteur des lobes secondaires la plus faible, et ce dans les deux cas. Parmi les familles de fenêtres, GAUSS, KAISER et MASS ont leur lobe principal de plus en plus large et une hauteur des lobes de plus en plus faible au fur et à mesure que la valeur du paramètre dont elles dépendent augmente. Citons toutefois FILLER « exacte » qui semble avoir un meilleur comportement comparé à MASS pour une configuration en U, ce qui n'est pas le cas pour une configuration en Y.

Comme on l'a vu précédemment, le SACR a été élaboré de manière à permettre un choix objectif parmi l'ensemble des fenêtres disponibles. Notons préalablement que, pour une configuration en U, le SACR n'offrait pas de résultats probants pour un seuil de 0.1% (seul un petit nombre de fenêtres remplissait ce critère), les résultats présentés dans la figure 5.10 et le tableau 5.3 correspondent à un seuil de 0.5%. Les fenêtres les plus performantes, quelque soit la configuration de l'instrument, sont les familles de fenêtres, à condition de choisir la valeur optimale pour leur paramètre. Cette valeur est différente selon le seuil choisi pour le calcul du SACR et la configuration de l'instrument.

Toutefois, alors que la fenêtre de MASS est optimale du point de vue du SACR pour une géométrie en Y, c'est la fenêtre de FILLER « D » qui est la plus performante pour une configuration en U.

En conclusion, les caractéristiques des fenêtres d'apodisation changent avec la configuration du réseau interférométrique. Une géométrie en Y conduit à une meilleure résolution radiométrique alors qu'une géométrie en U permet d'atteindre une meilleure sensibilité radiométrique. J'ai aussi montré que les fenêtres les plus performantes du point de vue du SACR changent selon cette configuration. Selon ce critère et pour un seuil de 1%, dans le cas d'une configuration en U, la fenêtre de FILLER « D » calculée pour un paramètre $\alpha = 0.06$ permet un compromis optimal entre la résolution spatiale et la sensibilité radiométrique.

Ces résultats ont été établis pour des fenêtres possédant une symétrie circulaire alors que les bandes passantes ont une anisotropie propre à la géométrie de l'instrument. Par la suite, j'ai donc modifié le calcul de la variable $\bar{\rho}$ afin de tenir compte de cette anisotropie et ainsi améliorer la sensibilité radiométrique des fenêtres.

TAB. 5.1 – Fonctions d'apodisation traditionnelles définies dans l'intervalle $\bar{\rho} \in [-1, 1]$.

Rectangle	1
Bartlett	$1 - \bar{\rho} $
Welch	$1 - \bar{\rho}^2$
Lanczos	$\frac{\sin \pi \bar{\rho}}{\pi \bar{\rho}}$
Papoulis	$\frac{1}{\pi} \sin \pi \bar{\rho} + (1 - \bar{\rho}) \cos \pi \bar{\rho}$
Parzen	$\begin{cases} 1 - 6\bar{\rho}^2(1 - \bar{\rho}) & \bar{\rho} \leq 1/2 \\ 2(1 - \bar{\rho})^3 & \bar{\rho} \geq 1/2 \end{cases}$
Connes	$(1 - \bar{\rho}^2)^2$
Cosine	$\cos \frac{\pi \bar{\rho}}{2}$
Hanning	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi \bar{\rho}$
Hamming ¹	$0.54 + 0.46 \cos \pi \bar{\rho}$
Hamming ²	$\frac{25}{46} + \frac{21}{46} \cos \pi \bar{\rho}$
Blackman ¹	$0.42 + 0.5 \cos \pi \bar{\rho} + 0.08 \cos \pi \bar{\rho}$
Blackman ²	$\frac{3969}{9304} + \frac{4620}{9304} \cos \pi \bar{\rho} + \frac{715}{9304} \cos \pi \bar{\rho}$
Nutall ³	$0.42323 + 0.49755 \cos \pi \bar{\rho} + 0.07922 \cos 2\pi \bar{\rho}$
Nutall ⁴	$0.44959 + 0.49364 \cos \pi \bar{\rho} + 0.05677 \cos 2\pi \bar{\rho}$
Harris ⁵	$0.35875 + 0.48829 \cos \pi \bar{\rho} + 0.14128 \cos 2\pi \bar{\rho} + 0.01168 \cos 3\pi \bar{\rho}$
Harris ⁶	$0.40217 + 0.49703 \cos \pi \bar{\rho} + 0.09892 \cos 2\pi \bar{\rho} + 0.00188 \cos 3\pi \bar{\rho}$
Norton-Beer ⁷	$0.548 - 0.0833(1 - \bar{\rho}^2) + 0.5353(1 - \bar{\rho}^2)^2$
Norton-Beer ⁸	$0.26 - 0.154838(1 - \bar{\rho}^2) + 0.894838(1 - \bar{\rho}^2)^2$
Norton-Beer ⁹	$0.09 + 0.5875(1 - \bar{\rho}^2)^2 + 0.3225(1 - \bar{\rho}^2)^4$
Cauchy	$\frac{1}{1 + (\alpha \bar{\rho})^2}$
Poisson	$e^{-\alpha \bar{\rho} }, \alpha \geq 0$
Gauss	$e^{-\alpha \bar{\rho}^2}, \alpha \geq 0$
Filler (D)	$\frac{1}{1 + \alpha} \left(\cos \frac{\pi \bar{\rho}}{2} + \alpha \cos \frac{3\pi \bar{\rho}}{2} \right), \alpha \geq 0$
Filler (E)	$\frac{1}{2 + 2\alpha} \left(1 + (1 + \alpha) \cos \pi \bar{\rho} + \alpha \cos 2\pi \bar{\rho} \right), \alpha \geq 0$
Tuckey	$\begin{cases} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \pi \frac{ \bar{\rho} - \alpha}{1 - \alpha} & \bar{\rho} \geq \alpha, 1 \geq \alpha \geq 0 \\ 1 & \bar{\rho} \leq \alpha \end{cases}$
Kaiser	$\frac{I_0(\alpha \sqrt{1 - \bar{\rho}^2})}{I_0(\alpha)}, \alpha \geq 0$
Van der Maas	$\frac{I_1(\alpha \sqrt{1 - \bar{\rho}^2})}{I_1(\alpha) \sqrt{1 - \bar{\rho}^2}}, \alpha \geq 0$

¹approchée, ²exacte, ³3-termes, ⁴min 3-termes, ⁵4-termes, ⁶min 4-termes, ⁷forte, ⁸medium, ⁹faible.

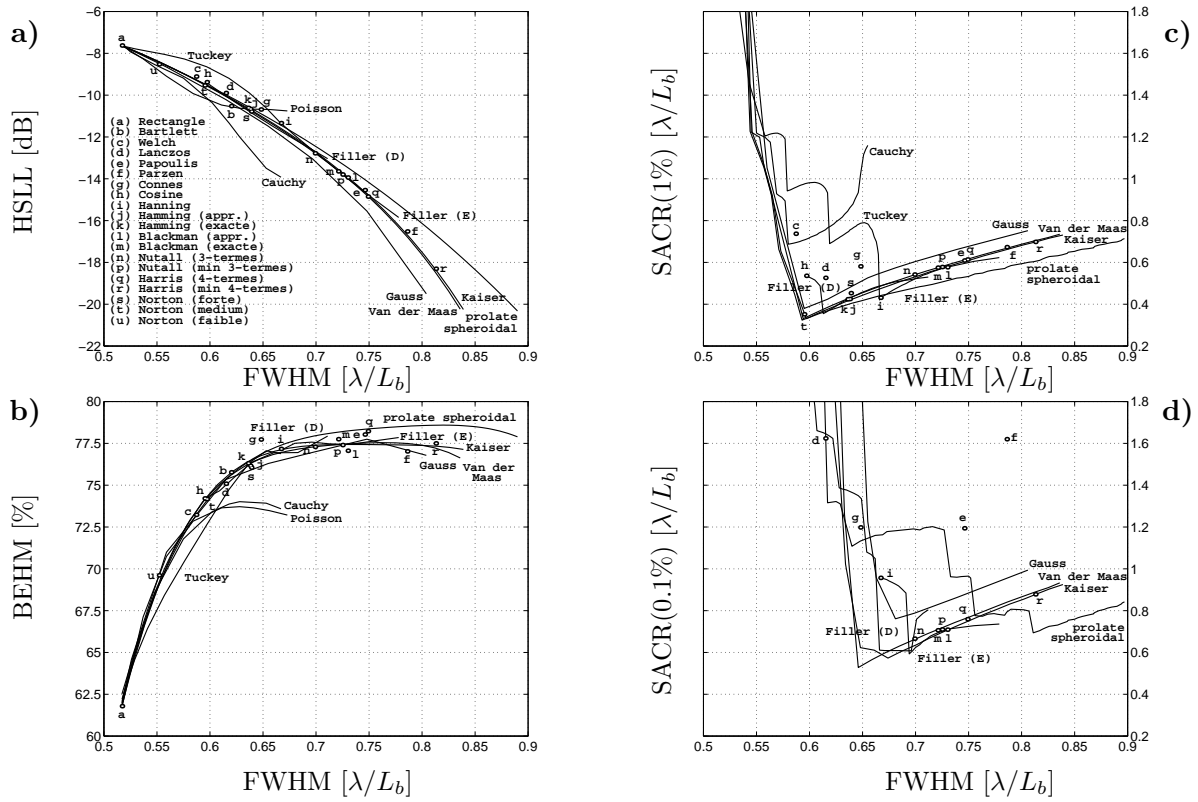


FIG. 5.9 – Facteurs de mérite des fenêtres d'apodisation pour une configuration en Y. **a)**, hauteur des lobes secondaires et **b)**, efficacité à -3dB du lobe principal en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal. Distance de plus courte approche pour, **c)**, un seuil de 1%, **d)**, un seuil de 0.1% en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal.

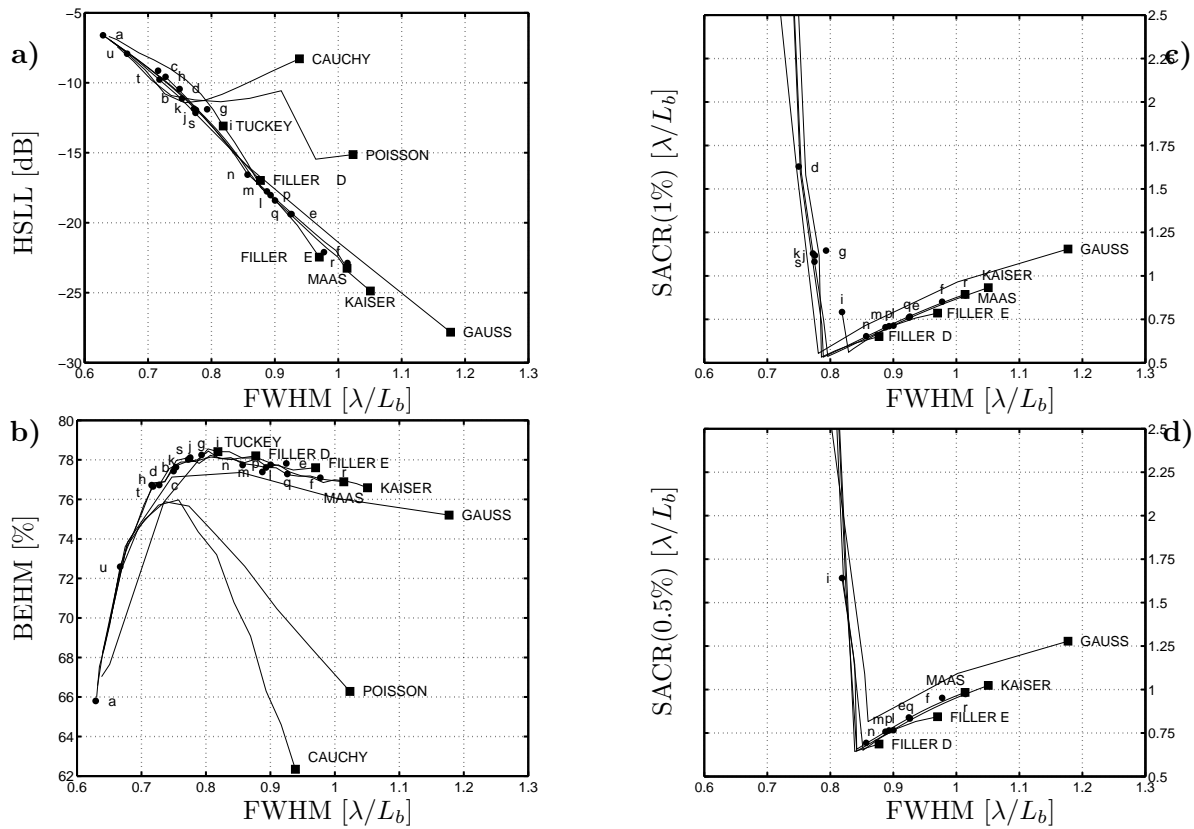


FIG. 5.10 – Facteurs de mérite des fenêtres d’apodisation pour une configuration en U. **a)**, hauteur des lobes secondaires et **b)**, efficacité à -3dB du lobe principal en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal. Distance de plus courte approche pour, **c)**, un seuil de 1%, **c)**, un seuil de 0.5% en fonction de la largeur à -3dB du lobe principal.

TAB. 5.2 – Facteurs de mérite des fonctions d'apodisation pour une configuration en Y.

	FWHM [λ/L_b]	HSL [dB]	BEHM [%]	SACR(1%) [λ/L_b]	SACR(0.1%) [λ/L_b]
Rectangle	0.517	-7.626	61.79		
Bartlett	0.620	-10.524	75.77	3.161	
Welch	0.587	-9.110	73.23	0.737	2.491
Lanczos	0.615	-9.898	75.09	0.526	1.624
Papoulis	0.746	-14.542	78.03	0.609	1.194
Parzen	0.786	-16.520	77.02	0.673	1.620
Connes	0.648	-10.684	77.73	0.581	1.198
Cosine	0.597	-9.377	74.17	0.536	2.184
Hanning	0.667	-11.339	77.17	0.431	0.957
Hamming ¹	0.638	-10.663	76.16	0.425	
Hamming ²	0.636	-10.609	76.31	0.424	
Blackman ¹	0.730	-13.940	77.06	0.577	0.709
Blackman ²	0.721	-13.644	77.75	0.575	0.706
Nutall ³	0.699	-12.779	77.29	0.542	0.666
Nutall ⁴	0.725	-13.796	77.40	0.578	0.710
Harris ⁵	0.749	-14.852	78.23	0.614	0.759
Harris ⁶	0.813	-18.304	77.50	0.698	0.878
Norton-Beer ⁷	0.639	-10.782	76.05	0.453	
Norton-Beer ⁸	0.595	-9.535	74.21	0.352	
Norton-Beer ⁹	0.552	-8.522	69.61	2.014	
Cauchy	1.0 1.53 $\alpha=3.0$ 0.548 0.578 0.653	-8.459 -9.397 -13.785	68.92 70.92 74.03	1.219 0.686 1.160	
Poisson	1.0 $\alpha=3.0$ 0.559 0.673	-9.043 -10.733	70.92 73.14		
Gauss	1.0 1.22 1.84 $\alpha=2.5$ 0.559 0.582 0.670 0.804	-8.656 -9.582 -11.985 -19.505	71.13 72.22 76.40 76.81	1.052 0.316 0.555 0.752	0.749 0.994
Filler (D)	0.0 0.06 0.27 $\alpha=0.3$ 0.597 0.613 0.695 0.711	-9.377 -9.919 -12.533 -13.036	74.17 75.21 77.68 77.96	0.536 0.355 0.518 0.530	2.184 1.651 0.608 0.804
Filler (E)	0.0 0.09 $\alpha=0.3$ 0.667 0.694 0.778	-11.339 -12.442 -15.852	77.17 77.97 77.82	0.431 0.508 0.623	0.957 0.593 0.736
Kaiser	1.0 3.47 6.01 $\alpha=13.0$ 0.527 0.592 0.661 0.839	-7.844 -9.388 -11.393 -20.270	64.16 74.39 77.47 76.99	3.174 0.322 0.464 0.731	0.539 0.925
Van der Maas	1.0 4.16 6.43 $\alpha=13.0$ 0.522 0.585 0.644 0.812	-7.739 -9.244 -10.913 -18.416	63.68 73.38 76.76 77.47	4.301 0.311 0.444 0.703	0.521 0.888

¹approchée, ²exacte, ³3-termes, ⁴min 3-termes, ⁵4-termes, ⁶min 4-termes, ⁷forte, ⁸medium, ⁹faible.

TAB. 5.3 – Facteurs de mérite des fonctions d'apodisation pour une configuration en U.

	FWHM [λ/L_b]	HSLI [dB]	BEHM [%]	SACR(1%) [λ/L_b]	SACR(0.5%) [λ/L_b]
Rectangle	0.629	-6.604	65.80		
Bartlett	0.754	-11.126	77.63		
Welch	0.716	-9.138	76.72		
Lanczos	0.750	-10.443	77.43	1.629	
Papoulis	0.924	-19.388	77.82	0.761	0.839
Parzen	0.977	-22.101	77.09	0.852	0.952
Connes	0.793	-11.894	78.25	1.146	
Cosine	0.728	-9.577	76.73		
Hanning	0.819	-13.087	78.41	0.792	1.641
Hamming ¹	0.776	-11.947	78.11	1.117	
Hamming ²	0.772	-11.853	78.02	1.129	
Blackman ¹	0.900	-18.411	77.75	0.713	0.766
Blackman ²	0.888	-17.759	77.39	0.704	0.757
Nutall ³	0.857	-16.566	77.74	0.652	0.694
Nutall ⁴	0.893	-18.029	77.61	0.711	0.765
Harris ⁵	0.926	-19.380	77.29	0.765	0.833
Harris ⁶	1.015	-22.875	76.90	0.887	0.975
Norton-Beer ⁷	0.775	-12.148	78.05	1.082	
Norton-Beer ⁸	0.718	-9.768	76.65		
Norton-Beer ⁹	0.667	-7.926	72.59		
Cauchy	0.5 $\alpha=6.0$	0.640 0.939	-6.947 -8.287	68.23 62.34	
Poisson	0.5 $\alpha=5.0$	0.652 1.023	-7.429 -15.129	69.89 66.28	
Gauss	0.5 1.68 2.02 $\alpha=3.0$	0.641 0.781 0.860 1.177	-6.977 -12.604 -16.019 -27.822	68.32 77.64 77.29 75.20	0.554 0.724 0.816 1.278
Filler (D)	0.0 0.16 0.25 $\alpha=0.3$	0.728 0.786 0.839 0.877	-9.577 -12.376 -15.127 -16.980	76.73 78.07 78.02 78.20	0.533 0.613 0.644 0.651
Filler (E)	0.0 0.03 0.09 $\alpha=0.3$	0.819 0.829 0.852 0.970	-13.09 -13.766 -15.394 -22.454	78.41 78.10 78.22 77.60	0.792 0.561 0.620 0.651 0.844
Tuckey	0.0 $\alpha=0.9$	0.819 0.638	-13.087 -6.689	78.41 67.03	0.792 1.641
Kaiser	0.5 5.69 6.99 $\alpha=13.0$	0.632 0.796 0.842 1.051	-6.6.692 -12.743 -15.227 -24.878	66.57 77.87 78.06 76.59	0.537 0.615 0.646 1.024
Van der Maas	0.5 6.56 8.08 $\alpha=13.0$	0.630 0.789 0.842 1.014	-6.648 -12.522 -15.457 -23.256	65.969 77.82 77.99 76.888	0.533 0.624 0.657 0.894

¹approchée, ²exacte, ³3-termes, ⁴min 3-termes, ⁵4-termes, ⁶min 4-termes, ⁷forte, ⁸medium, ⁹faible.

5.3 Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante

Jusqu'à présent, les fenêtres d'apodisation sont des fonctions bidimensionnelles de la variable radiale $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$, où ρ est la distance $\sqrt{u^2 + v^2}$ mesurée depuis la fréquence nulle à l'intérieur de la bande passante, et où ρ_{max} est égal à la plus grande de ces distances. Ainsi, il subsiste des valeurs non nulles aux bords de la bande passante dans le domaine de FOURIER, autour des creux de l'étoile pour une configuration en Y ou au centre des cotés du rectangle pour une configuration en U. Ces valeurs non nulles vont se traduire par une plus grande amplitude des oscillations de GIBBS dans le domaine spatial. En modifiant l'expression de ρ_{max} , il est possible d'adapter la forme des fenêtres à la forme des bandes passantes et ainsi de réduire les valeurs non nulles subsistant sur leurs bords, diminuant au final l'amplitude des oscillations de GIBBS [8].

5.3.1 Dépendance angulaire du paramètre ρ_{max}

L'introduction d'une dépendance angulaire dans le calcul de ρ_{max} permet d'adapter complètement la forme de la fenêtre à la forme de la bande passante (voir Fig. 5.11-a,-c). Il est pour cela nécessaire de calculer, pour chaque point (u, v) de la bande passante, la longueur $\rho_{H,R}(\theta)$ du segment joignant la fréquence nulle, la fréquence (u, v) et le bord de H . Cette longueur est paramétrée par l'angle θ mesuré depuis l'axe liant la fréquence nulle à la fréquence la plus grande de la bande passante (une pointe de l'étoile ou un sommet du rectangle). Etant données les symétries des bandes passantes, pour une configuration en Y, θ varie dans l'intervalle $[0^\circ \ 30^\circ]$ et $\rho_H(\theta)$ s'exprime ainsi :

$$\rho_H(\theta) = \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta} \tag{5.1}$$

Pour une configuration en U, θ varie dans l'intervalle $[0 \ \arctan \frac{L}{L-1}]$ et $\rho_R(\theta)$ s'exprime ainsi :

$$\rho_R(\theta) = \frac{L-1}{\cos \theta} \tag{5.2}$$

avec $\theta \in [0^\circ \ (\arctan \frac{L}{L-1}) \pi/180^\circ]$

Il est alors possible de circonscrire l'adaptation de la forme de la fenêtre à la forme de la bande passante à l'intérieur d'une région donnée, délimitée par la valeur d'un angle limite θ_{lim} (voir Fig. 5.11-b,-d). Ainsi, pour chaque point de la bande passante, la distance ρ_{max} est paramétrée par l'angle θ correspondant :

$$\begin{aligned} \rho_{max}(\theta) &= \rho_{H,R}(\theta) && \text{pour } 0 \leq \theta \leq \theta_{lim} \\ \rho_{max}(\theta) &= \rho_{H,R}(\theta_{lim}) && \text{pour } \theta > \theta_{lim} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Lorsque θ_{lim} est nul, on retrouve le cas d'une symétrie circulaire avec ρ_{max} constant. Lorsque $\theta_{lim} = 30^\circ$ ou $\theta_{lim} = \arctan \frac{L}{L-1}$, la forme de la fenêtre d'apodisation colle parfaitement à la forme en étoile de la bande passante.

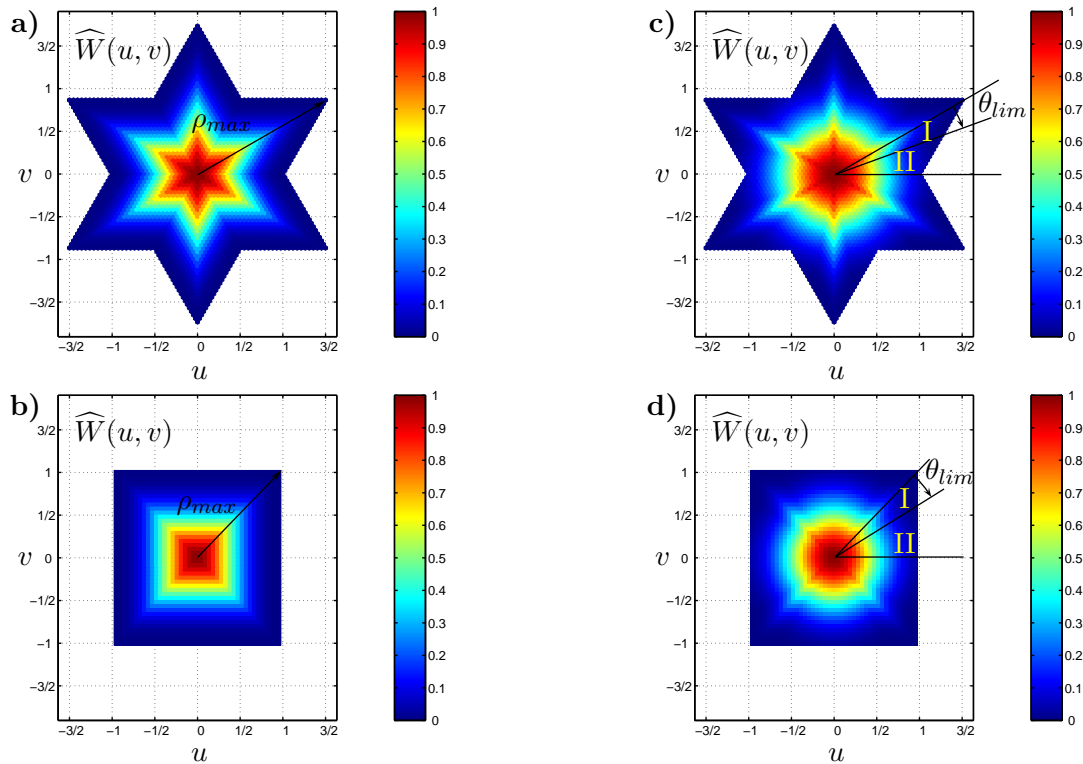


FIG. 5.11 – Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire du paramètre ρ_{max} . **a)** et **b)**, adaptation parfaite à la forme de la bande passante, $\theta_{lim} = 30^\circ$. **c)** et **d)**, adaptation partielle : dans la zone I, la forme de la fenêtre épouse la forme de la bande passante ($\rho_{max} = \rho_{max}(\theta)$), dans la zone II, la fenêtre est à symétrie circulaire ($\rho_{max} = cste = \rho(\theta_{lim})$)

L'adaptation progressive de la forme de la fenêtre à la forme de la bande passante, θ_{lim} variant de 0 à sa valeur maximale, a pour conséquence de faire apparaître un angle optimal pour lequel la hauteur des lobes secondaires est inférieure à celle calculée dans le cas de référence ($\theta_{lim} = 0$, pas de déformation). Cet angle optimal θ_{opt} , pour une fenêtre de BLACKMAN, vaut 6.5° pour l'étoile et 10.9° pour la bande passante rectangulaire (voir Fig. 5.12-a,-d).

La valeur des lobes secondaires pour une fenêtre donnée est conditionnée par de multiples caractéristiques dont les valeurs qu'elle prend au bord de la bande passante, bien entendu, mais aussi l'allure de la décroissance depuis la fréquence nulle. Il est donc difficile de prévoir la valeur de cet angle optimal, qui est différent pour chacune des fenêtres, mais l'on peut avancer quelques hypothèses pour expliquer son existence.

La décroissance de la hauteur des lobes est due à une diminution de la valeur de la fenêtre au bord de la bande passante dans la zone I. Cependant, l'adaptation de forme fait aussi apparaître un angle aigu le long de l'axe de symétrie orienté vers la pointe de l'étoile ($\theta = 30^\circ$) : cette arête va augmenter la hauteur des lobes secondaires au delà même de la valeur initiale. Pour les faibles valeurs de θ_{lim} , la diminution des valeurs au bord de la bande passante dans la zone I l'emporte sur l'apparition cette arête dans la zone II, l'effet s'inversant par la suite, d'où l'existence d'un angle optimal.

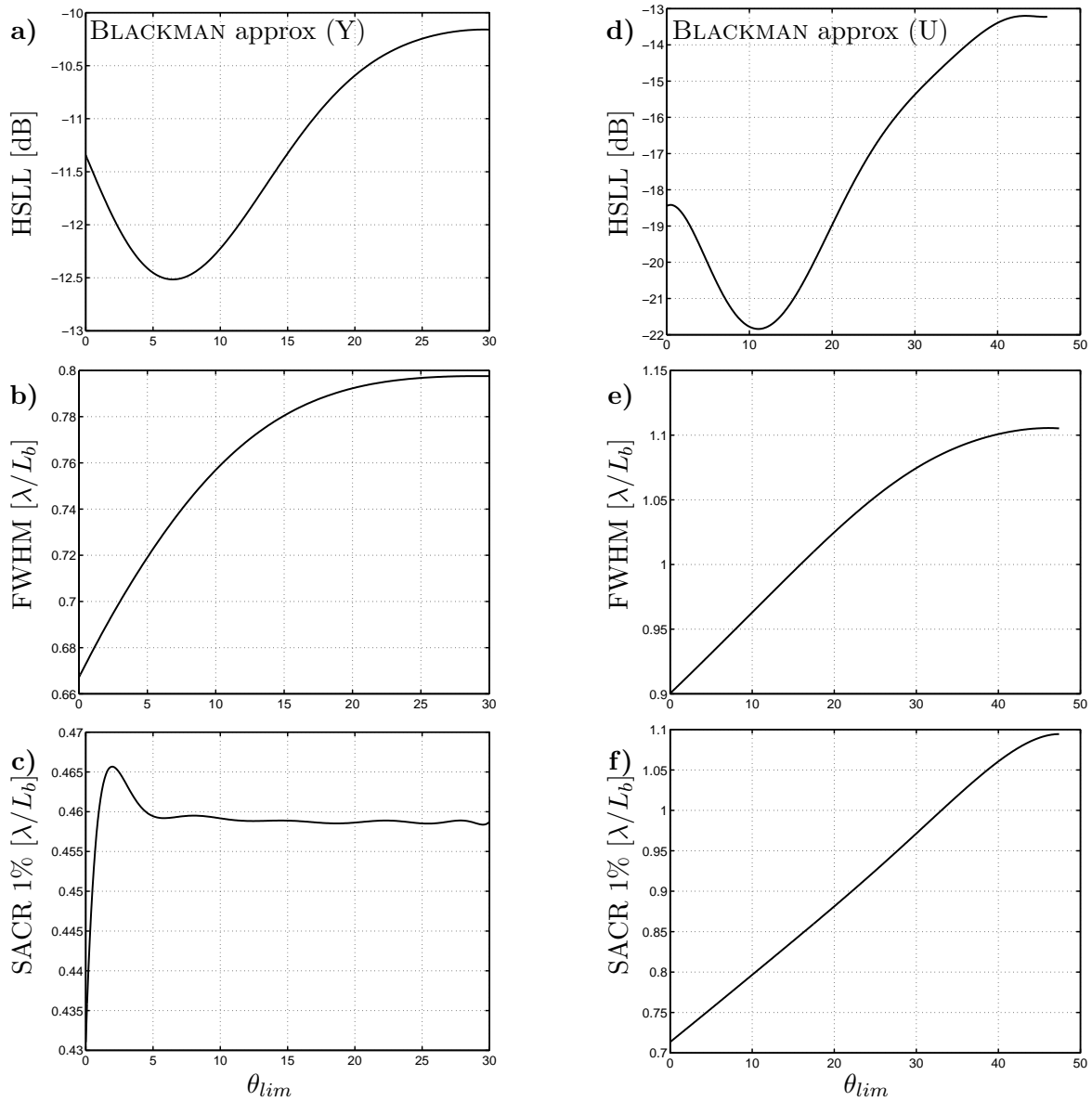


FIG. 5.12 – Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} , **à gauche**, pour une configuration en Y, **à droite**, pour une configuration en U. L'adaptation de forme permet de diminuer la hauteur des lobes pour un angle limite $\theta_{lim} = 11.1^\circ$ pour une géométrie en U et $\theta_{lim} = 6.5^\circ$ pour une géométrie en Y.

Cependant, la largeur à mi-hauteur du lobe principal, elle, augmente continûment avec θ_{lim} (voir Fig. 5.12-b,-e). Le calcul du SACR permet de plus de montrer que la diminution de la hauteur des lobes secondaires ne compense pas cette dégradation de la résolution spatiale, puisque quelque soit quelque soit θ_{lim} , le SACR est supérieur au cas initial (voir Fig. 5.12-c,-f).

5.3.2 Dépendance radiale et angulaire du paramètre ρ_{max}

Puisque la zone sensible du point de vue de la hauteur des lobes secondaires est liée à la présence d'un angle aigu le long de l'axe de symétrie dirigé vers la pointe de l'étoile, il a été envisagé d'introduire une dépendance radiale dans le calcul de ρ_{max} , en plus de la dépendance angulaire. Ainsi, il sera possible de restreindre l'adaptation de forme de la fenêtre aux fréquences situées à une distance ρ au delà d'un rayon limite ρ_{lim} (voir Fig. 5.13). Pour chaque point de la bande passante, la distance ρ_{max} est paramétrée par l'angle θ et la distance ρ correspondant :

$$\rho_{max}(\theta, \rho) = \rho_{H,R} \left(\theta_{lim} - \frac{1 - \rho_{lim}/\rho}{1 - \rho_{lim}/\rho_{H,R}(\theta_{lim})} \times (\theta - \theta_{lim}) \right) \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \theta_{lim} \text{ et } \rho \geq \rho_{lim}$$

$$\rho_{max}(\theta, \rho) = \rho_{H,R}(\theta_{lim}) \quad \text{pour } \theta > \theta_{lim} \text{ ou } \rho \leq \rho_{lim} \quad (5.4)$$

Les contraintes de continuité à la frontière entre la zone d'adaptation de forme et la zone à symétrie radiale adoucissent alors la variation autour de l'angle $\theta = 30^\circ$. Pour $\theta_{lim} = 0$ et $\rho_{lim} = 0$, on retrouve le cas initial d'un fenêtre à symétrie circulaire, de même que pour ρ_{lim} égal à la fréquence maximale de la bande passante. A partir de cette limite supérieure pour ρ_{lim} , l'intérêt de l'adaptation de forme disparaît puisque le signal mesuré aux hautes fréquences de la bande passante est alors complètement atténué par la fenêtre.

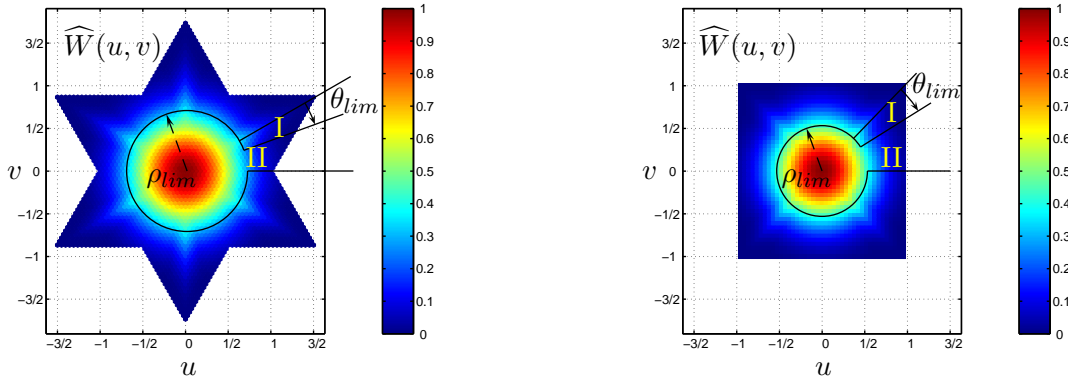


FIG. 5.13 – Adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante : dépendance angulaire et radiale du paramètre ρ_{max} . Dans la zone I, la forme de la fenêtre épouse la forme de la bande passante ($\rho_{max} = \rho_{max}(\theta, \rho)$), dans la zone II, la fenêtre est à symétrie circulaire ($\rho_{max} = cste = \rho_{H,R}(\theta_{lim})$)

L'introduction de la distance limite ρ_{lim} permet effectivement de diminuer la hauteur des lobes secondaires, comparée à la valeur obtenue pour $\rho_{lim} = 0$. Cependant, là encore, cette diminution s'accompagne d'un élargissement du lobe principal.

En configuration U, le gain sur le HSLL ne compense pas la perte sur le FWHM, même si la distance de plus courte approche diminue avec ρ_{lim} croissant, elle reste supérieure au cas initial 5.14.

En configuration Y, cela reste vrai pour les fenêtres « simples », ne dépendant pas d'un paramètre, mais on observe une légère amélioration du SACR pour les familles de fenêtres et notamment pour KAISER et MASS.

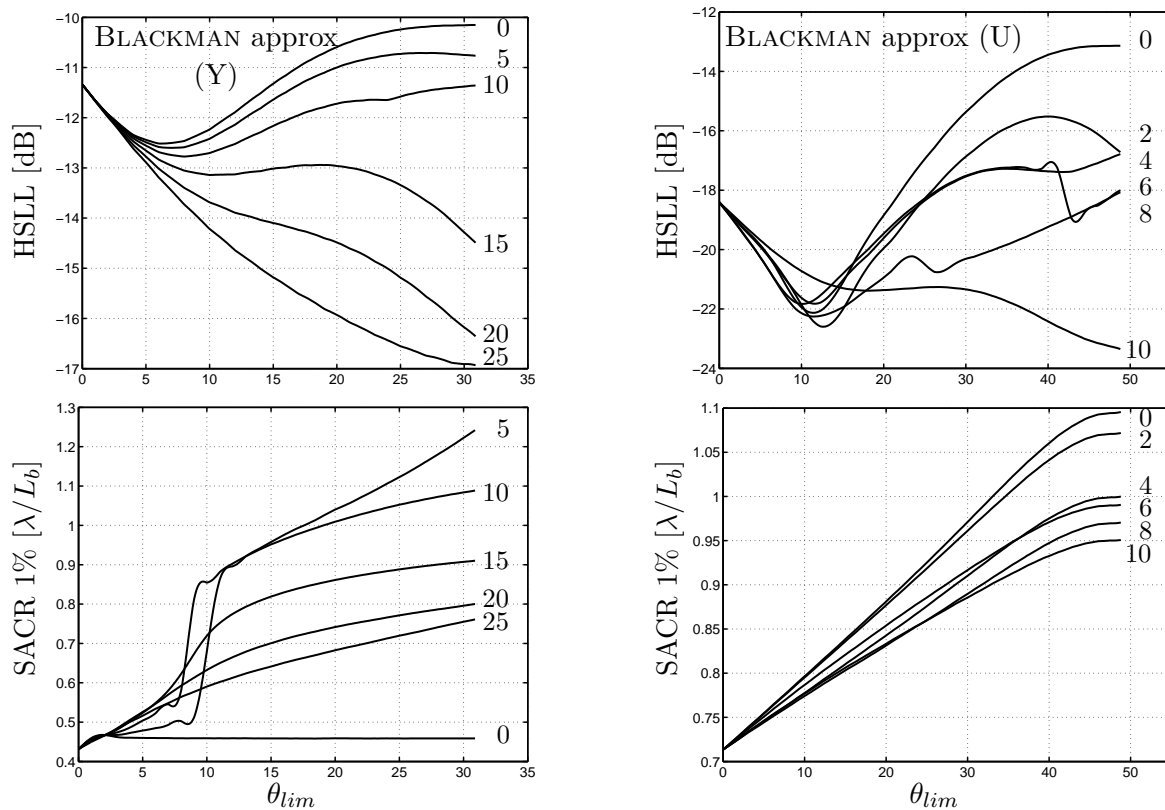


FIG. 5.14 – Variation des facteurs de mérite de la fenêtre BLACKMAN approchée en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la distance ρ_{lim} , **à gauche**, pour une configuration en Y, **à droite**, pour une configuration en U. L'introduction d'une distance limite ρ_{lim} , en deçà de laquelle la symétrie circulaire de la forme de la fenêtre est conservée, permet de diminuer la hauteur des lobes secondaires (-4 dB pour $\theta_{lim} = 10.7^\circ$ et $\rho_{lim} = 2$, (U)). Cependant le SACR reste supérieur au cas initial, la diminution de la hauteur des lobes secondaires ne compensant pas l'élargissement du lobe principal.

Dans ce cas, il existe un couple $(\theta_{lim}, \rho_{lim})$ pour lequel la distance de plus courte approche est inférieure à la valeur initiale (voir Fig. 5.15).

Là encore, il est difficile de trouver une seule explication à la présence de ce minimum. On peut toutefois remarquer que les familles de fenêtres FILLER, KAISER et MAAS, de part la présence d'un paramètre α modifiant finement l'allure de la décroissance entre la fréquence nulle et le bord de la bande passante, sont déjà les familles les plus performantes du point de vue du SACR. La combinaison de l'action de α et de l'introduction d'une dépendance angulaire et radiale sur ρ_{max} , autorise une souplesse dans la déformation de ces fenêtres que n'ont pas les fenêtres « simples », et permet de diminuer la hauteur des lobes secondaires tout en maintenant la dégradation de la largeur du lobe principal sous contrôle.

Le tableau 5.4 donne pour KAISER et MAAS, le triplet $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ et la valeur améliorée correspondante pour le SACR 1%, constituant les meilleures performances pour l'ensemble des fenêtres.

TAB. 5.4 – Paramètres optimaux $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ conduisant à une amélioration du SACR pour les fenêtres KAISER et MAAS.

Fenêtre	Paramètre	θ_{lim}	ρ_{lim}	SACR (1%) $[\lambda/L_b]$
KAISER	$\alpha = \mathbf{3.9}$	1.5	20	0.294
MAAS	$\alpha = \mathbf{4.6}$	1.3	25	0.300

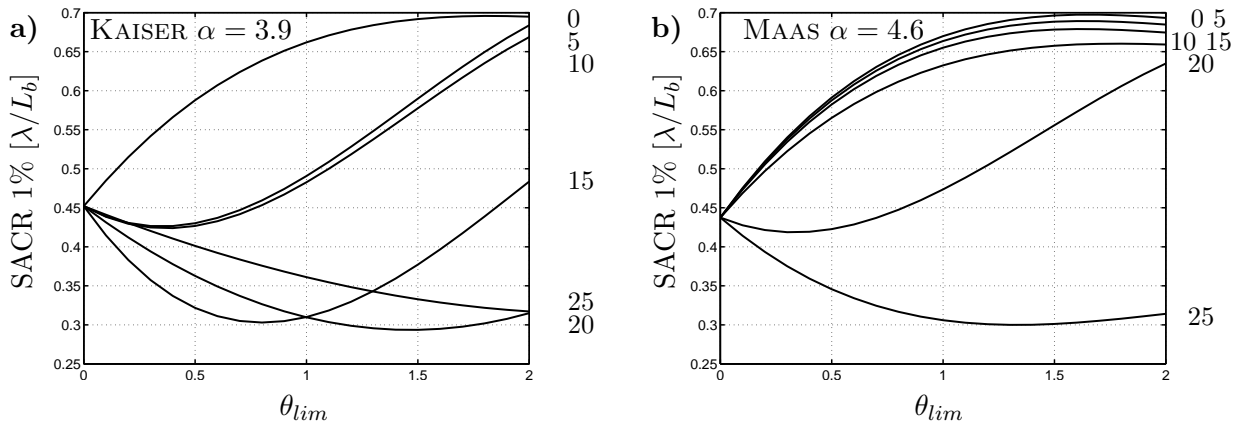


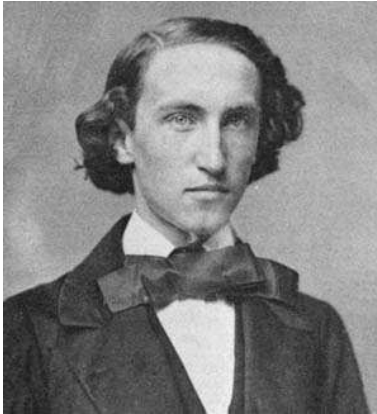
FIG. 5.15 – Variation du SACR (1%) pour les fenêtres de **a)** KAISER et **b)** MAAS en fonction de l'angle limite θ_{lim} et de la distance limite ρ_{lim} .

En conclusion, le bilan de ce travail sur l'adaptation de la forme de la fenêtre est partagé. Si la déformation des fenêtres permet effectivement d'améliorer la hauteur des lobes secondaires, et par là même la sensibilité radiométrique, la largeur du lobe principal est augmentée, dégradant la résolution spatiale. Toutefois, pour une configuration en Y, il existe un triplet $(\alpha, \theta_{lim}, \rho_{lim})$ pour lequel le SACR est légèrement amélioré. Sans doute le principal avantage de cette paramétrisation des fenêtres d'apodisation est-il de donner la possibilité de faire varier finement le compromis entre hauteur des lobes secondaires et largeur du lobe principal, permettant ainsi à un utilisateur de trouver l'adaptation de forme qui lui convient compte tenu de ses objectifs et des contraintes sur l'estimation des paramètres géophysiques.

Biographie(s)

Biographie 5.1: GIBBS, Josiah Willard

(11 Février 1839, New Haven, Etats-Unis - 28 Avril 1903, New Haven, Etats-Unis)



Gibbs a passé la quasi totalité de sa vie dans la maison de ses parents à New Haven, à deux pas du collège où il avait débuté ses études et de l'université de Yale où il travailla jusqu'à la fin de sa vie.

En 1863, il soutient la première thèse d'ingénierie des Etats-Unis, dont le sujet porte sur des méthodes géométriques pour la fabrication des engrenages.

Après 3 ans passé en Europe, à Paris, Berlin et Heidelberg, où il est influencé par Kirchhoff et Helmholtz, il retourne à Yale en 1869 et obtient un poste de professeur de mathématiques appliquées à la physique en 1871. En 1873, il publie *Méthodes graphiques en thermodynamique des fluides* et *Une méthode de représentation géométrique des propriétés thermodynamiques des*

substances par l'utilisation des aires. En 1876 et 1878, il publie les deux tomes de l'ouvrage qui le rendra célèbre *Sur l'équilibre des substances hétérogènes*. A travers ces trois publications, il définit un ensemble de méthodes simples qui vont révolutionner l'étude des procédés thermodynamiques et l'étude des moteurs à vapeur.

A partir de 1901, il travaille à l'analyse vectorielle qu'il applique à l'étude de l'orbite des comètes. Il étudie aussi la théorie électromagnétique de la lumière et, par ses travaux en mécanique statistique, pose les bases mathématiques de la mécanique quantique et des théories de Maxwell.

Bibliographie

- [1] F. J. HARRIS : On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proc. IEEE*, 66:51–83, 1978.
- [2] E. ANTERRIEU, P. WALDTEUFEL et A. LANNES : Apodization functions for 2-d hexagonally sampled sunthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 40(12):2531–2542, 2002.
- [3] N.C. GEÇKINLI et D. YAVUZ : Some novel windows and a concise tutorial for comparison of window families. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 26:501–507, 1978.
- [4] A. S. FILLER : Apodization and interpolation in fourier-transform spectroscopy. *J. Opt. Soc. Am.*, 54(6):762–767, 1964.
- [5] R.H. NORTON et R. BEER : New apodizing functions for fourier spectroscopy. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3):259–264, 1976.
- [6] A.H. NUTTALL : Some windows with very good sidelobe behavior. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 29:84–91, 1981.
- [7] A. LANNES et E. ANTERRIEU : Image reconstruction methods for remote sensing by aperture synthesis. *Proc. of IGARSS'94*, pages 2892–2903, 1994.
- [8] B. PICARD, E. ANTERRIEU, G. CAUDAL et P. WALDTEUFEL : Improved windowing functions for synthetic aperture imaging radiometers. *Proc. of IGARSS'02*, pages 2756–2758, 2002.

Chapitre 6

Passage au repère terrestre et multi-fenêtrage

Sommaire

6.1	Champ de vue observé, champ de vue reconstruit	112
6.1.1	Champ de vue observé	112
6.1.2	Champ de vue reconstruit et repliement	116
6.1.3	Champ de vue reconstruit et passage au repère terrestre	120
6.2	Rééchantillonnage des champs reconstruits	124
6.2.1	Depuis une grille cartésienne	124
6.2.2	Depuis une grille hexagonale	125
6.2.3	Propriété de translation du rééchantillonnage de FOURIER.	125
6.3	Application du multi-fenêtrage à un instrument de type MIRAS . .	126

- Quarante-deux ! Et c'est tout ce que t'as à nous montrer au bout de sept millions et demi d'années de boulot ?

- J'ai vérifié très soigneusement et c'est incontestablement la réponse exacte. Je crois que le problème, pour être tout à fait franc avec vous, est que vous n'avez jamais vraiment bien saisi la question.

Le Guide du Routard Galactique - Douglas Adams

Le passage du repère des antennes à celui de la Terre conduit à une résolution spatiale inégale dans le champ de vue reconstruit et à une déformation du maillage initialement régulier. Or, le traitement des cartes de température de brillance dans le but de retrouver les quantités physiques (humidité et salinité) impose de combiner des mesures à différents angles d'incidence sur des grilles régulières. La variation, dans le champ reconstruit, des caractéristiques de la fonction de transfert de l'instrument peut augmenter significativement les erreurs pour les pixels contenant de fortes hétérogénéités.

Une première partie de cette section est consacrée à la composition des champ de vue observés et reconstruits ainsi qu'aux propriétés du passage du repère des antennes au repère terrestre. Une seconde aborde le problème du rééchantillonnage des données.

Concernant le problème de la résolution spatiale variant dans le champ reconstruit, le Groupe de Conseils Scientifiques (SAG pour *Science Advisory Group*) de la mission SMOS, durant sa cinquième réunion, a suggéré l'étude de la technique de multi-fenêtrage, dite encore « Strip adaptive » [1]. Alors que la simple apodisation consiste à convoluer la scène reconstruite par une seule et même fenêtre pour l'ensemble des pixels, le multi-fenêtrage vise à appliquer une fenêtre différente à chaque pixel dans le but d'obtenir une résolution constante dans le repère terrestre. Les résultats présentés sont tirés d'une étude présentant les conséquences de cette technique sur la qualité de l'estimation de l'humidité des sols à laquelle j'ai participé [2].

6.1 Champ de vue observé, champ de vue reconstruit

6.1.1 Champ de vue observé

Si les lobes arrières des antennes sont négligés, le radiomètre imageur à synthèse d'ouverture observe l'intégralité du demi-espace situé devant lui. Dans le repère des cosinus directeurs appelé aussi repère instrumental ou repère des antennes, cet espace est contenu dans le cercle unité (voir Fig. 6.2). L'étendue du champ de vue observé vaut alors $\Delta\xi = 2$. A l'intérieur de ce cercle, la température d'antenne dépend de la contribution de la terre et de la portion visible de la voûte céleste, appelée simplement « Ciel » par la suite.

Or, la position et la forme de la terre à l'intérieur du cercle unité dépendent notamment de l'inclinaison α de l'instrument. Ce paramètre peut être ajusté de façon à augmenter la largeur de fauchée dans le champ de vue reconstruit [3]. La figure 6.1 décrit les référentiels qui entrent en jeu lors de la paramétrisation de la position de la terre et du ciel dans le champ de vue observé. Rappelons que le déplacement de l'instrument se fait selon l'axe Y .

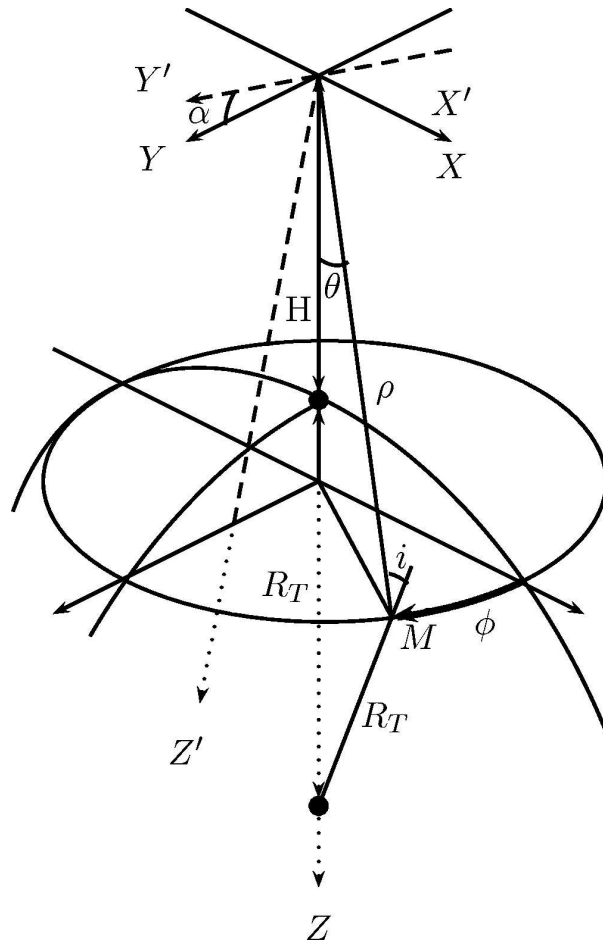


FIG. 6.1 – Référentiels utilisés dans la caractérisation du champ de vue observé d'un RIS. Le déplacement se fait le long de l'axe Y. Il peut être choisi d'incliner le plan contenant le réseau interférométrique d'un angle α . Les cosinus directeurs ξ et η sont directement liés aux coordonnées polaires (ρ, θ, ϕ) désignant respectivement la distance à la source, la colatitude et l'azimut : $\xi = x/\rho = \sin \theta \cos \phi$ et $\eta = y/\rho = \sin \theta \sin \phi$.

Cas $\alpha = 0$

Le repère considéré est alors $(OXYZ)$. L'instrument étant situé à une altitude H , la position du point M observé est définie par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou par ses coordonnées polaires (ρ, θ, ϕ) où ρ est la distance mesurée depuis O , θ la colatitude et ϕ l'azimut. L'incidence en ce point est donnée par l'angle i . Les cosinus directeurs sont alors :

$$\xi = \sin \theta \cos \phi \quad (6.1)$$

$$\eta = \sin \theta \sin \phi \quad (6.2)$$

L'horizon terrestre qui détermine la limite entre la terre et le ciel est caractérisé par une incidence $i = \theta_h$. La colatitude pour les points de l'horizon est :

$$\sin \theta_h = \frac{R_T}{R_T + H} \quad (6.3)$$

où R_T est le rayon de la terre supposée sphérique. Dans le repère des cosinus directeurs (ξ, η) , la terre est alors un disque de rayon $r = \sin \theta_h$ centré en $(0, 0)$, dont le périmètre est caractérisé par l'équation de l'horizon terrestre :

$$\left(\frac{\xi}{\sin \theta_h} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sin \theta_h} \right)^2 = 1 \quad (6.4)$$

Cas $\alpha \leq \pi/2 - \theta_h$

Pour $\alpha > 0$, le repère considéré est $(OX'Y'Z')$ et les cosinus directeurs sont ξ' et η' . Le passage du référentiel $(OXYZ)$ à ce référentiel se fait simplement à l'aide de la matrice de rotation d'angle α :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

ce qui, pour les cosinus directeurs, revient à :

$$\xi' = \xi \quad (6.6)$$

$$\eta' = \eta \cos \alpha - \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \sin \alpha \quad (6.7)$$

Le passage de $(OX'Y'Z')$ à (OXY) se fait simplement à l'aide de la matrice de rotation d'angle $-\alpha$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Dans le repère des cosinus directeurs, le passage d'un repère à l'autre se fait alors ainsi :

$$\begin{cases} \xi = \xi' \\ \eta = \eta' \cos \alpha + \eta' \sin \alpha \end{cases} \quad (6.9)$$

Dans le repère (ξ', η') , la terre est alors délimitée par une ellipse de grand axe $\sin \theta_h$ et de petit axe $\sin \theta_h \cos \alpha$ centrée en $(0, -\cos \theta_h \sin \alpha)$:

$$\left(\frac{\xi'}{\sin \theta_h} \right)^2 + \left(\frac{\eta' + \cos \theta_h \sin \alpha}{\sin \theta_h \cos \alpha} \right)^2 = 1 \quad (6.10)$$

Cas $\alpha > \pi/2 - \theta_h$

La relation (6.10) n'est valable que pour des inclinaisons telles que $\alpha < \pi/2 - \theta_h$. Au delà de cette limite, une partie de la terre est située dans le demi-espace arrière de l'instrument. Dans le repère des cosinus directeurs, l'ellipse vient couper le cercle unité aux points d'intersections :

$$\xi'_{lim} = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \cos^2 \theta_h}}{\sin \alpha}, \quad \eta'_{lim} = -\frac{\cos \theta_h}{\sin \alpha} \quad (6.11)$$

La terre est délimitée par l'ellipse décrite par la relation (6.11) au dessus de ces points et par le cercle unité en dessous.

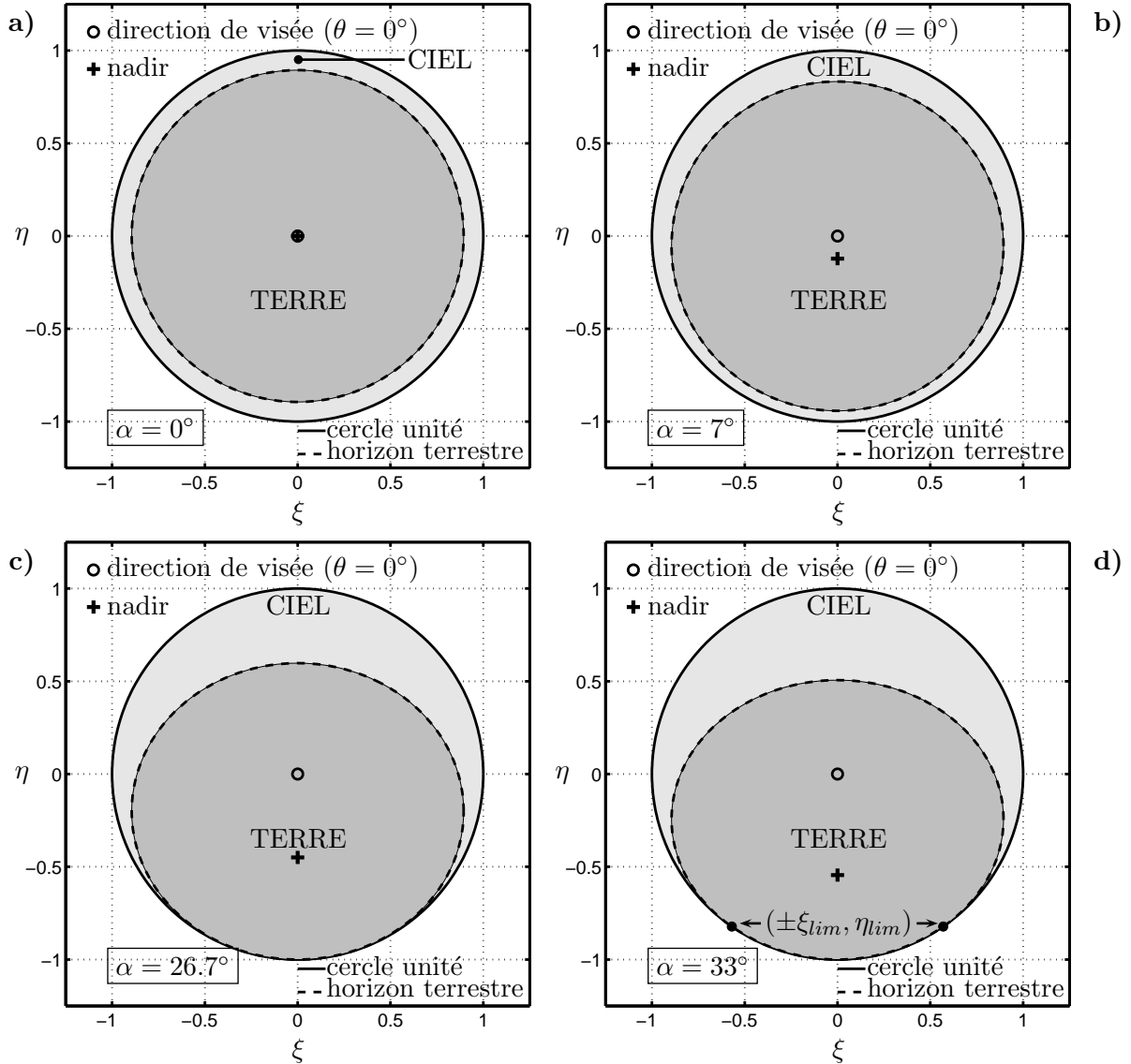


FIG. 6.2 – Modification de la forme de la terre dans le repère des cosinus directeurs avec l'inclinaison de l'instrument ($H=775$ km et $\delta u = 0.875$). **a)** L'horizon terrestre est un cercle pour une inclinaison nulle et **b)** une ellipse pour une inclinaison faible. **c)** L'inclinaison $\alpha = 26.7^\circ$ est l'inclinaison critique $\pi/2 - \theta_h$. **d)** L'inclinaison $\alpha = 33^\circ$ est proche de l'inclinaison prévue pour MIRAS. Dans ce cas, l'horizon terrestre décrit une ellipse dans sa partie supérieure et le cercle unité dans sa partie inférieure.

La figure 6.2 illustre la position de la terre dans le cercle unité pour quatre inclinaisons de l'instrument : $\alpha = 0$, $\alpha < \pi/2 - \theta_h$, $\alpha = \pi/2 - \theta_h$, $\alpha > \pi/2 - \theta_h$, avec $H = 755$ km. Dans le dernier cas, l'inclinaison $\alpha = 33^\circ$ est proche de l'inclinaison qu'aura l'instrument MIRAS.

6.1.2 Champ de vue reconstruit et repliement

Les relations entre le champ de vue et l'intervalle d'échantillonnage du domaine de FOURIER exprimées plus haut permettent de trouver la valeur de δu remplissant le critère de SHANNON-NYQUIST. La largeur du champ de vue observé étant $\Delta\xi = 2$ (diamètre du cercle unité), l'intervalle d'échantillonnage doit être tel que :

$$\delta u = \frac{2}{\sqrt{3}\Delta xi} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 \quad (6.12)$$

pour un maillage hexagonal, et :

$$\delta u = \frac{1}{\Delta xi} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (6.13)$$

pour un maillage cartésien. Or, que ce soit dans le cas de MIRAS ou du HUT2D, il a été choisi une distance entre les antennes conduisant à un sous-échantillonnage du domaine de FOURIER ($\delta u = 0.875$ pour MIRAS et $\delta u = 0.7$ pour HUT2D) et donc à un repliement du cercle unité à l'intérieur du champ de vue reconstruit. Ce choix se justifie en remarquant qu'en augmentant la distance entre les antennes, la plus grande distance entre deux antennes du réseau interférométrique augmente elle aussi, améliorant ainsi la résolution spatiale δxi . On remarquera que les repliements (aussi nommés *alias*) peuvent tout aussi bien être vus comme les chevauchements de répliques situées dans les mailles contigües.

Pour le HUT2D, on distingue à l'intérieur du champ de vue reconstruit (FOV pour *Field Of View*, ici un carré de 64×64 pixels) le champ de vue exempt de repliement (AFFOV pour *Alias Free Field Of View*). Etant donnée l'altitude standard de vol pour le HUT2D, ces zones « aliasées » correspondent uniquement au repliement de la terre dans le FOV (voir Fig. 6.3).

Pour MIRAS, le champ de vue observé est composée de la Terre et du Ciel. Dans un deuxième temps, on distingue donc différentes zones à l'intérieur du champ de vue reconstruit (un hexagone de 128×128 pixels) :

- **la zone exempte d'aliasing**. Elle est elle-même composée de deux zones :

- une zone ne comportant aucun repliement (un hexagone déformé au centre du champ de vue, en rouge sur la figure 6.4-c)

- une zone dans laquelle vient s'étendre une réplique du Ciel (en orange Fig. 6.4-c). Il est possible de retrouver la valeur de la température de brillance T_{AFFOV} dans une zone « élargie » en retranchant aux visibilitées mesurées par l'instrument les visibilitées correspondant à la contribution du Ciel, à condition de connaître la distribution des températures de brillances T_{Ciel} dans cette zone. Il suffit de remarquer que la relation entre les visibilitées et la température de brillance (3.38) est linéaire.

La carte de température de brillance dans cette zone « élargie » *exempte* d'aliasing sera donc reconstruite à partir des visibilitées V_{Terre} , corrigées de la contribution du Ciel. Par la suite, les cartes de T_b seront reconstruites dans toute cette zone (appelée abusivement zone exempte d'aliasing ou AFFOV) et les visibilitées V désigneront les visibilitées corrigées.

- **la zone aliasée.** Cette zone ne pourra pas être exploitée lors de la reconstruction. On distingue quatre catégories dans cette zone :
 - le ciel. Cette zone étant située au-delà de l'horizon terrestre, elle n'est pas exploitée (en bleu nuit dans Fig. 6.4-c).
 - les repliements dus à :
 - une réplique la Terre (cyan, Fig. 6.4)
 - une réplique de la Terre et à une réplique du Ciel (azur, Fig. 6.4)
 - deux répliques de Terre (bleu foncé, Fig. 6.4)

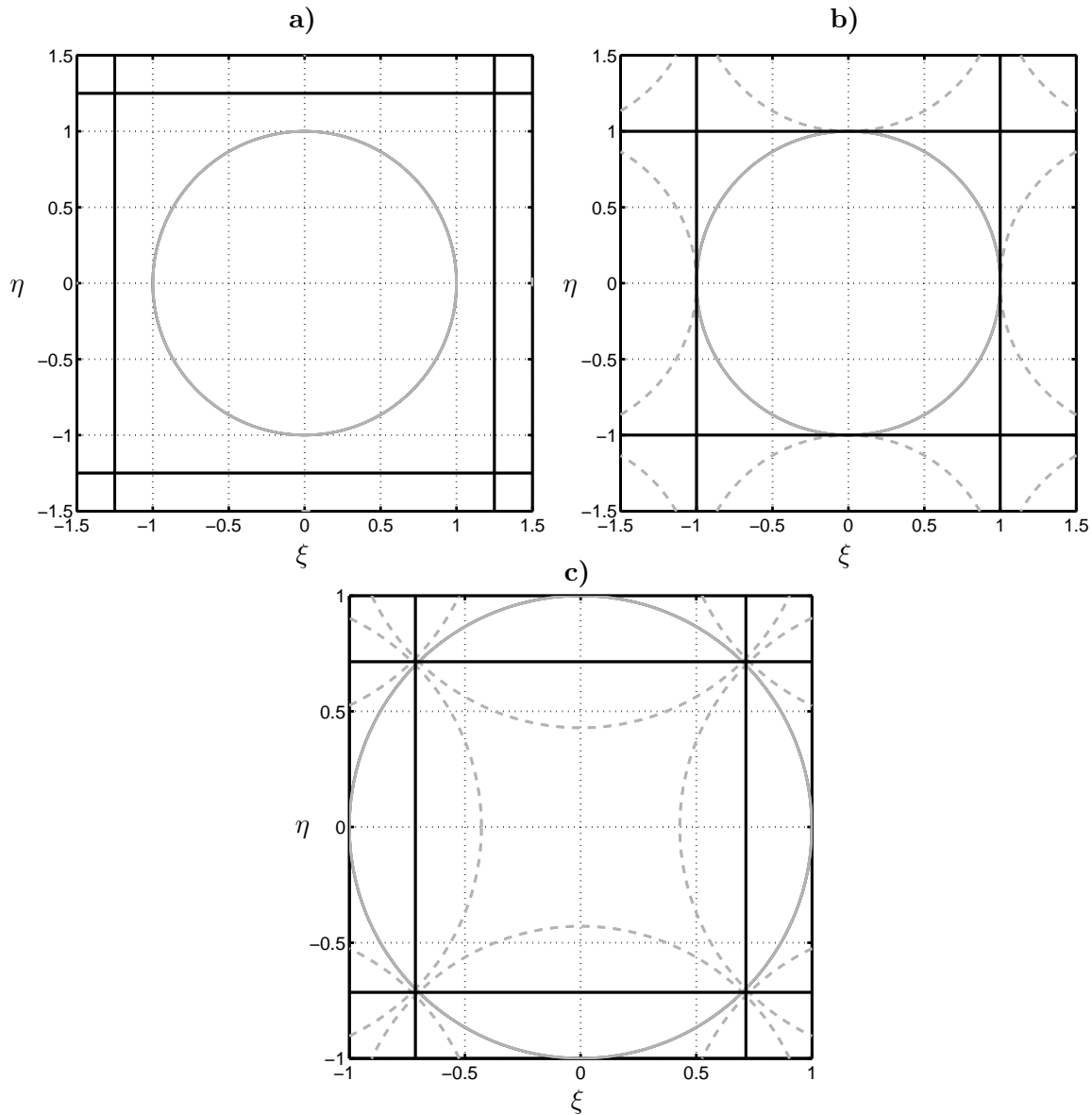


FIG. 6.3 – Composition du champ de vue reconstruit du HUT2D pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférométrique. A l'intérieur de la maille carrée (64×64 pixels), on retrouve le cercle unité (traits pleins) qui représente le demi-espace qu'observe l'instrument. **a)** L'espace $d = \delta u \lambda$ entre les antennes conduit à un sur-échantillonnage du domaine de FOURIER ($\delta u < 0.5$) et le cercle unité est largement compris dans le champ de vue reconstruit. **b)** L'espace entre les antennes est choisi de façon à parfaitement répondre au critère de SHANNON-NYQUIST, $\delta u = 0.5$ et le cercle unité est tangent au bord de la maille. **c)** La valeur retenue $\delta u = 0.7$ pour l'instrument réel, conduit à un sous-échantillonnage du domaine de FOURIER et au repliement du cercle unité à l'intérieur du champ de vue reconstruit (traits pointillés). La zone exempte de repliement (AFFOV), contenue à l'intérieur des pointillés, est la seule zone exploitable après la reconstruction.

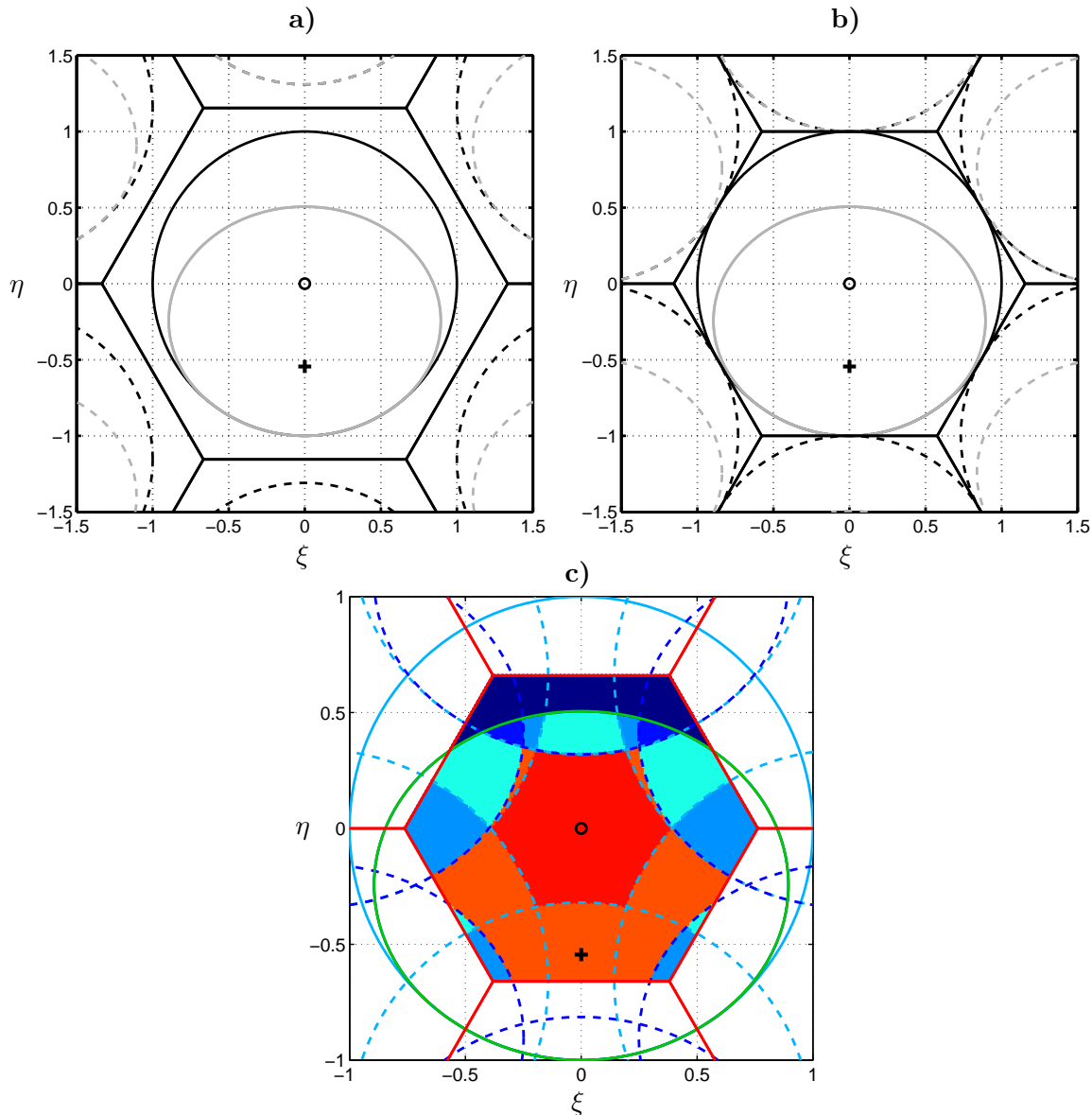


FIG. 6.4 – Composition du champ de vue reconstruit de MIRAS pour plusieurs distances entre deux antennes du réseau interférométrique. A l'intérieur de la maille hexagonale (128×128 pixels), on retrouve le cercle unité (traits pleins en noir) dans lequel on distingue l'ellipse représentant la Terre (traits plein en gris), et le Ciel (entre l'ellipse et le cercle unité). **a)** L'espace $d = \delta u \lambda$ entre les antennes conduit à un sur-échantillonnage du domaine de FOURIER ($\delta u < 1/\sqrt{3}$) et le cercle unité est largement compris dans le champ de vue reconstruit. **b)** L'espace entre les antennes est choisi de façon à parfaitement répondre au critère de SHANNON-NYQUIST, $\delta u = 1/\sqrt{3}$ et le cercle unité est tangent au bord de la maille. **c)** La valeur retenue $\delta u = 0.875$ pour l'instrument réel, conduit à un sous-échantillonnage du domaine de FOURIER et au repliement du cercle unité à l'intérieur du champ de vue reconstruit (traits pointillés). Une zone élargie, abusivement dite exempte de repliement, représentée par les zones rouge et orange, est la seule zone exploitable après la reconstruction.

6.1.3 Champ de vue reconstruit et passage au repère terrestre

Le passage du repère des antennes dont les coordonnées sont les cosinus directeurs au repère terrestre dont les coordonnées sont les couples (latitude, longitude) est décrit ci-dessous.

La première étape consiste à passer, le cas échéant, des coordonnées (ξ', η') correspondant à un instrument incliné, aux coordonnées (ξ, η) ainsi que décrit dans la section précédente par la relation 6.9.

Dans un deuxième temps, il s'agit de passer du repère des antennes au repère terrestre (OXYZ), en considérant l'altitude H de l'instrument et R_T le rayon terrestre :

$$\sin \theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad (6.14)$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (6.15)$$

$$\Rightarrow \rho = (R_T + H) \cos \theta - \sqrt{(R_T + H)^2 \cos^2 \theta - H(2R_T + H)} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho \xi \\ y = \rho \eta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad (6.17)$$

Dans un troisième temps, si Lon_{sat} et Lat_{sat} sont respectivement la longitude et latitude du point sub-satellite (en radian), le passage au repère terrestre se fait alors à l'aide de deux matrices de rotation R_x et R_z , respectivement d'un angle $a = -Lat_{sat} - \pi/2$ autour de l'axe X et d'un angle $b = -Lon_{sat} + \pi/2$ autour de l'axe Z :

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$$R_Z = \begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Les coordonnées cartésiennes (x_G, y_G, z_G) dans le repère de Greenwich sont alors :

$$[x_G \ y_G \ z_G] = R_Z R_X \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - (R_T + H) \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Finalement, la longitude Lon et la latitude Lat du point courant sont :

$$\begin{cases} Lon = \arctan\left(\frac{y_G}{x_G}\right) \\ Lat = \arctan\left(\frac{z_G}{\sqrt{x_G^2 + y_G^2}}\right) \end{cases} \quad (6.21)$$

Les figures 6.5, 6.6 et 6.7 illustrent les caractéristiques du passage du repère des antennes au repère terrestre pour l'instrument MIRAS ($H=755$ km, $\alpha = 33^\circ$).

La figure 6.5 montrent comment la résolution spatiale varie dans le champ de vue reconstruit projeté dans le repère terrestre. Alors que la résolution spatiale est isotrope dans tout le plan des cosinus directeurs (symbolisé par des cercles de rayons $3\delta\xi$ dans la figure 6.5-a), elle varie

selon les directions et la position du pixel considéré dans le champ de vue reconstruit dans le repère terrestre. La résolution spatiale en ce pixel est déterminée par le grand axe d'une ellipse (résolution radiale) et, dans une direction orthogonale, par son petit axe (résolution transverse).

Cette déformation se comprend simplement en faisant l'hypothèse d'une terre plate et en se rappelant que la résolution spatiale d'un RISO est celle d'une antenne dont le diamètre est égale à la plus grande distance entre deux antennes. Dans le cas d'un instrument non incliné, l'intersection du gain de cette antenne « synthétisée » avec une surface plane est un cercle centré sur le point sub-satellite (la résolution spatiale est isotrope) et va naturellement s'allonger en une ellipse au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre du champ de vue.

A ce phénomène s'ajoute l'effet de la rotondité de la Terre qui va conduire à une modification de l'orientation de l'ellipse au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe Y , le long du déplacement du satellite, ainsi que l'on peut le remarquer sur la figure 6.5-d. Ainsi, la résolution n'est isotrope que pour deux pixels situés de part et d'autre de l'axe Y , proches du centre des deux cercles marqués de rouge sur cette même figure.

D'autre part, comme le montre la figure (6.6), une grille régulière dans le repère terrestre ne l'est pas dans le repère des cosinus directeurs. Le paragraphe suivant est consacré aux rééchantillonnages nécessaires à l'obtention d'une grille régulière dans le repère terrestre.

Les figures 6.8-a et 6.8-b permettent d'établir respectivement, d'une part la variation de la distance mesurée par rapport au point sub-satellite et les dimensions du champ de vue reconstruit et d'autre part la variation de l'angle d'incidence sous lequel est effectuée la mesure, rappelant dans le même temps la capacité multi-angulaire des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture.

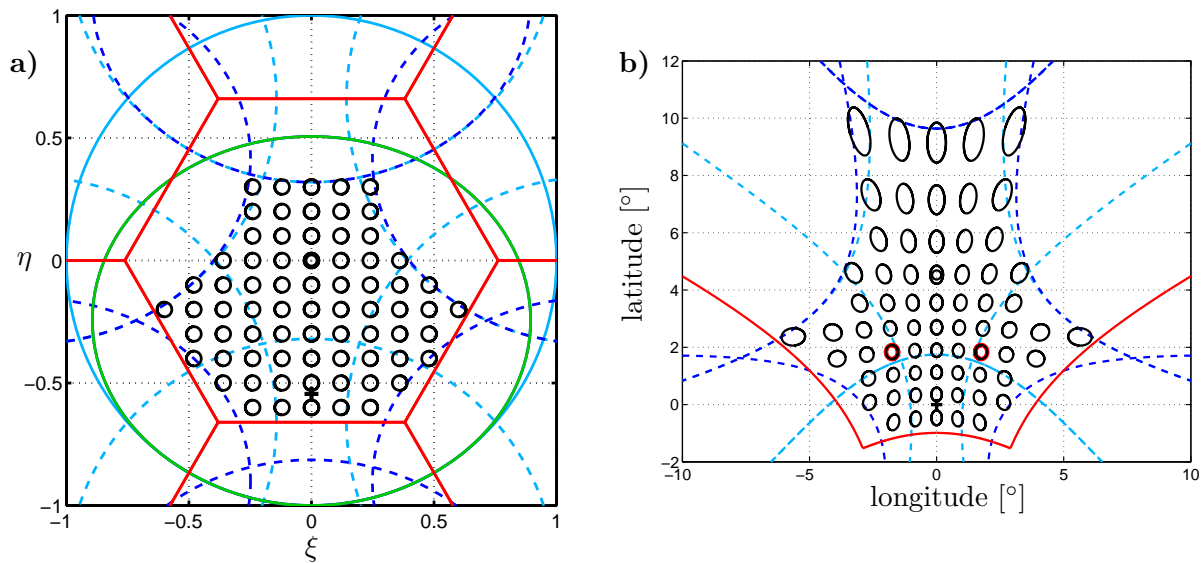


FIG. 6.5 – Déformation de la fonction de transfert instrumentale lors du passage du repère des antennes au repère terrestre : **a)**, la résolution spatiale est isotrope pour tous les pixels du plan des cosinus directeurs alors que **b)**, dans le repère terrestre, elle varie selon les directions et la position du pixel dans le champ de vue reconstruit. On observe aussi la déformation de la grille régulière dans le domaine des antennes à travers la courbure des lignes joignant le centre des ellipses.

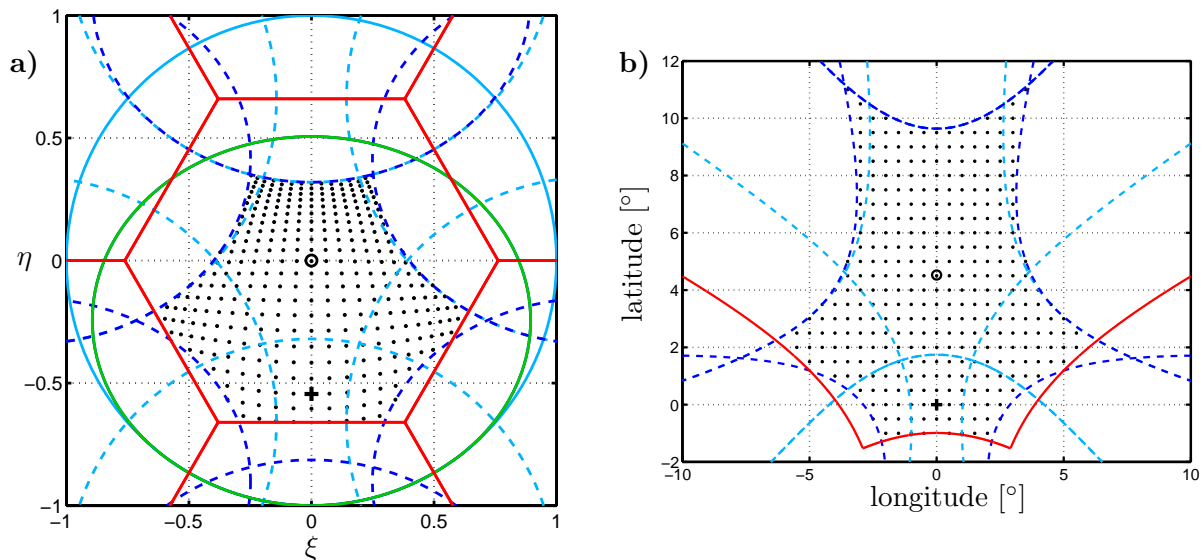


FIG. 6.6 – Déformation d'une grille régulière dans le repère terrestre lors du passage dans le repère des antennes. Le traitement des paramètres géophysiques demande à travailler sur une grille régulière dans le repère terrestre. Il est donc nécessaire d'interpoler la carte de température de brillance dans le domaine des cosinus directeurs, puisque ces points ne correspondent pas aux noeuds de la grille d'échantillonnage.

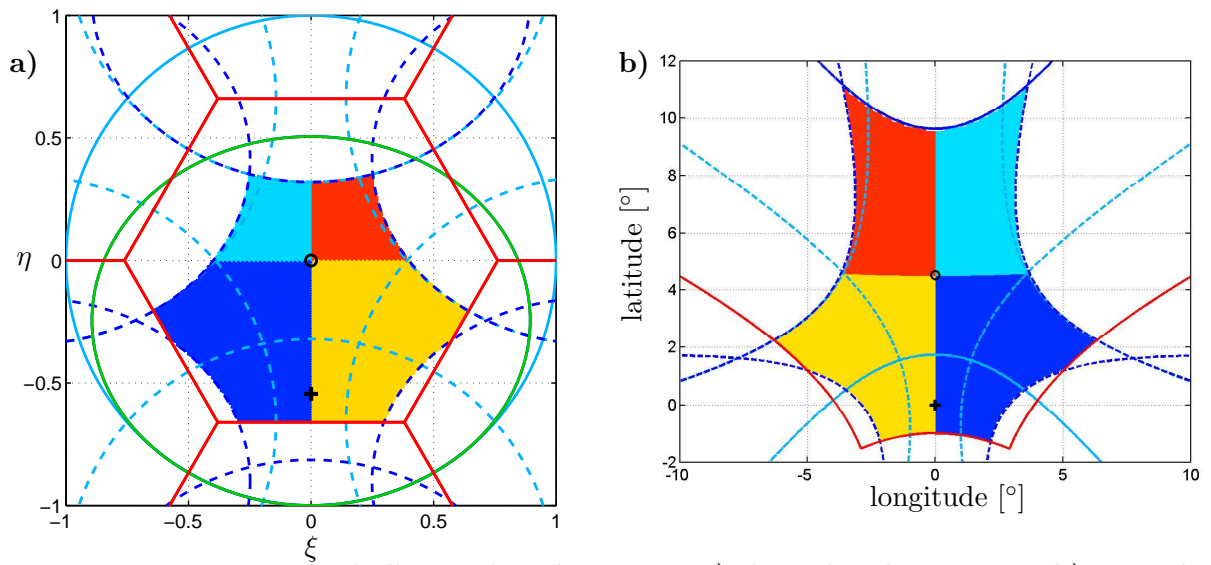


FIG. 6.7 – Renversement de l'image lors du passage **a)** du repère des antennes **b)** au repère terrestre : le changement de repère conduit à un renversement de l'image par rapport à l'axe ($\xi = 0$)

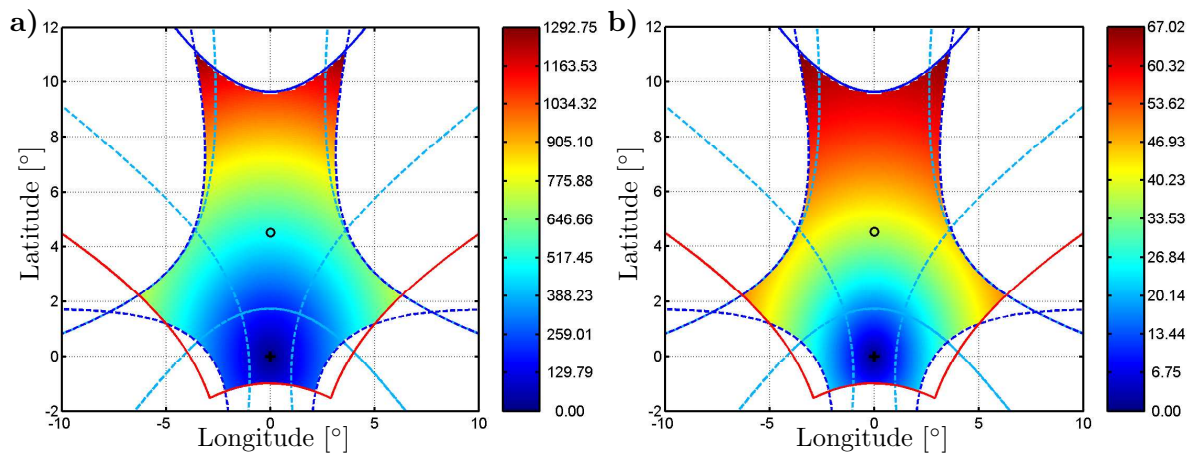


FIG. 6.8 – **a)** Distances ([km]) mesurées par rapport au point sub-satellite et **b)** variation de l'angle d'incidence ([°]) de la mesure (champ de vue reconstruit, repère terrestre).

6.2 Rééchantillonnage des champs reconstruits

Comme il est démontré dans le paragraphe précédent, la grille d'échantillonnage des cartes de températures de brillance n'est pas régulière dans le repère terrestre. Il est toutefois possible, **sous certaines conditions**, d'obtenir la valeur de la température de brillance en tout point (ξ, η) ne coïncidant pas avec les noeuds de la grille d'échantillonnage \mathbb{G}_ξ et donc de rééchantillonner la carte de température de brillance dans le repère terrestre sur une grille régulière, et ce, sans perte d'information ni déformation.

Pour cela, seront considérées dans ce paragraphe **des cartes de températures à bande passante limitée**, soit que la méthode de reconstruction conduise directement à ce cas particulier, soit que ces cartes aient été apodisées.

Nous allons rappeler ici les expressions des fonctions de rééchantillonnage, dites aussi d'interpolation, selon que les données sont initialement échantillonnées sur une grille cartésienne ou hexagonale.

6.2.1 Depuis une grille cartésienne

Considérons l'image $T(k\delta x, l\delta x)$, échantillonnée sur une grille cartésienne régulière à maille carrée avec $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, $l = 0, 1, \dots, (N-1)$ et δx le pas d'échantillonnage. La valeur de T au point (ξ', η') est liée à la transformée de FOURIER continue $\widehat{T}(u, v)$ de T :

$$T(\xi', \eta') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{T}(u, v) e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} dudv \quad (6.22)$$

Si le critère de SHANNON est respecté, les composantes de FOURIER de T sont non nulles uniquement pour $|u| \leq 1/(2\delta x)$ et $|v| \leq 1/(2\delta x)$. Dans ce cas, le spectre $\widehat{T}(u, v)$ du signal continu est lié au spectre $\widehat{T}_d(u, v)$ du signal discret par $\widehat{T}(u, v) = (\delta x)^2 \widehat{T}_d(u, v)$. La relation précédente devient alors :

$$T(\xi', \eta') = \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} (\delta x)^2 \widehat{T}_d(u, v) e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} dudv \quad (6.23)$$

Or, le spectre discret $\widehat{T}_d(u, v)$ est lié par une transformée de FOURIER discrète à $T(k\delta x, l\delta x)$:

$$T(\xi', \eta') = (\delta x)^2 \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} T(k\delta x, l\delta x) e^{-2j\pi(uk\delta x + vl\delta x)} \right) e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} dudv \quad (6.24)$$

$$T(\xi', \eta') = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} T(k\delta x, l\delta x) \left(\int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \delta x e^{2j\pi u(\xi' - k\delta x)} du \int_{-1/(2\delta x)}^{+1/(2\delta x)} \delta x e^{2j\pi v(\eta' - l\delta x)} dv \right) \quad (6.25)$$

$$T(\xi', \eta') = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} T(k\delta x, l\delta x) \operatorname{sinc}\left(\frac{\xi' - k\delta x}{\delta x}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\eta' - l\delta x}{\delta x}\right) \quad (6.26)$$

Cette dernière relation généralise simplement la fonction d'interpolation de SHANNON dans un cas à deux dimensions :

$$e_o(x_1, x_2) = \operatorname{sinc}(x_1/\delta x) \operatorname{sinc}(x_2/\delta x) \quad (6.27)$$

avec $x_1 = (\xi' - k\delta x)$ et $x_2 = (\eta' - l\delta x)$.

6.2.2 Depuis une grille hexagonale

La relation est considérablement compliquée dans le cas d'un maillage hexagonal. Anterrieu *et al.*[4] ont établi la fonction d'interpolation dans ce cas :

$$e_0(x_1, x_2) = \frac{1}{6} \left(\frac{\sin \pi \frac{3x_1 + \sqrt{3}x_2}{3\delta x}}{\pi \frac{\sqrt{3}x_2}{3\delta x}} \operatorname{sinc} \frac{x_1 - \sqrt{3}x_2}{3\delta x} - \frac{\sin \pi \frac{3x_1 - \sqrt{3}x_2}{3\delta x}}{\pi \frac{\sqrt{3}x_2}{3\delta x}} \operatorname{sinc} \frac{x_1 + \sqrt{3}x_2}{3\delta x} + 4 \operatorname{sinc} \frac{2x_1}{3\delta x} \operatorname{sinc} \frac{2\sqrt{3}x_2}{3\delta x} \right) \quad (6.28)$$

avec $x_1 = (\xi' - k\sqrt{3}\delta x/2)$ et $x_2 = (\eta' - l\delta x)$.

6.2.3 Propriété de translation du rééchantillonnage de Fourier.

Dans le cas de cartes de températures de brillance à bande passante limitée, l'interpolation en point donné (ξ', η') peut être effectuée à l'aide d'une simple transformée de FOURIER discrète inverse du spectre $\hat{T}(u, v)$ (obtenu par exemple par une FFT de l'image initiale) :

$$T(\xi', \eta') = \sum_{u, v \in H, R} \{ \mathbf{U}T(\xi, \eta) \} e^{2j\pi(u\xi' + v\eta')} \quad (6.29)$$

où \mathbf{U} est l'opérateur de transformée de FOURIER.

De plus, d'après la propriété de translation de la transformée de FOURIER, les composantes de FOURIER de $T(\xi + \xi', \eta + \eta')$ sont égales à $\hat{T}(u, v) \exp[-2j\pi(u\xi' + v\eta')]$. La méthode d'interpolation ou de rééchantillonnage employée devrait alors être indépendante de toute translation. Or, la figure 6.9 montre que, si l'interpolation de SHANNON est bien indépendante de la translation, une interpolation bilinéaire, telle qu'utilisée par Camps *et al.* [5] ne l'est clairement pas, l'image rééchantillonnée faisant apparaître des artefacts dus à l'échantillonnage hexagonal de l'image initiale.

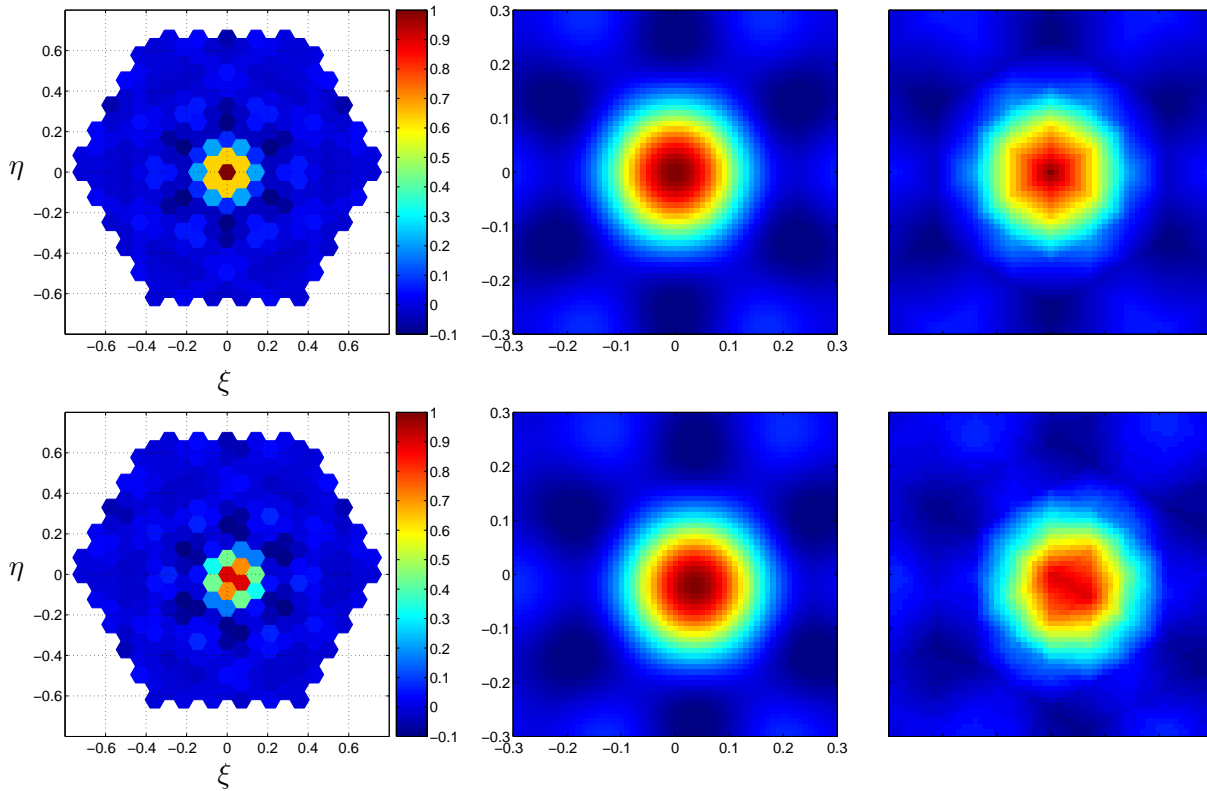


FIG. 6.9 – Propriété de translation de deux méthodes d'interpolation, cas d'un maillage hexagonal avec $N=256$ pixels. **En haut** : même lorsque la carte n'est pas translatée (à gauche), l'interpolation de FOURIER (au centre) et une interpolation bilinéaire (à droite) ne conduisent pas au même résultat, ici rééchantillonné sur une grille cartésienne. Ce dernier comprend des artefacts dû au maillage hexagonal initial, que l'on ne retrouve pas dans le premier cas. **En bas**, lorsque la carte est translatée vers un point (ξ', η') n'appartenant pas au maillage initial (à gauche), le résultat est clairement la translation du cas précédent pour l'interpolation de FOURIER (au centre), ce qui n'est pas le cas pour l'interpolation bilinéaire (à droite).

6.3 Application du multi-fenêtrage à un instrument de type MI-RAS

La famille de fenêtres de KAISER [6] a été sélectionnée pour être à la base de la construction des fenêtres qui seront appliquées à chaque pixel du champ reconstruit :

$$\widehat{W}(u, v) = \frac{I_0\left(\alpha\sqrt{1-\bar{\rho}^2}\right)}{I_0(\alpha)} \quad (6.30)$$

où I_0 est la fonction de BESSEL modifiée d'ordre 0, $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$ et α est un réel positif (pour $\alpha = 0$, on obtient une fenêtre rectangle). La valeur de ce paramètre modifie la décroissance de la fenêtre $\widehat{W}(u, v)$ depuis la fréquence nulle jusqu'au bord de la bande passante, modifiant ainsi les caractéristiques de $W(\xi, \eta)$ dans le repère des antennes. Pour un pixel (ξ, η) et un paramètre α donné, la fonction de transfert est à symétrie circulaire dans le repère des cosinus directeurs et elliptique le repère terrestre (voir Fig. 6.10).

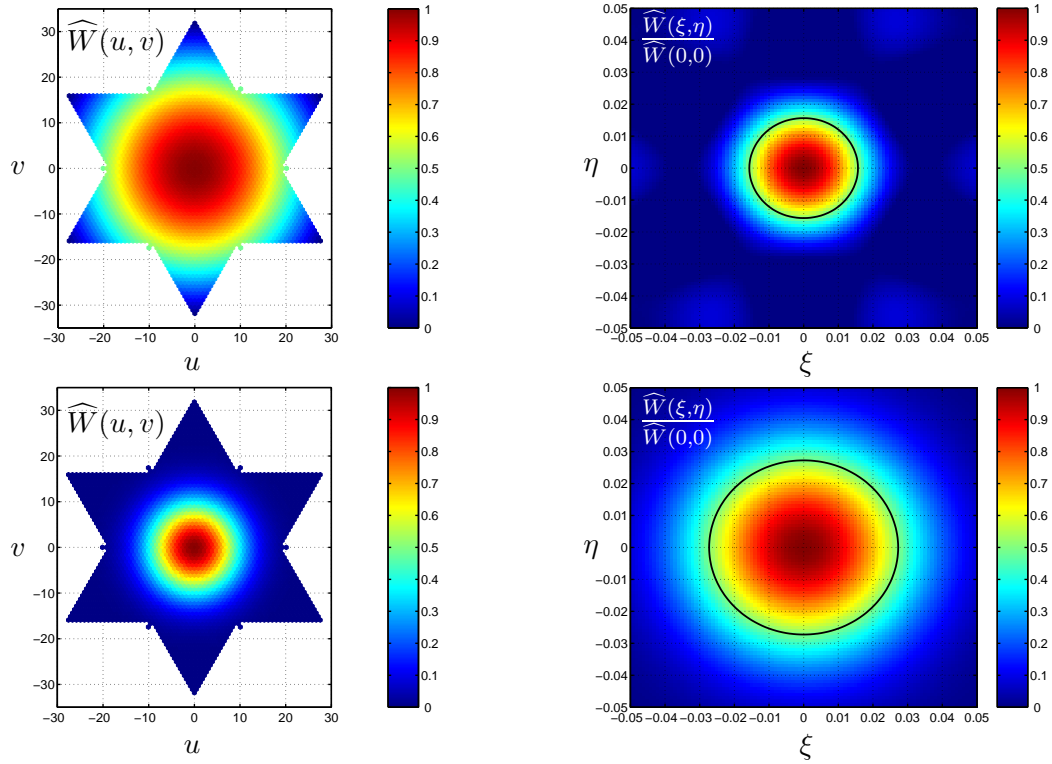


FIG. 6.10 – La fenêtre de KAISER pour deux valeurs du paramètre α . **A gauche**, la fenêtre a une symétrie circulaire dans le domaine de FOURIER mais, **à droite**, une symétrie elliptique dans le domaine spatial (l'ellipse trace le contour à -3dB).

L'idée sous-jacente au multi-fenêtrage est d'appliquer une fenêtre d'apodisation propre à chaque pixel (ξ, η) (sur une grille régulière dans le repère terrestre) pour obtenir une résolution isotrope dans le champ reconstruit projeté sur Terre.

$$T_w(\xi, \eta) = \sum_{u,v} \sum_{\in H,R} \widehat{W}_{\xi,\eta}(u, v) e^{+2j\pi(u\xi + v\eta)} \quad (6.31)$$

Le paramètre α contrôlant la forme de la fenêtre, il lui est ajouté une dépendance angulaire à l'intérieur de la bande passante, de façon à rendre la fenêtre elliptique dans le repère des cosinus directeurs, et donc, avec la bonne inclinaison et la bonne ellipticité, à symétrie circulaire dans le repère terrestre. Pour un pixel donné (ξ, η) et pour chaque point (u, v) de la bande passante, le paramètre α est calculé à partir d'une simple relation linéaire :

$$\alpha = \alpha(u, v) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (6.32)$$

où $\tan \varphi = v/u$ et $\varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$, α_1 et α_2 définis comme sur la figure 6.11. Cette relation a été élaborée de façon à faire varier α linéairement entre α_1 et α_2 pour $\varphi \in [\varphi_1 \varphi_2]$ et à conserver la symétrie de la fenêtre $\widehat{W}(u, v)$. La figure 6.12 montre que les valeurs de ces 3 paramètres (φ_2 est lié à φ_1) contrôlent bien l'ellipticité de la fenêtre dans le domaine de FOURIER et donc dans le domaine spatial.

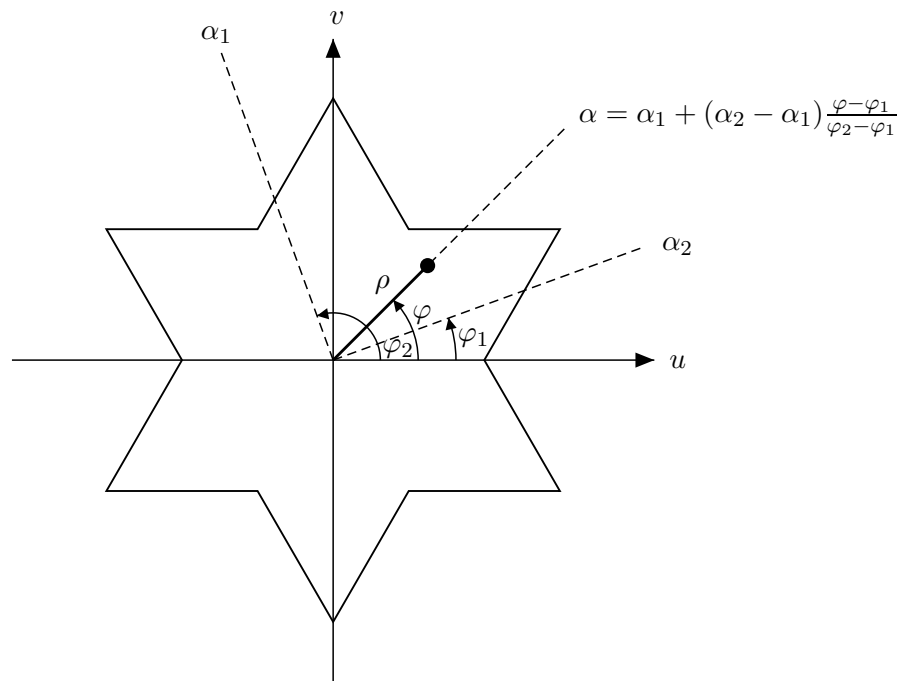


FIG. 6.11 – Paramétrisation linéaire du paramètre α de la famille de fenêtre KAISER.

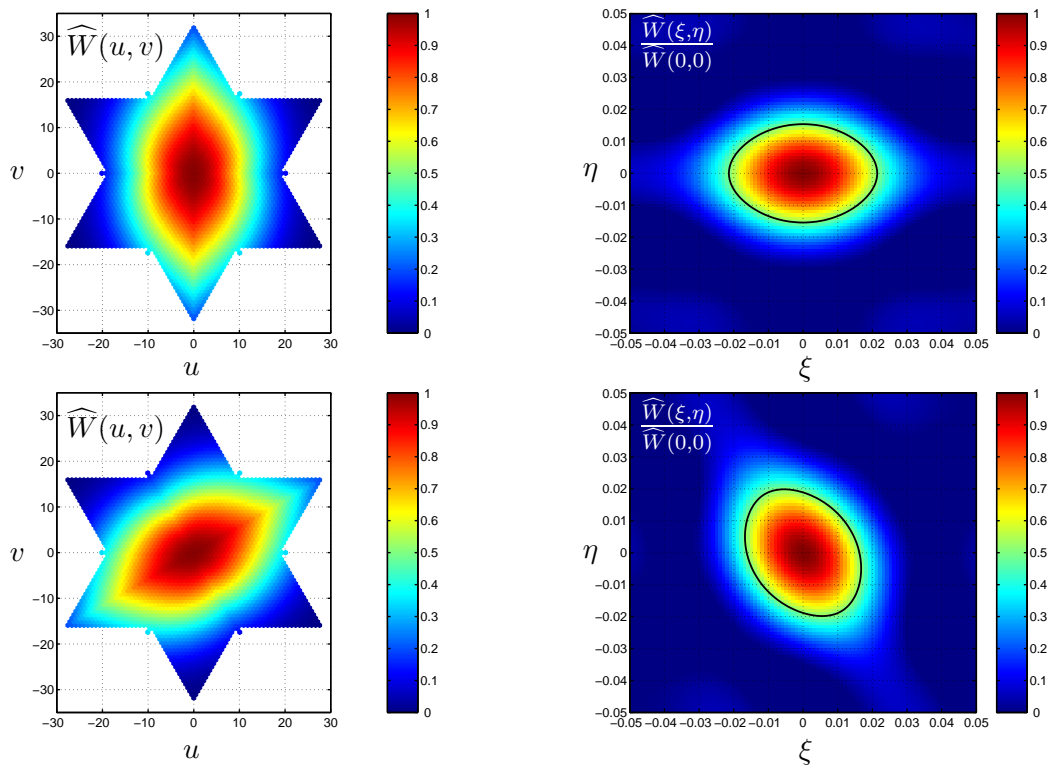


FIG. 6.12 – Illustration de la déformation de la fenêtre de KAISER par la paramétrisation de α . La dépendance en $\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1$ et φ_2 permet d'imprimer une symétrie elliptique à la fenêtre dans le domaine de FOURIER et modifier ainsi sa symétrie dans le domaine spatial.

Reste à trouver les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \varphi_1$ pour lesquels la fenêtre est à symétrie circulaire sur la Terre. Pour une résolution donnée D , après initialisation, un algorithme d'ajustement des paramètres d'une ellipse fournit l'inclinaison Ψ et l'ellipticité a/b de la fonction de transfert à -3dB dans le repère terrestre [7]. Une méthode d'optimisation non linéaire de type BFGS nous permet de minimiser le critère :

$$\min \{F = (D - a)^2 + (D - b)^2\}, \quad (6.33)$$

et ainsi de trouver les paramètres α_1, α_2 et φ_1 qui conduisent une résolution isotrope pour $a = b = D$, Ψ n'étant pas défini pour un cercle.

Bien entendu, la résolution D imposée ne peut être atteinte dans l'ensemble du champ de vue reconstruit. La figure 6.15 montre comment le multi-fenêtrage a été appliqué à la scène présentée sur la figure 6.14 pour une résolution $D = 55$ km. L'effet est particulièrement probant le long des côtes britanniques, la zone de transition entre les terres et la mer s'élargissant nettement lorsque l'on s'éloigne du point sub-satellite avec une apodisation classique, alors qu'elle est constante avec le multi-fenêtrage. La contrepartie est double : la résolution est dégradée au centre du champ de vue reconstruit et la fauchée ainsi que la gamme des angles d'incidence disponibles sont réduites. Plus D est petit, plus le champ reconstruit se réduit, comme l'illustre le tableau 6.1 résumant les caractéristique du champ reconstruit pour les différentes résolutions testées.

TAB. 6.1 – Fauchée et gamme des angles d'incidences.

résolution isotrope au sol	fauchée	gamme d'angle d'incidences
55 km	1300 km	0°/55°
44 km	1100 km	0°/50°
33 km	850 km	0°/40°

Les valeurs optimisées des paramètres α_1, α_2 et φ_1 sont montrées sur la figure 6.13. Les faibles valeurs atteintes par α_2 dans certaines zones conduisent à des amplitudes des oscillations de GIBBS importantes. La hauteur des lobes secondaires est alors proche de celle d'une fenêtre rectangle. Les valeurs des deux facteurs de mérite (HSSL et BEHM) de la figure 6.16 sont à comparer avec celles de la fenêtre de BLACKMAN : HSSL = -13.6 dB et BEHM = 98.7%.

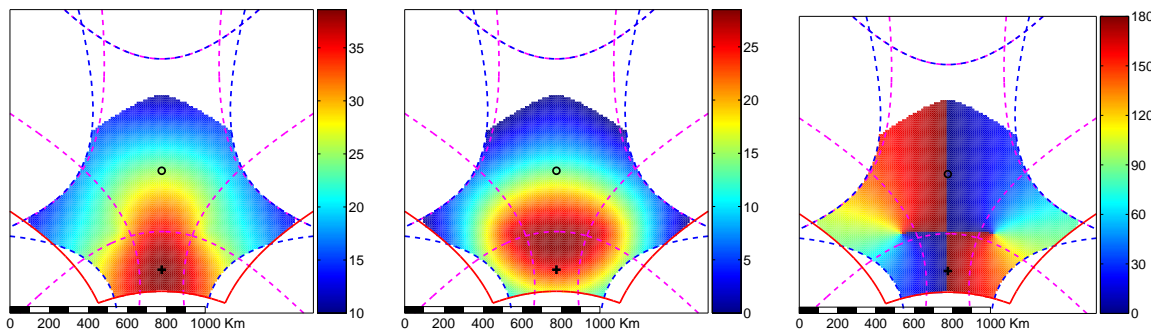


FIG. 6.13 – (De gauche à droite), paramètres α_1, α_2 et φ_1 optimisés pour une résolution isotrope $D=55$ km dans le repère terrestre.

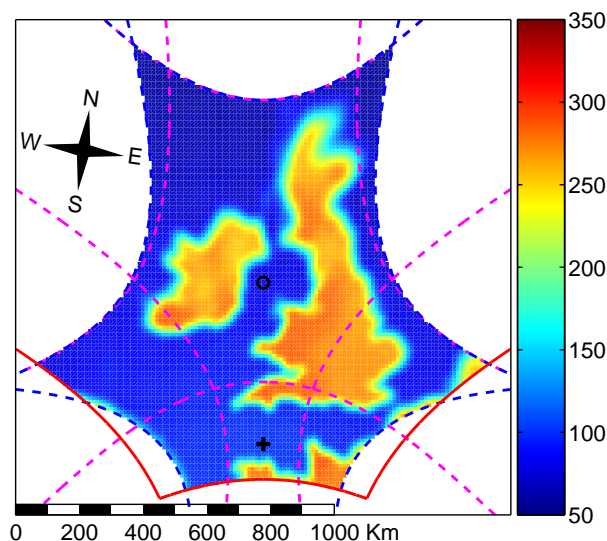


FIG. 6.14 – Projection de la carte de température reconstruite et apodisée par la fenêtre de KAISER($\alpha = 9$) dans le repère terrestre. L'utilisation d'une seule fenêtre pour l'ensemble des pixels conduit à une dégradation de la résolution spatiale au fur et à mesure que l'on se rapproche du bord du champ de vue : de 25 km sur la côte sud de l'Angleterre, elle passe à 100 km au nord de l'Ecosse.

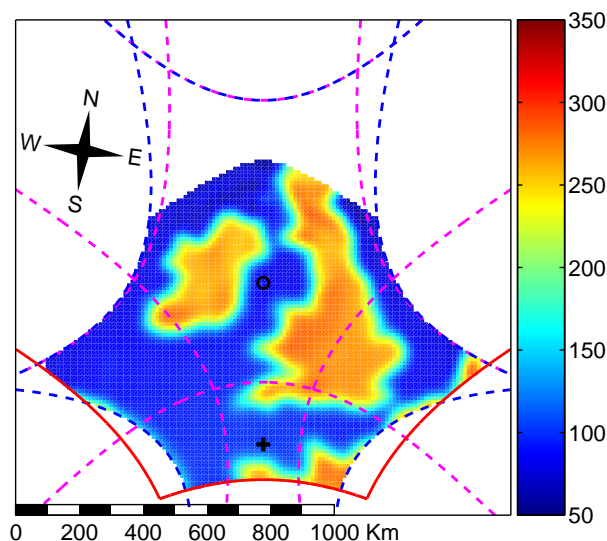


FIG. 6.15 – Application du multi-fenêtrage sur la scène reconstruite : chaque pixel est apodisé par une fenêtre de KAISER dont les paramètres ont été ajustés de façon à obtenir une résolution spatiale isotrope de 55 km. Notons que cette technique a pour conséquence de réduire le champ de vue exploitable.

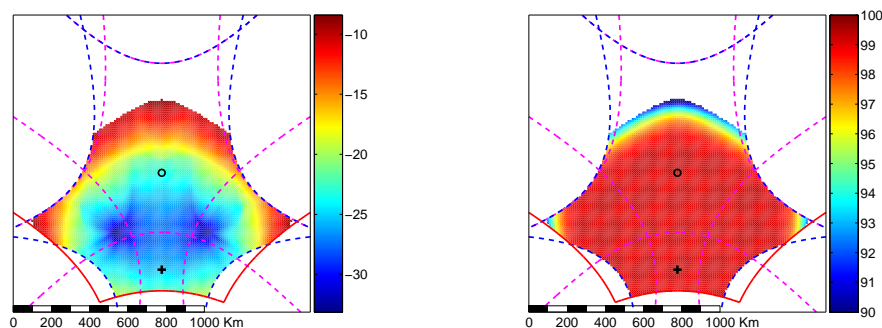


FIG. 6.16 – **A Gauche**, hauteur des lobes secondaires en dB et, **à droite**, efficacité du lobe principal en % dans le repère terrestre pour une résolution isotrope $D=55\text{km}$.

Les effets de ces lobes secondaires sur la qualité de l'estimation des paramètres géophysiques ont été étudiés à travers l'étude du comportement de la variable centrée $\zeta = (SM - SM_0)/\sigma_{SM}$, SM_0 étant la valeur réelle de l'humidité du sol, SM la valeur estimée et σ_{SM} l'incertitude sur cette estimation. ζ doit suivre une loi gaussienne, avec une valeur moyenne $\langle \zeta \rangle = 0$ et une déviation standard $\sigma_\zeta = 1$. Une valeur non nulle pour $\langle \zeta \rangle$ traduit un biais sur l'estimation de l'humidité tandis qu'une déviation standard plus grande que 1 conduit à des valeurs estimées peu fiables, ce qui traduit sans doute une sous-estimation.

Les statistiques reportées dans le tableau 6.2 sont celles de la variable centrée ζ pour l'Europe de l'Ouest calculée lorsque sont appliqués une fenêtre de BLACKMAN ou le multi-fenêtrage, en choisissant la fonction de pondération exacte, dépendant de l'angle d'incidence, ou au contraire une fonction de pondération moyenne. Chaque pixel contenant une fraction pondérée de couvert végétal supérieure à 20% est retenu.

Alors qu'il est normalement possible de choisir la fonction de pondération exacte pour chaque pixel lors de l'estimation de l'humidité, il est plus simple de supposer cette fonction identique dans tout le champ reconstruit. Cependant, dans ce cas, les lobes secondaires viennent dégrader les résultats lorsque le multi-fenêtrage est utilisé. Les performances restent toutefois meilleures pour le multi-fenêtrage que pour une apodisation classique lorsque une fonction de pondération moyenne est appliquée.

TAB. 6.2 – Statistiques sur la variable centrée ζ .

Fenêtre appliquée	Fonction de pondération	$\langle \zeta \rangle$	σ_ζ
BLACKMAN	moyenne	+0.66	1.84
BLACKMAN	réelle	-0.04	0.99
Multi-fenêtrage	moyenne	+0.17	1.45
Multi-fenêtrage	réelle	-0.09	1.05

Biographie(s)

Biographie 6.1: **BESSEL, Friedrich Wilhelm**

(22 Juillet 1784, Minden, Westphalie - 17 Mars 1846, Königsberg, Prusse)



Bessel ne s'est tourné vers les sciences que relativement tard. Agé de 14 ans, il quitte l'école pour devenir apprenti dans une société commerciale d'import-export à Bremen.

Alors qu'il ne touche aucun salaire, les activités et les partenariats de cette société le poussent à étudier en parallèle la géographie, l'espagnol et l'anglais. Il s'oriente alors vers les problèmes de navigation liés au positionnement des navires en pleine mer. Finalement, cette démarche le pousse vers les mathématiques et l'astronomie.

En 1804, il écrit un mémoire sur ses calculs de l'orbite de la comète de Halley effectués à partir de mesures réalisées par Harriot en 1607. Heinrich Olbers, à qui il envoie ce papier, reconnaît là un talent particulier et le pousse à continuer dans cette voie. En 1806, il abandonne une vie financièrement stable pour devenir assistant à l'observatoire de Lilienthal. Continuant

ses recherches sur la position des étoiles, il devient directeur du nouvel observatoire de Königsberg, encore en construction, en 1810. Sous la recommandation de Gauss, il reçoit le titre de docteur de l'université de Göttingen, ce qui lui permet de devenir officiellement professeur en astronomie et d'enseigner.

Bessel a été l'un des premiers astronomes à reconnaître l'importance de l'estimation des erreurs de mesures dans la détermination de la position des astres. Il réduit les données de Bradley sur la position de quelques milliers d'étoiles, déduisant les erreurs instrumentales causées par la réfraction, éliminant les effets du déplacement de la Terre.

Il introduit la fonction de Bessel dès 1817 lors d'une étude du problème à 3 corps de Kepler. En 1824, il publie un traité sur la perturbation des orbites des planètes dans lequel il complète l'analyse de ces fonctions.

En 1830, il publie la position moyenne et apparente de 38 étoiles sur la période 1750-1850. En 1841, il déduit de la variation périodique des trajectoires de Sirius et Procyon la présence de système doubles, 21 ans avant leur observation.

Bibliographie

- [1] M. MARTIN-NEIRA : Strip adaptative processing. *SMOS SAG-5*, 30 Mars 2001.
- [2] E. ANTERRIEU, B. PICARD, Manuel MARTIN-NEIRA, P. WALDTEUFEL, M. SUESS, J.-L. VERGELY, Y. KERR et S. ROQUES : A strip adaptative processing approach for the smos space mission. *accepted in IGARSS'04*, 2004.
- [3] Philippe WALDTEUFEL, E. ANTERRIEU, J.M. GOUTOULE et Y.H. KERR : Field of view characteristics of a microwave 2d interferometric antenna as illustrated by the miras concept. *Proc. of microRAD'99*, pages 477–483, 1999.
- [4] E. ANTERRIEU, P. WALDTEUFEL et A. LANNES : Apodization functions for 2-d hexagonally sampled sunthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 40(12):2531–2542, 2002.
- [5] A. CAMPS, J. BARA, I. CORBELLA et F. TORRES : Visibility inversion algorithms over hexagonal sampling grids. *Proc. of Soil Moisture and Ocean Salinity Measurements and Radiometers Techniques*, Meeting ESA-ESTEC, 21 April 1995.
- [6] J.F. KAISER et R.W. SCHAFER : On the use of the i0-sinh window for spectrum analysis. *IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing*, 28(1):105–107, 1980.
- [7] A.W. FITZGIBBON, M. PILU et R.B. FISHER : Direct least-squares fitting of ellipses. *IEEE Trans. on patter analysis and machine intelligence*, 21(5):476–480, 1999.

Troisième partie

Reconstruction d'image

La qualité de l'estimation des paramètres géophysiques est fortement liée à la qualité de l'estimation des cartes de températures de brillance.

Au cours de cette thèse, j'ai été amené à travailler sur plusieurs aspects spécifiques à l'observation de la Terre par un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture. Une première étape consiste à caractériser l'erreur de reconstruction systématique qui trouve sa source dans la propriété de bande passante limitée de ces instruments. Cette erreur est un minorant de l'erreur de reconstruction à laquelle on s'attend dans un cas réaliste de bruitage sur les données et d'erreurs de modélisation. Il est donc important de pouvoir quantifier cette erreur et, le cas échéant, de trouver le moyen de la diminuer.

D'autre part, on sait que les données seront entachées d'un bruit radiométrique, dont la statistique est proche d'un bruit gaussien. Quelques propriétés de l'algèbre linéaire nous ont permis, dans le cadre d'une collaboration avec les membres d'une équipe spécialisée en analyse numérique, d'établir une relation prédisant avec précision le facteur d'amplification d'un bruit gaussien sur les données pour un opérateur donné. Là encore, il s'agit de quantifier l'erreur de reconstruction sur les cartes de température de brillance estimées afin de mieux prévoir les erreurs sur l'estimation des paramètres géophysiques.

Une étude a été menée sur l'impact du rayonnement solaire sur la télédétection de la salinité de surface des océans dans le cadre d'une mission spatiale. En effet, à la fois le rayonnement direct et le reflet du soleil sur la mer peuvent venir polluer les mesures instrumentales. Une collaboration avec un chercheur de l'IFREMER qui a établi précisément la position du soleil et de son reflet dans le champ de vue de l'instrument, a permis de quantifier l'erreur de reconstruction attendue lors d'une telle pollution des données et de proposer une méthode susceptible d'éliminer cette contribution indésirable des mesures instrumentales.

Enfin, des travaux préliminaires sur une reconstruction pour un mode de fonctionnement de l'instrument en polarisation totale ont été conduits. Ils ont permis de préciser l'importance de la reconstruction simultanée de toutes les composantes de STOKES de la scène observée et de quantifier l'augmentation de l'erreur de reconstruction lorsque le couplage entre les gains co- et cross-polaires augmente.

Chapitre 7

Exposition du problème inverse et méthodes de reconstruction non régularisées

Sommaire

7.1	Problème direct - Problème inverse	137
7.2	Méthodes de reconstruction non régularisées	139
7.2.1	La transformée de FOURIER inverse	139
7.2.2	La méthode CLEAN	142
7.2.3	L'algorithme de calibration par points chauds	143

Voici le Disque-Monde qui navigue dans l'espace sur le dos de quatre éléphants, eux-mêmes juchés sur la carapace de la Grande A'Tuin, la tortue stellaire. Autrefois, un tel univers passait pour exceptionnel, voire impossible. Mais...tout était si simple, autrefois.

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

7.1 Problème direct - Problème inverse

Le problème direct a clairement été exposé au cours des parties précédentes. La distribution de températures de brillance sur Terre est observée par les antennes du réseau interférométrique. Le champ électromagnétique incident se propageant dans un espace libre est transformé en un signal se propageant dans la ligne de transmission. A la sortie de la chaîne de réception, la corrélation des signaux permet d'accéder à un échantillonnage de la fonction de cohérence spatiale de la scène observée.

Le problème inverse consiste alors à estimer une carte de distribution de températures de brillance expliquant au mieux, selon des critères qui restent à préciser, les mesures instrumentales et ce, à partir de la modélisation fournie par la relation de VAN CITTERT-ZERNIKE (relation 3.38).

Cette relation intégrale est dite de FREDHOLM de première espèce, une formulation classique dans le traitement de l'image :

$$g(\mathbf{x}) = \int K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (7.1)$$

En imagerie par synthèse d'ouverture, le noyau K est la fonction de modélisation de l'instrument et conduit à une relation linéaire entre les données g , les visibilitées, et les inconnues f , la distribution de températures de brillance.

Dans sa version discrète, le système linéaire à résoudre est (voir relation (4.41)) formulé ainsi :

$$\mathbf{G}T = V \quad (7.2)$$

La solution de ce système minimise aussi le critère de moindres carrés :

$$\min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2, \quad (7.3)$$

et est aussi solution de l'équation normale :

$$\mathbf{G}^* \mathbf{G}T = \mathbf{G}^* V \quad (7.4)$$

Ce type de problème est en général *mal posé*. Selon la définition d'HADAMARD [1], un problème est *bien posé* lorsque ces trois conditions sont remplies :

1. il existe une solution
2. la solution est unique
3. la solution est une fonction continue des données, c.-à-d. une faible perturbation des données conduit à une faible perturbation de la solution.

Or, ici, le problème est sous-contraint, le nombre d'inconnues, les N^2 pixels de la scène échantillonnée, étant inférieur au nombre N_b de mesures instrumentales. Le problème 7.4, et par conséquent les problèmes 7.3 et 7.2, possèdent alors une infinité de solutions, la matrice carrée ($\mathbf{G}^* \mathbf{G}$) étant singulière. Ce problème est donc bien *mal posé*.

La cause physique de cette perte d'information entre le domaine spatial et le domaine de FOURIER trouve sa source dans une caractéristique importante des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture : ce sont des instruments à bande passante limitée. Leurs dimensions limitées ne permettent d'avoir accès qu'aux fréquences confinées dans H et non pas à l'ensemble des fréquences formant la grille d'échantillonnage dans le domaine de FOURIER.

On peut alors opposer deux approches de la résolution d'un tel problème.

D'une part, les méthodes présentées brièvement dans la section suivante, la première développée par l'équipe traitement du signal de l'Université Polytechnique de Catalogne (UPC), la seconde par le *Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt* (DLR), isolent une solution parmi l'infinité possible sans modifier le problème à résoudre.

D'autre part, la démarche adoptée dans cette situation, courante dans le cadre général de la reconstruction d'image [2], consiste à régulariser le problème à résoudre, c.-à-d. à apporter une information supplémentaire, sous quelques formes que ce soit, permettant de choisir une solution particulière parmi l'infinité possible : avant toute chose, on s'assure donc de l'existence et de l'unicité de la solution.

Dans le chapitre suivant, je décrirai précisément trois régularisations distinctes conduisant à trois différentes méthodes de reconstruction d'image pour les radiomètres à synthèse d'ouverture, ayant participé activement au développement et à la mise en oeuvre de deux d'entre elles.

7.2 Méthodes de reconstruction non régularisées

Avant d'aborder les méthodes développées par deux autres équipes impliquées dans le projet SMOS, il est nécessaire de bien comprendre pourquoi la transformée de FOURIER ne saurait être un opérateur de reconstruction valable.

7.2.1 La transformée de Fourier inverse

Même s'il est commode de rapprocher le fonctionnement des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture de celui de la transformée de FOURIER, l'opérateur \mathbf{G} n'en reste pas moins différent de l'opérateur \mathbf{U} . Afin de mettre en évidence cette assertion, les composantes de FOURIER et les visibilitées sont calculées pour différents niveaux de résolution d'une même scène. La figure 7.1 montre la scène T_o à son plus haut niveau de résolution (Fig. 7.1-a), ses composantes de FOURIER (Fig. 7.1-b) et les visibilitées telles que mesurées par un RISO (Fig. 7.1-c).

Notons qu'une échelle logarithmique a été utilisée afin d'améliorer la lisibilité des figures, la figure 7.1-b montrant $\log_{10} \frac{\|\mathbf{U}T_o\|_F}{\{\mathbf{U}T_o\}_{(0,0)}}$ et la figure 7.1-c montrant $\log_{10} \frac{\|\mathbf{G}T_o\|_F}{V_{(0,0)}}$.

Si maintenant la scène observée est une version à basse résolution de T_o (Fig. 7.2-a) ne comportant de composantes de FOURIER non nulles qu'à l'intérieur de la bande passante (Fig. 7.2-b), peu de différences existent entre ces composantes de FOURIER et les visibilitées mesurées (Fig. 7.2-c).

Cependant, lorsque la scène observée est une distribution uniforme de température égale à la température moyenne de la scène T_o , l'instrument fournit des visibilitées non nulles pour l'ensemble des fréquences de la bande passante (Fig. 7.3), alors une scène uniforme n'a de composante de Fourier qu'à la fréquence nulle.

Et même lorsque la scène observée est une version « hautes fréquences » de T_o (Fig. 7.4-a) ne comportant de composantes de FOURIER non nulles qu'en dehors de l'étoile (Fig. 7.4-b), l'instrument fournit tout de même des visibilitées non nulles à l'intérieur de la bande passante (Fig. 7.4-c), à des fréquences auxquelles on ne retrouve aucune composante de FOURIER.

En effet, pour un instrument idéal (gains d'antennes tous identiques, pas de phénomène de décorrélation spatiale), l'action de la matrice de modélisation sur T_o n'est pas celle de \mathbf{U} sur T_o mais plutôt celle de $\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$ sur $\tilde{T} = |F(\xi)|^2 T_o(\xi) / \sqrt{1 - \|\xi\|^2}$ appelée température modifiée. Or, cette température modifiée, à cause de la multiplication par le module du gain d'antenne et de la division par le facteur d'obliquité, n'est pas une distribution uniforme, même si la scène observée l'est (Fig. 7.3), et possède des composantes de FOURIER dans l'étoile, même si la scène observée n'en possède pas (Fig. 7.4).

De plus, il est illusoire de vouloir reconstruire \tilde{T} (et donc T_o) à son plus haut niveau de résolution, ses composantes de FOURIER aux hautes fréquences étant inaccessibles, de par la propriété de « bande passante limitée » des RISO, exprimée ici par l'action de l'opérateur \mathbf{Z}^* . La température T_r reconstruite par une simple transformée de FOURIER inverse :

$$T_r = \{\mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{V}\} \times \sqrt{1 - \|\xi\|^2} / |F(\xi)|^2 \quad (7.5)$$

ne représente donc qu'une version basse résolution de T_o , l'opérateur de reconstruction $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}$ (remplissage de zéros + \mathcal{TF} inverse) n'étant pas l'opérateur inverse de $\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$.

De plus, la division par le module du gain F dans la relation (7.5) n'a de sens que pour un instrument idéal, c.-à-d. si tous les gains sont identiques et si l'on observe aucun phénomène de décorrélation spatiale. L'utilisation de la transformée de FOURIER inverse comme opérateur de reconstruction pour un instrument réaliste possédant des antennes aux caractéristiques dispersées et subissant la décorrélation spatiale est par conséquent dépourvue de sens.

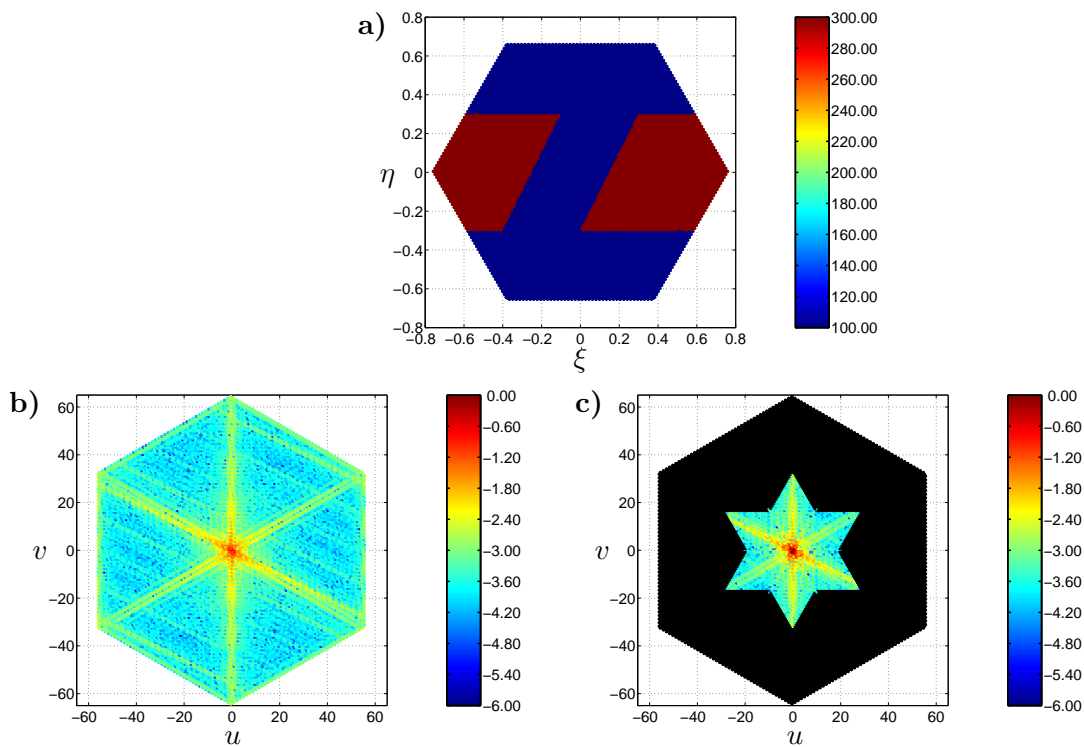


FIG. 7.1 – a), scène T_o observée à son plus haut niveau de résolution, b), composantes de FOURIER et c), visibilités correspondantes.

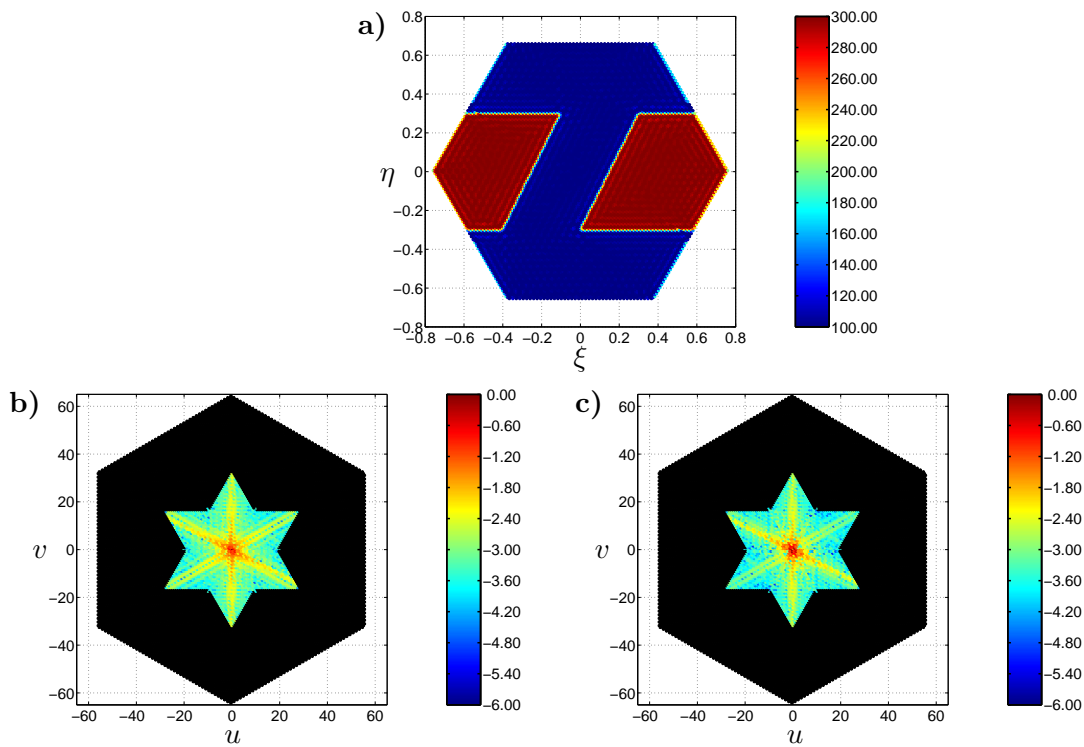


FIG. 7.2 – a), version scène « basses fréquences » de la scène T_o , b), composantes de FOURIER et c), visibilités correspondantes.

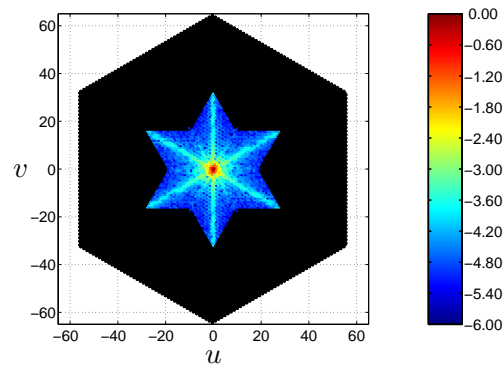


FIG. 7.3 – Visibilités mesurées pour une scène composée d’une distribution uniforme, de température égale à la température moyenne de T_o .

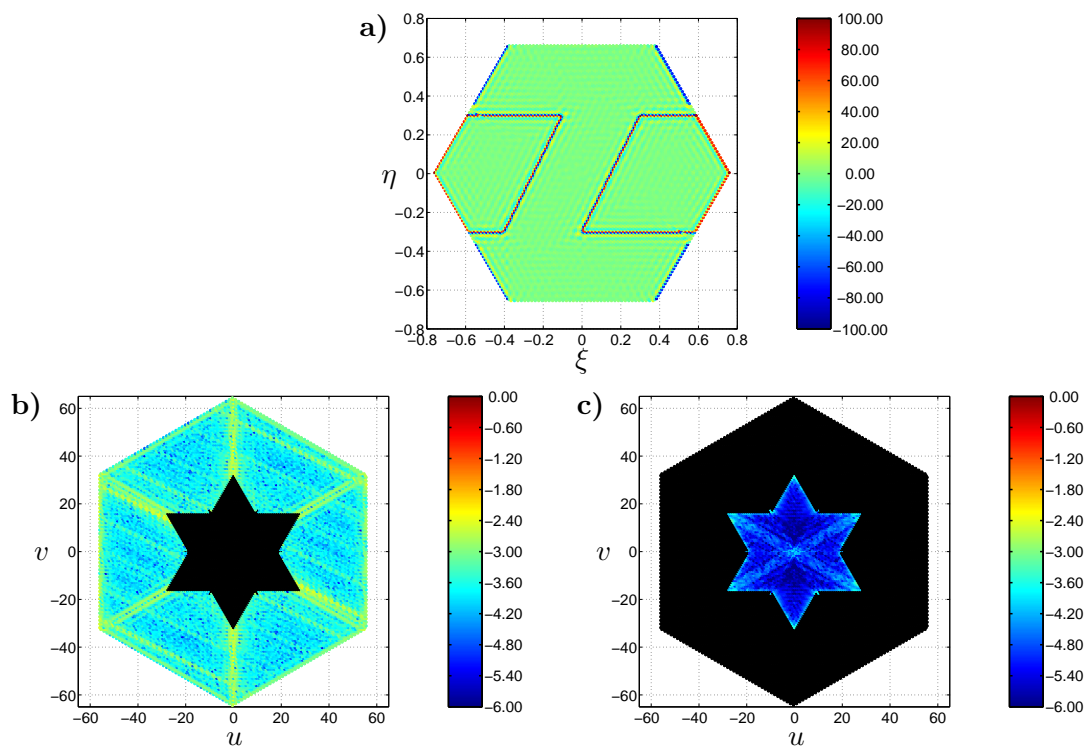


FIG. 7.4 – **a)**, version scène « hautes fréquences » de la scène T_o , **b)**, composantes de FOURIER et **c)**, visibilités correspondantes.

7.2.2 La méthode CLEAN

La méthode CLEAN est utilisée en radio-astronomie pour traiter les données interférométriques issues, par exemple des réseaux du type ALMA. Elle a été développée en 1974 par HÖGBOM [3]. Il s'agit d'une méthode itérative de déconvolution adaptée à l'observation de champs comportant des sources ponctuelles (étoiles, galaxies ...) sur un fond plus ou moins bruité.

La première étape consiste à décomposer l'ensemble de l'image en un ensemble de composante ayant la forme d'une impulsion de DIRAC. Pour cela, on recherche le pixel d'intensité maximale dans le champ reconstruit et on soustrait à l'ensemble de la carte une fraction de la réponse impulsionnelle de l'instrument centrée sur ce maximum. Cette opération est renouvelée jusqu'à ce que le maximum dans le champ soit nul ou ramené au niveau du bruit de fond.

La seconde étape consiste à convoluer la carte des impulsions de DIRAC construite lors de l'étape précédente par une réponse impulsionnelle instrumentale synthétique ne comportant pas de lobes secondaires, par exemple une gaussienne dont la largeur est proche de celle du lobe principale de la véritable fonction de transfert de l'instrument. Finalement, il convient d'ajouter le résidu obtenu à la fin de la première étape. L'image ainsi reconstruite est « nettoyée » de tout artefact indésirable.

L'équipe de traitement du signal de l'UPC a développé une méthode de reconstruction inspirée de cet algorithme [4]. L'avantage de cette technique est de ne pas exiger le stockage de grandes matrices, comme la matrice de modélisation, la taille du vecteur de plus grande dimension et celle des matrices sur lesquelles une FFT est appliquée étant fixées par le nombre de pixels dans l'image reconstruite. Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est faible, inférieur à 10, ce qui autorise la reconstruction en temps réel, au rythme de mesures des visibilitées.

Toutefois, le stockage et la manipulation des matrices, compte tenue des avancées technologiques, n'est plus véritablement un problème, des ordinateurs équipés de la puissance et de la mémoire suffisante à ces opérations étant disponibles même auprès des particuliers. De plus, l'approche est en elle-même discutable. A aucun moment, le problème n'est régularisé : la solution obtenue par cette méthode dépend à la fois de l'initialisation et du nombre d'itérations. La carte des températures ainsi reconstruite correspond certainement à un minimum local et l'on pourrait atteindre une solution différente en augmentant le nombre d'itérations. Compte tenu des contraintes de temps, seul le premier minimum est atteint et donc la solution ne peut être que proche de l'initialisation.

Les aspects les plus problématiques résident sans doute dans le moyennage des gains d'antennes qu'implique l'utilisation de la \mathcal{TF} et le moyennage des visibilitées. En effet il a été montré dans le paragraphe précédent qu'il n'existait pas de relation de transformée de FOURIER entre les visibilitées et la température de brillance, même modifiée. En outre, si le moyennage des gains d'antennes a un sens lorsque la dispersion des caractéristiques instrumentales est faible, on peut se poser la question dès lors que l'instrument est réaliste. De même, le moyennage des visibilitées ne permet sans doute pas de tirer parti de toute l'information disponible lorsque les couples d'antennes définissant la même ligne de base ont des caractéristiques différentes.

Bien entendu, il aurait été important de pouvoir comparer cette méthodes avec les méthodes régularisées. Ce besoin a été exprimé par l'ESA qui a réuni au sein d'un groupe d'étude sur des méthodes de reconstruction alternatives, les équipes du DLR et la notre. Le but était de faire le point sur les caractéristiques des méthodes développées et de les comparer à la méthode CLEAN implémentée dans le SEPS *SMOS End-to-end Performance Simulator*. Cependant, il n'a pour l'instant pas été possible de réunir un consensus sur la modélisation de l'instrument et la simulation des visibilitées. Privé d'un socle commun indispensable pour une comparaison sérieuse, il n'a pas été possible de comparer les performances des méthodes régularisées avec

celles développées par l'UPC et le DLR. J'ai participé activement à la réécriture des routines du SEPS en charge de la simulation des visibilitées et de la modélisation de l'instrument ainsi qu'à l'adaptation des méthodes de régularisation dans le but d'une intégration dans le SEPS. Des travaux sont actuellement en cours pour parvenir à une solution.

7.2.3 L'algorithme de calibration par points chauds

Le DLR a développé plusieurs méthodes de reconstruction, certaines basées sur la méthode CLEAN [5]. La méthode succinctement présentée ici à l'avantage de ne pas nécessiter une caractérisation précise de l'instrument. Le but est de construire point par point une matrice $\widehat{\mathcal{W}}$, dont l'inversion fournit un opérateur permettant directement la reconstruction d'une carte de température de brillance :

$$T = \widehat{\mathcal{W}}^{-1}V \quad (7.6)$$

La matrice $\widehat{\mathcal{W}}$ est construite à partir de l'observation d'un point chaud, tel le soleil ou la lune, dont la température de brillance est parfaitement connue et dont la résolution angulaire est inférieure ou égale à la résolution angulaire de l'instrument. Pour une position donnée de ce point chaud dans le champ de vue de l'instrument, la mesure des visibilitées fournit directement la réponse impulsionnelle instrumentale, toute imperfection comprise, pour le pixel du champ reconstruit correspondant, soit une colonne de la matrice $\widehat{\mathcal{W}}$. Différentes orientations du réseau d'antennes vont permettre de faire parcourir au point chaud l'ensemble du champ de vue et donc de construire $\widehat{\mathcal{W}}$ colonne par colonne.

L'avantage de cette méthode réside dans la prise en compte directe des possibles imperfections instrumentales et dans l'absence de processus itératif. Même si l'inversion de la matrice est chronophage, elle n'est effectuée que lors des étapes de calibration, lorsque la dérive des caractéristiques instrumentales est devenue critique.

Cependant, la phase de construction par un unique point chaud est technologiquement difficile à envisager dans le cadre d'une mission spatiale, la succession de réorientations et de stabilisations de l'instrument étant difficilement réalisable et surtout très coûteuse en énergie. Des études sont donc en cours pour appliquer cette méthode à des scènes « test » étendues pour lesquelles la distribution des températures de brillance est parfaitement connue.

Biographie(s)

Biographie 7.1: HADAMARD, Jacques Salomon

(8 décembre 1865, Versailles, France - 17 Octobre 1963, Paris, France)



Agé de trois ans, il suit ses parents, tous deux enseignants, à Paris, son père prenant un poste au lycée Charlemagne. Hadamard commence ici sa scolarité, pour la finir au lycée Louis-le-Grand où son père est muté. En 1883, il obtient un baccalauréat ès lettres et ès sciences. Il est premier prix du Concours Général en algèbre et en mécanique.

En 1884, il termine premier des concours d'entrée de l'École Polytechnique et de l'École Normale Supérieure, optant pour cette dernière. Il y débute ses recherches sur l'estimation du déterminant généré par les coefficients d'une série en puissance. En 1892, il soutient une thèse sur les fonctions de Taylor. Son travail sur les fonctions complexes est un des premiers à aborder une théorie générale des fonctions analytiques.

Il passe quatre ans à Bordeaux à partir de 1892. Il publie durant cette période 29 articles, ce nombre impressionnant étant dépassé par la qualité de ces travaux et l'étendue des sujets abordés. Au cours de sa carrière, il sera successivement et parfois dans le même temps, professeur de la faculté des sciences de la Sorbonne, du Collège de France, de l'École Polytechnique et de l'École Centrale.

Outre ses travaux sur les nombres premiers, les propriétés des trajectoires dynamiques, les équations aux dérivées partielles, l'élasticité, l'optique géométrique, l'hydrodynamique, il publie des traités fondateurs pour l'enseignement des mathématiques en France, comme *Leçons de géométrie élémentaire*.

Engagé politiquement, il prend une part active dans la défense d'Alfred Dreyfus et participe à sa réhabilitation. Ayant perdu trois fils durant les deux guerres mondiales, il milita activement pour la paix.

Bibliographie

- [1] Jacques HADAMARD : Lectures on cauchy's problem in linear partial differential equations. *Yale University Press, New Haven, 1923.*
- [2] M. BERTERO et P. BOCACCI : Introduction to inverse problems in imaging reconstruction. *Institute of Physics Publishing, 1998.*
- [3] J.A. HÖGBOM : Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *Astron. Astroph. Suppl.*, 15:417–426, 1974.
- [4] A. CAMPS, J. BARA, F TORRES et I. CORBELLA : Extension of the clean technique to the microwave imaging of continuous thermal sources by means of aperture radiometers. *Progress in Electromagnetism Research*, 18:67–83, 1998.
- [5] M. GREINER, M. PEICHL et Süß H. : Advanced image reconstruction and array geometries in aperture synthesis radiometry. *Proc. of IGARSS'03*, 2003.

Chapitre 8

Reconstruction des cartes de températures de brillance par des méthodes de reconstruction régularisées

Sommaire

8.1	Régularisation mathématique	148
8.1.1	La solution de norme minimale	148
8.1.2	Régularisation mathématique par décomposition en valeurs singulières tronquée	149
8.2	Régularisation au sens de Tikhonov	149
8.3	Régularisation physique dite méthode à bande passante limitée . .	150
8.4	Comparaison des méthodes de régularisation	151
8.4.1	Valeurs optimales pour les paramètres de régularisation	152
8.4.2	Point de vue informatique	156
8.5	Article : comparaison de méthodes d'inversion régularisées	158

L'univers baignait alors dans l'ignorance, et le savant le passait à la batée tel un prospecteur accroupi au-dessus d'une rivière de montagne, cherchant l'or de la connaissance parmi les graviers de la déraison, le sable de l'incertitude et les petits octopodes aquatiques poilus de la superstition.

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

Contrairement aux approches présentées précédemment, les différentes régularisations abordées dans ce chapitre ont en commun d'assurer au problème à résoudre l'existence et l'unicité de la solution. Toutefois, chacune d'entre elle a sa spécificité et leur comparaison permet un nouvel éclairage de leurs caractéristiques propres.

8.1 Régularisation mathématique

8.1.1 La solution de norme minimale

Une approche [1] consiste à trouver la solution de norme minimale parmi les solutions de (7.2), en résolvant le problème d'optimisation avec contrainte :

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (8.1)$$

La solution de ce problème est simplement :

$$T_r = \mathbf{G}^+ V \quad (8.2)$$

où \mathbf{G}^+ est l'inverse généralisé dit de « MOORE-PENROSE » de la matrice de modélisation \mathbf{G} :

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1} \quad (8.3)$$

Or, certaines lignes de \mathbf{G} sont au mieux numériquement très proches voire identiques puisque deux couples d'antennes différents peuvent définir la même ligne de base et ainsi fournir deux mesures différentes de la fonction de cohérence spatiale à la même fréquence.

Ainsi, à un instrument idéal correspond une matrice \mathbf{G} dont certaines lignes sont identiques et dont le rang est alors égal à $2N_f - 1$, où N_f est le nombre de fréquences dans la bande passante. Pour un instrument réaliste, même si la matrice est rigoureusement de rang plein, les lignes correspondant aux visibilitées redondantes sont numériquement très proches.

Eclaircissement III.1: RANG, SVD ET CONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE

Le rang r d'une matrice A ($M \times N$) avec $M < N$ est le nombre de lignes linéairement indépendantes. Si $r = M$, la matrice est dite de rang plein. Si $r < M$, la matrice est dite de rang déficient.

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice A ($M \times N, M < N$) consiste à décomposer la matrice en un produit de trois matrices $U(M \times M)$, $\Sigma(M \times N)$ et $V(N \times N)$:

$$A = U\Sigma V^t \quad (8.4)$$

où Σ est de la forme $[diag(\sigma_i)(0)_{M(N-M)}]$ et $\sigma_i, i = 1 \dots M$ sont les valeurs singulières de A classées par ordre croissant. Si \mathbf{u}_i et \mathbf{v}_i (les M premières colonnes de U et V) sont les vecteurs singuliers à gauche et à droite, alors :

$$A = \sum_{i=1}^M \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t \quad (8.5)$$

Le rang d'une matrice est aussi donné par le nombre de valeurs singulières non nulles.

Le conditionnement d'une matrice est donné par le rapport entre la plus petite et la plus grande de ses valeurs singulières :

$$\mathcal{C}(A) = \sigma_1 / \sigma_M \quad (8.6)$$

Pour un instrument réaliste, le facteur d'amplification du bruit sur les données par l'opérateur \mathbf{G}^+ est alors très grand, un majorant de ce facteur étant donné par le conditionnement de la matrice de modélisation :

$$\frac{\|\Delta T_r\|_E}{\|T_r\|_E} \leq \mathcal{C}(\mathbf{G}) \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F} \quad (8.7)$$

Or, ceci est en contradiction avec l'une des conditions données par HADAMARD et le problème reste *mal posé*. En effet, un conditionnement de la matrice élevé implique qu'une faible perturbation des données va conduire à une grande perturbation de la solution.

Une solution pour améliorer le conditionnement de \mathbf{G}^+ consiste alors à écarter certaines lignes parmi celles qui sont redondantes ou encore à les moyennner. Le moyennage est bien sûr préférable mais une conséquence de cette situation est la diminution du rapport entre la quantité d'information et le nombre d'inconnues d'un système linéaire qui est déjà sous-contraint.

Une solution plus robuste consiste à étudier la répartition des valeurs singulières de \mathbf{G} [2][3].

8.1.2 Régularisation mathématique par décomposition en valeurs singulières tronquée

L'opérateur \mathbf{G}^+ peut être calculé grâce à une décomposition en valeur singulière de \mathbf{G} . Si \mathbf{G} adopte la décomposition suivante,

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{2N_b-1} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t, \quad (8.8)$$

alors \mathbf{G}^+ est égale à

$$\mathbf{G}^+ = \sum_{i=1}^{2N_b-1} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^t \quad (8.9)$$

où $\sigma_i, i = 1 \dots 2N_b - 1$, sont les valeurs singulières de \mathbf{G} classées par ordre croissant et \mathbf{u}_i et \mathbf{v}_i les vecteurs singuliers à gauche et à droite.

Puisque les valeurs singulières les plus petites sont responsables de l'amplification du bruit, une régularisation possible du problème inverse consiste à construire un opérateur \mathbf{G}_m^+ en ne conservant que les m plus grandes valeurs propres (chapt. 3 et 5 dans [4]) :

$$\mathbf{G}_m^+ = \sum_{i>m} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^t \quad (8.10)$$

L'information perdue dans les hautes fréquences est ici comblée par une information de nature mathématique. La solution de (7.2) par la régularisation dite mathématique est alors :

$$T_r = \mathbf{G}_m^+ V \quad (8.11)$$

Le nombre m de valeurs singulières écartées joue ici le rôle d'un paramètre de régularisation.

8.2 Régularisation au sens de Tikhonov

Une autre approche standard en reconstruction d'image consiste à minimiser dans un même temps l'écart aux données et la norme de la solution [5] :

$$\min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F + \mu \|T\|_E \quad (8.12)$$

où μ est un paramètre de LAGRANGE pondérant l'importance accordée à la minimisation de la norme de la solution. Pour $\mu = 0$, on retrouve le critère de moindres carrés (7.3). Le minimum de la fonctionnelle quadratique (8.12) est aussi solution de l'équation d'Euler :

$$(\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \mu \mathbf{I})T = \mathbf{G}^* V \quad (8.13)$$

La perturbation de l'opérateur $\mathbf{G}^* \mathbf{G}$ par la matrice diagonale μI permet de calculer l'opérateur $\mathbf{G}_\mu^+ = (\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^*$ dont propriétés d'amplification du bruit sur les données sont contrôlées par μ . Il existe alors une valeur optimale de μ pour laquelle un compromis optimal est atteint entre l'erreur de reconstruction et l'amplification des bruits sur les données. La solution de 8.12 est :

$$T_r = \mathbf{G}_\mu^+ V \quad (8.14)$$

où μ est un paramètre de régularisation.

8.3 Régularisation physique dite méthode à bande passante limitée

Jusqu'à présent, nous nous sommes contraints à estimer directement les valeurs des N^2 pixels composant la carte des températures de brillance à partir des seules N_b visibilités mesurées.

E. Anterrieu [2] a proposé d'introduire, dès la formulation du problème inverse à résoudre, une information a priori sur le fonctionnement du radiomètre à synthèse d'ouverture. Comme ces derniers sont des instruments à bande passante limitée, il est illusoire de vouloir estimer des cartes à une résolution supérieure à celle imposée par les limites de la bande passante.

Or, si l'on impose à la solution du problème d'être à bande passante limitée, il est équivalent de vouloir trouver les valeurs des N^2 pixels dans le domaine spatial ou les N_f composantes de FOURIER contenues dans H . Il suffit alors de remarquer que, grâce aux mesures redondantes, on dispose de plus de données interférométriques que de fréquences à l'intérieur de la bande passante, pour comprendre que le problème inverse à résoudre est alors bien posé.

Il s'agit donc de trouver le minimum du critère quadratique :

$$\min_{T \in \mathcal{E}} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \quad (8.15)$$

sous la contrainte

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_H)T = 0 \quad (8.16)$$

où \mathbf{P}_H est l'opérateur de projection dans le sous-espace \mathcal{E} des fonctions à bande passante limitée à H . En remarquant que les composantes de FOURIER \mathcal{T} contenues dans la bande passante sont liées à la carte des températures de brillance par

$$T = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathcal{T}, \quad (8.17)$$

les relations (8.15) et (8.16) sont résumées par le critère de moindres carrés :

$$\min_{\mathcal{T} \in \mathcal{E}} \|V - \mathbf{A} \mathcal{T}\|_F^2 \quad (8.18)$$

où $\mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{U}^* \mathbf{Z}$ est appelée matrice résolvante. La solution du système sur-contraint (8.18) est aussi solution de l'équation normale

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A} \mathcal{T} = \mathbf{A}^* V \quad (8.19)$$

Les composantes de FOURIER \mathcal{T}_r sont reconstruites à l'aide de \mathbf{A}^+ , l'inverse généralisé dit de MOORE-PENROSE de la matrice \mathbf{A} :

$$\mathcal{T}_r = \mathbf{A}^+ V \quad (8.20)$$

$$\text{avec } \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^*(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)^{-1} \quad (8.21)$$

La carte des températures à bande passante limitée T_r est directement déduite de \mathcal{T}_r grâce à la relation (8.17) :

$$T_r = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{A}^+ V \quad (8.22)$$

Contrairement aux solutions précédentes, qui ont une interprétation mathématique, cette solution a un sens physique clair : il s'agit de la carte des température de brillance qui aurait été reconstruite si les visibilitées avaient été fournies par un instrument idéal à la résolution imposée par la bande passante.

La figure 8.1 montre la matrice \mathbf{A} correspondant à un instrument réaliste de type MIRAS. Elle est réelle, puisque construite d'après la matrice \mathbf{G} réelle. Les N_b premières lignes sont la partie réelle de la contribution aux visibilitées mesurées d'un dirac en un point de la bande passante limitée, les $N_b - 1$ suivantes, la partie imaginaire de cette contribution. Pour construire les N_f premières colonnes, on considère un dirac réel, puis imaginaire pour les $N_f + 1$ suivantes.

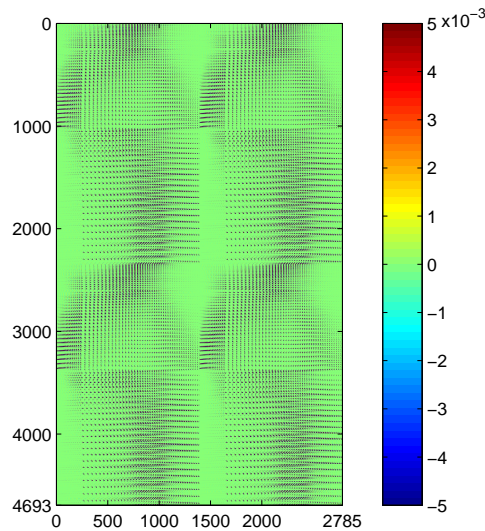


FIG. 8.1 – La matrice résolvante \mathbf{A} pour un instrument réaliste de type MIRAS. Notons que des éléments de cette matrice ont une valeur de quelques unités (l'échelle de couleur a été choisie ici pour un meilleur contraste).

8.4 Comparaison des méthodes de régularisation

Outre les performances en terme d'erreur de reconstruction qui seront abordées dans les sections suivantes, il est d'ores et déjà possible d'émettre quelques remarques sur les particularités des méthodes présentées ci-dessus.

8.4.1 Valeurs optimales pour les paramètres de régularisation

La détermination de la valeur optimale pour un paramètre de régularisation, notamment pour l'approche de TIKHONOV, peut se faire en étudiant « la courbe en L », construite en reportant l'écart aux données $\|V - \mathbf{G}T_r\|_F$ en fonction de la norme de la solution $\|T_r\|_E$.

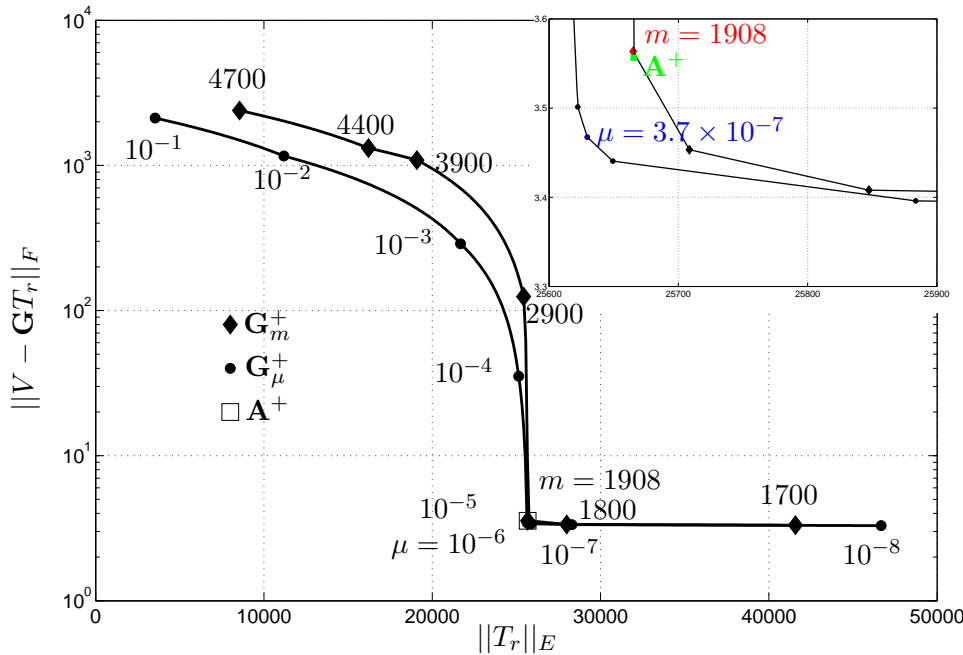


FIG. 8.2 – Variation de $\|V - \mathbf{G}T_r\|_F$ avec $\|T_r\|_E$ pour la solution de TIKHONOV (8.14) avec $10^{-8} \leq \mu \leq 10^{-1}$, pour la régularisation mathématique (8.11) avec $1700 \leq m \leq 4700$ et pour la solution à bande passante limitée (8.22). *En haut à droite*, zoom sur le creux de la courbe en L.

Le paramètre optimal, du point de vue du compromis entre l'écart aux données et la norme de la solution, est alors trouvé au creux de la courbe ainsi obtenue. La figure 8.2 montre une telle courbe pour un instrument réaliste de type MIRAS et pour la scène reportée sur la figure 8.3.

Comme l'illustre la figure 8.6, la valeur du paramètre de régularisation joue sur la qualité de reconstruction. Selon le contexte de la reconstruction et notamment le niveau de bruit sur les données, il est alors possible d'imposer une plus ou moins grande résolution spatiale en sur- ou sous-régularisant le problème à résoudre.

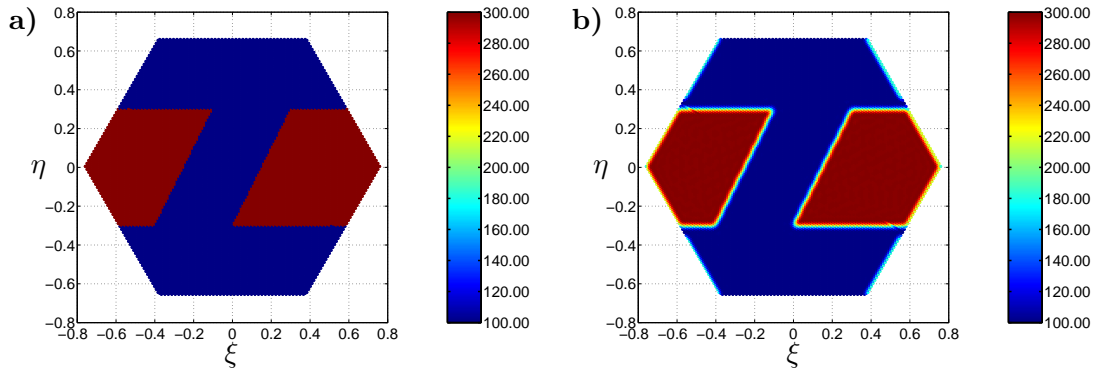


FIG. 8.3 – **a)** scène observée à son plus haut niveau de résolution et **b)** au niveau de résolution de l’instrument et apodisée par la fenêtre de HANNING.

L’avantage de l’approche de TIKHONOV est de pouvoir faire varier continûment la valeur de μ . Cependant, cette dernière est directement liée à la scène observée et doit être recalculée pour chaque jeu de mesures.

Dans le cas de la décomposition en valeurs singulières tronquée, si le nombre de valeurs singulières écartées m joue effectivement le rôle d’un facteur de régularisation (voir Fig. 8.2 et 8.7), sa valeur optimale, du point de vue du compromis entre erreur de reconstruction et facteur d’amplification, est uniquement fixée par les dimensions du problème et ne dépend donc pas de la scène observée.

En effet, les valeurs singulières de la matrice de modélisation \mathbf{G} sont clairement réparties en deux groupes (voir Fig. 8.4). Un premier, regroupé autour de 1, compte autant de valeurs singulières que de fréquences dans la bande passante tandis que le second, regroupé autour de valeurs nettement inférieures à 1, compte autant de valeurs singulières que de redondances. Ce sont ces dernières qui sont responsables de l’amplification du bruit et il est donc naturel de les écarter. Ainsi, la valeur $m = (2N_b - 1) - (2N_f - 1)$ ($m = 1908$ pour MIRAS), correspondant aux nombres de redondances, est optimale, comme le confirme l’étude de la courbe en L.

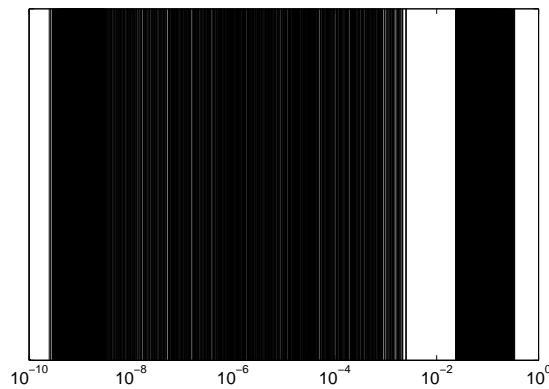


FIG. 8.4 – Valeurs singulières de la matrice \mathbf{G} : elles sont clairement réparties en deux groupes (en noir).

De l’étude de la courbe en L de la régularisation mathématique, il ressort que le nombre de degrés de liberté du problème à résoudre est plutôt lié au nombre de fréquences dans la bande passante qu’au nombre de visibilitées. Cette remarque renforce la pertinence de la reformulation

du problème inverse pour la méthode à bande passante limitée. Cette dernière ne dépend d'aucun paramètre de régularisation mais la solution à bande passante limitée est proche des solutions obtenues avec le paramètre optimal des méthodes précédentes (voir Fig. 8.2 et Fig. 8.5).

Sans doute les avantages les plus importants de cette méthode découlent-ils du fait de résoudre le problème dans le domaine de FOURIER et de la nature à bande passante limitée de la solution reconstruite. Ainsi, l'apodisation des solutions obtenues par des méthodes résolvant le problème dans le domaine spatial demande l'application d'une FFT directe, de l'opérateur \mathbf{Z}^* , afin de ne garder que les composantes aux fréquences contenues dans la bande passante, l'application de la fenêtre à l'aide de $\widehat{\mathbf{W}}$, celle de l'opérateur \mathbf{Z} de remplissage de zéros et enfin celle d'une FFT inverse :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}^* \mathbf{U} \mathcal{T}_r \quad (8.23)$$

L'opérateur $\widehat{\mathbf{W}}$ est une matrice diagonale contenant les coefficients de la fenêtre choisie.

On peut s'étonner d'être obligé de diminuer la résolution de la solution initialement obtenue en coupant les hautes fréquences et s'interroger sur la signification physique d'une solution à résolution plus grande que celle de l'instrument.

Dans le cas de la solution de la régularisation physique, l'apodisation se fait directement sur le résultat de l'application de l'opérateur \mathbf{A}^+ sur les données, et le retour au domaine direct se fait grâce à \mathbf{Z} et \mathbf{U}^* :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathcal{T}_r \quad (8.24)$$

De plus, la solution étant à bande passante limitée, l'interpolation de la solution sur une grille régulière dans le référentiel terrestre est facilitée.

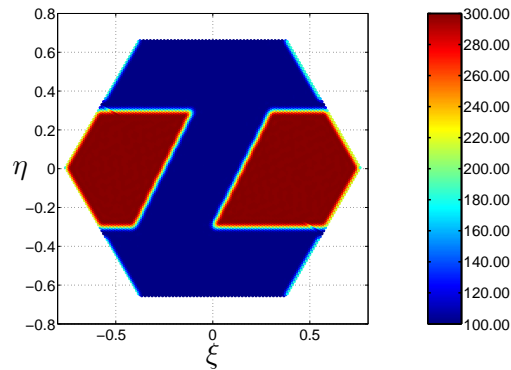


FIG. 8.5 – Solution à bande passante limitée.

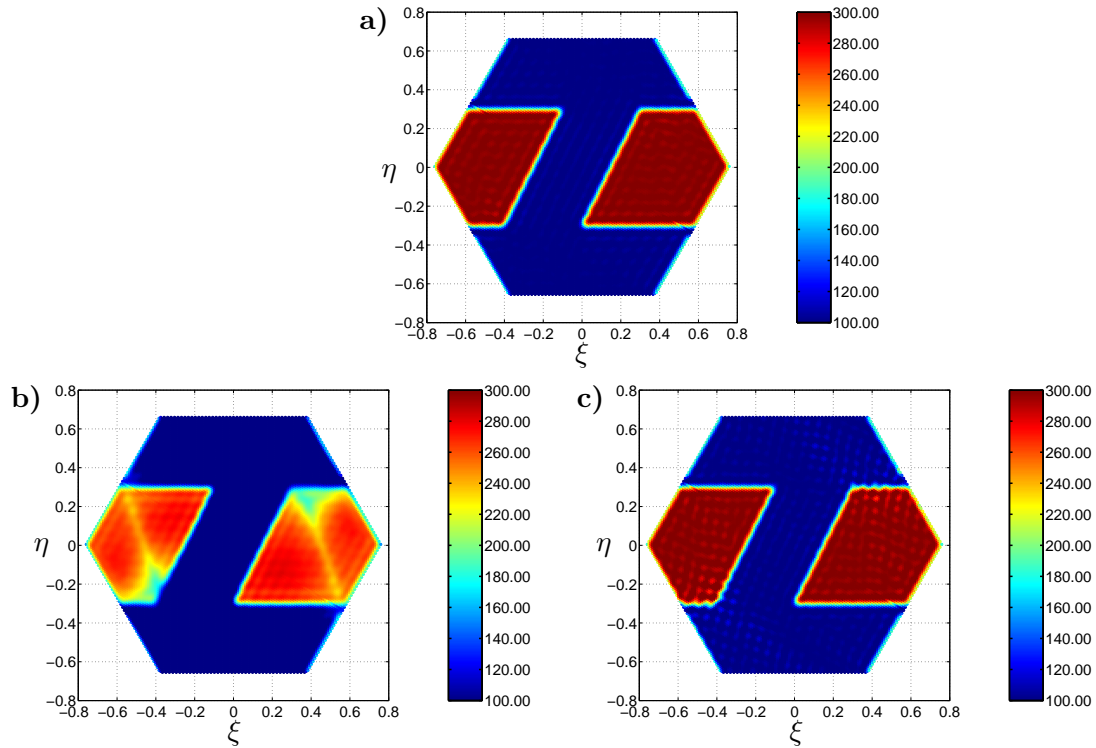


FIG. 8.6 – Cartes de température reconstruites à l'aide de la régularisation de TIKHONOV : **a)** $\mu = 3.7 \times 10^{-7}$ (optimal), **b)** $\mu = 10^{-3}$ (sur-régularisation), **c)** $\mu = 10^{-8}$ (sous-régularisation).

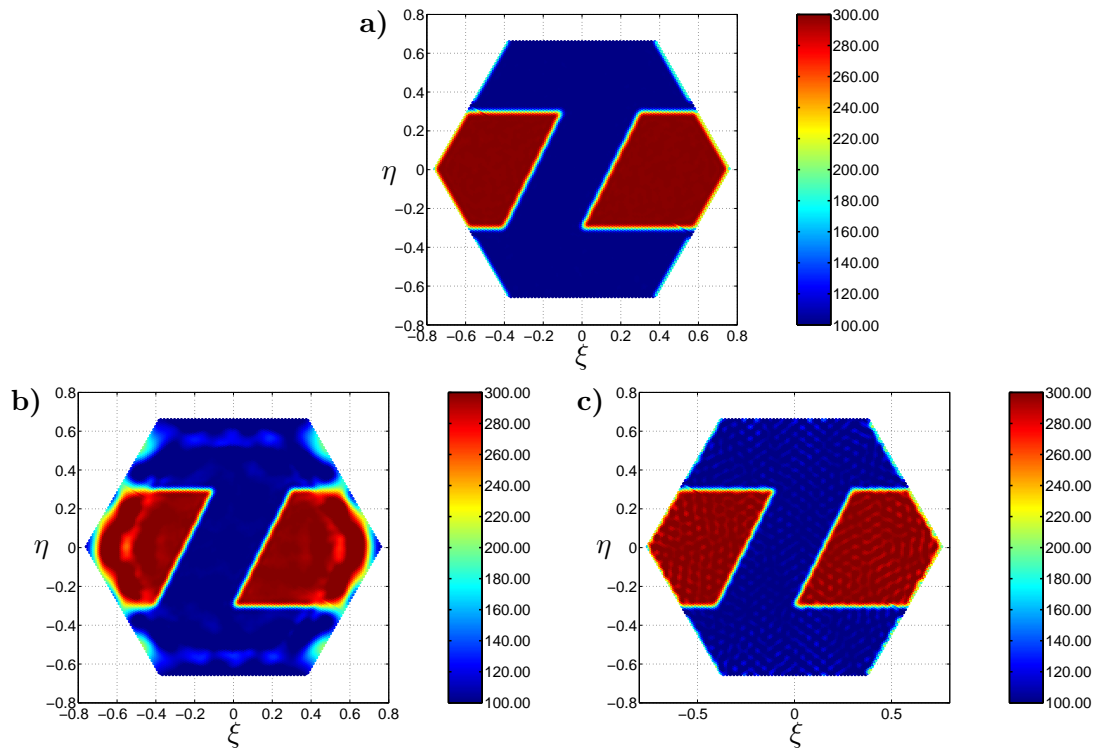


FIG. 8.7 – Cartes de température reconstruites à l'aide de la régularisation mathématique : **a)** $m = 1908$ (optimal), **b)** $m = 2900$ (sur-régularisation), **c)** $m = 1700$ (sous-régularisation).

8.4.2 Point de vue informatique

Une partie de mon travail de thèse a consisté à implémenter, pour des instruments aux dimensions réalistes, la méthode à bande passante limitée déjà existante, ainsi que les autres méthodes nous avons développées, la régularisation mathématique et l'approche de TIKHONOV.

Afin de faciliter le calcul de la matrice de modélisation, notamment pour la simulation de l'instrument MIRAS, les codes de calcul en FORTRAN ont été parallélisés à l'aide de la librairie d'instructions *OpenMP* pour pouvoir être portés sur deux architectures parallèles différentes : une architecture NUMA-cc (machine SGI O3000) dite à mémoire virtuellement partagée et une architecture à mémoire distribuée (machine COMPAQ α -SERVER SC45). Selon l'architecture, les versions parallélisées des bibliothèques scientifiques SCI (SGI O3000) ou CXML (COMPAQ α -SERVER SC 45) ont été utilisées.

Avant tout, il est utile de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de procéder au calcul et au stockage des opérateurs de reconstruction dans le cas des méthodes de TIKHONOV et à bande passante limitée. Il existe de multiples approches permettant de minimiser les critères de moindres carrés (8.12) et (8.15). Une fois le problème régularisé, lorsque l'existence d'une unique solution est assurée, des méthodes itératives de type gradients conjugués peuvent être employées avec la certitude de leur convergence. L'avantage est bien entendu de limiter l'espace mémoire nécessaire à l'estimation de la solution.

Cependant, les méthodes matricielles, si elles sont plus contraignantes du point de vue du matériel informatique, offrent l'avantage de pouvoir procéder à de multiples reconstructions simultanées, au prix d'un produit matrice-matrice, opération facilement parallélisable. Il faut aussi noter que le calcul de ces opérateurs, tous basés sur l'utilisation de la matrice de modélisation, n'est nécessaire qu'à chaque étape de calibration de l'instrument. Les technologies actuellement disponibles, tant matérielles qu'algorithmiques, permettent d'assurer la validité de l'implémentation de ces méthodes compte tenu des contraintes de temps imposées par le rythme de l'acquisition des données (1.5s) et celui de la calibration (1 orbite pour MIRAS, soit environ 1h).

Les opérateurs \mathbf{G}_m^+ et \mathbf{G}_μ^+ sont des opérateurs de la dimension de l'opérateur de modélisation. L'implémentation pratique de leur calcul demande donc des ressources importantes. Le tableau 8.1 résume les contraintes informatiques pour la régularisation mathématique et la méthode à bande passante limitée.

L'opérateur \mathbf{G}_m^+ est calculé d'après la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{G} opérée grâce à la routine DGESVD de la librairie scientifique LAPACK. En plus du stockage de la matrice \mathbf{G} , écrasée par la matrice V à la fin du calcul, elle nécessite le stockage de la matrice U contenant les vecteurs singuliers à gauche.

La méthode à bande passante limitée offre de nombreux avantages du point de vue de l'implémentation pratique. Les dimensions du nouveau problème à résoudre sont plus petites que celles du problème initial : ici, le nombre de colonnes de la matrice est lié au nombre de fréquences dans la bande passante, alors qu'il est lié au nombre de pixels de la grille d'échantillonnage pour la matrice \mathbf{G} , ce qui conduit à diviser la taille de l'opérateur de reconstruction par 6 pour MIRAS et par 7 pour HUT2D. De même, il est possible de ne stocker que les composantes de FOURIER à l'intérieur de la bande passante, et non les N^2 pixels de la solution dans le domaine spatial. Pour les simulations réalisées dans ce document, il a été choisi de calculer l'inverse généralisé de \mathbf{A} grâce à une décomposition en valeurs singulières. Le calcul de \mathbf{A}^+ prend alors 3 fois moins de temps pour MIRAS, 20 fois moins pour HUT2D, que le calcul de \mathbf{G}^+ .

TAB. 8.1 – Tailles des opérateurs et temps de calcul pour la régularisation mathématique et la méthode à bande passante limitée (instrument type MIRAS). Les tailles sont données pour un stockage en double précision et les temps de calcul sont mesurés sur un COMPAQ α -SERVER SC 45 en utilisant une parallélisation OpenMP et la bibliothèque de calcul constructeur CXML parallélisée sur 4 processeurs.

	Dimensions	Taille	Matrice	Temps de calcul	
				Opérateur de reconstruction (SVD+inversion)	100 reconstructions
G	$(2N_b - 1) \times N^2$ $= 4693 \times 16384$	586.6 Mo	15 s	90+3 min	3 min
A	$(2N_b - 1) \times (2N_f - 1)$ $= 4693 \times 2785$	99.7 Mo	10 min	30+0.5 min	< 5 s

En conclusion, la comparaison des méthodes régularisées à l'aide de la courbe en L offre un nouvel éclairage sur leurs caractéristiques respectives. La régularisation de TIKHONOV, pour la première fois appliquée à la reconstruction d'image pour les radiomètres à synthèse d'ouverture, a permis de redéfinir le nombre de valeurs singulières écartées lors de la régularisation mathématique comme un paramètre de régularisation au même titre que le paramètre de TIKHONOV. Le choix de la valeur optimale pour le paramètre m comme étant le nombre de redondances est confirmée non seulement par l'étude du spectre des valeurs singulières mais aussi par l'étude de la courbe en L . Il est alors possible de faire varier ce paramètre et de sur- ou sous-régulariser le problème à résoudre, changeant du même coup la sensibilité de la solution aux bruits sur les données et la qualité de l'accord aux données.

La méthode à bande passant limitée, si elle ne dépend pas d'un paramètre de régularisation, fournit non seulement une solution proche des solutions obtenues avec la valeur optimale du paramètre de régularisation des autres méthodes, mais possède en outre des avantages liés à la propriété imposée à cette solution. L'apodisation et l'interpolation de la carte de températures de brillance estimée peut se faire dans le même temps que le passage du domaine de FOURIER dans lequel se fait la résolution du problème vers le domaine spatial de la solution recherchée. De plus, la reformulation du problème conduit à diminuer les dimensions de l'opérateur de reconstruction (comparées aux autres méthodes), facilitant ainsi la mise en oeuvre informatique et diminuant les temps de calcul, ce qui représente un avantage compte tenu des contraintes sur le traitement en temps réel des données dans le cadre d'une mission spatiale.

8.5 Article : comparaison de méthodes d'inversion régularisées pour les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture

La comparaison des méthodes régularisées a fait l'objet d'un article soumis à IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing, en cours de parution. Le chapitre suivant reprendra les principaux résultats contenus dans cet article. Ces derniers ont été actualisés pour des instruments réalistes de type MIRAS et HUT2D.

Comparison of regularized inversion methods in synthetic aperture imaging radiometry

Bruno Picard and Eric Anterrieu, *Member, IEEE*

Abstract—This article is concerned with the reconstruction of radiometric brightness temperature maps from interferometric measurements. The corresponding inverse problem is often ill-posed unless a regularizing constraint is introduced in order to provide a unique and stable solution. Standard regularizing approaches are compared and illustrated with numerical simulations carried out in reference to the SMOS space mission led by the European Space Agency.

Index Terms—Interferometry, radiometry, aperture synthesis, imaging, inverse problem, regularization.

I. INTRODUCTION

Synthetic Aperture Imaging Radiometers (SAIR) are powerful instruments for high-resolution observation of planetary surfaces at low microwave frequencies [1]. This article is devoted to the reconstruction of radiometric brightness temperature maps from SAIR measurements. It has been demonstrated that the corresponding inverse problem is not well-posed [2][3], unless a regularizing constraint is introduced in order to provide a unique and stable solution [4][5]. Since SAIRs belong to the family of band-limited imaging devices, such a physical property should be taken into account in the regularization of the imaging problem. However, other regularizing methods could achieve the same results despite different physical meanings and mathematical foundations. This contribution makes a review of standard methods for the regularization of inverse problems in imaging radiometry by aperture synthesis: the regularized solutions in the sense of Tikhonov, the solutions with minimal energy and those with band-limited properties are analyzed. To support the theoretical comparison, numerical simulations are presented within the frame of the SMOS space mission, a project led by the European Space Agency and devoted to the remote sensing of soil moisture and ocean salinity from a low orbit platform [6].

II. ELEMENTS OF THE PROBLEM

SAIRs devoted to Earth observation measure the correlation between the signals collected by pairs of spatially separated antennas A_k and A_l which have overlapping fields of view, yielding samples of the visibility function $V(\mathbf{u})$, also termed

Manuscript received May 19, 2004; revised August 4, 2004. This work was supported by the Centre National de la Recherche Scientifique and by the European Space Agency within the frame of the SMOS Project under Contract 17312/03/NL/FF.

B. Picard and E. Anterrieu are with the CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique), Signal and Image Processing Group, 42 avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse cedex 01 - France.

E-mail: Bruno.Picard@cerfacs.fr and Eric.Anterrieu@cerfacs.fr

complex visibilities, of the brightness temperature map $T(\xi)$ of the observed scene.

A. Direct problem

The relationship between $V(\mathbf{u})$ and $T(\xi)$ is given by a spatial Fourier-like integral [1]:

$$V(\mathbf{u}_{kl}) \propto \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\|\xi\| \leq 1} F_k(\xi) \bar{F}_l(\xi) T(\xi) \times \tilde{r}_{kl}\left(\frac{-\mathbf{u}_{kl}\xi}{f_o}\right) e^{-2j\pi\mathbf{u}_{kl}\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}, \quad (1)$$

The components $\xi_1 = \sin\theta \cos\phi$ and $\xi_2 = \sin\theta \sin\phi$ of the angular position variable $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ are direction cosines (θ and ϕ are the traditional spherical coordinates), \mathbf{u}_{kl} is the spatial frequency associated with the two antennas A_k and A_l (namely, the spacing between the antennas normalized to the central wavelength of observation), $F_k(\xi)$ and $F_l(\xi)$ are the normalized voltage patterns of the antennas with equivalent solid angles Ω_k and Ω_l (the overbar indicates the complex conjugate), $\tilde{r}_{kl}(t)$ is the so called fringe-wash function which accounts for spatial decorrelation effects, $t = \mathbf{u}_{kl}\xi/f_o$ is the time delay and f_o is the central frequency of observation.

Denoting by ℓ the number of antennas of the interferometric array, the number of complex visibilities provided by the interferometer is equal to $\ell(\ell - 1)/2$ when accounting for the hermitian property of (1). However, the list of spatial frequencies \mathbf{u}_{kl} is not necessarily non redundant since two different pairs of antennas may lead to the same spatial frequency [4].

Since SAIR have limited dimensions, the spatial frequencies \mathbf{u}_{kl} sampled by an interferometer are confined to a limited region of the Fourier domain, the so-called experimental frequency coverage H [5]. Moreover, in many applications they coincide with the nodes of a sampling grid \mathbb{G}_u . For example, in the case of MIRAS, the microwave imaging interferometer on-board SMOS, the visibility samples are obtained from raw data inside a star-shaped window over an hexagonally sampled grid in the Fourier domain [7].

For computational purposes, numerical quadrature is used to represent integral (1) as a summation over n^2 integrand samples, here the n^2 pixels of the spatial grid \mathbb{G}_ξ which is the dual grid of \mathbb{G}_u . The number of pixels in the grids \mathbb{G}_u and \mathbb{G}_ξ has to be chosen in such a way that the Shannon criterion is satisfied and the numerical quadrature is sufficiently accurate [3].

B. Inverse problem

The inverse problem aims at inverting the discrete version of relation (1) to retrieve the radiometric brightness temperature map T from the complex visibilities V , i.e. solving the linear system:

$$\mathbf{G}T = V, \quad (2)$$

where \mathbf{G} is the discrete linear operator from the object space E into the data space F describing the basic relation (1). Since the direct problem is stated via an integral equation, the inverse problem does not usually have a straightforward solution. Moreover, since the dimension of the object space E (here the n^2 pixels used to sample T) is often larger than the dimension of the data space F (the $\ell(\ell-1)/2$ samples of V), the linear system (2) is an underconstrained problem with multiple solutions for T [8]. Consequently, the minimum of the least-square criterion

$$\min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2, \quad (3)$$

which is also the solution of the normal equation $\mathbf{G}^*\mathbf{G}T = \mathbf{G}^*V$, is therefore not unique because the square matrix $\mathbf{G}^*\mathbf{G}$ is singular (\mathbf{G}^* is the adjoint of \mathbf{G}). Thus, according to the definition given by Hadamard (chap 1. in [9]), the inverse problem is ill-posed and has to be regularized in order to provide a unique and stable solution for T .

III. REGULARIZATION OF THE PROBLEM

The problem of retrieving a unique and stable estimate T_r of the radiometric temperature distribution T of a scene under observation from complex visibilities V has already been addressed in [2][3][10]. However, different methods have never been compared within the same theoretical framework, neither from an algebraic point of view nor from a numerical one. Two standard “numerical regularizations” and a recently proposed “physical regularization” are compared here within the frame of the same SAIR project, with emphasis on the propagation of random radiometric errors. The three approaches discussed hereafter make use of the modelling operator (or matrix) \mathbf{G} , so that they provide the best estimate T_r inasmuch as all the available information is taken into account in the (regularized) inversions. The information necessary to build the \mathbf{G} matrix is provided by measurements prior to launch [11], as well as data from the on-board calibration and monitoring systems [12]; external calibration procedures will allow updating this information [13]. Due to the complexity of the MIRAS interferometer [7], building the \mathbf{G} matrix involves many technical parameters as well as many error sources. However, there are indications that the overall impact of these uncertainties on the reconstructed brightness temperature field will remain compatible with science requirements for the SMOS mission [14].

A. Tikhonov regularization

A standard approach [15], not yet used for the processing of SAIR measurements, is to find the brightness temperature

map T_r that realizes the minimum of the quadratic functional

$$\min_{\substack{T \in E \\ \mu \in \mathbb{R}}} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 + \mu \|T\|_E^2, \quad (4)$$

where μ is a Lagrange parameter to be determined. For $\mu = 0$ we obtain the discrepancy functional (3). The unique solution of (4) is also the solution of the Euler equation $(\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})T = \mathbf{G}^*V$. (this equation has to be compared to the normal equation $\mathbf{G}^*\mathbf{G}T = \mathbf{G}^*V$ written in section II.B). The T_r map could be obtained through the computation of the inverse of the non singular square matrix $\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \mu\mathbf{I}$:

$$T_r = \mathbf{G}_\mu^+ V, \quad (5)$$

where:

$$\mathbf{G}_\mu^+ = (\mathbf{G}^*\mathbf{G} + \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^*. \quad (6)$$

The drawback of this numerical approach is the regularization parameter μ because the determination of its optimal value may raise some difficulties (chap. 5 in [9]).

B. Minimum-norm regularization

A second standard approach, widely used in the processing of SAIR data [2][10], is to find the minimum-norm solution of (2) by means of computing the temperature map T_r that realizes the minimum of the constrained optimization problem

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (7)$$

This map is obtained through the computation of the Moore-Penrose pseudo-inverse \mathbf{G}^+ of the rectangular matrix \mathbf{G} :

$$T_r = \mathbf{G}^+ V, \quad (8)$$

where \mathbf{G}^+ could be computed with the aid of a standard singular value decomposition of \mathbf{G} (chap. 9 in [9]):

$$\mathbf{G}^+ = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T. \quad (9)$$

Here, the σ_i 's are the singular values of \mathbf{G} , written in ascending order, associated to the left and right singular vectors \mathbf{u}_i and \mathbf{v}_i . As illustrated in [3], owing to the particular role played by the smallest σ_i in the computation of \mathbf{G}^+ , with (9) or with the well-known expression $\mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}$, it is preferable to compute it with the aid of a truncated singular value decomposition (chap. 10 in [9]):

$$\mathbf{G}_m^+ = \sum_{i > m} \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T. \quad (10)$$

The regularized minimum-norm solution of (2) is now given by:

$$T_r = \mathbf{G}_m^+ V, \quad (11)$$

where m indicates the number of singular values σ_i discarded prior to inversion. Here again, the drawback of this approach is the choice of the optimal value for m which plays the role of a numerical regularization parameter [3].

C. Band-limited regularization

Referring now to a physical concept, namely the limited resolution of SAIR, a recently proposed approach [3] is to find the temperature map T_r which has its Fourier transform confined to the experimental frequency coverage H [5]. This band-limited solution realizes the minimum of the constrained optimization problem

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (12)$$

where \mathbf{P}_H is the projector onto the subspace \mathcal{E} (of E) of the H -band limited functions [3]. The unique solution of (12) is given by:

$$T_r = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{A}^+ V, \quad (13)$$

where:

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^* \quad (14)$$

is the More-Penrose pseudo-inverse of the rectangular matrix $\mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{U}^* \mathbf{Z}$, \mathbf{U} is the Fourier transform operator and \mathbf{Z} is the zero-padding operator beyond H .

D. Apodization

In order to filter out the Gibbs effects due to the sharp frequency cut-off associated to the experimental frequency coverage H , solutions (5), (11) and (13) have to be damped by an appropriate apodization (or windowing) function W [16]:

$$\mathcal{T}_r = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} T_r, \quad (15)$$

where $\widehat{\mathbf{W}}$ is the diagonal matrix whose non-zero elements are the values of W in H . As demonstrated and illustrated in [3], these maps have to be compared to $\mathcal{T}_w = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} T$ (which is the "ideal" temperature map to be reconstructed and apodized with the same window W) and not to T when evaluating the inversion methods.

E. Propagation of errors

When investigating the propagation of random errors ΔV through a (regularized) reconstruction process, the standard analysis [17] provides the following estimation:

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}} \leq \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \frac{\|T\|_E}{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}, \quad (16)$$

where σ_{max} and σ_{min} are the largest and the smallest singular values of \mathbf{G}_μ , \mathbf{G}_m or \mathbf{A} . During the inversion process, the random errors ΔV propagate from the visibilities to the reconstructed map T_r , and therefore to \mathcal{T}_r according to (15). The corresponding error map $\Delta \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_r - \mathcal{T}_w$ may have an angular dependence with $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ which cannot be easily predicted since it varies from one observed scene T to another. However, as illustrated in [3], whatever the inversion approach, the ratio $\sigma_{max}/\sigma_{min}$ is an upper bound for the amplification factor of errors through the reconstruction process, a scalar which of course does not reflect this angular dependence since it only makes the connection with the norms of $\Delta \mathcal{T}_r$ and ΔV .

In the special case where the perturbation ΔV is a random gaussian noise, we have the following equality established in the Appendix:

$$\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\sigma_\xi} \|V\|_F}{\sqrt{\sigma_u} \|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\mathbf{R}\|_f}{\sqrt{\ell(\ell-1)}} \times \frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|V\|_F}, \quad (17)$$

where $\mathbb{E}[\]$ is the expected value (chap. 4 in [18]), σ_ξ and σ_u are the area of the elementary cells of the sampling grids \mathbb{G}_ξ and \mathbb{G}_u , while \mathbf{R} is the reconstruction operator relating \mathcal{T}_r to V and may involve here any of the operators (6), (10) or (14) in addition to the windowing function W , according to (15). Since the Frobenius norm $\|\mathbf{R}\|_f$ is an increasing function of $\ell(\ell-1)$, whatever the reconstruction operator \mathbf{R} , the radiometric sensitivity is therefore an increasing function of $\sqrt{\ell(\ell-1)}$, and of course of $\sigma_{\Delta V}$. Relation (17) generalizes to any reconstruction operator \mathbf{R} a result which has been formerly illustrated when \mathbf{R} is reduced to a simple inverse Fourier transform (eq. (15) in [19]), an approach which cannot account, for example, for spatial decorrelation effects.

IV. SIMULATIONS AND RESULTS

Simulations have been performed for a Y-shaped array equipped with $\ell = 10$ antennas. The available number of complex visibilities is therefore equal to $\ell(\ell-1)/2 = 45$, while there are only 36 non-redundant spatial frequencies in the star-shaped frequency coverage H . The dimension of the hexagonally sampled grids \mathbb{G}_ξ and \mathbb{G}_u has been fixed to $n^2 = 256$. The object workspace E is thus isomorphic to \mathbb{R}^{256} . Only one measurement of the visibility function for the zero spacing $V(\mathbf{0})$ is included in the modelling operator \mathbf{G} . The dual space \mathcal{E} and the data space F are therefore isomorphic to the complex spaces \mathbb{C}^{36+1} and \mathbb{C}^{45+1} . Since it is more convenient to work in the underlying real spaces \mathbb{R}^{73} and \mathbb{R}^{91} , the size of the real-valued matrices \mathbf{G} and \mathbf{A} are therefore 91×256 and 91×73 (the linear system (2) is underdetermined while the least-square criterion (12) is overconstrained thanks to the $45 - 36 = 9$ redundant complex visibilities).

The eigenvalues of the real valued square matrices $\mathbf{G}^* \mathbf{G}$ and $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \mu \mathbf{I}$ for $\mu = 10^{-6}$ are shown on Fig. 1. According to the floating point relative accuracy of MATLAB ($\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-16}$), the 165 smallest eigenvalues on the left side of the spectrum should be considered as equal to zero [20]. The number of remaining positive eigenvalues is therefore equal to 91, which is the rank of \mathbf{G} . As a consequence, the matrix $\mathbf{G}^* \mathbf{G}$ is singular. This is not the case of the matrix $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \mu \mathbf{I}$ since its smallest eigenvalue is equal to μ .

The singular values of the real valued rectangular matrices \mathbf{G} and \mathbf{A} are shown on Fig. 2. Both matrices are of full-rank and positive definite. However, it is to be noted that the 73 singular values of \mathbf{A} are of the order of unity and will therefore lead to a small amplification factor of errors, according to (16). Conversely, the 18 smallest singular values of \mathbf{G} (corresponding to the 9 redundant complex visibilities), out of a total of 91, vary from 10^{-2} down to 10^{-4} . According to (9) and (16) they will be responsible for a large amplification

factor of errors (between 10^2 and 10^4 as pointed out in [3]). This suggests to compute \mathbf{G}^+ with the aid of the truncated singular value decomposition (10) so that these $m = 18$ smallest singular values are discarded prior to inversion, keeping only the $91 - 18 = 73$ largest ones which correspond to the spatial frequencies in H associated to the unknowns of the overconstrained problem (12). Consequently, the amplification factor of errors will be much smaller, according to (16).

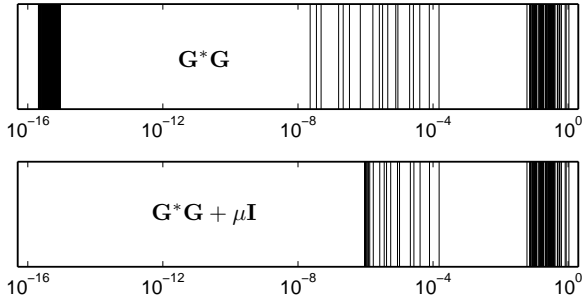


Fig. 1. The 256 eigenvalues of the 256×256 matrices $\mathbf{G}^* \mathbf{G}$ (top) and $\mathbf{G}^* \mathbf{G} + \mu \mathbf{I}$ for $\mu = 10^{-6}$ (bottom).

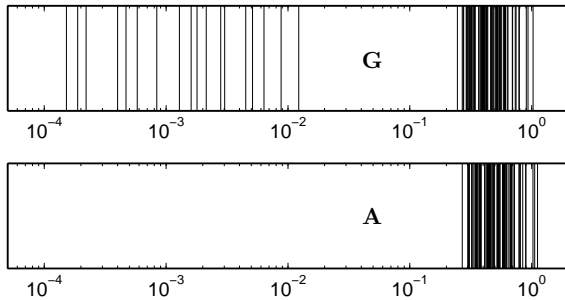


Fig. 2. The 91 singular values of the 91×256 matrix \mathbf{G} (top) and the 73 singular values of the 91×73 matrix \mathbf{A} (bottom).

Complex visibilities V have been simulated from a brightness temperature map T at its highest level of resolution for an instrument with non identical subsystems (different antenna voltage patterns and different receiver band-pass filters) and a random radiometric noise ΔV with standard deviation $\sigma_{\Delta V} = 0.1$ K has been added on both the real and imaginary parts of V . The Hanning window (section V.C in [21]) has been used for all the reconstructions. Of course another window might have been chosen [16], but the effect of the apodization function on the propagation of errors has already been addressed (Table I in [3]). The brightness temperature distribution of the test scene chosen for the simulations is the temperature map shown on Fig. 3 at its highest level of resolution, T , as well as at the window resolution level, T_w .

Reconstructions have been performed in order to compare the Tikhonov solution (5), the regularized minimum-norm solution (11) and the band-limited one (13). Provided that the optimal values for μ and m are used, it turns out that the three methods leads to the same solution (see Fig. 4) and have the same behaviour with regards to the propagation of

errors: the average factor of noise amplification is here of the order of 0.54 K/K [3].

Concerning the Tikhonov regularization, the choice of the optimal value for the Lagrange parameter μ is a crucial and difficult problem in the theory of regularization. However, one way to find this value is to plot $\|V - \mathbf{G}T_r\|_F$ versus $\|T_r\|_E$ for different values of μ . These variations are shown in Fig. 5 for $10^{-8} \leq \mu \leq 10^{-1}$. As predicted by the theory, the plot has the shape of the letter L (hence the name of ‘L-curve’, chap. 5 in [9]). The optimal value for μ corresponds to the point with maximum curvature (i.e. the corner of the L-curve) because it is the best compromise between approximation error and noise propagation. Here it is about 10^{-6} (hence the previous choice of μ in Fig. 1), however this value may vary from one set of visibilities V (or one observed scene T) to another; it may also depend on the amount of input noise ΔV (here, $\sigma_{\Delta V} = 0.1$ K).

Regarding the minimum-norm regularization, the choice of the number m of singular values σ_i discarded prior to inversion is also a crucial issue. The variations of $\|V - \mathbf{G}T_r\|_F$ with $\|T_r\|_E$ have been reported on Fig. 5 for $1 \leq m \leq 32$. It is worthy of note that the plot has also a L-shaped behaviour and the maximum curvature point, which is very close to the point of the optimal value for μ , corresponds to $m = 18$. The number of singular values kept in the inversion is therefore equal to $91 - 18 = 73$ which is also the value suggested by the singular values spectrum of \mathbf{G} shown on Fig. 2.

Finally, the band-limited solution gives rise to a single point labelled \mathbf{A}^+ in Fig. 5. It can be observed that this point is also very close to the points corresponding to the optimal values for μ and m , which confirms the link between the three regularizing approaches, this one having the great advantage to have a physical meaning and to be independent from any regularizing parameter. Moreover, the dimensions of the matrix \mathbf{A} are reduced to the minimum number of unknowns, here the 73 frequencies in the experimental frequency coverage H , while taking into account, in the least-square sense, all the available complex visibilities without averaging the potentially redundant ones.

More insight on the influence of the regularization parameters μ and m is shown on Figs. 6 and 7 where the solutions provided by the Tikhonov and the minimum-norm regularizations are drawn for three typical situations: an over-regularized solution, an under-regularized solution and the solution corresponding to the optimal value for the regularization parameter. As indicated previously, the latter ones are similar to the band-limited regularized solution drawn on Fig. 4: when accounting for the systematic error analyzed in [3], the average factor of noise amplification is here about 0.54 K/K. This factor is much larger for the under-regularized solutions which may be very sensitive to the input noise ΔV while the over-regularized ones exhibit a worse spatial resolution. These figures illustrate the meaning of the L-curve criterion which is optimal only from a numerical analysis point of view, in the sense that it is the best compromise between approximation error and noise propagation. However, in some imaging situations one may prefer an over-regularized solution at a lower spatial resolution (particularly when the level of input noise is larger

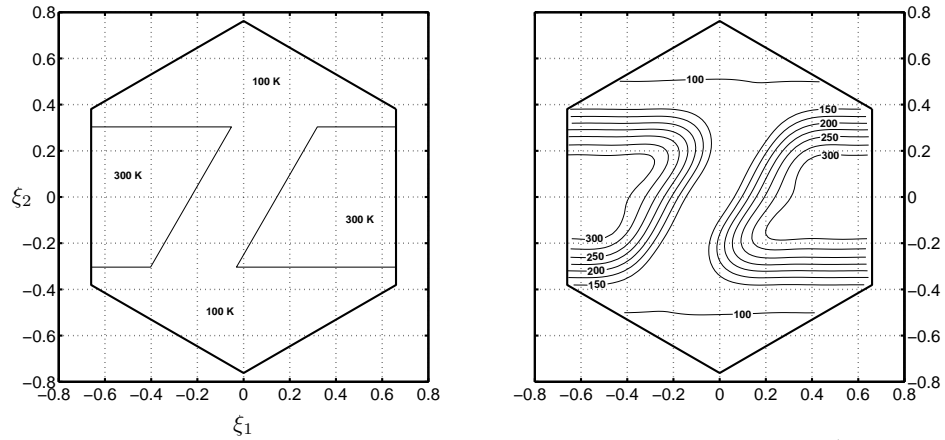


Fig. 3. Maps of the full resolution brightness temperature T (left) and of the instrument resolution brightness temperature T_w after it has been damped with a Hanning window (right).

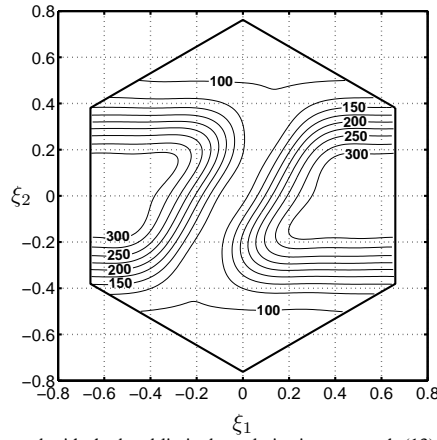


Fig. 4. Brightness temperature map T_r reconstructed with the band limited regularization approach (13)

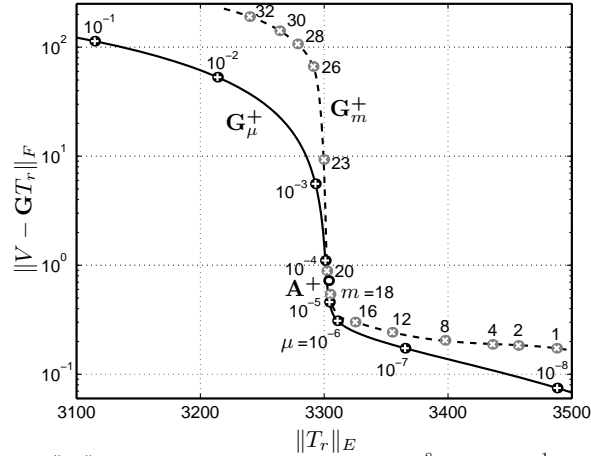


Fig. 5. Variations of $\|V - \mathbf{G}T_r\|_F$ with $\|T_r\|_E$ for the Tikhonov solution (5) with $10^{-8} \leq \mu \leq 10^{-1}$, the regularized minimum-norm solution (11) with $1 \leq m \leq 32$ and the band-limited solution (13).

than an acceptable limit) or an under-regularized solution at a higher spatial resolution (when the level of input noise is small enough): the regularization parameters μ and m permit a trade-off between spatial resolution and noise amplification,

but this trade-off is not automatic and it has to be done interactively by the user.

Finally, simulations have been conducted for a Y-shaped array (close to the spatial instrument of the SMOS mission)

6

SUBMITTED TO: IEEE TRANSACTIONS ON GEOSCIENCE AND REMOTE SENSING

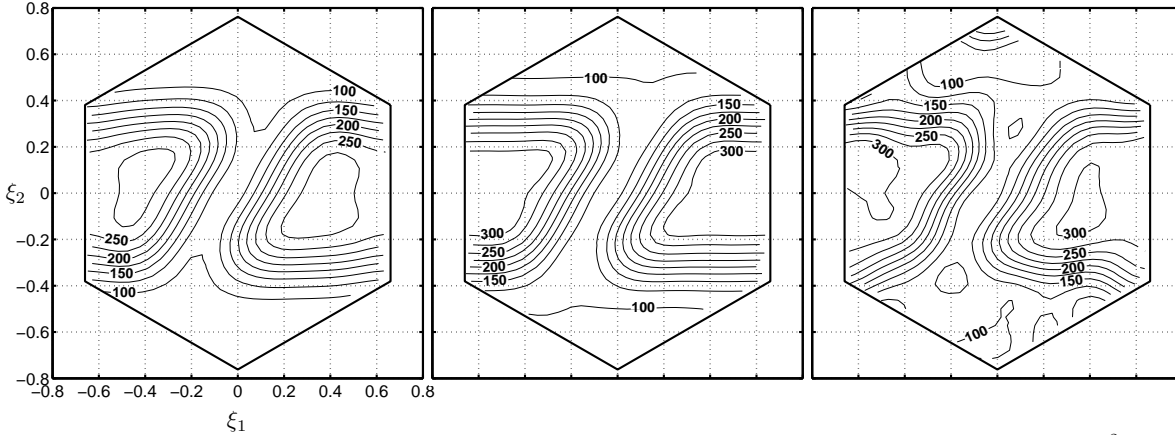


Fig. 6. Brightness temperature maps T_r reconstructed with the Tikhonov regularization approach (5). From left to right: $\mu = 10^{-2}$ (over-regularized), $\mu = 10^{-6}$ and $\mu = 10^{-8}$ (under-regularized).

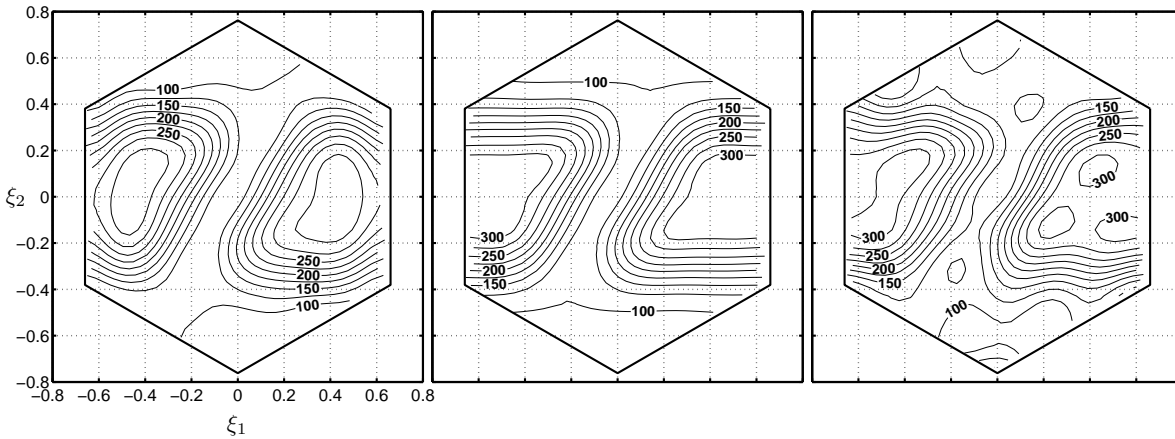


Fig. 7. Brightness temperature maps T_r reconstructed with the minimum-norm regularization approach (11). From left to right: $m = 32$ (over-regularized), $m = 18$ and $m = 1$ (under-regularized).

equipped with $\ell = 69$ antennas. The same behaviour of the three regularizing approaches has been observed and no numerical instability due to the size of the instrument, and therefore to the size of the matrices \mathbf{G} (now 4693×16384) or \mathbf{A} (4693×2791), has been noted. The optimal value for μ is now about $3 \cdot 10^{-7}$ while the optimal value for m is still related to the number of redundant complex visibilities: $m = 4693 - 2791 = 1902$. Provided that these optimal values are used, the three methods leads again to the same solution and as expected in section III.E, the average factor of noise amplification grows as the square root of $\ell(\ell - 1)$ since now it is of the order of 4.14 K/K.

V. CONCLUSION

The reconstruction of radiometric brightness temperature maps from complex visibility samples provided by SAIR has been addressed. Since the corresponding inverse problem is ill-posed, it has to be regularized in order to provide a unique and stable solution. Three regularizing methods have been examined, all leading to the same results with regards to the propagation of random radiometric noise. Two of them, the Tikhonov and the minimum-norm approaches, depend on a

numerical regularization parameter, while the third one, the band-limited approach, does not depend on such a numerical parameter. The optimal value of this parameter for the Tikhonov method depends on the set of complex visibilities and may therefore vary from one observed scene to another. This is not the case for the minimum-norm approach since the optimal value of the regularization parameter is here only related to the number of redundant visibilities, not to their values. In both cases, the value retained for the regularization parameter is crucial for the behaviour of these methods since non optimal values may lead to large amplification factors of noise or to solutions with a lower spatial resolution. This is not the case of the band-limited approach which takes into account the limited resolution of SAIR to regularize the problem instead of setting a numerical regularization parameter. Moreover, the dimension of the system to be solved is here reduced to the minimum number of unknowns (or degrees of freedom), the number of non-redundant frequencies in the experimental frequency coverage, while taking into account, in the least-square sense, all the available complex visibilities without averaging the potentially redundant ones. Based on results obtained for an array close to the configuration of the space instrument of the SMOS mission, this method can be

put into a shape which will meet the real time requirements for the processing of SMOS data.

APPENDIX

Depending on the space where they have to be computed, different norms are used in this paper. According to the definition of the inner products in E (or \mathcal{E}) and F given in [3], these norms are defined by the following relations:

$$\begin{aligned} \|V\|_F^2 &= \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} |V_{kl}|^2, & \|T\|_E^2 &= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}_{\xi}} |T_{\mathbf{p}}|^2, \\ \|T\|_{\mathcal{E}}^2 &= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}_{\xi}} |T_{\mathbf{p}}|^2 \end{aligned}$$

In this appendix we establish the equality (17) governing the propagation of random gaussian noise from complex visibilities V to an apodized reconstructed map \mathcal{T}_r . The corresponding random vectors ΔV et $\Delta \mathcal{T}_r$ are related by the linear relation $\Delta \mathcal{T}_r = \mathbf{R} \Delta V$, where \mathbf{R} may involve any of the reconstruction operators (6), (10) or (14) in addition to the windowing function W , according to (15). The random radiometric noise ΔV is supposed here to be a gaussian one with standard deviation $\sigma_{\Delta V}$.

According to the definition of the norm in \mathcal{E} , we therefore have:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2] &\equiv \sigma_{\xi} \mathbb{E}[\text{trace}(\Delta \mathcal{T}_r \overline{\Delta \mathcal{T}_r}^T)] \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbb{E}[\Delta \mathcal{T}_r \overline{\Delta \mathcal{T}_r}^T]) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbb{E}[\mathbf{R} \Delta V \overline{\Delta V}^T \mathbf{R}^*]) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbf{R} \mathbb{E}[\Delta V \overline{\Delta V}^T] \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbf{R} \sigma_{\Delta V}^2 \mathbf{I} \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \sigma_{\Delta V}^2 \text{trace}(\mathbf{R} \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_f^2 \end{aligned}$$

where $\|\mathbf{R}\|_f$ is the Frobenius norm of \mathbf{R} (the square root of the sum of the squared elements).

Likewise, according to the definition of the norm in F , we have:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2] &\equiv \sigma_{\mathbf{u}} \mathbb{E}[\text{trace}(\Delta V \overline{\Delta V}^T)] \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \text{trace}(\mathbb{E}[\Delta V \overline{\Delta V}^T]) \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \ell(\ell - 1) \sigma_{\Delta V}^2 \end{aligned}$$

Dividing the first relation by $\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2$ and substituting for $\sigma_{\Delta V}^2$ from the second, we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2]}{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2} &= \frac{\sigma_{\xi}}{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2} \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_f^2 \\ &= \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2} \frac{\|\mathbf{R}\|_f^2}{\ell(\ell - 1)} \mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2]. \end{aligned}$$

Hence the equality:

$$\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|V\|_F}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}}} \frac{\|\mathbf{R}\|_f}{\sqrt{\ell(\ell - 1)}} \frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|V\|_F}.$$

REFERENCES

- [1] C.S. Ruf, C.T. Swift, A.B. Tanner, and D.M. LeVine, *Interferometric synthetic aperture radiometry for the remote sensing of the Earth*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 26(5), pp. 597-611, 1988.
- [2] M.A. Goodberlet, *Improved image reconstruction techniques for synthetic aperture radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 38(3), pp. 1362-1366, 2000.
- [3] E. Anterrieu, *A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 42(8), pp. 1649-1656, 2004.
- [4] A. Lannes, E. Anterrieu, and K. Bouyoucef, *Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques; Part I: regularization principle*, Journal of Modern Optics, 41(8), pp. 1537-1574, 1994.
- [5] A. Lannes, E. Anterrieu, and K. Bouyoucef, *Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques Part II: technical developments and applications*, Journal of Modern Optics, 43(1), pp. 105-138, 1996.
- [6] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [7] M. Martin-Neira, Y. Menard, J.-M. Goutoule and U. Kraft, *MIRAS, a two-dimensional aperture synthesis radiometer*, Proc. of IGARSS'94 (Pasadena, California, USA), pp. 1323-1325, 1994.
- [8] C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1998.
- [9] M. Bertero and P. Boccacci, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, Institute of Physics Publishing, 1998.
- [10] A.B. Tanner and C.T. Swift, *Calibration of a synthetic aperture radiometer*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 31(1), pp. 257-267, 1993.
- [11] N. Skou, *Aspects of the SMOS pre-launch calibration*, Proc. of IGARSS'03 (Toulouse, France), pp. 1222-1225, 2003.
- [12] I. Corbella, F. Torres, N. Duffo, A. Camps, M. Vall-Ilossera, *MIRAS-SMOS end-to-end calibration scheme*, Proc. of μ RAD'04 (Roma, Italia), 2004.
- [13] E. Anterrieu, S. Gratton, and B. Picard *Self characterization of modelling parameters for Synthetic Aperture Imaging Radiometers*, Proc. of IGARSS'03 (Toulouse, France), pp. 3052-3054, 2003.
- [14] E. Anterrieu, P. Waldteufel, and G. Caudal, *About the effects of instrument errors in interferometric radiometry*, Radio Science, 38(3), 8044, 2003.
- [15] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharksky, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [16] E. Anterrieu, P. Waldteufel, and A. Lannes, *Apodization functions for 2D hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(12), pp. 2531-2542, 2002.
- [17] A. Bjorck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1996.
- [18] H. Stark and J.W. Woods, *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*, Pearson Education, 2001.
- [19] A. Camps, I. Corbella, J. Bara, and F. Torres, *Radiometric sensitivity computation in aperture synthesis interferometric radiometry*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 36(2), pp. 680-685, 1998.
- [20] *Using Matlab*, The MathWorks Inc., 6th ed. revised for Matlab 6.5, 2002.
- [21] F.J. Harris, *On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform*, Proc. IEEE, 66(1), pp. 51-83, 1978.

Biographie(s)

Biographie 8.1: **TIKHONOV, Andrei Nikolaevich**
(30 Octobre 1906, Gzhatska, Russie - 1993)



Andrei Tikhonov entre à l'université à l'âge de 16 ans. A 19 ans, il publie son premier article, alors qu'il n'a pas encore achevé son cycle universitaire. Ses travaux sur les espaces compacts lui valent une renommée mondiale avant même de commencer une véritable carrière de chercheur.

Loin de s'endormir sur ses lauriers, il oriente ses recherches sur l'analyse fonctionnelle et établit un célèbre théorème de point fixe en 1935. Tikhonov a su allier la recherche fondamentale et la recherche appliquée. Une caractéristique de son travail consistait à partir d'un problème concret, pioché dans les sciences naturelles, d'en déduire un problème de physique type et d'en donner une solution mathématique claire. Il généralisait ensuite cette approche pour toute une classe de problèmes mathématiques. Il a ainsi procédé à des avancées importantes en géophysique, électrodynamique, en analyse numérique et en physique théo-

rique. C'est dans les années 60 qu'il publie une série d'articles fondamentaux sur les problèmes mal posés. Il définit une classe de problèmes pouvant être régularisés et introduit le concept d'opérateur de régularisation.

Bibliographie

- [1] A.B. TANNER et C.T. SWIFT : Calibration of a synthetic aperture radiometer. *IEEE TGRS*, 31(1):257–267, 1993.
- [2] E. ANTERRIEU : A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 42(8):1649–1656, 2004.
- [3] Bruno PICARD et E. ANTERRIEU : Comparison of regularized inversion methods in synthetic aperture imaging radiometry. *soumis à IEEE TGRS*.
- [4] Hansen C. : Rank-deficient and discrete ill-posed problems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1998.
- [5] A.N. TIKHONOV, A.V. GONCHARVSKY, V.V. STEPANOV et A.G. YAGOLA : Numerical methods for the solution of ill-posed problems. *Kluwer Academic Publisher*, 1995.

Chapitre 9

Modélisation et auto-caractérisation des paramètres instrumentaux

Sommaire

9.1 Simulations des instruments de type HUT2D et MIRAS.	169
9.1.1 Modélisation d'un instrument réaliste	170
9.1.2 Modélisation d'un instrument idéal	179
9.2 Auto-caractérisation des paramètres de modélisation de G	180

De temps en temps, il se relevait et lançait une phrase du genre : « Hourra, j'ai découvert la Troisième Loi de Boyle. » Et chacun de savoir où il en était.

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

9.1 Simulations des instruments de type HUT2D et MIRAS.

Rappelons la relation fondamentale liant la carte de température de brillance observée $T_b(\xi, \eta)$ au degré de cohérence spatiale V_{kl} mesuré pour un couple d'antennes (A_k, A_l) :

$$V_{kl}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 1} F_k(\xi, \eta) F_l^*(\xi, \eta) T_b(\xi, \eta) \tilde{r}_{kl}(\tau_{kl}^g) e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}} \quad (9.1)$$

où $F_k(\xi, \eta)$ et $F_l(\xi, \eta)$ sont les diagrammes de rayonnement des deux antennes A_k et A_l (* indique le complexe conjugué), $\tilde{r}_{kl}(\tau_{kl}^g)$ est la fonction de décorrélation spatiale, $\tau_{kl}^g = (u\xi + v\eta)/f_o$ est le retard géométrique, et f_o est la fréquence centrale d'observation.

Cette relation sera utilisée pour la simulation des visibilitées et pour la modélisation de l'instrument dans le cadre de la reconstruction, suivant ainsi ce qui se fait dans la plupart des publications sur la reconstruction d'image pour les radiomètres à synthèse d'ouverture. Il sera bien entendu possible de considérer des paramètres différents pour ces deux étapes, de façon à étudier l'impact des erreurs instrumentales sur l'erreur de reconstruction.

Par ailleurs, une démarche différente a été adoptée dans un simulateur de la totalité de la chaîne d'acquisition et de traitement des données pour le projet SMOS. Le SEPS, pour *SMOS*

End-to-end Performance Simulator, reconstitue l'ensemble des étapes, depuis l'émission de températures de brillance par la surface de la Terre jusqu'à l'estimation des produits géophysiques que sont l'humidité et la salinité [1]. Ce simulateur, développé par la société espagnole GMV en collaboration avec l'équipe de traitement du signal de l'Université Polytechnique de Catalogne (UPC), est basé, pour la reconstruction d'image, sur une méthode CLEAN, développée par cette même équipe. La simulation des visibilitées est basée sur une modélisation différente de l'instrument (modélisation différentes des gains d'antennes, des filtres des récepteurs, simulation des produits de corrélations, des étapes de calibration par injection de bruit) et sur une version remaniée du théorème de VAN CITTERT-ZERNIKE :

$$V \propto \iint FF^* (T - T_{ph \text{ rec}}) \tilde{r} e^{-2j\pi(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta \quad (9.2)$$

où $T_{ph \text{ rec}}$ est la température physique moyenne des récepteurs.

Quelques interrogations subsistent sur l'opportunité de cette nouvelle formulation et sur certaines étapes de la simulation des visibilitées dans ce simulateur. C'est pourquoi il a été choisi de s'en tenir à la relation (9.1). Les méthodes de reconstruction présentées ici sont basées sur la matrice de modélisation \mathbf{G} issues de cette relation. Quand bien même un niveau de modélisation instrumental plus élevé permettrait d'affiner l'estimation des erreurs de reconstruction, il ne changerait pas de façon significative les caractéristiques générales de ces méthodes : facteur d'amplification du bruit sur les mesures, impact des erreurs d'étalonnage ou de calibration des diagrammes de rayonnement, de la fonction de décorrélation spatiale.

Les paragraphes suivants présentent les paramétrisations choisies pour les gains des antennes et des filtres des récepteurs.

9.1.1 Modélisation d'un instrument réaliste

a. Modélisation des antennes

Les diagrammes de rayonnement de chacune des antennes de l'interféromètre sont caractérisés par leur amplitude $D(\theta, \phi)$ et leur phase $\Delta\varphi(\theta, \phi)$ dans la direction d'observation (θ, ϕ) :

$$F(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) e^{j\Delta\varphi(\theta, \phi)}. \quad (9.3)$$

Dans les simulations présentées par la suite, l'amplitude obéit à une loi en puissance :

$$D(\theta, \phi) = D(0) (\cos^{n_1} \theta \cos^2 \phi + \cos^{n_2} \theta \sin^2 \phi), \quad (9.4)$$

avec

$$D(0) = \sqrt{\frac{2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{n_1 + n_2 + 1}} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n_1 = -0.15 / \log \cos \frac{\theta_1}{2} \\ n_2 = -0.15 / \log \cos \frac{\theta_2}{2} \end{cases} \quad (9.5)$$

où θ_1 et θ_2 sont les largeurs à mi-hauteur du lobe principal respectivement dans les directions ξ et η . De même, la phase varie en fonction de (θ, ϕ) :

$$\Delta\varphi(\theta, \phi) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \left((D_1'' \sin \theta + D_1^\perp (1 - \cos \theta)) \cos^2 \phi + (D_2'' \sin \theta + D_2^\perp (1 - \cos \theta)) \sin^2 \phi \right), \quad (9.6)$$

où D_1'' , D_1^\perp et D_2'' , D_2^\perp sont les erreurs d'orientation sur l'axe du lobe principal, respectivement transverses et longitudinales, dans les directions ξ et η , et λ_o est la longueur d'onde d'observation.

Ainsi, chaque diagramme de rayonnement des antennes dépend de six paramètres qui diffèrent d'une antenne à l'autre. Des gains d'antennes réalistes ont été simulés à partir de valeurs tirées aléatoirement compte tenu des spécifications imposées par l'ESA pour leur élaboration. Les tableaux 9.1 et 9.2 rappellent les paramètres retenus pour les simulations de MIRAS et HUT2D respectivement, les tableaux 9.3, 9.4, 9.5 et 9.6 résumant les statistiques sur ces paramètres et sur la phase à -3 dB. Les valeurs nominales fournies par l'ESA apparaissant dans le tableau 9.7.

TAB. 9.1 – Paramètres des gains d’antennes pour un instrument simulé de type MIRAS.

	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	$D_1^{\prime\prime}$ (mm)	D_1^{\perp} (mm)	$D_2^{\prime\prime}$ (mm)	D_2^{\perp} (mm)
1	64.99	68.64	+0.39	+3.70	+1.90	-4.39
2	67.62	66.02	+0.81	+3.62	-0.17	+0.65
3	62.03	67.56	+0.24	+5.43	+1.98	-8.21
4	67.46	66.08	-0.76	-0.74	-1.47	+5.22
5	65.69	63.96	-1.67	-2.48	-1.20	+2.91
6	68.11	66.93	+0.62	-2.10	-1.60	-0.76
7	65.91	63.98	-1.78	+7.39	+0.91	-9.67
8	64.26	68.16	-1.40	-1.71	-1.72	+7.68
9	65.93	64.43	+0.02	+6.40	-0.81	+4.17
10	66.01	66.32	+0.77	+5.07	+1.81	-2.25
11	68.52	69.82	+0.04	+4.11	+0.50	-5.45
12	62.39	62.90	+0.83	-2.10	+0.57	-3.91
13	68.69	65.66	-1.16	+4.71	+0.31	+5.79
14	62.54	62.97	+0.26	+7.32	-1.12	-3.98
15	69.05	67.75	-1.07	-1.16	-0.66	-4.67
16	68.68	65.24	-0.12	+7.63	+0.58	-7.08
17	69.32	62.77	+1.59	-5.86	+1.50	-5.25
18	64.83	65.84	-0.60	+8.29	-1.94	+9.75
19	69.12	62.11	+0.55	-6.60	-0.91	+6.25
20	65.97	69.65	-1.43	+8.58	-1.94	+4.55
21	69.89	68.77	+0.33	+1.13	+0.76	+5.22
22	65.20	62.96	+0.58	-8.15	+1.09	-1.92
23	68.53	69.97	-1.43	+5.69	-0.92	+1.14
24	68.48	65.77	+0.23	-3.95	+0.52	+0.49
25	66.01	66.40	+0.05	-4.52	+0.35	-4.63
26	66.76	63.01	+0.91	-9.93	+1.64	+3.24
27	68.22	66.00	-1.66	+7.71	-1.62	+9.02
28	69.45	68.49	+0.31	+5.41	+0.51	+4.66
29	68.24	68.64	+0.04	+1.98	-0.65	+4.47
30	69.31	67.30	+0.39	-1.60	+1.07	-9.49
31	66.43	65.02	+0.47	+5.21	+0.48	+1.58
32	64.33	62.34	+0.35	+0.38	-1.44	-3.68
33	66.11	62.04	-1.10	-5.13	+1.60	+4.18
34	68.35	65.19	-0.98	-4.25	-1.10	+1.82
35	62.99	62.57	+0.46	-3.22	+0.74	-5.65
36	67.68	63.17	-0.31	+6.27	+0.78	-1.17
37	69.88	69.90	-1.46	-3.96	-0.16	+0.07
38	64.68	69.37	-0.41	-1.59	+1.57	-3.09
39	68.40	64.44	-0.76	+4.50	-0.47	+7.98
40	62.54	64.16	+1.29	+0.87	-0.54	+0.02
A suivre...						

Suite...						
	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	D_1'' (mm)	D_1^+ (mm)	D_2'' (mm)	D_2^+ (mm)
41	69.16	65.50	+0.76	+4.40	+1.76	-9.84
42	65.85	63.12	-0.29	-6.74	+0.77	+0.38
43	64.72	62.41	+0.18	+6.30	-0.06	-7.68
44	62.10	62.45	-1.80	-0.96	-1.34	-0.59
45	62.39	64.75	+0.24	-5.07	+0.63	-7.35
46	69.11	62.05	+0.25	-0.20	-1.38	+3.02
47	66.13	66.13	+1.95	-5.51	+0.00	-1.40
48	62.11	63.86	+1.45	-1.33	-1.76	+7.72
49	67.82	62.99	+0.07	-7.13	+1.11	-1.05
50	66.67	65.16	+0.64	-4.56	-1.04	-1.48
51	64.57	64.29	-0.81	-1.94	-1.39	+5.80
52	65.95	66.92	-1.72	+3.62	+1.42	-8.06
53	67.00	64.76	-1.46	-1.38	+1.44	-0.66
54	65.12	69.90	+1.90	-0.81	+0.97	+3.38
55	63.91	68.10	-0.94	-5.87	+1.73	-2.13
56	67.85	67.35	+0.98	-4.17	+1.03	-7.93
57	68.16	69.23	+1.99	+1.72	-0.56	-2.52
58	66.91	66.94	-0.31	+7.85	+1.97	-1.98
59	65.34	63.69	-1.78	-2.49	+0.63	+4.04
60	67.57	62.27	+1.75	+3.31	+0.39	-1.91
61	63.59	69.83	-1.30	+8.44	-0.96	-2.50
62	62.85	66.41	-0.41	+3.42	-0.06	-2.35
63	64.48	65.54	+0.07	+0.86	-0.48	+6.98
64	64.20	66.20	+0.22	-8.28	+0.22	+3.59
65	62.09	63.14	+1.54	-2.63	+0.86	-4.29
66	68.51	63.12	+1.58	-4.89	+0.08	-3.26
67	66.98	66.83	+0.02	+1.25	+0.80	-4.29
68	64.94	62.68	+1.47	-4.11	+0.21	+5.64
69	63.62	64.05	+1.03	-2.45	+1.34	+3.73

TAB. 9.2 – Paramètres des diagrammes de rayonnement des antennes pour un instrument simulé de type HUT2D.

	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	D_1'' (mm)	D_1^\perp (mm)	D_2'' (mm)	D_2^\perp (mm)
1	69.86	63.83	+1.42	-0.55	+1.15	+3.12
2	62.34	66.39	+1.09	-4.05	-1.29	+3.82
3	62.11	67.21	+1.82	-6.08	+1.10	+2.27
4	67.61	67.77	-0.51	-0.32	+1.88	-3.16
5	64.01	69.04	+1.06	+1.65	+0.74	+9.34
6	69.39	64.48	+1.87	-6.89	-1.35	-3.73
7	69.42	63.31	-0.95	+4.28	+1.91	+2.74
8	69.38	63.15	+1.00	-2.41	+0.90	-6.74
9	64.40	63.05	-0.05	-0.08	+1.37	+6.12
10	65.52	64.45	+1.20	-7.32	-1.74	-2.50
11	66.76	63.73	-1.62	-1.00	+1.48	-2.17
12	68.51	69.44	-1.93	+7.56	-0.59	+4.44
13	68.45	69.55	-0.55	+4.62	+0.60	+3.63
14	64.07	67.70	+0.06	+2.73	-0.40	-0.27
15	62.90	63.00	+0.34	+1.17	-1.20	-8.25
16	67.54	64.49	+0.03	-0.96	-0.70	-2.40
17	64.75	63.69	+0.70	+0.30	-1.11	+4.50
18	69.58	68.53	-1.78	+2.00	-0.43	-5.69
19	67.95	67.64	+1.25	-0.68	+0.89	+9.90
20	69.55	64.15	-0.32	-2.46	+1.63	+3.40
21	68.85	62.55	-0.93	+5.69	-0.45	-9.38
22	69.20	67.34	-0.99	-1.34	+1.37	-6.31
23	66.92	67.21	-0.99	-2.91	+0.97	+3.02
24	68.14	69.57	+1.80	-5.44	+1.83	+3.60
25	66.60	64.64	+1.81	-0.85	+0.15	-8.67
26	64.67	66.94	+1.54	+0.29	+1.85	-7.59
27	62.78	69.29	+1.19	-1.30	+1.92	-8.08
28	67.10	66.65	+1.92	+1.10	+1.95	+3.83
29	64.33	63.33	+0.42	+0.93	-1.62	+2.74
30	68.71	63.77	-0.41	+4.63	+0.74	+9.57
31	62.05	69.53	-1.47	+4.49	+1.60	-6.59
32	65.18	63.09	+0.11	+0.91	-0.86	-2.58
33	66.88	69.64	-0.99	+1.70	+0.09	-6.73
34	62.03	62.42	-1.77	+0.84	-0.18	+7.26
35	63.59	64.15	+2.00	-7.80	+0.49	-7.35
36	67.39	66.29	+1.67	-7.53	-1.95	-2.61

TAB. 9.3 – Statistiques sur les paramètres des gains d’antennes de MIRAS.

	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	$D_1^{\prime\prime}$ (mm)	D_1^{\perp} (mm)	$D_2^{\prime\prime}$ (mm)	D_2^{\perp} (mm)
Max	69.89	69.97	+1.99	+8.58	+1.98	+9.75
Min	62.03	62.04	-1.80	-9.93	-1.94	-9.84
\bar{m}	66.21	65.54	+0.01	+0.19	+0.13	-0.31
σ	2.30	2.41	1.05	4.93	1.13	5.03

TAB. 9.4 – Statistiques sur la phase à -3dB des gains d’antennes de MIRAS.

Max	Min	\bar{m}	σ
+1.74°	-1.65°	+0.02°	0.96°

TAB. 9.5 – Statistiques sur les paramètres des gains d’antennes du HUT2D.

	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	$D_1^{\prime\prime}$ (mm)	D_1^{\perp} (mm)	$D_2^{\prime\prime}$ (mm)	D_2^{\perp} (mm)
Max	69.86	69.64	+2.00	+7.56	+1.95	+9.90
Min	62.03	62.42	-1.93	-7.80	-1.95	-9.38
\bar{m}	66.35	65.86	+0.25	-0.42	+0.35	-0.49
σ	2.57	2.47	1.25	3.84	1.23	5.79

TAB. 9.6 – Statistiques sur la phase à -3dB des gains d’antennes du HUT2D.

Max	Min	\bar{m}	σ
+1.81°	-1.71°	+0.05°	1.00°

TAB. 9.7 – Spécifications ESA sur les gains d’antennes de MIRAS et du HUT2D.

	Valeurs nominales	Dispersion attendue
θ_1, θ_2	66°	$\pm 4^\circ$
$\Delta\varphi(\theta, \phi)$	0°	$\pm 2^\circ$ à -3dB

b. Les filtres passe-bande des récepteurs

Comme il a été montré précédemment (relation (3.33), partie I, chapt. 3, section 3.3, page 56), la fonction de décorrélation spatiale dépend de la réponse en fréquence normalisée des récepteurs :

$$\tilde{r}_{kl}(\tau_{kl}^g) = \frac{1}{\sqrt{B_k B_l}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(f - f_o) H_l^*(f - f_o) e^{+2j\pi f \tau_{kl}^g} df, \quad (9.7)$$

où $H_k(f)$ et $H_l(f)$ sont les filtres passe-bande, normalisés de façon à ce que leur amplitude maximale soit égale à 1, B_k et B_l sont les bandes passantes équivalentes et f_o est la fréquence

centrale de l'interféromètre. Les filtres passe-bande utilisés dans les simulations présentées par la suite sont des filtres passe-bande idéaux dont la phase est linéaire :

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f-\bar{f}}{B}\right) e^{-j(2\pi\tau(f-\bar{f})+\varphi)}, \quad (9.8)$$

où, \bar{f} et B sont la fréquence centrale et la largeur de bande du filtre, τ est le retard de groupe et φ est le déphasage. L'expression de la fonction de décorrélation correspondant à ce type de filtre a été établie précédemment (relation (3.37), partie I, chapt. 3, section 3.3, page 57).

Ainsi, chaque filtre dépend de quatre paramètres qui diffèrent d'un récepteur à l'autre. Des filtres réalistes ont été simulés à partir de valeurs tirées aléatoirement compte tenu des spécifications imposées par l'ESA pour leur élaboration. Les tableaux 9.8 et 9.9 rappellent les paramètres retenus pour MIRAS et HUT2D respectivement, les tableaux 9.10 et 9.11 résumant les statistiques sur ces paramètres. Les valeurs nominales fournies par l'ESA apparaissant en gras dans le tableau 9.12.

TAB. 9.8 – Paramètres des filtres des récepteurs de MIRAS.

	\bar{f} [GHz]	B [MHz]	τ [10 ⁻⁹ s]	φ [deg]
1	1.41362	20.48	-1.13	203.92
2	1.41331	20.84	+2.95	38.90
3	1.41354	18.31	+3.61	232.07
4	1.41330	21.78	-0.55	320.22
5	1.41375	19.61	-1.34	157.65
6	1.41385	21.01	-1.65	79.16
7	1.41339	19.54	-0.53	161.44
8	1.41355	21.52	+4.81	10.14
9	1.41321	18.09	+4.76	61.30
10	1.41375	18.63	+2.18	10.12
11	1.41334	20.38	+3.20	256.21
12	1.41373	19.51	+0.92	240.72
13	1.41324	21.92	-3.00	197.54
14	1.41327	18.30	-1.65	286.63
15	1.41323	18.60	+3.56	54.55
16	1.41330	20.29	+3.14	47.33
17	1.41364	21.31	+4.50	139.80
18	1.41363	21.61	-3.26	153.01
19	1.41384	18.11	+2.28	326.28
20	1.41345	20.31	+2.09	10.43
21	1.41354	18.23	-4.53	310.15
22	1.41336	19.42	-1.82	29.59
23	1.41346	21.82	+0.74	197.09
24	1.41332	19.60	-2.29	158.52
25	1.41365	19.10	+3.79	94.49
26	1.41329	20.27	-1.62	129.75
A suivre...				

Suite...				
	\bar{f} [GHz]	B [MHz]	τ [10^{-9} s]	φ [deg]
27	1.41355	18.47	-3.33	289.46
28	1.41331	21.12	+3.87	27.87
29	1.41333	18.21	-0.53	311.56
30	1.41362	21.75	-3.40	132.01
31	1.41323	18.05	-3.82	19.80
32	1.41381	20.66	+4.24	292.55
33	1.41343	20.97	+2.86	119.59
34	1.41373	19.65	+2.59	156.40
35	1.41325	21.37	+4.49	158.44
36	1.41365	18.02	+1.62	343.48
37	1.41339	19.53	-3.02	126.54
38	1.41371	20.82	-1.91	185.29
39	1.41329	18.11	-1.36	107.22
40	1.41354	19.36	-2.95	332.68
41	1.41345	21.13	-0.64	352.41
42	1.41379	18.47	+3.41	103.11
43	1.41315	21.45	-0.55	114.95
44	1.41346	19.69	-1.60	104.76
45	1.41355	21.14	-3.51	350.04
46	1.41335	18.12	-0.89	293.36
47	1.41356	20.80	-3.53	11.38
48	1.41346	20.63	-2.76	58.32
49	1.41362	19.05	-4.30	65.16
50	1.41346	21.90	+0.65	284.79
51	1.41346	18.23	+3.39	123.45
52	1.41342	19.60	+2.81	17.47
53	1.41379	20.64	-2.36	213.50
54	1.41336	18.31	-1.38	41.71
55	1.41364	18.46	-2.49	330.92
56	1.41328	21.92	+2.94	31.00
57	1.41362	20.30	+2.64	280.30
58	1.41344	18.23	+0.54	101.45
59	1.41367	18.92	+1.24	343.74
60	1.41380	19.85	-0.57	210.47
61	1.41345	19.71	-3.17	209.26
62	1.41317	20.98	-2.13	347.48
63	1.41373	19.79	+1.19	288.74
64	1.41382	18.81	-4.35	246.01
65	1.41341	20.85	+0.51	66.85
66	1.41383	19.47	+4.81	225.89
67	1.41325	19.77	+3.09	268.37
68	1.41344	20.69	+3.37	194.12
A suivre...				

Suite...				
	\bar{f} [GHz]	B [MHz]	τ [10^{-9} s]	φ [deg]
69	1.41381	21.73	-2.65	57.71

TAB. 9.9 – Paramètres des filtres des récepteurs du HUT2D.

1	1.41345	6.13	+0.24	353.06
2	1.41355	9.54	-4.37	326.47
3	1.41345	9.64	+0.26	148.50
4	1.41330	9.46	-1.47	322.52
5	1.41385	9.03	+1.94	119.27
6	1.41321	7.59	+1.88	174.39
7	1.41346	7.81	-4.52	309.69
8	1.41345	9.07	+1.35	107.50
9	1.41369	6.97	-4.46	299.28
10	1.41380	8.68	-1.42	343.14
11	1.41354	9.02	+0.25	257.37
12	1.41318	9.21	+4.09	13.09
13	1.41346	7.17	-2.01	103.67
14	1.41340	9.40	+1.80	169.11
15	1.41339	6.17	+4.64	287.67
16	1.41373	7.42	+4.64	216.49
17	1.41376	6.76	+3.58	338.59
18	1.41381	7.82	+4.73	254.20
19	1.41380	8.50	+2.75	308.73
20	1.41357	9.24	-3.43	337.97
21	1.41365	6.77	-4.68	339.44
22	1.41324	8.32	-4.55	92.97
23	1.41323	6.21	+0.43	249.77
24	1.41328	6.86	+0.65	187.84
25	1.41360	9.21	+2.38	112.24
26	1.41359	7.34	-1.62	95.99
27	1.41316	8.63	+3.97	179.08
28	1.41358	9.82	-0.89	337.56
29	1.41369	7.04	+4.98	167.07
30	1.41328	8.78	+1.83	123.51
31	1.41329	7.07	+1.30	237.50
32	1.41366	9.93	-3.58	302.02
33	1.41370	6.24	+2.15	36.96
34	1.41332	8.46	-4.07	33.60
35	1.41357	6.46	-2.22	47.88
36	1.41327	6.84	-3.38	107.20

TAB. 9.10 – Statistiques sur les paramètres des filtres des récepteurs de MIRAS.

	f [GHz]	B [MHz]	τ [10^{-9} s]	φ [deg]
Max	1.41385	21.92	+4.81	352.41
Min	1.41315	18.02	-4.53	10.12
\bar{m}	1.41350	19.90	+0.18	171.69
σ	0.00020	1.25	+2.83	109.17

TAB. 9.11 – Statistiques sur les paramètres des filtres des récepteurs du HUT2D.

	f [GHz]	B [MHz]	τ [10^{-9} s]	φ [deg]
Max	1.41385	9.93	+4.98	353.06
Min	1.41316	6.13	-4.68	13.09
\bar{m}	1.41350	8.02	+0.09	206.70
σ	0.00020	1.21	+3.13	106.79

TAB. 9.12 – Spécifications ESA sur les filtres des récepteurs de MIRAS et du HUT2D.

	Valeurs nominales	Dispersion attendue
f	1.4135 GHz	$\pm 0.210^{-3}$ GHz
B	20 MHz (MIRAS) / 8 MHz (HUT2D)	± 1 MHz
τ	0 s	$\pm 5 \cdot 10^{-9}$ s
φ	0°	[0° 360°]

Le tableau 9.13 donne les valeurs minimales du module de la fonction de décorrélation spatiale pour les deux configurations étudiées. Les dimensions réduites du HUT2D conduisent à un retard géométrique τ_{kl}^g plus faible ce qui, combiné avec des filtres plus étroits, tend à amoindrir les effets de la fonction de décorrélation.

TAB. 9.13 – Valeur maximale du retard géométrique et valeur minimale de la fonction de décorrélation spatiale pour les deux types d'instruments.

	$\max \{ \tau_{kl}^g \} [10^{-9} \text{ s}]$	$\min \{ \hat{r}(\tau_{kl}^g) \}$
MIRAS	14.86	0.698
HUT2D	8.14	0.779

9.1.2 Modélisation d'un instrument idéal

Il est nécessaire d'avoir une référence pour pouvoir déterminer une erreur sur l'estimation des cartes de températures reconstruites par les différentes méthodes. Cette référence a été choisie comme étant la carte des températures de brillance reconstruite à partir des visibilitées simulées pour un instrument idéal défini comme suit et reconstruite à l'aide d'une simple \mathcal{TF} inverse.

Eclaircissement III.2: L'INSTRUMENT IDÉAL

Cet instrument est tel que :

- toutes ses antennes sont identiques :
 - . la largeur à mi-hauteur est égale à la valeur nominale $\theta_1 = \theta_2 = 66^\circ$.
 - . la phase est nulle
- les filtres sont idéalement à bande passante nulle :
 - . le signal est mesuré exactement à la fréquence nominale
 - . on n'observe alors aucune décorrélation spatiale $\tilde{r}_{kl}(\xi, \eta) = 1 \forall (\xi, \eta) \forall (u, v)$

9.2 Auto-caractérisation des paramètres de modélisation de \mathbf{G}

Les méthodes de reconstruction régularisées sont toutes basées sur l'utilisation de l'opérateur de modélisation \mathbf{G} . Il est donc important de connaître les paramètres modélisant l'instrument avec une précision suffisante pour que les erreurs de reconstruction dues aux erreurs de modélisation soient sous contrôle. L'approche présentée ici propose de caractériser en vol les paramètres de modélisation à partir des visibilitées mesurées pour une scène suffisamment connue. Elle reprend pour un instrument réaliste de type MIRAS les travaux préliminaires menés pour un instrument à dix antennes [2].

Compte tenu de la paramétrisation choisie pour les diagrammes d'antennes et les filtres des récepteurs, on nomme $\mathcal{L}(\text{param})$ l'ensemble des paramètres à caractériser, soit :

$$\mathcal{L}(\text{param}) = \left\{ \theta_1, \theta_2, D_1'', D_1^\perp, D_2'', D_2^\perp, \bar{f}, B, \tau, \varphi \right\} \quad (9.9)$$

Chacun de ces paramètres est en fait un ensemble de valeurs pour chacune des N_a antennes ou récepteurs, soit au total $10N_a$ paramètres à caractériser, $6N_a$ pour les antennes et $4N_a$ pour les récepteurs.

Le critère de moindres carrés suivant,

$$\min_{\mathcal{L}(\text{param})} \|V - \mathbf{GT}\|^2 \quad (9.10)$$

est par conséquent un problème sur-contraint. En effet, pour un instrument de type MIRAS comptant 69 antennes, 690 paramètres doivent être caractériser à partir de 4693 données instrumentales réelles. Le nombre de données étant très supérieur au nombre d'inconnues, il est bien entendu possible, pour une modélisation plus fine de la chaîne de mesure, de caractériser jusqu'à 4693 paramètres, même si dans la pratique, plus le nombre d'inconnues est faible, meilleure sera la convergence.

Afin d'illustrer la faisabilité de cette approche, il a été choisi d'estimer les $6N_a$ paramètres de modélisation des diagrammes d'antennes. Les visibilitées sont simulées pour une scène uniforme à 300 K, et dégradées par un bruit radiométrique gaussien de déviation standard $\sigma_{\Delta V} = 0.08\text{K}$, proche du bruit radiométrique attendu pour l'instrument MIRAS (voir chapitre 11, section 1).

La méthode de minimisation est une méthode itérative de type quasi-newton, à métrique variable, basée sur l'algorithme de BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNO. Si x est le vecteur de paramètres à optimiser, f , le critère à minimiser, cette méthode propose l'itération suivante :

$$x_{k+1} = x_k - W_k \nabla f(x_k) \quad (9.11)$$

où W_k est une estimation de $(\nabla^2 f(x_k))^{-1}$ et l'originalité réside dans le choix de W_k :

$$W_{k+1} = W_k - \frac{s_k y_k^t W_k + W_k y_k s_k^t}{y_k^t s_k} + \left(1 + \frac{y_k^t W_k y_k}{y_k^t s_k} \right) \frac{s_k s_k^t}{y_k^t s_k} \quad (9.12)$$

avec,

$$s_k = x_k - x_{k-1} \quad (9.13)$$

$$y_k = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1}). \quad (9.14)$$

L'initialisation est réalisée avec les paramètres d'un instrument idéal, soit $\theta_1 = \theta_2 = 66^\circ$ et $D_1'' = D_1^\perp = D_2'' = D_2^\perp = 0$.

Le tableau 9.14 indique la déviation standard moyenne de l'écart entre les paramètres estimés et les valeurs réelles. Le tableau 9.15 indique la déviation standard moyenne de l'écart entre l'amplitude et la phase des diagrammes estimés et des diagrammes réels, antenne par antenne. Les paramètres réels sont ceux choisis pour l'instrument MIRAS réaliste.

Les paramètres estimés sont proches des paramètres réels, autour de 1° pour la largeur à mi-hauteur et entre 1 mm et 5 mm pour l'erreur de pointage, ce qui conduit à une erreur moyenne, pour l'ensemble des diagrammes, de 0.016 sur l'amplitude et 1.5° sur la phase. La figure 9.1 montre l'erreur commise sur l'amplitude et la phase pour la première antenne.

Cependant, il reste à vérifier que l'erreur sur cette estimation n'a pas de conséquences trop importantes sur la reconstruction. Or, de ce point de vue, la précision annoncée ici est insuffisante et l'erreur de modélisation induite par cette approche conduit à une erreur de reconstruction trop importante (voir chapitre 11 sur la propagation des erreurs de modélisation). Toutefois, les algorithmes utilisés pour cette étude n'ayant pas été optimisés, les temps de calculs se sont avérés très grand : les résultats présentés ici ont été obtenus après 3 semaines complètes d'itérations sur un PC (fréquence à 3 GHz et 4 Go de mémoire) alors que le résidu de la fonction à minimiser était encore de l'ordre de 10^{-3} .

En conclusion, le nombre de données instrumentales permet en principe de caractériser un grand nombre de paramètres avec une précision telle que les erreurs de modélisation n'augmentent pas de façon critique l'erreur de reconstruction. Cependant, elle reste chronophage et conditionnée par une connaissance a priori de la scène observée.

TAB. 9.14 – Déviation standard moyenne de l'écart entre les paramètres estimés et les paramètres réels pour l'ensemble des paramètres de modélisation des antennes.

θ_1	θ_2	D_1''	D_1^\perp	D_2''	D_2^\perp
1.16°	0.80°	1.045 mm	4.921 mm	1.130 mm	5.015 mm

TAB. 9.15 – Déviation standard moyenne de l'écart entre l'amplitude (σ_D) et la phase ($\sigma_{\Delta\varphi}$) des diagrammes estimés et des diagrammes réels. L'erreur moyenne pour l'ensemble des diagrammes est indiquée par $\bar{\sigma}_D$ et $\bar{\sigma}_{\Delta\varphi}$.

Antennes/ $\sigma_D/\sigma_{\Delta\varphi}$ [°]			Antennes/ $\sigma_D/\sigma_{\Delta\varphi}$ [°]			Antennes/ $\sigma_D/\sigma_{\Delta\varphi}$ [°]			Antennes/ $\sigma_D/\sigma_{\Delta\varphi}$ [°]		
01	0.008	1.054	02	0.013	1.057	03	0.022	1.899	04	0.037	0.913
05	0.024	1.083	06	0.027	0.679	07	0.078	2.281	08	0.084	1.568
09	0.099	1.632	10	0.044	1.295	11	0.086	1.525	12	0.071	0.785
13	0.147	1.546	14	0.039	2.263	15	0.069	1.229	16	0.061	2.301
17	0.037	1.283	18	0.124	2.416	19	0.077	1.856	20	0.071	1.754
21	0.049	1.348	22	0.058	1.775	23	0.054	0.996	24	0.073	0.910
25	0.026	1.343	26	0.012	2.474	27	0.026	2.122	28	0.023	1.670
29	0.028	0.934	30	0.083	1.895	31	0.168	1.354	32	0.044	1.304
33	0.082	2.200	34	0.071	1.193	35	0.070	1.249	36	0.218	1.335
37	0.146	1.294	38	0.142	0.614	39	0.133	1.893	40	0.128	0.660
41	0.150	2.211	42	0.111	1.700	43	0.229	2.410	44	0.157	0.729
45	0.074	1.784	46	0.058	0.335	47	0.022	0.846	48	0.014	1.217
49	0.020	1.673	50	0.037	0.995	51	0.036	1.189	52	0.040	1.436
53	0.106	0.884	54	0.047	0.954	55	0.065	1.695	56	0.149	1.717
57	0.044	1.353	58	0.105	1.614	59	0.082	1.659	60	0.042	1.322
61	0.121	1.881	62	0.120	0.893	63	0.019	1.415	64	0.024	2.085
65	0.046	0.888	66	0.092	1.061	67	0.045	0.893	68	0.039	1.420
69	0.084	1.236									
$\bar{\sigma}_D/\bar{\sigma}_{\Delta\varphi} = 0.016/1.427$											

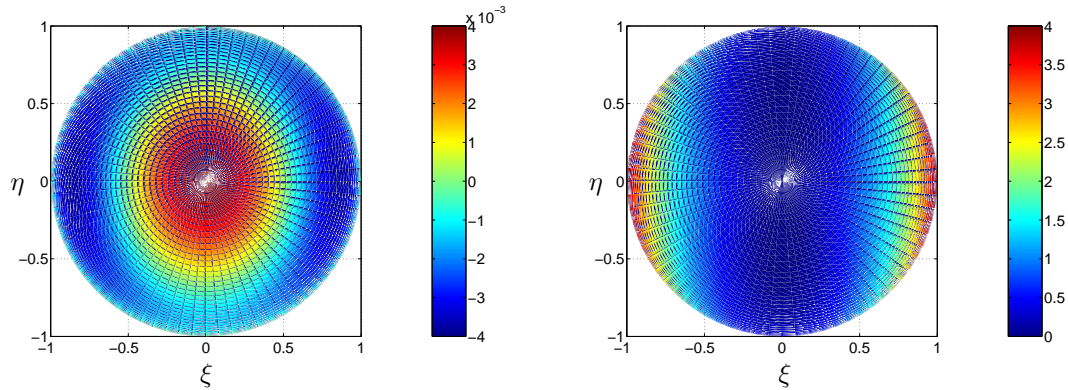


FIG. 9.1 – Erreur sur l'estimation de a) l'amplitude et de b) la phase de l'antenne #2.

Bibliographie

- [1] A. CAMPS, I. CORBELLA, M. VALL-LLOSSERA, N. DUFFO, F. MARCOS, F. MARTINEZ-FADRIQUE et M. GREINER : The smos end-to-end performance simulator : Description and scientific applications. *Proc. of IGARSS'03*, 2003.
- [2] E. ANTERRIEU, S. GRATTON et B. PICARD : Self characterization of modelling parameters for synthetic aperture imaging radiometers. *Proc. of IGARSS'03*, pages 3052–3054, 2003.

Chapitre 10

Erreur de reconstruction systématique

Sommaire

10.1 Erreur systématique en l'absence de repliement	185
10.1.1 Erreur systématique et qualité de l'instrument.	186
10.1.2 Erreur RMS, propriété de la scène et apodisation.	188
10.2 Erreur systématique et repliement	194

Hélas, l'ignorance en vint à présenter davantage d'intérêt, surtout l'ignorance insondable et fascinante dans des domaines aussi vastes qu'essentiels comme la matière et la création, et l'on cessa de bâtir patiemment ces petites maisons en briquettes de logique dans le chaos de l'univers afin de se passionner pour le chaos lui-même - en partie parce que c'est beaucoup plus facile d'être un expert du chaos, mais surtout parce que le chaos offre de superbes motifs graphiques à reproduire sur les t-shirts.

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

Ce chapitre vise à mettre en évidence une erreur systématique inhérente à la technique d'interférométrie, et due à la contamination des visibilitées par les hautes fréquences de la scène observée.

On l'a vu précédemment (Partie III, chapitre 1, paragraphe 1.4.2), les hautes fréquences présentes dans la scène observée viennent contribuer aux visibilitées mesurées, sans qu'il soit possible d'en tenir compte étant donnée la résolution limitée de l'instrument.

Ce phénomène est à l'origine d'une erreur de reconstruction, quantifiée par un biais et une fluctuation dans le champ reconstruit (erreur RMS, *Root-Mean-Squared*), à laquelle on est confronté même en ne considérant aucun bruit sur les données, ni même aucune erreur de modélisation. Or, compte tenu des contraintes de sensibilité imposées par l'estimation des paramètres géophysiques, il est indispensable de comprendre l'origine de cette erreur et de trouver les moyens de la réduire.

10.1 Erreur systématique en l'absence de repliement

L'erreur systématique (terme générique regroupant le biais et l'erreur RMS) est ici pour la première fois caractérisée, premièrement, compte tenu de la qualité de l'instrument et deuxiè-

mement, pour des instruments réalistes de type MIRAS et HUT2D, en fonction de la nature de la scène et des fenêtres d'apodisation.

La carte de températures de brillance observée est simulée sur une grille hexagonale de $N \times N = 128 \times 128$ pixels pour MIRAS avec un pas $d\xi \times \sqrt{3}d\xi/2$ (le même que pour la grille d'échantillonnage de la reconstruction) et une grille $N \times N = 64 \times 64$ pour HUT2D avec, de même, un pas $d\xi \times d\xi$. Aucun phénomène de repliement n'est observé, puisque la scène simulée est entièrement comprise dans le champ de vue accessible à la reconstruction.

La scène observée à son plus haut niveau de résolution est notée T_o . Les visibilitées sont simulées à l'aide de la matrice de modélisation \mathbf{G} d'un instrument réaliste :

$$V^{obs} = \mathbf{G}T_o \quad (10.1)$$

La scène retenue est la scène présentée sur la figure 10.4-c.

Etant donnée que même un instrument idéal ne saurait reconstruire la scène observée à son plus haut niveau de résolution, les scènes reconstruites seront comparées à une scène de référence T_{idw} reconstruite à partir des visibilitées simulées avec un instrument idéal et à l'aide d'une simple \mathcal{TF} inverse. Cette scène est bien entendu apodisée ainsi que toutes les reconstructions présentées par la suite :

$$T_{idw} = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z}^* \mathbf{U} \left\{ \frac{\mathbf{U}^* \mathbf{Z} V^{id}}{F_{id}(\xi, \eta)} \times \text{DXDY} \right\} \quad (10.2)$$

où, $F_{id}(\xi, \eta)$ est le gain nominal des antennes toutes identiques de l'instrument idéal (largeur du lobe principal à 66° , pas de phase), $\text{DXDY} = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}$ est le facteur d'obliquité (la division et la multiplication s'entendant pixel à pixel) et où V^{id} sont les visibilitées mesurées par cet instrument idéal à partir de T_o .

L'erreur de reconstruction est alors caractérisée par la statistique de la différence pixel à pixel entre la scène reconstruite et la scène de référence :

$$\mathcal{T}_{dif, \mathbf{p}} = (\mathcal{T}_{rw, \mathbf{p}} - \mathcal{T}_{idw, \mathbf{p}}), \quad \mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \quad (10.3)$$

$$\bar{m}_{\Delta T} = \frac{\sum_{(\xi, \eta) \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} \mathcal{T}_{dif, \mathbf{p}}}{N^2} \quad (10.4)$$

$$\sigma_{\Delta T} = \sqrt{\sum_{(\xi, \eta) \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} (\mathcal{T}_{dif, \mathbf{p}} - \bar{m}_{\Delta T})^2 / N^2} \quad (10.5)$$

où $\bar{m}_{\Delta T}$ représente un biais et $\sigma_{\Delta T}$ une déviation standard.

Or, même en l'absence de bruit sur les données, l'erreur de reconstruction ($\bar{m}_{\Delta T}^0, \sigma_{\Delta T}^0$) n'est pas nulle (l'exposant 0 signalant l'absence d'erreurs de modélisation et de bruit sur les données).

10.1.1 Erreur systématique et qualité de l'instrument.

Pour un instrument idéal, l'erreur systématique est faible : $\bar{m}_{\Delta T}^0 = -2 \times 10^{-4}$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 8 \times 10^{-3}$ K lorsque la scène observée est la scène présentée par la figure 10.4-c (reconstruction apodisée par la fenêtre de BLACKMAN), soit un biais 100 fois plus faible et une erreur RMS 10 fois plus faible que pour un instrument réaliste (voir Tab. 10.2).

Pour étudier cette effet, des simulations-reconstructions ont été effectuées en considérant un instrument idéal (gains d'antennes tous identiques, pas de phase, pas d'effet de décorrélation spatiale) pour une configuration en Y de type MIRAS et que l'on a ensuite perturbé. La fenêtre d'apodisation est la fenêtre de BLACKMAN.

L'objet de cette étude est de montrer, d'une part, la dépendance de l'erreur systématique en la dispersion des caractéristiques de l'instrument par rapport aux valeurs nominales et d'autre part, l'importance d'avoir une faible dispersion des caractéristiques des antennes situées sur le hub central.

Dans un premier temps, une antenne de l'un des bras voit la largeur de son lobe principal augmentée de 10° . Nous allons étudier la variation de l'erreur systématique avec la position de cette antenne sur le bras de l'instrument, en perturbant successivement chacune des antennes d'un bras donné, depuis l'antenne la plus au centre du hub vers l'antenne la plus éloignée.

La simulation des visibilitées se fait à partir de cet instrument idéal légèrement perturbé. Etant donnée la faible dispersion des gains d'antennes et l'absence d'effet de décorrélation, une reconstruction à partir d'une simple \mathcal{TF} inverse suffit à donner une information qualitative sur la variation de l'erreur systématique.

La figure 10.1 montre que le biais $\bar{m}_{\Delta T}^0$ et la déviation standard $\sigma_{\Delta T}^0$ diminuent lorsque la distance entre la position de l'antenne perturbée et le centre du hub augmente. Si le biais reste faible ($\bar{m}_{\Delta T}^0 < 0.2$ K), la déviation standard peut atteindre 1.4 K. Une explication possible de ce phénomène est la suivante.

Les antennes proches du hub sont plutôt présentes dans les petites lignes de bases (\approx basses fréquences) et participent donc à la définition des grandes structures de la scène observée. Inversement, les antennes les plus éloignées sont plutôt impliquées dans la définition des grandes lignes de bases (\approx hautes fréquences) qui délivrent une information sur les structures à petite échelle de la scène observée.

Considérons deux couples d'antennes définissant deux lignes de bases redondantes correspondant à une même basse fréquence de la bande passante, l'une de ces quatre antennes étant l'antenne perturbée. Etant données ses caractéristiques particulières, cette dernière n'observe pas la même scène que les trois autres. Chacun de ces couples va donc fournir une valeur différente de la fonction de cohérence spatiale à la fréquence correspondante. Le processus de reconstruction, quel qu'il soit, va alors chercher à retrouver une structure à grande échelle dans la scène reconstruite s'accordant au mieux avec ces deux mesures quelque peu contradictoires. L'erreur alors commise sur ces grandes structures de la carte reconstruite est plus importante que lorsqu'elle concerne les structures à plus petite échelle contrôlées par les grandes lignes de bases.

La source de l'erreur de reconstruction semble bien liée au fait qu'une antenne observe une scène différente de celle observée par les autres antennes. J'ai ainsi vérifié que, pour une position donnée de l'antenne perturbée, cette erreur augmente lorsque la largeur du lobe principale de l'antenne perturbée est augmentée ou lorsqu'elle est diminuée (voir Fig. 10.2).

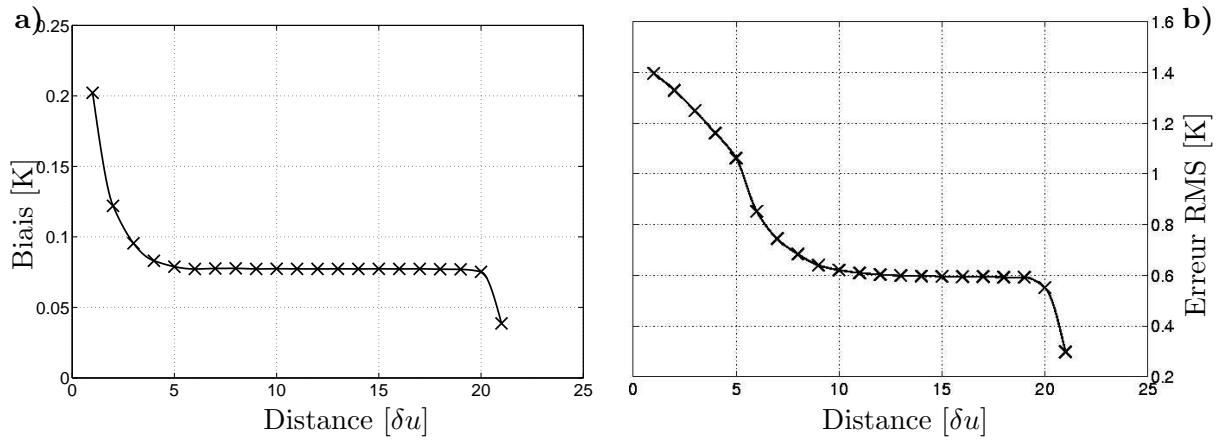


FIG. 10.1 – Variation du biais (a) et de l'erreur RMS (b) de reconstruction avec la position de l'antenne perturbée. La distance est mesurée depuis le centre du Hub en unité de $\delta u = 0.875\lambda$, la distance entre les antennes d'un même bras.

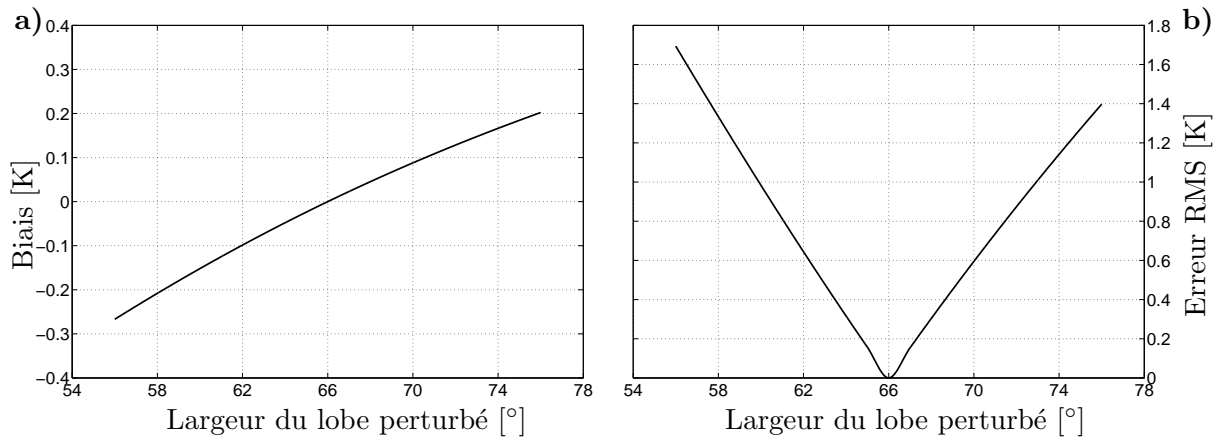


FIG. 10.2 – Variation du biais (a) et de l'erreur RMS (b) de reconstruction avec la largeur du lobe de l'antenne perturbée, située ici à $1\delta u$ du centre du Hub.

Cette étude tend à reconsidérer le radiomètre à synthèse d'ouverture de type MIRAS comme la conjugaison de deux instruments : un instrument « basse résolution » composé des antennes situées sur le hub central et un instrument « haute résolution » composé des antennes situées sur les trois bras déployés. La variation de $\sigma_{\Delta T}^0$ avec la position d'une antenne perturbée montre que la qualité de la reconstruction est particulièrement dépendante de la faible dispersion des éléments de l'instrument « basse résolution » par rapport aux valeurs nominales. Ainsi, la répartition des antennes et des récepteurs manufacturés sur l'instrument est une étape déterminante pour le bon fonctionnement de la mission.

10.1.2 Erreur RMS, propriété de la scène et apodisation.

Pour un instrument réaliste donné, l'erreur systématique dépend de la scène et de la fenêtre d'apodisation utilisée. Les scènes 1 et 2 (illustrées par les figures 10.4 et 10.3) ont été élaborées pour contenir peu de composantes à basse fréquence et la scène 3 est la plus réaliste. Pour cette étude, seule l'erreur RMS est considérée.

De même que précédemment (relation (10.1)), les visibilitées sont simulées à partir de ces scènes à leur plus haut niveau de résolution et à l'aide de la matrice de modélisation. La scène de référence est définie par la relation (10.2).

Cette même matrice de modélisation \mathbf{G} est utilisée pour la définition des opérateurs de reconstruction \mathbf{G}_m^+ (m optimal) et \mathbf{A}^+ , respectivement pour les méthodes de régularisation mathématique et à bande passante limitée. L'apodisation se fait ainsi que le montrent les relations (8.23) et (8.24).

Les tableaux 10.2 et 10.1 indiquent l'erreur $\sigma_{\Delta T}^0$ pour différentes fenêtres et pour ces trois scènes. Bien entendu, plus la fenêtre a de faibles lobes secondaires, plus l'erreur systématique est faible.

On y trouve aussi des informations sur l'origine de l'énergie contenue dans les visibilitées ($\|V\|_F$) : « Moy » est l'énergie des visibilitées calculée pour une scène uniforme à la température moyenne de T_o , « BF » est l'énergie des visibilitées calculée pour une version basse fréquence de T_o et « HF » pour une version haute fréquence. Le pourcentage est donné par comparaison avec $\|V^{obs}\|_F$.

La spécificité des scènes 1 et 2 fait d'abord ressortir la caractéristique de la bande passante de chacun des instruments. Pour chaque configuration, cette dernière possède une direction privilégiée, selon l'axe V (vertical), pour laquelle il est possible d'accéder à de plus hautes fréquences. Cette orientation privilégiée est faiblement marquée pour un instrument de type HUT2D (bande passante légèrement rectangle) et fortement marquée pour un instrument de type MIRAS (la pointe de l'étoile est orientée selon l'axe V et le creux selon l'axe U (horizontal). Ainsi, l'erreur systématique est-elle plus élevée lorsque la scène observée possède des hautes fréquences selon l'axe U , c.-à-d. lorsqu'elle est composée de bandes verticales, cet écart étant plus marqué pour une configuration en Y que pour une configuration en U .

La répartition de l'énergie est aussi une source d'explication de la variation de l'erreur systématique avec la nature de la scène : l'erreur est faible si la scène observée est fortement à basse fréquence. Ainsi, la reconstruction de la scène 3 est-elle de bien meilleure qualité pour HUT2D (contribution BF à 11.2% comparé au 3% pour les scènes 1 et 2, $\sigma_{\Delta T}^0$ jusqu'à deux fois plus petit). Il en est de même pour les scènes 2 et 3 comparées à la scène 1 pour MIRAS (8% et 6% respectivement, comparés à 1% pour la scène 1, $\sigma_{\Delta T}^0$ est alors 2 à 3 fois plus petit).

L'erreur systématique est aussi sensible à la contribution haute fréquence. Pour des contributions basse fréquence comparable (3% environ, scènes 1 et 2 pour HUT2D), $\sigma_{\Delta T}^0$ est plus faible lorsque la contribution haute fréquence est la plus faible : $6.5 \times 10^{-5}\%$ et 0.334 K pour la scène 1 et $2.4 \times 10^{-4}\%$ et 0.441 K pour la scène 2, fenêtre de HANNING.

L'erreur systématique varie aussi selon la méthode de reconstruction. La solution à bande passante limitée présente une plus grande erreur systématique, comparée à la solution de la régularisation mathématique, lorsque la contribution des hautes fréquences est élevée. Ainsi, $\sigma_{\Delta T}^0$ est le plus faible avec l'opérateur A^+ pour les scènes 2 et 3 pour MIRAS et uniquement pour la scène 1 pour HUT2D. L'écart entre les méthodes est plus marqué pour la configuration en U que pour la configuration en Y . La résolution de la solution à bande passante limitée étant imposée comme étant celle de l'instrument, il est compréhensible qu'elle ne puisse pas prendre en compte la présence de hautes fréquences dans la scène observée, alors que la résolution n'est pas imposée pour la solution obtenue par la régularisation mathématique. Dans ce cas, même si toutes les scènes sont finalement apodisées et n'ont donc pas de composantes de FOURIER en dehors de la bande passante, le processus de reconstruction conduit à une répartition différente de l'information dans la bande passante, favorisant légèrement les hautes fréquences comparé à la méthode à bande passante limitée.

En conclusion, même en l'absence d'erreur de modélisation ou d'erreur sur les données, il

existe une erreur systématique due à la contamination des visibilités par les hautes fréquences de la scène observée. La résolution limitée de l'instrument ne permet pas d'accéder à cette information et moins la scène comportera de composantes à basse fréquence, comme au bord des côtes, plus l'erreur systématique sera importante. La simulation de scènes privilégiant un axe donné du domaine spatial et donc du domaine de FOURIER a permis d'exhiber une orientation privilégiée due à l'asymétrie de la bande passante. L'opérateur \mathbf{G}^+ n'imposant pas de solution à bande passante limitée, l'erreur systématique est dans certain cas légèrement inférieure que pour la solution obtenue avec l'opérateur \mathbf{A}^+ .

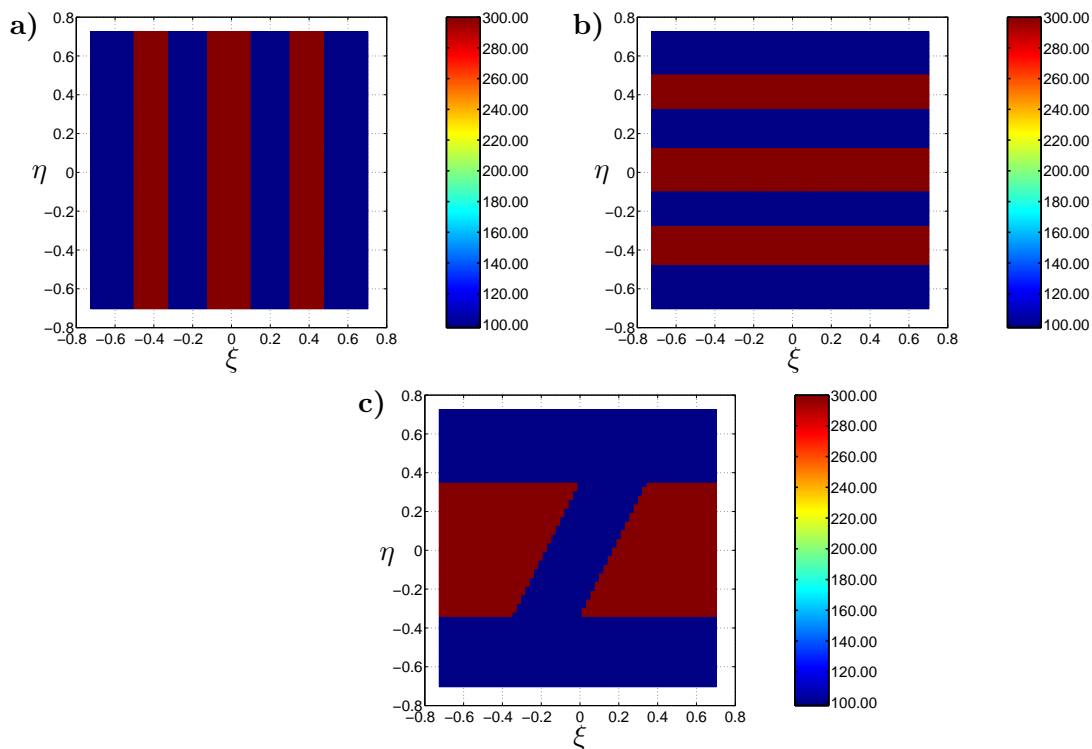


FIG. 10.3 – Scènes synthétiques pour le calcul de l’erreur systématique (configuration en U).
a), scène 1, **b)**, scène 2, **c)**, scène 3.

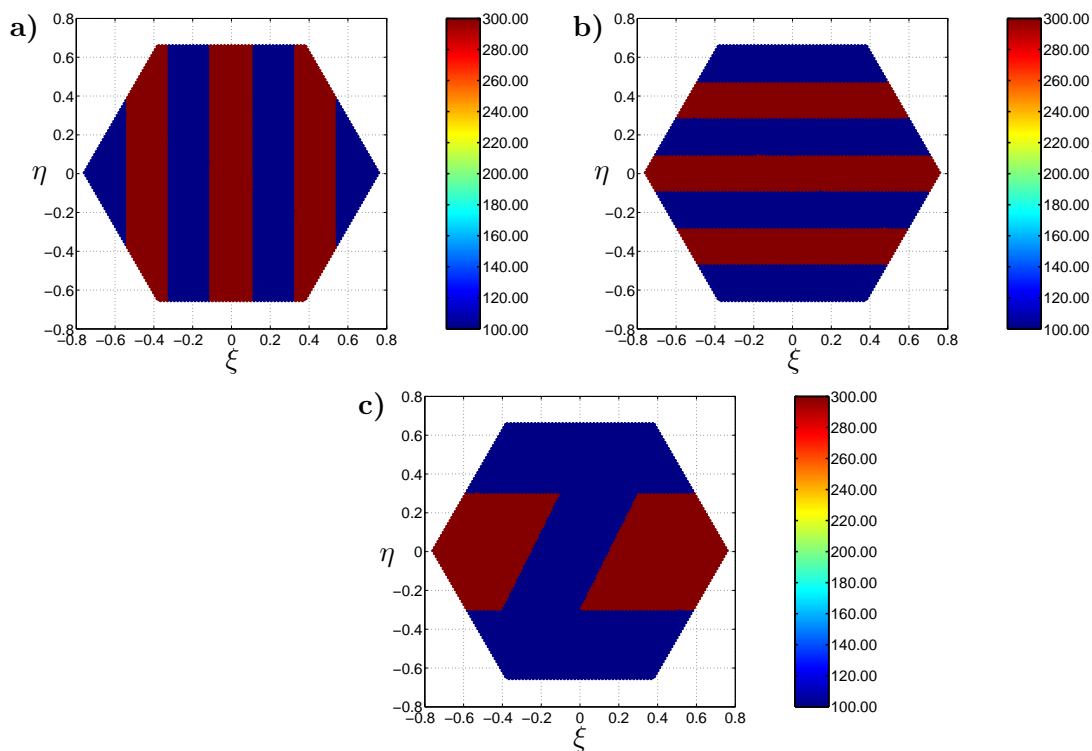


FIG. 10.4 – Scènes synthétiques pour le calcul de l’erreur systématique (configuration en Y).
a), scène 1, **b)**, scène 2, **c)**, scène 3.

TAB. 10.1 – Variation de l’erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ [K] avec la scène observée et la fenêtre d’apodisation (HUT2D).

scène	fenêtre	\mathbf{G}_m^+	\mathbf{A}^+	Moy	BF	HF	Tot
1	Rectangle	2.097	1.389				
	Hanning	0.499	0.334				
	Hamming	0.632	0.424				
	Blackman	0.284	0.187	86.31%	3.31%	$6 \times 10^{-5}\%$	89.62%
	Filler D ($\alpha = 0.25$)	0.401	0.267				
	Kaiser($\alpha = 6.99$)	0.395	0.263				
	Mass($\alpha = 8.08$)	0.391	0.260				
2	Rectangle	1.588	2.345				
	Hanning	0.326	0.441				
	Hamming	0.424	0.595				
	Blackman	0.202	0.258	85.06%	3.59%	$2 \times 10^{-4}\%$	88.66%
	Filler D($\alpha = 0.25$)	0.272	0.364				
	Kaiser($\alpha = 6.99$)	0.266	0.356				
	Mass($\alpha = 8.08$)	0.265	0.355				
3	Rectangle	0.925	1.113				
	Hanning	0.177	0.184				
	Hamming	0.233	0.261				
	Blackman	0.112	0.101	77.53%	11.18%	$5 \times 10^{-4}\%$	88.71%
	Filler D($\alpha = 0.25$)	0.149	0.151				
	Kaiser($\alpha = 6.99$)	0.146	0.147				
	Mass($\alpha = 8.08$)	0.145	0.146				

TAB. 10.2 – Variation de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ [K] avec la scène observée et la fenêtre d'apodisation (MIRAS).

scène	fenêtre	G_m^+	A^+	Moy	BF	HF	Tot
1	Rectangle	1.081	1.256				
	Hanning	0.322	0.383				
	Hamming	0.380	0.454				
	Blackman	0.201	0.236	98.07%	1.33%	$2.4 \times 10^{-3}\%$	99.41%
	Filler	0.245	0.290				
	D($\alpha = 0.27$)	0.317	0.379				
	Kaiser($\alpha = 6.01$)	0.317	0.379				
	Mass($\alpha = 6.43$)	0.357	0.427				
2	Rectangle	0.642	0.523				
	Hanning	0.116	0.101				
	Hamming	0.146	0.125				
	Blackman	0.081	0.072	87.65%	8.60%	$3.6 \times 10^{-4}\%$	96.25%
	Filler	0.094	0.083				
	D($\alpha = 0.27$)	0.118	0.102				
	Kaiser($\alpha = 6.01$)	0.118	0.102				
	Mass($\alpha = 6.43$)	0.135	0.116				
3	Rectangle	0.652	0.602				
	Hanning	0.118	0.108				
	Hamming	0.146	0.133				
	Blackman	0.086	0.080	94.09%	6.29%	$6.4 \times 10^{-5}\%$	100.8%
	Filler	0.098	0.090				
	D($\alpha = 0.27$)	0.120	0.109				
	Kaiser($\alpha = 6.01$)	0.120	0.109				
	Mass($\alpha = 6.43$)	0.135	0.122				

10.2 Erreur systématique et repliement

Pour cette étude, la scène observée est simulée pour l'ensemble du cercle unité. Ici, sur la figure 10.5, la scène observée à son plus haut niveau de résolution est une distribution de températures réaliste pour l'Europe de l'Ouest, notée par la suite T_o^{EO} . On reconnaît, les côtes françaises de l'atlantique ainsi que la péninsule ibérique. L'effet miroir est dû au passage du repère terrestre au repère des cosinus directeurs. La température est supérieure à 200 K sur les continents et proche de 100 K sur les océans. On observe un effet de la polarisation (ici polarisation H) au bord de l'horizon terrestre, l'intensité diminuant avec l'angle d'incidence. On choisit de négliger la température du ciel que l'on fixe à 0 K.

La scène de référence est la scène reconstruite à partir des visibilitées mesurées pour un instrument idéal et avec une simple \mathcal{TF} inverse (relation (10.2)). Un masque est apposé sur la carte reconstruite de manière à ne conserver que la zone non aliasée, avec une marge supplémentaire afin d'éliminer les oscillations de GIBBS plus importantes sur les bords.

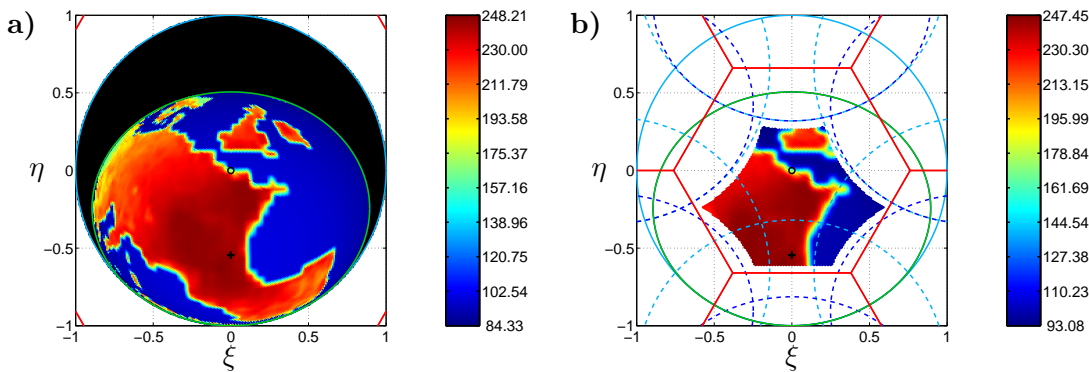


FIG. 10.5 – a), scène observée à la résolution maximale et b), reconstruction de référence : distribution réaliste de températures de brillance en Europe de l'Ouest.

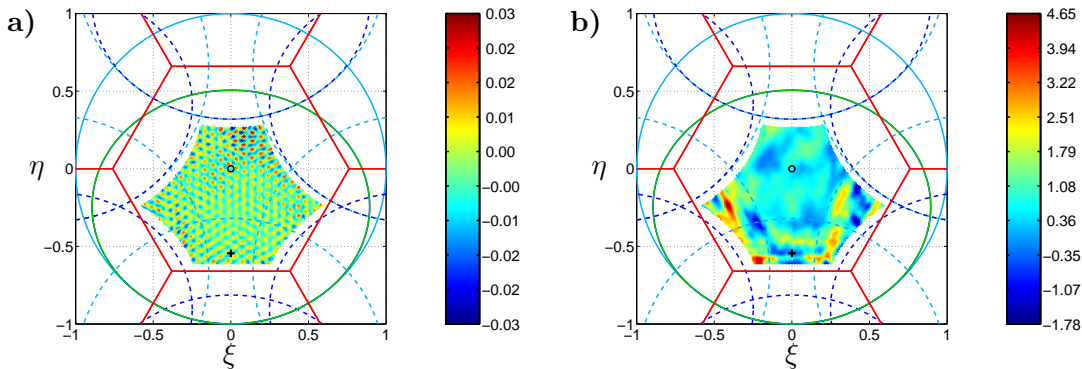


FIG. 10.6 – Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, à partir d'une simulation des températures de brillance en Europe de l'Ouest, a) pour un instrument idéal ($\bar{m}_{\Delta T}^0 = 4 \times 10^{-5}$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.007$ K) et b) pour un instrument réaliste ($\bar{m}_{\Delta T}^0 = 0.895$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.790$ K).

La reconstruction est ici effectuée avec la méthode à bande passante limitée. La fenêtre d'apodisation utilisée est la fenêtre de BLACKMAN. La figure 10.6 montrent les cartes d'erreur $\mathcal{T}_{dif,p} = \mathcal{T}_{rw,p} - \mathcal{T}_{idw,p}$ où l'indice p désigne maintenant la liste des pixels contenus dans la zone non

aliasée (marges exclues). : \mathcal{T}_{rw} est estimée en considérant, dans un premier temps, un instrument idéal pour la simulation des visibilitées et l'élaboration de l'opérateur de reconstruction \mathbf{A}^+ (Fig. 10.6-a) et dans un deuxième temps, un instrument réaliste pour la simulation et la reconstruction (Fig. 10.6-b).

L'erreur de reconstruction est très faible pour un instrument idéal ($\bar{m}_{\Delta T}^0 = 4 \times 10^{-5}$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.007$ K, Fig. 10.6-a). La répartition de cette erreur est quasi-uniforme dans la zone non aliasée, même si la région située en haut à droite semble contenir des oscillations un peu plus marquées.

Cette erreur est nettement plus grande pour un instrument réaliste : le biais vaut 0.895 K et la déviation standard 0.790 K, une valeur dix fois plus élevée que lorsque le phénomène de repliement n'était pas pris en compte ($\sigma_{\Delta T}^0 = 0.080$ K, scène 3, fenêtre de BLACKMAN, Tab. 10.2). On distingue clairement deux régions : une région centrale relativement épargnée, comparée aux régions proches des limites du masque.

Une partie de cette augmentation est imputable au repliement en lui-même et à la dispersion des caractéristiques instrumentales. Pour ne parler que de l'amplitude des antennes, cette dispersion implique que chaque antenne observe une scène différente que celle observée par les autres. Ainsi, chaque ligne de base conduira à un repliement légèrement différent. Or, ce repliement est source de hautes fréquences puisque conduisant à un saut en température au bord de la zone exploitable. Ce sont ces hautes fréquences qui, à cause des imperfections de l'instrument et de ses dimensions limitées, ne pourront être prises en compte lors de la reconstruction et vont donc contribuer à l'erreur systématique.

Une autre source de hautes fréquences est la présence du saut en température au bord de l'horizon terrestre : on passe subitement d'une température comprise entre 100 K et 280 K à une température de quelques Kelvin, température réaliste du Ciel, ici supposée nulle.

Partant de ce constat, la variation de l'erreur systématique avec une température uniforme sur Terre a été établie. La figure 10.9 a été construite à partir de reconstructions effectuées en supposant une température uniforme T_{unif} sur la Terre, variant entre 50 K et 350 K. Le biais et la déviation standard augmentent linéairement avec cette température uniforme : $\bar{m}_{\Delta T}^0 = 0.21$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.24$ K pour $T_{moy} = 50$ K et $\bar{m}_{\Delta T}^0 = 1.50$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 1.66$ K pour $T_{moy} = 350$ K. Cette variation est conditionnée par le saut en température au bord de l'horizon terrestre dans la scène observée et, même s'il est difficile d'expliquer la linéarité, on sait que la dégradation de la qualité de la reconstruction s'explique par l'augmentation de la fraction d'énergie contenue dans les hautes fréquences de T_o accompagnant l'augmentation de T_{unif} . On retrouve sur la figure 10.9, en rouge, l'erreur systématique pour la scène réaliste T_o^{EO} , reportée pour la valeur moyenne T_{moy} de la distribution de températures de brillance sur Terre $T_{moy} \approx 164$ K : $\bar{m}_{\Delta T}^0 = 0.195$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.305$ K.

Deux autres reconstructions ont été opérées, toujours à partir d'un instrument réaliste et à l'aide de la méthode à bande passante limitée, mais cette fois pour une scène simulant la variation, typique sur les océans, de la température de brillance avec l'angle d'incidence θ_i pour les deux polarisations (Fig. 10.7), horizontale (H) et verticale (V). La température est initialement uniforme et la variation avec θ_i pour les deux polarisations est supposée linéaire [1] :

$$T_o^H = 110 - 0.6\theta_i \quad (10.6)$$

$$T_o^V = 110 + 0.7\theta_i \quad (10.7)$$

On retrouve sur les cartes des erreurs de reconstruction, illustrées par les figures 10.8-a (H) et 10.8-b (V), les mêmes artefacts que pour la scène réaliste. Il a été vérifié que la localisation

et la forme de ces artefacts dépend de la qualité de l'instrument : pour un même ensemble de paramètres pour les antennes et les récepteurs mais pour une répartition différente sur les bras de l'instrument, l'erreur de reconstruction varie peu mais la carte des erreurs exhibe des zones de maximum et de minimum différentes, toujours confinées dans les zones de repliement du Ciel. Ainsi, pour un instrument donné, même si la nature de la distribution de température de brillance sur la Terre change, de même que l'erreur de reconstruction, on retrouve les mêmes artefacts caractéristiques de l'instrument dont l'intensité varie avec la nature de la scène observée.

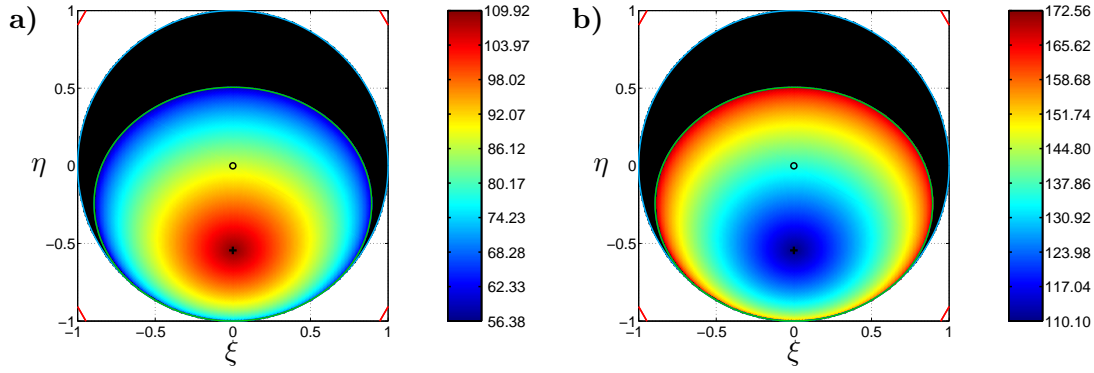


FIG. 10.7 – Composantes **a)** en polarisation H et **b)** en polarisation V d'une scène de température uniforme à 110 K : variation simplifiée (linéaire) de la température de brillance sur les océans avec l'angle d'incidence.

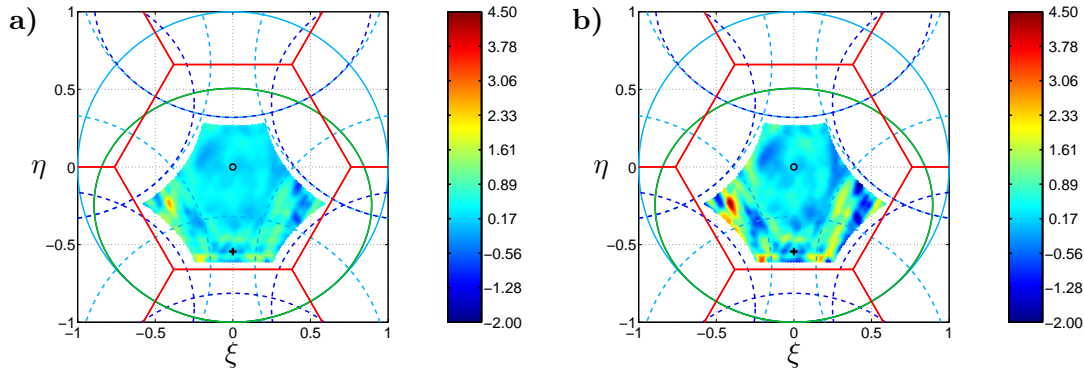


FIG. 10.8 – Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l'aide de la méthode à bande passante limitée, , pour un instrument réaliste, à partir d'une simulation de la température de brillance sur l'océan, **a)** en polarisation H ($\bar{m}_{\Delta T}^0 = 0.448$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.379$ K) et **b)** en polarisation V ($\bar{m}_{\Delta T}^0 = 0.499$ K, $\sigma_{\Delta T}^0 = 0.694$ K).

Là encore, l'erreur de reconstruction a été reportée (polar. H en bleu, polar. V en vert) en fonction de la température moyenne sur la Terre : $T_{moy} \approx 83$ K pour T_o^H et $T_{moy} \approx 141.5$ K pour T_o^V . Etant donnée les variations de la température de brillance de la scène observée, l'erreur systématique est plus grande en polarisation V qu'en polarisation H.

Les trois erreurs systématiques (en rouge, bleu et vert) ainsi reportée sur la figure 10.9 montrent que la température T_{moy} de la scène observée est un bon indicateur permettant de retrouver l'erreur RMS $\sigma_{\Delta T}^0$ d'après la relation linéaire établie pour des scènes de température uniforme, même si T_{moy} n'est pas directement la cause de cette erreur. Il est plus difficile d'estimer

par cette même relation le biais de la reconstruction, l'accord avec les résultats obtenus pour une Terre de température uniforme étant moins bon.

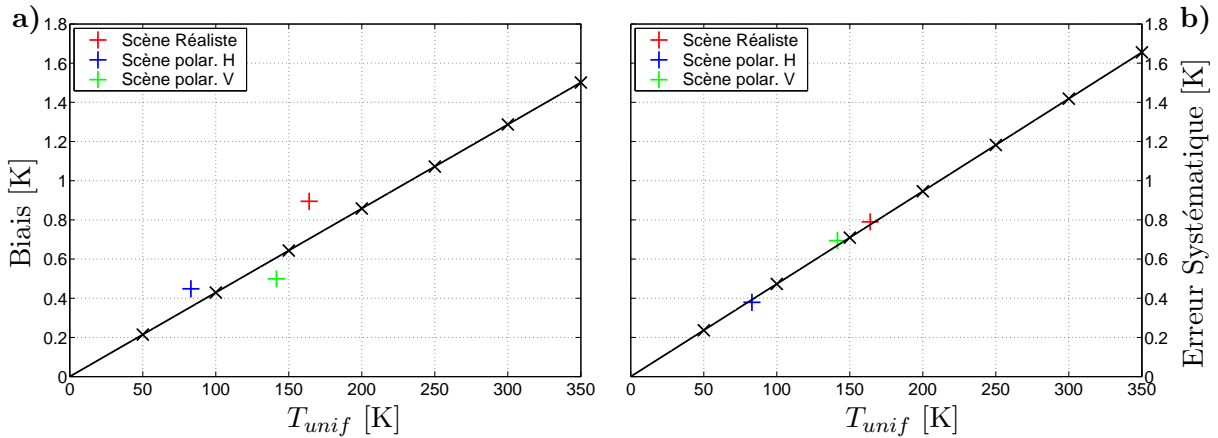


FIG. 10.9 – Variation du biais (a) et de l'erreur systématique (b) de reconstruction avec une température uniforme T_{unif} sur Terre. En rouge, on retrouve les valeurs de $\bar{m}_{\Delta T}^0$ et $\sigma_{\Delta T}^0$ pour la scène illustrée par la figure 10.5, en bleu (polarisation H) et vert (polarisation V), les scènes illustrées par la figure 10.7.

Puisque l'erreur systématique est liée au saut en température entre la Terre et le Ciel le long de l'horizon terrestre, on a cherché à retirer aux visibilitées mesurées une contribution calculée à partir d'une Terre ayant une température uniforme égale à la température moyenne sur la Terre pour la scène observée. La reconstruction est alors effectuée à partir de ces visibilitées corrigées et la valeur moyenne est ajoutée à la carte reconstruite.

La figure 10.10 montre les cartes d'erreur de reconstruction obtenues suite à ce traitement. Tant le biais que la déviation standard sont améliorées par cette approche. Le tableau 10.3 reprend les valeurs de l'erreur systématique pour les trois scènes T_o^{EO} , T_o^H et T_o^V : le biais est diminué de près de 80% du biais initial tandis que l'amélioration de l'erreur RMS est comprise entre 60% et 80% de la valeur initiale.

TAB. 10.3 – Erreur systématique avant et après traitement des visibilitées mesurées.

Scène observée	Erreur systématique ($\bar{m}_{\Delta T}^0/\sigma_{\Delta T}^0$ [K])		Amélioration en % de la valeur initiale
	avant traitement	après traitement	
T_o^{EO}	+0.895/0.790	+0.195/0.305	78%/61%
T_o^H	+0.448/0.379	+0.094/0.084	79%/78%
T_o^V	+0.499/0.694	-0.106/0.122	79%/82%

Des simulations ont été effectuées pour trouver la température moyenne T_{moy} permettant d'annuler le biais ou de diminuer la déviation standard pour la scène T_o^{EO} . La figure 10.11 illustre les résultats de ces simulations. La température permettant de minimiser la déviation standard est inférieure à la température moyenne sur la Terre pour la scène observée (150 K ou lieu de 164 K). La température annulant le biais, elle, est par contre légèrement supérieure à 200 K.

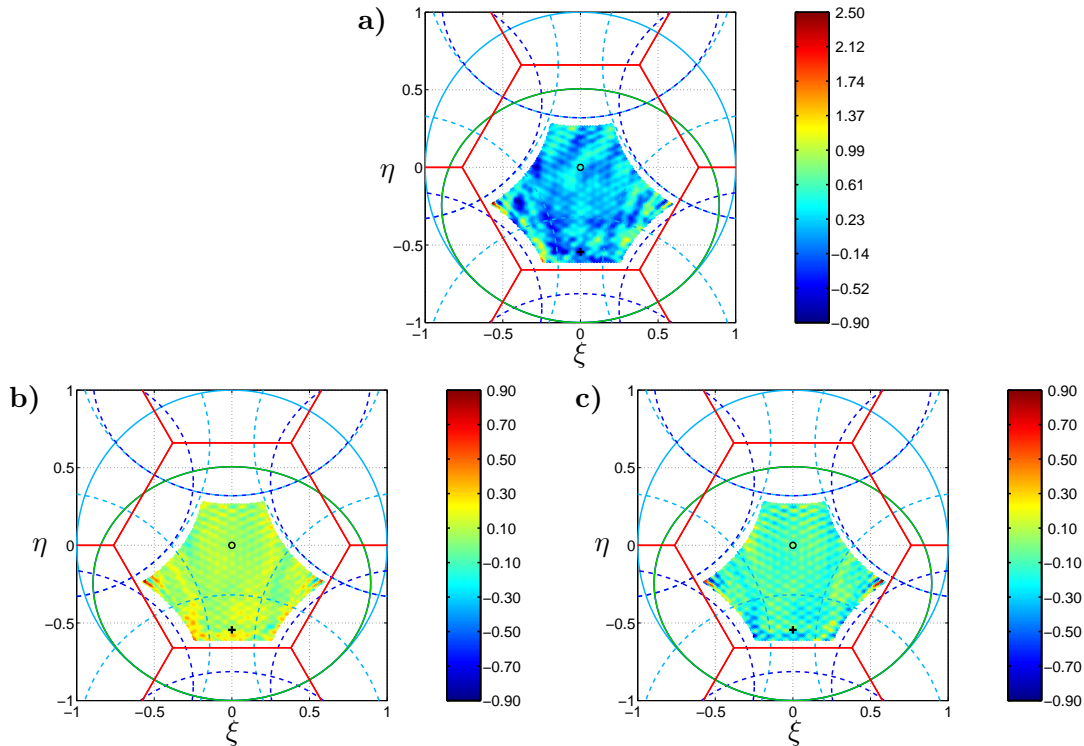


FIG. 10.10 – Cartes des erreurs de reconstruction obtenues à l’aide de la méthode à bande passante limitée, pour un instrument réaliste, après traitement des visibilité mesurées : les scènes observées sont **a)**, distribution de températures de brillance sur l’Europe de l’Ouest T_o^{EO} , **b)**, composante H T_o^H et **c)**, composante V de la distribution de températures de brillance sur l’océan.

En conclusion, il a été établi que les dimensions limitées des radiomètres imageur à synthèse d’ouverture, même dans le cas d’un instrument idéal, sont à l’origine d’une erreur de reconstruction systématique, caractérisée par un biais et une erreur RMS non nulle. Une étude de l’impact de la qualité de l’instrument sur cette erreur fait ressortir l’importance d’une faible dispersion des caractéristiques des antennes et des récepteurs situés sur le hub central pour une configuration en Y.

D’autre part, la contribution de hautes fréquences contenues dans la scène observée et inaccessibles à l’instrument étant la principale source d’erreur systématique, le biais et l’erreur RMS varient en fonction de la nature de la scène observée et, dans une moindre mesure, en fonction de la méthode de reconstruction.

Enfin, le saut important en température entre la Terre et le Ciel le long de l’horizon terrestre tel qu’observé par un instrument réaliste de type MIRAS, couplé avec l’existence d’un repliement dans le champ de vue reconstruit, sont à l’origine d’une erreur systématique bien supérieure à celle obtenue en l’absence de repliement. Ainsi, lors de l’observation des océans, on s’attend ainsi à une erreur systématique plus grande en polarisation H qu’en polarisation V, la température de brillance diminuant avec l’angle d’incidence dans le premier cas et augmentant dans le second.

Toutefois, il est possible de diminuer cette erreur en retirant aux visibilité mesurées la contribution de l’observation d’une Terre de température uniforme égale à la température moyenne de la distribution terrestre observée. Dans le cadre du traitement de données réelles, cette température moyenne pourrait être estimée, soit d’après des simulations, soit d’après des reconstructions effectuées pour des visites précédentes.

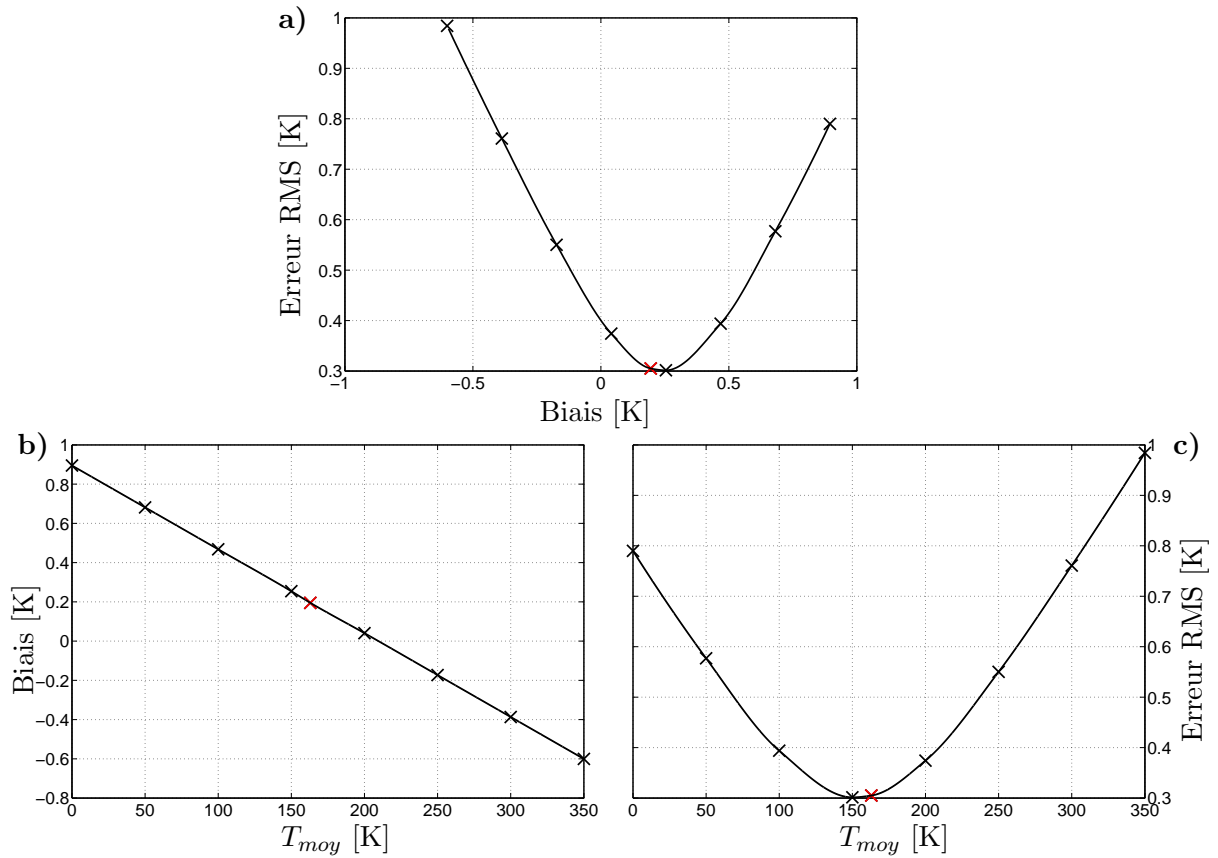


FIG. 10.11 – **a)**, erreur RMS et biais de reconstruction en obtenus après traitement des visibilités mesurées en fonction de la température moyenne T_{moy} considérée. **b)**, variation du biais avec T_{moy} et **c)**, variation de l'erreur RMS avec T_{Moy} . En rouge, on retrouve l'erreur de reconstruction obtenue en considérant la véritable température moyenne sur Terre, $T_{moy} \approx 164$ K.

Bibliographie

- [1] Philippe WALDTEUFEL et Gérard CAUDAL : About off-axis radiometric polarimetric measurements. *IEEE TGRS*, 40(6):1435–1439, 2002.

Chapitre 11

Propagation des erreurs

Sommaire

11.1 Propagation des erreurs aléatoires sur les données	203
11.2 Propagation des erreurs de modélisation	207

Et, au lieu de poursuivre des recherches scientifiques dignes de ce nom, comme de dénicher la saleté de papillon dont les battements d'ailes déclenchent toutes les tempêtes qu'on subit ces temps-ci et l'empêcher de nuire d'avantage...

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

11.1 Propagation des erreurs aléatoires sur les données

Cette section généralise pour des instruments réalistes de type MIRAS et HUT2D des résultats préliminaires pour un instrument en configuration en Y à 10 antennes [1] [2]. Un travail mené en collaboration avec Serge Gratton (CERFACS) a permis d'établir une expression plus précise du facteur d'amplification des erreurs dans le cas d'un bruit gaussien sur les données, présentée pour la première fois ici dans le cas d'un instrument réaliste et pour une distribution réaliste de températures de brillance.

Un résultat standard de l'analyse numérique donne une estimation de la propagation de l'erreur sur les données ΔV vers l'erreur de reconstruction :

$$\frac{\|\mathcal{I}_{dif}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{I}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \frac{\|T\|_E}{\|\mathcal{I}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}, \quad (11.1)$$

où σ_{max} est la plus grande des valeurs propres, σ_{min} la plus petite, et les normes sur les différents espaces étant définies comme suit :

$$\|V\|_F = \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{N_a} |V|^2 \quad (11.2)$$

$$\|T\|_E = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in G_{\xi}} |T_{\mathbf{p}}|^2 \quad (11.3)$$

$$\|\mathcal{I}\|_{\mathcal{E}} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in G_{\xi}} |\mathcal{I}_{\mathbf{p}}|^2 \quad (11.4)$$

Cependant, la rapport entre σ_{max} et σ_{min} n'est qu'une majoration très large du facteur d'amplification des erreurs. Si les erreurs sur les données ont une statistique gaussienne, il est possible d'arriver à un résultat beaucoup plus précis.

Le bruit radiométrique ΔV , gaussien, de déviation standard $\sigma_{\Delta V}$, est lié à la carte des erreurs de reconstruction \mathcal{T}_{dif} par l'opérateur linéaire \mathbf{R} , représentant les actions successives de reconstruction par l'un opérateurs \mathbf{G}_m^+ , \mathbf{G}_μ^+ ou \mathbf{A}^+ puis d'apodisation telle que définit dans (8.23) ou (8.24) :

$$\mathcal{T}_{dif} = \mathbf{R}\sigma_{\Delta V} \quad (11.5)$$

Etant donnée la définition de la norme dans \mathcal{E} , il est alors possible d'établir l'expression suivante pour l'espérance mathématique $\mathbb{E}[\|\mathcal{T}_{dif}\|_{\mathcal{E}}^2]$:

$$\mathbb{E}[\|\mathcal{T}_{dif}\|_{\mathcal{E}}^2] = \sigma_\xi \mathbb{E}[\text{trace}(\mathcal{T}_{dif} \bar{\mathcal{T}}_{dif}^t)] = \sigma_\xi \text{trace}(\mathbb{E}[\mathcal{T}_{dif} \bar{\mathcal{T}}_{dif}^t]) \quad (11.6)$$

$$= \sigma_\xi \text{trace}(\mathbb{E}[\mathbf{R} \Delta V \Delta \bar{V}^t \mathbf{R}^*]) = \sigma_\xi \text{trace}(\mathbf{R} \mathbb{E}[\Delta V \Delta \bar{V}^t] \mathbf{R}^*) \quad (11.7)$$

$$= \sigma_\xi \text{trace}(\mathbf{R} \sigma_{\Delta V}^2 \mathbf{I} \mathbf{R}^*) = \sigma_\xi \sigma_{\Delta V}^2 \text{trace}(\mathbf{R} \mathbf{R}^*) \quad (11.8)$$

$$= \sigma_\xi \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_f^2 \quad (11.9)$$

$$(11.10)$$

où $\|\mathbf{R}\|_f$ est la norme de FROBENIUS de \mathbf{R} . De la même manière, selon la définition de la norme sur F , :

$$\mathbb{E}[\|\Delta V\|_{\mathcal{E}}^2] = \sigma_{\mathbf{u}} \mathbb{E}[\text{trace}(\Delta V \Delta \bar{V}^t)] = \sigma_{\mathbf{u}} \text{trace}(\mathbb{E}[\Delta V \Delta \bar{V}^t]) \quad (11.11)$$

$$= \sigma_{\mathbf{u}} N_b \sigma_{\Delta V}^2 \quad (11.12)$$

En divisant la relation (11.9) par $\|\mathcal{T}_{rw}\|^2$ et en y substituant la valeur de $\sigma_{\Delta V}^2$ calculée grâce à la relation (11.12), on obtient :

$$\frac{\mathbb{E}[\|\mathcal{T}_{dif}\|_{\mathcal{E}}^2]}{\|\mathcal{T}_{rw}\|^2} = \frac{\sigma_\xi}{\|\mathcal{T}_{dif}\|_{\mathcal{E}}^2} \frac{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_{\mathcal{E}}^2]}{\sigma_{\mathbf{u}} N_b} \|\mathbf{R}\|_f^2 \quad (11.13)$$

et donc la relation suivante permettant d'établir exactement la propagation moyenne des erreurs sur les données :

$$\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\mathcal{T}_{dif}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|} = \frac{\sqrt{\sigma_\xi}}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}}}} \frac{\|V\|_F}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\mathbf{R}\|_f}{\sqrt{N_b}} \frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|V\|_F} \quad (11.14)$$

Ainsi, comme la norme de FROBENIUS est une fonction croissante de Nb , la sensibilité radiométrique est proportionnelle à la racine carrée du nombre de visibilité (\sqrt{Nb}) et bien sûr à $\sigma_{\Delta V}$.

Etant données les simplifications possibles, le facteur d'amplification des erreurs sur les données est tout simplement la norme de FROBENIUS de l'opérateur. Le tableau ci-dessous reprend les résultats exposés dans [1] et [2] pour un instrument réaliste. Les opérateurs \mathbf{G}^+ et \mathbf{A}^+ ont le même facteur d'amplification. L'augmentation de ce dernier comme la racine carrée du nombre de visibilité est vérifiée.

TAB. 11.1 – Variation du facteur d’amplification ($[K/K]$) avec la fenêtre d’apodisation pour MIRAS et HUT2D : estimation analytique.

fenêtre	MIRAS	HUT2D
Rectangle	8.390	9.647
Hanning	4.140	5.676
Hamming	4.418	5.944
Blackman	3.361	4.821
Filler D	3.653	5.240
Kaiser	4.058	5.228
Mass	4.271	5.192

Afin de vérifier la bonne approximation de cette expression analytique, 100 reconstructions ont été effectuées à partir de visibilité dégradées par un bruit radiométrique gaussien de déviation standard $\sigma_{\Delta V} = 0.08$ K, représentatif du bruit radiométrique attendu pour un instrument de type MIRAS.

Cette valeur est calculée d’après l’équation du radiomètre (relation 1.39), pour une bande passante $B = 20$ MHz, un temps d’intégration $\tau = 1.5$ s, une température d’antenne $T_A = 250$ K et une température de récepteur $T_{\text{rec}} = 200$ K :

$$\sigma_{\Delta V} = \frac{250 + 200}{\sqrt{20 \cdot 10^6 \times 1.5}} \approx 0.08 \text{ K} \quad (11.15)$$

Le tableau 11.2 reprend les résultats obtenus après ces 100 tirages aléatoires. Le facteur d’amplification est calculé après avoir retiré l’erreur RMS systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ de l’erreur de RMS de reconstruction $\sigma_{\Delta T}$, soit $\sqrt{(\sigma_{\Delta T})^2 - (\sigma_{\Delta T}^0)^2}$. Là encore, les méthodes de régularisation mathématique et à bande passante limitée conduisent à la même amplification du bruit sur les données.

TAB. 11.2 – Variation du facteur d’amplification ($[K/K]$) avec la fenêtre d’apodisation pour MIRAS : estimation après simulation.

fenêtre	en l’absence de repliement	en présence de repliement
Rectangle	8.891	6.641
Hanning	4.148	3.241
Hamming	4.445	3.462
Blackman	3.354	2.628
Filler D	3.652	2.857
Kaiser	4.068	3.177
Mass	4.295	3.346

Dans un premier temps, la scène 3 du chapitre 10 (section 1.2) a été utilisée pour la simulation des visibilité et une reconstruction en l’absence de repliement. Les résultats obtenus, visibles dans la seconde colonne du tableau 11.2, sont très proches des résultats prédits par la relation analytique : l’erreur commise est comprise entre 0.02% (pour BLACKMAN) et 0.6% (pour HAMMING) de la valeur analytique pour chacune des fenêtres étudiées et atteint 6% pour la fenêtre rectangle.

Dans un second temps, la scène réaliste de l’Europe de l’Ouest (T_o^{EO} , chapitre 10, section 2) est utilisée pour la simulation des visibilité et une reconstruction en présence de repliement.

Le facteur d'amplification obtenu est alors inférieur à celui prédit par la relation analytique, d'environ 20% de la valeur analytique initiale. Cette différence peut s'expliquer par le masque appliqué sur la température de brillance reconstruite dans le but de ne conserver que la région exempte de repliement : l'erreur sur les données se reporte uniformément sur l'ensemble de la distribution estimée mais l'amplification ne se fait que sur la partie conservée.

11.2 Propagation des erreurs de modélisation

Cette section présente des résultats sur l'impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction pour un instrument réaliste de type MIRAS.

Pour cette étude, des valeurs différentes pour les paramètres de modélisation ont été utilisées pour la simulation des visibilité et pour la construction de l'opérateur \mathbf{A}^+ à l'aide duquel ont été effectuée les reconstructions. La scène observée est de nouveau la scène réaliste de l'Europe de l'Ouest et la fenêtre d'apodisation est la fenêtre de BLACKMAN.

Une erreur gaussienne a été introduite sur les paramètres de modélisation des antennes : sur θ_1, θ_2 , les largeurs à -3 dB des antennes, puis sur $D_1^{\prime\prime}, D_1^{\perp}, D_2^{\prime\prime}, D_2^{\perp}$, les erreurs d'orientation de l'axe du lobe principal, respectivement transverses et longitudinales. Dans un troisième temps, une erreur gaussienne a aussi été introduite sur l'amplitude puis sur la phase des gains d'antennes.

Afin de juger de la qualité de l'estimation des paramètres opérée dans le chapitre 9, les déviations standards de ces erreurs ont été choisies dans un premier temps du même ordre que les erreurs sur les estimations.

Le tableau 11.3 rappelle le niveau d'erreur introduit ainsi que le biais ($\langle \bar{m}_{\Delta G} \rangle$) et l'erreur RMS ($\langle \sigma_{\Delta G} \rangle$) résultants : ces derniers représentent la moyenne des erreurs calculées après 100 tirages aléatoires. Rappelons que l'erreur systématique, calculée en l'absence de bruit sur les données ou d'erreurs de modélisation, est pour cette scène caractérisée par un biais de 0.195 K et une erreur RMS de 0.305 K.

TAB. 11.3 – Impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction : erreurs de modélisation de l'ordre de l'erreur sur l'estimation des paramètres par auto-caractérisation.

Nature de l'erreur	Erreur RMS de modélisation	$\langle \bar{m}_{\Delta G} \rangle$ [K]	$\langle \sigma_{\Delta G} \rangle$ [K]
Largeur à -3 dB	2°	+0.175	1.134
Orientation transverse	2 mm	+0.226	0.735
Orientation longitudinale	5 mm	+0.278	0.613
Amplitude	2%	+0.342	1.246
Phase	1.5°	+0.171	1.087

La précision sur l'estimation des paramètres effectuées dans le chapitre 9 n'est pas suffisante : l'erreur RMS reste proche de 1 K, atteignant 1.2 K pour une erreur de 2% introduite sur l'amplitude du gain. Cependant, on peut noter que, compte tenue de la forte erreur de modélisation introduite, la méthode à bande passante limitée permet de tenir la propagation des erreur de modélisation sous contrôle.

Afin de caractériser plus précisément l'impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de

reconstruction pour la méthode régularisée à bande passante limitée, un nouveau tirage a été effectué en introduisant une erreur de l'ordre de celle introduite par Anterrieu *et al.* [3] dans leur étude sur les conséquences des erreurs instrumentales. Dans ce travail, la modélisation de l'instrument ne tient pas compte de l'effet de décorrélation spatiale et la reconstruction est menée à l'aide d'une simple \mathcal{TF} inverse. Les résultats sont reportés dans le tableau 11.4. L'erreur introduite sur les paramètres de modélisation est cette fois de l'ordre des erreurs attendues après la calibration en vol de ces paramètres.

TAB. 11.4 – Impact d'une erreur de modélisation sur l'erreur de reconstruction : erreurs de modélisation de l'ordre de l'erreur de calibration des paramètres.

Nature de l'erreur	Erreur RMS de modélisation	$\langle \bar{m}_{\Delta G} \rangle$ [K]	$\langle \sigma_{\Delta G} \rangle$ [K]
Largeur à -3 dB	0.1°	+0.187	0.093
Pointage transverse	1 mm	+0.202	0.453
Pointage longitudinal	1 mm	+0.200	0.324
Amplitude	1%	+0.213	0.506
Phase	0.5°	+0.192	0.462

L'erreur de reconstruction reste importante, tant au niveau du biais qu'au niveau de l'erreur RMS.

Pour ce qui est du biais, on n'observe pas d'amélioration par rapport aux résultats donnés dans le tableau 11.3 précédent. Dans la modélisation choisie pour l'instrument, l'une des antennes du réseau est utilisée comme un NIR pour la mesure de la fonction de cohérence spatiale à la fréquence nulle, et donc de la température moyenne de la scène. Cette antenne étant ici perturbée au même niveau que les autres, alors que les NIR seront, dans la réalité, calibrés séparément, même une faible erreur de modélisation peut introduire un biais général dans la distribution estimée.

L'erreur RMS est nettement inférieure que dans le cas précédent mais reste supérieure aux résultats annoncés dans le travail d'Anterrieu *et al.* [3]. Cependant, les paramètres géophysiques seront estimés d'après des moyennes temporelles et spatiales des cartes reconstruites : l'erreur de reconstruction sera alors naturellement diminuée.

En conclusion, que ce soit du point de vue du bruit sur les données ou d'erreurs de modélisation, l'utilisation des méthodes régularisées permettent de maintenir la propagation de ces sources d'erreurs à des niveaux compatibles avec les exigences de la télédétection de l'humidité des sols et de la salinité de surface des océans.

Biographie(s)

Biographie 11.1: **FROEBENIUS, Ferdinand Georg**

(26 Octobre 1849, Berlin, Prusse - 3 Août 1917, Berlin, Allemagne)



Etudiant de l'université de Berlin, Frobenius suit les cours de Kronecker et Weierstrass. Ce dernier l'encadrera durant la thèse qu'il soutient en 1870. En 1874, il est nommé professeur de mathématiques dans cette même université.

Après 12 années passées à Zürich, il reprend la chaire de Kronecker, mort en 1891. C'est Weierstrass qui le recommande chaudement en pensant que seul Frobenius saurait reprendre le flambeau et maintenir la réputation de l'université de Berlin dans les mathématiques. A cette époque, la concurrence fait rage avec l'université de Gottingen, qui oriente son enseignement vers les mathématiques appliquées. Frobenius, quant à lui, éprouve une aversion totale à l'idée que les mathématiques puissent servir à un autre domaine que les mathématiques elle-même. Dernier représentant de la vieille école allemande qui a su produire des éléments aussi brillant que Weierstrass, Kummer ou Kronecker, il ne peut se résoudre à appliquer les réformes nécessaires à l'enseignement des mathématiques à l'université de Berlin. Finalement, nombres d'étudiant opteront pour Gottingen et l'université de Berlin perdra son rang dans la recherche en mathématiques.

Les travaux de Frobenius ont permis des avancées significatives dans la théorie des groupes, sur les groupes abéliens et les groupes de permutations. Sans doute aurait-il été contrarié de savoir que ses travaux en mathématiques si pures et abstraites ont fini par trouver des applications importantes en mécanique quantique et en physique théorique.

Bibliographie

- [1] E. ANTERRIEU : A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers. *IEEE TGRS*, 42(8):1649–1656, 2004.
- [2] E. ANTERRIEU, S. GRATTON et Bruno PICARD : Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d’ouverture. *revue Traitement du Signal*, 21(1), 2004.
- [3] Eric ANTERRIEU, Philippe WALDTEUFEL et Gérard CAUDAL : About the effects of instrument errors in interferometric radiometry. *Radio Science*, 38(3):9.1–9.10, 2003.

Chapitre 12

Impact du rayonnement solaire sur la télédétection de la salinité de surface

Sommaire

12.1	Température de brillance du soleil et de son reflet sur la période 2007-2010	214
12.2	Positions du soleil et du point spéculaire dans le champ de vue de SMOS	214
12.3	Impact du rayonnement solaire sur la qualité de la reconstruction d'image	217
12.4	Discussion et résultats	219

...les savants décidèrent soudain qu'il est impossible de savoir quoi que ce soit, qu'il n'y a rien en fait qu'on puisse qualifier de réalité digne d'étude, que tout ça est drôlement excitant, et savez-vous entre parenthèses que des tas de petits univers vivent peut-être partout mais qu'on ne les voit pas parce qu'ils sont recourbés sur eux-mêmes ? A propos, vous le trouvez comment ce t-shirt ?

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

Le soleil est une source (étendue angulaire de 0.5° environ) très brillante en bande L : sa température est de l'ordre de 100000 K, lorsque l'activité solaire est à son minimum. Le rayonnement solaire, tant direct que reflété par la surface de la mer, va donc constituer une contribution non négligeable aux données interférométriques. Son impact sur la température de la scène observée va dépendre de sa position par rapport à l'instrument et par rapport à la surface observée et de l'état de cette dernière.

Ainsi, les régions affectées par ce rayonnement doivent être identifiées. Elles seront, selon l'état de la contamination, soient éliminées, soient signalées comme étant des régions dans lesquelles l'erreur de reconstruction est plus élevée.

Le travail présenté ici consiste à fournir une estimation qualitative et quantitative de la contamination des cartes de températures de brillance par le rayonnement solaire durant la période d'activité de la mission SMOS, à savoir 2007-2010. Il a été réalisé en collaboration avec Nicolas REUL (LOS/IFREMER), qui a fourni un travail très important sur la modélisation de la position du soleil dans le champ de vue de MIRAS et sur celle de l'étalement de son reflet sur la surface de l'océan [1]. A l'aide de ces simulations, nous avons pu étudier la possibilité de retirer la contribution du rayonnement solaire (direct ou reflété) des visibilités mesurées.

12.1 Température de brillance du soleil et de son reflet sur la période 2007-2010

La température du soleil varie sur un cycle de 11 années. La mission SMOS sera lancée quelques mois après un minimum dans l'activité solaire et une étude de ce cycle sur la période 1996-1999 indique que la température du soleil variera, entre 2007-2010, entre $1.1 \times 10^5 \text{K}$ et $7.7 \times 10^5 \text{K}$. Dans les simulations présentées ici, la température est fixée à $1.1 \times 10^5 \text{K}$, puisque c'est la température moyenne du soleil durant la première moitié de la mission.

Sur une mer idéalement plate, le reflet du soleil aurait la forme d'un disque centré sur le point de réflexion spéculaire. Cependant, la présence des vagues induites par le vent va contribuer à déformer ce disque et à faire varier la température sur ce reflet en fonction de leur orientation. Plus la surface sera rugueuse, plus la tache sera étalée.

Ainsi, autour du solstice d'hiver, le reflet va approcher la zone non aliasée et va venir polluer la reconstruction. Des simulations ont été effectuées afin de modéliser l'étalement et la température du reflet du soleil, basées sur une climatologie des champs de surface de salinité et de température (SSS et SST d'après l'atlas mondial océanique, *World Ocean Atlas 2001* (WOA01) du *National Oceanographic Center*) et sur les champs de vents journaliers fournis par la mission QuikSCAT (module et direction sur des grilles $0.5^\circ \times 0.5^\circ$, disponibles auprès du Centre ERS d'Archivage et de Traitement, CERSAT/France). Les composantes du vent pour le solstice d'hiver ont été simulées d'après les mesures QuikSCAT du 22 Décembre 2002.

Considérons un élément dA de la surface terrestre situé à l'intérieur de l'angle solide vu par l'instrument et éclairé par le soleil selon une direction \vec{n}_{sun} . Une partie de ce rayonnement est alors réfléctée en direction de l'instrument, direction notée \vec{n}_s . L'énergie de ce rayonnement réflécté par l'élément dA dans la direction \vec{n}_s , en polarisation H est représenté par la température de brillance $T^{SS}(\vec{n}_s, h)$:

$$T^{SS}(\vec{n}_s, h) = \frac{1}{4\pi \cos \theta_s} \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta_{sun}/2} [\sigma_{hh}^0 + \sigma_{hv}^0] T^{sun}(\vec{n}_i) d\Omega_i \quad (12.1)$$

où σ_{hh}^0 et σ_{hv}^0 sont les coefficients de réflexion bistatiques de la surface pour les polarisations HH et HV dans la direction \vec{n}_s et à l'angle d'incidence \vec{n}_i (les résultats sont similaires en polarisation V). L'angle d'élévation de la réflexion est noté θ_s . Les limites de l'intégration sont fixées par l'angle solide sous tendu par le soleil.

Dans ce travail, les coefficients de réflexion bistatiques de la surface (rugueuse) de la mer sont notamment estimés grâce à l'approximation dite « des petites pentes » pour la rugosité [2] [3], d'après le modèle de KLEIN et SWIFT [4] pour l'estimation de la constante diélectrique de la mer en bande L, et à partir du modèle de spectre de surface de la mer de Kudryatsev *et al.* [5]. La modélisation de ces coefficients est notée SSA-1.

12.2 Positions du soleil et du point spéculaire dans le champ de vue de SMOS

Des simulations numériques ont été menées pour l'année 2007 afin de prédire la position du soleil et de son reflet dans le champ de vue de SMOS. Etant donnée la géométrie de ce champ de vue et de l'espacement choisi pour les antennes du réseau interférométrique, le soleil et son reflet vont venir se replier dans le champ de vue non aliasé.

12.2 - Positions du soleil et du point spéculaire dans le champ de vue de SMOS215

La figure 12.1 montre le déplacement du soleil et de son reflet ainsi que des différents alias pour le solstice du 22 décembre 2007 à 6h07m (TU). L'utilisation de l'éphéméride *Astronomical Almanac* 1996 [6] a permis de calculer ces positions avec une précision de l'ordre de 0.01° pour l'ensemble des années 1950 à 2050.

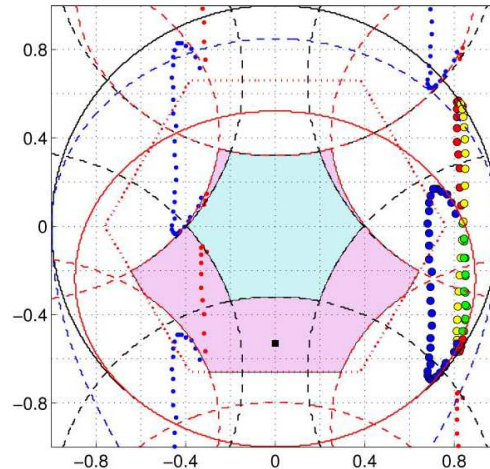


FIG. 12.1 – Variation de la position du soleil et du point spéculaire tels que vus par MIRAS durant le solstice d'hiver : les points les plus petits (à gauche) sont les alias des points les plus gros (à droite).

En considérant les positions respectives du soleil et de MIRAS, trois configurations sont possibles :

1. le soleil est éclipsé par la Terre (points verts, Fig. 12.1) ou
2. le soleil est éclipsé par MIRAS (points jaunes, Fig. 12.1) ou
3. le soleil est proche de l'horizon terrestre et à l'intérieur du champ de vue de MIRAS (points rouges, Fig. 12.1)

La figure 12.1 illustre deux caractéristiques importantes de l'interaction du soleil et avec MIRAS :

- la zone non aliasée est souvent polluée par les alias du soleil lorsque le soleil est proche de l'horizon terrestre : cela tient au fait que la zone non aliasée considérée ici inclut en fait le repliement du ciel, dont on peut retirer la contribution aux visibilité mesurées.
- le point spéculaire est toujours situé en dehors de la zone non aliasée mais la rugosité de la mer conduit à la présence d'une région polluée par le reflet à l'intérieur de la zone non aliasée.

Le pourcentage de mesures polluées par la présence des alias du soleil a été établi pour les douze mois de l'année 2007, en considérant une période d'échantillonnage de l'orbite de 14 secondes (Fig. 12.2). A l'exception de la fin des mois d'avril et août, entre 20% et 40% des images reconstruites seront polluées par la présence de ces alias. Même si la fréquence de mesure pour SMOS est dix fois plus élevée (une mesure toutes les 1.2s), ces statistiques devraient rester sensiblement les mêmes. Deux régions distinctes sont concernées par cette pollution (Fig. 12.3) : une première située dans le coin supérieur gauche, la seconde dans la partie inférieure gauche de la zone non aliasée.

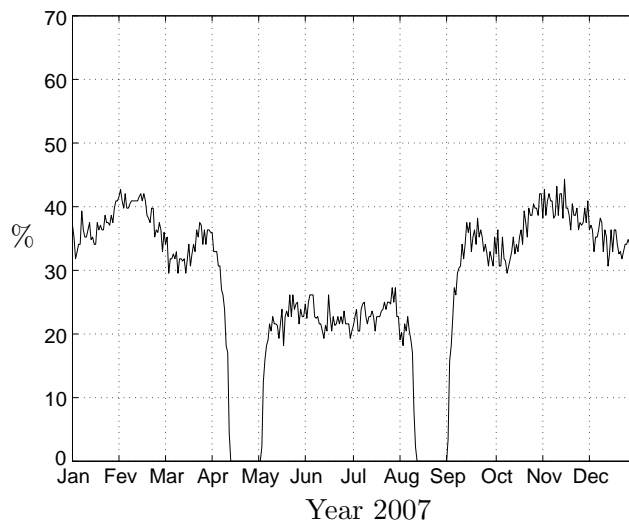


FIG. 12.2 – Fréquence d'occurrence des évènements de pollution par les alias du soleil durant l'année 2007.

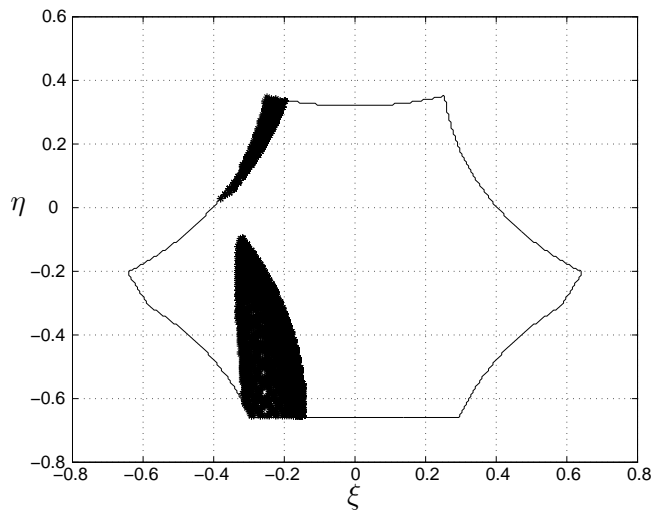


FIG. 12.3 – Etendues des régions polluées par les alias du soleil durant une année.

12.3 Impact du rayonnement solaire sur la qualité de la reconstruction d'image

La scène observée T^{obs} durant le solstice d'hiver est simulée sur une grille cartésienne de 321×321 points et un pas d'échantillonnage de 0.062×0.062 dans le repère des cosinus directeurs, ce qui correspond à une résolution angulaire de 0.5024° , proche de la résolution angulaire du soleil. Cette scène est la somme de trois composantes :

$$T_o^{\text{obs}} = T_o^{\text{geo}} + T_o^{\text{SS}} + T^{\text{sun}} \quad (12.2)$$

où :

- T_o^{geo} est la carte de températures de brillance observée par MIRAS depuis sa position au solstice d'hiver. Cette carte ne contient aucune pollution par le soleil.
- T^{sun} est la température de brillance du soleil, $T^{\text{sun}} = 1.1 \times 10^5$ K. Puisque la résolution angulaire du soleil est de l'ordre de la résolution de la grille de simulation, cette température est affectée au seul pixel le plus proche de sa position calculée à l'aide de l'éphéméride.
- T_o^{SS} est la distribution de températures de brillance du reflet du soleil calculée à l'aide des données W0A1 et QuikSCAT pour les données de SSS, SST et de vent et du modèle SSA-1 pour les coefficients bistatiques.

Les simulations présentées ici sont réalisées pour la polarisation H .

L'instrument modélisé est l'instrument réaliste de type MIRAS. La méthode choisie pour la reconstruction est la méthode à bande passante limitée.

Dans cette étude, nous avons tenté de soustraire la contribution du soleil (direct et reflété) aux visibilitées mesurées avant le processus de reconstruction afin d'observer s'il est possible de retrouver la distribution de température initiale T^{geo} telle que vue par un instrument idéal. Les étapes de reconstruction-simulation sont alors :

- étape 1 :** les visibilitées V^{obs} mesurées par un instrument réaliste sont simulées d'après T_o^{obs} ;
- étape 2 :** un bruit radiométrique gaussien de déviation standard $\sigma_{\Delta V} = 0.08$ K est ajouté ;
- étape 3 :** la contribution du soleil $V_{+\Delta T^{\text{sun}}}^{\text{sun}}$ est simulée à partir de $T^{\text{sun}} + \Delta T^{\text{sun}}$, avec $T^{\text{sun}} = 1.1 \times 10^5$ K et $\Delta T^{\text{sun}} = 0, 1000, 5000, \text{ or } 10000$ K ;
- étape 4 :** la contribution du reflet V^{SS} est simulé à partir de T_o^{SS} , V_{err}^{SS} étant simulé à partir de $T_{o,err}^{\text{SS}}$ calculé avec une erreur aléatoire typique sur les données de vent QuikSCAT (± 1.5 m/s sur la vitesse du vent, $\pm 20^\circ$ sur la direction) ;
- étape 5 :** la contribution du soleil et du reflet est soustraite aux visibilitées mesurées :

$$V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+\Delta T^{\text{sun}}}^{\text{sun}} ;$$
- étape 6 :** une carte de température de brillance \mathcal{T}_{rw} est reconstruite à partir de V^{sub} .

La reconstruction de référence $\mathcal{T}_{idw}^{\text{geo}}$ est effectuée à partir des visibilitées V^{geo} simulées à partir d'un instrument idéal et à l'aide d'une simple \mathcal{TF} inverse. Toutes les reconstructions sont apodisées avec la fenêtre de BLACKMAN. La notation \mathcal{T}_{dif} désigne la carte des erreurs de reconstruction $\mathcal{T}_{dif} = \mathcal{T}_{rw} - \mathcal{T}_{idw}^{\text{geo}}$ où \mathcal{T}_{rw} est la carte de température reconstruite.

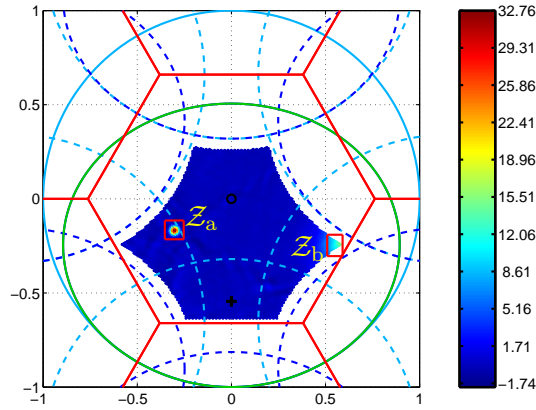


FIG. 12.4 – Carte des erreurs de reconstruction établie à partir des mesures interférométriques contaminées par le soleil au solstice d’hiver.

L’erreur de reconstruction est quantifiée par m, b and σ définis comme suit :

$$\text{maximum sur la zone : } m = \max_{\mathcal{Z}} \{ \mathcal{T}_{dif} \} \quad (12.3)$$

$$\text{moyenne sur la zone : } b = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathcal{T}_{dif} \quad (12.4)$$

$$\text{déviatoin standard sur la zone : } \sigma = \sqrt{\left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\mathcal{T}_{dif}(\xi_i, \eta_i) - b)^2 \right]} \quad (12.5)$$

où \mathcal{Z} est l’une des régions montrées sur la figure 12.4 (\mathcal{Z}_a ou \mathcal{Z}_b) et M est le nombre de pixels dans cette région.

La figure 12.4 montre la carte des erreurs $\mathcal{T}_{rw}^{\text{geo}} - \mathcal{T}_{idw}^{\text{geo}}$ où la carte $\mathcal{T}_{rw}^{\text{geo}}$ est directement reconstruite à partir des visibilitées V^{obs} . La région \mathcal{Z}_a est une zone d’environ $60 \text{ km} \times 80 \text{ km}$ contenant un alias du soleil dont la température maximale est d’environ 30 K. La région \mathcal{Z}_b est une zone contenant une partie du reflet, dont la température maximale est d’environ 15 K. Notons que dans un travail similaire portant uniquement sur l’alias du soleil, Camps *et al.* [7] reconstruit un alias d’une température d’environ 1400 K, sans qu’il soit pour l’instant possible de comprendre l’origine de cette différence. Les résultats présentés dans le tableau 12.1 font références aux cas suivants :

I $V^{\text{sub}} = V^{\text{geo}}$ (cas de référence)

Vérification de la linéarité

II $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{SS} - V_{+0K}^{\text{sun}}$

Sensibilité aux erreurs sur les données ancillaires de vent

III $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V_{err}^{SS} - V_{+0K}^{\text{sun}}$

Sensibilité aux erreurs sur les données ancillaires de température du soleil

IV $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{SS} - V_{+1000K}^{\text{sun}}$

$$\begin{aligned} \text{V} \quad V^{\text{sub}} &= (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+5000K}^{\text{sun}} \\ \text{VI} \quad V^{\text{sub}} &= (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+10000K}^{\text{sun}} \end{aligned}$$

Lorsqu'un biais est introduit sur la température du soleil simulée, la température de brillance du reflet est augmentée proportionnellement : pour un biais de +10000K, la température en chaque pixel du reflet est augmentée de 10%.

12.4 Discussion et résultats

Puisque la relation de VAN CITTERT-ZERNIKE est linéaire, le cas II, où les corrections sont parfaites, est bien identique au cas I, le cas de référence.

Le reflet du soleil n'est pas la source principale de l'erreur de reconstruction (cas III). Même en considérant une erreur typique sur les données QuikSCAT, la déviation standard sur \mathcal{Z}_b n'augmente que d'1% environ.

La situation est plus critique lorsqu'un biais est introduit sur la température simulée du soleil (cas IV, V et VI). Lorsqu'un biais de seulement 1% est introduit sur la température de brillance du soleil, la déviation standard sur \mathcal{Z}_a augmente de 10% et le biais de 25%. Lorsque un biais de +10000 K est ajouté sur T^{sun} , σ peut atteindre 0.88 K et le biais 0.605 K. Ce biais augmente aussi l'erreur de reconstruction dans la zone \mathcal{Z}_b , puisque la température sur le reflet dépend aussi de la température du soleil : σ augmente de près de 25% et est multiplié par 10 pour un biais sur T^{sun} de +10000 K.

La principale différence entre ces deux sources d'erreur réside dans leur couverture fréquentielle. Le soleil est une source ponctuelle et possède donc des composantes de FOURIER dans les hautes fréquences alors que le reflet est un objet principalement basse fréquence. Comme il a déjà été remarqué, les hautes fréquences contribuent aux visibilitées sans pouvoir être prises en compte lors de la reconstruction. Les RISO étant des instruments à bande passante limitée, la simulation de la contribution du soleil aux visibilitées mesurées ne contient pas assez d'information aux hautes fréquences et il en résulte une grande dépendance à T^{sun} .

En conclusion, des simulations numériques menées sur les positions respectives de l'instrument MIRAS, du soleil et de la position de ce dernier par rapport au champ de vue de l'instrument ont révélé que la contamination des données interférométriques par les alias du soleil est fréquente durant une année d'observation.

L'utilisation du modèle SSA-1 dans le but de simuler la diffusion du rayonnement solaire par une surface océanique rugueuse a permis de prévoir la contamination du champ de vue non aliasé par ce reflet, l'intensité de cette pollution dépendant de la date et de l'état de la mer.

Ces simulations peuvent être utilisées afin de calculer la contribution du soleil aux visibilitées mesurées et ainsi retrouver la distribution de température de brillance sous-jacente. Cependant, les reconstructions effectuées montrent que la température de brillance du soleil doit être connue avec une grande précision si l'on souhaite éliminer la contribution due à l'alias.

TAB. 12.1 – Erreurs de reconstruction [K] pour les différents scénarii.

	(Z_a)	(Z_b)	Champ non aliasé
I	$m = 0.580$ $b = 0.210$ $\sigma = 0.190$	$m = 0.744$ $b = 0.081$ $\sigma = 0.331$	$\sigma = 0.246$
Vérification de la linéarité			
II	$m = 0.580$ $b = 0.210$ $\sigma = 0.190$	$m = 0.744$ $b = 0.081$ $\sigma = 0.331$	$\sigma = 0.246$
Sensibilité aux erreurs sur les données ancillaires de vent			
III	$m = 0.580$ $b = 0.210$ $\sigma = 0.190$	$m = 0.792$ $b = 0.105$ $\sigma = 0.333$	$\sigma = 0.247$
Sensibilité aux erreurs sur les données ancillaires de température du soleil			
IV	$m = 0.578$ $b = 0.198$ $\sigma = 0.209$	$m = 0.653$ $b = 0.080$ $\sigma = 0.334$	$\sigma = 0.247$
V	$m = 1.510$ $b = 0.350$ $\sigma = 0.470$	$m = 0.317$ $b = 0.362$ $\sigma = 0.360$	$\sigma = 0.258$
VI	$m = 3.13$ $b = 0.605$ $\sigma = 0.880$	$m = 0.05$ $b = 0.814$ $\sigma = 0.421$	$\sigma = 0.291$

Bibliographie

- [1] B. PICARD, Nicolas REUL, P. WALDTEUFEL et E. ANTERRIEU : Impact of solar radiation on sea surface salinity remote sensing by spaceborn synthetic aperture imaging radiometer. *accepté à IGARSS'04*, 2004.
- [2] A.G. VORONOVICH : Small-slope approximation in wave scattering by rough surface. *Sov. Phys.-JETP*, 62:65–70, 1985.
- [3] A.G. VORONOVICH : Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces. *Waves in Random Media*, 4:337–367, 1994.
- [4] L. A. KLEIN et C. T. SWIFT : An improved model for the dielectric constant of sea water at microwave frequencies. *IEEE Transactions on Antennas and Proagation*, AP-25(1):104–111, 1977.
- [5] V.N. KUDRYATSEV, V.K. MAKIN et B. CHAPRON : Coupled sea surface-atmosphere model. 2. spectrum of short wind waves. *J.G.R.*, 104(4):7625–7639, 1999.
- [6] A. ALMANAC : Astronomical almanac for the year 1997. *Washington and London : US and HM Nautical Almanac Offices*, 1996.
- [7] A. CAMPS, M. VALL-LLOSSERA, N. DUFFO, M. ZAPATA, I. CORBELLA, F. TORRES et V. BARRENA : Sun effects in 2-d aperture synthesis radiometry imaging and their cancelation. *IEEE TGRS*, 42(6), 2004.

Chapitre 13

Extension de la reconstruction au mode de polarisation totale

Sommaire

13.1	Relation de Van Cittert-Zernike en mode de polarisation totale . . .	225
13.2	Modélisation du diagramme de rayonnement des antennes	227
13.3	Simulations et résultats	229

A coté de ça, une grosse tortue qui porte un monde sur le dos paraît presque banale. Au moins, elle ne fait pas semblant de ne pas exister, et aucun téméraire sur le Disque-Monde n'a jamais cherché à prouver qu'elle n'existait pas, des fois qu'il aurait raison et qu'il se retrouverait brusquement à flotter dans le vide de l'espace.

Mécomptes de fées - Terry Pratchett

L'étude décrite ci-dessous a pour objet de déterminer l'impact d'un couplage plus grand entre les diagrammes de rayonnement co- et cross-polaires. Si un couplage plus fort est toléré, eu égard à l'erreur de reconstruction, il est alors possible de réduire la quantité d'isolant pour chacune des antennes, ce qui représente une économie de masse non négligeable pour une mission spatiale.

Ce travail a été mené à la demande de l'ESA alors que le bilan de masse totale pour la mission SMOS était étudié. L'impact de la réduction de l'isolation a été étudié de manière qualitative pour un instrument comportant 3 antennes par bras et une antenne centrale, reprenant la configuration d'une maquette construite par EADS afin de valider le concept d'interférométrie à synthèse d'ouverture.

13.1 Relation de Van Cittert-Zernike en mode de polarisation totale

Le champ incident sur le réseau interférométrique est polarisé et il est important d'avoir accès à la polarisation des températures de brillances observées pour augmenter la quantité d'information disponible pour l'estimation des paramètres géophysiques.

Il a été précisé que les antennes d'un radiomètre à synthèse d'ouverture sont équipées de deux ports orthogonaux, X et Y . Or, le diagramme d'une antenne change selon que le port X ou Y est activé.

Rappelons que les caractéristiques de polarisation d'un champ électromagnétique sont parfaitement décrites par les valeurs des quatre paramètres de STOKES (I, Q, U, V). Les composantes de STOKES de T_b dans le repère de l'antenne sont alors notées ($T_b^X, T_b^Y, T_b^3, T_b^4$), avec :

$$T_b^X \propto \langle E_x E_x^* \rangle \quad (13.1)$$

$$T_b^Y \propto \langle E_y E_y^* \rangle \quad (13.2)$$

$$T_b^3 \propto 2\text{Re} \langle E_y E_x^* \rangle \quad (13.3)$$

$$T_b^4 \propto 2\text{Im} \langle E_y E_x^* \rangle \quad (13.4)$$

$$(13.5)$$

où E_x et E_y sont les champs rayonnés incidents sur les antennes.

Les gains co-polaires désignent les gains d'antennes du port X ou Y pour une onde incidente polarisée dans le même sens que le port considéré. **Les gains cross-polaires**, d'un ordre de grandeur plus faibles que les précédents, expriment une contamination du diagramme par le couplage entre les polarisations. La valeur des gains cross-polaires dépend de la qualité des antennes

Les quatre composantes de STOKES sont explorées lors de séquences durant lesquelles les ports des antennes d'un même couple sont activés alternativement. Ce n'est donc plus 1 jeu de visibilité mais 4 jeux de visibilité qui sont fournis à chaque mesure instrumentale :

$$V_{kl}^1 \propto \langle E_k^X E_l^{X*} \rangle \quad (13.6)$$

$$V_{kl}^2 \propto \langle E_k^Y E_l^{Y*} \rangle \quad (13.7)$$

$$V_{kl}^3 \propto \langle E_k^X E_l^{Y*} + E_k^Y E_l^{X*} \rangle \quad (13.8)$$

$$V_{kl}^4 \propto j \langle E_k^X E_l^{Y*} - E_k^Y E_l^{X*} \rangle \quad (13.9)$$

où E_k^X, E_k^Y, E_l^X et E_l^Y sont proportionnels aux tensions récoltées sur les ports X et Y des antennes k et l .

La relation de VAN CITTERT-ZERNIKE est alors considérablement complexifiée [1] :

$$\begin{pmatrix} V_{kl}^1(u, v) \\ V_{kl}^2(u, v) \\ V_{kl}^3(u, v) \\ V_{kl}^4(u, v) \end{pmatrix} = \iint_{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 1} \mathcal{F}_{kl}(\xi, \eta) \begin{pmatrix} T_b^X(\xi, \eta) \\ T_b^Y(\xi, \eta) \\ T_b^3(\xi, \eta) \\ T_b^4(\xi, \eta) \end{pmatrix} e^{-2j\pi(u\xi + v\eta)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}}, \quad (13.10)$$

avec

$$\mathcal{F}_{kl} = \begin{pmatrix} R_k^X R_l^{X*} & C_k^X C_l^{X*} & \dots \\ C_k^Y C_l^{Y*} & R_k^Y R_l^{Y*} & \dots \\ -(R_k^X C_l^{Y*} + C_k^Y R_l^{X*}) & R_k^Y C_l^{X*} + C_k^X R_l^{Y*} & \dots \\ j(R_k^X C_l^{Y*} - C_k^Y R_l^{X*}) & j(R_k^Y C_l^{X*} - C_k^X R_l^{Y*}) & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (R_k^X C_l^{X*} + C_k^X R_l^{X*})/2 & j(R_k^X C_l^{X*} - C_k^X R_l^{X*})/2 \\ -(R_k^Y C_l^{Y*} + C_k^Y R_l^{Y*})/2 & j(R_k^Y C_l^{Y*} - C_k^Y R_l^{Y*})/2 \\ (R_k^X R_l^{Y*} - C_k^Y C_l^{X*} + R_k^Y R_l^{X*} - C_k^X C_l^{Y*})/2 & j(R_k^X R_l^{Y*} - C_k^Y C_l^{X*} - R_k^Y R_l^{X*} + C_k^X C_l^{Y*})/2 \\ j(R_k^Y R_l^{X*} - C_k^X C_l^{Y*} - R_k^X R_l^{Y*} + C_k^Y C_l^{X*})/2 & (R_k^X R_l^{Y*} + C_k^Y C_l^{X*} + R_k^Y R_l^{X*} + C_k^X C_l^{Y*})/2 \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

où R désigne un gain co-polaire et C un gain cross-polaire.

13.2 Modélisation du diagramme de rayonnement des antennes

La modélisation des gains des antennes co- et cross-polaires se fait à l'aide d'une paramétrisation définie à partir de tableaux de gain fournis par le CNES.

Les diagrammes de rayonnement, co- ou cross-polaires, de chacune des antennes de l'interféromètre, sont ici uniquement caractérisés par leur directivité $D(\theta, \phi)$ dans la direction d'observation (θ, ϕ) :

$$F(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) \quad (13.12)$$

Les gains des antennes sont ainsi uniquement caractérisés par leur amplitude. Les différences de phase entre les antennes n'ont que des effets de second ordre, par rapport à l'amplitude, sur la qualité de l'instrument et le conditionnement de la matrice de modélisation, c'est pourquoi cette étude préliminaire ne considère que des gains réels, sans erreur de dépointage.

Dans les simulations présentées par la suite, le gain co-polaire R pour les ports X et Y est modélisé ainsi :

$$R^{X,Y}(\theta, \phi) = D(0) (1 - (n_1 \sin^2 \phi + n_2 \cos^2 \phi) \sin^{1.9} \theta), \quad (13.13)$$

avec $D(0)$ l'amplitude maximum et

$$n_i = 0.5 / \sin^{1.9} \theta_i \quad i = 1, 2 \quad (13.14)$$

où θ_1 et θ_2 sont les largeurs à mi-hauteur du lobe principal respectivement dans les directions ξ et η .

Le gain cross-polaire C pour les ports X et Y est modélisé ainsi :

$$C^{X,Y}(\theta, \phi) = A \sin \theta (2 \sin \theta_o - \sin \theta) e^{-B(\sin \theta - \sin \theta_o)^2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \left| \frac{4}{\pi} \left| \phi - \left(\frac{2}{\pi} \phi + 0.5 \right) \frac{\pi}{2} \right| \right|^{1.6} \right) \quad (13.15)$$

avec

$$A = co / (\sin^2 \theta_o) \quad (13.16)$$

où co est la valeur maximale dans chaque quadrant et θ_o sa position, et

$$B = -\log(0.5) / \sin^2 \theta_q \quad (13.17)$$

où θ_q est la largeur à mi-hauteur dans chaque quadrant.

Pour les gains co-polaires, 10 valeurs pour chacun des paramètres θ_1 , θ_2 et $D(0)$ ont été tirés indépendamment pour chacun des ports X et Y . Un tirage a aussi été effectué pour déterminer les valeurs de θ_q et θ_o est fixé à $\theta_o = 1.8\theta_q$.

Pour la première série de reconstructions, on considère un rapport de -25 dB entre les maxima des gains co- et cross-polaires, et par conséquent, pour chaque antenne :

$$co = D(0) / \sqrt{(10^{-25/10})} \quad (13.18)$$

Dans un deuxième temps, on relâche la contrainte sur l'isolation et on considère un couplage de -10 dB :

$$co = D(0) / \sqrt{10} \quad (13.19)$$

Le tableau 13.1 donne la valeur les paramètres des gains co- et cross-polaires pour chacun des ports. La figure 13.1 illustre à la fois la géométrie du réseau et les valeurs prises par les gains.

TAB. 13.1 – Paramètres de modélisation des gains co- et cross-polaires.

Gain	Port		Antennes									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	X	θ_1	43.0	44.5	47.0	48.2	41.7	48.9	42.7	48.1	44.1	44.8
		θ_2	42.8	43.9	45.4	47.7	49.1	41.9	45.1	44.7	41.1	48.5
		$D(0)$	3.00	3.04	3.19	3.23	3.07	3.10	3.29	3.26	3.32	3.19
	Y	θ_1	41.9	46.5	48.5	44.8	42.9	43.8	47.2	42.0	45.8	48.9
		θ_2	41.5	46.9	40.7	42.7	45.0	43.1	48.1	49.9	47.4	45.1
		$D(0)$	3.26	3.32	3.07	3.13	3.19	3.10	3.04	3.00	3.23	2.97
C	X	θ_q	24.2	24.5	28.9	22.4	29.6	20.7	27.3	26.2	23.9	21.8
	Y	θ_q	27.2	22.4	25.8	24.1	20.6	29.6	28.7	26.1	23.4	22.2

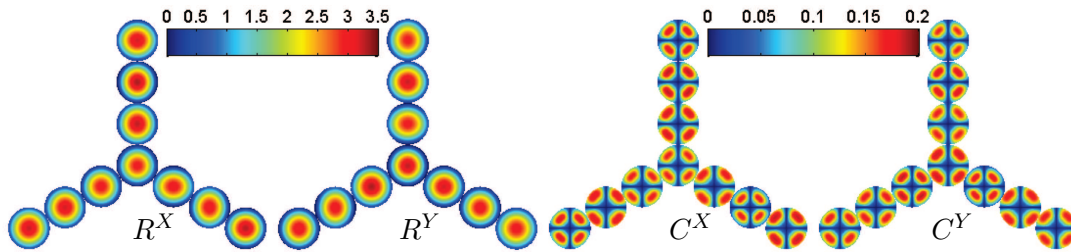


FIG. 13.1 – Diagrammes des antennes co- et cross-polaires.

Le tableau 13.2 résume les dimensions intervenant dans le problème inverse à résoudre. Etant données les valeurs respectives des gains co- et cross-polaires, la matrice de modélisation \mathbf{G} a une allure majoritairement bloc-diagonale : si l'isolation est suffisamment importante, la contribution des blocs hors diagonale est faible **mais non nulle** (voir Fig. 13.2).

TAB. 13.2 – Dimensions des opérateurs intervenant dans la reconstruction pour un instrument en Y comprenant 10 antennes.

Nombre d'antennes	$N_a = 10$
Nombre de visibilité mesurées	$N_b = 1 + 45 = 46$
Nombres de fréquences utiles dans H	$N_f = 36 + 1 = 37$
Distance entre les antennes	$du = 0.875\lambda$
Nombre de pixels	$N \times N = 16 \times 16 = 256$
Dimensions de \mathbf{G}	$(4 \times 91) \times (4 \times 256)$
Dimensions de \mathbf{A}	$(4 \times 91) \times (4 \times 73)$

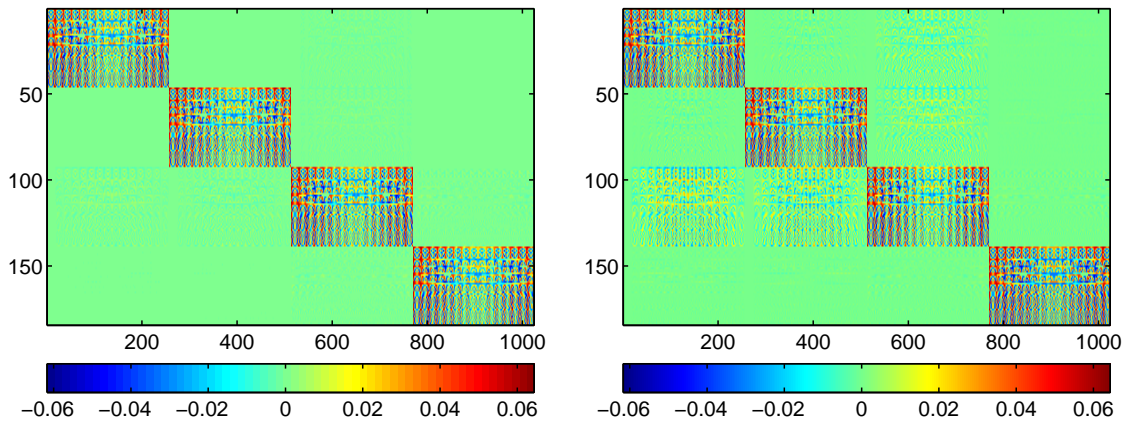


FIG. 13.2 – Matrice de modélisation \mathbf{G} pour un mode de polarisation totale : le couplage entre les gains co- et cross-polaires, à gauche de -25 dB, à droite de -10 dB, font de cette matrice une matrice à l'allure bloc-diagonale. Cependant, les valeurs hors-diagonales sont non nulles et augmentent lorsque l'isolation est diminuée.

13.3 Simulations et résultats

On considère les composantes de STOKES de la figure 13.3 pour la scène observée. On note que les deux premières composantes contiennent la majorité de l'énergie du signal, tandis que la quatrième est considérée nulle. Les reconstructions seront comparées à une version apodisée par une fenêtre de HANNING et à la résolution de l'instrument.

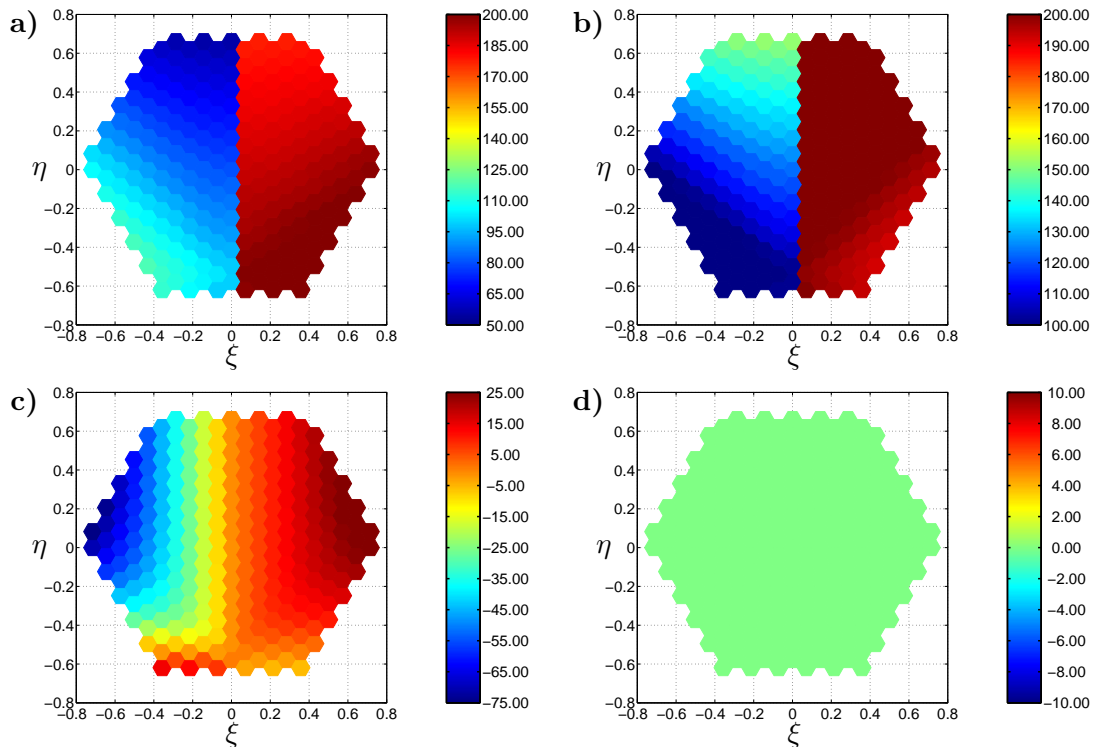


FIG. 13.3 – Composantes polarimétriques de la scène observée à son plus haut niveau de résolution : a) T_o^X , b) T_o^Y , c) T_o^3 , d) T_o^4 .

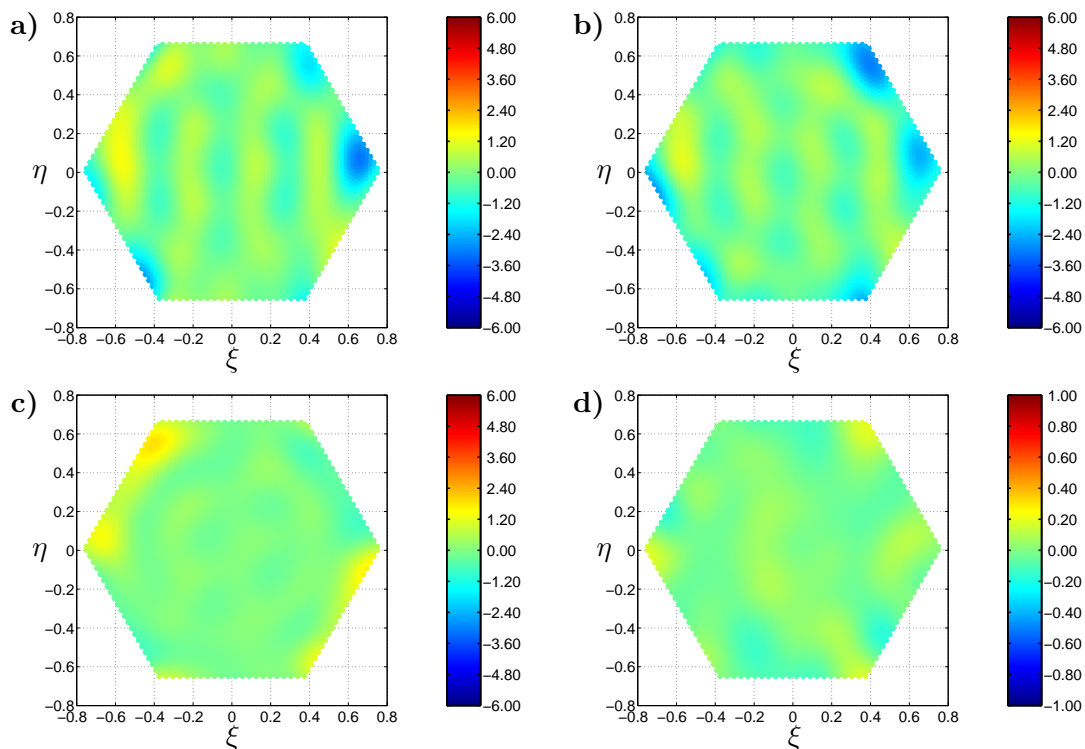


FIG. 13.4 – Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites **simultanément** à l'aide de $\mathbf{G}_m^{+ full}$ pour un couplage de **-25 dB** : a) \mathcal{T}_{rw}^X , b) \mathcal{T}_{rw}^Y , c) \mathcal{T}_{rw}^3 , d) \mathcal{T}_{rw}^4 .

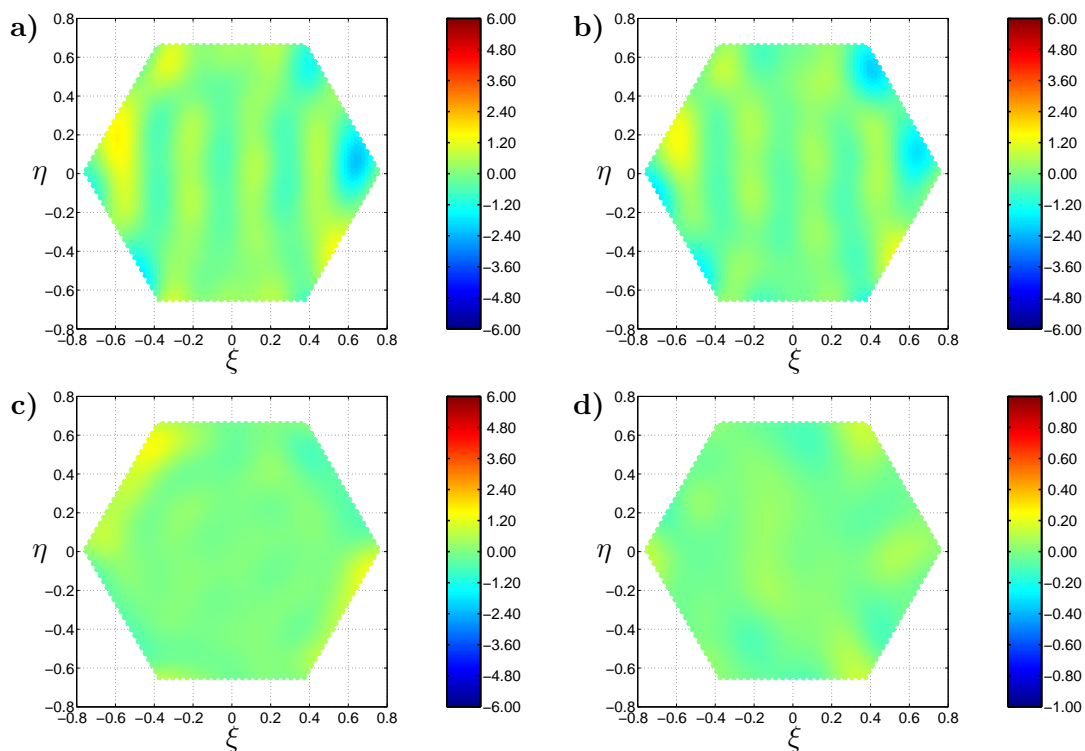


FIG. 13.5 – Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites **simultanément** à l'aide de $\mathbf{A}^{+ full}$ pour un couplage de **-25 dB** : a) \mathcal{T}_{rw}^X , b) \mathcal{T}_{rw}^Y , c) \mathcal{T}_{rw}^3 , d) \mathcal{T}_{rw}^4 .

Les visibilitées sont simulées d'après les scènes à haute résolution à l'aide de la matrice de modélisation. Il leur est ajouté un bruit gaussien de déviation standard $\sigma_{\Delta V} = 0.08$ K. Aucune erreur de modélisation n'est considérée, le couplage est le même pour la simulation des données que pour la reconstruction.

Dans un premier temps, la reconstruction est effectuée simultanément pour les quatre composantes de la scène à l'aide des opérateurs $\mathbf{G}_m^{+ full}$ (avec m optimal) et $\mathbf{A}^{+ full}$ construits d'après la matrice \mathbf{G} telle que montrée par la figure 13.2.

La distribution reconstruite possède une quatrième composante non nulle (voir Fig. 13.4-d et 13.5-d pour un couplage à -25 dB). En effet, les composantes non nulles ont contribué à toutes les visibilitées polarimétriques, ce qui entraîne une distribution faible et de moyenne nulle pour \mathcal{T}_{rw}^4 .

TAB. 13.3 – Erreur RMS systématique en mode de polarisation totale : couplage à -25 dB.

		$\sigma_{\Delta T}^0$ [K] pour			
		\mathcal{T}_{dif}^X	\mathcal{T}_{dif}^Y	\mathcal{T}_{dif}^3	\mathcal{T}_{dif}^4
Reconstructions simultanées	$\mathbf{G}_m^{+ full}$	0.648	0.666	0.395	0.056
	$\mathbf{A}^{+ full}$	0.546	0.496	0.301	0.043
Reconstructions successives	$\mathbf{G}_m^{+ bloc}$	0.989	1.258	2.936	0.856
	$\mathbf{A}^{+ bloc}$	0.992	1.255	2.918	0.859

Quelque soit le couplage, l'erreur RMS systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ est comparable pour les deux méthodes, avec un léger avantage pour la méthode à bande passante limitée, les scènes observées ne comportant pas de hautes fréquences : pour un couplage à -25 dB, elle est comprise en 0.3 K et 0.55 K pour les trois premières composantes.

Cette erreur augmente lorsque le couplage passe à -10 dB mais reste sous contrôle (voir Fig. 13.6 pour une reconstruction avec $\mathbf{A}^{+ full}$, les résultats étant comparables pour l'opérateur $\mathbf{G}_m^{+ full}$) : elle est maintenant comprise entre 0.6 K et 1.25 K. Le tableau 13.3 (première ligne) résume les erreurs de reconstruction pour un couplage à -25 dB et le tableau 13.4 (première ligne) pour un couplage à -10 dB.

L'explication réside dans les blocs hors-diagonale qui, lorsque leurs valeurs augmentent, vont venir dégrader le conditionnement de la matrice \mathbf{G} et donc augmenter le facteur d'amplification du bruit.

TAB. 13.4 – Erreur RMS systématique en mode de polarisation totale : couplage à -10 dB.

		$\sigma_{\Delta T}^0$ [K] pour			
		\mathcal{T}_{dif}^X	\mathcal{T}_{dif}^Y	\mathcal{T}_{dif}^3	\mathcal{T}_{dif}^4
Reconstructions simultanées	$\mathbf{G}_m^{+ full}$	1.070	0.749	1.259	0.119
	$\mathbf{A}^{+ full}$	0.946	0.486	0.638	0.102
Reconstructions successives	$\mathbf{G}_m^{+ bloc}$	12.960	11.632	19.903	2.552
	$\mathbf{A}^{+ bloc}$	13.173	11.876	20.359	2.559

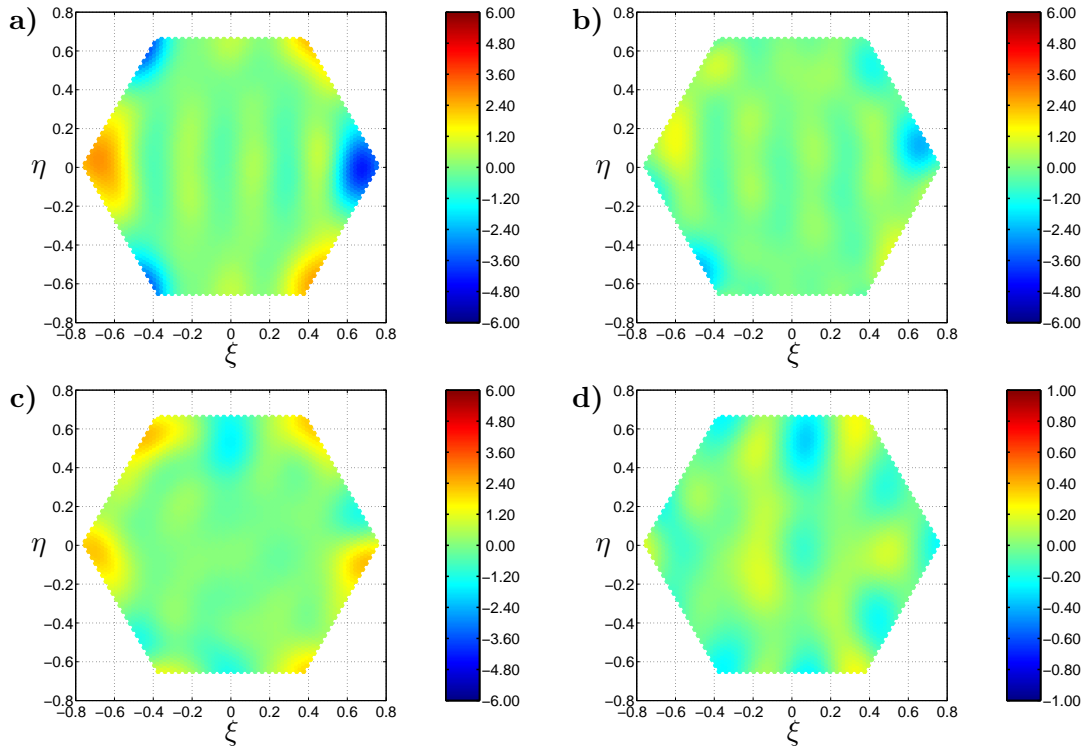


FIG. 13.6 – Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites **simultanément** à l'aide de $\mathbf{A}^{+ full}$ pour un couplage de **-10 dB** : a) \mathcal{T}_{rw}^X , b) \mathcal{T}_{rw}^Y , c) \mathcal{T}_{rw}^3 , d) \mathcal{T}_{rw}^4 .

Dans un deuxième temps, la reconstruction est effectuée en considérant nuls les blocs hors-diagonale dans la matrice \mathbf{G} . Les quatre blocs restant sont alors considérés séparément : pour chacun d'eux, on calcule l'opérateur $\mathbf{A}_m^{+ bloc}$ que l'on applique au jeu de visibilité correspondant. Quatre reconstructions sont réalisées successivement pour les quatre composantes de STOKES.

Comme le montrent les tableaux 13.3 et 13.4 (deuxième ligne), l'erreur commise est alors bien plus grande : la figure 13.7 montre les cartes d'erreur de reconstruction établies à l'aide de l'opérateur $\mathbf{A}^{+ bloc}$ et pour un couplage à -25 dB (les résultats sont semblables pour $\mathbf{G}_m^{+ bloc}$). Ce résultat démontre que les reconstructions successives et indépendantes des quatre composantes ne tiennent pas compte des mécanismes de la mesure en polarisation totale.

Il en est de même lorsqu'un couplage de -10 dB est considéré : la reconstruction successive des quatre composantes conduit à augmenter considérablement la reconstruction. L'écart avec une reconstruction simultanée est bien plus grand que pour un couplage de -25 dB, démontrant l'utilité de ne pas négliger les blocs hors-diagonale, même si leurs valeurs sont de plusieurs ordres de grandeurs inférieures aux blocs diagonaux.

La conclusion de ce travail est double :

- l'augmentation du couplage induite par la diminution de l'isolation des antennes augmente l'erreur de reconstruction mais celle-ci reste dans des proportions acceptables,
- la reconstruction d'image en mode de polarisation totale n'a de sens que si les quatre composantes sont reconstruites dans le même temps en considérant la matrice \mathbf{G} dans son ensemble.

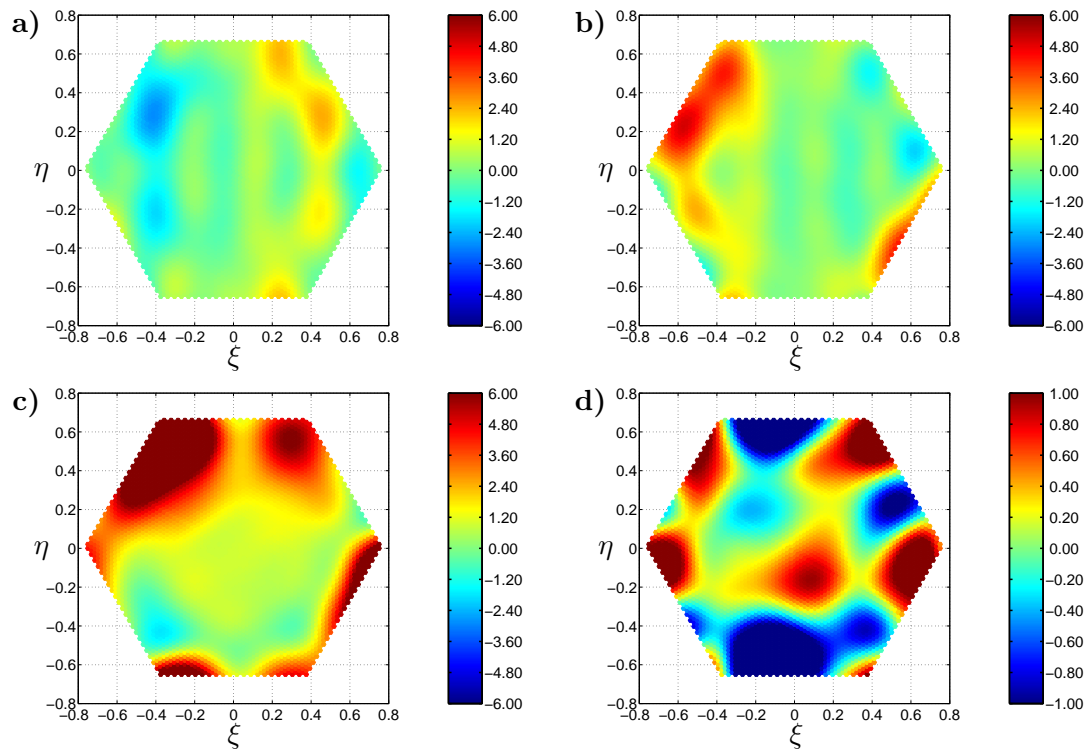


FIG. 13.7 – Cartes des erreurs pour les composantes polarimétriques reconstruites **successivement** à l'aide de 4 opérateurs $\mathbf{A}^{+ \text{ bloc}}$ et pour une matrice \mathbf{G} bloc-diagonale pour un couplage de -25 dB : a) \mathcal{T}_{rw}^X , b) \mathcal{T}_{rw}^Y , c) \mathcal{T}_{rw}^3 , d) \mathcal{T}_{rw}^4 .

Bibliographie

- [1] Philippe WALDTEUFEL et Gérard CAUDAL : About off-axis radiometric polarimetric measurements. *IEEE TGRS*, 40(6):1435–1439, 2002.

Conclusions & Perspectives

L'imagerie par interférométrie passive à synthèse d'ouverture est une technique prometteuse pour l'observation de la Terre. Les travaux effectués au cours de cette thèse ont permis une meilleure compréhension des phénomènes complexes intervenant dans la reconstruction d'image pour les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture.

Deux configurations du réseau d'antennes ont été étudiées, chacune d'elles correspondant à un instrument en construction (MIRAS, configuration en Y, maillage hexagonal) ou en cours de validation (HUT2D, configuration en U, maillage cartésien).

Apodisation

Les propriétés des fenêtres d'apodisation pour une configuration en U ont été quantifiées à l'aide de facteurs de mérite parlant pour l'observation de la Terre et comparées à ceux calculés pour une configuration en Y.

L'adaptation de la forme des fenêtres à la forme de la bande passante de l'instrument permet d'améliorer la sensibilité radiométrique. Cependant, elle est souvent contrebalancée par une augmentation excessive du lobe principale, dégradant la résolution spatiale. Toutefois, sous certaines conditions, la distance de plus courte approche, qui permet un choix objectif parmi l'ensemble des fenêtres disponibles, est améliorée. Une étude approfondie des mécanismes complexes contrôlant la qualité des fenêtres d'apodisation permettrait sans doute une amélioration supplémentaire.

Multi-fenêtrage

Une nouvelle paramétrisation de la fenêtre de KAISER a permis l'obtention d'une résolution constante dans le champ reconstruit sur Terre. Cependant, plus la résolution imposée est améliorée, plus le champ reconstruit se réduit et plus la sensibilité radiométrique est dégradée. Il serait utile de pouvoir comparer ces résultats avec ceux obtenus à partir d'une autre famille de fenêtres, voire avec une fenêtre adaptée à la forme de la bande passante.

Méthodes de reconstruction régularisées

L'importance de la régularisation du problème inverse a été démontrée. L'étape préalable à toute méthode de reconstruction doit consister à s'assurer de l'existence d'une unique solution.

La comparaison de trois méthodes de régularisation, basées sur un principe à chaque fois différent, a permis de mieux comprendre les caractéristiques de chacune. Les principales perspectives à l'ensemble des travaux présentés ici reposent, d'une part, à court terme, sur l'utilisation du simulateur SEPS dans le but de comparer ces méthodes régularisées avec d'autres méthodes développées à l'UPC et au DLR et d'autre part, à moyen terme, sur le traitement de données réelles issues des campagnes de mesures réalisées par le HUT2D.

La méthode de régularisation de TIKHONOV repose sur l'existence d'un paramètre de régularisation dont la valeur, variant continûment, pourrait autoriser une régularisation adaptée au contexte de la mesure : il est en théorie possible de privilégier, de façon exclusive, soit un faible facteur d'amplification du bruit, soit une bonne résolution spatiale. Dans la pratique, la valeur de ce paramètre change avec la nature de la scène observée et la méthode de régularisation de TIKHONOV a surtout permis un nouvel éclairage sur les deux autres méthodes de reconstruction régularisées.

Ainsi, le nombre de valeurs singulières tronquées lors de la décomposition de la matrice de modélisation peut être vu comme un paramètre de régularisation variant discrètement. La valeur optimale de ce paramètre est directement liée au nombre de fréquences contenues dans la bande passante de l'instrument.

La reformulation du problème inverse proposée par E. Anterrieu pour la méthode à bande passante limitée repose justement sur l'idée que le nombre de degrés de liberté du problème est plutôt lié au nombre de fréquences dans la bande passante qu'au nombre de pixels de la scène observée. En imposant la solution du problème inverse à n'avoir de composantes de FOURIER qu'à l'intérieur de la bande passante de l'instrument, et donc en résolvant ce problème dans le domaine de FOURIER, ce dernier se trouve régularisé, le nombre d'inconnues, les composantes de la scène dans la bande passante, étant inférieur aux nombres de mesures instrumentales grâce aux lignes de bases redondantes. Les dimensions du nouveau problème à résoudre étant inférieures à celles du problème initial, la reconstruction est non seulement plus facile d'implémentation mais aussi plus rapide. De plus, la solution appartenant au domaine de FOURIER et étant à bande passante limitée, les opérations d'apodisation et de rééchantillonnage s'en trouvent facilitées.

Auto-caractérisation des paramètres instrumentaux

Les méthodes de reconstruction régularisées sont toutes basées sur l'utilisation de la matrice de modélisation de l'instrument et nous avons montré la possibilité de caractériser en vol un grand nombre de paramètres contrôlant cette modélisation. Cette caractérisation est cependant chronophage et dépendante de la connaissance à priori d'une distribution de températures de brillance. La précision à laquelle cette scène doit être connue mérite une étude approfondie.

Erreur systématique

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture sont des instruments à bande passante limitée. Cette caractéristique est la cause principale de l'erreur systématique commise en l'absence de bruit sur les données ou d'erreurs de modélisation. Cette erreur systématique a été

quantifiée pour des instruments réalistes et sa dépendance en la scène observée et en la fenêtre d'apodisation utilisée a été établie.

Dans le cadre de l'observation de la Terre par un instrument en orbite, j'ai montré qu'il était possible de diminuer cette erreur systématique en retirant aux visibilitées mesurées la contribution d'une température uniforme sur Terre égale à la température moyenne de la distribution observée sur Terre.

Propagation des erreurs

La propagation du bruit radiométrique, considéré gaussien, sur les données peut être caractérisée de façon précise pour tout opérateur de reconstruction. Cette relation analytique permet une très bonne approximation du facteur d'amplification du bruit sur les données en l'absence de repliement dans la reconstruction et fournit une majoration de ce facteur d'amplification dans le cadre d'une reconstruction réaliste, en présence de repliement.

La propagation des erreurs de modélisation a été étudiée pour la méthode à bande passante limitée, pour un instrument réaliste de type MIRAS et pour une distribution réaliste de températures de brillance. La précision avec laquelle ont été estimés les paramètres de modélisation par la méthode d'auto-caractérisation est insuffisante : l'erreur de reconstruction qui en découle est trop importante. Toutefois, l'amplification reste sous contrôle et, lorsque le niveau d'erreur de modélisation introduit est de l'ordre du niveau attendu pour cette mission, l'erreur de reconstruction est acceptable, comparée aux erreurs estimées dans des travaux précédents.

Impact du rayonnement solaire

L'impact de la présence du soleil et de son reflet a fait l'objet d'un travail spécifique. Les simulations effectuées montrent une pollution des mesures instrumentales par un alias du soleil, dû au repliement dans le champ reconstruit, et par son reflet, dont l'étalement dépend de l'état de la mer. L'étude menée a conduit à quantifier l'erreur de reconstruction causée par la présence du soleil et à proposer une méthode visant à éliminer la contribution de cette pollution. A court terme, il s'agirait d'étudier plus précisément les variations de l'importance de la pollution par le reflet en fonction de l'état de la mer et de caractériser la zone polluée par l'alias et pouvant être considérée comme non exploitable.

Reconstruction en mode de polarisation totale

La faisabilité de l'extension des méthodes de reconstruction régularisées au mode de fonctionnement de l'instrument en polarisation totale a été établie. L'importance des éléments hors-diagonale de la matrice de modélisation construite à partir de la nouvelle formulation des diagrammes d'antennes a été soulignée. Une étude spécifique a été menée sur l'impact d'un relâchement sur la contrainte d'isolation des antennes. Un couplage plus fort entre les gains co- et cross-polaire, même s'il augmente l'erreur de reconstruction, n'a pas de conséquences dramatiques.

Le travail que j'ai mené durant trois ans a permis de préciser l'importance d'aspects fondamentaux de la reconstruction d'image. Ainsi, il est important de garder à l'esprit que les

radiomètres à synthèse d'ouverture sont des instruments à bande passante limitée. De cette caractéristique fondamentale découle une reformulation importante du problème inverse à résoudre. Elle est aussi à la source de la plupart des explications sur l'origine des erreurs de reconstruction.

De nombreux points restent à étudier afin de mieux comprendre les phénomènes complexes intervenant lors de la reconstruction d'image pour de tels instruments et ainsi de trouver les moyens d'améliorer la qualité de l'estimation des cartes de températures de brillance. On peut citer une étude plus précise de la propagation des erreurs de modélisation mais aussi de l'impact des sources secondaires de rayonnement, comme le soleil, le rayonnement fossile, la lune, sur l'erreur de reconstruction.

Enfin, l'ensemble des outils développés durant ces trois années sera rassemblé à moyen terme au sein d'un logiciel spécifiquement dédié à la reconstruction d'image pour des radiomètres à synthèse d'ouverture dans des configurations variées.

Le traitement des données réelles restent tout de même la principale perspective à ce travail.

Annexes

Annexe A

Article

A.1 Revue « Traitement du Signal », vol. 21, n° 1

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

Inverse problem in remote sensing by aperture synthesis imaging

E. Anterrieu, S. Gratton, B. Picard

Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS) 42, Avenue Gaspard Coriolis
31057 Toulouse cedex 01 – France

Manuscrit reçu le 1^{er} septembre 2003

Résumé et mots clés

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture sont des instruments particulièrement bien adaptés à l'observation à haute résolution des surfaces planétaires dans le domaine des micro-ondes. Le sujet traité dans cet article est celui de la reconstruction de cartes de température de brillance à partir de mesures interférométriques fournies par ce type d'instrument. Il est montré que le problème inverse correspondant est mal posé et doit être régularisé afin d'obtenir une solution unique et stable. Une méthode de régularisation est présentée en se référant au concept de résolution angulaire de l'instrument. Pour l'illustrer, des simulations sont conduites dans le cadre de la mission spatiale SMOS de l'Agence Spatiale Européenne.

Interférométrie, synthèse d'ouverture, problèmes inverses, régularisation.

Abstract and key words

Synthetic aperture imaging radiometers (SAIR) are potential powerful instruments for high-resolution observation of planetary surfaces at low microwave frequencies. This article deals with the reconstruction of radiometric brightness temperature maps from SAIR interferometric measurements. It is demonstrated that the corresponding inverse problem is not well-posed, unless a regularizing constraint is introduced in order to provide a unique and stable solution. A regularizing approach is presented by referring to the angular resolution of the instrument. To illustrate the theory, numerical simulations are carried out for the SMOS space mission, a project led by the European Space Agency.

Interferometry, aperture synthesis, inverse problems, regularization.

1. Introduction

La mission spatiale SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) est actuellement dans la phase B de son développement sous le contrôle de l'Agence Spatiale Européenne [1]. Ce projet constitue la première application, à la télédétection spatiale, du concept de radiomètre imageur à synthèse d'ouverture initialement développé en radio-astronomie [2]. Sur le plan technologique, la synthèse d'ouverture apporte une réponse aux problèmes liés au déploiement dans l'espace d'antennes de grandes dimensions. Cet interféromètre bi-dimensionnel opérant dans le domaine des micro-ondes est dédié à la télédétection de l'humidité superficielle des sols et de la salinité de surface des océans à partir d'une plate-forme placée en orbite basse.

Cet article présente une nouvelle approche pour reconstruire, à partir de mesures interférométriques, la distribution de température de brillance d'un champ synthétisé. En ce qui concerne le projet SMOS, ces visibilité complexes sont obtenues sur une grille d'échantillonnage hexagonale et sont confinées dans une couverture fréquentielle en forme d'étoile. Dans ce cas précis, l'approche traitement d'images sur des grilles hexagonales est la manière la plus naturelle d'aborder le problème de la synthèse d'ouverture. Cependant, la méthode présentée ici est tout à fait générale et peut être adaptée sans aucune difficulté à d'autres configurations conduisant à des couvertures fréquentielles différentes sur des grilles d'échantillonnage régulières.

La première partie de cet article rappelle le principe observationnel et décrit la modélisation de l'instrument. Le cadre de travail est introduit dans la seconde partie. Une attention particulière est accordée aux grilles d'échantillonnage hexagonales puisqu'elles sont nécessaires à l'illustration du traitement des données interférométriques de SMOS. Les espaces et les opérateurs clés impliqués dans le processus de reconstruction sont ensuite introduits. La troisième partie est consacrée à la reconstruction des températures de brillance à partir des visibilité complexes. Il est montré que ce problème inverse est mal posé et qu'il doit être régularisé afin de fournir une solution unique et stable. Puisque les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture sont des instruments à bande passante limitée, la régularisation proposée tient compte de cette spécificité. Elle est comparée à une autre régularisation, plus mathématique, et le lien est fait entre les deux méthodes. Finalement, des simulations numériques sont menées pour illustrer ces deux approches dans le cadre de la mission SMOS et la stabilité des processus de reconstruction est analysée.

2. Principe observationnel

Un radiomètre traditionnel établit une carte des températures de brillance en pointant une antenne hautement directive vers dif-

férents points de la scène observée et en mesurant la puissance collectée dans la direction du lobe principal de l'antenne en chacun de ces points [3]. Le principe observationnel d'un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture, illustré sur la Figure 1, est basé sur le théorème de Van-Cittert Zernike [4]. En mesurant la corrélation des signaux reçus par deux antennes A_k et A_l distantes l'une de l'autre et observant le même champ de vue, on accède à un échantillonnage de la fonction de cohérence spatiale $V(\mathbf{u}_{kl})$ pour une certaine fréquence spatiale angulaire $\mathbf{u}_{kl} = \mathbf{d}_{kl}/\lambda_o$ où \mathbf{d}_{kl} est le vecteur de la ligne de base associée au couple d'antennes (A_k, A_l) et λ_o est la longueur d'onde d'observation. Cette fonction, qui peut se comprendre comme une mesure de la capacité d'un rayonnement à produire des interférences, est définie dans le contexte de l'expérience des trous d'Young par la corrélation normalisée entre les ondes ré-émises au niveau des fentes [4]. Dans la situation présente, ces mesures interférométriques correspondent à la notion de visibilité complexes [2] : le module est donné par le facteur de visibilité des franges de la figure d'interférence tandis que la phase est donnée par la position de la frange centrale par rapport à la différence de marche nulle. Le principe de la synthèse d'ouverture est d'utiliser des visibilité complexes mesurées à plusieurs fréquences spatiales pour reconstruire la distribution spatiale d'intensité de la source observée.

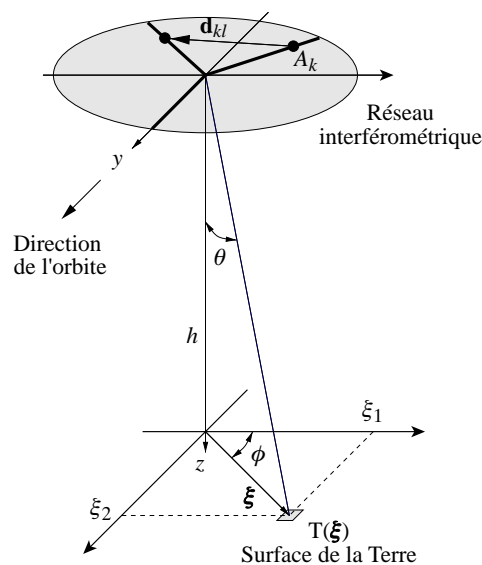


Figure 1. Système de coordonnées utilisé pour l'observation de la Terre, depuis une altitude h , à l'aide d'un interféromètre imageur à synthèse d'ouverture. Le vecteur \mathbf{d}_{kl} est le vecteur ligne de base entre les deux antennes A_k et A_l . Les composantes ξ_1 et ξ_2 de la variable de position angulaire ξ sont les cosinus directeurs de la direction d'observation, θ et ϕ sont les coordonnées sphériques traditionnelles

Pour un interféromètre idéal dont les récepteurs et les antennes sont tous identiques, et pour lequel les effets de décorrélation sont négligés, les visibilité complexes $V(\mathbf{u}_{kl})$ et la distribution de température de brillance $T(\xi)$ de la scène observée sont reliées par une intégrale de type transformée de Fourier :

$$V(\mathbf{u}_{kl}) \propto \frac{1}{\Omega} \iint_{\|\xi\| \leq 1} |F(\xi)|^2 T(\xi) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}, \quad (1)$$

où $|F(\xi)|^2$ est le diagramme de rayonnement en puissance des antennes élémentaires, supposées ici toutes identiques avec un angle solide équivalent Ω .

Cependant, dans un système réel, les imperfections des composants de l'interféromètre affectent les mesures du degré de cohérence spatiale. La relation entre les visibilité complexes et la température de brillance diffère donc de la simple intégrale (1) et est donnée par [2][5] :

$$V(\mathbf{u}_{kl}) \propto \frac{1}{\sqrt{\Omega_k \Omega_l}} \iint_{\|\xi\| \leq 1} F_k(\xi) \bar{F}_l(\xi) T(\xi) \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}. \quad (2)$$

Ici, $F_k(\xi)$ et $F_l(\xi)$ sont les diagrammes de rayonnement en intensité des deux antennes A_k et A_l , Ω_k et Ω_l sont les angles solides équivalents de ces antennes, $\tilde{r}_{kl}(t)$ tient compte des effets de décorrélation, $t = \mathbf{u}_{kl} \xi / f_o$ est le retard géométrique et f_o est la fréquence centrale d'observation.

Les modèles d'antennes et de récepteurs utilisés pour les simulations dans la dernière partie de cet article sont ceux retenus pour le démonstrateur de SMOS construit par Astrium [6].

2.1. Diagrammes des antennes

Suivant les notations introduites dans la figure 1, les diagrammes de rayonnement des antennes sont caractérisés par leur directivité $D(\theta, \phi)$ et leur phase $\Delta\varphi(\theta, \phi)$ dans la direction d'observation (θ, ϕ) [2] :

$$F(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) e^{j\Delta\varphi(\theta, \phi)}. \quad (3)$$

Dans les simulations présentées dans le paragraphe 5, la directivité obéit à une loi en puissance :

$$D(\theta, \phi) = D(0) \left(\cos^{n_1} \theta \cos^2 \phi + \cos^{n_2} \theta \sin^2 \phi \right), \quad (4)$$

avec

$$D(0) = \sqrt{\frac{2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{n_1 + n_2 + 1}} \quad (5)$$

$$n_1 = -0.15 / \log \cos \frac{\theta_1}{2}$$

$$n_2 = -0.15 / \log \cos \frac{\theta_2}{2}$$

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

où θ_1 et θ_2 sont les largeurs à mi-hauteur du lobe principal dans les directions ξ_1 et ξ_2 . De même, la phase varie en fonction de (θ, ϕ) :

$$\Delta\varphi(\theta, \phi) = \frac{2\pi}{\lambda_o} \left((D_1'' \sin \theta + D_1^+ (1 - \cos \theta)) \cos^2 \phi + (D_2'' \sin \theta + D_2^+ (1 - \cos \theta)) \sin^2 \phi \right), \quad (6)$$

où D_1'' , D_1^+ et D_2'' , D_2^+ sont des distances de défocalisation transverse et longitudinale dans les directions ξ_1 et ξ_2 qui entraînent des défauts de la surface de l'antenne.

Ainsi, chaque diagramme dépend de six paramètres qui diffèrent d'une antenne à l'autre. Leurs valeurs numériques sont données dans la Table 1.

Tableau 1. Diagrammes de rayonnement des antennes

	θ_1 (deg)	θ_2 (deg)	D_1'' (mm)	D_1^+ (mm)	D_2'' (mm)	D_2^+ (mm)
1	64.57	59.34	0.0	19.0	2.8	-30.0
2	56.00	64.00	-3.0	1.0	1.0	-25.0
3	66.47	60.77	0.0	20.0	0.0	-16.0
4	62.28	72.57	-4.0	20.0	0.5	-7.0
5	67.89	57.44	4.0	15.0	2.0	-25.0
6	62.28	67.43	0.0	22.0	1.0	-16.0
7	66.28	68.00	4.0	25.0	2.0	-9.0
8	64.57	64.57	-1.0	25.0	1.0	-12.0
9	67.43	68.57	0.0	25.0	2.0	-6.0
10	59.43	62.28	1.0	11.0	-3.0	-25.0

Tableau 2. Filtres passe-bande des récepteurs

	\bar{f} (MHz)	B (MHz)	τ (nsec)	φ (deg)
1	1414.41	20.83	83	0.8
2	1414.93	19.61	79	-0.5
3	1415.54	20.25	81	-0.2
4	1414.58	19.08	80	0.3
5	1414.35	20.44	77	0.4
6	1415.29	20.62	79	-0.1
7	1415.18	19.22	82	0.2
8	1415.39	20.11	78	0.6
9	1414.27	19.84	80	-0.7
10	1415.78	19.37	77	-0.3

2.2. Filtres des récepteurs

La fonction $\tilde{r}_{kl}(t)$ rend compte des effets de décorrélation spatiale dus à la largeur non-nulle des filtres des récepteurs placés à la sortie des antennes A_k et A_l [2] :

$$\tilde{r}_{kl}(t) = \frac{1}{\sqrt{B_k B_l}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(f - f_o) \bar{H}_l(f - f_o) e^{+2j\pi f t} df. \quad (7)$$

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

$H_k(f)$ et $H_l(f)$ sont ici les fonctions de transfert des filtres passe-bande des récepteurs, B_k et B_l sont leurs bandes passantes équivalentes. Ces effets sont d'autant plus importants que la ligne de base \mathbf{d}_{kl} est grande et que le signal provient de points ξ du champ de vue éloignés de la direction de visée des antennes. Les filtres utilisés dans les simulations présentées dans le paragraphe 5 sont des filtres rectangulaires à variation de phase linéaire :

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - \bar{f}}{B}\right) e^{-j(2\pi\tau(f - \bar{f}) + \varphi)}, \quad (8)$$

où \bar{f} et B sont la fréquence centrale et la bande passante du filtre, τ est le retard de groupe et φ est le déphasage à la fréquence centrale.

Ainsi, chaque filtre dépend de quatre paramètres qui diffèrent d'un récepteur à l'autre. Leurs valeurs numériques sont données dans la Table 2.

3. Cadre théorique

En raison des dimensions limitées d'un dispositif interférométrique et du nombre fini d'antennes élémentaires utilisées, les fréquences spatiales échantillonnées à l'aide d'un interféromètre imageur sont bien évidemment limitées à une région du domaine de Fourier : la couverture fréquentielle expérimentale H . Dans le cas de SMOS, le dispositif en forme de Y avec des antennes élémentaires régulièrement disposées le long de chaque bras, conduit à des fréquences spatiales \mathbf{u}_{kl} situées aux nœuds d'un maillage hexagonal et confinées dans une couverture fréquentielle en forme d'étoile [7]. L'approche traitement d'image sur des grilles d'échantillonnage hexagonales est donc ici la manière naturelle d'aborder le problème de la synthèse d'ouverture [8]. Cependant, d'autres géométries peuvent conduire à des formes de H différentes, sur des grilles cartésiennes, par exemple.

3.1. Grilles d'échantillonnage

Soit \mathcal{H} le réseau périodique qui étend la couverture fréquentielle expérimentale H ,

$$\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = q_1 \mathbf{u}^{(1)} + q_2 \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{q} = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (9)$$

Les deux vecteurs de translation $\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{u}^{(2)}$ sont tels que $\|\mathbf{u}^{(1)}\| = \|\mathbf{u}^{(2)}\| = \delta u = d/\lambda_o$, où d est l'espacement élémentaire entre les antennes et λ_o est la longueur d'onde d'observation. Dans la suite de cet article, n sera un entier, plus exactement une puissance de 2, tel que H sera entièrement contenu dans la cellule élémentaire du réseau périodique :

$$n\mathcal{H} = \left\{ \mathbf{U}_{\mathbf{Q}} = Q_1 \mathbf{U}^{(1)} + Q_2 \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (10)$$

Les deux vecteurs de base de ce réseau périodique, $\mathbf{U}^{(1)} = n\mathbf{u}^{(1)}$ et $\mathbf{U}^{(2)} = n\mathbf{u}^{(2)}$, sont ici tels que

$$\|\mathbf{U}^{(1)}\| = \|\mathbf{U}^{(2)}\| = \Delta u = n \delta u.$$

Les équations (9) et (10) sont illustrées sur la Figure 2 dans le cas de SMOS où une cellule élémentaire de $n\mathcal{H}$ est échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H} . Les aires $\sigma_{\mathbf{u}}$ et $\sigma_{\mathbf{U}}$ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}(n\mathcal{H})$ sont respectivement égales à $(\delta u)^2 \sqrt{3}/2$ et $(\Delta u)^2 \sqrt{3}/2$.

Soit maintenant \mathcal{H}^* le réseau réciproque de \mathcal{H} :

$$\mathcal{H}^* = \left\{ \xi_{\mathbf{p}} = P_1 \xi^{(1)} + P_2 \xi^{(2)}, \mathbf{p} = (P_1, P_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (11)$$

Les deux vecteurs de translation $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ satisfont les relations d'orthogonalité suivantes : $\xi^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \xi^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = 1$ et $\xi^{(1)} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \xi^{(2)} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = 0$. Ils sont tels que $\|\xi^{(1)}\| = \|\xi^{(2)}\| = \Delta \xi$, où $\Delta \xi$ joue le rôle dual de celui de δu . Comme précédemment, la cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H}^*/n , le réseau réciproque de $n\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^*/n = \left\{ \xi_{\mathbf{p}} = p_1 \xi^{(1)} + p_2 \xi^{(2)}, \mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (12)$$

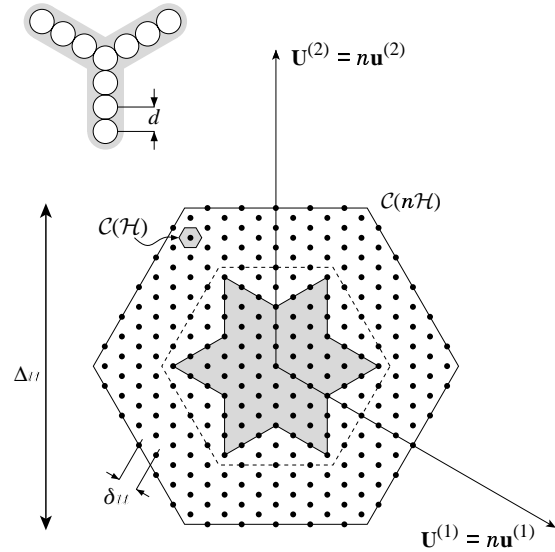


Figure 2. Cellule élémentaire de $n\mathcal{H}$ échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H} , et couverture fréquentielle H d'un dispositif interférométrique en forme de Y avec 3 antennes équidistantes par bras. Ici n est égal à 16 de sorte que H est entièrement contenu dans la cellule élémentaire de $n\mathcal{H}$: $\delta u = d/\lambda_o$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine de Fourier et $\Delta u = n \delta u$ est l'étendue spectrale. L'hexagone en trait pointillé est le plus petit hexagone contenant H : la plus petite valeur de n est donc ici égale à 10

Les vecteurs $\xi^{(1)} = \Xi^{(1)}/n$ et $\xi^{(2)} = \Xi^{(2)}/n$ satisfont ici les relations d'orthogonalité: $\xi^{(1)} \cdot \mathbf{U}^{(1)} = \xi^{(2)} \cdot \mathbf{U}^{(2)} = 1$ et $\xi^{(1)} \cdot \mathbf{U}^{(2)} = \xi^{(2)} \cdot \mathbf{U}^{(1)} = 0$. Ils sont tels que $\|\xi^{(1)}\| = \|\xi^{(2)}\| = \delta\xi = \Delta\xi/n$, où $\delta\xi$ joue le rôle dual de Δu .

Les équations (11) et (12) sont illustrées sur la figure 3 à nouveau dans le cas de SMOS où une cellule élémentaire de \mathcal{H}^* est échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H}^*/n . Les aires σ_ξ et σ_Ξ des cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/n)$ et $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ sont respectivement égales à $(\delta\xi)^2\sqrt{3}/2$ et $(\Delta\xi)^2\sqrt{3}/2$.

Signalons enfin qu'une propriété générale des réseaux réciproques (le produit des aires des cellules élémentaires de deux réseaux réciproques est égal à 1) montre dans ce contexte de la synthèse d'ouverture sur des maillages hexagonaux que les pas d'échantillonnage δu et $\delta\xi$, ainsi que les étendues spectrale Δu et spatiale $\Delta\xi$, sont reliés par la relation:

$$\Delta\xi \delta u = \Delta u \delta\xi = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ avec } \begin{cases} \Delta\xi = n \delta\xi, \\ \Delta u = n \delta u. \end{cases} \quad (13)$$

Cette remarque est vraie pour tous les types de réseaux réciproques. Dans le cas bien connu de maillages cartésiens, (13) se réduit à $\Delta\xi \delta u = \Delta u \delta\xi = 1$ avec $\Delta u = n \delta u$ et $\Delta\xi = n \delta\xi$.

Soient enfin les deux ensembles de n^2 entiers

$$\mathbb{G}(n\mathcal{H}) = \{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{u}_q \in \mathcal{C}(n\mathcal{H})\}, \quad (14)$$

et

$$\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^2 : \xi_p \in \mathcal{C}(\mathcal{H}^*)\}. \quad (15)$$

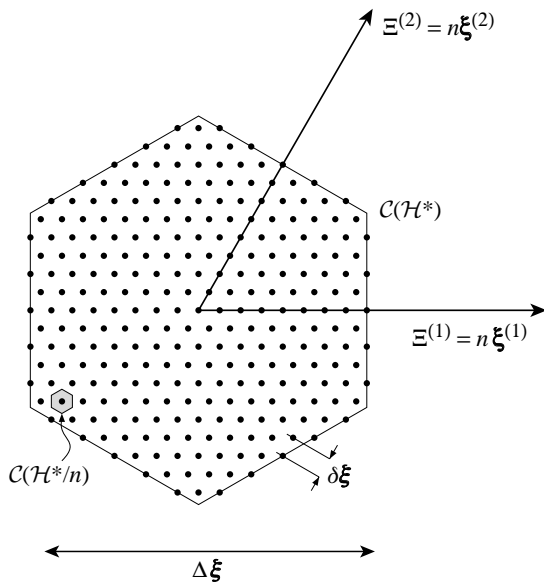


Figure 3. Cellule élémentaire de \mathcal{H}^* échantillonnée aux nœuds de \mathcal{H}^*/n . Ici encore n est égal à 16, $\delta\xi$ est le pas d'échantillonnage dans le domaine spatial et $\Delta\xi = n\delta\xi$ est l'étendue du champ synthétisé

Puisque $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*)$ est échantillonné aux nœuds de $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/n)$, $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ n'est rien d'autre que la grille représentée sur la Figure 3 dans le cas de SMOS. De même, $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$ est la grille duale représentée sur la Figure 2. Ici l'entier n a été choisi comme une puissance de 2 pour des raisons de commodité numérique, mais cette condition n'est pas obligatoire pourvu que les conditions d'échantillonnage de Shannon soient toujours respectées.

3.2. Espaces de travail

L'espace de travail objet E est l'espace de dimension finie dans lequel l'opération de synthèse de Fourier est numériquement effectuée [9][10]. Il s'agit plus précisément ici de l'espace des fonctions T qui prennent leurs valeurs $T_p \equiv T(\xi_p)$ aux nœuds ξ_p de la grille $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$. L'espace de travail dual \widehat{E} est l'image de E par l'opérateur de transformation de Fourier discrète. En clair, c'est l'espace des transformées de Fourier \widehat{T} qui prennent leurs valeurs $\widehat{T}_q \equiv \widehat{T}(\mathbf{u}_q)$ aux nœuds \mathbf{u}_q de la grille $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$. Les fonctions T à bande passante limitée dans H jouent un rôle bien particulier en synthèse de Fourier [10]. Elles appartiennent à un sous-espace \mathcal{E} de E , dont l'image de Fourier est un sous-espace $\widehat{\mathcal{E}}$ de \widehat{E} . Les fonctions \widehat{T} prennent leurs valeurs $\widehat{T}_q \equiv \widehat{T}(\mathbf{u}_q)$ aux seuls nœuds \mathbf{u}_q inclus dans H .

Les fréquences spatiales \mathbf{u}_{kl} associées aux couples d'antennes A_k et A_l dans les relations (1) et (2) appartiennent à une liste finie \mathcal{L} dans le domaine de Fourier: $\mathcal{L} = \{\mathbf{u}_{kl} : 1 \leq k, l \leq \ell\}$, où ℓ est le nombre d'antennes élémentaires du dispositif interférométrique. Cette liste peut comporter des éléments redondants dans la mesure où deux couples d'antennes différents peuvent engendrer la même fréquence spatiale. En accord avec le caractère hermitien des relations (1) et (2), l'espace des données est ici l'espace des fonctions à valeurs complexes V qui prennent leurs valeurs $V_{kl} \equiv V(\mathbf{u}_{kl})$ aux fréquences (redondantes) de la liste \mathcal{L} .

3.3. Opérateurs clefs

Soit \mathbf{U} l'opérateur de transformation de Fourier discrète sur les grilles duales $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$ et $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$:

$$\mathbf{U} : E \longrightarrow \widehat{E} \\ T \longmapsto \mathbf{U}T = \widehat{T}$$

avec:

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{G}(n\mathcal{H}), \widehat{T}_q = \sigma_\xi \sum_{\mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)} T_p e^{-2j\pi \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{n}}. \quad (16)$$

Dans le cas de grilles d'échantillonnage hexagonales, il est possible d'effectuer ces calculs à l'aide des algorithmes standards de transformées de Fourier rapides, développés et optimisés pour des grilles cartésiennes [8], ce qui n'impose pas de mettre en œuvre un algorithme spécifique à ces grilles [11].

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

Soit maintenant \mathbf{Z} l'opérateur de « zero-padding » au-delà de la couverture fréquentielle H :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} : \widehat{\mathcal{E}} &\longrightarrow \widehat{E} \\ \widehat{T} &\longmapsto \mathbf{Z}\widehat{T} = \widehat{T} \end{aligned}$$

avec :

$$\forall \mathbf{q} \in \mathbb{G}(n\mathcal{H}), \widehat{T}_{\mathbf{q}} = \begin{cases} \widehat{T}_{\mathbf{q}} & \text{si } \mathbf{u}_{\mathbf{q}} \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (17)$$

L'action de l'opérateur adjoint \mathbf{Z}^* , qui consiste à ne conserver que les composantes $\widehat{T}_{\mathbf{q}}$ de \widehat{T} à l'intérieur de H , est donc telle que $\mathbf{Z}^*\mathbf{Z} = \mathbf{I}_{\widehat{\mathcal{E}}}$. En conséquence, l'opérateur

$$\mathbf{P}_H = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*\mathbf{U} \quad (18)$$

est le projecteur de E dans \mathcal{E} puisqu'il est facile de montrer que $\mathbf{P}_H^* = \mathbf{P}_H$ et $\mathbf{P}_H^2 = \mathbf{P}_H$.

Enfin, l'opérateur de modélisation de l'instrument est l'opérateur \mathbf{G} de l'espace de travail objet dans l'espace des données qui traduit la relation de base (2) entre les visibilité complexes et la distribution de la température de brillance de la scène observée :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} : E &\longrightarrow F \\ T &\longmapsto \mathbf{G}T = V \end{aligned}$$

avec, $\forall \mathbf{u}_{kl} \in \mathcal{L}$:

$$V_{kl} = \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \overline{F_{l,\mathbf{p}}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} T_{\mathbf{p}} \widetilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}. \quad (19)$$

L'action de l'adjoint de \mathbf{G} est établie dans l'Annexe A.

Pour des raisons de mise en œuvre numérique, l'intégrale (2) est ici remplacée par une somme discrète sur les n^2 cellules élémentaires $\mathcal{C}(\mathcal{H}^*/n)$ de la grille $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta\xi$. Ici encore, n est choisi de sorte que les conditions d'échantillonnage de Shannon soient respectées, mais aussi de manière à évaluer numériquement

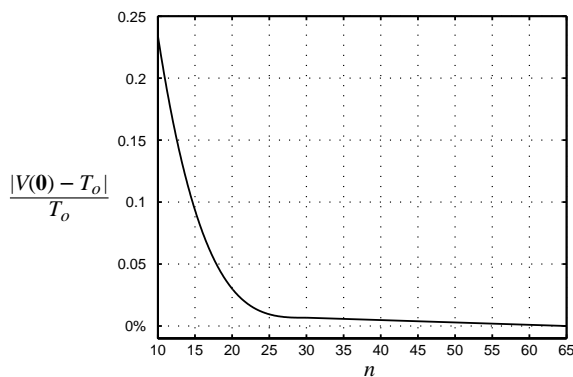


Figure 4. Variations de l'erreur relative sur le calcul de $V(\mathbf{0})$ avec n

l'intégrale avec une précision suffisante. À ce sujet, la Figure 4 montre les variations de l'erreur relative sur le calcul de $V(\mathbf{0})$ en fonction de n . Comme la température de brillance de la scène observée est ici constante et égale à $T_o/4\pi$ dans tout l'espace, la valeur théorique de $V(\mathbf{0})$ est parfaitement connue et égale à T_o [5]. On observe qu'au niveau d'échantillonnage le plus faible, $n = 10$, cette erreur est de l'ordre de 0.25 %, mais qu'elle décroît fortement lorsque n augmente pour atteindre des valeurs beaucoup plus faibles compatibles avec la précision requise. Ce comportement n'est pas surprenant puisque l'intégration numérique est ici obtenue avec la méthode des trapèzes. Tout ceci ne doit pas être ignoré puisqu'il faut garder présent à l'esprit que la relation (19) est la relation que l'on cherche à inverser pour retrouver la distribution de température de brillance d'une scène à partir des visibilité complexes expérimentales.

4. Problème inverse

Le problème auquel on s'intéresse est celui de retrouver la distribution de température de brillance d'une scène observée à partir d'un nombre fini de visibilité complexes plus ou moins bruitées. Comme le *problème direct* est modélisé par l'intégrale (2), le *problème inverse* associé ne présente pas de solution évidente.

4.1. Apodisation

Comme cela a été souligné précédemment, les radiomètres à synthèse d'ouverture sont des instruments à bande passante limitée dans la couverture fréquentielle H . Ainsi, même dans le cas d'un instrument idéal, la version discrète de (1) n'est pas une transformation de Fourier discrète entre les visibilité complexes $V(\mathbf{u}_{kl})$ et la température de brillance « modifiée » $\widetilde{T}(\xi) = |F(\xi)|^2 T(\xi) / \sqrt{1 - \|\xi\|^2}$. Dans une telle situation, l'action de \mathbf{G} sur T est celle de $\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$ sur \widetilde{T} , pas celle de \mathbf{U} . Il n'est donc pas possible de restaurer à l'aide d'une simple transformée de Fourier inverse discrète la distribution de température \widetilde{T} à son plus haut niveau de résolution puisque ses composantes de Fourier au-delà de H sont définitivement perdues. En conséquence, seule une version lissée de \widetilde{T} , et donc de T , peut être restaurée à l'aide de l'opérateur $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}$ qui n'est pas l'inverse de $\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$. En effet, $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*\mathbf{U}$ n'est pas l'opérateur identité de E mais le projecteur \mathbf{P}_H de E sur \mathcal{E} . Enfin, lorsque l'instrument est modélisé par la relation (2), \widetilde{T} n'est pas défini puisque les gains des antennes sont tous différents. De plus, dans ce cas l'action de l'opérateur $\mathbf{U}^*\mathbf{Z}$ sur des visibilité complexes demande au préalable de moyenniser les mesures redondantes, ou d'en choisir une parmi elles. Quelque soit la manière de faire, une telle approche ne peut bien évidemment pas prendre en compte correctement les imperfections des composants de l'instrument, pas plus que les effets de décorrélation.

Le but poursuivi est donc de restaurer la température de brillance T au niveau de résolution évoqué précédemment à partir des

visibilités complexes mesurées à l'aide d'un instrument modélisé par la relation (2), c'est-à-dire avec des antennes et des récepteurs différents et en présence d'effets de corrélation. Bien évidemment, cela doit être fait en tenant compte de toutes les informations disponibles, sans moyenniser les mesures redondantes. En raison de la coupure fréquentielle abrupte imposée par la couverture fréquentielle H de l'instrument, il est nécessaire d'amortir les composantes de Fourier de la température de brillance restaurée avec une fenêtre d'apodisation W afin de diminuer les phénomènes de Gibbs [8]. Cette distribution de température ne sera donc pas comparée à la température de brillance T à son plus haut niveau de résolution, mais à une version lissée au niveau de résolution de l'instrument et apodisée par la même fenêtre W . L'objectif est donc de restaurer la distribution de température T_w définie par la relation de convolution $T_w = W * T$. Dans les simulations numériques présentées dans la dernière partie de cet article, la fenêtre de Hanning de la Figure 5 a été utilisée. Bien évidemment, le choix peut se porter sur une autre fenêtre mais le but n'est pas ici d'engager une discussion sur le compromis à faire entre résolution spatiale et sensibilité radiométrique [8]. En effet, puisque la fenêtre d'apodisation est la même pour toutes les simulations, la comparaison des méthodes proposées sera significative du point de vue de leurs performances relatives.

4.2. Analyse du problème

La dimension de l'espace de travail objet E est plus élevée que celle de l'espace des données F , puisque le nombre n^2 de cellules élémentaires dans la grille spatiale $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*)\delta\xi$ est

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

supérieur au nombre $\ell(\ell - 1)$ de fréquences (redondantes) dans la liste \mathcal{L} . Le système linéaire

$$\mathbf{G}T = V \quad (20)$$

est donc sous déterminé. Lorsque V est dans l'image de \mathbf{G} , il en résulte une multitude de solutions pour T et conformément à la définition donnée par Hadamard [12], ce problème inverse est donc mal posé.

Une première approche [13] consiste à déterminer, parmi les solutions de (20), la solution de norme minimale en résolvant le problème d'optimisation à vec contrainte :

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (21)$$

La solution de (21) est bien évidemment $T_r = \mathbf{G}^+ V$, où \mathbf{G}^+ est l'inverse généralisé de More-Penrose de \mathbf{G} . Conformément à l'objectif établi précédemment, la solution apodisée avec une fenêtre W s'écrit alors :

$$T_{rw} = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} \mathbf{G}^+ V. \quad (22)$$

Dans cette expression, $\widehat{\mathbf{W}}$ est la matrice diagonale dont les éléments non nuls sont les coefficients de \widehat{W} . Cependant, d'un point de vue numérique, on constate que cette solution est très sensible au bruit et aux erreurs de modélisation. Par ailleurs, cette approche ne peut pas être envisagée lorsque la matrice \mathbf{G} est mal conditionnée ou de rang déficient, ce qui exclut de calculer \mathbf{G}^+ en utilisant l'expression classique $\mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}$

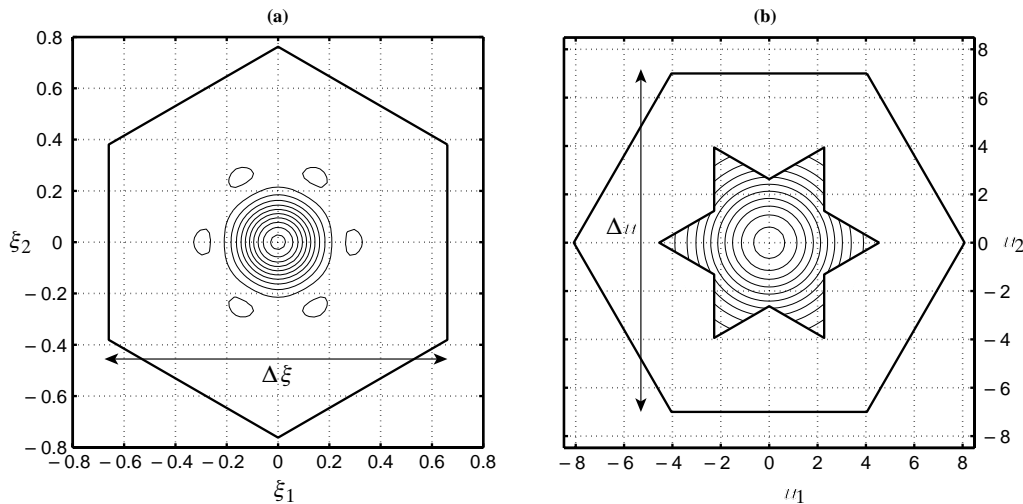


Figure 5. Fenêtre de Hanning $\widehat{W}(\mathbf{u})$ dans le domaine de Fourier (b) avec $\Delta u = 16 \delta u = 14$ et réponse impulsionnelle associée $W(\xi)/W(\mathbf{0})$ dans le domaine spatial (a) avec $\Delta\xi = 16 \delta\xi \simeq 1.32$ (les courbes de niveau varient de 0 à 1 par pas de 0.1).

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

puisque l'inverse de \mathbf{dGG}^* n'est pas toujours défini. Cette situation se rencontre dès lors que des lignes de base redondantes sont associées à des éléments instrumentaux identiques, sinon numériquement très proches.

4.3. Régularisation mathématique

Dans le cas d'un instrument idéal, l'opérateur \mathbf{G} n'est pas de rang plein en raison des lignes de base redondantes. Plus précisément, $\ell(\ell - 1)$ étant le nombre de fréquences spatiales (redondantes) dans la liste \mathcal{L} , le rang de \mathbf{G} est égal au nombre de fréquences spatiales dans la couverture fréquentielle, c'est-à-dire $\ell(\ell - 1) - m$ où m est le nombre de redondances dans \mathcal{L} . Par contre, dans le cas d'un instrument réel, avec des antennes et des récepteurs différents, l'opérateur \mathbf{G} est de rang plein malgré les lignes de base redondantes puisque ces dernières sont associées à des éléments instrumentaux différents. Une seconde approche consiste donc à régulariser le problème (20) en substituant à \mathbf{G} l'opérateur \mathbf{G}_m de rang $\ell(\ell - 1) - m$ le plus proche de \mathbf{G} au sens quadratique. Ceci peut être fait en effectuant une décomposition en valeurs singulières tronquée de \mathbf{G} [14] dans laquelle on écarte les m plus petites valeurs singulières [12] (de sorte que $\mathbf{G}_0 \equiv \mathbf{G}$). Ainsi, si on désigne par μ_i les $\ell(\ell - 1)$ valeurs singulières de \mathbf{G} rangées par ordre croissant et par \mathbf{v}_i et \mathbf{u}_i les vecteurs singuliers associés à gauche et à droite, on a alors :

$$\mathbf{G}_m = \sum_{i=m+1}^{\ell(\ell-1)} \mu_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad m \geq 0. \quad (23)$$

La solution de moindre norme ainsi régularisée est $T_r = \mathbf{G}_m^+ V$, où \mathbf{G}_m^+ est l'inverse généralisé de More-Penrose de \mathbf{G}_m . La solution apodisée avec une fenêtre W s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} \mathbf{G}_m^+ V. \quad (24)$$

L'impact des valeurs singulières écartées sur la stabilité de la solution en présence de bruit ou d'erreurs de modélisation sera illustré dans la dernière partie de cet article, et le lien sera fait avec l'approche proposée plus loin en relation avec le nombre de degrés de liberté du problème (20). Du point de vue de la propagation des erreurs, l'analyse standard au premier ordre [14] fournit les bornes suivantes

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \frac{\mu_{\ell(\ell-1)}}{\mu_{m+1}} \frac{\|T\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}, \quad (25)$$

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \left(\frac{\mu_{\ell(\ell-1)}}{\mu_{m+1}} + \frac{\mu_{\ell(\ell-1)}^2}{\mu_{m+1}^2} \frac{\|V - \mathbf{G}T_r\|_F}{\|\mathbf{G}T_r\|_F} \right) \frac{\|T_r\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta \mathbf{G}\|_2}{\|\mathbf{G}\|_2}, \quad (26)$$

dans lesquelles ΔV et $\Delta \mathbf{G}$ représentent respectivement des perturbations sur le second membre V et sur la matrice \mathbf{G} de (20)

et où $\Delta \mathcal{T}_{rw} = \mathcal{T}_{rw} - \mathcal{T}_w$ est l'erreur de reconstruction résultant de ces perturbations. Dans le cas particulier où la perturbation ΔV est Gaussienne, on a l'égalité suivante

$$\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|V\|_F}{\sqrt{\sigma_u} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{U} \mathbf{G}_m^+\|_{fro}}{\sqrt{\ell(\ell-1)}} \frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|V\|_F}, \quad (27)$$

où $\|\cdot\|_{fro}$ est la norme de Frobenius et où $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique. Les inégalités (25) et (26) reflètent la sensibilité à des perturbations mais comme nous le verrons dans la dernière partie ces bornes sont souvent très pessimistes. En revanche, l'égalité (27) établie dans l'Annexe B représente la propagation moyenne de ces erreurs.

4.4. Régularisation physique

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture étant des instruments à bande passante limitée, le problème (20) est mal posé en raison d'une perte d'information au-delà de la couverture fréquentielle H . Il est donc nécessaire d'introduire une information *a priori* pour compenser cette perte irréversible. Une telle information ne peut bien évidemment pas être issue des données elles-mêmes, mais doit au contraire exprimer des caractéristiques physiques de la solution et/ou de l'instrument. Dans ce contexte, il est donc naturel de prendre en compte la limite de résolution angulaire de l'instrument et de rechercher une solution dans le sous-espace \mathcal{E} des fonctions à bande passante limitée dans H puisque l'instrument utilisé ici ne transmet aucune information en dehors de la couverture fréquentielle [9]. La solution ainsi obtenue est la solution du problème d'optimisation avec contrainte

$$\begin{cases} \min_{T \in \mathcal{E}} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \\ (\mathbf{I}_E - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (28)$$

où \mathbf{P}_H est le projecteur de E sur \mathcal{E} . Si on désigne par \widehat{T} les composantes de Fourier de T à l'intérieur de H , la contrainte peut s'exprimer sous la forme $\mathbf{U}T = \mathbf{Z}\widehat{T}$. En reportant l'expression de $T = \mathbf{U}^* \mathbf{Z}\widehat{T}$ dans le critère quadratique de (28) on obtient alors le problème d'optimisation équivalent

$$\min_{\widehat{T} \in \mathcal{E}} \|V - \mathbf{A}\widehat{T}\|_F^2, \quad \text{avec } \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{U}^* \mathbf{Z}. \quad (29)$$

La fonction qui réalise le minimum de (29) est aussi la solution unique de l'équation normale $\mathbf{A}^* \mathbf{A}\widehat{T} = \mathbf{A}^* V$. Ce problème peut être résolu en faisant appel à une méthode itérative ou bien de manière directe puisque la matrice carrée $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$ n'est pas singulière [15]. La solution de l'équation normale s'écrit donc $\widehat{T}_r = \mathbf{A}^+ V$, où $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$ est l'inverse généralisé de

More-Penrose de \mathbf{A} , et la solution apodisée par une fenêtre W s'écrit alors :

$$\mathcal{T}_{rw} = \mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^+ V. \quad (30)$$

En ce qui concerne la propagation des erreurs, l'analyse standard au premier ordre [14] donne ici les approximations suivantes

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \frac{\sigma_{\ell(\ell-1)-m}}{\sigma_1} \frac{\|T\|_E}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}, \quad (31)$$

$$\frac{\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \leq \left(\frac{\sigma_{\ell(\ell-1)-m}}{\sigma_1} + \frac{\sigma_{\ell(\ell-1)-m}^2}{\sigma_1^2} \frac{\|V - \mathbf{A} \widehat{\mathcal{T}}_r\|_F}{\|\mathbf{A} \widehat{\mathcal{T}}_r\|_F} \right) \frac{\|\mathcal{T}_r\|_{\mathcal{E}}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} \frac{\|\Delta \mathbf{G}\|_2}{\|\mathbf{G}\|_2}, \quad (32)$$

où les σ_i sont les $\ell(\ell-1) - m$ valeurs singulières de \mathbf{A} rangées par ordre croissant. Conformément à la relation établie dans l'Annexe B, la propagation moyenne de ces erreurs est ici gouvernée par l'égalité :

$$\frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|V\|_F}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}} \frac{\|\mathbf{U}^* \widehat{\mathbf{W}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^+ \|_{fro}}{\sqrt{\ell(\ell-1)}} \frac{\sqrt{\mathbb{E}[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|V\|_F}. \quad (33)$$

5. Simulations numériques et résultats

Les simulations numériques ont été réalisées pour un réseau en forme de Y équipé de 3 antennes équidistantes par bras auxquelles il faut ajouter une antenne centrale, pour arriver à un nombre total d'antennes et de récepteurs $\ell = 10$. L'espacement d entre les antennes adjacentes a été fixé à $0.875 \lambda_o$. Le nombre de visibilité complexes simultanément fournies par cet instrument est donc égal à $\ell(\ell-1) = 90$ (45 en tenant compte du caractère hermitien de la relation (2)), alors qu'il n'y a que $\ell(\ell-1) - m = 72$ fréquences spatiales dans la couverture fréquentielle H en forme d'étoile (36 en tenant compte du caractère hermitien de la transformée de Fourier). La dimension des grilles d'échantillonnage $\mathbb{G}(\mathcal{H}^*) \delta \xi$ et $\mathbb{G}(n\mathcal{H}) \delta u$ a été fixée à $n = 16$, de sorte que l'espace E est isomorphe à \mathbb{R}^{256} .

Une seule mesure du degré de cohérence spatiale à l'espacement nul, $V(\mathbf{0})$, a été incluse dans l'opérateur de modélisation (19). L'espace dual $\widehat{\mathcal{E}}$ et l'espace des données F sont donc respectivement isomorphes à \mathbb{C}^{36+1} et \mathbb{C}^{45+1} . Pour des raisons de mise en œuvre numérique, il est préférable de travailler dans les espaces réels sous-jacents \mathbb{R}^{73} et \mathbb{R}^{91} . La taille de la matrice réelle \mathbf{G} est donc 91×256 , alors que celle de la matrice réelle \mathbf{A} est seulement 91×73 .

La distribution des températures de brillance T de la scène test choisie pour les simulations est montrée sur la Figure 6a à son plus haut niveau de résolution et sur la Figure 6b au niveau de résolution de l'instrument et amortie par la fenêtre de Hanning W de la Figure 5. Cette dernière, définie par la relation de convolution $\mathcal{T}_w = W \star T$, est la carte de température de brillance que l'on cherchera à restaurer à partir des visibilité complexes de T .

La Figure 7 illustre le caractère bande passante limitée dans la couverture fréquentielle H des radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture. En effet, comme indiqué dans la section 4.1, une reconstruction à l'aide du simple opérateur $\mathbf{U}^* \mathbf{Z}$ ne permet de restaurer qu'une version lissée de T , même dans le cas d'un instrument idéal. Dans le cas contraire, il apparaît clairement qu'une telle approche n'est pas acceptable si les antennes et les récepteurs sont tous différents.

Les visibilité complexes ont été simulées avec la distribution T de la Figure 6a pour un instrument modélisé par la relation (2) avec les paramètres des Tables 1 et 2. Dans tous les cas envisagés, les solutions \mathcal{T}_{rw} de moindre norme (22) et à bande passante limitée (30) ont été comparées et la qualité de la reconstruction a été évaluée par rapport à l'objectif \mathcal{T}_w de la Figure 6b. Dans une première étape, aucun bruit n'a été introduit sur les mesures interférométriques simulées. Comme on pouvait s'y attendre, il n'y a pas de différence notable entre les deux reconstructions (22) et (30), représentées sur la Figure 8, et la solution cherchée \mathcal{T}_w de la Figure 6b : l'erreur quadratique moyenne $\sigma_{\Delta T}^0$ est de l'ordre de 1.010 K pour la solution de moindre norme et 0.937 K pour la solution à bande passante limitée. Cette erreur est due aux hautes fréquences de T qui ont contribué aux visibilité complexes V , alors que les deux reconstructions sont effectuées à la résolution de l'instrument et amorties par la fenêtre de Hanning. Cette erreur est donc une erreur systématique qui dépend de la scène T , de la fenêtre d'apodisation W et bien évidemment de la limite de résolution de l'instrument.

Dans un second temps, un bruit radiométrique a été rajouté aux mesures simulées. Plus précisément, pour chaque ligne de base \mathbf{d}_{kl} un bruit radiométrique gaussien ΔV d'écart type $\sigma_{\Delta V} = 0.08$ K a été rajouté aux parties réelles et imaginaires des visibilité complexes $V(\mathbf{u}_{kl})$. Les cartes de température de brillance reconstruites sont représentées sur la Figure 9. Comme on pouvait s'y attendre, la solution de moindre norme est plus sensible au bruit radiométrique que la solution à bande passante limitée : l'erreur quadratique moyenne $\sigma_{\Delta T}$ est de l'ordre de 2.118 K pour la solution de moindre norme (22) et 0.938 K pour la solution à bande passante limitée (30). En tenant compte de l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$, l'erreur quadratique moyenne $\sqrt{(\sigma_{\Delta T})^2 - (\sigma_{\Delta T}^0)^2}$ qui résulte de la propagation de ΔV est donc de l'ordre de 1.862 K pour (22) et seulement 0.043 K pour (30). En conséquence, le facteur d'amplification du bruit radiométrique est environ 45 fois plus élevé dans le premier cas, 23.3 K/K, que dans le second, 0.54 K/K.

La sensibilité des processus de reconstruction aux erreurs de modélisation a été étudiée de la même manière en choisissant, par exemple, de perturber le diagramme de rayonnement des

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

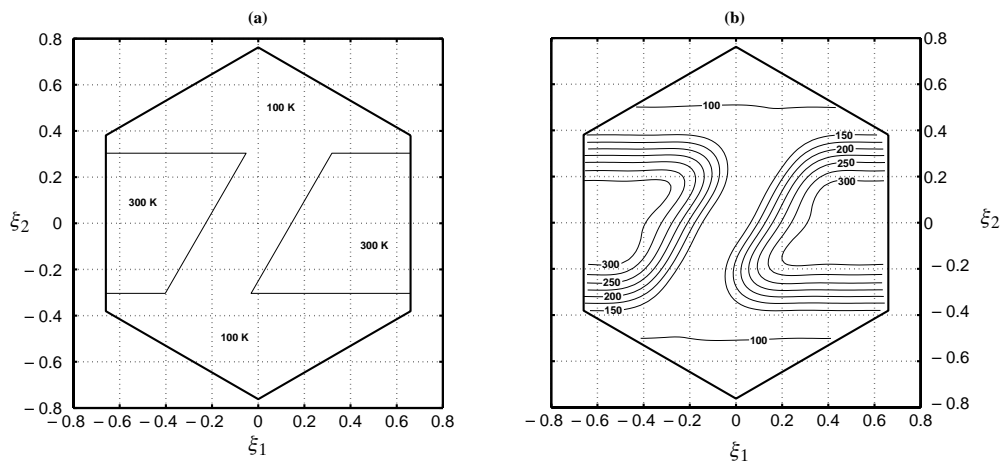


Figure 6. – Cartes de la température de brillance de la scène test (a) à son plus haut niveau de résolution T et (b) au niveau de résolution de l'instrument et amortie par la fenêtre de Hanning $T_w = W \star T$

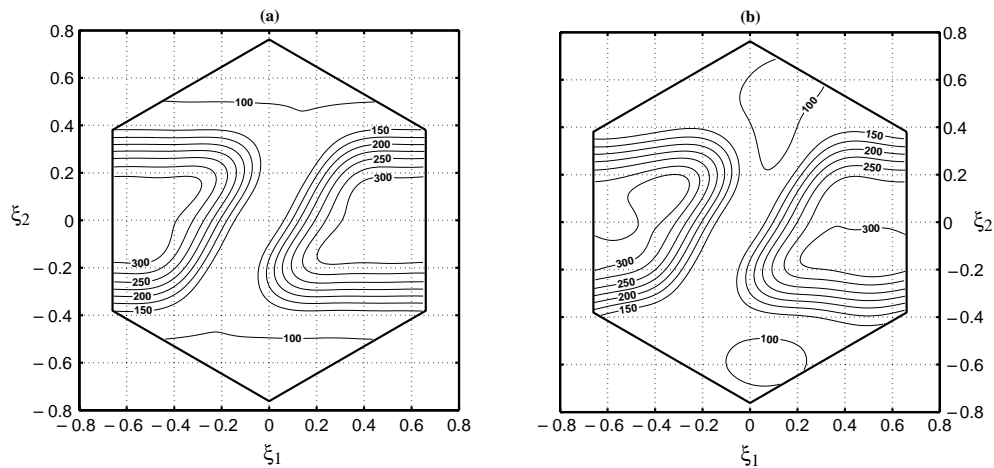


Figure 7. Cartes de température de brillance reconstruites avec une simple transformée de Fourier inverse des visibilités complexes pour (a) un instrument idéal et (b) un instrument avec des antennes et des récepteurs différents

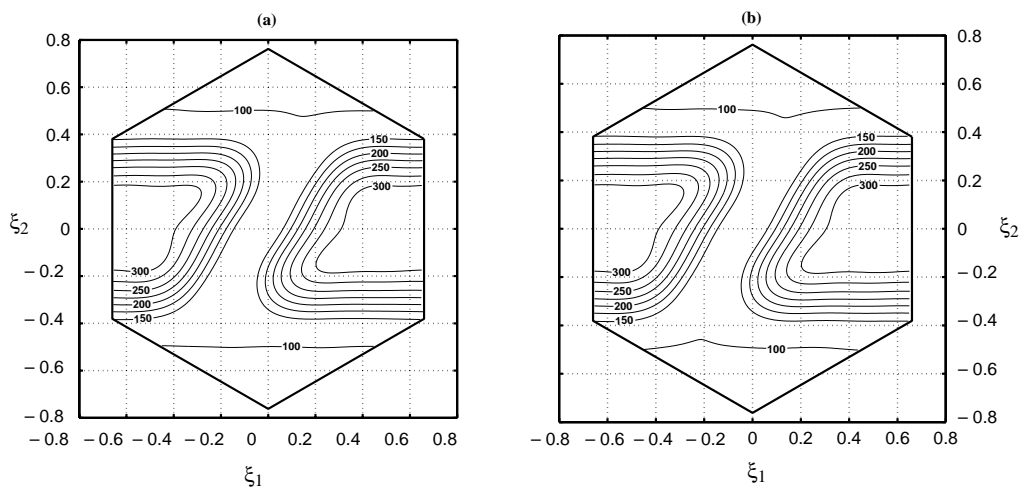


Figure 8. Cartes de température de brillance reconstruites avec (a) l'approche norme minimale et (b) l'approche bande passante limitée

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

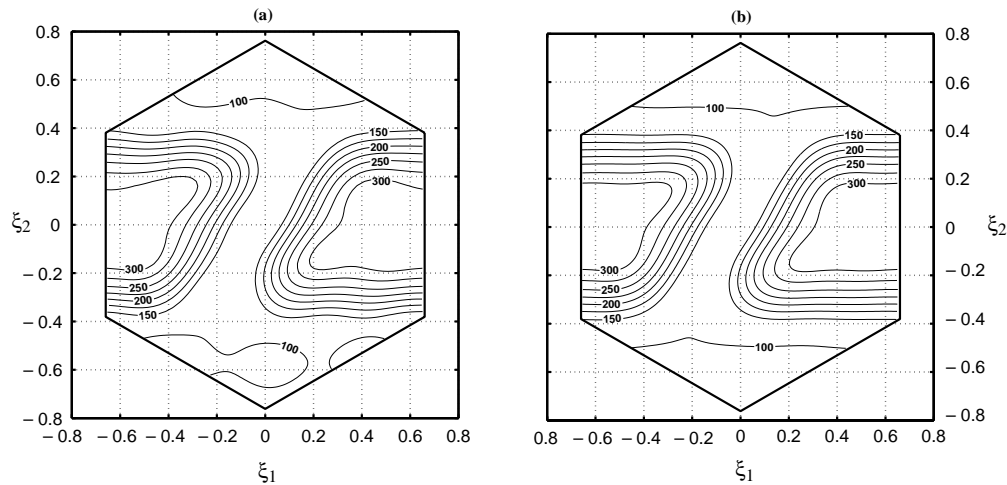


Figure 9. Cartes de température de brillance reconstruites en présence de bruit radiométrique avec (a) l'approche norme minimale et (b) l'approche bande passante limitée

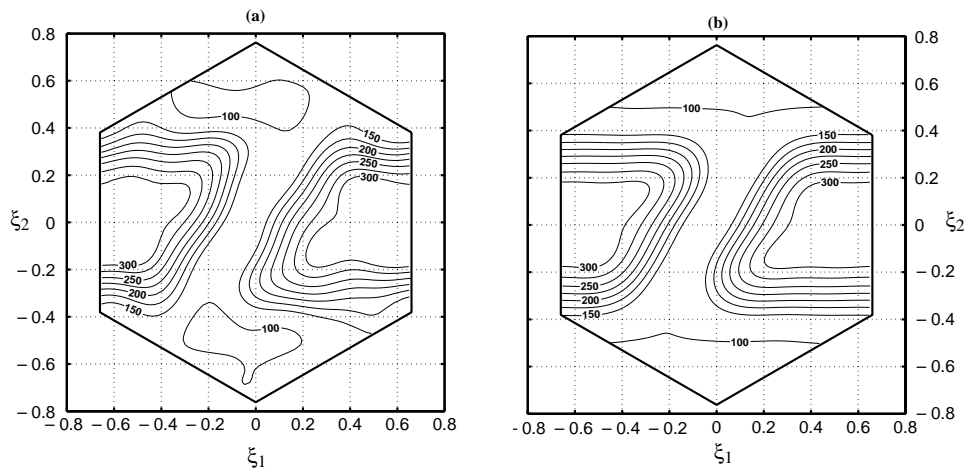


Figure 10. Cartes de température de brillance reconstruites en présence d'erreurs de modélisation avec (a) l'approche norme minimale et (b) l'approche bande passante limitée

antennes. Plus exactement, pour chaque antenne une erreur aléatoire de $\pm 0.2^\circ$ sur les largeurs à mi-hauteur θ_1 et θ_2 du diagramme de rayonnement a été introduite. Les cartes de température de brillance reconstruites sont représentées sur la Figure 10. Comme on pouvait s'y attendre encore, la solution de moindre norme est plus sensible aux erreurs que la solution à bande passante limitée: l'erreur quadratique moyenne $\sigma_{\Delta T}$ est ici de l'ordre de 11.80 K pour la solution de moindre norme (22) et 0.955 K pour la solution à bande passante limitée (30). En tenant compte de nouveau de la contribution systématique $\sigma_{\Delta T}^0$, l'erreur quadratique moyenne qui résulte de la propagation de cette perturbation de l'instrument est donc de l'ordre de 11.76 K pour (22) et seulement 0.184 K pour (30). En conséquence, le

facteur d'amplification de cette erreur de modélisation sur le diagramme de rayonnement des antennes est environ 65 fois plus élevé dans le premier cas, 58.8 K $^\circ$, que dans le second, 0.92 K $^\circ$.

Du point de vue de l'algèbre linéaire, la propagation du bruit radiométrique et des erreurs de modélisation précédentes est illustrée sur les Figures 11 et 12 où des simulations ont été effectuées avec 10 000 tirages aléatoires de $\sigma_{\Delta V}$ dans l'intervalle $[0, 0.2 \text{ K}]$ et 10 000 erreurs sur les largeurs à mi-hauteur θ_1 et θ_2 dans l'intervalle $[-1^\circ, 1^\circ]$. La situation est bien meilleure que celle gouvernée par les inégalités de l'analyse standard au premier ordre. En effet, il s'avère que dans le cas du bruit radiométrique le facteur moyen d'amplification des erreurs est de

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

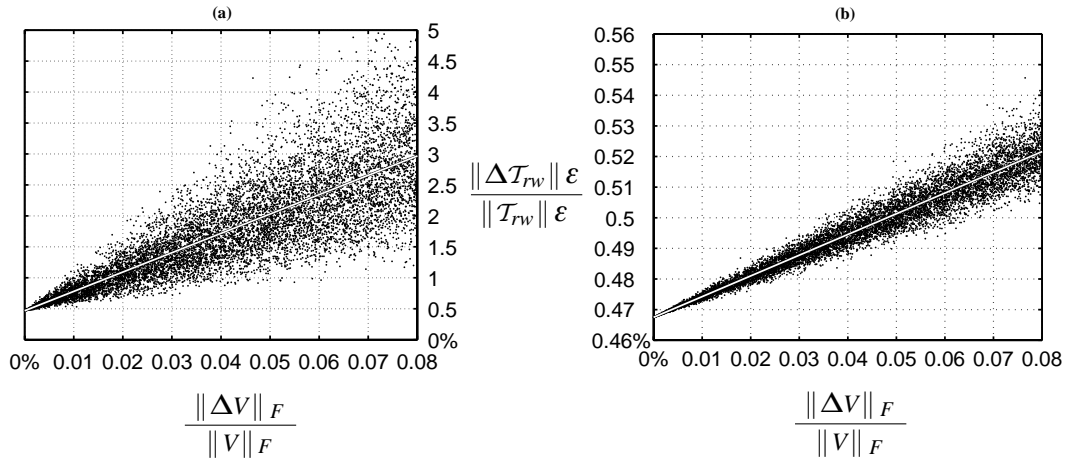


Figure 11. Propagation du bruit radiométrique au cours du processus de reconstruction de (a) la solution de moindre norme et de (b) la solution à bande passante limitée

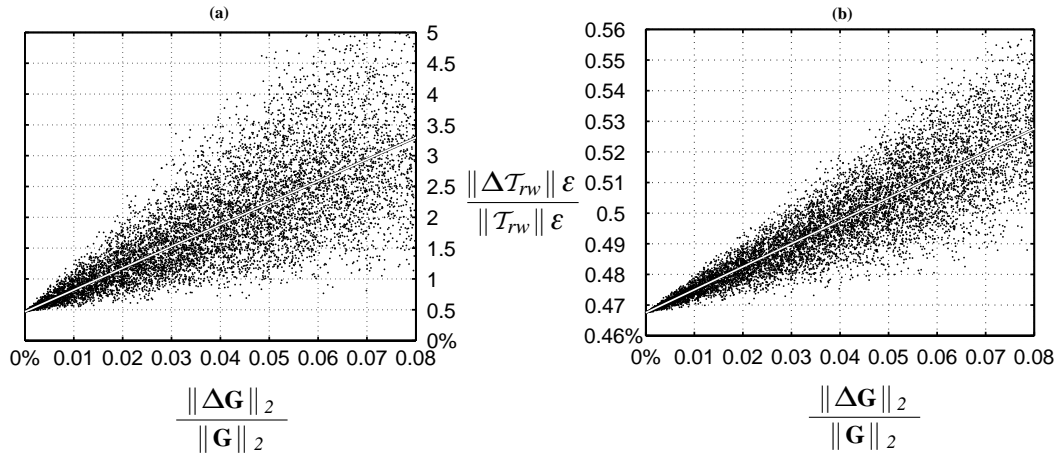


Figure 12. Propagation des erreurs de modélisation au cours du processus de reconstruction de (a) la solution de moindre norme et de (b) la solution à bande passante limitée

l'ordre de 30 pour la solution de moindre norme et de 0.66 pour la solution à bande passante limitée, ce qui est en parfait accord avec les facteurs moyens des égalités (27) et (33) dont les valeurs sont ici égales à 32 et 0.68, alors que les bornes supérieures données par les relations (25) et (31) sont respectivement 7 000 et 4.34. De même, dans le cas des erreurs de modélisation, le facteur moyen d'amplification des erreurs est de l'ordre de 35 pour la solution de moindre norme et de 0.75 pour la solution à bande passante limitée, alors que les bornes supérieures données par les relations (26) et (32) sont respectivement 7 000 et 4.29.

Cette différence importante dans le comportement des solutions (22) et (30) vis-à-vis de la propagation des erreurs n'est pas sur-

prenante et le rôle joué par les plus petites valeurs singulières de \mathbf{G} n'est pas étranger à cette amplification importante du bruit et des erreurs de modélisation. À ce sujet, les spectres des valeurs singulières de \mathbf{G} et de \mathbf{A} sont représentés sur la Figure 13. Comme on pouvait s'y attendre, les 33 valeurs singulières σ_i de \mathbf{A} sont regroupées dans un intervalle relativement étroit, ce qui n'est pas le cas de \mathbf{G} pour lequel les valeurs singulières μ_i les plus faibles, dont le nombre est exactement égal au nombre de lignes de base redondantes, sont dans un intervalle plus large et bien disjoint du précédent.

Ce type de distribution des valeurs singulières est souvent rencontré dans les problèmes inverses en imagerie [12]. Il suggère de filtrer les plus petites valeurs singulières à l'aide d'une

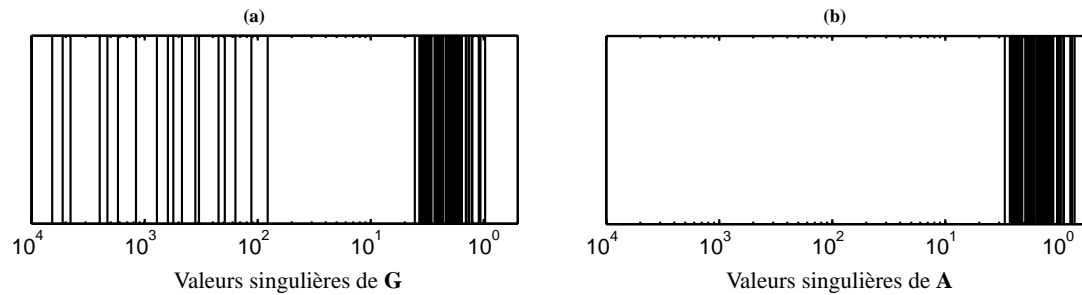


Figure 13. Valeurs singulières des matrices (a) \mathbf{G} 91×256 et (b) \mathbf{A} 91×73

décomposition en valeurs singulières tronquée [14]. Le lien entre cette régularisation « mathématique » et la régularisation « physique » associée à la notion de bande passante limitée est ici clairement illustré. Le nombre de degrés de liberté du problème (20) étant égal à 73 (le nombre de fréquences dans la couverture fréquentielle H) on retrouve en effet dans le spectre de \mathbf{G} un premier groupe de 73 valeurs qui jouent le même rôle que les 73 valeurs singulières de \mathbf{A} et un second groupe de 18 valeurs, plus petites, associées aux 18 lignes de base redondantes et à l'origine de la borne supérieure du facteur d'amplification voisine de 7 000. Les simulations ont donc été reconduites dans les mêmes conditions que celles des Figures 9a, 10a et 11a, mais cette fois-ci pour la solution de moindre norme (24) avec $m = 18$. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats obtenus sont très proches, sinon identiques, à ceux des Figures 9b, 10b et 11b. Par ailleurs, l'erreur systématique $\sigma_{\Delta T}^0$ reste inchangée et est toujours de l'ordre de 1.010 K contre 0.937 K pour la solution à bande passante limitée.

Le choix du bruit et des erreurs de modélisation peut bien évidemment être critiqué, cependant leur niveau est de l'ordre de ce qui est attendu dans la pratique. Les diagrammes des antennes et les filtres des récepteurs ne sont pas ceux de l'instrument spatial SMOS, toutefois leur allure n'est pas très éloignée de la forme finale et la disparité des paramètres des Tables 1 et 2 est volontairement plus importante qu'elle ne sera dans la pratique. Il ne faut pas perdre de vue que l'objectif principal n'est pas de faire ici une revue détaillée des erreurs, mais d'illustrer avant tout leur propagation et de vérifier la stabilité des processus de reconstruction mis en œuvre pour un instrument dont les récepteurs et les antennes ne sont pas tous identiques.

6. Conclusions

La restauration de la distribution de température de brillance d'une scène à partir de mesures interférométriques fournies par

un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture a été étudiée. Il a été montré que le problème inverse correspondant est mal posé et doit être régularisé afin d'obtenir une solution unique et stable. Il a aussi été vérifié que la discrétisation d'un tel problème conduit à la résolution numérique d'un système linéaire mal conditionné. Ainsi, le bruit radiométrique ou les erreurs de modélisation affectant les données interférométriques peuvent être transmis à la distribution de température de brillance reconstruite avec un facteur d'amplification important.

Les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture étant des instruments à bande passante limitée, le problème inverse a été reformulé en prenant en compte cette spécificité. Plus précisément, le principe de la régularisation adoptée consiste à reconstruire une distribution de température au niveau de résolution de l'instrument. Ce principe de régularisation, dont le sens physique est directement lié à des caractéristiques propres à l'instrument, a été comparé à celui d'une régularisation dont l'argumentation est essentiellement mathématique. Le lien entre les deux approches a été établi en relation avec le nombre de degrés de liberté du problème inverse.

Du point de vue de la mise en œuvre informatique, le problème a été analysé sans faire référence à un algorithme en particulier : la solution peut être obtenue en faisant appel à une méthode itérative ou bien de manière directe. Les dimensions du problème ont été réduites au nombre minimum d'inconnues (ou de degrés de liberté) tout en prenant en compte, au sens des moindres carrés, l'ensemble des données interférométriques sans moyenner les éventuelles mesures redondantes. Enfin, la stabilité des processus de reconstruction étudiés a été illustrée à l'aide de simulations numériques conduites dans le cadre du démonstrateur de la mission spatiale SMOS de l'Agence Spatiale Européenne. Si la propagation du bruit ou des erreurs de modélisation est sensiblement la même, la solution de moindre norme présente une erreur systématique plus importante que la solution à bande passante limitée.

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

Annexe A

Nous établissons ici l'expression de l'adjoint de l'opérateur de modélisation de l'instrument défini par la relation (19). D'après la définition des produits scalaires dans E et dans F

$$(T^{(1)} | T^{(2)})_E \equiv \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} \bar{T}_{\mathbf{p}}^{(1)} T_{\mathbf{p}}^{(2)},$$

et

$$(V^{(1)} | V^{(2)})_F \equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl}^{(1)} V_{kl}^{(2)},$$

il vient :

$$\begin{aligned} (V | \mathbf{G}T)_F &\equiv \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} (\mathbf{G}T)_{kl} \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \bar{V}_{kl} \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \\ &= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} T_{\mathbf{p}} \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{F_{k,\mathbf{p}} \bar{F}_{l,\mathbf{p}} \bar{V}_{kl}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}} \\ &= \sigma_{\xi} \sum_{\mathbf{p} \in (\mathcal{H}^*)} (\bar{\mathbf{G}}^* V)_{\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}} \equiv (\mathbf{G}^* V | T)_E. \end{aligned}$$

D'où la définition de \mathbf{G}^* :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* : F &\longrightarrow E \\ V &\longmapsto \mathbf{G}^* V = T \end{aligned}$$

avec, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{G}(\mathcal{H}^*)$:

$$T_{\mathbf{p}} = \sigma_{\mathbf{u}} \sum_{k,l=1}^{\ell} \frac{\bar{F}_{k,\mathbf{p}} F_{l,\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - \|\xi_{\mathbf{p}}\|^2}} V_{kl} \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}{f_o} \right) e^{+2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi_{\mathbf{p}}}.$$

Annexe B

Nous établissons ici l'expression de la propagation moyenne du bruit radiométrique au cours des différents processus de reconstruction. Les vecteurs aléatoires ΔV et $\Delta \mathcal{T}_{rw}$ sont liés par la relation linéaire $\Delta \mathcal{T}_{rw} = \mathbf{R} \Delta V$, où \mathbf{R} est l'opérateur de reconstruction explicité dans les relations (22), (24) ou (30). Nous supposons que le bruit radiométrique est gaussien, de valeur moyenne nulle et de variance $\sigma_{\Delta V}^2$. Il vient alors d'après la définition du produit scalaire dans \mathcal{E} , semblable à celle du produit scalaire dans E :

$$\begin{aligned} E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2] &\equiv \sigma_{\xi} E[\text{trace}(\Delta \mathcal{T}_{rw} \overline{\Delta \mathcal{T}_{rw}}^T)] = \sigma_{\xi} \text{trace}(E[\Delta \mathcal{T}_{rw} \overline{\Delta \mathcal{T}_{rw}}^T]) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(E[\mathbf{R} \Delta V \overline{\Delta V}^T \mathbf{R}^*]) = \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbf{R} E[\Delta V \overline{\Delta V}^T] \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \text{trace}(\mathbf{R} \sigma_{\Delta V}^2 \mathbf{I}_F \mathbf{R}^*) = \sigma_{\xi} \sigma_{\Delta V}^2 \text{trace}(\mathbf{R} \mathbf{R}^*) \\ &= \sigma_{\xi} \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_{fro}^2. \end{aligned}$$

De même, d'après la définition du produit scalaire dans F :

$$\begin{aligned} E[\|\Delta V\|_F^2] &\equiv \sigma_{\mathbf{u}} E[\text{trace}(\Delta V \overline{\Delta V}^T)] \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \text{trace}(E[\Delta V \overline{\Delta V}^T]) \\ &= \sigma_{\mathbf{u}} \ell(\ell - 1) \sigma_{\Delta V}^2. \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2} &= \frac{\sigma_{\xi}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2} \sigma_{\Delta V}^2 \|\mathbf{R}\|_{fro}^2 \\ &= \frac{\sigma_{\xi}}{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2} \frac{\|\mathbf{R}\|_{fro}^2}{\ell(\ell - 1)} E[\|\Delta V\|_F^2]. \end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{E[\|\Delta \mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}^2]}}{\|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}} &= \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|\mathbf{R}\|_{fro}}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}} \frac{\sqrt{E[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|\mathbf{R}\|_{fro}} \\ &= \frac{\sqrt{\sigma_{\xi}} \|\mathbf{R}\|_{fro}}{\sqrt{\sigma_{\mathbf{u}} \|\mathcal{T}_{rw}\|_{\mathcal{E}}}} \frac{\sqrt{E[\|\Delta V\|_F^2]}}{\|\mathbf{R}\|_{fro}} \frac{\sqrt{\ell(\ell - 1)}}{\sqrt{\ell(\ell - 1)}}, \end{aligned}$$

et les relations (27) et (33) qui en découlent en substituant à \mathbf{R} son expression complète.

Références

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] A.R. Thompson, G.W. Swenson and J.W. Moran, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons Inc., 1st ed., 1986.
- [3] F.T. Ulaby, R.K. Moore and A.K. Fung, *Microwave Remote Sensing, Active and Passive: Fundamentals and Radiometry (Vol. 1)*, Artech House Inc., 1st ed., 1981.
- [4] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, 7th ed., 1999.
- [5] C.S. Ruf, C.T. Swift, A.B. Tanner and D.M. LeVine, *Interferometric synthetic aperture radiometry for the remote sensing of the Earth*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 26(5), pp. 597-611, 1988.
- [6] F. Bayle, J.-P. Wigneron, Y.H. Kerr, P. Waldteufel, E. Anterrieu, J.-C. Orlhac, A. Chanzy, O. Marloie, M. Bernardini, S. Sobjaerg, J.-C. Calvet, J.-M. Goutoule and N. Skou, *Two-dimensional synthetic aperture images over a land surface scene*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(3), pp. 710-714, 2002.
- [7] M. Martin-Neira, Y. Menard, J.-M. Goutoule and U. Kraft, *MIRAS, a two-dimensional aperture synthesis radiometer*, Proc. of IGARSS'94 (Pasadena, California, USA), pp. 1323-1325, 1994.
- [8] E. Anterrieu, P. Waldteufel and A. Lannes, *Apodization functions for 2D hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(12), pp. 2531-2542, 2002.
- [9] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, *Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques; Part I: regularization principle*, Journal of Modern Optics, 41(8), pp. 1537-1574, 1994.

Problème inverse en télédétection par imagerie à synthèse d'ouverture

- [10] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, *Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques; Part II: technical developments and applications*, Journal of Modern Optics, 43(1), pp. 105-138, 1996.
- [11] R.M. Mersereau, *The processing of hexagonally sampled two-dimensional signals*, Proc. IEEE, 67(6), pp. 930-949, 1979.
- [12] M. Bertero and P. Boccacci, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, Institute of Physics Publishing, 1st ed., 1998.
- [13] A.B. Tanner and C.T. Swift, *Calibration of a synthetic aperture radio-meter*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 31(1), pp. 257-267, 1993.
- [14] C. Hansen, *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1st ed., 1998.
- [15] A. Bjorck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1st ed., 1996.



Éric Anterrieu

Eric Anterrieu est né à Brive (Corrèze) en 1965. Il est diplômé de l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse où il obtient en 1988 un titre d'ingénieur et un DEA en « physique du solide ». Après un DEA en « astronomie et astrophysique » de l'université Paul Sabatier (Toulouse III) obtenu en 1989, il soutient en 1992 à l'Observatoire Midi-Pyrénées (OMP) une thèse sur l'algorithme de reconstruction d'image en synthèse d'ouverture multi-pupillaire. Depuis 1993 il est ingénieur de recherche au CNRS, d'abord au Laboratoire d'Astrophysique de l'OMP, puis au sein de l'équipe « Signal et Image » du CERFACS où il poursuit ses activités de recherche sur la synthèse d'ouverture, notamment dans le cadre de la mission SMOS pour laquelle il est membre du comité scientifique auprès de l'Agence Spatiale Européenne.



Bruno Picard

Bruno Picard est né à Romorantin-Lanthenay (Loir-et-cher) en 1977. Il est diplômé de l'université Denis Diderot (Paris VII) où il obtient en 2001 un DEA sur les « méthodes physiques en télédétection ». Il termine actuellement au CERFACS une thèse sur la résolution des problèmes inverses en imagerie micro-onde passive par synthèse d'ouverture dans le cadre du projet SMOS de l'Agence Spatiale Européenne.



Serge Gratton

Serge Gratton est né à Créhange (Moselle) en 1971. Il est diplômé de l'École Nationale Supérieure d'Électrotechnique, d'Électronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications (ENSEEIH) de Toulouse où il obtient un titre d'ingénieur et un DEA en « informatique fondamentale et parallélisme » de l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT) en 1994. Il soutient en 1998 au CERFACS une thèse sur la fiabilité des calculs sur ordinateur. Il a ensuite travaillé pendant 3 ans au Centre National d'Études Spatiales (CNES) de Toulouse sur des problèmes d'estimation de paramètres non-linéaires. Il occupe maintenant une position de chercheur senior dans l'équipe « Algorithmes Parallèles » du CERFACS où il développe une recherche sur les thèmes de l'assimilation de données et de la résolution de problèmes de moindres carrés.

Annexe B

Actes de Congrès

B.1 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2002

Improved windowing functions for Y-shaped synthetic aperture imaging radiometers

BRUNO PICARD⁽¹⁾, ERIC ANTERRIEU⁽¹⁾, GÉRARD CAUDAL⁽²⁾ and PHILIPPE WALDTEUFEL⁽³⁾

⁽¹⁾CERFACS-URA 1875

Signal and Image Processing Group

42 avenue Gaspard Coriolis - 31057 Toulouse cedex 01 - France

⁽²⁾IPSL - CETP

10-12 avenue de l'Europe - 78140 Vélizy - France

⁽³⁾IPSL - SERVICE D'AÉRONOMIE DU CNRS

B.P. 3, 91371 Verrières le Buisson cedex - France

Abstract— It is now well established that Synthetic Aperture Imaging Radiometers (SAIR) promise to be powerful sensors for high-resolution observations of the Earth at low microwave frequencies. Within this context, the European Space Agency (ESA) is currently developing the SMOS mission.

The Y-shaped array selected for SMOS is fitted with equally spaced antennae and leads to a natural hexagonal sampling of the Fourier plane. This article deals with the improvement of the apodization function to be applied to the complex visibilities. The aim of this function is to reduce the Gibbs phenomenon produced by the finite extent of the star-shaped frequency coverage and the resulting sharp frequency cut-off.

Keywords— Apodization, synthetic aperture, interferometry, radiometry.

I. INTRODUCTION

The SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) space mission [1] is currently undergoing phase B studies in the framework of the Earth Explorer Program of the European Space Agency. It will be the first attempt to apply, to remote sensing of the Earth surface, the concept of imaging interferometric radiometry by aperture synthesis [2] [3], initially developed for radio astronomy [4]. In the case of SMOS, the complex visibilities are obtained from raw data inside a star-shaped window (see Fig. 1) over an hexagonally sampled grid. The apodization function to be applied should thus be optimized so as to ensure the best spatial resolution at ground level, according to criteria relevant for extended sources typical of Earth surface scenes.

Previous work [5] has introduced a large number of windows and compared them thanks to criteria relevant for remote sensing of the Earth surface. However, these functions were expressed as functions of a single radial variable and non zeros values still remained at the troughs of the star. This present paper investigates further and intends to introduce an additional angular variable, so that the support of these functions sticks to the shape of the frequency coverage. Computation of various factors of merit shows an improvement in the reduction of radiometric leakage with a small degradation of the spatial resolution.

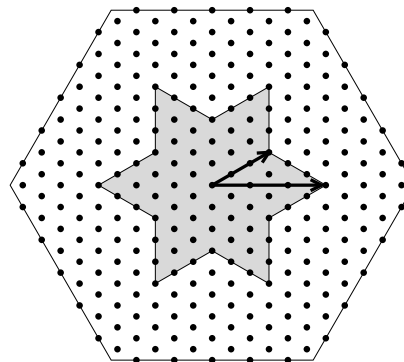


Fig. 1. The star-shaped frequency coverage over the hexagonal grid. The distance from the central frequency to the edge of the star is $\sqrt{3}L$, where L is the length of each arm of the Y-shaped instrument. The distance from the central frequency to the trough of the star is L .

II. APODIZATION WINDOWS

Traditional one-dimensional apodization functions have been adapted to the two-dimensional case by using a single radial variable $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ [5]. More precisely, these functions depend on the reduced variable ρ/ρ_{max} , where ρ_{max} is the radius of the natural support of such centro-symmetric functions. In order to constrain the windows to reach zero at the edges of the star, one solution is to fix the value of ρ_{max} to the radius of the circumscribed circle to the experimental frequency. In the special case of SMOS, the radius of this circle is equal to $\sqrt{3}L$, where L is the length of each arm of the Y-shaped array. However, as shown in Fig. 2 with the Hanning window, a sharp frequency cut-off still remain for the intermediate frequencies in the troughs of the star-shaped frequency coverage.

To overcome this problem, while taking benefit of previous work, and to reduce the resulting Gibbs oscillations, another solution is to constrain the natural support of the windows to stick to the shape of the frequency coverage. Thus, the windows reach zero not only at the edges of the star, but all along the boundaries of the frequency coverage.

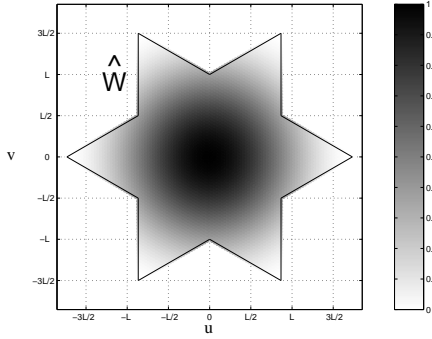


Fig. 2. Hanning window in the Fourier domain for $\rho_{max} = \sqrt{3}L$. In this case, the window is constrained to reach zero only at the edges of the star, while the value at the troughs is closed to 38% of the maximum value.

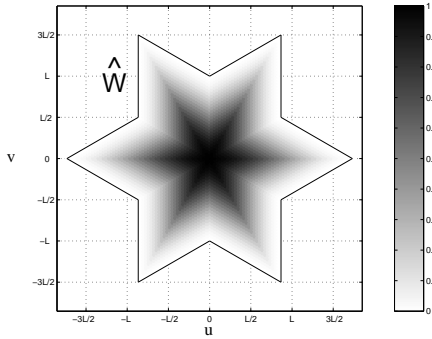


Fig. 3. Hanning window in the Fourier domain for ρ_{max} varying with θ according to (1). In this case, the window is constrained to reach zero all along the boundaries of the star.

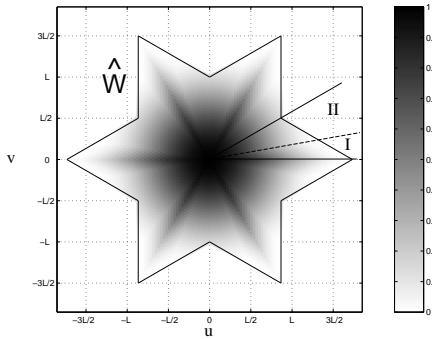


Fig. 4. Hanning window in the Fourier domain for $\theta_{lim} = 10^\circ$ (dashed line): an intermediate position between the situation shown in Fig. 2, where $\theta_{lim} = 0^\circ$, and that in Fig 3, where $\theta_{lim} = 30^\circ$. In region I, ρ_{max} is varying with θ whereas it is constant and equal to $\rho_{max}(\theta_{lim})$ in region II. The value at the troughs is closed to 15.5% of the maximum value.

As a consequence, ρ_{max} should no longer stay constant: an angular dependence has to be given to ρ_{max} in order to allow it to vary with the shape of the frequency coverage. In the special case of SMOS, this dependence is given by the relation:

$$\rho_{max}(\theta) = \frac{\sqrt{3}L}{\sqrt{3}\sin(\theta) + \cos(\theta)} \quad \theta \in [0, 30^\circ] \quad (1)$$

The transition from the situation shown in Fig. 2 to that illustrated in Fig. 3 with the Hanning window, could be progressive and continuous by introducing a limit angle θ_{lim} which separate each edges of the star in two regions, according to the twelve-fold symmetry of the star: for $\theta \in [0, \theta_{lim}]$, ρ_{max} varies with θ according to (1) so that the window reach zero all along the boundaries in this region, while it is fixed to $\rho_{max}(\theta_{lim})$ for $\theta \in [\theta_{lim}, 30]$. As illustrated in Fig. 4, leaving θ_{lim} to vary between 0 and 30° causes the transition to be continuous.

III. RESULTS

Among all the factors of merit used to characterize the spatial properties of the Fourier transform W of a windowing function \widehat{W} [6] [7], two deserve attention since they have a physical meaning in the framework of remote sensing by aperture synthesis: the full-width at half-maximum (FWHM) and the highest side-lobe level (HSL). The SACR has been recently introduced [5] since it is a good indicator of the radiometric leakage. To illustrate the improvement provided by (1), the variations of the values of these factors of merit are shown in Fig. 5 for the Hanning window.

Recalling that $\theta_{lim} = 0^\circ$ means no optimization in the shape of the support, a degradation of the spatial resolution (FWHM increases with θ_{lim}) can be observed as well as a minimum value for the HSL and the SACR. In this example, the optimal reduction of the HSL for $\theta_{lim} = 6^\circ$ is about 11%; at the same time, the SACR is decreased by 40% and the FWHM is degraded by about 9%. On the other hand, choosing an optimal reduction of the SACR, 65% for $\theta_{lim} = 12^\circ$, leads to decrease the HSL by 4% and to degrade the FWHM by 15%.

IV. CONCLUSION

An improvement of the windowing function for Y-shaped synthetic aperture imaging radiometer has been presented. Modifying the shape of the support of these functions from a circle to the shape of the frequency coverage, the radiometric leakage can be reduced. At an intermediate step of this transition, the HSL and the SACR reach lower values than initial ones whereas the FWHM has only increased of few percents. Other improvements are under studies.

This adaptation of the windows to the shape of the frequency coverage can naturally be adapted to the frequency coverage of an U-shaped SAIR such as the HUTRAD developed by the Laboratory of Space Technology of Helsinki University of Technology.

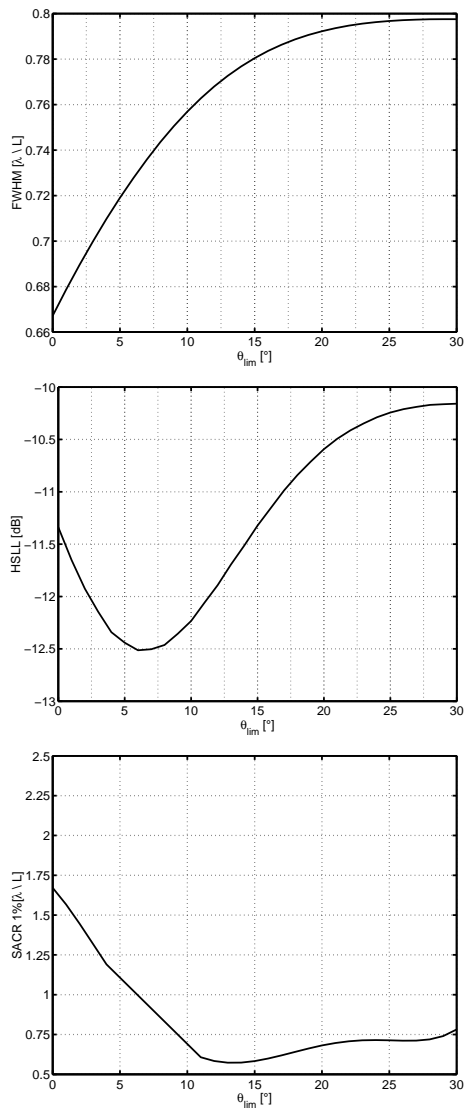


Fig. 5. Variations of FWHM (top), HSSL (middle) and SACR 1% (bottom) with θ_{lim} , for the Hanning window. For $\theta_{lim} = 0^\circ$, no optimization of the support is performed, while for $\theta_{lim} = 30^\circ$, the support of the window sticks to the star-shaped frequency coverage. An optimal improvement can be observed for the HSSL (-12.5 dB at $\theta_{lim} = 6^\circ$) and for the SACR (0.55 λ/L at $\theta_{lim} = 13^\circ$), whereas the FWHM increases with θ_{lim} .

REFERENCES

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] A. Lannes and E. Anterrieu, *Image reconstruction methods for remote sensing by aperture synthesis*, Proc. of the IGARSS'94 (Pasadena, California, USA), pp. 2892-2903, 1994.
- [3] M. Martin-Neira, Y. Menard, J.-M. Goutoule and U. Kraft, *MI-RAS, a two-dimensional aperture synthesis radiometer*, Proc. of the IGARSS'94 (Pasadena, California, USA), pp. 1323-1325, 1994.
- [4] A.R. Thompson, G.W. Swenson and J.W. Moran, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons Inc., 1st Edition (534 pp), 1986.
- [5] E. Anterrieu, P. Waldteufel and A. Lannes *Apodization functions for 2D hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers*, Submitted to IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2002.
- [6] F.J. Harris, *On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform*, Proc. IEEE, 66(1), pp. 51-83, 1978.
- [7] N.C. Geçkinli and D. Yavuz, *Some novel windows and a concise tutorial comparison of window families*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 26(6), pp. 501-507, 1978.

B.2 Colloque GRETSI, Traitement Signal et Image 2003

Reconstruction d'image pour un radiomètre à synthèse d'ouverture : application à la mission spatiale SMOS

Bruno PICARD et Eric ANTERRIEU

CERFACS-URA 1875
 Equipe Signal et Image
 42, avenue Gaspard Coriolis - 31057 Toulouse - France
 Bruno.Picard@cerfacs.fr

Résumé – La mission spatiale SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity, humidité des sols et salinité des océans) est la première tentative d'appliquer le concept d'imagerie par interférométrie à synthèse d'ouverture à la télédétection spatiale. Dans cet article, nous présentons des outils pour la synthèse d'ouverture sur des grilles hexagonales ainsi que deux approches régularisées du problème inverse à résoudre pour lesquelles la propagation des erreurs lors du processus de reconstruction des images est parfaitement contrôlée.

Abstract – The Soil Moisture and Ocean Salinity space mission (SMOS) is the first attempt to apply to remote sensing of the earth's surface from space, the concept of imaging interferometric radiometry by aperture synthesis. In this paper, we introduce tools adapted for synthesis aperture on hexagonal grids as well as two regularized approaches for the inverse problem to be solved that keep under control the propagation of errors during the image reconstruction process.

1 Introduction

L'objectif de la mission spatiale SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) est de mesurer, depuis l'espace, l'humidité des sols et la salinité des océans [1]. Elle s'inscrit dans le cadre du programme d'exploration de la Terre de l'Agence Spatiale Européenne. Il s'agit de concevoir, pour la première fois, un radiomètre à synthèse d'ouverture dédié à l'observation de la Terre en utilisant une technique d'imagerie par interférométrie passive micro-ondes (bande L), initialement développée en radio-astronomie.

L'instrument SMOS est composé d'une soixantaine d'antennes élémentaires régulièrement espacées le long des trois bras d'un réseau en forme de Y. Les mesures interférométriques expérimentales, appelées visibilité complexes, sont des mesures de la fonction de cohérence spatiale de la distribution de température de brillance de la scène observée pour certaines fréquences spatiales angulaires. En raison de la géométrie du réseau retenu pour SMOS, ces dernières se trouvent aux nœuds d'une grille d'échantillonnage hexagonale. De plus, comme l'instrument est à bande passante limitée dans la couverture fréquentielle expérimentale, ces fréquences sont ici limitées à une région en forme d'étoile du domaine de FOURIER.

Les travaux présentés ici portent donc d'abord sur le développement d'outils pour la synthèse d'ouverture sur des grilles d'échantillonnage hexagonales, ainsi que sur une régularisation du problème inverse à résoudre pour retrouver la distribution de température de brillance de la scène observée à partir de visibilité complexes expérimentales.

2 Échantillonnage périodique hexagonal

La disposition en Y des bras de l'instrument sur lesquels sont régulièrement positionnées les antennes conduit à un échantillonnage hexagonal de la fonction de cohérence spatiale à l'intérieur de la couverture fréquentielle H de l'instrument, ici en forme d'étoile, comme cela est montré sur la figure 1.

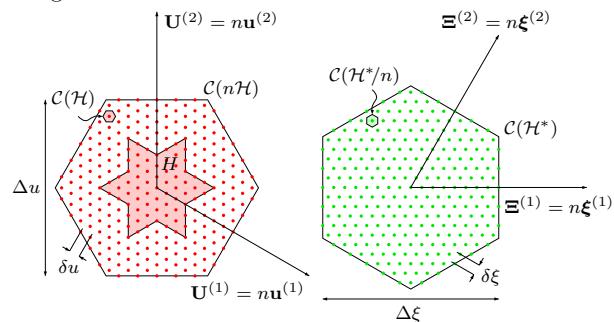


FIG. 1 – Cellules élémentaires des grilles d'échantillonnage hexagonales dans le domaine de FOURIER (en rouge) et dans le domaine spatial (en vert). Les pas d'échantillonnage δu et $\delta \xi$, ainsi que les étendues spatiale $\Delta \xi$ et fréquentielle Δu , sont reliés par la relation: $\Delta \xi \delta u = \Delta u \delta \xi = 2/\sqrt{3}$ avec $\Delta \xi = n \delta \xi$ et $\Delta u = n \delta u$, où n est un entier choisi de telle sorte que les conditions de SHANNON soient respectées. Ici l'instrument est équipé de 3 antennes par bras, de sorte que, pour des raisons d'informatique, $n = 16$.

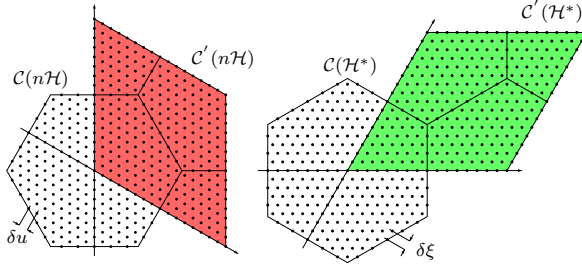


FIG. 2 – Extension périodique hexagonale des grilles de la figure 1 dans le domaine de FOURIER (à gauche) et dans le domaine spatiale (à droite). Le nombre de nœuds est le même dans les cellules hexagonales élémentaires $C(n\mathcal{H})$ et $C(\mathcal{H}^*)$ que dans les cellules $C'(n\mathcal{H})$ et $C'(\mathcal{H}^*)$ pour lesquelles il est naturel d'utiliser un algorithme de TFR développé pour des grilles cartésiennes.

L'outil de base de la synthèse d'ouverture est bien évidemment la Transformation de FOURIER Discrète (TFD). Comme cela est illustré sur la figure 2, une simple réorganisation des cellules élémentaires hexagonales permet d'utiliser les algorithmes standards de Transformation de FOURIER Rapide (TFR) développés et optimisés pour des grilles cartésiennes [2]. Le développement d'algorithmes dédiés aux grilles hexagonales n'est donc pas nécessaire.

En raison de la coupure fréquentielle abrupte introduite par la couverture fréquentielle expérimentale H , il est nécessaire d'introduire des fenêtres d'apodisation pour limiter les effets de cette discontinuité, et notamment les oscillations de GIBBS dans les images reconstruites.

Comme cela est illustré sur la figure 3, les fonctions d'apodisation traditionnelles à une dimension peuvent facilement être adaptées au cas hexagonal en introduisant une variable radiale [2]. Plus précisément, la valeur de la fenêtre \widehat{W} en un point (u, v) de la couverture fréquentielle expérimentale H dépend du rapport entre la distance $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ et le rayon ρ_{max} du cercle circonscrit à H , ici $\rho_{max} = \sqrt{3}L$ où L est la longueur des bras du réseau en Y.

Afin de juger objectivement du meilleur compromis entre la résolution spatiale (liée à la largeur à mi-hauteur de W , notée FWHM pour *Full Width at Half Maximum*) et la sensibilité radiométrique (liée à la hauteur des lobes secondaires de W , notée HSSL pour *Highest Side Lobe Le-*

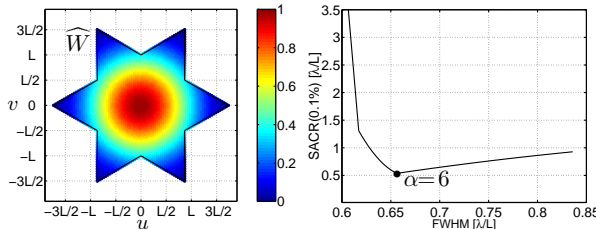


FIG. 3 – Généralisation à 2D des fenêtres d'apodisation. À gauche: la fenêtre de Kaiser pour $\alpha = 6$. Le paramètre ρ_{max} étant constant, notez les valeurs non nulles aux creux de l'étoile. À droite: pour $\alpha = 6$ le SACR est minimal, la sensibilité radiométrique est alors optimale compte tenu de la dégradation de la résolution spatiale.

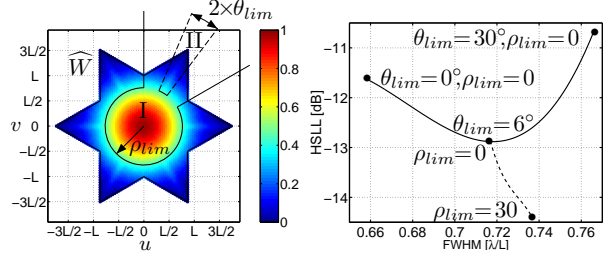


FIG. 4 – À gauche, \widehat{W} , la fenêtre d'apodisation de Kaiser ($\alpha = 6$). La forme de la fenêtre colle à la forme de H dans la zone II alors que ρ_{max} est constant dans la zone I. À droite, variation de la hauteur des lobes secondaires avec la largeur à mi-hauteur de W pour $0^\circ \leq \theta_{lim} \leq 30^\circ$ (ligne continue) et pour $0 \leq \rho_{lim} \leq 30$ (tirets). La hauteur des lobes secondaires peut être diminuée de -3 dB pour $\theta_{lim} = 6^\circ$ et $\rho_{lim} = 30$.

vel), deux qualités importantes pour la mission SMOS, nous définissons un nouveau facteur de mérite: la distance limite de plus courte approche (SACR pour *Side Area Contribution Radius*) [2]. Si l'on considère une scène composée pour moitié d'une température uniforme T_0 et pour l'autre d'une température uniforme T_1 , le SACR est la distance mesurée depuis la ligne de séparation au delà de laquelle l'amplitude des oscillations de GIBBS est inférieure à un pourcentage donné de l'amplitude de la discontinuité $|T_0 - T_1|$. Ce critère, introduit pour étudier des zones de fortes discontinuités (comme au bord des côtes), permet de faire apparaître un minimum lorsqu'il est confronté à la largeur à mi-hauteur de chaque fenêtre, ce qui n'est pas le cas avec les critères habituellement utilisés. Ainsi, la distance limite de plus courte approche des fenêtres de Kaiser qui dépendent d'un paramètre α , permet d'exhiber une valeur optimale $\alpha \approx 6$ pour laquelle la sensibilité radiométrique est optimale compte tenu de la dégradation de la résolution spatiale (voir Fig. 3).

Dans un second temps, nous faisons dépendre ρ_{max} d'une variable angulaire θ pour tenir compte de l'anisotropie de la couverture fréquentielle expérimentale H ici en forme d'étoile [3]. De plus, cette adaptation de \widehat{W} à la géométrie de H peut être circonscrite à une zone délimitée par une valeur angulaire limite θ_{lim} : pour $\theta_{lim} = 30^\circ$, la forme de \widehat{W} colle parfaitement à H , pour $\theta_{lim} = 0^\circ$ on retrouve la fenêtre obtenue avec $\rho_{max} = \sqrt{3}L$. Pour chaque fenêtre d'apodisation, il existe une valeur optimale de θ_{lim} pour laquelle la hauteur des lobes secondaires est minimale et inférieure à la valeur obtenue avec la seule valeur constante de $\rho_{max} = \sqrt{3}L$. Comme cela est montré sur la figure 4, pour $\theta_{lim} = 6^\circ$ (ligne continue), la sensibilité radiométrique est améliorée sans pour autant trop détériorer la résolution spatiale.

Dans un troisième temps, nous faisons dépendre ρ_{max} de la variable radiale ρ afin de délimiter un disque de rayon ρ_{lim} , centré sur la fréquence nulle, à l'intérieur duquel ρ_{max} est maintenu constant. L'adaptation de \widehat{W} à la forme de H à l'aide de la variable angulaire précédente n'est alors opérée que dans le secteur angulaire $\theta_{lim} \leq \theta \leq 30^\circ$ et pour $\rho \geq \rho_{lim}$. Ainsi, comme cela est montré sur la figure 4, pour $\theta_{lim} = 6^\circ$ et $\rho_{lim} = 30$, la hauteur des

lobes secondaires peut être diminuée d'environ -3dB pour un faible coût en terme de résolution spatiale (+12%).

3 Reconstruction d'image

La relation liant la température de brillance $T(\boldsymbol{\xi})$ de la scène observée à la mesure de la fonction de cohérence spatiale $V(\mathbf{u})$ pour la fréquence \mathbf{u}_{kl} engendrée par une paire d'antennes (k, l) est la suivante:

$$V(\mathbf{u}_{kl}) = \iint_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} F_k(\boldsymbol{\xi}) F_l^*(\boldsymbol{\xi}) T(\boldsymbol{\xi}) \tilde{r}_{kl}\left(\frac{-\mathbf{u}_{kl}\boldsymbol{\xi}}{f_0}\right) \frac{e^{-2j\pi\mathbf{u}_{kl}\boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{1-\|\boldsymbol{\xi}\|^2}} d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

La température de brillance est ici exprimée dans le repère des cosinus directeurs $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ lié à l'instrument. Ce dernier est caractérisé par les gains complexes F_k et F_l des antennes k et l et par la fonction $\tilde{r}_{kl}(t)$ qui rend compte des effets de décorrélation dus à la largeur de bande non nulle des filtres des récepteurs [4].

Le problème inverse qui consiste à retrouver la distribution de température de brillance de la scène observée à partir de visibilité complexes expérimentales plus ou moins bruitées est un problème mal posé au sens de HADAMARD. En effet, comme l'instrument est à bande-passante limitée dans la couverture fréquentielle expérimentale H , l'information fréquentielle au-delà de H est définitivement perdue. Il est donc illusoire d'espérer reconstruire la distribution de température de brillance à son plus haut niveau de résolution à partir des seules données interférométriques obtenues pour les fréquences spatiales angulaires \mathbf{u}_{kl} . Du point de vue de l'algèbre linéaire, le système linéaire:

$$V = \mathbf{G}T, \quad (2)$$

où \mathbf{G} est la matrice rectangulaire qui traduit sous forme discrète la relation (1), est un problème sous-contraint. Ici les mesures expérimentales V appartiennent à l'espace des données F , tandis que la distribution de température de brillance T appartient à l'espace objet E . La dimension de F (le nombre de visibilité complexes expérimentales) est très inférieur à la dimension de E (le nombre de pixels nécessaires pour discrétiser l'intégrande de (1) tout en respectant les conditions d'échantillonnage de SHANNON). Le problème (2) est donc bien sous-déterminé: il n'existe pas de solution unique, et le problème doit être régularisé.

Une première approche consiste à trouver la solution objet de moindre norme en minimisant le problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (3)$$

dont la solution T_r est:

$$T_r = \mathbf{G}^+V, \quad (4)$$

où $\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}$ est l'inverse généralisé de \mathbf{G} . Il faut cependant noter que le conditionnement de ce problème est directement lié à la présence de fréquences redondantes dans la couverture fréquentielle. En effet, des visibilité peuvent être mesurées pour des fréquences redondantes puisque deux

couples d'antennes différents peuvent engendrer la même fréquence spatiale angulaire: \mathbf{G} est alors de rang déficient si les antennes et les récepteurs de ces couples sont identiques, et le conditionnement de (3) restera élevé même si ces éléments sont différents.

L'approche présentée ici [5] est basée sur une régularisation physique du problème inverse $\mathbf{G}T = V$. L'instrument étant à bande passante limitée, il est naturel de rechercher parmi toutes les solutions possibles celles qui sont à bande passante limitée dans H . Cette solution est la distribution de température minimisant le problème d'optimisation avec contrainte:

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (5)$$

où \mathbf{P}_H est le projecteur dans le sous-espace \mathcal{E} de E des fonctions à bande passante limitée dans H . La minimisation de ce problème est équivalent à la minimisation du critère quadratique:

$$\min_{\hat{T} \in \hat{\mathcal{E}}} \|V - \mathbf{A}\hat{T}\|_F^2, \quad \text{avec } \mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{U}^*\mathbf{Z} \quad (6)$$

où \hat{T} sont les composantes de FOURIER de T contenues dans H et appartenant au sous espace dual $\hat{\mathcal{E}}$, et où \mathbf{U} est l'opérateur de transformée de FOURIER et \mathbf{Z} l'opérateur de zéro-padding au delà de H .

En raison des redondances évoquées précédemment, la dimension de F (le nombre de visibilité complexes expérimentales) est supérieure à la dimension de $\hat{\mathcal{E}}$ (le nombre de composantes de la transformée de FOURIER de T dans la couverture expérimentale H). Le problème ainsi régularisé est maintenant sur-déterminé. La perte d'information qui conduisait à un problème inverse mal posé est compensée ici par l'apport d'une information a priori en relation directe avec les caractéristiques physiques de l'instrument (résolution angulaire). La solution de (6), et donc de (5), est alors donnée par:

$$T_r = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{A}^+V, \quad (7)$$

où $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ est l'inverse généralisé de \mathbf{A} .

Cette régularisation physique a inspiré dans un deuxième temps une régularisation mathématique. Les décompositions en valeurs singulières de \mathbf{A} et \mathbf{G} , illustrées par la figure 5, nous renseignent sur le conditionnement du problème. Ainsi, le spectre des valeurs singulières de \mathbf{A} est confiné autour de 1, confirmant le bon conditionnement du problème (6). Or, la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{G} fait apparaître, en plus d'un premier groupe dont les valeurs sont proches de celle de \mathbf{A} , un second groupe, nettement séparé du premier, compris entre 10^{-4} et 10^{-2} . On compte autant de valeurs singulières dans le premier groupe que de fréquences dans la couverture fréquentielle expérimentale H et le nombre de valeurs singulières dans le second groupe est égal au nombre de redondances des visibilité.

Ainsi, même si la matrice \mathbf{G} est de rang plein au sens mathématique strict du terme, elle ne l'est pas d'un point de vue numérique. La distribution particulière de ces valeurs singulières montre d'une part que le nombre de degrés de liberté du problème est égal au nombre de fréquences dans H et que d'autre part les valeurs singulières

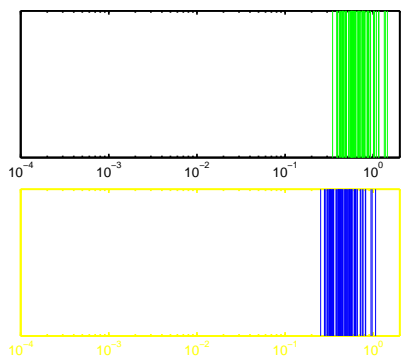


FIG. 5 – Valeurs singulières des matrices \mathbf{A} (en haut) et \mathbf{G} (en bas). Les deux matrices ont le même nombre de valeurs singulières groupées autour de 1 mais \mathbf{G} possède en plus un groupe de valeurs plus petites et en nombre égal aux nombres de visibilitées redondantes. Ces petites valeurs sont responsables du mauvais conditionnement du problème (3).

du second groupe seront à l'origine d'une large amplification des erreurs lors du processus de reconstruction. En effet, l'analyse standard en algèbre linéaire fournit l'inégalité suivante :

$$\frac{\|\Delta T_r\|_E}{\|T_r\|_E} \leq \mathcal{C}(\mathbf{G}) \frac{\|\Delta V\|_F}{\|V\|_F}. \quad (8)$$

Ici, $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ est le conditionnement du problème inverse $\mathbf{G}T = V$ correspondant à une perturbation ΔV du second membre. Il représente une borne supérieure du facteur d'amplification des erreurs. Il est donc possible d'améliorer le conditionnement du problème (3) et de maîtriser l'amplification des erreurs en calculant la solution de moindre norme à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières tronquée de \mathbf{G} . Seules les valeurs singulières les plus grandes et en nombre égal au nombre de fréquences dans H sont alors conservées.

Ainsi, les régularisations physique et mathématique conduisent à une même amplification maîtrisée des erreurs. Bien que basées sur deux approches différentes, elles sont toutes deux liées à la prise en compte du nombre de degrés de liberté du problème : le nombre de fréquences dans la couverture fréquentielle expérimentale de cet instrument à bande passante limitée. Notons cependant au bénéfice de l'approche physique qu'elle fournit directement une solution à bande passante limitée dans H alors que la solution de moindre norme conserve des composantes de FOURIER en dehors de l'étoile (même si celles-ci sont relativement faibles). D'autre part, cette approche réduit considérablement les dimensions du problème, ce qui représente un gain important en terme de mémoire et de temps de calcul lors du processus de reconstruction.

L'instrument considéré dans les simulations suivantes est

composé de 10 éléments (antennes et récepteurs) tous différents et régulièrement espacés sur les 3 bras d'un Y. La figure 6 présente T_o , la scène observée à son plus haut niveau de résolution, et $T_w = W * T_o$, cette même scène à la résolution de l'instrument et apodisée par la fenêtre de Kaiser ($\alpha = 6$, $\theta_{lim} = 6^\circ$, $\rho_{lim} = 30 [\lambda/L]$). Les visibilitées

sont calculées à partir de T_o et les scènes reconstruites sont comparées à T_w .

Dans un premier temps, les deux méthodes sont comparées sur une reconstruction non bruitée. La figure 7 montre les reconstructions effectuées avec \mathbf{G}^+ et \mathbf{A}^+ . En l'absence de bruit, l'erreur systématique est la même pour les deux reconstructions, 0.93 K en moyenne quadratique.

Dans un deuxième temps (voir Fig. 8), les visibilitées simulées sont dégradées par un bruit radiométrique gaussien de déviation standard 0.08 K. L'écart quadratique moyen entre T_w et la scène reconstruite par \mathbf{G}^+ est alors de 2.12 K. Cet écart n'est plus que de 0.94 K lorsque la scène est reconstruite par \mathbf{A}^+ ou par une décomposition en valeurs singulières tronquée de \mathbf{G} . En tenant compte de l'erreur systématique, on peut conclure que la propagation du bruit introduit sur les visibilitées est 15 fois plus importante dans le cadre d'une reconstruction par \mathbf{G}^+ qu'avec une approche régularisée.

4 Conclusion

La possibilité d'utiliser sur des grilles hexagonales les algorithmes standards de TFR élaborés pour des grilles cartésiennes est démontrée. La distance de plus courte approche est un nouvel outil de diagnostic de la qualité des fenêtres d'apodisation adapté aux exigences de la mission SMOS. La prise en compte des caractéristiques géométriques de la couverture fréquentielle de l'instrument dans la définition de ces fenêtres conduit à une amélioration de sa sensibilité radiométrique. Enfin, deux types de régularisation du problème inverse à résoudre permettent de maîtriser la propagation des bruits et des erreurs au cours du processus de reconstruction.

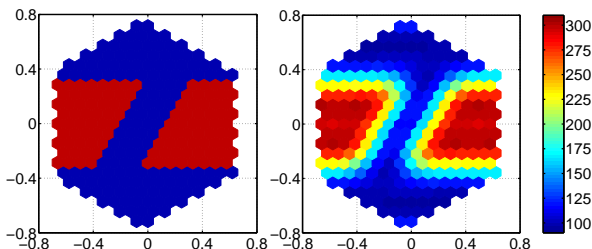


FIG. 6 – A gauche, T_o , la scène observée à son plus haut niveau de résolution, à droite, $T_w = W * T_o$, la scène à la résolution de l'instrument et apodisée par la fenêtre de Kaiser.

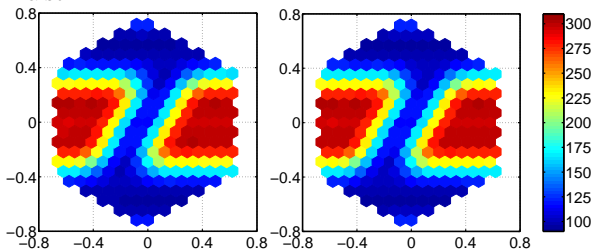


FIG. 7 – Cartes de températures de reconstruites en l'absence de bruit: $Tr = \mathbf{G}^+V$ à gauche et $Tr = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{A}^+V$ à droite.

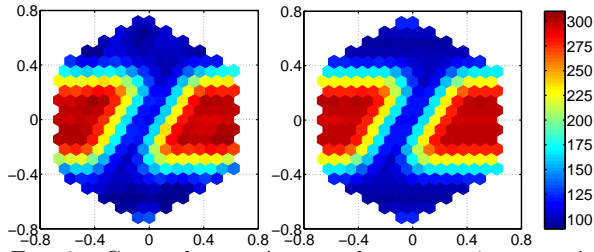


FIG. 8 – Cartes de températures de reconstruites en présence de bruit: $Tr = \mathbf{G}^+V$ à gauche et $Tr = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{A}^+V$ à droite.

Références

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] E. Anterrieu, P. Waldteufel, and A. Lannes, *Apodization functions for 2D hexagonally sampled SAIR*, IEEE Trans. on Geosc. and Remote Sens., 40(12), 2531-2542, 2002.
- [3] B. Picard, E. Anterrieu, G. Caudal and P. Waldteufel *Improved windowing functions for Y-shaped SAIR*, Proc. of the IGARSS'02 (Toronto, Canada), 2002.
- [4] B. Picard, E. Anterrieu, G. Caudal and P. Waldteufel *Impact of the fringe washing function on the spatial resolution and on the radiometric sensitivity of the SMOS instrument*, Proc. of the IGARSS'03 (Toulouse, France), 2003.
- [5] E. Anterrieu *Stabilized Image Reconstruction Algorithm for SAIR*, Proc. of the IGARSS'02 (Toronto, Canada), 2002.

B.3 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2003

Impact of the fringe washing function on the spatial resolution and on the radiometric sensitivity of the SMOS instrument

BRUNO PICARD⁽¹⁾, ERIC ANTERRIEU⁽¹⁾, GÉRARD CAUDAL⁽²⁾ and PHILIPPE WALDTEUFEL⁽³⁾

⁽¹⁾CERFACS-URA 1875

42 avenue Gaspard Coriolis - 31057 Toulouse cedex 01 - France

⁽²⁾IPSL - CETP

⁽³⁾IPSL - SERVICE D'AÉRONOMIE DU CNRS

10-12 avenue de l'Europe - 78140 Vélizy - France

B.P. 3, 91371 Verrières le Buisson cedex - France

Abstract—It is now well established that Synthetic Aperture Imaging Radiometers (SAIR) promise to be powerful sensors for high-resolution observations of the Earth at low microwave frequencies. Within this context, the European Space Agency is currently developing the Soil Moisture and Ocean Salinity mission.

The present work aims to study the errors attributable to the fringe washing function onto the reconstructed brightness temperature map. With the aid of regularized reconstruction methods, it is shown that the spatial resolution and the radiometric sensitivity of the SMOS instrument are little influenced by the fringe wash phenomenon even when the received signal is blurred.

Keywords—Fringe washing function, resolving matrix, synthetic aperture.

I. INTRODUCTION

The SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) space mission [1] is currently undergoing phase B studies in the framework of the Earth Explorer Program of the European Space Agency. It will be the first attempt to apply, to remote sensing of the Earth surface, the concept of imaging interferometric radiometry by aperture synthesis [2], initially developed for radio astronomy [3].

A recent study [4] has simulated fringe washing effects on a particular SAIR configuration, including the impact of coarse correlation. The results obtained with a simple inverse Fourier transform reconstruction have shown a large degradation of the spatial resolution as well as of the signal to noise ratio (SNR). In order to reduce the fringe washing effects, the authors have suggested to split the received signals in sub-signals with narrower bandwidths.

In the particular frame of the SMOS mission, the geometry and the dimensions of the instrument lead to a weaker influence of the fringe wash phenomenon on the image reconstruction. Furthermore, regularized reconstruction methods involving the modelling G-matrix allow to improve the quality of the reconstruction even when the signal is blurred [5]. It is concluded that a hardware modification of the SMOS instrument is not necessary with regards to the fringe wash effects.

II. INSTRUMENT MODELLING

The SMOS instrument is a two-dimensional interferometer operating in the L-band ($f_0 = 1.4135$ GHz). The interferometric measurements, the complex visibilities, are obtained by correlating the signals collected by pairs of antennae with overlapping fields of view. SAIR are band-limited instruments and the visibilities are here confined to a star-shaped frequency coverage over an hexagonal grid given rise by the Y-shaped array selected for SMOS. The relationship between the visibility function $V(\mathbf{u})$ and the brightness temperature $T(\boldsymbol{\xi})$ of the observed scene is given by:

$$V(\mathbf{u}_{kl}) = \iint_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} F_k(\boldsymbol{\xi}) F_l^*(\boldsymbol{\xi}) T(\boldsymbol{\xi}) \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \boldsymbol{\xi}}{f_0} \right) \frac{e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{1 - \|\boldsymbol{\xi}\|^2}} d\boldsymbol{\xi} \quad (1)$$

where $F_k(\boldsymbol{\xi})$ and $F_l(\boldsymbol{\xi})$ are the complex voltage patterns of a pair of antennae (A_k, A_l). The components $\xi_1 = \sin \theta \cos \phi$ and $\xi_2 = \sin \theta \sin \phi$ of the angular position variable $\boldsymbol{\xi}$ are direction cosines, (θ and ϕ are the traditional spherical coordinates) and \mathbf{u}_{kl} is the baseline vector between the two antennae A_k and A_l .

The fringe washing function $\tilde{r}_{kl}(t)$ accounts for the spatial decorrelation effects due to the finite bandwidth of the receivers' filters: the amplitude of the signals collected decreases as the spatial delay $t = \mathbf{u}_{kl} \boldsymbol{\xi} / f_0$ increases. It is a complex coefficient that reduces the magnitude of the visibilities, the largest reductions occurring for large spacing antennae and for scene areas away from the nadir of the instrument. This induces a degradation of both SNR and angular resolution of the reconstructed brightness temperature fields.

Assuming an ideal analog correlation hardware, the fringe washing function depends on the normalized frequency responses of the receivers:

$$\tilde{r}_{kl}^\circ(t) = \frac{1}{\sqrt{B_k B_l}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(f - f_0) H_l^*(f - f_0) e^{-2j\pi f t} df \quad (2)$$

where $H_k(f)$ and $H_l(f)$ are normalized band-pass filters so that their maximum amplitude is equal to one, B_k and B_l are their equivalent bandwidth. The band-pass filters used

in the following simulation are ideal band-pass ones with linear phase:

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f - \bar{f}}{B}\right) e^{-j(2\pi\tau(f - \bar{f}) + \varphi)} \quad (3)$$

Here, \bar{f} and B are the central frequency and the bandwidth of the filter, τ is the group delay φ is the phase shift. The values of these four parameters used for the simulations presented in section III are summarized in Fig. 1. In these conditions, the smallest value of the fringe washing function is 0.69.

Nevertheless, a recent study [4] has shown that the digital correlation hardware used by SAIR will induce a modification of the fringe washing function:

$$\tilde{r}_{kl}^*(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\tilde{r}_{kl}^{\circ}(t)) \quad (4)$$

The digital correction to be applied increases the role of the fringe wash phenomenon in the reconstruction by degrading the SNR obtained in the analog case: the smallest value for the fringe washing function is now 0.49. However, the impact of this correction depends on the approach used for the reconstruction. The following section presents two methods resulting from either a “mathematical” or a “physical” regularization of the problem.

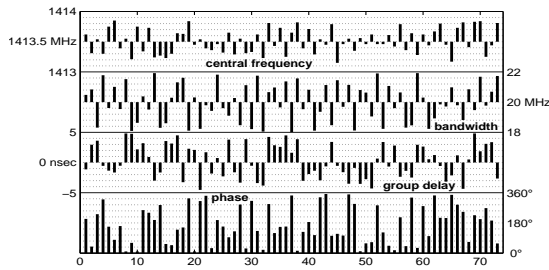


Fig. 1. Receiver band-pass filter parameters

III. REGULARIZED RECONSTRUCTION

The problem of retrieving an estimate of the radiometric temperature distribution scene under observation from measured complex visibilities has already been addressed [5]. It has been demonstrated that this inverse problem is ill-posed and has to be regularized in order to provide a unique and stable solution to the linear system:

$$\mathbf{G}T = V \quad (5)$$

where \mathbf{G} is the discrete linear operator from the object space E into the data space F describing the basic relation (1) between the brightness temperature T and the visibility samples V . In the simulations presented in the next section, two regularized solutions are compared. The first one refers to a “mathematical” while the second is based on a “physical” regularization of the problem.

One approach is to find the minimum norm solution of (5)

by means of computing the brightness temperature map T_r that realizes the minimum of the constrained optimization problem:

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|T\|_E^2 \\ \mathbf{G}T = V \end{cases} \quad (6)$$

The solution of (6) could be obtained through the computation of the More-Penrose pseudo-inverse \mathbf{G}^+ of \mathbf{G} :

$$T_r = \mathbf{G}^+V. \quad (7)$$

Owing to the particular role played by the smallest singular values of \mathbf{G} in the computation of \mathbf{G}^+ with the well-known expression $\mathbf{G}^*(\mathbf{G}\mathbf{G}^*)^{-1}$, it is preferable to compute it with the aid of a truncated singular value decomposition (TSVD).

Referring to the limited resolution of the instrument, another approach is to find the brightness temperature map T_r which has its Fourier transform confined to the experimental frequency coverage H . This H -band limited solution of (5) is the brightness temperature map that realizes the minimum of the constrained optimization problem:

$$\begin{cases} \min_{T \in E} \|V - \mathbf{G}T\|_F^2 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (8)$$

where \mathbf{P}_H is the projector onto the subspace of E of the H -band limited functions. The solution of (8) is given by:

$$T_r = \mathbf{U}^*\mathbf{Z}\mathbf{A}^+V \quad (9)$$

Here, $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^*$ is the More-Penrose pseudo-inverse of $\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{U}^*\mathbf{Z}$ where \mathbf{U} is the Fourier transform operator and \mathbf{Z} is the zero-padding operator beyond H .

IV. SIMULATIONS AND RESULTS

The scene to be reconstructed is composed of a uniform background temperature of 300 K except for a unique pixel on the x-axis ($\phi = 0^\circ$) which value is 600 K. This value is successively assigned to all the pixels along the absciss ($\theta \in [0^\circ, 55^\circ]$). The spatial resolution is defined as the full width at half-maximum (FWHM) of the Gaussian-like curve resulting from a slice of the reconstructed scene along x-axis. The height of this peak is connected to the radiometric sensitivity and it is normalized with respect to the height of the peak reconstructed with a perfect instrument (isotropic antenna gains, no fringe wash).

The first simulations (Fig. 2) are carried out without blurring the signal. The results obtained with the inverse Fourier transform (FT^{-1}) can only be interpreted in the simulation operated without the fringe washing function. However, even in this case the degradation of the peak height leads to over-estimate the spatial resolution which lies between 28 km and 66 km but can not really be compared to the two other methods. When the fringe washing function is added in the simulation, the objects reconstructed by FT^{-1} (the 600 K pixels) are too far from Gaussian-like curves and can not be interpreted with regards to the selected parameters (FWHM and height).

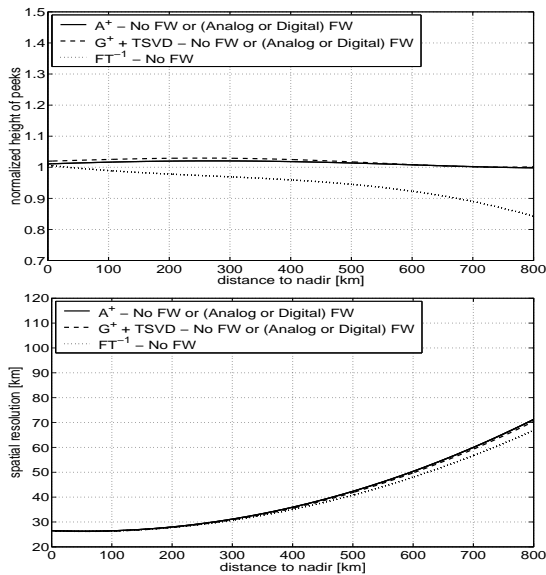


Fig. 2. Radiometric sensitivity (top) and spatial resolution (bottom) of the SMOS instrument in the absence of radiometric noise. Using the resolving matrix reconstruction (solid lines) or the TSVD of G-matrix (dashed lines) permits to retrieve a normalized height close to 1 and a spatial resolution between 28 km and 71 km with or without fringe wash effects (analog or digital FW).

With the regularized methods, there are no relevant differences between neglecting or accounting for the fringe washing function even with the digital correction. Indeed, these approaches are both modelling the fringe wash phenomenon in the simulation step and it is then well made up for in the inversion process. With or without the fringe washing function, the normalized height of the peaks is almost uniform in the FOV (between 0.98 and 1.03) and the spatial resolution lies between 28 km at the nadir and 71 km at the border of the FOV (Fig. 2).

One hundred simulations have been performed with the visibilities blurred by a radiometric noise with a standard deviation $\sigma_{\Delta V} = (T_A + T_R) / \sqrt{B\tau_i}$ of the order 0.08 K when the antenna temperature $T_A = 250$ K, the receivers' noise temperature $T_R = 100$ K, the bandwidth $B = 20$ MHz and the integration time is $\tau_i = 1$ s. Shown in Fig. 3 are the fits of the one hundred reconstructions realized with the aid of the regularized methods in both the analog and digital fringe washing function cases. The two regularized methods allow to retrieve the same radiometric sensitivity and the same spatial resolution than in the previous simulation even when the digital correction is accounted for (Fig 3.). The similar behavior of these two approaches with respect to a blurred signal is confirmed by the computation of the condition number of the two implied matrices: the condition number represents an upper limit for the value of the amplification factor of errors and it is the same one for \mathbf{A} and for \mathbf{G} , 4.86, whatever the fringe wash is (analog or digital). However, it should be noted that the dispersion of the spatial resolution is twice at the border of the FOV in

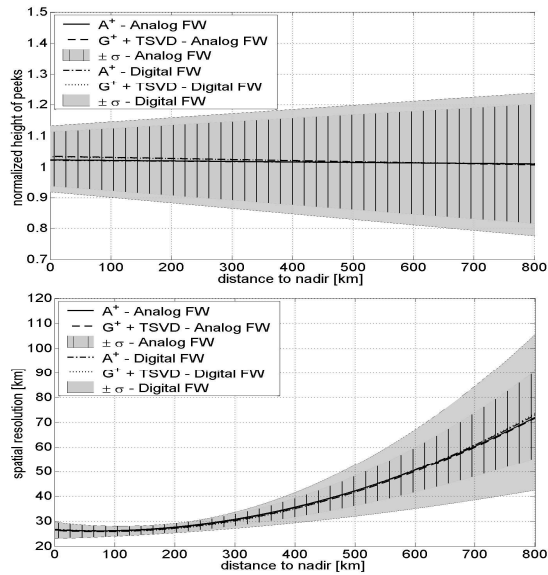


Fig. 3. Radiometric sensitivity (top) and spatial resolution (bottom) of the SMOS instrument in the presence of radiometric noise. Both the resolving matrix reconstruction and the TSVD of G-matrix permits to retrieve the same radiometric sensitivity and the same spatial resolution even with digital fringe washing function.

the digital fringe washing function case.

V. CONCLUSION

The impact of the fringe wash effects on the radiometric sensitivity and on the spatial resolution of the SMOS instrument has been estimated using two regularized reconstruction methods. These two approaches lead to similar results: a good modelling of the direct problem and a regularization of the inverse problem allow to mitigate the influence of the fringe washing function. The results are satisfying even with the digital correction proposed by Fishman et al. [4] and in presence of a blurred signal. Finally, a hardware modification of the SMOS instrument is not necessary with regards to the fringe wash effects.

REFERENCES

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] M. Martin-Neira, Y. Menard, J.-M. Goutoule and U. Kraft, *MI-RAS, a two-dimensional aperture synthesis radiometer*, Proc. of the IGARSS'94 (Pasadena, California, USA), pp. 1323-1325, 1994.
- [3] A.R. Thompson, G.W. Swenson and J.W. Moran, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons Inc., 1st Edition (534 pp), 1986.
- [4] M. A. Fishman, A. W. England and C. R. Ruf, *How Digital Correction Affects the Fringe Washing Function in L-Band Aperture Synthesis Radiometry*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(3), pp. 671-679, 2002.
- [5] E. Anterrieu, *A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers*, submitted to IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing.

Self characterization of modelling parameters for Synthetic Aperture Imaging Radiometers

ERIC ANTERRIEU, SERGE GRATTON and BRUNO PICARD
CERFACS

42 avenue Gaspard Coriolis - 31057 Toulouse cedex 01 - France
E-mail: Eric.Anterrieu@cerfacs.fr

Abstract— It is now well established that Synthetic Aperture Imaging Radiometers (SAIR) promise to be powerful sensors for high-resolution observations of the Earth at low microwave frequencies. Within this context, the European Space Agency (ESA) is currently developing the SMOS mission. The propagation of modelling errors within a reconstruction process that attempts to retrieve the brightness temperature of a scene under observation from interferometric measurements depends on the knowledge of the values of the parameters involved in the modelling of the instrument. This contribution describes an approach to characterize these modelling parameters, once the instrument has been launched into space, with an accuracy such that the propagation of errors through the reconstruction process is still under control.

Keywords— Interferometry, radiometry, synthetic aperture imaging.

I. INTRODUCTION

The SMOS (Soil Moisture and Ocean Salinity) space mission [1] is currently undergoing phase B studies in the framework of the Earth Explorer Program of the European Space Agency. It is the first attempt to apply, to remote sensing of the Earth surface from space, the concept of imaging interferometric radiometry by aperture synthesis, initially developed for radio astronomy [2].

Many methods have been proposed to invert the relation between the interferometric measurements and the radiometric brightness temperature of the scene under observation [3][4]. It has been shown that the propagation of errors through the reconstruction process depends on the regularization of the corresponding inverse problem, but also on the knowledge of the value taken by the parameters involved in the modelling of the instrument. Indeed, once the instrument is in space, these values may differ from those measured by manufacturers before launch and may also vary from one orbit to another.

This contribution describes an approach to characterize these parameters, once the instrument is in orbit, from complex visibilities measured over a brightness temperature field which is more or less known. The corresponding optimization problem is solved with the aid of the most up to date methods in numerical analysis. To support the theory and to illustrate the performances of this approach, numerical simulations are presented. It is shown that the value of the parameters involved in the modelling of the antennae gain patterns can be retrieved with an accuracy such that the propagation of errors through the reconstruction process is still under control.

II. INSTRUMENT MODELLING

As illustrated in Fig. 1, interferometer measurements, also termed complex visibilities, are obtained by cross-correlating the signals collected by two spatially separated antennae which have overlapping fields of view. When neglecting the spatial decorrelation effects, the visibility function $V(\mathbf{u})$ and the radiometric brightness temperature $T(\boldsymbol{\xi})$ of the scene under observation are related to one another by the relation:

$$V(\mathbf{u}_{kl}) \propto \iint_{\|\boldsymbol{\xi}\| \leq 1} F_k(\boldsymbol{\xi}) F_l^*(\boldsymbol{\xi}) T(\boldsymbol{\xi}) \frac{e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \boldsymbol{\xi}}}{\sqrt{1 - \|\boldsymbol{\xi}\|^2}} d\boldsymbol{\xi}, \quad (1)$$

where $F_k(\boldsymbol{\xi})$ and $F_l(\boldsymbol{\xi})$ are the voltage patterns of the two antennae A_k and A_l .

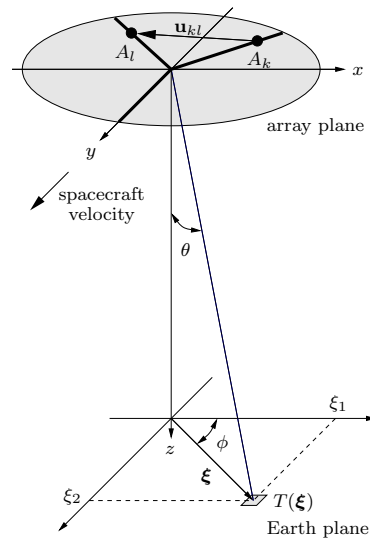


Fig. 1. Co-ordinates systems in the paraxial approximation. The components $\xi_1 = \sin \theta \cos \phi$ and $\xi_2 = \sin \theta \sin \phi$ of the angular position variable $\boldsymbol{\xi}$ are direction cosines, θ and ϕ are the traditional spherical co-ordinates, \mathbf{u}_{kl} is the baseline vector between the two antennae A_k and A_l .

The voltage pattern of each antenna of the interferometer is characterized by its directivity $D(\theta, \phi)$ and its phase $\Delta\varphi(\theta, \phi)$ in the viewing direction (θ, ϕ) :

$$F(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) e^{j\Delta\varphi(\theta, \phi)}. \quad (2)$$

In the simulations presented in section IV, the directivity obeys a power law:

$$D(\theta, \phi) = D(0) (\cos^{n_1} \theta \cos^2 \phi + \cos^{n_2} \theta \sin^2 \phi), \quad (3)$$

with

$$D(0) = \sqrt{\frac{2(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{n_1 + n_2 + 1}}, \quad (4)$$

and

$$\begin{aligned} n_1 &= -0.15 / \log \cos \frac{\theta_1}{2}, \\ n_2 &= -0.15 / \log \cos \frac{\theta_2}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

where θ_1 and θ_2 are the half-power beamwidth with respect to ξ_1 and ξ_2 , respectively. Likewise, the phase is varying as a function of (θ, ϕ) :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\theta, \phi) &= \frac{2\pi}{\lambda_o} \left((D_1'' \sin \theta + D_1^\perp (1 - \cos \theta)) \cos^2 \phi \right. \\ &\quad \left. + (D_2'' \sin \theta + D_2^\perp (1 - \cos \theta)) \sin^2 \phi \right), \end{aligned} \quad (6)$$

where D_1'' , D_1^\perp and D_2'' , D_2^\perp are the equivalent transverse and longitudinal defocussings with respect to ξ_1 and ξ_2 , respectively, and λ_o is the central wavelength of observation.

Thus, each antenna gain pattern of the interferometer depends on 6 parameters, which may of course differ from one antenna to another. For an array equipped with ℓ antennae, the total number of modelling parameters is therefore equal to 6ℓ , while the number of visibility samples measured by such an instrument is equal to $\ell(\ell - 1)$. Provided that the later is greater than the former, it is expected to characterize all the antennae patterns of the interferometer from complex visibilities V measured over a given brightness temperature field T .

III. OPTIMIZATION PROBLEM

Let \mathbf{G} be the modelling operator describing the basic relationship (1) between the measured visibility samples $V(\mathbf{u}_{kl})$ and the brightness temperature distribution $T(\boldsymbol{\xi})$:

$$\mathbf{G}T = V. \quad (7)$$

The optimization problem to be solved is that of finding the minimum of a discrepancy function of several variables:

$$\min_{\theta_1, D_1'', D_1^\perp, \theta_2, D_2'', D_2^\perp} \|V - \mathbf{G}T\|^2. \quad (8)$$

Here, the modelling operator \mathbf{G} , and therefore the discrepancy function $\|V - \mathbf{G}T\|^2$, depend on the 6ℓ parameters θ_1 , θ_2 , D_1'' , D_1^\perp , D_2'' and D_2^\perp .

This non-linear optimization problem can be solved with the aid of a variable metric method, for example with the iterative Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) scheme. The basic idea of this method is to start from an initial guess and to accumulate information from successive line minimizations unless the gradient of the function to be minimized has reached some given threshold close to zero.

TABLE I
ANTENNA VOLTAGE PATTERN PARAMETERS.

	θ_1	θ_2	D_1''	D_1^\perp	D_2''	D_2^\perp
1	64.57	59.34	0.0	19.0	2.8	-30.0
2	56.00	64.00	-3.0	1.0	1.0	-25.0
3	66.47	60.77	0.0	20.0	0.0	-16.0
4	62.28	72.57	-4.0	20.0	0.5	-7.0
5	67.89	57.44	4.0	15.0	2.0	-25.0
6	62.28	67.43	0.0	22.0	1.0	-16.0
7	66.28	68.00	4.0	25.0	2.0	-9.0
8	64.57	64.57	-1.0	25.0	1.0	-12.0
9	67.43	68.57	0.0	25.0	2.0	-6.0
10	59.43	62.28	1.0	11.0	-3.0	-25.0

θ_1 and θ_2 are in degrees, D_1'' , D_1^\perp , D_2'' and D_2^\perp are in millimeters.

IV. SIMULATIONS AND RESULTS

Simulations have been performed within MATLAB environment for a Y-shaped array equipped with $\ell = 10$ different antennae. The number of simultaneous complex visibilities provided by this instrument is therefore equal to $\ell(\ell - 1) = 90$, while the number of unknown modelling parameters is here equal to $6\ell = 60$: the optimization problem (8) is therefore an overconstrained one. The values of the parameters θ_1 , θ_2 , D_1'' , D_1^\perp , D_2'' and D_2^\perp are given in Table I: they are taken from measurements on the antennae of the SMOS demonstrator [5]. The amplitude and the phase of the corresponding voltage patterns $F(\theta, \phi)$ are represented in Fig. 2 for $\theta \in [0, \pi/2]$ and $\phi \in [0, 2\pi]$.

Complex visibilities have been simulated for a brightness temperature corresponding to that of a flat field at 300 K, and a radiometric noise ΔV with a standard deviation $\sigma_{\Delta V} = 0.01$ K has been added on both the real and the imaginary parts of V . The iterative BFGS scheme has been initialized with the modelling parameters $\theta_1 = \theta_2 = 65^\circ$ and $D_1'' = D_1^\perp = D_2'' = D_2^\perp = 0$ for all the antennae, and the minimum of (8) has been reached after 50 iterations: the final value of the discrepancy function is less than 10^{-3} (it has been reduced by a factor 10^6 as compared to its initial value). The modelling parameters thus obtained are very close to those of the instrument given in Table I: the accuracy on the half-power beamwidth is less than 0.4° while it is of the order of 1 mm for the defocussings. The corresponding errors between the recovered antennae patterns $\tilde{F}(\theta, \phi)$ and those of the instrument $F(\theta, \phi)$ are represented in Fig. 3. When considering them as modelling errors within a reconstruction process that attempts to retrieve the brightness temperature of a scene under observation from measured complex visibilities [3][4], they do not affect the overall propagation of errors [6].

V. CONCLUSIONS

A method for retrieving modelling parameters from complex visibilities measured over a given brightness temperature field has been introduced. It has been illustrated with an example showing that the antennae voltage patterns can be retrieved with an accuracy such that the propagation of

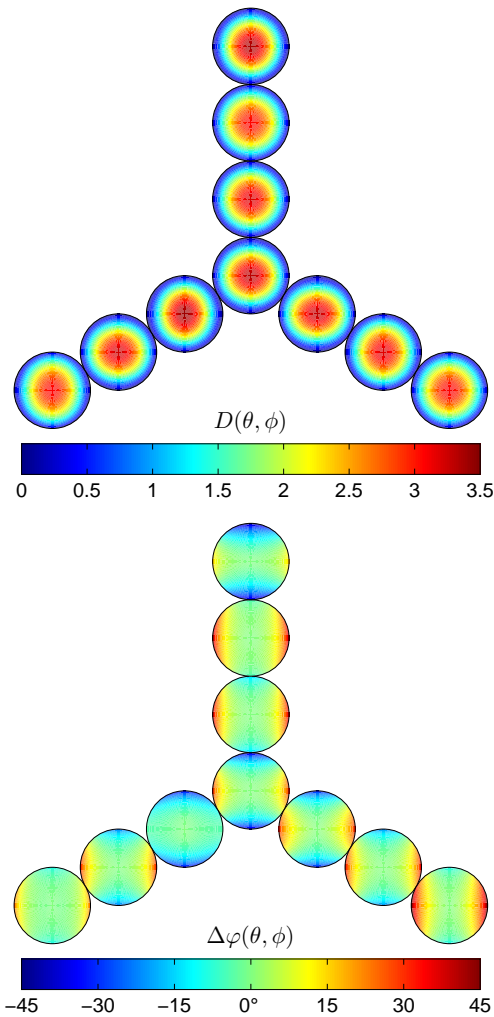


Fig. 2. Amplitude (*top*) and phase (*bottom*) of the antennae voltage patterns $F(\theta, \phi)$ of the Y-shaped array. The modelling parameters are those given in Table I.

errors through the inversion of the relation between the complex visibilities and the radiometric brightness temperature of a scene under observation is still under control. Provided that the number of modelling parameters is less than the number of available complex visibilities, this approach can be of course extended to the parameters modelling the receivers band-pass filters when considering spatial decorrelation effects.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by CNES, CNRS, and the Région Midi-Pyrénées (grant 99009020), data processing support was provided by CERFACS. The European Space Agency (ESA) is leading the SMOS project. The authors are very grateful to Philippe Waldteufel and Yann Kerr for fruitful discussions.

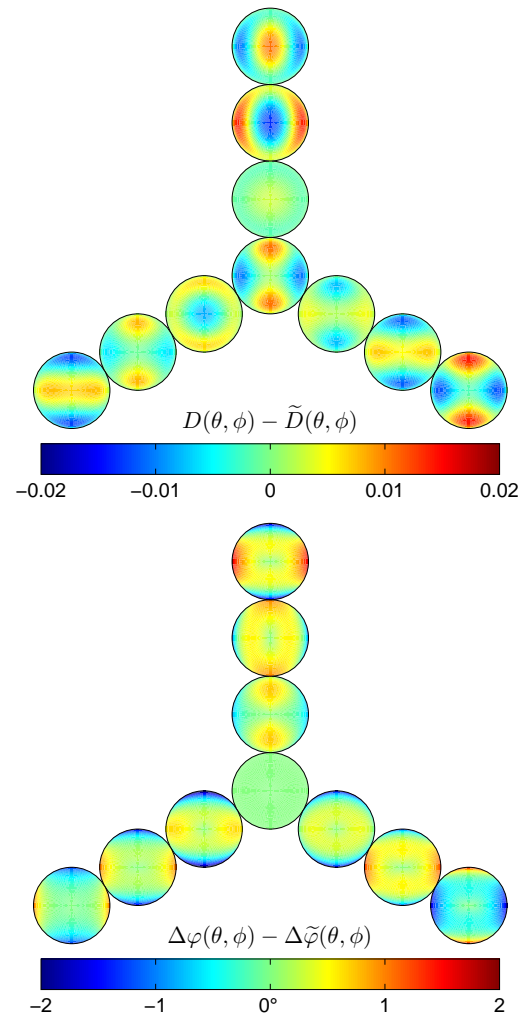


Fig. 3. Amplitude (*top*) and phase (*bottom*) of the errors between the recovered antennae voltage patterns $\tilde{F}(\theta, \phi)$ and those of the instrument $F(\theta, \phi)$ shown in Fig. 2.

REFERENCES

- [1] Y.H. Kerr *et al.*, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] A.R. Thompson, G.W. Swenson and J.W. Moran, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons Inc., 1st Edition (534 pp), 1986.
- [3] M.A. Goodberlet, *Improved image reconstruction techniques for synthetic aperture radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 38(3), pp. 1362-1366, 2000.
- [4] E. Anterrieu, *Stabilized image reconstruction algorithm for synthetic aperture imaging radiometers*, Proc. International Geoscience And Remote Sensing Symposium (IGARSS'02), Toronto (Canada), pp. 1642-1644, 2002.
- [5] F. Bayle *et al.*, *Two-dimensional synthetic aperture images over a land surface scene*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(3), pp. 710-714, 2002.
- [6] E. Anterrieu, P. Waldteufel and G. Caudal, *About the effects of instrument errors in interferometric radiometry*, Radio Science, 38(3), 8044, 2003.

B.4 International Geoscience And Remote Sensing Symposium 2004

Impact of Solar Radiations on sea surface salinity remote sensing by spaceborne synthetic aperture imaging radiometers

Bruno Picard, Nicolas Reul, Philippe Waldeufel and Eric Anterrieu

Abstract—Since the sun is a very bright radiation source at L-band, reception of direct and earth-reflected solar radiations by downward-looking radiometers raises a significant challenge for the remote sensing of ocean surface salinity. For a given spaceborne mission concept, the impact of the sun radiations depends on the sensor antenna properties, the location of the sun relative to both the spacecraft the reflecting surface, as well as on the surface scattering properties of the observed Earth scene.

Effects on interferometric data, (i.e. visibilities), provided by Synthetic Aperture Imaging Radiometers (SAIR) need to be accounted for; the affected area, determined through both geometrical and geophysical considerations, will have to be either masked or flagged, or submitted to specific correction procedures, for correct sea surface salinity retrieval.

Focusing on the future ESA Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) space mission, we provide quantitative and qualitative estimates for measurements contamination by sun as expected for the mission period 2007-2010, and we derive methods that can serve to develop a consistent correction strategy.

Index Terms—Ocean Remote Sensing, Microwave Radiometry, Rough Surface Scattering, Sunlitter, Sea Surface Salinity

I. BRIGHTNESS TEMPERATURE OF THE SUN AND THE SUNGLITTER AT L-BAND DURING THE PERIOD 2007-2010

A. Sun brightness temperature

Compiling measurements of solar fluxes in L-band from several sources (at 1.415 GHz by the US Air Force, at Sagamore Hill (Massachusetts) since 1966 and by radiometers in Palehua (Hawaii) and Learmonth (Australia) since 1988, at 1 GHz by Nobeyama Radio Observatory (Japan) since 1957), we have established the variations of the Sun activity during the period 1996-1999 in order to investigate the Sun impact on SMOS L-band radiometric measurements during the expected mission period.

The SMOS mission [1] is scheduled to be launched a few month before a minimum solar activity, with a continuously increasing activity during the rest of the mission period. The study performed on the years 1996 to 1999 shows that the Sun brightness temperature should ranged between a minimum of about 1.1×10^5 K and a maximum of about 7.7×10^5 K.

Further work will precisely investigate the impact of the solar cycle; here we choose a constant brightness temperature

Bruno Picard and E. Anterrieu are with CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique), 42 avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse - France. E-mail: Eric.Anterrieu@cerfacs.fr
P. Waldeufel is with IPSL (Institut Pierre-Simon Laplace), Service d'Aéronomie, BP3, 91371 Verrières le Buisson, France.
N. Reul is with LOS/IFREMER, 29200 Plouzabé - France.

of 1.1×10^5 K for the Sun, since it represents the mean temperature during the first half of the mission.

B. Sunlitter brightness temperature simulations

If the Earth surface were perfectly flat, a single, disk-like reflected image of the Sun would be seen at the specular reflection angle. However, this is not realistic: the sea surface, for example, is always rough due to the wind action, and this spreads out the image of the Sun from a disk to the speckly column we are familiar with. The principal effect of the rough surface is to scatter the direct solar beam into a range of angles; the rougher the surface, the wider the range. Therefore, considering a realistic rough surface, sunglint pollution within the useful (i.e. free of Earth aliases) field of view (FOV) of the MIRAS interferometric radiometer on board SMOS might occur.

The winter solstice is an interesting case since the specular sunglint point will be sometimes located at relatively short distances from the useful domain of MIRAS FOV. To estimate the impact of the forward scattering of Sun microwave radiations on SMOS measurements, climatological fields of surface salinity and surface temperature (SSS and SST from World Ocean Atlas 2001 (WOA01) from National Oceanographic Data Center), as well as QuikSCAT measurements of the surface wind vector are used to characterize the sea surface for the winter solstice. In the present study, we use the daily QuikSCAT mean wind field products (MWF-QuikSCAT, wind speed module and components over global $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ resolution geographical grids) available at the Centre ERS d'Archivage et de Traitement (CERSAT/France). To simulate the wind forcing conditions over the ocean for the the winter solstice of year 2007, we have chosen the MWF-QuikSCAT data for the 22 december 2002.

Now, let's assume that an incremental terrestrial area dA located within the solid angle viewed by the radiometer is illuminated by the Sun radiation along the direction of the unit vector \vec{n}_{sun} . Part of the intercepted energy is scattered in the direction \vec{n}_s , i.e., toward the radiometer antenna. The solar energy scattered by dA in the direction \vec{n}_s for h-polarization is represented by the radiometric temperature $T^{SS}(\vec{n}_s)$ by:

$$T^{SS}(\vec{n}_s, h) = \frac{1}{4\pi \cos \theta_s} \int_0^{2\pi} \int_0^{\beta_{\text{sun}}/2} [\sigma_{hh}^0 + \sigma_{hv}^0] T^{\text{sun}}(\vec{n}_i) d\Omega_i \quad (1)$$

where σ_{hh}^0 and σ_{hv}^0 are the bistatic scattering coefficients of the surface for HH and HV polarizations at scattered

direction \vec{n}_s and incident direction \vec{n}_i (results are similar in v-polarization). The scattering elevation angle is denoted θ_s . The integration limits extends over the solid angle subtended by the Sun.

In the present work, the bistatic scattering coefficients of the rough sea surface are estimated using the Small Slope Approximation theory ([2],[3]). The lower order-approximation (referred to as the SSA-1) used here is appropriate for both large- (the Kirchoff regime) and small scale (the bragg regime) roughness within a single theoretical scheme. In order to compute these coefficients, we have used the Klein and Swift's model [4] to estimate the dielectric constant of sea water at L-band and the sea surface spectrum model of Kudryasvtsev *et al.* [5] to estimate the correlation function of roughness (assuming a Gaussian sea surface statistics).

II. LOCATION OF THE SUN AND THE SPECULAR SUNGLINT IN SMOS'S FOV

We performed numerical simulations for the complete year 2007 in order to track the seasonal variations of the Sun location of the specular Sun reflexion point and their respective aliases. As an example, the daily track of the Sun, the specular sunglint point locations and their respective aliases are given for the date and time of winter solstice for the year 2007 (22 December, 6h7m UT, Fig. 1). An algorithm based on the 1996 Astronomical Almanac [6] is used to provide the position of the Sun in the sky to an accuracy of 0.01° between the years 1950 and 2050.

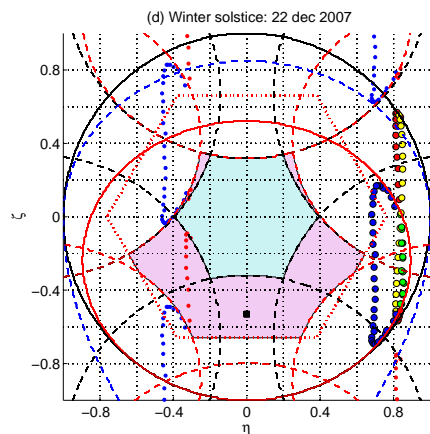


Fig. 1. Daily variations of the Sun and specular sunglint locations as seen by MIRAS during winter solstice.

Considering the Sun location in the MIRAS antenna frame, three different configurations can be possibly encountered:

- 1) Sun is eclipsed by Earth (green dots, Fig. 1), or,
- 2) Sun is eclipsed by MIRAS antenna (yellow dots), or,
- 3) Sun is located above Earth horizon and within view of MIRAS (red dots).

Note that the size of the dots used to represent the Sun in this figure is not scaled to the actual size of the solar disc as seen

in MIRAS frame but referred to alias phenomenon: small dots are the aliases of large dots. Indeed, since spacing between antenna of MIRAS does not satisfy the NYQUIST criterion, alias effects reduce the useful part of the FOV (blue dots). Figure 1 illustrates two key characteristics of the Sun interaction with MIRAS antenna:

- the alias free part of SMOS's FOV (AFFOV) is often polluted by Sun image aliases (small red dots) when Sun is located above Earth horizon and under MIRAS antenna,
- if the Earth surface were locally flat, there would be no pollution by sunglint in the useful part of the FOV.

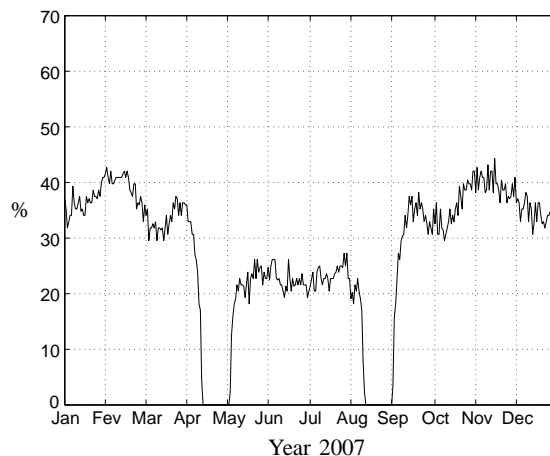


Fig. 2. Frequency of occurrence of Sun pollution events by direct Sun image aliasing during the year 2007.

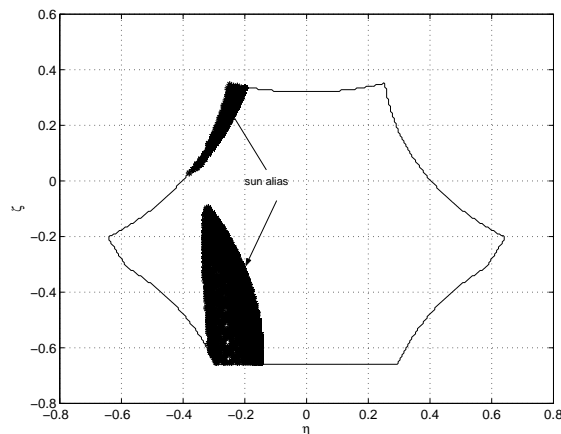


Fig. 3. Spatial extent of the useful part of the FOV where direct leakage by Sun image aliases occur over one year.

Considering a 14 s sampling rate along orbit, we calculated the percentage of instantaneous measurements that shall be polluted by Sun image aliases as function of the date. The results are illustrated in Figure 2. Except at the end of April and August months, when no pollution occurs, between 20%

and 40% of SMOS single measurements will be polluted by direct Sun leakage due to Sun image aliasing. The actual SMOS measurements sampling time along orbit will be about 10 times less (≈ 1.2 s) than in our simulations. However, this is not expected to change significantly the statistics. The spatial extent of the area within the MIRAS FOV where direct Sun leakage will occur over a one year period is shown in Figure 3. Two distinct area shall be potentially polluted by direct Sun leakage: one is located in the upper left corner of the Earth alias-free FOV while the other is in the lower left part of the useful part of the FOV.

III. SUN RADIATION IMPACT ON THE QUALITY OF THE IMAGE RECONSTRUCTION PROCESS

The observed scene T_o^{obs} at winter solstice is simulated on a Cartesian grid of 321×321 nodes with a spatial step of 0.0062×0.0062 in the direction cosine domain (ξ, η) where $\xi = \sin \theta \sin \phi$ and $\eta = \sin \theta \cos \phi$ with θ and ϕ being respectively the colatitude and the azimuth of the observed pixel. This brightness temperature map is the sum of three components:

$$T_o^{\text{obs}} = T_o^{\text{geo}} + T_o^{\text{SS}} + T^{\text{sun}} \quad (2)$$

where:

- T_o^{geo} is the brightness temperature distribution on Earth observed by the satellite from its position at winter solstice. This scene contains no pollution by the Sun.
- T^{sun} is the brightness temperature of the Sun, $T^{\text{sun}} = 1.1 \times 10^5$ K. Since the angular radius of the Sun at 1.4 GHz is smaller than the resolution of the simulation grid, this value is assigned to a single pixel located at its expected position in the direction cosine (provided by ephemeride algorithm).
- T_o^{SS} is the brightness temperature distribution of the sunglitter, computed with help of ancillary data (WOA01 for SSS and SST, QuikSCAT for the wind) and the SSA-1 model for the bistatic coefficients.

Note that for the present work, all brightness temperature maps are for h-polarization.

Considering the baseline $\mathbf{u}_{kl} = (u_{kl}, v_{kl})$ defined by a pair of antenna (A_k, A_l) , the interferometric measurement V_{kl} is related to the brightness temperature map T through the well-known VAN CITTERT - ZERNIKE theorem [7]:

$$V_{kl} = \int_{\|\xi\| < 1} \frac{F_k(\xi) F_l^*(\xi)}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}} T(\xi) \tilde{r}_{kl} \left(\frac{-\mathbf{u}_{kl} \xi}{f_o} \right) e^{-2j\pi \mathbf{u}_{kl} \xi} d\xi \quad (3)$$

where $\xi = (\xi, \eta)$ are the direction cosine, F_k and F_l are the antenna voltage pattern, $\tilde{r}_{kl}(t)$ is the fringe-washing function, $t = \mathbf{u}_{kl} \xi / f_o$ is the spatial delay and f_o is the central frequency of the instrument.

The reconstruction method applied here is the resolving matrix approach [8]. Referring to the limited resolution of the instrument, this approach finds the brightness temperature map T_r which has its FOURIER transform confined to the experimental frequency coverage H . This H -band limited solution is the

brightness temperature map that realizes the minimum of the constrained optimization problem:

$$\begin{cases} \min_T \|V - \mathbf{G}T\|^2 \\ (\mathbf{I} - \mathbf{P}_H)T = 0 \end{cases} \quad (4)$$

where \mathbf{G} is the instrument modeling matrix and \mathbf{P}_H is the projector onto the subspace of the H -band limited functions. The solution is then given by:

$$T_r = \mathbf{U}^* \mathbf{Z} \mathbf{A}^+ \mathbf{V} \quad (5)$$

Here, $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^*$ is the More-Penrose pseudo-inverse of the so-called resolving matrix $\mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{U}^* \mathbf{Z}$ where \mathbf{U} is the FOURIER transform operator and \mathbf{Z} is the zero-padding operator beyond H .

The reference used to compute the reconstruction error is T_{rI}^{geo} , reconstructed from V^{geo} considering an ideal instrument (identical antenna patterns, no fringe-wash) and with a simple inverse FOURIER transform. In the following, each reconstructed scene are apodized with a BLACKMAN window. Figure 4 shows the brightness temperature map T_r^{obs} reconstructed from V^{obs} and subtracted to T_{rI}^{geo} . The region labeled Z_a is a zone of about $60 \text{ km} \times 85 \text{ km}$ when projected on a terrestrial frame which contains an alias of the Sun: its maximum temperature is about 30 K. The region labeled Z_b contains the sunglitter: its maximum temperature is about 15 K.

The main idea in the present work is to subtract the contribution of the pollution by the Sun to the measured data before the reconstruction process in order to retrieve the underlying brightness temperature distribution. The simulation-reconstruction steps are:

- step 1: the visibilities V^{obs} measured by a realistic instrument are simulated from T_o^{obs} ;
- step 2: a radiometric Gaussian noise with standard deviation $\sigma_T = 0.08$ K is added;
- step 3: the Sun contribution $V_{+\Delta T^{\text{sun}}}^{\text{sun}}$ is simulated from $T^{\text{sun}} + \Delta T^{\text{sun}}$, with $T^{\text{sun}} = 1.1 \times 10^5$ K and $\Delta T^{\text{sun}} = 0, 1000, 5000, \text{ or } 10000$ K;
- step 4: the sunglitter contribution V^{SS} is simulated from $T_o^{\text{SS}}, V_{\text{err}}^{\text{SS}}$ being simulated from $T_{o,\text{err}}^{\text{SS}}$ computed with a random error on the QuikSCAT wind data (± 1.5 m/s on wind speed, $\pm 20^\circ$ on wind direction);
- step 5: the Sun and sunglitter contributions are subtracted from the measured visibilities: $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+\Delta T^{\text{sun}}}^{\text{sun}}$;
- step 6: a brightness temperature map T_r is reconstructed from V^{sub} .

The reconstruction error is quantified by m, b and σ defined as:

$$T_{diff} = T_r - T_{rI}^{\text{geom}} \quad (6)$$

$$m = \max_{\mathcal{Z}} \{T_{diff}\} \quad (7)$$

$$b = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T_{diff} \quad (8)$$

$$\sigma = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (T_{diff}(\xi_i, \eta_i) - m)^2 \right] \quad (9)$$

where \mathcal{Z} is one of the two specific regions shown in Fig. 4 (\mathcal{Z}_a or \mathcal{Z}_b) and M is the number of pixels in this region.

The results are presented in Table I. The first column refers to the following cases:

- I $V^{\text{sub}} = V^{\text{geom}}$ (reference case)
- II $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+0K}^{\text{sun}}$
- III $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V_{\text{err}}^{\text{SS}} - V_{+0K}^{\text{sun}}$
- IV $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+1000K}^{\text{sun}}$
- V $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+5000K}^{\text{sun}}$
- VI $V^{\text{sub}} = (V^{\text{obs}} + \sigma_T) - V^{\text{SS}} - V_{+10000K}^{\text{sun}}$

Since relation (3) is linear, case II must be identical to case I.

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

The sunglitter is not the main source of reconstruction error. Even if an error is introduced on the contribution of the sunglitter to the measured visibilities, by introducing the typical range of error on QuikSCAT data for the wind (± 1.5 m/s on wind speed, $\pm 20^\circ$ on wind direction, case III), the standard deviation on \mathcal{Z}_b only increases by about 1%.

However, the situation seems more critical for the zone affected by Sun alias (\mathcal{Z}_a). When an error of only 1% is introduced on the real brightness temperature of the Sun, the standard deviation on \mathcal{Z}_a increases by 10% and the bias by about 25%. In the case of an error of 10000 K (10%) introduced on T^{sun} , σ can reach 0.880 K and the bias 0.606 K. Indeed, the main difference between these two contributions is their respective spectral range. The Sun is a point-shaped object and has mainly high-frequency components in FOURIER domain when the sunglitter has mainly low-frequency components. Since SAIR are band-limited instruments, the simulation of the Sun contribution to the measured visibilities V^{sun} does not contains enough information in high frequencies and it results in a larger dependence on the real temperature T^{sun} .

In conclusion, numerical simulations of the predicted illumination geometry of SMOS antenna by the Sun reveal that direct leakage by aliasing of the Sun image will frequently occur during the Sun seasonal cycle.

Applying an asymptotic model to predict the forward scattering of Sun radiations from a realistic rough sea surface, we show that significant contamination of the future SMOS measurements by sunglitter effects might occur, with an intensity depending on the date and the local surface roughness conditions.

Using these simulations, sunglitter contribution to interferometric measurements can be accounted for in order to retrieve the underlying brightness temperature. However, the reconstructions performed in this paper show that the brightness temperature of the Sun has to be measured with an accuracy of less than 1% to eliminate the contribution of its alias in the AFFOV. Alternative solutions are currently under study in order to use a first reconstruction from the raw data as a first guess of the Sun temperature.

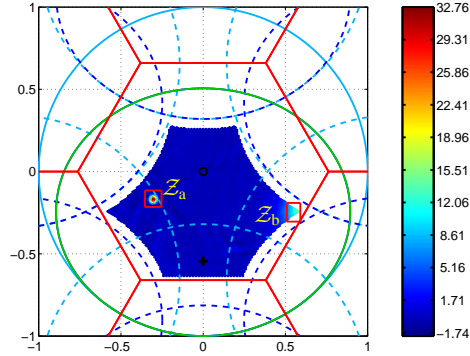


Fig. 4. Reconstructed scene from interferometric measurements polluted by the Sun at winter solstice: this map is $T_r^{\text{obs}} - T_r^{\text{geo}}$.

TABLE I
RECONSTRUCTION ERRORS ([K]) FOR THE DIFFERENT SCENARII.

	(\mathcal{Z}_a)	(\mathcal{Z}_b)	whole AFFOV
I	$m = 0.579$ $b = 0.156$ $\sigma = 0.190$	$m = 0.806$ $b = 0.080$ $\sigma = 0.330$	$\sigma = 0.246$
II	$m = 0.579$ $b = 0.156$ $\sigma = 0.190$	$m = 0.806$ $b = 0.080$ $\sigma = 0.330$	$\sigma = 0.246$
III		$m = 0.828$ $b = 0.105$ $\sigma = 0.333$	$\sigma = 0.246$
IV	$m = 0.579$ $b = 0.198$ $\sigma = 0.209$		$\sigma = 0.246$
V	$m = 1.510$ $b = 0.350$ $\sigma = 0.470$		$\sigma = 0.254$
VI	$m = 3.13$ $b = 0.606$ $\sigma = 0.880$		$\sigma = 0.277$

REFERENCES

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] A. G. Voronovich, *Small-slope approximation in wave scattering by rough surface*, Sov. Phys.-JETP, vol. 62, pp. 65-70, 1985.
- [3] A. G. Voronovich, *Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces*, Waves in Random Media, vol. 4, pp. 337-367, 1994.
- [4] L.A. Klein and C.T. Swift, *An improved model of the dielectric constant of sea water at microwave frequencies*, IEEE Trans. Antennas Propag., vol. AP-25, pp. 104-111, 1977.
- [5] V.N. Kudryatsev, V.K. Makin and B. Chapron, *Coupled sea surface-atmosphere model. 2. spectrum of short wind waves*, J.G.R. vol. 104, no. C4, pp. 7625-7639, 1999.
- [6] A. Almanac, *Astronomical almanac for the year 1997*, Washington and London: US and HM Nautical Almanac Offices, 1996.
- [7] A.R. Thompson, G.W. Swenson and J.W. Moran, *Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy*, John Wiley & Sons Inc., 1st Edition (534 pp), 1986.
- [8] E. Anterrieu, *A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers*, to appear in IEEE TGARS, 39(8), April 2004.

A strip adaptive processing approach for the SMOS space mission

Eric Anterrieu, Bruno Picard, Manuel Martin-Neira, Philippe Waldteufel, Martin Suess, Jean-Luc Vergely, Yann Kerr, and Sylvie Roques

Abstract—This article is concerned with the apodization windows to be applied to brightness temperature maps reconstructed from complex visibilities provided by the MIRAS instrument on board the SMOS spacecraft in order to achieve a close to uniform pixel at the Earth's surface level.

Index Terms—Interferometry, radiometry, aperture synthesis, imaging, apodization.

I. INTRODUCTION

SMOS, a mission led by the European Space Agency (ESA), is devoted to monitoring Soil Moisture and Ocean Salinity at global scale from L-band space borne radiometric observations [1]. The single payload of the mission is a Microwave Imaging Radiometer with Aperture Synthesis (MIRAS) equipped with 69 equi-spaced antennae operating at 1.415 GHz and located along the arms of a Y-shaped array. The corresponding interferometer measurements, also called complex visibilities, are obtained by cross-correlating the signals collected by every pair of antennae; a regularized reconstruction process [2] provides a band-limited brightness temperature map in the reference frame of the instrument.

Up to now a single isotropic windowing function was used for attenuating the Gibbs oscillations caused by the truncation of the complex visibilities to the star-shaped frequency coverage [3]. Consequently, the reconstructed map exhibits a constant and isotropic angular resolution over the instrument field of view. However, owing to the geometry of the problem, these properties are no longer true for the weighting function to be used at Earth's surface. Since the retrieval of physical quantities implies to combine several measurements for various incidence angles, variations in shape and size of the weighting function at surface level may result in significant errors when the SMOS pixel features strong heterogeneities. Specific characterizations of SMOS observations are given in [4]. During the SMOS Science Advisory Group No. 5, ESA suggested that this problem could be solved by a so

called "strip adaptive" processing [5], i.e. using a specific windowing function for every location in the reference frame of the antenna, in order to achieve close to uniform pixels at surface level. Taking advantage of the band-limited property of the solution, a family of windows is used in order to provide maps which exhibit such pixels. This contribution describes how the corresponding multi-windows apodization is performed in the alias-free field of view of SMOS shown on Fig. 1.

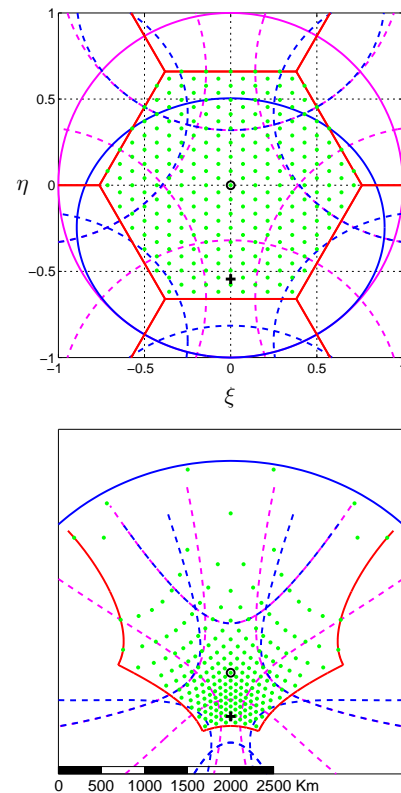


Fig. 1. Instantaneous field of view of SMOS in the antenna frame (*top*) and at ground level (*bottom*): the black cross is the sub-satellite footprint while the black circle points toward the boresight. The solid-blue ellipse is the limit of the Earthly horizon as seen from $h = 761$ Km altitude when the platform is tilted off nadir by $\varepsilon = 33^\circ$. The spacing d between the antennae is equal to $0.875\lambda_0$, the hexagonal elementary cell is drawn in solid-red with its neighbours in dashed-red responsible for the 6 alias counterparts of the Earthly horizon in dashed-blue and those of the sky horizon in dashed-pink. The green dots are the nodes of the hexagonal sampling grid \mathbb{G}_ξ .

E. Anterrieu and Bruno Picard are with CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique), 42 avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse - France. E-mail: Eric.Anterrieu@cerfacs.fr

M. Martin-Neira and M. Suess are with ESA (European Space Agency), ESTEC, Keplerlaan 1, Postbus 299, 2200 AG Noordwijk, The Netherlands.

P. Waldteufel is with IPSL (Institut Pierre-Simon Laplace), Service d'Aéronomie, BP3, 91371 Verrières le Buisson, France.

J.-L. Vergely is with ACRI/ST, 260 route du Pin Montard, BP 234, 06904 Sophia Antipolis, France.

Y. Kerr is with CESBIO (Centre d'Étude Spatiale de la Biosphère), 18 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France.

S. Roques is with OMP (Observatoire Midi-Pyrénées), UMR5572, 14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France.

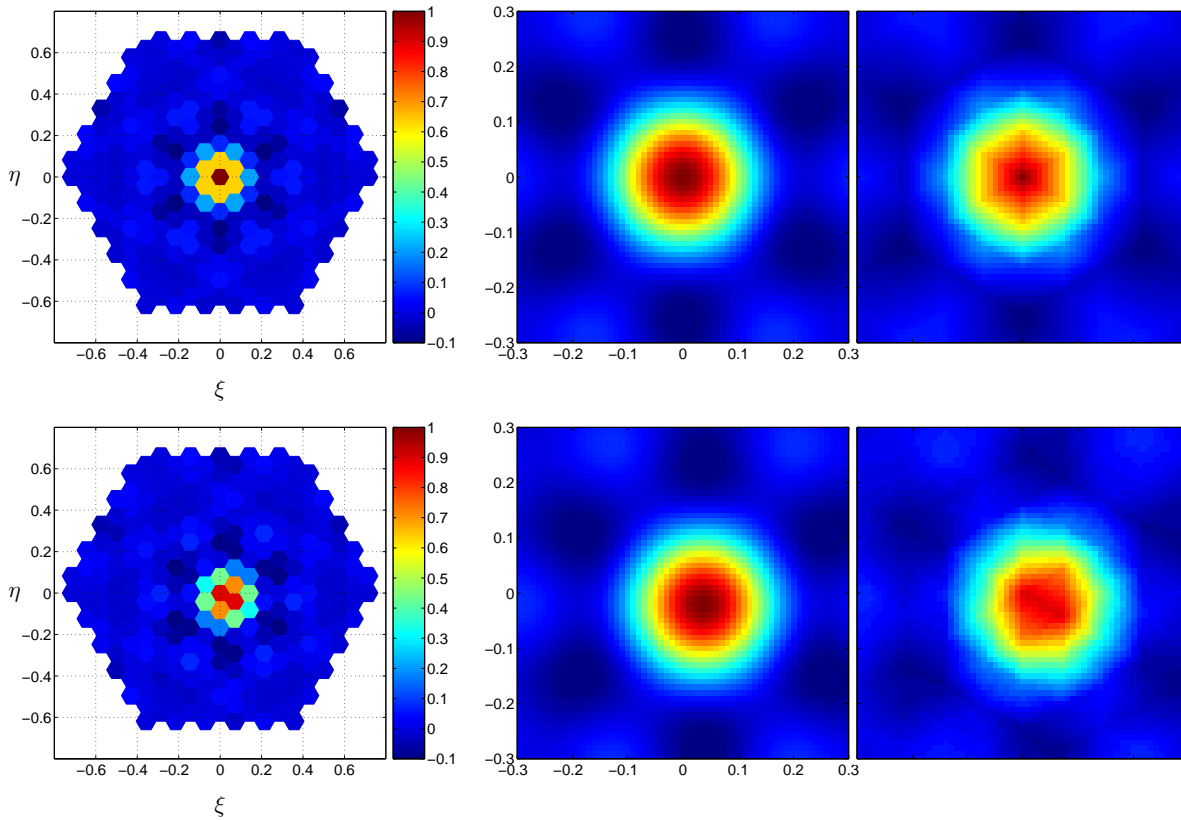


Fig. 2. The translation property of two interpolation procedures is illustrated here for an hexagonally sampled map. Even when the map is not translated (*top-left*), the DFT resampling (*center*) and a bilinear interpolation (*right*) do not lead to the same map, here resampled over a cartesian grid. While the latter reveals artifacts due to the initial hexagonal sampling, this is not the case of the former. When the map is translated, with the aid of the Fourier transform, by a translation vector whose components (ξ', η') are not multiples of the pixel size (*bottom-left*), the maps are again different. However, it is clear that the DFT resampling is translation independant (*center*), while the bilinear interpolation is not (*right*).

II. RESAMPLING SMOS DATA

Denoting by T a (reconstructed) band-limited brightness temperature map whose Fourier components $\hat{T}(u, v)$ are equal to zero outside the star-shaped frequency coverage H , interpolation at given values of direction cosines (ξ, η) could be performed through an inverse Discrete Fourier Transform (DFT):

$$T(\xi, \eta) = \sum_{u, v \in H} \hat{T}(u, v) e^{+2j\pi(u\xi + v\eta)}. \quad (1)$$

Of course, the Fast Fourier Transform (FFT) algorithm could be used if the points (ξ, η) coincide with the nodes of the spatial grid \mathbb{G}_ξ , but as illustrated in Fig. 1 this is not the case. However, thanks to the band-limited property of T , the computation time is not a serious bottleneck: for example, on a PC equipped with a Pentium 4 cadenced at 3 GHz and running Matlab© 7, less than 10^{-3} s are necessary to compute the value of T at a given point (ξ, η) from its 1393 (complex-valued) Fourier components $\hat{T}(u, v)$ in H .

According to the translation property of the Fourier transform, the Fourier components of $T(\xi + \xi', \eta + \eta')$ are equal to

$\hat{T}(u, v) \exp[-2j\pi(u\xi' + v\eta')]$. With regards to the properties of an interpolation or resampling process, it should be of course translation independant. This property is illustrated on Fig. 2 for relation (1) as well as for a standard bilinear interpolation. If the former is clearly translation independant, this is not the case of the latter which exhibits strong artifacts due to the original hexagonal sampling.

III. APODIZATION

In the remainder of this paper, Kaiser windows [6] are used to filter out the Gibbs effects due to the sharp frequency cut-off associated to the star-shaped frequency coverage H :

$$\widehat{W}(u, v) = \frac{I_0(\alpha\sqrt{1-\bar{\rho}^2})}{I_0(\alpha)}. \quad (2)$$

where I_0 is the zeroth order modified Bessel function. Here, $\bar{\rho} = \rho/\rho_{max}$ with $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ and α is a positive parameter (for $\alpha = 0$ we obtain the rectangular window). This adjustable parameter controls how quickly the function $\widehat{W}(u, v)$ approaches zero at the edges of H and therefore affects the characteristics of the apodized point-spread function $W(\xi, \eta)$

(the inverse Fourier transform of $\widehat{W}(u, v)$) in the synthesized antenna frame.

A. Single-windowing

According to relation (1), windowing and resampling could be performed at the same time in order to compute an apodized version $T_w = W \star T$ of T at given resampled points (ξ, η) :

$$T_w(\xi, \eta) = \sum_{u, v \in H} \widehat{W}(u, v) \widehat{T}(u, v) e^{+2j\pi(u\xi + v\eta)}. \quad (3)$$

The effect of this single-windowing is shown on Fig. 3 for a Kaiser window with $\alpha = 9$. Since the same window \widehat{W} is used over the alias-free field of view, the spatial resolution at ground level varies from one point to another and is not centro-symmetric.

B. Multi-windowing

Generalizing relation (3), a different apodization function can be used for every resampled point (ξ, η) :

$$T_w(\xi, \eta) = \sum_{u, v \in H} \widehat{W}_{\xi, \eta}(u, v) \widehat{T}(u, v) e^{+2j\pi(u\xi + v\eta)}. \quad (4)$$

Now, each Kaiser window $\widehat{W}_{\xi, \eta}$ has a variable parameter α and it is optimized in order to achieve a constant and isotropic resolution at ground level for every point (ξ, η) in the alias-free field of view. A basic linear relation is used for computing the corresponding parameters α :

$$\alpha \equiv \alpha(u, v) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad (5)$$

with $\tan \varphi = v/u$. The values of the parameters α_1 , α_2 and φ_1 are computed through an optimization procedure in such a way that the -3 dB contour of the weighting function at surface level becomes a constant circle with diameter D [7]. Of course, depending on the chosen D , this cannot be achieved over

the whole alias-free field of view. The effect of this multi-windowing is shown on Fig. 4 for $D = 55$ Km. This map has to be compared to the map shown on Fig. 3. As expected, the spatial resolution at ground level is now constant and isotropic over the part of the alias-free field of view accessible to the optimization procedure, but the available swath and range of incidence angles is smaller: this is the cost of a process which aims at degrading the resolution up to a given limit, here $D = 55$ Km. This optimization process has been conducted for various ground resolution D . As shown on Table I, the larger is this limit, the wider is the swath and the larger is the range of available incidence angles.

TABLE I
SWATH AND RANGE OF INCIDENCE ANGLES.

ground resolution	swath	incidence angles
55 Km	1300 Km	$0^\circ / 55^\circ$
44 Km	1100 Km	$0^\circ / 50^\circ$
33 Km	850 Km	$0^\circ / 40^\circ$

Shown on Fig. 5 are the values of the parameters α_1 , α_2 and φ_1 used for the multi-windows apodization of the map shown on Fig. 4. Since some α_2 values are very small, sidelobes at corresponding locations may reach up to large levels, close to those for a rectangular window. This is illustrated on Fig. 6 where both the efficiency of the main beam and the level of the highest sidelobes are shown at ground level. These factors of merit have to be compared, for example, to those obtained with a single Blackman window: 98.7% and -13.6 dB, respectively.

IV. QUALITY OF RETRIEVAL

The effect of sidelobe contributions when retrieving geophysical parameters over heterogeneous terrain must be investigated. The quality of retrieval is indicated by the behavior of the centered variable $\zeta = (SM - SM_o) / \sigma_{SM}$, where SM

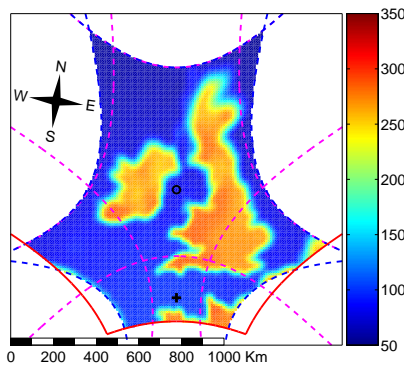


Fig. 3. A reconstructed map is resampled from an hexagonal grid in the antenna frame to a cartesian one at the Earth's surface level and apodized at the same time with a Kaiser window with $\alpha = 9$. Since the same window is used over the alias-free field of view, due to geometrical considerations the spatial resolution at ground level varies from 25 Km (south of England) to 100 Km (north of Scotland).

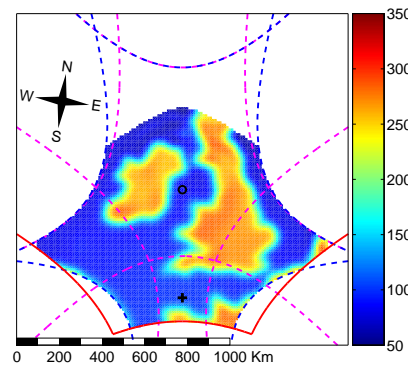


Fig. 4. The reconstructed map of Fig. 3 is here resampled over the same cartesian grid at the Earth's surface level and apodized at the same time with multiple Kaiser windows computed with the parameters shown on Fig. 5. Consequently, this map exhibits a constant and isotropic resolution at ground level equal to 55 Km.

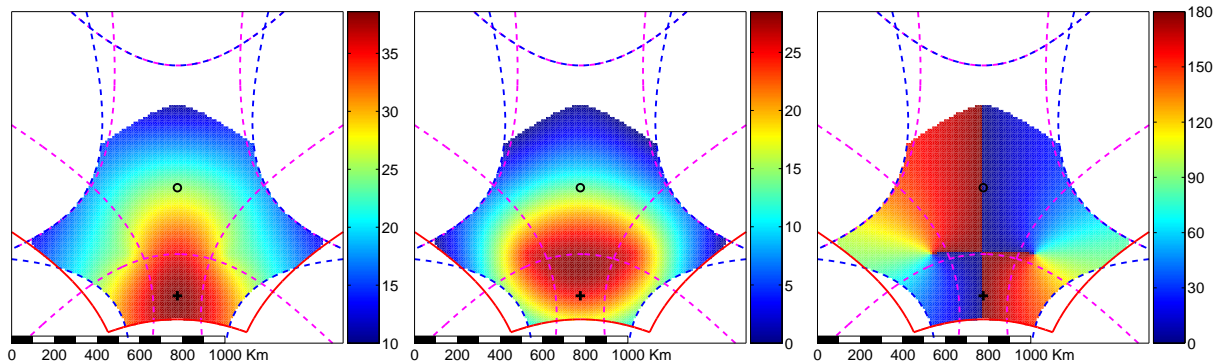


Fig. 5. Parameters α_1 , α_2 and φ_1 (from left to right) optimized for a constant and isotropic resolution at ground level equal to 55 Km.

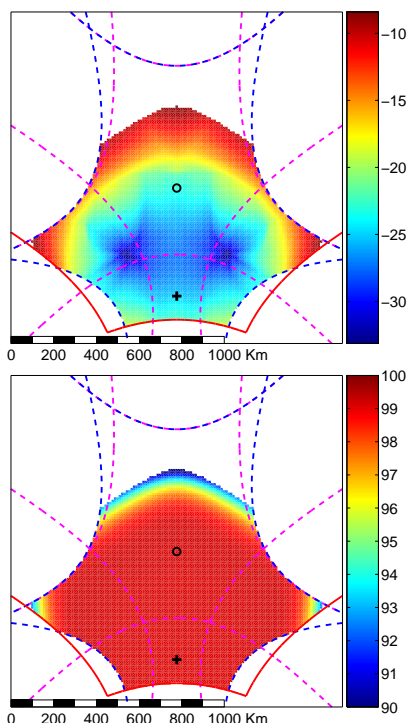


Fig. 6. Level of the sidelobes in dB (top) and efficiency of the main beam in % (bottom) at ground level for a spatial resolution equal to 55 Km.

and SM_o are retrieved and exact values for soil moisture; σ_{SM} is the estimated retrieval uncertainty. ζ should follow a Gaussian law with a mean value $\langle \zeta \rangle = 0$ and a standard deviation $\sigma_\zeta = 1$. Whenever $\langle \zeta \rangle$ differs from zero, an overall retrieval bias on the soil moisture appears; for σ_ζ values significantly larger than unity, the estimated retrieval uncertainties are unreliable, i.e. they are likely to be underestimated.

Shown on Table II are the statistics of the centered variable ζ over Western Europe when selecting either a Blackmann window or the strip adaptive window and choosing either an average or an exact, incidence angle dependent, weighting

TABLE II
STATISTICS OF THE CENTERED VARIABLE ζ .

selected window	choice for retrieval	$\langle \zeta \rangle$	σ_ζ
Blackman	average	0.66	1.84
Blackman	true	-0.04	0.99
Adaptive	average	0.17	1.45
Adaptive	true	-0.09	1.05

function for the retrieval. Every pixel with weighted fraction of vegetated soil greater than 20% is included.

While in the retrieval it is in principle possible to select for each location within the field of view the appropriate (exact) weighting function at surface level, it is much simpler to assume this function to be everywhere identical. This identity would indeed be achieved through using the strip adaptive processing, but for sidelobes. As shown on Table II, sidelobe effects are detected. However the performance when assuming an average weighting function is shown to be much better in the adaptive case than in a non adaptive case, especially for the bias parameter.

REFERENCES

- [1] Y.H. Kerr, P. Waldteufel, J.-P. Wigneron, J.-M. Martinuzzi, J. Font, and M. Berger, *Soil Moisture Retrieval from Space: The Soil Moisture and Ocean Salinity (SMOS) Mission*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 39(8), pp. 1729-1735, 2001.
- [2] E. Anterrieu, *A resolving matrix approach for synthetic aperture imaging radiometers*, to appear in IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 42(8), 2004.
- [3] E. Anterrieu, P. Waldteufel, and A. Lannes, *Apodization functions for 2D hexagonally sampled synthetic aperture imaging radiometers*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40(12), pp. 2531-2542, 2002.
- [4] P. Waldteufel, E. Anterrieu, J.M. Goutoule, and Y.H. Kerr, *Field of view characteristics of a microwave 2D interferometric antenna as illustrated by the MIRAS concept*, Proc. 6th specialist meeting on microwave radiometry (microRAD'99), Firenze (Italia), pp. 477-483, 1999.
- [5] M. Martin-Neira, *Strip Adaptive Processing*, SMOS SAG-5, 30 March 2001, ESTEC, The Netherlands.
- [6] J. F. Kaiser and R. W. Schafer, *On the Use of the 10-Sinh Window for Spectrum Analysis*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 28(1), pp. 105-107, 1980.
- [7] A.W. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher, *Direct least-squares fitting of ellipses*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21(5), pp. 476-480, 1999.

Annexe C

Le Nouveau Chapitre de Thèse

C.1 Présentation succincte

La thèse que je présente dans ce document a pour titre :

« TÉLÉDÉTECTION DE LA SURFACE TERRESTRE
PAR UN RADIOMÈTRE IMAGEUR À SYNTHÈSE D'OUVERTURE :
PRINCIPE DE MESURE,
TRAITEMENT DES DONNÉES INTERFÉROMÉTRIQUES
ET MÉTHODES DE RECONSTRUCTION RÉGULARISÉES. »

Les récents évènements météorologiques intenses, comme la tempête de 1999 ou encore la canicule de l'été 2003, ont rendu tangible auprès du public la problématique du changement climatique. Or, l'absence de mesures globales de l'humidité des sols et de la salinité des océans limite la capacité de la communauté scientifique à prévoir, de façon précise, à la fois le temps de demain et le climat du siècle qui débute. Il existe donc un besoin d'une mesure systématique de ces deux paramètres physiques.

Pour pouvoir s'affranchir des phénomènes de rugosité de surface (dus aux vagues ou encore à la couverture végétale) le choix de l'instrument s'est orienté vers un radiomètre, un instrument passif mesurant l'intensité du champ électromagnétique émis par la surface et qui, en bande L (à la fréquence de 1.4 GHz ou à la longueur d'onde de 21 cm) varie en fonction de la présence de la salinité sur les océans et de l'humidité sur les continents.

Or, les contraintes technologiques sont fortes : l'instrument devra pouvoir discerner des détails de l'ordre de 30 km et des variations d'intensité, appelée aussi température de brillance (T_b), de l'ordre du Kelvin, ce qui imposerait de déployer dans l'espace une antenne d'un diamètre de près de 4 m (trop coûteux).

La technique de la synthèse d'ouverture, initialement développée en radio-astronomie permet de satisfaire les conditions de résolution spatiale (30 km) et de sensibilité radiométrique (1 K). Elle consiste à combiner les signaux mesurés par des antennes régulièrement espacées sur des bras formant, par exemple, un Y, un U ou un T. La résolution spatiale d'un tel instrument est celle d'une antenne ayant pour diamètre la plus grande distance entre deux antennes. Ainsi, la mission spatiale SMOS (pour « *Soil Moisture and Ocean Salinity Mission* »), initiée par l'Agence Spatiale Européenne (ASE) à travers son programme « Exploration de la Terre » et financée en partie par le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), s'appuie sur un instrument comportant 3 bras en Y sur lesquels sont répartis 69 antennes. A partir de 2007, date prévue pour son lancement, ce dernier fournira des données interférométriques permettant d'établir une carte globale d'humidité de surface des sols tous les 3 jours et une carte globale de salinité tous les 10 jours.

Deux grandes étapes sont discernées dans ce projet : en premier lieu, il s'agit de reconstruire des cartes de températures de brillance 2D à partir des mesures instrumentales, et dans un deuxième temps, de retrouver les distributions d'humidité et de salinité à partir de ces cartes. L'objet de ma thèse porte sur la première partie.

En effet, l'instrument ne fournit pas directement des mesures de la distribution spatiale de température de brillance mais des informations sur ce qui s'approche des composantes de FOURIER de cette distribution : ces mesures sont appelées visibilité et forment un échantillonnage de la fonction de cohérence spatiale. Différentes méthodes existent ou sont en développement pour estimer au mieux la carte de T_b à partir des seules mesures instrumentales. Au cours de ma thèse, j'ai pu comparer certaines de ces méthodes mais aussi répondre aux questions, autour de la reconstruction d'image, qui ont émergé au fur et à mesure du déroulement d'un projet novateur et soulevant sans arrêt de nouvelles interrogations.

C.2 L'environnement scientifique

Cette thèse s'est déroulée au sein du « Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique ». Dans de ce laboratoire, Eric Anterrieu, qui m'a dirigé durant des trois années, a été attaché à la mission SMOS depuis les premières étapes de son développement, alors même qu'il n'était qu'un projet de réponse à l'appel d'offre émis par l'ASE. Spécialisé dans le traitement de données interférométriques pour la radio-astronomie, ses compétences en reconstruction ont été mise à contribution, notamment dans la définition de la géométrie de l'instrument. Durant ces trois dernières années, ses recherches se sont concentrées sur le développement d'une méthode originale de traitement des données instrumentales et la caractérisation de ses propriétés.

Les axes de recherches du CERFACS s'articulent autour de l'électromagnétisme, la dynamique des fluides, l'algorithmie et l'étude du changement climatique. Ces thèmes, portés par les différentes équipes du laboratoire, ont en commun leur besoin critique en moyen de calcul informatique et la spécificité du CERFACS est de leur fournir un environnement favorable à travers l'utilisation de plusieurs machines adaptées aux calculs scientifiques de par leur architecture (calculs parallèles sur des processeurs performants en terme de cadence et de mémoire vive).

Le CERFACS est une société civile dont les cinq actionnaires sont le CNES, EADS, EDF, Météo-France et la SNECMA. Ces cinq partenaires assurent une partie du financement, en contre-partie d'activités de recherche et de développement en rapport plus ou moins direct avec leurs activités. D'autre part, sans doute de façon plus marquée que dans un laboratoire de recherche CNRS ou universitaire, chacune des équipes doit contribuer à son propre financement, via des réponses à des appels d'offre émis, par exemple, par des organismes européens (ECMWF, Centre Européen de prévision météorologique, Commission Européenne...) ou par des entreprises (Airbus...). Le CERFACS accueille aussi dans ses murs des chercheurs du CNRS, formant ainsi une Unité de Recherche Associée (URA 1875).

Ainsi, l'étude de la reconstruction d'image pour le projet SMOS n'est pas directement affichée comme un axe principal au sein du laboratoire, la thématique SMOS, dont Eric et moi sommes les seuls représentants, étant rattachée à l'équipe « changement climatique » (GlobC).

C.3 Un contexte concurrentiel

Le financement de nos recherches a été assuré dans un premier temps par la région Midi-Pyrénées, suite à la réponse à un appel d'offre. Un financement de l'ASE a pris le relais à partir de Juin 2002 : le but de ce contrat européen est de faire le point sur les méthodes de reconstruction existantes.

En effet, c'est la société CASA (*Construcciones Aeronauticas, S.A.*) qui est le maître d'oeuvre du projet SMOS. L'équipe traitement du signal de l'Université Polytechnique de Catalogne (UPC) qui collabore étroitement avec CASA, a donc développé sa propre méthode de reconstruction. Parallèlement, les équipes du CERFACS, du DLR (*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt*, agence spatiale allemande) et du TUD (*Technical University of Denmark*) ont proposé des alternatives à cette méthode.

Regroupées à la demande de l'ASE, ces équipes avaient pour tâche, sous l'égide d'un contrat, de fixer un cadre commun pour la comparaison des différentes méthodes de reconstruction. Une société de service portugaise participait aux réunions qui ont ponctué les activités de ce groupe de travail et était chargée par l'ASE d'implémenter les méthodes de reconstruction, en collaboration avec les équipes les ayant développées, dans le but de caractériser leurs besoins en

terme informatique (mémoire, temps de calcul, bibliothèque scientifique...).

D'autre part, un des objectifs de ce groupe d'étude était d'étudier la possibilité de l'implémentation ces méthodes de reconstructions dans le SEPS, logiciel de simulation de la mission SMOS (*SMOS End-to-end Performance Simulator*), développé en partie par l'UPC, et, au terme de ce contrat, les équipes ont pour obligation de remettre les algorithmes de leurs méthodes à l'ASE.

C.4 Positionnement personnel et compétences acquises

Ces trois années m'ont surtout permis d'être plongé au cœur de la recherche scientifique appliquée à un projet européen voire international. Sans doute, la principale leçon à tirer de cette thèse est la capacité d'adaptation qu'elle a nécessitée. Au delà de l'approche technique, elle est un environnement favorable au développement du sens de l'initiative et de l'auto-gestion. Le contexte d'une recherche dans le cadre d'un projet européen aussi novateur oblige à développer une forte réactivité aux problèmes qui émergent au fur et à mesure de l'avancement des travaux.

Le contexte scientifique est clairement concurrentiel. Ainsi, au contact de chercheurs de diverses nations (Espagne, Allemagne, Italie, Portugal et même Etats-Unis), j'ai été amené à assister et parfois à participer activement à des réunions de travail au cours desquelles j'ai dû faire montre de capacité de dialogue, voire même de négociation dans un environnement international.

En outre, ces trois ans m'ont aussi permis de développer mon assurance et mes facultés à diffuser la connaissance. Impliqué dans un projet regroupant des scientifiques de tous horizons, j'ai dû adapter le niveau de mes explications à mon interlocuteur, afin que des chercheurs travaillant sur la phase 2 du projet (passage des températures de brillance aux produits physiques) puissent se faire une idée des difficultés rencontrées et ainsi se forger une opinion sur les options qui leur seront proposées.

Au sein du groupe d'étude sur les méthodes de reconstruction et dans le cadre du contrat avec l'ASE, j'ai apporté mon expérience de l'implémentation des méthodes de reconstruction en présentant les besoins informatiques qu'elles demandent. J'ai ainsi pu travailler en étroite collaboration avec la société portugaise devant comparer selon cette axe l'ensemble des méthodes existantes.

Par la suite, j'ai diagnostiqué les problèmes rencontrés lors de l'utilisation du logiciel SEPS dans le but de comparer les performances des méthodes de reconstruction. Ce travail en profondeur sur le code informatique a permis de dresser une liste des points demandant un éclaircissement de la part des concepteurs du logiciel, tant du point de vue strictement algorithmique que méthodologique.

C.5 Evaluation du coût consolidé de la thèse

Moyens en personnel :

1 Ingénieur de recherche 2ème classe, échelon 8 :			
(Salaire brut :	2765 € × 36 = 99540 €)		
Coût salarial :	99540 € × 1.75 =	174195 €	
1 Doctorant, bourse Ministère de la Recherche :			
(Salaire brut :	1255 € × 36 = 45180 €)		
Coût salarial :	45180 € × 1.75 =	79065 €	
1 Stagiaire maîtrise, 6 mois, défraiement :			
	300 € × 6 =	1800 €	
Coût salarial TOTAL :			= 255060 €

Infrastructure :

occupation de la surface (bâtiment, services commun, fluides)

+ heures de calculs locales (machines du CERFACS)

évalué à 90% du coût salarial : $255060 \times 0.9 = 229554 \text{€}$

Coût infrastructure TOTAL :			= 229554 €
------------------------------------	--	--	-------------------

Moyens Matériels :

Mobilier :

1 bureau	=	190 €
1 fauteuil	=	100 €

Informatique :

1 PC portable	=	1895 €
1 Station	=	1995 €
1 PC	=	1330 €
1 PC	=	4390 €
3 licences « Matlab »	730 × 3 =	2190 €

Coût Matériel TOTAL :			= 12090 €
------------------------------	--	--	------------------

Déplacements :

Toulouse-Paris AR :	400 × 10 =	4000 €
Toulouse-Munich AR :	270 × 5 =	1350 €

Coût Déplacement TOTAL :			= 5350 €
---------------------------------	--	--	-----------------

Congrès :

IGARSS'02 (Toronto) :	Dépl. = 520 × 2 = 1040 €	Insc = 625 + 190 = 815 €
TOTAL :	=	1855 €
IGARSS'03 (Toulouse) :		Insc = 625 + 190 = 815 €
TOTAL :	=	815 €
MicroRad'04 (Rome) :	Dépl. = 280 €	Insc = 250 €
TOTAL :	=	530 €
IGARSS'04 (Ankorage) :	Dépl. = 930 €	Insc = 625 €
TOTAL :	=	1555 €

Coût Congrès TOTAL :			= 4755 €
-----------------------------	--	--	-----------------

<u>Articles :</u>			
Apodisation	Radio Science	=	630 €
Matrice Résolvante	IEEE TGRS	=	1880 €
Coût Article TOTAL :		=	2510 €
COUT CONSOLIDE TOTAL :		=	509319 €

C.6 Impact de la thèse

Les travaux effectués au cours de cette thèse, ont permis notamment un affichage clair du CERFACS au sein d'un projet européen. D'autre part, l'apport de mesures systématiques globales de paramètres physiques jusque là dotés d'un réseau d'observation peu dense permettra une plus grande fiabilité à la fois des modèles météorologiques et des modèles de prévision climatique.

Le travail que j'ai mené durant trois ans a permis de préciser l'importance d'aspects fondamentaux de la reconstruction d'image. D'autre part, j'ai tenté, à travers la rédaction de ce mémoire, de faire passer auprès de l'ensemble de la communauté scientifique impliquée dans le projet SMOS, quelques idées fondamentales sur le fonctionnement de l'instrument qui restait obscur pour nombre d'entre eux.

Enfin, l'ensemble des outils développés durant ces trois années sera rassemblé à moyen terme au sein d'un logiciel spécifiquement dédié à la reconstruction d'image pour des radiomètres à synthèse d'ouverture dans des configurations variées.

En conclusion, le contexte spécifique d'une thèse menée au sein d'un projet spatial européen novateur et en cours de développement, couplé à l'effort de synthèse et de recul que demande la rédaction de ce Nouveau Chapitre de Thèse et à l'aide précieuse apportée dans ce cadre par mon « mentor », m'a amené à réfléchir de façon concrète à mon avenir professionnel et à considérer une carrière hors des traditionnels sentiers académiques. Le NCT m'a ainsi servi de base de discussions et de document de synthèse lors de mes différents entretiens d'embauche.

Résumé

Dans le but d'obtenir les premières mesures globales d'humidité des sols et de salinité des océans, l'Agence Spatiale Européenne, à travers son programme « Exploration de la Terre », finance la mission spatiale SMOS (*Soil Moisture and Ocean Salinity*). Elle repose, pour la première fois dans le cadre de l'observation de la Terre, sur l'utilisation d'un radiomètre imageur à synthèse d'ouverture, technologie initialement développée en radioastronomie.

Cette thèse est axée sur l'étude des méthodes de reconstruction régularisées permettant, à partir des données interférométriques fournies par l'instrument, d'obtenir des cartes de températures de brillance.

Le principe de mesure diffère de celui des instruments habituellement utilisés pour l'observation de la surface terrestre. Une première partie est donc consacrée à une introduction des mécanismes fondamentaux de l'interférométrie passive, à travers une étude de la chaîne de mesure, d'un rappel de l'expérience des trous d'YOUNG et des propriétés de la transformée de FOURIER à deux dimensions.

Le traitement des données interférométriques demande un cadre géométrique et algébrique rigoureux, décrit dans une seconde partie. De plus, les radiomètres à synthèse d'ouverture étant des instruments à bande passante limitée, il est nécessaire de faire appel à l'apodisation pour réduire les oscillations apparaissant dans les cartes reconstruites. Les fenêtres d'apodisation sont donc caractérisées pour deux configurations possibles du réseau d'antennes. L'estimation des paramètres géophysiques demandant le traitement de cartes de températures de brillance définies sur des grilles régulières et à résolution spatiale constante, nous avons introduit dans ce but des techniques de rééchantillonnage et la possibilité d'utiliser le multi-fenêtrage.

Le problème inverse à résoudre étant mal posé, il est important de s'assurer de l'existence d'une solution unique. C'est là l'objet de l'utilisation de méthodes de reconstruction régularisées. Elles sont définies et comparées dans une troisième partie. Elles sont ensuite utilisées pour caractériser plusieurs problèmes intervenant dans la reconstruction d'image pour les radiomètres imageurs à synthèse d'ouverture. Ainsi, l'erreur systématique, qui intervient alors même qu'aucune erreur sur les données ou sur la modélisation de l'instrument n'est introduite, est expliquée et quantifiée pour deux méthodes de reconstruction régularisées et pour différentes scènes observées. La propagation du bruit radiométrique sur les données fait l'objet d'un travail spécifique, ainsi que l'impact des erreurs de modélisation subsistant suite à une auto-caractérisation, méthode présentée ici et permettant une calibration en vol des paramètres instrumentaux. L'impact de la pollution des données interférométriques par le rayonnement solaire sur la télédétection des océans est ensuite étudié. Enfin, la faisabilité et la robustesse de la reconstruction en mode de polarisation totale à l'aide des méthodes de reconstruction régularisées sont démontrées.

Mots-clés: interférométrie, synthèse d'ouverture, problèmes inverses, régularisation.

