HAL
open science

Imagerie Mathématique: segmentation sous contraintes géométriques Théorie et Applications

Carole Le Guyader

To cite this version:

Carole Le Guyader. Imagerie Mathématique: segmentation sous contraintes géométriques Théorie et Applications. Mathématiques [math]. INSA de Rouen, 2004. Français. NNT : . tel-00009036

HAL Id: tel-00009036

https://theses.hal.science/tel-00009036v1

Submitted on 15 Apr 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT

PRESENTEE A

L'INSA DE ROUEN

Imagerie Mathématique : Segmentation sous contraintes géométriques ~ Théorie et Applications

---

Soutenue le 09 décembre 2004

par
Carole LE GUYADER

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Après avis de:

M. R. ABGRALL, Professeur, Université de BORDEAUX 1	Rapporteur
Mle H. BARUCQ, MCF HDR, Université de PAU	Rapporteur
M. G. BARLES, Professeur, Université de TOURS	Rapporteur

Devant la Commission d'examen formée des rapporteurs et de:

M. D. APPRATO, Professeur, Université de PAU	Président du Jury
M. C. GOUT, MCF HDR, INSA de ROUEN	Directeur de Thèse
M. R. FERNANDEZ, Professeur, Université de ROUEN	Examinateur
M. W. RESPONDEK , Professeur, INSA de ROUEN	Directeur de Thèse

Remerciements

C'est peut-être la page la plus délicate à écrire: il est difficile de restituer en quelques mots ce que le travail réalisé au cours de ces dernières années et les rencontres effectuées m'ont apporté.
Tout d'abord, je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Messieurs Christian Gout et Witold Respondek, mes directeurs de thèse.
Je tiens à remercier Christian Gout qui a su me guider avec compétence, dynamisme, gentillesse et avec une habile alchimie entre autonomie et rigueur.
Je le remercie de m'avoir donné la possibilité de m'épanouïr dans un sujet riche aux multiples aspects et de m'avoir permis de réaliser des choses auxquelles il y a seulement 2 ans, je n'aurais songé.
Je salue également ses qualités humaines: sa gentillesse, sa droiture et son intégrité, sa détermination.
Peut-être maintenant arriverai-je à le tutoyer même si j'ai du mal à me défaire du 'vous'...
Je tiens à remercier Witold Respondek pour m'avoir accueillie au sein de son laboratoire. Il m'est impossible de ne pas souligner sa disponibilité, sa gentillesse, la sagesse de ses conseils, l'étendue de sa culture mathématique. Je le remercie d'avoir toujours agrémenté ses cours d'une touche historique qu'on néglige parfois. Pour tout cela donc, je vous adresse ma plus grande reconnaissance.
Je remercie très sincèrement Madame Hélène Barucq et Monsieur Rémi Abgrall qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant au jury.
Je souhaitais remercier tout particulièrement Monsieur Guy Barles, également rapporteur de cette thèse, dont les remarques judicieuses et les conseils ont contribué à améliorer ce travail. Je salue sa disponibilité, sa gentillesse et sa rigueur.
Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à Messieurs Fernandez et Apprato qui ont accepté d'être membres du jury.
Je remercie particulièrement Monsieur Apprato, pour sa compétence, sa gentillesse, son sens critique et son humour à toutes épreuves.
Je tiens également à saluer Luminita Vese avec qui, je l'espère, nous pourrons collaborer à nouveau dans le futur. Je formule le même souhait à l'égard de Monsieur Eric Laffon.
Ma plus grande affection va aux membres du laboratoire de mathématiques de l'INSA qui ont fait de cette thèse une réussite humaine: Sandra pour sa gentillesse et son efficacité, Sophie pour ses sourires et sa bonne humeur, Omar pour son aide précieuse, sa gentillesse et sa disponibilité, Can, pour son attention, sa jovialité et son aide précieuse, Vincent, Sandra, Eric et Lionel qui ont partagé avec moi, à un moment ou un autre, le bureau des doctorants, Bernard Gleyse pour les discussions que j'ai pu avoir avec lui.
Je tiens ensuite, à exprimer ma plus profonde gratitude à l'équipe pédagogique du 1er cycle

de l'INSA qui m'a accueillie dans le cadre de mes activités d'enseignement. Merci à Messieurs Goglu, Barbé, Delapierre et Boncrey pour la confiance qu'ils m'ont accordée et pour m'avoir si bien intégrée au sein de leur équipe. Merci également à Mesdames Poussard et Gariel pour leur gentillesse et leur attention. Cette expérience riche et très intéressante a confirmé mon désir de poursuivre dans l'enseignement.
Mais tout cela serait incomplet si j'oubliais ici les personnes qui, sans le savoir, par leurs encouragements et leurs sourires, ont contribué à rendre ces années des plus belles.
Je remercie donc Aziza, pour ce qu'elle est, Dominique dont le talent m'épate, Luc et Dominique, pour ce qu'ils font, le groupe J des IBIS (pour une première classe, j'ai eu beaucoup de chance !), Delphine, qui a su garder une âme d'enfant, Fatimatou et Charles-Edouard pour avoir toujours gardé un œil attentif sur moi, Lise pour nos conversations et pour m'avoir initiée à la danse, Cédric pour ce qu'il est (ne change rien), Aurélien et Caroline (ne changez rien non plus, arrêtez juste la cigarette...), Gary, mon ami breton, Bruno, mon ami 'brésilien', Caroline, pour la personne attentive et généreuse qu'elle est, Isabelle, qui sait me pousser dans mes derniers retranchements et qui a toujours été là, Pia qui m'initie au Danois, et tous les autres: Ghislain, Grégoire, Sébastien, Thomas, Kévin, Céline et Al. Je remercie ceux qui m'ont accompagnée pendant les 3 années passées à l'INSA. Ils ont eu un rôle beaucoup plus important qu'ils ne sauraient l'imaginer...
Je formule ici le vœu que notre amitié puisse perdurer.
Vient maintenant le tour de ma famille. Merci à mes parents pour m'avoir toujours laissé le choix et m'avoir soutenue dans toutes les entreprises auxquelles j'ai voulu me risquer. Merci à ma sœur: c'est fou comme on se ressemble malgré les apparences et à Florian. Ne changez pas. Merci aussi à mes grands-parents que j'adore pour tout ce qu'ils m'apportent. Merci à Mireille, Anne-Marie, Cyrille, Elodie qui se reconnaîtront. Je finis par celui qui a une place toute particulière: Vincent. Merci de m'avoir toujours soutenue, pour avoir été là quand il le fallait. Merci de m'apporter tout ce que tu m'apportes et merci d'avoir contribué à faire de moi ce que je suis aujourd'hui.
Une pensée affectueuse à ceux qui nous ont quittés trop tôt: André et Didier.

Table des matières

Introduction **7**

I Etat de l'Art **15**

Introduction **17**

1 Notations et rappels **21**
1.1 Notations et définitions 21
1.1.1 Espaces normés et espaces de Hilbert 22
1.1.2 Espaces fonctionnels 25
1.2 Compléments de calculs différentiels et éléments d'optimisation 30
1.2.1 Rappels sur la dérivation 30
1.2.2 Conditions du premier ordre pour un optimum lié 31
1.2.3 Contraintes égalités 32
1.3 Rappels sur les éléments finis de Bogner-Fox-Schmit de classe C^1 32

2 Présentation de la méthode de Contours Actifs **37**
2.1 Modélisation du problème, définitions 37
2.2 Approche mathématique 38
2.3 Vers un modèle dynamique 39
2.4 Approche Analyse fonctionnelle 41
2.5 Instabilité liée à la force d'image du modèle des contours actifs 44
2.5.1 Discrétisation temporelle 44
2.5.2 Discrétisation spatiale 46
2.5.3 Elasticité-rigidité 46
2.6 Le modèle des "Balloons" 46
2.6.1 Approche générale 46
2.6.2 Approche mathématique 48

3 Modèles déformables: représentation de structures géologiques **49**
3.1 Paramétrisation de la structure 50
3.2 Introduction du problème de minimisation 53
3.2.1 Energie interne ou *de régularisation* 53
3.2.2 Energie externe 53
3.2.3 Données de puits: données de profondeur sous forme de conditions d'interpolation 54

3.2.4 Définition du critère de minimisation 54
3.3 Problème d'évolution associé 54
3.3.1 Introduction d'une composante dynamique au modèle 54
3.3.2 Résolution 55
3.4 Présentation de quelques applications 55

4 Une approche fondée sur une analogie optique 59
4.1 La programmation dynamique 61
4.2 Approche mathématique de la programmation dynamique dans le cadre de cette étude 62

5 Contours actifs géodésiques 65
5.1 Un modèle géométrique de contours actifs 65
5.2 Un modèle de contours actifs géodésiques 67
5.2.1 Introduction des géodésiques 67
5.2.2 Equation d'évolution de la courbe et approche "level set" 70
5.2.3 Comparatif avec le modèle géométrique de Caselles *et al.* 70

6 Méthodes "level set" et "fast marching" 73
6.1 Présentation de la méthode "level set" 73
6.2 Méthode "level set" 74
6.3 Cas particulier de la méthode "Fast Marching" 76
6.3.1 Schémas numériques appliqués 76
6.3.2 Classification des pixels 77
6.3.3 Implémentation-Algorithme 77
6.3.4 Calcul des distances 79

7 Reconstruction de forme 81
7.1 Problème de surface minimale 82
7.2 Formulation à l'aide d'une fonction de type "level set" 83

8 Compléments 85

II Segmentation d'images sous contraintes géométriques utilisant les surfaces déformables avec une approche "level set" 89

9 Introduction 91

10 Modélisation du problème 93
10.1 Les données 93
10.1.1 Les données d'attributs 93
10.1.2 Les données géométriques d'interpolation 93
10.2 Modélisation 94
10.2.1 Principe 94
10.2.2 Espace fonctionnel des représentations admissibles 96
10.2.3 Données géométriques 96
10.2.4 Définition des critères et des contraintes 97

10.2.5 Problème de minimisation 98

11 Linéarisation du problème **101**
11.1 Linéarisation du problème - existence, unicité 101
11.2 Formulation à l'aide des multiplicateurs de Lagrange 105
11.2.1 Introduction d'une forme linéaire définie sur l'orthogonal de K 105
11.2.2 Introduction des multiplicateurs de Lagrange 106

12 Le problème non-linéaire **109**
12.1 Quelques résultats sur le problème statique 109
12.2 Le problème d'évolution associé 111

13 Discrétisation **115**
13.1 Discrétisation en temps 115
13.1.1 Approximation de la dérivée en temps 115
13.2 Discrétisation totale 118
13.3 Mise en œuvre 121
13.3.1 Rappels sur les fonctions de base de K 122
13.3.2 Calcul des éléments constituant la matrice de rigidité 122
13.3.3 Calcul des éléments constituant le second membre 124

14 Exemples numériques et applications **127**
14.1 Introduction 127
14.2 Choix des paramètres 128
14.3 Critère d'arrêt 129
14.4 Applications numériques 129
14.4.1 Application sur une image issue de Matlab: cellules sanguines 129
14.4.2 Application sur une image issue de Matlab: cellule de la moelle osseuse 131
14.4.3 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales. Evaluation non-invasive de l'hypertension artérielle pulmonaire 133
14.4.4 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales . . . 136

III Contours Actifs Géodésiques sous contraintes géométriques **139**

15 Introduction **141**

16 Modélisation **143**
16.1 Modèle 143
16.1.1 Introduction du problème de minimisation 143
16.1.2 Approche "level set" 144
16.2 Minimisation de la fonctionnelle 146
16.2.1 Minimisation à l'aide du théorème d'Euler-Lagrange 146
16.2.2 Démonstration par utilisation de la dérivée de Gâteaux 147
16.3 Quelques résultats préliminaires 149
16.3.1 Décroissance de F_ϵ 149
16.3.2 Equation d'évolution des "level sets" 150
16.3.3 Régularisation de la fonction distance d 153

17 Existence et unicité de la solution du problème d'évolution **155**
17.1 Rappels et définitions sur la théorie de la viscosité 155
17.1.1 Définitions 158
17.2 Preuve de l'existence et de l'unicité du problème d'évolution 160
17.2.1 Préambule 160
17.2.2 Caractère géométrique de l'équation d'évolution, théorème de Barles . 162
17.2.3 Enoncé du théorème et application au problème 163
17.2.4 Approche de Caselles *et al.* et Alvarez *et al.* - Application au problème 168

18 Discrétisation **181**
18.1 Introduction d'un schéma AOS (cf. Weickert *et al.* [109] et Weickert [108]) . . 182
18.1.1 Stabilité du schéma 185
18.1.2 Introduction de la force type force de gonflage du modèle des "Balloons" 185
18.2 Algorithme de Thomas 186
18.3 Alternative à cette méthode 188

19 Résultats numériques **189**
19.1 Etude préliminaire 189
19.1.1 Validation des propriétés géométriques du mouvement par courbure moyenne 189
19.1.2 Validation des propriétés géométriques du mouvement dans la direction de propagation normale 191
19.1.3 Validation de l'approche "reconstruction de formes" 192
19.1.4 Validation de l'algorithme de reconstruction dans le cas d'un ensemble discret de points en 2 dimensions 194
19.2 Validation de l'algorithme sans contraintes géométriques 194
19.2.1 Image de la main 194
19.2.2 Image de pièces issue de Matlab 196
19.2.3 Application à la détection de contours intérieurs 198
19.3 Validation de l'algorithme avec contraintes géométriques 200
19.3.1 Données réelles: Segmentation de structures géologiques avec données de puits 200
19.3.2 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales. Evaluation non-invasive de l'hypertension artérielle pulmonaire 202
19.3.3 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales . . . 207

Conclusion **211**

Bibliographie **221**

Introduction

L'imagerie mathématique est depuis quelques années en plein essor. Le développement des méthodes mathématiques dans ce domaine couvre d'ailleurs un large éventail de champs d'investigations:

- les problèmes inverses (voir par exemple Barucq [17], Barucq *et al.* [18] ou Natterer [81]...),
- la reconstruction d'images et la tomographie (voir par exemple Natterer [81]...),
- la compression d'images, notamment par utilisation d'ondelettes (Cohen [34], Mallat [76]),
- l'atténuation du bruit (Sethian [96]...),
- la détection de contours ou segmentation d'images (voir par exemple Sonka *et al.* [99]...).

Ce large éventail témoigne du changement progressif qui s'est opéré au sein de la communauté scientifique: longtemps l'apanage des informaticiens et physiciens, l'imagerie a suscité un intérêt croissant dans la communauté mathématique depuis la fin des années 90.

Dans ce travail, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à des problèmes de segmentation d'images sous des contraintes géométriques. L'objectif de la segmentation (parfois appelée *contourage*), est de détecter certains contours d'une image, autrement dit, d'isoler certaines parties de l'image (qui présentent généralement une forte corrélation avec des objets contenus dans cette image). On distingue deux approches de segmentation :

– la segmentation par contours (cf. figure 1)

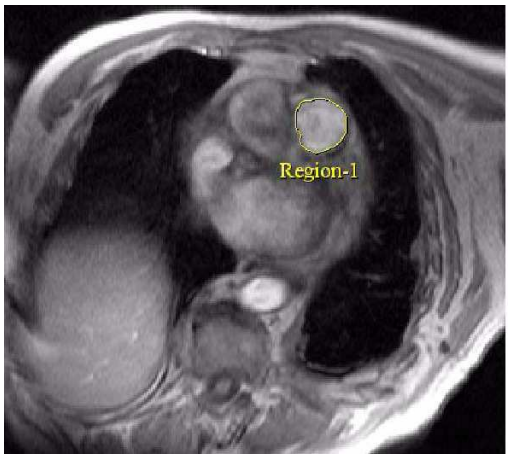


Fig. 1 – *Approche contours: les régions sont délimitées par les contours des objets qu'elles représentent. On peut introduire ici les points de contour qui correspondent aux points pour lesquels la norme du gradient est maximale.*

– la segmentation par régions (cf. figure 2)

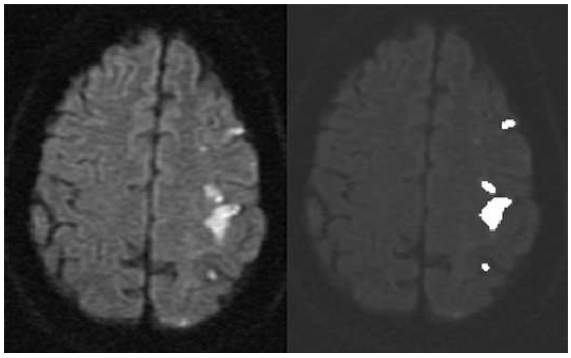


FIG. 2 – *Approche régions: les régions sont déterminées en fonction de leurs propriétés intrinsèques.*

Pour traiter ce problème classique de détection de contours, diverses méthodes sont connues :

- les modèles déformables (Kass, Witkin et Terzopoulos [62] et [63], L. Cohen [38], Cohen *et al.* [36] et [37])...
  → le but est de faire évoluer en temps et en espace la représentation du modèle vers la solution du problème de minimisation introduit dans la modélisation.

- les contours actifs géodésiques (Caselles, Kimmel et Sapiro [24], Caselles *et al.* [23])...
  → un cas particulier du modèle des contours actifs revient à chercher une courbe géodésique (dans un espace dont la métrique est liée aux données de l'image)... On se rapproche ici de la théorie d'évolution des courbes...

- la méthode des ensembles de niveau (notée méthode "level set" par la suite) développée par Osher et Sethian [85] (voir aussi Sethian [96], Osher et Fedkiw [83]).

- des méthodes statistiques et probabilistes ont également été développées (utilisation de fractales, voir par exemple Pesquet-Popescu et Lévy-Véhel [89]).

Dans ce travail, le but est de proposer des modèles de segmentation incluant des **contraintes géométriques** pour des images 2D (la théorie se généralise pour des images de dimensions supérieures). Ces données géométriques sont de plusieurs types: elles peuvent notamment être induites par le contexte de l'étude. Par exemple, en géophysique, ces données coïncident avec des données de puits (cf. figure 3) que l'on doit interpoler lorsqu'on cherche à localiser des horizons et/ou des failles dans des blocs 3D du sous-sol.

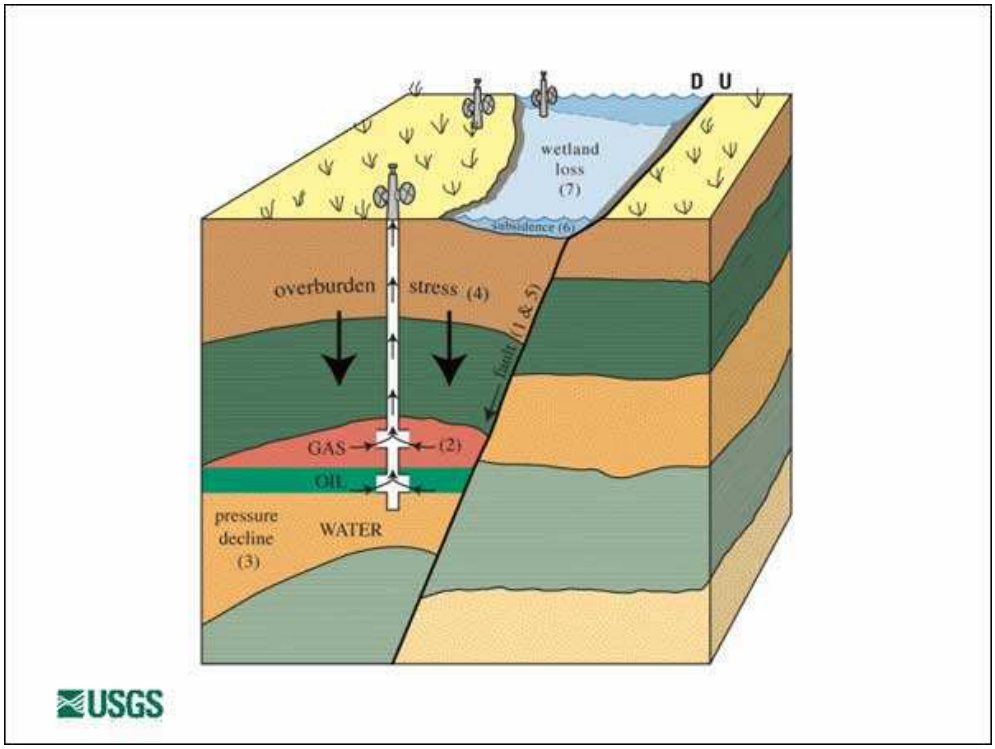


FIG. 3 – *Visualisation 3D d'un gisement. On distingue les horizons (couches séparant deux milieux distincts), une faille oblique, et des puits. (Image: USGS - Colorado School of Mines).*

Dans d'autres cas, ces données géométriques peuvent être déterminées directement par l'utilisateur pour aider le processus de segmentation lorsque des données de l'image sont manquantes ou de mauvaise qualité. En effet, un contour est défini comme le lieu des points connexes qui possèdent une forte transition de luminosité ou de texture (voir Sonka *et al.* [99]). Malheureusement, dans certains cas, ce critère ne peut s'appliquer : nous voyons, sur la figure 4, un exemple en imagerie médicale où deux organes adjacents possèdent la même texture, et le contour constituant l'interface entre les deux organes ne peut donc pas être clairement extrait.

FIG. 4 – *Régions adjacentes homogènes indiquées par la flèche. Le processus de segmentation est délicat (voire impossible) à réaliser si l'on n'adjoint pas au modèle des contraintes géométriques.*

Aussi, est-il intéressant d'introduire des contraintes géométriques dans le modèle mathématique. Ces contraintes peuvent notamment être constituées d'un ensemble de points appartenant au contour cherché (dans le domaine médical, la connaissance *a priori* du praticien sur la nature et la forme de l'organe considéré est cruciale pour choisir judicieusement ces points). Cet ensemble de points devra ensuite être interpolé (ou approché) suivant la méthode utilisée (cf. figure 5).

Pour traiter le problème de la segmentation sous contraintes, une première méthode a été développée dans le cadre du doctorat de S. Vieira-Testé [107] effectué chez ELF (devenu Total depuis). Cette méthode utilise notamment les modèles déformables (voir Kass *et al.* [62] et [63]). Il s'agit d'une approche analytique qui permet d'agir interactivement sur la modélisation: cela permet de faire évoluer (en temps et en espace) la représentation du modèle vers la solution du problème de minimisation introduit dans la modélisation. Concrètement, cela revient à introduire un terme d'évolution en temps dans le critère de minimisation, ce qui permet à chaque pas de temps, d'influencer le modèle *a priori* et si nécessaire, de se recaler sur une meilleure solution, avec à chaque itération la prise en compte des données à interpoler. En imagerie géophysique, comme on l'a vu précédemment, on s'intéresse à la prise en compte de données de puits (points d'interpolation...) dans la recherche d'horizons (et/ou failles) dans un bloc 3D du sous-sol (voir figure 6). La figure 7 illustre une application de la méthode développée par S. Vieira-Testé [107].

FIG. 5 – *Intérêt des données géométriques dans le processus de segmentation lorsque des données sont manquantes ou masquées.*

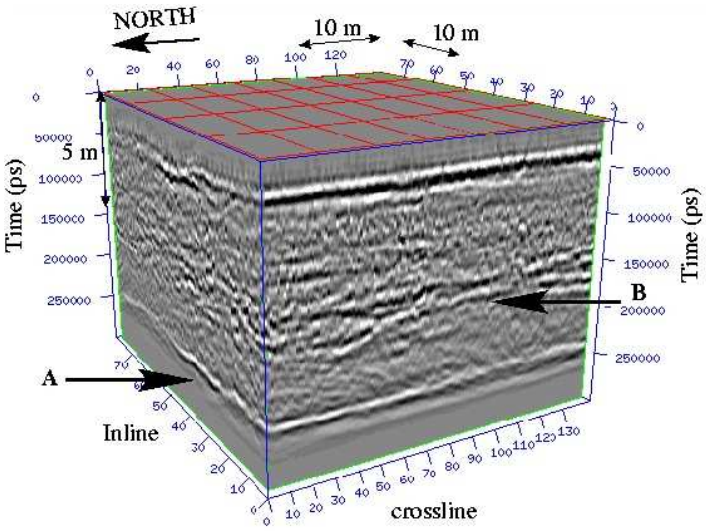


FIG. 6 – *Données réelles. Bloc 3D du sous-sol. A et B désignent les horizons.*

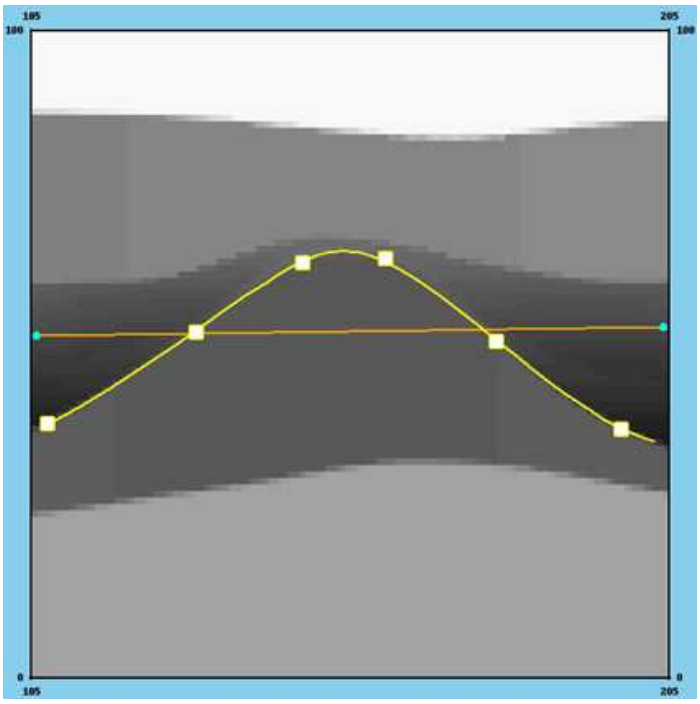


FIG. 7 – *En blanc des "données de puits" à interpoler. En orange, la condition initiale, en jaune le contour final matérialisant l'interface entre deux couches du sous-sol.*

Cependant, avec l'approche proposée par Vieira-Testé [107], divers problèmes subsistent. En effet, il y a des conséquences liées à la paramétrisation du modèle. En effet, cette paramétrisation ne permet pas les changements topologiques, ce qui induit par exemple des problèmes lorsqu'il y a des points triples ou des coins sur les objets à détecter... Cela signifie également que l'objet final doit avoir la même topologie que le contour initial. La paramétrisation des points d'interpolation est enfin délicate à réaliser.

Nous avons donc essayé de proposer des méthodes alternatives pour pallier ces handicaps. Dans la **partie II** de ce manuscrit, on propose une approche inspirée des travaux d'Osher et Sethian [85]. Au lieu de travailler avec une courbe paramétrée Γ réalisant l'interface entre deux régions, on choisit de représenter cette courbe de manière implicite à l'aide d'une fonction explicite Φ. Le contour Γ est alors le niveau zéro de la fonction Φ, c'est à dire que $\Gamma = \{(x,y),\ \Phi(x,y) = 0\}$ et l'évolution de la courbe est donnée à chaque instant t par le niveau zéro de $\Phi(x,y,t)$. L'inconvénient majeur de cette approche réside dans le positionnement 3D d'un problème initialement 2D (nous sommes en effet amenés à transformer l'image 2D en une image 3D, et nous déterminons ensuite les singularités de l'image 3D à l'aide de la fonction Φ), le gain notoire étant l'absence de toute paramétrisation. Le domaine d'application de cette méthode a été étendu au champ médical avec une collaboration avec le Laboratoire de Médecine Nucléaire du CHU du Haut-Lévèque de Bordeaux. Le premier objectif consistait à valider une technique IRM de mesure non invasive de la pression artérielle pulmonaire en vue de l'évaluation de l'hypertension artérielle pulmonaire. Le premier travail a consisté à

proposer cette méthode spécifique (avec des données géométriques), car les méthodes usuelles ne permettaient pas de résoudre le problème de façon convaincante, dans la mesure où les données des images n'étaient pas d'une qualité suffisante (contour flou). D'où le choix d'aider le processus de segmentation en intégrant des conditions géométriques (points d'interpolation) dans le modèle.

Dans la **partie III** de ce manuscrit, on propose une méthode différente pour traiter le même problème. Le développement de cette méthode a été guidé par deux approches connues: la méthode des contours actifs géodésiques introduite par Caselles *et al.* [24] et la méthode de reconstruction de formes à partir d'un ensemble de données non-ordonnées utilisant une approche "level set"(Zhao *et al.* [115]).
Dans [24], Caselles *et al.* montrent qu'un cas particulier des modèles déformables revient à chercher une courbe géodésique dans un espace de Riemann dont la métrique est liée au contenu de l'image. L'utilisation d'une approche "level set" dans leur modèle permet d'appréhender le problème en terme d'évolution de courbes et non plus en terme de minimisation de fonctionnelle.
Aussi, dans la seconde méthode développée, nous avons adopté une démarche similaire aux contours actifs géodésiques en définissant une métrique liée à la fois au contenu de l'image et aux contraintes géométriques. Ces contraintes géométriques sont introduites dans le modèle *via* un ensemble discret de points à approcher appartenant au contour de l'objet. Ainsi, contrairement à la première méthode développée, le problème considéré ici est un problème d'approximation et non d'interpolation.
Plusieurs approches théoriques relatives aux solutions de viscosité (Barles [16] et [15], Alvarez *et al.* [5], Ishii et Sato [61], Crandall, Ishii et Lions [45]) ont permis d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème d'évolution introduit dans la modélisation.
Des applications médicales et géophysiques ont permis de valider le modèle et d'établir quelques points de comparaison entre les deux approches développées.

L'optique générale de ce travail est donc de proposer des modèles de segmentation 2D satisfaisant d'une part, les critères classiques de détection de contours avec la régularité sur le modèle que cela impose et d'autre part, des contraintes géométriques et cela, tant sur le plan théorique que sur le plan applicatif. L'ajustement du modèle sur des données géométriques (*contraintes d'interpolation*) facilite le processus de segmentation lorsque les données d'image font défaut. L'approche "level set" a guidé les deux modèles que nous avons développés, l'un fondé sur les contours actifs classiques, l'autre sur une approche novatrice des contours actifs: la recherche de courbes géodésiques dans un espace de Riemann dont la métrique est liée à l'information contenue dans l'image et aux contraintes géométriques.

Ce manuscrit se décompose en trois parties distinctes:

- Dans la **partie I (Etat de l'Art)**, après un chapitre consacré aux rappels et notations (partie I - chapitre 1), nous introduisons diverses méthodes de segmentation: les modèles déformables (partie I - chapitre 2, 3), la méthode "optique" (partie I - chapitre 4), les contours actifs géodésiques (partie I - chapitre 5), la méthode "level set" (partie I - chapitre 6), la méthode de reconstruction (partie I - chapitre 7) et nous concluons par

des rappels de géométrie (partie I - chapitre 8).

- La **partie II (Segmentation d'images sous contraintes géométriques utilisant les surfaces déformables avec une approche "level set")** présente la première méthode de segmentation sous contraintes géométriques proposée dans le cadre de ce travail. Après un bref chapitre introductif (partie II - chapitre 9), nous proposons le modèle relatif à cette méthode: les données utilisées, l'approche "level set" puis la définition du problème de minimisation (partie II - chapitre 10).
  Une première méthode de résolution utilisant une linéarisation du terme non-linéaire de la fonctionnelle introduite est ensuite développée (partie II - chapitre 11). Une seconde méthode consistant à introduire un terme dynamique dans la fonctionnelle est également étudiée (partie II - chapitre 12). La discrétisation du problème est alors réalisée (partie II - chapitre 13) et des applications numériques (partie II - chapitre 14) viennent compléter l'étude.
- Dans la **partie III (Contours Actifs Géodésiques sous contraintes géométriques)**, relative à la seconde méthode proposée pour traiter le problème de la segmentation sous contraintes, après un bref chapitre introductif (partie III - chapitre 15), nous présentons la modélisation du problème (partie III - chapitre 16): la définition des contraintes géométriques, la formulation du problème d'approximation et l'établissement du problème d'évolution. L'existence et l'unicité de la solution au sens de la viscosité de l'équation d'évolution sont ensuite établies (partie III - chapitre 17). Enfin, la discrétisation du problème d'évolution est réalisée à l'aide d'un schéma AOS *(Additive Operator Splitting)* (partie III - chapitre 18). Des applications numériques concluent cette partie (partie III - chapitre 19).

Première partie

Etat de l'Art

Introduction

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction générale, la **segmentation** permet d'isoler certaines parties de l'image qui présentent une forte corrélation avec les objets contenus dans cette image, généralement dans l'optique d'un post-traitement.
Les domaines d'application sont nombreux : médecine, géophysique, géologie, etc ... Dans le domaine médical, la segmentation d'images est extrêmement compliquée. En effet, pour chaque organe (*cerveau, cœur, etc ...*), l'approche est différente : l'outil de segmentation doit donc pouvoir s'adapter à un organe particulier, suivant une modalité d'acquisition particulière (*scanners, radiographie, Imagerie par Résonance Magnétique, ...*) et pour une séquence de données particulière. L'objectif est la quantification de l'information, par exemple, la volumétrie : volume d'une tumeur dans le cerveau, étude de la cavité ventriculaire cardiaque, etc ... C'est à ce niveau que la segmentation de l'image est utilisée. En géophysique, la segmentation peut permettre d'isoler des objets du sous-sol (*failles, horizons ...*) à partir de données sismiques dans le but, par exemple, de modéliser ou d'exploiter un gisement.

En imagerie mathématique, deux types de segmentation sont exploités: la *segmentation par régions* (*cf. figure 2*) qui permet de caractériser les régions d'une image présentant une structure homogène et la *segmentation par contours* (*cf. figure 1*) qui permet de délimiter les différentes régions par leurs frontières. C'est à ce dernier type de contourage que nous nous attachons tout au long de ce travail.

Les points de contours sont les points de l'image pour lesquels la norme du gradient, dans la direction de ce gradient, est maximale. Un seuillage est réalisé pour ne conserver que les points de variation de niveau de gris significative. Une question légitime qui émerge alors, est comment définir le seuil, autrement dit, pour quel critère de variation de niveau de gris un point sera qualifié de point de contour?
Un seuil choisi trop faible accordera l'étiquette *"point de contour"* à un nombre trop élevé de points tandis qu'un seuil trop élevé ne permettra d'extraire que les points de fort contraste et les contours détectés ne seront plus connexes. La représentation mathématique des frontières d'un objet ne sera plus réalisée dans ce cas.
Pour pallier cette difficulté, une régularité sur la modélisation des contours doit être introduite: les contours seront assimilés à des courbes possèdant des propriétés de régularité et satisfaisant le critère de détection énoncé précédemment.
Ainsi, dans ce travail articulé en trois parties distinctes, nous dressons en premier lieu, un état de l'art des méthodes de segmentation 2D existantes.
Nous nous intéressons tout d'abord aux **contours actifs** (**chapitre 2**) ou *modèles déformables* (encore appelés *"snakes"*) introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos [62] et [63], méthode qui intègre cette notion de régularité des points de contour en introduisant une fonctionnelle

interprétée en terme d'énergie pour les propriétés mécaniques qu'elle revêt. En effet, cette méthode permet de faire évoluer en temps et en espace la représentation du modèle vers la solution du problème de minimisation introduit dans la modélisation. Ces méthodes de contours actifs font appel à la notion de corps élastique subissant des contraintes extérieures. La forme prise par l'élastique est liée à une minimisation d'énergie composée de deux termes: un terme d'énergie interne et un terme d'énergie externe.
Le minimum local obtenu par minimisation de cette fonctionnelle non-convexe est lié à la condition initiale qui définit un voisinage de recherche du minimum.

Vieira-Testé [107] propose une application des techniques de surfaces déformables (cf. **chapitre 3**) dans le cadre de la segmentation d'images sur des données issues de la géophysique, sous contraintes d'interpolation.
Cela consiste en la séparation de milieux et d'objets du sous-sol selon leurs propriétés géophysiques: homogénéité de la vitesse de propagation, de l'amplitude des ondes sismiques et certaines données géologiques: données de puits en profondeur, etc ... La séparation ainsi obtenue constitue la structure géologique formée d'horizons, de failles et de prolongements de faille.
Vieira-Testé [107] introduit ainsi dans son modèle, des contraintes géométriques de deux types principalement: des *données de puits en profondeur* et des *données de plans tangents*.
La difficulté inhérente et immédiate à cette problématique est de déterminer la représentation de la structure à ajuster sur les données, les structures géologiques étant formées de surfaces paramétrées s'intersectant.
La solution proposée par Vieira-Testé [107] est la suivante: introduire un modèle global où chaque élément de la structure est caractérisé localement dans une même représentation.

De manière générale, les difficultés majeures rencontrées dans le processus de segmentation par contours actifs sont les suivantes:

- le modèle est non-intrinsèque du fait de la paramétrisation et n'est donc pas lié à la géométrie de l'objet à segmenter.
- forte dépendance du modèle à la condition initiale, qui n'autorise pas à choisir une condition initiale éloignée de la solution.
- connaissance de la topologie de/ou/des objets à segmenter nécessaire, ce qui implique (lorsqu'il y a plusieurs objets à segmenter) l'utilisation de procédures particulières (cf. Cohen [35]) du fait de la paramétrisation.
- complexité des images / ambiguïté des données correspondantes, en particulier lorsque les données des images manquent et/ou que deux régions de texture similaire sont adjacentes.
- bruit sur les données.

Pour pallier certains de ces handicaps, d'autres méthodes ont été développées. Un modèle fondé sur une analogie à l'optique (cf. **chapitre 4**) a été proposé par Deléchelle et Lemoine [46].
Ce modèle est élaboré à partir du principe de Fermat : dès lors, le contour n'est plus assimilé à un corps élastique mais il est représenté par la trajectoire d'un rayon lumineux qui se propage dans le plan de l'image. L'image est assimilée à un milieu de propagation de la lumière, l'intensité des niveaux de gris est liée à l'indice de réfraction qui caractérise ce milieu. Le

principe du moindre temps est appliqué et permet de définir la trajectoire du rayon lumineux. En assimilant les valeurs du gradient des niveaux de gris à l'indice de réfraction, on aboutit à un système d'équations. La résolution du problème de minimisation ainsi introduit est fondée sur le principe de programmation dynamique (Amini *et al.* [6], Bellman [19], Sakarovitch [93]).

Ce modèle peut être mis en liaison avec les contours actifs géodésiques (cf. **chapitre 5**) introduits par Caselles, Kimmel et Sapiro [24] qui utilisent le principe de moindre action de Maupertuis, et le principe de Fermat. Ils montrent qu'un cas particulier du modèle classique des contours actifs ou "snakes" revient à chercher une courbe géodésique dans un espace de Riemann dont la métrique est définie par le contenu de l'image, *i.e* à trouver une courbe de longueur minimale dans un certain espace.
Caselles *et al.* [24] proposent donc une approche novatrice de la détection de contours par contours actifs. En considérant le contour actif géodésique comme le niveau zéro d'une fonction explicite (approche "level set" développée par Osher et Sethian [85]), la recherche de cette courbe géodésique induit la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Cette approche intrinsèque n'impose donc pas au contour initial d'avoir la même topologie que la courbe finale. Il n'est pas non plus nécessaire de connaître la topologie de la solution *a priori* (*nombre d'objets à segmenter*), les fusions et séparations du front étant possibles. Les contours intérieurs et extérieurs peuvent être détectés et la convergence de l'algorithme associé peut être accélérée par ajout d'une composante interprétée en terme de contrainte d'aire.
En outre, la théorie de la viscosité (Crandall, Ishii et Lions [45], Barles [16] et [15], Ishii et Sato [61]) permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution du problème d'évolution introduit dans la modélisation.

Dans le **chapitre 6**, nous présentons la méthode "level set". Cette approche "évolution de courbes" a été développée par Osher et Sethian [85]. Nous présentons également la méthode "Fast Marching" développée par Sethian [96].

Dans le **chapitre 7**, nous rappelons quelques éléments relatifs au travail de Zhao *et al.* [115] qui porte sur la reconstruction de formes 3D à partir d'un ensemble de données non-ordonnées, cet ensemble pouvant inclure des points, des patches de surface, etc ... En particulier, les connexions entre les éléments de données et la topologie de la forme à reconstruire ne sont pas connues *a priori*. Un problème de surface minimale est introduit.

Des résultats de géométrie sont rappelés dans le **chapitre 8** qui clôt cette première partie "Etat de l'Art".

Chapitre 1

Notations et rappels

1.1 Notations et définitions

1. On désigne par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ les ensembles de nombres réels et d'entiers naturels.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien noté $< \cdot,\cdot >_n$ et de la norme associée notée $< \cdot >_n$, où:

$$\forall x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall y = (y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$< x,y >_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } \quad < x >_n = \sqrt{< x,x >_n}.$$

2. Pour tout n-uplet $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit l'opérateur de dérivation suivant:

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

   où $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

3. Soient $(X,||\cdot||_X)$ et $(Y,||\cdot||_Y)$ deux espaces normés.
   On note par $\mathscr{L}(X,Y)$ l'espace des applications linéaires et continues de X dans Y.
   On désigne par X' l'espace dual topologique de l'espace normé X.

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E \subset \mathbb{R}^p$. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $P_k(E,\mathbb{R}^n)$ l'espace des restrictions à E des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{R}^n$ dont le degré total est inférieur ou égal à k par rapport à l'ensemble des variables. Si $q \in P_k(E,\mathbb{R}^n)$, q est de la forme:

$$q(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha,\ a_\alpha \in \mathbb{R}^n,$$

   où $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1},\ldots,x_p^{\alpha_p})$ avec $x = (x_1,\ldots,x_p)$ et $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{N}^p$.

   On note aussi $Q_k(E,\mathbb{R}^n)$ l'espace des restrictions à E des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{R}^n$ dont le degré est inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

Si $q \in Q_k(E,\mathbb{R}^n)$, q est de la forme :

$$q(x) = \sum_{|\alpha|_\infty \leq k} a_\alpha x^\alpha$$

avec $a_\alpha \in \mathbb{R}^n$ et où $|\alpha|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} \alpha_i$.

1.1.1 Espaces normés et espaces de Hilbert

On rappelle ici les principales propriétés des espaces normés et des espaces de Hilbert.

Définition 1.1.1

Soit $(X,||\cdot||_X)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers un élément $x \in X$, si:

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_X = 0.$$

On notera la convergence forte de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x par:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\to} x \text{ ou } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Définition 1.1.2

Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire $((\cdot,\cdot))$ et de la norme $||\cdot||$ associée. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers un élément $x \in V$, si:

$$\forall y \in V, \lim_{n\to\infty} ((x_n,y)) = ((x,y)).$$

On notera la convergence faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x par:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x \text{ ou } \lim_{n\to\infty} \text{faible } x_n = x.$$

Lemme 1.1.1

Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire $((\cdot,\cdot))$ et de la norme $||\cdot||$ associée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V. On a alors les résultats suivants:

1. *Si $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$ alors $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$.*
2. *Si $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans V et $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.*
3. *Si $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$ et $||x_n|| \overset{n\to\infty}{\to} ||x||$ alors $x_n \overset{n\to\infty}{\to} x$.*

Lemme 1.1.2

De tout ensemble borné d'un espace de Hilbert V, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente dans V.

Définition 1.1.3 *Dualité*

Soit V un espace vectoriel normé. $\mathscr{L}(V,\mathbb{R})$ *est l'espace dual de V et est noté V'. Un élément* $A \in V'$ *est une forme linéaire continue et son action sur un élément* $v \in V$ *se note à l'aide du crochet de dualité* $< \cdot,\cdot >_{V',V}$ *de sorte que:*

$$< A,v >_{V',V} = Av.$$

Définition 1.1.4

Soient V et W deux espaces vectoriels normés et $A \in \mathscr{L}(V,W)$*. On définit l'opérateur transposé,* $A^t : W' \to V'$ *par:*

$$\forall v \in V,\ \forall w' \in W',\ < A^t w',v >_{V',V} = < w',Av >_{W',W}\ .$$

Définition 1.1.5 *Opérateur compact*

Soit X un espace vectoriel normé et $O : X \to X$ *un opérateur (application linéaire). On dit que O est compact si pour tout sous-ensemble borné* $U \subset X$*,* $O(U)$ *est une partie relativement compacte (d'adhérence compacte).*

Définition 1.1.6

Soient X et Y deux espaces normés. On dit que X s'injecte continûment dans Y et on note $X \circlearrowleft Y$ *s'il existe un opérateur injectif* $I \in \mathscr{L}(X,Y)$*.*
Si de plus, I est compact, on dit que X s'injecte de façon compacte dans Y et on note $X \overset{c}{\circlearrowleft} Y$*.*

On rappelle dans ce qui suit, le théorème de projection sur un espace vectoriel.

Théorème 1.1.1 *Projection sur un espace vectoriel*

Soit V un espace de Hilbert muni du produit scalaire $((\cdot,\cdot))$ et de la norme associée $||\cdot||$.
Soit $M \subset V$ un sous-espace vectoriel fermé de V.
Alors pour tout $f \in V$, la projection u de f sur M vérifie:

$$\begin{cases} u \in M, \\ \forall v \in M, ((f-u,v)) = 0. \end{cases}$$

De plus, l'opérateur $P_M : f \in V \to P_{M_f} \in M$ est linéaire et continu.

V est somme directe de M et de son orthogonal $M^\perp$: $V = M \bigoplus M^\perp$.
$M^\perp$ est défini par:

$$M^\perp = \{u \in V,\ ((u,v)) = 0,\ \forall v \in M\}.$$

Définition 1.1.7

Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert $(V,||\cdot||)$. On dit que a est V-elliptique s'il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$\forall v \in V,\ a(v,v) \geq C||v||^2.$$

Théorème 1.1.2 *Lax-Milgram*

Soit $a(\cdot,\cdot)$, une forme bilinéaire continue sur un espace de Hilbert $(V,||\cdot||)$ et V-elliptique.
Alors, pour tout $f \in V'$, il existe un unique $u \in V$ tel que:

$$\forall v \in V,\ a(u,v) = f(v).$$

De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par:

$$\begin{cases} u \in V, \\ \frac{1}{2}a(u,u) - f(u) = \min\limits_{v \in V} [\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)]. \end{cases}$$

Le théorème de projection et le théorème de représentation de Riesz permettent d'établir le théorème suivant.

Théorème 1.1.3 *(Ciarlet [33] théorème 8.2.3)*

Etant donné un espace de Hilbert V, une fonction $J : V \to \mathbb{R}$ est appelée fonctionnelle quadratique sur V si elle est de la forme:

$$J(v) = \tfrac{1}{2}a(v,v) - f(v),$$

avec $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, symétrique et $f : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.
On rappelle que le théorème de représentation de Riesz nous donne l'existence d'un opérateur $A \in \mathscr{L}(V)$ et un élément $b \in V$ tous deux définis de façon unique tels que

$$\begin{cases} a(u,v) = (Au,v) = (u,Av),\ \forall u,v \in V \\ f(v) = (b,v),\ \forall v \in V, \end{cases}$$

$(\cdot,\cdot)$ désignant le produit scalaire de l'espace V.

Soit J une fonctionnelle quadratique définie sur un espace de Hilbert V par:

$$J : v \in V \mapsto J(v) = \tfrac{1}{2}a(v,v) - f(v) \in \mathbb{R}.$$

On suppose de plus, qu'il existe un nombre α tel que:

$$\alpha > 0,\ a(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2,\ \forall v \in V.$$

Etant donnée une partie non vide, convexe et fermée K de V, il existe un et un seul élément u vérifiant:

$$(\hbar) \begin{cases} u \in K, \\ J(u) = \inf\limits_{v \in K} J(v). \end{cases}$$

Cet élément u vérifie de façon équivalente:

$$a(u,v-u) \geq f(v-u),\ \forall v \in K.$$

Réciproquement, si un élément $u \in V$, vérifie l'inéquation ci-dessus, c'est la solution du problème $\hbar$.
Si K est un sous-espace vectoriel, les inéquations précédentes sont remplacées par les équations:

$$a(u,v) = f(v),\ \forall v \in K.$$

1.1.2 Espaces fonctionnels

- La partie suivante contient quelques résultats élémentaires sur Ω et sa frontière $\partial\Omega$ ainsi que sur les espaces du type $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.1.8 *(cf. Nečas [82] 1.1.3, Notion de trace)*

Soit Ω un ouvert, connexe de $\mathbb{R}^N$.
La frontière de Ω notée $\partial\Omega$ est dite continue s'il existe des nombres $\alpha > 0$, $\beta > 0$, des systèmes de cartes $(x_{r1},x_{r2},\cdots,x_{rN}) = (x'_r,x_{rN})$, $r \in \{1,2,\cdots,s\}$ et des fonctions a_r, continues dans les cubes fermés de dimension $N-1$: $|x_{ri}| \leq \alpha$, $i \in \{1,2,\cdots,N-1\}$, de sorte que chaque point x de la frontière puisse être représenté au moins dans un de ces systèmes sous la forme $x = (x'_r,a_r(x'_r))$. On suppose de plus que les points (x'_r,x_{rN}) tels que $|x_{ri}| \leq \alpha$, $i \in \{1,2,\cdots,N-1\}$ (soit $\bar{\Delta}_r$), $a_r(x'_r) < x_{rN} < a_r(x'_r) + \beta$ sont dans Ω tandis que les points (x'_r,x_{rN}) tels que $x'_r \in \bar{\Delta}_r$, $a_r(x'_r) - \beta < x_{rN} < a_r(x'_r)$ sont hors de $\bar{\Omega}$.
La frontière de Ω est dite lipschitzienne si les fonctions a_r sont lipschitziennes dans $\bar{\Delta}_r$ à savoir :

$$x'_r,y'_r \in \bar{\Delta}_r : |a_r(x'_r) - a_r(y'_r)| \leq const\ |x'_r - y'_r|.$$

Définition 1.1.9 *(cf. Nečas [82] définition 2.1.1)*

Un domaine borné Ω est du type $\eta^{(k),\mu}$ où k est un entier, non-négatif ou infini, $0 \leq \mu \leq 1$, si les fonctions a_r sont définies dans les fermetures des cubes $\bar{\Delta}_r = E(x' \in E_{N-1},|x_{ri}| \leq \alpha,\ i \in \{1,2,\ldots,N-1\})$, μ-höldériennes ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k, à savoir:

$$x'_r,y'_r \in \bar{\Delta}_r : |D^i a_r(x'_r) - D^i a_r(y'_r)| \leq c|x'_r - y'_r|^\mu,\ |i| \leq k.$$

Si $\mu = 0$, les a_r sont seulement supposées continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k dans $\bar{\Delta}_r$, on écrit $\eta^{(k),0} = \eta^{(k)}$.

- Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert borné, connexe et non-vide de $\mathbb{R}^p$, à frontière lipschitzienne (cf. Nečas [82]).

Définition 1.1.10

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note par $C^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.11

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note par $C^k(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f \in C^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ telles que pour chaque multi-indice α tel que $|\alpha| \leq k$, l'application $x \in \Omega \mapsto \partial^\alpha f(x) \in \mathbb{R}^n$ se prolonge continûment sur $\bar{\Omega}$.

Proposition 1.1.1

$C^k(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)$ muni de la norme:

$$||f||_{C^k(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha|\leq\ k}\ \sup_{x\in\Omega} < \partial^\alpha f(x) >_n$$

est un espace de Banach.

- Nous introduisons dans cette partie l'espace $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ et l'espace de Sobolev classique $H^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Les principaux théorèmes d'injection et de densité viennent s'y greffer.

Définition 1.1.12

On définit $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ comme l'espace des fonctions Lebesgue-mesurables, définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telles que:

$$\int_\Omega < v(x) >_n^2 dx < +\infty.$$

Définition 1.1.13

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $H^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev d'ordre m, défini comme l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $|\alpha| \leq m$, la dérivée partielle d'ordre α (au sens des distributions) appartient à $L^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

On munit $H^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire usuel:

$$((u,v))_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega < \partial^\alpha u(x),\partial^\alpha v(x) >_n dx,$$

auquel on associe la norme suivante : $||u||_{m,\Omega} = ((u,u))_{m,\Omega}^{\frac{1}{2}}$.
On note les semi-produits scalaires dans $H^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$ par:

$$(u,v)_{i,\Omega} = \sum_{|\alpha|=i} \int_\Omega < \partial^\alpha u(x),\partial^\alpha v(x) >_n dx,\ 0 \leq i \leq m,$$

et les semi-normes associées:

$$|u|_{i,\Omega} = (u,u)_{i,\Omega}^{\frac{1}{2}},\ 0 \leq i \leq m.$$

- Ci-dessous, nous donnons divers résultats (densité, injection continue et compacte). Pour plus de détails, on renvoie à Adams [4], Lions-Magenes [70] ou Yosida [113].

Théorème 1.1.4 *(Densité)*

$C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^s(\Omega)$ pour tout $s \geq 0$.

Théorème 1.1.5 *(Injections de Sobolev)*

Soient m, n, $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. On rappelle en particulier que $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Si $m > k + \dfrac{p}{2}$, alors:

$$H^m(\Omega,\mathbb{R}^n) \circlearrowleft C^k(\bar{\Omega},\mathbb{R}^n) \text{ (injection continue).}$$

Théorème 1.1.6 *(Injection continue et compacte)*

Soient m, n, $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$H^m(\Omega,\mathbb{R}^n) \overset{c}{\circlearrowleft} H^{m-1}(\Omega,\mathbb{R}^n).$$

Théorème 1.1.7 *(Inclusion et injection canonique continue)*

1. $H^m(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$, *pour q tel que* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{p}$ *si* $m < \dfrac{p}{2}$.
2. $H^m(\Omega) \circlearrowleft L^q(\Omega)$, *pour tout* $q \geq 1$ *si* $m = \dfrac{p}{2}$.
3. $H^m(\Omega) \circlearrowleft C^0(\bar{\Omega})$, *si* $m > \dfrac{p}{2}$.

Théorème 1.1.8 *(Inclusion et injection canonique compacte)*

1. $H^m(\Omega) \overset{c}{\circlearrowleft} L^q(\Omega)$, *pour tout q tel que* $1 \leq q < l$ *avec* $\dfrac{1}{l} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{p}$.
2. $H^m(\Omega) \overset{c}{\circlearrowleft} L^q(\Omega)$, *pour tout* $q \geq 1$ *si* $m = \dfrac{p}{2}$.

3. $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\bar{\Omega})$, *si* $m > \dfrac{p}{2}$.

- On introduit enfin les espaces qui interviendront notamment dans l'établissement du problème d'évolution introduit dans la première méthode (**partie II, chapitre 12**).

Définition 1.1.14

Soit V *un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $((\cdot,\cdot))$ *et de la norme* $||\cdot||$ *associée.*

$\forall T \in \mathbb{R}$, $T > 0$ *, on définit l'espace suivant :*

$$L^2(]0,T[,V) = \left\{ \ u : t \in]0,T[\longmapsto u(t) \in V \ \textit{tel que} \ (\int_0^T ||u(t)||^2 dt)^{1/2} < +\infty \ \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire suivant :

$$\forall u,v \in L^2(]0,T[,V), \ (u,v)_{L^2(]0,T[,V)} = \int_0^T ((u(t),v(t)))dt.$$

La norme associée est définie par :

$$\forall u \in L^2(]0,T[,V), \ \ |u|_{L^2(]0,T[,V)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{L^2(]0,T[,V)}.$$

Théorème 1.1.9

$(L^2(]0,T[,V),|\cdot|_{L^2(]0,T[,V)})$ *est un espace de Hilbert.*

Définition 1.1.15

Soit V *un espace de Hilbert muni du produit scalaire* $((\cdot,\cdot))$ *et de norme* $||\cdot||$ *associée.*
Soit $(V',|\cdot|_{V'})$ *l'espace dual de* $(V,||\cdot||)$. $\forall T > 0$ *, on définit l'espace suivant :*

$$W(]0,T[,V) = \left\{ \ u \in L^2(]0,T[,V) \ \textit{tel que} \ \frac{du}{dt} \in L^2(]0,T[,V') \ \right\},$$

où $\dfrac{du}{dt}$ *est la dérivée au sens des distributions.*

On munit $W(]0,T[,V)$ *du produit scalaire suivant :* $\forall u,v \in W(]0,T[,V)$,

$$(u,v)_{W(]0,T[,V)} = \int_0^T ((u(t),v(t)))dt + \int_0^T \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right)_{V'} dt.$$

La norme associée est définie par :

$$\forall u \in W(]0,T[,V),\ |u|_{W(]0,T[,V)} = (u,u)^{1/2}_{W(]0,T[,V)}.$$

Théorème 1.1.10

$(W(]0,T[,V),|\cdot|_{W(]0,T[,V)})$ *est un espace de Hilbert.*

1.2 Compléments de calculs différentiels et éléments d'optimisation

On effectue en premier lieu quelques rappels élémentaires sur la dérivation: *dérivée de Fréchet, dérivée directionnelle et de Gâteaux.*
L'espace V désigne dans toute la suite un espace de Hilbert.

1.2.1 Rappels sur la dérivation

Définition 1.2.1 *Dérivée de Fréchet (cf. chapitre 2, définition 2.1 de Cea [25] ou notes de Faurre [50]).*

J étant une fonctionnelle de V dans $\mathbb{R}$, si pour $u \in V$, il existe un opérateur linéaire et continu de V dans $\mathbb{R}$ noté $v \mapsto J'(u,v)$ tel que:

$$J(u+v) = J(u) + J'(u,v) + \epsilon(v),$$

avec

$$\lim_{||v||_V \to 0} \frac{|\epsilon(v)|}{||v||_V} = 0,$$

on dit alors que $J'(u,v)$ est la différentielle au sens de Fréchet de J au point u.
On pourra aussi employer la notation:

$$\begin{cases} J'(u,v) = J'(u).v, \\ J'(u) \in \mathscr{L}(V,\mathbb{R}). \end{cases}$$

$J'(u)$ est la dérivée au sens de Fréchet de J au point u.

Définition 1.2.2 *Dérivée directionnelle et de Gâteaux (cf. chapitre 2, définition 1.1 de Cea [25] ou notes de Faurre [50]).*

J désigne une fonctionnelle de V dans $\mathbb{R}$.
Si pour $u \in V$, $w \in V$, la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{\delta}[J(u+\delta w) - J(u)] = J'(u,w),$$

on dit que $J'(u,w)$ est la différentielle au sens de Gâteaux de J au point u dans la direction w.
Si $J'(u,w)$ existe pour tout $w \in V$ et si l'opérateur $w \mapsto J'(u,w)$ est linéaire et continu alors cet opérateur est la dérivée de Gâteaux de J au point u.
On pourra employer la notation:

$$\begin{cases} J'(u,v) = J'(u).v, \\ J'(u) \in \mathscr{L}(V,\mathbb{R}). \end{cases}$$

Remarque 1.2.1

Lorsque la différentielle au sens de Fréchet existe, alors la différentielle au sens de Gâteaux existe et ces deux différentielles sont confondues.

Remarque 1.2.2

Si J est une fonctionnelle , $J : V \to \mathbb{R}$, et si la différentielle au sens de Gâteaux $J'(u,w)$ est linéaire et continue par rapport à w, on désigne par $gradJ(u)$ (gradient de J au point u) l'élément de V' tel que:

$$J'(u,w) =< gradJ(u),w > , \forall w \in V,$$

où $< \cdot,\cdot >$ exprime la dualité entre V et V'.

Dans le cas des espaces de Hilbert, on pourra identifier $gradJ(u)$ avec l'élément noté $gradJ(u) \in V$, tel que:

$$J'(u,w) = (gradJ(u),w), \forall w \in V,$$

où $(\cdot,\cdot)$ exprime le produit scalaire dans V.

Ce dernier résultat est une conséquence du théorème de représentation de Riesz (cf. Ciarlet [33]): si V est un espace de Hilbert et f un élément quelconque du dual V' de V, alors il existe un élément $\tau f \in V$ et un seul tel que:

$$f(v) = (\tau f,v), \forall v \in V$$

et

$$||f||_{V'} = ||\tau f||_V.$$

1.2.2 Conditions du premier ordre pour un optimum lié

Définition 1.2.3 *(cf. Faurre [50], chapitre 1, section 5.2.1)*

Considérons le problème d'optimisation avec contraintes (dit "optimum lié "):

$$\left| \begin{array}{l} \inf \ J(v) \\ v \in K \end{array} \right. , \tag{1.1}$$

avec $K \subset V$ sous-ensemble fermé des solutions admissibles, V espace de Hilbert et J fonctionnelle différentiable.

Théorème 1.2.1 *(cf. Cea [25], chapitre 4, théorème 0.4).*

Si J est différentiable au sens de Gâteaux dans U, si U est un sous-ensemble convexe de V, si $u \in U$ et si :

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in U,$$

alors

$$J'(u,v-u) \geq 0, \forall v \in U.$$

Dans ce qui suit, on présente certains résultats relatifs au problème d'optimisation avec contraintes égalités. Ces problèmes sont définis ci-dessous.

1.2.3 Contraintes égalités

Conservant les mêmes notations que dans la sous-section 1.2.2, on considère le cas où:

$$K = \{v \in V | F(v) = 0\},$$

avec $F : V \to \mathbb{R}^N$ (N *contraintes égalités*), J et F_i, $i \in \{1, \cdots, N\}$ étant continûment différentiables au sens de Fréchet.
On introduit une hypothèse supplémentaire de *régularité* ou de *qualification* sur les contraintes définissant K pour obtenir des résultats du type *condition nécessaire*.

Définition 1.2.4 *Régularité des contraintes*

On dit que les contraintes sont régulières en $u \in K$ (ou que u est régulier pour les contraintes) si les vecteurs $F_i'(u)$, $i \in \{1, \cdots, N\}$ sont linéairement indépendants.

Théorème 1.2.2 *Multiplicateurs de Lagrange pour des contraintes égalités*

Pour que $u \in K$, u régulier, soit solution de (1.1) avec K défini ci-dessus, il faut qu'il existe N réels, λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_N appelés multiplicateurs de Lagrange tels que:

$$J'(u) + \lambda_1 F_1'(u) + \cdots + \lambda_N F_N'(u) = 0.$$

1.3 Rappels sur les éléments finis de Bogner-Fox-Schmit de classe C^1

On rappelle dans cette dernière section quelques résultats élémentaires relatifs aux éléments finis de Bogner-Fox-Schmit (cf. Ciarlet [32] pour plus de détails).

Considérons l'élément fini générique de classe C^1, (K,P,Σ).

K est l'élément de Bogner-Fox-Schmit (Bogner *et al.* [21], Ciarlet [32]) rectangulaire défini par les quatre points : (x_i,y_j), (x_i,y_{j+1}), (x_{i+1},y_j), (x_{i+1},y_{j+1}).
P est l'ensemble $Q_3(K,\mathbb{R})$ défini par:

$$\begin{cases} Q_3(K,\mathbb{R}) = \{q(x,y) = \displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq 3} \alpha_{ij}x^iy^j,\ \alpha_{ij} \in \mathbb{R}\} \\ \text{et} \quad dim(Q_3) = 16. \end{cases}$$

L'ensemble des formes linéaires Σ est défini par:

$$\sum = \Big\{\varphi_{kl} : p \mapsto p(x_k,y_l);\ \varphi_{kl}^{(1)} : p \mapsto \frac{\partial p}{\partial x}(x_k,y_l);\ \varphi_{kl}^{(2)} : p \mapsto \frac{\partial p}{\partial y}(x_k,y_l);$$
$$\varphi_{kl}^{(3)} : p \mapsto \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(x_k,y_l),\ k \in \{i,i+1\} \text{ et } \ l \in \{j,j+1\}\Big\}.$$

On vérifie immédiatement la propriété d'unisolvance :

$dim(P) = dim(Q_3) = 16$ et $card\{\varphi_{kl},\varphi_{kl}^{(1)},\varphi_{kl}^{(2)},\varphi_{kl}^{(3)}\} = 16$.

On prouve également que si $p \in Q_3(K,\mathbb{R})$ est tel que $\forall \mu \in \{0,\cdots,3\}$ et $\forall (k,l) \in \{i,i+1\} \times \{j,j+1\}$, $\varphi_{kl}^{(\mu)}(p) = 0$ alors $p \equiv 0$.

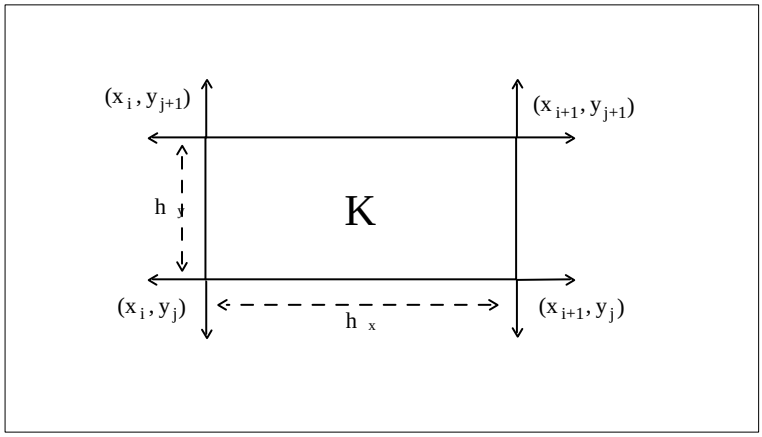


FIG. 1.1 – *Représentation de l'élément fini K.*

On détermine les fonctions de base de (K,P,Σ). On travaille d'abord sur la maille de référence qui sera dans le contexte 2D le pavé $[0,1] \times [0,1]$ puis par transformation affine on se ramène à notre élément K.
Les fonctions de base du pavé $[0,1] \times [0,1]$ noté $\hat{K}$ correspondent au produit tensoriel des fonctions de base des éléments finis du type $K' = [0,1]$ suivant la variable t et la variable v. Pour la maille de référence $\hat{K}$, il y a donc 16 fonctions de base. Ces fonctions de base s'expriment sous la forme :

$$\hat{\kappa}_l^n(t,v) = \hat{\psi}_s(t)\hat{\psi}_r(v),\ (s,r,l,n) \in \{1,\cdots,4\}^4.$$

Pour un l et un n donnés , il existe un unique couple $(s,r) \in \{1,\cdots,4\}^2$. Les sommets de $\hat{K}$ ont été numérotés de 1 à 4: l'indice n correspond à ce numéro. L'indice l indique le numéro de la fonction de base. Il y en a 4 par nœuds et l'ordre suivi sera toujours le même.
$\forall n \in \{1,\cdots,4\}$, on a :

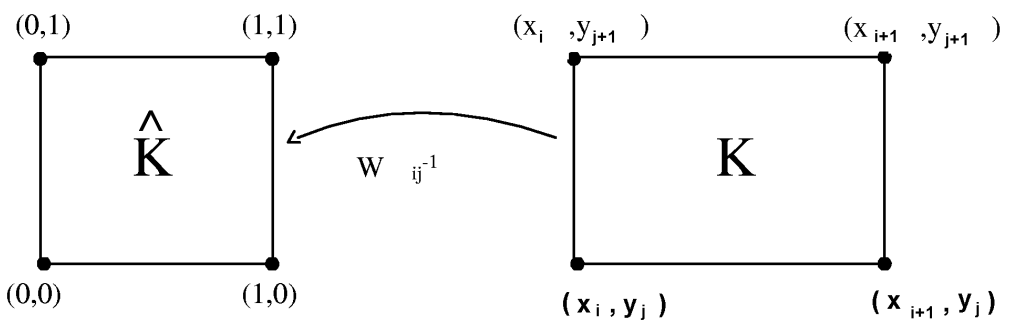
$\hat{\kappa}_1^n(t,v)$, Lagrange en t par Lagrange en v.
$\hat{\kappa}_2^n(t,v)$, Lagrange en t par Hermite en v .
$\hat{\kappa}_3^n(t,v)$, Hermite en t par Lagrange en v.
$\hat{\kappa}_4^n(t,v)$, Hermite en t par Hermite en v.

A titre d'exemple, nous explicitons les 4 fonctions de base relatives au nœud (0,0) de $\hat{K}$.

$$\begin{aligned}
\hat{\kappa}_1^1(t,v) &= (2t+1)(t-1)^2(2v+1)(v-1)^2 = \hat{\psi}_1(t)\hat{\psi}_1(v).\\
\hat{\kappa}_2^1(t,v) &= (2t+1)(t-1)^2 v(v-1)^2 = \hat{\psi}_1(t)\hat{\psi}_2(v).\\
\hat{\kappa}_3^1(t,v) &= t(t-1)^2(2v+1)(v-1)^2 = \hat{\psi}_2(t)\hat{\psi}_1(v).\\
\hat{\kappa}_4^1(t,v) &= t(t-1)^2 v(v-1)^2 = \hat{\psi}_2(t)\hat{\psi}_2(v).
\end{aligned}$$

On définit, de même que dans le cas 1D, une application définissant une transformation affine. Posons alors

$$W_{ij} : \begin{cases} \hat{K} \longrightarrow K \\ (t,v) \longmapsto (x = x_i + th_x,\ y = y_j + vh_y). \end{cases}$$



Les fonctions de base dans l'élément K sont déterminées à l'aide de la relation :

$$\kappa_l^n = C_s C_r [\hat{\kappa}_l^n \circ W_{ij}^{-1}(x,y)].$$

Si $\hat{\psi}_s$ est une fonction de Lagrange alors $C_s = 1$.
Si $\hat{\psi}_s$ est une fonction d'Hermite alors $C_s = h_x$.
Si $\hat{\psi}_r$ est une fonction de Lagrange alors $C_r = 1$.
Si $\hat{\psi}_r$ est une fonction d'Hermite alors $C_r = h_y$.

Chapitre 2

Présentation de la méthode de Contours Actifs

2.1 Modélisation du problème, définitions

On peut définir un contour actif ou "snake" comme une courbe fermée qui minimise son énergie, influencée par une contrainte interne et guidée par une force d'image qui pousse la courbe vers les contours présents dans l'image (cf. Terzopoulos *et al.* [101]). L'espace des formes est l'ensemble des courbes paramétrées suivant:

$$\Phi = \left\{ v \;\middle|\; v : \begin{array}{c} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ s \mapsto \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \end{array}, \; v(0) = v(1) \right\}.$$

L'énergie "snake" peut s'écrire sous la forme :

$$E_{Snake}(v) = E_{int}(v) + E_{ext}(v).$$

L'énergie E_{Snake} est constituée d'un terme de régularisation interne (E_{int}) et d'un terme de potentiel d'attraction (E_{ext}).
L'énergie interne peut se décomposer comme suit :

$$E_{int}(v) = \int_0^1 \left[\frac{\alpha(s)}{2} \; |\frac{dv}{ds}(s)|^2 + \frac{\beta(s)}{2} \; |\frac{d^2v}{ds^2}(s)|^2 \right] ds, \tag{2.1}$$

où $\alpha(s)$ est *le coefficient d'élasticité* (résistance à l'allongement) et $\beta(s)$ *le coefficient de rigidité*. Le premier terme de $E_{int}(v)$ ($\frac{\alpha(s)}{2} \; |\frac{dv}{ds}|^2$) pénalise la longueur du "snake" (augmenter $\alpha(s)$ tend à éliminer les boucles en réduisant la longueur du contour) et le second terme ($\frac{\beta(s)}{2} \; |\frac{d^2v}{ds^2}|^2$) pénalise la courbure (augmenter $\beta(s)$ tend à rendre le "snake" moins flexible (cf. McInerney *et al.* [77])).
On fait donc apparaître dans cette expression des propriétés mécaniques du comportement d'un élastique (dérivée du premier ordre) et d'une poutre (dérivée du second ordre). Les

modèles déformables se comportent comme des corps élastiques qui répondent naturellement aux forces et aux contraintes qui leur sont appliquées.
Notons que le choix $\beta = 0$ autorise néanmoins les discontinuités du second ordre. Cette remarque sera d'une grande utilité dans le chapitre consacré aux contours actifs géodésiques (cf. **chapitre 5**).
En ce qui concerne l'expression de l'énergie externe, plusieurs expressions liées à une fonction potentielle sont à notre disposition (cf. Sonka *et al.* [99]). Les contours que l'on souhaite déterminer sont:

- soit assimilés aux points de fort gradient de I, image donnée : l'expression de E_{ext} fait alors apparaître la norme du gradient (cf. l'expression (2.2)).
- soit assimilés aux points de dérivée seconde nulle (cf. l'expression (2.3), G_σ désignant un filtre gaussien - voir Sonka *et al.* [99] pour plus de détails).

$$E_{ext}(v) = \int_0^1 P(v(s))ds = -\int_0^1 \lambda|\nabla I(v(s))|^2 ds, \tag{2.2}$$

$$E_{ext}(v) = \int_0^1 P(v(s))ds = \int_0^1 |G_\sigma * \triangle I(v(s))|^n ds. \tag{2.3}$$

La modélisation du problème que l'on propose revient donc à trouver $\xi' \in \Phi$ telle que :

$$E_{Snake}(\xi') = \min_{\xi \in \Phi} E_{Snake}(\xi).$$

Il s'agit donc d'un problème de minimisation de fonctionnelle (minimisation de l'énergie) que nous allons résoudre dans la section suivante à l'aide du théorème d'Euler-Lagrange.

2.2 Approche mathématique

Nous allons utiliser le théorème d'Euler-Lagrange (cf. Dubrovin *et al.* [47], théorème 31.1.2) pour déterminer l'équation aux dérivées partielles que satisfait v, élément de l'espace de solutions admissibles, minimisant l'énergie E_{Snake}.
L'application de ce théorème à la fonctionnelle E_{Snake} nous donne alors :

$$\nabla P(v(s)) - \frac{d}{ds}[\alpha(s)\frac{dv}{ds}(s)] + \frac{d^2}{ds^2}[\beta(s)\frac{d^2v}{ds^2}(s)] = 0, \tag{2.4}$$

$$v(0) = v(1).$$

Pour plus de commodités, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\alpha_s = \frac{d\alpha}{ds}(s),\ \alpha_{ss} = \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s),\ \alpha_{sss} = \frac{d^3\alpha}{ds^3}(s),\ \alpha_{ssss} = \frac{d^4\alpha}{ds^4}(s).$$

$$v_s = \frac{dv}{ds}(s),\ v_{ss} = \frac{d^2v}{ds^2}(s),\ v_{sss} = \frac{d^3v}{ds^3}(s),\ v_{ssss} = \frac{d^4v}{ds^4}(s).$$

Ainsi, nous obtenons à l'aide de (2.4), l'équation suivante :

$$\nabla P(v(s)) - \alpha_s v_s - \alpha v_{ss} + \beta_{ss} v_{ss} + 2\beta_s v_{sss} + \beta v_{ssss} = 0. \tag{2.5}$$

On aboutit, sachant que $v(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ au système d'équations (2.6) suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(v) - \alpha_s x_s - \alpha x_{ss} + \beta_{ss} x_{ss} + 2\beta_s x_{sss} + \beta x_{ssss} = 0. \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(v) - \alpha_s y_s - \alpha y_{ss} + \beta_{ss} y_{ss} + 2\beta_s y_{sss} + \beta y_{ssss} = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

2.3 Vers un modèle dynamique

Le système d'équations issu de la formulation d'Euler-Lagrange exprime l'équilibre entre les forces internes et externes quand le contour reste à l'équilibre.
Le problème de minimisation est un problème statique. Le principe des modèles déformables est d'introduire un terme dynamique à la fonctionnelle lié à un paramètre temporel t.
Ainsi $v(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ devient $v(s,t) = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix}$. On introduit une *densité de masse* $\mu(s)$ et un *terme de viscosité* $\gamma(s)$. Le premier terme donne le caractère inertiel au problème, tandis que le second terme donne le caractère dissipatif.

Les équations d'Euler-Lagrange donnent donc :

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(s,t) + \gamma \frac{\partial v}{\partial t}(s,t) + \nabla P(v(s,t)) - \frac{\partial}{\partial s}\big(\alpha \frac{\partial v}{\partial s}(s,t)\big) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ (\beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s,t)) = 0. \tag{2.7}$$

Dans la phase de discrétisation que nous allons aborder, nous allons considérer l'élastique sans masse, soit $\mu = 0$. Nous obtenons une équation d'évolution. L'équation (2.7) devient avec la condition initiale $v(s,0) = v_0(s)$ et les conditions aux bords $v(0,t) = v(1,t)$:

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial t}(s,t) + \nabla P(v(s,t)) - \frac{\partial}{\partial s}\big(\alpha \frac{\partial v}{\partial s}(s,t)\big) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\ (\beta \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s,t)) = 0. \tag{2.8}$$

Nous discrétisons alors l'équation (2.8) par différences finies.
On s'intéresse tout d'abord aux deux premières équations (2.6) résultant de l'application du théorème d'Euler-Lagrange dans le cas statique.

Posons $s_i = ih$, où h désigne le pas spatial ($s \in [0,1]$, $i \in \{0, \cdots ,n\}$) , $s_0 = 0$ et $s_n = 1$. On note v_i une approximation de $v(ih) = \begin{pmatrix} x(ih) \\ y(ih) \end{pmatrix}$. On applique les schémas de type différences finies suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s}(s_i) &\simeq \frac{v_{i+1} - v_i}{h}. \\ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s_i) &\simeq \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \end{aligned}$$

De même, soit α_i un approximation de $\alpha(ih)$ et β_i un approximation de $\beta(ih)$ (dans le cas où on ne les choisit pas constants). On a donc:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s}[\alpha(s)\frac{\partial x}{\partial s}(s)] &\simeq -(\alpha_{i+1}\frac{x_{i+1} - x_i}{h^2}) + \frac{\alpha_i}{h^2}(x_i - x_{i-1}). \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2}[\beta(s)\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}(s)] &\simeq \beta_{i+1}\frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^4} - 2\beta_i\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^4} + \beta_{i-1}\frac{x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}}{h^4}. \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

Notons $F(v) = \begin{pmatrix} F_1(v) \\ F_2(v) \end{pmatrix} = -\nabla P(v)$. On a alors d'après les équations (2.9), ainsi que (2.6):

$$\begin{aligned} F_1(v_i) = \frac{1}{h^2}(\alpha_i(x_i - x_{i-1}) - \alpha_{i+1}(x_{i+1} - x_i)) \\ + \beta_{i-1}\frac{x_i - 2x_{i-1} + x_{i-2}}{h^4} - 2\beta_i\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^4} + \beta_{i+1}\frac{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}{h^4}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} F_2(v_i) = \frac{1}{h^2}(\alpha_i(y_i - y_{i-1}) - \alpha_{i+1}(y_{i+1} - y_i)) \\ + \beta_{i-1}\frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4} - 2\beta_i\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^4} + \beta_{i+1}\frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^4}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En regroupant les termes semblables, on aboutit à un système linéaire de la forme:

$$\left\{ \begin{aligned} Ax = F_1 \\ Ay = F_2 \end{aligned} \right. ,$$

avec $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et A un matrice pentadiagonale.

Dans la suite, nous nous intéressons plus particulièrement au cas où les paramètres de régularisation sont constants, ainsi : $\alpha(s) \equiv \alpha$ et $\beta(s) \equiv \beta$.

On introduit par la suite le terme d'évolution $\dfrac{\partial v}{\partial t}(s,t)$ (on a posé $\gamma(s) \equiv \gamma \equiv 1$). Soit $T > 0$, fixé quelconque. On introduit une subdivision de l'intervalle $]0,T]$ en sous-intervalles de longueur τ. On a ainsi $\forall m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\tau}\}$, $t_m = \tau m$.
Un schéma de type différences finies implicite est employé pour approcher la dérivée temporelle. Ainsi, $\forall m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\tau}\}$,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(s,t_m) \simeq \frac{v(s,t_m) - v(s,t_{m-1})}{\tau}.$$

Posant $\begin{cases} x^m = x(t_m) \\ y^m = y(t_m) \end{cases}$, on aboutit au système d'équations suivant:

$$\begin{cases} (Id + \tau A)x^m = x^{m-1} + \tau F_1(x^{m-1},\, y^{m-1}). \\ (Id + \tau A)y^m = y^{m-1} + \tau F_2(x^{m-1},\, y^{m-1}). \end{cases}$$

Ainsi, la minimisation de la fonctionnelle (problème statique) a lieu lorsque l'état stationnaire est atteint, le terme $\dfrac{\partial v}{\partial t}(s,t)$ tendant vers 0.
Plus précisément, un minimum de la fonctionnelle E_{Snake} est caractérisé par la solution stationnaire du problème d'évolution. Le problème parabolique est résolu en considérant à chaque instant t_m, la courbe soumise aux forces d'attraction calculées à partir de la courbe à l'instant t_{m-1}, ce qui signifie qu'à chaque itération, le second membre peut être considéré comme un vecteur constant. Une décomposition LU de $(Id + \tau A)$ est réalisée et permet de déterminer la solution. Si les paramètres de régularisation α et β sont constants, cette décomposition LU n'est à réaliser qu'une seule fois.
Les ordres de grandeur utilisés sont pour les coefficients α et β de l'ordre de h^2 et h^4, ce qui permet d'avoir dans la matrice de rigidité A des coefficients de même ordre de grandeur.

2.4 Approche Analyse fonctionnelle

Nous avons vu que le modèle de contours actifs est défini par une application dans un espace de *déformations admissibles* :

$$v : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ s \mapsto \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \end{cases}$$

et par la fonctionnelle

$$E(v) = \int_0^1 \left[\frac{w_1}{2} \langle v'(s) \rangle^2 + \frac{w_2}{2} \langle v''(s) \rangle^2 + P(v(s)) \right] ds,$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit le produit scalaire euclidien en dimension 2 et $\langle\cdot\rangle$ la norme associée. Le principe consiste à trouver une déformation admissible qui minimise la fonctionnelle $E(v)$ parmi l'ensemble des déformations admissibles. La caractérisation d'une fonction v minimisant la fonctionnelle E est réalisée par l'intermédiaire de l'équation d'Euler: $E'(v) = 0$.
Rappelons en effet que si V est un espace de Hilbert et J une fonctionnelle différentiable, pour que u soit solution du problème d'optimisation sans contraintes *(dit "optimum libre")*:

$$\begin{cases} \inf \ J(v) \\ v \in V \end{cases},$$

il faut que:

$$J'(u) = 0, \textit{ (condition du 1er ordre).}$$

Dans la suite, nous donnons certains des résultats figurant dans Cohen [35].

Théorème 2.4.1

Un minimum de l'énergie E_{Snake} est solution de l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial s}(w_1\dfrac{\partial v}{\partial s}) + \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = -\nabla P(v) \\ +\textit{conditions aux limites.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Preuve:

Soit v un élément de l'espace de solutions admissibles. Etudions la différentiabilté au sens de Gâteaux de E au point v dans la direction u (cf. partie I, chapitre 1, section 1.2 pour un complément sur la dérivée de Gâteaux).
On a :

$$E(v+hu) - E(v) = \int_0^1 \Big[w_1 h\langle\frac{\partial v}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial s}\rangle + \frac{w_1}{2}h^2\langle\frac{\partial u}{\partial s}\rangle^2 + w_2 h\langle\frac{\partial^2 v}{\partial s^2},\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\rangle + \frac{w_2}{2}h^2\langle\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\rangle^2$$
$$+P(v+hu) - P(v)\Big] ds.$$

On divise par h et on fait tendre h vers 0, soit :

$$E'(v,u) = \int_0^1 \Big[w_1\langle\frac{\partial v}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial s}\rangle + w_2\langle\frac{\partial^2 v}{\partial s^2},\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\rangle + \langle\nabla P(v),u\rangle\Big] ds. \tag{2.13}$$

On se place dans l'espace $H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \mid v_{|\partial\Omega} = 0 \ \ et \ \ \partial v_{|\partial\Omega} = 0\}$ où

$H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \dfrac{\partial v}{\partial s}$ *et* $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} \in L^2(\Omega)\}$. *En intégrant par partie la relation (2.13), on a:*

$$E'(v,u) = \int_0^1 \Big[-\langle \frac{\partial}{\partial s}(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}),u\rangle + \langle \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}),u\rangle + \langle \nabla P(v),u\rangle \Big] ds. \tag{2.14}$$

On en conclut utilisant l'équation d'Euler que:

$$-\frac{\partial}{\partial s}(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = -\nabla P(v). \tag{2.15}$$

■

Les conditions aux limites considérées sont: $v(0) = v(1) = \dfrac{\partial v}{\partial s}(0) = \dfrac{\partial v}{\partial s}(1) = 0$. Le minimum obtenu par cette caractérisation n'est que local du fait de la non-convexité de l'énergie E. Cela est en particulier lié à la non-convexité du potentiel P qui n'est défini que sur une grille discrète. On ne peut donc aboutir qu'à une segmentation partielle de l'image. Le minimum local détecté est lié à la condition initiale qui définit un voisinage de recherche.

On considère désormais le problème d'évolution associé à l'équation (2.15). On pourra ainsi déformer la courbe initiale jusqu'à l'obtention d'un minimum local de l'énergie. Un minimum de la fonctionnelle E est défini comme étant la solution stationnaire (*ie* $\dfrac{\partial v}{\partial t} \to 0$) du problème d'évolution :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial s}(w_1 \dfrac{\partial v}{\partial s}) + \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = -\nabla P(v). \\ v(s,0) = v_0(s), \text{ courbe initiale.} \end{cases} \tag{2.16}$$

La fonction v dépend donc de t (*variable temporelle*) et de s (*variable spatiale*). Ce problème parabolique, comme le souligne Cohen [35], est résolu en considérant à chaque instant t, la courbe soumise aux forces d'attraction $-\nabla P(v)$ calculées à partir de la position de la courbe à l'instant $(t-1)$. Ces forces varieront à chaque instant t en fonction de la position de la courbe v. On considère le problème comme un problème aux limites elliptiques. Pour une courbe initiale donnée, condition initiale du problème d'évolution, un champ de forces lui est appliqué $f = -\nabla P(v)$. Ce champ diffère à chaque itération car il dépend de la position de la courbe. L'équation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}) = f(v). \\ v(s,0) = v_0(s), \text{ courbe initiale.} \end{aligned} \tag{2.17}$$

On a le lemme suivant:

Lemme 2.4.1

La résolution de l'équation (2.17) est équivalente au problème suivant:

Déterminer une fonction $v : t \in [0,T] \mapsto v(t) \in H_0^2(\Omega)$ *telle que :*

$$\begin{aligned} \forall u \in H_0^2(\Omega),\ \frac{d}{dt}(v(t),u) + a(v(t),u) &= (f(v(t)),u) \\ v(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.5 Instabilité liée à la force d'image du modèle des contours actifs

Dans l'étape de discrétisation du problème d'évolution, des instabilités de plusieurs types peuvent apparaître.

2.5.1 Discrétisation temporelle

Cette analyse nous montre tout d'abord que le minimum obtenu par le modèle dépend fortement de l'initialisation de l'algorithme *i.e* du choix du contour initial v_0. Les informations *a priori* dont on dispose sur l'image sont donc très importantes. Cela se justifie également par le fait que la solution obtenue n'est qu'un minimum local en raison de la non-convexité de la fonctionnelle. Ainsi, l'initialisation de l'algorithme ne doit pas se faire trop loin du contour que l'on cherche à extraire. L'information *a priori* que l'on aura, permettra de définir un "voisinage de recherche".

Nous avons vu au cours de la discrétisation du problème d'évolution qu'à l'instant t, la courbe était soumise aux forces d'attraction calculées au temps $t-1$. La discrétisation temporelle constitue une étape importante dans la bonne mise en marche de l'algorithme : si la quantité $\tau F(v^{t-1})$ est trop grande le point peut bouger très loin du minimum et ne plus revenir. Il peut y avoir un phénomène d'oscillations autour du contour solution. Si τ est choisi trop petit, la force extérieure ne sera pas suffisamment grande par rapport aux forces internes pour attirer le contour vers les singularités de l'image recherchées : seuls les points de fort gradient seront attirés par la courbe. Une solution a été apportée par Cohen [43].
L'idée est de ne pas modifier le paramètre temporel τ mais de normaliser la force F en prenant $F = -k\dfrac{\nabla P}{|\nabla P|}$, où τk est de l'ordre de la taille d'un pixel. Ainsi, lorsqu'un point de la courbe est localisé près d'un bord, il est attiré par ce bord et se stabilise à cet endroit, et cela, si le terme de régularisation n'entrave pas le rôle de la force d'image.
Nous proposons un schéma issu des travaux de Cohen ([38]) traduisant cette instabilité liée à la discrétisation temporelle.

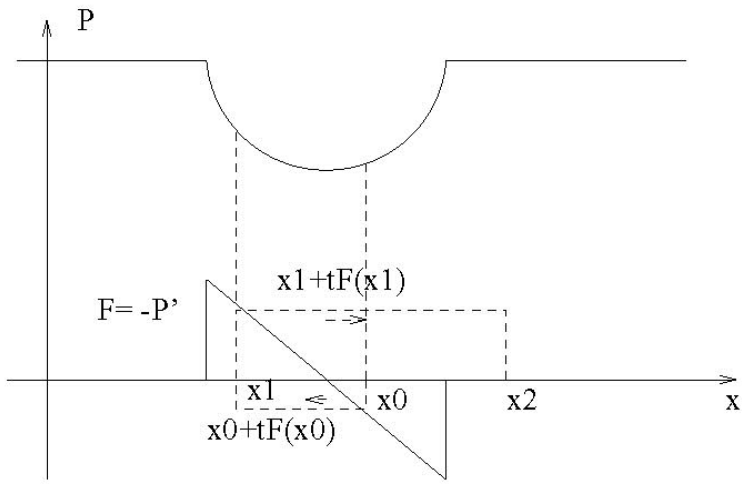


FIG. 2.1 – *Instabilité liée à la discrétisation temporelle. Partant de x_0, $\tau F(x_0)$ est trop grand et on dépasse ainsi le bon minimum.*

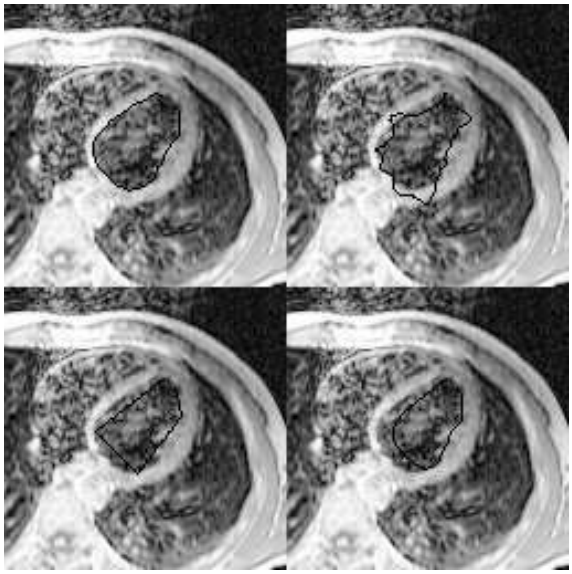


FIG. 2.2 – *Instabilité liée à la discrétisation temporelle. Au-dessus, le pas est trop grand: à gauche, l'image initiale, à droite, le résultat. En bas, le pas est trop petit : à gauche la courbe initiale, à droite, le résultat : sur la partie gauche de la courbe, les forces de régularisation sont dominantes, (cf. http://www.ceremade.dauphine.fr/∼cohen/habilpub.html#habilpub).*

2.5.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale (cf. Cohen [43]) est également un élément important. Nous travaillons sur une grille discrète. Il peut y avoir annulation théorique de F [1] sans que cette valeur soit atteinte en un point de la grille. La courbe oscille donc entre les pixels voisins du minimum. Ce problème est résolu par une interpolation bilinéaire de F aux positions non-entières. Une figure issue de Cohen [38] illustrant ce qui vient d'être dit est proposée dans ce qui suit.

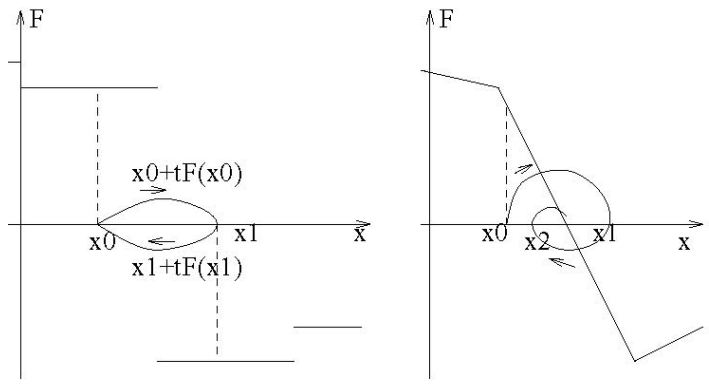


FIG. 2.3 – *Figure issue de http://www.ceremade.dauphine.fr/∼cohen/habilpub.html#habilpub.*

2.5.3 Elasticité-rigidité

Le choix des paramètres d'élasticité et de rigidité est très important dans la détection des singularités de l'image. Cependant, le choix de leurs valeurs est propre à l'image considérée. D'après Cohen [35], des valeurs de l'ordre de h^2 pour l'élasticité α et h^4 pour la rigidité β (où h est le pas spatial) donnent des résultats convenables.
Ce choix est dicté par la nécessité de donner une importance égale aux forces d'attraction et aux forces internes et donc d'avoir des coefficients de même ordre de grandeur dans la matrice de rigidité.

2.6 Le modèle des "Balloons"

2.6.1 Approche générale

Le modèle des "Balloons" a été introduit par Laurent D. Cohen, [38], [40], [39], [41] et [43]. Comme nous l'avons expliqué précédemment, un des principaux problèmes des "snakes" provient de la condition initiale. En effet, si la condition initiale n'est pas assez proche de la solution, le contour n'évolue pas suffisamment et tend à se localiser sur un minimum local non significatif. L'intérêt du modèle des "Balloons" réside dans la résolution de ce problème. On ajoute une force supplémentaire que l'on peut appeler *"force de gonflage"*. La courbe est assimilée à un ballon que l'on gonfle. Deux possibilités sont alors envisageables:

1. Soit la nuance (dans le cas des intensités) est assez forte et la courbe s'arrête.

1. F est défini par $F(v) = -\nabla P(v)$ tel que $P(v) = -|\nabla I(v)|^2$. Lorsqu'on se situe sur un point de maximum de gradient, on a donc un minimum local de P et F s'annule par conséquent.

2. Soit la nuance est trop faible et la courbe la surmonte pour aller chercher plus loin.

Grâce à ce modèle des “Balloons”, on peut donc résoudre deux des inconvénients principaux des “snakes”:

1. L’arrêt prématuré de la courbe sur un point non desiré.
2. Le choix d’une condition initiale très proche du contour à extraire.

Ceci est mis en évidence par la figure suivante. On constate qu’avec le modèle classique, le contour s’arrête sur un point qui correspond à un bruit, point non-significatif. Avec le modèle des “Balloons”, la courbe passe par dessus et se colle parfaitement au contour même si la condition initiale est très loin du résultat escompté.

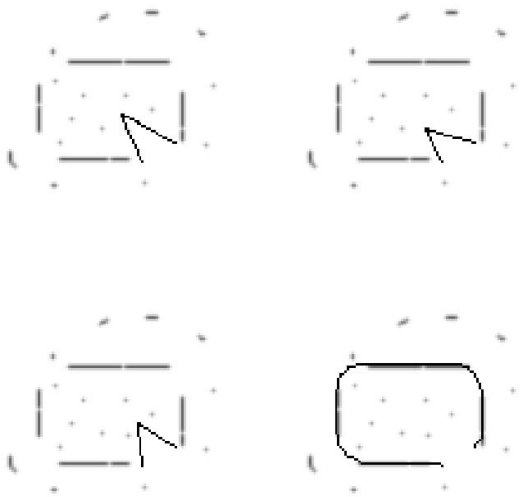


Fig. 2.4 – *Comparatif entre la méthode classique et la méthode des “Balloons”: en haut, le contour s’arrête sur un point non-significatif. En bas, la force de gonflage est adjointe au modèle, (voir Cohen [38] et http://www.ceremade.dauphine.fr/∼cohen/habilpub.html#habilpub).*

2.6.2 Approche mathématique

Partant d'une courbe initiale orientée, on ajoute au modèle une force de gonflage définie par: $k_1\vec{n}(v(s))$, où $\vec{n}$ est la normale unitaire extérieure à la courbe au point $v(s)$. On aboutit alors à l'expression suivante de la force F:

$$F = k_1\vec{n}(v(s)) - k\frac{\nabla P}{|\nabla P|}.$$

Si l'on change le signe de k_1, cela nous donne un dégonflage au lieu d'un gonflage. Notons aussi que k_1 et k sont approximativement du même ordre. Le paramètre k est cependant un peu plus grand que k_1 pour que le "snake" soit arrêté par les bons points.
Quelques applications sont proposées par la suite.

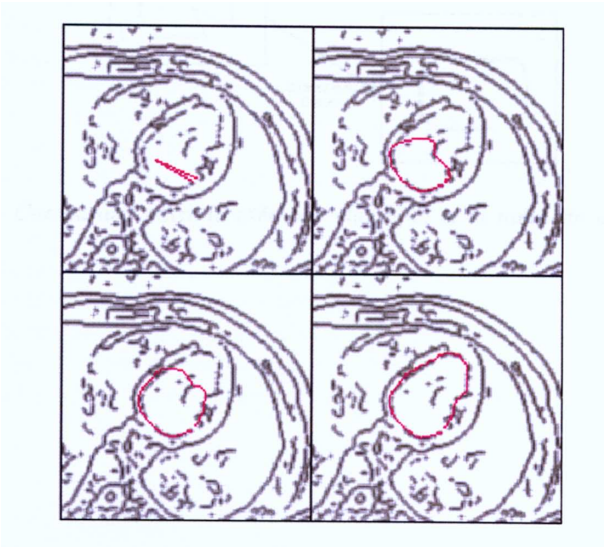


FIG. 2.5 – *Application à une image par résonance magnétique nucléaire issue des travaux de Cohen [38] - http://www.ceremade.dauphine.fr/∼cohen/habilpub.html#habilpub. Evolution du contour pour détecter le ventricule gauche.*

Chapitre 3

Modèles déformables: représentation de structures géologiques

Une application des techniques de surfaces déformables (*extension des modèles déformables en 3 dimensions*, cf. Cohen *et al.* [35], [36] et [37] et Cohen *et al.* [42]) a été réalisée par Vieira-Testé [107] dans la représentation de structures géologiques sous contraintes géométriques, dans le cadre de son doctorat effectué chez Total.
La structure géologique que l'on cherche à reconstruire est complexe car elle correspond à l'intersection de surfaces: failles, horizons, prolongements de faille. Vieira-Testé utilise les techniques de modèles déformables qui permettent d'interagir sur la modélisation: cela permet de faire évoluer en temps et en espace la représentation du modèle vers la solution du problème de minimisation introduit dans la modélisation. Les contraintes géométriques sont constituées par des "données de puits" (voir la figure 3.2) à interpoler.
En deux dimensions, la représentation du modèle est donc un ensemble de courbes correspondant aux différentes interfaces entre les milieux. Les différences majeures que l'on peut relever par rapport aux techniques des modèles déformables classiques sont:

- l'utilisation d'un modèle topologique permettant d'obtenir une représentation paramétrée globale de l'objet,
- l'utilisation de plusieurs attributs,
- l'utilisation d'un développement de Taylor à l'ordre k des termes non linéaires associés aux potentiels,
- le raccord global C^0 des éléments finis localement C^1,
- l'introduction de contraintes géométriques dans le modèle.

Ces contraintes conduisent à résoudre le problème de minimisation sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.
Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement les principales étapes de la construction du modèle et de sa résolution, en se fondant sur les travaux de Vieira-Testé [107].

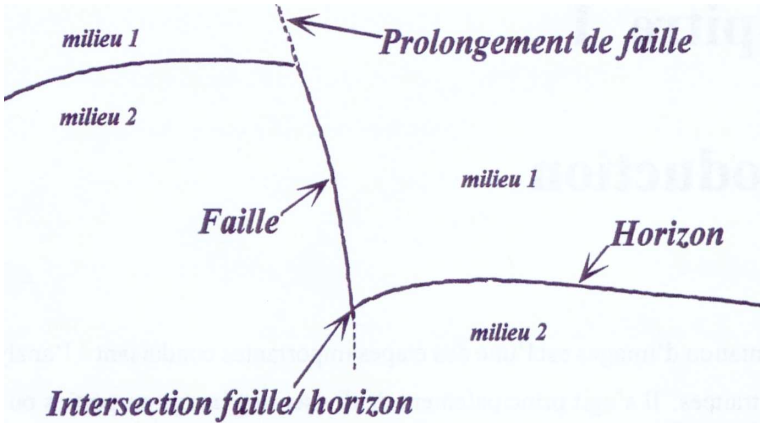


FIG. 3.1 – *Structure géologique en 2 dimensions: intersections de courbes correspondant à des horizons et des failles (figure issue de Vieira-Testé [107]).*

3.1 Paramétrisation de la structure

Dans Vieira-Testé [107], on suppose que les données, qui sont de deux types (données d'*attribut* sous forme d'images voxels et données de *puits*), sont définies dans un bloc de $\mathbb{R}^3$. Pour un attribut $\mathscr{A}$ donné (*vitesse de propagation de l'onde sismique, amplitude de l'onde sismique*), les données sont exploitées sous la forme $(x^i, \mathscr{A}(x^i))$ où les $x^i \in \mathbb{R}^3$ sont les coordonnées du centre de gravité du voxel et $\mathscr{A}(x^i)$ la valeur de l'attribut $\mathscr{A}$ en ce voxel.
Les données de puits sont des données de profondeur sous forme de conditions d'interpolation: $x^j \in \mathbb{R}^3$ (*la troisième composante de* x^j *étant la profondeur*) et des données de plans tangents. L'idée est donc de coupler dans le modèle, les données d'attributs et les données de puits.

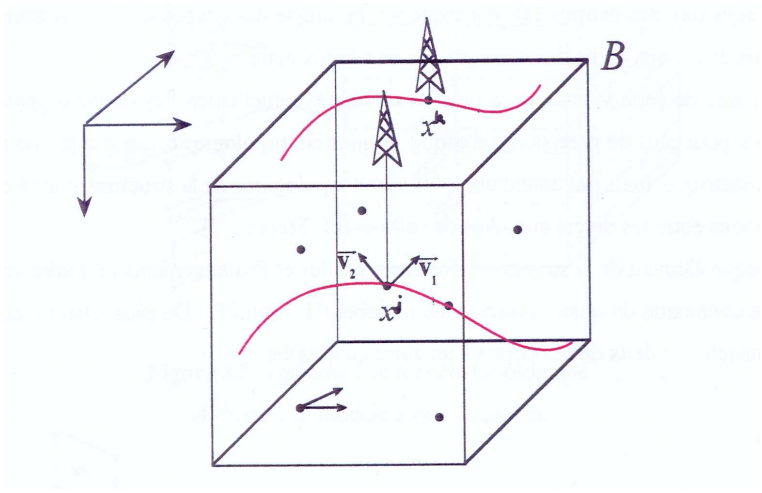


FIG. 3.2 – *Données de puits et de plans tangents dans le bloc: les vecteurs* $\vec{v_1}$ *et* $\vec{v_2}$ *sont déterminés à partir de l'angle de pendage et de l'angle d'azimut (figure issue de Vieira-Testé [107]).*

L'identification des éléments de la structure géologique: faille, prolongement de faille, horizon et des connexions topologiques qui les unissent permet d'élaborer un modèle *a priori*. Ce modèle est à la base de la paramétrisation de la structure.
A chaque composante de la structure géologique on associe un ensemble de 4 points et une étiquette précisant sa nature: faille (Γ_F), prolongement de faille (Γ_{PF}), horizon (Γ_H): ces éléments peuvent être appréhendés comme des quadrilatères. Chaque quadruplet ainsi formé est connecté par deux de ses points à un autre quadruplet associé à un autre élément.

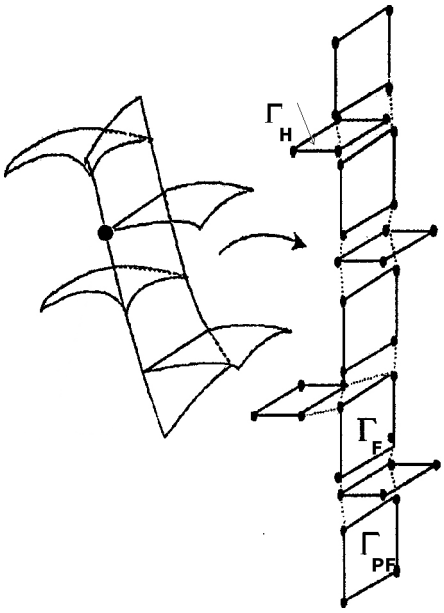


FIG. 3.3 – *A gauche, la structure géologique. A droite, le modèle topologique associé (figure issue de Vieira-Testé [107]).*

A partir de ce modèle topologique, on crée le modèle *a priori* en introduisant un bloc ainsi qu'une grille régulière de ce bloc par des cubes égaux (voir la figure 3.4).

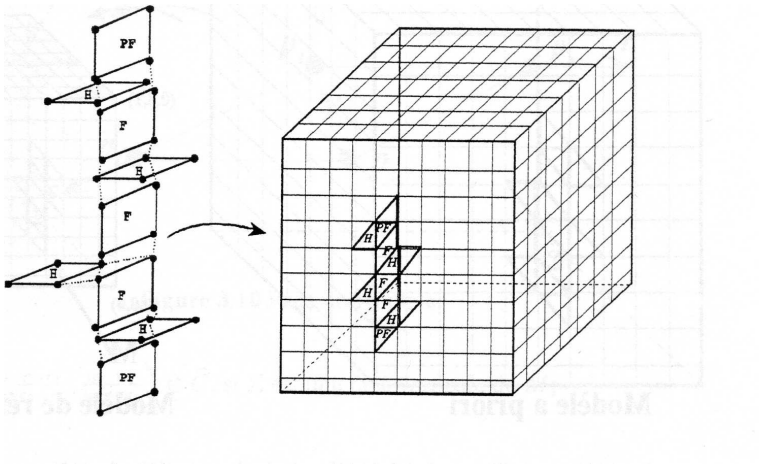


FIG. 3.4 – *A gauche, le modèle topologique. A droite, le modèle a priori associé (figure issue de Vieira-Testé [107]).*

La construction de l'espace de représentations admissibles cohérent avec le modèle *a priori* nécessite la détermination d'un domaine de paramétrage. Soit $\mathscr{S}$ la structure à représenter. On paramètre $\mathscr{S}$ par une fonction v telle que:

$$v : \begin{cases} M \to \mathscr{S} \subset \mathbb{R}^3 \\ (s,r) \mapsto v(s,r) = (x_1(s,r), x_2(s,r), x_3(s,r)), \end{cases}$$

où M désigne le domaine de paramétrage de la structure. L'idée de Vieira-Testé est de plonger le modèle *a priori* dans un modèle de référence: on utilise par exemple le cube unité de $\mathbb{R}^3$, $\bar{\Omega}$. Le domaine de paramétrage est alors l'image par cette transformation de l'ensemble des faces fermées verticales et horizontales constituant le modèle *a priori* .

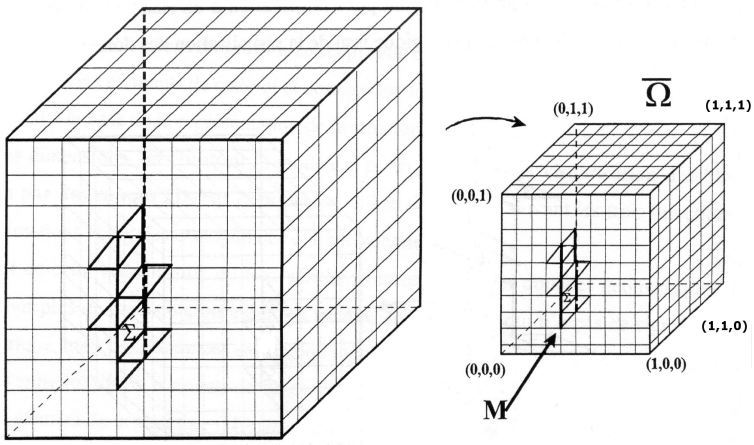


FIG. 3.5 – *A gauche, le modèle a priori. A droite, le modèle de référence (figure issue de Vieira-Testé [107]).*

Une fois le domaine de paramétrage défini, il s'agit d'expliciter l'espace de solutions admissibles.
γ désignant la réunion des bords communs à une face horizon et une face faille de M et $\overset{o}{\gamma}$ son intérieur, on pose:

$$M' = \overline{M \setminus \overset{o}{\gamma}},$$

l'intérieur de $M \setminus \overset{o}{\gamma}$.

L'espace de représentations admissibles V est alors défini par:

$$V = H^2(M',\mathbb{R}^3) \bigcap C^0(M,\mathbb{R}^3),$$

où $H^2(\cdot,\cdot)$ est l'espace de Sobolev classique.

3.2 Introduction du problème de minimisation

3.2.1 Energie interne ou *de régularisation*

L'expression de l'énergie interne associée aux forces internes s'apparente à celle explicitée dans le chapitre 2 de la partie I.
Pour $v \in V$, on pose, Γ désignant une face quelconque de M:

$$E_1(v) = [v]^2_{1,M'} + [v]^2_{2,M'},$$

avec

$$[v]^2_{1,M'} = \sum_{\Gamma \subset M} \int_{\overset{o}{\Gamma}} \epsilon_1(\Gamma) \left[< \frac{\partial v}{\partial s}(s,r) >^2_3 + < \frac{\partial v}{\partial r}(s,r) >^2_3 \right] ds\ dr,$$

$\forall \Gamma \subset M$, $\epsilon_1(\Gamma) \geq 0$, où $< \cdot >_3$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

$$[v]^2_{2,M'} = \sum_{\Gamma \subset M} \int_{\overset{o}{\Gamma}} \epsilon_2(\Gamma) \left[< \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s,r) >^2_3 + < \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(s,r) >^2_3 + 2 < \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}(s,r) >^2_3 \right] ds\ dr,$$

$\forall \Gamma \subset M$, $\epsilon_2(\Gamma) \geq 0$.

3.2.2 Energie externe

L'énergie externe s'exprime en fonction de potentiels associés aux différents attributs évoqués dans la section 3.1. On définit cette énergie E_2 de la manière suivante: $\forall v \in V$,

$$E_2(v) = \int_{\overset{o}{\Gamma}_H} P_1(v_{/\Gamma_H}(s,r))ds\ dr + \int_{\overset{o}{\Gamma}_F} P_2(v_{/\Gamma_F}(s,r))ds\ dr + \int_{\overset{o}{\Gamma}_{PF}} P_3(v_{/\Gamma_{PF}}(s,r))ds\ dr, \tag{3.1}$$

où P_1, P_2, P_3 sont les potentiels respectivement associés aux horizons, aux failles et aux prolongements de failles. De manière générale, si P est le potentiel associé à l'attribut $\mathscr{A}$, on choisit de prendre l'expression usuelle de P suivante:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ P(x) = -\alpha ||\nabla \mathscr{A}(x)||^2,\ \alpha \geq 0.$$

Ainsi, minimiser P revient à localiser les points pour lesquels l'attribut $\mathscr{A}$ présente une forte discontinuité.

3.2.3 Données de puits: données de profondeur sous forme de conditions d'interpolation

Pour ces conditions d'interpolation en profondeur, on suppose que l'on connaît un paramétrage $a_j = (s_j,r_j) \in M$ de chaque point $\beta_j = (x_1^j,x_2^j,x_3^j)$ à interpoler et par conséquent:

$$\forall j \in \{1,\cdots,N\},\ v(s_j,r_j) = \beta_j.$$

3.2.4 Définition du critère de minimisation

Soit K le sous-ensemble convexe fermé de notre espace de solutions admissibles V défini par:

$$K = \big\{v \in V |\ \forall j \in \{1,\cdots,N\},\ v(s_j,r_j) = \beta_j\big\}.$$

Considérons désormais l'énergie E définie sur V par:

$$E(v) = E_1(v) + E_2(v).$$

L'introduction des conditions d'interpolation dans le modèle conduit à rechercher la représentation optimale σ, solution du problème non-linéaire de minimisation suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ \sigma \in K, \\ \forall v \in K,\ E(\sigma) \leq E(v). \end{cases} \tag{3.2}$$

3.3 Problème d'évolution associé

3.3.1 Introduction d'une composante dynamique au modèle

La technique des modèles déformables, comme on l'a vu dans le chapitre 2, consiste à supposer que σ dépend du temps. On ajoute donc à la fonctionnelle initiale E un terme d'évolution défini par:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{M'} \epsilon(s,r) < \sigma(t,s,r) >_3^2 ds\ dr,$$

où $\epsilon(s,r) > 0$ (*supposé constant sur chaque face* Γ *de* M) permet de contrôler l'ampleur de la déformation des surfaces de la structure.
L'espace de solutions admissibles devient alors: avec $T > 0$

$$W(]0,T[,V) = \{w \in L^2(]0,T[,V),\ \frac{dw}{dt} \in L^2(]0,T[,V')\}$$

et le nouveau problème de minimisation est:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ \sigma \in W(]0,T[,V), \text{ tel que} \\ \forall t \in]0,T[,\ \sigma(t) \in K, \\ \forall w \in W(]0,T[,V), \text{ tel que } w(t) \in K, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{M'} \epsilon(s,r) < \sigma(t,s,r) >_3^2 ds\ dr + E(\sigma) \\ \leq \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{M'} \epsilon(s,r) < w(t,s,r) >_3^2 ds\ dr + E(w), \\ \sigma(0) = \sigma_0 \in L^2(M',\mathbb{R}^3). \end{cases} \tag{3.3}$$

3.3.2 Résolution

La formulation variationnelle de ce problème en prenant commme fonction test une fonction de l'espace stationnaire V est réalisée au moyen des multiplicateurs de Lagrange.
La discrétisation est réalisée comme suit:

- un schéma de type différences finies est appliqué pour la discrétisation temporelle ainsi qu'un développement de Taylor à l'ordre k par rapport au temps de la composante non-linéaire liée au potentiel. Cette technique proposée par Vieira-Testé [107] permet de tenir compte d'un plus grand nombre de voxels.
- le problème approché en temps est ensuite discrétisé par une méthode éléments finis dont l'élément fini de base est l'élément fini de Bogner-Fox-Schmit (cf. Ciarlet [32]) de classe C^1.

3.4 Présentation de quelques applications

Dans ce qui suit, nous proposons quelques applications issues des travaux de Vieira-Testé [107].

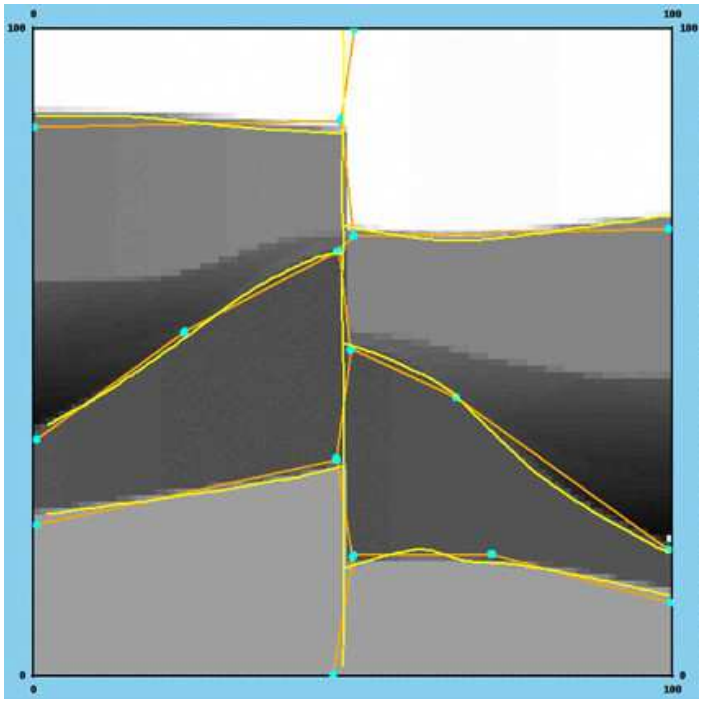


FIG. 3.6 – *En orange, la condition initiale, en jaune le résultat final (figure issue de Vieira-Testé [107]). Sans conditions d'interpolation, on remarque que la condition initiale est très proche du résultat final, condition sine qua non pour obtenir un résultat acceptable lorsqu'on utilise la méthode des modèles déformables.*

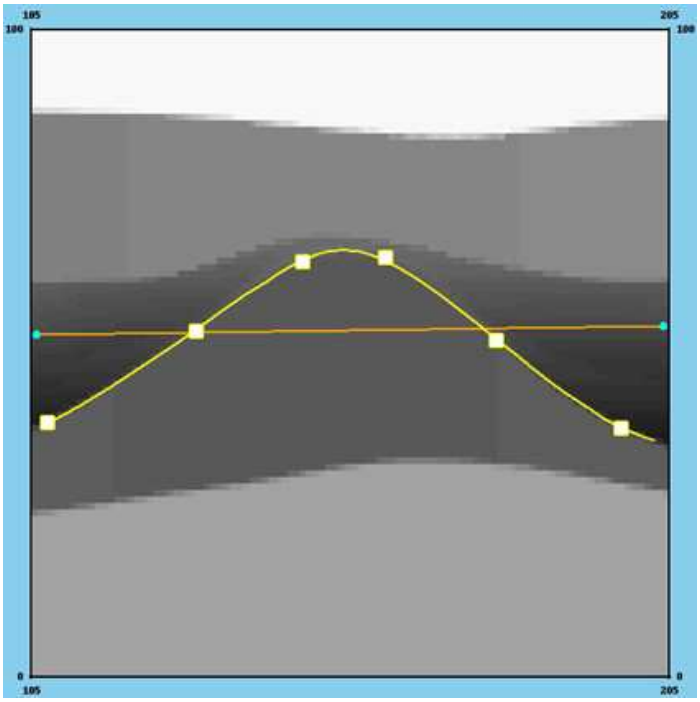


FIG. 3.7 – *Image d'un modèle de vitesse avec 6 points à interpoler (carrés blancs). En orange, la condition initiale, en jaune le résultat final (figure issue de Vieira-Testé [107]).*

Chapitre 4

Une approche fondée sur une analogie optique

On s'intéresse donc dans ce chapitre à la méthode fondée sur le principe de Fermat, méthode introduite par Deléchelle et Lemoine [46]. Nous verrons que cette méthode s'abstrait des paramètres de régularisation qui sont déterminants dans les méthodes de contours actifs classiques. En revanche, le formalisme est identique dans les deux méthodes, en particulier dans la formulation variationnelle issue de l'équation d'Euler-Lagrange.
Le principe de Fermat s'énonce de la façon suivante : *"Pour aller d'un point à un autre, la lumière emprunte le trajet pour lequel le temps de parcours est minimum".*

Le trajet de la lumière est défini à la fois dans l'espace et dans le temps; il est donc spatio-temporel mais on appréhende en général le rayon lumineux comme un fil indivisible, *i.e.* comme une courbe occupée par la lumière à chaque instant et en tout point.
Dans ce qui suit, nous conservons les notations de Deléchelle et Lemoine [46].
Le principe de Fermat donne pour le temps de parcours T entre deux points A et B la relation :

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v},$$

avec v la vitesse de la lumière dans le milieu qui est une fonction de l'indice de réfraction de ce milieu, $v = \frac{c}{n}$, c étant la vitesse de la lumière.
Si le milieu n'est pas homogène, l'indice de réfraction varie en fonction de s, d'où :

$$T = \frac{1}{c}\int_A^B n ds.$$

Si l'on se place dans le cas d'une trajectoire planaire, le chemin emprunté entre deux points peut être décrit par la trajectoire $y = f(x)$. On peut définir le paramètrage suivant:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t). \end{cases}$$

On a la relation $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ et si x définit le paramètre de la trajectoire, T s'exprime de la façon suivante :

$$T = \frac{1}{c}\int_{x_A}^{x_B} n\sqrt{(1+\dot{y}^2)}dx. \tag{4.1}$$

Intuitivement, on voit que cette expression traduit le rapport entre la distance parcourue et la vitesse. En effet, si l'on considère une courbe Φ, paramétrée par t et définie par :

$$\Phi : \begin{cases} [t_0,t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

la longueur de la courbe est définie par :

$$\begin{aligned} long &= \int_{t_0}^{t_1} ||\Phi'(t)||dt, \qquad (4.2) \\ \text{soit } long &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}dt. \end{aligned}$$

Dans notre cas, le paramètre est x, donc la longueur de la courbe $y(x)$ est donnée par :

$$long = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+\dot{y}^2)}dx.$$

Le principe de Fermat ou *principe du moindre temps* donne que T est minimum sur la trajectoire. Nous sommes donc ramenés à un problème de calcul variationnel et plus précisément à un problème de minimisation de fonctionnelle.

Ce problème est résolu en appliquant le théorème d'Euler-Lagrange (*cf. partie I, chapitre 2*). Dans notre cas, le lagrangien L est défini par: $L(x,\, y(x),\, y'(x)) = \dfrac{n}{c}\sqrt{(1+\dot{y}^2)}$, n dépendant de x et de y.

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c}\frac{\partial n}{\partial y}\sqrt{(1+\dot{y}^2)}, \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{n}{c}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}. \end{cases}$$

L'équation d'Euler-Lagrange nous donne finalement :

$$\frac{1}{c}\frac{\partial n}{\partial y}\sqrt{(1+\dot{y}^2)} - \frac{1}{c}\frac{\partial n}{\partial x}\frac{\dot{y}}{\sqrt{(1+\dot{y}^2)}} - \dot{y}\frac{1}{c}\frac{\partial n}{\partial y}\frac{\dot{y}}{\sqrt{(1+\dot{y}^2)}} - \ddot{y}\frac{n}{c}\frac{1}{(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

On multiplie cette égalité par $c(1+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}$ et on obtient finalement:

$$n\ddot{y} + \dot{y}^3\frac{\partial n}{\partial x} - \dot{y}^2\frac{\partial n}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} = 0. \qquad (4.3)$$

On peut également écrire (4.3) sous la forme :

$$n\ddot{y} + \alpha\dot{y} = \beta, \qquad (4.4)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial n}{\partial x}(1+\dot{y}^2) - \dfrac{\partial n}{\partial y}\dot{y}, \\ \beta = \dfrac{\partial n}{\partial y}. \end{cases}$$

La méthode de résolution peut être une méthode variationnelle obtenue à l'aide des différences finies classiques :

$$\begin{cases} \dot{y}_j = \dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h}, \\ \ddot{y}_j = \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}. \end{cases}$$

Ainsi, pour $j = 1, \cdots, L$, on a :

$$y_j = \frac{1}{2}(y_{j+1} + y_{j-1}) + \frac{h\alpha_j}{4n_j}(y_{j+1} - y_{j-1}) - \frac{h^2}{2n_j}\beta_j. \tag{4.5}$$

Une méthode itérative de type Gauss-Seidel utilisant cette relation est envisageable mais la non-linéarité de l'équation aux dérivées partielles retarde la convergence de l'algorithme. Nous nous sommes donc intéressés à une technique de résolution numérique qui est *la programmation dynamique* (cf. Bellman [19] et Sakarovitch [93]). Nous présentons dans la section suivante le principe de cette méthode, une grande partie de ces éléments de présentation provenant de Sakarovitch [93].

4.1 La programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique qui est une technique d'optimisation peut se formuler de la manière suivante :
"dans une séquence optimale de décisions, quelle que soit la première décision prise, les décisions subséquentes forment une sous-séquence optimale, compte-tenu des résultats de la première décision", (d'après Sakarovitch [93]).
On remarque que ce principe d'optimalité implique que le problème à étudier puisse être formulé comme celui de l'évolution d'un système. Il est nécessaire pour cela que l'on puisse de manière plus ou moins artificielle décomposer le problème en étapes. Le nombre d'étapes est supposé fini et égal à n. Dans la suite, nous conservons les notations de Sakarovitch [93]. A chaque étape k, deux ensembles sont à examiner:

- l'ensemble X_k des décisions que l'on peut prendre à cette étape.
- l'ensemble E_k des états dans lesquels on peut se trouver suite à la décision prise.

La définition de la fonction objectif ou *fonction coût* est liée à la décision prise à l'étape k. En effet, une décision $x_k \in X_k$ alors que le système se trouve dans l'état $e_{k-1} \in E_{k-1}$ a pour effet :

1. de faire passer le système à l'état $e_k \in E_k$ à la fin de la $k^{ème}$ étape.
2. d'engendrer un coût égal à $c_k(e_{k-1}, x_k)$.

C'est à dire qu'on associe à chaque $k = 1, 2, \cdots, n$ deux applications :

$$\begin{cases} F_k = E_{k-1} \times X_k \longrightarrow E_k \text{ (fonction de transition)} \\ c_k = E_{k-1} \times X_k \longrightarrow \mathbb{R} \text{ (fonction de coût).} \end{cases}$$

On appelle *politique* de l'état $e_{i-1} \in E_{i-1}$ à l'état $e_j \in E_j$ une séquence de décisions :

$$\wp(e_{i-1}, e_j) = (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_j) \in X_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_{j-1} \times X_j$$

telle que $e_k = F_k(e_{k-1}, x_k)$, $k = i, i+1, \cdots, j-1, j$.

Le coût de la politique $\wp(e_{i-1},\, e_j)$ est :

$$c(\wp(e_{i-1},\, e_j)) = \sum_{k=i}^{j} c_k(e_{k-1},\, x_k),$$

les e_k étant définis comme précédemment.
Le principe d'optimalité se traduit par :

Soit $\widehat{\wp(e_0,\, e_n)}$ une politique optimale conduisant de l'état $e_0 \in E_0$ à l'état $e_n \in E_n$ et passant par les états $e_i \in E_i$ et $e_j \in E_j$ $(0 \leq i \prec j \leq n)$. La restriction de $\widehat{\wp(e_0,\, e_n)}$ joignant e_i à e_j est alors optimale.
On en déduit que quelle que soit la décision prise à l'étape k qui amène le système de l'état $e_{k-1} \in E_{k-1}$ à l'état $e_k \in E_k$, la portion de la politique optimale $\widehat{\wp(e_0,\, e_k)}$ entre e_0 et e_{k-1} est optimale.

Si l'on pose :

$$\begin{cases} z_k(e_k) = \text{coût d'une politique optimale de } e_0 \text{ à } e_k \in E_k \ , \\ z_0(e_0) = 0. \end{cases}$$

On a les formules de récurrence :

$$z_k(e_k) = \min_{x_k \in X_k / e_k = F_k(e_{k-1},\, x_k)} \Big[c_k(e_{k-1},\, x_k) + z_{k-1}(e_{k-1}) \Big].$$

Nous avons appliqué cette technique de recherche d'extremum à notre problème. Nous détaillons dans la section suivante l'approche mathématique du problème.

4.2 Approche mathématique de la programmation dynamique dans le cadre de cette étude

L'introduction du temps dans le problème permet de l'assimiler à l'étude d'un système évolutif. L'expression du temps de parcours est :

$$T = \int_{x_A}^{x_B} L(x,\, y,\, \dot{y}) dx. \tag{4.6}$$

A partir de l'équation (4.6), on définit la fonctionnelle :

$$J(y) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} L(\xi,\, y,\, \dot{y}) d\xi \tag{4.7}$$

et la fonction à valeur optimale S telle que $x \in [\xi_0, \xi_1]$:

$$S(x,y) = \min_{\{P\}} \int_{x}^{\xi_1} L(\xi,\, y,\, \dot{y}) d\xi, \tag{4.8}$$

où $\{P\}$ contient tous les parcours admissibles entre $(x,\, f(x))$ et $(\xi_1,\, f(\xi_1))$.
Traduisons l'intégrale (4.6) sous forme discrète:

$$T^* = \sum_{j=1}^{L} L(x_j,\, y_j,\, \dot{y}_j)\triangle x_j. \tag{4.9}$$

Le problème revient alors à minimiser :

$$T^*(y_1,\, y_2,\, ...,\, y_L) = T_1(y_1,\, y_2) + T_2(y_2,\, y_3) + \cdots + T_{L-1}(y_{L-1},\, y_L) \tag{4.10}$$

avec :

$$T_j(y_j,\, y_{j+1}) = \frac{n_j}{c}\sqrt{\triangle {x_j}^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}. \tag{4.11}$$

$\triangle x_j$ est le pas en x. Comme nous l'avons dit dans la section consacrée à la programmation dynamique, il s'agit de décomposer le problème en étapes. Ainsi, partant d'un point initial de la trajectoire, le problème de minimisation peut se traiter en un nombre fini d'étapes successives, critère requis dans le cadre de la programmation dynamique. Pour chaque étape, un nombre limité de décisions conduisant à un nouvel état est défini en allouant à chaque variable d'état y_j M valeurs.
On pose $M = 2m+1$, (la grandeur m détermine la taille M du voisinage 1D au point courant). Pour obtenir la solution au problème de minimisation, on définit une séquence de fonctions $\{S_j\}_{j=1}^{j=L-1}$, les y_j représentant les variables d'état, fonctions respectant les relations de récurrence explicitées dans la section précédente, soit:

$$\begin{cases} S_1(y_2) = \min\limits_{y_1}\Big[T_1(y_1,\, y_2)\Big], \\ S_j(y_{j+1}) = \min\limits_{y_j}\Big[S_{j-1}(y_j) + T_j(y_j,\, y_{j+1})\Big], \\ S_{L-1}(y_L) = \min\limits_{y_{L-1}}\Big[S_{L-2}(y_{L-1}) + T_{L-1}(y_{L-1},\, y_L)\Big]. \end{cases} \tag{4.12}$$

Par analogie avec les notations prises dans la section précédente, le paramètre j représente l'étape et y_j la variable d'état pour cette étape. A la fin de la procédure, on a donc M trajectoires possibles puisque pour chaque état possible du dernier point de la trajectoire (*i.e.* M), on a déterminé la position de l'avant-dernier point minimisant la fonction coût. La trajectoire minimisant le temps est celle pour laquelle on a la relation :

$$T_{min} = \min_{y_1, y_2, \cdots, y_L} T = \min_{y_L}\Big[S_{L-1}(y_L)\Big]. \tag{4.13}$$

Il est à noter que nous n'avons considéré que le déplacement possible dans la direction y. Cependant, dans le cas des trajectoires fermées, les x_j peuvent être considérées comme des variables d'état.

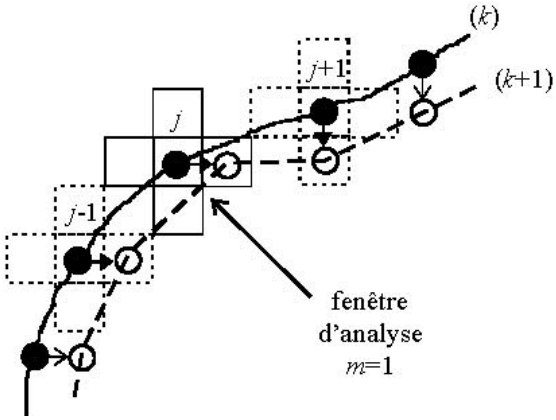


FIG. 4.1 – *Exemple de fenêtre d'analyse:* $m = 1$ *dans ce cas, variables d'état:* x_j, y_j. *La fenêtre d'analyse limite la recherche du déplacement entre 2 itérations successives.*

Le principe de Fermat nous a permis d'aboutir au concept de trajectoire déformable. L'image est assimilée à un relief, dans lequel la lumière se propage. L'intensité des niveaux de gris est liée à l'indice de réfraction qui caractérise ce milieu.
Etant donné que l'on cherche à extraire des contours (*ces points étant assimilés aux points pour lesquels l'attribut "niveau de gris" présente une forte discontinuité*) et que l'on cherche à minimiser le temps, nous avons opté pour la définition suivante de n:

$$n(x,y) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x,y)|^p},\ p = 1,2,$$

de façon à conférer aux points de contour un indice de réfraction n proche de zéro. Ainsi, la vitesse de propagation $v = \dfrac{c}{n}$ devient très grande.
Nous concluons ce chapitre par un exemple issu des travaux de Deléchelle et Lemoine [46].

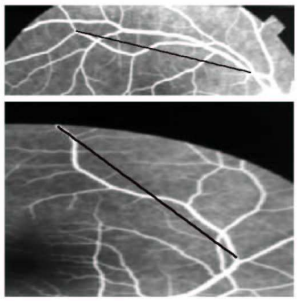


Figure 3.- Détection de structures linéaires.

Deux exemples d'initialisation du chemin optique.

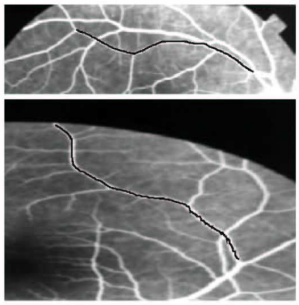


Figure 4.- Résultats de la détection des vaisseaux sélectionnés sur la figure 3, après respectivement 30 et 34 itérations, pour une valeur de m=2.

FIG. 4.2 – *Détection de vaisseaux sur des images d'angiographie rétinienne. (cf. http://perso.wanadoo.fr/e.delechelle).*

Chapitre 5

Contours actifs géodésiques

5.1 Un modèle géométrique de contours actifs

Dans [23], Caselles *et al.* s'intéressent à une approche géométrique des contours actifs, approche fondée sur la théorie d'évolution de courbes et non plus sur une minimisation de fonctionnelle interprétée en terme d'énergie. La courbe évolue suivant sa normale avec une vitesse proportionnelle à sa courbure pondérée par une fonction liée à l'information de l'image. La représentation implicite de la courbe *via* une fonction explicite (approche "level set") permet de s'affranchir des problèmes liés à la paramétrisation. Le modèle est intrinsèque et la condition initiale n'a pas nécessairement la même topologie que la courbe finale, cette approche permettant de gérer les changements topologiques.

Caselles *et al.* [23] proposent donc le modèle suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(|\nabla I|)|\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + cg(|\nabla I|)|\nabla u|, \\ &= g(|\nabla I|)(c+\kappa)|\nabla u|, \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec c une constante positive, κ la courbure et g une fonction qui stoppe le front sur les frontières de l'objet à segmenter. g est du type:

$$g(|\nabla I|) = \frac{1}{1+|\nabla \hat{I}|^p}.$$

La constante c doit être choisie assez grande pour que la quantité $c+\kappa$ soit de signe constant, ce qui assure l'extraction des contours de forme non-convexe. $\hat{I}$ est l'image obtenue par convolution de I avec un filtre gaussien et $p=1$ ou $p=2$.

Dans le cas du modèle considéré, les "level sets" $\mathscr{C}$ de u évoluent suivant l'équation:

$$\mathscr{C}_t = g(|\nabla I|)(c+\kappa)\vec{n}.$$

On rappelle en effet, (cf. Caselles, Kimmel et Sapiro [24]) que si une courbe planaire $\mathscr{C}$ évolue suivant l'équation:

$$\mathscr{C}_t = \beta\vec{n},$$

$\vec{n}$ désignant la normale unitaire intérieure à la courbe et β étant une fonction donnée (on suppose en outre que la paramétrisation de la courbe en q est telle que pour q croissant,

l'intérieur de la courbe est sur la gauche (cf. figure 5.1), ainsi la normale unitaire intérieure est définie par $\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{-\mathscr{C}'_2}{\sqrt{\mathscr{C}'^2_1+\mathscr{C}'^2_2}} \\ \frac{\mathscr{C}'_1}{\sqrt{\mathscr{C}'^2_1+\mathscr{C}'^2_2}} \end{pmatrix}$ et la courbure κ est telle que $\kappa = \frac{\mathscr{C}''_2\mathscr{C}'_1-\mathscr{C}''_1\mathscr{C}'_2}{(\mathscr{C}'^2_1+\mathscr{C}'^2_2)^{\frac{3}{2}}}$, cf. Sethian [96] pour plus de détails) et si $\mathscr{C}$ est une "level set" de la fonction u, (u *supposée négative à l'intérieur de la "level set", positive à l'extérieur*) alors u satisfait l'équation aux dérivées partielles:

$$u_t = \beta|\nabla u|.$$

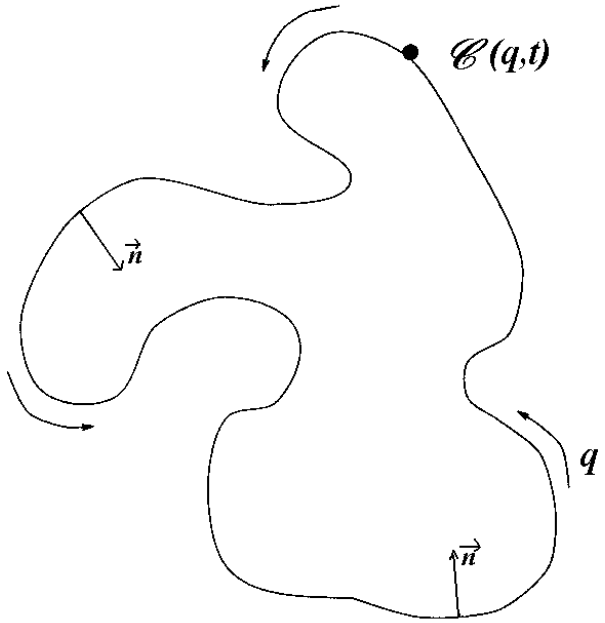


FIG. 5.1 – *Paramétrisation de la courbe $\mathscr{C}$.*

Le terme $\mathscr{C}_t = \kappa\vec{n}$ correspond à l'équation de la chaleur et possède des propriétés géométriques lissantes: ce flot (*"shortening flow"*) diminue la courbure totale ainsi que le nombre de passages par zéro et les valeurs des maxima et minima de la courbure. Lorsque la courbure est positive, le front est donc "*rentrant*", lorsque la courbure est négative, le front est "*sortant*".
La composante $c\vec{n}$ agit comme la force de gonflage du modèle des "Balloons" de Cohen [38], [40], [39] et [41]. Partant d'une condition initiale convexe, elle permet de détecter un contour non-convexe. En effet, l'équation de la chaleur seule n'autorise pas ce changement de topologie: une courbe convexe reste convexe quand elle évolue suivant l'équation de la chaleur, pour devenir un point, *(cf. Gage [53] et [54]).*
Si l'on dresse un parallèle avec le modèle classique des contours actifs, on peut conclure que le terme $(c+\kappa)$ correspond aux forces internes du fait de ses propriétés régularisantes tandis que le terme $g(|\nabla I|)$ coïncide avec la force externe.

L'objection que l'on peut formuler quant à ce modèle est d'une part, la difficulté du choix du paramètre c, (ce choix n'étant pas trivial, cf. Caselles *et al.* [23]) et d'autre part, le manque de robustesse du modèle quand les variations de niveaux de gris le long d'un contour sont contrastées. Le modèle des contours actifs géodésiques introduit par Caselles *et al.* s'abstrait de la composante $cg(|\nabla I|)|\nabla u|$ et propose un modèle plus enclin à attirer le contour vers les frontières de l'objet considéré.

5.2 Un modèle de contours actifs géodésiques

Dans [24], Caselles *et al.* s'intéressent à un cas particulier de (2.1) en posant $\beta = 0$. Ils montrent que ce modèle revient à chercher une courbe géodésique dans un espace de Riemann dont la métrique est induite par le contenu de l'image. L'approche évolution de courbe prime sur l'approche minimisation de fonctionnelle interprétée en terme d'énergie. De plus, la représentation implicite de la courbe *via* une fonction explicite présente les avantages évoqués dans la section 5.1.

5.2.1 Introduction des géodésiques

Si $\mathscr{C}$ désigne une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$, on rappelle que l'énergie qui lui est associée dans le cas des "snakes" classiques est donnée par:

$$E(\mathscr{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathscr{C}'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |\mathscr{C}''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(\mathscr{C}(q))| dq. \tag{5.2}$$

Posant $\beta = 0$, (Caselles *et al.*, [24] montrent que ce choix n'est pas restrictif par rapport à la régularité souhaitée sur le contour) et généralisant l'expression du potentiel associé à la force d'image à une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ strictement décroissante telle que $\lim_{r \to +\infty} g(r) = 0$, $E(\mathscr{C})$ se réécrit:

$$E(\mathscr{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathscr{C}'(q)|^2 dq + \lambda \int_0^1 g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)^2 dq. \tag{5.3}$$

Soit

$$\mathscr{U}(\mathscr{C}) = -\lambda g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)^2.$$

Posons également $\alpha = \dfrac{m}{2}$. On a :

$$E(\mathscr{C}) = \int_0^1 \mathscr{L}(\mathscr{C}(q)) dq,$$

où $\mathscr{L}$ est le lagrangien défini par:

$$\mathscr{L}(\mathscr{C}) = \frac{m}{2} |\mathscr{C}'|^2 - \mathscr{U}(\mathscr{C}).$$

Si $\mathscr{C}$ est donnée par:

$$\mathscr{C} : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ q \mapsto \begin{pmatrix} \mathscr{C}_1(q) \\ \mathscr{C}_2(q) \end{pmatrix}, \end{cases}$$

l'Hamiltonien est alors défini par:

$$H = \mu_1 \mathscr{C}_1' + \mu_2 \mathscr{C}_2' - \mathscr{L},$$

avec $\mu_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathscr{C}_i'}$.

Ainsi, dans notre cas, H est défini par:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \mathscr{U}(\mathscr{C}),$$

avec $p^2 = m^2|\mathscr{C}'|^2$ d'après Dubrovin *et al.* [47] théorème 33.1.2.

Remarque 5.2.1

La loi de conservation d'énergie se traduit de la manière suivante en terme d'Hamiltonien: "le long de toute trajectoire $x(t)$, $p(t)$ solutions des équations d'Hamilton, l'Hamiltonien $H(x(t), p(t))$ est constant".

Ainsi, d'après le théorème 33.3.1 de Dubrovin *et al.* [47], on en déduit que si $L = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$ soit $H = \dfrac{p^2}{2m} + U(x)$ alors $p = m\dot{x}$, et pour un niveau d'énergie fixé E, on a : $|p| = \sqrt{2m(E - U(x))}$. Par conséquent, toute extrémale de niveau d'énergie E correspondant au Lagrangien L est une extrémale pour l'action

$$\begin{aligned} S_0 &= \int < p, \dot{x} > dt = \int |p||\dot{x}|dt \text{ car } p \text{ et } \dot{x} \text{ sont liés,} \\ &= \int |\dot{x}|\sqrt{2m(E - U(x))}dt = \int \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}dt, \end{aligned}$$

avec

$$g_{ij} = 2m(E - U(x))\delta_{ij}.$$

Théorème 5.2.1 *Principe de Maupertuis (cf. [47] théorème 33.3.2)*

Les courbes $\mathscr{C}(q)$ dans un espace euclidien qui sont des extrémales correspondant à l'Hamiltonien $H = \dfrac{p^2}{2m} + \mathscr{U}(\mathscr{C})$ et qui ont un niveau d'énergie fixé E_0, sont des géodésiques par rapport à la nouvelle métrique:

$$g_{ij} = 2m(E_0 - \mathscr{U}(\mathscr{C}))\delta_{ij}.$$

L'application du Principe de Maupertuis conduit à la conclusion suivante: le problème de minimisation d'énergie (5.3) est équivalent à rechercher la courbe $\mathscr{C}$ qui minimise:

$$\int_0^1 \sqrt{2m(E_0 - \mathscr{U}(\mathscr{C}))\delta_{ij}\mathscr{C}_i'\mathscr{C}_j'}dq,$$

soit,

$$\int_0^1 \sqrt{2m(E_0 - \mathscr{U}(\mathscr{C}))}|\mathscr{C}'(q)|dq. \tag{5.4}$$

Le choix du niveau d'énergie E_0 est motivé par le Principe de Fermat (voir Dubrovin *et al.* [47] théorème 33.3.3). Caselles *et al.* [24] posent $c(w) = \dfrac{1}{g(|\nabla I(w)|)}$: cela signifie, en particulier, que la vitesse de la lumière est élevée en présence d'un bord (*dans ce cas, en effet,* $\lim_{r\to+\infty} g(r) = 0$) et petite dans une région de texture homogène.
Appliquant le principe de Fermat à leur modèle, Caselles *et al.* montrent que cela revient à minimiser

$$\int_0^1 g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)|\mathscr{C}'(q)|dq. \tag{5.5}$$

Le problème (5.5) est donc équivalent au problème (5.4) si l'on pose $E_0 = 0$. Remarquons que fixer le paramètre E_0 revient à fixer le rapport $\dfrac{\lambda}{\alpha}$ et la paramétrisation dans (5.3). Ce choix permet d'accorder un poids équivalent aux forces internes et aux forces d'image, sachant que $E_0 = \alpha|\mathscr{C}'(q)|^2 - \lambda g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)^2$. Remarquons enfin que (5.5) est intrinsèque : une nouvelle paramétrisation de la courbe *via* $q = \Phi(r)$, $\Phi : [a,b] \to [0,1]$, $\Phi' > 0$ donne:

$$\int_0^1 g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)|\mathscr{C}'(q)|dq = \int_a^b g(|\nabla I(\bar{\mathscr{C}}(r))|)|\bar{\mathscr{C}}'(r)|dr,$$

avec, $\bar{\mathscr{C}}(r) = \mathscr{C}(\Phi(r))$.

Caselles *et al.* [24] ont donc établi l'équivalence entre la minimisation d'énergie du problème classique des "snakes" et la recherche d'une courbe géodésique dans une certain espace de Riemann. Remarquons que la longueur euclidienne de la courbe $\mathscr{C}$ est donnée par:

$$L_{\mathscr{C}} = \int_0^1 |\mathscr{C}'(q)|dq.$$

En utilisant le paramétrage normal à l'aide de l'abscisse curviligne $\begin{cases} s(q) = \displaystyle\int_0^q |\mathscr{C}'(\chi)|d\chi \\ ds = |\mathscr{C}'(q)|dq \end{cases}$,

la longueur $L_{\mathscr{C}}$ peut être réécrite sous la forme:

$$L = \int_0^{L_{\mathscr{C}}} ds.$$

La longueur de la courbe dans l'espace Riemannien est donnée par:

$$L_{R_{\mathscr{C}}} = \int_0^1 g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)|\mathscr{C}'(q)|dq,$$

ou encore

$$L_R = \int_0^{L_{R_{\mathscr{C}}}} g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)ds.$$

Caselles *et al.* [24] ont introduit ainsi une nouvelle définition de la longueur qui contient l'information relative à l'image.

5.2.2 Equation d'évolution de la courbe et approche "level set"

Caselles *et al.* établissent l'équation d'évolution de la courbe $\mathscr{C}$ pour déformer le contour initial $\mathscr{C}(0) = \mathscr{C}_0$ vers un minimum local de $L_{R_{\mathscr{C}}}$ (*cf appendice B de Caselles et al. [24] pour la démonstration*). L'idée de la démonstration est de construire une famille de courbes $(\mathscr{C}(t,q))_{t\geq 0}$, t étant un paramètre représentant le temps et telle que $\mathscr{C}(0,q) = \mathscr{C}(q)$. On définit la fonctionnelle $L_{R_{\mathscr{C}}}(t,q) = \int_0^1 g(|\nabla I(\mathscr{C}(t,q))|)|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|(t,q)dq$ et l'on calcule $L'_{R_{\mathscr{C}}}(t)$. On conclut en déterminant le flot pour lequel $L_{R_{\mathscr{C}}}(t)$ décroît le plus rapidement.

L'équation est donnée par:

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t}(t) = g(|\nabla I|)\kappa\vec{n} - (\nabla g(|\nabla I|).\vec{n})\vec{n}, \tag{5.6}$$

avec κ la courbure, $\vec{n}$ la normale unitaire intérieure et $(\ \cdot\ )$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^2$. La détection de l'objet est réalisée lorsque l'état stationnaire $(\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t}(t) = 0)$ est atteint.

L'approche "level set" est ensuite intégrée au modèle. Le problème est donc équivalent à trouver la solution obtenue à l'état stationnaire de l'équation d'évolution suivante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| div\big(g(|\nabla I|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\big), \qquad (5.7)\\ &= g(|\nabla I|)|\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + (\nabla g(|\nabla I|).\nabla u),\\ &= g(|\nabla I|)|\nabla u|\kappa + (\nabla g(|\nabla I|).\nabla u). \end{aligned}$$

5.2.3 Comparatif avec le modèle géométrique de Caselles *et al.*

Le modèle géométrique de contours actifs développé par Caselles *et al.* [23] se formulait, on le rappelle, par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= g(|\nabla I|)|\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + cg(|\nabla I|)|\nabla u|,\\ &= g(|\nabla I|)(c+\kappa)|\nabla u|, \end{aligned}$$

avec c une constante positive.
Ainsi, dans le modèle des contours actifs géodésiques, le terme $cg(|\nabla I|)|\nabla u|$ est remplacé par $(\nabla g(|\nabla I|).\nabla u)$ et s'abstrait donc du paramètre c. Caselles *et al.* [24] soulignent que cette composante garantit une meilleure attraction vers le contour à extraire, en particulier lorsque

le gradient varie beaucoup le long d'un bord ou lorsque des artefacts sont présents sur l'image. La représentation du champ de gradients $-\nabla g$ montre qu'au niveau d'un contour, les vecteurs pointent vers le milieu du bord. Ce vecteur permet donc de diriger le front vers le minimum local de g, la composante étant efficiente quand le vecteur $-\nabla g$ est colinéaire au vecteur normal de propagation. Les figures suivantes illustrent cette caractéristique.

FIG. 5.2 – *A gauche, l'image initiale, à droite, la représentation de la fonction g.*

FIG. 5.3 – *A gauche, la représentation du champ de gradients $-\nabla g$, à droite un zoom sur un bord.*

Cette composante permet enfin, de détecter les objets de forme non-convexe. Dans Caselles *et al.* [23], le terme $cg(|\nabla I|)|\nabla u|$ est nécessaire dans l'hypothèse où l'objet à détecter est de forme non-convexe.
Cependant dans le cadre des contours actifs géodésiques, cette constante peut revêtir le rôle de la force de gonflage du modèle des "Balloons" (cf. Cohen [38], [40], [39] et [41]) et éviter ainsi à la courbe de s'arrêter sur un minimum local. Elle est également nécessaire lorsque la condition initiale se situe à l'intérieur de l'objet à segmenter. Elle contribue enfin à accroître la vitesse de convergence. Elle apparaît dans le modèle sous la forme $cg(|\nabla I|)|\nabla u|$ (*terme interprété comme une contrainte d'aire*). L'équation d'évolution du modèle général des contours actifs

géodésiques se reformule alors par:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| div\big(g(|\nabla I|)\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\big) + cg(|\nabla I|)|\nabla u|, \\
&= g(|\nabla I|)|\nabla u| div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) + (\nabla g(|\nabla I|).\nabla u) + cg(|\nabla I|)|\nabla u|, \qquad (5.8) \\
&= g(|\nabla I|)|\nabla u|(c+\kappa) + (\nabla g(|\nabla I|).\nabla u).
\end{aligned}$$

On peut relever cependant quelques faiblesses relatives à la méthode des contours actifs géodésiques: le processus est sensible au bruit et l'image doit donc être filtrée préalablement, la qualité de la convergence dépend de la fonction g, etc...
La théorie de la viscosité (cf. partie III de ce manuscrit) permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution.

Chapitre 6

Méthodes "level set" et "fast marching"

6.1 Présentation de la méthode "level set"

Cette méthode a été développée par Stanley Osher et James Sethian en 1988 ([85]). Elle a depuis, fait l'objet de très nombreux développements et applications. Citons notamment les ouvrages de Sethian [96], Osher et Fedkiw [83], Osher et Paragios [84]. On renvoie également au site internet de Sethian (http://math.berkeley.edu/∼sethian) où cette méthode est clairement détaillée.
Dans cette méthode, un front 2D Γ (séparant par exemple deux régions) évolue suivant sa normale avec une vitesse F. Ce front Γ est considéré comme le niveau zéro d'une fonction Φ 3D. L'idée de cette méthode "level set" est alors de déduire la propagation de Γ à partir de la propagation de Φ, comme on le verra précisément dans la section suivante.

Remarque 6.1.1

On peut également noter que le front Γ peut alors changer de topologie sans problème de paramétrisation contrairement aux cas des contours actifs classiques.
En effet, dans le cas des "snakes", le front à l'instant $t+1$ se déduit du front à l'instant t et cela implique donc une paramétrisation intrinsèque à la courbe. Dans la technique "level set", Γ est l'intersection de Φ avec le plan $z=0$, la forme de cette intersection pouvant être quelconque.

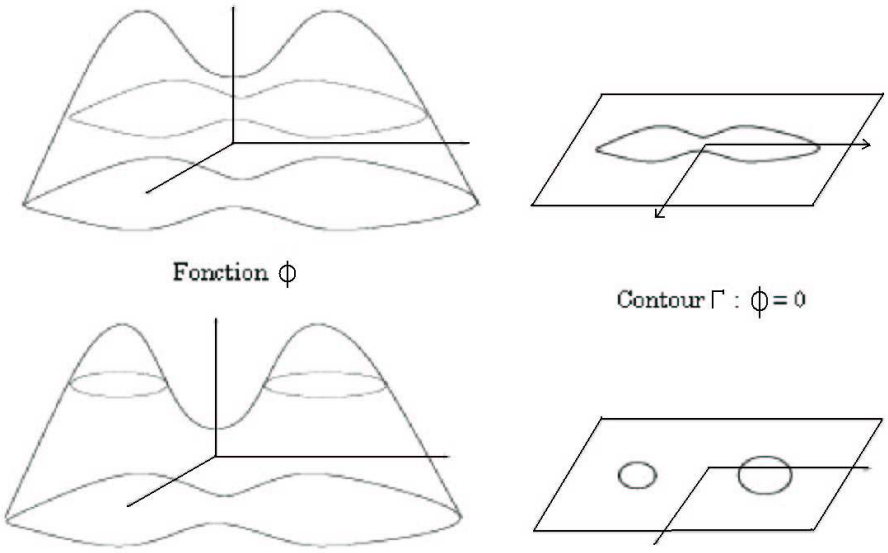


FIG. 6.1 – *Représentation "level set" d'un contour, figure extraite de Petitjean [90].*

6.2 Méthode "level set"

Soit un contour initial Γ, courbe fermée de $\mathbb{R}^2$ et F une fonction qui donne la vitesse de Γ dans la direction normale. La méthode "level set" consiste à considérer Γ comme le niveau zéro d'une fonction Φ, $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction "level set" *(Osher et Sethian [85] construisent Φ en utilisant la fonction distance signée)*, telle que:

$$\begin{cases} \text{si } x \in \Gamma,\ \Phi(x,t=0) = 0, \\ \text{sinon } \Phi(x,t=0) = \pm d, \text{ où } d \text{ est la distance de } x \text{ à } \Gamma, \\ \text{le signe positif (\textit{négatif}) est choisi si le point } x \text{ est à l'extérieur (\textit{intérieur}) de } \Gamma\ . \end{cases}$$

Ainsi, on a : $\forall t$,

$$\Phi(\Gamma(t),t) = 0.$$

On dérive cette équation par rapport à la variable t et on en déduit l'équation d'évolution satisfaite par Φ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + F|\nabla \Phi| = 0 \\ \Phi(x,t=0) \text{ donné.} \end{cases} \tag{6.1}$$

L'approche "level set" conduit donc à résoudre une équation aux dérivées partielles dans un espace de dimension supérieure par rapport au problème original.
Une fois résolue cette équation aux dérivées partielles, on reconstruit l'interface $\Gamma(t)$ à chaque instant t en prenant le niveau zéro de la fonction "level set" $\Phi(\cdot,t)$. Les propriétés géométriques intrinsèques du front sont aisément explicitées **(cf. chapitre 8)** et le front peut changer de

topologie, (cf. Sethian [95]).

Considérons l'illustration suivante de la méthode "level set".
On applique cette méthode à un cercle γ de rayon 1 qui grossit dans le temps suivant sa normale.

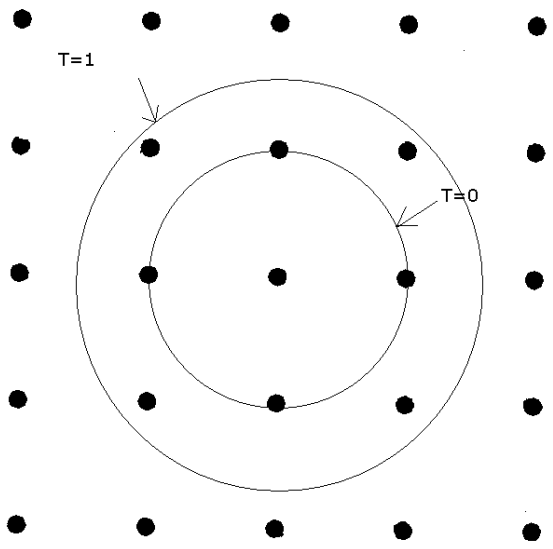


FIG. 6.2 – *Propagation du front suivant sa normale.*

Soit (x,y) un point situé sur le plan d'évolution du cercle γ. Si ce point est à l'intérieur du cercle, sa distance à celui-ci est :

$$z = -(1 - \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Sinon, elle est égale à :

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1).$$

La surface "level set" définie à $t = 0$ par $\sqrt{x^2 + y^2} - z - 1$ est un cône elliptique de sommet (0,0,-1).
Le cercle γ correspond à l'intersection de la surface Φ avec le plan d'équation $z = 0$. On dit que γ est le niveau zéro de Φ. La figure 6.3 montrent l'interface γ à l'instant $t = 0$ et la surface "level set" associée. A un instant $t > 0$ quelconque, ce cercle a grossi.

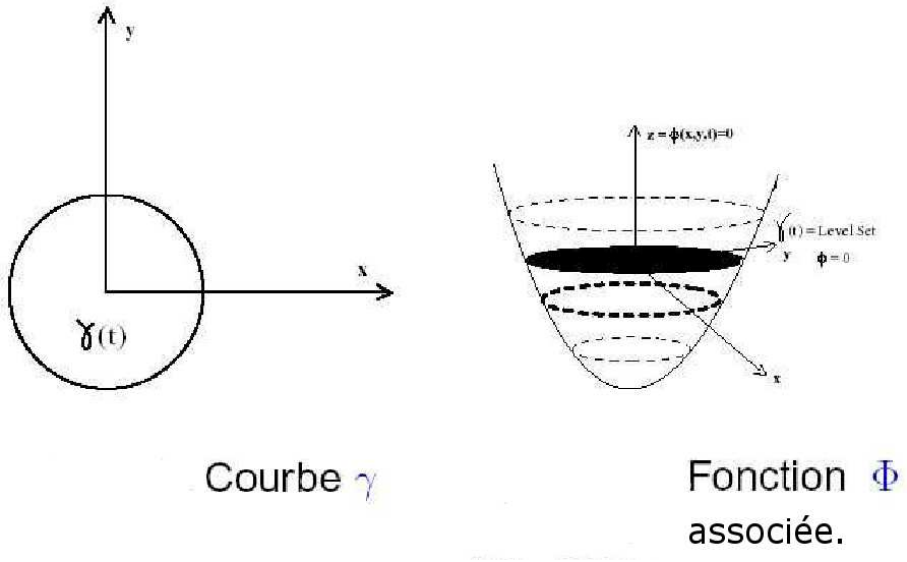


FIG. 6.3 –

6.3 Cas particulier de la méthode "Fast Marching"

Considérons le cas particulier où le front se propage à la vitesse $F = F(x,y,z)$, $F > 0$ (le cas où F est partout négative est également autorisé). Nous avons une équation du type :

$$\Phi_t + F(x,y,z)|\nabla\Phi| = 0.$$

Dans le cas 2D, posons $T(x,y)$ le temps d'arrivée du front au point (x,y). T satisfait l'équation

$$\begin{cases} |\nabla T|F = 1 \\ T = 0, \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

La formulation du problème est donc la suivante :

$$\begin{cases} F|\nabla T| = 1, \\ \Gamma(t) = \big\{(x,y)|\ T(x,y) = t\big\}. \end{cases} \tag{6.2}$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation Eikonal* et est liée à la notion de solutions de viscosité (cf. Sethian [95]). Des schémas numériques consistants donnant la limite visqueuse correcte de l'équation aux dérivées partielles sont utilisés (cf. Sethian [96]).

6.3.1 Schémas numériques appliqués

Une approximation judicieuse du gradient est nécessaire pour résoudre le problème.
Le schéma utilisé par Sethian [95] est le suivant : en posant, $D_{ij}^{+x}T = \dfrac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\triangle x}$, on prend :

$$max(D_{ij}^{-x}T, -D_{ij}^{+x}T,0)^2 + max(D_{ij}^{-y}T, -D_{ij}^{+y}T,0)^2 = \frac{1}{F_{ij}^2}. \tag{6.3}$$

6.3.2 Classification des pixels

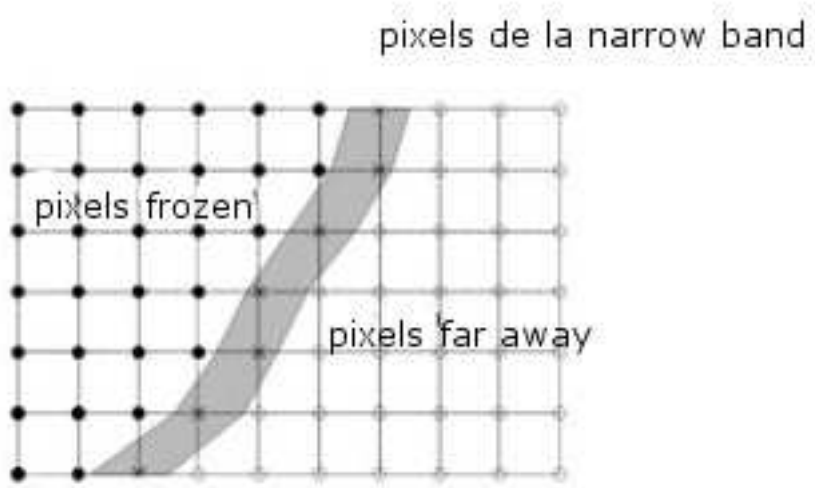
Afin de réduire le coût de calculs, on introduit une classification au niveau des pixels. En effet, seuls les pixels dans un voisinage du contour nous intéressent. On ne se préoccupe donc que des pixels situés dans une bande étroite autour de l'interface. C'est ce qu'on appelle la "Narrow Band". La classification des pixels est la suivante:

1. les pixels de type "frozen", pixels dont on connaît la valeur T_{ij}.

2. les pixels voisins dits pixels de la "Narrow Band" dont on possède une estimation de la valeur T_{ij}.

3. les pixels "Far Away" pour lesquels la valeur T_{ij} n'est pas estimée.

Le schéma suivant issu de Adalsteinsson et Sethian [3] offre une représentation de ces différents types de pixels. La définition de ces divers éléments nous permet de détailler plus précisément



l'algorithme de la méthode "Fast Marching". Cela est abordé dans la section suivante.

6.3.3 Implémentation-Algorithme

Description de l'algorithme

La clef pour construire un algorithme de "Fast Marching" est d'observer que la structure du schéma numérique introduit précédemment implique que l'information se propage dans un sens, *i.e* des plus petites valeurs de T aux plus grandes. Nous proposons plusieurs éléments permettant de concevoir un algorithme efficace. Nous nous limitons dans ce qui suit, au cas où F est constante égale à 1, ce qui revient à construire le champ de distances des points du maillage aux points de la condition initiale. Une bonne revue de la méthodologie est disponible dans Bærentzen [11].

Le principe de la méthode est le suivant:

Partant d'une condition initiale, d'un pixel dans notre cas, déterminer le champ

de distances du point. Le pixel (*dans le cas général on prend comme condition initiale un ou plusieurs voxels*) d'initialisation est dit "frozen" comme précédemment établi. Nous calculons ensuite, les distances aux voisins. Les pixels dont on a calculé la distance mais qui ne sont pas encore "frozen" sont dits *pixels de la "Narrow Band"*. Pour chaque itération de la boucle principale, le pixel de la "Narrow Band" ayant la plus petite distance devient "frozen". Les distances de ses voisins sont de nouveau calculées: deux cas sont à envisager à ce niveau de l'algorithme.

1. Soit parmi les voisins, certains étaient déjà affectés d'une valeur de distance. Il faut donc actualiser ces valeurs.

2. Soit certains des voisins n'étaient pas intégrés dans la "Narrow Band". Dans ce cas, il faut les ajouter.

Les pixels "frozen" sont utilisés pour déterminer les valeurs des distances des autres pixels mais ne sont jamais recalculés.
On peut donc voir la méthode de "Fast Marching" comme un front de pixels de la "Narrow Band" se propageant à partir de la condition initiale, qui transforme, en progressant, les pixels de la "Narrow Band" en pixels "frozen".

Au niveau de l'implémentation, une importante structure de données utilisée au cours de l'algorithme est l'arbre binaire parfait : les étiquettes des noeuds sont les valeurs des distances et chaque élément de l'arbre binaire est un pointeur vers un pixel. On rappelle que dans un arbre binaire parfait, les feuilles se trouvent soit sur le dernier niveau, soit sur l'avant-dernier et pour toute étiquette a_i d'un noeud, les étiquettes des deux fils sont plus grandes. De fait, l'élément ayant la plus petite étiquette se situe à la racine de l'arbre.

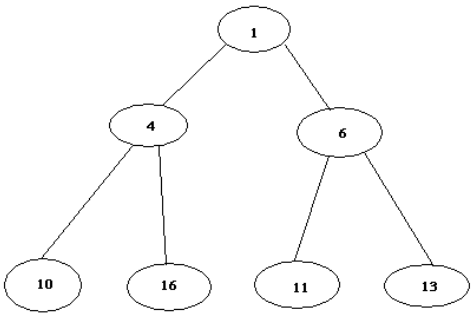


FIG. 6.4 – *Exemple d'arbre binaire parfait.*

Nous donnons dans ce qui suit une description de l'algorithme :

Initialisation :

On assigne aux pixels constituant la condition initiale le type "frozen". Pour chaque pixel

"frozen", on détermine la valeur de la distance en chacun de ses voisins en utilisant uniquement l'information issue des pixels "frozen". La méthode de calcul des distances est développée dans la section (6.3.4).
Les pixels voisins sont affectés du type "Narrow Band" et ils sont insérés dans l'arbre binaire parfait.

Boucle:

La première étape de chaque itération consiste en l'extraction du pixel situé à la racine de l'arbre et qui admet donc la plus petite valeur. Ce pixel devient donc "frozen". Pour chacun de ses voisins qui ne sont pas "frozen", la distance est calculée (cf. section 6.3.4). On les affecte du type "Narrow Band" et ils sont insérés dans l'arbre binaire parfait. Comme on l'a dit précédemment, deux cas sont à envisager. Soit le pixel était "far away" dans ce cas, il n'y a pas de difficulté, soit il était déjà "Narrow Band" et dans ce cas, il faut actualiser la valeur de la distance et par conséquent modifier sa position dans l'arbre binaire parfait.
On poursuit les itérations.

6.3.4 Calcul des distances

Les distances sont calculées en résolvant l'équation Eikonal définie par $|\nabla T| = \frac{1}{F}$, où T, on le rappelle, est le temps d'arrivée du front en un pixel et F la vitesse.

Sethian [96] propose le schéma suivant, issu des lois de conservation hyperboliques,

$$|\nabla T|^2 = max(V_A - V_B, V_A - V_C, 0)^2 + max(V_A - V_D, V_A - V_E, 0)^2, \tag{6.4}$$

où V_A est la distance inconnue et V_B, V_C, V_D, V_E sont les distances connues au niveau des pixels voisins.

En plongeant ce schéma dans l'équation Eikonal, on obtient:

$$\frac{1}{F^2} = max(V_A - V_B, V_A - V_C, 0)^2 + max(V_A - V_D, V_A - V_E, 0)^2. \tag{6.5}$$

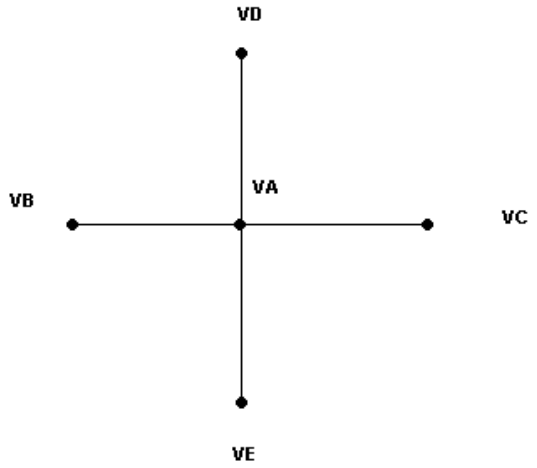


FIG. 6.5 – *Configuration des pixels.*

Pour résoudre l'équation (6.5), il nous faut observer chaque terme de la forme $max(V_A - V_B, V_A - V_C, 0)^2$.

Il est clair que nous devons résoudre cette équation en utilisant la plus petite des deux valeurs V_B et V_C car :

$$V_B < V_C \Longrightarrow V_A - V_B > V_A - V_C.$$

De plus, seules les valeurs des distances aux pixels "frozen" sont employées. Si aucun des deux termes V_B et V_C n'est "frozen", la quantité précédente n'intervient plus dans l'équation.
En raisonnant de manière analogue sur le second terme de l'équation, on a, en supposant que V_B et V_E sont "frozen" et que $V_B < V_C$ et $V_E < V_D$, l'équation quadratique suivante :

$$(V_A - V_B)^2 + (V_A - V_E)^2 = \frac{1}{F^2}$$

La solution V_A la plus grande de cette équation est conservée.

Chapitre 7

Reconstruction de forme

Dans [115], Zhao *et al.* s'intéressent au problème de reconstruction de forme à partir d'un ensemble de données non ordonnées. Les connexions entre les données et la topologie de la surface à reconstruire ne sont pas connues *a priori*. Cet ensemble peut inclure des points, des patches de surface, des courbes. Zhao *et al.* introduisent dans leur modèle un problème de surface minimale. Une équation aux dérivées partielles est ensuite explicitée.
Zhao *et al.* distinguent deux approches parmi les méthodes de reconstruction existantes:

- Les approches **paramétriques** qui utilisent principalement les diagrammes de Voronoï et les triangulations de Delaunay pour déterminer les connexions entre les données et reconstruire ensuite la surface.
  Les difficultés majeures de ces méthodes résident dans la pertinence des résultats trouvés pour les connexions entre les points de données, en particulier dans le cas de dimensions supérieures ou égales à 3. Le bruit ainsi que des échantillons de données non uniformes altèrent la qualité des résultats. On rencontre également des approches paramétriques utilisant des méthodes variationnelles ou des méthodes d'équations aux dérivées partielles pour lesquelles une paramétrisation globale est requise. Or, la paramétrisation globale du modèle, délicate à réaliser et ne fournissant pas d'indices de profondeur, n'autorise pas les changements de topologie.

- Les approches **non-paramétriques** qui utilisent des représentations du type "level set".

Zhao *et al.* ont choisi d'introduire un modèle non-paramétrique formulé à l'aide d'une équation aux dérivées partielles.
L'idée est d'appliquer une déformation à la condition initiale pour obtenir la solution du problème: partant d'une condition initiale qui englobe l'ensemble des données, on la fait évoluer suivant le flot de gradient. Un problème de surface minimale est introduit sous forme de fonctionnelle. L'absence de connaissance *a priori* sur la topologie de la surface à approximer conduit à adopter une approche "level set". Le fait d'ajouter une dimension supplémentaire dans la modélisation n'entache en rien la qualité de l'algorithme de résolution, une méthode *"level set locale"* consistant à limiter les calculs à une bande étroite près du niveau zéro, pouvant être appliquée. Dans ce qui suit, nous développons les principales étapes du modèle de Zhao *et al.* [115].

7.1 Problème de surface minimale

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble de données. Soit d la fonction distance à l'ensemble $\mathscr{S}$ définie par $d(x) = distance(x,\mathscr{S})$. L'énergie introduite est alors:

$$E(\Gamma) = \left[\int_\Gamma d^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{7.1}$$

avec Γ une surface paramétrée.
Une interprétation mécanique que l'on peut faire de ce modèle est que la surface se comporte comme une membrane élastique attachée aux données de $\mathscr{S}$. La minimisation de cette fonctionnelle à l'aide du théorème d'Euler-Lagrange conduit à:

$$d^{p-1}(x)\left[\nabla d(x).\vec{n} - \frac{1}{p}d(x)\kappa\right] = 0, \tag{7.2}$$

avec $\vec{n}$ la normale unitaire et κ la courbure moyenne. On propose une démonstration de ce dernier résultat, dans le cas 2D. On a par définition:

$$\left[\int_\Gamma d^p ds\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^1 d^p(x(q))|x'(q)|dq\right]^{\frac{1}{p}},$$

avec

$$ds = |x'(q)|dq$$

et

$$x : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ q \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q) \\ x_2(q) \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Notons par $\mathscr{L}$ le lagrangien défini par:

$$\mathscr{L}(q,x_1,x_2,x_1',x_2') = d^p(x(q))|x'(q)| = d^p(x(q))({x'}_1(q)^2 + {x'}_2(q)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p}\left[\displaystyle\int_0^1 d^p(x(q))|x'(q)|dq\right]^{\frac{1}{p}-1}\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dq}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_1'}\right] = 0 \\ \dfrac{1}{p}\left[\displaystyle\int_0^1 d^p(x(q))|x'(q)|dq\right]^{\frac{1}{p}-1}\left[\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dq}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_2'}\right] = 0. \end{cases}$$

Rappelons enfin que la tangente $\vec{T}$ est définie par:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} x_1'(q) \\ x_2'(q) \end{pmatrix} \frac{1}{({x'}_1^2 + {x'}_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et la normale à $\vec{T}$ notée $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -x_2'(q) \\ x_1'(q) \end{pmatrix} \frac{1}{({x'}_1^2 + {x'}_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

La courbure de la courbe est donnée par la composante tangentielle de $\frac{d\vec{n}}{ds}$.

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{n}}{dq}\frac{1}{(x'^2_1 + x'^2_2)^{\frac{1}{2}}}.$$

La courbure est alors définie par:

$$\kappa = -\vec{T}.\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{x''_2 x'_1 - x''_1 x'_2.}{(x'^2_1 + x'^2_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par application des équations d'Euler-Lagrange, on a:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} = pd^{p-1}\frac{\partial d}{\partial x_1}(x'^2_1 + x'^2_2)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} = pd^{p-1}\frac{\partial d}{\partial x_2}(x'^2_1 + x'^2_2)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{d}{dq}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'_1} = \frac{x'_1}{|x'|}pd^{p-1}\nabla d(x).x' - \kappa x'_2 d^p(x) \\ \frac{d}{dq}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'_2} = \frac{x'_2}{|x'|}pd^{p-1}\nabla d(x).x' + \kappa x'_1 d^p(x). \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_1} - \frac{d}{dq}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'_1} = (pd^{p-1}\nabla d.(-\vec{n}) + \kappa d^p)x'_2. \\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_2} - \frac{d}{dq}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x'_2} = (pd^{p-1}\nabla d.\vec{n} - \kappa d^p)(x'_1). \end{cases}$$

On en déduit finalement que:

$$(pd^{p-1}\nabla d.\vec{n} - \kappa d^p(x))\vec{n} = 0. \tag{7.3}$$

Cette équation traduit un équilibre entre le terme de régularisation κd *(tension de la surface)* et la force potentielle $\nabla d.\vec{n}$.
Le but est donc de trouver le minimum local qui correspond à la surface attachée aux points de $\mathscr{S}$. Ce minimum doit satisfaire l'équation d'Euler-Lagrange.

Remarque 7.1.1

En 2D, si l'ensemble de données $\mathscr{S}$ est constitué de points, le polygone reliant ces points est un minimum local de l'énergie. L'application de cette méthode à la dimension 2 n'apporte donc rien de novateur. La problématique est tout autre en dimension supérieure.

7.2 Formulation à l'aide d'une fonction de type "level set"

La topologie de la forme à reconstruire n'étant pas connue *a priori* et des changements de topologie pouvant être nécessaires, les auteurs privilégient une approche "level set". Comme vu précédemment, la représentation "level set" consiste à considérer Γ comme le niveau zéro d'une fonction explicite Φ. Les conventions utilisées par les auteurs sont telles qu'à l'intérieur

de $\Gamma(t)$, Φ est positive et à l'extérieur, Φ est négative. Ainsi, Γ est représentée implicitement *via* cette fonction Φ et à chaque instant t :

$$\Phi(\Gamma(t),t) = 0.$$

En dérivant cette équation par rapport à la variable t, on en déduit que:

$$\Phi_t + \nabla\Phi.\Gamma_t = 0,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme:

$$\Phi_t + v_n|\nabla\Phi| = 0,$$

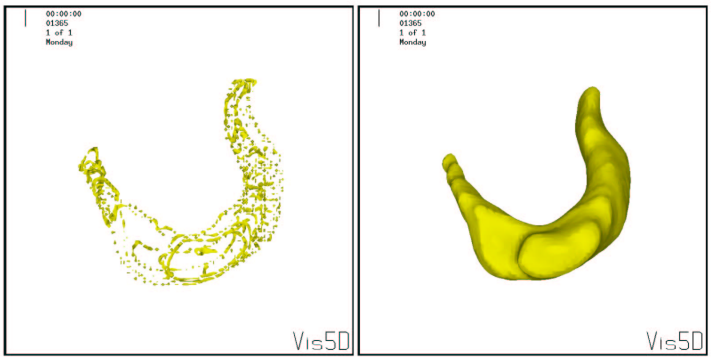
v_n étant la vitesse de propagation suivant la normale de $\Gamma(t)$. L'énergie (7.1) se réécrit sous forme "level set" par:

$$E(\Gamma) = E(\Phi) = \left[\int_\Omega d^p(y)\delta(\Phi(y))|\nabla\Phi(y)|dy\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{7.4}$$

δ désignant la Dirac.
L'équation d'évolution est alors donnée par:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{p}\delta(\Phi)\left[\int_\Omega d^p(y)\delta(\Phi)|\nabla\Phi|dy\right]^{\frac{1}{p}-1} div(d^p\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}). \tag{7.5}$$

Un changement d'échelle est réalisé afin d'appliquer le déplacement à toutes les "level sets" en remplaçant $\delta(\Phi)$ par $|\nabla\Phi|$, ce qui n'altère en rien la solution obtenue à l'état stationnaire. Zhao *et al.* [115] prouvent que l'énergie E est décroissante au cours du temps.
Enfin, le choix de la surface initiale est important: si la condition initiale est trop éloignée de $\mathscr{S}$, de façon générale, la surface évoluera pour s'arrêter sur un minimum local non significatif. Numériquement, Zhao *et al.* choisissent $\Gamma(0)$, satisfaisant $d = \epsilon$ et construisent la surface associée à l'aide de la fonction distance signée.
Nous proposons enfin une illustration de cette méthode issue de Zhao *et al.* [115].



(a) MRI slices of a rat brain with 1500 points (b) reconstructed shape

FIG. 7.1 – *Reconstruction du cerveau d'un rat - coupes du cerveau obtenues par résonance magnétique (cf. http://www.math.uci.edu/∼zhao/publication/mypapers/pdf/surface1.pdf).*

Chapitre 8

Compléments

Dans ce chapitre, nous rappelons enfin quelques résultats de géométrie et de la théorie d'évolution de courbes (cf. Osher et Fedkiw [83]) qui nous seront utiles par la suite.

Dans l'approche "level set" que nous adoptons, nous optons pour les conventions suivantes. Soit Γ une courbe fermée de Ω. La représentation implicite de Γ *via* la fonction Φ est réalisée de telle manière que Φ est négative dans la région intérieure à Γ (*région notée* Ω^-) et positive dans la région extérieure (*région notée* Ω^+). La fonction Φ vaut zéro sur Γ. On dit que Γ est le niveau zéro de Φ.

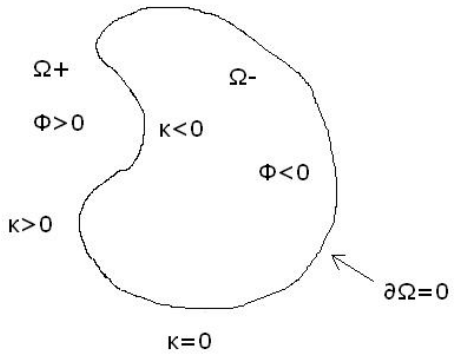
La normale unitaire sortante $\vec{N}$ est définie par:

$$\vec{N} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}.$$

La courbure moyenne κ correspond à la divergence de la normale $\vec{N}$ soit:

$$\kappa = div(\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}).$$

- $\kappa > 0$ pour les régions convexes.
- $\kappa < 0$ pour les régions concaves.



Supposons que la vitesse de chaque point du front Γ est donnée par $\vec{V}(\Gamma)$. L'équation différentielle ordinaire satisfaite par Γ est définie par:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \vec{V}(\Gamma). \tag{8.1}$$

On obtient alors, sachant que $\Phi(\Gamma(t),t) = 0$, l'équation aux dérivées partielles satisfaite par Φ:

$$\Phi_t + < \vec{V}, \nabla\Phi >= 0. \tag{8.2}$$

Supposons désormais que $\vec{V}$ est un champ de vecteurs vitesse dépendant de la fonction "level set" Φ, (cf. Osher et Fedkiw [83]).
On peut considérer le cas où l'interface Γ se déplace suivant sa normale avec une vitesse proportionnelle à sa courbure κ:

$$\vec{V} = -b\kappa\vec{N},$$

où b désigne une constante positive.
L'équation aux dérivées partielles satisfaite par Φ est donnée par:

$$\Phi_t - b\kappa|\nabla\Phi| = 0.$$

Cette équation d'évolution correspond à une version géométrique de l'équation de la chaleur et revêt des propriétés régularisantes. La courbure peut jouer le rôle de terme de diffusion. Nous rappelons ici certaines propriétés du déplacement suivant la courbure issues de Sethian [96].

- Gage [53] et [54] a prouvé que toute courbe fermée convexe se déplaçant suivant sa courbure reste convexe et évolue pour devenir un point. Grayson [60] est allé plus loin en prouvant que toute courbe fermée, quelle que soit sa forme, évolue pour devenir un point quand elle se déplace suivant sa courbure.

Le cas du mouvement suivant la normale est également abordé dans la partie III du manuscrit. Nous en présentons les caractéristiques.
Le champ de vecteurs $\vec{V}$ est défini par $\vec{V} = a\vec{N}$, avec a une constante. L'équation "level set" est donnée par:

$$\Phi_t + a|\nabla\Phi| = 0. \tag{8.3}$$

- si $a > 0$, le front se propage dans la direction normale.
- si $a < 0$, le front se propage dans la direction opposée à la direction normale.

La discrétisation de (8.3) est réalisée comme suit (voir Sethian [96] pour plus de détails).

$$\begin{aligned}\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^{n} - \delta t\Bigg(&\max(a,0)\left[\max(D_{i,j}^{-x},0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x},0)^2 + \max(D_{i,j}^{-y},0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y},0)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &+ \min(a,0)\left[\max(D_{i,j}^{+x},0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x},0)^2 + \max(D_{i,j}^{+y},0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y},0)^2\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg).\end{aligned} \tag{8.4}$$

Dans Osher et Sethian [85], les auteurs proposent des algorithmes pour suivre les fronts se propageant avec une vitesse dépendant de la courbure. Ces algorithmes, fondés sur les

équations d'Hamilton-Jacobi, approximent les équations du mouvement.
Considérons le problème suivant:

$$\psi_t + H(D\psi) = 0,$$

avec $D\psi = \psi_{x_1}, \cdots, \psi_{x_N}$.
Dans le cas particulier où $N = 2$ et où $H(u,v) = f(u^2,v^2)$, f étant décroissante suivant les 2 variables, le schéma proposé par Osher et Sethian est:

$$g_{HJ} = f\Bigg(((\min(D_-^x \psi_{jk},0))^2 + (\max(D_+^x \psi_{jk},0))^2),((\min(D_-^y \psi_{jk},0))^2 + (\max(D_+^y \psi_{jk},0))^2) \Bigg),$$

avec les conditions Courant-Friedrich-Levy de stabilité:

$$1 \geq 2\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}|H_1| + \frac{\Delta t}{\Delta y}|H_2|\right].$$

Deuxième partie

Segmentation d'images sous contraintes géométriques utilisant les surfaces déformables avec une approche "level set"

Chapitre 9

Introduction

Dans cette partie II, nous présentons la première approche développée dans le cadre de ce doctorat. Ce travail s'inscrit dans le cadre de la segmentation sous contraintes géométriques. Le but de cette première approche est de proposer une méthode permettant de s'affranchir, notamment, des problèmes liés à la paramétrisation du modèle (voir Vieira-Testé [107] ou la partie I, chapitre 3 de ce mémoire) induits par l'utilisation des modèles déformables classiques. On propose donc une approche inspirée des travaux d'Osher et Sethian [85]. On choisit de représenter la courbe de segmentation Γ de manière implicite à l'aide d'une fonction explicite Φ. Le contour Γ est alors le niveau zéro de la fonction Φ, c'est à dire que:

$$\Gamma = \big\{(x,y),\ \Phi(x,y) = 0\big\},$$

et l'évolution de la courbe est donnée à chaque instant t par le niveau zéro de $\Phi(x,y,t)$.

Dans le **chapitre 10**, nous présentons les différentes données disponibles: les données d'attribut (*données de l' image*) ainsi que les données géométriques (*données d'interpolation*).
Puis, la description mathématique de la structure à segmenter est réalisée à l'aide d'une approche "level set". L'espace des représentations admissibles V est ensuite défini. Celui-ci est déterminé de manière à être cohérent avec les données, le modèle et la régularité souhaitée pour la solution.
Enfin, le critère de minimisation que doit satisfaire la solution est introduit. Le formalisme s'apparente à celui de la méthode classique des contours actifs, le critère de minimisation comportant en effet, un terme d'énergie externe (potentiel relatif aux forces extérieures attirant la structure vers les singularités de l'image) et un terme d'énergie interne (déformation élastique, rigidité).
L'expression de ce critère conduit à la formulation d'un problème non-linéaire de minimisation de fonctionnelle non-convexe sur un sous-espace vectoriel fermé de V. Dans le **chapitre 11**, une première méthode pour résoudre ce problème est proposée et consiste à linéariser le terme non-linéaire qui apparaît dans la formulation initiale du problème de minimisation. Le problème linéarisé est ensuite reformulé à l'aide des multiplicateurs de Lagrange, ce qui conduit à étudier un problème variationnel sur l'espace V tout entier.
Pour cette première méthode, nous nous sommes cantonnés à des résultats théoriques.
L'introduction d'un terme dynamique dans la fonctionnelle à minimiser, trait propre à la technique des modèles déformables, est réalisée dans le **chapitre 12**. Le problème d'évolution associé est ensuite défini. La discrétisation en temps et en espace est effectuée dans le **chapitre 13**. La dérivée temporelle est approximée par différences finies tandis que la discrétisation

spatiale du problème approché en temps est réalisée par une méthode de type éléments finis. Le **chapitre 14** illustre le propos, notamment par des applications de la méthode à des séquences d'images médicales.

Chapitre 10

Modélisation du problème

10.1 Les données

Les données d'imagerie et les données géométriques sont supposées être définies sur un ouvert borné Ω inclus dans $\mathbb{R}^2$. La méthode proposée se généralise aisément à la dimension n. Néanmoins, dans notre exposé, nous nous limitons au cas $n = 2$.

10.1.1 Les données d'attributs

Une image I est une fonction discrète issue d'une fonction attribut A définie en tout point de l'ouvert Ω:

$$A : (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto A(x,y).$$

Les attributs peuvent être de différents types et sont inhérents au cadre d'étude dans lequel on se trouve. En imagerie médicale, l'attribut considéré peut être la résonance magnétique. En géophysique, l'attribut dont on dispose peut être la vitesse de propagation de l'onde sismique, la cohérence de l'onde sismique, etc...
Dans notre cas, l'attribut considéré est l'attribut *niveau de gris*.

L'étude de ces attributs permet de caractériser les éléments de contour d'un objet. En effet, les points de contour sont assimilés à une forte discontinuité de l'attribut "niveau de gris", *i.e* à un extremum local du gradient de l'image en ces points.

Pour une image 2D I, les données relatives à l'attribut niveau de gris sont définies par un ensemble discret de points s'exprimant sous la forme: $(x^j,I(x^j))_j$, où les $(x^j)_j \in \mathbb{R}^2$ sont les coordonnées du centre de gravité d'un pixel et où $(I(x^j))$ est la valeur de l'attribut en ce pixel, ramenée à son centre de gravité.

10.1.2 Les données géométriques d'interpolation

On rappelle que ces données interviennent dans notre modèle pour deux motifs distincts :

1. Certaines régions de l'image considérée I peuvent être peu texturées et particulièrement homogènes le long d'un contour *(cf. figure 4, partie I)*. Certaines régions de l'objet à segmenter sont parfois occultées : sur des images médicales, par exemple, deux organes adjacents peuvent masquer leur région de contact. Ainsi, définir un ensemble discret de points à interpoler permet de faciliter le processus de segmentation en attirant le

contour vers le bord souhaité, tout en préservant l'information liée à l'image. Ces points sont en effet choisis sur le contour de l'objet considéré.

2. Dans certains domaines d'étude, en plus des données d'attribut, on dispose de données géométriques à intégrer dans le processus de segmentation. C'est le cas en géophysique par exemple avec les données de puits *(cf. figure 7, partie I)*. Ces données de puits permettent de caractériser les horizons qui constituent l'interface entre deux milieux distincts. Ces données de puits sont de différentes natures: profondeur, plan tangent, etc ...(cf Vieira-Testé [107]).

Remarque 10.1.1

On peut dresser un parallèle entre la force de gonflage du modèle des "Balloons" (introduit par L.D. Cohen [38]) et le rôle des données géométriques, qui permettent d'accélérer le processus en attirant le contour vers les singularités de l'image à détecter. La condition initiale peut ainsi être choisie éloignée du contour à segmenter.

Ces données d'interpolation coïncident avec des points du contour de l'objet à segmenter et s'expriment sous la forme:

$$(a_i,\beta_i) \text{ avec } \; a_i = (x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2,\ \beta_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,\cdots,N\},\ N \geq 1.$$

Nous verrons dans la section 10.2 que l'approche "level set" conduit à $\beta_i = 0, \forall i \in \{1,\cdots,N\}$.

10.2 Modélisation

Nous présentons dans ce qui suit, le modèle choisi ainsi que l'espace de représentations admissibles cohérent avec ce modèle.

10.2.1 Principe

Comme vu dans l'Etat de l'Art (partie I, chapitre 2), la méthode classique des modèles déformables consiste à représenter la structure à segmenter par une courbe paramétrée v,

$$v : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ s \mapsto \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Les données géométriques à intégrer dans le modèle doivent donc être paramétrées . On se heurte à deux difficultés majeures: d'une part, ces points (issus de résultats expérimentaux en géophysique par exemple) ne sont pas ordonnés. Il faut donc appliquer des algorithmes permettant d'ordonner un ensemble quelconque de points. D'autre part, une fois cet ensemble de points ordonné, il faut choisir la méthode de paramétrisation adéquate. Cela dépend en particulier de la variation de la distance euclidienne entre deux points consécutifs ordonnés. Une variation faible autorise l'utilisation d'une paramétrisation uniforme. Pour de fortes variations, la paramétrisation curviligne est préférée (cf. Vieira-Testé [107]).
Par ailleurs, la méthode n'est pas intrinsèque: la fonctionnelle interprétée en terme d'énergie

introduite dans le modèle dépend de la paramétrisation, et n'est donc pas liée à la géométrie de l'objet.

Aussi, pour s'affranchir de ce problème de paramétrisation, nous considérons une approche "level set" de notre problème.
Notre modèle s'inspire de cette représentation implicite de courbes. Nous appliquons l'idée de travailler dans un espace de dimension supérieure: la courbe paramétrée Γ est représentée implicitement *via* une fonction Φ et correspond au niveau zéro de cette fonction. Ainsi,

$$\Gamma = \big\{(x,y)|\Phi(x,y) = 0\big\},$$

et à tout instant $t \in [0,T]$ (nous verrons par la suite qu'un problème d'évolution est introduit), la fonction explicite Φ permet de générer l'ensemble Γ avec :

$$\Gamma(t) = \big\{(x,y)|\Phi(x,y,t) = 0\big\}.$$

Nous appliquons ainsi la technique des modèles déformables non pas à la courbe paramétrée Γ, mais à la fonction explicite Φ.
L'introduction de l'approche "level set" dans notre modèle nécessite de travailler dans un espace de dimension supérieure. Pour ce faire, nous construisons une image 3D $\tilde{I}$ définie par:

$$\tilde{I} : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \mapsto \tilde{I}(x,y,z) \\ \text{et, } \forall (x,y) \in \Omega,\ \tilde{I}(x,y,0) = I(x,y). \end{cases}$$

Le seul critère imposé pour $\tilde{I}$ est que pour la valeur $z = 0$, l'image 3D $\tilde{I}$ coïncide avec l'image originale I.
En pratique, $\tilde{I}$ est une superposition d'images 2D telle que pour le plan $z = 0$, $\tilde{I}$ coïncide avec l'image originale I.

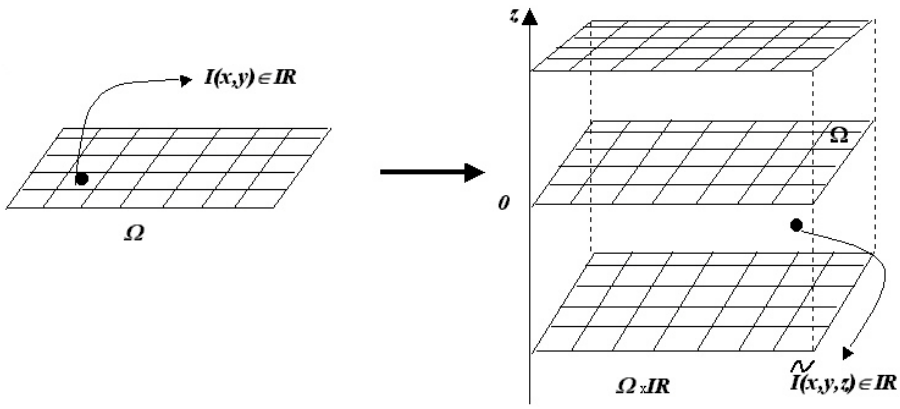


FIG. 10.1 – *Construction de l'image $\tilde{I}$: superposition d'images 2D telles que pour le plan $z = 0$, $\tilde{I}(\cdot,\cdot,0) = I(\cdot,\cdot)$. A gauche: l'image 2D initiale I. A droite: l'image 3D $\tilde{I}$.*

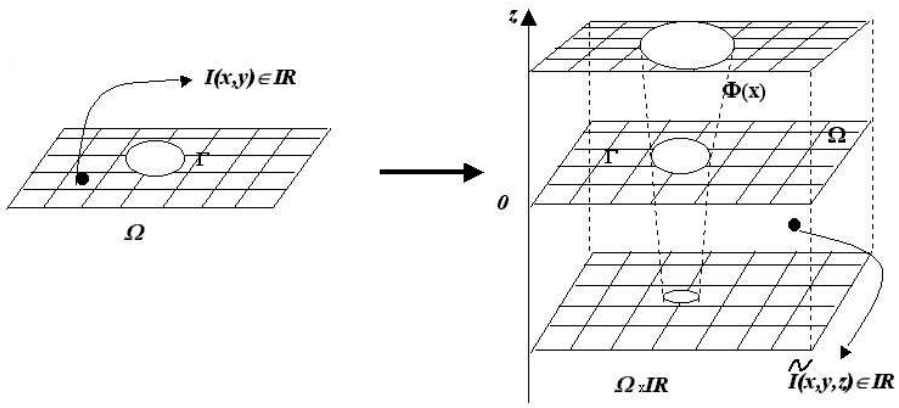


FIG. 10.2 – *A gauche: segmentation 2D classique de l'image I par Γ. A droite, approche de type "level set": segmentation de l'image I à partir de l'image 3D $\tilde{I}$ segmentée par Φ.*

Choix de l'image 3D $\tilde{I}$

Il subsiste ensuite la question du choix de la construction de cette image $\tilde{I}$ pour $z \neq 0$. Pour un z donné, nous posons que l'image 2D $\tilde{I}(x,y,z)$ est une image translatée suivant (Ox) et (Oy) de l'image initiale I. Ce choix permet de préserver les discontinuités des niveaux de gris suivant la direction (Ox) et (Oy). Chaque plan image peut également correspondre à une dilatation/ érosion de l'image originale.

Par cette construction de $\tilde{I}$, et à l'aide de la fonction Φ, on aura à chaque instant $t \in]0,T]$:

$$\Phi : \big\{(x,y,t) \in \Omega \times]0,T] \mapsto \Phi(x,y,t) \in \mathbb{R}\big\},$$

qui approchera les discontinuités de $\tilde{I}$ et ainsi, l'ensemble Γ approchera les discontinuités de I.
La question de la construction de l'image 3D reste néanmoins ouverte.

10.2.2 Espace fonctionnel des représentations admissibles

On introduit désormais l'espace des représentations admissibles V défini par:

$$V = H^2(\Omega). \tag{10.1}$$

Dans le chapitre 13, il sera approché par un espace discret V_h de type éléments finis de manière à avoir l'inclusion $V_h \subset V$.

10.2.3 Données géométriques

Des contraintes géométriques sous forme de conditions d'interpolation sont introduites dans notre problème.

Soit $P = \{a_1, \cdots, a_N\}$ un ensemble de N points à interpoler. Ces points appartiennent à Ω et s'expriment sous la forme:

$$\forall i \in \{1, \cdots, N\},\ a_i = (x_i, y_i).$$

A chaque instant t, les points de P appartiennent au niveau zéro de Φ ainsi qu'à l'ensemble de discontinuités de I, soit:

$$\Phi(a_i, t) = \Phi(x_i, y_i, t) = 0.$$

On introduit le sous-espace vectoriel K de V défini par:

$$K = \{v \in V |\ \beta(v) = 0_{\mathbb{R}^N}\}, \tag{10.2}$$

sachant que β est l'opérateur linéaire continu défini par:

$$\beta : v \in V \mapsto \beta(v) = (v(x_i, y_i))_{i \in \{1, \cdots, N\}} \in \mathbb{R}^N.$$

La forme linéaire β est continue car: $\forall v \in V$,

$$|\beta(v)| \leq N ||v||_{C^0(\bar{\Omega})} \leq cN\ ||v||_{H^2(\Omega)}$$

On en conclut que K est un sous-espace vectoriel fermé de V, comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

10.2.4 Définition des critères et des contraintes

La méthode des modèles déformables consiste à faire évoluer la représentation vers les singularités de l'image. La représentation est influencée par des forces internes et guidée par une force d'image issue d'un potentiel qui pousse la courbe vers les contours présents dans l'image.

Comme on l'a vu dans l'Etat de l'Art (partie I, chapitre 2), ces forces internes décrivent les propriétés d'élasticité et de rigidité du modèle tandis que les forces externes, dérivant d'un potentiel, sont liées aux données d'attribut. Dans notre cas, les points de contour sont assimilés aux points où le gradient est localement maximal. Le potentiel est ainsi associé à la fonction gradient de l'image.
Les contraintes géométriques sont les conditions d'interpolation explicitées dans la section 10.1.2.

Critère associé aux forces internes

Le critère E_{int} lié aux forces internes est défini par: $\forall v \in V$,

$$E_{int}(v) = \int_\Omega \epsilon_1(x,y) \Big[\big(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\big)^2 + \big(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\big)^2 \Big] + \epsilon_2(x,y) \Big[\big(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y)\big)^2 + \big(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y)\big)^2 + 2\big(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y)\big)^2 \Big] dxdy, \tag{10.3}$$

où $\epsilon_1(x,y)$ est le coefficient d'élasticité, $\epsilon_2(x,y)$ le coefficient de rigidité, avec $\forall (x,y) \in \Omega$, $\epsilon_1(x,y), \epsilon_2(x,y) \geq 0$. Le premier terme de l'expression de $E_{int}(v)$ relatif aux

dérivées partielles d'ordre 1 fait apparaître les propriétés mécaniques de déformation élastique. Le second, relatif aux dérivées partielles d'ordre 2, les propriétés mécaniques de déformation rigide. La modulation de ces paramètres permet d'influer sur l'élasticité et la rigidité du modèle.
Dans le cadre classique des modèles déformables 2D, accroître la valeur du paramètre ϵ_1 tend à éliminer les boucles du contour et ainsi à réduire sa longueur (cf. McInerney et Terzopoulos [77]).

Critère associé aux forces externes

Les forces externes dérivent du potentiel P relatif aux attributs, dans notre cas, l'attribut niveau de gris. L'énergie externe E_{ext} associée aux forces externes est définie par: $\forall v \in V$,

$$E_{ext}(v) = \int_\Omega P(x,y,v(x,y))dxdy.$$

Les méthodes de prétraitement d'images qui agissent sur les attributs et par conséquent sur le potentiel, valident cette hypothèse (voir par exemple Perona et Malik [88]).

On cherche à localiser la représentation de la structure sur les points de gradient maximal tout en préservant la régularité du modèle. La modélisation consiste donc à minimiser les énergies précédentes de telle sorte que le potentiel soit rendu infini (*ou nul*) lorsque la représentation est localisée sur les points de gradient maximal de l'image. On propose deux expressions pour l'énergie externe:

$$E_{ext}(v) = -\alpha \int_\Omega |\text{grad}\ \big(\tilde{I}(x,y,v(x,y))\big)|^2 dxdy,\ \alpha > 0,\ \text{(cf. Sonka } et\ al.\ [99]) \tag{10.4}$$

$$E_{ext}(v) = \int_\Omega \frac{\alpha}{1 + |\text{grad}\ \big(\tilde{I}(x,y,v(x,y))\big)|^2} dxdy,\ \alpha > 0,\ \text{(cf. Sethian [96])}. \tag{10.5}$$

Dans la partie numérique, nous utiliserons la seconde expression.

10.2.5 Problème de minimisation

Les définitions précédentes nous permettent de définir la fonctionnelle E par:

$$\begin{cases} \forall v \in V, \\ E(v) = E_{int}(v) + E_{ext}(v). \end{cases} \tag{10.6}$$

Il nous faut déterminer Φ, représentation optimale minimisant cette énergie,

$$\begin{cases} \text{Trouver}\ \ \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ E(\Phi) \leq E(v). \end{cases} \tag{10.7}$$

Le problème (10.7) est un problème non-linéaire de minimisation de fonctionnelle non-convexe sur un sous-espace vectoriel fermé K de l'espace de Hilbert V.
La non-linéarité de la fonctionnelle provient de la non-linéarité du potentiel.

On introduit la forme bilinéaire symétrique a définie sur $V \times V$ par:

$$\begin{cases} a : V \times V \to \mathbb{R} \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \epsilon_1(x,y)\left[(\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial x}) + (\frac{\partial u}{\partial y})(\frac{\partial v}{\partial y})\right] + \epsilon_2(x,y)\left[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})\right. \\ \qquad \left. +2(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})\right] dxdy. \end{cases}$$

L'énergie E peut ainsi être exprimée à l'aide de la forme bilinéaire a par: $\forall v \in V$,

$$E(v) = a(v,v) + \int_\Omega P(x,y,v(x,y))dxdy. \tag{10.8}$$

On peut remarquer que a est une forme bilinéaire continue sur $V \times V$.

Proposition 10.2.1

a est une forme bilinéaire continue symétrique sur $V \times V$.

Preuve:

$\forall u,v \in V$, on a:

$$\left| \begin{array}{l} |a(u,v)| \leq \sup\limits_\Omega\big(\epsilon_1(x,y)\big) \displaystyle\int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial x}||\frac{\partial v}{\partial x}| + |\frac{\partial u}{\partial y}||\frac{\partial v}{\partial y}|dxdy \\ \qquad +\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big) \displaystyle\int_\Omega |\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}||\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}| + |\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}||\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}| + 2|\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}||\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}|dxdy. \end{array} \right.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient:

$$\left| \begin{array}{l} |a(u,v)| \leq \sup\limits_\Omega\big(\epsilon_1(x,y)\big)||\frac{\partial u}{\partial x}||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial v}{\partial x}||_{L^2(\Omega)} + \sup\limits_\Omega\big(\epsilon_1(x,y)\big)||\frac{\partial u}{\partial y}||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial v}{\partial y}||_{L^2(\Omega)} \\ \qquad +\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big)||\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}||_{L^2(\Omega)} + \sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big)||\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}||_{L^2(\Omega)} \\ \qquad +2\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big)||\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}||_{L^2(\Omega)}||\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}||_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Posons U un élément de $\mathbb{R}^5$ défini par:

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_1(x,y)\big)}||\frac{\partial u}{\partial x}||_{L^2(\Omega)} \\ \sqrt{\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_1(x,y)\big)}||\frac{\partial u}{\partial y}||_{L^2(\Omega)} \\ \sqrt{\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big)}||\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}||_{L^2(\Omega)} \\ \sqrt{\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big)}||\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}||_{L^2(\Omega)} \\ \sqrt{2\sup\limits_\Omega\big(\epsilon_2(x,y)\big)}||\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}||_{L^2(\Omega)} \end{pmatrix}.$$

On définit V élément de $\mathbb{R}^5$ de la même manière que précédemment en remplaçant u par v.

On remarque que :

$$\left|\begin{array}{l} ||U||^2_{\mathbb{R}^5} = \sup\limits_{\Omega}\big(\epsilon_1(x,y)\big)(||\dfrac{\partial u}{\partial x}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\dfrac{\partial u}{\partial y}||^2_{L^2(\Omega)}) \\ \qquad +\sup\limits_{\Omega}\big(\epsilon_2(x,y)\big)(||\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}||^2_{L^2(\Omega)} + ||\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}||^2_{L^2(\Omega)} + 2||\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}||^2_{L^2(\Omega)}). \end{array}\right.$$

soit,

$$||U||^2_{\mathbb{R}^5} \leq \max\Big(\sup_{\Omega}\big(\epsilon_1(x,y)\big),\ 2\ \sup_{\Omega}\big(\epsilon_2(x,y)\big)\Big)||u||^2_V.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans $\mathbb{R}^5$, on en conclut que :

$$(U,V)_{\mathbb{R}^5} \leq \max\Big(\sup_{\Omega}\big(\epsilon_1(x,y)\big),\ 2\ \sup_{\Omega}\big(\epsilon_2(x,y)\big)\Big)||u||_V||v||_V.$$

Soit,

$$|a(u,v)| \leq \max\Big(\sup_{\Omega}\big(\epsilon_1(x,y)\big),\ 2\ \sup_{\Omega}\big(\epsilon_2(x,y)\big)\Big)||u||_V||v||_V.$$

■

Chapitre 11

Linéarisation du problème

Le problème (10.7) est un problème non-linéaire de minimisation de fonctionnelle non-convexe sur un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert V. Nous proposons de linéariser le terme non-linéaire de cette fonctionnelle et d'étudier l'existence et l'unicité du problème ainsi obtenu.
L'introduction des multiplicateurs de Lagrange permet de reformuler le problème (10.7) et conduit à résoudre une équation sur l'espace V tout entier.

11.1 Linéarisation du problème - existence, unicité

On rappelle que le problème (10.7) est défini par:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ E(\Phi) \leq E(v), \end{cases}$$

avec :

$$E : \begin{cases} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto a(v,v) + \displaystyle\int_\Omega P(x,y,v(x,y))dxdy. \end{cases}$$

Suivant les arguments de Vieira-Testé [107], on pose :

$$\forall v \in V,\ T(v) = \int_\Omega P(x,y,v(x,y))dxdy,$$

ce terme correspondant au terme non-linéaire de la fonctionnelle E.

On linéarise cet élément soit, $\forall v \in V$:

$$T(v) \simeq T(v_0) + DT(v_0).(v - v_0),$$

avec v_0 fixé dans V.

Ainsi,

$$\inf_{v\in K} E(v) \simeq \inf_{v\in K} \Big(a(v,v) + DT(v_0).v \Big).$$

Un calcul simple donne $DT(v_0).v = \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v_0(x,y))\ v\ dxdy.$

On approche le problème (10.7) par le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ J(\Phi) \leq J(v), \end{cases} \tag{11.1}$$

avec $\forall v \in V$,

$$\begin{cases} J(v) = a(v,v) - l(v), \text{ où} \\ l : v \mapsto l(v) = -DT(v_0).v = -\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v_0(x,y))\ v\ dxdy. \end{cases} \tag{11.2}$$

Ces notations permettent de faire une analogie avec les hypothèses du théorème 1.1.3 (partie I, chapitre 1). Nous montrons dans ce qui suit l'existence et l'unicité de la solution du problème approché (11.1).

Nous cherchons à appliquer le théorème 1.1.3. Nous introduisons, pour ce faire, une nouvelle forme bilinéaire $\hat{a}$ et nous validons les hypothèses.

Proposition 11.1.1

Considérons la forme bilinéaire a et la forme linéaire l définies en (11.2).
- *a est une forme bilinéaire, symétrique, continue sur $V \times V$.*
- *l est une forme linéaire continue sur V.*

Preuve:

- *a est une forme bilinéaire, symétrique sur $V \times V$. Elle est continue sur $V \times V$ d'après la proposition 10.2.1, chapitre 10, partie II .*
- *<u>Continuité de l:</u>*

  $\forall v \in V$,

  $|l(v)| = |DT(v_0).v| = |\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v_0(x,y))vdxdy|.$

  $|l(v)| \leq \left(\displaystyle\int_\Omega (\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v_0(x,y)))^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\displaystyle\int_\Omega v^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$, *(d'après Cauchy-Schwartz).*

  $|l(v)| \leq c(v_0)||v||_{L^2(\Omega)} \leq c(v_0)||v||_V.$

  D'où la continuité de l, P ayant la régularité souhaitée.

■

Remarquons que la forme bilinéaire a n'est pas V-elliptique. Si v est constante sur Ω, *($v \in V$)*, on a en effet $a(v,v) = 0$. Le théorème 1.1.3 n'est donc pas applicable immédiatement. Il nous faut transformer le problème initial (11.1).

Le problème (11.1) est équivalent à:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ J(\Phi) + < \beta(\Phi) >_N^2 \leq J(v) + < \beta(v) >_N^2 , \end{cases} \tag{11.3}$$

car $\beta(\Phi) = \beta(v) = 0_{\mathbb{R}^N}$ par définition de K.

Introduisons la forme bilinéaire $\hat{a}$ associée à a définie par:

$$\hat{a} : \begin{cases} V \times V \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto a(u,v) + < \beta(u),\beta(v) >_N . \end{cases}$$

On note $\widehat{||\cdot||}$ la norme associée à $\hat{a}$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 11.1.1

La forme bilinéaire $\hat{a}$ est symétrique et continue sur $V \times V$.

Preuve:

La continuité de $\hat{a}$ sur $V \times V$ résulte d'une part de la continuité de a sur $V \times V$ et d'autre part de la remarque suivante:

$$\forall u,v \in V \times V,\ | < \beta(u),\beta(v) >_N | = |\sum_{i=1}^{N} u(a_i)v(a_i)|,$$

$$\textit{soit, } | < \beta(u),\beta(v) >_N | \leq N||u||_{C^0}||v||_{C^0}.$$

Le théorème d'injection de Sobolev 1.1.5, partie I, chapitre 1 donne enfin:

$$\forall u,v \in V \times V,\ | < \beta(u),\beta(v) >_N | \leq \varsigma N||u||_V||v||_V.$$

■

Lemme 11.1.2

La norme $\widehat{||\cdot||}$ introduite précédemment est équivalente à la norme $||\cdot||_V$ dans V.

Preuve:

La première partie de la preuve est triviale car la continuité de $\hat{a}$ sur $V \times V$ conduit à

$\forall u \in V$, $\widehat{||u||} \leq \sigma ||u||_V$. La seconde partie de la preuve s'appuie sur plusieurs éléments de Nečas [82]. Nous rappelons les principaux résultats intervenant dans la démonstration.

Lemme 2.7.1 de Nečas [82]:

On désignera par P_{k-1} l'espace des polynômes d'ordre $\leq k-1$. Nous ne travaillerons qu'avec des domaines pour lesquels

$$v \in P_{k-1} \Rightarrow |v|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Soit Ω un domaine satisfaisant la condition ci-dessus, k un entier ≥ 1 et $p \geq 1$. Alors il existe des fonctionnelles f_i, $i \in \{1,2,\cdots,l\}$ sur $W_p^{(k)}(\Omega)$ de sorte que si $v \in P_{k-1}$, on ait l'équivalence:

$$\sum_{i=1}^{l} |f_i v|^p = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0.$$

$W_p^{(k)}(\Omega)$ désigne le sous-espace des fonctions f de $L^p(\Omega)$ telles que $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq k$.

Théorème 2.7.1 de Nečas [82]:

Soit $\Omega \in \eta^{(0)}$, f_i des fonctionnelles satisfaisant la propriété ci-dessus, k un entier ≥ 1 et $p \geq 1$. On a l'inégalité:

$$c_1 |u|_{W_p^{(k)}(\Omega)} \leq \Big[\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{l} |f_i u|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \leq c_2 |u|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

Revenons à notre démonstration. On suppose ici que $\forall (x,y) \in \Omega$, $\epsilon_1(x,y)$, $\epsilon_2(x,y) > 0$.

Considérons la fonctionnelle $\beta' : \begin{cases} V \to \mathbb{R}^N \\ v \mapsto \beta'(v) = \dfrac{1}{\sqrt{\inf\limits_{\Omega} \epsilon_1(x,y)}} \begin{pmatrix} v(a_1) \\ \vdots \\ v(a_N) \end{pmatrix}. \end{cases}$

Supposons que $v \in P_0$, $\Rightarrow \forall (x,y) \in \Omega$, $v(x,y) \equiv Const$.

Ainsi, $< \beta'(v) >_N^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v(a_1) \\ \vdots \\ v(a_N) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^N}$.

D'où, $v \equiv 0$ car $N \geq 1$.

Le théorème 2.7.1 de Nečas [82] nous donne avec $\begin{cases} k = 1 \\ p = 2 \end{cases}$ *l'existence de deux constantes $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que:*

$$c_1 |u|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2_{L^2(\Omega)} + < \beta'(u) >_N^2 \leq c_2 |u|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)}.$$

De l'inégalité de gauche, on déduit:

$$c_1 \inf_{\Omega} \epsilon_1(x,y)|u|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \leq \inf_{\Omega} \epsilon_1(x,y) \int_{\Omega} \left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \right] dxdy + < \beta(u) >_N^2 .$$

D'où,

$$\min\big(c_1 \inf_{\Omega} \epsilon_1(x,y),\ \inf_{\Omega} \epsilon_2(x,y)\big)||u||_V^2 \leq \hat{a}(u,u).$$

On en déduit l'équivalence de norme et en particulier la V-ellipticité de la forme bilinéaire $\hat{a}$. Le problème équivalent à (11.1) noté (11.3) se reformule par:

$$(11.3) \begin{cases} \textit{Trouver} \ \ \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ \hat{a}(\Phi,\Phi) - l(\Phi) \leq \hat{a}(v,v) - l(v). \end{cases}$$

Les hypothèses du théorème 1.1.3 sont satisfaites et permettent de conclure à l'existence et l'unicité de la solution Φ du problème (11.1)*, solution qui vérifie:*

$$\begin{cases} \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ 2\ \hat{a}(\Phi,v) = l(v) \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ 2\ a(\Phi,v) = l(v). \end{cases}$$

■

11.2 Formulation à l'aide des multiplicateurs de Lagrange

Dans ce paragraphe, nous allons reformuler le problème (11.1) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.
L'introduction des multiplicateurs de Lagrange permet d'introduire un problème sur V tout entier, contrairement à notre problème initial formulé sur K, sous-espace vectoriel fermé de V.

11.2.1 Introduction d'une forme linéaire définie sur l'orthogonal de K

V étant un espace de Hilbert et $K \subset V$ étant un sous-espace vectoriel fermé de V, V est somme directe de K et de son orthogonal $K^{\perp}$ pour la forme bilinéaire $\hat{a}$ *(cf. théorème 1.1.1, partie I, chapitre 1)*, soit:

$$\begin{cases} V = K \bigoplus K^{\perp} \\ \text{et } K^{\perp} = \{u \in V |\ \hat{a}(u,v) = 0,\ \forall v \in K\}. \end{cases}$$

Considérons la forme linéaire $\beta_{/K^{\perp}}$ définie par:

$$\beta_{/K^{\perp}} : K^{\perp} \to \mathbb{R}^N.$$

$\beta_{/K^\perp}$ est un isomorphisme topologique ($dim\ \mathbb{R}^N < \infty$):

- $\ker \beta_{/K^\perp} = K^\perp \cap \ker \beta = K^\perp \cap K = \{0\}$.
- la surjectivité est évidente: $Im(\beta_{/K^\perp}) = \mathbb{R}^N$. On peut remarquer en effet, que pour $\tau \in \mathbb{R}^N$, l'ensemble $K_\tau = \{v \in V |\ \beta(v) = \tau\}$ est non-vide (cf. Vieira-Testé [107] proposition 3.5.1).

11.2.2 Introduction des multiplicateurs de Lagrange

Théorème 11.2.1

Si Φ est la solution du problème (11.1), alors Φ est aussi la solution du problème suivant (avec multiplicateurs de Lagrange):

$$\begin{cases} \textit{Trouver } (\Phi,\lambda) \in K \times \mathbb{R}^N, \\ \forall v \in V,\ 2\ a(\Phi,v) - l(v) + < \lambda,\beta(v) >_N = 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

Preuve:

- *Si $(u,\lambda) \in K \times \mathbb{R}^N$ est solution du problème (11.4), alors $\forall v \in K \subset V$, on a:*

$$2\ a(u,v) - l(v) + < \lambda,\beta(v) >_N = 2\ a(u,v) - l(v) = 0 \ \textit{car}\ \beta(v) = 0_{\mathbb{R}^N}.$$

  D'où, $\forall v \in K$,

$$2\ a(u,v) - l(v) = 0.$$

  Par unicité de la solution (cf. théorème 1.1.3), on en déduit que $u = \Phi$, solution du problème (11.1) .
- *Supposons désormais que Φ est solution du problème (11.1).*

  On a, d'après ce qui précède, $\begin{cases} \Phi \in K \\ \forall v \in K,\ 2\ a(\Phi,v) - l(v) = 0 \end{cases}$ et unicité de la solution Φ.

  Considérons la forme linéaire L définie $\forall w \in K^\perp$ par,

$$L : \begin{cases} K^\perp \to \mathbb{R} \\ w \mapsto l(w). \end{cases}$$

  On sait que $\beta_{/K^\perp} : K^\perp \to \mathbb{R}^N = H$ est un isomorphisme topologique donc ${}^t\beta_{/K^\perp} : H' = H \to (K^\perp)'$ est un isomorphisme.

  Ainsi,

$$\forall L_1 \in (K^\perp)',\ \exists! \lambda \in H' = H = \mathbb{R}^N,\ \textit{tel que}\ {}^t\beta_{/K^\perp}(\lambda) = L_1.$$

En particulier, pour $L_1 = L$,

$$\exists!\lambda \in H' = H = \mathbb{R}^N,\ \forall w \in K^\perp,\ -L(w) + <^t \beta_{/K^\perp}(\lambda), w>_{(K^\perp)',K^\perp} = 0,$$

$$\textit{Soit, } \exists!\lambda \in H' = H = \mathbb{R}^N,\ \forall w \in K^\perp,\ -L(w) + <\lambda, \beta_{/K^\perp}(w)>_{H',H} = 0.$$

w étant dans $K^\perp$, *on en déduit qu'il existe un unique* $\lambda \in \mathbb{R}^N$, $\forall w \in K^\perp$,

$$2\ a(\Phi,w) - l(w) + <\lambda, \beta(w)>_{H',H} = 0.$$

Soit v fixé dans V mais quelconque, $V = K \bigoplus K^\perp$, $\exists!(v_0,w) \in K \times K^\perp$ *tel que* $v = v_0 + w$.

On en déduit que:

$$2\ a(\Phi,v) - l(v) = 2\ a(\Phi,v_0 + w) - l(v_0 + w),$$

$$\textit{Soit, } 2\ a(\Phi,v) - l(v) = 2\ a(\Phi,w) - l(w),\ \textit{car } v_0 \in K.$$

D'où,

$$\exists!\lambda \in H' = H = \mathbb{R}^N,\ \forall v \in V\ ,\ 2\ a(\Phi,v) - l(v) + <\lambda, \beta(w)>_N = 0.$$

En remarquant que

$$\beta(w) = \beta(v - v_0) = \beta(v)\ \textit{car } v_0 \in K,$$

on obtient:

$$\exists!\lambda \in H' = H = \mathbb{R}^N,\ \forall v \in V,\ 2\ a(\Phi,v) - l(v) + <\lambda, \beta(v)>_N = 0,$$

et finalement:

$$\exists!(\Phi,\lambda) \in K \times H' = H = \mathbb{R}^N,\ \forall v \in V,\ 2\ a(\Phi,v) - l(v) + <\lambda, \beta(v)>_N = 0.$$

■

Chapitre 12

Le problème non-linéaire

Dans ce chapitre, nous définissons le problème d'évolution associé au problème (10.7). Nous rappelons en premier lieu la formulation de notre problème de minimisation non-linéaire.

$$(10.7)\begin{cases} \text{Trouver } \ \Phi \in K, \\ \forall v \in K,\ E(\Phi) \leq E(v), \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \forall v \in V, \\ E(v) = a(v,v) + \displaystyle\int_\Omega P(x,y,v(x,y))dxdy, \end{cases} \tag{12.1}$$

K étant un sous-espace vectoriel fermé de V espace de Hilbert.

12.1 Quelques résultats sur le problème statique

Soit w un élément de l'espace de Hilbert V.

$$\begin{aligned} E(v+w) - E(v) &= 2a(v,w) + a(w,w) \\ &+ \int_\Omega P(x,y,v+w) - P(x,y,v)dxdy. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned} |E(v+w) - E(v) - 2a(v,w) - \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v)wdxdy| \\ = |a(w,w) + \epsilon(w)|. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Or, a est continue sur $V \times V$, donc il existe $C > 0$ constante telle que:

$$|a(w,w)| \leq C||w||_V^2.$$

Par ailleurs,

$$\int_\Omega P(x,y,v+w) - P(x,y,v)dxdy = \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v)wdxdy + \epsilon(w), \text{ avec } \lim_{||w||_V \to 0} \frac{|\epsilon(w)|}{||w||_V} = 0.$$

On en déduit donc que:

$$\lim_{||w||_V \to 0} \frac{|E(v+w) - E(v) - 2a(v,w) - \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v)wdxdy|}{||w||_V} = 0,$$

et

$$E'(v,w) = 2a(v,w) + \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v)wdxdy.$$

L'opérateur $w \mapsto E'(v,w)$ est un opérateur linéaire et continu.

L'énergie E est donc différentiable au sens de Fréchet et par conséquent au sens de Gâteaux. Appliquons désormais le théorème 1.2.1, U étant dans notre cas le sous-espace vectoriel fermé K de V.
Les hypothèses du théorème étant satisfaites, si v est un minimum relatif de E par rapport à l'ensemble K, on a $\forall w \in K$,

$$E'(v,w) = E'(v).w \geq 0,$$

L'espace K ayant une structure d'espace vectoriel, $-w$ est un élément de K, on en déduit donc que:

$$E'(v,-w) = E'(v).(-w) \geq 0.$$

Finalement, on obtient que $\forall w \in K$,

$$E'(v).w = 0. \tag{12.4}$$

Le problème (10.7) s'inscrit dans le cadre des problèmes d'optimisation avec contraintes égalités (*cf. sous-section 1.2.3 du chapitre 1, partie I*).
En effet, le sous-espace vectoriel fermé K est défini par:

$$K = \left\{ v \in V |\ \beta(v) = 0_{\mathbb{R}^N} \right\},$$

sachant que β est l'opérateur linéaire continu défini par:

$$\beta : v \in V \mapsto \beta(v) = (v(x_i,y_i))_{i \in \{1,\cdots,N\}} \in \mathbb{R}^N.$$

Dans la suite de l'exposé, on notera par β_i, ($i \in \{1,\cdots,N\}$), la forme linéaire définie par

$$\beta_i : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ v \mapsto v(a_i) \end{cases}.$$

La fonctionnelle E et la famille des $\{\beta_i\}$, $i \in \{1,\cdots,N\}$ sont différentiables au sens de Fréchet et par conséquent au sens de Gâteaux.

Les fonctions contraintes β_i sont dans notre cas, des formes linéaires. On a donc:

$$\beta_i'(v).(w) = \beta_i(w).$$

On vérifie rapidement le caractère régulier des contraintes (*cf. définition 1.2.4*) . Soit T la famille $T = \{\beta_1, \cdots, \beta_N\}$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\mu_1, \cdots, \mu_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que:

$$\mu_1\beta_1 + \cdots + \mu_N\beta_N = 0. \tag{12.5}$$

Considérons désormais l'ensemble K_τ défini par:

$$K_\tau = \big\{v \in V|\ \beta(v) = \tau\big\} = \big\{v \in V|\ \forall j \in \{1, \cdots, N\},\ v(a_j) = \tau_j\big\}.$$

L'ensemble K_τ est non vide *(cf. sous-section 11.2.1, chapitre 11, partie II)*. Prenant successivement pour τ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on peut construire une famille finie $(v_i)_{i\in\{1,\cdots,N\}}$ telle que $v_i(a_j) = \delta_{ij}$. En prenant l'image de chaque v_i par (12.5), on en déduit que $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_N = 0$.
D'où, la régularité des contraintes.

La condition du premier ordre pour un optimum lié nous a permis d'établir la relation (12.4), vérifiée pour tout élément w de K.
Nous introduisons désormais les multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir une équation sur l'espace V tout entier.
Nous proposons d'appliquer le théorème 1.2.2 au problème (10.7). La formulation variationnelle du problème (10.7) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange en prenant comme fonction test une fonction w de l'espace V est la suivante:

Pour que $v \in K$, v régulier, soit solution de notre problème (10.7), il faut qu'il existe $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N)^t \in \mathbb{R}^N$ tel que:

$$2a(v,w) + \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,v(x,y))wdxdy + <\lambda,\beta(w)>_N = 0. \tag{12.6}$$

Nous nous attachons désormais à la détermination du problème d'évolution associé.
La définition du problème d'évolution s'inspire de la technique des modèles déformables. Le principe de cette méthode est d'introduire un terme dynamique à la fonctionnelle E, à savoir, un terme d'évolution. Ainsi, Φ devient une fonction des variables spatiales x, y et de la variable temporelle t. Cela permet de suivre l'évolution de la surface à chaque instant t.

12.2 Le problème d'évolution associé

Le terme d'évolution s'exprime classiquement (cf. [107]) sous la forme:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \epsilon(x,y)(\Phi(x,y,t))^2 dxdy,$$

où ϵ est un paramètre de contrôle eu égard à la norme L^2 de Φ. Plus précisément, ϵ permet de contrôler l'ampleur de la déformation de la surface : plus ϵ est grand, moins on déforme la surface, et inversement, plus ϵ est petit, moins on contraint le modèle.
Nous supposerons, lors de la mise en œuvre numérique, que la fonction ϵ est constante.

Soit $T > 0$ fixé mais quelconque. On considère le problème d'évolution associé à (10.7) défini par:

$$\begin{cases} \text{Chercher } \Phi \in W(]0,T[,V), \\ \forall t \in]0,T[, \Phi(t) \in K, \\ \forall w \in W(]0,T[,V),\ w(t) \in K, \text{ pour tout } t \in]0,T[, \\ J(\Phi) \leq J(w), \\ \Phi(\cdot,\cdot,0) = \Phi_0 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{12.7}$$

où la fonctionnelle J est définie par:

$$J(w) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \epsilon(x,y)\big(w(x,y,t)\big)^2 dxdy + E(w),$$

E définie en (12.1) et où Φ_0 représente la condition initiale.

On rappelle que :

$$\begin{array}{l} V \circlearrowleft L^2(\Omega) \\ W(]0,T[,V) \circlearrowleft C^0([0,T],L^2(\Omega)). \end{array}$$

Pour résoudre ce problème, nous utilisons les multiplicateurs de Lagrange.
Par ailleurs, à chaque fonction $w : (x,y,t) \in \Omega\times]0,T[\mapsto w(x,y,t) \in \mathbb{R}$, on associe la fonction $w(t) : (x,y) \in \Omega \mapsto w(x,y,t)$. On identifie ainsi la fonction w à la fonction $t \mapsto w(t)$ définie sur $[0,T]$ à valeurs dans un espace de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

Comme précédemment, nous introduisons les multiplicateurs de Lagrange afin d'obtenir une formulation variationnelle du problème (12.7) sur l'espace V tout entier.

Ainsi, utilisant le théorème 1.2.2, on donne la formulation variationnelle du problème (12.7) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. On prend comme fonction test une fonction v de l'espace stationnaire V, $\Im$ désignant l'espace des fonctions définies sur $[0,T]$ à valeur dans $\mathbb{R}^N$ et $\tilde{a}$ une nouvelle forme bilinéaire définie par $\tilde{a} = 2\ a$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\Phi,\lambda) \in W(]0,T[,V) \times \Im([0,T],\mathbb{R}^N), \\ \forall t \in]0,T[: \Phi(t) \in K \\ \forall v \in V : \\ \displaystyle\int_\Omega \epsilon(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial t} v dxdy + \tilde{a}(\Phi(t),v) + \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,\Phi(x,y,t)) v dxdy \\ + < \lambda(t),\beta(v) >_N = 0 \\ \Phi(\cdot,\cdot,0) = \Phi_0 \in L^2(\Omega),\ \lambda(0) = \lambda_0 \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{12.8}$$

Nous concluons par le résultat suivant:

Proposition 12.2.1

En supposant $T \to \infty$ et s'il existe un couple $(g,\mu) \in V \times \mathbb{R}^N$ tel que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \Phi(\cdot,\cdot,t) = g(\cdot,\cdot) \ \textit{dans} \ \ V. \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(\cdot,\cdot,t) \ \textit{existe dans} \ V'. \\ \lim\limits_{t\to\infty} \lambda(\cdot,t) = \mu(\cdot) \ \textit{dans} \ \ \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Le couple (Φ,λ) étant défini dans le problème précédent, g et μ sont alors solutions du problème stationnaire suivant:

$$\begin{cases} (g,\mu) \in V \times \mathbb{R}^N, \\ g \in K, \\ \forall v \in V, \ \tilde{a}(g,v) + \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,g) v dxdy + < \mu,\beta(v) >_N = 0. \end{cases}$$

Preuve:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to\infty} \Phi(\cdot,\cdot,t) = g(\cdot,\cdot) \ \textit{dans} \ \ V \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(\cdot,\cdot,t) \ \textit{existe dans} \ \ V' \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\cdot,\cdot,t) = 0.$$

On passe à la limite dans le problème variationnel, lorsque $t \to \infty$, soit, $\forall v \in V$:

$$\lim_{t\to\infty} \left[\int_\Omega \epsilon(x,y) < \frac{\partial \Phi}{\partial t}, v > dxdy + \tilde{a}(\Phi(t),v) + \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,\Phi(t)) v dxdy \right] + \lim_{t\to\infty} < \lambda(t),\beta(v) >_N = 0.$$

En utilisant la continuité de $\tilde{a}$ ainsi que l'hypothèse de régularité du potentiel P sur $\Omega \times \mathbb{R}$, on a:

$$\int_\Omega \epsilon(x,y) < \lim_{t\to\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, v > dxdy + \tilde{a}(\lim_{t\to\infty} \Phi(t),v) + \int_\Omega \lim_{t\to\infty} \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,\Phi(t)) v dxdy + < \lim_{t\to\infty} \lambda(t),\beta(v) >_N = 0.$$

$< \cdot,\cdot >$ désigne le crochet de dualité.

On a alors $\forall v \in V$;

$$0 + \tilde{a}(g,v) + \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,g) v dxdy + < \mu,\beta(v) >_N = 0.$$

De plus, $g \in K$ car:

$$\begin{cases} \forall t \in]0,T],\ \forall i \in \{1,\cdots,N\},\ \Phi(a_i,t) = 0 \\ et \lim\limits_{t\to\infty} \Phi(a_i,t) = g(a_i). \end{cases}$$

D'où,

$$g(a_i) = 0,\ \forall i \in \{1,\cdots,N\}.$$

■

On pose pour la suite: $\forall t \in]0,T]$,

$$L_{\Phi(t)}(v) = -\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,\Phi(x,y,t))v dxdy. \tag{12.9}$$

Nous présentons, dans le chapitre 13, la discrétisation du problème d'évolution (12.8) en temps et en espace:
on approche la dérivée temporelle par différences finies (*schéma implicite*). Le terme non-linéaire est remplacé par un développement de Taylor jusqu'à un ordre $k \in \mathbb{N}$.
On réalise ensuite la discrétisation spatiale du problème approché en temps par une méthode éléments finis. On obtient ainsi un système linéaire, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

Chapitre 13

Discrétisation

13.1 Discrétisation en temps

L'expression du problème d'évolution (12.8) à l'aide de (12.9) est donnée par:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\Phi,\lambda) \in W(]0,T[,V) \times \Im([0,T],\mathbb{R}^N), \\ \forall t \in]0,T[,\ \Phi(t) \in K, \\ \forall v \in V : \\ \displaystyle\int_\Omega \epsilon(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial t} v dxdy + \tilde{a}(\Phi(t),v) + < \lambda(t),\beta(v) >_N = L_{\Phi(t)}(v). \\ \Phi(\cdot,\cdot,0) = \Phi_0 \in L^2(\Omega),\ \lambda(0) = \lambda_0 \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{13.1}$$

Soit $T > 0$, fixé quelconque. Pour la discrétisation temporelle, on introduit classiquement une subdivision de l'intervalle $]0,T]$ en sous-intervalles de longueur δt. On a ainsi: $t_m = \delta t.m$ avec $m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\delta t}\}$.

On cherche à déterminer Φ à l'instant t_m. L'équation intervenant dans (13.1) est alors remplacée par: $\forall m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\delta t}\}$

$$\int_\Omega \epsilon(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_m) v dxdy + \tilde{a}(\Phi(t_m),v) + < \lambda(t_m),\beta(v) >_N = L_{\Phi(t_m)}(v). \tag{13.2}$$

13.1.1 Approximation de la dérivée en temps

Un schéma implicite de type différences finies est employé pour l'approximation de la dérivée en temps. Ainsi, on fait l'approximation suivante: $\forall m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\delta t}\}$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t_m) \simeq \frac{\Phi(x,y,t_m) - \Phi(x,y,t_{m-1})}{\delta t}.$$

L'équation (13.2) devient alors: $\forall m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\delta t}\}$,

$$\int_\Omega \epsilon(x,y)\Phi(t_m) v dxdy + \delta t \tilde{a}(\Phi(t_m),v) + \delta t < \lambda(t_m),\beta(v) >_N = \delta t L_{\Phi(t_m)}(v) + \int_\Omega \epsilon(x,y)\Phi(t_{m-1}) v dxdy.$$

Cette équation implicite présente une non-linéarité par rapport à l'inconnue $\Phi(t_m)$. La technique des modèles déformables consiste à supposer qu'en $t = t_m$, la surface est soumise aux forces d'attraction calculées à l'instant t_{m-1}. Cela correspond donc à la substitution de la composante $L_{\Phi(t_m)}$ par son développement de Taylor par rapport à t au temps t_m. On propose, comme dans ce modèle, de remplacer $L_{\Phi(t_m)}$ par son développement de Taylor par rapport au temps, à l'instant t_m, jusqu'à un ordre $k \in \mathbb{N}$. Cela implique, en particulier, une certaine régularité sur Φ par rapport à la variable temporelle.

En supposant que $\Phi \in C^k([0,T],L^2(\Omega))$, on a:

$$\left|\begin{array}{l} L_{\Phi(t_m)}(v) = L_{\Phi,v}(t_m) = L_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \delta t L^{(1)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \dfrac{(\delta t)^2}{2} L^{(2)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \cdots \\ \qquad\qquad + \dfrac{(\delta t)^k}{k!} L^{(k)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \dfrac{(\delta t)^k}{k!}\theta(\delta t), \\ \text{avec } \ \theta(\delta t) \to 0,\ \delta t \to 0^+. \end{array}\right.$$

La condition de régularité sur Φ par rapport à la variable temporelle est liée à l'expression du développement de Taylor de $L_{\Phi(t_m)}$: elle fait intervenir les dérivées d'ordre k de Φ par rapport à t au temps t_{m-1}. Dans la suite, on pose $\forall m \in \{1, \cdots, \dfrac{T}{\delta t}\}$:

$$\Phi^m = \Phi(t_m),\ \lambda^m = \lambda(t_m).$$

On notera également par $D_{\Phi(t_{m-1}),v}$ l'expression suivante:

$$D_{\Phi(t_{m-1}),v} = L_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \delta t L^{(1)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \frac{(\delta t)^2}{2} L^{(2)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \cdots + \frac{(\delta t)^k}{k!} L^{(k)}_{\Phi,v}(t_{m-1}). \quad (13.3)$$

Le problème (13.1) discrétisé en temps et approché devient: $\forall m \in \{1, \cdots, \dfrac{T}{\delta t}\}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \ (\Phi^m,\lambda^m) \in V \times \mathbb{R}^N \\ \Phi^m \in K, \\ \forall v \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega \epsilon(x,y)\Phi^m v dxdy + \delta t \tilde{a}(\Phi^m,v) + \delta t < \lambda^m,\beta(v) >_N = \int_\Omega \epsilon(x,y)\Phi^{m-1} v dxdy + \delta t D_{\Phi(t_{m-1}),v}. \\ \lambda(0) = \lambda_0 \in \mathbb{R}^N,\ \forall j \in \{0, \cdots, k\},\ (\Phi^{(j)})^0 = \Phi^j_0 \in L^2(\Omega). \end{array}\right. \quad (13.4)$$

On a alors le théorème suivant:

Théorème 13.1.1

On montre que: $\forall m \in \{1, \cdots, \frac{T}{\delta t}\}$, *le problème (13.4) admet une unique solution* (Φ^m, λ^m).

Preuve:

$\forall (u,v) \in V \times V$, *posons* $\mathbb{A}$ *la forme bilinéaire définie par:*

$$\mathbb{A}(u,v) = \frac{1}{\delta t}\int_\Omega \epsilon(x,y) uv dxdy + \tilde{a}(u,v).$$

$\mathbb{A}$ *est une forme bilinéaire, continue, symétrique sur* $V \times V$. $\mathbb{A}$ *est, par ailleurs, V-elliptique car:*

$$\left|\begin{array}{l}
\mathbb{A}(v,v) = \dfrac{1}{\delta t}\displaystyle\int_\Omega \epsilon(x,y) v^2 dxdy + \tilde{a}(v,v). \\
\mathbb{A}(v,v) \geq \dfrac{\inf\limits_\Omega \epsilon(x,y)}{\delta t}\displaystyle\int_\Omega v^2 dxdy \\
\qquad +2\ \min\big(\inf\limits_\Omega \epsilon_1(x,y),\ \inf\limits_\Omega \epsilon_2(x,y)\big)\displaystyle\int_\Omega \left[(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})^2 + (\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y})^2\right] dxdy. \\
\mathbb{A}(v,v) \geq \min\left(\dfrac{\inf\limits_\Omega \epsilon(x,y)}{\delta t},\ 2\min\big(\inf\limits_\Omega \epsilon_1(x,y), \inf\limits_\Omega \epsilon_2(x,y)\big)\right)||v||_V^2.
\end{array}\right.$$

D'où la V-ellipticité de $\mathbb{A}$.

Soit $\varphi \in V$. *Posons* $\forall v \in V$,

$$l_\varphi(v) = \frac{1}{\delta t}\int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi v dxdy + D_{\varphi,v}.$$

l_φ *est une forme linéaire, continue sur V.*
Pour φ *fixé dans V,* $\forall v \in V$, $\exists c > 0$,

$$|D_{\varphi,v}| \leq c||v||_V.$$

Posons pour φ *fixé dans V,* $\forall v \in V$,

$$J(v) = \frac{1}{2}\mathbb{A}(v,v) - l_\varphi(v). \tag{13.5}$$

Le théorème 1.1.3 permet de conclure que le problème

$$\left\{\begin{array}{l}
\textit{Trouver}\ \ \Phi \in K, \\
\forall v \in K,\ J(\Phi) \leq J(v), \\
\ \textit{où } J \textit{ est définie en (13.5)},
\end{array}\right. \tag{13.6}$$

admet une unique solution satisfaisant:

$$\begin{cases} \Phi \in K, \\ \mathbb{A}(\Phi,v) = l_\varphi(v),\ \forall v \in K. \end{cases}$$

On démontre aisément que les problèmes (P_m) *et (13.6) sont équivalents en prenant* $\varphi = \Phi^{m-1}$.
La démonstration est calquée sur celle du théorème 11.2.1. ■

13.2 Discrétisation totale

Pour le maillage de notre domaine Ω, nous utilisons des éléments finis rectangulaires de Bogner-Fox-Schmit [21], (Ciarlet [32]) de classe C^1, (*cf. section 1.3, chapitre 1, partie I*).

Soient $(\varphi_i)_{i\in\{1,\cdots,M\}}$ les fonctions de base de l'espace d'approximation $V_h \subset V$. M désigne la dimension de V_h, soit le cardinal de la famille constituée des $(\varphi_i)_{i\in\{1,\cdots,M\}}$.
$\forall m \in \{1,\cdots,\dfrac{T}{\delta t}\}$, on peut décomposer Φ^m dans la base des φ_i, soit:

$$\begin{cases} \forall m \in \{1,\cdots,\dfrac{T}{\delta t}\} \\ \exists (\alpha_j^m)_{j\in\{1,\cdots,M\}} \in \mathbb{R}^M, \\ \Phi^m = \displaystyle\sum_{j=1}^M \alpha_j^m \varphi_j. \end{cases}$$

Posons $\alpha^m = (\alpha_j^m)_{j\in\{1,\cdots,M\}} \in \mathbb{R}^M$.
En prenant successivement pour fonction test $v = \varphi_l$ dans le problème (13.4), on en déduit la nouvelle formulation suivante: $\forall m \in \{1,\cdots,\dfrac{T}{\delta t}\}$,

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\alpha^m,\lambda^m) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N, \\ \Phi^m \in K, \text{ ce qui se traduit par } \displaystyle\sum_{j=1}^M \alpha_j^m \varphi_j(a_i) = 0,\ \forall i \in \{1,\cdots,N\}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^M \int_\Omega \epsilon(x,y)\alpha_j^m \varphi_j\varphi_l dxdy + \delta t \sum_{j=1}^M \alpha_j^m \tilde{a}(\varphi_j,\varphi_l) + \delta t \sum_{k=1}^N \lambda_k^m \varphi_l(a_k) \\ = \displaystyle\sum_{j=1}^M \int_\Omega \epsilon(x,y)\alpha_j^{m-1}\varphi_j\varphi_l dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_l}. \\ \lambda(0) = \lambda_0 \in \mathbb{R}^N \text{ et } \forall j \in \{0,\cdots,k\},\ (\Phi^{(j)})^0 = \Phi_0^j \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{13.7}$$

On est ramené à résoudre un système de $(M+N)$ équations à $(M+N)$ inconnues. Matriciellement, il nous faut résoudre le système linéaire suivant:

$$RX = F$$

avec:

$$X \in \mathbb{R}^{M+N} = \begin{pmatrix} \alpha_1^m \\ \alpha_2^m \\ \vdots \\ \alpha_M^m \\ \lambda_1^m \\ \lambda_2^m \\ \vdots \\ \lambda_N^m \end{pmatrix}$$

R, matrice de dimension $(M+N,M+N)$, définie par:

$$R = \begin{pmatrix} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_1^2 + \delta t\tilde{a}(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_M\varphi_1 + \delta t\tilde{a}(\varphi_M,\varphi_1) & \delta t\varphi_1(a_1) & \dots & \delta t\varphi_1(a_N) \\ \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_1\varphi_2 + \delta t\tilde{a}(\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_M\varphi_2 + \delta t\tilde{a}(\varphi_M,\varphi_2) & \delta t\varphi_2(a_1) & \dots & \delta t\varphi_2(a_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_1\varphi_M + \delta t\tilde{a}(\varphi_1,\varphi_M) & \cdots & \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_M^2 + \delta t\tilde{a}(\varphi_M,\varphi_M) & \delta t\varphi_M(a_1) & \dots & \delta t\varphi_M(a_N) \\ \delta t\varphi_1(a_1) & \cdots & \delta t\varphi_M(a_1) & 0 & 0 & 0 \\ \delta t\varphi_1(a_2) & \cdots & \delta t\varphi_M(a_2) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \delta t\varphi_1(a_N) & \cdots & \delta t\varphi_M(a_N) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et F tel que:

$$F \in \mathbb{R}^{M+N} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M \alpha_i^{m-1} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_i\varphi_1 dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_1} \\ \sum_{i=1}^M \alpha_i^{m-1} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_i\varphi_2 dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M \alpha_i^{m-1} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_i\varphi_M dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_M} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice R est creuse et symétrique du fait de la symétrie de la forme bilinéaire $\tilde{a}$. Elle

peut s'écrire sous forme d'une matrice par blocs:

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\left| \begin{array}{ll} B = (B_{ij}) \begin{cases} i \in \{1, \cdots, M\} \\ j \in \{1, \cdots, N\} \end{cases} & \text{tel que } B_{ij} = \delta t \varphi_i(a_j). \\ \\ A = (A_{kl}) \begin{cases} k \in \{1, \cdots, M\} \\ l \in \{1, \cdots, M\} \end{cases} & \text{tel que } A_{kl} = \displaystyle\int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_l\varphi_k dxdy + \delta t \tilde{a}(\varphi_l,\varphi_k). \end{array} \right.$$

On a le résultat suivant:

Proposition 13.2.1

La matrice R est définie positive.

Preuve:

Considérons la forme bilinéaire $\bar{a}$ définie sur $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\bar{a}(u,v) = \begin{cases} V \times V \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto \displaystyle\int_\Omega \epsilon(x,y) uv \ dx \ dy + \delta t \tilde{a}(u,v). \end{cases}$$

Cette forme bilinéaire est symétrique et continue.

$$\begin{aligned} \bar{a}(u,v) = & \textstyle\int_\Omega \epsilon(x,y) uv \ dx \ dy + 2\delta t \int_\Omega \epsilon_1(x,y)[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}]dxdy \\ & + 2\delta t \textstyle\int_\Omega \epsilon_2(x,y)[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}]dxdy. \end{aligned}$$

On a immédiatement:

$$\bar{a}(v,v) \geq min(\inf_\Omega \epsilon, 2\delta t \inf_\Omega \epsilon_1, 2\delta t \inf_\Omega \epsilon_2)||v||_V^2.$$

D'où la V-ellipticité de $\bar{a}$.

On pose donc :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1^m \\ \alpha_2^m \\ \vdots \\ \alpha_M^m \\ \lambda_1^m \\ \lambda_2^m \\ \vdots \\ \lambda_N^m \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha^m = (\alpha_i^m)_{i\in\{1,\cdots,M\}} \in \mathbb{R}^M. \\ \lambda^m = (\lambda_i^m)_{i\in\{1,\cdots,N\}} \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

On a :

$$^tXRX =^t \alpha^m A\alpha^m + 2\ ^t\alpha^m B\lambda^m = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{M}\alpha_i^m\alpha_j^m\bar{a}(\varphi_j,\varphi_i) + 2\ \delta t\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\alpha_j^m\lambda_i^m\varphi_j(a_i).$$

Soit,

$$^tXRX = \bar{a}(\Phi^m,\Phi^m) + 2\ \delta t\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^m\Phi^m(a_i).$$

Or, on a la V-ellipticité de $\bar{a}$ et on sait que $\forall i \in \{1,\cdots,N\}$, $\Phi^m(a_i) = 0$ donc

$$^tXRX > 0.$$

On en conclut que R est définie positive et donc inversible. $\forall m \in \{1,\cdots,\frac{T}{\delta t}\}$, le système admet une solution unique.

■

13.3 Mise en œuvre

L'élément fini pour discrétiser notre domaine est l'élément fini de Bogner-Fox-Schmit (Bogner *et al.* [21] et Ciarlet [32]) de classe C^1. Les rappels relatifs à la mise en œuvre numérique des éléments finis de type Bogner-Fox-Schmit sont formulés dans la section 1.3, chapitre 1 de la partie I.
Dans la sous-section 13.3.1, nous rappelons néanmoins la relation entre les fonctions de base de l'élément de référence $\hat{K}$ (*pavé* $[0,1]\times[0,1]$) et les fonctions de base de l'élément K (*rectangle quelconque sur Ω de dimension h_x par h_y*).

Dans la sous-section 13.3.2, nous donnons l'expression explicite des éléments constituant la matrice de rigidité R.
Le calcul du second membre intervient dans la sous-section 13.3.3. L'expression du second membre contient des informations liées à l'attribut. Une formule d'intégration numérique est introduite pour la déterminer.
On rappelle enfin, que dans la mise en œuvre numérique, les paramètres de contrôle ϵ, ϵ_1, ϵ_2 sont supposés constants.

13.3.1 Rappels sur les fonctions de base de K

Soient N_x et N_y les nombres respectifs de points de discrétisation dans chaque direction et h_x, h_y les pas spatiaux dans la direction x et dans la direction y.
Le domaine Ω est discrétisé en subdivisant de manière uniforme Ω en rectangle $K_{ij} = K$, $i \in \{0, \cdots, N_x - 2\}$, $j \in \{0 \cdots, N_y - 2\}$ tel que $\Omega = \bigcup_{i,j=0}^{N_x-2,N_y-2} K_{ij} = \bigcup_{i,j=0}^{N_x-2,N_y-2} [ih_x,(i+1)h_x] \times [jh_y,(j+1)h_y]$. Les noeuds du maillage sont notés $(x_i,y_j) = (ih_x,jh_y)$ avec $i \in \{0, \cdots, N_x - 1\}$, $j \in \{0, \cdots, N_y - 1\}$.

On définit la transformation affine W_{ij} suivante:

$$W_{ij} : \begin{cases} \hat{K} \to K \\ (t,v) \mapsto (x = x_i + th_x, y = y_j + vh_y). \end{cases}$$

Les fonctions de base dans l'élément K sont déterminées classiquement à l'aide de la relation:

$$\kappa_l^n = C_s C_r [\hat{\kappa}_l^n \circ W_{ij}^{-1}(x,y)].$$

La forme bilinéaire $\tilde{a}$ fait intervenir les dérivées premières et secondes en x et en y.
On a trivialement:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \kappa_l^n}{\partial x} = \dfrac{C_s C_r}{h_x} \dfrac{\partial \hat{\kappa}_l^n}{\partial t}, \ \dfrac{\partial \kappa_l^n}{\partial y} = \dfrac{C_s C_r}{h_y} \dfrac{\partial \hat{\kappa}_l^n}{\partial v}. \\ \dfrac{\partial^2 \kappa_l^n}{\partial x^2} = \dfrac{C_s C_r}{h_x^2} \dfrac{\partial^2 \hat{\kappa}_l^n}{\partial t^2}, \ \dfrac{\partial^2 \kappa_l^n}{\partial y^2} = \dfrac{C_s C_r}{h_y^2} \dfrac{\partial^2 \hat{\kappa}_l^n}{\partial v^2}. \\ \dfrac{\partial^2 \kappa_l^n}{\partial x \partial y} = \dfrac{C_s C_r}{h_x h_y} \dfrac{\partial^2 \hat{\kappa}_l^n}{\partial t \partial v}. \end{cases}$$

13.3.2 Calcul des éléments constituant la matrice de rigidité

On rappelle que la matrice de rigidité R s'exprime sous la forme:

$$R = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$B = (B_{ij})\begin{cases} i \in \{1,\cdots,M\} \\ j \in \{1,\cdots,N\} \end{cases} \quad \text{tel que } B_{ij} = \delta t \varphi_i(a_j).$$

$$A = (A_{kl})\begin{cases} k \in \{1,\cdots,M\} \\ l \in \{1,\cdots,M\} \end{cases} \quad \text{tel que } A_{kl} = \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_l\varphi_k dxdy + \delta t \tilde{a}(\varphi_l,\varphi_k).$$

Le maillage réalisé sur l'ouvert Ω fait apparaître plusieurs configurations de points. Au niveau de l'implémentation, on numérotera les points du maillage de bas en haut et de gauche à droite. Dans ce qui suit, nous explicitons le calcul des éléments constituant la matrice de rigidité R. Posons $\kappa_l^n = \kappa_{\text{numéro du point},l}$. L'indice n correspond à la position du point considéré sur l'élément K sur lequel on travaille.
En effectuant le changement de variables associé à la transformation affine $W_{0,0}$, on a :

$$\int_K \epsilon\kappa_{1,l}\kappa_{2,k}dxdy = \int_{\hat{K}} \epsilon C_s C_r \hat{\kappa}_{1,l}(t,v) C_n C_m \hat{\kappa}_{2,k}(t,v) h_x h_y dtdv.$$

Soit,

$$\int_K \epsilon\kappa_{1,l}\kappa_{2,k}dxdy = \int_0^1\int_0^1 \epsilon C_s C_r \hat{\psi}_s(t)\hat{\psi}_r(v) C_n C_m \hat{\psi}_n(t)\hat{\psi}_m(v) h_x h_y dtdv.$$

On constate que cela revient à déterminer les intégrales du type $\int_0^1 \hat{\psi}_s(t)\hat{\psi}_n(t)dt$ avec $s,n \in \{1,\cdots,4\}$.

Le calcul de la forme bilinéaire $\tilde{a}$ est réalisé de manière analogue.

$$\tilde{a}(\kappa_{1,l},\kappa_{2,k}) = 2\epsilon_1\int_K\left[\frac{\partial\kappa_{1,l}}{\partial x}\frac{\partial\kappa_{2,k}}{\partial x} + \frac{\partial\kappa_{1,l}}{\partial y}\frac{\partial\kappa_{2,k}}{\partial y}\right]dxdy + 2\epsilon_2\int_K\left[\frac{\partial^2\kappa_{1,l}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\kappa_{2,k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\kappa_{1,l}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\kappa_{2,k}}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2\kappa_{1,l}}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\kappa_{2,k}}{\partial x\partial y}\right]dxdy.$$

En effectuant le même changement de variables que précédemment, on en déduit que:

$$\tilde{a}(\kappa_{1,l},\kappa_{2,k}) = 2\epsilon_1\int_{\hat{K}}\left[\frac{C_sC_r}{h_x}\frac{\partial\hat{\kappa}_{1,l}}{\partial t}\frac{C_nC_m}{h_x}\frac{\partial\hat{\kappa}_{2,k}}{\partial t} + \frac{C_sC_r}{h_y}\frac{\partial\hat{\kappa}_{1,l}}{\partial v}\frac{C_nC_m}{h_y}\frac{\partial\hat{\kappa}_{2,k}}{\partial v}\right]h_xh_ydtdv$$
$$+2\epsilon_2\int_{\hat{K}}\left[\frac{C_sC_r}{h_x^2}\frac{\partial^2\hat{\kappa}_{1,l}}{\partial t^2}\frac{C_nC_m}{h_x^2}\frac{\partial^2\hat{\kappa}_{2,k}}{\partial t^2} + \frac{C_sC_r}{h_y^2}\frac{\partial^2\hat{\kappa}_{1,l}}{\partial v^2}\frac{C_nC_m}{h_y^2}\frac{\partial^2\hat{\kappa}_{2,k}}{\partial v^2} + 2\frac{C_sC_r}{h_xh_y}\frac{\partial^2\hat{\kappa}_{1,l}}{\partial t\partial v}\frac{C_nC_m}{h_xh_y}\frac{\partial^2\hat{\kappa}_{2,k}}{\partial t\partial v}\right]h_xh_ydtdv.$$

Or, $\hat{\kappa}_{1,l} = \hat{\psi}_s(t)\hat{\psi}_r(v)$ et $\hat{\kappa}_{2,k} = \hat{\psi}_n(t)\hat{\psi}_m(v)$.

Il suffit de calculer les quantités du type:

$$\int_0^1 \hat{\psi}_s^{(i)}(t)\hat{\psi}_n^{(j)}(t)dt, \text{ avec } i,j \in \{0,1,2\} \text{ et } s,n \in \{1,2,3,4\}.$$

Enfin, les composantes de la matrice B sont obtenues aisément à l'aide de la relation liant les fonctions de base associées à l'élément K et les fonctions de base associées à l'élément $\hat{K}$.

13.3.3 Calcul des éléments constituant le second membre

On rappelle que le second membre s'exprime sous la forme:

$$F \in \mathbb{R}^{M+N} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{m-1} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_i\varphi_1 dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_1} \\ \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{m-1} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_i\varphi_2 dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^{m-1} \int_\Omega \epsilon(x,y)\varphi_i\varphi_M dxdy + \delta t D_{\Phi^{m-1},\varphi_M} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de l'intégrale du type $\int_\Omega \epsilon(x,y)\kappa_{i,k}\kappa_{j,l} dxdy = \epsilon \int_\Omega \kappa_{i,k}\kappa_{j,l} dxdy$ (ϵ *étant constant*) a été réalisé dans la sous-section 13.3.2.

Il nous reste à expliciter la quantité: $D_{\Phi^{m-1},\kappa_{i,k}}$. Dans cette présentation théorique, on limite le développement de Taylor à $k = 2$.
Avec les notations utilisées dans la section 13.1.1, on a, on le rappelle:

$$D_{\Phi(t_{m-1}),v} = L_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \delta t L^{(1)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) + \frac{\delta t^2}{2} L^{(2)}_{\Phi,v}(t_{m-1}).$$

On a alors:

$$\begin{cases} L^{(1)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) = -\int_\Omega \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(x,y,\Phi(x,y,t_{m-1}))\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,y,t_{m-1}) v dxdy. \\ L^{(2)}_{\Phi,v}(t_{m-1}) = -\Big[\int_\Omega \frac{\partial^3 P}{\partial z^3}(x,y,\Phi(x,y,t_{m-1}))(\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,y,t_{m-1}))^2 v \\ \qquad\qquad + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}(x,y,\Phi(x,y,t_{m-1}))\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x,y,t_{m-1}) v dxdy\Big]. \end{cases}$$

Pour une intégrale sur un rectangle quelconque K du maillage, on a la formule de quadrature suivante:

$$\int_K F(x,y)dxdy \simeq \frac{h_x}{D_1}\frac{h_y}{D_2} \sum_{k=0}^{D_1-1}\sum_{n=0}^{D_2-1} F(x_{kn},y_{kn}), \tag{13.8}$$

associée à une subdivision de chaque rectangle K du maillage éléments finis de Ω en sous-rectangles de surface $\frac{h_x}{D_1}\frac{h_y}{D_2}$, D_1 et D_2 représentant les nombres de sous-rectangles dans chaque direction.

On a les relations suivantes, si (x_i,y_j) sont les coordonnées du coin inférieur gauche de notre rectangle K:

$$\begin{cases} x_{kn} = x_i + \dfrac{(2k+1)h_x}{2D_1}. \\ y_{kn} = y_j + \dfrac{(2n+1)h_y}{2D_2}. \end{cases}$$

Cette formulation permet d'intégrer dans le calcul, les informations liées à différents pixels de l'image.
Le potentiel P caractérise, dans notre cas, la discontinuité de l'attribut *"niveau de gris"* et il est défini par:

$$P(x,y,z) = \frac{\alpha}{1 + |\nabla \tilde{I}(x,y,z)|^2}.$$

Si $(x_{kn},y_{kn},\Phi(x_{kn},y_{kn})) \in$ Pixel(i,j,k), on fait l'approximation suivante:

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x_{kn},y_{kn},\Phi(x_{kn},y_{kn})) \simeq \frac{\partial P}{\partial z}(i,j,k).$$

$\tilde{I}$ n'est connue que de manière discrète sur la grille de pixels. Pour approcher ses dérivées, on applique des schémas de type différences finies:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial x}(x,y,z) \simeq \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial x}(i,j,k) \simeq \dfrac{(\tilde{I}(i,j+1,k) - \tilde{I}(i,j-1,k))}{2h_{xpixel}}. \\ \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial y}(x,y,z) \simeq \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial y}(i,j,k) \simeq \dfrac{(\tilde{I}(i+1,j,k) - \tilde{I}(i-1,j,k))}{2h_{ypixel}}. \\ \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial z}(x,y,z) \simeq \dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial z}(i,j,k) \simeq \dfrac{(\tilde{I}(i,j,k+1) - \tilde{I}(i,j,k-1))}{2h_{zpixel}}. \end{cases}$$

Les dérivées par rapport à t de Φ sont approchées par des schémas implicites de type différences finies:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(x,y,t_{m-1}) \simeq \dfrac{\Phi(x,y,t_{m-1}) - \Phi(x,y,t_{m-2})}{\delta t}, \ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 2. \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x,y,t_{m-1}) \simeq \dfrac{\Phi(x,y,t_{m-1}) - 2\Phi(x,y,t_{m-2}) + \Phi(x,y,t_{m-3})}{\delta t^2}. \end{cases}$$

Au niveau de l'implémentation, comme dans le cadre classique des modèles déformables, nous nous limitons à $k = 0$.

Chapitre 14

Exemples numériques et applications

14.1 Introduction

L'implémentation de la méthode a été réalisée sous Matlab sur un Athlon XP 2500+ (1,8 Ghz). Ce programme permet à chaque instant t_m de visualiser la représentation dans la base éléments finis ainsi que la surface associée. Cela permet ainsi de voir l'évolution de la courbe initiale vers la courbe finale.

L'utilisateur interagit immédiatement avec le logiciel suivant ces étapes:

- Il affecte des valeurs aux paramètres de contrôle ϵ, ϵ_1, ϵ_2 ainsi qu'aux pas spatiaux et temporel. Il détermine également pour tout rectangle K du maillage, le nombre de subdivisions à réaliser pour la formule de quadrature. Il définit enfin, le coefficient pondérant le potentiel. Ces paramètres sont choisis de manière globale.
- L'utilisateur choisit la condition initiale, en général un cône elliptique ou un paraboloïde.
- Le nombre maximal d'itérations est également enregistré.
- Enfin, l'utilisateur définit les contraintes géométriques, *i.e*, les conditions d'interpolation en sélectionnant à la souris ces points. Le rôle de ces contraintes géométriques est, comme on l'a vu, multiple : elles peuvent être imposées dans le modèle comme dans le cadre géophysique. Elles peuvent également contribuer à l'accélération de la convergence de l'algorithme en ayant un rôle semblable à celui de la force de gonflage du modèle des "Balloons" (Cohen [38]). La condition initiale peut ainsi être choisie éloignée du contour à segmenter. Enfin, ces conditions d'interpolation sont utiles lorsque des données d'image manquent.

La conception du programme a été réalisée suivant trois phases distinctes:

- En premier lieu, nous avons développé les fonctions relatives à la création de la matrice de rigidité du système. Pour la sous-matrice notée A, les différentes configurations de points ont été traitées et la détermination des coefficients des différents blocs effectuée

via le logiciel Maple.
La matrice de rigidité est donc établie et inchangée dans toute la suite de l'algorithme.

- Puis, nous avons développé la fonction relative au second membre. A chaque itération, le second membre doit être recalculé car l'une de ses composantes dépend du vecteur α obtenu à l'itération précédente. Chaque maille est subdivisée en sous-rectangles. Plus la subdivision est fine, plus le nombre de pixels intégrés au calcul est élevé et donc plus les résultats sont pertinents.
- En dernier lieu, nous avons développé le programme principal de l'algorithme qui gère le choix des paramètres de discrétisation et de régularisation, la sélection à la souris des points à interpoler, le choix de la fonction explicite initiale Φ_0, l'affichage des images, l'affichage du contour initial et des contours obtenus aux itérations suivantes. Le programme principal appelle également les fonctions définies: création de l'image 3D à partir de l'image 2D, création de la fonction g appliquée au gradient de l'image 3D, création de la matrice de rigidité et du second membre.
  Notons que les images traitées sont carrées, de l'ordre de 100×100 pixels, et sont extraites d'images plus grandes. Les translations de l'image originale 2D suivant la direction (Ox) et (Oy) ne posent donc pas de difficultés.
  Le domaine de définition Ω est défini par: $]0,1[\times]0,1[$.

14.2 Choix des paramètres

- Les pas spatiaux h_x et h_y sont choisis de manière à ce qu'un élément fini du maillage comprenne environ de 50 à 100 pixels. Plus les pas dans chaque direction sont petits (ce qui implique la résolution d'un système linéaire plus grand), plus les résultats sont pertinents. On choisit h_x et h_y de l'ordre de 10^{-1}.
- On rappelle que les coefficients ϵ_1 et ϵ_2 sont supposés constants sur Ω.
  Le fait d'introduire des points d'interpolation dans le modèle, contraint beaucoup la surface. Aussi faut-il prendre des valeurs de ϵ_1 et ϵ_2 très petites pour conférer une certaine liberté à la surface. Les exemples traités suggèrent que des valeurs de l'ordre de $10^{-2}/10^{-3}$ pour ϵ_1 et $10^{-3}/10^{-4}/10^{-5}$ pour ϵ_2 sont satisfaisantes.
- Le pas temporel δt est lié à la précision du calcul: plus δt est petit, moins on fera d'erreur entre deux itérations. Des valeurs de l'ordre de 10^{-3} conviennent.
- Le paramètre ϵ est, quant à lui, fixé à 1 pour l'ensemble des applications réalisées.
- Par souci d'optimisation de l'algorithme, le développement de Taylor appliqué est celui obtenu pour $k = 0$.
- Pour le calcul du second membre, chaque maille est subdivisée en sous-rectangles: le nombre de subdivisions est lié aux valeurs h_x et h_y et est généralement de l'ordre de 3/4.
- Théoriquement, $\tilde{I}$ est définie sur $\Omega \times \mathbb{R}$. Numériquement, nous travaillons sur une image $\tilde{I}$ correspondant à un empilement d'images 2D et définie sur $\Omega \times J$, J étant un intervalle borné de $\mathbb{R}$ contenant la valeur zéro. Les bornes finies de cet intervalle ainsi que le pas en z (qui conditionnent le nombre de plans images 2D) sont choisis en fonction du paramètre k et de la condition initiale Φ_0. Les valeurs que prend Φ_0 sur Ω doivent être contenues dans l'intervalle J (au moins dans une bande autour du niveau zéro de Φ_0). On suppose en effet, que loin du niveau zéro de Φ_0, $\Phi_(\cdot,\cdot,t)$ évolue peu et que les valeurs

restent comprises dans l'intervalle J de référence.
Enfin, l'ordre k du développement de Taylor du terme non-linéaire (qui intervient dans le calcul du second membre) indique la taille du voisinage d'un pixel courant à connaître pour le calcul du second membre.

14.3 Critère d'arrêt

L'arrêt de l'algorithme est établi de deux manières distinctes:

1. Soit, on fixe au préalable un nombre d'itérations maximal.
2. Soit, on détermine un seuil $\xi > 0$. Si l'erreur relative entre la solution à l'instant t_m et la solution à l'instant t_{m-1} définie par:

$$E_{relative} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\zeta}(\Phi^m(a_i) - \Phi^{m-1}(a_i))^2}{\sum_{i=1}^{\zeta}(\Phi^{m-1}(a_i))^2}}$$

est inférieure à ξ, l'algorithme est stoppé.
Le terme ζ désigne un échantillon de points du domaine Ω pris régulièrement sur cet ensemble.

Le choix 1. est privilégié car loin du niveau zéro la surface n'évolue pas rapidement. L'intégration de points situés loin du niveau zéro dans le calcul d'erreur biaiserait le résultat.

14.4 Applications numériques

14.4.1 Application sur une image issue de Matlab: cellules sanguines

La première application étudiée est réalisée sur une image issue de la toolbox "Image" de Matlab de dimensions 100×100. L'image originale représente des cellules sanguines.
Nous nous intéressons spécifiquement à la segmentation d'une cellule à laquelle s'est greffée une cellule de taille plus petite.
Le contour initial est choisi convexe. Ce premier exemple permet d'illustrer la propriété de changement de topologie car ici, la courbe doit segmenter une portion concave.
Par ailleurs, une progression trop rapide du contour (en particulier pour un choix de pas temporel trop élevé) conduirait à ce que le contour dépasse le bord souhaité pour aller épouser les points du contour entre la région noire de la cellule et la région blanche, la valeur du potentiel en ces points étant, en effet, plus petite.
L'introduction des points d'interpolation est justifiée pour deux raisons:

- d'une part, la condition initiale est éloignée du contour à segmenter (*cf. figure 14.1*). L'utilisation des modèles déformables classiques serait vaine ici. Les points d 'interpolation permettent, dès la première itération, d'attirer la représentation vers le contour d'intérêt.
- d'autre part, la condition initiale intersecte la petite cellule. Les points d'interpolation sur cette portion de l'image assure la bonne segmentation de cette petite cellule.

Nous présentons dans ce qui suit, la condition initiale et les points à interpoler. Les paramètres appliqués ici sont les suivants: $h_x = h_y = 0.1$, soit 100 pixels par maille, $\delta t = 0.001$, $\epsilon = 1$, $\epsilon_1 = 0.01$, $\epsilon_2 = 0.001$, $pas_z = 0.01$. Le nombre de subdivisions de chaque maille pour la formule d'intégration numérique est égal à 4 dans chaque direction. Le contour n'évolue plus au bout de 23 itérations et le temps de calculs est de l'ordre de deux minutes.

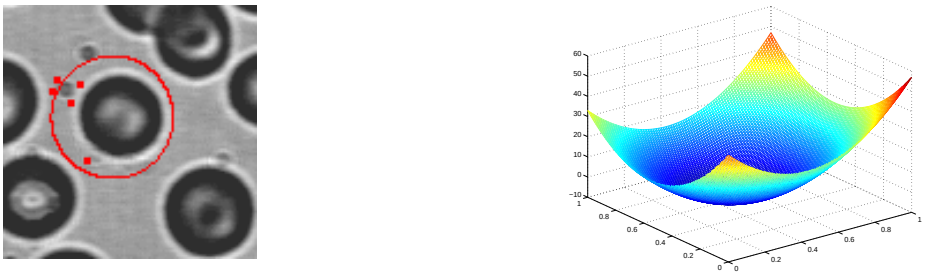


FIG. 14.1 – *A gauche, le contour initial ainsi que les points d'interpolation, à droite, la surface* Φ *initiale associée.*

Dès la première itération, le contour interpole les points donnés. Nous proposons ici une figure représentant le contour à la cinquième itération ainsi que la surface associée.

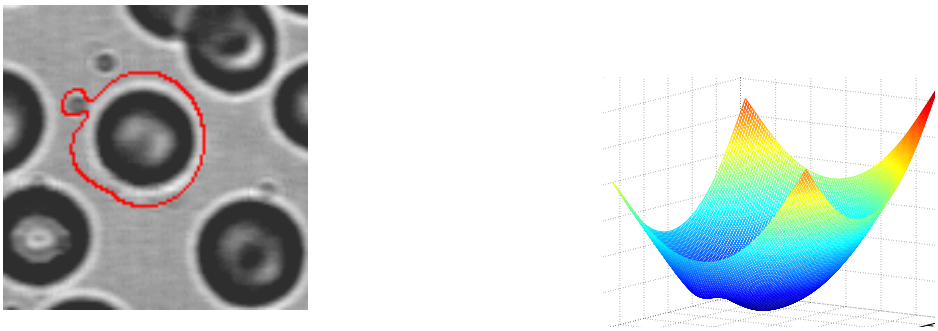
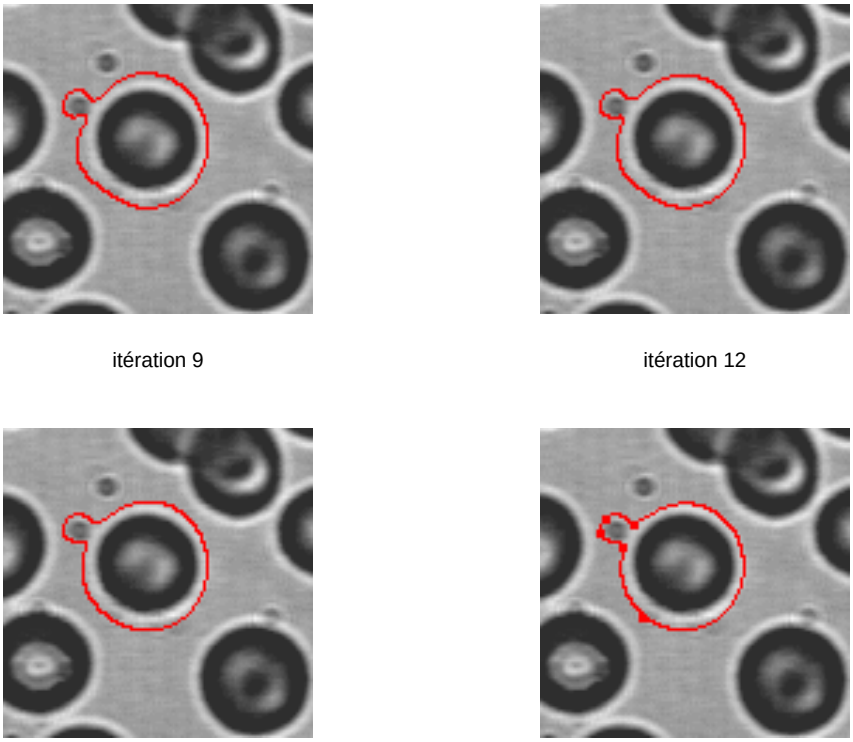


FIG. 14.2 – *A gauche, le contour obtenu à la cinquième itération. A droite, la surface* Φ *associée.*

Quelques étapes de l'évolution du contour sont données ci-après, ainsi que le contour final.



Une autre application de cette méthode sur l'image des cellules sanguines est disponible dans [69]. Dans cet exemple, il y a plus de conditions d'interpolation (7) ce qui a pour effet d'accroître la vitesse de convergence.

14.4.2 Application sur une image issue de Matlab: cellule de la moelle osseuse

Dans l'application suivante, nous nous intéressons à la segmentation d'une cellule de la moelle osseuse. Cette image de dimensions 120×120, est issue de la toolbox "Image" de Matlab. Elle est relativement complexe car la texture de la région autour de la zone d'intérêt (la cellule blanche) est peu homogène (cf. figure 14.3): on est donc en présence d'un nombre élevé de minima locaux du potentiel P ce qui peut interrompre prématurément la progression du contour. Partant d'un contour extérieur à la cellule, il est donc nécessaire d'introduire des points d'interpolation dans le modèle afin d'attirer le contour vers les singularités que l'on souhaite extraire.
Nous présentons dans ce qui suit, la condition initiale et les points à interpoler. Les paramètres appliqués ici sont les suivants: $h_x = h_y = 0.1$, soit 100 pixels par maille, $\delta t = 0.001$, $\epsilon = 1$, $\epsilon_1 = 0.001$, $\epsilon_2 = 0.001$. On constate que par rapport à l'exemple précédent, la valeur du paramètre ϵ_1 est plus petite. En effet, les points d'interpolation (en particulier les quatre points situés sur la région périphérique supérieure) contraignent beaucoup le modèle et une valeur de ϵ_1 plus grande fait que les forces de régularisation supplantent la force d'image. Aussi, le contour ne s'arrête pas correctement sur le bord recherché, en particulier sur la partie

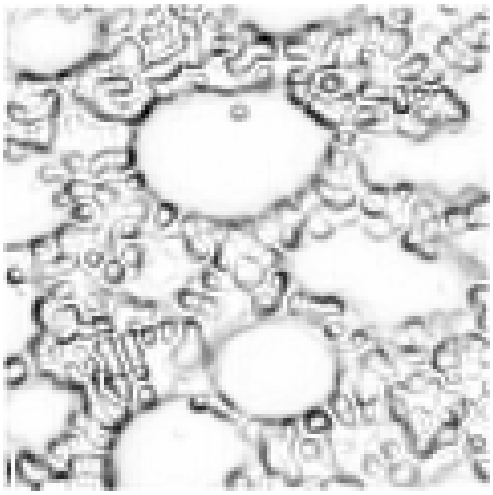


FIG. 14.3 – *Représentation en niveaux de gris du potentiel P sur le plan image $z = 0$ (i.e image originale I). Les zones en gris/noir sont des régions pour lesquelles les valeurs du potentiel sont proches de 0.*

gauche de l'image. Ce résultat est cohérent avec la théorie puisque, augmenter la valeur de ϵ_1 tend à réduire la longueur du contour. Le nombre de subdivisions de chaque maille pour la formule d'intégration numérique est égal à 5 dans chaque direction. Le contour n'évolue plus au bout de 18 itérations et le temps de calculs est de l'ordre de 170 secondes.

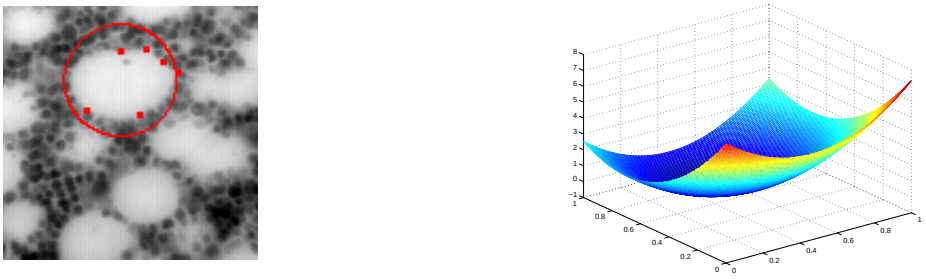
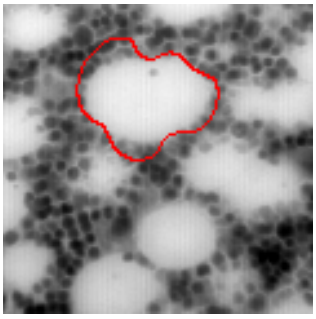
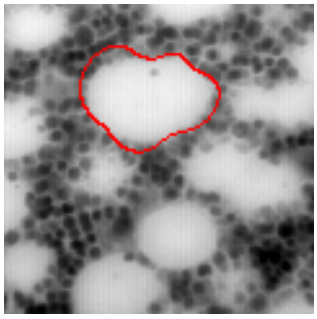


FIG. 14.4 – *A gauche, le contour initial ainsi que les points d'interpolation, à droite, la surface Φ initiale associée.*

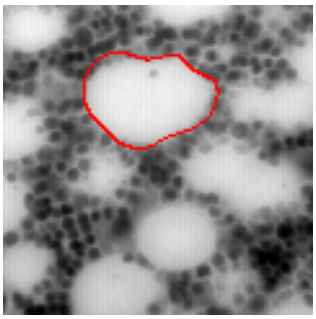
Quelques étapes de l'évolution du contour sont données ci-après, ainsi que le contour final.



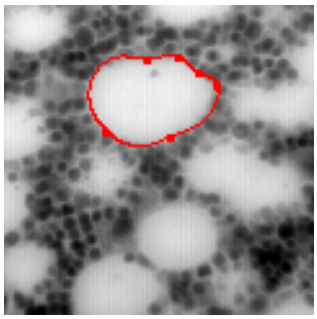
itération 2



itération 7



itération 12



itération 18

14.4.3 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales. Evaluation non-invasive de l'hypertension artérielle pulmonaire

L'imagerie par résonance magnétique (IRM), méthode non-invasive d'acquisition d'images, est devenue une technique majeure de l'imagerie médicale moderne *(cf. http://www.med.univ-rennes1.fr/cerf/edicerf/BASES/BA004_idx.html pour plus d'informations)*. Outre sa vocation "morphologique", elle revêt un caractère fonctionnel *(volumétrie, quantification de paramètres)* et est vouée à des développements importants.
Récemment, l'IRM a permis d'estimer les valeurs de la pression au niveau de l'artère pulmonaire principale chez des patients suspectés d'hypertension artérielle pulmonaire, (cf. Laffon *et al.* [65], [66] et [67]).
Cette mesure nécessite de connaître la vitesse du flux sanguin et l'aire de la section artérielle au cours du cycle cardiaque, ce qui peut être réalisé par un codage en vélocité du signal RM (cf. Laffon *et al.* [67]).
Cependant, chez les patients agés souffrant de dyspnée, l'acquisition des données ne peut être réalisée de façon optimale et en particulier la section de l'artère pulmonaire principale ne peut être clairement identifiée dans son intégralité. Dans ce cas, pour pallier cette difficulté, le praticien suppose que la section de l'artère pulmonaire principale a une forme ronde *(hypothèse qui d'un point de vue anatomique est tout à fait recevable)* et trace manuellement le contour

de la coupe transversale de l'artère avec cette hypothèse *a priori* sur les zones altérées de la coupe.
Bien que raisonnable, cette hypothèse conduit à une incertitude quant aux mesures de la pression chez un sujet donné.
L'idée est donc d'introduire des contraintes géométriques dans le processus de segmentation.

Nous avons travaillé en collaboration avec le CHU du Haut-Lévèque de Bordeaux sur une séquence d'images qui correspond à des coupes perpendiculaires à l'axe de l'artère pulmonaire principale chez un patient de 78 ans souffrant de dyspnée et suspecté d'hypertension artérielle pulmonaire. La figure (14.5), *(image en magnitude extraite de la séquence)* illustre le problème qui vient d'être évoqué précédemment. La qualité de l'image est moyenne: la portion de la coupe de l'artère pulmonaire principale indiquée par la flèche est floue et ne permet pas l'identification claire de la section artérielle. L'affaiblissement du contraste entre la section artérielle et la région périphérique est lié à trois facteurs principaux (cf. Laffon *et al.* [67], [66] et [65]):

- Effet du volume partiel, particulièrement présent au niveau de la région précisée par la flèche.
- Turbulences du flot (corrélées avec la gravité de l'hypertension artérielle).
- Contraste émoussé à la fin de la phase diastolique du cycle cardiaque (dû à l'absence du phénomène d'afflux de protons).

FIG. 14.5 – *Image 1 de la séquence étudiée - la région flèchée est la région d'intérêt pour notre étude: coupe de l'artère pulmonaire principale.*

Nous présentons dans ce qui suit la séquence d'images étudiée dans son intégralité. Cette séquence est constituée de 5 images.

Seule la segmentation de la première image nécessite d'introduire des points d'interpolation.

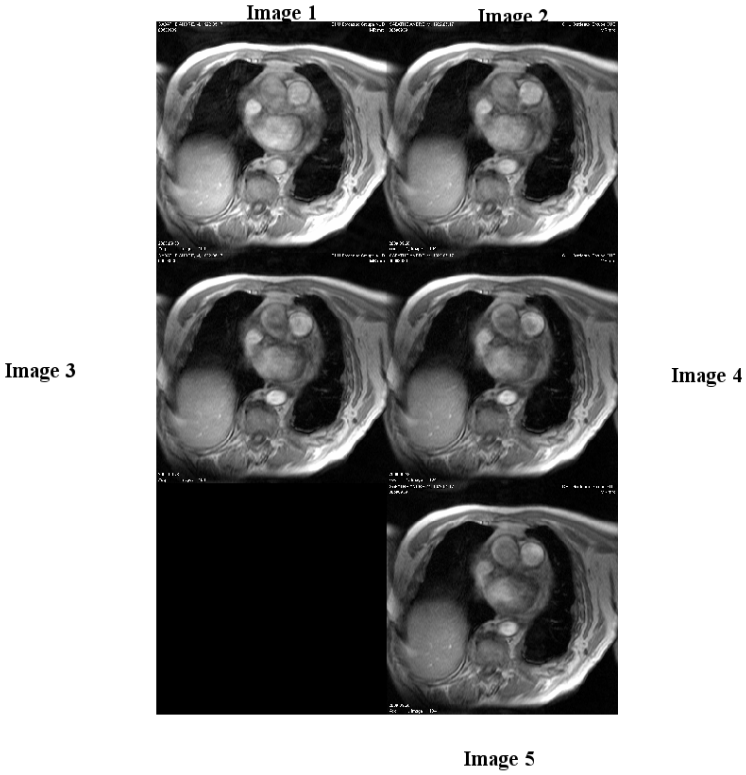


FIG. 14.6 – *Images provenant du CHU du Haut-Lévèque, Hôpital de Bordeaux.*

Nous introduisons 5 points d'interpolation: 3 des points sont situés sur la zone où le contraste est affaibli, les 2 autres nous permettent d'initialiser le contour loin de la solution. Les paramètres appliqués sont les suivants: $\delta t = 0.05$, $\epsilon = 1$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10^{-5}$, $h_x = h_y = 0.1$ et le nombre de subdivisions dans chaque direction dans la formule d'intégration numérique est de 5. Les paramètres de régularisation ϵ_1 et ϵ_2 sont très petits afin de conférer une certaine liberté au modèle. Le contour n'évolue plus après 30 itérations et le temps de calculs est de 150 secondes.
Nous présentons ci-après les résultats obtenus.

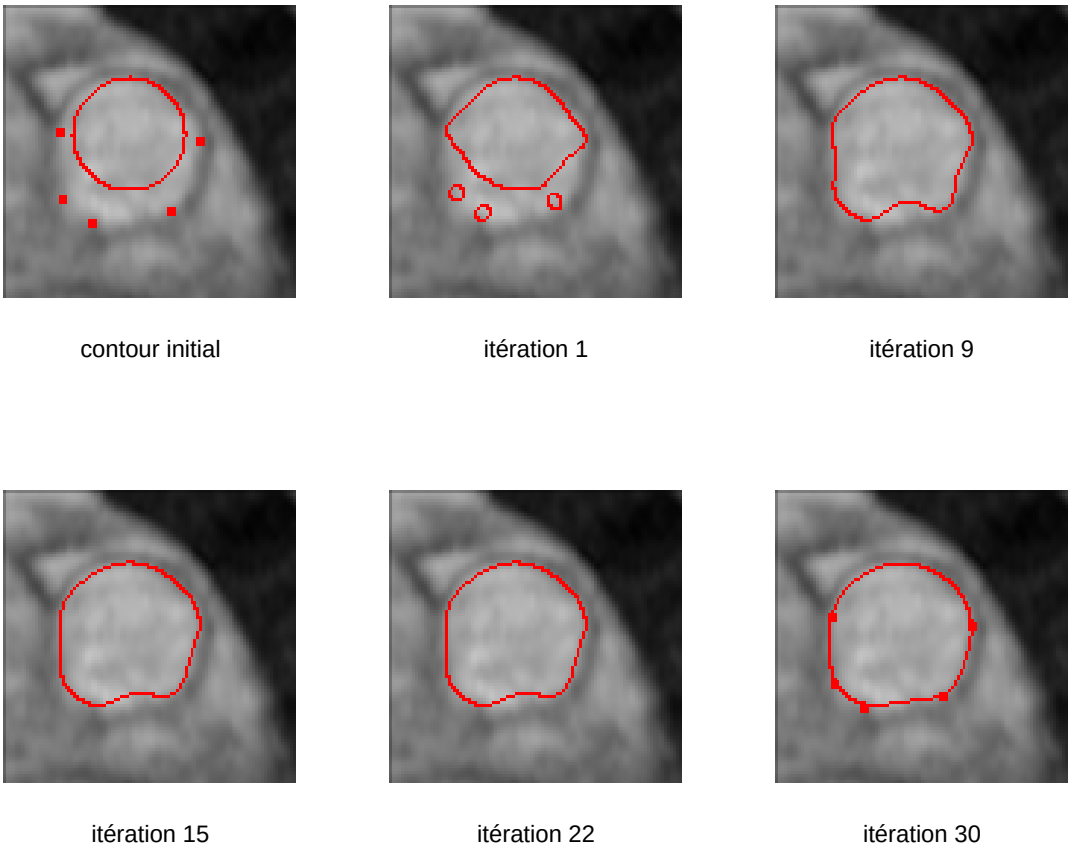


FIG. 14.7 – *Etapes de l'évolution du contour (zoom de la partie traitée).*

La segmentation de la séquence totale est disponible à l'adresse suivante: http://www.univ-pau.fr/∼cgout/chubdx/index1.htm.

14.4.4 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales

On conclut cette section par une application à une nouvelle séquence d'images de coupes du tronc artériel pulmonaire. La figure 14.8 correspond à une image prise dans cette séquence décrivant le cycle cardiaque, avec une résolution temporelle de 30 millisecondes. Le patient était en respiration libre pendant les 6 minutes d'enregistrement. La séquence étudiée comprend 4 images (cf figure 14.9). Nous nous attachons à la première image de la séquence. Sur la première image (taille 60×60), nous avons défini trois points à interpoler situés sur la partie périphérique inférieure. Dans cette partie de l'image en effet, la texture est plus homogène et le contraste est par conséquent moins marqué entre l'artère pulmonaire principale et la région qui l'entoure.

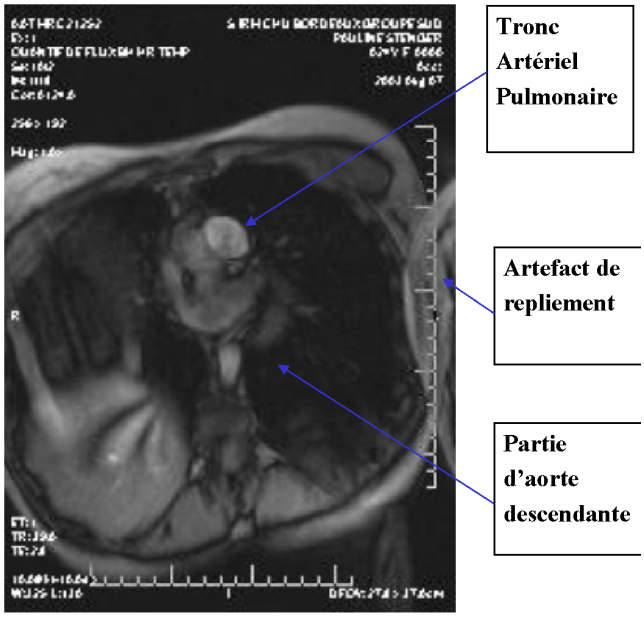


FIG. 14.8 –

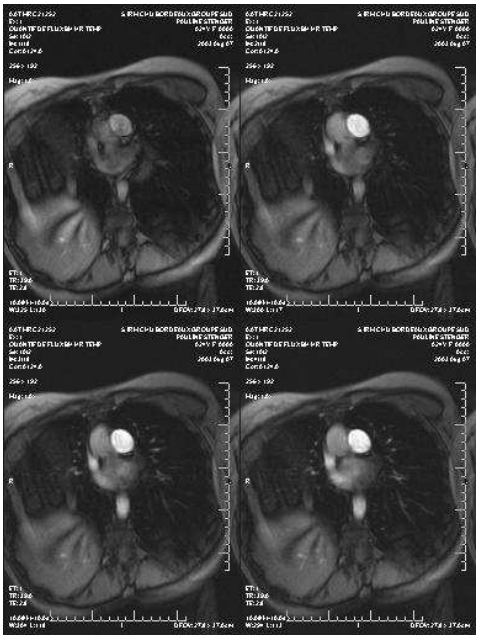
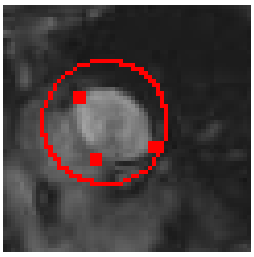


FIG. 14.9 – *Séquence d'images de coupes du tronc artériel pulmonaire: Images provenant du CHU du Haut-Lévèque, Hôpital de Bordeaux.*

Nous proposons dans ce qui suit les figures représentant la condition initiale et les points d'interpolation ainsi que quelques étapes du processus de segmentation. Les paramètres appliqués ici sont les suivants: $h_x = h_y = \frac{1}{6}$, soit 36 pixels par maille, $\delta t = 0.005$, $\epsilon = 1$, $\epsilon_1 = 0.01$, $\epsilon_2 = 0.001$. Le nombre de subdivisions de chaque maille pour la formule d'intégration numérique est égal à 3 dans chaque direction. Le contour n'évolue plus au bout de 43 itérations et le temps de calculs est de l'ordre de 100 secondes.



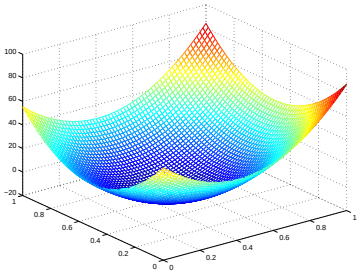
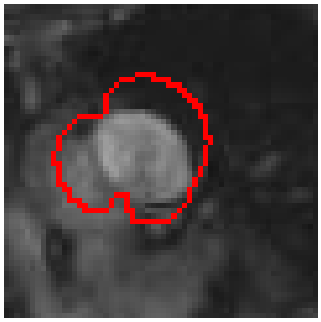
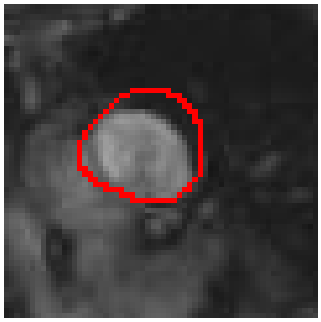


FIG. 14.10 – *A gauche, le contour initial ainsi que les points d'interpolation, à droite, la surface* Φ *initiale associée.*

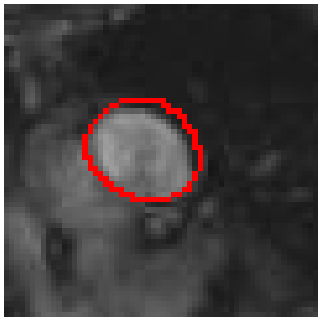
Quelques étapes de l'évolution du contour sont données ainsi que le contour final.



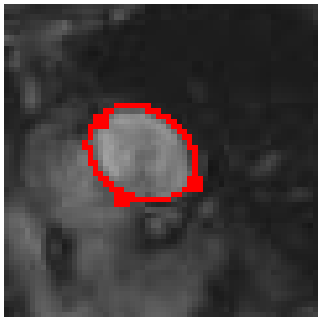
itération 1



itération 7



itération 18



itération 43

Troisième partie

Contours Actifs Géodésiques sous contraintes géométriques

Chapitre 15

Introduction

Dans les parties précédentes, nous avons introduit le formalisme mathématique des modèles déformables puis en avons proposé une approche fondée sur la méthode "level set". Cette reformulation du problème classique des modèles déformables permet en particulier de s'affranchir des difficultés liées à la paramétrisation.
Caselles *et al.* [23] (ainsi que Malladi *et al.* [74], [75], [72] et [73]) ont proposé de nouveaux modèles géométriques des contours actifs. Ces modèles sont fondés sur les concepts d'évolution de courbe. Ainsi, il ne s'agit plus d'un problème de minimisation d'énergie mais d'un problème d'évolution de courbe: le front se propage avec une vitesse qui dépend de deux composantes, l'une relative à la régularité de la courbe, l'autre liée à l'information sur l'image qui attire le contour vers le bord de l'objet à segmenter. Une équation aux dérivées partielles satisfaite par la courbe est introduite dans la modélisation.
Dans [24], Caselles, Kimmel et Sapiro montrent qu'un cas particulier des contours actifs classiques est équivalent à rechercher une courbe géodésique dans un espace de Riemann dont la métrique est définie à l'aide de l'image.

Dans la méthode proposée ci-après, nous introduisons des contraintes géométriques dans un modèle de type contours actifs géodésiques ([24]). Ces contraintes géométriques apparaissent *via* un ensemble discret de points S à approcher (**cf. sous-section 16.1.1, chapitre 16**). Une approche "level set"(**cf. sous-section 16.1.2, chapitre 16**) complète notre étude.
Dans la modélisation, un problème de minimisation de fonctionnelle est d'abord introduit, puis le théorème d'Euler-Lagrange permet de formuler l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction solution (**cf. section 16.2, chapitre 16**) .
L'existence et l'unicité de la solution de viscosité de cette équation aux dérivées partielles sont démontrées dans le **chapitre 17**.
La discrétisation du problème d'évolution est réalisée à l'aide d'un schéma AOS (*Additive Operator Splitting, cf. Weickert et al. [109] et [110]*), dans le **chapitre 18**. Des applications numériques sont données dans le **chapitre 19**.

Chapitre 16

Modélisation

16.1 Modèle

16.1.1 Introduction du problème de minimisation

Soit $I : \Omega \to \mathbb{R}$ une image définie sur Ω, un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ (*on aura préalablement régularisé l'image originale par filtrage gaussien*). Nous nous contenterons de développer notre méthode dans le cas particulier $N = 2$, cette méthode étant aisément généralisable au cas d'une dimension supérieure.

Comme souligné dans la partie introductive, nous proposons une méthode de type contours actifs géodésiques (voir Caselles *et al.* [24]) incluant des contraintes géométriques.
Ces contraintes géométriques apparaissent dans notre modèle *via* un ensemble discret de points à approcher.
Soit $S = \{x_i \in \Omega,\, i \in \{1, \cdots, N\}\}$ cet ensemble fini de points appartenant au contour de l'objet à segmenter.

Le but du problème est donc de déterminer une courbe $\Gamma \subset \Omega$ approchant au mieux les points de S et segmentant l'objet considéré (*ie.* localiser la courbe sur les points de gradient maximal tout en l'ajustant sur les données géométriques). Mathématiquement, cette courbe satisfait le problème de minimisation introduit dans la modélisation.

L'information liée à l'image est modélisée *via* la fonction $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$, telle que $g(0) = 1$, g positive, strictement décroissante et satisfaisant $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$ (voir Caselles *et al.* [23] et Chan et Vese [28]). On définit en général, une fonction g du type:

$$g(s) = \frac{1}{1 + s^p},\ p = 1,\ 2.$$

Cette fonction est appliquée au gradient de l'image, soit:

$$g(|\nabla I(x,y)|) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x,y)|^p}. \tag{16.1}$$

Ainsi, localiser la courbe Γ sur les points de fort gradient revient à rendre g proche de 0.
Les figures suivantes traduisent cette caractéristique. Sur la figure 16.2, les valeurs de g proches de 1 sont en blanc, les valeurs proches de 0 en gris.

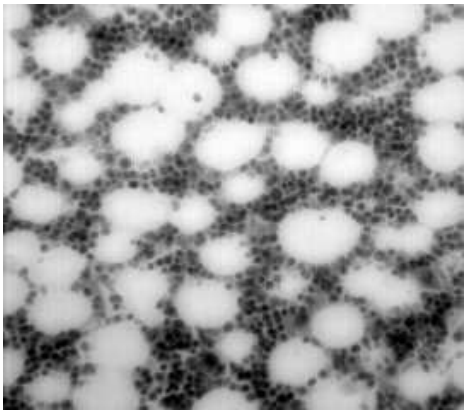


FIG. 16.1 – *Image initiale.*

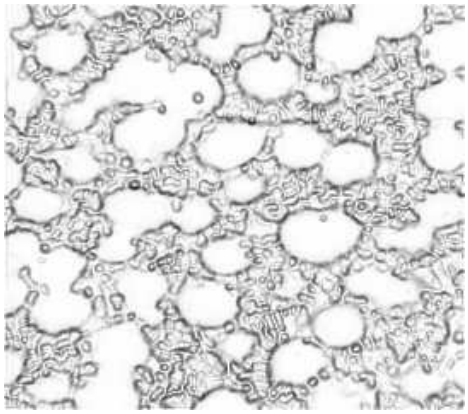


FIG. 16.2 – *Représentation de la fonction g associée, $g : s \mapsto \dfrac{1}{1+s^2}$.*

Les contraintes géométriques sont introduites dans le modèle à l'aide de la fonction distance d définie par:

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega,\ d(x) = d(x,S) = \inf\limits_{y \in S} |y - x|, \\ d(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in S. \end{cases}$$

Nous cherchons donc à localiser la courbe Γ sur les points de gradient maximal ($g \to 0$) tout en approchant au mieux les points de S ($d \to 0$).

Nous proposons de minimiser l'énergie suivante:

$$E(\Gamma) = \int_\Gamma dg(|\nabla I|)ds. \tag{16.2}$$

Dans ce but, partant d'une condition initiale Γ_0, nous appliquons une méthode de descente de gradient à l'énergie. Nous construisons une famille de courbes $\Gamma(t)$ telles que pour t croissant, l'énergie introduite dans le modèle décroîsse.

16.1.2 Approche "level set"

Comme vu précédemment, l'approche "level set" (cf. Osher et Sethian [85] ou partie I, chapitre 6) consiste à représenter le contour Γ implicitement *via* une fonction explicite Φ. Plus précisément, Γ est considéré comme le niveau zéro de la fonction explicite Φ .
Nous verrons, par la suite, qu'un problème d'évolution est introduit. A chaque instant t, on reconstruira $\Gamma(t)$ en prenant le niveau zéro de $\Phi(\cdot,t)$ définie par:

$$\Phi : \begin{cases} \Omega \times [0,\infty[\to \mathbb{R} \\ (x,y,t) \mapsto \Phi(x,y,t) \end{cases},$$

telle que

$$\Gamma(t) = \big\{(x,y)|\ \Phi(x,y,t) = 0\big\}.$$

Posons $\Xi(t)$ la région définie à l'intérieur de $\Gamma(t)$.

La fonction $\Phi(\cdot,\cdot,t)$ est telle que:

$$\begin{cases} \Phi(\cdot,\cdot,t) < 0 \ \text{ sur } \Xi(t). \\ \Phi(\cdot,\cdot,t) = 0 \ \text{ sur } \Gamma(t). \\ \Phi(\cdot,\cdot,t) > 0 \ \text{ sur } \bar{\Xi}^c(t). \end{cases}$$

Ainsi, le problème de minimisation d'énergie (16.2) introduit dans la section 16.1.1 se reformule, à l'aide de l'approche "level set", par:

$$\begin{cases} \text{Déterminer } \Phi \text{ telle que:} \\ F(\Phi) = \min\limits_{\xi} F(\xi), \end{cases} \tag{16.3}$$

avec

$$F(\xi) = \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla H(\xi(x,y))| dxdy. \tag{16.4}$$

H est la fonction de Heaviside (en dimension 1). On approche H par une fonction régularisée H_ϵ, $\epsilon \to 0$, C^1 ou C^2 et on pose $\delta_\epsilon = H'_\epsilon$ (pour plus de détails, voir Chan et Vese [28], [29], Chan, Sandberg et Vese [26], Vese et Chan [106], Zhao *et al.* [114]).

L'énergie peut ainsi se réécrire sous la forme:

$$F_\epsilon(\Phi) = \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)|\nabla\Phi(x,y)| dxdy, \tag{16.5}$$

où l'on rappelle que $\int_\Omega \delta_\epsilon(\Phi)|\nabla\Phi(x,y)|dxdy$ est une approximation de la longueur de la courbe de niveau zéro notée Γ, de Φ.

Pour la régularisation de H, nous renvoyons le lecteur à Zhao *et al.* [114] qui proposent pour H_ϵ la fonction suivante:

$$H_\epsilon(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } z > \epsilon \\ 0 \text{ si } z < -\epsilon \\ \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{z}{\epsilon} + \dfrac{1}{\pi} sin(\dfrac{\pi z}{\epsilon})\right] \text{ si } |z| \leq \epsilon. \end{cases}$$

16.2 Minimisation de la fonctionnelle

16.2.1 Minimisation à l'aide du théorème d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, nous minimisons l'énergie F_ϵ et déterminons l'équation aux dérivées partielles associée, satisfaite par Φ.
Nous appliquons le théorème classique d'Euler-Lagrange (Dubrovin *et al.* [47] théorème 37.1.2).
Dans ce qui suit, on pose $(x,y) \in \Omega$.

Dans notre modèle, le lagrangien L est défini comme suit:

$$L(x,y,\Phi,\frac{\partial \Phi}{\partial x},\frac{\partial \Phi}{\partial y}) = \delta_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla \Phi(x,y)|. \tag{16.6}$$

Posons: $\begin{cases} p = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{cases}$ Il vient alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \Phi} = \delta'_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla \Phi(x,y)|. \\ \dfrac{\partial L}{\partial p} = \delta_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}}{|\nabla \Phi|}. \\ \dfrac{\partial L}{\partial q} = \delta_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{|\nabla \Phi|}. \end{cases}$$

Puis,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \Phi} = \delta'_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla \Phi(x,y)|. \\ \dfrac{\partial}{\partial x}[\dfrac{\partial L}{\partial p}] = \delta'_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \dfrac{(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x})^2}{|\nabla \Phi|} \\ \qquad + \delta_\epsilon(\Phi) \dfrac{\partial}{\partial x}\left[d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}}{|\nabla \Phi|} \right]. \\ \dfrac{\partial}{\partial y}[\dfrac{\partial L}{\partial q}] = \delta'_\epsilon(\Phi) d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \dfrac{(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y})^2}{|\nabla \Phi|} \\ \qquad + \delta_\epsilon(\Phi) \dfrac{\partial}{\partial y}\left[d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \dfrac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}}{|\nabla \Phi|} \right]. \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial L}{\partial p}] - \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial L}{\partial q}] = 0 \Longleftrightarrow \delta_\epsilon(\Phi) div\left(d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right) = 0. \tag{16.7}$$

L'équation d'évolution associée (t paramétrant la direction de descente dans la méthode de descente de gradient) est ainsi définie par (cf. Zhao et al. [114]):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \delta_\epsilon(\Phi) div\left(d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \right). \tag{16.8}$$

Dans ce qui suit, nous proposons une démonstration alternative pour établir l'équation d'évolution satisfaite par Φ.

16.2.2 Démonstration par utilisation de la dérivée de Gâteaux

Nous cherchons dans ce qui suit à déterminer la dérivée de Gâteaux de l'énergie F_ϵ. La dérivée de Gâteaux de F_ϵ en Φ dans la direction Ψ est donnée par:

$$F'_\epsilon(\Phi,\Psi) = \lim_{h \to 0} \frac{F_\epsilon(\Phi + h\Psi) - F_\epsilon(\Phi)}{h}.$$

Soit,

$$\left| \begin{array}{l} F_\epsilon(\Phi + h\Psi) - F_\epsilon(\Phi) = \\ \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \delta_\epsilon(\Phi + h\Psi) |\nabla \Phi + h \nabla \Psi| dxdy \\ - \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \delta_\epsilon(\Phi) |\nabla \Phi| dxdy. \end{array} \right.$$

Il vient

$$\left| \begin{array}{l} F_\epsilon(\Phi + h\Psi) - F_\epsilon(\Phi) = \\ \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \delta_\epsilon(\Phi + h\Psi) |\nabla \Phi| \sqrt{1 + h^2 \frac{|\nabla \Psi|^2}{|\nabla \Phi|^2} + 2h \frac{< \nabla \Phi, \nabla \Psi >}{|\nabla \Phi|^2}} dxdy \\ - \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \delta_\epsilon(\Phi) |\nabla \Phi| dxdy. \end{array} \right.$$

On déduit aisément de ce qui précède, utilisant un développement de Taylor en h que:

$$\left| \begin{array}{l} F'_\epsilon(\Phi,\Psi) = \\ \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \delta'_\epsilon(\Phi) \Psi |\nabla \Phi| dxdy \\ + \int_\Omega d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \delta_\epsilon(\Phi) \frac{< \nabla \Phi, \nabla \Psi >}{|\nabla \Phi|} dxdy. \end{array} \right.$$

Clairement,

$$\left|\begin{array}{l} F'_\epsilon(\Phi,\Psi) = \\ \displaystyle\int_\Omega d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla\Phi|\delta'_\epsilon(\Phi)\Psi dxdy \\ \displaystyle -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left[d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{|\nabla\Phi|}\right]\Psi dxdy + \int_{\partial\Omega} d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{|\nabla\Phi|}\Psi\nu_x d\sigma \\ \displaystyle -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left[d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{|\nabla\Phi|}\right]\Psi dxdy + \int_{\partial\Omega} d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{|\nabla\Phi|}\Psi\nu_y d\sigma. \end{array}\right.$$

Ce qui se réécrit par:

$$\left|\begin{array}{l} F'_\epsilon(\Phi,\Psi) = \\ \displaystyle -\int_\Omega \delta_\epsilon(\Phi) div\left(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right)\Psi dxdy \\ \displaystyle +\int_{\partial\Omega} d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\delta_\epsilon(\Phi)}{|\nabla\Phi|}\Psi\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\nu_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\nu_y\right)d\sigma. \\ \text{Soit,} \\ \displaystyle F'_\epsilon(\Phi,\Psi) = -\int_\Omega \delta_\epsilon(\Phi) div\left(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right)\Psi dxdy \\ \displaystyle \qquad\qquad +\int_{\partial\Omega} d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\delta_\epsilon(\Phi)}{|\nabla\Phi|}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\Psi d\sigma. \end{array}\right.$$

La condition d'Euler-Lagrange donne $F'_\epsilon(\Phi) = 0$, soit:

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_\epsilon(\Phi) div\left(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\right) = 0 \\ \text{avec la condition au bord } \displaystyle\frac{\delta_\epsilon(\Phi)}{|\nabla\Phi|}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}_{/\partial\Omega} = 0. \end{array}\right. \tag{16.9}$$

$\dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ désigne la dérivée normale de Φ au bord.

Remarque 16.2.1

On retrouve logiquement le problème d'évolution obtenu en (16.8).

Les propriétés géométriques du front sont explicitées comme suit. Les expressions $\kappa = div(\dfrac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|})$ et $\vec{n} = \dfrac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$ correspondent respectivement à la représentation "level set" de la courbure

moyenne et de la normale unitaire extérieure. L'équation aux dérivées partielles (16.9) satisfaite par Φ peut donc se reformuler par:

$$\delta_\epsilon(\Phi)\Big(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\kappa + < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)),\vec{n} > \Big) = 0. \tag{16.10}$$

On constate qu'il y a un équilibre entre la force associée au potentiel et la tension de la surface. On peut faire un parallèle avec la méthode classique des modèles déformables, méthode qui traduit un équilibre entre une énergie de régularisation et une énergie d'image associée à un potentiel.

16.3 Quelques résultats préliminaires

Dans cette section, nous prouvons que l'énergie F_ϵ est une fonction décroissante du temps et nous formulons quelques remarques sur l'équation aux dérivées partielles obtenue en (16.9).

16.3.1 Décroissance de F_ϵ

Proposition 16.3.1

L'énergie F_ϵ est une fonction décroissante du temps.

Preuve:

On utilise les mêmes arguments que Zhao et al. [114].

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{dF_\epsilon}{dt}(\Phi) = \displaystyle\int_\Omega d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta'_\epsilon(\Phi)\Phi_t|\nabla\Phi|dxdy \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_\Omega d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)\frac{< \nabla\Phi,(\nabla\Phi)_t >}{|\nabla\Phi|}dxdy, \\
\textit{soit,} \\
\dfrac{dF_\epsilon}{dt}(\Phi) = -\displaystyle\int_\Omega \delta_\epsilon(\Phi)div\Big(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\Big)\Phi_t dxdy \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\delta_\epsilon(\Phi)\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}}{|\nabla\Phi|}\Phi_t d\sigma,
\end{array}\right.$$

avec $\Phi_t = \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$.

L'équation d'évolution (16.8) et les conditions aux bords donnent:

$$\frac{dF_\epsilon}{dt}(\Phi) = -\int_\Omega \Big(\delta_\epsilon(\Phi)div\Big(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}\Big)\Big)^2 dxdy \leq 0. \qquad \blacksquare$$

Dans l'équation d'évolution (16.8), on constate que lorsque le minimum local est atteint, le terme d'évolution $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ tend vers 0, ce qui signifie que l'état stationnaire est atteint. La surface et par conséquent le contour n'évoluent plus.

Un rescaling peut être réalisé afin que le mouvement s'applique à toutes les "level sets" et cela, en remplaçant $\delta_\epsilon(\Phi)$ par $|\nabla\Phi|$. Cela n'affecte en rien la solution obtenue à l'état stationnaire. Comme le soulignent Zhao *et al.* [115] ou Alvarez *et al.* [5], le flot est ainsi indépendant de l'échelle de Φ, autrement dit, si l'on remplace Φ, par $h(\Phi)$, avec $h(0) = 0$ et $h'(\Phi) > 0$, l'équation est invariante.

Le problème parabolique avec les conditions aux bords $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, ν étant la normale extérieure unitaire, s'écrit:

$$\begin{cases} \Phi(x,y,0) = \Phi_0(x,y). \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = |\nabla\Phi| d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) div(\dfrac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}) + < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)), \nabla\Phi > . \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{16.11}$$

16.3.2 Equation d'évolution des "level sets"

L'équation d'évolution de Φ est donnée par:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = |\nabla\Phi| div\left(d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \right).$$

L'équation d'évolution d'une "level set" quelconque notée Γ est donnée par:

$$\Gamma_t = d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \kappa \vec{n} - < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)), \vec{n} > \vec{n}, \tag{16.12}$$

avec $\kappa = div(\dfrac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|})$ et $\vec{n} = -\dfrac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$ (*normale unitaire intérieure*).

En effet, pour une "level set" quelconque, on a:

$$\Phi(\Gamma(t),t) = constante. \tag{16.13}$$

En dérivant (16.13) par rapport à la variable temporelle t, on obtient:

$$\frac{d}{dt}\big[\Phi(\Gamma(t),t)\big] = 0 \Leftrightarrow < \nabla\Phi, \Gamma_t > + \Phi_t = 0.$$

Ainsi, avec la relation (16.12) et la définition de $\vec{n}$, on en déduit que:

$$\Phi_t = d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)\kappa|\nabla\Phi| + < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)),\nabla\Phi > .$$

Une comparaison immédiate peut être établie avec le modèle classique des contours actifs géodésiques de Caselles *et al.* [24]. Dans leur modèle, l'équation d'une "level set" quelconque est donnée par:

$$\Gamma_t = g(|\nabla I(x,y)|)\kappa\vec{n} - < \nabla g(|\nabla I(x,y)|),\vec{n} > \vec{n}. \tag{16.14}$$

On retrouve, dans les deux modèles, l'équation de la chaleur $\mathscr{C}_t = \kappa\vec{n}$ qui revêt des propriétés géométriques lissantes. Une analogie avec la force interne régularisante du modèle des contours actifs peut ainsi être réalisée.
La composante du type $- < \nabla g(|\nabla I|),\vec{n} > \vec{n}$ qui apparaît dans (16.14) (modèle de Caselles *et al.* [24]) garantit une bonne extraction des contours en particulier lorsque les variations du gradient le long d'un bord sont grandes. En effet, le champ de gradients est tel qu'au niveau d'un bord, les vecteurs pointent vers le milieu du contour. Nous verrons dans la partie consacrée à la mise en oeuvre numérique de notre modèle (cf. partie III, chapitre 18) que l'ajout de contraintes géométriques sous forme de conditions d'interpolation (terme $- < \nabla dg(|\nabla I|),\vec{n} > \vec{n}$ de notre modèle) modifie l'allure du champ.
Enfin, la composante $- < \nabla g(|\nabla I|),\vec{n} > \vec{n}$ permet également de détecter les objets de forme non convexe et d'assurer ainsi les changements de topologie si nécessaire.
Ce terme peut être mis en parallèle avec la force d'image du modèle classique des contours actifs.

La convergence de notre modèle peut être accélérée en ajoutant dans l'équation d'évolution d'une "level set" (16.12) la composante $kdg(|\nabla I|)\vec{n}$, k constante, qui peut être interprétée en terme de contrainte d'aire. L'analogie avec le modèle des "Balloons" de Cohen [38] et la force de gonflage est immédiate: cette composante évite au contour de s'arrêter sur un minimum local non significatif.
Notons qu'elle est nécessaire dans le cas où le contour initial est à l'intérieur de l'objet à segmenter.
Le problème parabolique associé est donc:

$$\begin{cases} \Phi(x,y,0) = \Phi_0(x,y). \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = |\nabla\Phi|d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)div(\dfrac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}) + < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)),\nabla\Phi > \\ \qquad +kd(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla\Phi|. \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{16.15}$$

Remarque 16.3.1

On propose, dans ce qui suit, une démonstration alternative (voir aussi Aubert et Kornprobst [8]) pour déterminer l'équation d'évolution satisfaite par Γ. *Cette démonstration est réalisée sans utiliser la formulation "level set" du problème.*

Soit $\mathscr{C}$ *la courbe définie par* $\mathscr{C} : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}^2 \\ q \mapsto \begin{pmatrix} \mathscr{C}_1(q) \\ \mathscr{C}_2(q) \end{pmatrix} \end{cases}$ *telle que:*

$$\int_\Gamma dg(|\nabla I|)ds = \int_0^1 d(\mathscr{C}(q))g(|\nabla I(\mathscr{C}(q))|)|\mathscr{C}'(q)|dq,$$

avec $ds = |\mathscr{C}'(q)|dq$.

Considérons désormais la famille de courbes $(\mathscr{C}(t,q))_t$ *avec* t *paramètre temporel tel que* $t \geq 0$ *et* $\mathscr{C}(0,q) = \mathscr{C}(q)$, $\mathscr{C}(t,0) = \mathscr{C}(t,1)$, $\dfrac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}(t,0) = \dfrac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}(t,1)$ *pour* $t > 0$.

On considère la fonctionnelle J *définie par:*

$$J(\mathscr{C}(t,q)) = \int_0^1 d(\mathscr{C}(t,q))g(|\nabla I(\mathscr{C}(t,q))|)|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}(t,q)|dq.$$

Afin d'alléger les notations, on adoptera dans la suite les notations suivantes: $\mathscr{C} = \mathscr{C}(t,q)$, $d = d(\mathscr{C}(t,q))$, $g = g(|\nabla I(\mathscr{C}(t,q))|)$ *et* $J = J(\mathscr{C}(t,q))$.

Déterminons la dérivée temporelle de J. $< \cdot,\cdot >$ *désigne le produit scalaire euclidien dans* $\mathbb{R}^2$.

$$J'(t) = \int_0^1 < \nabla(dg), \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} > |\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}| + dg \frac{< \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}, \frac{\partial^2 \mathscr{C}}{\partial q \partial t} >}{|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|} dq.$$

On intègre par parties le dernier membre du corps de droite de l'équation, soit,

$$J'(t) = \int_0^1 < \nabla(dg), \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} > |\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}| - < \frac{\partial}{\partial q}\left[dg \frac{\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}}{|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|}\right], \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} > dq.$$

Par suite,

$$J'(t) = \int_0^1 \left[\left\langle \nabla(dg) - \frac{dg}{|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|}\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}}{|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|}\right] - < \nabla(dg), \frac{\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}}{|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|} > \frac{\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}}{|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|}, \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t}\right\rangle\right] |\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}| dq.$$

Avec $\vec{T}$ le vecteur tangent unitaire ($\vec{T} = \dfrac{\dfrac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}}{|\dfrac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|}$), $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire, κ la courbure et sachant que $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{|\dfrac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}|}\dfrac{d\vec{T}}{dq} = \kappa\vec{n}$, il vient:

$$J'(t) = \int_0^1 \left[\left\langle \nabla(dg) - dg\kappa\vec{n} - < \nabla(dg),\vec{T} > \vec{T},\ \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} \right\rangle \right] |\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}| dq.$$

En remarquant que dans la base $(\vec{T},\vec{n})$,

$$\nabla(dg) - < \nabla(dg),\vec{T} > \vec{T} = < \nabla(dg),\vec{n} > \vec{n},$$

on obtient finalement:

$$J'(t) = \int_0^1 \left[\left\langle < \nabla(dg),\vec{n} > \vec{n} - dg\kappa\vec{n},\ \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} \right\rangle \right] |\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial q}| dq. \tag{16.16}$$

En conclusion, la direction pour laquelle $J(t)$ décroît le plus rapidement est la direction pour laquelle les vecteurs $\dfrac{\partial \mathscr{C}}{\partial t}$ et $\big(< \nabla(dg),\vec{n} > -dg\kappa\big)\vec{n}$ sont colinéaires de sens opposés, soit d'après (16.16):

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial t} = (dg\kappa - < \nabla(dg),\vec{n} >)\vec{n}. \tag{16.17}$$

■

16.3.3 Régularisation de la fonction distance d

Dans l'équation d'évolution (16.8) satisfaite par Φ, on constate que le terme ∇d est bien défini excepté aux points équidistants d'au moins deux points de l'ensemble S et aux points de S. En effet, la fonction $d(x) = d(x,S)$ est continue comme l'inf d'un nombre fini de fonctions continues mais n'est pas différentiable aux points équidistants d'au moins deux points de l'ensemble S et aux points de S: le gradient n'est donc pas défini en ces points.
d satisfait l'équation eikonale $|\nabla d| = 1$. Dans le **chapitre 17** consacré à l'existence et l'unicité au sens de la viscosité de la solution du problème, nous avons besoin d'une certaine régularité sur la fonction d. Pour ce faire, nous utilisons les propriétés régularisantes de la courbure κ, propriétés développées dans le livre de J.A. Sethian, [96] dont une des remarques est que: *"A front propagating at a speed $1 - \epsilon\kappa$ for $\epsilon > 0$ does not form corners and stays smooth for all time. Furthermore, as the dependence on curvature vanishes, the limit of this motion is the entropy-satisfying solution obtained for the constant speed case"* (*partie 2, section 4 , page 28 de [96]*).

Dans le chapitre suivant, nous rappelons les éléments fondamentaux de la théorie de la viscosité (cf. Crandall, Ishii et Lions [45]) et prouvons l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Chapitre 17

Existence et unicité de la solution du problème d'évolution

17.1 Rappels et définitions sur la théorie de la viscosité

La notion de viscosité a été introduite en 1981 par Crandall, Ishii et Lions [45]. Cette théorie est née de la nécessité de résoudre des problèmes posés par les équations de Hamilton-Jacobi (pour plus de détails sur la théorie et la discrétisation des équations d'Hamilton-Jacobi, voir Barles [14], Abgrall [1], Augoula et Abgrall [10], Bardi et Capuzzo-Dolcetta [12], Lions [71], Sethian [96] Part. II chapitre 3). Très vite, la notion de *"solutions de viscosité "* est apparue comme une notion de solutions faibles bien adaptée pour les équations elliptiques non-linéaires, éventuellement dégénérées du second ordre.

Rappelons dans ce qui suit, le cadre général de la théorie de la viscosité. Cette partie est largement imprégnée du *User's guide to viscosity solutions* de Crandall, Ishii et Lions [45] et du cours de Barles [15].

La théorie de la viscosité s'applique à des équations aux dérivées partielles qui peuvent s'exprimer sous la forme:

$$F(x,u,Du,D^2u) = 0 \text{ dans } \mathscr{O}, \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, \tag{17.1}$$

où F est une fonction définie sur $\mathscr{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S(n) \to \mathbb{R}$, Du étant le gradient de u, D^2u la matrice Hessienne et $S(n)$ désignant l'ensemble des matrices symétriques muni de la relation d'ordre usuelle.

Le premier avantage de cette théorie est qu'elle autorise des fonctions simplement continues à être solutions d'équations fortement non-linéaires du second ordre. Cette théorie fournit également des théorèmes d'existence et d'unicité avec prise en compte des conditions aux limites.

La caractéristique fondamentale de F est de satisfaire la condition de monotonie:

$$F(x,r,p,X) \leq F(x,s,p,Y),\ r \leq s,\ Y \leq X, \tag{17.2}$$

avec $r,s \in \mathbb{R}$, $x,p \in \mathbb{R}^n$, $X,Y \in S(n)$ muni de la relation d'ordre usuelle.

La propriété (17.2) est équivalente aux deux propriétés suivantes:

$$F(x,r,p,X) \leq F(x,s,p,X),\ r \leq s. \tag{17.3}$$

$$F(x,r,p,X) \leq F(x,r,p,Y),\ Y \leq X. \tag{17.4}$$

La propriété (17.4) est dite condition *d'ellipticité*. Quand ces deux conditions sont réunies, on dit que F est *propre*.

Nous vérifions que les conditions sur F sont satisfaites pour notre équation. Remarquons que pour les problèmes paraboliques, si $(x,r,p,X) \mapsto F(t,x,r,p,X)$ est propre pour $t \in [0,T]$ fixé, alors le problème parabolique associé

$$u_t + F(t,x,u,Du,D^2u) = 0$$

l'est également.

Soit $(x,y) \in \Omega$.
L'équation aux dérivées partielles satisfaite par Φ s'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - |\nabla\Phi| d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) div(\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}) - < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)), \nabla\Phi >$$
$$-kd(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla\Phi| = 0. \tag{17.5}$$

Développons dans ce qui suit le terme de divergence. Un calcul élémentaire donne:

$$\Phi_t - |\nabla\Phi| d(x,y) g(|\nabla I(x,y)|) \left(\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}}{|\nabla\Phi|} - \frac{(2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + (\frac{\partial\Phi}{\partial y})^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + (\frac{\partial\Phi}{\partial x})^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2})|\nabla\Phi|^{-1}}{|\nabla\Phi|^2} \right)$$
$$- < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)), \nabla\Phi > -kd(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)|\nabla\Phi| = 0. \tag{17.6}$$

Avec $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, notons $\frac{p \bigotimes p}{|p|^2}$ la matrice définie par:

$$\frac{p \bigotimes p}{|p|^2} = \frac{1}{|p|^2} \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & p_2^2 \end{pmatrix}.$$

En introduisant cette matrice dans la relation (17.6), on en déduit l'expression de F:

$$F(x,y,r,p,X) = -d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)trace(X) + d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)trace(\frac{p \bigotimes p}{|p|^2}X) \tag{17.7}$$
$$- < \nabla(d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)), p > -kd(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)|p|.$$

De manière triviale, la condition (17.3) est satisfaite puisque F ne dépend pas explicitement de r: $F(x,y,r,p,X) = F(x,y,p,X)$.

Attachons nous désormais à la condition de monotonie (17.4). Il nous faut comparer $F(x,y,p,X)$ et $F(x,y,p,Y)$ pour $Y \geq X$.

L'ensemble des matrices symétriques est muni de la relation d'ordre usuelle, à savoir:

$$X \leq Y \Longleftrightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}^2 - \{0^2_{\mathbb{R}}\},\ \xi^t X \xi \leq \xi^t Y \xi.$$

Soit $A(p)$ la matrice définie par:

$$A(p) = Id - \frac{p \bigotimes p}{|p|^2}.$$

Supposons $p \neq 0$. $A(p)$ est semi-définie positive puisque: $\forall \xi \in \mathbb{R}^2 - \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ tel que $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$,

$$\xi^t A(p) \xi = \frac{1}{|p|^2}(\xi_1 p_2 - \xi_2 p_1)^2 \geq 0.$$

La matrice $A(p)$ est semi-définie positive. Ses valeurs propres sont positives et il existe une base orthonormée de vecteurs propres telle que: $D = P^t A P$, P étant une matrice orthogonale et D une matrice diagonale à composantes positives. On peut donc écrire A sous la forme $A = \sigma\sigma^t$, avec σ la matrice définie par $\sigma = PD^{\frac{1}{2}}$.
Ainsi, revenant à notre problème initial, on a :

$$trace(AX) = trace(\sigma\sigma^t X) = trace(\sigma^t X \sigma).$$

$$\text{Soit, } \ trace(AX) = \sum_{i=1}^{2} \sigma_i^t X \sigma_i, \text{ avec } \sigma_i \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } \sigma. \tag{17.8}$$

Supposons, $Y \geq X$, il vient naturellement:

$$\forall i \in \{1,2\},\ \sigma_i^t X \sigma_i \leq \sigma_i^t Y \sigma_i.$$

Les fonctions d et g étant positives, on en conclut que :

$$-d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)trace(A(p)X) \geq -d(x,y)g(|\nabla I(x,y)|)trace(A(p)Y). \tag{17.9}$$

L'inégalité (17.9) donne le caractère dégénéré elliptique de F.

Le cadre général de la *théorie de la viscosité* étant posé, nous amorçons la partie consacrée aux définitions de *sur-solution*, *sous-solution et solution de viscosité*, F étant *continue* et *propre*.

17.1.1 Définitions

Dans Crandall *et al.* [45] ainsi que dans Barles [15], la notion de viscosité est introduite à l'aide du principe du maximum comme suit:

Supposons que $u \in C^2(\mathscr{O})$ et que:

$$F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \leq 0. \tag{17.10}$$

Supposons de surcroît que φ est $C^2(\mathscr{O})$ ($\mathscr{O}$ étant un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$) et que $\hat{x} \in \mathscr{O}$ est un maximum local de $u - \varphi$. Cela implique que $D(u-\varphi)(\hat{x}) = 0$ et $D^2(u-\varphi)(\hat{x}) \leq 0$, soit:

$$\begin{cases} Du(\hat{x}) = D\varphi(\hat{x}), \\ D^2u(\hat{x}) \leq D\varphi(\hat{x}). \end{cases}$$

Le caractère dégénéré elliptique de F conduit à:

$$F(\hat{x},u(\hat{x}),D\varphi(\hat{x}),D^2\varphi(\hat{x})) \leq F(\hat{x},u(\hat{x}),Du(\hat{x}),D^2u(\hat{x})) \leq 0.$$

Nous pouvons désormais donner une définition des solutions de viscosité dans le cas de solutions continues:

Définition 17.1.1

$u \in C(\mathscr{O})$ est solution de viscosité de l'équation $F = 0$ si et seulement si:

$$\forall \Phi \in C^2(\mathscr{O}),\ \textit{si } x_0 \textit{ est un maximum local de } u - \Phi, \textit{ on a } :$$

$$F(x_0,u(x_0),D\Phi(x_0),D^2\Phi(x_0)) \leq 0, \tag{17.11}$$

et

$$\forall \Phi \in C^2(\mathscr{O}),\ \textit{si } x_0 \textit{ est un minimum local de } u - \Phi, \textit{ on a } :$$

$$F(x_0,u(x_0),D\Phi(x_0),D^2\Phi(x_0)) \geq 0. \tag{17.12}$$

Si u ne vérifie que (17.11) (*resp. (17.12)*), on dira que u est *sous-solution* de viscosité (*resp. sur-solution*).

Crandall, Ishii et Lions [45] ainsi que Barles [15] donnent une définition des solutions de viscosité fondée sur les notions de sur et sous-différentiels d'ordre 2.

Définition 17.1.2 *Sur et sous-différentiel d'ordre 2 d'une fonction continue*

Soit $u \in C(\mathscr{O})$. Le sur-différentiel d'ordre 2 de u au point $x \in \mathscr{O}$ est le sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times S(n)$ noté $D^{2,+}u(x)$ qui est constitué des couples (p,M) tels que:

$$u(y) - u(x) - (p,y-x) - \frac{1}{2}M(y-x).(y-x) \leq O(|y-x|^2), \tag{17.13}$$

pour $y \in \mathscr{O}$ voisin de x.

Le sous-différentiel d'ordre 2 de u au point $x \in \mathscr{O}$ est le sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n \times S(n)$ noté $D^{2,-}u(x)$ qui est constitué des couples (p,M) tels que:

$$u(y) - u(x) - (p,y-x) - \frac{1}{2}M(y-x).(y-x) \geq O(|y-x|^2), \tag{17.14}$$

pour $y \in \mathscr{O}$ voisin de x.

Si u est deux fois différentiable en x alors:

$$\begin{cases} D^{2,+}u(x) = \{(Du(x),M); M \leq D^2u(x)\}, \\ D^{2,-}u(x) = \{(Du(x),M); M \geq D^2u(x)\}. \end{cases}$$

Théorème 17.1.1

1. *$u \in C(\mathscr{O})$ est sous-solution de l'équation $F = 0$, si et seulement si, pour tout $x \in \mathscr{O}$:*
$$\forall (p,M) \in D^{2,+}u(x),\ F(x,u(x),p,M) \leq 0. \tag{17.15}$$
2. *$u \in C(\mathscr{O})$ est sur-solution de l'équation $F = 0$, si et seulement si, pour tout $x \in \mathscr{O}$:*
$$\forall (p,M) \in D^{2,-}u(x),\ F(x,u(x),p,M) \geq 0. \tag{17.16}$$

Dans la section suivante, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution de notre problème aux conditions au bord de Neumann homogènes au sens de la viscosité. Notons la discontinuité de F pour $Du = 0$.
Une première approche nous avait conduit à exploiter le fait que notre équation était une équation de type géométrique.
Dans [16], Barles établit des théorèmes de comparaison pour les solutions de viscosité d'équations elliptiques ou paraboliques fortement non-linéaires associées à des conditions au bord du type Neumann non-linéaires. Il définit également des théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations de *type géométrique*.
L'application de ce théorème à notre problème s'est révélée délicate et en fait peu adaptée à celui-ci du fait des conditions au bord simples.
Ainsi, sous les conseils du Professeur Guy Barles, nous nous sommes orientés vers les travaux de Ishii et Sato [61], puis vers une approche différente d'Alvarez *et al.* [5].

17.2 Preuve de l'existence et de l'unicité du problème d'évolution

17.2.1 Préambule

Dans les deux théorèmes que nous appliquons pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, nous avons besoin d'hypothèses communes vérifiées par les fonctions $x \in \Omega \mapsto d(x)g(|\nabla I(x)|)$, $x \in \Omega \mapsto (d(x)g(|\nabla I(x)|))^{\frac{1}{2}}$ et $x \in \Omega \mapsto \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|))$. La fonction d est la fonction distance présentant la régularité souhaitée *(cf. partie II, chapitre 16, section 16.3.3)*.
Dans ce paragraphe, afin d'allèger les écritures, on pose $c_1(x) = d(x)g(|\nabla I(x)|)$, $c_2(x) = (d(x)g(|\nabla I(x)|))^{\frac{1}{2}}$ et $c_3(x) = \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|))$.

- La première hypothèse est que la fonction c_1 et la fonction $|c_3|$ sont bornées.
  La fonction $x \mapsto d(x)$ et la fonction $x \mapsto g(|\nabla I(x)|)$ sont bornées sur Ω donc le produit est borné sur Ω.
  La fonction $x \mapsto g'(|\nabla I(x)|)$ est bornée. Avec des hypothèses naturelles sur l'image I, (I est supposée être une fonction lisse obtenue à partir d'une fonction attribut discrète que l'on a préalablement prétraitée par filtrage gaussien - on suppose de plus que la fonction $(x_1,x_2) \mapsto |\nabla I(x_1,x_2)| \in W^{1,\infty}$), l'hypothèse $|c_3|$ bornée est donc légitime.
- La seconde hypothèse est que les fonctions $(c_i)_{i\in\{1,\cdots,3\}}$ sont lipschitziennes.
  Rappelons le théorème suivant *(cf. [30] section 2.3)*.

  Théorème 17.2.1

  Une fonction dérivable $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ où Ω est un ensemble ouvert et connexe dans $\mathbb{R}^N$ est lipschitzienne si:
  $$\sup_{x\in\Omega} ||f'(x)|| < \infty.$$

  La fonction $s \mapsto g(s)$ est lipschitzienne, de même pour la fonction $s \mapsto g'(s)$ et la fonction $s \mapsto g''(s)$. Ces fonctions sont représentées ci-après.

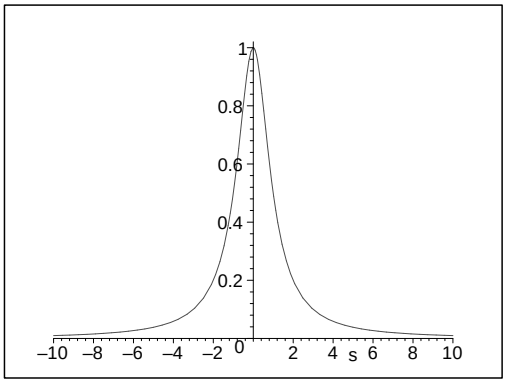


FIG. 17.1 – *Fonction g*

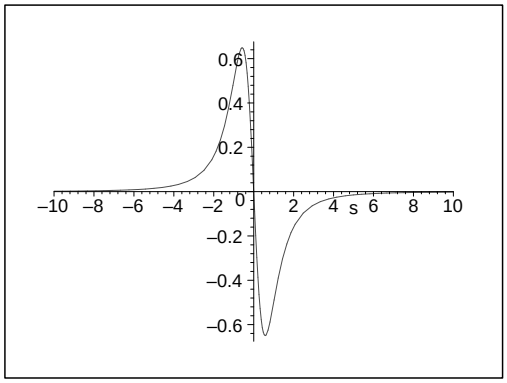


FIG. 17.2 – *Fonction g'*

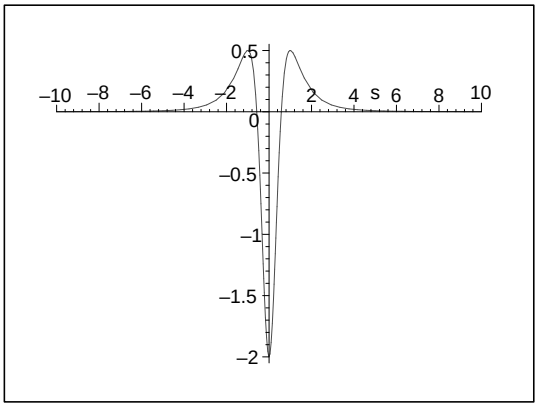


FIG. 17.3 – *Fonction g''*

Avec les hypothèses naturelles sur l'image I, le critère nécessaire du théorème 17.2.1 pour obtenir le caractère lipschitzien de $x \mapsto g(|\nabla I(x)|)$ est validé.
Le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées est lipschitzien donc la fonction $x \mapsto c_1(x)$ est lipschitzienne.
Un raisonnement analogue est valable pour la fonction $x \mapsto c_3(x)$.

L'hypothèse "c_2 *lipschitzienne*" est plus délicate à valider car la fonction c_2 s'annule en particulier sur les points de S.
On utilise un théorème issu de Freidlin [51] que l'on rappelle ici.

Théorème 17.2.2

Si $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{r} a^{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geq 0$, $a^{ij} = a^{ji}$ *pour* $x \in \mathbb{R}^r$ *et* $a^{ij}(x) \in C^2_{\mathbb{R}^r}$ *pour* $i,j \in \{1,2,\cdots,r\}$ *alors il existe une matrice symétrique* $\sigma(x)$ *telle que* $\sigma^2(x) = a(x)$, *les éléments de la matrice étant lipschitziens,*

$$|\sigma^i_j(x) - \sigma^i_j(y)| < c\sqrt{H}|x-y|,$$

où c est une constante qui dépend seulement de la dimension de l'espace et

$$H = \sup_{x\in\mathbb{R}^r, i,j,k,l=1,\cdots,r} |\frac{\partial^2 a^{ij}(x)}{\partial x^k \partial x^l}|.$$

Avec ce qui a été démontré préalablement, les hypothèses du théorème sont validées et l'on peut conclure au caractère lipschitzien de la fonction c_2.
Par la suite, on notera $\sqrt{\zeta}$, C_1, κ les constantes de Lipschitz respectives de $x \mapsto (d(x)g(|\nabla I(x)|))^{\frac{1}{2}}$, $x \mapsto d(x)g(|\nabla I(x)|)$, $x \mapsto \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|))$ et θ, C_2 les bornes supérieures de $x \mapsto d(x)g(|\nabla I(x)|)$ et $x \mapsto |\nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|))|$.

17.2.2 Caractère géométrique de l'équation d'évolution, théorème de Barles

Une première approche fondée sur le théorème 4.2 de Barles [16] nous a conduit à constater que l'équation d'évolution de notre problème avait la propriété d'être géométrique.
On définit dans ce qui suit, la notion *d'équation géométrique* (cf. définition 4.1 de Barles [16]).

Définition 17.2.1

Une équation qui s'écrit sous la forme $u_t + F(x,t,Du,D^2u) = 0$, $(x,t) \in \Omega\times]0,+\infty[$ *est dite de type géométrique si la fonction* F *satisfait*

$$F(x,t,\lambda p,\lambda M + \mu p \bigotimes p) = \lambda F(x,t,p,M) \tag{17.17}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ t \in]0,+\infty[,\ p \in \mathbb{R}^n,\ M \in S(n),\ \lambda > 0,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que notre problème d'évolution satisfait l'égalité (17.17)

F est définie, on le rappelle par:

$$F(x,t,p,X) = -d(x)g(|\nabla I(x)|)trace\big((I - \frac{p\bigotimes p}{|p|^2})X\big) - < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p >$$

$$- kd(x)g(|\nabla I(x)|)|p|,$$

avec $x \in \Omega$.

Le calcul de $F(x,t,\lambda p,\lambda M + \mu p \bigotimes p)$ donne:

$$\left| \begin{array}{l} F(x,t,\lambda p,\lambda M + \mu p \bigotimes p) = -d(x)g(|\nabla I(x)|)trace\big((I - \frac{p\bigotimes p}{|p|^2})(\lambda M + \mu p \bigotimes p)\big) \\ \qquad -\lambda < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p > -\lambda kd(x)g(|\nabla I(x)|)|p|. \end{array} \right.$$

Soit,

$$F(x,t,\lambda p,\lambda M + \mu p \bigotimes p) = \lambda F(x,t,p,M) - \mu d(x) g(|\nabla I(x)|) trace\big((I - \frac{p \bigotimes p}{|p|^2})(p \bigotimes p)\big).$$

Or,

$$trace\big((I - \frac{p \bigotimes p}{|p|^2})(p \bigotimes p)\big) = 0.$$

D'où,

$$F(x,t,\lambda p,\lambda M + \mu p \bigotimes p) = \lambda F(x,t,p,M).$$

Notre équation est donc de type géométrique.

Dans [16], Barles établit des théorèmes d'existence/unicité pour les solutions de viscosité d'équations elliptiques ou paraboliques fortement non-linéaires associées à des conditions au bord du type Neumann non-linéaires. L'application de ce théorème est délicate à réaliser dans notre cas, en particulier dans la construction de la fonction test, notée w_R *(dans Ishii et Sato [61])*. Ce théorème de Barles s'applique en effet dans les cas non réguliers pour lesquels le théorème de Ishii et Sato ne s'applique pas. La preuve n'en est que plus lourde, particulièrement dans la preuve de l'unicité qui nécessite la construction d'une fonction test. Guy Barles nous a donc orienté vers l'article de Ishii et Sato [61], dont les conditions sur le domaine d'étude sont moins restrictives et pour lequel la construction de la fonction test est plus simple.

17.2.3 Enoncé du théorème et application au problème

Nous donnons ci-dessous un résultat préliminaire.

Proposition 17.2.1

Si $p,q \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, *alors on a la relation:*

$$|\frac{p}{|p|} - \frac{q}{|q|}| \leq \frac{|p-q|}{\min(|p|,|q|)}.$$

Preuve:

Dans la suite, $(\cdot,\cdot)$ *désigne le produit scalaire euclidien classique dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $|\cdot|$ *la norme associée.*

Supposons que $\min(|p|,|q|) = |p|$. *Démontrons que:*

$$|p - \frac{|p|}{|q|}q|^2 \leq |p-q|^2.$$

Cela équivaut à prouver que:

$$2(1-\frac{|p|}{|q|})(p,q) \leq |q|^2 - |p|^2.$$

Remarquons que $(1-\frac{|p|}{|q|}) \in [0,1]$ *et avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient:*

$$2(1-\frac{|p|}{|q|})(p,q) \leq 2|p|(|q|-|p|).$$

Ayant $|p| \leq |q|$ *par hypothèse, on en conclut que* $2|p|(|q|-|p|) \leq |q|^2 - |p|^2$ *et finalement:*

$$2(1-\frac{|p|}{|q|})(p,q) \leq |q|^2 - |p|^2.$$

■

L'article de Ishii et Sato [61] s'inscrit dans le cadre particulier des équations paraboliques présentant une singularité en $p = 0$ avec des conditions aux bords du type dérivée oblique non-linéaire. Par comparaison avec l'article de Barles [16], les domaines considérés sont plus généraux. Ce cadre inclut donc des problèmes plus complexes que celui auquel nous nous attachons ici. Cependant, l'application de ce théorème est d'une approche semblable à celle utilisée dans le cadre de la démonstration de Barles, mais ses hypothèses sont plus simples à valider.

Nous présentons dans ce qui suit, les différentes hypothèses du théorème. Comme Ishii et Sato [61], nous notons ρ l'opérateur défini par $\rho(p,q) = \min(\frac{|p-q|}{\min(|p|,|q|)},1)$. Nous supposons enfin, que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec un bord C^1.

1. $F \in C([0,T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times S^n)$, S^n désignant l'espace des matrices symétriques $n \times n$ équipé de la relation d'ordre classique.
2. Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $(t,x,p,X) \in [0,T] \times \bar{\Omega} \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times S^n$, la fonction $u \mapsto F(t,x,u,p,X) - \gamma u$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $R > 0$, il existe une fonction continue $w_R : [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[$ satisfaisant $w_R(0) = 0$ telle que si X, $Y \in S^n$ et $\mu_1,\mu_2 \in [0,\infty[$ vérifient:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \mu_1 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

   alors

$$F(t,x,u,p,X) - F(t,y,u,q,-Y) \quad (17.18)$$
$$\geq -w_R\Big(\mu_1\big(|x-y|^2 + \rho(p,q)^2\big) + \mu_2 + |p-q| + |x-y|\big(1+\max(|p|,|q|)\big)\Big),$$

   $\forall t \in [0,T]$, $x,y \in \bar{\Omega}$, $u \in \mathbb{R}$ tel que $|u| \leq R$ et p, $q \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$.
4. $B \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \bigcap C^{1,1}(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}))$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $p \mapsto B(x,p)$ est positivement homogène de degré 1 en p, ie, $B(x,\lambda p) = \lambda B(x,p)$, $\forall \lambda \geq 0$, $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.
6. Il existe une constante positive θ telle que $< \nu(z), D_p B(z,p) > \geq \theta$ pour tout $z \in \partial\Omega$ et $p \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. $\nu(z)$ représente la normale unitaire sortante de Ω en $z \in \partial\Omega$.

Dans leur article, Ishii et Sato supposent que la fonction w_R est croissante sur $[0, +\infty[$.

Théorème 17.2.3 (Ishii et Sato [61])

Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t + F(t,x,u,Du,D^2u) = 0, \ sur \ ]0,T[\times\Omega, \\ B(x,Du) = 0 \ conditions \ au \ bord, \end{cases} \tag{17.19}$$

satisfaisant $u(0,x) = g(x)$ *pour* $x \in \bar{\Omega}$.

Supposons que les conditions 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont satisfaites. Alors, pour toute fonction $g \in C(\bar{\Omega})$, *il existe une unique solution de viscosité* $u \in C([0,T[\times\bar{\Omega})$ *au problème (17.19) satisfaisant* $u(0,x) = g(x)$.

Nous appliquons ce théorème à notre problème spécifique, pour lequel F est défini par:

$$F(t,x,u,p,X) = -d(x)g(|\nabla I(x)|)trace\big((Id - \frac{p \bigotimes p}{|p|^2})X\big) - < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p > \tag{17.20}$$

$$- kd(x)g(|\nabla I(x)|)|p|.$$

On suppose $k > 0$.
A étant la matrice symétrique, semi-définie positive:

$$A(x,p) = d(x)g(|\nabla I(x)|)(Id - \frac{p \bigotimes p}{|p|^2}),$$

F s'exprime sous la forme:

$$F(t,x,u,p,X) = -trace\big(A(x,p)X\big) - < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p > \tag{17.21}$$

$$- kd(x)g(|\nabla I(x)|)|p|.$$

1. F présente une singularité pour $p = 0$. F est continue partout ailleurs. Le premier point est satisfait.
2. F ne dépend pas explicitement de u donc toute constante négative γ satisfait le second critère.
   Par la suite, on pose $F = F(t,x,p,X)$.

3. L'inégalité du point 3 conduit à: $\forall r,s \in \mathbb{R}^n$,

$$(Xr,r) + (Ys,s) \leq \mu_1|r-s|^2 + \mu_2(|r|^2 + |s|^2).$$

En prenant successivement $r = \sigma(x,p)e_i$ et $s = \sigma(y,q)e_i$, ($(e_i)_i$ base canonique), ($A(x,p) = \sigma(x,p)\sigma^t(x,p)$), on obtient:

$$\left| \begin{array}{l} trace\big(A(x,p)X\big) + trace\big(A(y,q)Y\big) \\ \leq \mu_1 trace\Big(\big(\sigma(x,p) - \sigma(y,q)\big)\big(\sigma(x,p) - \sigma(y,q)\big)^t\Big) \\ +\mu_2\Big(d(x)g(|\nabla I(x)|) + d(y)g(|\nabla I(y)|)\Big). \end{array} \right.$$

θ étant la borne supérieure de $x \mapsto d(x)g(|\nabla I(x)|)$, on a alors:

$$\left| \begin{array}{l} trace\big(A(x,p)X\big) + trace\big(A(y,q)Y\big) \\ \leq \mu_1|\sqrt{d(x)g(|\nabla I(x)|)}\dfrac{p}{|p|} - \sqrt{d(y)g(|\nabla I(y)|)}\dfrac{q}{|q|}|^2 + 2\theta\mu_2. \end{array} \right.$$

De plus, on a la relation:

$$\left| \begin{array}{l} |\sqrt{d(x)g(|\nabla I(x)|)}\dfrac{p}{|p|} - \sqrt{d(y)g(|\nabla I(y)|)}\dfrac{q}{|q|}|^2 \\ = |\big(\sqrt{d(x)g(|\nabla I(x)|)} - \sqrt{d(y)g(|\nabla I(y)|)}\big)\dfrac{p}{|p|} + \sqrt{d(y)g(|\nabla I(y)|)}(\dfrac{p}{|p|} - \dfrac{q}{|q|})|^2. \end{array} \right.$$

Soit,

$$\left| \begin{array}{l} |\sqrt{d(x)g(|\nabla I(x)|)}\dfrac{p}{|p|} - \sqrt{d(y)g(|\nabla I(y)|)}\dfrac{q}{|q|}|^2 \\ \leq 2\big(\sqrt{d(x)g(|\nabla I(x)|)} - \sqrt{d(y)g(|\nabla I(y)|)}\big)^2 + 2d(y)g(|\nabla I(y)|)|\dfrac{p}{|p|} - \dfrac{q}{|q|}|^2. \end{array} \right.$$

En utilisant la proposition (17.2.1) et en posant $\sqrt{\zeta}$ la constante de Lipschitz de la fonction $x \mapsto \sqrt{d(x)g(|\nabla I(x)|)}$, on en conclut que:

$$\left| \begin{array}{l} trace\big(A(x,p)X\big) + trace\big(A(y,q)Y\big) \\ \leq \mu_1\Big(2\zeta|x-y|^2 + 8\theta\rho(p,q)^2\Big) + 2\theta\mu_2. \end{array} \right.$$

Il nous faut évaluer l'expression $F(t,x,p,X) - F(t,y,q,-Y)$, soit:

$$\left|\begin{array}{l} F(t,x,p,X) - F(t,y,q,-Y) = -\Big(trace\big(A(x,p)X\big) + trace\big(A(y,q)Y\big)\Big) \\ \qquad\qquad -\Big(< \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p > - < \nabla(d(y)g(|\nabla I(y)|)),q > \Big) \\ \qquad\qquad -k\Big(d(x)g(|\nabla I(x)|)|p| - d(y)g(|\nabla I(y)|)|q|\Big). \end{array}\right.$$

On a la relation:

$$\left|\begin{array}{l} | < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p > - < \nabla(d(y)g(|\nabla I(y)|)),q > | \\ \leq | < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)) - \nabla(d(y)g(|\nabla I(y)|)),p > | + | < \nabla(d(y)g(|\nabla I(y)|)),p-q > |. \end{array}\right.$$

Posant κ la constante de Lipschitz de la fonction $x \mapsto \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|))$ et C_2 la borne supérieure de $|\nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|))|$, il vient:

$$| < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),p > - < \nabla(d(y)g(|\nabla I(y)|)),q > | \leq \kappa|x-y|\max(|p|,|q|)+C_2|p-q|.$$

En procédant de manière analogue, posant C_1 la constante de Lipschitz de la fonction $x \mapsto d(x)g(|\nabla I(x)|)$, on obtient:

$$\left|\begin{array}{l} \Big|d(x)g(|\nabla I(x)|)|p| - d(y)g(|\nabla I(y)|)|q|\Big| \\ \leq \Big|\big(d(x)g(|\nabla I(x)|) - d(y)g(|\nabla I(y)|)\big)|p|\Big| + \Big|d(y)g(|\nabla I(y)|)\big||p| - |q|\big|\Big|, \\ \leq C_1|x-y|\max(|p|,|q|) + \theta\big||p| - |q|\big|, \\ \leq C_1|x-y|\max(|p|,|q|) + \theta|p-q|. \end{array}\right.$$

D'où,

$$\left|\begin{array}{l} -\big(F(t,x,p,X) - F(t,y,q,-Y)\big) \\ \leq \mu_1\Big(2\zeta|x-y|^2 + 8\theta\rho(p,q)^2\Big) + 2\theta\mu_2 \\ +(\kappa + kC_1)|x-y|\max(|p|,|q|) + (C_2 + k\theta)|p-q|. \end{array}\right.$$

Par suite,

$$\left|\begin{array}{l} -\big(F(t,x,p,X) - F(t,y,q,-Y)\big) \\ \leq \max\big(2\zeta,8\theta,C_2 + k\theta,\kappa + kC_1\big)\Big[\mu_1\big(\rho(p,q)^2 + |x-y|^2\big) \\ +\mu_2 + |p-q| + |x-y|\big(1 + \max(|p|,|q|)\big)\Big]. \end{array}\right.$$

Il suffit alors de prendre $w_R(l) = \max\big(2\zeta,8\theta,C_2+k\theta,\kappa+kC_1\big)l$ pour satisfaire la condition 3. $w_R(0) = 0$.

4. Notons $\nu(x)$ le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Omega$ au point x. Dans notre cas,

$$B(x,p) =< \nu(x),p > .$$

Le point 4 est satisfait suivant des conditions sur ν *(ν, champ de vecteurs $C^{1,1}$).*

5. Il est aisé de vérifier que B est positivement homogène de degré 1: $B(x,\lambda p) =< \nu(x),\lambda p >= \lambda < \nu(x),p >= \lambda B(x,p)$, $\forall\lambda \geq 0$, $p \in (\mathbb{R}^2 - 0_{\mathbb{R}^2})$.
6. Soit $z \in \partial\Omega$.

$$< \nu(z),D_pB(z,p) >= |\nu(z)|^2 = 1.$$

Il suffit de prendre $\theta = 1$ et la dernière condition est satisfaite ■

17.2.4 Approche de Caselles *et al.* et Alvarez *et al.* - Application au problème

Nous nous concentrons désormais sur une approche différente de la preuve de l'existence et de l'unicité de notre problème. On s'intéresse au caractère "bien posé" de notre problème. Dans ce sens, nous suivons les arguments de Caselles *et al.* [23] et [24] et Alvarez *et al.* [5]: nous prouvons l'existence et l'unicité de notre problème au sens de la viscosité pour une condition initiale bornée, continue et lipschitzienne. Nous rappelons la formulation de notre problème, pour $x \in \Omega$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - |\nabla u| d(x) g(|\nabla I(x)|) div(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}) - < \nabla(d(x)g(|\nabla I(x)|)),\nabla u > \\ -kd(x)g(|\nabla I(x)|)|\nabla u| = 0, \text{ sur } [0,+\infty[\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{17.22}$$

Pour simplifier les notations, on définit la fonction c par:

$$c : x \mapsto d(x)g(|\nabla I(x)|).$$

Avec les notations $\partial_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ et la convention classique de sommation d'Einstein, notre problème s'exprime par:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c(x)a_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}u - < \nabla c(x),\nabla u > -kc(x)|\nabla u| = 0, \text{ avec } (t,x) \in [0,+\infty[\times\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{17.23}$$

avec $a_{ij}(p) = \delta_{ij} - \dfrac{p_i p_j}{|p|^2}$ si $p \neq 0$ et $c(x) \geq 0$.

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace des fonctions bornées lipschitziennes.
Théoriquement, dans le cadre du traitement d'images, l'équation devrait être définie sur un domaine R de $\mathbb{R}^2$ (*en pratique, sur un rectangle de* $\mathbb{R}^2$). Un choix naturel est de prendre $[0,1] \times [0,1]$. Dans ce cas, des conditions aux bords doivent être définies: la condition de Neumann $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur ∂R s'avère bien appropriée au cadre du traitement d'images. Cela correspond en effet (voir Alvarez *et al.* [5]) à la réflection de l'image par rapport au bord et permet de ne pas imposer de valeurs au bord.
Nous suivons la même démarche qu'Alvarez *et al.* [5] et Caselles *et al.* [23], et nous simplifions le problème en cherchant des solutions de l'équation aux dérivées partielles périodiques satisfaisant $u(x+2h) = u(x)$, $\forall h \in \mathbb{Z}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$.
La fonction c et la condition initiale $u(0,x) = u_0(x)$ sont périodiques, de même période que u. Dans toute la suite, nous travaillons dans ce cadre précis.

Rappelons les définitions de sur et sous-solutions de viscosité à l'aide du principe du maximum, dans le cas des problèmes paraboliques:

Définition 17.2.2 *Sous-solution de viscosité*

$u \in C([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $T \in]0,+\infty[$ est sous-solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles de (17.23) si : $\forall \Phi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, si $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \mathbb{R}^2$ est un maximum local de $u - \Phi$, on a la relation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0,x_0) - c(x_0)a_{ij}(\nabla\Phi(t_0,x_0))\partial_{ij}\Phi(t_0,x_0) - < \nabla c(x_0), \nabla\Phi(t_0,x_0) > -kc(x_0)|\nabla\Phi(t_0,x_0)| \leq 0, \\ si\ \nabla\Phi(t_0,x_0) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0,x_0) - c(x_0) \lim \sup_{p \longrightarrow 0} a_{ij}(p)\partial_{ij}\Phi(t_0,x_0) \leq 0, \\ si\ \nabla\Phi(t_0,x_0) = 0. \end{cases}$$

Définition 17.2.3 *Sur-solution de viscosité*

$u \in C([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, $T \in]0,+\infty[$ est sur-solution de viscosité de l'équation aux dérivées partielles de (17.23) si : $\forall \Phi \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, si $(t_0,x_0) \in]0,T] \times \mathbb{R}^2$ est un minimum local de $u - \Phi$, on a la relation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0,x_0) - c(x_0)a_{ij}(\nabla\Phi(t_0,x_0))\partial_{ij}\Phi(t_0,x_0) - < \nabla c(x_0), \nabla\Phi(t_0,x_0) > -kc(x_0)|\nabla\Phi(t_0,x_0)| \geq 0, \\ si\ \nabla\Phi(t_0,x_0) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t_0,x_0) - c(x_0) \lim \inf_{p \longrightarrow 0} a_{ij}(p)\partial_{ij}\Phi(t_0,x_0) \geq 0, \\ si\ \nabla\Phi(t_0,x_0) = 0. \end{cases}$$

u est solution de viscosité si elle est à la fois sous et sur-solution de viscosité.

Théorème 17.2.4

Avec les hypothèses sur les fonctions $x \mapsto c(x)$, $x \mapsto c^{\frac{1}{2}}(x)$, $x \mapsto \nabla c(x)$ (cf. sous-section 17.2.1), soient u_0,$v_0 \in C(R) \cap W^{1,\infty}(R)$.

Alors, posant $(\xi)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - c(x)a_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}u - < \nabla c(x),\nabla u > -kc(x)|\nabla u| = 0, \quad avec \quad (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

1. *(ξ) admet une unique solution de viscosité*

$$u \in C([0,+\infty[\times\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)),\ \forall T < \infty$$

et u satisfait:

$$\inf_{\mathbb{R}^2} u_0 \leq u(t,x) \leq \sup_{\mathbb{R}^2} u_0.$$

2. *Soit v la solution de viscosité associée à la condition initiale v_0. Alors, pour tout $T \in [0,\infty[$,*

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||u(t,\cdot) - v(t,\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq ||u_0 - v_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Nous allons faire la preuve de ce théorème. Celle-ci est largement inspirée des travaux de Caselles *et al.* [23] et Alvarez *et al.* [5]. Comme eux, nous nous concentrons d'abord sur l'estimation du second point du théorème qui nous permettra d'en déduire l'unicité de la solution. u et v sont deux solutions de viscosité respectivement associées aux conditions initiales u_0 et v_0.

On considère que (t_0,x_0,y_0) est un point de maximum de la fonction définie par:

$$u(t,x) - v(t,y) - (4\epsilon)^{-1}|x-y|^4 - \lambda t,\ t \in [0,T],\ x,y \in \mathbb{R}^2,\ \lambda,T,\epsilon > 0.$$

La première étape consiste à prouver que $t_0 = 0$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $t_0 > 0$. On cherche à établir une contradiction.

La preuve est fondée sur le théorème 8.3 de Crandall, Ishii et Lions [45]. Ce théorème est rappelé brièvement dans ce qui suit:

Théorème 17.2.5 *(Théorème 8.3 de Crandall et al. [45])*

Soient $u_i \in USC((0,T)\times\mathscr{O}_i)$ pour $i = 1,\cdots,k$, $\mathscr{O}_i$ étant un sous-ensemble localement compact de $\mathbb{R}^{N_i}$. Soit φ la fonction définie sur un voisinage ouvert de $(0,T)\times\mathscr{O}_1\times\cdots\times\mathscr{O}_k$ et telle que $(t,x_1,\cdots,x_k) \longrightarrow \varphi(t,x_1,\cdots,x_k)$ est continûment différentiable en t et deux fois continûment différentiable en $(x_1,\cdots,x_k) \in \mathscr{O}_1\times\cdots\times\mathscr{O}_k$. Supposons de surcroît que $\hat{t} \in (0,T)$, $\hat{x}_i \in \mathscr{O}_i$ pour $i = 1,\cdots,k$ et

$$\left| \begin{array}{l} w(t,x_1,x_2,\cdots,x_k) = u_1(t,x_1) + \cdots + u_k(t,x_k) - \varphi(t,x_1,\cdots,x_k) \\ \leq w(\hat{t},\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_k), \end{array} \right.$$

avec $0 < t < T$ *et* $x_i \in \mathscr{O}_i$.

Supposons de plus qu'il existe $r > 0$ *tel que pour tout* $M > 0$ *il existe* C *tel que pour* $i = 1, \cdots, k$

$$\left| \begin{array}{l} b_i \leq C, \text{ quand } (b_i,q_i,X_i) \in P^{2,+}_{\mathscr{O}_i} u_i(t,x_i), \\ |x_i - \hat{x}_i| + |t - \hat{t}| \leq r \text{ et } |u_i(t,x_i)| + |q_i| + ||X_i|| \leq M. \end{array} \right.$$

Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, *il existe* $X_i \in S(N_i)$ *tel que:*

$$\left| \begin{array}{l} (b_i,D_{x_i}\varphi(\hat{t},\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_k),X_i) \in \bar{P}^{2,+}_{\mathscr{O}_i} u_i(\hat{t},\hat{x}_i),\ i \in \{1,\cdots,k\}, \\ -(\frac{1}{\epsilon} + ||A||)I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \epsilon A^2, \\ b_1 + \cdots + b_k = \varphi_t(\hat{t},\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_k), \end{array} \right.$$

avec $A = (D^2_x\varphi)(\hat{t},\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_k)$.
$P^{2,+}_{\mathscr{O}}$ *et* $P^{2,-}_{\mathscr{O}}$ *sont les variantes paraboliques des sur et sous-différentiels d'ordre 2,* $D^{2,+}_{\mathscr{O}}$ *et* $D^{2,-}_{\mathscr{O}}$.

Nous appliquons ce théorème à notre problème. Clairement, φ est la fonction définie par:

$$\varphi(t,x,y) = (4\epsilon)^{-1}|x-y|^4 + \lambda t.$$

Le théorème nous donne pour $\gamma > 0$ l'existence de X, $(D_x\varphi(t_0,x_0,y_0) = (\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0))$ tel que:

$$\begin{aligned} & a - c(x_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)X_{ij} \\ & - < \nabla(c(x_0)),(\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0) > -k(\epsilon)^{-1}c(x_0)|x_0-y_0|^3 \leq 0. \end{aligned} \tag{17.24}$$

De même, il existe $-Y$ tel que

$$(-b,D_y\varphi(t_0,x_0,y_0), -Y) \in \bar{P}^{2,+}_{\mathscr{O}_2}(-v)(t_0,y_0)$$

et

$$D_y\varphi(t_0,x_0,y_0) = -(\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0).$$

Remarquons que $\bar{P}^{2,+}_{\Omega}(-v)(x) = -\bar{P}^{2,-}_{\Omega}v(x)$, donc

$$(-b,D_y\varphi(t_0,x_0,y_0), -Y) = (-b, -(\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0), -Y) \in -\bar{P}^{2,-}_{\mathscr{O}_2}v(t_0,y_0)$$

et

$$(b,(\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0),Y) \in \bar{P}^{2,-}_{\mathscr{O}_2}v(t_0,y_0).$$

Cela se traduit par l'inégalité

$$b - c(y_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^2(x_0 - y_0)\big)Y_{ij} \tag{17.25}$$

$$- < \nabla(c(y_0)),(\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^2(x_0 - y_0) > -k(\epsilon)^{-1}c(y_0)|x_0 - y_0|^3 \geq 0.$$

La seconde conséquence du théorème donne l'inégalité suivante pour tout $\gamma > 0$:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq A' + \gamma A'^2$$

avec $A' = (D^2_X\varphi)(t_0,x_0,y_0)$.

Cette inégalité peut être formellement réécrite sous la forme d'une matrice par blocs:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} B + \mu B^2 & -B - \mu B^2 \\ -B - \mu B^2 & B + \mu B^2 \end{pmatrix} \tag{17.26}$$

avec $\mu = 2\gamma$ et B la matrice définie par:

$$B = (\epsilon^{-1})|x_0 - y_0|^2 I_2 + 2(\epsilon^{-1})(x_0 - y_0)\bigotimes(x_0 - y_0) \tag{17.27}$$

et B^2,

$$B^2 = (\epsilon^{-2})|x_0 - y_0|^4 I_2 + 8(\epsilon^{-2})|x_0 - y_0|^2(x_0 - y_0)\bigotimes(x_0 - y_0). \tag{17.28}$$

La dernière conséquence du théorème donne immédiatement $a - b = \lambda$.

Prouvons ensuite que $x_0 \neq y_0$.
Supposons que $x_0 = y_0$. Cette hypothèse implique que B est la matrice identiquement nulle et la définition des solutions de viscosité dans le cas singulier donne:

$$a - c(x_0) \lim \sup_{p \longrightarrow 0} a_{ij}(p)X_{ij} \leq 0. \tag{17.29}$$

$$b - c(y_0) \lim \inf_{p \longrightarrow 0} a_{ij}(p)Y_{ij} \geq 0. \tag{17.30}$$

L'inégalité liant X, Y et B nous permet d'observer que dans l'hypothèse où $x_0 = y_0$, on a clairement $X \leq 0$ et $Y \geq 0$. De plus, en remarquant que pour tout $p \in \{\mathbb{R}^2 - 0_{\mathbb{R}^2}\}$, $a_{ij}(p)X_{ij} = \xi^T X \xi$ avec $\xi = \begin{pmatrix} \frac{p_2}{|p|} \\ -\frac{p_1}{|p|} \end{pmatrix}$, on déduit de (17.29) et (17.30) que:

$$\begin{cases} a \leq 0. \\ b \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, $a - b \leq 0$, ce qui contredit le résultat $a - b = \lambda > 0$. Par conséquent, $x_0 \neq y_0$.

Prenons $\mu = \epsilon|x_0 - y_0|^{-2}$. On obtient alors, l'inégalité:

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 2(\epsilon)^{-1} \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C \end{pmatrix}, \tag{17.31}$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} B + \epsilon|x_0 - y_0|^{-2}B^2 = 2(\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^2 I_2 + 10(\epsilon)^{-1}(x_0 - y_0) \bigotimes (x_0 - y_0), \\ \text{il vient, } \ C = |x_0 - y_0|^2 I_2 + 5(x_0 - y_0) \bigotimes (x_0 - y_0). \end{array} \right.$$

Notons G la matrice définie par:

$$\begin{pmatrix} c(x_0)A & (c(x_0)c(y_0))^{\frac{1}{2}}A \\ (c(x_0)c(y_0))^{\frac{1}{2}}A & c(y_0)A \end{pmatrix}, \tag{17.32}$$

avec $A = \Big(a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^2(x_0 - y_0)\big)\Big)_{ij}$.

La matrice G est symétrique, semi-définie positive. On peut observer en effet, que pour tout $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$,

$$\left| \begin{array}{l} \xi^T G \xi = c(x_0)\xi_1^T A \xi_1 + \big(c(x_0)c(y_0)\big)^{\frac{1}{2}} \xi_1^T A \xi_2 + \big(c(x_0)c(y_0)\big)^{\frac{1}{2}} \xi_2^T A \xi_1 \\ + c(y_0)\xi_2^T A \xi_2. \end{array} \right.$$

Or, la matrice A est symétrique, semi-définie positive et on peut décomposer A en $A = \sigma\sigma^T$. Ainsi,

$$\left| \begin{array}{l} \xi^T G \xi = c(x_0)\xi_1^T \sigma\sigma^T \xi_1 + \big(c(x_0)c(y_0)\big)^{\frac{1}{2}} \xi_1^T \sigma\sigma^T \xi_2 + \big(c(x_0)c(y_0)\big)^{\frac{1}{2}} \xi_2^T \sigma\sigma^T \xi_1 \\ + c(y_0)\xi_2^T \sigma\sigma^T \xi_2. \end{array} \right.$$

On en déduit que:

$$\xi^T G \xi = |\sqrt{c(x_0)}\sigma^T \xi_1 + \sqrt{c(y_0)}\sigma^T \xi_2|^2 \geq 0.$$

La matrice G étant symétrique, semi-définie positive, on peut, par un argument analogue à celui précédemment formulé, décomposer G sous la forme $G = \chi\chi^T$. Cela implique que:

$$trace(G \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}) = trace(\chi\chi^T \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}).$$

Soit,

$$trace(G \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}) = trace(\chi^T \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \chi).$$

Et donc,

$$trace(G\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{4} (\chi_i)^T \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \chi_i, \text{ avec } \chi_i \text{ la } i^{ème} \text{ colonne de } \chi.$$

L'inégalité matricielle (17.31) précédemment obtenue conduit alors à:

$$\sum_{i=1}^{4} (\chi_i)^T \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \chi_i \leq 2(\epsilon)^{-1} \sum_{i=1}^{4} (\chi_i)^T \begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C \end{pmatrix} \chi_i.$$

Soit,

$$trace(G\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}) \leq 2(\epsilon)^{-1} trace(G\begin{pmatrix} C & -C \\ -C & C \end{pmatrix}).$$

D'où,

$$\left| \begin{array}{l} c(x_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)X_{ij} - c(y_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)Y_{ij} \\ \leq 2(\epsilon)^{-1}\big(c(x_0)^{\frac{1}{2}} - c(y_0)^{\frac{1}{2}}\big)^2 trace(AC). \end{array} \right. \tag{17.33}$$

On peut remarquer que $trace(AC) = |x_0 - y_0|^2$.

De l'inégalité précédente, il vient:

$$\left| \begin{array}{l} c(x_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)X_{ij} - c(y_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)Y_{ij} \\ \leq 2(\epsilon)^{-1}\big(c(x_0)^{\frac{1}{2}} - c(y_0)^{\frac{1}{2}}\big)^2 |x_0-y_0|^2. \end{array} \right. \tag{17.34}$$

En utilisant les inégalités (17.24), (17.25), (17.33) et (17.34) ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on en conclut que:

$$\left| \begin{array}{l} a - b = \lambda \leq c(x_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)X_{ij} - c(y_0)a_{ij}\big((\epsilon)^{-1}|x_0-y_0|^2(x_0-y_0)\big)Y_{ij} \\ \qquad + < \nabla(c(x_0)),(\epsilon^{-1})|x_0-y_0|^2(x_0-y_0) > - < \nabla(c(y_0)),(\epsilon^{-1})|x_0-y_0|^2(x_0-y_0) > \\ \qquad + k(\epsilon)^{-1}\big(c(x_0)-c(y_0)\big)|x_0-y_0|^3, \\ \qquad \leq 2(\epsilon)^{-1}\big(c(x_0)^{\frac{1}{2}} - c(y_0)^{\frac{1}{2}}\big)^2|x_0-y_0|^2 + (\epsilon^{-1})|\nabla(c(x_0)) - \nabla(c(y_0))||x_0-y_0|^3 \\ \qquad + k(\epsilon)^{-1}|c(x_0)-c(y_0)||x_0-y_0|^3. \end{array} \right. \tag{17.35}$$

Notant $\sqrt{\zeta}$, κ, C_1 les constantes de Lipschitz respectives de $x \mapsto c^{\frac{1}{2}}(x)$, $x \mapsto \nabla c(x)$ et $x \mapsto c(x)$, il existe donc K constante positive telle que:

$$\lambda \leq K(\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^4, \tag{17.36}$$

la constante K dépendant de $\sqrt{\zeta}$, κ, C_1 et k (on a supposé $k > 0$).

Suivant les arguments de Caselles *et al.* [23] et Alvarez *et al.* [5], nous cherchons désormais à estimer la quantité $|x_0 - y_0|$. Rappelons que le but est de prouver que $t_0 = 0$ et que dans cette perspective, nous avons raisonné par l'absurde et supposé $t_0 \neq 0$.
(t_0,x_0,y_0) étant un maximum de:

$$u(t,x) - v(t,y) - (4\epsilon)^{-1}|x-y|^4 - \lambda t,$$

si nous prenons $x = y = y_0$ et $t = t_0$, nous obtenons:

$$u(t_0,y_0) - v(t_0,y_0) - \lambda t_0 \leq u(t_0,x_0) - v(t_0,y_0) - (4\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^4 - \lambda t_0.$$

De cette dernière inégalité, on déduit:

$$(4\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^4 \leq u(t_0,x_0) - u(t_0,y_0).$$

Notant L la constante de Lipschitz en x associée à $u(t_0,\cdot)$, on en conclut que:

$$(4\epsilon)^{-1}|x_0 - y_0|^4 \leq u(t_0,x_0) - u(t_0,y_0) \leq L|x_0 - y_0|.$$

Ainsi, $|x_0 - y_0| \leq (4\epsilon L)^{\frac{1}{3}}$. De (17.36), on déduit que:

$$\lambda \leq M\epsilon^{\frac{1}{3}} L^{\frac{4}{3}}, \tag{17.37}$$

M étant la constante égale à $4^{\frac{4}{3}}K$.

Supposons que $\sup\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} |u - v| \neq 0$ (sinon il est aisé d'établir le point 2 du théorème proposé).

On choisit de prendre:

$$\begin{cases} \epsilon^{\frac{1}{3}} = \delta \sup\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} |u - v|, \\ \lambda = 2M\delta \sup\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} |u - v| L^{\frac{4}{3}}, \end{cases} \tag{17.38}$$

avec $\delta > 0$ determiné plus tard. Ce choix contredit l'inégalité (17.37) et prouve que $t_0 = 0$.

La seconde étape de la preuve consiste à établir une estimation de $\sup\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} |u - v|$. Puisque $t_0 = 0$, on a:

$$\begin{aligned} & u(t,x) - v(t,y) - (4\epsilon)^{-1}|x-y|^4 - \lambda t \\ & \leq \sup_{x,y\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \big(u_0(x) - v_0(y) - (4\epsilon)^{-1}|x-y|^4\big). \end{aligned} \tag{17.39}$$

Or,

$$\left|\begin{array}{l}\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\big(u_0(x)-v_0(y)-(4\epsilon)^{-1}|x-y|^4\big)\\ =\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\big(u_0(y)-v_0(y)+u_0(x)-u_0(y)-(4\epsilon)^{-1}|x-y|^4\big).\end{array}\right.$$

Arguant du fait que $|u_0(x)-u_0(y)|\leq L|x-y|$, on en déduit que:

$$\left|\begin{array}{l}\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2}\big(u_0(x)-v_0(y)-(4\epsilon)^{-1}|x-y|^4\big)\\ \leq\sup\limits_{\mathbb{R}^2}|u_0(y)-v_0(y)|+\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\big(L|x-y|-(4\epsilon)^{-1}|x-y|^4\big),\\ \leq\sup\limits_{\mathbb{R}^2}|u_0(y)-v_0(y)|+\sup\limits_{r\geq 0}\big(Lr-(4\epsilon)^{-1}r^4\big).\end{array}\right.$$

Il en résulte, prenant $x=y$ dans la partie gauche de l'inégalité (17.39), que:

$$-\lambda t+\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2}(u-v)\leq\sup_{\mathbb{R}^2}|u_0-v_0|+\frac{3}{4}L^{\frac{4}{3}}\epsilon^{\frac{1}{3}}. \tag{17.40}$$

En insérant les expressions (17.38) dans (17.40), il vient:

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2}(u-v)\leq\sup_{\mathbb{R}^2}|u_0-v_0|+\frac{3}{4}L^{\frac{4}{3}}\delta\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2}|u-v|+2M\delta L^{\frac{4}{3}}T\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2}|u-v|.$$

En permutant les rôles de u et v et en prenant $\delta\longrightarrow 0$, on obtient:

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2}|u-v|\leq\sup_{\mathbb{R}^2}|u_0-v_0|. \tag{17.41}$$

Cela prouve d'une part le point 2 du théorème proposé et d'autre part, l'unicité de la solution de viscosité.

Intéressons nous désormais à l'existence de la solution de viscosité. On remarque tout d'abord que si u est une solution,

$$\inf_{\mathbb{R}^2}u_0-\delta t\leq u\leq\sup_{\mathbb{R}^2}u_0+\delta t,\ \forall\delta>0,\ \text{ sur } [0,\infty[\times\mathbb{R}^2\ .$$

Par conséquent,

$$\inf_{\mathbb{R}^2}u_0\leq u\leq\sup_{\mathbb{R}^2}u_0. \tag{17.42}$$

Pour prouver cette assertion, considérons la fonction $\Phi(t,x)=\sup\limits_{\mathbb{R}^2}u_0+\delta t$, $\delta>0$, et supposons que $u-\Phi$ admet un maximum local en (t_0,x_0) avec $t_0>0$.

La définition d'une sous-solution de viscosité conduit alors à:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}(t_0,x_0) - c(x_0)\lim\sup\limits_{p\longrightarrow 0} a_{ij}(p)\ \partial_{ij}\Phi(t_0,x_0) \leq 0, \\ \text{ce qui implique } \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}(t_0,x_0) \leq 0, \\ \Rightarrow \delta \leq 0, \text{ en contradiction avec } \delta > 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, $t_0 = 0$.

Suivant toujours la démarche de Caselles *et al.* [23] et Alvarez *et al.* [5], on cherche à établir une estimation *a priori* de $|\nabla u|$. On suppose que les termes de l'équation (17.22) sont réguliers et l'on considère une solution régulière de notre problème. On vise à déterminer une équation parabolique satisfaite par $|\nabla u|^2$. Dans cette perspective, on différentie notre équation par rapport à la variable x_I et on applique la méthode de Bernstein. Pour plus de lisibilité, nous revenons dans ce qui suit aux écritures usuelles des sommes.

Rappelons l'équation que l'on considère ici:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j} c(x)a_{ij}(\nabla u)u_{ij} - < \nabla c(x),\nabla u > + H(x,\nabla u) = 0,$$

avec u_{ij} la dérivée partielle seconde $\partial_{ij}u$ et H l'opérateur défini par: $H(x,p) = -kc(x)|p|$, avec $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La différentiation conduit alors à:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_I}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial x_I}(x)\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)u_{ij} - c(x)\sum_{i,j}\sum_{l}\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{lI}u_{ij} - c(x)\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)u_{ijI} \\ &\quad -\sum_{l}\frac{\partial^2 c}{\partial x_I \partial x_l}(x)u_l - \sum_{l}\frac{\partial c}{\partial x_l}(x)u_{lI} + \frac{\partial H}{\partial x_I}(x,\nabla u) + \sum_{l}\frac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)u_{lI} = 0. \quad (17.43) \end{aligned}$$

On multiplie l'équation (17.43) par $2u_I$ et on somme sur l'indice I. On remarque que:

* $\displaystyle\sum_I 2u_I\frac{\partial u_I}{\partial t} = \frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial t}$.
* $\displaystyle -2c(x)\sum_I\sum_{ij}\sum_l\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}u_{lI}u_I = -c(x)\sum_{ij}\sum_l\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}$.
* $\displaystyle -2c(x)\sum_I\sum_{ij} a_{ij}(\nabla u)u_{ijI}u_I = -c(x)\sum_{ij} a_{ij}(\nabla u)\frac{\partial^2|\nabla u|^2}{\partial x_i\partial x_j} + 2c(x)\sum_I\sum_{ij} a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}u_{Ij}$.
* $\displaystyle -2\sum_I\sum_l\frac{\partial c}{\partial x_l}(x)u_{lI}u_I = -\sum_l\frac{\partial c}{\partial x_l}(x)\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}$.

$$* \ 2\sum_I\sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)u_{lI}u_I = \sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}.$$

On obtient alors:

$$\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial t} - c(x)\sum_{ij}\sum_l \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} - c(x)\sum_{ij} a_{ij}(\nabla u)\frac{\partial^2|\nabla u|^2}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_l \frac{\partial c}{\partial x_l}(x)\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}$$
$$+\sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} = 2\sum_I\sum_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_I}a_{ij}(\nabla u)u_{ij}u_I - 2c(x)\sum_I\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}u_{Ij}$$
$$+2\sum_I\sum_l \frac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}u_l u_I - 2\sum_I \frac{\partial H}{\partial x_I}u_I. \tag{17.44}$$

On a par ailleurs à l'aide de Cauchy-Schwartz, les inégalités suivantes:

$$* \ |2\sum_I \sum_l \frac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}u_l u_I| \le 2\sup_{I,\ l}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|\frac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}||\sum_I \sum_l u_I u_l| \le 4\sup_{I,\ l}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|\frac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}||\nabla u|^2.$$
$$* \ -2\sum_I \frac{\partial H}{\partial x_I}u_I = 2\ k|\nabla u|\ \sum_I \frac{\partial c}{\partial x_I}u_I \le 2\ k\ |\nabla u|^2\ |\nabla c|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\ .$$

Dans un premier temps, en insérant les inégalités qui viennent d'être établies dans (17.44), on obtient l'inégalité suivante:

$$\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial t} - c(x)\sum_{ij}\sum_l \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} - c(x)\sum_{ij} a_{ij}(\nabla u)\frac{\partial^2|\nabla u|^2}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_l \frac{\partial c}{\partial x_l}(x)\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}$$
$$+\sum_l \frac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)\frac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} \le 2\sum_I\sum_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_I}a_{ij}(\nabla u)u_{ij}u_I - 2c(x)\sum_I\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}u_{Ij}$$
$$+4\sup_{I,\ l}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|\frac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}||\nabla u|^2 + 2\ k\ |\nabla u|^2\ |\nabla c|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\ . \tag{17.45}$$

On a :

$$|\sum_I \frac{\partial c}{\partial x_I}| \le Mc(x)^{\frac{1}{2}}. \tag{17.46}$$

De surcroît, remarquant que $a_{ij}\xi_i\xi_j$ est positif, on a la relation algébrique :

$$|\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u)u_{ij}| \leq K_2\big(\sum_{i,j}\sum_{I} a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}\ u_{Ij}\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{17.47}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz ainsi que les relations (17.46) et (17.47) donnent:

$$2\sum_{I}\sum_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_I}a_{ij}(\nabla u)u_{ij}u_I \leq K_2M'|\nabla u|\big(\sum_{i,j}\sum_{I} c(x)a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}\ u_{Ij}\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{17.48}$$

Insérant (17.48) dans (17.45) et utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz $2ab \leq a^2+b^2$ dans (17.48), on en déduit que:

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial t} - c(x)\sum_{ij}\sum_{l}\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} - c(x)\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)\dfrac{\partial^2|\nabla u|^2}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{l}\dfrac{\partial c}{\partial x_l}(x)\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}\\
+\sum_{l}\dfrac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} \leq M''|\nabla u|^2 + c(x)\sum_{I}\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}u_{Ij}\\
-2c(x)\sum_{I}\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)u_{Ii}u_{Ij} + 4\sup_{I,\ l}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|\dfrac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}||\nabla u|^2 + 2\ k\ |\nabla c|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\ |\nabla u|^2.
\end{array}\right.$$

Il vient alors:

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial t} - c(x)\sum_{ij}\sum_{l}\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} - c(x)\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)\dfrac{\partial^2|\nabla u|^2}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{l}\dfrac{\partial c}{\partial x_l}(x)\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}\\
+\sum_{l}\dfrac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}\\
\leq M''|\nabla u|^2 + 4\sup_{I,\ l}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|\dfrac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}||\nabla u|^2 + 2\ k\ |\nabla c|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\ |\nabla u|^2.
\end{array}\right.$$

Et donc,

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial t} - c(x)\sum_{ij}\sum_{l}\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial p_l}(\nabla u)u_{ij}\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l} - c(x)\sum_{ij}a_{ij}(\nabla u)\dfrac{\partial^2|\nabla u|^2}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{l}\dfrac{\partial c}{\partial x_l}(x)\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}\\
+\sum_{l}\dfrac{\partial H}{\partial p_l}(x,\nabla u)\dfrac{\partial|\nabla u|^2}{\partial x_l}\\
\leq K_3|\nabla u|^2,
\end{array}\right.$$

K_3 est une constante qui dépend en particulier de

$$\sup_{I,\ l}\sup_{x\in\mathbb{R}^2}|\frac{\partial^2 c}{\partial x_I\partial x_l}|,\ \sup_{p}|a_{ij}(p)|,\ |\nabla c|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},\ |\nabla c^{\frac{1}{2}}|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)},\ k.$$

On note par $\mathscr{L}$ l'opérateur linéaire du membre de gauche de l'inégalité parabolique ci-dessus.

Dans ce qui suit, nous avons utilisé les rappels sur le principe du maximum dans le cas parabolique pages 172-173 de Aubert et Kornprobst [8]. On a, posant $v = |\nabla u|^2$:

$$v_t + \mathscr{L} v \leq K_3 v.$$

Il vient immédiatement:

$$\left| \begin{array}{l} v_t + \mathscr{L} v \leq K_3 \big(\max\limits_{x\in\mathbb{R}^2} v(t,x)\big), \text{ puis} \\ v(t,x) \leq |v_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + K_3 \displaystyle\int_0^t \max_{x\in\mathbb{R}^2} v(s,x)ds, \text{ et par suite} \\ |v|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}(t) \leq |v_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + K_3 \displaystyle\int_0^t |v|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}(s)ds. \end{array} \right.$$

Le lemme de Gronwall nous donne alors l'inégalité suivante:

$$|v|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}(t) \leq |v_0|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)} e^{K_3 t}.$$

Finalement,

$$|\nabla u(t,.)|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq A|\nabla u_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{17.49}$$

A dépend de T et de K_3.

Nous approchons désormais notre équation aux dérivées partielles initiale par une équation pour laquelle nous sommes aptes à produire des solutions régulières. Dans cette perspective, on note $u_0^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ la fonction périodique telle que $u_0^\epsilon \longrightarrow u_0$ uniformément, $|\nabla u_0^\epsilon|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq |\nabla u_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$, $|u_0^\epsilon|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq |u_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$. c_ϵ est définie par $c_\epsilon = c+\epsilon$, $H_\epsilon(x,p) = -kc_\epsilon(x)(|p|^2+\epsilon)^{\frac{1}{2}}$, $a_{ij}^\epsilon = \epsilon\delta_{ij} + \alpha_{ij}^\epsilon$ avec $\alpha_{ij}^\epsilon = \delta_{ij} - \dfrac{p_i p_j}{|p|^2+\epsilon}$.

La théorie générale des équations paraboliques quasilinéaires (cf. Ladyzhenskaja et Solonnikov [64]) nous permet de conclure à l'existence de la solution régulière telle que:

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} - c_\epsilon\ a_{ij}^\epsilon(\nabla u^\epsilon)\ u_{ij}^\epsilon - < \nabla c^\epsilon, \nabla u^\epsilon > + H_\epsilon(x,\nabla u^\epsilon) = 0,$$

avec $u^\epsilon(0,x) = u_0^\epsilon(x)$.

Utilisant l'estimation (17.49), on obtient:

$$|\nabla u^\epsilon(t,.)|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq A|\nabla u_0^\epsilon|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq A|\nabla u_0|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \equiv C_T.$$

D'où:

$$|u^\epsilon(t,x) - u^\epsilon(t,y)| \leq C_T|x-y|.$$

Nous avons enfin :

$$|u^\epsilon(s,x) - u^\epsilon(t,x)| \leq C_T|t-s|^{\frac{1}{2}}$$

En combinant ces deux dernières inégalités et en utilisant (17.42), on peut conclure grâce au théorème d'Arzela-Ascoli qu'il existe une sous-suite de u^ϵ convergeant uniformément sur $[0,T] \times \mathbb{R}^2$ vers une fonction

$$u \in C([0,T] \times \mathbb{R}^2) \bigcap L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)).$$

Chapitre 18

Discrétisation

Afin d'illustrer numériquement la méthode proposée, nous avons implémenté un algorithme fondé sur des schémas de type différences finies. Les contraintes géométriques fournies par l'utilisateur sont utiles et apparaissent dans plusieurs cas d'utilisation. Leur légitimité est claire lorsque des données d'image manquent (régions caractérisées par des niveaux de gris homogènes), ne permettant pas alors de visualiser nettement les contours de l'objet à segmenter. Le principe de l'algorithme est le suivant:

- L'utilisateur définit à l'aide de la souris, des points à approcher sur l'image préalablement filtrée I *(filtrage gaussien)* par l'action successive de masques (3,1) et (1,3) (voir Sonka *et al.* [99] pour plus de détails).
- La fonction distance introduite dans notre modèle est alors approchée par la méthode de "Fast Marching" (cf. Sethian [96]).
- Cette fonction distance est normalisée afin d'accorder un poids équivalent aux contraintes géométriques et à l'information dont on dispose sur l'image (*fonction* g).
- L'utilisateur définit ensuite une condition initiale simple du type paraboloïde ou cône elliptique.
- La fonction g est calculée ainsi que son gradient. Les dérivées partielles de l'image sont approchées par application de masques classiques du type Sobel, pour le gradient en x: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour le gradient en y: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (cf. Sonka *et al.* [99] pour plus de détails).
- On rentre dans la boucle. On construit à chaque itération le système linéaire obtenu par discrétisation de l'opérateur divergence. La matrice du système ainsi établi est creuse. Le second membre est calculé. On obtient alors Φ^{n+1}. A chaque itération, on visualise l'évolution du niveau zéro de Φ. Cette courbe est obtenue en utilisant la propriété de changement de signe de Φ, selon qu'on se situe dans le sous-ensemble de Ω intérieur au niveau zéro ou extérieur.
- Le critère d'arrêt de l'algorithme est soit un nombre prédéfini d'itérations, soit la vérification que la solution est stationnaire en évaluant l'erreur relative entre Φ^n et Φ^{n+1}.

18.1 Introduction d'un schéma AOS (cf. Weickert *et al.* [109] et Weickert [108])

Le problème de minimisation introduit dans la modélisation de notre problème a conduit à la résolution d'une équation aux dérivées partielles avec conditions de Neumann homogènes au bord. L'équation d'évolution de Φ est donnée à chaque instant t par, on le rappelle:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = |\nabla \Phi| div\left(d(x)g(|\nabla I(x)|)\dfrac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}\right) + kd(x)g(|\nabla I(x)|)|\nabla \Phi| \text{ sur } \Omega \times [0, +\infty[, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \Phi(x,0) = \Phi_0. \end{cases}$$

Contrairement aux modèles déformables classiques, l'implémentation de notre modèle est réalisée sur une grille discrète fixe, suivant les coordonnées en x et en y. Les changements de topologie sont automatiquement gérés ce qui signifie que la courbe associée au niveau zéro peut se scinder en plusieurs composantes.
Malgré les avantages que présente notre modèle par rapport aux contours actifs classiques, il reste néanmoins vrai qu'une implémentation basique de ce modèle pose le problème du coût de calculs, l'équation aux dérivées partielles devant être évaluée sur Ω.
Par ailleurs, comme le soulignent Weickert *et al.* [109], la plupart des méthodes numériques proposées pour la résolution de ce type de problème sont fondées sur des schémas qui nécessitent de petits pas temporels. Tandis que le premier problème émergeant de l'implémentation de ces méthodes peut être résolu par l'application d'une technique "Narrow Band", le second impose des choix particuliers de schémas numériques: c'est à ce dernier point que nous nous attachons. Nous optons pour un schéma de type AOS (*"Additive Operator Splitting"*), schéma introduit par Weickert *et al.* [109] et [110] et Weickert [108]. Ce schéma a la propriété d'être inconditionnellement stable. Nous présentons dans ce qui suit, les caractéristiques de ce schéma numérique. On rappelle le schéma classique de discrétisation spatiale du terme de la forme $div(c|\nabla \Phi|)$. Ainsi,

$$\begin{cases} div(c\nabla \Phi) \simeq \partial_x(c_{ij}\dfrac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j}}{h}) + \partial_y(c_{ij}\dfrac{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}{h}), \\ \simeq c_{i+\frac{1}{2},j}\dfrac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{h^2} - c_{i-\frac{1}{2},j}\dfrac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{h^2} + c_{i,j+\frac{1}{2}}\dfrac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{h^2} - c_{i,j-\frac{1}{2}}\dfrac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{h^2}. \end{cases}$$

Les termes $c_{\substack{+\\ i-\frac{1}{2},j}}$ et $c_{\substack{+\\ i,j-\frac{1}{2}}}$ sont déterminés à l'aide d'une interpolation linéaire.
Pour simplifier les notations, nous utilisons une représentation vectorielle de notre fonction Φ par concaténation des lignes. Désormais, $\Phi \in \mathbb{R}^{N\times M}$ avec N le nombre de lignes et M le nombre de colonnes. Le centre de gravité d'un pixel quelconque i est associé à un nœud du maillage de coordonnées x_i. Ainsi, Φ_i^n correspond à une approximation de $\Phi(x_i,t_n)$.

On suppose dans un premier temps k nul.

La discrétisation de l'équation d'évolution satisfaite par Φ à l'aide d'un schéma semi-implicite

s'exprime sous la forme:

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n + \tau |\nabla\Phi|_i^n \sum_{j\in\Lambda(i)} \frac{(\frac{dg}{|\nabla\Phi|})_i^n + (\frac{dg}{|\nabla\Phi|})_j^n}{2} \frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_i^{n+1}}{h^2}, \tag{18.1}$$

où $\Lambda(i)$ désigne l'ensemble des voisins de i. Cette formulation correspond à l'application du schéma de type différences finies précédent avec

$$c(x) = \frac{d(x)g(|\nabla I(x)|)}{|\nabla\Phi(x)|},$$

avec interpolation des termes du type $c_{\overset{+}{i-\frac{1}{2}},j}$ et $c_{i,\overset{+}{j-\frac{1}{2}}}$.

Une implémentation immédiate de ce schéma conduit à des difficultés induites par la composante $|\nabla\Phi|$, en particulier si celle-ci s'annule. Dans [109], Weickert *et al.* proposent de remplacer la moyenne arithmétique $\dfrac{(\frac{dg}{|\nabla\Phi|})_i^n + (\frac{dg}{|\nabla\Phi|})_j^n}{2}$ par son expression harmonique. On obtient:

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n + \tau |\nabla\Phi|_i^n \sum_{j\in\Lambda(i)} \frac{2}{(\frac{|\nabla\Phi|}{dg})_i^n + (\frac{|\nabla\Phi|}{dg})_j^n} \frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_i^{n+1}}{h^2}. \tag{18.2}$$

Si $|\nabla\Phi|_i^n = 0$ ou $(dg)_i = 0$, on pose:

$$\Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n.$$

On introduit l'écriture matricielle suivante:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \tau \sum_{l\in\{x,y\}} A_l(\Phi^n)\Phi^{n+1}. \tag{18.3}$$

$A_x(\Phi^n)$ est la matrice constituée des éléments $\big(a_{ij_x}(\Phi^n)\big)_{ij}$ définis par:

$$a_{ij_x}(\Phi^n) = \begin{cases} |\nabla\Phi|_i^n \dfrac{2}{(\frac{|\nabla\Phi|}{dg})_i^n + (\frac{|\nabla\Phi|}{dg})_j^n}, \ j \in \Lambda_x(i), \\ -|\nabla\Phi|_i^n \displaystyle\sum_{m\in\Lambda_x(i)} \dfrac{2}{(\frac{|\nabla\Phi|}{dg})_i^n + (\frac{|\nabla\Phi|}{dg})_m^n}, \ i = j, \\ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

avec $\Lambda_x(i)$ l'ensemble des voisins de i dans la direction x.
Les composantes de la matrice $A_y(\Phi^n)$ sont déterminées de manière analogue.

Φ^{n+1} n'est donc pas déterminée directement. Il nous faut résoudre le système linéaire suivant:

$$\big(Id - \tau \sum_{l\in\{x,y\}} A_l(\Phi^n)\big)\Phi^{n+1} = \Phi^n.$$

Considérons la matrice $\big(Id - \tau \sum_{l\in\{x,y\}} A_l(\Phi^n)\big)$, Id désignant la matrice identité. Cette matrice est à diagonale strictement dominante, pentadiagonale, tridiagonale par blocs .
La matrice étant à diagonale strictement dominante, zéro n'est pas valeur propre et l'inversibilité de la matrice est donc immédiate. On a également l'unicité de la solution de notre système.

Néanmoins, le coût de calculs reste élevé du fait en particulier, de la structure de la matrice. La matrice du système est creuse par bandes avec au plus 5 coefficients non-nuls par ligne (*cas 2D*), cela en raison de la numérotation des nœuds utilisée pour la grille discrète. Il n'est pas possible de trouver un ordre de points plus optimal réduisant la largeur de bandes.
La résolution de ce système nécessite l'application de méthodes itératives dont la convergence cependant, demeure lente en particulier quand le paramètre τ augmente car le conditionnement de la matrice augmente (cf. Weickert *et al.* [109]). Une alternative à la discrétisation de ce type de problèmes est proposée par Weickert *et al.* dans [109]. Ils proposent en effet d'appliquer le modèle AOS plutôt que le schéma semi-implicite développé plus haut. Au lieu d'appliquer le schéma semi-implicite:

$$\Phi^{n+1} = \big(Id - \tau \sum_{l\in\{x,y\}} A_l(\Phi^n)\big)^{-1}\Phi^n,$$

Weickert *et al.* considèrent le schéma AOS suivant:

$$\Phi^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{l\in\{x,y\}} \big(Id - 2\tau A_l(\Phi^n)\big)^{-1}\Phi^n. \tag{18.4}$$

L'application d'un développement de Taylor montre que ces deux schémas diffèrent d'une quantité en $O(\tau^2)$.

Le schéma AOS conduit à:

$$2\Phi^{n+1} = \big(Id - 2\tau A_x(\Phi^n)\big)^{-1}\Phi^n + \big(Id - 2\tau A_y(\Phi^n)\big)^{-1}\Phi^n. \tag{18.5}$$

Posons pour $l \in \{x,y\}$, $B_l(\Phi^n) = Id - 2\tau A_l(\Phi^n)$. B est une matrice à diagonale strictement dominante et peut s'exprimer sous forme d'une matrice tridiagonale (modification de l'ordre de numérotation des noeuds de la grille discrète) pour les deux directions. Les deux sous-systèmes ainsi introduits peuvent être résolus efficacement par l'algorithme de Thomas que nous détaillons dans ce qui suit. L'équation (18.5) est donc résolue de la manière suivante:

1. On résout le premier sous-système $\big(Id - 2\tau A_x(\Phi^n)\big)v^{n+1} = \Phi^n$.
2. On résout le second sous-système $\big(Id - 2\tau A_y(\Phi^n)\big)w^{n+1} = \Phi^n$.
3. On fait la moyenne arithmétique de v^{n+1} et w^{n+1} pour obtenir Φ^{n+1} soit $\Phi^{n+1} = \frac{1}{2}(v^{n+1} + w^{n+1})$.

On constate une symétrie dans le traitement de la direction x et de la direction y. Les schémas AOS séparent les axes d'étude x et y et possèdent la propriété d'additivité. Ils sont de plus, inconditionnellement stables. Le schéma AOS appliqué induit la résolution de deux systèmes linéaires dont les matrices sont tridiagonales, à diagonale strictement dominante.

18.1.1 Stabilité du schéma

La matrice $B_l(\Phi^n) = Id - 2\tau A_l(\Phi^n)$ est une matrice à diagonale strictement dominante telle que pour l fixé, $b_{ii} > 0$ pour tout i et $b_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$. On peut en conclure que $Q_l(\Phi^n) = B_l^{-1}(\Phi^n)$ n'a que des composantes positives (cf. Meis *et al.* [79] ou Varga [103] pour plus de détails).
De plus, la somme des éléments de chaque ligne de $B_l(\Phi^n)$ est égale à 1. Posant, $w = (1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^N$, on a:

$$B_l(\Phi^n)w = w \Rightarrow w = B_l(\Phi^n)^{-1}w = Q_l(\Phi^n)w.$$

Cela prouve que la somme des éléments de chaque ligne de $Q_l(\Phi^n)$ est égale à 1.

On en conclut finalement que $Q(\Phi^n) = \frac{1}{2}\sum_l B_l^{-1}(\Phi^n) = \frac{1}{2}\sum_l Q_l(\Phi^n)$ possède la même caractéristique, à savoir que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.
$Q(\Phi^n)$ est constituée d'éléments positifs et tels que la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

La résolution de $\Phi^{n+1} = Q(\Phi^n)\Phi^n$ montre que chaque composante de Φ^{n+1} est calculée à partir d'une combinaison convexe de composantes de Φ^n. On en déduit que $\forall i$,

$$\min_j u_j^n \leq u_i^{n+1} \leq \max_j u_j^n, \textit{ (principe discret du maximum-minimum).}$$

La stabilité du système est donc assurée, quelque soit le choix de τ, pas temporel. Pour un pas spatial de 1, Weickert *et al.* [109] préconisent de prendre un pas temporel qui n'excède pas 5 et cela, pour préserver l'efficacité de l'algorithme en particulier lorsque l'image présente des artefacts.

18.1.2 Introduction de la force type force de gonflage du modèle des "Balloons"

Nous avons négligé jusqu'à maintenant le terme $kdg(|\nabla I|)|\nabla\Phi|$ (*interprété en terme de contrainte d'aire*) qui peut être assimilé à la force de gonflage du modèle des "Balloons". La fonction $dg(|\nabla I|)$ pondère l'expression et permet d'annuler l'action de cette force quand on se situe sur un contour ou sur un point à approcher. La discrétisation du gradient requiert une certaine attention ici car il est facteur d'une composante constante.(En effet, si la courbe se propage dans plusieurs directions *(selon sa courbure par exemple)*, il n'y a pas de problèmes). Une discrétisation du gradient avec des schémas classiques peut conduire à la formation de boucle lors de la propagation d'un coin (cf. figure 18.1 issu de Petitjean [90]). La condition d'entropie de Sethian [96] et [95] interdit à la courbe de se propager là où elle est déjà passée.

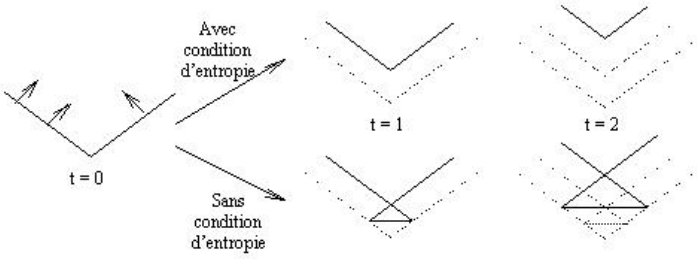


FIG. 18.1 – *Propagation d'un coin. Au-dessus, avec la condition d'entropie: pas de formation de boucle au cours de la propagation. Au-dessous, sans la condition d'entropie.*

Les lois de conservation hyperboliques permettent d'obtenir l'expression du gradient. On applique les schémas (8.4) proposés dans la partie I, chapitre 8. On intègre cette composante dans l'équation (18.4) et on obtient finalement:

$$\Phi^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{l \in \{x,y\}} \big(Id - 2\tau A_l(\Phi^n)\big)^{-1} \big(\Phi^n + \tau k dg(|\nabla I|)|\nabla \Phi|^n\big). \tag{18.6}$$

Dans [85], Osher et Sethian montrent que l'approximation de l'équation d'évolution $\Phi_t = \pm|\nabla\Phi|$ sur une grille discrète de pas spatial $h = 1$ est stable pour un pas temporel τ tel que $\tau \leq 0.5$ (cf. partie I, chapitre 8). Dans l'équation (18.6), le schéma est donc stable si $\tau|k|dg(|\nabla I|) \leq 0.5$. La fonction g est bornée par 1, la fonction distance d est normalisée donc bornée par 1 et $|k|$ est généralement une fraction de l'unité. Weickert *et al.* [109] soulignent qu'un choix de pas temporel τ trop élevé altère significativement la qualité des résultats obtenus avec le schéma semi-implicite de type AOS.
La contrainte sur le choix du pas temporel τ n'est donc pas drastique.

18.2 Algorithme de Thomas

Comme le soulignent Weickert *et al.* [109], l'algorithme de Thomas est le plus adapté à la résolution de ce type de problème.
Le principe est succintement développé dans ce qui suit.
Considérons le système linéaire suivant:

$$Bu = d, \text{ avec } B \in M_N(\mathbb{R}) \text{ définie par:}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ & \gamma_2 & \alpha_3 & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \gamma_{N-2} & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} \\ & & & & \gamma_{N-1} & \alpha_N \end{pmatrix}.$$

On procède dans une première étape à la décomposition LR de B. Cette décomposition permet d'exprimer B sous la forme d'un produit d'une matrice bidiagonale inférieure L et

d'une matrice bidiagonale supérieure R définies par:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{N-1} & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$R = \begin{pmatrix} m_1 & r_1 & & & \\ & m_2 & r_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m_{N-1} & r_{N-1} \\ & & & & m_N \end{pmatrix}.$$

On a alors:

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \cdots, N-1\},\ r_k = \beta_k, \\ m_1 = \alpha_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \cdots, N-1\},\ l_k = \dfrac{\gamma_k}{m_k}, \\ \text{et} \quad m_{k+1} = \alpha_{k+1} - \beta_k l_k. \end{cases}$$

On résout $LRu = d$.

La seconde étape du raisonnement consiste à résoudre le système:

$$Ly = d \ \textit{(filtre causal)}.$$

On obtient:

$$\begin{cases} y_1 = d_1. \\ \forall k \in \{2, \cdots, N\},\ y_k = d_k - y_{k-1} l_{k-1}. \end{cases}$$

La troisième étape du raisonnement consiste à résoudre le système:

$$Ru = y \ \textit{(filtre anticausal)}.$$

On obtient:

$$\begin{cases} u_N = \dfrac{y_N}{m_N}. \\ \forall k \in \{1, \cdots, N-1\},\ u_{N-k} = \dfrac{y_{N-k} - \beta_{N-k} u_{N-k+1}}{m_{N-k}}. \end{cases}$$

On peut dresser un bilan total du coût de calculs qui est linéaire:

1. La décomposition LR nécessite $2(N-1)$ divisions-multiplications et $N-1$ soustractions.
2. La résolution du système $Ly = d$ nécessite $N-1$ multiplications et $N-1$ soustractions.
3. La résolution du système $Ru = y$ nécessite $N-1$ multiplications, $N-1$ soustractions et N divisions.

Ainsi le coût total de la résolution du système est de $3N-3$ soustractions et $5N-4$ divisions-multiplications.

18.3 Alternative à cette méthode

Contrairement aux travaux récents de Goldenberg *et al.* [56], le modèle AOS proposé ne nécessite pas le calcul à chaque étape de la reconstruction de Φ comme étant la distance signée, ce qui présente l'avantage d'alléger le coût de calculs.
Le modèle des contours actifs géodésiques que Goldenberg *et al.* [56] considèrent est défini par:

$$\partial_t \Phi = div\big(g(|\nabla u_0|)\frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|}\big)|\nabla \Phi|,$$

avec u_0 l'image donnée et Φ la représentation implicite de la courbe. L'intérêt étant le niveau zéro de Φ, Goldenberg *et al.* [56] proposent à chaque itération de réinitialiser Φ comme la fonction distance signée: procédé standard dans le contexte des méthodes "level set" qui peut être appréhendé comme un rescaling. Pour cela, il suffit de résoudre l'équation aux dérivées partielles suivantes:

$$\begin{cases} \Psi_\tau = signe(\Psi_0)(1 - |\nabla \Psi|), \\ \Psi(0,\cdot) = \Phi(t,\cdot). \end{cases}$$

$\Phi(t,\cdot)$ est la solution de notre problème initial au temps t. Le $\Phi(t,\cdot)$ réinitialisé sera alors Ψ, obtenu à l'état stationnaire du problème ci-dessus.
Ψ a le même niveau zéro que $\Phi(t,\cdot)$ et $|\nabla \Psi|$ converge vers 1.
Le problème considéré dans cette perspective peut être reformulé par:

$$\partial_t \Phi = div\big(g(|\nabla u_0|)\nabla \Phi\big).$$

Chapitre 19

Résultats numériques

19.1 Etude préliminaire

Dans cette section, nous avons procédé à une série d'applications attestant de l'efficacité de l'algorithme: étude du mouvement par courbure moyenne, déplacement constant, reconstruction de forme, etc...

19.1.1 Validation des propriétés géométriques du mouvement par courbure moyenne

Application à une spirale

On s'intéresse désormais aux propriétés géométriques du déplacement par courbure moyenne (cf. Osher et Fedkiw [83] pour plus de détails).
On considère une spirale. Cette spirale est appréhendée comme le niveau zéro de la fonction Φ, fonction distance signée associée.
On applique le mouvement par courbure moyenne à la fonction Φ, mouvement régi par l'équation:

$$\Phi_t = \kappa|\nabla\Phi|. \tag{19.1}$$

Dans la figure 19.1, nous représentons l'évolution de la spirale à divers instants, *(pour plus de lisibilité, on a représenté l'ensemble des points x de Ω tels que $\Phi(x,t) \leq 0$)*. L'analyse de cette application montre que les extrémités de la spirale qui présentent une courbure élevée, se déplacent plus rapidement que le corps de la spirale qui possède une courbure plus faible. Cette conclusion est en adéquation avec l'interprétation géométrique de l'équation (19.1).
En effet, l'équation d'évolution du niveau zéro de Φ noté Γ est donnée par:

$$\Gamma_t = \kappa\vec{N}, \tag{19.2}$$

où $\vec{N}$ est la normale unitaire intérieure. L'interface évolue donc suivant la normale unitaire intérieure avec une vitesse proportionnelle à la courbure. Aux extrémités de la spirale, la courbure est positive et très élevée, ainsi le déplacement est rapide contrairement au corps de la spirale dont la courbure est plus faible.

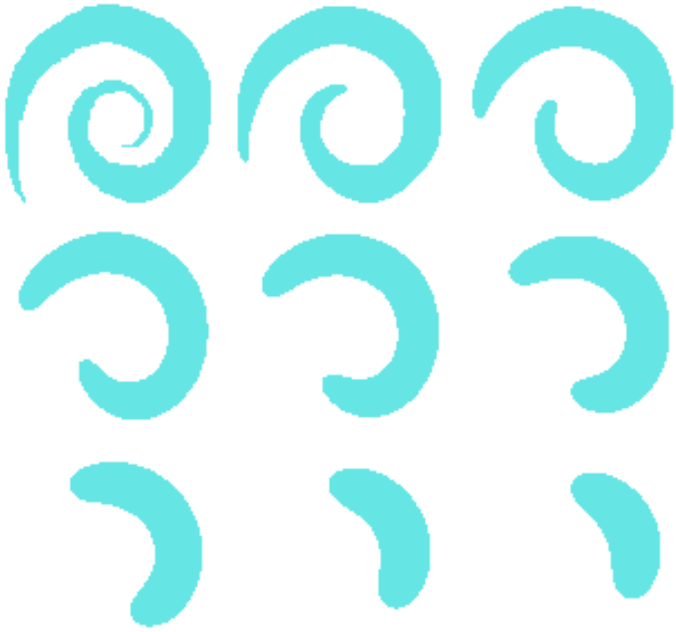
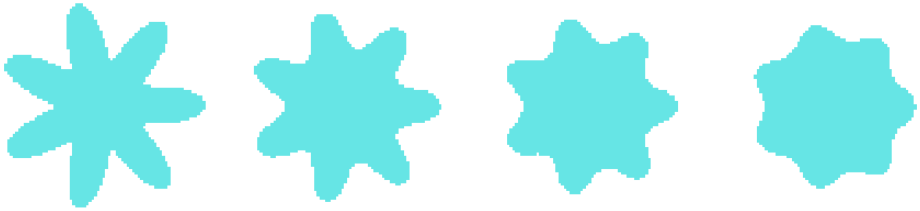


FIG. 19.1 – *Représentation du mouvement par courbure moyenne d'une spirale au temps* $t = 0$, $t = 10$, $t = 30$, $t = 70$, $t = 100$, $t = 140$, $t = 200$, $t = 270$ *et* $t = 300$.

Application à une étoile

Une seconde application a été réalisée sur une étoile (figure extraite de Osher et Fedkiw [83]). Nous présentons les résultats obtenus dans ce qui suit.



Les branches de l'étoile *(convexes)* présentent une courbure positive et donc le déplacement s'effectue vers l'intérieur. En revanche, les creux entre les branches *(concaves)* possèdent une courbure négative. Le mouvement s'effectue donc vers l'extérieur.

FIG. 19.2 – *Représentation du mouvement par courbure moyenne d'une étoile au temps* $t = 0$, $t = 10$, $t = 20$, $t = 30$, $t = 40$, $t = 50$, $t = 60$, $t = 80$.

19.1.2 Validation des propriétés géométriques du mouvement dans la direction de propagation normale

Application à une étoile

Pour plus de détails, on renvoie le lecteur au chapitre 6 de Osher et Fedkiw [83].
On considère le déplacement de l'étoile suivant la direction normale de propagation. Comme précédemment, pour plus de lisibilité, nous avons représenté sur la figure 19.3 , l'ensemble des points x satisfaisant $\Phi(x,t) \leq 0$.
L'équation d'évolution de Γ *(contour de l'étoile)*, niveau zéro de Φ, est donnée par:

$$\Gamma_t = \frac{1}{2}\vec{N}, \tag{19.3}$$

où $\vec{N}$ désigne la normale unitaire extérieure.
L'équation d'évolution de Φ, fonction distance signée à Γ est, on le rappelle, définie par:

$$\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi| = 0. \tag{19.4}$$

Φ étant la fonction distance signée à Γ, l'équation (19.4) se réduit à:

$$\Phi_t + \frac{1}{2} = 0. \tag{19.5}$$

L'application d'un schéma de type différences finies d'Euler (cf. Osher et Fedkiw [83]) donne: $\Phi^{n+1} = \Phi^n - \frac{1}{2}\Delta t$.
Ainsi, le niveau zéro de Φ devient l'isocontour défini par $\Phi = -\frac{1}{2}\Delta t$ au temps suivant.
De même, l'isocontour défini par $\Phi = \frac{1}{2}\Delta t$ devient au temps suivant l'iscocontour $\Phi = 0$.
Enfin, une propriété intéressante est que $\nabla\Phi^{n+1} = \nabla\Phi^n$. Φ^0 étant la fonction distance signée à Γ, à chaque instant $t_n = \Delta tn$, cette caractéristique est préservée.

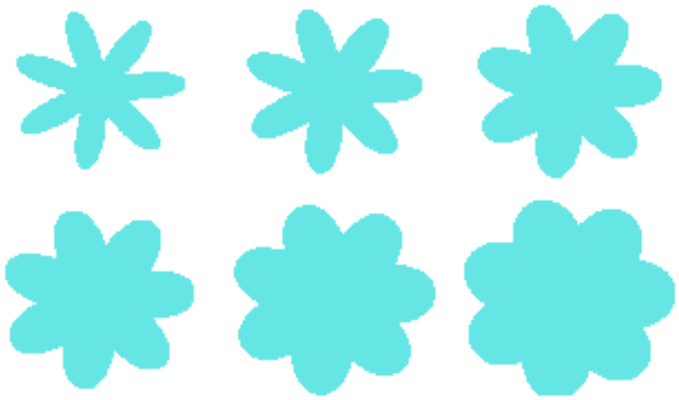


FIG. 19.3 – *Représentation du mouvement dans la direction de propagation normale d'une étoile aux temps* $t = 0$, $t = 3$, $t = 7$, $t = 10$, $t = 15$ *et* $t = 20$.

19.1.3 Validation de l'approche "reconstruction de formes"

Pour valider l'algorithme sous son aspect *"reconstruction de formes"*, nous proposons une application simple: la fonction g est identiquement égale à 1 de telle sorte que l'information sur l'image n'intervient plus.

L'image représente donc le contour d'une main. L'ensemble de points constitué des points du contour de la main est l'ensemble S. On cherche à approcher au mieux les points de S. La distance de chaque point de l'image à l'ensemble S est approchée à l'aide de la méthode "Fast Marching". La fonction distance est ensuite normalisée. Le pas temporel est de 1. Le paramètre k est choisi égal à 0.1. Un second test a été réalisé en prenant $k = 0$. Le résultat obtenu est identique mais l'ajout de la force constante interprétée en terme de contrainte d'aire a pour effet de diminuer le nombre d'itérations de moitié et donc d'accélérer la convergence en particulier lorsque la topologie du front change *(creux entre les doigts de la main dont la segmentation nécessite que le front devienne concave)*. De façon générale, c'est la conclusion que nous avons pu tirer des multiples exemples qui ont été traités.
Nous proposons dans ce qui suit certaines des étapes de l'évolution du contour.

FIG. 19.4 – *Représentation de l'ensemble des points de S.*

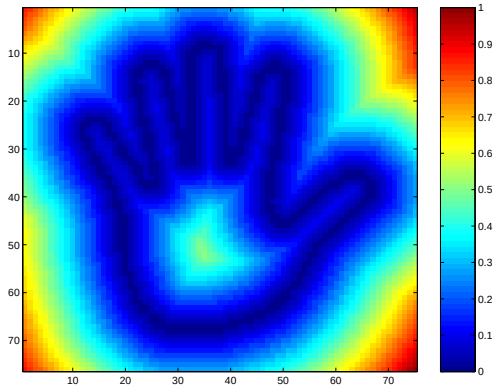


FIG. 19.5 – *Représentation de la carte de distances normalisées.*

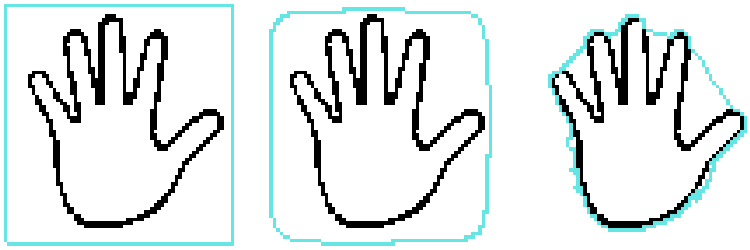


FIG. 19.6 – *Contour initial, itération 20 et itération 220.*

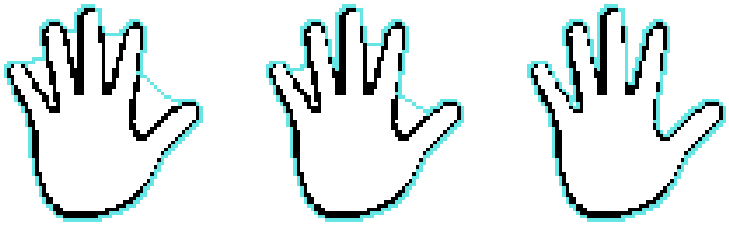


FIG. 19.7 – *Itération 420, itération 620 et contour final.*

19.1.4 Validation de l'algorithme de reconstruction dans le cas d'un ensemble discret de points en 2 dimensions

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 7 de la partie I, si S est un ensemble discret de points, le polygone reliant les points de S est un minimum de l'énergie introduite dans la modélisation.
Nous achevons cette section par une application relative à cette conclusion. La fonction g est identiquement égale à l'unité. L'ensemble S est constitué de 5 points distincts. Partant d'une condition initiale, on lui applique une déformation et à l'équilibre, on obtient le polygone joignant les points de S.

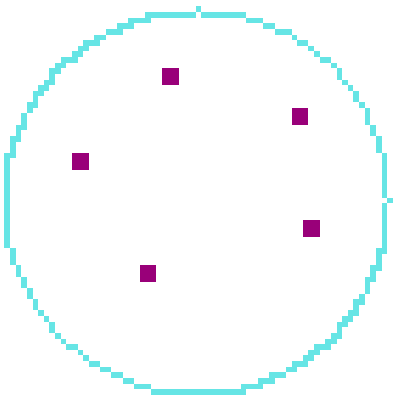


FIG. 19.8 – *Représentation du contour initial (bleu) et de l'ensemble S (points en violet).*

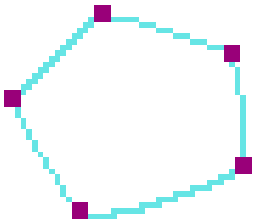


FIG. 19.9 – *Représentation de la courbe finale: polygone.*

19.2 Validation de l'algorithme sans contraintes géométriques

La première phase de tests réalisée a consisté à proposer quelques applications sans contraintes géométriques, afin de mettre en exergue les propriétés des contours actifs géodésiques. Le premier exemple proposé illustre le fait que les changements topologiques sont correctement gérés par la méthode des contours actifs géodésiques classiques.

19.2.1 Image de la main

On considère dans ce qui suit, une image de taille 111×110 (cf. figure 19.12).
En premier lieu, nous représentons la fonction $g(|\nabla I|)$ associée, $g : s \mapsto \dfrac{1}{1+s^2}$.
La représentation du champ de gradients $-\nabla g(|\nabla I|)$ montre qu'au niveau d'un bord, les vecteurs pointent vers le milieu de ce bord, ce qui est garant d'une bonne extraction des contours en particulier lorsque la variation du gradient est importante le long d'un contour. Cette caractéristique se traduit en 1D par la formation de creux au niveau d'un bord (cf.

Caselles *et al.* [24]).
Cette composante est efficiente quand le vecteur $-\nabla g(|\nabla I|)$ est colinéaire au vecteur normal de propagation. Partant d'une condition initiale simple de forme convexe, le contour évolue pour venir épouser le contour de la main de forme non-convexe. Les changements de topologie sont donc réalisés sans difficultés, sans artifices supplémentaires, contrairement aux modèles déformables classiques qui imposent à la courbe finale d'avoir la même topologie que la courbe initiale.

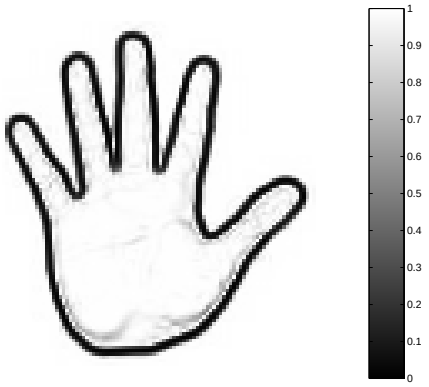


FIG. 19.10 – *Représentation de la fonction g.*

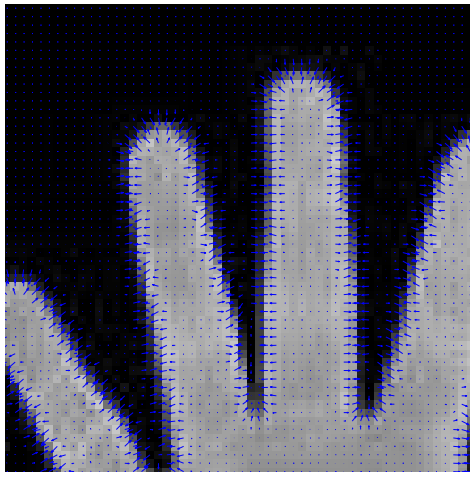


FIG. 19.11 – *Représentation du champ de gradients.*

Nous proposons dans ce qui suit, (cf. figures 19.12 et 19.13), certaines étapes de l'évolution du contour. La condition initiale est donnée par: $\Phi = (X-55)^2+(Y-55)^2-50^2$. La discrétisation employée autorise un choix de pas temporel assez élevé. Ici, $\tau = 1$. Le coefficient k est égal à 0.1. Le contour n'évolue plus après 320 itérations.

FIG. 19.12 – *Représentation de la condition initiale, du niveau zéro de Φ au temps $t = 40$ et au temps $t = 80$.*

FIG. 19.13 – *Représentation du niveau zéro de* Φ *au temps* $t = 200$*, au temps* $t = 280$ *et contour final.*

19.2.2 Image de pièces issue de Matlab

Le second exemple proposé illustre le fait que l'utilisation d'une approche "level set" permet de gérer les séparations de front et donc de segmenter plusieurs objets sans introduction d'artifices supplémentaires comme dans les méthodes classiques de contours actifs.
En premier lieu, nous représentons la fonction $g(|\nabla I|)$ associée (cf. figure 19.14), $g : s \mapsto \dfrac{1}{1+s^2}$ ainsi que le champ de gradients $-\nabla g(|\nabla I|)$, (cf. figure 19.15).

FIG. 19.14 – *Représentation de la fonction* g.

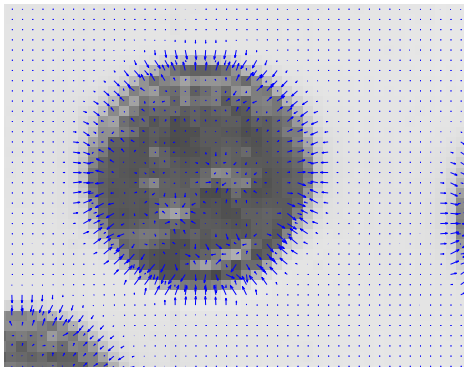


FIG. 19.15 – *Représentation du champ de gradients.*

Nous proposons dans ce qui suit certaines étapes de l'évolution du niveau zéro de la fonction Φ. Le pas temporel est égal à $\tau = 2$ et le coefficient k égal à 0.1. Le contour n'évolue plus après l'itération 420.

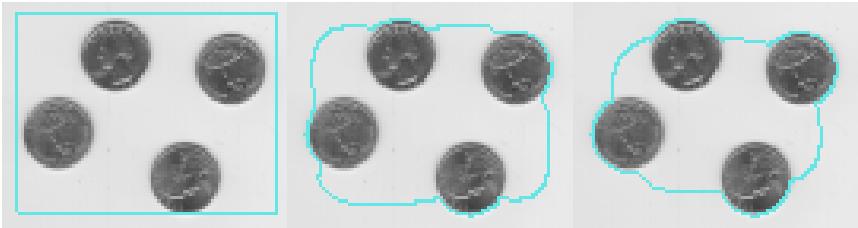


FIG. 19.16 – *Représentation de la condition initiale, du niveau zéro de* Φ *au temps* $t = 40$ *et au temps* $t = 80$.

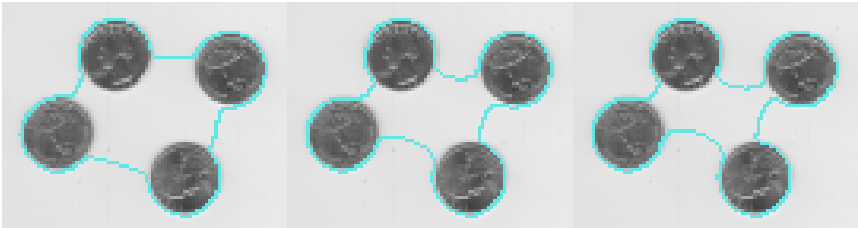


FIG. 19.17 – *Représentation du niveau zéro de* Φ *au temps* $t = 160$, *au temps* $t = 360$ *et au temps* $t = 480$.

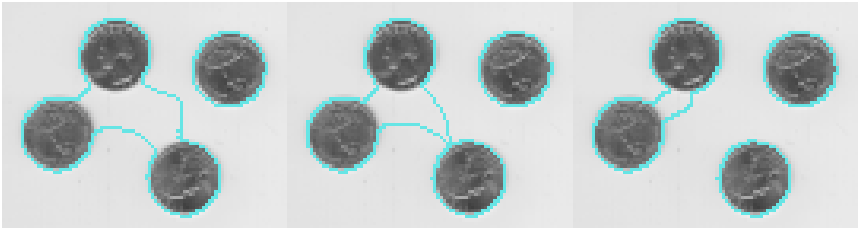


FIG. 19.18 – *Représentation du niveau zéro de* Φ *au temps* $t = 520$, *au temps* $t = 560$ *et au temps* $t = 600$.

On donne ci-après, le résultat final, la fonction Φ initiale et la fonction Φ finale.

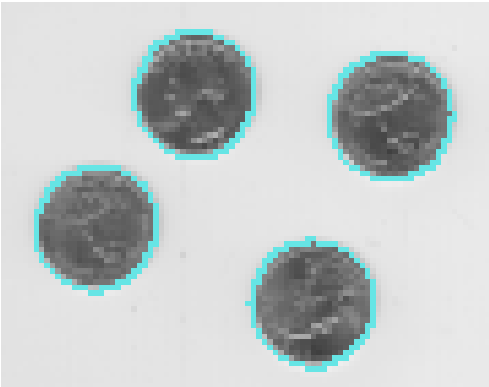


FIG. 19.19 – *Représentation du contour final,* $t = 840$.

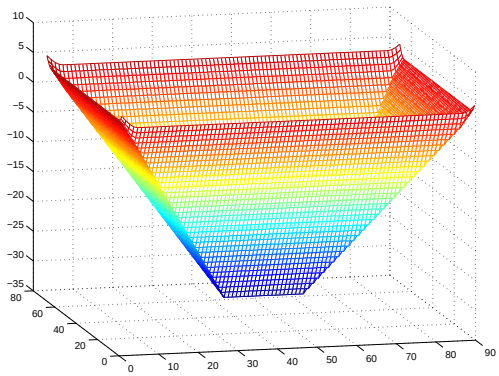


FIG. 19.20 – *Représentation de la fonction* Φ *initiale.*

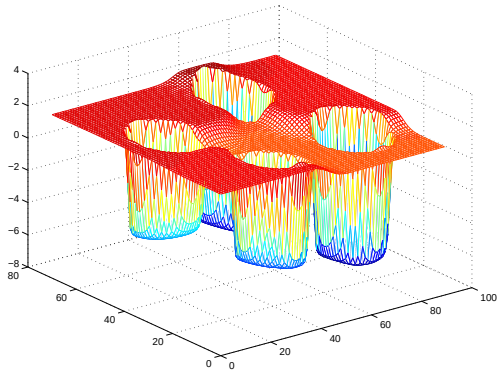


FIG. 19.21 – *Représentation de la fonction* Φ *finale.*

19.2.3 Application à la détection de contours intérieurs

Dans cette sous-section, nous donnons un exemple de détection de contours intérieurs. La condition initiale est donc initialisée à l'intérieur de l'objet à segmenter (figure 19.24, jarre mexicaine) et permet en particulier de détecter l'anse de la jarre.
Le terme de déplacement constant est crucial ici pour assurer la convergence du contour vers la solution. Les paramètres de régularisation sont les suivants dans cet exemple: le pas temporel τ est égal à 1, le coefficient k est égal à 0.2, la condition initiale est donnée par: $\Phi = -((X-47)^2 + (Y-44)^2 - 15^2)$ et le nombre d'itérations est de 120.

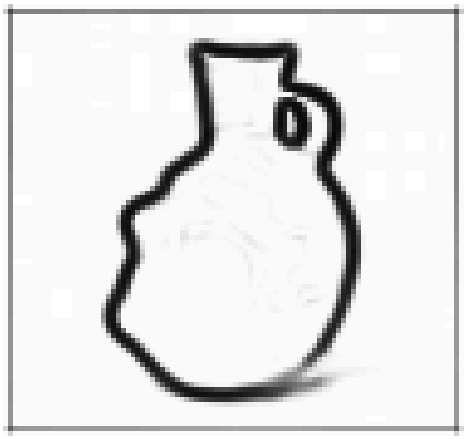


FIG. 19.22 – *Représentation de la fonction g.*

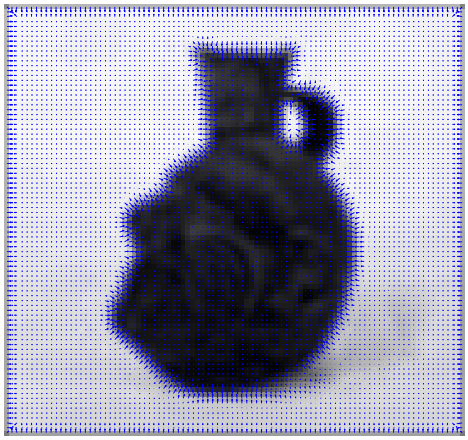
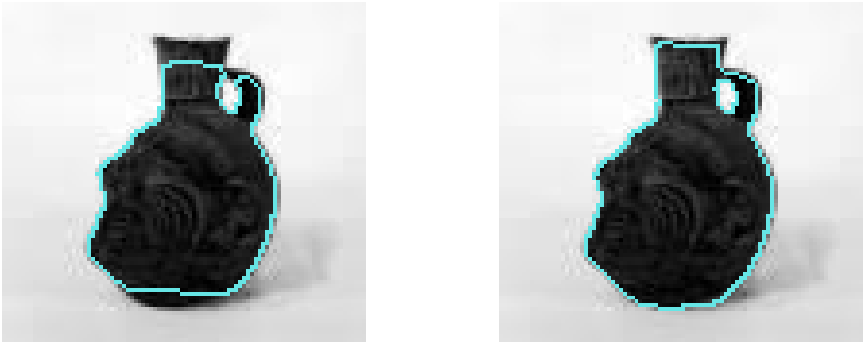


FIG. 19.23 – *Représentation du champ de gradients.*

condition initiale itération 40 itération 80

FIG. 19.24 – *Contour initial, itération 40 et itération 80.*



itération 100 itération 120

FIG. 19.25 – *Itération 100 et contour final.*

19.3 Validation de l'algorithme avec contraintes géométriques

Nous proposons dans ce qui suit, des applications pour lesquelles les points à approcher sont nécessaires. En effet, soit la méthode classique des contours actifs géodésiques ne donne pas de résultats satisfaisants, soit les données à approcher sont induites par le contexte de l'étude.

19.3.1 Données réelles: Segmentation de structures géologiques avec données de puits

Les données considérées ici sont des données issues de la géophysique et de la géologie que l'on peut classer en deux catégories: *données d'imagerie* et *données de puits en profondeur*. Le processus de segmentation consiste à séparer les milieux du sous-sol à partir de leurs propriétés géophysiques. La séparation ainsi obtenue constitue une structure géologique en deux dimensions considérée comme un ensemble de courbes s'intersectant.
Dans l'application qui suit, on s'intéresse à la segmentation d'une image de vitesse avec une faille verticale. La taille de l'image était très grande. Nous avons donc procédé en 2 temps pour la segmentation totale de l'image: d'abord la partie à gauche de la faille puis la partie à droite. On a donc travaillé sur des images tronquées. Notons néanmoins qu'il aurait été tout à fait possible de travailler de manière globale mais cela aurait affecté d'autant le coût de calculs. Ce travail en 2 temps explique enfin l'absence de contours le long de la faille (*images tronquées*). Dans la suite, nous présentons les résultats sur la même image.
Pour chaque image, on disposait d'un ensemble de 3 données de puits. La condition initiale, dans les 2 cas est une ellipse. Le pas temporel est égal à 2, le coefficient pondérant la fonction

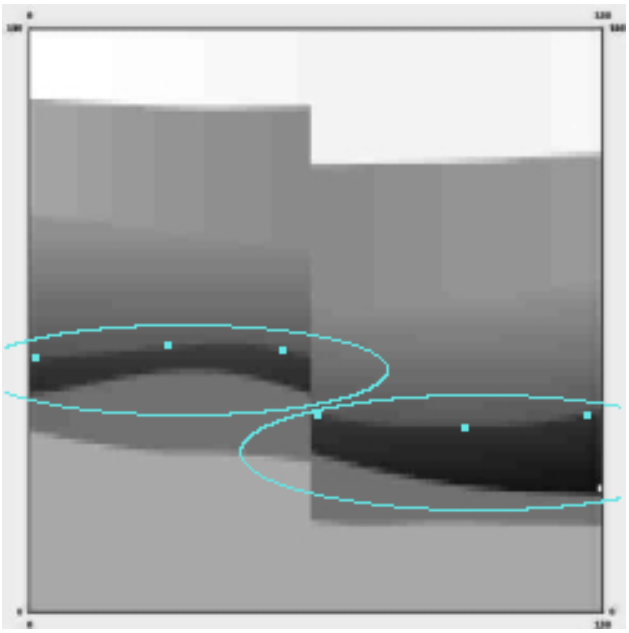


FIG. 19.26 – *Conditions initiales et données de puits.*

distance normalisée est égal à 1, $k = 0.02$ et la fonction g est définie par $g : s \mapsto \dfrac{1}{1+s^2}$. Le

résultat final est le suivant:

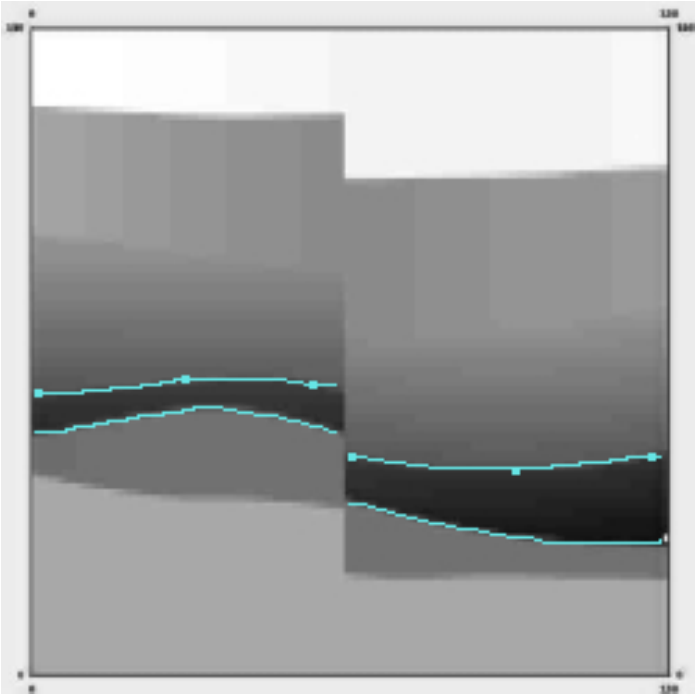


FIG. 19.27 – *Contours finaux.*

19.3.2 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales. Evaluation non-invasive de l'hypertension artérielle pulmonaire

Dans ce qui suit, nous appliquons l'algorithme à la séquence d'images provenant du CHU du Haut-Lévèque (Hôpital de Bordeaux) qui correspond à des coupes perpendiculaires à l'axe de l'artère pulmonaire principale (*segmentation réalisée également avec la première méthode développée, partie II, chapitre 14, section 14.4.3*).
On rappelle que le contraste entre la région d'intérêt et la région périphérique est émoussé, ce qui nécessite l'introduction de contraintes géométriques dans le modèle.

FIG. 19.28 – *Image 1 de la séquence étudiée - la région flèchée est la région d'intérêt pour notre étude: coupe de l'artère pulmonaire principale.*

Nous présentons dans ce qui suit la séquence d'images étudiée dans son intégralité. Cette séquence est constituée de 5 images.

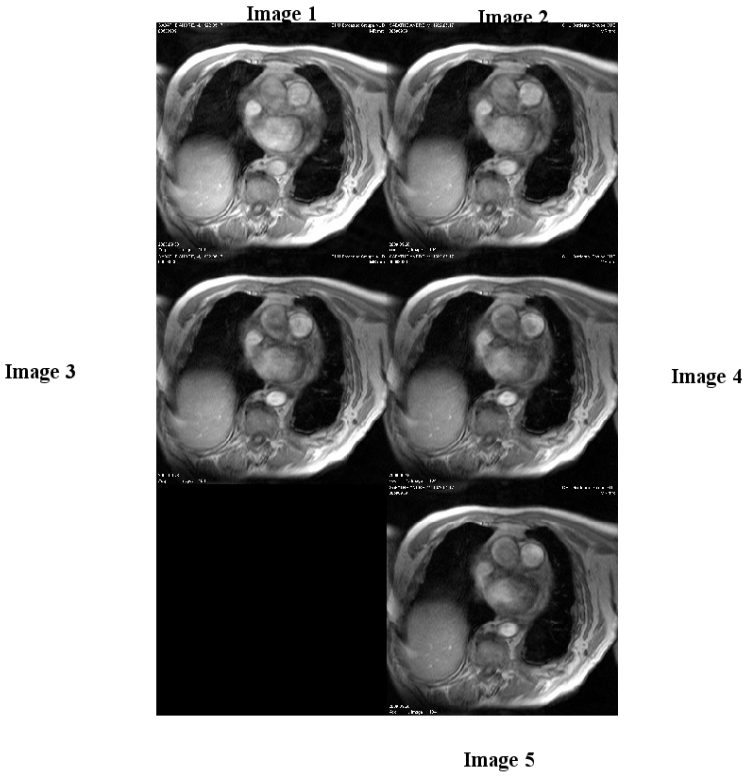


FIG. 19.29 – *Séquence d'images provenant du CHU du Haut-Lévèque (Hôpital de Bordeaux).*

Seule la segmentation de la première image nécessite d'introduire l'ensemble S. La représentation de la fonction g (cf. figure 19.30) suggère en effet que sur la région périphérique inférieure gauche les valeurs de la fonction g sont homogènes. Par la suite, le contour final obtenu sur la j^{ème} image, sera le contour initial dans le processus de segmentation de la (j+1)^{ème} image.

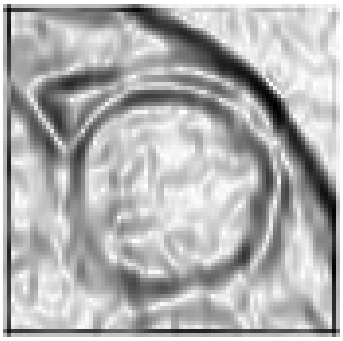


FIG. 19.30 –

Nous proposons en premier lieu les résultats obtenus sur la première image de la séquence avec contraintes *(3 points)*. Le contour original est initialisé à l'intérieur de la section de l'artère pulmonaire principale. Le contour initial est défini par: $\Phi = (X - 39)^2 + (Y - 47)^2 - 18^2$. Le pas temporel est égal à 3, k=-0.1, le coefficient pondérant la fonction distance normalisée est de 1 et le nombre d'itérations est de 250. Les résultats sont les suivants:

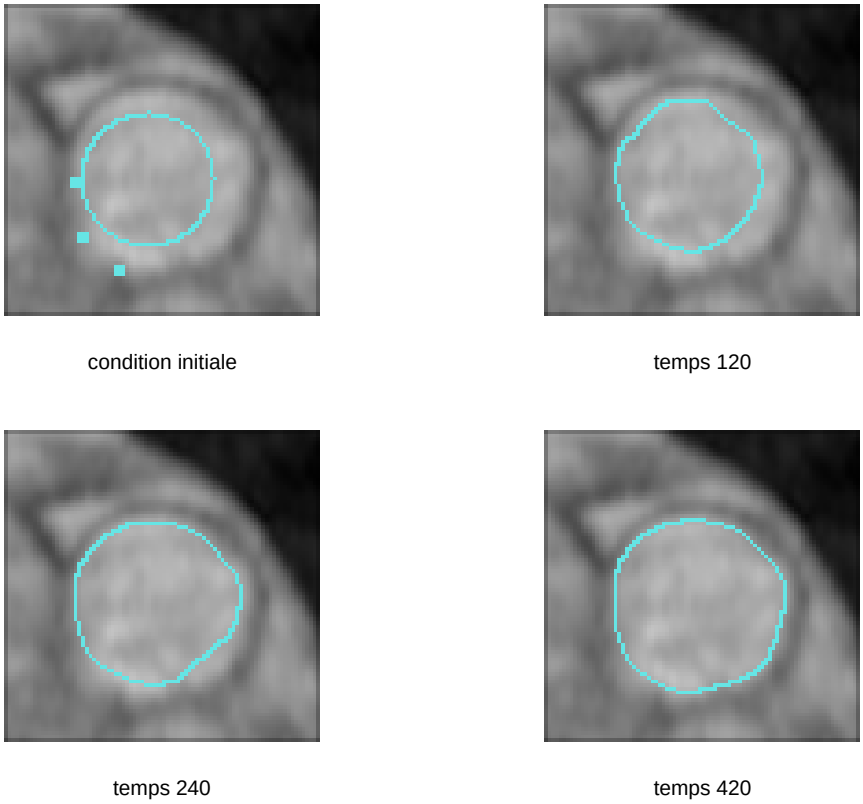


FIG. 19.31 – *Principales étapes de l'évolution du contour.*

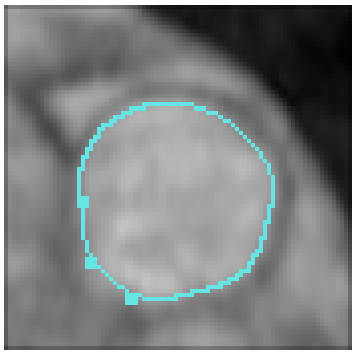
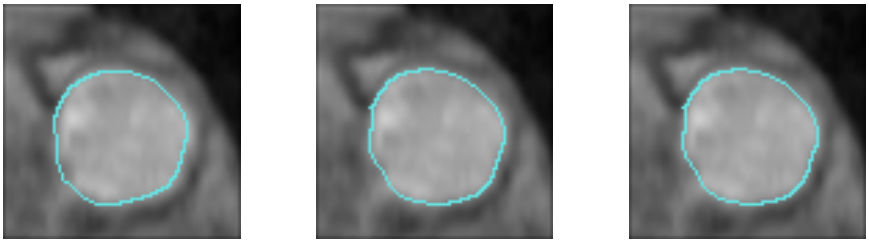


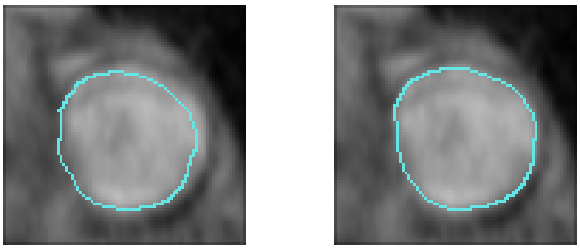
FIG. 19.32 – *Résultat final image 1.*

Pour les images suivantes, il n'a pas été nécessaire d'introduire des contraintes géométriques dans le modèle. On propose les résultats obtenus dans ce qui suit.



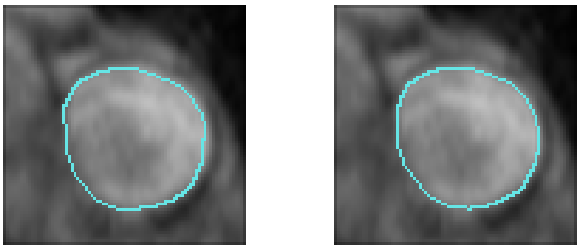
condition initiale. temps 160 temps 280

FIG. 19.33 – *Résultats image 2: pas temporel de 2,* $k = 0$.



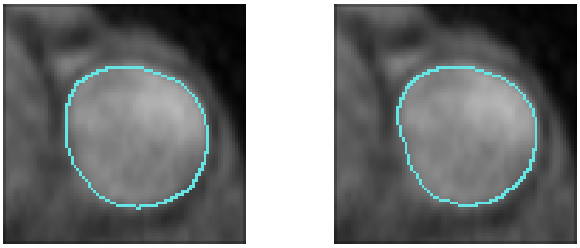
condition initiale temps 200

FIG. 19.34 – *Résultats image 3: pas temporel de 2,* $k = 0$.



condition initiale temps 80

FIG. 19.35 – *Résultats image 4: pas temporel de 2,* $k = 0$.



condition initiale temps 100

FIG. 19.36 – *Résultats image 5: pas temporel de 2,* $k = 0$.

La séquence globale conclut cette section:

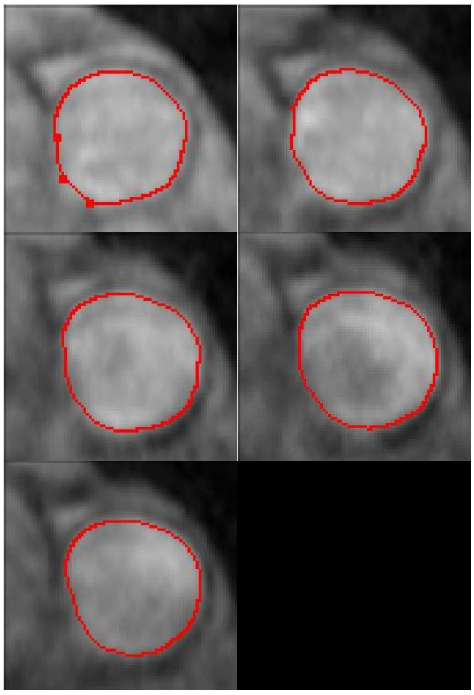


FIG. 19.37 – *Séquence totale.*

19.3.3 Données réelles: Segmentation d'une séquence d'images médicales

On conclut cette section par une application à une nouvelle séquence d'images de coupes du tronc artériel pulmonaire provenant du CHU du Haut-Lévèque (Hôpital de Bordeaux). Il s'agit de la séquence étudiée dans la partie II, chapitre 14, sous-section 14.4.4. Comme précédemment la qualité des images n'a pas nécessité d'introduire des contraintes, excepté pour la première.
La représentation de la fonction $g : s \mapsto \dfrac{1}{1+s^2}$ montre que la partie inférieure de la section de l'artère pulmonaire principale est telle que les valeurs de la fonction g sont proches de 1.

FIG. 19.38 – *Représentation de la fonction g, image 1 de la séquence.*

On définit donc un ensemble S de contraintes contenant 3 points. La condition initiale est définie par: $\Phi = \frac{(X-30)^2}{15^2} + \frac{(Y-30.5)^2}{23^2} - 1$. $k = 0$, le pas temporel est de 0.3 et le coefficient pondérant la fonction distance normalisée est de 5. Le nombre d'itérations est de 260.

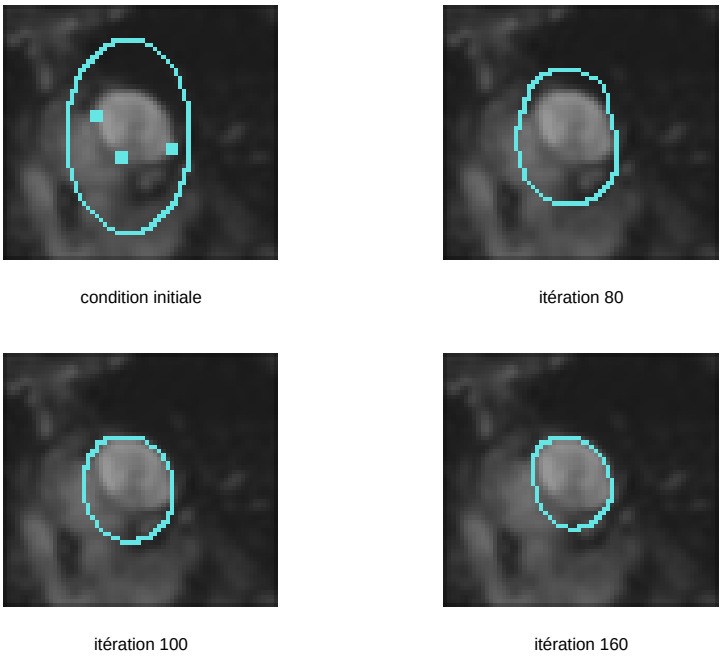


FIG. 19.39 – *Quelques étapes de l'évolution du contour image 1.*

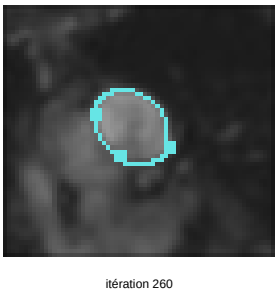
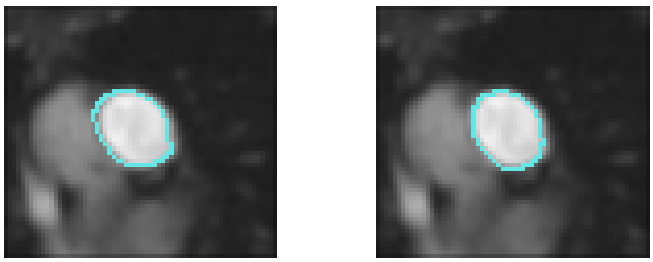


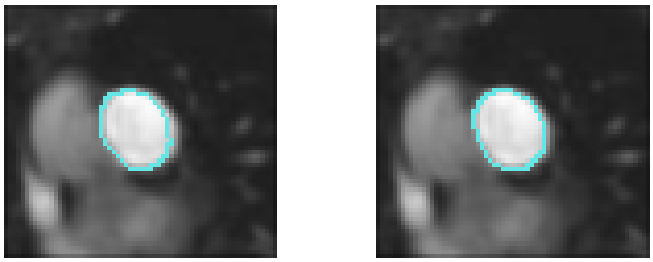
FIG. 19.40 – *Résultat final image 1.*

Dans la suite, nous présentons les résultats obtenus sur les images suivantes. Le contour initial dans le processus de segmentation de la (j+1)^{ème}image est le contour final obtenu sur la j^{ème} image.



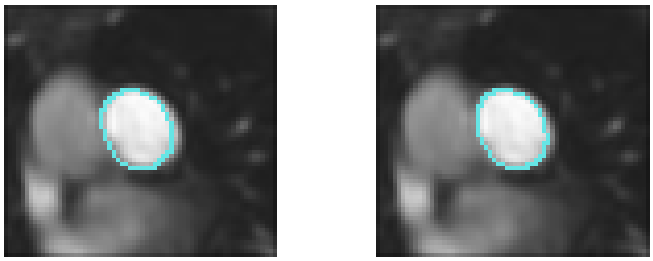
condition initiale itération 120

FIG. 19.41 – *Image 2 de la séquence.*



condition initiale itération 60

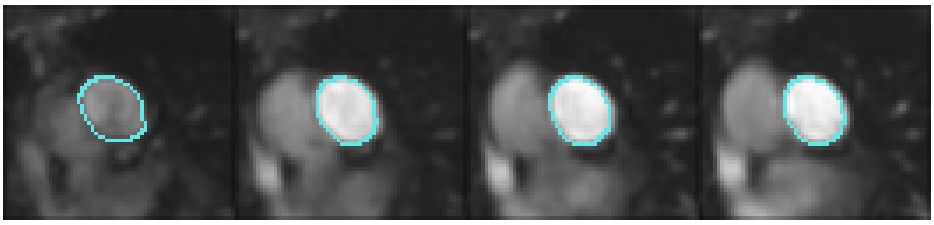
FIG. 19.42 – *Image 3 de la séquence.*



condition initiale itération 80

FIG. 19.43 – *Image 4 de la séquence.*

La séquence totale:



Conclusion

Dans cette partie, nous établissons un comparatif des deux méthodes développées au cours de cette thèse.
Le développement de la seconde méthode a été motivé par les difficultés auxquelles nous nous sommes heurtés lors de l'implémentation de la première méthode: on peut citer en particulier la sensibilité du modèle aux paramètres de régularisation (ϵ_1,ϵ_2) et au paramètre intervenant dans l'expression du potentiel dont l'estimation est délicate. Un mauvais choix de ces valeurs induit le plus souvent un comportement erratique du modèle.
Il est ainsi ardu, voire illusoire, de définir des règles universelles sur le choix de ces paramètres et de prévoir le comportement du modèle pour un choix de valeurs donné.

Une autre difficulté réside dans la détermination des paramètres apparaissant dans la construction de l'image 3D, à savoir le pas en z et le nombre de plans 2D. Cela entache en particulier l'aspect "automatique" de l'algorithme puisque le pas est corrélé avec la condition initiale et l'ordre du développement de Taylor.

Enfin, comme nous l'avons évoqué précédemment, plus le maillage éléments finis est fin, plus la qualité des résultats est accrue. Cela a pour incidence d'augmenter le coût de calculs, en particulier, pour la détermination du second membre. Néanmoins, dans toutes les applications effectuées, le temps de calculs était raisonnable, de l'ordre de la minute et la solution était obtenue après un nombre d'itérations modéré (inférieur à 100 en général).

La seconde méthode développée a permis, dans un premier temps, de réduire le nombre de paramètres à fixer. Il n'en subsiste que trois: le pas temporel, la constante k pondérant le terme de vitesse constante et le coefficient pondérant la fonction $dg(|\nabla I|)$. Les multiples tests réalisés ont permis d'en avoir une estimation relativement universelle. Les conditions CFL permettent, de plus, d'avoir une estimation du pas temporel et du paramètre k.
Le problème, dans la seconde méthode, est un problème d'évolution de courbes et non plus un problème de minimisation de fonctionnelle interprétée en terme d'énergie. Au niveau des paramètres, les seuls écueils à éviter sont d'une part, un choix de la valeur de k trop élevé (dans ce cas, le contour évolue trop vite et ne s'arrête pas sur le bord souhaité) et d'autre part, un choix du coefficient pondérant la fonction $dg(|\nabla I|)$ peu pertinent (c'est à dire qui altère la fonction d'arrêt en favorisant l'information liée aux contraintes géométriques au détriment de l'information de l'image ou inversement). Dans ce cas, comme précédemment, la courbe ne vient pas épouser les bords de l'objet à segmenter.

Par ailleurs, l'utilisation de l'approche "level set" dans la seconde méthode n'impose pas de construire une image 3D comme dans la première méthode. Il n'y a donc pas de données supplémentaires à intégrer au problème.

Enfin, la discrétisation est réalisée à l'aide d'un schéma AOS, robuste, inconditionnellement stable. Le coût de calculs s'exprime en $O(N)$, N désignant le nombre de pixels. On tient compte, dans la mise en œuvre numérique, de tous les pixels, contrairement à la première méthode qui utilise la méthode éléments finis.
L'inconvénient notable de la seconde méthode est le temps de calculs nécessaire pour l'approximation de la fonction distance par la méthode "Fast Marching" (entre 2 et 3 minutes pour une image de taille 60×60) et pour l'exécution du programme. Par rapport à la première méthode, la convergence de l'algorithme nécessite plus d'itérations.

Nous proposons ci-après, des applications comparatives des deux méthodes: pour une même condition initiale et pour le même ensemble de points à approcher ou à interpoler, nous donnons les résultats obtenus.

Comparatif sur des données réelles: coupes du tronc artériel pulmonaire

Le problème étudié est le suivant: on considère le contour initial ci-dessous ainsi qu'un ensemble de contraintes géométriques constitué de trois points (cf. figure 19.44). Le but est donc d'approcher ou d'interpoler ces points suivant la méthode utilisée, tout en ajustant le modèle sur le contour de l'objet.

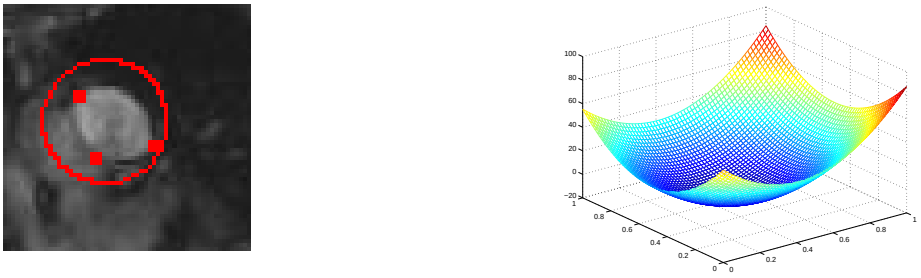
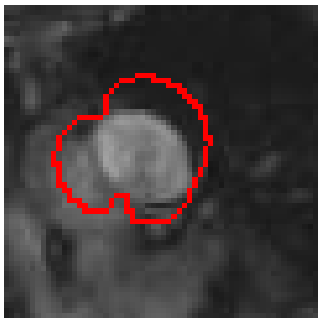


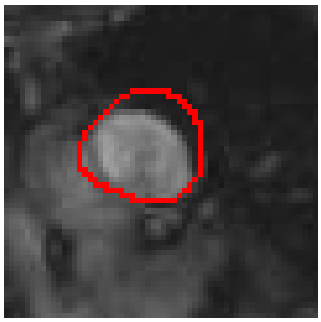
FIG. 19.44 – *A gauche, le contour initial ainsi que les points à interpoler ou à approcher, à droite, la surface* Φ *initiale associée.*

Nous rappelons les résultats obtenus pour la première méthode (cf. partie II, chapitre 14, sous-section 14.4.4). Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\delta t = 0.005$, $\epsilon = 1$, $\epsilon_1 = 0.01$, $\epsilon_2 = 0.001$. Le temps de calculs est de 100 secondes. Le résultat est obtenu au bout de 43 itérations.

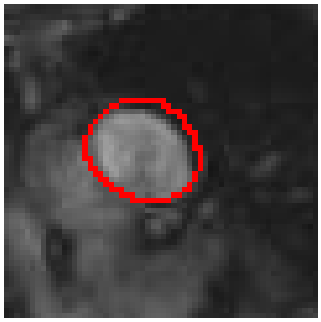
- Méthode 1:



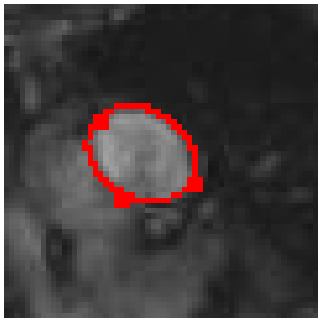
itération 1



itération 7



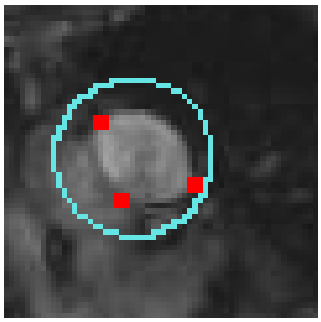
itération 18



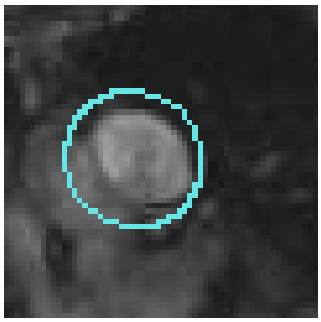
itération 43

L'algorithme relatif à la seconde méthode a été appliqué. Le temps de calculs pour approcher la fonction distance à l'aide de la méthode "Fast Marching " est de 127 secondes. Le temps d'exécution du programme est de 160 secondes. Les paramètres utilisés sont: $k = 0$, $\delta t = 0.3$. Le coefficient pondérant la fonction distance normalisée est de 4. Le résultat est obtenu au bout de 180 itérations.

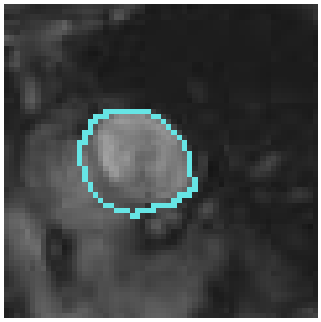
- <u>Méthode 2:</u>



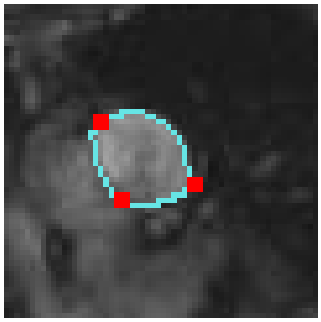
contour initial



itération 40



itération 100



itération 180 – contour final

- Comparaison:

  On constate tout d'abord que l'utilisation de la première méthode requiert moins d'itérations que la seconde méthode (quatre fois moins). Le temps de calculs est donc diminué. Un choix de pas temporel plus élevé pour la seconde méthode donne un résultat moins pertinent.
  Au niveau de l'évolution du contour, on constate que pour la première méthode (qui est un problème d'**interpolation**), dès la première itération le contour interpole les points donnés ce qui permet d'accélérer la convergence du modèle vers le bord recherché sur la partie inférieure de l'artère pulmonaire. En revanche, la convergence est plus lente sur la partie périphérique supérieure.
  Le comportement du modèle est tout autre pour la seconde méthode qui est un problème d' **approximation**. Le contour évolue en balayant tous les points. Si l'on examine la fonction $dg(|\nabla I|)$, les valeurs prises par cette fonction autour des points à approcher sont peu échelonnées (cf. figure 19.45). La représentation du champ de gradients associé montre que les normes des vecteurs sont très petites. La vitesse de convergence est donc ralentie quand le front arrive dans cette zone.

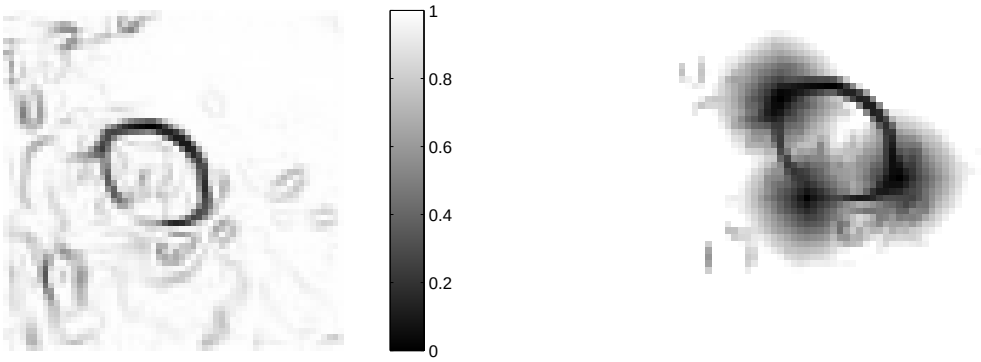
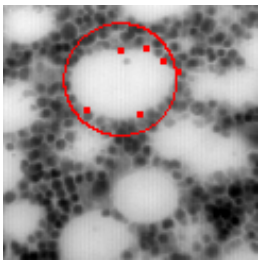


FIG. 19.45 – *A gauche, la fonction $g(|\nabla I|)$. Sur la région périphérique inférieure de l'artère pulmonaire, les valeurs prises par la fonction g sont proches de 0.8. Il est donc nécessaire d'adjoindre des points à approcher au modèle afin d'améliorer le critère d'arrêt. A droite, la représentation de la fonction $dg(|\nabla I|)$. Dans les zones qui entourent les points à approcher, les valeurs prises par la fonction $dg(|\nabla I|)$ sont peu échelonnées.*

Comparatif sur des données réelles: cellule de moelle osseuse

Le problème étudié est le suivant: on considère le contour initial ci-après ainsi qu'un ensemble de contraintes géométriques constitué de six points (cf. figure 19.46). Le but est donc d'approcher ou d'interpoler ces points suivant la méthode utilisée, tout en ajustant le modèle sur le contour de l'objet.



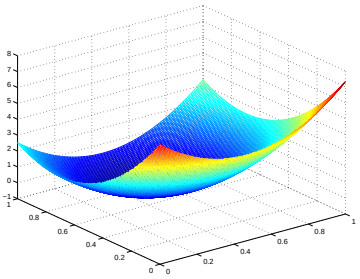
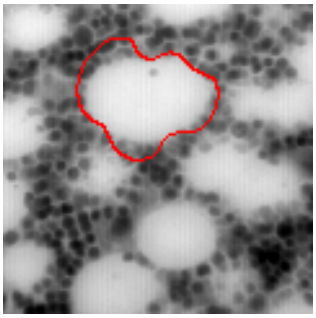


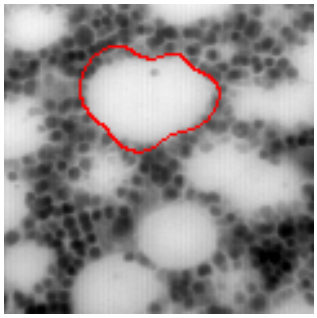
FIG. 19.46 – *A gauche, le contour initial ainsi que les points à approcher ou à interpoler, à droite, la surface* Φ *initiale associée.*

Nous rappelons les résultats obtenus pour la première méthode (cf. partie II, chapitre 14, sous-section 14.4.2). Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\delta t = 0.001$, $\epsilon = 1$, $\epsilon_1 = 0.001$, $\epsilon_2 = 0.001$. Le temps de calculs est de 178 secondes. Le résultat est obtenu au bout de 18 itérations.

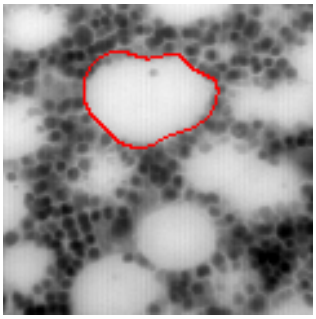
- <u>Méthode 1:</u>



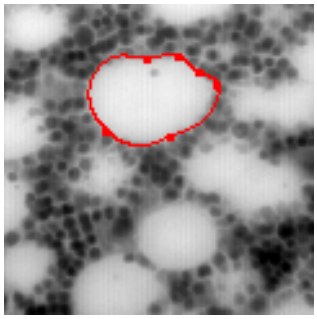
itération 2



itération 7



itération 12



itération 18

L'algorithme relatif à la seconde méthode a été appliqué. Le temps d'exécution du programme est de 10 minutes. Les paramètres utilisés sont: $k = 0$, $\delta t = 2$. Le résultat est obtenu au bout de 400 itérations.

- Méthode 2:

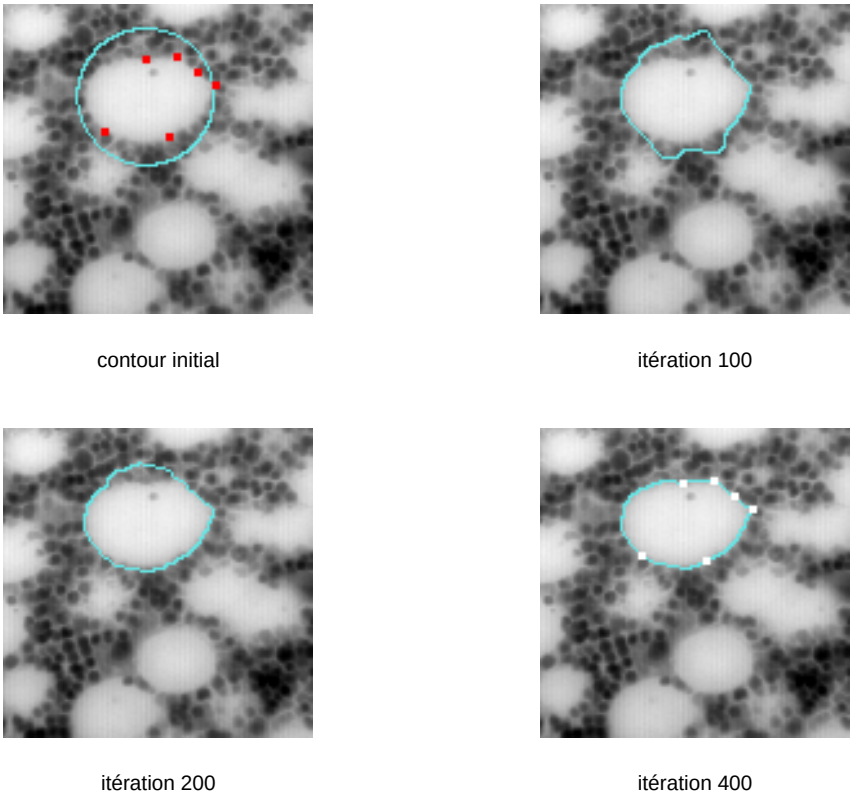


FIG. 19.47 –

- Comparaison:

  Comme précédemment, la première méthode requiert nettement moins d'itérations que la seconde méthode. Le temps de calculs est incontestablement diminué. Au niveau de l'évolution du contour, une remarque analogue à celle formulée précédemment peut être faite.
  Pour la méthode 1, dès la première itération le contour interpole les points donnés ce qui permet d'attirer le contour vers la solution et ainsi d'accélérer la convergence.
  La vitesse de convergence est plus faible pour la seconde méthode. En effet, la représentation de la fonction g met en évidence un certain nombre de minima locaux (cf. régions grisées de la figure gauche 19.48). L'introduction des points à approcher est donc nécessaire pour éviter au contour d'arrêter son évolution sur des points de l'image non-significatifs. Comme on l'a vu précédemment, dans les zones qui entourent les points à approcher, la vitesse de convergence est ralentie (cf. figure droite 19.48). De plus, on remarque sur la figure 19.47, que le contour, pendant les 100 premières itérations reste "accroché" aux points pour lesquels la fonction $dg(|\nabla I|)$ a des valeurs proches de zéro (points de contours des cellules qui entourent la cellule étudiée), ce qui ralentit le processus de segmentation.

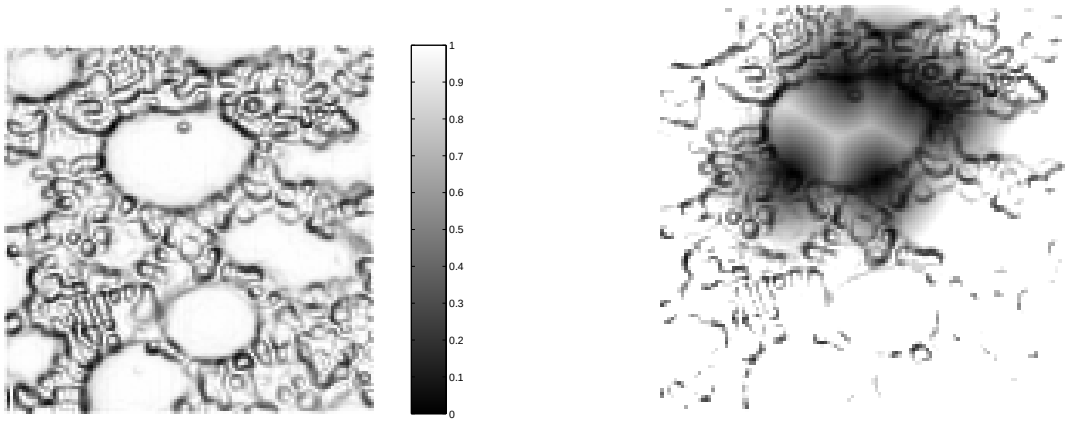


FIG. 19.48 – *A gauche, la fonction $g(|\nabla I|)$, à droite la fonction $dg(|\nabla I|)$.*

Nous proposons en guise de conclusion quelques remarques qui émergent après les multiples tests réalisés.
En terme de vitesse de convergence, la première méthode requiert généralement beaucoup moins d'itérations et un temps de calculs plus modeste. Dans la seconde méthode, l'approximation de la fonction distance par la méthode de "Fast Marching" est particulièrement coûteuse en temps de calculs et dans la mise en œuvre numérique, tous les pixels de l'image interviennent, ce qui accroît considérablement la taille du système à résoudre. De plus, comme nous l'avons déjà souligné, dans un voisinage des points à approcher pour la seconde méthode, la vitesse de convergence est plus faible.
En terme de pertinence des résultats, la seconde méthode nous a semblé plus robuste: cette

méthode est d'une part, moins sensible au choix des paramètres et d'autre part, fournit de meilleurs résultats en particulier lorsque l'image contient des artefacts ou ombres autour de l'objet à segmenter. La condition initiale peut également être choisie très éloignée du contour à segmenter. Pour la première méthode, un tel choix peut être fait mais il est alors souhaitable d'ajouter des points d'interpolation au modèle pour attirer le contour vers les singularités de l'image. Cela est nécessaire par exemple, quand une portion du contour se situe dans une région de texture homogène. Dans ce cas, le contour tend à stagner si l'on n'ajoute pas quelques points d'interpolation.

Bibliographie

[1] R. Abgrall. Numerical Discretization of the First-Order Hamilton-Jacobi Equation on Triangular Meshes. *Communications on pure and applied mathematics*, 49(12):1339–1973, 1996.

[2] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2):269–277, 1995.

[3] D. Adalsteinsson and J.A. Sethian. The fast construction of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 148:2–22, 1999.

[4] R. A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[5] L. Alvarez, P.-L. Lions, and M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J.Numer. Anal.*, 29(3):845–866, 1992.

[6] A.A. Amini, T.E. Weymouth, and R.C. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Trans. Pattern and Machine Intell.*, 12:855–867, 1990.

[7] D. Apprato, J.-B. Betbeder, C. Gout, and S. Vieira-Testé. A segmentation method under Geometrical constraints After Pre-processing. *Curves and Surfaces IV, A. Cohen, C. Rabut, L. L. Schumaker eds.*, pages 9–18, 2000.

[8] G. Aubert and P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image processing: Partial Differential Equations and the calculus of Variations*. Springer Verlag, 2002.

[9] G. Aubert and L. Vese. A variational method in image recovery. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(5):1948–1979, 1997.

[10] S. Augoula and R. Abgrall. High Order Numerical Discretization for Hamilton-Jacobi Equations on Triangular Meshes. *Journal of Scientific Computing*, 15(2):197–229(33), 2000.

[11] J.A. Bærentzen. On the implementation of fast marching methods for 3d lattices. *Techincal report*, 2000.

[12] G. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.

[13] G. Barles. A week Bernstein method for fully non-linear elliptic equations. *Differential and Integral Equations*, 4(2):241–262, 1991.

[14] G. Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Collection "Mathématiques et Applications" de la SMAI*, volume 17. Springer-Verlag, 1994.

[15] G. Barles. Solutions de viscosité et Equations elliptiques du deuxième ordre. *First version*, 1997.

[16] G. Barles. Nonlinear Neumann Boundary Conditions for Quasilinear Degenerate Elliptic Equations and Applications. *First version*, 1999.

[17] H. Barucq. A new family of first-order boundary conditions for the Maxwell system: derivation, well-posedness and long-time behavior. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 82(1):67–88, 2003.

[18] H. Barucq, C. Bekkey, and R. Djellouli. Construction of local boundary conditions for an eigenvalue problem using micro-local analysis: application to optical waveguide problems. *Journal of Computational Physics*, 193(2):666–696, 2004.

[19] R. Bellman. *Dynamic Programming.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

[20] R. Bellman. *Methods of Nonlinear Analysis in Mathematics in Science and Engineering.* Academic Press, 1970.

[21] F.K. Bogner, R.L. Fox, and L.A. Schmit. The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae. *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, 1965.

[22] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.* Masson, Paris, 1987.

[23] V. Caselles, F. Catt, C. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. *Numerische Mathematik.*, 66:1–31, 1993.

[24] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic Active Contours. *International Journal of computer Vision*, 22(1):61–87, 1993.

[25] J. Cea. *Optimisation, théorie et algorithmes.* Dunod, Paris, 1971.

[26] T. Chan, B. Sandberg, and L. Vese. Active Contours Without Edges for Vector-Valued images. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11(2):130, 2000.

[27] T. Chan, J. Shen, and L. Vese. Variational PDE Models in Image Processing. *Notices-American Mathematical Society*, 50(1):14–26, 2003.

[28] T. Chan and L. Vese. An efficient Variational Multiphase Motion for the Mumford-Shah Segmentaiton Mode. In *IEEE Asilomar Conference on Signals and Computers*, volume 1, pages 490–494, 2000.

[29] T. Chan and L. Vese. Active Contours Without Edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2):266–277, 2001.

[30] S. D. Chatterji. *Cours d'analyse, 1 Analyse Vectorielle.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[31] A.J. Chorin. Flame advection and Propagation algorithms. *Journal of Computational Physics*, 35:1–11, 1980.

[32] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems.* North-Holland publishing company, Amsterdam, 1978.

[33] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise.* Masson, Paris, 1985.

[34] A. Cohen. *Numerical Analysis of Wavelet Methods.* Elsevier, 2003.

[35] I. Cohen. *Modèles déformables 2D et 3D: application à la segmentation d'images médicales.* PhD thesis, université de Paris IX-Dauphine, Paris, France, 1992.

[36] I. Cohen, L. D. Cohen, and N. Ayache. Using deformable surfaces to segment 3D images and infer differential structures. In *Proc. IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 592–598, Los Alamitos, 1992.

[37] I. Cohen, L. D. Cohen, and N. Ayache. Using deformable surfaces to segment 3D images and infer differential structures. *Computer Vision, graphics and image processing : image understanding*, 56(2):242–263, 1992.

[38] L.D. Cohen. On active contours models and balloons. *Computer Vision, graphics and image processing : image understanding*, 53(2):211–218, 1991.

[39] L.D. Cohen. On active contour models. *Technical report 1035, INRIA, Rocquencourt*, 1992.

[40] L.D. Cohen. *Habilitation à diriger des recherches - Travaux de 1983-1994*. PhD thesis, Université de Paris IX-Dauphine, UFR de Mathématiques de la décision, Paris, France, 1995.

[41] L.D. Cohen. Modèles déformables. In *Conférence Ecole Thématique ISIS*, Marly-le-roy, 1997.

[42] L.D. Cohen, E. Bardinet, and N. Ayache. Surface reconstruction using active contour models. *INRIA, rapport de recherche*, 1992.

[43] L.D. Cohen and I. Cohen. Finite Element methods for active contour models and balloons from 2D to 3D. In *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, PAMI-15(11)*, 1993.

[44] L.D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. In *IEEE Int. Conf. On Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'96)*, San Fransisco, California, USA, 1996.

[45] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull.Amer.Math.Soc.(N.S.)*, 27(1):1–67, 1992.

[46] E. Deléchelle and J. Lemoine. La trajectoire déformable: un modèle de variété active fondé sur le Principe de Fermat. *Traitement du signal*, 17(1):47–58, 2000.

[47] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications, Part I.* Springer, 1992.

[48] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse convexe et problèmes variationnels.* Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[49] A. Ern and J.-L. Guermond. *Eléments finis: théorie, applications, mise en œuvre.* Springer, 2002.

[50] P. Faurre. *Cours d'analyse numérique - Notes d'optimisation.* Ecole polytechnique, 1982.

[51] M. Freidlin. *Functional Integration and Partial Differential Equations.* Princeton University Press, 1985.

[52] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type.* Prentice-Hall, Inc, 1964.

[53] M. Gage. Curve shortening makes convex Curves circular. *Inventiones Mathematica*, 76(2):357–364, 1984.

[54] M. Gage and R. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.*, 23(1):69–96, 1986.

[55] Y. Giga and M.-H. Sato. Generalized interface evolution with boundary condition. In *Proc.Japan Acad. 67 Ser.A, 263-266*, 1991.

[56] R. Goldenberg, R. Kimmel, E. Rivlin, and M. Rudzsky. Fast Geodesic Active Contours. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(10), 2001.

[57] C. Gout, D. Apprato, and S. Vieira-Testé. Segmentation of complex geophysical 3D structures. In *Proc. IEEE Int. Geoscience and Remote Sensing Symposium*, volume 1, pages 651–653, Honolulu, 2000. IEEE Press.

[58] C. Gout, C. Le Guyader, and L. Vese. Segmentation under geometrical conditions using Geodesic Active Contours and Level Set Methods. A paraître dans Numerical Algorithms, 2004.

[59] C. Gout and S. Vieira-Testé. An algorithm for contrast enhancement and segmentation of images. In *IEEE Int. Conf. on Image processing*, volume 2, pages 716–719, Vancouver, 2001.

[60] M. Grayson. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J. Differential Geom.*, 26:285–314, 1987.

[61] H. Ishii and M.-H. Sato. Nonlinear oblique derivative problems for singular degenerate parabolic equations on a general domain.

[62] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4):133–144, 1987.

[63] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models in Proceeding. In *First international conference on computer vision, London, England, IEEE, Piscataway NJ*, pages 259–268, 1987.

[64] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* American Mathematical society, Providence, R.I., 1968.

[65] E. Laffon, V. Bernard, M. Montaudon, R. Marthan, J.L. Barat, and F. Laurent. Tuning of pulmonary arterial circulation evidenced by MR phase-mapping in healthy volunteers. *Journal of Applied Physiology*, 90(2):469–74, Feb 2001.

[66] E. Laffon, F. Laurent, V. Bernard, L. De Boucaud, D. Ducassou, and R. Marthan. Noninvasive assessment of pulmonary hypertension by MR phase-mapping method. *Journal of Applied Physiology*, 90(6):2197–202, Jun 2001.

[67] E. Laffon, C. Vallet, V. Bernard, M. Montaudon, D. Ducassou, F. Laurent, and R. Marthan. A computed method for non-invasive MRI assessment of pulmonary arterial hypertension. *Journal of Applied Physiology*, 2003.

[68] P.J. Laurent. *Approximation et Optimisation.* Hermann, Paris, 1972.

[69] C. Le Guyader, D. Apprato, and C. Gout. The Level Set Methods and Image Segmentation under interpolation conditions. *A paraître dans Numerical Algorithms*, 2004.

[70] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non-homogènes et applications, vol. 1 et 2.* Dunod, Paris, 1968.

[71] P. L. Lions. *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations.* Pitman, Boston, 1982.

[72] R. Malladi and J.A. Sethian. Image processing via level curvature flow. *In proceedings of the National Academy of sciences*, 92(15):7046–7050, 1995.

[73] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. A fast level set based algorithm for topology independent shape modeling. In *Journal of Mathematical Imaging and Vision, special issue on Topology and Geometry.*

[74] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. Evolutionary fronts for topology independent shape modeling and recovery. In *Proc. of the third ECCV, Stockholm, Sweden*, pages 3–13, 1994.

[75] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. Shape modeling with front propagation: A Level Set approach. In *IEEE Trans. on PAMI*, volume 17, pages 158–175, 1995.

[76] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing.* Academic Press, 1999.

[77] T. McInerney and D. Terzopoulos. Deformable models in medical image analysis. 1(2), 1996.

[78] T. McInerney and D. Terzopoulos. Topology adaptive Deformable Surfaces for Medical Image Volume Segmentation. *IEEE transactions on medical imaging*, 18(10):840, 1999.

[79] T. Meis and U. Marcowitz. *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen.* Springer, Berlin, 1978.

[80] J. Montagnat and H. Delingette. Globally constrained models for 3D object reconstruction. *Signal Processing*, 71:173–186, 1998.

[81] F. Natterer. The Mathematics of Computerized Tomography. *SIAM*, 222 p, 2001.

[82] J. Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson et Cie, 1967.

[83] S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces.* Springer Verlag, 2003.

[84] S. Osher and N. Paragios. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics.* Springer Verlag, 2003.

[85] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagation with curvature dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79, 1988.

[86] J.Y. Park, T. McInerney, D. Terzopoulos, and M.H. Kim. A non-self-intersecting adaptative deformable surface for complex boundary extraction from volumetric images. *Computers and Graphics*, 25(3):421–440, 2001.

[87] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H.-K. Zhao, and M. Kang. A PDE Based Fast Local Level Set Method. *J. Comput. Phys.*, 155:410–438, 1999.

[88] P. Perona and J. Malik. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion. In *IEEE Workshop on Computer Vision*, pages 16–22, Miami, FL, 1987.

[89] B. Pesquet-Popescu and J. Lévy Véhel. Stochastic Fractal Models for Image Processing. In *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 48–62, 2002.

[90] C. Petitjean. *Contours actifs géodésiques pour la segmentation d'indices visuels dans un visage - Mémoire de DEA.* PhD thesis, Laboratoire des Images et des Signaux de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.

[91] M.H. Protter and H.F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations.* Prentice-Hall, INC, 1967.

[92] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des EDP.* Masson, Paris, 1983.

[93] M. Sakarovitch. *Optimisation combinatoire: méthodes mathématiques et algorithmiques, Programmation discrète.* Hermann, 1983.

[94] J.A. Sethian. A review of recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature dependent flows. *J.Differential Geometry*, 31:131–161, 1989.

[95] J.A. Sethian. A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing fronts. *submitted for publication: Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1995.

[96] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Science.* Cambridge University Press, Londres, 1999.

[97] J.A. Sethian. Evolution, Implementation and Application of Level Set and Fast Marching Methods for Advancing Fronts. *Journal of Computational Physics*, 169(2):503–555, 2001.

[98] D.R. Smith. *Variational Methods in Optimization.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ., 1974.

[99] M. Sonka, V. Hlavac, and R. Boyle. *Image Processing, analysis and machine vision.* Chapman & Hall, 1993.

[100] M. Sussman, E. Fatemi, P. Smereka, and S. Osher. An improved Level Set method for incompressible two-phase flows. *Computers and Fluids*, 27(5-6):663–680, 1997.

[101] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Symmetry seeking models for 3D object reconstruction. In *Proc. First International Conference on Computer Vision, London, England, IEEE, Piscataway, NJ*, pages 269–276, 1987.

[102] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Constraints on deformable models: Recovering 3D shape and nonrigid motion. *Artificial intelligence*, 36(1):91–123, 1988.

[103] R.A. Varga. *Matrix Iterative Analysis.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1962.

[104] L. Vese. A Method to convexify Functions via Curve Evolution. *Communications in Partial Differential Equations*, 24(9-10):1573, 1999.

[105] L. Vese. Study in the BV Space of a Denoising-Deblurring Variational Problem. *Applied Mathematics and Optimization*, 44(2):131–162, 2001.

[106] L. Vese and T. Chan. A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3):271–293, 2002.

[107] S. Vieira-Testé. *Représentation de structures géologiques à l'aide de modèles déformables sous contraintes géométriques.* PhD thesis, université de Pau et des pays de l'Adour, 1997.

[108] J. Weickert. Applications of nonlinear diffusion in image processing and computer vision. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 70:33–50, 2001.

[109] J. Weickert and G. Kühne. Fast Methods for Implicit Active Contour Models. *Preprint No. 61, Universität des Saarlandes, Saarbrücken*, 2002.

[110] J. Weickert, B.M. Ter Haar Romeny, and M.A. Viergever. Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering. *IEEE Transactions Image Processing*, 7:398–410, 1998.

[111] A. Witkin, D. Terzopoulos, and M. Kass. Signal matching through scale space. *International Journal of Computer Vision*, 1(2):133–144, 1987.

[112] J. Xu and H.-K. Zhao. An Eulerian Formulation for Solving Partial Differential Equations Along a Moving Interface. *J. Sci. Comp.*, 19:573–594, 2003.

[113] K. Yosida. *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[114] H.-K. Zhao, T. Chan, B. Merriman, and S Osher. A variational level set approach to multiphase motion. *J. Comput. Phys.*, 127:179–195, 1996.

[115] H.-K. Zhao, S. Osher, B. Merriman, and M. Kang. Implicit and non parametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level set method. *Computer Vision and Image Understanding*, 80(3):295–314, 2000.