HAL
open science

Modélisation spectrale de la turbulence inhomogène anisotrope

Hatem Touil

To cite this version:

Hatem Touil. Modélisation spectrale de la turbulence inhomogène anisotrope. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Centrale de Lyon, 2002. Français. NNT : . tel-00009081

HAL Id: tel-00009081

https://theses.hal.science/tel-00009081v1

Submitted on 25 Apr 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 2002–20 Année 2002

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École doctorale MEGA

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : Thermique et Energétique

par

Hatem Touil

Modélisation spectrale de la turbulence inhomogène anisotrope

---

Soutenue le 2 octobre 2002 devant la Commission d'Examen

Jury :	MM.	J.-P.	Bertoglio	- *Directeur de Thèse*
		K.	Hanjalić	
		D.	Jeandel	- *Président*
		J.	Magnaudet	- *Rapporteur*
		S.	Parpais	
		R.	Schiestel	- *Rapporteur*

N° d'ordre : 2002–20 Année 2002

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

École doctorale MEGA

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : Thermique et Energétique

par

Hatem Touil

Modélisation spectrale de la turbulence inhomogène anisotrope

---

Soutenue le 2 octobre 2002 devant la Commission d'Examen

Jury :	MM.	J.-P.	Bertoglio	- *Directeur de Thèse*
		K.	Hanjalić	
		D.	Jeandel	- *Président*
		J.	Magnaudet	- *Rapporteur*
		S.	Parpais	
		R.	Schiestel	- *Rapporteur*

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES RECHERCHES
(nom par ordre alphabétique, fonction, laboratoire, établissement de tutelle)

A	AIT-EL-HADJ Smaïl	professeur	GRESTI	ECL
	ARQUES Philippe	professeur		ECL
	AURIOL Philippe	professeur	CEGELY	ECL
B	BAILLY Christophe	maître de conférence	LMFA	ECL
	BATAILLE Jean	professeur	LMFA	UCBL
	BAYADA Guy	professeur	MAPLY	INSA
	BEN HADID Hamda	professeur	LMFA	UCBL
	BERGHEAU Jean-Michel	professeur	LTDS	ENISE
	BEROUAL Abderrhamane	professeur	CEGELY	ECL
	BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLAIZE Alain	maître de conférence	LTDS	UCBL
	BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	BLANCHET Robert	professeur	LEOM	ECL
	BRUN Maurice	professeur	LMFA	ECL
	BUFFAT Marc	professeur	LMFA	UCBL
C	CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS
	CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
	CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	CHAMBAT Michèle	professeur	MAPLY	UCBL
	CHAMPAGNE Jean-Yves	maître de conférence	LMFA	INSA
	CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur	LMFA	ECL
	CHAUVET Jean-Paul	professeur	IFOS	ECL
	CHEN Liming	professeur	ICTT	ECL
	CLERC Guy	professeur	CEGELY	UCBL
	COMTE-BELLOT Geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
	COQUILLET Bernard	maître de conférence	IFOS	ECL
	CREPEL Pierre	chargé de recherche	MAPLY	CNRS
D	DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
	DUBUJET Philippe	maître de conférence	LTDS	ECL
E	ESCUDIE Dany	chargé de recherche	LMFA	CNRS
F	FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS

G	GAFFIOT Frédéric	professeur	LEOM	ECL
	GAGNAIRE Alain	maître de conférence	LEOM	ECL
	GALLAND Marie-Annick	maître de conférence	LMFA	ECL
	GARRIGUES Michel	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	GAY Bernard	professeur	LMFA	UCBL
	GENCE Jean-Noël	professeur	LMFA	UCBL
	GENDRY Michel	chargé de recherche	LEOM	CNRS
	GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
	GRENET Geneviève	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	IFOS	ECL
H	HAMADICHE Mahmoud	maître de conférence	LMFA	UCBL
	HEIBIG Arnaud	professeur	MAPLY	INSA
	HELLOUIN Yves	maître de conférence	ECL	
	HENRY Daniel	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	HERRMANN Jean-Marie	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	HOLLINGER Guy	directeur de recherche	LEOM	CNRS
J	JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
	JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
	JOSEPH Jacques	professeur	LEOM	ECL
	JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
	JUVE Denyse	ingénieur de recherche	IFOS	ECL
K	KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
	KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	LEOM	CNRS
L	LACHAL Aimé	PRAG	MAPLY	INSA
	LANCE Michel	professeur	LMFA	UCBL
	LANGLADE-BOMBA Cécile	maître de conférence	IFOS	ECL
	LE HELLEY Michel	professeur	ECL	
	LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
	LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	LYONNET Patrick	professeur	LTDS	ENISE
M	MAITRE Jean-François	professeur	MAPLY	ECL
	MARION Martine	professeur	MAPLY	ECL
	MARTELET Claude	professeur	IFOS	ECL
	MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
	MARTIN Jean-René	professeur	IFOS	ECL
	MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS
	MATHIEU Jean	professeur émérite	LMFA	ECL
	MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
	MIDOL Alain	maître de conférence	LTDS	UCBL
	MOREL Robert	professeur	LMFA	INSA
	MOUSSAOUI Mohand	professeur	MAPLY	ECL
	MUSY François	maître de conférence	MAPLY	ECL

N	NICOLAS Alain	professeur	CEGELY	ECL
	NICOLAS Laurent	directeur de recherche	CEGELY	CNRS
P	PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
	PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférence	LTDS	ECL
	PERRIN Jacques	professeur	INSA	
	PICHAT Pierre	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	POUSIN Jérôme	professeur	MAPLY	INSA
	PONSONNET Laurence	maître de conférence	IFOS	ECL
	PREVOT Patrick	professeur	ICTT	INSA
R	REBOUX Jean-Luc	professeur	LTDS	ENISE
	ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
	ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
	ROJAT Gérard	professeur	CEGELY	UCBL
	ROUSSEAU Jacques	professeur émérite	LTDS	ENISE
	ROUY Elisabeth	professeur	MAPLY	ECL
S	SALVIA Michelle	maître de conférence	IFOS	ECL
	SANDRI Dominique	maître de conférence	MAPLY	UCBL
	SCHATZMAN Michelle	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
	SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
	SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
	SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	STREMSDOERFER Guy	professeur	IFOS	ECL
	SUNYACH Michel	professeur	LMFA	UCBL
T	TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	THOMAS Gérard	professeur	CEGELY	ECL
	THOUVEREZ Fabrice	maître de conférences	LTDS	ECL
	TREHEUX Daniel	professeur	IFOS	ECL
V	VANNES André-Bernard	professeur	IFOS	ECL
	VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	VINCENT Léo	professeur	IFOS	ECL
	VOLPERT Vitaly	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
Z	ZAHOUANI Hassan	professeur	LTDS	ENISE

Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) de l'École Centrale de Lyon (UMR CNRS 5509). Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Denis Jeandel, directeur du LMFA, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Cette étude entre dans le cadre des formations de l'École Doctorale MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique) ayant le triple sceau de l'École Centrale de Lyon, de l'Université Claude Bernard-Lyon I et de l'INSA de Lyon. Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Jean Bataille, directeur de l'École Doctorale, d'avoir autorisé ce travail.

Il faut souligner que durant cette thèse j'ai bénéficié d'une allocation de recherche du Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie.

Jean-Pierre Bertoglio, Directeur de Recherche CNRS, a encadré mon travail de thèse. Il a su m'insufler durant ces longues années sa science, son enthousiasme et sa rigueur : avec lui j'ai progressé. A l'issue de cette thèse je perds un Directeur mais j'espère garder un ami.

Ma reconnaissance va à Jacques Magnaudet, Directeur de Recherche CNRS à l'IMFT, qui a accepté la charge de rapporteur de ce travail de thèse. Son intérêt et ses critiques constructives m'ont beaucoup apporté.

Roland Schiestel, Directeur de Recherche CNRS à l'IRPHE, a lui aussi accepté la charge de rapporteur de ce travail. Je lui en suis reconnaissant. Sa maîtrise dans le domaine de la modélisation m'a permis de bénéficier d'un avis de valeur.

La présence dans mon jury de Denis Jeandel, Professeur à l'Université Claude Bernard - Lyon I, un des pionniers dans le domaine de la modélisation spectrale au LMFA m'a honnoré.

Kemal Hanjalić, Professeur de la Faculté des Sciences Appliquées à Delft (Pays Bas), m'a fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse. Je suis heureux d'avoir bénéficié de l'analyse et des critiques de ce chercheur dont les travaux constituent une référence dans le domaine de la modélisation de la turbulence.

Je remercie chaleureusement Sylvain Parpais, Ingénieur de Recherche chez Renault, à qui je tiens à exprimer ma reconnaissance d'avoir fait partie de mon jury de thèse, et surtout de m'avoir transmis sa science dans le domaine de la modélisation de la turbulence lorsque ma connaissance dans ce domaine n'était que balbutiante.

Je remercie également toutes les personnes qui ont pu m'aider directement ou indirectement durant mon travail de thèse que ce soit pour solutionner des problèmes techniques, en relisant mon manuscrit (G. Lamaison & W. Bos) ou par des discussions

autour d'un café. Grâce à leur gentillesse et leur amitié mon séjour au LMFA a été très agréable et quel que soit l'avenir qui m'attend cette expérience me laissera un souvenir imperissable. Je remercie en particulier F. Laadhari, L. Shao, F.S. Godeferd, P. Jeandel, M. Michard et L. Lepenven de m'avoir fait bénéficier de leurs compétences.

Par dessus tout, je suis reconnaissant envers mes parents d'avoir donné à leurs enfants leur amour, leur optimisme et leur confiance inextinguible, attentions sans lesquelles je ne serais sans doute pas là où j'en suis. Je remercie mes frères et soeurs de m'avoir soutenu par leurs attentions fraternelles. Toujours à mes côtés, ma femme a su me redonner la force et le réconfort sans lesquels je n'aurais pas abouti. Je remercie ma famille, ma belle famille, mes proches et mes amis pour tout ce qu'ils me donnent, des choses qu'on ne peut pas décrire avec des mots.

A mes parents	*Tahar et Zoubeïda*
A mes frères	*Mohamed et Jamel*
A mes soeurs	*Maha, Saaïda, Houda, Halima et Hounaïda*
A mon épouse	*Nathalie*

Table des matières

Liste des figures 15
Liste des tableaux 19
Nomenclature 21

Introduction **23**

I Approche statistique et modélisation en un point **27**
I.1 Introduction 27
I.2 Description statistique 27
I.2.1 Règles de Reynolds 28
I.3 Application aux équations de Navier-Stokes 28
I.3.1 Rappel 28
I.3.2 Equations moyennées 28
I.3.3 Signification physique 29
I.4 Modèles en un point 31
I.4.1 Introduction 31
I.4.2 Fermeture 32
Dissipation ε_{ij} 32
Termes de transport inhomogène d^1_{ij} et d^3_{ij} 32
Corrélations pression-déformation 33
Prise en compte de l'influence d'une paroi 36
I.5 Conclusion sur les modèles en un point 38

II Approche en deux points et modèle spectral inhomogène simplifié **41**
II.1 Introduction 41
II.2 Modélisation en deux points pour la turbulence homogène isotrope : présentation succincte du modèle EDQNM 42
II.3 Ecriture des équations pour les corrélations en deux points dans le cas inhomogène 44
II.4 Ecriture des équations pour les spectres tridimensionnels des corrélations doubles en deux points 46
II.5 Hypothèses et fermeture pour l'approche spectrale 48
II.5.1 Expression des corrélations pression-vitesse 49
II.5.2 Equation des corrélations doubles développée au premier ordre 49
II.6 Modèle spectral simplifié 52
II.6.1 Les différents termes modélisés et leur signification 54
La trace du transfert non-linéaire 55

La partie déviateur du transfert non-linéaire 55
Le terme de pression rapide 57
Le transfert linéaire 57
Le transport inhomogène 59
II.6.2 Prise en compte des effets de paroi 60
Troncature “infrarouge” des spectres 60
Influence des parois à travers les termes de pression 61
II.7 La formulation finale du modèle SCIT 63
II.7.1 Les constantes intervenant dans le modèle 63
II.8 Relation du modèle SCIT avec les quantités en un point 63
II.9 Conclusion 64

III Méthodes numériques **65**
III.1 Introduction 65
III.2 Inconnues principales – Discrétisation temporelle 65
III.2.1 Inconnues du problème 65
Bilan 66
III.2.2 Discrétisation temporelle 66
III.3 Discrétisation spectrale 67
III.4 Discrétisation spatiale 68
III.4.1 Formulation faible 68
III.4.2 Méthode de Galerkin et espaces d’interpolation 69
Méthode de Galerkin 69
Discrétisation par éléments finis 69
III.5 Conditions aux limites 69
III.5.1 Conditions d’entrée 69
III.5.2 Conditions de sortie 69
III.5.3 Conditions aux limites en présence de parois solides 70
Pour la vitesse moyenne 70
Pour les spectres de la turbulence 70

IV Résultats du modèle **73**
IV.1 Introduction 73
IV.2 Ajustement des constantes du modèle 73
IV.2.1 Optimisation du modèle pour une turbulence homogène anisotrope : le cisaillement uniforme 73
Présentation de l’écoulement 73
Résultats et analyse 74
IV.2.2 Optimisation dans une situation inhomogène « simple » : l’écoulement en canal plan 80
Présentation de l’écoulement 80
Description de la mise en oeuvre numérique 80
Calibration des dernières constantes du modèle 80
IV.3 Analyse des résultats pour l’écoulement en canal plan 82
IV.3.1 Les quantités en un point 82
IV.3.2 Comportement spectral de la turbulence 82
Synthèse 87

IV.4 Ecoulement sur une marche descendante 89
IV.4.1 Introduction 89
IV.4.2 Présentation de l'écoulement 91
IV.4.3 Mise en oeuvre numérique 92
IV.4.4 Résultats et analyse 93
Les champs moyens 93
Le champ turbulent 94
Informations spectrales 98
Conclusion 98
IV.5 Ecoulement dans un diffuseur asymétrique 101
IV.5.1 Introduction et présentation de l'écoulement 101
IV.5.2 Mise en oeuvre numérique 102
IV.5.3 Résultats et analyse 103
IV.5.4 Conclusion 106
IV.6 Ecoulement autour d'une voilure Aérospatiale F2A 106
IV.6.1 Présentation et enjeux 106
IV.6.2 Description de l'écoulement 107
IV.6.3 Mise en oeuvre numérique 107
IV.6.4 Résultats et analyse 109

Conclusion **117**

Bibliographie **119**

Annexes **127**

A Outils mathématiques de modélisation **129**
A.1 Introduction 129
A.2 Forme des invariants d'un tenseur 129
A.2.1 Invariant d'un tenseur d'ordre 1 129
A.2.2 Invariants d'un tenseur du second ordre 129
A.2.3 Invariants de plusieurs tenseurs 130
A.3 Représentation par fonctions tensorielles 130
A.3.1 Introduction 130
A.3.2 Démarche générale de représentation d'un tenseur par une fonction polynomiale de vecteurs et de tenseurs 131
A.3.3 Exemples 132
Exemple 1 : forme d'un scalaire fonction tensorielle isotrope d'un scalaire, d'un vecteur et d'un tenseur du second ordre 132
Exemple 2 : forme d'un tenseur du premier ordre fonction tensorielle isotrope d'un scalaire, d'un vecteur et d'un tenseur du second ordre 132
Exemple 2 : forme d'un tenseur du second ordre fonction tensorielle isotrope d'un vecteur et d'un tenseur du second ordre 133

B Développement des équations spectrales **135**
B.1 Equation des corrélations doubles développée au second ordre 135

C Obtention des corrélations triples **137**
C.1 Expression du spectre des corrélations triples 137
Hypothèse Quasi-Normale 139
Forme des corrélations triples 139
Développement au second ordre des corrélations triples 139
Introduction d'un amortissement tourbillonnaire 140
Makovianisation des corrélations triples 141

D Résultats complémentaires pour la simulation du diffuseur asymétrique **143**
D.1 Introduction 143
D.2 Les quantités en un point prédites par le modèle spectral comparées à l'expérience ainsi qu'à différents modèles 143

E Effets de la troncature spectrale sur le déclin d'une turbulence isotrope dans un domaine borné **153**

Table des figures

I.1 Point image pour le terme d'écho de paroi 37

II.1 Interaction triadique pour le transfert non linéaire 43
II.2 fluctuations de vitesse en deux points 44
II.3 Ecoulement de paroi 62

III.1 Elément P1-iso-P2 : la pression est définie aux noeuds marqués par un cercle alors que la vitesse est définie aux noeuds marqués par un cercle ou un carré. 70

IV.1 Cisaillement uniforme 74
IV.2 Anisotropie prédite par le modèle en fonction du gradient cumulé $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme 76
IV.3 Evolution du rapport ε/P en fonction du gradient cumulé $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme 76
IV.4 Comportement exponentiel de l'énergie cinétique turbulente en fonction du gradient cumulé $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme . . . 77
IV.5 Spectres $E(k)$ à différents instants $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme 77
IV.6 Spectres $E(k)$ de la figure précédente mais en adimensionnement universel de Kolmogorov ; cas du cisaillement uniforme. 78
IV.7 Spectres φ_{12} à différents instants du cisaillement uniforme 78
IV.8 Spectres φ_{12} adimensionnés pris aux mêmes instants du cisaillement uniforme que fig. IV.7 79
IV.9 Ecoulement de canal établi 80
IV.10 Forme de la fonction d'amortissement de l'écho de paroi 81
IV.11 Sensibilité à la variation du coefficient μ_p des profils moyennés dans un canal plan ($\{C_b^p = 0.82, C_\nu^s = \frac{1}{2}\}$) 83
IV.12 Sensibilité à la variation du coefficient C_ν^s des profils moyens dans un canal plan ($\{C_b^p = 0.82, \mu_p = \frac{1}{2}\}$) 84
IV.13 Sensibilité à la variation du coefficient C_b^p des profils moyens dans un canal plan ($\{\mu_p = \frac{1}{2}, C_\nu^s = \frac{1}{2}\}$) 85
IV.14 Profils moyens dans un canal plan obtenus avec le modèle comparés à ceux de la DNS de Moser *et al* au nombre de Reynolds $Re_\tau = 590$. 88

IV.15 Spectres $E(k)$ en plusieurs points du canal, dans les mêmes conditions que la DNS de Moser *et al* au nombre de Reynolds $Re_\tau = 590$; à gauche $30 < y^+ < 60$ et à droite $400 < y^+ < 600$ 89
IV.16 Valeurs prises par α_d en fonction Re_λ et pour deux nombres de Reynolds différents ($Re = 1.26\ 10^4$ et $Re = 1.26\ 10^7$) 89
IV.17 Valeurs prises par Re_λ (à gauche) et "le taux de déséquilibre" $\chi = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon}$ dans le canal pour deux nombres de Reynolds différents($Re = 1.26\ 10^4$ à gauche et $Re = 1.26\ 10^7$ à droite) 90
IV.18 Valeurs prises par χ en fonction Re_λ et pour deux nombres de Reynolds différents ($Re = 1.26\ 10^4$ et $Re = 1.26\ 10^7$) 90
IV.19 Spectres du transfert non linéaire et de la dissipation (multipliés par k) au centre d'un canal pour deux nombres de Reynolds différents ($Re = 1.26\ 10^4$, $Re_\lambda = 60$ à gauche et $Re = 1.26\ 10^7$, $Re_\lambda = 1500$ à droite) 91
IV.20 Spectres d'énergie cinétique turbulente adimensionnés E^* en fonction de k^* (adim. de Kolmogorov) dans la section du canal pour des $y^+ > 50$ et pour deux nombres de Reynolds différents($Re = 1.26\ 10^4$ à gauche et $Re = 1.26\ 10^7$ à droite) 91
IV.21 Ecoulement sur une marche descendante 92
IV.22 Maillage utilisé pour la simulation d'un écoulement sur une marche descendante (P1-iso-P2) 92
IV.23 Ecoulement sur une marche descendante : lignes de courant prédites par le modèle $k - \varepsilon$ (en haut) et le modèle spectral (en bas). 93
IV.24 - Vitesse longitudinale - Profils adimensionnés par le point de vitesse maximum - de gauche à droite et de haut en bas : $x/H = 2.67$; $x/H = 5.33$; $x/H = 6.22$; $x/H = 7.11$; $x/H = 8.00$; $x/H = 10.7$. 95
IV.25 Composantes diagonales du tenseur de Reynolds - Profils adimensionnés par la vitesse maximum dans la section d'entrée - de gauche à droite et de haut en bas : $x/H = 2.30$; $x/H = 4.10$; $x/H = 6.80$; $x/H = 8.60$; $x/H = 10.3$; $x/H = 13.0$. 96
IV.26 Composante $\overline{u_1 u_2}$ du tenseur de Reynolds - Profils adimensionnés par la vitesse maximum dans la section d'entrée - de gauche à droite et de haut en bas : $x/H = 2.30$; $x/H = 4.10$; $x/H = 6.80$; $x/H = 8.60$; $x/H = 10.3$; $x/H = 13.0$. 97
IV.27 Ecoulement sur une marche descendante : isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente prédite par le modèle $K - \varepsilon$ (en haut) et le modèle SCIT (en bas), même échelle (à droite) 98
IV.28 Ecoulement sur une marche descendante : spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ (en bas) le long d'une ligne de courant (adimensionnement universel de Kolmogorov pour les spectres) 99
IV.29 Ecoulement sur une marche descendante : isovaleurs de Re_λ 99
IV.30 Ecoulement sur une marche descendante : isovaleurs du taux de déséquilibre χ.(éq. (IV.5)) 100
IV.31 Ecoulement sur une marche descendante : spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ (en bas) le long d'une ligne de courant fermée dans la zone de recirculation principale (adimensionnement universel de Kolmogorov pour les spectres) 100

IV.32 Configuration de l'écoulement dans un diffuseur asymétrique bidimensionnel 101
IV.33 Maillage (P1-iso-P2) utilisé pour la simulation d'un écoulement dans un diffuseur asymétrique (en haut ensemble du domaine de calcul, en bas zoom sur le début du diffuseur) 102
IV.34 Cas du diffuseur : vitesse moyenne calculée par le modèle spectral comparée à l'expérience (•) dans plusieurs sections 103
IV.35 Cas du diffuseur : composantes du tenseur de Reynolds calculées par le modèle spectral comparées à l'expérience (•) dans la section $x/H = 13.56$ 104
IV.36 Ecoulement dans un diffuseur : isovaleurs de Re_λ 104
IV.37 Ecoulement dans un diffuseur : isovaleurs du taux de déséquilibre χ. . 105
IV.38 Lignes de courant prédites par le modèle spectral dans le cas de l'écoulement dans un diffuseur asymétrique. 105
IV.39 Maillage utilisé lors des simulations autour de la voilure F2A 108
IV.40 Lignes de courant prédites par le modèle spectral dans le cas d'un écoulement autour d'un profil d'aile. 109
IV.41 Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente prédite par le modèle $K-\varepsilon$ (en haut) et le modèle SCIT (en bas), même échelle (à droite). 111
IV.42 Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres $E(k,\boldsymbol{x})$ (en bas, en log-log) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation 112
IV.43 Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres $E(k,\boldsymbol{x})$ (en log-log, adim. universelle de Kolmogorov) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation (voir figure IV.42). 113
IV.44 Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres compensés de $E(k,\boldsymbol{x})$ (en log-log) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation (voir figure IV.42) 113
IV.45 Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres compensés de $E(k,\boldsymbol{x})$ (en log-linéaire) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation (à gauche, voir figure IV.42) ; à droite résultat obtenu pour le même Re_λ dans le cas du cisaillement uniforme. 114
IV.46 Profil d'aile aérospatiale A : isovaleurs de Re_λ. 114
IV.47 Distribution du taux de déséquilibre χ prédite par le modèle dans le cas d'un écoulement autour d'un profil d'aile. 115

D.1 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 1. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 144
D.2 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 2. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 145
D.3 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 3. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 146

D.4 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 4. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 147
D.5 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 5. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 148
D.6 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 6. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 149
D.7 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 7. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 150
D.8 Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 8. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$ 151

Liste des tableaux

IV.1 Valeurs des constantes issues de l'optimisation dans le cas du cisaillement uniforme. 75
IV.2 Valeurs expérimentales de b_{ij} (Tavoularis et Karnik) et résultat asymptotique obtenu à l'aide du modèle. 75

A.1 Base d'intégrité pour un scalaire, un tenseur du premier ordre et un tenseur du second ordre 132
A.2 Base d'intégrité pour un scalaire, un tenseur du premier ordre et un tenseur du second ordre 133

D.1 Liste des modèles comparés dans le cas du diffuseur asymétrique . . . 143

Nomenclature

Seules sont représentées ici les quantités les plus fréquemment rencontrées dans le manuscrit.

t	: variable temporelle.
$\boldsymbol{x}$, x_i	: variable spatiale, position dans l'espace physique (et composante e_i associée).
$\boldsymbol{u}$, u_i	: fluctuation de vitesse.
$\overline{\boldsymbol{U}}$, $\overline{U_i}$	: vitesse moyenne.
$\boldsymbol{U}$, U_i	: vitesse ($= \overline{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{u}$).
p	: fluctuation de pression.
$\overline{P}$	: pression moyenne.
P	: pression ($= \overline{P} + p$).
K ou $\dfrac{\overline{q^2}}{2}$	: énergie cinétique turbulente (par unité de masse).
$\boldsymbol{R}$, R_{ij} ou $\overline{u_i u_j}$	: tenseur de Reynolds.
ε	: taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.
L	: échelle intégrale.
Re	: nombre de Reynolds.
Re_T	: nombre de Reynolds turbulent dont l'échelle de longueur caractéristique est l'échelle intégrale.
Re_λ	: nombre de Reynolds turbulent dont l'échelle de longueur caractéristique est l'échelle de Taylor ($\simeq \sqrt{Re_T}$).
$\boldsymbol{r}$, r_i	: vecteur séparation dans l'espace physique, lié à l'écriture des équations en deux points.
$\boldsymbol{k}$, k_i	: vecteur d'onde.
k	: nombre d'onde ($= \lvert\boldsymbol{k}\rvert$).
$\boldsymbol{\Phi}$, Φ_{ij}	: tenseur de Reynolds spectral tridimensionnel et composante $e_i \otimes e_j$ associée.
$\boldsymbol{\varphi}$, φ_{ij}	: tenseur de Reynolds spectral intégré sur les sphères de rayon k.
E	: densité spectrale d'énergie cinétique turbulente (demi-trace de $\boldsymbol{\varphi}$).

Introduction

Le travail présenté dans cette thèse porte sur les écoulements turbulents incompressibles. L'équation de base décrivant la dynamique de ces écoulements est l'équation de Navier-Stokes. C'est le caractère non-linéaire de cette équation qui en fait sa difficulté. En effet, la non-linéarité induit la nature aléatoire de la turbulence qui rend difficile la prédiction d'un écoulement. Ce caractère imprévisible a pour conséquence qu'aujourd'hui encore la turbulence constitue un des problèmes majeurs de la mécanique.

Les avancées dans l'étude de la turbulence ont été liées à des travaux pionniers portant sur des situations d'écoulements turbulents "simples". Les progrès de la puissance de calcul des ordinateurs ont été des facteurs importants pour permettre une meilleure compréhension de la turbulence. Cette évolution permet aujourd'hui non seulement de réaliser des Simulations Numériques Directes (DNS) mais aussi d'améliorer le traitement des données expérimentales. Il reste néanmoins impossible de simuler directement des écoulements turbulents à nombre de Reynolds élevé. En effet, le nombre de noeuds nécessaires à la discrétisation spatiale d'un écoulement turbulent est intimement lié à ce nombre. Pour une simulation directe le nombre de points nécessaire est proportionnel à $Re^{\frac{9}{4}}$.

On a l'habitude de considérer la turbulence comme associée à une gamme continue de tourbillons de dimensions différentes (on parle d'échelles), où les plus gros transfèrent leur énergie vers les plus petits jusqu'à une dimension (échelle de Kolmogorov) où ils sont éteints par la viscosité du fluide ("cascade de Kolmogorov"). Plus le nombre de Reynolds est élevé plus cette gamme d'échelles est étendue (ce qui induit le coût croissant de la simulation directe).

Une alternative à la simulation directe est de décider arbitrairement de ne simuler qu'une gamme restreinte d'échelles et de modéliser l'influence des échelles manquantes. On parle alors de calculs LES (Large Eddy Simulation) ou de Simulation des Grandes Echelles (SGE). Pour cette approche, on ne calcule de façon directe que les grands tourbillons et on modélise l'influence des petits. La séparation est effectuée par filtrage. Etant donné que le calcul n'est alors plus capable de dissiper l'énergie en raison de l'absence des petites structures on introduit classiquement une viscosité turbulente, dite viscosité de sous-maille, qui se charge de dissiper cette énergie en rétablissant artificiellement le processus de cascade de Kolmogorov. Cette technique constitue actuellement une des voies les plus explorées dans le domaine de la turbulence.

A côté de ces approches de simulation, l'approche statistique reste plus classique. Initialement proposée par Reynolds en 1883, elle consiste à décomposer les champs turbulents en une partie moyenne et une partie fluctuante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{U} = \overline{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{u} \\ P = \overline{P} + p \end{cases}$$

La moyenne statistique rend le comportement des quantités plus régulier donc plus aisé à prédire. Cette simplification a une contrepartie qui est l'apparition de termes inconnus à modéliser qui sont relatifs à l'ensemble du champ turbulent, et non aux seules petites échelles comme dans le cas de la SGE.

L'approche statistique la plus répandue est la modélisation en un point, ainsi nommée parce qu'elle repose sur des équations de transport de moments en un point (les corrélations doubles dans le cas des modèles aux tensions de Reynolds, l'énergie cinétique dans le cas du modèle $K - \varepsilon$).

Ces modèles sont les plus utilisés dans le monde industriel, leur succès étant lié aux coûts de calcul relativement réduits qu'ils nécessitent. Bien évidemment, ce type d'approches a ses limites car les hypothèses sur lesquelles les modèles en un point reposent sont discutables, et l'information sur la turbulence à ce niveau de description reste relativement succincte.

Les modèles en deux points, ou modèles spectraux sont quant à eux capables de donner une information plus riche sur la turbulence. Le modèle élaboré durant notre travail de thèse se situe dans cette catégorie.

L'idée de ces modèles est d'écrire une équation d'évolution pour les corrélations des fluctuations de vitesse en deux points. L'approche permet alors d'accéder à toutes les échelles de la turbulence ainsi qu'à la directivité des structures mises en jeu, que l'on a l'habitude de caractériser en appliquant la transformation de Fourier à ces corrélations. Le problème est la lourdeur de l'approche : on travaille dans un espace physique 3-D et le fait de se projeter dans l'espace spectral introduit un vecteur d'onde et donc trois nouvelles dimensions. Cette approche se montre alors presque inabordable numériquement. Une solution à ce problème est d'appauvrir cette description – démarche suivie en particulier au LMFA – en décidant de ne considérer que des spectres moyennés sur les directions du vecteur d'onde, perdant ainsi une information sur la directivité des structures turbulentes. C'est la démarche adoptée par Cambon *et al* [1] dans le cas de la turbulence homogène anisotrope. Après le succès du modèle en deux points EDQNM en turbulence isotrope, il était logique d'étendre cette approche au cas de la turbulence homogène anisotrope (THA) : c'est ce qu'ont proposé Cambon *et al* [1]. Les modèles spectraux applicables à des situations de turbulence inhomogène ont mis plus de temps a voir le jour. Ménoret [2] et Burden [3] sont à notre connaissance les premiers à avoir proposé des modèles faiblement inhomogènes en développant les équations autour de l'homogénéité. Ces auteurs n'ont toutefois pas réellement abouti à des équations exploitables numériquement. Laporta [4] a étendu cette démarche de développement pour aboutir à une équation pour le spectre de l'énergie cinétique turbulente $E(k, \boldsymbol{x}, t)$ (intégrale sur les sphères de rayon k de la trace du tenseur spectral $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}, t)$, transformée de Fourier des corrélations doubles de vitesse en deux points). En émettant les mêmes hypothèses que celles du modèle EDQNM, Laporta ferme ces équations et écrit l'équation pour la variable scalaire $E(\boldsymbol{x}, k, t)$. Cette équation ne tient pas compte de la présence de paroi. Parpais [5] s'est quant à lui appuyé sur les développements de Laporta, et il s'est attaché à simplifier cette approche en partant de la constatation que le modèle de Laporta était encore trop lourd pour être mis en oeuvre numériquement pour des géométries complexes. Il a donc développé un

modèle spectral simplifié. Dans ce modèle la variable de base est toujours $E(\boldsymbol{x}, k, t)$. Cette version du modèle en terme de $E(k, \boldsymbol{x}, t)$ s'appuie sur des travaux préliminaires de Bertoglio et Jeandel [6], et elle a été appliquée à la prédiction d'écoulements aussi complexes que la phase d'admission d'un moteur à piston (écoulement sous une soupape [7]).

Les résultats de Laporta ainsi que ceux de Parpais ont montré que cette approche pouvait donner une information sur le spectre de la turbulence et sur les échelles turbulentes mises en jeu dans les écoulements inhomogènes. Néanmoins, l'anisotropie de la turbulence, et son influence sur le champ moyen, n'était prise en compte que de manière grossière (à travers l'hypothèse de Boussinesq) à cause du fait que la variable de base restait un scalaire.

L'objectif de notre thèse a donc été d'étendre cette démarche à une formulation tensorielle. Le but était donc de développer un modèle statistique pour la prédiction des champs turbulents par une approche en deux points (intrinsèquement multi-échelles) capable d'appréhender le caractère inhomogène et anisotrope des écoulements réels, loin des situations idéales telles que la turbulence isotrope. Nous avons naturellement décidé de développer un modèle spectral inhomogène anisotrope pour lequel la variable de base est $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$, spectre du tenseur de Reynolds. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur les travaux de Laporta [4] et de Parpais [5] pour ce qui est du développement d'un modèle spectral inhomogène et sur les travaux de Cambon *et al* [1] ainsi que de Besnard *et al* [8] pour ce qui concerne le développement d'un modèle spectral anisotrope. Comme pour toutes les approches statistiques, une fermeture des équations était nécessaire. La modélisation retenue pour les termes de transfert non linéaire s'appuie sur la théorie EDQNM (Orszag 1970 [9]).

Détaillons maintenant le plan de ce manuscrit. Dans un premier volet, nous rappelons les fondements de l'approche statistique et nous posons le problème de fermeture rencontré lorsque l'on adopte une description statistique de la turbulence. Nous abordons ensuite les notions de modélisation, en commençant par illustrer comment les équations sur le tenseur de Reynolds en un point sont fermées. Nous soulignons les grandes hypothèses qui sont généralement introduites dans cette démarche. L'intérêt de la présentation est de mettre en avant les grandes étapes de modélisation dans un cadre anisotrope ainsi que de repérer les termes cruciaux à modéliser dans les équations de la turbulence. Rappelons que l'intégrale de $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$ sur les nombres d'ondes est le tenseur de Reynolds en un point.

Nous présentons ensuite notre approche en nous appuyant sur les travaux de Laporta [4]. Comme chez cet auteur, un développement spatial autour de l'homogénéité est introduit. Nous avons arrêté le développement des équations au premier ordre en inhomogénéité. A ce niveau de description les équations sont déjà compliquées. En particulier le terme de transport inhomogène contient une dépendance spectrale sur les vecteurs d'onde. Après avoir explicité tous les termes à modéliser, nous adoptons une démarche plus heuristique afin de fermer complètement les équations. En particulier, le transport inhomogène est fermé comme l'ont proposé Besnard *et al* [8] et Parpais [5].

Le volet suivant de notre travail consiste à déterminer les constantes apparaissant dans le modèle. Le modèle est ensuite employé à simuler des cas tests classiques de validation. Enfin, et c'était un des objectifs de notre travail de thèse, nous avons ap-

pliqué notre modèle spectral inhomogène anisotrope dans des géométries complexes pour des écoulements présentant des décollements.

Chapitre I

Approche statistique et modélisation en un point

I.1 Introduction

Tout au long de ce chapitre nous nous efforcerons de montrer les fondements de l'approche statistique dans le domaine de la turbulence. Cette approche permet de traiter les champs turbulents de vitesse et de pression comme des variables aléatoires. La notion de moyenne statistique pour la turbulence sera définie. Ensuite nous appliquerons cette moyenne aux équations de la mécanique des fluides. Par le biais de la modélisation en un point nous montrerons que l'approche statistique fait apparaître de nouvelles inconnues dans les équations. Nous rappellerons alors de façon succincte comment les équations sont fermées pour les modèles en un point au second ordre (modèles aux tensions de Reynolds). Nous avons choisi cette démarche car nous nous appuierons par la suite sur ce qui est fait en modélisation en un point pour développer notre modélisation en deux points.

Définissons d'abord les notions de bases pour une approche statistique.

I.2 Description statistique

Soit $\mathcal{U}$ une variable aléatoire, fonction de la position spatiale $\boldsymbol{x}$ et du temps t. On l'observe sur N réalisations indépendantes $\mathcal{U}^i$, $i = 1 \dots N$. La moyenne d'ensemble est alors définie par :

$$\overline{\mathcal{U}}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{U}^i(\boldsymbol{x}, t) \tag{I.1}$$

Cette moyenne est parfois difficile à mettre en oeuvre dans la pratique, ainsi les expérimentateurs lui préfèrent souvent la moyenne temporelle, utilisée sous une hypothèse d'ergodicité. La moyenne statistique reste cependant l'outil le plus simple et le plus approprié à une démarche théorique et c'est celle que nous utiliserons dans cette thèse.

I.2.1 Règles de Reynolds

Les propriétés essentielles de la décomposition de Reynolds sont ici rappelées. Soient deux variables aléatoires U et V, leurs décompositions s'écrivent :

$$U = \overline{U} + u \text{ et } V = \overline{V} + v$$

Les propriétés de l'opérateur de Reynolds sont :

- $\overline{u} = \overline{v} = 0$
- $\overline{U + V} = \overline{U} + \overline{V}$
- $\overline{\alpha U} = \alpha \overline{U}$
- $\overline{U\overline{V}} = \overline{U}\ \overline{V}$
- $\overline{\dfrac{\partial U}{\partial t}} = \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial t}$
- $\overline{\dfrac{\partial U}{\partial x_i}} = \dfrac{\partial \overline{U}}{\partial x_i}$
- $\overline{\int U \mathrm{d}t} = \int \overline{U} \mathrm{d}t$
- $\overline{\int U \mathrm{d}x_i} = \int \overline{U} \mathrm{d}x_i$
- $\overline{UV} = \overline{U}\,\overline{V} + \overline{uv}$

I.3 Application aux équations de Navier-Stokes

I.3.1 Rappel

Pour un fluide newtonien incompressible, les équations locales d'évolution du fluide, équations de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement), s'écrivent :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}.\nabla)\boldsymbol{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu \Delta \boldsymbol{U} \tag{I.2}$$

où $\boldsymbol{U}$ est le vecteur vitesse et P la pression. ρ et ν sont respectivement la densité et la viscosité cinématique du fluide. Ces équations sont soumises à la condition d'incompressibilité (conservation de la masse) :

$$\nabla \,.\, \boldsymbol{U} = 0 \tag{I.3}$$

I.3.2 Equations moyennées

Lorsque l'on applique l'opérateur moyenne statistique aux équations (I.2) et (I.3), il vient :

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + (\overline{\boldsymbol{U}}.\nabla)\overline{\boldsymbol{U}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\overline{P} + \nu\Delta\overline{\boldsymbol{U}} - \nabla.\overline{\boldsymbol{R}} \tag{I.4}$$

$$\nabla\,.\,\overline{\boldsymbol{U}} = 0 \tag{I.5}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}.\nabla)\overline{\boldsymbol{U}} + (\overline{\boldsymbol{U}}.\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u} - \nabla.(\boldsymbol{R} - \overline{\boldsymbol{R}}) \tag{I.6}$$

$$\nabla\,.\,\boldsymbol{u} = 0 \tag{I.7}$$

Dans l'équation sur la vitesse moyenne (I.4) nous voyons apparaître les moments du second ordre (ou tensions de Reynolds) $\overline{\boldsymbol{R}} = \overline{\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}}$. Donc, pour avoir une information sur les moments du premier ordre (c'est à dire la vitesse moyenne) en résolvant (I.4), il faut connaître ces tensions qui constituent de nouvelles inconnues au problème sur les quantités moyennes. L'idée la plus logique est alors d'écrire une équation pour ces tensions :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k}\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = \quad & -\left(\overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k}\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}\right) \\ & -\frac{1}{\rho}\left(\overline{u_i\frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right) \\ & +\nu\Delta\overline{u_i u_j} \\ & -2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \\ & -\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}\end{aligned} \tag{I.8}$$

Apparaissent alors, dans cette équation, des moments du troisième ordre des fluctuations de vitesse (dernier terme du second membre de (I.8)). Cette équation n'est donc pas fermée. Si l'on devait écrire une équation pour les corrélations triples, elle ferait apparaître des moments du quatrième ordre : ainsi une hiérarchie infinie d'équations peut être écrite. L'équation du moment d'ordre N fera intervenir les moments d'ordre $(N+1)$. En arrêtant la hiérarchie à l'ordre N pour avoir accès aux moments d'ordre N, il faut donc modéliser les moments d'ordre $(N+1)$. C'est le problème de fermeture. Notons également que dans (I.8) d'autres termes sont inconnus : les termes de pression et l'un des termes visqueux (avant dernier terme). Ces termes sont inconnus en raison de la description choisie ici (description en un point puisque $\overline{\boldsymbol{R}}$ est une corrélation double en un point).

I.3.3 Signification physique

L'équation (I.8) peut être écrite sous une autre forme qui a pour avantage de faciliter l'interprétation des phénomènes physiques associés à chaque terme. Nous suivons pour cela Chou (1945) [10] et réécrivons l'équation de transport des contraintes de Reynolds :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial\,t} + \overline{U_k}\frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial\,x_k} = \quad & \underbrace{-\left(\overline{u_i u_k}\frac{\partial\,\overline{U_j}}{\partial\,x_k} + \overline{u_j u_k}\frac{\partial\,\overline{U_i}}{\partial\,x_k}\right)}_{P_{ij}} \\
& \underbrace{+\frac{1}{\rho}\,\overline{p\left(\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j} + \frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_i}\right)}}_{\Pi_{ij}} \\
& \underbrace{-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\,x_k}\,\overline{p\,(\delta_{jk}u_i + \delta_{ik}u_j)}}_{d^1_{ij}} \\
& \underbrace{+\nu\Delta\overline{u_i u_j}}_{d^2_{ij}} \\
& \underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_k}\frac{\partial\,u_j}{\partial\,x_k}}}_{\varepsilon_{ij}} \\
& \underbrace{-\frac{\partial\,\overline{u_i u_j u_k}}{\partial\,x_k}}_{d^3_{ij}}
\end{aligned}
\tag{I.9}
$$

Le membre de gauche contient le terme de variation temporelle et la convection par la vitesse moyenne. Le second membre se décompose en différents termes ayant des significations physiques distinctes :

- ♦ P_{ij} est le terme de “production”. Sa trace représente l’échange d’énergie entre le champ de vitesse moyen et le champ fluctuant. C’est ce terme source qui alimente la turbulence. A ce niveau de description, <u>ce terme ne nécessite pas de modélisation</u>. En effet, le tenseur de Reynolds et la vitesse moyenne sont explicitement mis en jeu.

- ♦ ε_{ij} est un terme de “destruction”. Sa demi trace $\varepsilon = \nu\overline{\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j}\frac{\partial\,u_i}{\partial\,x_j}}$ est généralement appelée dissipation. Notons qu’en toute rigueur (cf. par exemple Schiestel [11]) la vraie dissipation (au sens thermodynamique) est $\varepsilon_{ij} + \nu\frac{\partial^{\,2}\,R_{ij}}{\partial\,x_i\,\partial\,x_j}$ et que le terme ε devrait être désigné par le terme de pseudo-dissipation.
  A ce niveau de description, <u>ce terme nécessite des hypothèses de“fermeture”</u>. En effet, les gradients des fluctuations de vitesse sont ici des inconnues.

- ♦ Π_{ij} est le terme de corrélation pression-déformation. Lorsque l’on considère la demi-trace du tenseur de Reynolds $K = \frac{\overline{q^{\,2}}}{2} = \frac{1}{2}\,\overline{u_i u_i}$, appelée énergie cinétique turbulente, ce terme disparaît. Il contribue donc seulement à la redis-

tribution de l'énergie turbulente entre les composantes du tenseur de Reynolds. Ce terme contribue en partie à rendre la turbulence "plus isotrope". A ce niveau de description, ce terme nécessite des hypothèses de"fermeture".

- d^1_{ij} est un terme de transport par la pression fluctuante (dans l'espace physique). On dit souvent qu'il représente une "diffusion" par la pression. A ce niveau de description, ce terme nécessite des hypothèses de"fermeture".

- d^2_{ij} est un terme diffusif, diffusion liée à la viscosité. A ce niveau de description, ce terme ne nécessite pas de modélisation. En effet, le tenseur de Reynolds est explicitement mis en jeu.

- d^3_{ij} est un terme de corrélations triples qui représente le transport de l'énergie turbulente par le mouvement turbulent. Ce terme est souvent appelé "diffusif". A ce niveau de description, ce terme nécessite des hypothèses de"fermeture".

Nous voyons donc que le problème de fermeture des équations de transport des tensions de Reynolds n'est pas simple. En effet, pour fermer le problème et donner l'information nécessaire à la résolution de l'équation (I.4), il faut émettre des hypothèses sur quatre nouvelles inconnues : ε_{ij}, d^1_{ij}, d^3_{ij} et Π_{ij}.

Il existe deux grandes classes de modèles en un point. Les modèles dits à viscosité turbulente, comme par exemple le modèle $K-\varepsilon$, sont les plus utilisés dans l'industrie mais nécessitent de reconstruire les tensions de Reynolds à partir de K, ε et des gradients de vitesse moyenne. La seconde grande classe de modèles en un point est la modélisation au second ordre, qui donne directement accès aux tensions de Reynolds. Nous nous intéresserons par la suite seulement à la seconde classe, car elle est plus proche du modèle spectral que nous allons développer. Nous allons donc voir, sans être exhaustifs, ce qui a été fait jusqu'ici pour modéliser les termes inconnus dans l'équation sur les tensions de Reynolds (I.9) ainsi que les stratégies "classiques" de fermeture.

I.4 Modèles en un point

I.4.1 Introduction

Les modèles en un point constituent actuellement une des seules possibilités pour simuler des écoulements dans des configurations complexes ("real life flows"). Ces modèles sont fondés sur une hypothèse d'équilibre de la turbulence. A l'équation de transport sur les contraintes de Reynolds qui fournit une échelle de vitesse, il est nécessaire d'associer une échelle de longueur ou de temps.
Les modèles $\overline{u_i u_j}-\varepsilon$ introduisent dans ce but une équation sur ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ii}$$

dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Cette équation permet *a posteriori* de déterminer une échelle de longueur. Elle pose de nouveaux problèmes de fermeture. De multiples travaux y sont consacrés et l'on continue actuellement à lui consacrer de

nombreux développements afin de justifier certaines hypothèses. En effet, cette équation garde un caractère empirique et arbitraire bien que donnant des résultats satisfaisants dans beaucoup de configurations industrielles.
Intéressons nous ici à la fermeture des termes de l'équation (I.9) dans le cadre des modèles $\overline{u_i u_j} - \varepsilon$ en faisant référence à certains travaux majeurs.
Les différents travaux présentés dans le paragraphe suivant seront pour nous des jalons dans notre démarche de modélisation en deux points. En effet, si nous intégrons les équations de notre modèle spectral sur les nombres d'onde, nous trouvons alors l'équation (I.9).

I.4.2 Fermeture

Dissipation ε_{ij}

Depuis Kolmogorov (1941) [12, 13], on sait qu'à des nombres de Reynolds très élevés la turbulence est localement isotrope et donc que la même quantité d'énergie est dissipée pour chaque composante diagonale du tenseur de Reynolds. De plus les termes extra-diagonaux deviennent rapidement nuls lorsque l'on tend vers une turbulence localement isotrope.

Le tenseur de dissipation est donc généralement modélisé sous la forme d'un tenseur sphérique :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\,\varepsilon\,\delta_{ij} \tag{I.10}$$

où ε est la dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente $K = \dfrac{\overline{q^2}}{2}$.

Notons que certains auteurs, par exemple Daly *et al* (1970) [14], choisissent une forme anisotrope qui n'exprime pas la tendance à l'isotropie locale.

Termes de transport inhomogène d^1_{ij} et d^3_{ij}

Un des modèles les plus répandus pour les corrélations triples est un modèle de type premier gradient proposé par Daly et Harlow (1970) [14] :

$$d^3_{ij} \;=\; c_s\,\frac{\partial}{\partial\,x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\,\overline{u_k u_l}\,\frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial\,x_l}\right) \tag{I.11}$$

où c_s est une constante à ajuster. L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne conserve pas l'invariance par permutation des indices $\{i, j, k\}$ pour le tenseur des corrélations triples $\overline{u_i u_j u_k}$. Hanjalić et Launder (1972) [15] ont quant à eux proposé une forme qui respecte ces symétries :

$$d^3_{ij} \;=\; c_s\,\frac{\partial}{\partial\,x_k}\left(\frac{k}{\varepsilon}\left(\overline{u_k u_l}\,\frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial\,x_l} + \overline{u_i u_l}\,\frac{\partial\,\overline{u_j u_k}}{\partial\,x_l} + \overline{u_j u_l}\,\frac{\partial\,\overline{u_i u_k}}{\partial\,x_l}\right)\right) \tag{I.12}$$

Ce modèle repose sur une hypothèse Quasi-Normale qui permet de fermer l'équation des corrélations triples en négligeant les effets des gradients moyens.

On utilise classiquement la forme proposée par Daly et Harlow (1970) [14] afin de modéliser de façon conjointe les deux termes inhomogènes $d^1_{ij}+d^3_{ij}$. Cette hypothèse a pour avantage de permettre de s'affranchir de la nécessité d'invariance par permutation

des indices $\{i, j, k\}$ pour le tenseur des corrélations triples puisque c'est maintenant la somme de ce tenseur et d'un tenseur non symétrique qui se trouve modélisée.

Nous pouvons compléter cette présentation par une idée relativement récente (Lien et Leschziner (1993) [16]) qui est de prendre en compte les termes de transport $d^1_{ij} + d^3_{ij}$ sous la forme d'une diffusion par une viscosité turbulente comme dans le modèle $k - \varepsilon$, ce qui revient à une forme isotrope du modèle de Daly et Harlow :

$$d^1_{ij} + d^3_{ij} \;=\; \frac{\partial}{\partial\, x_k}\left(\frac{C_\mu}{\sigma_k}\,\frac{k^2}{\varepsilon}\,\frac{\partial\,\overline{u_i u_j}}{\partial\, x_k}\right) \tag{I.13}$$

Ce modèle ne respecte pas les symétries des corrélations triples seules. Il doit également être considéré comme modélisant la somme des corrélations triples et du terme de pression inhomogène. Nous pouvons citer Lien et Leschziner (1993) [16] qui appliquent ce modèle à un écoulement derrière une marche descendante. Debaty (1994) [17] durant son travail de thèse a montré dans plusieurs configurations que la formulation de Daly et Harlow était incapable de prendre en compte les phénomènes diffusifs mis en jeu dans des géométries complexes, par exemple dans le cas de l'admission derrière une soupape de moteur. Dans ce genre de situations la formulation isotrope (I.13) a été jugée supérieure.

Corrélations pression-déformation

Le terme de corrélations pression-déformation Π_{ij} est un des termes cruciaux dans la modélisation au second ordre. Leschziner (1995) le présente comme une des clefs de voûte du problème de fermeture au second ordre :

"Alongside with dissipation the pressure-strain redistribution presents the modeller with the biggest challenge in the context of second-moment closure".

De ce fait de nombreuses propositions ont été faites pour le modéliser. Nous présenterons ici l'approche classique qui consiste à se placer dans un cadre de turbulence homogène. Chou (1945) [10] fut le premier à proposer d'exprimer la fluctuation de pression p en utilisant une équation de Poisson. On peut alors écrire :

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{\rho}\,\overline{p\,\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)} = \Pi^L_{ij} \;+ \Pi^{NL}_{ij} \tag{I.14}$$

avec

$$\Pi^L_{ij} = \;\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \overline{\left(2\,\frac{\partial\,\overline{U_l}}{\partial\, x_m}\,\frac{\partial\, u_m}{\partial\, x_l}\right)'\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)}\,\frac{d\omega}{\parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel} \tag{I.15}$$

$$\Pi^{NL}_{ij} = \;\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \overline{\left(\frac{\partial^2\, u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m}\right)'\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)}\,\frac{d\omega}{\parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel} \tag{I.16}$$

En inhomogène il faudrait ajouter le terme Π^W_{ij} reflétant la présence de parois :

$$\Pi^W_{ij} = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \overline{\left(\frac{1}{\parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel}\frac{\partial\, p}{\partial\, n} - p\frac{\partial}{\partial\, n}\left(\frac{1}{\parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel}\right)\right)'\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)}\,d\sigma \tag{I.17}$$

Une remarque importante est que, par le biais des intégrales volumiques, les parties linéaire Π_{ij}^{L} et non linéaire Π_{ij}^{NL} comportent une information non locale dans l'espace physique. Or, un modèle en un point ne peut offrir que des informations locales. C'est une des limitations majeures de ce type d'approches, et c'est ce qui pousse à explorer le domaine des modèles en deux points qui donnent une information non-locale.
Voyons maintenant comment sont modélisés ces différents termes de corrélations pression-déformation, dans un premier temps dans un contexte homogène (donc sans l'influence d'une paroi).

En ce qui concerne le terme non linéaire Π_{ij}^{NL}, on s'accorde à dire qu'il tend à rendre la turbulence "plus isotrope". En effet, si l'on considère une turbulence homogène anisotrope sans gradient de vitesse moyenne (source d'anisotropie pour la turbulence), le seul terme issu des corrélations pression-déformation intervenant dans l'équation (I.9) est le terme non linéaire Π_{ij}^{NL}. Les expériences de Comte-Bellot *et al* (1966) [18] et Tucker *et al* (1968) [19] montrent que le retour vers l'isotropie est plus rapide lorsque l'anisotropie initiale est forte. Celle-ci est caractérisée par :

$$a_{ij} \;=\; \frac{\overline{u_i u_j}}{\overline{q}^2} - \frac{1}{3}\,\delta_{ij} \tag{I.18}$$

Dire que l'on retourne vers l'isotropie c'est dire que a_{ij} tend vers 0. Rotta (1951) [20] propose pour modéliser la partie non-linéaire des corrélations pression déformation que celles-ci soient proportionnelles au déviateur b_{ij} :

$$b_{ij} \;=\; \overline{u_i u_j} - \frac{1}{3}\,\overline{q}^2\,\delta_{ij} \tag{I.19}$$

Le coefficient de proportionnalité est l'inverse d'un temps τ_r (voir Gence *et al* [21]) :

$$\frac{\partial\, b_{ij}}{\partial\, t} \;=\; -\frac{b_{ij}}{\tau_r} \tag{I.20}$$

ce temps caractéristique proposé par Rotta est supposé proportionnel au temps de retournement de la turbulence $\dfrac{\overline{q}^2/2}{\varepsilon}$, ce qui conduit à écrire :

$$\frac{1}{\rho}\,\overline{p\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)} \;=\; c_1\,\frac{\varepsilon}{\overline{q}^2}\,b_{ij} = \; c_1\,\varepsilon\,a_{ij} \tag{I.21}$$

où c_1 est une constante à déterminer. Lumley généralise cette modélisation en ayant recours à la théorie des invariants (1977)[22]. Il écrit alors

$$\frac{1}{\rho}\,\overline{p\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)} \;=\; \mathcal{F}_{ij}(\,b_{ij},\;\frac{\overline{q^2}}{2},\;\varepsilon) \tag{I.22}$$

où $\mathcal{F}_{ij}$ est une fonction tensorielle isotrope. Finalement il propose pour la partie non linéaire des corrélations pression-déformation :

$$\frac{1}{\rho}\,\overline{p\left(\frac{\partial\, u_i}{\partial\, x_j} + \frac{\partial\, u_j}{\partial\, x_i}\right)} \;=\; \beta\,b_{ij} \;+\gamma\,\left(b_{ik}\,b_{kj} \;-\; \frac{1}{3}\,b_{ik}\,b_{ki}\right) \tag{I.23}$$

où β et γ sont des constantes à déterminer. Classiquement les constantes intervenant dans la modélisation de Π_{ij}^{NL} sont ajustées par rapport à des données expérimentales telles que celles d'Uberoi (1957) [23] ou Tucker et Reynolds (1968) [19].

Dans les premiers modèles aux tensions de Reynolds, Π_{ij}^{NL} était considéré comme suffisant, seul, à modéliser les corrélations pression-déformation. Néanmoins en présence d'un gradient de vitesse moyenne la partie linéaire de ces corrélations est importante. Townsend (1954) [24] notamment le souligne dans des conditions de distorsion rapide.

En se plaçant en turbulence homogène et en supposant les gradients de vitesse moyenne constants, l'équation de Poisson qui conduit à (I.15) permet d'écrire :

$$\Pi_{ij}^{L} = \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_m} \left(\mathcal{G}_{ijlm} + \mathcal{G}_{jilm}\right) \tag{I.24}$$

Le tenseur du quatrième ordre $\mathcal{G}_{ijlm}$ est alors supposé être une fonction tensorielle isotrope de b_{ij} et de $\frac{\overline{q^2}}{2}$. Rotta (1951) [20] précise les conditions que doit vérifier ce tenseur (propriétés formelles de l'intégrale (I.15)) :

$$\mathcal{G}_{ijlm} = \mathcal{G}_{mjli} = \mathcal{G}_{mlji} \quad \text{symétrie} \tag{I.25}$$

$$\mathcal{G}_{iilm} = 0 \quad \text{continuité} \tag{I.26}$$

$$\mathcal{G}_{ijjm} = 2\,\overline{u_m u_i} \quad \text{issue du théorème de Green} \tag{I.27}$$

Launder *et al* (1975) [25] supposent, en plus des conditions ci-dessus, que $\mathcal{G}_{ijlm}$ est linéaire en fonction des tensions de Reynolds et trouvent :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ijlm} = \; & \alpha\, \delta_{lj}\, \overline{u_m u_i} \\ & + \beta\, \left(\delta_{ml}\, \overline{u_i u_j} + \delta_{mj}\, \overline{u_i u_l} + \delta_{il}\, \overline{u_m u_j} + \delta_{ij}\, \overline{u_m u_l}\right) \\ & + c_2\, \delta_{mi}\, \overline{u_l u_j} \\ & + \left[\eta\, \delta_{mi}\, \delta_{lj} + \upsilon\, \left(\delta_{ml}\, \delta_{ij} + \delta_{mj}\, \delta_{il}\right)\right]\, \overline{q}^2/2 \end{aligned} \tag{I.28}$$

Une fois traduites les conditions (I.25),(I.26) et (I.27) on peut écrire le modèle pour la partie linéaire des corrélations pression-déformation sous forme compacte :

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{L} = \; & -\frac{c_2+8}{11}\left(P_{ij} - \frac{2}{3}\, P\, \delta_{ij}\right) - \frac{30c_2-2}{55}\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\overline{q^2}}{2} \\ & -\frac{8c_2-2}{11}\left(D_{ij} - \frac{2}{3}\, P\, \delta_{ij}\right) \end{aligned} \tag{I.29}$$

Ce modèle dans lequel intervient une seule constante, c_2, est aussi appelé modèle quasi isotrope (QI). Dans (I.29), P_{ij} est le terme de production dont la demi-trace est notée P et D_{ij} est donné par :

$$D_{ij} = -\left(\overline{u_i u_k}\frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k}\frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_i}\right).$$

Il est à noter que pour des approches en deux points Naot *et al* (1973)[26], Jeandel (1976) [27], Cambon *et al* (1981) [1] et Besnard *et al* (1990) [8] reprennent les principes de cette démarche pour aboutir à des formalismes qui, nous le verrons plus loin, peuvent être considérés comme des extensions de la formulation L.R.R. [25].

Prise en compte de l'influence d'une paroi

La modélisation de Π_{ij}^{NL} et de Π_{ij}^{L} a été effectuée dans un cadre de turbulence homogène. Pour des écoulements réels la présence d'une paroi modifie le comportement de la turbulence. D'une part, la proximité de la paroi provoque de fortes variations des gradients de vitesse moyenne. L'hypothèse de faible inhomogénéité n'est donc pas justifiée dans ce genre de configurations. D'autre part, pour les corrélations pression-déformation (relation (I.14)), l'intégrale de contour Π_{ij}^{W} devient non négligeable, car le confinement modifie la redistribution d'énergie par la pression. En terme de tenseur de Reynolds, des expériences (et des DNS) en canal plan ou en conduite axisymétrique ont montré que l'anisotropie s'accentue pour les composantes diagonales alors que les tensions croisées s'amortissent. Les différents auteurs ayant travaillé sur le sujet s'accordent sur le fait que l'influence de la paroi ne doit pas se faire ressentir au delà de y^+ de l'ordre de 30 à 40 où $y^+ = \dfrac{\delta u_f}{\nu}$, avec δ la distance à la paroi et u_f la vitesse de frottement.

Un autre effet non négligeable dû à la présence d'une paroi est aussi la saturation des échelles de la turbulence accompagnée de la restructuration de ces échelles de façon anisotrope. Or dans le cadre des modèles en un point ce phénomène est difficile à prendre en compte, car typiquement non-local.

Quelques tentatives ont été faites afin de tenir compte de l'inhomogénéité des gradients de vitesse moyenne. Par exemple Launder *et al* (1990) [28] proposent de remplacer les gradients de vitesse moyenne dans l'expression (I.29) de la partie rapide des corrélations pression-déformation par un gradient effectif incluant des effets de courbure :

$$\left.\frac{\partial\,\overline{U_i}}{\partial\,x_j}\right|_{eff.} = \frac{\partial\,\overline{U_i}}{\partial\,x_j} + c_1 l \frac{\partial\,l}{\partial\,x_m}\frac{\partial^{\,2}\overline{U_i}}{\partial\,x_m \partial x_j} \text{ avec } l = \frac{\overline{q}^2/2}{\varepsilon}\left(\overline{u_p u_q}\,n_p n_q\right)^{1/2}$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal à la paroi solide et c_1 une constante à ajuster.

Néanmoins cette démarche n'a pas été une voie majeure de recherche car les applications numériques n'ont pas été probantes. Le changement de comportement de la turbulence en proche paroi n'est pas à mettre complètement sur le compte d'une évolution rapide des gradients de vitesse moyenne. L'essentiel des travaux liés à la turbulence pariétale s'est focalisé sur l'influence de l'intégrale de contour Π_{ij}^{W} que l'on qualifie de terme "d'écho de paroi".

Launder *et al* (1975) [25] soulignent que dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane, on peut chercher une nouvelle fonction de Green pour le problème de Poisson sur la pression :

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\parallel \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \parallel} + \frac{1}{\parallel \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}' \parallel}$$

où $\boldsymbol{y}'$ est le point image de $\boldsymbol{y}$ par rapport à la paroi (figure I.1).

Ainsi l'intégrale de contour Π_{ij}^{W} dans l'expression des corrélations pression-déformation (I.14) correspond aux nouveaux termes en $\dfrac{1}{\parallel \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}' \parallel}$. Il y a donc dans cette configuration deux contributions, linéaire et non-linéaire. De la même manière que pour la partie rapide des corrélations pression-déformation Launder *et al* ont recours aux théorèmes de représentation afin de modéliser ce terme d'écho. Il sont donc

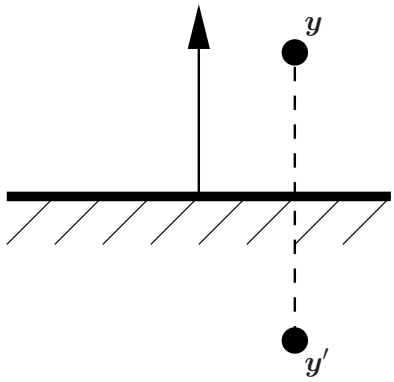

Figure I.1 : Point image pour le terme d'écho de paroi

conduits à introduire pour le terme d'écho les analogues de Π_{ij}^{L} et Π_{ij}^{NL}. Ils proposent la forme :

$$\Pi_{ij}^{W} = \Big(c_1' \, \frac{\varepsilon}{\overline{q}^2} \, b_{ij} + \frac{\partial \, \overline{U_l}}{\partial \, x_m} \, \left(\mathcal{B}_{ijlm} + \mathcal{B}_{jilm} \right) \Big) f(l/y) \tag{I.30}$$

Ainsi Launder *et al* gardent une contribution non-linéaire qui introduit une influence de la paroi même lorsqu'il n'y a pas de déformation moyenne. Le second terme prend en charge l'accentuation de l'anisotropie et la diminution des termes extra-diagonaux du tenseur de Reynolds, phénomènes observés expérimentalement. De plus une fonction d'amortissement $f(l/y)$ est introduite où l est une échelle caractéristique de la turbulence et y représente l'éloignement à la paroi. Sont rôle est donc "d'annuler" explicitement le terme d'écho loin de la paroi solide. On écrit $\mathcal{B}_{ijlm}$ comme $\mathcal{G}_{ijlm}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ijlm} = \; & \alpha' \, \delta_{lj} \, \overline{u_m u_i} \\ & + \beta' \, \left(\delta_{ml} \, \overline{u_i u_j} + \delta_{mj} \, \overline{u_i u_l} + \delta_{il} \, \overline{u_m u_j} + \delta_{ij} \, \overline{u_m u_l} \right) \\ & + c_2' \, \delta_{mi} \, \overline{u_l u_j} \\ & + \left[\eta' \, \delta_{mi} \, \delta_{lj} \; + \upsilon' \, \left(\delta_{ml} \, \delta_{ij} \; + \delta_{mj} \, \delta_{il} \right) \right] \, \overline{q}^2 / 2 \end{aligned} \tag{I.31}$$

Le nombre de constantes intervenant dans l'expression (I.31) peut être réduit en introduisant certaines propriétés de Π_{ij}^{W}. En effet celui-ci est purement redistributif et donc à trace nulle, par conséquent :

$$\mathcal{B}_{iilm} \; = \; 0$$

De plus, dans une configuration d'écoulement sur une plaque plane bidimensionnel dans un repère $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ (figure I.1), la composante $\overline{u_3 u_3}$ du tenseur de Reynolds n'est pas affectée par la présence de la paroi, alors :

$$\mathcal{B}_{3312} \; = \; 0$$

Finalement Launder *et al* (1975) obtiennent comme terme d'écho de paroi :

$$\Pi_{ij}^{W} = \Big(c_1' \, \frac{\varepsilon}{\overline{q}^2} \, b_{ij} + c_2'(P_{ij} - D_{ij}) + \zeta' \left(\frac{\partial \, \overline{U_i}}{\partial \, x_j} + \frac{\partial \, \overline{U_j}}{\partial \, x_i} \right) \Big) f(l/y) \tag{I.32}$$

avec $\zeta' = \frac{3}{4}\eta'$. De plus ils précisent que $l \simeq \frac{(\frac{\overline{q^2}}{2})^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}$ est l'échelle intégrale isotrope (représentative des grandes structures turbulentes, celles qui portent le plus d'énergie).

Pour ce terme d'écho, d'autres auteurs ont fait des propositions intéressantes. En particulier, l'ingrédient essentiel qui peut être ajouté au modèle précédent est l'influence de l'orientation des parois. Une des premières propositions dans cette direction a été faite par Shir (1973) [29]. Celle-ci a pour but de corriger la partie non linéaire des corrélations pression-déformation :

$$\Pi_{ij}^W = \Big(c_1' \, \frac{\varepsilon}{\overline{q}^2} \, (\, n_i n_l \, \overline{u_l u_j} \, + \, n_j n_l \, \overline{u_l u_i} \, - \, \frac{2}{3} \, n_l n_k \, \overline{u_l u_k} \, \delta_{ij} \,) \Big) \, f(l/y) \qquad \text{(I.33)}$$

Mais cette modélisation n'est pas conforme à la constatation expérimentale que $\overline{u_3 u_3}$ n'est pas affecté par la présence d'une paroi dans le cas de la plaque plane.

Gibson *et al* (1978) [30] dans le cadre de leurs travaux sur la couche limite atmosphérique reprennent cette idée et l'étendent à la partie linéaire des corrélations pression-déformation

$$\Pi_{ij}^W = c_2^w \Big(\, n_i n_l \, \Pi_{lj}^L \, + \, n_j n_l \, \Pi_{li}^L \, - \, \frac{2}{3} \, n_l n_k \, \Pi_{lk}^L \, \delta_{ij} \, \Big) \, f(l/y) \qquad \text{(I.34)}$$

où Π_{ij}^L est modélisé sous une forme dégénérée de celle proposée par Launder *et al* (1975). Celle-ci ne tient compte que de la partie production $\frac{c_2+8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \, P \, \delta_{ij} \right)$ qui est considérée comme dominante. Cette forme pour Π_{ij}^L donne un modèle simplifié, qualifié de modèle IP ("isotropisation" de la production). Ce modèle conserve l'anomalie pour la composante $\overline{u_3 u_3}$ du tenseur de Reynolds en particulier dans le cas où l'écoulement impacte sur une paroi. Dans cette situation l'énergie doit être redistribuée sur les composantes parallèles à la paroi, ce qui n'est pas prédit par le modèle. C'est pour cela que d'autre auteurs, en particulier Craft *et al* (1992) [31] se sont attachés à corriger cette anomalie. Il en résulte des modèles de plus en plus compliqués où la physique n'a peut-être plus sa place.

I.5 Conclusion sur les modèles en un point

Nous avons vu par le biais des équations de transport pour le tenseur de Reynolds les idées essentielles qui guident la démarche de modélisation dans le cadre d'une approche statistique. Cette démarche consiste à écrire les termes inconnus de ces équations en fonction des quantités auxquelles on a directement accès. Nous avons vu en particulier que l'on peut exprimer ces termes inconnus sous une forme polynômiale respectant les symétries inhérentes aux termes à modéliser (théorèmes de représentation). Ces termes font apparaître des constantes qu'il faut alors calibrer au regard de mesures expérimentales.

Ce type d'approche en un point montre parfois ses limites surtout lorsque l'on veut l'appliquer à des écoulements complexes. En effet, on est souvent confronté à des situations où de nombreuses échelles de turbulence sont mises en jeu. Or, pour les modèles en un point, une seule échelle est essentiellement prise en compte, l'échelle

$l = \frac{\overline{q^2}}{2}^{\frac{3}{2}}/\varepsilon$ représentative des grosses structures turbulentes. Une hypothèse d'équilibre permet alors de déduire l'énergie portée par les plus petits tourbillons, jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, au niveau de laquelle se dissipe l'énergie injectée par les grandes échelles (modèle de cascade de Kolmogorov). Bien que cette hypothèse soit satisfaisante pour la turbulence homogène isotrope, nous savons que dans les écoulements réels (cisaillement, paroi...) la turbulence est loin d'être en équilibre.

C'est pour cela que depuis plusieurs décennies, des chercheurs se sont intéressés à des approches multi-échelles plus aptes à tenir compte des déséquilibres de la turbulence (Hanjalić et Schiestel (1979) [32]). L'idée est d'avoir au moins une information plus fine sur les interactions entre structures de dimensions hétérogènes qui caractérisent la turbulence. La gamme des échelles mises en jeu étant continue et large bande, il semble alors intéressant d'appréhender le problème de fermeture par une analyse de Fourier.

Dans la suite de ce travail nous allons montrer comment, à partir d'une description en deux points, et en appliquant la transformation de Fourier aux équations obtenues, nous développons un modèle spectral simplifié, qui nous l'espérons nous donnera une information plus détaillée sur la turbulence.

Les modèles de turbulence en un point ont jusqu'ici montré leur utilité lorsqu'il s'agit de faire des calculs industriels. Il n'en reste pas moins des lacunes ou des faiblesses, par exemple le caractère très empirique de la forme fermée de l'équation sur la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. De ce fait, cette équation est largement utilisée mais n'a presque pas évolué depuis la proposition du modèle $k - \varepsilon$ de Launder *et al* (1974) [33]. Le caractère mono-échelle de ce type d'approche constitue un problème majeur afin de tenir compte de la physique des écoulements turbulents. En effet, nous avons vu que lors du processus de modélisation dans l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds en un point, la notion d'échelle de longueur (ou de temps) est cruciale.

Chapitre II

Approche en deux points et modèle spectral inhomogène simplifié

II.1 Introduction

Afin d'obtenir une information sur la turbulence plus riche que celle fournie par les modèles en un point, beaucoup d'auteurs ont eu recours à une approche en deux points. Outre le fait que cette approche est typiquement multi-échelles, elle présente l'avantage que les termes de pression peuvent, en théorie au moins et dans les cas simples, être exprimés de manière fermée. Il en va de même de la dissipation qui n'est plus une inconnue.

Les approches en deux points sont souvent considérées essentiellement comme des outils d'analyse. Elles ont été extensivement appliquées en turbulence homogène isotrope (THI). Aujourd'hui l'intérêt théorique pour les fermetures dans le cas de la THI s'est quelque peu estompé car ces fermetures sont incapables de prendre en compte les phénomènes d'intermittence interne. Elles ont néanmoins beaucoup apporté dans la compréhension de nombreux mécanismes. Plus récemment, les extensions des fermetures à la turbulence homogène anisotrope (THA) [27, 34, 35, 1, 36] ont permis d'aborder la description de la turbulence en interaction avec des gradients de vitesse moyenne, avec des effets de rotation ou de stratification. Sur tous ces points, les fermetures se sont révélées constituer de remarquables outils de description et de prédiction, souvent très complémentaires des DNS.

Nous pouvons souligner ici deux voies historiques importantes de fermeture en deux points. La première est issue d'un développement en deux points et en deux temps qualifié d'approximation par interaction directe (DIA) dont Kraichnan (1959) [37] est le contributeur majeur. L'autre est la théorie EDQNM (Eddy Damped Quasi Normal Markovian) proposée par Orszag (1970) [9] et dont nous rappelons les grandes lignes dans le paragraphe suivant.

Les écoulements réels sont loin des études académiques que sont les analyses de THI ou de THA. Ils sont inhomogènes. Des extensions des fermetures en deux points à des cas inhomogènes ont été proposées, par exemple par Kraichnan dès 1972 [38]. Ces extensions restent néanmoins inapplicables directement à des écoulements inhomogènes dès qu'ils deviennent un peu compliqués. Leur résolution numérique serait trop onéreuse. C'est la raison pour laquelle certains auteurs, en particulier au LMFA,

ont entrepris une démarche qui vise à développer, à partir de la formulation en deux points complète, des modèles suffisamment simplifiés pour pouvoir être appliqués à des écoulements rencontrés dans la pratique. C'est dans ce cadre que s'inscrit notre travail de thèse.

Le modèle simplifié présenté ici s'inscrit ainsi dans la lignée de travaux effectués antérieurement au LMFA, essentiellement ceux de Laporta (1995) [4] pour le développement analytique des équations d'évolution des corrélations en deux points dans des conditions faiblement inhomogènes, et ceux de Parpais (1996) [5] pour la construction d'un modèle plus heuristique s'appuyant sur ce développement. Rappelons que Parpais a proposé un modèle spectral simplifié dont la variable de base est un scalaire ($E(\boldsymbol{x}, k, t)$, spectre de l'énergie cinétique turbulente). Notre travail constitue une extension du travail de Parpais [5] : on étend son modèle à une description tensorielle où la variable fondamentale est $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$, spectre des corrélations doubles en deux points intégré sur les sphères de rayon k, que nous pouvons encore appeler spectre du tenseur de Reynolds (dont $E(\boldsymbol{x}, k, t)$ est la demi-trace).

Comme les approches de Laporta ou de Parpais, notre modèle s'appuie sur la théorie EDQNM, donc sur une formulation portant sur des corrélations en deux points mais en un temps. L'approche en deux temps a été écartée à cause de sa plus grande complexité et des temps de calcul plus importants qu'elle entraînerait.

II.2 Modélisation en deux points pour la turbulence homogène isotrope : présentation succincte du modèle EDQNM

On rappelle ici, dans le cas simple de la turbulence homogène et isotrope, les grandes lignes de la démarche EDQNM qui sera utilisée en inhomogène dans les paragraphes suivants.

La démarche consiste à écrire l'équation pour les corrélations doubles en deux points et en un temps

$$R_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t) = \overline{u_i(\boldsymbol{x}_1, t) u_j(\boldsymbol{x}_2, t)}$$

qui dans le cas homogène ne sont fonctions que de la séparation $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$. Par transformée de Fourier par rapport à $\boldsymbol{r}$, on obtient alors l'équation du tenseur spectral $\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, t)$ qui, dans le cas isotrope, peut être exprimé en fonction du seul spectre de l'énergie cinétique turbulente $E(k, t)$:

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}, t) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \frac{E(k, t)}{4\,\pi\, k^2}$$

Dans cette équation apparaissent des termes de corrélations triples. L'équation des corrélations triples est écrite. Elle fait apparaître des corrélations quadruples. L'hypothèse de fermeture est alors introduite. Une hypothèse Quasi-Normale (QN) conduit à écrire ces corrélations quadruples sous forme d'une somme de produits de corrélations doubles, ce qu'on peut noter symboliquement :

$$\overline{uuuu} = \sum \overline{uu}\ \overline{uu}$$

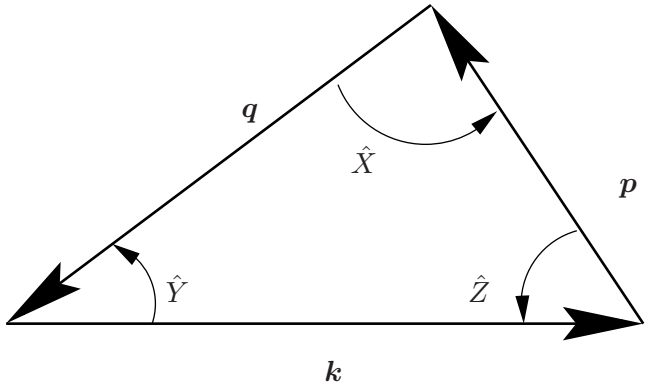

Figure II.1 : Interaction triadique pour le transfert non linéaire

Il est connu (cf. par exemple Orszag[9]) que l'hypothèse QN conduit à des corrélations triples surestimées. On introduit alors, dans l'équation des corrélations triples, un terme de relaxation dit d'amortissement tourbillonnaire (ED pour Eddy Damped), ce qui a pour conséquence de limiter la croissance des corrélations triples. La dernière étape, qui explique la dernière lettre de EDQNM, est dite étape de Markovianisation. Elle consiste à supposer que la variation des corrélations doubles est lente devant le temps caractéristique des effets de relaxation ED. Cette dernière étape permet d'assurer la réalisabilité du modèle et présente également l'avantage de réduire les temps de calcul.

Tous calculs faits, on trouve finalement une équation simple portant sur le spectre d'énergie cinétique turbulente :

$$\frac{\partial}{\partial\, t} E(k,t) \;=\; -2\,\nu\, k^2\; E(k,t) \;+\; T_{NL}(k,t) \tag{II.1}$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Lin, mais dans ce cas le modèle EDQNM permet d'expliciter le terme de transfert sous la forme fermée :

$$\begin{aligned} T_{NL}(\boldsymbol{x},k,t) \;=\; & \int_{\Delta(k)} \theta_{kpq}(\boldsymbol{x},t) \frac{xy+z^3}{q} E(\boldsymbol{x},q,t) \\ & \times \left\{ k^2 E(\boldsymbol{x},p,t) - p^2 E(\boldsymbol{x},k,t) \right\}\; dpdq \end{aligned} \tag{II.2}$$

où le domaine d'intégration $\Delta(k)$ est tel que les vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ forment un triangle dont les angles intérieurs, respectivement opposés à $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$, ont pour cosinus x, y et z (cf. Fig II.1).

Dans l'expression (II.2), θ_{kpq} est un temps caractéristique des corrélations triples associé à la triade $\{\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$. Il est défini par :

$$\theta_{kpq} = \frac{1 - e^{-(\eta(k)+\eta(p)+\eta(q))t}}{\eta(k)+\eta(p)+\eta(q)}$$

où pour $\eta(k)$, qui traduit l'amortissement tourbillonnaire (Eddy Damping), nous avons

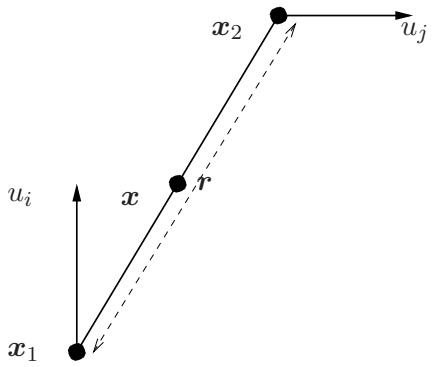

Figure II.2 : fluctuations de vitesse en deux points

retenu l'expression proposée par Pouquet *et al.* [39] :

$$\eta(k) = \nu k^2 + \lambda \sqrt{\int_0^k r^2 E(r) dr}$$

avec $\lambda = 0.355$. Notons que cette fonction $\eta(k)$ est compatible avec l'existence d'une zone inertielle de Kolmogorov. La constante λ est quant à elle liée à la valeur de la constante de Kolmogorov.

II.3 Ecriture des équations pour les corrélations en deux points dans le cas inhomogène

En premier lieu, notre approche, comme toute fermeture en deux points, débute par l'écriture d'une équation de transport relative aux corrélations doubles des fluctuations de vitesse $R_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, t) = \overline{u_i(\boldsymbol{x}_1, t) u_j(\boldsymbol{x}_2, t)}$ en deux points $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$. On fait alors le changement de variable (Figure II.2) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1}{2} \\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \end{cases}$$

en introduisant, comme Laporta [4], le vecteur coordonnées du point milieu $\boldsymbol{x}$ et le vecteur séparation $\boldsymbol{r}$. Ce changement de variable présente l'avantage de simplifier la forme de l'équation. Ceci a pour conséquence sur les dérivées partielles en espace :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_{1_i}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} - \dfrac{\partial}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_{2_i}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \dfrac{\partial}{\partial r_i} \end{cases}$$

L'équation de transport sur les corrélations doubles en deux points s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\, R_{ij}}{\partial\, t} \\
&+ \underbrace{\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_n} - \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_n(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, R_{ij} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_n} + \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_n(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, R_{ij}}_{\text{terme convectif}} \\
&= \\
&\underbrace{-\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_n} - \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, R_{nj} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_n} + \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_j(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, R_{in}}_{\text{terme de production}} \\
&\underbrace{-\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_n} - \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right) R_{in,j} - \left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_n} + \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right) R^*_{jn,i}}_{\text{corrélations triples en 2 points}} \\
&\underbrace{-\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_i} - \frac{\partial}{\partial\, r_i}\right)\Pi_j - \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\, x_j} + \frac{\partial}{\partial\, r_j}\right)\Pi^*_i}_{\text{corrélation pression-vitesse}} \\
&\underbrace{+\nu\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_n^2} + 2\,\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, r_n^2}\right) R_{ij}}_{\text{dissipation et transport par viscosité}}
\end{aligned}
\tag{II.3}
$$

avec les notations :

$$R_{ij} = \overline{u_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_j(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)} \tag{II.4}$$

$$R_{in,j} = \overline{u_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_n(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_j(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)} \tag{II.5}$$

$$R^*_{jn,i} = \overline{u_j(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_n(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)} \tag{II.6}$$

$$\Pi_j = \overline{p(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_j(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)} \tag{II.7}$$

$$\Pi^*_i = \overline{p(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\, u_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)} \tag{II.8}$$

Dans cette équation on reconnaît au premier membre les termes instationnaires et convectifs. Au second membre, on trouve les termes de production, de corrélations triples, de corrélation pression vitesse et les termes visqueux (dissipation et transport par effet moléculaire).

Afin d'alléger les écritures, nous introduisons une notation compacte. Notons d'abord :

$$\overline{U}_n^{\,-} = \overline{U}_n(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t) \tag{II.9}$$

$$\overline{U}_n^{\,+} = \overline{U}_n(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{r}}{2}, t) \tag{II.10}$$

alors le terme convectif en deux points que nous noterons $\ddot{A}_{ij}$ s'écrit sous la forme compacte :

$$\ddot{A}_{ij} = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n} - \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_n^{\,-}\, R_{ij} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n} + \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_n^{\,+}\, R_{ij} \tag{II.11}$$

Le terme de production prend la forme :

$$\ddot{P}_{ij} = -\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n} - \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_i^{\,-}\, R_{nj} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n} + \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right)\overline{U}_j^{\,+}\, R_{in} \tag{II.12}$$

Le terme de corrélations triples en 2 points devient :

$$\ddot{B}_{ij} = -\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n} - \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right) R_{in,j} - \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n} + \frac{\partial}{\partial\, r_n}\right) R^*_{jn,i} \tag{II.13}$$

Les corrélations pression vitesse seront quant à elles désignées par $\ddot{\Pi}_{ij}$:

$$\ddot{\Pi}_{ij} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_i} - \frac{\partial}{\partial\, r_i}\right)\Pi_j - \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_j} + \frac{\partial}{\partial\, r_j}\right)\Pi_i^* \tag{II.14}$$

Enfin, les termes impliquant les effets visqueux seront notés $\ddot{V}_{ij}$:

$$\ddot{V}_{ij} = \nu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_n^2} + 2\,\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, r_n^2}\right) R_{ij} \tag{II.15}$$

On peut maintenant écrire (II.3) sous une forme allégée :

$$\frac{\partial\, R_{ij}}{\partial\, t} + \ddot{A}_{ij} = \ddot{P}_{ij} + \ddot{B}_{ij} + \ddot{\Pi}_{ij} + \ddot{V}_{ij} \tag{II.16}$$

II.4 Ecriture des équations pour les spectres tridimensionnels des corrélations doubles en deux points

Pour obtenir $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$, tenseur spectral des corrélations doubles en deux points, on applique la transformée de Fourier par rapport au vecteur séparation $\boldsymbol{r}$ à l'équation sur $R_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t)$. Pour les termes figurant dans l'équation des corrélations doubles, nous utiliserons une notation classique où $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier :

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) = TF_{/\boldsymbol{r}}(R_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t)) \tag{II.17}$$

$$\hat{A}_{ij} = TF_{/\boldsymbol{r}}(\ddot{A}_{ij}) \tag{II.18}$$

$$\hat{P}_{ij} = TF_{/\boldsymbol{r}}(\ddot{P}_{ij}) \tag{II.19}$$

$$\hat{B}_{ij} = TF_{/\boldsymbol{r}}(\ddot{B}_{ij}) \tag{II.20}$$

$$\hat{\Pi}_{ij} = TF_{/\boldsymbol{r}}(\ddot{\Pi}_{ij}) \tag{II.21}$$

$$\hat{V}_{ij} = TF_{/\boldsymbol{r}}(\ddot{V}_{ij}) \tag{II.22}$$

On obtient l'équation pour les spectres tridimensionnels $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$:

$$\boxed{\frac{\partial\,\Phi_{ij}}{\partial\,t}+\hat{A}_{ij}=\hat{P}_{ij}+\hat{B}_{ij}+\hat{\Pi}_{ij}+\hat{V}_{ij}} \qquad \text{(II.23)}$$

Une des difficultés apparaissant lors de la transformée de Fourier est que les termes contenant des gradients de vitesse moyenne introduisent des produits de convolution. Comme Besnard *et al* [8] nous contournerons le problème en développant le champ de vitesse moyenne en série de Taylor autour de la position spatiale $\boldsymbol{x}$:

$$\overline{U}_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)=\sum_n\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\,x_p}\frac{r_p}{2}\right)^n\overline{U}_i(\boldsymbol{x},t)=\exp\left(-\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{x}}\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)\overline{U}_i(\boldsymbol{x},t)$$

On pourra ainsi exprimer par la suite de manière relativement compacte les différents termes apparaissant dans l'équation d'évolution pour $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$. Nous avons retenu l'écriture proposée par Laporta [4].

Dans l'équation (II.23), la transformée de Fourier $\hat{B}_{ij}$ du terme des corrélations triples fait apparaître le spectre des corrélations triples en deux points $\phi_{np,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$; on le déduit des corrélations triples en trois points par :

$$\phi_{ij,l}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)=\int\Phi_{ijl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t)\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$$

Le terme de pression Π_{ij} s'écrit :

$$\hat{\Pi}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\;=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,x_i}-Ik_i\right)\hat{\Pi}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,x_j}+Ik_j\right)\hat{\Pi}^*_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) \qquad \text{(II.24)}$$

avec

$$\hat{\Pi}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\;=\;TF_{/\boldsymbol{r}}\left(-\frac{1}{\rho}\overline{p(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\;u_j(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)}\right) \qquad \text{(II.25)}$$

$$\hat{\Pi}^*_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\;=\;TF_{/\boldsymbol{r}}\left(-\frac{1}{\rho}\overline{p(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)\;u_i(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{r}}{2},t)}\right) \qquad \text{(II.26)}$$

Nous montrerons par la suite comment exprimer les termes de pression $\hat{\Pi}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$ et $\hat{\Pi}^*_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$ en fonction de la vitesse moyenne et fluctuante. Notons que le terme $\hat{\Pi}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$ correspond au terme de corrélation pression-déformation Π_{ij} et au transport par la pression d^1_{ij} dans l'équation en un point (I.9).

Le terme visqueux

$$\hat{V}_{ij}=2\nu\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^{\,2}}{\partial\,x_m^2}-\boldsymbol{k}^2\right)\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$$

englobe tous les effets moléculaires. Il est, ici encore, intéressant de rapprocher l'équation (II.23) de celle obtenue dans le cas des corrélations en un point, l'équation (I.9). Cette dernière doit être retrouvée par intégration de (II.23) sur tous les vecteurs d'ondes. Dans le cas homogène les termes $\dfrac{\partial^{\,2}}{\partial\,x_k^2}$ disparaissent et l'on identifie immédiatement la correspondance entre $2\nu k^2\Phi_{\,ij}$ et ε_{ij}. Dans le cas inhomogène l'apparition du facteur $\nu/2$ devant le terme de dérivée spatiale, au lieu de ν dans (I.9) pourrait laisser

perplexe. Ce problème a en fait été résolu par Laporta [4] qui montre dans l'annexe 4 de sa thèse que ε_{ij} est en fait l'intégrale de

$$2\nu k^2 \Phi_{ij} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \Phi_{ij}$$

Nous écrirons donc, avec Laporta, le terme visqueux sous la forme

$$\hat{V}_{ij} = -\left(2\,\nu\,\boldsymbol{k}^2\,\Phi_{ij} + \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi_{ij}\right) + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi_{ij}$$

La première contribution est celle qui par intégration spectrale va donner ε_{ij}. La seconde est l'homologue spectral du terme $d_{ij}^2 = \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2} R_{ij}$ (appelé diffusion visqueuse).

Le fait que ε_{ij} soit associé à deux contributions spectrales conduit à scinder ce terme en deux parties :

1. ε_{ij}^H associé à $2\,\nu\,\boldsymbol{k}^2\,\Phi_{ij}$.
2. ε_{ij}^{Inh} associé à $\dfrac{\nu}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Phi_{ij}$.

Notons que cette décomposition des contributions visqueuses est identique à celle proposée par Jovanović *et al* en 1995 [40], année de la soutenance de thèse de Laporta.

Laporta (1995) [4] ainsi que Jovanović *et al* (1995) [40] soulignent l'importance de la contribution inhomogène à la dissipation lorsqu'un écoulement turbulent est en présence d'une paroi et remarquent que cette contribution devient négligeable devant la partie homogène loin de la paroi. Pour étayer ces affirmations ils effectuent des bilans dans le cas d'un écoulement de canal plan bidimensionnel.

Il est important de noter qu'à ce niveau de description les termes dissipatifs sont connus et donc qu'aucune équation supplémentaire relative à la dissipation est à introduire, contrairement à ce qui se passe dans le cas de la démarche en un point.

II.5 Hypothèses et fermeture pour l'approche spectrale

Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe précédent, l'équation (II.23) présente des termes de corrélation pression-vitesse. Nous allons exprimer ces termes à l'aide d'une équation de Poisson. Il faut aussi trouver une alternative au fait que l'équation sur les spectres des corrélations doubles fait intervenir un développement à l'infini de la vitesse moyenne autour de la position en espace $\boldsymbol{x}$. L'idée la plus simple, et que nous allons adopter ici, est de tronquer le développement à un certain ordre en inhomogénéité. Notre choix a été d'arrêter le développement au premier ordre en dérivée spatiale. Une fois ce développement tronqué, il restera à émettre des hypothèses de fermeture en ce qui concerne les corrélations triples. En effet, le terme de corrélations triples $\phi_{np,j}$ est une inconnue du problème. On écrit alors l'équation des spectres de corrélations triples en trois points : ceux-ci sont à leur tour fonctions des spectres des corrélations quadruples. C'est à ce niveau de description que des hypothèses sont introduites afin de pouvoir fermer le problème. Dans le cas de la théorie EDQNM

[9], ces hypothèses consistent à écrire les corrélations d'ordre quatre sous une forme quasi-normale puis à introduire le coefficient d'amortissement et à markovianiser. De plus seront négligées les contributions liées aux gradients de vitesse moyenne par rapport aux autres contributions, dans l'équation sur les corrélations triples. Il est à souligner que la démarche suivie en un point (Hanjalić et Launder [15]) pour modéliser les termes de corrélation triple est semblable. Nous reprendrons l'approche de Laporta [4] qui a proposé une extension de la théorie EDQNM au cadre inhomogène.

II.5.1 Expression des corrélations pression-vitesse

Nous allons éliminer la pression dans l'expression des corrélations pression-vitesse en écrivant une équation de Poisson. Pour cela, on applique l'opérateur divergence à l'équation (II.3). Après quelques manipulations et en passant dans l'espace spectral, on peut extraire la fonction de Green associée à notre problème. On aboutit alors à :

$$\hat{\Pi}_i^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) =$$

$$\exp\left(-\frac{I}{2}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{k}}\right)\left(\frac{k_n k_p}{k^2}\left(\exp\left(\frac{I}{2}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{k}}\right)\Phi^*_{np,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\right.\right. \tag{II.27}$$

$$\left.\left.+2\,\exp\left(I\,\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{k}}\left(\frac{\partial\,\overline{U}}{\partial\,\boldsymbol{x}}+\frac{1}{2}\frac{\partial\,\Phi_{in}}{\partial\,\boldsymbol{x}}\right)\right)\overline{U}_p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},t)\Phi_{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\right)\right)$$

où la notation $\dfrac{\partial\,\overline{U}}{\partial\,\boldsymbol{x}}$ indique une dérivée partielle qui ne porte que sur $\overline{U}$, et $\dfrac{\partial\,\Phi_{in}}{\partial\,\boldsymbol{x}}$ indique une dérivée partielle ne portant que sur Φ_{in}.
Quant à $\hat{\Pi}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$, il est déduit de (II.27) par :

$$\hat{\Pi}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) = \hat{\Pi}_j^*(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{k},t) \tag{II.28}$$

Le résultat ainsi exprimé a été déterminé pour un espace libre. Dans le cas où il y aurait la présence d'une paroi, la fonction de Green devrait être modifiée et prendre en compte des effets de géométrie. Par soucis de simplicité c'est la fonction de Green en espace libre qui sera utilisée, les effets de parois étant réintroduits sous forme de termes correctifs semblables aux termes introduits dans les modèles en un point. Il est par ailleurs à noter que les spectres des corrélations triples interviennent maintenant explicitement dans les relations ci-dessus, l'expression (II.27) étant la somme d'un terme "non-linéaire" et d'une partie rapide faisant apparaître le champ de vitesse moyenne.

II.5.2 Equation des corrélations doubles développée au premier ordre

Nous espérons, en développant l'équation (II.23) au premier ordre (pour les termes en exponentielle), conserver l'essentiel de l'information liée à l'inhomogénéité d'un écoulement turbulent. Notons ici que les termes nécessitant un développement sont les termes contenant la vitesse moyenne (production $\hat{P}_{ij}$ et convection $\hat{A}_{ij}$) ainsi que le terme de pression (pour lequel la vitesse moyenne intervient aussi). Pour le détail

des calculs concernant le développement des différentes quantités, le lecteur pourra se référer par exemple à Laporta (1995) [4] ou plus récemment Cadiou *et al* (1998) [41] [1].

Les termes faisant apparaître la vitesse moyenne et les termes de pression s'expriment sous des formes complexes en inhomogène. Il est alors nécessaire de tronquer les développements comme l'a proposé Laporta [4]. Par souci de simplicité, alors que cet auteur avait retenu les termes du second ordre, nous arrêtons le développement au premier ordre. Voyons maintenant ces termes :

- Le terme issu de l'accélération convective peut être écrit :

$$\hat{A}_{ij} = \hat{C}^c_{ij} - \hat{T}^L_{ij} + \mathcal{O}((\tfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}})^2) \tag{II.30}$$

où

$$\hat{C}^c_{ij} = \overline{U}_n \, \frac{\partial \, \Phi_{ij}}{\partial \, x_n} \tag{II.31}$$

et

$$\hat{T}^L_{ij} = k_n \, \frac{\partial \, \overline{U}_n}{\partial \, x_m} \, \frac{\partial \, \Phi_{ij}}{\partial \, k_m} \tag{II.32}$$

Le terme $\hat{C}^c_{ij}$ exprime le transport convectif de Φ_{ij} par le champ de vitesse moyenne et $\hat{T}^L_{ij}$ est un terme de transfert spectral (intégrale spectrale nulle) qui exprime l'étirement des tourbillons de la turbulence par le champ moyen.

- Le terme de production :

$$\hat{P}_{ij} = -\frac{\partial \, \overline{U}_j}{\partial \, x_m} \, \Phi_{im} - \frac{\partial \, \overline{U}_i}{\partial \, x_m} \, \Phi_{mj} + \mathcal{O}((\tfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}})^2) \tag{II.33}$$

- Les contributions issues des corrélations pression-vitesse contiennent une influence des gradients de vitesse moyenne et une influence des corrélations triples (équation (II.27)).

$$\hat{\Pi}_{ij} = \hat{\Pi}^L_{ij} + \hat{\Pi}^{NL}_{ij} + \mathcal{O}((\tfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}})^2) \tag{II.34}$$

$\hat{\Pi}^L_{ij}$ est la contribution linéaire liée au gradients de vitesse moyenne qui vaut, au premier ordre en inhomogénéité :

$$\hat{\Pi}^L_{ij} = 2 \, \frac{\partial \, \overline{U}_n}{\partial \, x_m} \, \frac{k_n}{k^2} \, (k_i \, \Phi_{mj} + k_j \, \Phi_{im}) \tag{II.35}$$

[1] Notons qu'il faut souligner ce que représente le premier ordre en inhomogénéité. L'équation de continuité impose aux spectres de corrélations doubles et triples les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
I \, k_i \, \Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \, x_i} \Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) \\
I \, k_j \, \Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \, x_j} \Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) \\
I \, k_i \, \Phi^*_{nm,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \, x_i} \Phi^*_{nm,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) \\
I \, k_j \, \Phi_{nm,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \, x_j} \Phi_{nm,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)
\end{aligned} \tag{II.29}$$

Nous voyons donc que les expressions du type $I \, k_i \, \Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$ sont équivalentes à une dérivée spatiale du premier ordre. Laporta [4] propose de substituer les expressions en $I \, k_i$ par leur équivalent en dérivée spatiale, avant d'effectuer le développement. Nous reprendrons ici cette convention.

La partie non linéaire incluant l'influence des corrélations triples peut se scinder en deux parties :

$$\hat{\Pi}_{ij}^{NL} = \hat{T}_{ij}^{P} + \hat{D}_{ij}^{P} \tag{II.36}$$

avec

$$\hat{T}_{ij}^{P} = I\ \frac{k_m k_n k_l}{k^2}(\delta_{il}\ \Phi_{mn,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\ -\ \delta_{lj}\ \Phi^*_{mn,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)) \tag{II.37}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{D}_{ij}^{P} = \ & \left(\frac{k_m k_n k_l k_p}{k^4} - \frac{1}{2}\delta_{lp}\frac{k_m k_n}{k^2} - \delta_{np}\frac{k_m k_l}{k^2}\right) \\ & \times \frac{\partial}{\partial\, x_p}\left(\delta_{il}\ \Phi_{mn,j}\ +\ \delta_{lj}\ \Phi^*_{mn,i}\right)\end{aligned} \tag{II.38}$$

Notons que les contributions visqueuses $\hat{V}_{ij}$ dont nous avons déjà parlé ne nécessitent ni développement ni hypothèse de fermeture.

Il reste à traiter le terme traduisant l'effet des corrélations triples (défini par (II.22)) $\hat{B}_{ij}$. Nous introduisons ici une décomposition de ce terme en faisant apparaître deux contributions :

$$\hat{B}_{ij} = \hat{D}_{ij} + \hat{T}_{ij} \tag{II.39}$$

avec

$$\hat{D}_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_n}(\Phi_{in,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\ +\ \Phi^*_{jn,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)) \tag{II.40}$$

et

$$\hat{T}_{ij} = I\ k_n(\Phi_{in,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\ -\ \Phi^*_{jn,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)) \tag{II.41}$$

La première contribution est nulle en turbulence homogène et sera associée à des effets de transport spatial. On peut regrouper ici les termes $\hat{D}_{ij}$ et $\hat{T}_{ij}$ issus directement des corrélations triples aux contributions qui sont apparues à travers la pression et écrire :

$$\hat{D}_{ij}^{NL} = \hat{D}_{ij} + \hat{D}_{ij}^{P} \tag{II.42}$$

et

$$\hat{T}_{ij}^{NL} = \hat{T}_{ij} + \hat{T}_{ij}^{P} \tag{II.43}$$

Le premier terme $\hat{D}_{ij}^{NL}$ sera alors le terme inhomogène de transport spatial dû aux corrélations triples et à la pression, tandis que le second $\hat{T}_{ij}^{NL}$ s'identifiera dans le cas homogène au terme de transfert spectral.

A ce niveau, et en limitant comme nous l'avons fait les développements au premier ordre en inhomogénéité, on obtient une équation de transport pour Φ_{ij} dans laquelle le problème de fermeture se pose au niveau des spectres des corrélations triples en deux points. Les autres termes inconnus, notamment la pression, ont été éliminés par l'équation de Poisson et le développement en inhomogénéité.

La démarche proposée par Laporta [4] pour exprimer les termes de corrélations triples était d'étendre l'approche EDQNM. Les équations des corrélations triples étaient ainsi écrites (voir annexes) et les hypothèses Quasi Normales introduites, ainsi que la relaxation "Eddy Damped" et l'étape de Markovianisation.

De plus, comme pour la démarche en un point, on néglige l'effet des gradients de vitesse moyenne dans l'équation des corrélations triples. La démarche conduit Laporta [4] à trouver une forme fermée pour la somme de ces termes :

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_{ij}^{NL} + \hat{D}_{ij}^{NL} = \\
&\int\int f_{ijklmn}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_r\, x_s})\,\Phi_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,\Phi_{mn}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q},t)\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} \\
&+\int\int g_{ijklmn}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_r\, x_s})\,\Phi_{kl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)\,\Phi_{mn}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\,\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\,d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}
\end{aligned} \tag{II.44}$$

où $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont des opérateurs qui n'ont pas été explicités complètement, sauf dans le cas particulier d'écoulements proches de l'isotropie où $\boldsymbol{\Phi}$ n'est fonction que du scalaire $E(k)$ (cf. Laporta [4]). Dans le cadre de cette thèse nous n'avons pas, non plus, tenté d'expliciter ces coefficients, nous appuyant seulement sur l'expression formelle (II.44) pour étayer notre démarche de modélisation qui restera plus heuristique. Notons qu'au premier ordre en inhomogénéité, l'expression (II.44) permet de retrouver la forme classique du transfert EDQNM en turbulence homogène.

Grâce à la démarche décrite jusqu'ici, on trouve une équation comparable par sa structure à celle proposée en THA par Craya (1958) [42], qui a été extensivement étudiée (par exemple [35]). De nouveaux termes liés à la prise en compte de l'inhomogénéité de l'écoulement apparaissent dans l'équation des corrélations triples. Plutôt que de suivre l'approche complète proposée par Laporta, par la suite nous modéliserons $\hat{T}_{ij}^{NL}$ et $\hat{D}_{ij}^{NL}$ en découplant, comme suggéré par Parpais [5], les termes de transfert et les termes diffusifs.

II.6 Modèle spectral simplifié

L'approche de Laporta [4], que nous avons largement reprise ici, a permis le développement des équations d'évolution des spectres des corrélations doubles dans un cadre faiblement inhomogène. Néanmoins, tenter de résoudre ces équations reste illusoire dès que l'on aborde des géométries un peu complexes, car le coût de calcul serait inacceptable. Nous avons donc fait le choix de simplifier ces équations en introduisant une variable tensorielle comme l'est $\boldsymbol{\Phi}$ mais où la directivité du vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ n'est pas prise en compte. Ceci allège le problème du point de vue numérique tout en nous obligeant à modéliser certains termes supplémentaires.

Comme l'ont déjà proposé Cambon *et al* [1] en turbulence homogène anisotrope, Jeandel *et al* [34] et Besnard *et al* [8] en inhomogène, nous choisirons comme inconnue principale de notre modèle le tenseur $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)$ qui est l'intégrale de $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$ sur les sphères $\Sigma(k)$ de rayon k :

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t) = \int_{\Sigma(k)} \Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\,d\sigma_k \tag{II.45}$$

Au lieu de travailler dans un espace à six dimensions $\{x_1,x_2,x_3,k_1,k_2,k_3\}$ on ne travaille donc plus que dans un espace à quatre dimensions $\{x_1,x_2,x_3,k\}$. Bien que perdant une information sur l'anisotropie structurelle de la turbulence, il nous semble

que conserver une information tensorielle sur l'anisotropie par nombre d'onde peut se montrer une approche déjà suffisamment riche. Cette démarche est comparable à celle suivie dans l'espace physique pour les corrélations en deux points par Oberlack (1997) [43], qui propose une équation de transport pour le tenseur de dissipation.

Rappelons ici, que comme l'ont montré Ménoret [2] et Laporta [4], le fait d'écrire les corrélations doubles de manière centrée (figure II.2) conduit à donner au tenseur spectral $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$ des propriétés intéressantes. En particulier on peut scinder ce tenseur :

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) = \Phi_{ij}^{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t) + \Phi_{ij}^{Im}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$$

où $\Phi_{ij}^{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$ est la partie réelle et $\Phi_{ij}^{Im}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$ la partie imaginaire. Ces deux parties coïncident respectivement avec la partie paire (et symétrique) et impaire (et antisymétrique) de $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$. Une des conséquences de cette écriture particulière des corrélations en deux points est :

$$\int_{\Sigma(k)} \Phi_{ij}^{Im}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)\, d\sigma_k = 0$$

et donc

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) = \int_{\Sigma(k)} \Phi_{ij}^{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)\, d\sigma_k$$

Par conséquent la nouvelle variable de base de notre modèle est réelle.

L'équation pour $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$ peut s'écrire de façon compacte sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{U}_l \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) = \; & \left(-2\nu k^2 + \frac{\nu}{2}\Delta_{\boldsymbol{x}}\right) \varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) \\ & + \pi_{ij}^L(\boldsymbol{x}, k, t) + p_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) \\ & + t_{ij}^L(\boldsymbol{x}, k, t) + t_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) \\ & + d_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)\end{aligned}} \tag{II.46}$$

où les termes de gauche sont les intégrales de la dérivée temporelle $\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_{ij}$ et de $\hat{C}_{ij}^c$ et où les deux premiers termes du membre de droite sont des contributions visqueuses pouvant être évaluées exactement. p_{ij} est le terme de production, t_{ij}^L est le terme de transfert linéaire, et t_{ij}, d_{ij} et π_{ij}^L représentent respectivement les contributions non linéaires homogènes et inhomogènes et le terme linéaire de pression déformation (terme dit de pression rapide). Ces cinq termes sont respectivement les intégrales de $\hat{P}_{ij}$, $\hat{T}_{ij}^L$, $\hat{T}_{ij}^{NL}$, $\hat{D}_{ij}^{NL}$ et $\hat{\Pi}_{ij}^L$.

Pour ce modèle, le terme de production peut être calculé directement en intégrant $\hat{P}_{ij}$ donné par la relation (II.33) (exacte au premier ordre) :

$$\boxed{p_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) = \int_{\Sigma(k)} \hat{P}_{ij}\, d\sigma_k = -\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, t)\varphi_{nj}(\boldsymbol{x}, k, t) - \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}, t)\varphi_{in}(\boldsymbol{x}, k, t)} \tag{II.47}$$

puisque le tenseur φ_{ij} est, à ce niveau de description, connu.

Nous allons maintenant expliciter les différents termes intervenant dans l'équation (II.46). Pour les termes compliqués nous expliquerons comment nous les avons modélisés et pourquoi, en soulignant l'origine de ces termes et leur signification physique.

II.6.1 Les différents termes modélisés et leur signification

Les deux termes non linéaires qui sont respectivement les intégrales sur les sphères de rayon k de T_{ij}^{NL} et de D_{ij}^{NL} sont à modéliser. Laporta a montré à partir de (II.44) que l'expression obtenue pour la somme de ces deux termes pouvait finalement se mettre sous la forme générique :

$$\begin{aligned} & t_{ij} + d_{ij} = \\ & \int\int_{\Delta} f_{ijklmn}(k,p,q,\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_r\, x_s})\,\varphi_{kl}(\boldsymbol{x},p,t)\,\varphi_{mn}(\boldsymbol{x},q,t)\,dpdq \\ & + \int\int_{\Delta} g_{ijklmn}(k,p,q,\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_r\, x_s})\,\varphi_{kl}(\boldsymbol{x},p,t)\,\varphi_{mn}(\boldsymbol{x},k,t)\,dpdq \end{aligned} \tag{II.48}$$

avec $\Delta = \{|p-q| < k < p+q\}$.

Dans cette expression les f_{ijklmn} et g_{ijklmn} sont des coefficients qui n'ont pas été explicités par Laporta. Sans vouloir expliciter ici ces coefficients on peut néanmoins souligner qu'ils contiennent des contributions faisant apparaître l'opérateur dérivée spatiale $\dfrac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_r\, \partial x_s}$ correspondant à la partie inhomogène d_{ij} et des contributions n'impliquant pas cet opérateur et liées au terme de transfert vers les petites échelles t_{ij}, seul terme présent en homogène. Notons qu'en suivant l'approche de Laporta il est tout à fait possible d'obtenir une expression fermée de ces termes via la théorie EDQNM. Laporta a écrit et utilisé une telle expression dans le cas particulier d'une turbulence quasi-isotrope où le tenseur φ_{ij} peut être exprimé en fonction du spectre d'énergie E. Cette expression est néanmoins déjà trop lourde pour être utilisable dans le cas des écoulements inhomogènes plus complexes que quelques rares cas d'école (comme la couche de mélange non cisaillée). Nous avons donc *a priori* exclu d'expliciter et d'utiliser la forme (II.48) et avons calqué notre démarche sur celle de Parpais [5] qui avait proposé de modéliser séparément les contributions homogène et inhomogène en supposant que la partie homogène était identique au transfert présent en turbulence homogène et que la partie inhomogène avait une forme diffusive. Dans notre cas, et avec les notations employées jusqu'ici cela revient à modéliser séparément t_{ij} et d_{ij}.

Le transfert non-linéaire t_{ij} est donc modélisé comme si la turbulence était homogène. Notons qu'une forme fermée de t_{ij} a été donnée par Cambon [35] à l'aide d'une extension de l'approche EDQNM à la turbulence homogène anisotrope décrite en terme de φ_{ij}. L'expression résultante fait apparaître des intégrales triadiques portant sur le tenseur φ_{ij}. Afin de ne pas alourdir les calculs nous lui avons préféré la forme décrite dans les deux paragraphes suivants, où seule la trace du transfert sera calculée par les intégrales triadiques EDQNM, le déviateur étant modélisé de manière plus simple.

La trace du transfert non-linéaire

L'écriture retenue pour le terme de transfert est la forme usuellement déduite de la théorie E.D.Q.N.M. (Eddy Damped Quasi Normal Markovian, Orszag [9] et Lesieur [44]) pour une turbulence homogène et isotrope. La justification de l'utilisation en inhomogène de cette modélisation est issue du travail de thèse de Laporta [4] qui montre que si l'on arrête le développement au premier ordre en inhomogénéité (ce qui est notre cas) la forme que l'on trouve alors pour le terme de transfert non-linéaire en terme de $E(\boldsymbol{x}, k, t)$ (la demi-trace de $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$, le tenseur de Reynolds spectral unidimensionnel) est identique à celle trouvée en EDQNM (expression (II.2)).

Comme notre modèle revient au modèle EDQNM dans une limite de turbulence homogène isotrope le paramètre λ n'a pas été modifié.

La partie déviateur du transfert non-linéaire

Il est important ici de remarquer que l'on peut décomposer T_{NL} (expression (II.2)) en deux contributions T^+ et T^- définies par

$$T^+(\boldsymbol{x}, k, t) = \int_{\Delta(k)} \theta_{kpq}(\boldsymbol{x}, t)(xy + z^3)\frac{k^2}{q}E(\boldsymbol{x}, q, t)E(\boldsymbol{x}, p, t)dpdq$$

$$T^-(\boldsymbol{x}, k, t) = -\int_{\Delta(k)} \theta_{kpq}(\boldsymbol{x}, t)(xy + z^3)\frac{p^2}{q}E(\boldsymbol{x}, q, t)E(\boldsymbol{x}, k, t)dpdq$$

où T^+ représente l'énergie arrivant sur le nombre d'onde K, tandis que T^- est l'énergie qui lui est prélevée dans l'interaction non linéaire. On décompose alors de la même manière le transfert global t_{ij} en t^+_{ij} et t^-_{ij}. Notons que cette décomposition est justifiée, en anisotrope et même en inhomogène, par l'existence de la forme générique (II.48) qui fait clairement apparaître deux types de contributions : celles en {p,q} et celles en {p,k} (ou ce qui revient au même en {q,k}). Ces deux quantités vérifient :

$$\frac{1}{2}t^+_{ii}(\boldsymbol{x}, k, t) = T^+(\boldsymbol{x}, k, t)$$

et

$$\frac{1}{2}t^-_{ii}(\boldsymbol{x}, k, t) = T^-(\boldsymbol{x}, k, t)$$

En s'appuyant sur des études antérieures effectuées au Laboratoire dans le cadre de modèles E.D.Q.N.M. décrivant la turbulence homogène anisotrope de manière plus complète, nous supposons que t^+_{ij} a une anisotropie plus faible que t^-_{ij}. L'idée la plus simple serait alors de modéliser t^+_{ij} sous une forme complètement isotrope ce qui conduirait à écrire

$$t^+_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) = \frac{2}{3}T^+(\boldsymbol{x}, k, t)\delta_{ij}$$

et t^-_{ij} sous une forme anisotrope ("visqueuse") :

$$t^-_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t) = T^-(\boldsymbol{x}, k, t)\frac{\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)}{E(\boldsymbol{x}, k, t)}$$

Une telle hypothèse a néanmoins pour conséquence de surestimer les effets de retour à l'isotropie. En particulier cette hypothèse impliquerait que toutes les interactions triadiques mises en jeu dans le terme de transfert participent au retour à l'isotropie, ce qui est probablement faux. En effet les interactions non locales, notamment celles qui, pour une échelle $1/K$ donnée, font intervenir l'action d'une échelle $1/Q$ (ou $1/P$) largement plus grande, sont liées à des phénomènes essentiellement convectifs (effets dits de "sweeping") et laissent probablement inchangée l'anisotropie portée par l'échelle $1/K$. En d'autres termes, ces interactions ne devraient pas participer aux effets de retour à l'isotropie par la pression non linéaire. En conséquence, nous allons ici supposer que seules les interactions ayant un certain degré de localité participent au retour à l'isotropie.

Nous sommes alors conduit à décomposer T^+ et T^- en leurs contributions locales et non locales, respectivement $T^{+\mathcal{L}}$ et $T^{-\mathcal{L}}$ et $T^{+\mathcal{NL}}$ et $T^{-\mathcal{NL}}$. Les contributions locales sont définies par :

$$\begin{aligned} T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t) &= \int_{\Delta(k)} \theta_{kpq}(\boldsymbol{x},t)(xy+z^3)\frac{k^2}{q}E(\boldsymbol{x},q,t)E(\boldsymbol{x},p,t)H(k,p,q)dpdq \\ T^{-\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t) &= -\int_{\Delta(k)} \theta_{kpq}(\boldsymbol{x},t)(xy+z^3)\frac{p^2}{q}E(\boldsymbol{x},q,t)E(\boldsymbol{x},k,t)H(k,p,q)dpdq \end{aligned}$$

avec $H(k,p,q) = 1$ si tous les rapports entre les nombres d'onde k, p et q restent inférieurs à un paramètre de non localité h, et avec $H(k,p,q) = 0$ dans le cas contraire. Quant aux contributions non locales $T^{+\mathcal{NL}}$ et $T^{-\mathcal{NL}}$ elles sont définies par :

$$\begin{aligned} T^{+\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t) &= T^+(\boldsymbol{x},k,t) - T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t) \\ T^{-\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t) &= T^-(\boldsymbol{x},k,t) - T^{-\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire t_{ij}^+ et t_{ij}^- sous une forme où seules les transferts locaux contribuent au retour à l'isotropie :

$$\begin{aligned} t_{ij}^+(\boldsymbol{x},k,t) &= \frac{2}{3}T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t)\delta_{ij} + \frac{2}{3}T^{+\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t)\delta_{ij} \\ t_{ij}^-(\boldsymbol{x},k,t) &= T^{-\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t)\frac{\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)}{E(\boldsymbol{x},k,t)} + \frac{2}{3}T^{-\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t)\delta_{ij} \end{aligned}$$

On voit que seule la partie locale, modélisée de manière différente pour t_{ij}^+ et t_{ij}^- aura un effet sur le déviateur de φ_{ij}. Afin de pouvoir régler le retour à l'isotropie, nous proposons d'introduire de plus une constante α permettant un ajustement et écrivons finalement

$$t_{ij}^+(\boldsymbol{x},k,t) = \frac{2}{3}\alpha T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t)\delta_{ij} + (1-\alpha)T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t)\frac{\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)}{E(\boldsymbol{x},k,t)} + \frac{2}{3}T^{+\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t)\delta_{ij}$$

en laissant t_{ij}^- inchangé.

La forme finale retenue pour le transfert non-linéaire est donc :

$$\begin{aligned} t_{ij}(\boldsymbol{x},k,t) = \; & \frac{2}{3}(T^{+\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t) + T^{-\mathcal{NL}}(\boldsymbol{x},k,t) + \alpha T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t))\delta_{ij} \\ + \; & ((1-\alpha)T^{+\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t) + T^{-\mathcal{L}}(\boldsymbol{x},k,t))\frac{\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)}{E(\boldsymbol{x},k,t)} \end{aligned} \tag{II.49}$$

Les deux constantes α et h seront optimisées par comparaisons avec des cas expérimentaux de turbulence homogène anisotrope.

Le terme de pression rapide

Il s'agit de la partie linéaire des corrélations pression-déformation. Ce terme est modélisé comme proposé par Cambon et al. [1] puis par Besnard et al. [8]. L'approche constitue l'homologue dans l'espace spectral de la démarche proposée par Launder et al. [25]. L'idée est d'exprimer l'intégrale du terme de pression-déformation tridimensionnel

$$\pi_{ij}^L(\boldsymbol{x},k,t) = 2\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m}\int_{\Sigma_k}\frac{k_l}{k^2}(k_i\Phi_{mj}+k_j\Phi_{im})\,d\sigma_k$$

en fonction de φ_{ij}. Pour ce faire, on écrit Φ_{ij} sous la forme d'une fonction tensorielle isotrope de φ_{ij}/E et $\boldsymbol{k}/k$.
On écrit alors :

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) = \frac{E(\boldsymbol{x},k,t)}{4\,\pi\,\boldsymbol{k}^2}\,\mathcal{F}_{ij}(H_{lm},\alpha_n) \tag{II.50}$$

où $H_{lm}(\boldsymbol{x},k,t) = \dfrac{\varphi_{lm}(\boldsymbol{x},k,t)}{2\,E(\boldsymbol{x},k,t)} - \dfrac{\delta_{lm}}{3}$ et $\alpha_n = \dfrac{k_n}{k}$. Les propriétés formelles que doit vérifier le tenseur $\mathcal{F}_{ij}$ sont

- l'incompressibilité : $\alpha_i\,\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}\,\alpha_j\ = 0$
- la symétrie : $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ji}\ = 0$
- la relation traduisant la définition de φ_{ij} :
  $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t) = \displaystyle\int_{\Sigma(k)}\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\,d\sigma_k$

On choisit alors d'écrire $\mathcal{F}_{ij}$ sous la forme d'une fonction tensorielle isotrope linéaire en terme de φ_{ij} (ou H_{ij}), comme l'ont proposé Cambon *et al* [35, 1]. On trouve finalement pour le terme de pression rapide :

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}^L(\boldsymbol{x},k,t) = \ & c_b\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_n}\varphi_{nj}(\boldsymbol{x},k,t) + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_n}\varphi_{in}(\boldsymbol{x},k,t)\right)\\
& -\frac{2}{3}c_b\delta_{ij}\frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n}\varphi_{mn}(\boldsymbol{x},k,t)\\
& +(8c_b-6)\left(\frac{\partial \overline{U}_n}{\partial x_i}\varphi_{nj}(\boldsymbol{x},k,t) + \frac{\partial \overline{U}_n}{\partial x_j}\varphi_{in}(\boldsymbol{x},k,t)\right)\\
& -\frac{2}{3}(8c_b-6)\delta_{ij}\frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n}\varphi_{mn}(\boldsymbol{x},k,t)\\
& +(\frac{11}{5}-3c_b)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i}\right)\varphi_{nn}(\boldsymbol{x},k,t)
\end{aligned} \tag{II.51}$$

On voit que cette expression fait intervenir une constante, c_b, dont la valeur sera déterminée plus loin.

Le transfert linéaire

Le transfert linéaire est issu des termes d'accélération convective. Son intégrale sur les k est nulle. Ce terme traduit une propriété de transfert entre nombres d'onde.

Il contient une information relative à l'étirement tourbillonnaire imposé par le champ moyen sur le champ turbulent. Le terme de transfert linéaire intégré sur les sphères de rayon k s'écrit :

$$t_{ij}^L(\boldsymbol{x},k,t) = \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m} \int_{\Sigma_k} \frac{\partial}{\partial k_m}(k_l \Phi_{ij})\, d\sigma_k$$

Ce terme est la contribution spectrale du terme convectif lorsque l'on écrit l'équation sur les corrélations en deux points (II.3). On peut décrire schématiquement sa signification : lorsque le champ de vitesse moyenne étire un tourbillon selon son axe cela a pour effet d'augmenter son intensité et de diminuer sa dimension caractéristique. Ceci correspond donc à un transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles de la turbulence. Il existe bien entendu des situations où, au contraire, les gradients moyens ont tendance à faire croître la taille des structures turbulentes et donc à créer un flux spectral inverse. On peut néanmoins penser que dans la plupart des situations, en particulier celles de cisaillement dominant, le transfert linéaire s'effectue globalement des grandes vers les petites échelles. L'idée a donc été introduite par différents auteurs de modéliser ce terme par un flux spectral. Par exemple, Clarke *et al* [45] ont proposé une forme pour la trace du transfert linéaire :

$$t_{ii}^L \;=\; c_d \, \frac{\partial}{\partial\, k}(k\, P(\boldsymbol{x},k,t))$$

où $P(\boldsymbol{x},k,t)$ est le terme de production dans l'équation sur le spectre d'énergie cinétique turbulente $E(\boldsymbol{x},k,t)$.

Nous avons fait le choix de modéliser le terme transfert linéaire afin qu'il puisse tenir compte de l'effet des gradients de vitesse moyenne de façon globale et nous avons supposé que ce terme est proportionnel au deuxième invariant S^2 du tenseur de déformation :

$$t_{ij}^L \;=\; C^{TL}\, S\, \frac{\partial}{\partial\, k}(k\, \varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)) \tag{II.52}$$

avec $S \;=\; \sqrt{S_{lm}.S_{lm}}$ où S_{lm} est le tenseur de déformation. Sous cette forme et avec $C^{TL} \;<\; 0$ nous n'autorisons les transferts que dans le sens des grandes vers les petites échelles (des petits vers les grands nombres d'onde).

D'autres formes de modélisation ont été proposées pour ce terme. En suivant par exemple la démarche par fonction tensorielle isotrope utilisée pour le terme de pression rapide, Cambon *et al* [1], puis Besnard *et al* [8], ont obtenu :

$$\begin{aligned}
t_{ij}^L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) = \; & \left(1-\frac{3}{2}c_b\right)\left(\left(\frac{\partial\,\overline{U}_i}{\partial\, x_n}+\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_i}\right)\frac{\partial}{\partial\, k}(k\,\varphi_{nj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\right. \\
& \qquad + \left(\frac{\partial\,\overline{U}_j}{\partial\, x_n}+\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_j}\right)\frac{\partial}{\partial\, k}(k\,\varphi_{in}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)) \\
& \qquad \left. -\frac{4}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_m}\frac{\partial}{\partial\, k}(k\,\varphi_{nm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\right) \qquad \text{(II.53)} \\
& + \left(c_b-\frac{7}{10}\right)\left(\frac{\partial\,\overline{U}_i}{\partial\, x_j}+\frac{\partial\,\overline{U}_j}{\partial\, x_i}\right)\frac{\partial}{\partial\, k}(k\,\varphi_{nn}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)) \\
& + \left(\frac{7}{2}c_b-\frac{8}{3}\right)\delta_{ij}\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_m}\frac{\partial}{\partial\, k}(k\,\varphi_{nm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))
\end{aligned}$$

Plutôt que d'utiliser la forme (II.53), nous avons préféré employer la forme (II.52) qui est plus simple et plus facile à implanter numériquement. L'implantation de (II.53) pourrait constituer une extension intéressante pour un travail futur. Notons que l'utilisation de cette forme pourrait cependant nécessiter un travail de mise au point important, certains problèmes de stabilité numérique ayant été observés pour de fortes valeurs des gradients moyens avec le modèle en φ_{ij} en turbulence homogène, et pouvant être attribués à l'utilisation de cette expression. Notons aussi que la constante intervenant dans (II.53) est la même que celle qui apparaît déjà dans l'expression de π_{ij}^L (II.51), ce qui constitue très certainement un avantage de (II.53) par rapport à (II.52) en ce sens que le modèle est alors plus élégant. En revanche pour des calculs pratiques, le fait de pouvoir ajuster indépendamment les modélisations de π_{ij}^L et t_{ij}^L en jouant sur deux constantes, ce qui est le cas lorsque l'on utilise (II.52), peut s'avérer être un avantage, en particulier pour résoudre des problèmes de stabilité numérique des calculs.

Le transport inhomogène

Il englobe tous les effets inhomogènes liés à un transport spatial dans l'équation (II.23) et s'écrit :

$$d_{ij} = \int_{\Sigma(k)} \left(\hat{D}_{ij}^{NL}\right) d\sigma_k \tag{II.54}$$

avec $\hat{D}_{ij}^{NL}$ défini par (II.42).

Comme nous l'avons déjà mentionné, si l'on suit la démarche de Laporta (1995) [4] on peut obtenir une forme fermée pour d_{ij}. Cette forme est la partie inhomogène de l'écriture générique (II.48). Laporta n'a pas explicité la forme de d_{ij}. Il a fait ce travail uniquement pour la demi-trace de d_{ij} ($D = \frac{1}{2}d_{ii}$) et dans le cas où on fait l'hypothèse de quasi-isotropie sur φ_{ij} en l'exprimant en fonction de $E(k)$. Il trouve dans ce cas :

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{x},k,t) = \quad \frac{\partial}{\partial\, x_i}\int_{\Delta(k)} \theta_{kpq}(\boldsymbol{x},t)(\quad & c_{kpq}E(\boldsymbol{x},p,t)\frac{\partial\, E(\boldsymbol{x},q,t)}{\partial\, x_i} \\ & +d_{kpq}E(\boldsymbol{x},q,t)\frac{\partial\, E(\boldsymbol{x},p,t)}{\partial\, x_i} \\ & +e_{kpq}E(\boldsymbol{x},p,t)\frac{\partial\, E(\boldsymbol{x},k,t)}{\partial\, x_i} \\ & +f_{kpq}E(\boldsymbol{x},k,t)\frac{\partial\, E(\boldsymbol{x},p,t)}{\partial\, x_i})dpdq \end{aligned} \tag{II.55}$$

où c_{kpq}, d_{kpq}, e_{kpq} et f_{kpq} sont des fonctions de la géométrie des triades {k,p,q} (voir fig. II.1). On voit que le terme de transport inhomogène est un terme complexe qui se rapproche du terme de transfert non linéaire car sous la forme d'une double intégrale sur les nombres d'onde. Des calculs ont été effectués par Parpais [5] et Laporta [4] pour évaluer le bien-fondé de cette forme dans le cas d'une couche de mélange non cisaillée. La comparaison à cette expérience de turbulence diffusive s'est montrée prometteuse. Mais le coût de calcul était élevé rendant prohibitif des extensions à des géométries plus complexes.

Notre idée première étant d'être capables de simuler et prédire des écoulements complexes nous avons décidé de modéliser le terme d_{ij} sous une forme plus simple. Nous nous sommes donc inspirés de l'approche en un point. Comme Besnard *et al* [8]

nous avons opté pour une modélisation de type premier gradient en introduisant une viscosité turbulente :

$$d_{ij} \;=\; \frac{\partial}{\partial\, x_k}\left(\nu_T\,\frac{\partial\,\varphi_{ij}}{\partial\, x_l}\right) \tag{II.56}$$

Ici, la viscosité turbulente ν_T que nous introduisons ressemble à la forme isotrope classique utilisée dans les modélisations en un point du type $\kappa - \varepsilon$ ([14],[16],[17]) :

$$\nu_T \;=\; C_\nu^s\,\frac{\kappa^2}{\varepsilon^H} \tag{II.57}$$

où $\kappa \;=\; \dfrac{\overline{q^2}}{2} \;=\; \displaystyle\int_0^\infty E(\boldsymbol{x},k,t)\,dk$ et ε^H est la partie homogène de la dissipation $\varepsilon^H \;=\; \displaystyle\int_0^\infty 2\,\nu\,k^2\,E(\boldsymbol{x},k,t)\,dk$, C_ν^s étant un paramètre à ajuster pour notre modèle.

Notons que cette forme diffère de celle de Besnard *et al* [8] par la formulation de ν_T. Ces auteurs avaient utilisé la forme :

$${\nu_t}^b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) = c_b^\nu \int_0^\infty \sqrt{\frac{E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},t)}{K^3}}\,d\,K \tag{II.58}$$

où ν_t^b est un coefficient de diffusion. Quant à Parpais [46], il avait également retenu une forme diffusive mais avec une viscosité donnée par :

$${\nu_t}^b(\boldsymbol{x},k,t) = \int_0^\infty \frac{E(\boldsymbol{x},k,t)\,dK}{A_2\sqrt{K^3E(\boldsymbol{x},k,t)} + A_sU^*(\boldsymbol{x},t)} \tag{II.59}$$

introduisant ainsi une correction pour les écoulements cisaillés (“shear sheltering”).

II.6.2 Prise en compte des effets de paroi

Le confinement lié à la présence d’une paroi est un élément important dans la modélisation de la turbulence inhomogène. En effet, les phénomènes en jeu sont complexes : intuitivement on comprend que l’échelle caractéristique des grosses structures perpendiculairement à la paroi devra saturer. L’énergie de ces structures est alors redistribuée en partie sur les composantes parallèles à la paroi. L’essentiel des études dans ce domaine sont issues d’observations expérimentales ou de DNS. L’analyse qui en découle est difficilement exploitable du point de vue statistique. Par exemple des structures cohérentes se forment dans la zone interne pour être éjectées vers la zone externe (de la couche limite turbulente).

Troncature “infrarouge” des spectres

Pour tenir compte de la saturation des échelles liée à la présence des parois dans un écoulement turbulent, nous imposons explicitement une coupure spectrale : les tourbillons dont la dimension caractéristique est supérieure à une certaine valeur ne pourront donc plus exister. Cette coupure “infrarouge” a été proposée par Bertoglio *et al* (1986)[6]. Concrètement ceci revient à éliminer les nombres d’onde inférieurs à un nombre d’onde $k_p(\boldsymbol{x})$ lié à la distance à la paroi $\delta_p(\boldsymbol{x})$.

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t) = 0 \quad \text{si} \quad k \;\leq\; k_p = \frac{\mu_p}{\delta_p} \tag{II.60}$$

$$\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t) \neq 0 \quad \text{si} \quad k \;>\; k_p \tag{II.61}$$

où μ_p est une constante à déterminer. De récents travaux sont venus étayer cette hypothèse. En particulier, Skrbek et Stalp [47] ont effectué des mesures dans de l'hélium liquide et ont montré que les lois de déclin de la turbulence étaient modifiées par la présence de parois. Nous avons trouvé les mêmes lois pour des calculs EDQNM pour lesquels on impose une échelle de turbulence maximum qui est liée à la dimension de l'installation expérimentale (voir l'annexe E, communication présentée au TSFP-2 de Stockholm, Juin 2001). La troncature "infrarouge" ne tient pas compte de l'anisotropie des échelles en proche paroi.

De plus, un phénomène essentiel lié à la proximité d'une paroi est la redistribution d'énergie entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds. Souvenons nous que le terme de corrélation pression-vitesse a été calculé pour un espace qui n'est pas fini (sans paroi). Nous avons vu que pour les modèles en un point différents auteurs s'accordaient sur le fait que c'est essentiellement le terme de pression rapide qui se chargeait de la redistribution. Ceci a été confirmé par des bilans dans le cadre de simulations directes d'écoulements en canal plan par Mansour *et al* [48] ou plus récemment Moser *et al* [49] (qui mettent à disposition leurs données par voie électronique).

Influence des parois à travers les termes de pression

Le terme de pression rapide a été déterminé dans un cadre de turbulence homogène. Nous associerons donc ici aux corrélations pression-déformation un terme "d'écho" afin de tenir compte de la présence de parois. Nous avons construit en utilisant les théorèmes de représentation un tenseur ayant les propriétés des corrélations pression-déformation, auxquelles nous ajoutons certaines hypothèses. La question se pose de savoir quelles quantités physiques faire intervenir dans la fonctionnelle qui modélisera ce terme d'écho ${}^p\pi^L_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$. Nous nous inspirons alors de la démarche suivie pour l'approche en un point, par exemple par Gibson *et al* [30]. Ce tenseur contiendra une influence du tenseur de pression-déformation $\pi^L_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$ précédemment modélisé ainsi que de la normale à la paroi $\boldsymbol{n}$ (voir schéma II.3) . Les propriétés que devra vérifier ce tenseur sont la symétrie, être redistributif (à trace nulle) et s'annuler loin des parois (donc influence de la distance à la paroi δ_p). De plus nous imposons que ${}^p\pi^L_{ij}$ soit linéaire en terme de π^L_{ij}. Etant donné que π^L_{ij} est un tenseur symétrique à trace nulle la forme la plus générale pour le terme d'écho (symétrique et linéaire en π^L_{ij} [50]) est :

$$\begin{aligned} {}^p\pi^L_{ij} \quad = \quad & \big((C_1 + C_2\, \pi^L_{lm}\, n_l n_m)\, \delta_{ij} + \ (C_3 + C_4\, \pi^L_{lm}\, n_l n_m)\, n_i n_j \\ & + C_5\, (\pi^L_{il}\, n_l n_j + \pi^L_{jl}\, n_l n_i) + C_6\, \pi^L_{ij}\big)\ f(y^+) \end{aligned} \tag{II.62}$$

où les C_i sont des constantes à préciser. f est une fonction qui annule l'influence du terme d'écho loin de la paroi et qui tend vers 1 lorsque l'on se rapproche de celle-ci. Plus précisément, il nous a semblé que ce terme ne doit plus se faire sentir au delà de $y^+ = 30 \sim 40$, en accord avec le Professeur Sarkar (communication personnelle) connu pour le modèle aux tensions de Reynolds SSG (1991) [51].

L'analyse dimensionnelle impose immédiatement :

$$C_1 \ = \ C_3 \ = \ 0$$

De plus, comme ${}^p\pi^L_{ij}$ est à trace nulle :

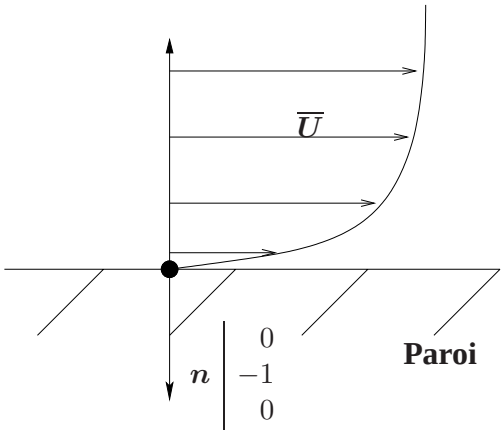

Figure II.3 : Ecoulement de paroi

$$^{p}\pi^{L}_{ii} \;=\; 0 \Longrightarrow 3\,C_2 + C_4 + 2\,C_5 \;=\; 0$$

Il reste donc trois constantes à déterminer. A ce niveau, le modèle de Gibson et Launder [30](expression (I.34)) est un cas particulier du modèle plus général (II.62). Nous proposons ici de simplifier le modèle en utilisant des hypothèses un peu différentes de celles proposées par Gibson et Launder. Nous pouvons diminuer le nombre de paramètres en considérant le cas particulier d'un écoulement de couche limite ou de canal plan pour lequel nous disposons de bilans issus de simulations numériques directes [48, 49]. Très près de la paroi l'écoulement devient très anisotrope. Tout se passe comme si le terme de pression rapide ponctionnait de l'énergie sur la composante $\overline{u_2u_2}$ du tenseur de Reynolds afin de la réinjecter sur la composante $\overline{u_1u_1}$. Nous avons décidé arbitrairement de supprimer la partie sphérique de l'équation (II.62) ($C_2 = 0$). Il ne nous reste ainsi que deux constantes à déterminer, C_5 et C_6 ($C_4 = -2\,C_5$). Dans la configuration schématisée sur la figure II.3 le terme $\pi^L_{lm}\,n_l n_m$ de la relation (II.62) vaut π^L_{22}. Afin de réduire encore le nombre de degrés de liberté, nous allons émettre une dernière hypothèse, dans le cas particulier de l'écoulement en proche paroi de la figure II.3. Nous imposons que $^{p}\pi^L_{ij} = 0$ si $i \neq j$, donc que la redistribution se fera sur la diagonale de ce tenseur. Notre but, en procédant ainsi, est de mieux maîtriser l'influence de ce tenseur et de pouvoir le raffiner *a posteriori*. En effet, nous savons que pour les modèles en un point se rapprochant du modèle LRR, on constate une surestimation de $\overline{u_2u_2}$ et de $\overline{u_1u_2}$, en proche paroi. Le problème est que ces deux quantités sont couplées dans le cas bidimensionnel décrit précédemment. La composante $\overline{u_2u_2}$ intervient dans les termes de production et de pression rapide de $\overline{u_1u_2}$. Si nous réduisons l'amplitude de $\overline{u_2u_2}$ près de la paroi alors nous réduisons aussi l'amplitude de $\overline{u_1u_2}$. La conséquence de la dernière hypothèse que nous venons d'introduire est que $C_6 = -C_5$. Notre modèle d'écho de paroi ne comportera donc qu'une seule constante C_5 que nous appellerons C^p_b($\sim C_5$).

On obtient donc le modèle :

$$^{p}\pi^L_{ij} \;= C^p_b\,(\pi^L_{il}\,n_l n_j + \pi^L_{jl}\,n_l n_i - 2\,\pi^L_{lm}\,n_l n_m\,n_i n_j - \pi^L_{ij})\;\mathrm{f}(y^+) \qquad \text{(II.63)}$$

II.7 La formulation finale du modèle SCIT

II.7.1 Les constantes intervenant dans le modèle

Faisons le bilan des constantes à déterminer pour notre modèle :

- le paramètre $\lambda = 0.355$ intervenant pour la trace du terme de transfert non linéaire déterminé dans le cas d'une turbulence homogène isotrope en déclin. Notre modèle dans cette situation est équivalent à l'EDQNM classique. Le lecteur se référera par exemple aux travaux de Comte-Bellot et Corrsin [18].
- les paramètres α et H intervenant dans l'anisotropie du transfert non linéaire qui respectivement concernent le retour à l'isotropie et la localité des interactions triadiques contribuant à ce retour à l'isotropie.
- le coefficient C^{TL} intervenant pour le terme de transfert linéaire. Pour que l'énergie soit transférée des grandes vers les petites échelles, ce coefficient doit être négatif.
- les coefficients C_b et C_b^p intervenant dans la partie rapide des corrélations pression-déformation et le terme d'écho de paroi.
- le coefficient C_ν^s de transport inhomogène.
- le coefficient μ_p intervenant dans la coupure "infrarouge" des spectres, coupure liée à la présence de parois.

En tout, nous avons donc sept constantes à ajuster $\{\alpha, H, C^{TL}, C_b, C_b^p, C_\nu^s, \mu_p\}$ (en admettant λ fixé et égal à sa valeur classique et en omettant les constantes qui interviennent éventuellement dans la spécification de la fonction de paroi $f(y^+)$). Dans la limite d'une turbulence homogène anisotrope, ce nombre se réduit à quatre constantes $\{\alpha, H, C^{TL}, C_b\}$.

II.8 Relation du modèle SCIT avec les quantités en un point

Nous retrouvons les différentes quantités turbulentes en un point par une simple intégration sur les nombres d'onde des variables issues de notre modèle :

- Le tenseur de Reynolds

$$\overline{u_i u_j} = \int_0^\infty \varphi_{ij}(k, \boldsymbol{x})\, dk$$

- L'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\overline{q^2}}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_{ii}(k, \boldsymbol{x})\, dk$$

- Le taux de dissipation homogène

$$\varepsilon_{ij}^H = 2\nu \int_0^\infty k^2 \varphi_{ij}(k, \boldsymbol{x})\, dk$$

- L'échelle intégrale

$$L = \frac{3\Pi}{4\,\overline{q^2}} \int_0^\infty \frac{E(k, \boldsymbol{x})}{k}\, dk$$

II.9 Conclusion

Nous soulignons que nous avons progressé par rapport à un modèle où la variable de base était un scalaire car par exemple le terme de production ne nécessite plus de modélisation (au premier ordre, champ homogène). Par rapport aux modèles aux tensions de Reynolds en un point (deuxième partie de ce rapport) nous n'avons plus à émettre d'hypothèse pour le terme de dissipation (isotropie locale). De fait, nous pensons que ces avancées constituent un atout pour la suite de notre travail, d'autant qu'habituellement les modèles en un point nécessitent d'introduire une hypothèse d'équilibre de la turbulence. Il faut souligner qu'il existe des modèles multi-échelles en un point tels que ceux développés par Launder et Schiestel [52, 53] et Hanjalić *et al* [32]. Le principe de ces modèles reste proche de notre démarche : les auteurs ont partitionné un spectre modèle de turbulence et ils ont écrit une équation de transport pour chaque portion d'énergie cinétique qui y était associée. Ce spectre n'était pas forcément un spectre de Kolmogorov. De fait cette approche permet, en augmentant le nombre de partitions, de décrire de façon plus fine la turbulence que les modèles en un point classiques. De notre point de vue, notre approche peut aider à raffiner ces modèles.

Chapitre III

Méthodes numériques

III.1 Introduction

Notre modèle étant maintenant défini, nous allons présenter les méthodes numériques que nous avons utilisées afin de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles constitué par l'équation de Navier-Stokes moyennée et par les équations de notre modèle de turbulence.

Pour les calculs dans des géométries complexes, nous avons choisi d'implanter le modèle dans un code bidimensionnel par éléments finis développé au LMFA, le code Natur. Des modèles en un point étaient déjà implantés dans ce code. Le modèle spectral scalaire de S. Parpais (1997) [5] avait également déjà été développé dans ce code. Il était donc logique que nous choisissions Natur comme support de notre modèle. La version du code que nous avons choisi permet de résoudre des problèmes statistiquement stationnaires en écoulement incompressible.

Nous ne détaillerons ici que les parties concernant la résolution des équations relatives au modèle de turbulence pour le cas bidimensionnel. Le lecteur pourra se référer aux thèses de doctorat de Brun (1988) [54], Buffat (1992) [55] et Debaty (1994) [17] pour plus de détails sur la résolution de la partie écoulement moyen. Nous soulignerons simplement que la vitesse moyenne et la pression sont résolues de façon couplée grâce à une méthode de type Uzawa implantée sous la forme d'un algorithme de résidu minimal préconditionné. Les systèmes linéaires mis à jour par la discrétisation éléments finis sont résolus par une méthode itérative CGS (gradients biconjugués carrés) accélérée par un préconditionnement de type LDU incomplet (CGS+ILU) très efficace pour des problèmes de convection-diffusion.

III.2 Inconnues principales – Discrétisation temporelle

III.2.1 Inconnues du problème

Notre travail entre dans le cadre de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes moyennées (RANS : pour Reynolds Averaged Navier-Stokes).

Le champ aérodynamique moyen présente deux inconnues principales, la pression $\overline{P}$ et la vitesse $\overline{\boldsymbol{U}}$. L'équation de quantité de mouvement et de continuité suffisent à résoudre ce problème dans le cas laminaire. Les quantités moyennes sont couplées à

la turbulence par le tenseur de Reynolds R_{ij}. Classiquement, on résout le champ aérodynamique et le champ turbulent de façon découplée ce qui introduit certainement des erreurs par un décalage temporel. Dans le cadre de notre travail nous nous sommes intéressés à des problèmes statistiquement stationnaires, et donc ce découplage ne prête pas à conséquence lorsque la solution est convergée.

Nous résolvons les équations du tenseur de Reynolds spectral φ_{ij}, qui nous donne le tenseur de Reynolds en un point R_{ij} par une simple intégration sur les nombres d'onde. C'est par ce tenseur qu'intervient le couplage avec l'équation de quantité de mouvement (N.-S.).

Cette variable turbulente introduit dans le cas tridimensionnel 6 nouvelles inconnues (tenseur symétrique). Les équations qui sont relatives à chaque composante sont elles mêmes couplées. Nous les résolvons toujours de façon découplée (on explicite les termes de couplage).

Bilan

Concrètement, en 3D, nous avons 10 équations à résoudre :

- Une équation pour assurer l'incompressibilité, l'équation de conservation de la masse (qu'on appelle aussi équation de continuité). En fait c'est cette contrainte qui permet en incompressible de déterminer la pression.
- 3 équations pour chaque composante de la vitesse moyenne.
- 6 équations pour les composantes indépendantes du tenseur de Reynolds spectral. En fait, nous calculons explicitement la demi-trace de ce tenseur E (spectre d'énergie cinétique turbulente) et le déviateur du tenseur de Reynolds spectral $H_{ij} = \varphi_{ij} - \frac{2}{3}\, E\, \delta_{ij}$.

Les simulations que nous avons réalisées étant bidimensionnelles, on calcule effectivement 2 composantes de vitesse, la pression, la trace du tenseur de Reynolds spectral E et trois composantes du déviateur du tenseur de Reynolds spectral H_{ij}. Si nous nous plaçons dans le plan, (O, e_1, e_2) (où O est l'origine et les e_i sont les vecteurs directeurs de ce plan) les composantes du déviateur du tenseur de Reynolds spectral que nous calculons (repère cartésien) sont H_{11}, H_{12} et H_{22}. Notons que pour les quantités spectrales chaque équation est résolue plusieurs fois : une fois par nombre d'onde.

III.2.2 Discrétisation temporelle

Les écoulements étudiés durant notre travail de thèse possèdent un caractère statistiquement stationnaire. Nous avons donc choisi un schéma temporel simple, semi-implicite et d'ordre un ($\mathcal{O}(\Delta\, t)$, $\Delta\, t$ pas de discrétisation en temps).

L'équation (I.4) s'écrit donc sous forme discrète :

$$\frac{\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n+1}}{\Delta\, t} + (\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n}.\nabla)\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n+1} = \frac{\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n}}{\Delta\, t} - \frac{1}{\rho}\nabla\overline{P}^{\,n+1} + \nu\Delta\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n+1} - \nabla.\boldsymbol{R}^n \qquad \text{(III.1)}$$

où l'indice supérieur $^{n+1}$ indique le temps $(n+1)\ \times\ \Delta\, t$ de la nouvelle itération d'intégration temporelle. Cette équation a pour contrainte (I.5)

$$\nabla\,.\,\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1} = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

Pour la turbulence nous résolvons d'abord l'équation sur le spectre d'énergie cinétique turbulente, "demi-trace" de l'équation (II.46) :

$$\begin{aligned}\frac{E^{\,n+1}}{\Delta\, t} + (\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n}.\nabla)\, E^{\,n+1} = \; & \frac{E^{\,n}}{\Delta\, t} + P^{\,n} - 2\nu k^2\, E^{\,n+1} \\ & + T^{L\;\;n} + T^{+\;\;n} + T^{-\;\;n+1} \\ & + \frac{\partial}{\partial\, x_l}\left((\frac{\nu}{2} + \nu^{T\;\;n}) \frac{\partial}{\partial\, x_l}\, E^{\,n+1} \right)\end{aligned} \tag{III.3}$$

L'écriture du transfert non-linéaire avec une partie semi-implicite $T^{-\;\;n+1}$ a été proposée par Parpais [5]. Cette écriture contribue à stabiliser le schéma numérique, en conjonction avec le terme de dissipation homogène qui est lui aussi implicité. Ceci nous autorise à utiliser des pas de temps relativement grands (la contribution en $2\nu k^2$ pour la dissipation renforce la diagonale du système linéaire à inverser, d'autant plus que k est grand).

L'équation pour le déviateur du tenseur de Reynolds spectral H_{ij} est alors résolue. Comme E est calculé, et étant donné que H_{ij} est à trace nulle nous n'avons plus que 5 équations à résoudre (au lieu de 6) dans des cas tridimensionnels, ceci pour chaque nombre d'onde de la discrétisation spectrale. En effet, nous pouvons éliminer une des composantes diagonales de H_{ij} .

Notre étude s'inscrit dans le cadre des écoulements statistiquement bidimensionnels, donc nous n'avons plus que 3 équations à résoudre pour les composantes H_{11}, H_{12} et H_{22} :

$$\begin{aligned}\frac{H_{ij}^{\,n+1}}{\Delta\, t} + (\overline{\boldsymbol{U}}^{\,n}.\nabla)\, H_{ij}^{\,n+1} = \; & \frac{H_{ij}^{\,n}}{\Delta\, t} + (p_{ij} - \frac{2}{3}\, P\, \delta_{ij})^{\,n} + \pi_{ij}^{L\;n} - 2\nu k^2\, H_{ij}^{\,n+1} \\ & + t_{ij}^{L\;\;n} + (t_{ij}^{+\;\;n} + t_{ij}^{-\;\;n+1} - \frac{1}{3}(t_{ii}^{+\;\;n} + t_{ii}^{-\;\;n+1})) \\ & + \frac{\partial}{\partial\, x_l}\left((\frac{\nu}{2} + \nu^{T\;\;n}) \frac{\partial}{\partial\, x_l}\, H_{ij}^{\,n+1} \right)\end{aligned} \tag{III.4}$$

Avant de discuter de la discrétisation spatiale, parlons d'abord de la discrétisation des variables turbulentes dans l'espace spectral. Ceci a déjà été présenté dans la thèse de Parpais [5], mais il nous a paru important de rappeler cette démarche.

III.3 Discrétisation spectrale

L'espace spectral est discrétisé selon une loi géométrique, et de la même manière en chaque point physique de l'écoulement. On donne donc le premier point spectral k_1 et la raison géométrique r_k ainsi que le nombre total N_k de noeuds spectraux. Ce nombre est choisi afin de pouvoir capturer la plus petite échelle de la turbulence (échelle de Kolmogorov) ainsi que la plus grande. En présence de paroi, la grande échelle est en général liée au confinement. Le maillage spectral est défini par :

$$\forall\, i \,\epsilon\, [1 \cdots N_k]\,,\, k_i = k_1 r_k^{i-1} \tag{III.5}$$

En chaque point de l'écoulement, il existe pour chaque nombre d'onde un couplage avec les autres nombres d'onde. Les termes liés à ce couplage seront donc résolus de manière explicite (par exemple les termes de transfert).

Le modèle de turbulence spectral implique la résolution de N_k équations de transport (III.4), une pour chaque nombre d'onde calculé, et ce pour chaque composante du tenseur de Reynolds spectral.

Pour que le lecteur ait un ordre d'idée en ce qui concerne le nombre typique de nombres d'onde de discrétisation spectrale, nous soulignerons que $N_k = 40$ s'est révélé suffisant pour décrire des écoulements à des nombres de Reynolds relativement élevés et des configurations géométriques diverses (voir chap. résultats).

Le fait d'expliciter les termes non locaux (dans l'espace spectral) nous permet de résoudre de façon découplée une équation de transport (dans l'espace physique discrétisé par éléments finis) pour chaque nombre d'onde de la discrétisation spectrale et pour chaque composante du tenseur de Reynolds spectral. Ceci représente en tout pour un calcul 2-D et $N_k = 40$ nombres d'ondes $40 \times 4 = 160$ équations de transport.

III.4 Discrétisation spatiale

Les schémas d'intégration temporelle et spectral étant posés, à chaque pas de temps et pour chaque nombre d'onde, nous devons résoudre le problème de convection-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \psi(\boldsymbol{x}) \text{tel que} \\ \left(\dfrac{1}{\Delta\, t} + 2\nu k^2\right)\psi + (\overline{\boldsymbol{U}}.\nabla)\psi - \nabla.((\dfrac{\nu}{2} + \nu_T)\,\nabla\,\psi) \;=\; Q \quad \text{dans } \Omega \\ \psi|_{\Gamma_0} = \psi_0 \text{ et } \left.\dfrac{\partial\,\psi}{\partial\,n}\right|_{\Gamma_1} = g_1 \text{ sur } \delta\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \end{cases} \tag{III.6}$$

où Ω est le domaine d'intégration spatiale, $\delta\Omega$ la frontière de ce domaine, Γ_1 la partie de la frontière où l'on impose des conditions de Neumann et Γ_0 la partie de la frontière où l'on impose des conditions de Dirichlet. ψ représente les variables turbulentes ($\psi(k)$) et Q les contributions explicites de l'équation (III.4)(termes "sources").

La méthode des éléments finis consiste à écrire la formulation faible du problème (III.6) et à projeter la solution approchée sur les fonctions de base.

III.4.1 Formulation faible

La formulation faible de (III.6) se fait en deux étapes. On multiplie d'abord cette équation par une fonction test v. Ensuite on calcule l'intégrale de l'équation ainsi obtenue sur le domaine Ω. On exploite alors le théorème de Green pour les termes en "divergence". On obtient :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\left(\frac{1}{\Delta\, t} + 2\nu k^2\right)\psi.v + (\overline{\boldsymbol{U}}.\nabla)\psi.v + (\frac{\nu}{2} + \nu_T)\,\nabla\,\psi.\nabla\,v\right) d\boldsymbol{x} = \\ &\int_\Omega Q.v\, d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma (\frac{\nu}{2} + \nu_T)\, g_1.v\, d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{III.7}$$

III.4.2 Méthode de Galerkin et espaces d'interpolation

Méthode de Galerkin

Soit ψ^h la solution approchée de l'équation (III.7) et N fonctions indépendantes $N_i(\boldsymbol{x})$ qui vérifient les conditions aux limites homogènes sur Γ_0. On écrit alors la solution sous la forme :

$$\psi^h(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \psi_i \; N_i(\boldsymbol{x}) \;+\; \psi_0(\boldsymbol{x}) \tag{III.8}$$

où $\psi_0(\boldsymbol{x})$ permet de tenir compte des conditions de Dirichlet non homogènes. On choisit alors comme fonctions test v pour l'équation (III.7) la base des N_i (méthode de Galerkin), ce qui permet alors d'écrire le système d'équations linéaires :

$$\psi_i \int_\Omega \left(\left(\frac{1}{\Delta\, t} + 2\nu k^2 \right) \; N_j \; N_i + (\overline{\boldsymbol{U}}.\nabla) \; N_j \; N_i + (\frac{\nu}{2} + \nu_T) \; \nabla \; N_j.\nabla \; N_i \right) d\boldsymbol{x} = \int_\Omega Q.N_i \, d\boldsymbol{x} + \text{C.L.} \tag{III.9}$$

avec pour conditions aux limites :

$$\text{C.L.} \;=\; \int_\Omega \left(\left(\frac{1}{\Delta\, t} + 2\nu k^2 \right) \; \psi_0 \; N_i + (\overline{\boldsymbol{U}}.\nabla) \; \psi_0 \; N_i + (\frac{\nu}{2} + \nu_T) \; \nabla \; \psi_0.\nabla \; N_i \right) d\boldsymbol{x} + \int_\Gamma (\frac{\nu}{2} + \nu_T) \; g_1.N_i \, d\boldsymbol{x} \tag{III.10}$$

Discrétisation par éléments finis

L'espace d'interpolation utilisé dans le code Natur est l'espace des éléments P1 en ce qui concerne la pression (maillage grossier) et l'espace des éléments P1-iso-P2 (maillage P1 divisé en quatre éléments : maillage fin) en ce qui concerne les autres quantités (voir fig. III.1).

III.5 Conditions aux limites

III.5.1 Conditions d'entrée

Nous imposons pour les conditions d'entrée une condition de Dirichlet non homogène en ce qui concerne le champ de vitesse ainsi que les spectres de turbulence. Le profil imposé est issu généralement d'un calcul préalable unidimensionnel. En ce qui concerne la pression, une condition de Neumann homogène est imposée.

III.5.2 Conditions de sortie

Pour le champ de vitesse moyenne et la turbulence une condition de Neumann homogène est imposée. En général nous imposons un profil uniforme pour la pression.

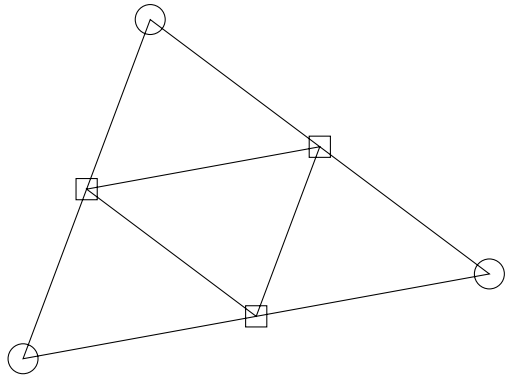

Figure III.1 : Elément P1-iso-P2 : la pression est définie aux noeuds marqués par un cercle alors que la vitesse est définie aux noeuds marqués par un cercle ou un carré.

III.5.3 Conditions aux limites en présence de parois solides

La résolution jusqu'à la paroi n'est pas réalisable dans des géométries complexes (d'ailleurs la formulation actuelle du modèle ne le permettrait pas, à cause de la troncature spectrale imposée explicitement). C'est pour cela que dans la plupart des situations on introduit un déplacement du premier point de calcul à une certaine distance de la paroi. Une loi de paroi est donc nécessaire afin de donner les conditions de Dirichlet non homogène pour la vitesse et la turbulence. Cette approche est fondée sur l'observation des lois régissant les écoulements de couche limite turbulente.

Pour la vitesse moyenne

Nous calculons la vitesse au point le plus proche de la paroi en supposant que l'écoulement est parallèle. On calcule une vitesse de frottement u_f à partir de la contrainte calculée à l'itération en temps précédente (on rappelle que le calcul est stationnaire). Cette contrainte est la somme de la contrainte visqueuse ainsi que de la tension de Reynolds.

Nous utilisons les lois de couche limite classiques

$$\overline{U}^+ = \frac{\overline{U}}{u_f} = \begin{cases} y^+ & \text{si } y^+ < 5 \text{ (sous-couche visqueuse),} \\ \frac{1}{\kappa} log(y^+) + 5.2 & \text{si } y^+ > 30. \end{cases} \tag{III.11}$$

avec un raccordement en tangente hyperbolique pour déterminer la valeur de la vitesse dans la zone tampon ($5 < y^+ < 30$). Le lecteur pourra ce référer au travail de Debaty [17] et de Parpais [5] pour plus de détails.

Pour les spectres de la turbulence

Parpais [5] a proposé une équation a résoudre afin de déterminer le spectre d'énergie cinétique turbulente $E(k)$ à la paroi. Cette équation utilise la valeur de la dissipation à la paroi donnée par une loi de paroi utilisée classiquement pour les modèles en un point.

Cette condition aux limites a donné de bons résultats. Nous avons donc fait le choix de garder cet acquis. Il nous reste donc à déterminer l'anisotropie du tenseur de Reynolds spectral à la paroi.

Parpais [5] dans le cadre du développement du modèle spectral scalaire a proposé une représentation du tenseur Reynolds spectral $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)$ en fonction du nombre d'onde de E et des gradients de vitesse moyenne. Celle ci constitue une extension de la formulation en un point proposée par Shih et Lumley [56], afin de modéliser les tensions de Reynolds de telle manière que leur modèle soit réalisable[1]. Parpais [5] propose donc la forme :

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t) = & \frac{2}{3}E(\boldsymbol{x},k,t)\delta_{ij} \\ + & 2a_2\frac{E(\boldsymbol{x},k,t)}{\sqrt{K^3E(\boldsymbol{x},k,t)}}\left(\overline{U}_{i,j}(\boldsymbol{x},t)+\overline{U}_{j,i}(\boldsymbol{x},t)-\frac{2}{3}\overline{U}_{i,i}(\boldsymbol{x},t)\delta_{ij}\right)\end{aligned} \tag{III.12}$$

Par intégration sur les nombres d'onde on obtient une expression pour la viscosité turbulente[2] :

$$\nu_t(\boldsymbol{x},t) = -\int_0^\infty 2a_2\frac{E(\boldsymbol{x},k,t)}{\sqrt{K^3E(\boldsymbol{x},k,t)}}\,dK \tag{III.13}$$

Ce qui conduit à supposer que la constante a_2 est négative.

Les conditions de réalisabilité imposées au tenseur $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x},k,t)$ sont :

$$\forall\alpha = 1..3,\ \forall K,\ \varphi_{\alpha\alpha}(K) \geq 0 \tag{III.14}$$

$$\forall\alpha = 1..3, \forall\beta = 1..3, \forall K,\ \varphi_{\alpha\beta}(K)^2 \leq \varphi_{\alpha\alpha}(K)\varphi_{\beta\beta}(K) \tag{III.15}$$

$$\forall K,\ det(\varphi_{ii}) \geq 0 \tag{III.16}$$

Elles traduisent, pour la première (III.14) le fait que chaque terme de la diagonale du tenseur est positif ou nul, pour la seconde (III.15), la vérification par ce tenseur de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, enfin la dernière impose au déterminant du tenseur d'être positif. Ces trois conditions doivent être vérifiées pour toute valeur de K. Une démarche consistant à étendre l'approche de Shih et al. au cas spectral conduit finalement à la formulation suivante de a_2 (Parpais [5]) :

$$2a_2 = \frac{-A_0}{A_1 + A_s U^*(\boldsymbol{x},t)/\sqrt{K^3E(\boldsymbol{x},k,t)}}$$

avec

$$U^*(\boldsymbol{x},t) = \sqrt{S^*_{ij}(\boldsymbol{x},t)S^*_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \Omega^*_{ij}(\boldsymbol{x},t)\Omega^*_{ij}(\boldsymbol{x},t)}$$

où

$$S^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overline{U}_{i,j}(\boldsymbol{x},t)+\overline{U}_{j,i}(\boldsymbol{x},t)-\frac{2}{3}\overline{U}_{i,i}(\boldsymbol{x},t)\delta_{ij}\right)$$

[1] en effet, lorsque la variable turbulente de base est un scalaire (et pas le tenseur de Reynolds) il faut modéliser le tenseur de Reynolds afin de fermer le terme de production d'énergie cinétique turbulente

[2] pour le modèle scalaire cette viscosité turbulente est nécessaire afin de pouvoir calculer le terme de production

et

$$\Omega^*_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\left(\overline{U}_{i,j}(\boldsymbol{x},t) - \overline{U}_{j,i}(\boldsymbol{x},t)\right)$$

d'où pour la viscosité turbulente l'expression :

$$\nu_t(\boldsymbol{x},t) = \int_0^\infty \frac{A_0 E(\boldsymbol{x},k,t)\,dK}{A_1\sqrt{K^3 E(\boldsymbol{x},k,t)} + A_s U^*(\boldsymbol{x},t)} \tag{III.17}$$

Les constantes ont été fixées aux valeurs :

$$A_0 = 0.71,\ \ A_1 = 0.28 \text{ et } A_s = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

de manière à satisfaire les contraintes de réalisabilité et en effectuant des comparaisons avec des données expérimentales dans le cas d'un cisaillement uniforme en turbulence homogène.

Il est à noter que la forme retenue est compatible avec l'existence d'une loi en $k^{-7/3}$ pour le spectre de la tension de Reynolds φ_{12}.

Chapitre IV

Résultats du modèle

IV.1 Introduction

Avant de pouvoir prédire des écoulements complexes, il faut d'abord déterminer les constantes issues de notre démarche de modélisation. Ces constantes ont été ajustées en deux temps. Une première étape a été d'appliquer notre modèle à des situations de turbulence homogène anisotrope. Dans un deuxième temps, les constantes restantes ont été déterminées en comparant les résultats obtenus à des bases de données expérimentales et de DNS dans une configuration simple d'écoulement inhomogène en présence de parois : l'écoulement entre deux plaques planes parallèles. Nous avons ensuite vérifié les bonnes prédictions de notre modèle dans des situations et des géométries plus complexes.

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord présenter de quelle façon nous avons évalué les constantes intervenant dans le modèle. Ensuite nous présenterons les résultats obtenus. Les écoulements que nous avons étudiés nous ont permis de montrer la fiabilité de notre modèle dans des cas tests classiques (marche descendante, diffuseur...) ainsi que dans des situations plus compliquées telles qu'un écoulement autour d'un profil d'aile. Au delà des données classiques telles que la distribution des niveaux d'énergie ou des champs aérodynamiques moyens, nous montrerons comment le modèle spectral permet d'extraire des informations plus détaillées sur la turbulence. Ainsi, nous verrons de quelle manière le modèle spectral peut nous aider à caractériser des situations de déséquilibre de la turbulence.

IV.2 Ajustement des constantes du modèle

IV.2.1 Optimisation du modèle pour une turbulence homogène anisotrope : le cisaillement uniforme

Présentation de l'écoulement

Il s'agit d'un écoulement où l'on impose un gradient de vitesse uniforme dans tout l'espace (ici $S = \dfrac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}$, voir figure IV.1). En fait, ce type d'écoulement est difficile à obtenir expérimentalement. Plusieurs auteurs ont présenté des résultats expérimentaux, en particulier Tavoularis et Karnik (1989) [57] qui ont réalisé une compilation

de données expérimentales [58, 59, 60, 61, 57]. Le lecteur trouvera la description de l'installation expérimentale nécessaire afin d'obtenir un gradient de vitesse moyenne homogène dans les travaux de Karnik et Tavoularis (1987) [62].

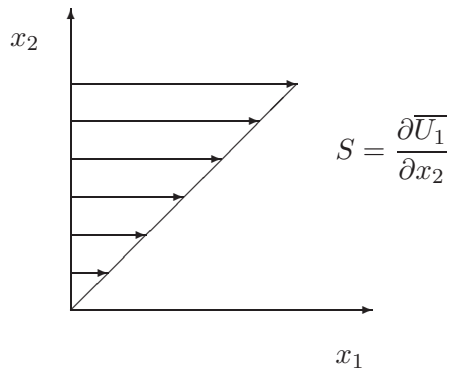

Figure IV.1 : Cisaillement uniforme

Des lois asymptotiques ont été déduites de cette compilation. Les résultats font apparaître deux classes de comportements pour les quantités turbulentes :

- une croissance exponentielle de toutes les quantités accompagnée d'un comportement auto-similaire des grandes échelles est observée lorsque $k_s = S/U_c >> 1$ (k_s défini par ces auteur comme le générateur de l'écoulement ; S cisaillement et U_c vitesse au centre de la veine) et/ou $\varepsilon/P < 1$ (P est la production d'énergie cinétique turbulente).
- l'énergie cinétique turbulente stagne lorsque k_s est petit et $\varepsilon/P \simeq 1$.

Résultats et analyse

Le code que nous avons développé afin de simuler le cisaillement uniforme résout l'évolution du tenseur de Reynolds spectral en fonction du temps, en turbulence homogène. Il s'agit d'un code de taille réduite, spécifique à la turbulence homogène et différent du code Natur utilisé pour les écoulements plus complexes. Afin de comparer nos résultats (fonction du temps) aux données expérimentales (fonction de la position x_1 – figure IV.1 – dans la veine) l'hypothèse de Taylor est invoquée ; la relation entre la position d'espace et le temps est donnée par $x_1 = U_c \times t$ (x_1 étant la position et U_c la vitesse au milieu de la section de la veine). Tavoularis (1985) [63] montre que dans la situation $\varepsilon/P < 1$ on peut asymptotiquement écrire :

$$\overline{q}^2 \sim e^{\gamma\ k_s\ x1}$$

L'évolution en temps est donc

$$\overline{q}^2 \sim e^{\gamma\ S\ t}$$

où $S\ t$ est le gradient cumulé. Tavoularis (1985) [63] montre que

$$\gamma = -2\, b_{12}\ (1\ -\ \varepsilon/P)$$

La valeur de γ issue de la compilation de Tavoularis et Karnik (1989) [57] est de l'ordre de 0.1 pour $\varepsilon/P = 0.68$ (moyenne sur les données expérimentales) et $b_{12} = -0.16$.

Pour toutes nos simulations nous nous sommes placés dans les conditions où l'on observe cette croissance des grandeurs turbulentes (c'est à dire avec une condition initiale telle que $\varepsilon/P < 1$ au bout de quelques itérations[1]).

Nous ne présenterons pas ici les différents comportements du modèle selon le jeu de constantes $\{\alpha, H, C^{TL}, C_b\}$ choisi. Ce qu'il faut noter c'est que le couple $\{\alpha, H\}$ (lié au déviateur du transfert non-linéaire) contribue à déterminer le niveau d'anisotropie tandis que le couple $\{C^{TL}, C_b\}$ détermine le taux de croissance exponentielle du tenseur de Reynolds et des autres quantités turbulentes. En particulier, la constante C^{TL} apparaissant dans le terme de transfert linéaire permet de modérer une croissance trop rapide des quantités turbulentes. Le tableau IV.1 présente le jeu de paramètres retenu à l'issue des tests effectués pour ce cas de cisaillement uniforme.

Transfert non-Linéaire	α	0.20
	H	3.00
Transfert Linéaire	C^{TL}	-0.03
Pression Rapide	C_b	0.77

TAB. IV.1 : Valeurs des constantes issues de l'optimisation dans le cas du cisaillement uniforme.

La figure IV.2 montre que le déviateur adimensionnel du tenseur de Reynolds b_{ij} atteint un état asymptotique. Les valeurs prédites sont assez proches de celles obtenues expérimentalement par Tavoularis et Karnik (1989, voir tab. IV.2). La figure IV.3 pré-

b_{ij}	T.&K.	Présent
b_{11}	0.18 $\pm$ 0.04	0.13
b_{22}	-0.11 $\pm$ 0.02	-0.11
b_{33}	-0.06 $\pm$ 0.03	-0.02
b_{12}	-0.16 $\pm$ 0.01	-0.14

TAB. IV.2 : Valeurs expérimentales de b_{ij} (Tavoularis et Karnik) et résultat asymptotique obtenu à l'aide du modèle.

sente l'évolution du rapport du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente sur la production. La valeur asymptotique de ce rapport est de 0.73 (pour le cas présenté ici). Avec une valeur de $b_{12} = -0.14$, la valeur du coefficient de croissance exponentielle γ prédite par la relation de Tavoularis est 0.08. Il apparaît sur la figure IV.4 qu'après une phase transitoire, notre modèle conduit effectivement à une telle valeur.

L'évolution des spectres d'énergie $E(k)$ au cours du cisaillement est tracée sur la figure IV.5. Ces spectres présentent une zone inertielle en $-5/3$ en accord avec la théorie de Kolmogorov. Selon cette théorie, si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé et si la turbulence est en équilibre alors une loi de similarité pour $E(k)$ existe.

[1] à $t = 0$, $P = 0$

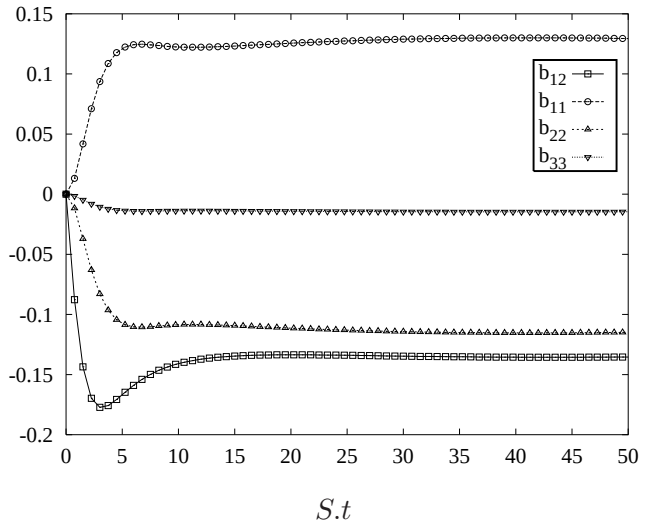

Figure IV.2 : Anisotropie prédite par le modèle en fonction du gradient cumulé $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme

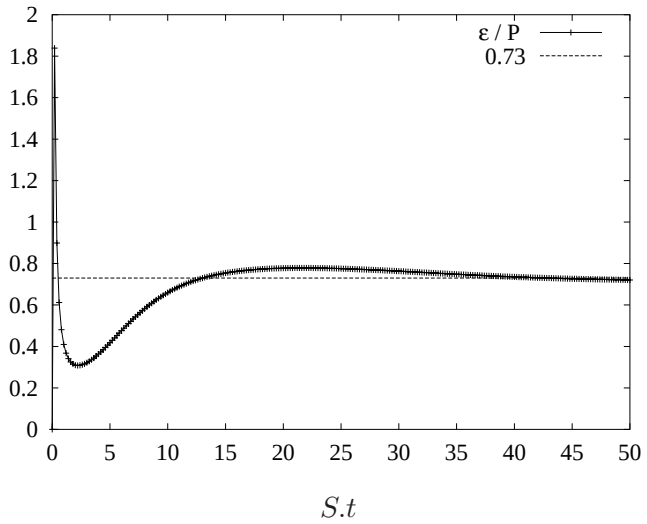

Figure IV.3 : Evolution du rapport ε/P en fonction du gradient cumulé $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme

Celle ci s'écrit :

$$\frac{E}{(\varepsilon\,\nu^5)^{\frac{1}{4}}} \simeq \left(\frac{k}{k_\eta}\right)^{-\frac{5}{3}} \tag{IV.1}$$

où $k_\eta = \left(\varepsilon\,\nu^{-3}\right)^{\frac{1}{4}}$ est le nombre d'onde de Kolmogorov ("plus petite échelle dissipative"). Nous avons tracé sur la figure IV.6 les spectres d'énergie cinétique turbulente de la figure précédente en utilisant l'adimensionnement universel de Kolmogorov (IV.1) défini ci-dessus. On constate qu'il existe une loi de similarité dans le cas du cisaille-

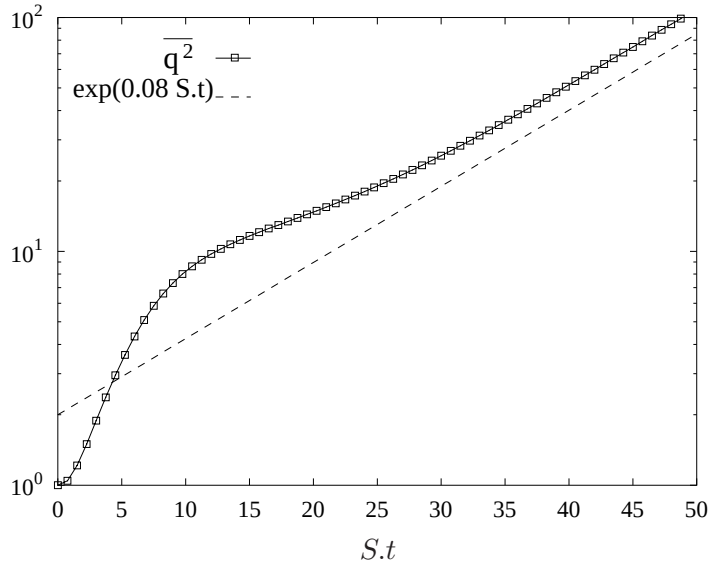

Figure IV.4 : Comportement exponentiel de l'énergie cinétique turbulente en fonction du gradient cumulé $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme

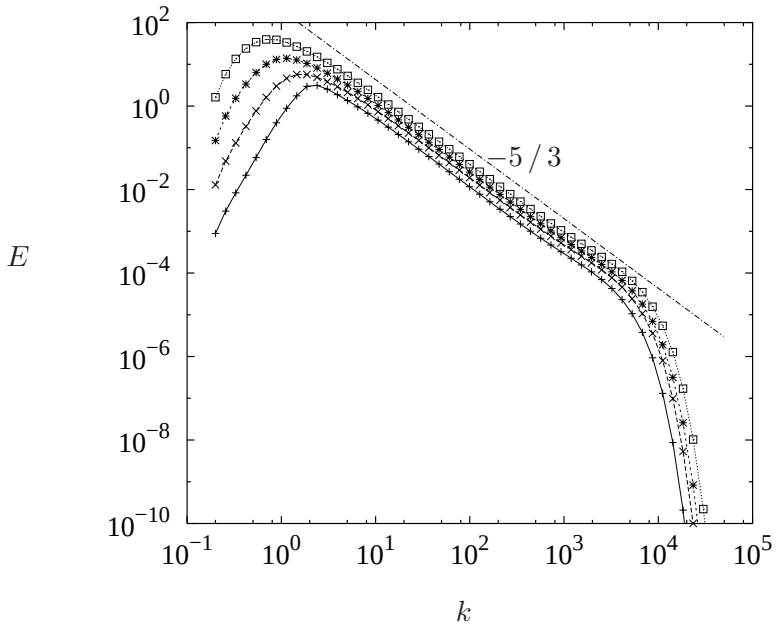

Figure IV.5 : Spectres $E(k)$ à différents instants $S.t$ dans le cas du cisaillement uniforme

ment uniforme, en accord avec la théorie de Kolmogorov.

On observe également (figure IV.7) un comportement du spectre de la tension de Reynolds en loi de puissance $\varphi_{12}(k) \sim k^{-7/3}$. L'exposant $-7/3$ a été trouvé par différents auteurs dans le cadre d'écoulements cisaillés. Ces auteurs ont essayé de donner des arguments pour expliquer cet exposant, en particulier Corrsin(1958) et Lum-

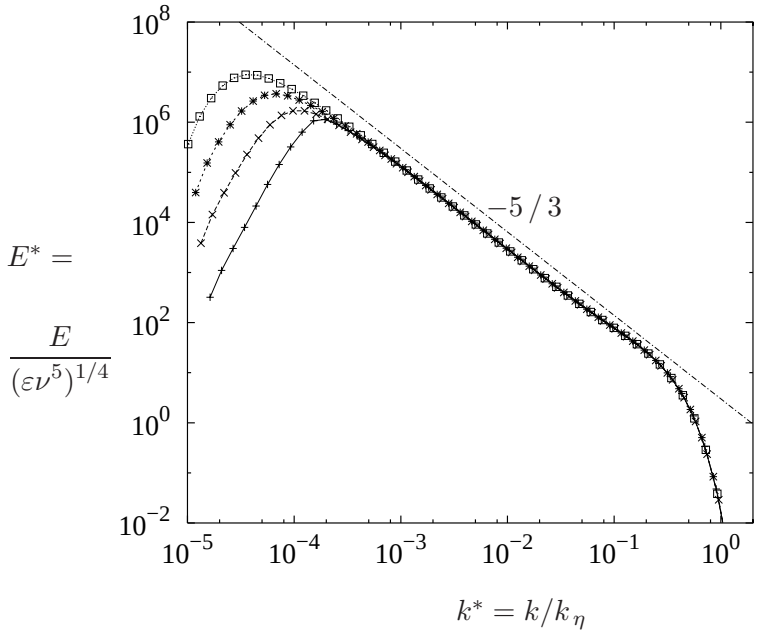

Figure IV.6 : Spectres $E(k)$ de la figure précédente mais en adimensionnement universel de Kolmogorov ; cas du cisaillement uniforme.

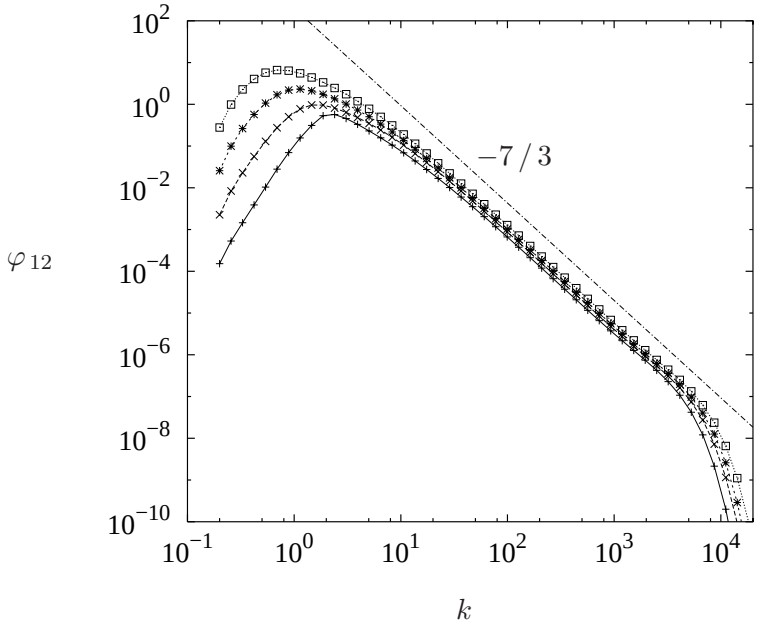

Figure IV.7 : Spectres φ_{12} à différents instants du cisaillement uniforme

ley(1967). Nous reprenons ici leur approche. Il est raisonnable d'admettre que la production du spectre de la tension de Reynolds $\varphi_{12}(k)$ se comporte en $\sim E(k) \times S$. On admet alors que la destruction de $\varphi_{12}(k)$ se comporte en $\sim \varphi_{12}(k) \times \frac{1}{\tau}$, où τ est un

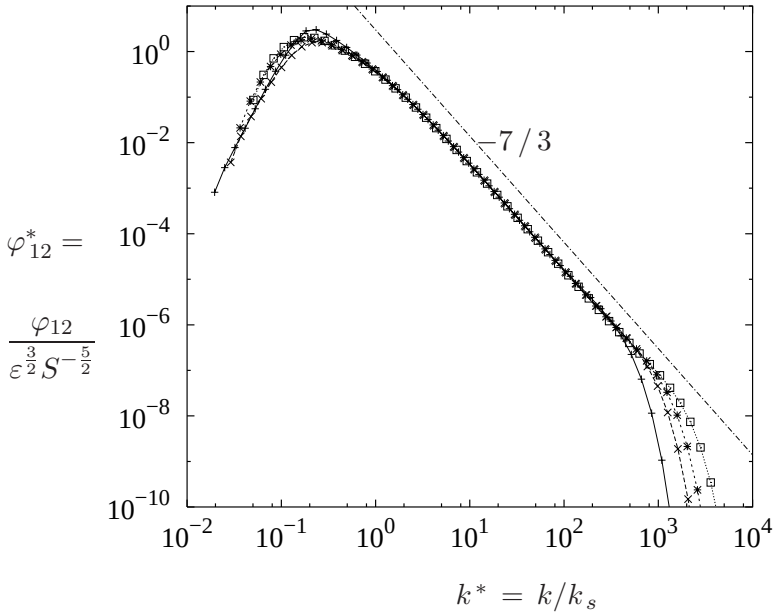

Figure IV.8 : Spectres φ_{12} adimensionnés pris aux mêmes instants du cisaillement uniforme que fig. IV.7

temps caractéristique. Lumley [2] propose alors de choisir $\tau(k) \sim \varepsilon^{-\frac{1}{3}} k^{-\frac{2}{3}}$. De plus, si le nombre de Reynolds est suffisamment grand, $E(k)$ doit suivre la loi de Kolmogorov dans la zone inertielle du spectre. On en déduit alors que le spectre de la tension de Reynolds doit se comporter dans la zone inertielle en $\varphi_{12}(k) \sim S\varepsilon^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{7}{3}}$. Pour déterminer le nombre d'onde associé au début de la zone en $-7/3$, on peut admettre que dans les grandes échelles le temps caractéristique est imposé par le cisaillement, et écrire que $\tau(k) \simeq \dfrac{1}{S}$. Une estimation du nombre d'onde déterminant le début de la zone en $-7/3$ est alors obtenu comme le nombre d'onde où les deux expressions de $\tau(k)$ coïncident. On trouve $k_s \sim \varepsilon^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{2}}$. Cette analyse permet de trouver la relation :

$$\frac{\varphi_{12}(k)}{\varepsilon^{\frac{3}{2}} S^{-\frac{5}{2}}} \simeq \left(\frac{k}{k_s}\right)^{-\frac{7}{3}} \tag{IV.2}$$

Cette relation a été reprise et a été vérifiée expérimentalement par Saddoughi et Veeravalli (1994) [64] qui ont mesuré des spectres unidimensionnels $\varphi^1_{12}(k_1)$ dans une expérience sur la couche limite turbulente à très haut Reynolds et ont clairement mis en évidence l'exposant $-7/3$ et le nombre d'onde caractéristique $k_{1\,s}$. La figure IV.8 montre que l'adimensionnement donné par l'équation (IV.2) fonctionne sur une large gamme d'échelles pour les spectres $\varphi_{12}(k)$ issus du calcul spectral.

[2] C'est en fait une analyse classique, qui a permis à Kolmogorov, par exemple, de proposer l'adimensionnement universel (à haut nombre de Reynolds) pour $E(k)$

IV.2.2 Optimisation dans une situation inhomogène « simple » : l'écoulement en canal plan

Présentation de l'écoulement

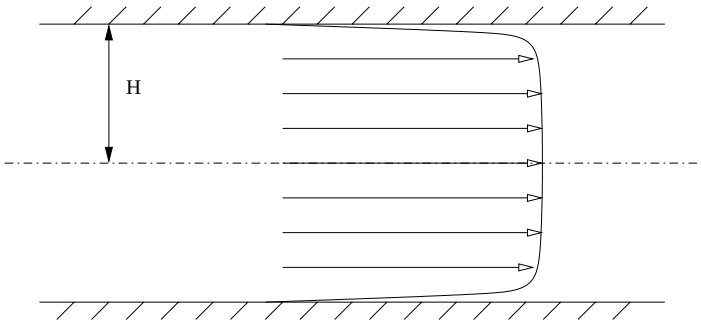

Figure IV.9 : Ecoulement de canal établi

Il s'agit d'un écoulement parallèle entre deux plaques planes dont les dimensions dans la direction de l'écoulement et dans la direction transversale de l'écoulement moyen sont supposées suffisantes pour que ces directions soient des directions d'homogénéité (Figure IV.9). Cette configuration est, avec la couche limite turbulente, un cas de validation pour les modèles de turbulence afin de pouvoir tenir compte de la présence de parois.

Description de la mise en oeuvre numérique

Un code éléments finis 1-D a été utilisé afin d'implanter le modèle. Les éléments finis ont été choisis dans le but de déjà pouvoir anticiper sur la résolution de certaines difficultés qui pourraient se présenter lorsque nous déciderions d'implanter le modèle dans le code bidimensionnel dont nous disposons (Natur 2-D). L'écoulement est établi en imposant un gradient de pression moyen constant dans la direction de l'écoulement.

Calibration des dernières constantes du modèle

Les dernières constantes à déterminer sont C_b^p, μ_p et C_ν^s. Il s'agit respectivement des coefficients intervenant dans le terme d'écho de paroi, dans la troncature spectrale explicite liée à la présence de la paroi et dans le terme de transport inhomogène. Pour le terme d'écho de paroi nous devons également faire intervenir une fonction d'amortissement. Cette fonction a pour rôle d'activer l'influence du terme d'écho pour la couche visqueuse et la zone tampon et de la désactiver au delà de ces zones. Nous proposons ici une nouvelle fonction d'amortissement :

$$\mathrm{f}(R_{\delta_p}) \;=\; \left(\frac{1}{2}(\tanh(R_{\delta_p}+1)-\tanh(R_{\delta_p}-40))\right)^{\frac{1}{4}} \qquad \text{(IV.3)}$$

où $R_{\delta_p} = \dfrac{K^{\frac{1}{2}}\,\delta_p}{\nu}$ (K : énergie cinétique turbulente et δ_p : distance à la paroi la plus proche). Dans l'équation (II.63) la fonction f dépendait de de y^+. En pratique, pour

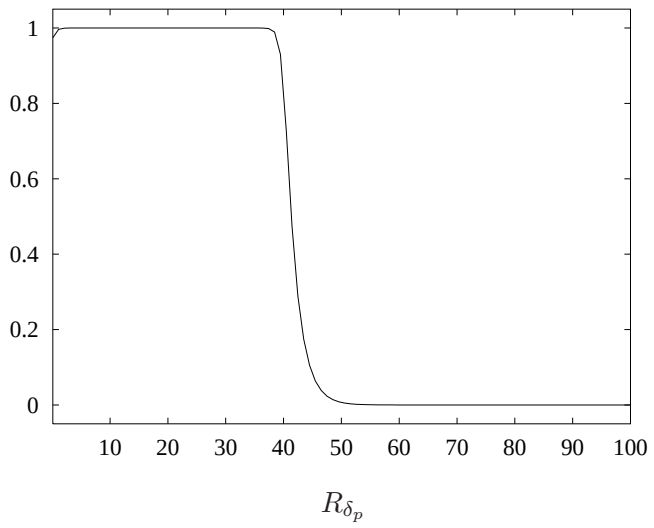

Figure IV.10 : Forme de la fonction d'amortissement de l'écho de paroi

un écoulement de paroi dans une géométrie complexe il est difficile d'accéder au y^+. Cette quantité est donc remplacée dans notre approche par R_{δ_p} qui a un comportement peu différent pour la gamme de y^+ considérés. La fonction $f(R_{\delta_p})$ est représentée sur la figure IV.10. On voit qu'elle a été choisie afin qu'elle vaille l'unité jusqu'à une valeur de R_{δ_p} d'environ 40 ($y^+ \simeq 40$) et qu'elle devienne rapidement nulle lorsque l'on dépasse cette valeur seuil.

Afin de calibrer le modèle nous avons effectué plusieurs calculs avec différents jeux de coefficients $\{C_b^p, \mu_p, C_\nu^s\}$. Le but de notre paramétrage était en particulier d'obtenir une bonne description du champ de vitesse moyenne en terme de y^+ ainsi que des champs turbulents (tenseur de Reynolds). Nous avons effectué ces calculs pour le plus haut nombre de Reynolds simulé par Moser *et al* [49] (DNS), soit $y^+ = 590$ au centre du canal. Ces calculs nous ont conduit à retenir le triplet $\{C_b^p = 0.82, \mu_p = \frac{1}{2}, C_\nu^s = \frac{1}{2}\}$. Afin d'illustrer la sensibilité de notre modèle à la variation de ces paramètres nous présentons les figures IV.11, IV.12 et IV.13 qui représentent les modifications de différents profils moyens lorsque l'on fait respectivement varier les coefficients C_b^p, μ_p et C_ν^s indépendamment. Dans chacune des figures sont représentées les quantités suivantes : la vitesse moyenne, l'énergie cinétique turbulente, le taux de dissipation, l'échelle intégrale, la viscosité turbulente et l'anisotropie de la tension de Reynolds. La viscosité turbulente est calculée par la relation :

$$\nu_t = \left| \frac{\overline{uv}}{\frac{\partial \overline{U}}{\partial y}} \right| \tag{IV.4}$$

Nous constatons sur la figure IV.13 que le terme d'écho de paroi a essentiellement une influence sur le profil de vitesse moyenne. La variation de la constante C_b^p apparaissant dans ce terme a pour conséquence de modifier la constante additive pour la zone logarithmique. Par contre la pente de cette zone (inverse de la constante de Karman) varie peu. Les autres quantités sont, elles aussi, peu affectées par la modulation du

terme d'écho. En fait ce terme n'agit qu'en très proche paroi et se montre crucial pour estimer de façon fine le gradient de la tension de Reynolds $\overline{uv}$ dans cette zone : c'est ce terme qui détermine le bon comportement de la vitesse moyenne en proche paroi, en particulier pour la zone tampon. La fonction d'amortissement (figure IV.10) assure quant à elle le "déclenchement" de la zone logarithmique au bon endroit en terme de y^+. En ce qui concerne μ_p, nous voyons que sa variation affecte tous les profils (fig. IV.11). En particulier ce coefficient joue sur la pente de la loi logarithmique. La valeur retenue par Parpais (1997) [5] pour le modèle scalaire ($\mu_p = \frac{1}{2}$) conduit à des résultats satisfaisants pour notre modèle. C'est donc celle que nous retiendrons.

IV.3 Analyse des résultats pour l'écoulement en canal plan

Une fois les constantes du modèle ajustées, nous proposons maintenant d'analyser de façon plus fine les résultats obtenus avec notre modèle dans le cas du canal plan. La figure IV.14 présente les résultats obtenus avec le modèle spectral dans la configuration simulée par Moser *et al* [49], le nombre de Reynolds construit sur la vitesse de frottement valant $Re_\tau = 590$. Nous présenterons aussi des résultats pour un nombre de Reynolds beaucoup plus élevé (1000 fois).

IV.3.1 Les quantités en un point

Sur la figure IV.14, de gauche à droite et de haut en bas, nous présentons les profils de vitesse moyenne, l'énergie cinétique turbulente, le taux de dissipation homogène, les composantes du tenseur de Reynolds, la viscosité turbulente et la tension de Reynolds $\overline{uv}$ obtenus avec notre modèle comparés aux profils de Moser *et al* [49]. Nous constatons que le profil de vitesse moyenne calculé avec le modèle est très proche de celui de la DNS. Toutes les zones sont bien représentées, que ce soit la zone visqueuse ($y^+ < 10$), la zone tampon ($y^+ < 30 \sim 40$), la zone logarithmique ou la zone externe. L'énergie cinétique turbulente est bien prédite pour une large gamme de y^+ sauf très près de la paroi. Il en est de même pour les composantes diagonales du tenseur de Reynolds. La tension de Reynolds est quant à elle prédite de façon satisfaisante dans toute la section du canal. La viscosité turbulente est relativement bien prédite : contrairement à ce que l'on observe avec les modèles en un point la valeur maximum de cette quantité n'est pas trouvée sur l'axe du canal mais au niveau de la transition entre la zone logarithmique et la zone externe (centrale) du canal, ce qui est en accord avec les constatations expérimentales[65, 66, 67] ou les résultats de DNS.

Il faut noter que notre modèle permet de faire des calculs pour des y^+ très bas ($y^+ \sim 1$). Les résultats obtenus sont relativement fiables, ce qui est un point très positif compte tenu des hypothèses (grossières) que nous avons adoptées pour la modélisation de proche paroi.

IV.3.2 Comportement spectral de la turbulence

Nous nous intéressons maintenant aux spectres de la turbulence issus de notre modèle. Sur la figure IV.15 nous constatons que les spectres d'énergie cinétique turbulente à faible Reynolds (celui de la DNS) sont loin de présenter une zone inertielle en $k^{-\frac{5}{3}}$. Ils sont en fait plus près d'avoir une pente en k^{-1}. Cette observation nous a poussés à

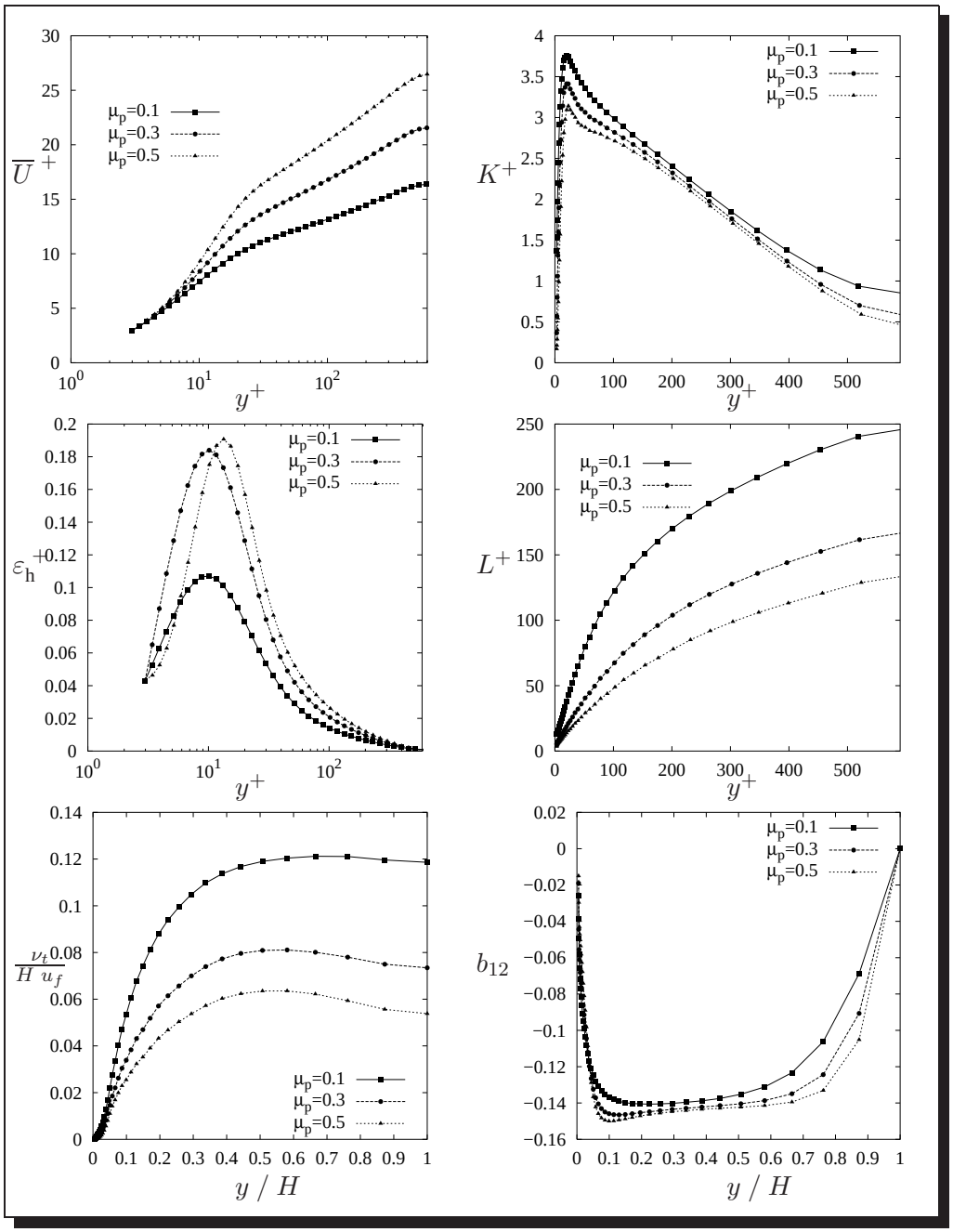

Figure IV.11 : Sensibilité à la variation du coefficient μ_p des profils moyennés dans un canal plan ($\{C_b^p = 0.82, C_\nu^s = \frac{1}{2}\}$)

analyser les spectres unidimensionnels issus de la DNS de Moser *et al* . Ces spectres (au moins pour $\varphi_{11}(k_1)$) présentent une pente proche de celles des spectres prédits par notre modèle, en k^{-1}. Il est à remarquer que ces spectres en k^{-1} ne sont pas rares dans la littérature dans le cas des écoulements cisaillés de paroi. Ils peuvent être attribués

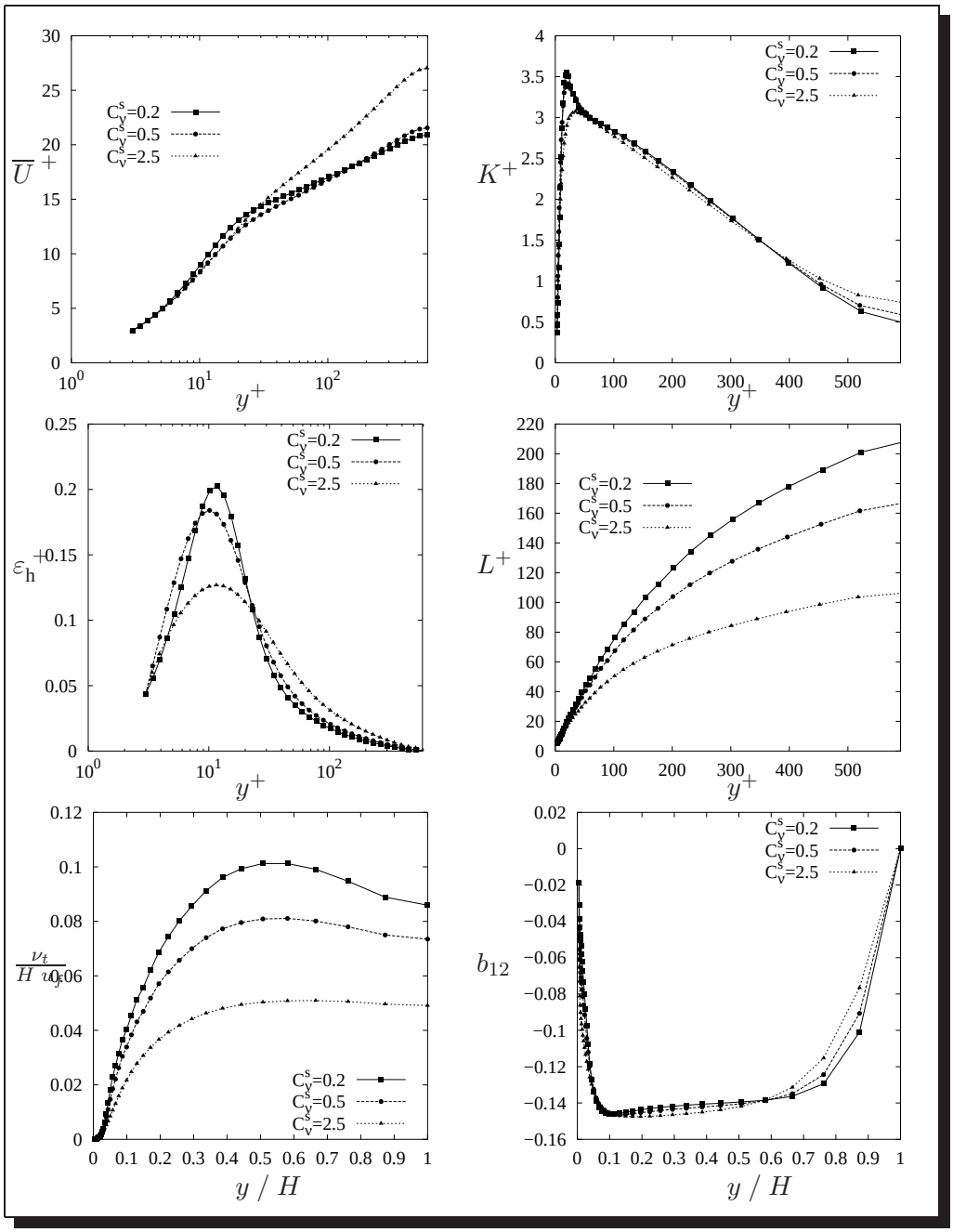

Figure IV.12 : Sensibilité à la variation du coefficient C_ν^s des profils moyens dans un canal plan ($\{C_b^p = 0.82, \mu_p = \frac{1}{2}\}$)

à la présence d'un fort cisaillement (Perry *et al* [68], Marusic et Perry [69], Jiménez *et al* [70], Jiménez [71], Carlotti et Hunt [72], Metzger et Klewicki [73], ...). On peut également penser qu'il s'agit d'un effet de nombre de Reynolds qui est trop bas pour qu'une zone inertielle de Kolmogorov puisse apparaître. On pourra citer ici des

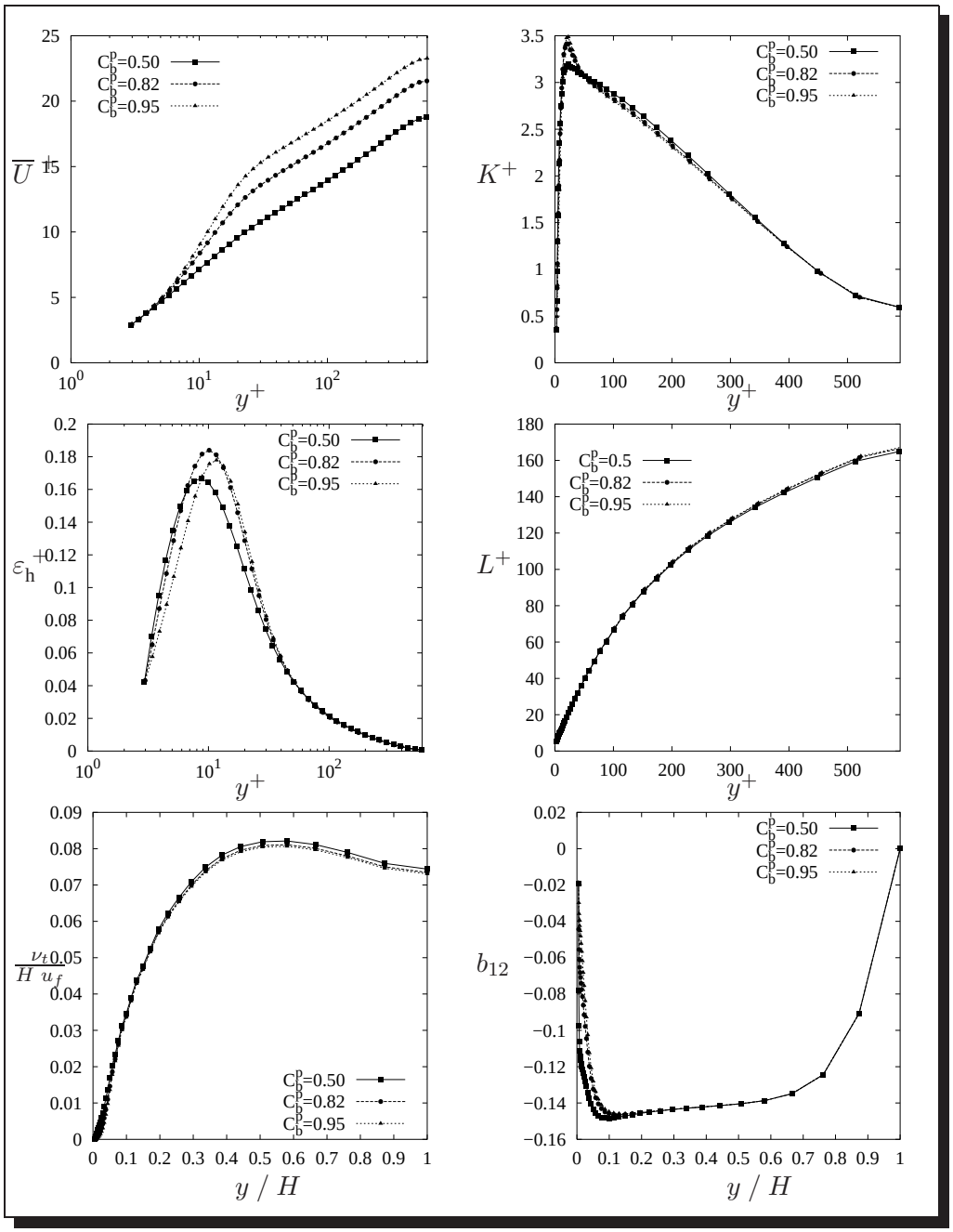

Figure IV.13 : Sensibilité à la variation du coefficient C_b^p des profils moyens dans un canal plan ($\{\mu_p = \frac{1}{2}, C_\nu^s = \frac{1}{2}\}$)

auteurs comme Saffman (1978)[74] qui ont suggéré que la théorie de Kolmogorov ne pouvait être vérifiée que pour des nombres de Reynolds Re_λ (construits sur l'échelle de Taylor) élevés. Saffman (1978)[74] propose un nombre de Reynolds limite :

« *the value of Re_λ probably has to exceed 100 to represent fully developed turbulence in which the dissipation seems to occur on scales smaller than those containing the energy.* »

Récemment, Dimotakis (2000)[75] suggère aussi que pour avoir une turbulence pleinement développée et en équilibre, la condition nécessaire, mais pas suffisante, est $Re_\lambda > 100$ (alternativement $Re_\delta > 2.\,10^4$). Il argumente en montrant par exemple dans différentes expériences de mélange turbulent une transition franche entre une phase présentant une cohérence spatiale des structures et un état de mélange totalement chaotique. Sreenivasan (1984, figure 1)[76] présente quant à lui la variation du taux de dissipation adimensionné par l'échelle intégrale L et la fluctuation de vitesse u', $\alpha_d = \dfrac{\varepsilon\, L}{u'^3}$, en fonction du Re_λ pour un écoulement derrière une grille. Ce rapport ne tend vers une constante que lorsque $Re_\lambda > 100$. Pour un écoulement derrière une grille de section carrée Sreenivasan (1984, figure 1)[76] trouve que α_d tend vers l'unité lorsque $Re_\lambda > 100$. Néanmoins, si α_d tend vers une constante, celle-ci n'est pas universelle, et semble dépendre de l'écoulement considéré. Jiménez *et al* [70] ont effectué des DNS dans un cube périodique pour plusieurs Reynolds et ont mesuré cette grandeur. Ils trouvent $\alpha_d \simeq 0.65$. Nous avons donc calculé cette grandeur pour le cas bas Reynolds ainsi que pour le cas haut Reynolds. α_d est représentée sur la figure IV.16 en fonction du nombre de Reynolds Re_λ. Nous voyons que pour la gamme de nombres de Reynolds Re_λ commune aux deux calculs (haut et bas Re_H) les courbes se superposent et que c'est effectivement aux alentours d'une valeur $Re_\lambda = 100$ que la valeur asymptotique de α_d est atteinte. Cette valeur asymptotique dans le cas du canal est proche de $\frac{1}{2}$ [3].

Sur la figure IV.17, à gauche, nous représentons la distributions de Re_λ en fonction de y/H dans le canal pour deux calculs à des nombres de Reynolds Re_H différents, l'un relativement bas (DNS de Moser *et al*) et l'autre mille fois plus élevé. Re_λ est calculé ici sous sa forme isotrope[4]. La figure de droite représente quant à elle le rapport χ du flux de transfert non-linéaire sur la dissipation :

$$\chi = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_h} = \frac{\displaystyle\int_{k_a}^{\infty} t_{ii}(k)\, dk}{\displaystyle\int_0^{\infty} 2\,\nu\, k^2\, E(k)\, dk} \tag{IV.5}$$

où le nombre d'onde k_a est le point d'annulation du spectre de transfert. Sur la figure IV.18, la quantité χ a été représentée en fonction du nombre de Reynolds Re_λ (pour les deux calculs haut et bas Re_H). Nous voyons (comme pour α_d) que pour la gamme nombres de Reynolds Re_λ commune aux deux calculs (haut et bas Re_H) les courbes se superposent. Le calcul haut Reynolds montre que la quantité χ tend plus lentement vers sa valeur asymptotique que la quantité α_d. La valeur asymptotique trouvée pour χ est dans ce cas l'unité, ce qui traduit le fait qu'à grand Reynolds il existe réellement

[3] Notons que l'échelle intégrale que nous calculons correspondrait en isotrope à L_g et que Sreenivasan [76] utilise L_f. Si on fait une hypothèse d'isotropie où $L_f = 2\,L_g$, alors la valeur asymptotique pour α_d donnée par notre modèle et définie comme Sreenivasan serait 1, en accord avec cet auteur

[4] $Re_\lambda = \sqrt{\dfrac{20}{3}\,\dfrac{K^2}{\nu\,\varepsilon}}$

une zone inertielle dans laquelle le flux ε_f devient effectivement constant et donc égal à la dissipation.

Les spectres du transfert non-linéaire t_{ii} ainsi que les spectres de dissipation homogène $2\,\nu\,k^2\,E(k)$ au centre du canal (pour les mêmes Re_H que précédemment) sont représentés sur la figure IV.19. Sur cette figure nous constatons que, pour le cas haut Reynolds, le spectre de transfert (lobe positif) est très proche du spectre de dissipation. Par contre c'est loin d'être le cas pour le cas bas Reynolds. Nous voyons nettement l'effet de ces différences sur la figure IV.17, où χ est proche de 1 pour le cas haut Reynolds et de l'ordre de 0.6 pour le cas bas Reynolds. La figure IV.17 (à gauche) montre que dans la partie centrale du canal Re_λ est voisin de 60 pour le cas bas Reynolds tandis qu'il est proche de 1500 pour le cas haut Reynolds. Les valeurs se situent de part et d'autre de la valeur limite proposée par Saffman (1978)[74].

Lorsque nous pratiquons l'adimensionnement de Kolmogorov pour les spectres d'énergie cinétique turbulente en chaque point de la section du canal ($y^+ > 50$), nous trouvons (figure IV.20) des spectres qui se superposent. Cet adimensionnement par la fréquence de coupure de Kolmogorov est donc encore adapté. Il semble donc que même si les spectres de la turbulence sont en déséquilibre dans le canal (Re_λ petit) une sorte d'auto-similarité se mette en place dans la section. Cette figure nous permet aussi de voir que pour des grands Reynolds (à droite) une pente en $k^{-\frac{5}{3}}$ est bien mise en évidence pour de grands y^+, alors que pour de petits y^+ ($\sim$ petit Re_λ) une pente proche de k^{-1} semble apparaître. Celle ci est d'autant plus marquée que nous nous rapprochons des zones de fort cisaillement. Cette observation est corroborée en particulier par les travaux de Coantic(1966)[67] qui durant sa thèse s'est intéressé à l'écoulement en conduite cylindrique (écoulement proche du canal bien qu'axisymétrique) et surtout à l'effet des parois sur la turbulence (mesures dans la partie interne de la couche limite). Nous pouvons constater dans cette thèse que pour un écoulement au nombre de Reynolds $Re = 50\,000$ les spectres se comportent en k^{-1} dans toute la section de la conduite. Par contre au nombre de Reynolds $Re = 500\,000$ les spectres présentent clairement une pente en $k^{-\frac{5}{3}}$ au centre du canal et en k^{-1} très proche de la paroi.

Il apparaît donc assez clair que l'exposant du spectre d'énergie cinétique turbulente soit dépendant du nombre de Reynolds turbulent, avec une influence possible du cisaillement moyen.

Synthèse

Dans cette partie portant sur l'analyse des résultats obtenus grâce à notre modèle pour l'écoulement en canal plan nous avons comparé de façon quantitative les grandeurs moyennes à celles de la DNS de Moser *et al* . Les résultats se sont montrés satisfaisants. Nous avons ensuite analysé de façon qualitative nos résultats spectraux. Cette étude a permis de montrer que notre modèle était capable de prédire un écart à la théorie de Kolmogorov. Ceci nous a aussi permis de souligner que des quantités intégrales telles que α_d et χ peuvent donner une information sur le déséquilibre de la turbulence. De plus, il paraît aussi évident que ce déséquilibre puisse être lié à un nombre de Reynolds Re_λ petit : nous l'appellerons "déséquilibre" bas Reynolds.

Nous avons également vu que le changement de pente des spectres turbulents de $-5/3$ vers -1, qui est constaté expérimentalement, semble lié au cisaillement en pré-

sence d'une paroi (effets linéaires), dans une zone où $Re_\lambda < 100$ (ou plus grossièrement $y^+ < 100$). Toutes ces constatations peuvent se montrer relativement utiles afin d'améliorer les modèles en un point existants, auxquels il serait peut-être nécessaire d'ajouter une équation de transport pour une quantité tenant compte de l'histoire du déséquilibre de la turbulence.

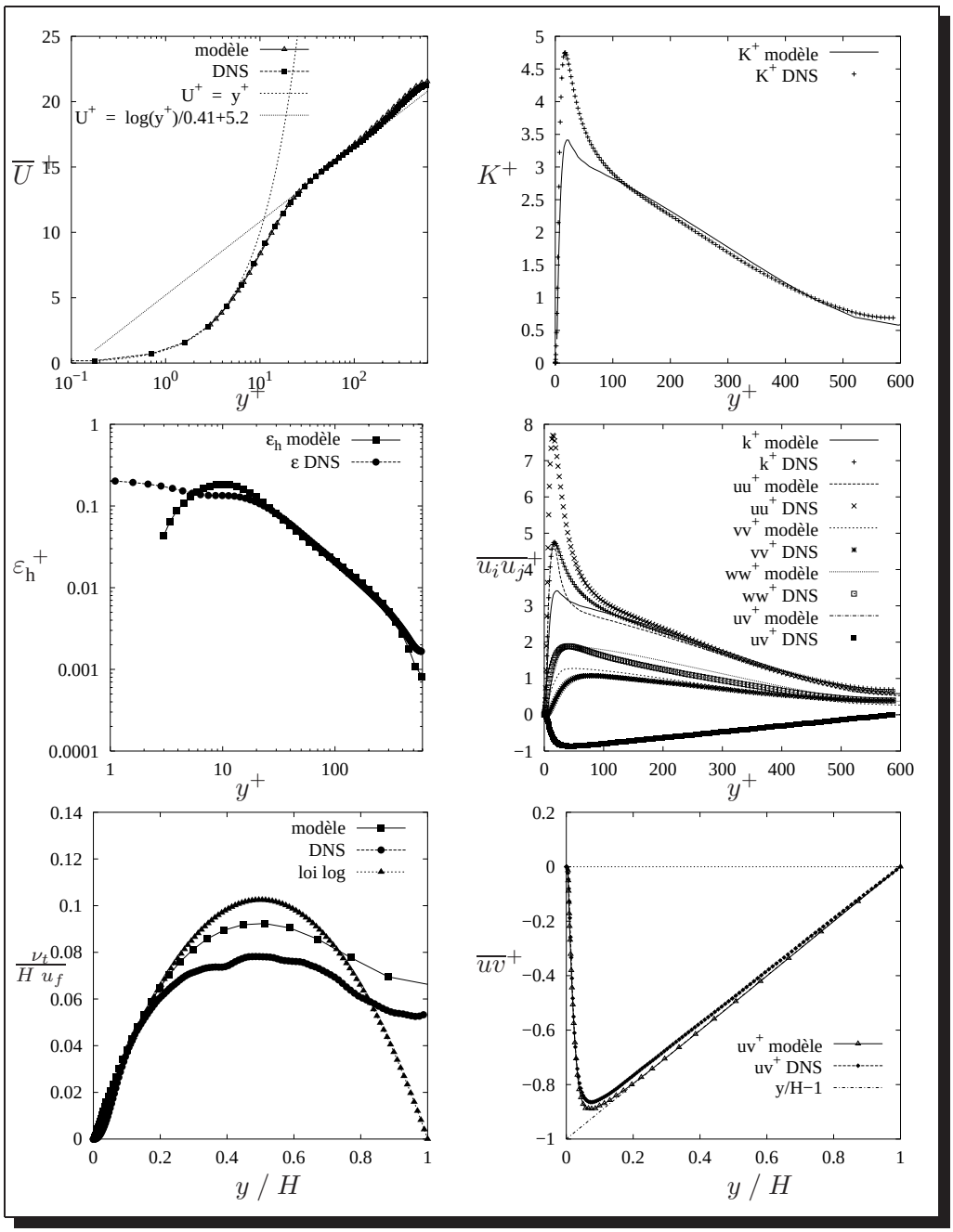

Figure IV.14 : Profils moyens dans un canal plan obtenus avec le modèle comparés à ceux de la DNS de Moser *et al* au nombre de Reynolds $Re_\tau = 590$

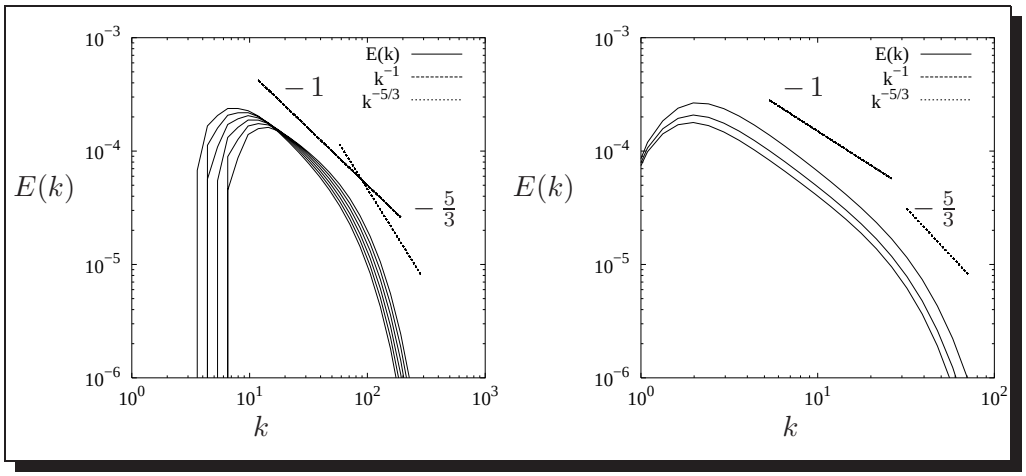

Figure IV.15 : Spectres $E(k)$ en plusieurs points du canal, dans les mêmes conditions que la DNS de Moser *et al* au nombre de Reynolds $Re_\tau = 590$; à gauche $30 < y^+ < 60$ et à droite $400 < y^+ < 600$

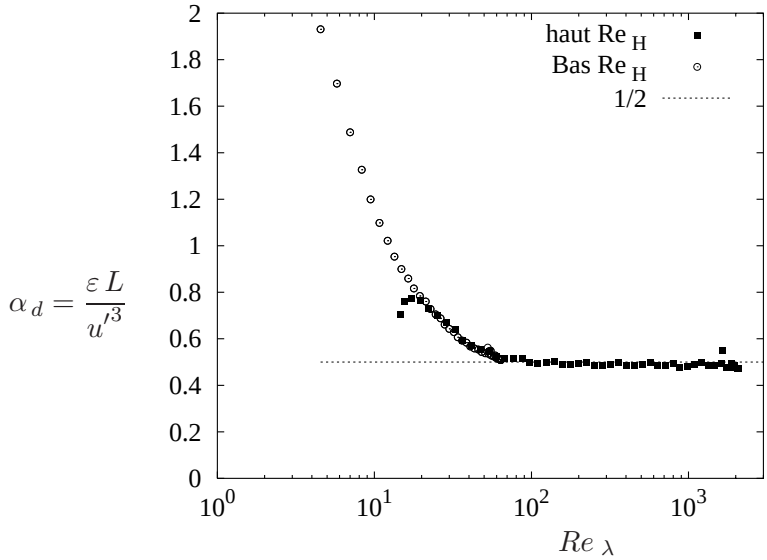

Figure IV.16 : Valeurs prises par α_d en fonction Re_λ et pour deux nombres de Reynolds différents ($Re = 1.26\ 10^4$ et $Re = 1.26\ 10^7$)

IV.4 Ecoulement sur une marche descendante

IV.4.1 Introduction

Notre modèle spectral a été implanté, comme nous l'avons dit au chapitre précédent, dans un code de calcul bidimensionnel par éléments finis développé au LMFA. Nous avons ainsi pu simuler des écoulements turbulents dans des géométries complexes (qui restent néanmoins bidimensionnelles).

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus pour un écoulement présen-

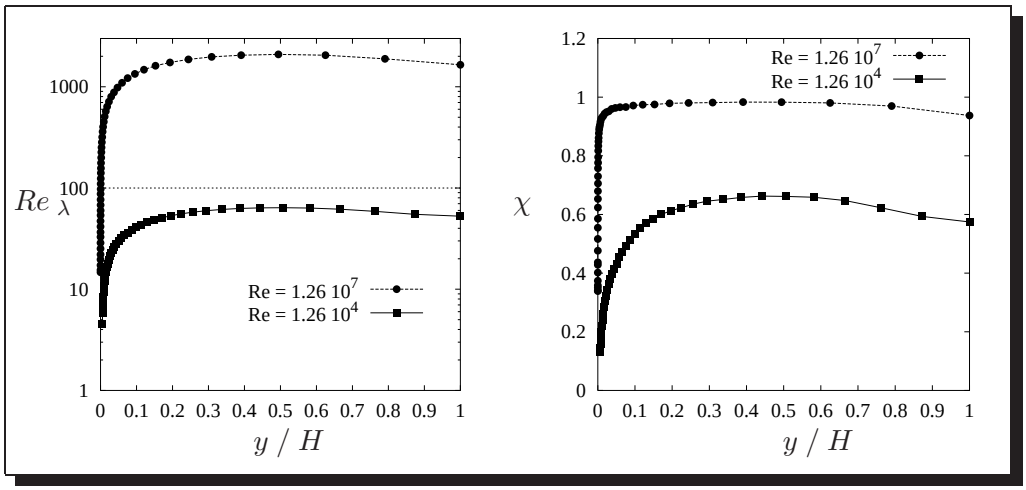

Figure IV.17 : Valeurs prises par Re_λ (à gauche) et "le taux de déséquilibre" $\chi = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon}$ dans le canal pour deux nombres de Reynolds différents($Re = 1.26\ 10^4$ à gauche et $Re = 1.26\ 10^7$ à droite)

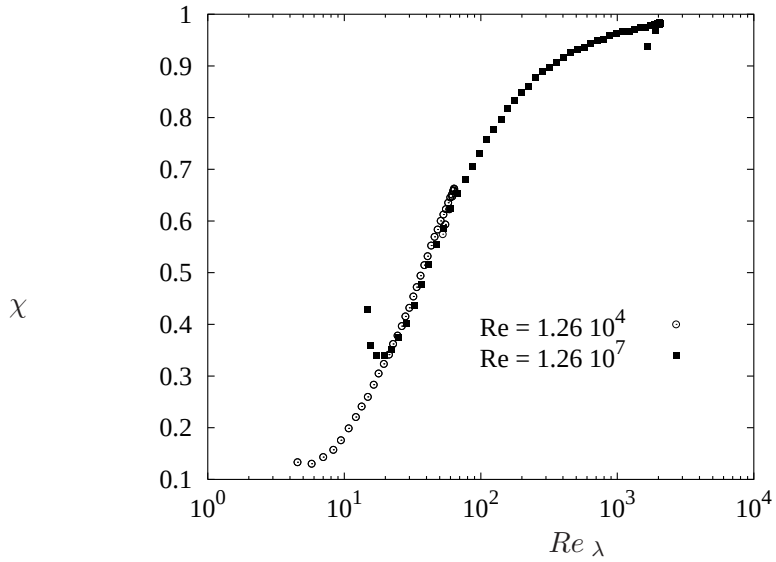

Figure IV.18 : Valeurs prises par χ en fonction Re_λ et pour deux nombres de Reynolds différents ($Re = 1.26\ 10^4$ et $Re = 1.26\ 10^7$)

tant un décollement puis un recollement : l'écoulement sur une marche descendante. Cet écoulement constitue un cas test classique de validation des modèles de turbulence. Nous avons choisi la configuration étudiée expérimentalement par Kim *et al* (1980) [77]. Nos résultats sont comparés aux données expérimentales ainsi qu'aux résultats du modèle $K - \varepsilon$ standard (sans modélisation bas Reynolds mais avec "loi de paroi").

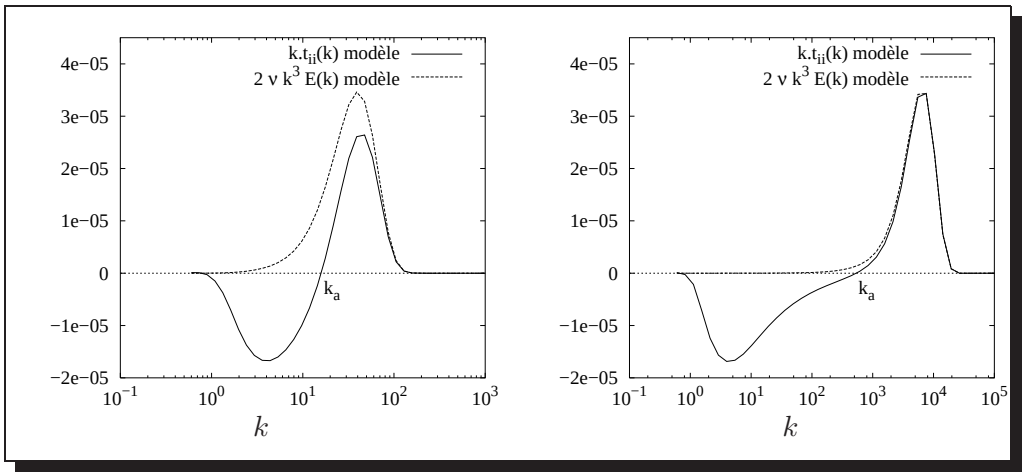

Figure IV.19 : Spectres du transfert non linéaire et de la dissipation (multipliés par k) au centre d'un canal pour deux nombres de Reynolds différents ($Re = 1.26\ 10^4$, $Re_\lambda = 60$ à gauche et $Re = 1.26\ 10^7$, $Re_\lambda = 1500$ à droite)

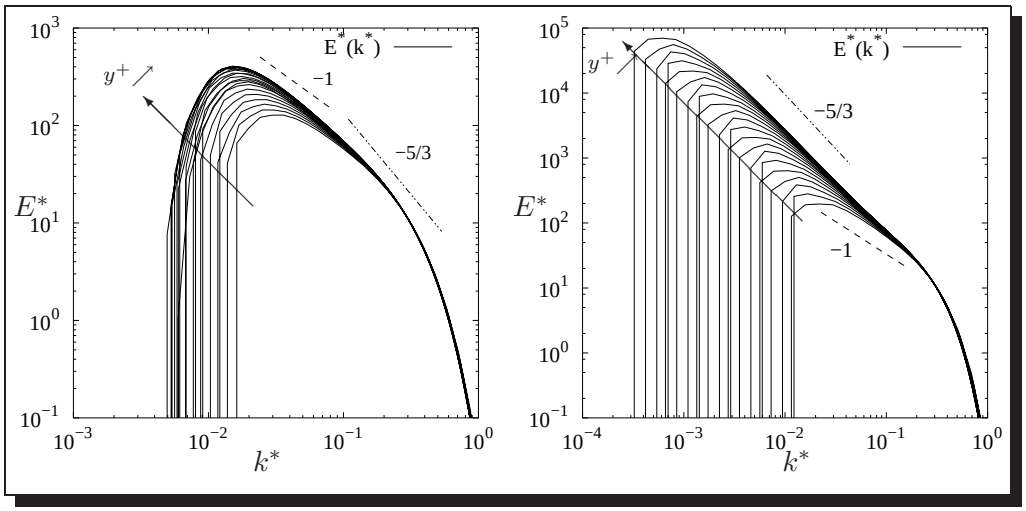

Figure IV.20 : Spectres d'énergie cinétique turbulente adimensionnés E^* en fonction de k^* (adim. de Kolmogorov) dans la section du canal pour des $y^+ > 50$ et pour deux nombres de Reynolds différents($Re = 1.26\ 10^4$ à gauche et $Re = 1.26\ 10^7$ à droite)

IV.4.2 Présentation de l'écoulement

Le schéma IV.21 montre la configuration géométrique de l'expérience conduite par Kim *et al* (1980) [77]. Celle-ci comprend une veine d'entrée de hauteur h_e, un élargissement brusque à angle droit et un canal de sortie de hauteur h_s. La hauteur de la marche au niveau de l'élargissement est $H = h_s - h_e$. Un des paramètres importants pour cette expérience est le rapport d'expansion $r = h_s/h_e$. Il vaut ici $3/2$. La dimension transversale a été choisie pour être grande devant H, afin que l'écoulement soit considéré comme statistiquement bidimensionnel. L'écoulement en entrée est ad-

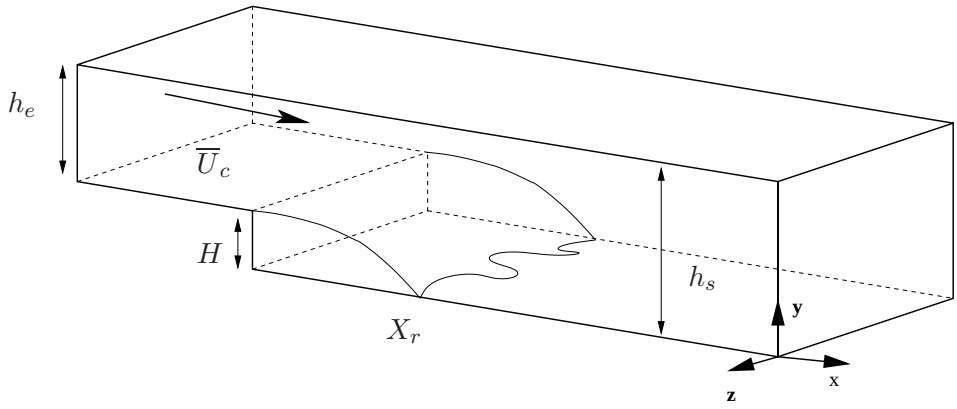

Figure IV.21 : Ecoulement sur une marche descendante

mis proche d'un écoulement en canal établi. Un décollement a lieu au niveau de la marche et l'écoulement recolle à une distance X_r de la marche, sur la paroi du bas. Les travaux de Abbott et Kline (1961) [78] ont montré que si r est supérieur à 1.2, l'écoulement devient instable et que cette distance X_r fluctue autour d'une position moyenne (battement). Le nombre de Reynolds est un autre paramètre important pour cet écoulement. Celui-ci est généralement construit sur la viscosité cinématique ν, la vitesse au centre du canal d'entrée $\overline{U}_c$ et la hauteur de la marche H. Pour l'étude que nous avons conduite le nombre de Reynolds vaut 46200. L'expérience montre alors que $X_r = (7 \pm 1) \times H$.

D'autres études ont été menées récemment afin de donner aux DNS, pour lesquelles le nombre de Reynolds accessible est relativement bas des éléments de comparaison ($Re \simeq 5000$). Nous pourons citer en particulier les travaux expérimentaux de Jovic et Driver [79, 80], études menées en parallèle avec les simulations numériques directes effectuées par Le et Moin (1994) [81].

IV.4.3 Mise en oeuvre numérique

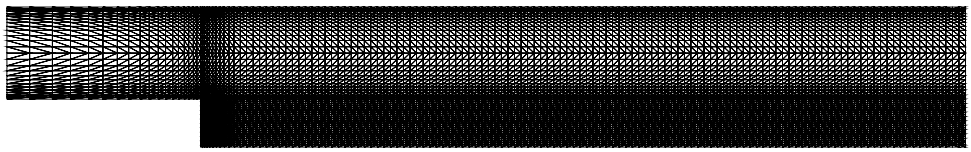

Figure IV.22 : Maillage utilisé pour la simulation d'un écoulement sur une marche descendante (P1-iso-P2)

Nous avons simulé cet écoulement pour le maillage représenté sur la figure IV.22 et comportant 6231 noeuds et 12088 éléments. Le modèle $k-\varepsilon$ standard et notre modèle ont été employés. Le canal d'entrée a une longueur de $4 \times H$ et celui de sortie $16 \times H$. Les conditions aux limites imposées lors de nos simulations sont :

- section d'entrée : nous imposons les profils de vitesses moyennes ainsi que les spectres turbulents, ceux-ci étant issus d'un calcul préliminaire 1-D de canal plan établi et pour le nombre de Reynolds nominal.
- section de sortie : nous imposons un profil de pression moyenne constant. Pour les autres grandeurs une condition de Neuman homogène est imposée de façon faible.
- parois solides : nous utilisons les lois de paroi décrites dans le chapitre III. Le déplacement de paroi choisi représente $0.04 \times H$ afin de rester homogène avec les travaux précédement effectués au laboratoire (Parpais[5] et Debaty[17]).

En ce qui concerne la discrétisation spectrale, elle comporte 40 nombres d'onde et la raison géométrique vaut 1.22. Le plus petit nombre d'onde vaut $0.7/H$ et le plus grand $1633/H$. Cette discrétisation permet de capturer toutes les échelles de turbulence mises en jeu dans cet écoulement.

IV.4.4 Résultats et analyse

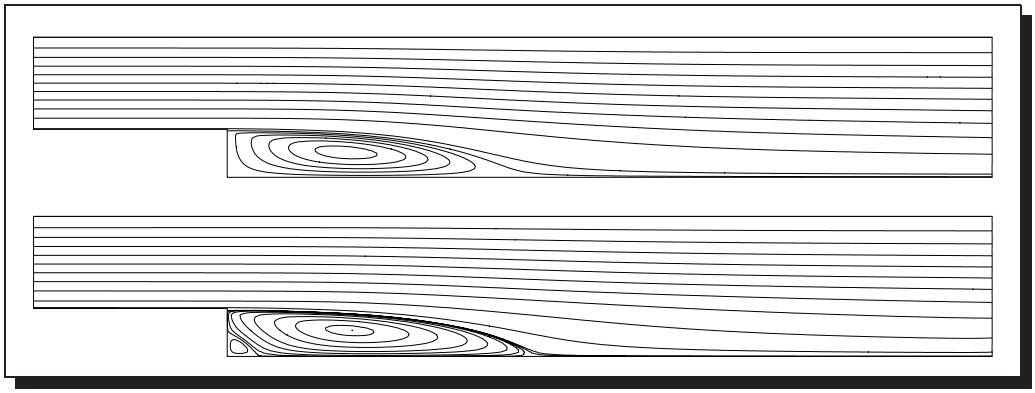

Figure IV.23 : Ecoulement sur une marche descendante : lignes de courant prédites par le modèle $k - \varepsilon$ (en haut) et le modèle spectral (en bas).

Les champs moyens

Sur la figure IV.23 nous avons représenté les lignes de courants prédites par le modèle $K - \varepsilon$ et par le modèle spectral. Le modèle $K - \varepsilon$ prédit une distance de recollement de l'écoulement $X_r = 5.8 \times H$. Notre modèle prédit quant-à-lui $X_r = 6.3 \times H$. Rappelons que l'expérience donne une gamme d'incertitude $X_r = (7 \pm 1) \times H$. Le modèle spectral est donc plus proche de l'expérience. Une des différences essentielles entre nos résultats et ceux donnés par le modèle $K - \varepsilon$ (ainsi que par la version scalaire du modèle spectral, Parpais[5]), est la présence d'une zone de recirculation secondaire dans le coin de la marche, due à l'entrainement du tourbillon principal, que l'on voit très nettement sur la figure IV.23 représentant les lignes de courant. Celle-ci a pour dimension verticale une demi-hauteur de marche et sa longueur est légèrement plus importante. Cette recirculation secondaire ainsi qu'une toute petite recirculation ternaire a plusieurs fois été montrée, en particulier dans les travaux de Jovic et Driver

[79, 80] ainsi que de Le et Moin (1994) [81]. Il semble donc que l'approche spectrale sous forme tensorielle améliore les prédictions des champs de vitesse moyenne.

La figure IV.24 présente des profils de vitesse moyenne longitudinale pour plusieurs sections[5]. L'accord entre l'expérience et le modèle spectral est assez satisfaisant. Les résultats obtenus avec le modèle spectral restent proches de ceux obtenus avec le modèle $K - \varepsilon$. Comparés à l'expérience, les deux modèles partagent les mêmes défauts, avec un léger avantage pour le modèle spectral qui se manifeste en particulier dans les sections immédiatement après le recollement. Plus loin en aval on observe que les deux modèles prévoient une réadaptation trop lente du profil moyen.

Nous noterons tout de même que les différences entre l'expérience et les modèles, surtout pour le premier profil, sont exagérées par le mode d'adimensionnement choisi dans l'expérience. En effet la position y est normalisée par la position y_m du maximum de vitesse moyenne, et la vitesse est normalisée par la sa valeur $\overline{U}_m$ en ce point. L'incertitude sur la prédiction de ce maximum, étant donnée la complexité de cet écoulement, peut donc donner l'impression d'un écart relativement fort. Une représentation plus adaptée aurait été une normalisation, non pas locale, mais globale (vitesse d'entrée et hauteur de la marche).

Le champ turbulent

Sur les figures IV.25 et IV.26 nous avons représenté respectivement les profils des composantes diagonales du tenseur de Reynolds ($\overline{uu}$ et $\overline{vv}$) et ceux de la tension de Reynolds $\overline{uv}$. Les résultats sont donnés pour plusieurs sections[6], et ils sont adimensionnés par la vitesse au centre du canal d'entrée U_0. La composante $\overline{vv}$ est bien prédite par le modèle spectral pour toutes les sections. La composante $\overline{uu}$ est surestimée, surtout juste après la marche. On constate que le modèle $K - \varepsilon$ par le biais d'une hypothèse de premier gradient est incapable de prédire l'anisotropie du tenseur de Reynolds pour les composantes diagonales. Par contre pour la composante $\overline{uv}$ les valeurs prédites par le modèle spectral ainsi que le modèle $K - \varepsilon$ sont proches de l'expérience.

La figure IV.27 présente les isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente trouvées par le modèle $K - \varepsilon$ et par le modèle spectral. Ce dernier prédit une turbulence à la fois plus intense et plus étendue dans le domaine. En accord avec l'analyse de Parpais [5] ou de Lumley (1992) [82], nous pensons que ceci est dû au fait que le modèle spectral, contrairement au modèle $K - \varepsilon$, tient compte du décalage qui existe entre l'instant où la turbulence est générée par le cisaillement et l'instant où elle est dissipée. Lumley (1992) [82] propose même une estimation de ce decalage, de l'ordre du temps de retournement de la turbulence ($\sim K/\varepsilon$). Ce décalage est effectivement mis en évidence lorsque l'on observe les résultats de notre modèle (ou le modèle scalaire de Parpais) sur la dissipation et lorsqu'on les compare au modèle $K - \varepsilon$ (résultats non reproduits ici).

[5] Sections pour lesquelles nous disposons de données expérimentales.
[6] Sections pour lesquelles nous disposons de données expérimentales.

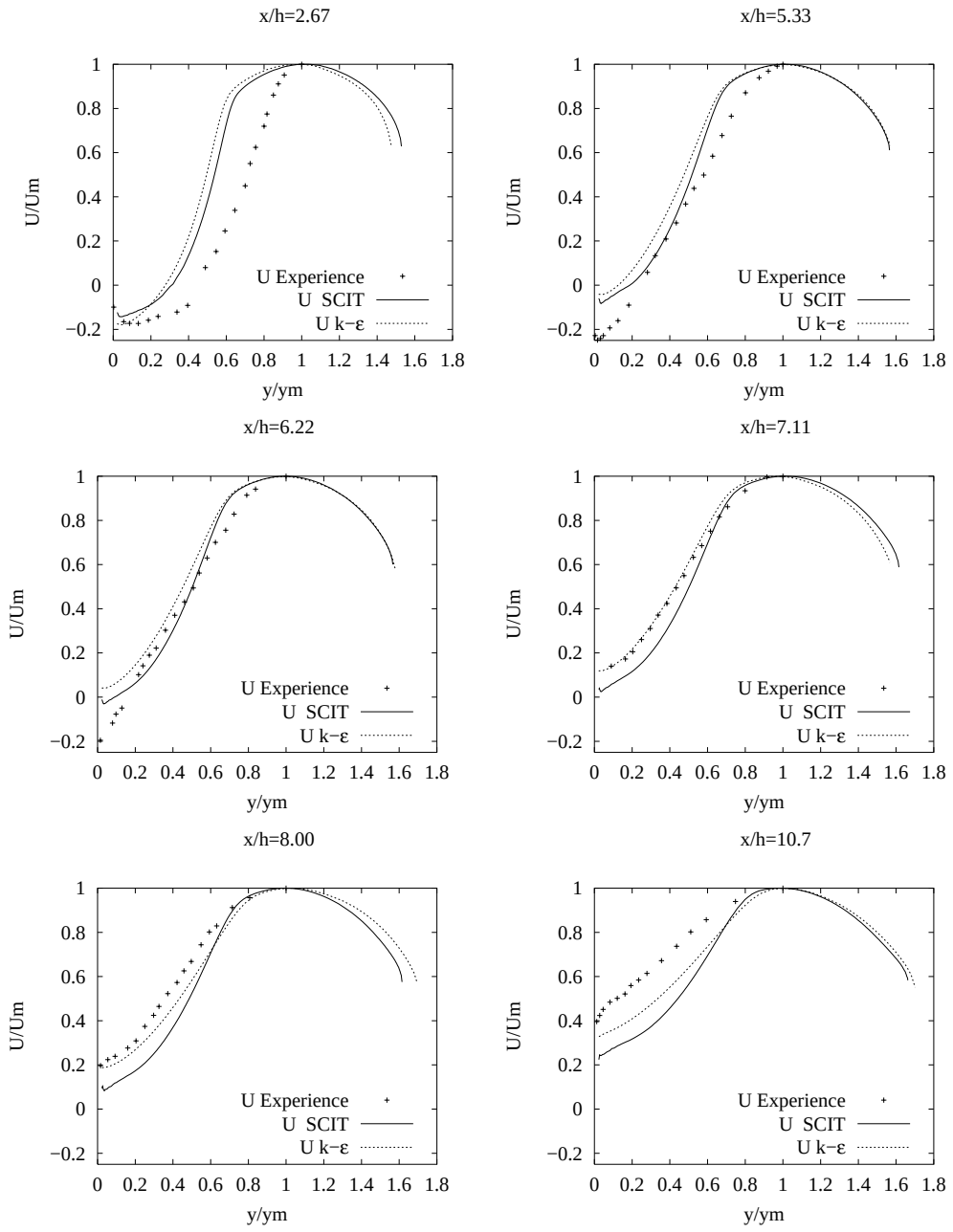

Figure IV.24 : - Vitesse longitudinale - Profils adimensionnés par le point de vitesse maximum - de gauche à droite et de haut en bas : $x/H = 2.67$; $x/H = 5.33$; $x/H = 6.22$; $x/H = 7.11$; $x/H = 8.00$; $x/H = 10.7$.

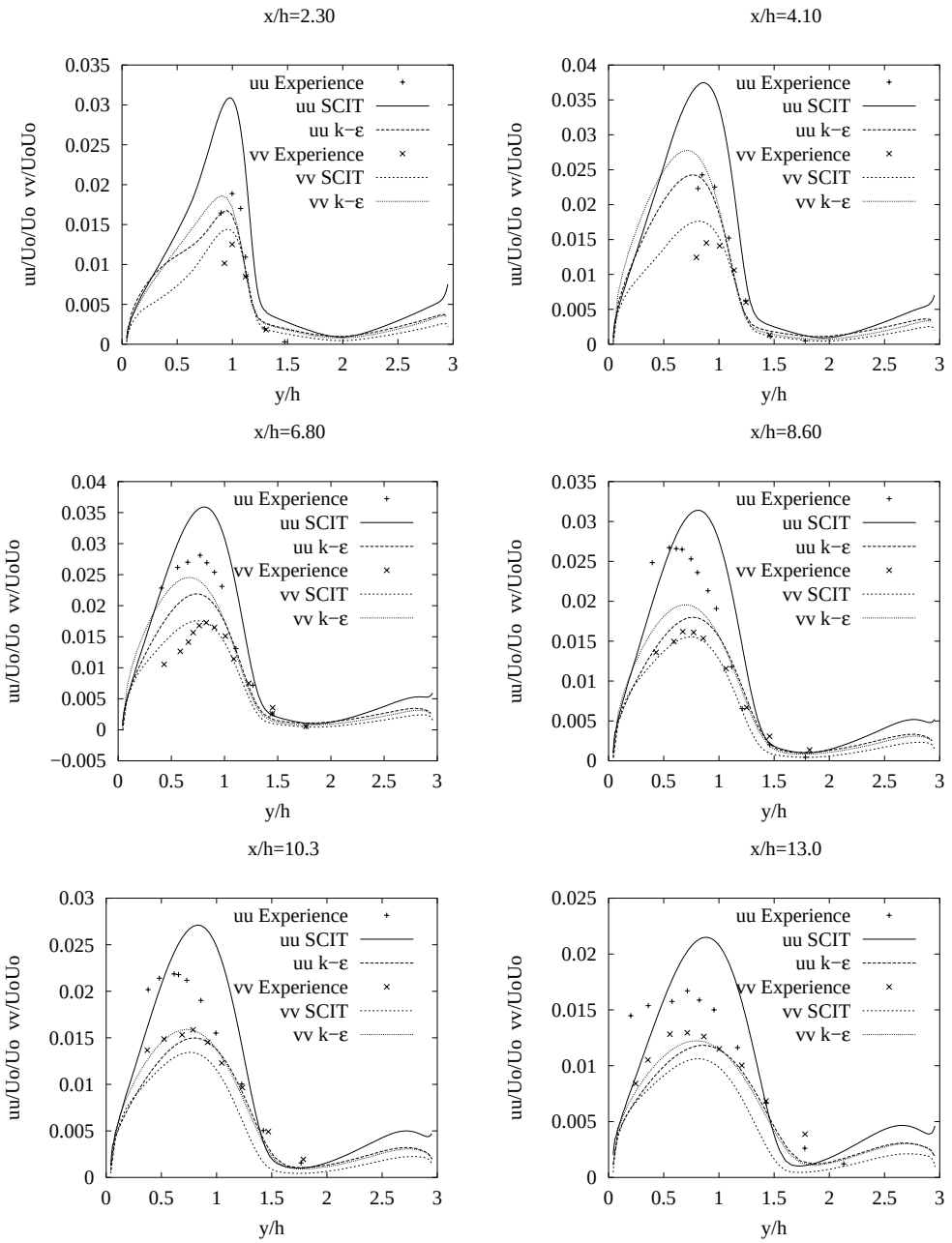

Figure IV.25 : Composantes diagonales du tenseur de Reynolds - Profils adimensionnés par la vitesse maximum dans la section d'entrée - de gauche à droite et de haut en bas : $x/H = 2.30$; $x/H = 4.10$; $x/H = 6.80$; $x/H = 8.60$; $x/H = 10.3$; $x/H = 13.0$.

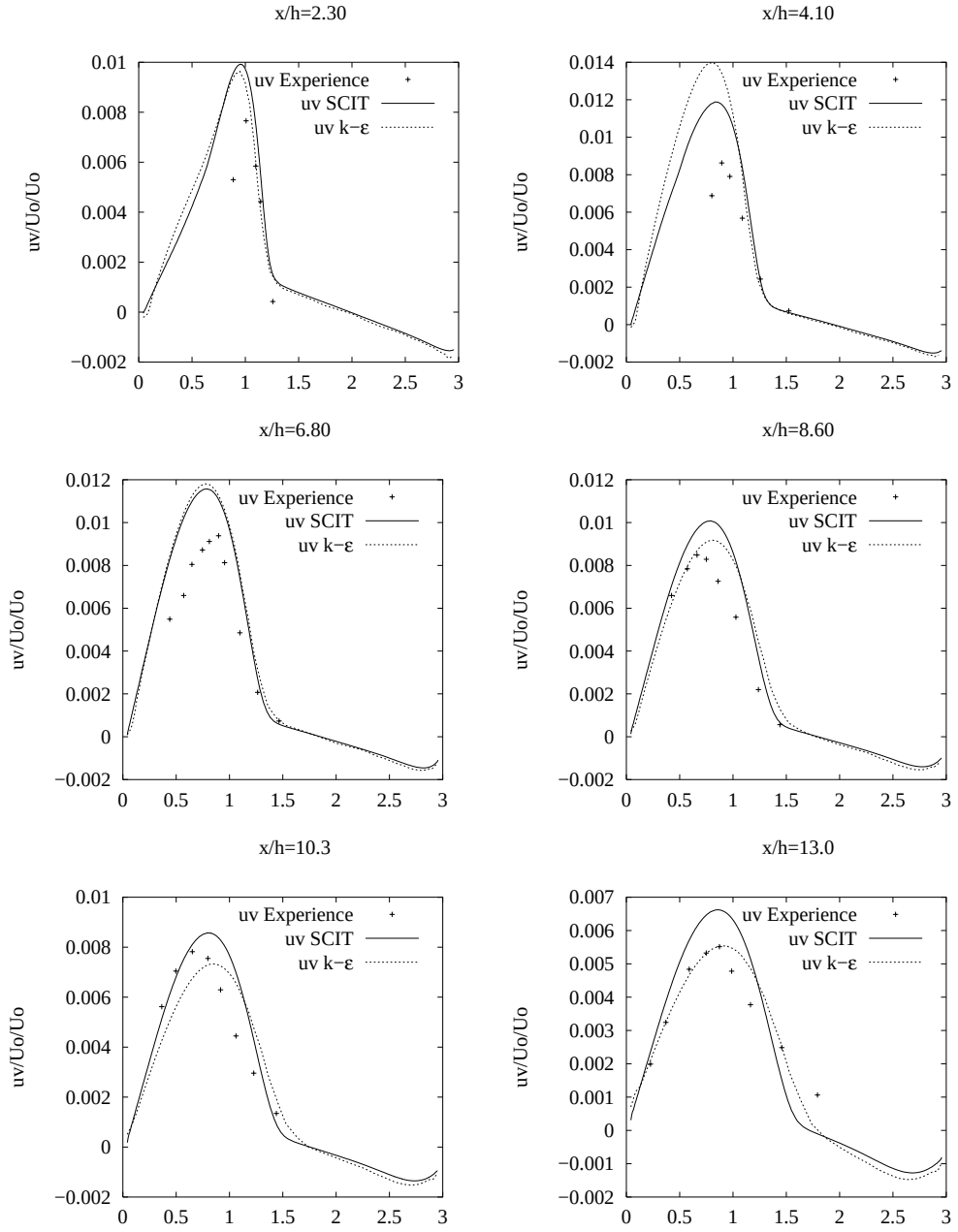

Figure IV.26 : Composante $\overline{u_1 u_2}$ du tenseur de Reynolds - Profils adimensionnés par la vitesse maximum dans la section d'entrée - de gauche à droite et de haut en bas : $x/H = 2.30$; $x/H = 4.10$; $x/H = 6.80$; $x/H = 8.60$; $x/H = 10.3$; $x/H = 13.0$.

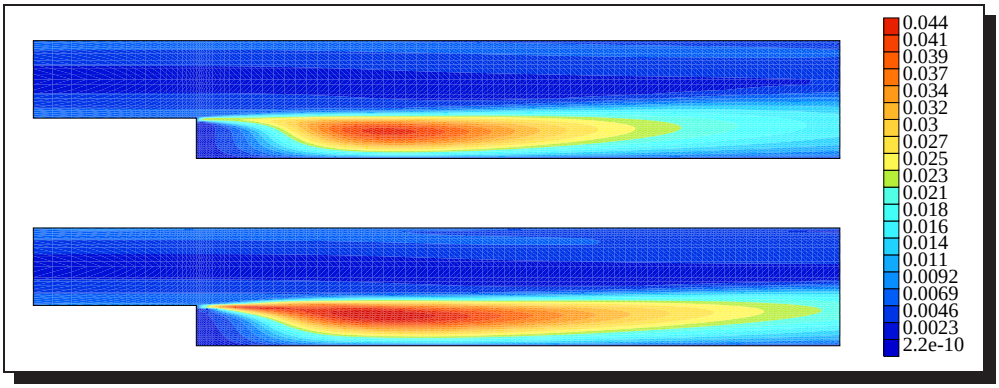

Figure IV.27 : Ecoulement sur une marche descendante : isovaleurs de l'énergie cinétique turbulente prédite par le modèle $K - \varepsilon$ (en haut) et le modèle SCIT (en bas), même échelle (à droite)

Informations spectrales

Nous avons représenté sur les figures IV.28 et IV.31 les spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ prédits par le modèle SCIT en plusieurs points le long de deux lignes de courant, l'une ouverte et l'autre fermée. Les symboles qui désignent les positions le long des lignes de courant sont repris pour le tracé des spectres correspondants. Ces spectres sont adimensionnés (adimensionnement universel de Kolmogorov). Nous constatons sur la figure IV.28 que les spectres évoluent le long de la ligne de courant. Les spectres issus du canal d'entrée comportent une zone en k^{-1} puis peu à peu cette zone tend vers du $k^{-5/3}$. On part donc d'une situation de déséquilibre et l'on va vers une situation d'équilibre spectral. L'enveloppe formée par l'ensemble des spectres présente globalement une zone en $k^{-5/3}$.

Sur la figure IV.31 relative à la seconde ligne de courant nous constatons que tous les spectres sont en équilibre et auto-similaires, la zone inertielle variant peu de la loi en $k^{-5/3}$. Pour mieux comprendre ces différences le long de ces deux lignes de courant, nous avons représenté sur les figures IV.29 et IV.30 les isovaleurs de Re_{λ} et de χ (taux de déséquilibre défini par la relation (IV.5)). Nous constatons alors que la première ligne de courant vient d'une zone où $Re_{\lambda} < 100$ et va vers une zone où $Re_{\lambda} > 100$. On constate également que cette ligne passe d'une zone où χ était largement inférieur à 0.80 pour pénétrer dans une zone où χ devient nettement supérieur. Nous avons encore ici une corrélation entre une valeur de Re_{λ} inférieure à une valeur critique et un déséquilibre spectral ("déséquilibre bas Reynolds").

Conclusion

Nous avons montré dans cette partie que le modèle spectral développé durant cette thèse était capable de prédire correctement à la fois la cinématique et les champs turbulents pour un écoulement complexe. En effet, la zone de recirculation principale ainsi que la position du recollement sont conformes à l'expérience. Une zone de recirculation secondaire est aussi prédite, contrairement à ce qui est trouvé avec le modèle $K - \varepsilon$. Celle-ci a été montrée par l'expérience. Le modèle spectral scalaire (variable

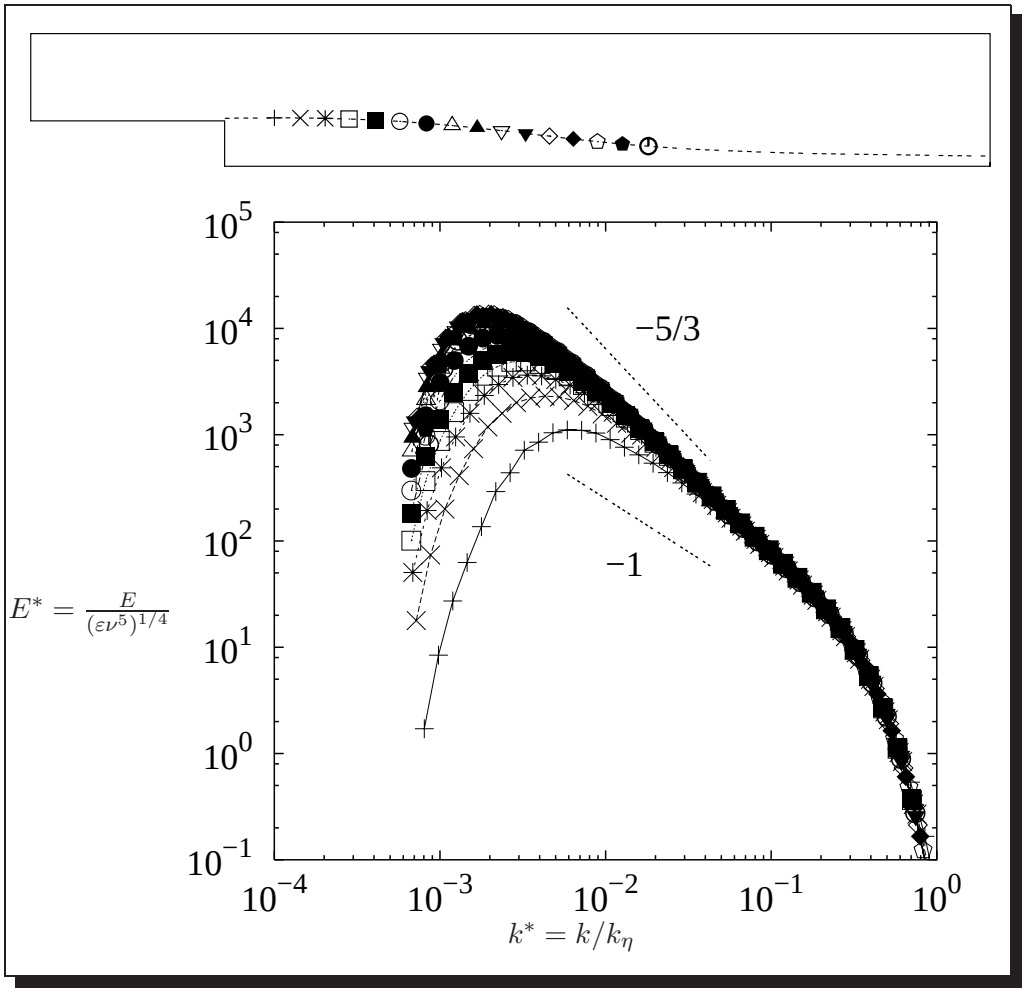

Figure IV.28 : Ecoulement sur une marche descendante : spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ (en bas) le long d'une ligne de courant (adimensionnement universel de Kolmogorov pour les spectres)

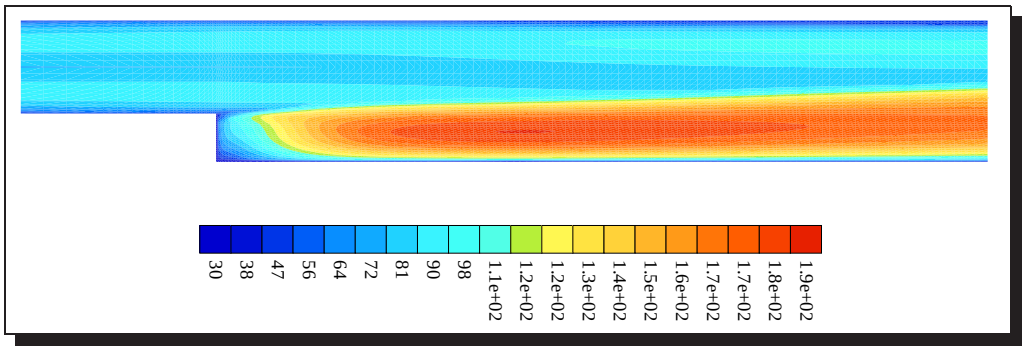

Figure IV.29 : Ecoulement sur une marche descendante : isovaleurs de Re_λ

de base $E(k)$) ne la prédisait pas. Cela veut donc dire qu'une modélisation anisotrope (forme tensorielle du modèle) est nécessaire afin de capter les finesses de l'écoulement

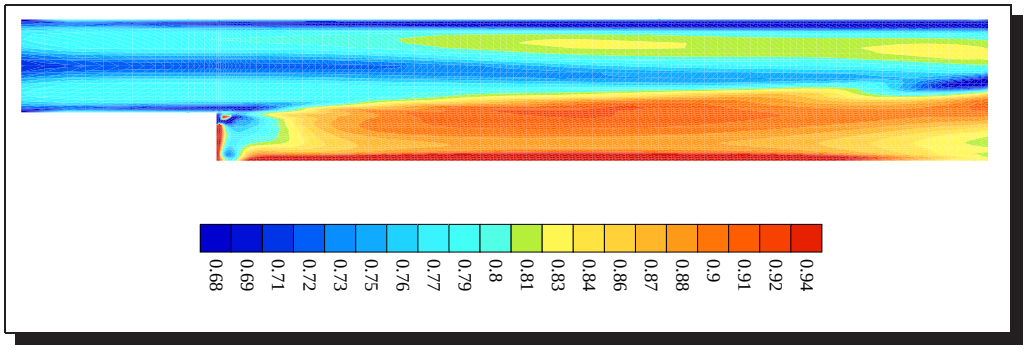

Figure IV.30 : Ecoulement sur une marche descendante : isovaleurs du taux de déséquilibre χ.(éq. (IV.5))

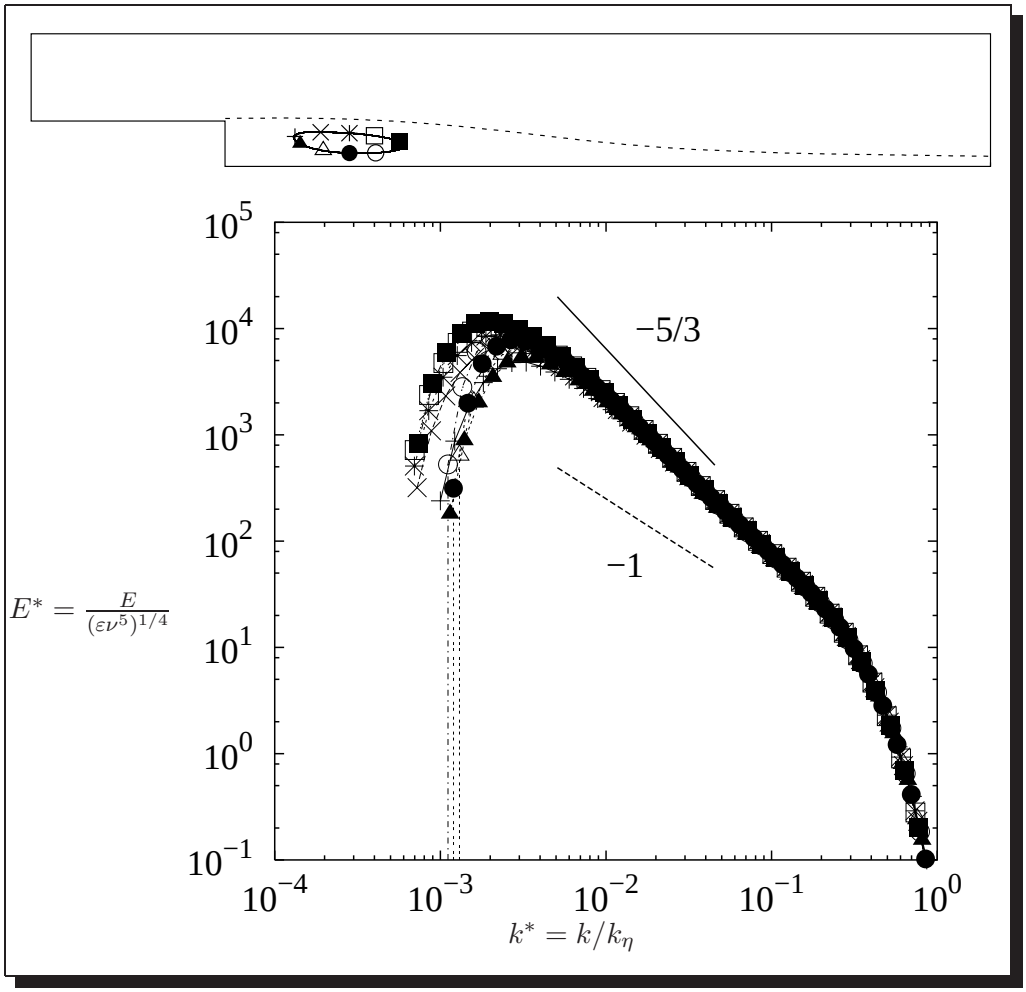

Figure IV.31 : Ecoulement sur une marche descendante : spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ (en bas) le long d'une ligne de courant fermée dans la zone de recirculation principale (adimensionnement universel de Kolmogorov pour les spectres)

moyen.

En ce qui concerne la turbulence, bien que notre modèle soit beaucoup plus sophistiqué que les modèles en un point, sur cet écoulement, ses prédictions ne s'avèrent pas significativement meilleures. Il fournit en contrepartie des informations plus riches. En particulier, le fait d'avoir accès au flux de transfert non-linéaire permet d'identifier les situations de déséquilibre non seulement au niveau des spectres mais aussi permet de représenter ce déséquilibre sous la forme d'isovaleurs. En particulier nous constatons que le déséquilibre observé sur les spectre de la turbulence est lié à la valeur du nombre de Reynolds turbulent dans cet écoulement. Celui-ci est du même ordre de grandeur que le nombre de Reynolds critique dont nous parlions dans le paragraphe IV.3.2. Les zones de l'écoulement où l'on se trouve en dessous de ce Re_λ montrent un déséquilibre "bas Reynolds" de la turbulence.

IV.5 Ecoulement dans un diffuseur asymétrique

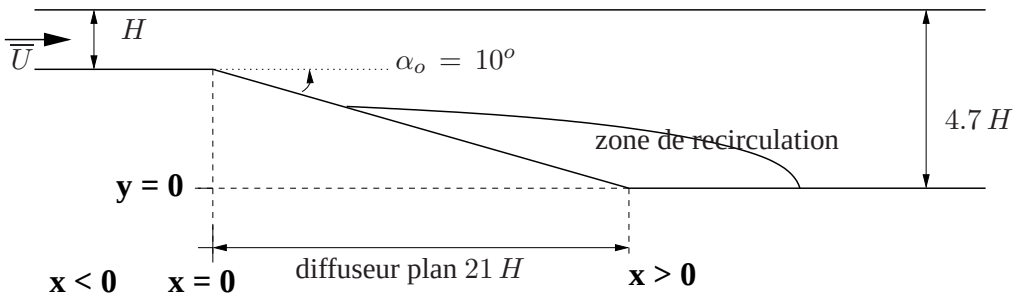

Figure IV.32 : Configuration de l'écoulement dans un diffuseur asymétrique bidimensionnel

IV.5.1 Introduction et présentation de l'écoulement

L'écoulement que nous allons maintenant étudier est un des cas tests du $8^{\text{ème}}$ "workshop" ERCOFTAC/IAHR/COST (juin 1999 [83]) portant sur l'amélioration des modèles de turbulence, et accueilli par l'Université de Technologie d'Helsinki. Il s'agit d'un écoulement dans un diffuseur asymétrique bidimensionnel qui est représenté schématiquement sur la figure IV.32. L'intérêt de cet écoulement est de présenter une séparation et un recollement dont les positions ne sont pas directement liées à un changement brusque de géométrie (comme dans le cas de la marche). La zone de recirculation apparaît sous l'effet d'un gradient de pression adverse. De plus nous diposons pour ce cas test ERCOFTAC d'une base de données expérimentales bien documentée. En particulier les conditions d'entrée sont bien définies. L'expérience a été menée par Buice et Eaton (1997) [84]. Le but pour les différents participants au Workshop était de comparer les prédictions de différents modèles de turbulence et de juger s'ils étaient capables d'estimer de façon fiable le point de décollement ainsi que le point de recollement de l'écoulement.

La figure IV.32 présente les différents paramètres de la géométrie du diffuseur. Le canal d'entrée a pour hauteur H. Le canal de sortie a pour hauteur $4.7\,H$. Entre ces

deux zones se trouve le diffuseur d'une longueur $21\,H$ avec un angle d'ouverture $\alpha_o = 10\,°$. La jonction entre le plan incliné et les autres plans se fait de façon régulière avec un arc de cercle. L'origine de référence sera la fin du canal d'entrée pour l'abscisse[7] et le niveau du plan du bas du canal de sortie pour l'ordonnée.

Le nombre de Reynolds bâti sur la vitesse moyenne au centre et la hauteur du canal d'entrée vaut $20\,000$. L'expérience montre que pour cette valeur du nombre de Reynolds l'écoulement est pleinement turbulent dans la première section de mesure ($x = -5.87\,H$) qui correspond approximativement à la section d'entrée de notre domaine de calcul.

IV.5.2 Mise en oeuvre numérique

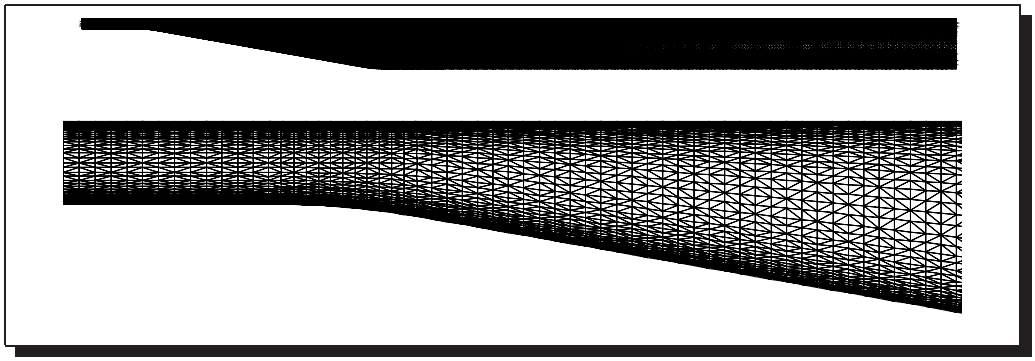

Figure IV.33 : Maillage (P1-iso-P2) utilisé pour la simulation d'un écoulement dans un diffuseur asymétrique (en haut ensemble du domaine de calcul, en bas zoom sur le début du diffuseur)

Nous avons simulé cet écoulement pour le maillage IV.33 comportant 15621 noeuds et 30400 éléments. Le canal d'entrée a une longueur de $6\,H$, celui de sortie $54\,H$ et le diffuseur $21\,H$.
Les conditions aux limites imposées lors de nos simulations sont :

- section d'entrée : nous imposons les profils de vitesse moyenne ainsi que les spectres turbulents, ceux-ci étants issus d'un calcul préliminaire 1-D de canal plan établi et pour le nombre de Reynolds nominal.
- section de sortie : nous imposons un profil de pression moyenne constant. Pour les autres grandeurs une condition de Neuman homogène est imposée de façon faible.
- parois solides : nous utilisons les lois de paroi décrites dans le chapitre III. Le déplacement de paroi choisi représente $0.02 \times H$, ce qui correspond à y^+ toujours inférieur à 20.

En ce qui concerne la discrétisation spectrale, elle comporte 35 nombres d'onde et la raison géométrique vaut 1.26. Le plus petit nombre d'onde vaut $0.2/H$ et le plus grand $1633/H$. Cette discrétisation permet de capturer toutes les échelles de turbulence mises en jeu dans cet écoulement.

[7] à l'endroit où commence l'arc de cercle

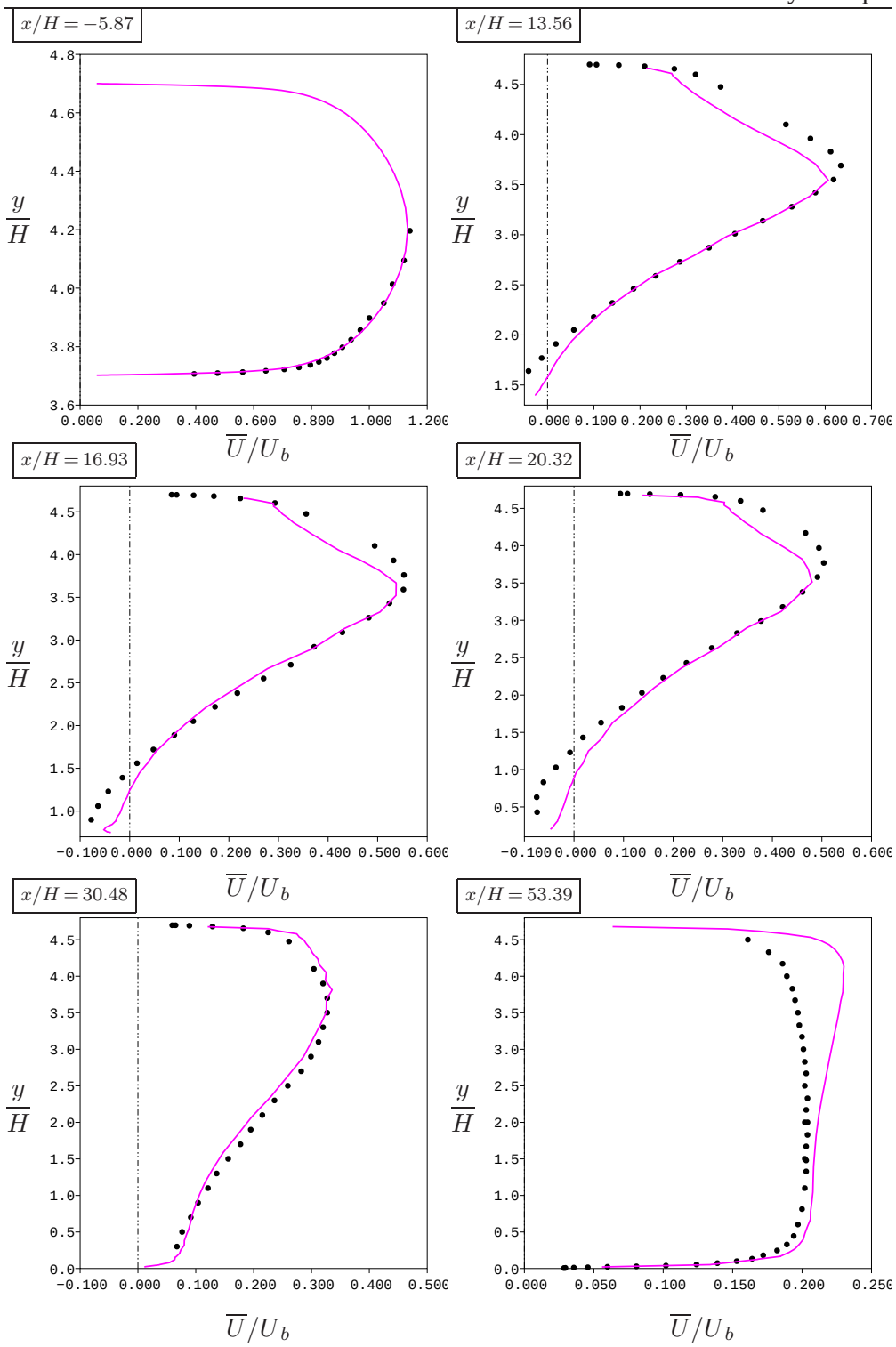

Figure IV.34 : Cas du diffuseur : vitesse moyenne calculée par le modèle spectral comparée à l'expérience (•) dans plusieurs sections

IV.5.3 Résultats et analyse

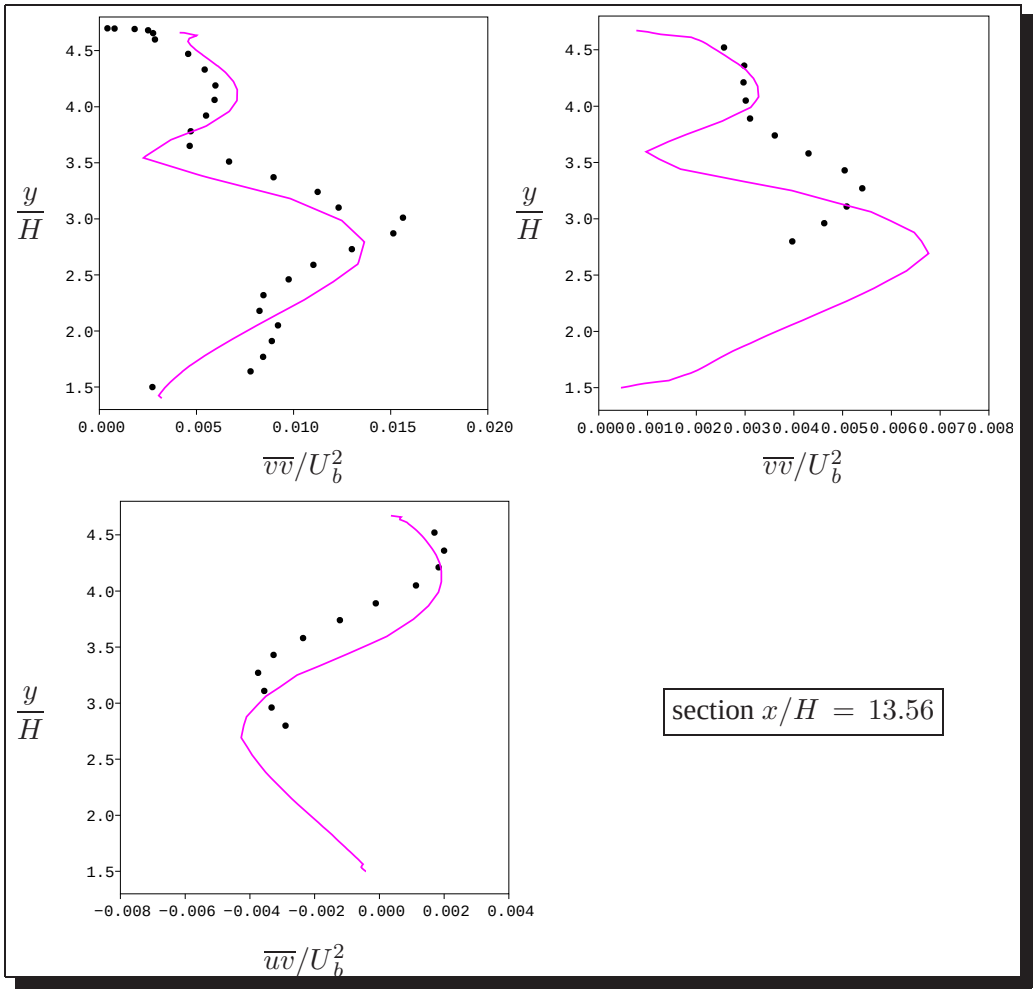

Figure IV.35 : Cas du diffuseur : composantes du tenseur de Reynolds calculées par le modèle spectral comparées à l'expérience (•) dans la section $x/H = 13.56$

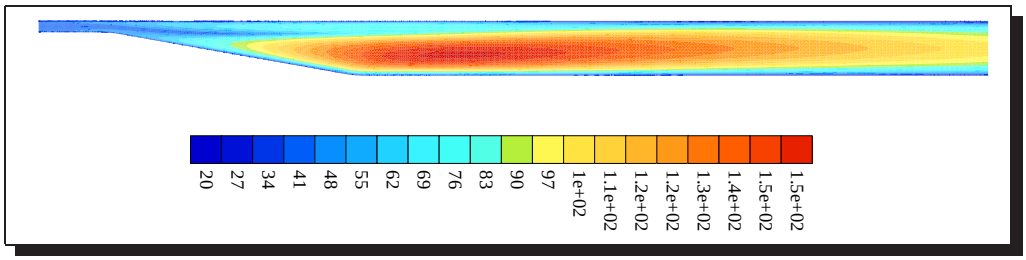

Figure IV.36 : Ecoulement dans un diffuseur : isovaleurs de Re_λ

Le modèle SCIT prédit correctement le point de décollement ainsi que le recollement. En effet dans l'expérience l'écoulement décolle à $x = 7.5\,H$ et recolle à $x = 30.5\,H$. Le modèle prédit $x = 8.5\,H$ et $x = 28.5\,H$. La zone de recirculation associée est nettement visible sur la figure IV.38 représentant les lignes de courant.

Les profils de vitesse moyenne dans différentes sections du diffuseur sont repré-

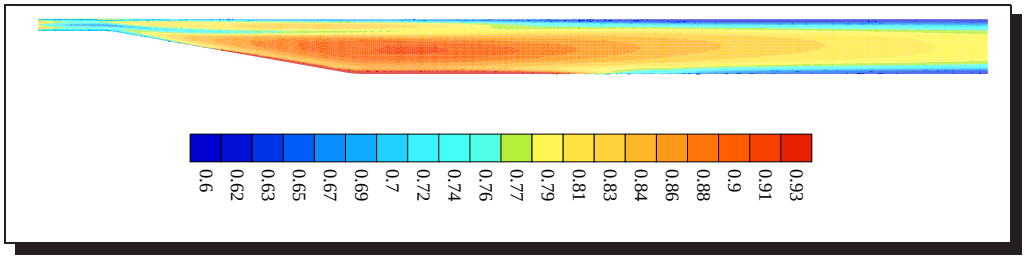

Figure IV.37 : Ecoulement dans un diffuseur : isovaleurs du taux de déséquilibre χ.

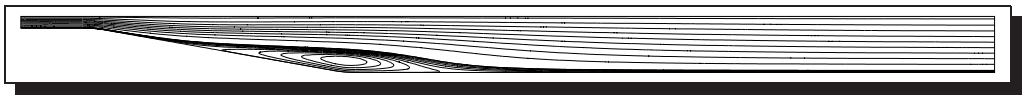

Figure IV.38 : Lignes de courant prédites par le modèle spectral dans le cas de l'écoulement dans un diffuseur asymétrique.

sentés sur la figure IV.34. Nous pouvons souligner qu'au moins jusqu'à la position $x = 30.48\,H$ la vitesse moyenne longitudinale est très proche de l'expérience [84]. L'intensité de l'écoulement de retour est un peu sous estimée. Près du point recollement (IV.34, $x = 30.48\,H$) le modèle semble encore correct. En ce qui concerne la réadaptation de l'écoulement, la dernière courbe de la figure IV.34 correspondant à la position $x = 53.39\,H$ montre que le modèle spectral (comme l'ensemble des modèles en un point, voir l'annexe D) est incapable de prédire exactement cette phase de l'écoulement. La réadaptation de l'écoulement est un peu lente (par rapport à l'expérience), comme pour le cas de la marche. Il s'agit d'un défaut commun à l'ensemble des modèles. Soulignons tout de même que dans l'expérience il semble y avoir un problème de conservation du débit, qui pourrait être attribué à un comportement 3-D de l'écoulement. En ce qui concerne la turbulence, toutes les composantes du tenseur de Reynolds sont bien prédites. Nous avons tracé sur la figure IV.35 les profils des composantes du tenseur de Reynolds pour la section $x = 13.56\,H$, où l'écoulement est décollé. Les niveaux de turbulence sont correctement prédits.

Notons que ce cas est également intéressant puisqu'étant l'objet du "workshop" ERCOFTAC/IAHR/COST il offre une possibilité de comparaison avec les résultats obtenus avec un grand nombre de modèles en un point. Ces comparaisons font l'objet de l'annexe D, mais nous voudrions ici reprendre quelques points essentiels qui se sont dégagés. Sur les figures D.1 à D.8 nous avons représenté des profils extraits de nos calculs et comparés aux résultats obtenus par Kaltenbach *et al* (1999) [85] pour une LES (Simulation des grandes échelles) ainsi que ceux proposés par l'équipe de M. Leschziner de l'Université de Manchester pour deux modèles en un point au second ordre. Nous avons résumé dans le tableau D.1 la liste des contributeurs [8] ainsi que les codes associés qui ont servi à obtenir les résultats présentés sur les figures. Il est important de noter le très grand nombre de modèles en un point différents (24 modèles en un point) ayant été utilisés sur ce cas. Lorsque l'on tente de comparer notre modèle aux modèles en un point se pose le problème de savoir à quel modèle on le compare. Sans rentrer dans les détails des comparaisons fournies dans l'annexe, nous voudrions

[8] ceux dont les résultats étaient les plus proches de l'expérience

ici souligner que, dans une section donnée de l'écoulement si nous comparons notre modèle au modèle en un point donnant les meilleurs résultats, les différences sont faibles. En revanche, si nous le comparons à l'un des plus mauvais, les différences peuvent être très grandes comme illustré par la figure D.3.

IV.5.4 Conclusion

Nous avons vu pour deux cas d'écoulements internes (la marche, section IV.4, et le diffuseur) que notre modèle spectral était capable de prédire très correctement les champs aérodynamiques. De plus, il semble que la description spectrale anisotrope soit capable de capturer de façon plus fine des comportements complexes de l'écoulement, en tout cas plus précise que des modèles comme le $K - \varepsilon$. Par exemple nous avons pu prédire pour la géométrie de la marche (section IV.4) l'existence d'un tourbillon de coin d'une dimension non négligeable (demi-hauteur de la marche) que les modèles en un point classiques prédisent mal. Ensuite pour la géométrie du diffuseur, un gradient de pression adverse créé par un élargissement du diffuseur de $10\,^\circ$ provoque un décollement de l'écoulement puis une zone de recirculation. Le modèle $K - \varepsilon$ haut Reynolds avec loi de parois ne prédit pas ce décollement, contrairement au modèle spectral qui prédit de façon correcte le point de décollement puis de recollement de l'écoulement.

En ce qui concerne la turbulence, le modèle spectral met en évidence des informations riches sur ces écoulements. En particulier nous avons pu souligner des effets de déséquilibre "bas Reynolds" de la turbulence, où les spectres turbulents sont parfois loin de la théorie de Kolmogorov.

Nous allons maintenant nous intéresser à la prédiction de l'écoulement autour d'un profil d'aile Aérospatiale A, pour une incidence particulière de $13\,^\circ$. Nous nous intéresserons non seulement à ce qui se passe autour de la voilure (champ proche), mais aussi au comportement de la turbulence dans le sillage.

IV.6 Ecoulement autour d'une voilure Aérospatiale F2A

IV.6.1 Présentation et enjeux

Le décrochage aérodynamique fait partie des questions actuelles de sécurité. En effet, lors de atterrissage et du décollage, un avion se trouve exposé à ce danger car il se trouve en incidence élevée, très proche du sol et à basse vitesse (temps de réaction autorisé très réduit). Les phénomènes mis en jeu sont complexes (détachements tourbillonnaires...) et les modèles statistiques classiques de turbulence montrent dans ce genre de situations leurs limites, alors qu'on a besoin d'une information précise sur le comportement aérodynamique d'un avion. La voilure, surtout, demande une attention particulière car c'est elle qui offre de la portance à l'aéronef.

Sur proposition de *Dassault Industies*, nous avons eu l'opportunité d'aborder des problèmes liés au domaine de l'aéronautique. Nous en avons profité pour étudier le comportement de notre modèle en aérodynamique externe.

Nous nous proposons ici de présenter les résultats obtenus avec notre modèle spectral pour la prédiction d'un écoulement autour d'un profil d'aile de type Aérospatiale F2A dans un écoulement subsonique à Mach 0.15 pour un nombre de Reynolds

construit sur la corde du profil, la viscosité du fluide et la vitesse incidente, qui atteint ici $Re = 2.1\ 10^6$. Nous avons étudié l'écoulement pour une incidence particulière $\alpha_i = 13\,^\circ$. Cette configuration nous avait été proposée par une équipe de *Dassault Industies* car elle est considérée comme difficile en raison de l'existence d'un décollement du côté du bord de fuite du profil.

IV.6.2 Description de l'écoulement

La physique de l'écoulement autour d'une voilure en incidence est très difficile à reproduire avec les modèles statistiques classiques. En effet, l'écoulement arrivant sur l'aile est souvent faiblement turbulent et on assiste à une transition rapide le long de l'aile. On peut également observer au niveau du bord de fuite de la voilure une recirculation et un détachement tourbillonnaire. La structure du sillage est alors difficile à appréhender. Ces difficultés mettent souvent en défaut les modèles.

L'incidence choisie ici est une des plus critiques car l'écoulement comporte toutes les difficultés mentionnées ci-dessus : transition, recirculation et sillage. Se rajoute à cela, au niveau du bord d'attaque, une complication supplémentaire : avant de transitionner, l'écoulement forme un bulbe de décollement laminaire.

IV.6.3 Mise en oeuvre numérique

Nous avons simulé cet écoulement pour le maillage représenté sur la figure IV.39, comportant $10\,647$ noeuds et $20\,916$ éléments. Notre modèle a été utilisé et nous avons également effectué des calculs avec le modèle $K - \varepsilon$ standard à des fins de comparaison. Voici la description des conditions aux limites imposées lors de nos simulations :

- section d'entrée : nous imposons sur le demi cercle extérieur amont les vitesses moyennes ainsi que les spectres turbulents (valeurs constantes sur ce demi-cercle. Les spectres sont construits à partir de la donnée de K et de ε, ε étant calculé en posant de façon arbitraire que l'échelle intégrale incidente est de l'ordre de la dimension du profil d'aile, supposition à laquelle nous ajoutons une hypothèse d'isotropie. Le niveau d'énergie cinétique turbulente est quant à lui choisi très bas et l'on adopte $K = (0.02\,U_e)^2$ (U_e : vitesse incidente à "l'infini").
- section de sortie : nous imposons les valeurs de la pression moyenne sur une partie seulement du demi cercle aval afin de ne pas trop perturber l'écoulement sortant du domaine. Ceci a pour conséquence de déstabiliser le calcul, étant donné qu'une grande partie de la condition aux limites pour la pression est en Neuman : le pas de temps d'intégration numérique, relativement petit, est pénalisant. Pour les autres grandeurs une condition de Neuman homogène est imposée de façon faible.
- parois solides : nous utilisons les lois de paroi décrites au chapitre III. Le déplacement de paroi choisi représente $5.0\,10^{-4}\ \times\ C$ (où C est la longueur de la corde).

En ce qui concerne la discrétisation spectrale, elle comporte 40 nombres d'onde et la raison géométrique vaut 1.35. Le plus petit nombre d'onde vaut $1.5/C$ et le plus grand $181\,597/C$. Cette discrétisation permet de capturer toutes les échelles de turbulence mises en jeu dans cet écoulement.

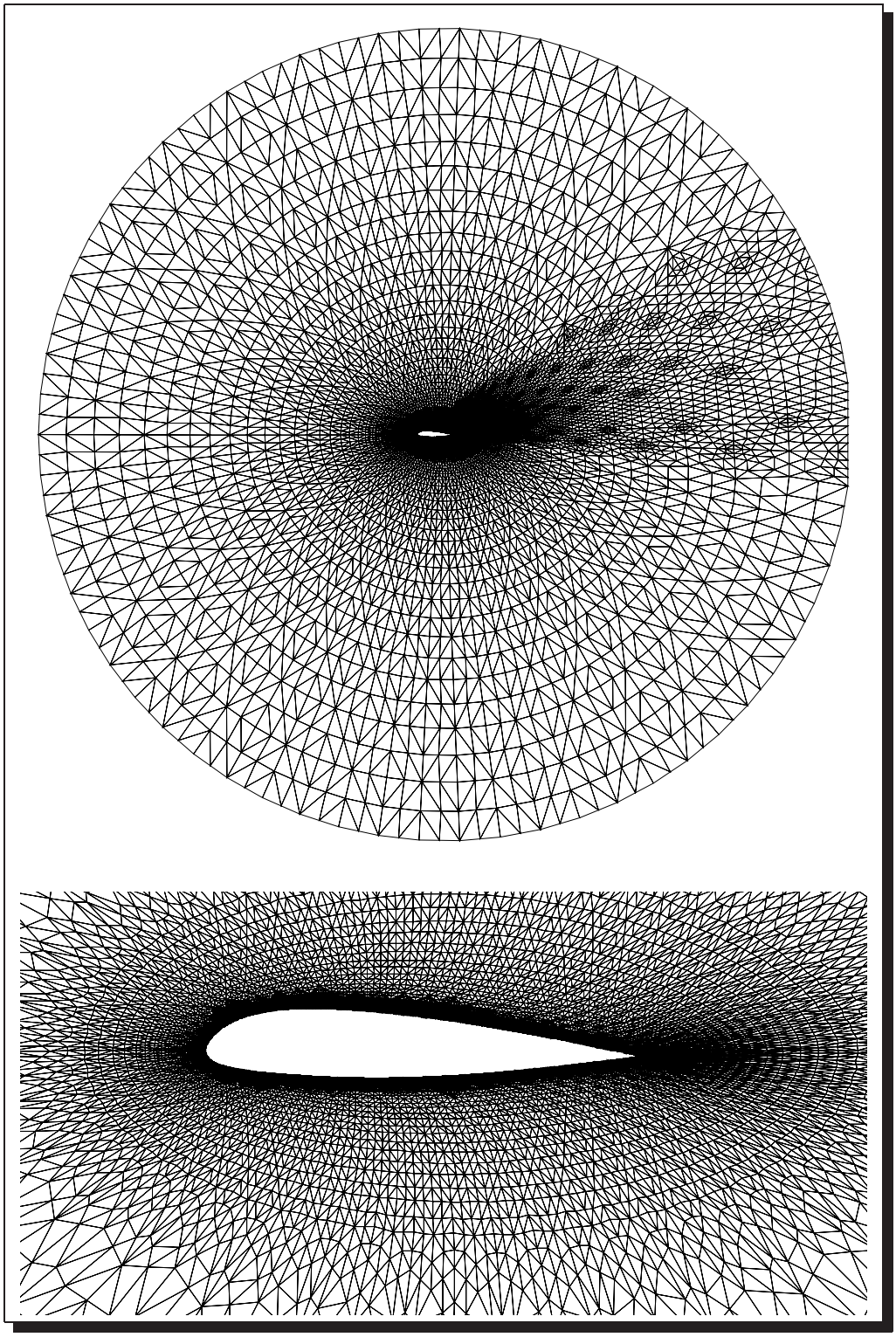

Figure IV.39 : Maillage utilisé lors des simulations autour de la voilure F2A

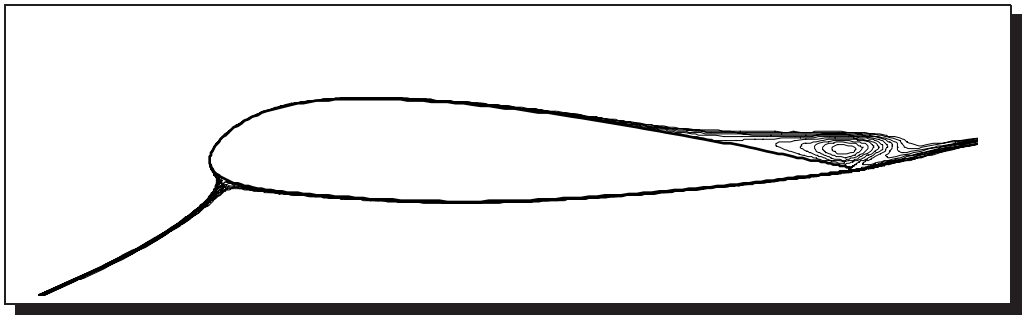

Figure IV.40 : Lignes de courant prédites par le modèle spectral dans le cas d'un écoulement autour d'un profil d'aile.

IV.6.4 Résultats et analyse

Sur la figure IV.40 nous présentons les lignes de courant moyennes prédites par le modèle spectral. La zone de recirculation sur le bord de fuite est bien prédite, en accord avec les mesures expérimentales réalisées dans la soufflerie F2 de l'ONERA, en particulier le décollement de l'écoulement est prédit à $80\,\%$ de la corde, et celui-ci recolle sur le culot du profil. Le modèle $K-\varepsilon$ ne prédit pas cette recirculation. En ce qui concerne la transition, observée expérimentalement sur l'extrados du profil après un bulbe de décollement laminaire, on notera que notre modèle ne prédit pas l'existence de ce bulbe. La transition vers la turbulence est habituellement imposée de façon arbitraire lorsqu'on utilise un modèle de type $K-\varepsilon$ (par exemple en annulant le terme de production en aval du profil et en le mettant en route à l'endroit prévu par l'expérience). On parle alors de "trigger". Certaines LES provoquent cette transition en changeant localement le schéma numérique spatial. Nous avons fait le choix de ne pas suivre cette démarche afin de pouvoir juger le modèle, et surtout de voir si celui-ci était capable de prédire une "pseudo-transition"[9]. Nous pouvons voir sur la figure IV.41 la distribution d'énergie cinétique turbulente prédite par le modèle spectral comparée à celle prédite par le modèle $K-\varepsilon$ standard. Nous constatons une nette surproduction de K au niveau du point d'arrêt pour le modèle $K-\varepsilon$. Cette anomalie a été soulignée par de nombreux auteurs, en particulier Durbin [86] qui propose un modèle $K-\varepsilon$ modifié : nous avons testé cette approche qui réduit l'importance de l'anomalie mais ne permet pas de prédire la recirculation (dans notre configuration).

Nous présentons sur la figure IV.42 les spectres $E(k,\boldsymbol{x})$ le long d'une ligne de courant moyenne longeant la zone de recirculation et se prolongeant dans le sillage. Sur les spectres correspondants aux points les plus près du profil on observe clairement l'effet de la troncature spectrale à petits k. Ensuite, lorsque l'on s'éloigne du profil et lorsque l'on aborde la zone de sillage l'effet de la troncature relaxe et les spectres prennent une allure plus proche de celle que l'on connaît en turbulence homogène. On observe nettement sur cette représentation la présence d'une zone inertielle en $-5/3$ dans ces spectres. Lorsque nous utilisons l'adimensionnement de Kolmogorov pour représenter à nouveau ces spectres (figure IV.43), ils se superposent. Dans la zone de sillage et assez loin du profil, on observe que les spectres se superposent non seulement

[9] on parle de pseudo-transition car même si le niveau de turbulence est faible à l'amont on résout quand même la turbulence !

dans les zones dissipative et inertielle, mais aussi pour les grandes échelles. Il y a donc un comportement auto-similaire des spectres. L'existence de ce comportement auto-similaire du sillage et des spectres associés est corroborée par le fait que les quantités adimensionnelles telles que le Reynolds (figure IV.46) ou la rapidité restent (presque) constantes dans le sillage. On est alors conduit à se poser la question de savoir si un tel comportement auto-similaire est synonyme d'équilibre spectral. Avant de vouloir tenter de répondre nous même à cette question en analysant plus avant les résultats de notre modèle, nous voudrions citer ici la réponse donnée dans un des ouvrages classiques de turbulence écrit par Tennekes et Lumley (A first course in turbulence, [87]) :

"The time scale of transfer of energy to small eddies apparently is only about half the time scale of flow development. **Clearly, the turbulence can never be in equilibrium because it never has time to adjust to its changing environment.** *The structure of turbulence in wakes can be self preserving only because the time scale of turbulence and that of the flow keep pace with each other as the wake moves downstream."*

Les auteurs soutiennent donc que l'état d'équilibre spectral ne devrait pas exister dans un sillage. Observons maintenant de façon plus attentive les résultats détaillés donnés par le modèle spectral.

Nous avons choisi de représenter les même spectres que sur la figure IV.42, mais cette fois-ci compensés par $k^{5/3}$ (figure IV.44). En Log-Log, ils font apparaître un plateau correspondant à la zone inertielle. Si on les trace maintenant en représentation log-linéaire (figure IV.45 à gauche), nous voyons clairement que ces spectres présentent une très légère tendance au $-5/3$ mais que, lorsque k augmente, on entre rapidement dans une zone de "bump" correspondant au début de la zone dissipative. On sait que ce bump existe sur les spectres turbulents expérimentaux. Il est néanmoins ici très marqué et si l'on compare ces spectres à ceux obtenus dans le cas du cisaillement uniforme pour le même Re_λ (figure IV.45 à droite), on constate des différences sensibles (le nombre de Reynolds Re_λ vaut environ 200 dans le sillage). Nous ne sommes donc pas en présence de spectres en équilibre.

Nous avons choisi d'utiliser ici le taux $\chi = \dfrac{\varepsilon_f}{\varepsilon} = \dfrac{flux\ de\ cascade}{dissipation}$ défini précédemment afin de visualiser de façon plus claire le déséquilibre dans le sillage. Nous voyons sur la figure IV.47 que dans le sillage $\chi < 0.85$, ce qui indique un déséquilibre de la turbulence.

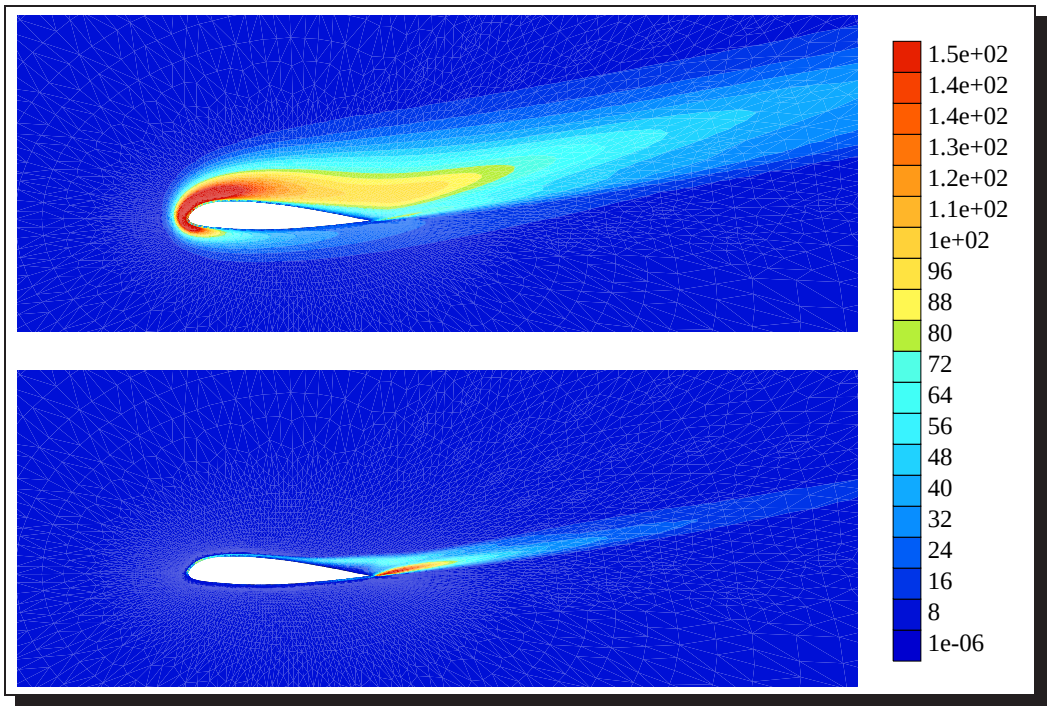

Figure IV.41 : Ecoulement autour du profil aérospatiale A à 13° d'incidence : iso-valeurs de l'énergie cinétique turbulente prédite par le modèle $K - \varepsilon$ (en haut) et le modèle SCIT (en bas), même échelle (à droite).

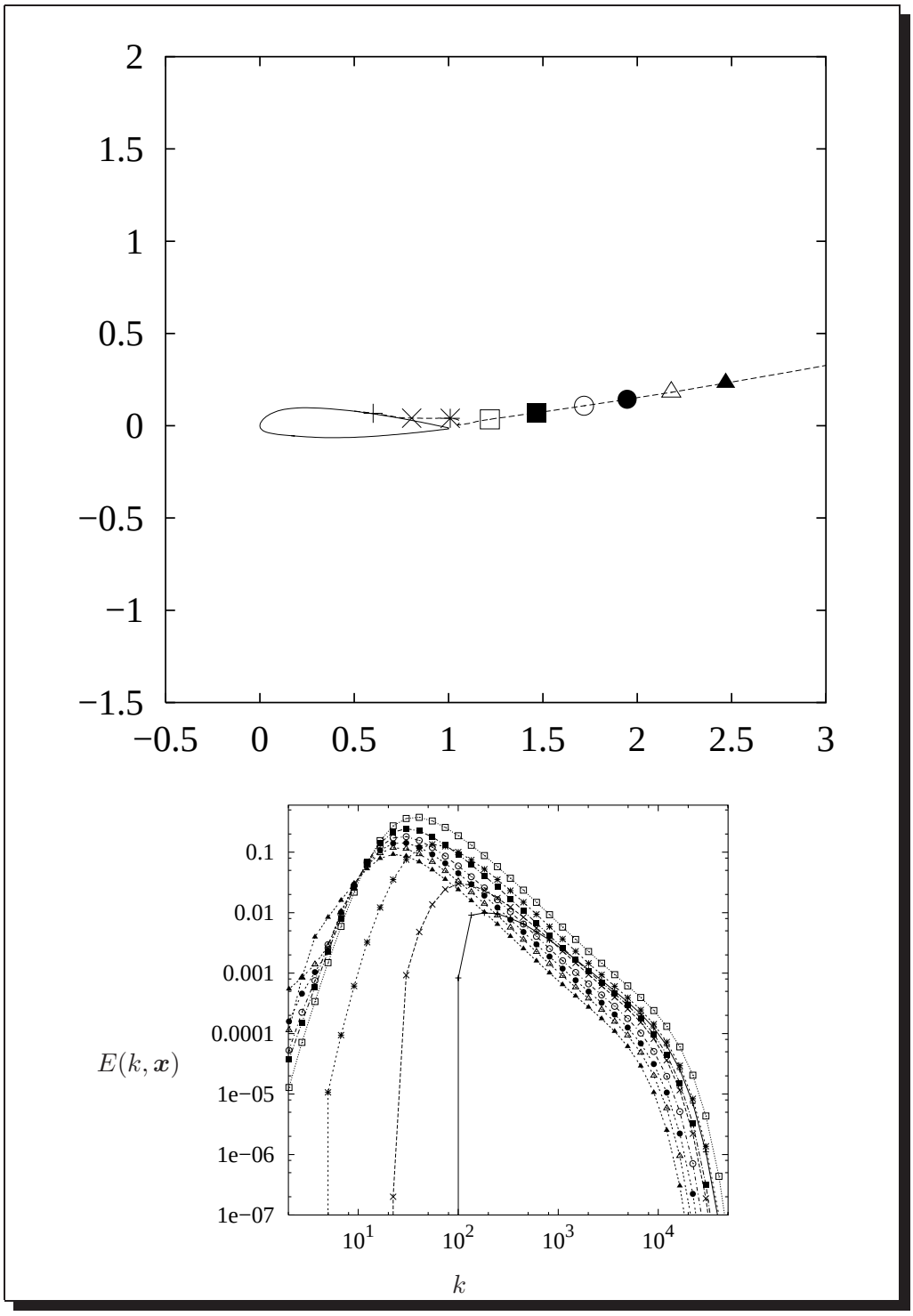

Figure IV.42 : Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ (en bas, en log-log) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation

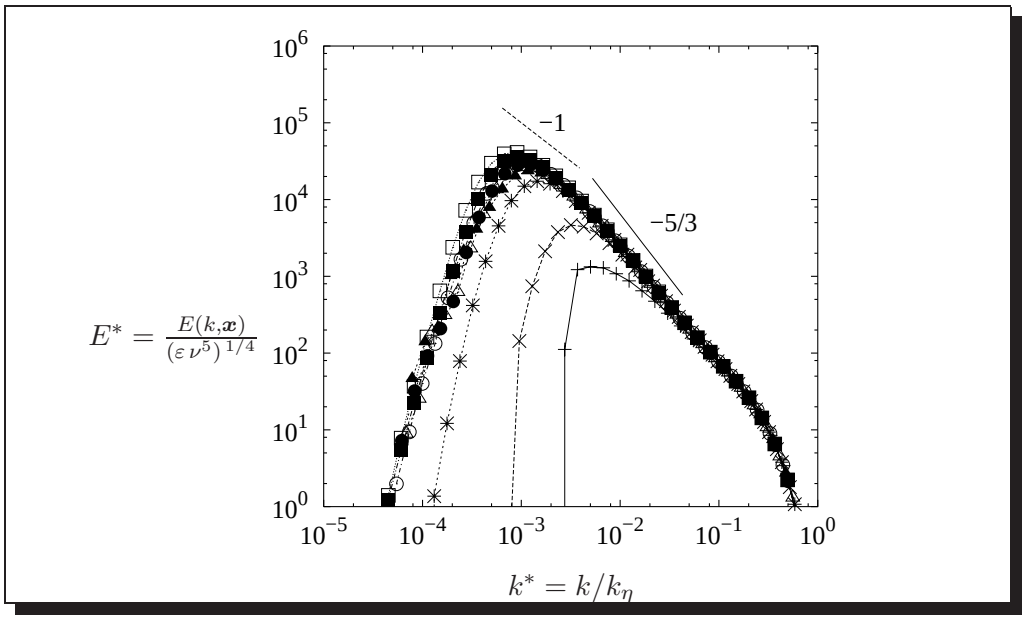

Figure IV.43 : Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres $E(k, \boldsymbol{x})$ (en log-log, adim. universelle de Kolmogorov) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation (voir figure IV.42).

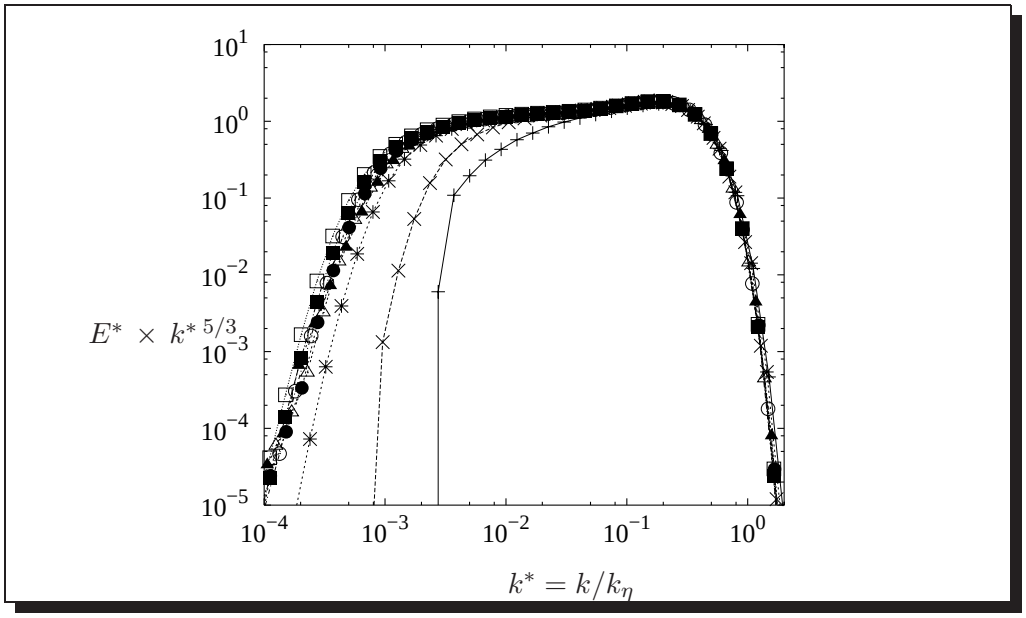

Figure IV.44 : Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres compensés de $E(k, \boldsymbol{x})$ (en log-log) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation (voir figure IV.42)

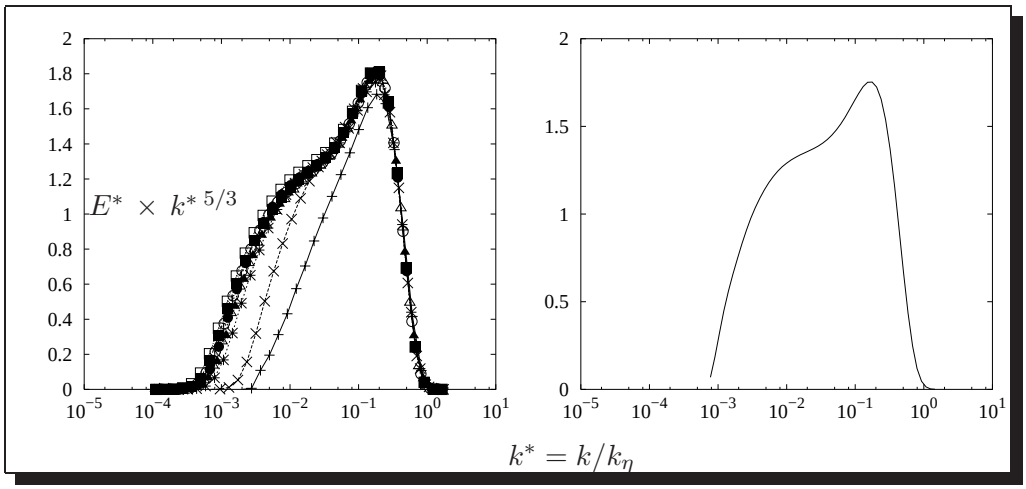

Figure IV.45 : Ecoulement autour du profil aérospatiale A à $13\,^\circ$ d'incidence : spectres compensés de $E(k, \boldsymbol{x})$ (en log-linéaire) le long d'une ligne de courant contournant la zone de recirculation (à gauche, voir figure IV.42) ; à droite résultat obtenu pour le même Re_λ dans le cas du cisaillement uniforme.

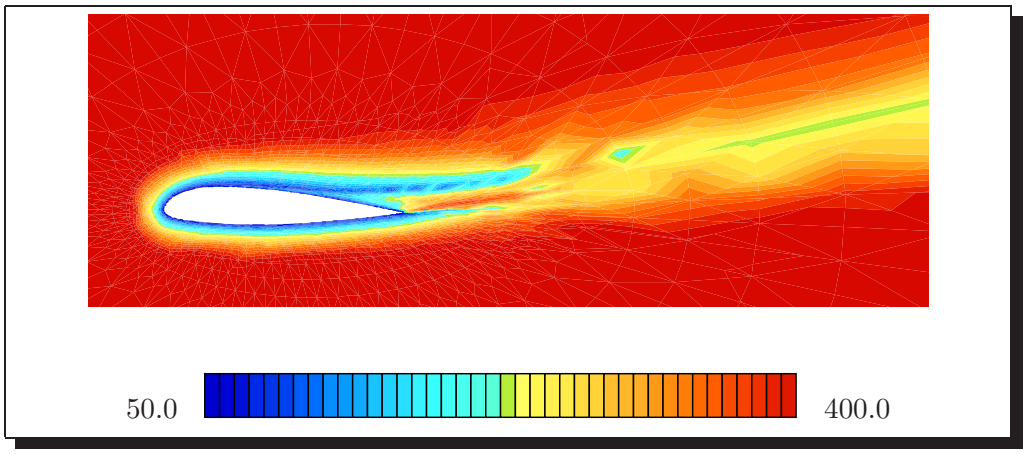

Figure IV.46 : Profil d'aile aérospatiale A : isovaleurs de Re_λ.

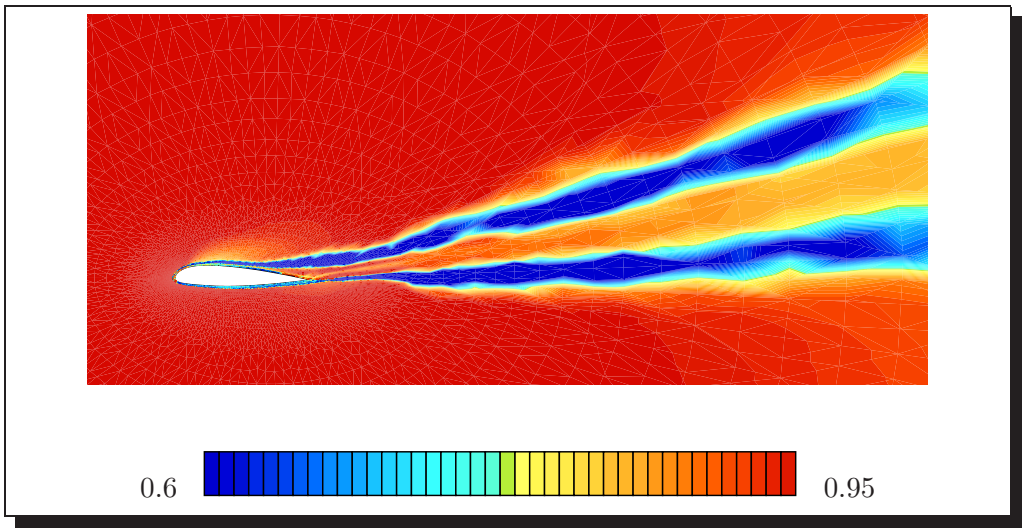

Figure IV.47 : Distribution du taux de déséquilibre χ prédite par le modèle dans le cas d'un écoulement autour d'un profil d'aile.

Conclusion

L'objectif de cette thèse était de développer un modèle spectral prenant en compte l'anisotropie de la turbulence et permettant de prédire des écoulements inhomogènes. Ce modèle, comme celui de Parpais [5] s'appuie sur la théorie EDQNM pour prendre en compte le transfert spectral ("cascade énergétique").

Pour développer ce modèle nous nous sommes appuyés sur des travaux antérieurs effectués au LMFA, en particulier ceux de Laporta [4], Parpais [5], Bertoglio [88], Cambon [35] et Jeandel [27].

La différence essentielle avec le modèle de Parpais provient du caractère tensoriel de la variable de base. Celle ci est le spectre du tenseur de Reynolds $\varphi_{ij}(\boldsymbol{x}, k, t)$.

La suite de notre travail a consisté à fermer le modèle après avoir développé les équations au premier ordre en inhomogénéité. Nous avons en particulier fermé le terme de transfert non-linéaire en utilisant les mêmes hypothèses que pour le modèle EDQNM. Une démarche plus heuristique a été adoptée pour fermer les termes les plus compliqués (par exemple le transport inhomogène).

Les constantes du modèle ont été ajustées en turbulence homogène cisaillée et dans un cas inhomogène "simple", le cas du canal plan turbulent.

Nous avons ensuite appliqué notre modèle à des écoulements plus complexes. Les champs aérodynamiques ainsi que les quantités en un point obtenus sont satisfaisants. En particulier, les champs moyens sont prédits correctement même dans des situations de décollement (marche, diffuseur, profil d'aile en incidence). A l'occasion d'un Workshop nous avons pu comparer les prédictions de notre modèle à celles de plusieurs modèles en un point pour le cas test d'un écoulement dans un diffuseur présentant un décollement lié à l'élargissement de la géométrie. Nous avons pu constater une dispersion assez forte des résultats obtenus par les modèles en un point. Dans chaque zone de l'écoulement il existe un modèle en un point qui donne des résultats satisfaisants, mais ce n'est pas forcément le même modèle. Le modèle spectral, quant à lui conduit à des résultats proches des résultats obtenus par LES et par l'expérience. Néanmoins tout les modèles (y compris le notre) prédisent une réadaptation de l'écoulement à l'aval de la recirculation trop lente au vu de l'expérience.

Même si nos résultats sont parfois plus pertinents que ceux des modèles en un point, ils restent en général assez proches de ceux-ci. Le modèle spectral développé ici permet d'accéder à des informations plus riches que celles auxquelles on a accès avec les modèles en un point. Le fait de fournir des spectres de turbulence permet par exemple de mettre en évidence des situations de déséquilibre. Ainsi nous avons pu constater que des variables globales telles que $\varepsilon\ L/u'^3$ proposée par Sreenivasan et avant lui par Batchelor, ou encore le rapport du flux ε_f sur la dissipation ε pouvaient donner une information sur le déséquilibre de la turbulence. Si les temps de calcul sont

plus grands que ceux des modèles en un point, ils restent tout de même raisonnables (par exemple le calcul de la marche a nécessité une nuit de calcul sur un PC de bureau PII350).

Notons que ce modèle, relativement simple sous sa forme actuelle, peut encore être amélioré. Cette amélioration constituera un des axes principaux de nos efforts pour l'avenir. Au delà de cette étape de raffinement, nous proposons ici plusieurs voies possibles d'exploitation de notre modèle :

- On peut se fonder sur notre approche afin de dériver un modèle en un point qui tiendrait compte du déséquilibre spectral de la turbulence. Cadiou et Hanjalić [41] en particulier ont tenté d'explorer cette voie. Une telle démarche pourrait conduire à étendre l'approche suivie par Schiestel qui a proposé un modèle de partitionnement spectral qui semble prometteur.
- Une idée serait d'exploiter notre modèle afin de proposer des améliorations pour les modèles de sous-maille pour les calculs LES. Nous avons déjà fait une étude préliminaire avec nos collègues de la DLR Allemande [89]. Cette étude avait pour but d'identifier les problèmes introduits par le changement de la dimension du filtre pour une simulation LES. Nous avons reproduit cette variation du filtre avec notre modèle en imposant une coupure des spectres au nombre d'onde $k \sim \Delta_X^{-1}$, où Δ_X est la dimension de la maille de calcul de la LES. Nous avons ainsi pu mettre en évidence qu'une variation de la taille du filtre pouvait se montrer préjudiciable à la prédiction de toutes les quantités turbulentes. Les phénomènes mis en évidence par le modèle spectral ont été retrouvés par l'équipe Allemande dans une LES.
- En combustion les modèles demandent une information sur différentes échelles de la turbulence. Or notre modèle est apte à fournir ces informations. Un projet d'application de notre modèle aux écoulements réactifs a été lancé dans le cadre d'une thèse qui vient de débuter.
- Les modèles d'émission utilisés en aéroacoustique nécessitent la donnée d'un spectre de turbulence. Actuellement la démarche la plus répandue consiste à construire un spectre à partir de la donnée de K et de ε. Notre modèle éviterait cette phase de reconstruction. A ce propos, un projet d'application de notre modèle à la prédiction de bruit de jets a lui aussi été initié dans le cadre d'une thèse.

Bibliographie

Bibliographie

[1] C. Cambon, D. Jeandel, and J. Mathieu. Spectral modelling of homogeneous non isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 104 :247–262, 1981.

[2] L. Ménoret. *Contribution à l'étude des écoulements turbulents faiblement inhomogènes et anisotropes*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon, 1982.

[3] A. D. Burden. Towards an E.D.Q.N.M. closure for inhomogeneous turbulence. In A. V. Johansson and P. H. Alfredson, editors, *Advance in Turbulence 3*. Springer-Verlag, 1991.

[4] A. Laporta. *Etude spectrale et modélisation de la turbulence inhomogène*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1995.

[5] S. Parpais. *Développement d'un modèle spectral pour la turbulence inhomogène. Résolution par une méthode d'éléments finis*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1997.

[6] J.-P. Bertoglio and D. Jeandel. A simplified spectral closure for inhomogeneous turbulence : application to the boundary layer. In *Fifth Turb. Shear Flows*. Springer-Verlag, Cornell Univ., 1986.

[7] S. Parpais, H. Touil, J.P. Bertoglio, and M. Michard. A spectral closure for inhomogeneous turbulence applied to the computation of the intake stroke in a car engine. In *4th Inter. Symp. Eng. Turb. Modelling & Meas.*, May 1999.

[8] D.C. Besnard, F.H. Harlow, R.M. Rauenzahn, and C. Zemach. Spectral transport model for inhomogeneous turbulence. Technical Report LA-11821-MS, Los Alamos National Laboratory, 1990.

[9] S. Orszag. Analytical theories of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 41(2) :363–386, 1970.

[10] P. Y. Chou. On the velocity correlation and the solution of the equation of turbulent fluctuation. *Q. Appl. Maths*, 3 :38–54, 1945.

[11] R. Schiestel. *Modélisation et simulation des écoulements turbulents*. Hermes, 1993.

[12] A. N. Kolmogorov. Local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 30 :299, 1941.

[13] A. N. Kolmogorov. Energy dissipation in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 32 :19, 1941.

[14] B.J. Daly and F.H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. of Fluids*, 13 :2634–2649, 1970.

[15] K. Hanjalić and B.E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52 :609–638, 1972.

[16] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Second-moment modelling of recirculating flow with a non-orthogonal collocated finite-volume algorithm. In Verlag, editor, *8th Turbulent Shear Flow*, 1993.

[17] P. Debaty. *Performances des modèles de turbulence au second ordre appliqués à des configurations axisymétriques simulées par éléments finis*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon, 1994.

[18] G. Comte-Bellot and S. Corrsin. The use of contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.*, 25(3) :657–682, 1966.

[19] M.J. Tucker and A.J. Reynolds. The distorsion of turbulence irrotational plane strain. *J. Fluid Mech.*, 32(4) :657, 1968.

[20] J.C. Rotta. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *Z. Phys.*, 129 :547, 1951.

[21] J. N. Gence, D. Jeandel, and J. Mathieu. Réflexions sur quelques approches de la turbulence, Belgrade, Octobre 1977.

[22] J. L. Lumley and Newman. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 82(1) :161–178, 1977.

[23] M. S. Uberoi. Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows. *J. Appl. Phys.*, 23 :754, 1957.

[24] A.A. Townsend. The uniform distorsion of homogeneous turbulence. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 7 :104, 1954.

[25] B.E. Launder, Reece G.J, and W. Rodi. Progress in the development of Reynolds stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68(3) :537–566, 1975.

[26] D. Naot, A. Shavit, and M. Wolfshtein. Two-point correlation model and the redistribution of reynolds stress. *Phys. of Fluids*, 16 :738, 1973.

[27] D. Jeandel. *Une approche phénoménologique des écoulements turbulents inhomogènes*. Thèse de Doctorat, Univ. Claude Bernard – Lyon I, 1976.

[28] B.E. Launder and Tselepidakis. Contribution to the modelling of near-wall turbulence. *AIAA*, pages 81–96, 1990.

[29] C.C. Shir. A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. of the Atmospheric Sciences*, 30 :1327–1339, 1973.

[30] M.M. Gibson and B.E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 86 :491–511, 1978.

[31] T.J. Craft and B.E. Launder. New wall reflection model applied to the turbulent impinging jet. *AIAA Journal*, 30 :2970–2972, 1992.

[32] K. Hanjalić, B.E. Launder, and R. Schiestel. Multiple-time-scale concept in turbulence transport modelling. *2nd Int. Symp. on Turbulent Shear Flows*, 1979.

[33] B.E. Launder and D.B. Spalding. *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, 1974.

[34] D. Jeandel, J.F. Brison, and J. Mathieu. Modeling methods in physical and spectral space. *Phys. of Fluids*, 21(2) :169–182, 1978.

[35] C. Cambon. *Modélisation spectrale en turbulence homogène anisotrope*. Thèse de Doctorat, Univ. Claude Bernard – Lyon I, 1979.

[36] C. Cambon and L. Jacquin. Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.*, 202 :295–317, 1989.

[37] R. Kraichnan. The structure of isotropic turbulence at very high reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 5(4) :497, 1959.

[38] R. Kraichnan. Test-field model for inhomogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 8 :575–598, 1972.

[39] A. Pouquet, M. Lesieur, J.-C. André, and C. Basdevant. Evolution of high reynolds number two-dimensionnal turbulence. *J. Fluid Mech.*, 72 :305–319, 1975.

[40] J. Jovanović, Q.-Y. YE, and F. Durst. Statistical interpretation of the turbulent dissipation rate in wall-bounded flows. *J. Fluid Mech.*, 293 :321–347, 1995.

[41] A. Cadiou and K. Hanjalić. Developement of one-point statistical closure from a spectral description of turbulence. Technical report, T.U. Delft, 1998.

[42] A. Craya. Contribution à l'analyse de la turbulence associée à des vitesses moyennes. P.S.T. du ministère de l'air 345, 1958.

[43] M. Oberlack. Non-isotropic dissipation in non-homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 350 :351–374, 1997.

[44] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Kluwer Academic, 1990.

[45] T. Clarke and C. Zemach. A spectral model applied to homogeneous turbulence. *Phys. of Fluids*, 7(7) :1674–1694, 1995.

[46] S. Parpais and J. P. Bertoglio. A spectral closure for inhomogeneous turbulence applied to turbulent confined flow. In Kluwer Academic, editor, *ETC VI*, July 1996.

[47] L. Skrbek and S.R. Stalp. On the decay of homogeneous isotropic turbulence. *Physics of Fluids*, 12(8) :1997–2019, August 2000.

[48] N. N. Mansour, A.A. J. Kim, and P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194 :15–44, 1988.

[49] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. of Fluids*, 11(4) :943–945, April 1999.

[50] C. Eringen. *Continuum physics*. Academic Press – New york, 1971.

[51] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.*, 227 :245–272, 1991.

[52] B.E. Launder and R. Schiestel. Sur l'utilisation d'échelles temporelles multiples en modélisation des écoulements turbulents. *CRAS*, 286(A) :709–712, 1978.

[53] B.E. Launder and R. Schiestel. Application d'un modèle de turbulence à échelles multiples au calcul d'écoulements libres turbulents. *CRAS*, 288(B) :127, 1979.

[54] G. Brun. *Développement et application d'une méthode d'élements finis pour le calcul des écoulements turbulents fortement chauffés*. Thèse de Doctorat, École Centrale de Lyon, 1988.

[55] M. Buffat. étude de la simulation numérique par une méthode d'éléments finis des écoulements internes subsoniques instationnaires bi et tridimensionnels. Thése d'État, Université Claude Bernard (Lyon I), 1992.

[56] T.-H. Shih and J. L. Lumley. Remarks on turbulent constitutive relations. *Math. Comput. Modelling*, 18(2) :9–16, 1993.

[57] S. Tavoularis and U. Karnik. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *J. Fluid Mech.*, 204 :457–478, 1989.

[58] W. G. Rose. Results of an attempt to generate a homogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 25 :97, 1966.

[59] W. G. Rose. Interaction of grid turbulence with a uniform shear flow. *J. Fluid Mech.*, 44 :767, 1970.

[60] J. J. Rohr, E. C. Itsweire, K. N. Helland, and C. W. Van Atta. An investigation of the growth of turbulence in a uniform shear flow. *J. Fluid Mech.*, 187 :1, 1988.

[61] F. H. Champagne, V. G. Harris, and S. Corrsin. Experiments on nearly homogeneous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 41 :81, 1970.

[62] U. Karnik and S. Tavoularis. Generation and manipulation of uniform shear with the use of screens. *Exp. in Fluids*, 5 :247–254, 1987.

[63] S. Tavoularis. Asymptotic laws for transversly homogeneous turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 28 :999, 1985.

[64] S.G. Saddoughi and S.V. Veeravalli. Local isotropy in turbulent boundary layers at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 268 :333–372, 1994.

[65] J. Laufer. Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, 1950.

[66] J. LAUFER. The structure of turbulence in fully developed pipe flow, 1954.

[67] M. Coantic. *Contribution à l'étude de la structure de la turbulence dans une conduite de section circulaire*. Thèse de Doctorat, Fac. Sci. Univ. Aix-Marseille, 1966.

[68] A. Perry, S. Henbest, and M. Chong. A theoretical and experimental study of wall turbulence, 1986.

[69] I. Marusic and A. Perry. A wall-wake model for the turbulent structure of boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 298 :361–407, 1995.

[70] J. Jiménez, A. A. Wray, P. G. Saffman, and R. S.Rogallo. The structure of intense vorticity inhomogeneous isotropic turbulence. studying turbulence using numerical simulation database. In *Summer Program, Center for Turbulence Research, NASA Ames & Stanford U.*, pages 21–45, 1992.

[71] J. Jiménez. The physics of wall turbulence. *Physica A*, 263 :252–262, 1999.

[72] P. Carlotti and J.C.R. Hunt. Spectra of turbulence in boundary layers near the ground. In *Proceedings of 8th European Turbulence Conference, Barcelona, Kluwer*, pages 307–310, 2000.

[73] M. M. Metzger and J. C. Klewicki. A comparative study of near-wall turbulence in high and low Reynolds number boundary layers. *Physics of Fluids*, 13 :692–701, 2001.

[74] P.G. Saffman. *Problems and progress in the theory of turbulence*, chapter Structure and mechanisms of turbulence II. H. Fiedler, 1978.

[75] P.E. Dimotakis. The mixing transition in turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 409 :69–98, 2000.

[76] K.R. Sreenivasan. On the scaling of the turbulent energy dissipation rate. *Phys. of Fluids*, 27 :1048–1050, 1984.

[77] J. Kim, S. Kline, and J. Johnston. Investigation of reattaching turbulent shear layer : Flow over a backward-facing step. *Journal of Fluid Engineering*, 102 :302–308, 1980.

[78] D.E. Abbott and S.J. Kline. Theoretical and experimental investigation of flow over single and double backward facing steps. Technical Report Report No. MD-5, Dep. of Mech. Eng., Stanford Univ., 1961.

[79] S. Jovic and D. Driver. Backward-facing step measurement at low reynolds number re h = 5000, 1994.

[80] S. Jovic and D. Driver. Reynolds number effect on the skin friction in separated flows behind a backward-facing step, 1995.

[81] H. Le and P. Moin. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. Technical Report Report No. TF-58. Thermosciences Division, Dep. of Mech. Eng., Stanford Univ., 1994.

[82] J. L. Lumley. Some comments on turbulence. *Phys. of Fluids*, 4(2) :203, 1992.

[83] H. Touil, S. Parpais, and J.P. Bertoglio. Flow through an asymetric plane diffuser. In *8th ERCOFTAC/IAHR/COST Workshop on Refined Turbulence Modelling*, volume Report n°127 Helsinki Univ. of Techn., 1999.

[84] C.U. Buice and J.K. Eaton. Experimental investigation of flow through an asymmetric plane diffuser. Technical Report Report No. TSD-107. Thermosciences Division, Dep. of Mech. Eng., Stanford Univ., 1997.

[85] H. Kaltenbach, M. Fatica, R. Mittal, T. Lund, and P. Moin. Study of flow in a planar asymmetric diffuser using largeeddy simulation. 1999.

[86] P. Durbin. the $k\gamma\varepsilon$ stagnation point anomaly, 1996.

[87] H. Tennekes and J. Lumley. A first course in turbulence, 1972.

[88] J.-P. Bertoglio. Etude d'une turbulence isotrope ; modélisation de sous-maille et approche statistique. Thése d'État, Université Claude Bernard Lyon 1, 1986.

[89] J. Fröhlich, W. Rodi, J.P. Bertoglio, U. Bieder, and H. Touil. Large-eddy simulation of flow around circular cylinders on structured and unstructured grids ii. In E.H. Hirschel, editor, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, volume 75, pages 231–249. Vieweg, 2001.

[90] Jean Garrigues. *Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens*. http ://www.esm2.imt-mrs.fr/gar/, 2001.

[91] J.-C. André and M. Lesieur. Influence of helicity on the evolution of isotropic turbulence at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 81 :187–207, 1977.

[92] H. Touil, L. Shao, and J.P. Bertoglio. On the decay of shearless wall bounded turbulence. In *2nd Int. Symp. On Turbul. And Shear Flow Phen.*, June 2001.

[93] J.P. Bertoglio, H. Touil, L. Shao, and G. Lamaison. Decay of wall bounded turbulence and turbulence scalar field. In *14th Australasian Fluid Mech. Conf.*, December 2001.

Annexes

Annexe A

Outils mathématiques de modélisation

A.1 Introduction

En turbulence statistique, on fait souvent appel aux théorèmes de représentation afin de modéliser un terme inconnu, lorsqu'on veut arrêter la description à un certain niveau dans la hiérarchie des moments. On connait souvent la forme ou certaines propriétés du terme à modéliser. De plus, le modélisateur décide parfois d'inclure un effet particulier par le biais d'une grandeur physique connue au niveau de description considéré. Ce qu'il manque alors c'est de donner une forme générique et la plus complète possible afin de représenter (modéliser) le terme inconnu.

On s'inspire alors de la démarche suivie pour établir des lois de comportement en mécanique des milieux continus. L'être mathématique essentiel alors mis en jeu s'appelle invariant. Il s'agit d'un scalaire ou tenseur d'ordre zéro construit par exemple en contractant des indices d'un tenseur connu et invariant quel que soit le repère considéré pour un groupe de transformations donné (par exemple par rotation).

Nous nous inspirons largement dans la suite de cette annexe des ouvrages de Schiestel (1993) [11], Eringen (1971) [50] et Garrigues [90] ainsi que des travaux de thèse de Jeandel (1976) [27], Ménoret (1982) [2] et Cambon (1979) [35].

A.2 Forme des invariants d'un tenseur

A.2.1 Invariant d'un tenseur d'ordre 1

Un tenseur d'ordre 1 est un vecteur. En turbulence, cela peut être la vitesse moyenne $\overline{U}_i$ ou le vecteur normal à la paroi n_i intervenant dans certains modèles d'écho de paroi des corrélations pression-déformation. Un seul invariant est associé à un vecteur A_i :

$$I_A \;=\; A_i\, A^i$$

A.2.2 Invariants d'un tenseur du second ordre

Un tenseur d'ordre 2 peut être représenté par une matrice. Le tenseur de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ ou le tenseur d'anisotropie a_{ij} en sont des exemples. Pour un tenseur b_i^j d'ordre 2

dans un espace à trois dimensions les invariants indépendants sont au nombre de trois :

$$\begin{aligned} b_{\mathrm{I}} &= b_i^i \\ b_{\mathrm{II}} &= b_i^j\, b_j^i \\ b_{\mathrm{III}} &= b_i^j\, b_j^k\, b_k^i \end{aligned}$$

De façon plus générale les invariants indépendants d'un tenseur d'ordre 2 dans un espace à n dimensions sont les n valeurs propres de la matrice associée.

Une autre propriété importante pour les tenseurs du second ordre est donnée par le théorème de Cayley-Hamilton. Dans un espace à n dimensions on peut exprimer toute puissance de ce tenseur par une relation linéaire des $n-1$ premières puissances de ce même tenseur. Dans l'espace à 3 dimensions on pourra exprimer les puissances du tenseur comme la combinaison linéaire des puissances 0, 1 et 2. En notation cartésienne cela donne :

$$T_{ij}^3 = T_{\mathrm{I}} T_{ij}^2 - T_{\mathrm{II}} T_{ij} + \frac{1}{3} T_{\mathrm{III}} \delta_{ij}$$

A.2.3 Invariants de plusieurs tenseurs

Ce sont les invariants par contractions des indices des tenseurs indépendants. Par exemple pour deux vecteurs $\{A_i, B_i\}$:

$$\begin{aligned} &A_i\, A^i \\ &B_i\, B^i \\ &A_i\, B^i \end{aligned}$$

Ces invariants de plusieurs tenseurs sont donc les invariants propres de chaque tenseur plus des invariants mixtes.

A.3 Représentation par fonctions tensorielles

A.3.1 Introduction

Dans la démarche de modélisation en mécanique des milieux continus ou en turbulence, on a souvent besoin de reconstruire un terme inconnu (tenseurs du second ordre, vecteurs ou scalaires) à partir de termes connus (tenseurs du second ordre, vecteurs ou scalaires). On cherche donc pour un tenseur inconnu d'ordre n :

$$A_{i_1 \ldots i_n} = \mathcal{F}_{i_1 \ldots i_n}(X_i, Y_i, ..., T_{lm}^{(1)}, T_{lm}^{(2)}, ...) \tag{A.1}$$

On peut dans un premier temps faire une analyse dimensionnelle. Cette démarche a souvent porté ses fruits surtout en mécanique des fluides et reste un outil d'analyse puissant.

Une autre démarche est nécessaire lorsque le nombre d'arguments pour $\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_n}$ devient trop important ou si l'on veut donner à $A_{i_1 \ldots i_n}$ des propriétés tensorielles particulières (imposées en général par la physique du problème).

Eringen [50] introduit deux principes de base afin de pouvoir déterminer $\mathcal{F}_{i_1 \ldots i_n}$:

- Un invariant ne peut être fonction que d'autres invariants. Dans (A.1), on réduit le membre de gauche à un scalaire en le multipliant par n vecteurs. On peut donc réécrire (A.1) sous la forme :

$$A_{i_1...i_n}\ B^{i_1}...C^{i_n} = f\ (B_iB^i, C_iC^i, B_iC^i, X_iX^i, ..., I_{T^{(1)}}, II_{T^{(1)}}, II_{T^{(1)}}, ...) \tag{A.2}$$

  où les I,II et III sont les invariants indépendants des tenseurs d'ordre 2.

- Si le premier membre est multilinéaire par rapport à $B^{i_1}...C^{i_n}$ alors le second doit aussi l'être. On doit donc exclure toute dépendance du type B_iB^i ou C_iC^i. De plus les B_iC^i doivent apparaître comme des multiplicateurs linéaires.

A.3.2 Démarche générale de représentation d'un tenseur par une fonction polynomiale de vecteurs et de tenseurs

Soit $A_{i_1...i_n}$ le tenseur à n "pattes" à modéliser. Celui ci est fonction de p vecteurs $U_i^{(p)}$ et de q tenseurs $T_{mn}^{(q)}$.

$$A_{i_1...i_n} = f_{i_1...i_n}(U_i^{(p)}, T_{mn}^{(q)}) \tag{A.3}$$

On introduit alors n vecteurs $V_i^{(n)}$ arbitrairement choisis. On construit alors le produit contracté J :

$$J = V_{i_1}^{(1)}...V_{i_n}^{(n)}\ A_{i_1...i_n} = V_{i_1}^{(1)}...V_{i_n}^{(n)}\ f_{i_1...i_n}(U_i^{(p)}, T_{mn}^{(q)}) \tag{A.4}$$

Soulignons la propriété :

$$A_{i_1...i_n} = \frac{\partial^{\,n}\ J}{\partial\ V_{i_1}^{(1)}...V_{i_n}^{(n)}} \tag{A.5}$$

On peut montrer que J est un invariant scalaire de $V_i^{(n)}$, $U_i^{(p)}$ et $T_{mn}^{(q)}$ et multilinéaire en $V_i^{(n)}$. Parce que $f_{i_1...i_n}$ est supposé polynomial, J peut s'écrire :

$$J = \sum_{\alpha}\ I_\alpha\ J_\alpha \tag{A.6}$$

où les I_α sont des polynômes d'invariants appartenants à la base d'intégrité des vecteurs $U_i^{(p)}$ et des tenseurs $T_{mn}^{(q)}$. Les J_α sont des invariants construits à partir d'invariants appartenants à la base d'intégrité des vecteurs $U_i^{(p)}$ ainsi que $V_i^{(n)}$ et des tenseurs $T_{mn}^{(q)}$, multilinéaires en $V_i^{(n)}$ et contenant au moins un invariant mettant en jeu au moins un vecteur $V_i^{(n)}$. On peut alors écrire à partir de la relation (A.5) :

$$A_{i_1...i_n} = \sum_{\alpha}\ I_\alpha\ \frac{\partial^{\,n}\ J_\alpha}{\partial\ V_{i_1}^{(1)}...V_{i_n}^{(n)}} \tag{A.7}$$

Pour déterminer la forme canonique la plus simple de $A_{i_1...i_n}$ (polynomiale), il faut que la base d'intégrité des vecteurs $U_i^{(p)}$ et des tenseurs $T_{mn}^{(q)}$ soit minimale et que les invariants J_α soient linéairement indépendants ; si ces conditions sont réunies, la démarche pour déterminer $A_{i_1...i_n}$ est la suivante :

– construire la base d'intégrité des vecteurs $U_i^{(p)}$ ainsi que $V_i^{(n)}$ et des tenseurs $T_{mn}^{(q)}$ pour le groupe de transformations considéré en ne gardant que les invariants de degré 0 ou 1 pour chacun des vecteurs $V_i^{(n)}$.
– calculer tous les J_α possibles multilinéaires en $V_i^{(n)}$
– dériver $\dfrac{\partial^{\,p}\, J_\alpha}{\partial\, V_{i_1}^{(1)} ... V_{i_p}^{(p)}}$

En général en mécanique des fluides on cherche les invariants par rapport au groupe des transformations orthogonales propres(modélisation tensorielle isotrope).

A.3.3 Exemples

Exemple 1 : forme d'un scalaire fonction tensorielle isotrope d'un scalaire, d'un vecteur et d'un tenseur du second ordre

On cherche le scalaire :

$$\alpha = F(\lambda, U_i, T_{ij}) \tag{A.8}$$

Les différents invariants de la base d'intégrité sont :

λ		
U_i^2		
T_{I}	T_{II}	T_{III}
$U_i T_{ij} U_j$	$U_i T_{ik} T_{kj} U_j$	

TAB. A.1 : Base d'intégrité pour un scalaire, un tenseur du premier ordre et un tenseur du second ordre

alors

$$\alpha = c_0\, \lambda + c_1\, U_i^2 + c_2\, T_{\mathrm{I}} + c_3\, T_{\mathrm{II}} + c_4\, T_{\mathrm{III}} + c_5\, U_i T_{ij} U_j + c_6\, U_i T_{ik} T_{kj} U_j \tag{A.9}$$

où les c_i peuvent eux même être fonction des invariants explicités dans le tableau A.1.

Exemple 2 : forme d'un tenseur du premier ordre fonction tensorielle isotrope d'un scalaire, d'un vecteur et d'un tenseur du second ordre

On cherche :

$$\alpha_i = F_i(\lambda, U_i, T_{ij}) \tag{A.10}$$

On écrit donc le produit contracté :

$$\alpha_i A_i = G_i(\lambda, U_i, T_{ij}, A_i) \tag{A.11}$$

et on explicite la base d'intégrité linéaire en A_i(tableau A.2).
On peut donc écrire :

$$J = \alpha_i A_i = f_0 U_i A_i + f_1\, U_i T_{ij} A_j + f_2\, A_i T_{ij} U_j + f_3\, U_i T_{ik} T_{kj} A_j + f_4\, A_i T_{ik} T_{kj} U_j \tag{A.12}$$

λ		
U_i^2	U_iA_i	
T_{I}	T_{II}	T_{III}
$U_iT_{ij}U_j$	$U_iT_{ik}T_{kj}U_j$	
$U_iT_{ij}A_j$	$U_iT_{ik}T_{kj}A_j$	
$A_iT_{ij}U_j$	$A_iT_{ik}T_{kj}U_j$	

TAB. A.2 : Base d'intégrité pour un scalaire, un tenseur du premier ordre et un tenseur du second ordre

Et on obtient :

$$\alpha_i = \frac{\partial\, J}{\partial\, A_i} = f_0U_i + f_1\, U_iT_{ij}\delta_{ij} + f_2\, T_{ij}U_j + f_3\, U_iT_{ik}T_{kj}\delta_{ij} + f_4\, T_{ik}T_{kj}U_j \quad \text{(A.13)}$$

où les f_i sont une combinaison des invariants de la base d'intégrité (forme explicitée dans notre cas dans l'équation (A.9)).

Exemple 2 : forme d'un tenseur du second ordre fonction tensorielle isotrope d'un vecteur et d'un tenseur du second ordre

On cherche un tenseur α du second ordre qui est fonction de U_i et T_{ij} :

$$\alpha_{ij} = F_{ij}(U_i, T_{ij}) \quad \text{(A.14)}$$

Pour limiter les calculs nous cherchons ici α_{ij} linéaire en terme de T_{ij}. Comme dans le paragraphe précédent on écrit le produit contracté :

$$\alpha_{ij}A_iB_j = G_i(\lambda, U_i, T_{ij}, A_i, B_i) \quad \text{(A.15)}$$

après avoir explicité la base d'intégrité multilinéaire en A_i et B_i, on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \alpha_{ij}A_iB_j \\ &= f_1\, A_kB_k + f_2\, U_kA_k\, U_lB_l \\ &+ f_3\, U_pT_{pq}A_q\, U_lB_l + f_4\, U_pT_{pq}B_q\, U_lA_l \\ &+ f_5\, A_pT_{pq}U_q\, U_lB_l + f_6\, B_pT_{pq}U_q\, U_lA_l \\ &+ f_7\, A_pT_{pq}B_q + f_8\, B_pT_{pq}A_q \end{aligned} \quad \text{(A.16)}$$

Finalement on peut écrire α_{ij} sous la forme (on rappelle que $\dfrac{\partial\, A_k}{\partial\, A_i} = \delta_{ki}$) :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\partial\, J}{\partial\, A_iB_j} \\ &= f_1\, \delta_{ij} + f_2\, U_iU_j \\ &+ f_3\, U_pT_{pi}U_j + f_4\, U_pT_{pj}U_i \\ &+ f_5\, T_{iq}U_q\, U_j + f_6\, T_{jq}U_q\, U_i \\ &+ f_7\, T_{ij} + f_8\, T_{ji} \end{aligned} \quad \text{(A.17)}$$

Annexe B

Développement des équations spectrales

B.1 Equation des corrélations doubles développée au second ordre

Nous avons présenté au chapitre II l'équation (II.23) développée au premier ordre en inhomogénéité. Dans cette annexe nous écrivons cette équation au second ordre en reprenant les résultats de Laporta [4]. Ceci posé, il faut souligner ce que représente le deuxième ordre pour cette équation. L'équation de continuité impose aux spectres de corrélations doubles et triples les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
i\,k_i\,\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,x_i}\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\\
i\,k_j\,\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,x_j}\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\\
i\,k_i\,\Phi^*_{nm,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,x_i}\Phi^*_{nm,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\\
i\,k_j\,\Phi_{nm,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,x_j}\Phi_{nm,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Nous voyons donc que les expressions du type $i\,k_i\,\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$ sont équivalentes à une dérivée spatiale du premier ordre. Laporta [4] propose par conséquent de substituer ces expressions en $i\,k_i$ par leur équivalent en dérivée spatiale. Ceci souligné, nous

pouvons développer l'équation (II.23) sur les spectres tridimensionnels $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial\, t}+\overline{U}_n\frac{\partial}{\partial\, x_n}\right)\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)=2\nu\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_n^2}-\boldsymbol{k}^2\right)\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\\
&+\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_p}\,k_n\,\frac{\partial}{\partial\, k_p}\,\Phi_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)\\
&-\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_p}\,\left(\delta_{nm}-2\,\frac{k_n\,k_m}{k^2}\right)\,(\delta_{mj}\Phi_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)+\delta_{im}\Phi_{pj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\\
&-2\,i\,\frac{k_q}{k^2}\,M_{qrpn}(\boldsymbol{k})\,\frac{\partial}{\partial\, x_r}\left(\frac{\partial\,\overline{U}_n}{\partial\, x_p}\,(\delta_{mj}\Phi_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)-\delta_{im}\Phi_{pj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\right)\\
&-i\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial^{\,2}\overline{U}_n}{\partial\, x_p\partial x_q}\,\left(\delta_{nm}-2\,\frac{k_n\,k_m}{k^2}\right)\,\frac{\partial}{\partial\, k_q}\,(\delta_{mj}\Phi_{ip}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)-\delta_{im}\Phi_{pj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\\
&-\,i\,k_q\,M_{mqpn}(\boldsymbol{k})\,(\delta_{mj}\Phi^*_{np,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)-\delta_{im}\Phi_{np,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\\
&+\,\left(-\frac{1}{2}\delta_{mr}\frac{\partial}{\partial\, x_q}+\frac{k_m\,k_q}{k^2}\frac{\partial}{\partial\, x_r}\right)\\
&\times\,M_{rqpn}(\boldsymbol{k})\,(\delta_{mj}\Phi^*_{np,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)+\delta_{im}\Phi_{np,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))\\
&-\,i\,\frac{1}{2}\,\left(\frac{k_r}{k^2}\frac{\partial}{\partial\, x_q}\frac{\partial}{\partial\, x_m}+\frac{k_m}{k^2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_q}\frac{\partial}{\partial\, x_r}-2\frac{k_m\,k_s\,k_r}{k^4}\frac{\partial}{\partial\, x_s}\frac{\partial}{\partial\, x_q}\right)\\
&\times\,M_{rqpn}(\boldsymbol{k})\,(\delta_{mj}\Phi^*_{np,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)-\delta_{im}\Phi_{np,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t))
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

où

$$M_{qrpn}(\boldsymbol{k})\;=\;\frac{1}{2}\,\left(\delta_{rp}\delta_{qn}+\delta_{rn}\delta_{qp}-2\delta_{qr}\frac{k_p\,k_n}{k^2}\right)$$

On voit que par rapport au chapitre II, de nouvelles contributions apparaissent. La mise en oeuvre de ces résultats augmenterait considérablement la complexité du modèle spectral.

Annexe C

Obtention des corrélations triples

Nous rappelons ici la démarche de Laporta [4] pour fermer les corrélations triples, démarche qui l'a conduit à obtenir les relations (II.48) et (II.44) dans le texte principal. Voyons maintenant comment déterminer ces corrélations triples afin de fermer complètement le problème spectral au niveau des corrélations doubles.

C.1 Expression du spectre des corrélations triples

Ces corrélations triples s'écrivent :

$$R_{ijk}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, t) = \overline{u_i(\boldsymbol{x}_1, t)\, u_j(\boldsymbol{x}_2, t)\, u_k(\boldsymbol{x}_3, t)}$$

en trois points $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ et $\boldsymbol{x}_3$ (cf. (I.6)). On fait alors le changement de variable :

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + 2\,\boldsymbol{x}_3}{4} \\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \end{cases}$$

Ce changement de variable a pour avantage de donner des propriétés de symétrie au tenseur des corrélations triples. Par conséquent, le spectre des corrélations triples en trois points s'écrit :

$$\Phi_{ijk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) = TF_{/\{\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}\}}(R_{ijk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}, t))$$

Comme précédemment, on élimine les corrélations pression-vitesse-vitesse dans l'équation sur les corrélation triples par le biais d'une équation de Poisson. Celle-ci prend donc la forme générique :

$$\begin{aligned} \Bigg(\frac{\partial}{\partial\, t} - \nu \Bigg(\frac{3}{8}\frac{\partial^{\,2}}{\partial\, x_m^2} - (\boldsymbol{k}^2 + \boldsymbol{p}^2 + \boldsymbol{q}^2) \\ + \frac{i}{2} k_m \frac{\partial}{\partial\, x_m}\Bigg)\Bigg)\, \Phi_{ijk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) = \quad S_{ijk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) \end{aligned} \tag{C.1}$$

où $S_{ijk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t)$ est fonction des corrélations quadruples et des gradients de vitesse moyenne :

$$
\begin{aligned}
&S_{ijk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t) = \\
&-\left(\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\, x_m} + iq_m\right)(\delta_{in}\delta_{mp} + \delta_{ip}\delta_{mn}) \\
&\times\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\partial\,\overline{U}}{\partial\,\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{p}}\right)\right)\overline{U}_n(\boldsymbol{x},t)\Phi_{pjk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t) + \frac{1}{2}\Phi_{npjk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t)\right) \\
&-\left(\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\, x_m} + ip_m\right)(\delta_{jn}\delta_{mp} + \delta_{jp}\delta_{mn}) \\
&\times\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\frac{\partial\,\overline{U}}{\partial\,\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{k}} - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{p}}\right)\right)\overline{U}_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r},t)\Phi_{ipk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t) + \frac{1}{2}\Phi^*_{npki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t)\right) \\
&-\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_m} + ik_m\right)(\delta_{kn}\delta_{mp} + \delta_{kp}\delta_{mn}) \\
&\times\left(\exp\left(\frac{i}{2}\frac{\partial\,\overline{U}}{\partial\,\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{k}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\,\boldsymbol{p}}\right)\right)\overline{U}_n(\boldsymbol{x},t)\Phi_{ijp}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t) + \frac{1}{2}\Phi_{npij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t)\right) \\
&+\left(\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\, x_i} + iq_i\right)\Pi_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) + \left(\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\, x_j} + ip_j\right)\Pi^*_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t) \\
&+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\, x_k} + ik_k\right)\Pi^{**}_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{k},t)
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\Phi_{npjk} &= TF_{/\{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}\}}\Big(\overline{u_n(\boldsymbol{x_1},t)u_p(\boldsymbol{x_1},t)u_j(\boldsymbol{x_2},t)u_k(\boldsymbol{x_3},t)} \\
&\quad -\overline{u_n(\boldsymbol{x_1},t)u_p(\boldsymbol{x_1},t)} \times \overline{u_j(\boldsymbol{x_2},t)u_k(\boldsymbol{x_3},t)}\Big)
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^*_{npki} &= TF_{/\{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}\}}\Big(\overline{u_n(\boldsymbol{x_2},t)u_p(\boldsymbol{x_2},t)u_k(\boldsymbol{x_3},t)u_i(\boldsymbol{x_1},t)} \\
&\quad -\overline{u_n(\boldsymbol{x_2},t)u_p(\boldsymbol{x_2},t)} \times \overline{u_k(\boldsymbol{x_3},t)u_i(\boldsymbol{x_1},t)}\Big)
\end{aligned}
\tag{C.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi^{**}_{npij} &= TF_{/\{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}\}}\Big(\overline{u_n(\boldsymbol{x_3},t)u_p(\boldsymbol{x_3},t)u_i(\boldsymbol{x_1},t)u_j(\boldsymbol{x_2},t)} \\
&\quad -\overline{u_n(\boldsymbol{x_3},t)u_p(\boldsymbol{x_3},t)} \times \overline{u_i(\boldsymbol{x_1},t)u_j(\boldsymbol{x_2},t)}\Big)
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

$$
\Pi_{jk} = TF_{/\{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}\}}\Big(\overline{p(\boldsymbol{x_1},t)u_j(\boldsymbol{x_2},t)u_k(\boldsymbol{x_3},t)}\Big) \tag{C.6}
$$

$$
\Pi^*_{ki} = TF_{/\{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}\}}\Big(\overline{p(\boldsymbol{x_2},t)u_k(\boldsymbol{x_3},t)u_i(\boldsymbol{x_1},t)}\Big) \tag{C.7}
$$

$$
\Pi^{**}_{ij} = TF_{/\{\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}\}}\Big(\overline{p(\boldsymbol{x_3},t)u_i(\boldsymbol{x_1},t)u_j(\boldsymbol{x_2},t)}\Big) \tag{C.8}
$$

Hypothèse Quasi-Normale

Les corrélations quadruples sont de nouvelles inconnues. La démarche classique consiste à introduire (cf. Laporta [4]) une hypothèse de quasi-normalité (QN) dans l'espace physique en imposant que les corrélations quadruples sont fonctions des corrélations doubles. L'hypothèse quasi-normale s'écrit :

$$\overline{u_i u_j u_k u_l} \;=\; \overline{u_i u_j} \times \overline{u_k u_l} \;+ \overline{u_i u_k} \times \overline{u_j u_l} \;+ \overline{u_i u_l} \times \overline{u_j u_k} \tag{C.9}$$

On peut maintenant essayer de résoudre l'équation (C.1), étant donné qu'il n'y a plus de corrélations d'ordre supérieur qui interviennent. L'influence des gradients de vitesse moyenne complique la résolution et la démarche classique pour aboutir à une solution est d'émettre une nouvelle hypothèse : on néglige l'influence de ces gradients de vitesse moyenne afin de pouvoir trouver une solution à (C.1). Cette hypothèse a plusieurs fois été ennoncée, en particulier par Cambon *et al* (1981) [1] en THA soumise à un cisaillement constant ou Hanjalić *et al* [15] pour fermer le problème des corrélations doubles en un point.

Forme des corrélations triples

Les hypothèses précédentes étant énoncées, il nous est donc possible d'extraire la fonction de Green associée au problème (C.1). Finalement, on trouve la solution correspondant à des corrélations triples nulles à l'instant initial :

$$\begin{aligned}\Phi_{ijl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t) = \int_0^t \int_{\boldsymbol{x}'\epsilon\Omega'} \quad & \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\pi\nu(t-t')\right)} \exp\left(-i\,\frac{2}{3}\,\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{\frac{3}{2}\nu(t-t')}\right) \\ & \times \exp\left(-\nu(p^2+q^2+\frac{5}{6}\,k^2)\,(t-t')\right) \\ & \times S_{ijl}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t')\;\; d\boldsymbol{x}'\;\; dt'\end{aligned} \tag{C.10}$$

Développement au second ordre des corrélations triples

Dans l'expression (C.10) le terme $S_{ijl}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},t')$ est pondéré par une gaussienne $\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')^2}{\frac{3}{2}\nu(t-t')}\right)$ d'écart type $\left(\frac{3}{2}\pi\nu(t-t')\right)^{\frac{1}{2}}$.
On fait alors l'hypothèse que S_{ijl} est non-négligeable lorsque $\boldsymbol{x}'$ vérifie :

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq \left(\,\nu(t-t')\,\right)^{\frac{1}{2}}$$

On développe alors $S_{ijl}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t')$ en série de Taylor autour de $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned} S_{ijl}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t') = \quad & S_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t') \\ & +(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} S_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t') \\ & +\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})^2 \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} S_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t') \\ & + \dots \end{aligned}$$

On peut maintenant calculer la partie spatiale dans l'intégration de (C.10) en arrêtant le développement au deuxième ordre. Le spectre des corrélations triples prend alors la forme :

$$\Phi_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) = \int_0^t G^I_{kpq}(t - t') \, S_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t') \; dt' \tag{C.11}$$

avec le terme d'amortissement inhomogène

$$\begin{aligned} G^I_{kpq}(\tau) = \quad & \exp(- \nu \, (k^2 + p^2 + q^2) \, \tau) \\ \times \quad & \left(1 + \frac{i}{2} \nu \tau \left(\boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right) + \frac{3}{8} \nu \tau \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} - \frac{1}{8} \nu^2 \tau^2 \left(\boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{C.12}$$

(l'indice supérieur I souligne ici qu'il s'agit de la version inhomogène).

Introduction d'un amortissement tourbillonnaire

Dans l'expression (C.12), le terme d'amortissement contient une contribution complétement visqueuse. En turbulence homogène isotrope, ce type d'amortissement (visqueux) conduit à une surestimation des corrélations triples, et la conséquence est que la zone inertielle de Kolmogorov des spectres d'énergie ne se comporte pas en $k^{-\frac{5}{3}}$.

Les différentes études en THI conduisent à ajouter au terme visqueux $\nu \, (k^2 + p^2 + q^2)$ un nouveau terme artificiel μ_{kpq}, inverse d'un temps caractéristique de la turbulence. Ceci conduit à la formulation homogène :

$$G^H_{kpq}(\tau) = \exp(- (\, \nu \, (k^2 + p^2 + q^2) \; + \; \mu_{kpq} \,) \, \tau) \tag{C.13}$$

Orszag (1970) [9] en se référant à des considérations dimensionnelles proposa la forme :

$$\mu_{kpq} = \mu_k + \mu_p + \mu_q$$

avec

$$\mu_k = b \, \sqrt{k^3 \, E(\boldsymbol{x}, k, t)}$$

La constante b est reliée à la constante de Kolmogorov C_k par $b \, C_k \; = \; 0.19$ avec $C_k \simeq 1.5$. Donc $b \simeq 0.35$.

Une autre forme pour μ_k, la plus utilisée, a été proposée par Pouquet *et al* (1975) [39]. Celle-ci contrairement à la précédente n'est pas locale dans l'espace spectral :

$$\mu_p = \lambda \, \sqrt{\int_0^p \; k^2 \, E(\boldsymbol{x}, k, t) dk} \text{ (temps d'Obukhov)}$$

La constante λ a été ajustée par André *et al* (1977) [91] sur des calculs TFM (Test Field Model de Kraichnan (1972) [38]). Ces auteurs trouvent : $\lambda = 0.355$.

Nous pouvons reprendre ici l'idée d'un amortissement tourbillonnaire et le transposer de l'approche homogène à l'approche inhomogène.

Makovianisation des corrélations triples

Cette hypothèse consiste à considérer que dans l'expression (C.10), le terme $S_{ijl}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t')$ évolue très lentement relativement aux autres termes sous l'intégrale temporelle. La Markovianisation consiste alors à sortir S_{ijl} de l'intégration temporelle. On sait qu'en E.D.Q.N.M. la Markovianisation est utile car elle assure la réalisabilité des spectres d'énergie cinétique turbulente. Sous cette nouvelle hypothèse on peut maintenant écrire les corrélations triples :

$$\Phi_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) = \left(\int_0^t G^{I\ P}_{kpq}(t - t') \quad dt' \right) \quad S_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) \tag{C.14}$$

où l'indice supérieur P est relatif à au temps d'amortissement tourbillonnaire de Pouquet *et al* . On peut aussi introduire la nouvelle notation :

$$\Phi_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) = \Theta^{I\ P}_{kpq}(t) \;\; S_{ijl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{k}, t) \tag{C.15}$$

La forme asymptotique ($t \to \infty$) de $\Theta^{I\ P}_{kpq}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \Theta^{I\ P}_{kpq}(t) \;=\; & \frac{1}{(\,\nu\,(k^2 + p^2 + q^2)\;+\;\mu_{kpq})} \\ & \times \left(1 + \frac{1}{(\,\nu\,(k^2 + p^2 + q^2)\;+\;\mu_{kpq})} \left(\frac{i}{2}\nu \left(\boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial\, \boldsymbol{x}} \right) + \frac{3}{8}\nu \frac{\partial^{\,2}}{\partial\, \boldsymbol{x}^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\,\nu\,(k^2 + p^2 + q^2)\;+\;\mu_{kpq})^2} \nu^2 \left(\boldsymbol{k} \frac{\partial}{\partial\, \boldsymbol{x}} \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{C.16}$$

A ce stade, l'équation sur les spectres des corrélations doubles en deux points $\Phi_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}, t)$ est fermée étant donné que l'on a déterminé les corrélations pression-vitesse ainsi que les corrélations triples.

La dernière étape de simplification proposée par Laporta (1995) [4] est de faire un développement au second ordre de cette équation. Cette dernière démarche conduit finalement à obtenir la forme générique (II.48) des termes de transfert et de transport inhomogène.

Annexe D

Résultats complémentaires pour la simulation du diffuseur asymétrique

D.1 Introduction

Nous présentons ici des résultats complémentaires pour l'écoulement étudié dans la section IV.5. Cet écoulement a été proposé comme cas test par un groupe de travail du 8ème "workshop" ERCOFTAC/IAHR/COST (juin 1999[83]) portant sur l'amélioration des modèles de turbulence. Il s'agit d'un écoulement dans un diffuseur asymétrique bidimensionnel qui est représenté schématiquement sur la figure IV.32.

Les particularités de cet écoulement sont exposées dans la section IV.5.

D.2 Les quantités en un point prédites par le modèle spectral comparées à l'expérience ainsi qu'à différents modèles

Identifiant courbes	contributeur(s)	Modèle utilisé
UMIST DA/RS GL WF	Apsley UMIST	Gibson and Launder
UMIST DA/RS HJ	Apsley UMIST	Hanjalic and Jakirlic
CTR KFMLM	Kaltenbach *et al* , Stanford Univ.	SGS Dynamique (LES)
SCIT 1	Touil *et al* , Centrale Lyon	S.C.I.T.1 (spectral)

TAB. D.1 : Liste des modèles comparés dans le cas du diffuseur asymétrique

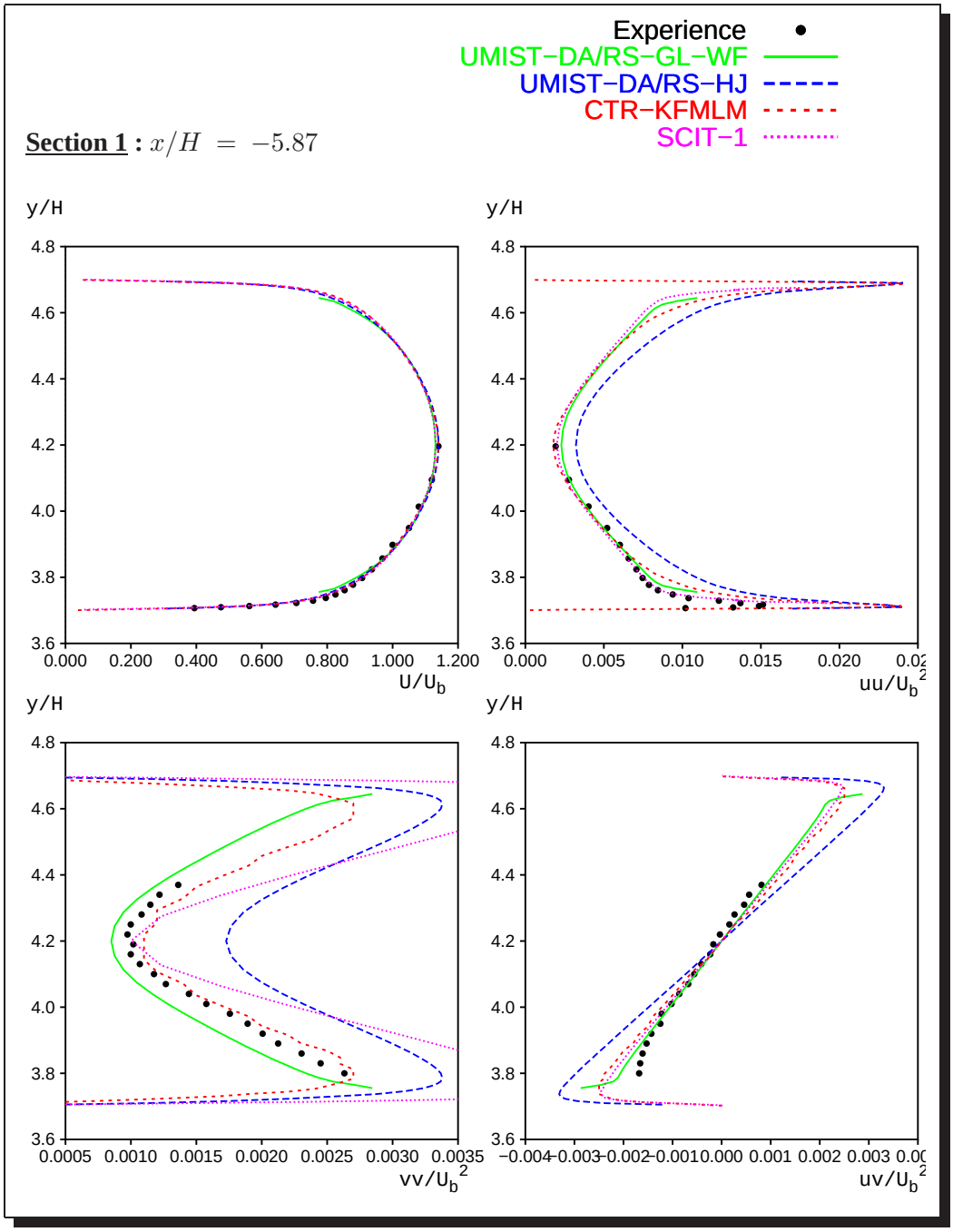

Figure D.1 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 1. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

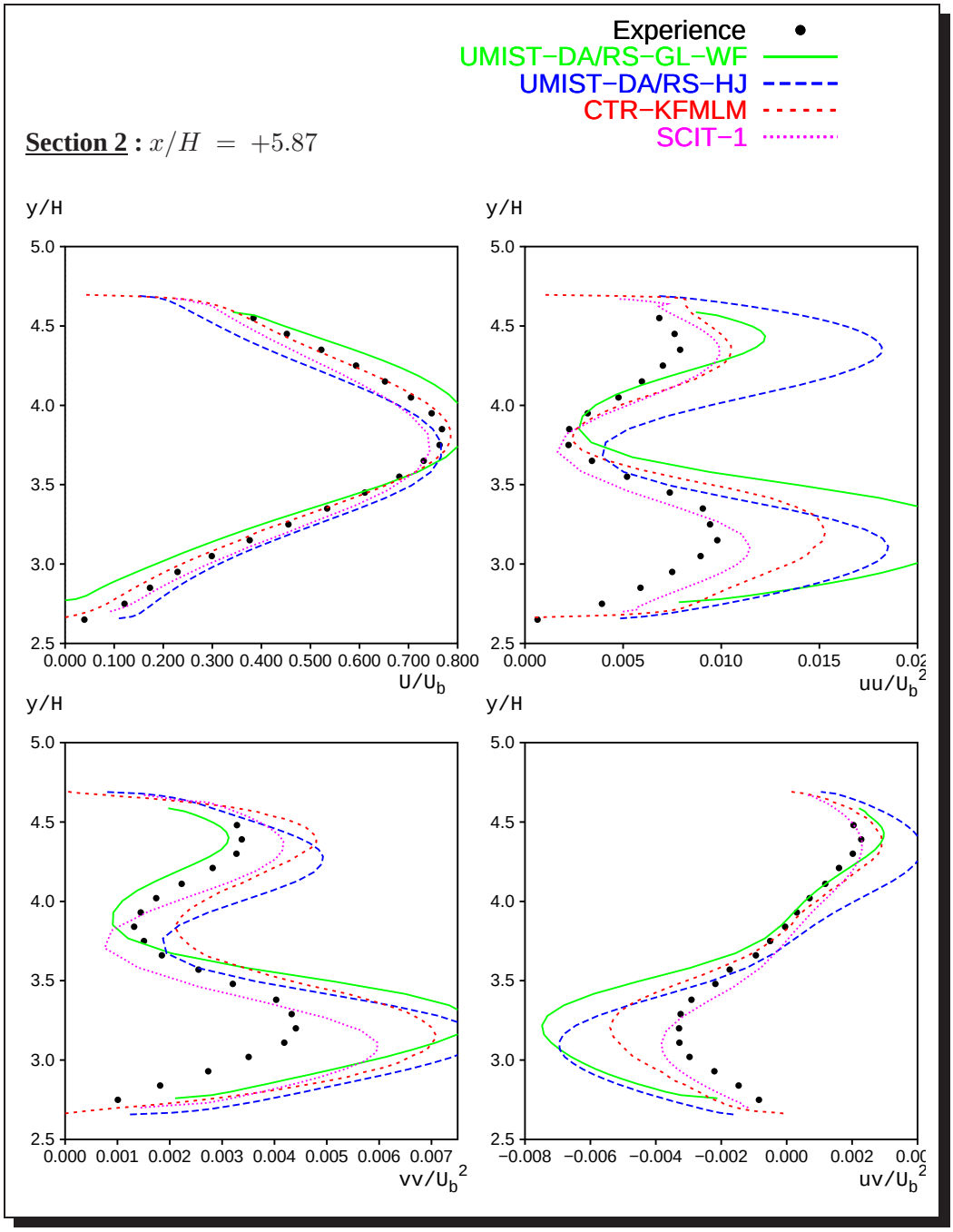

Figure D.2 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 2. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

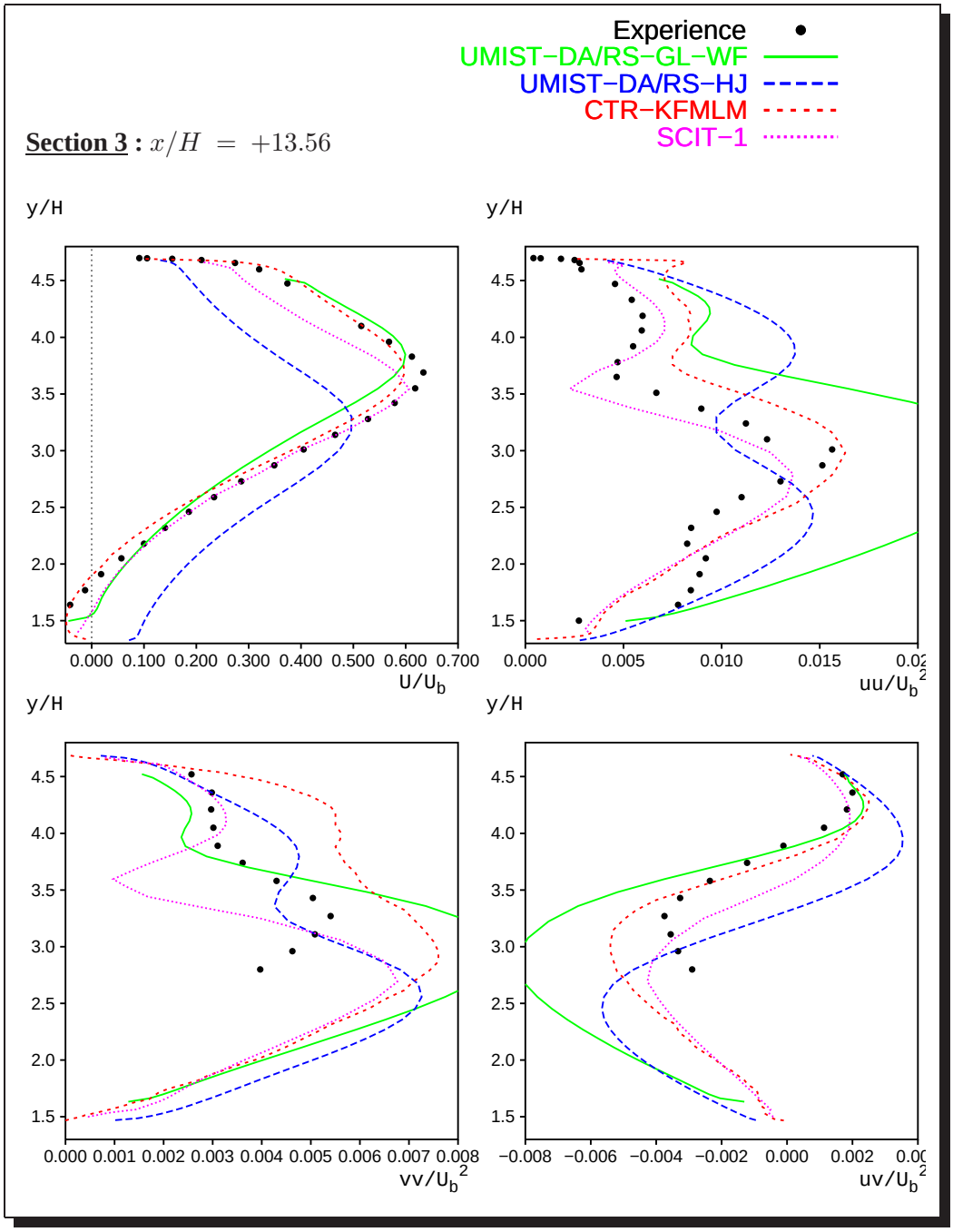

Figure D.3 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 3. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

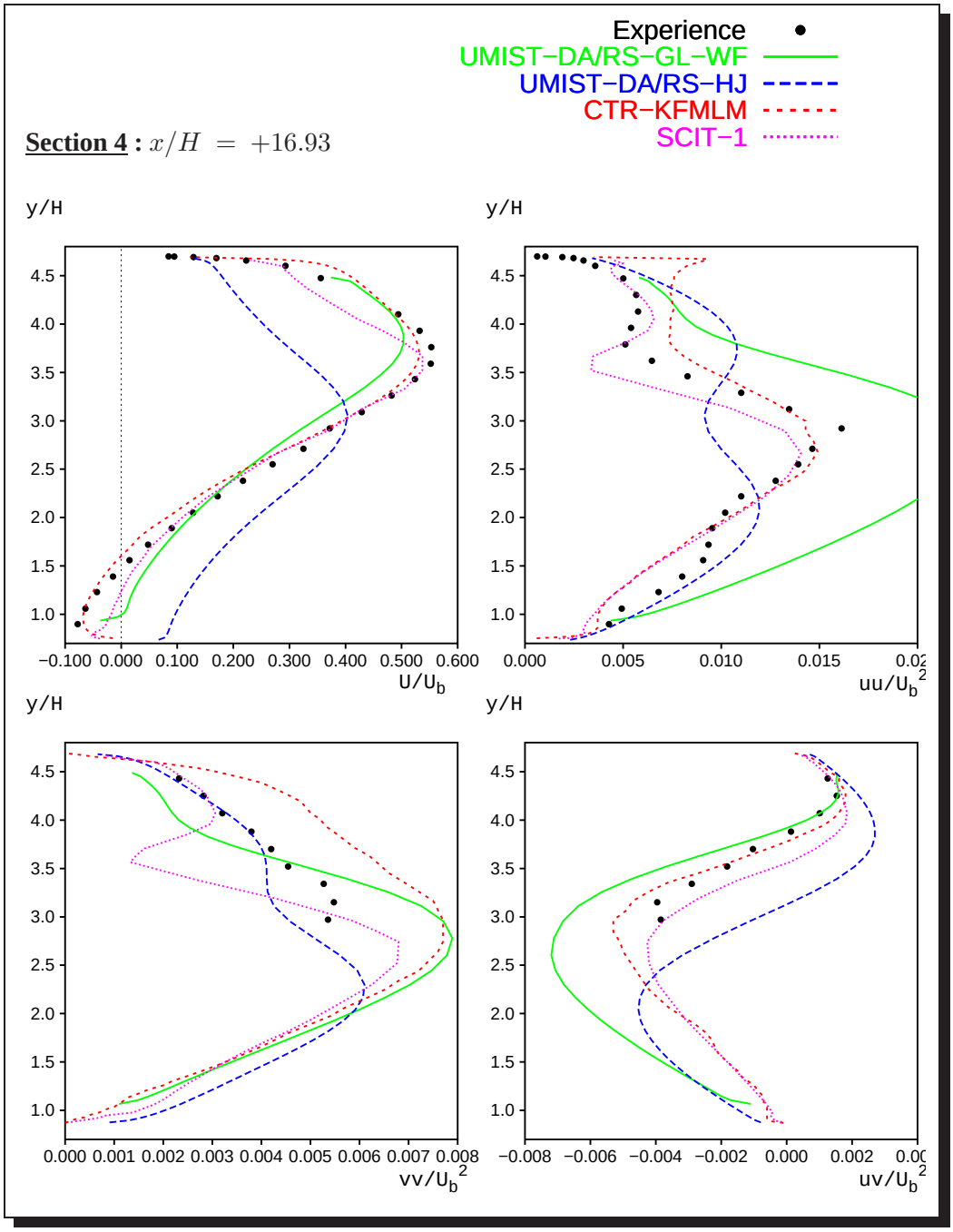

Figure D.4 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 4. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

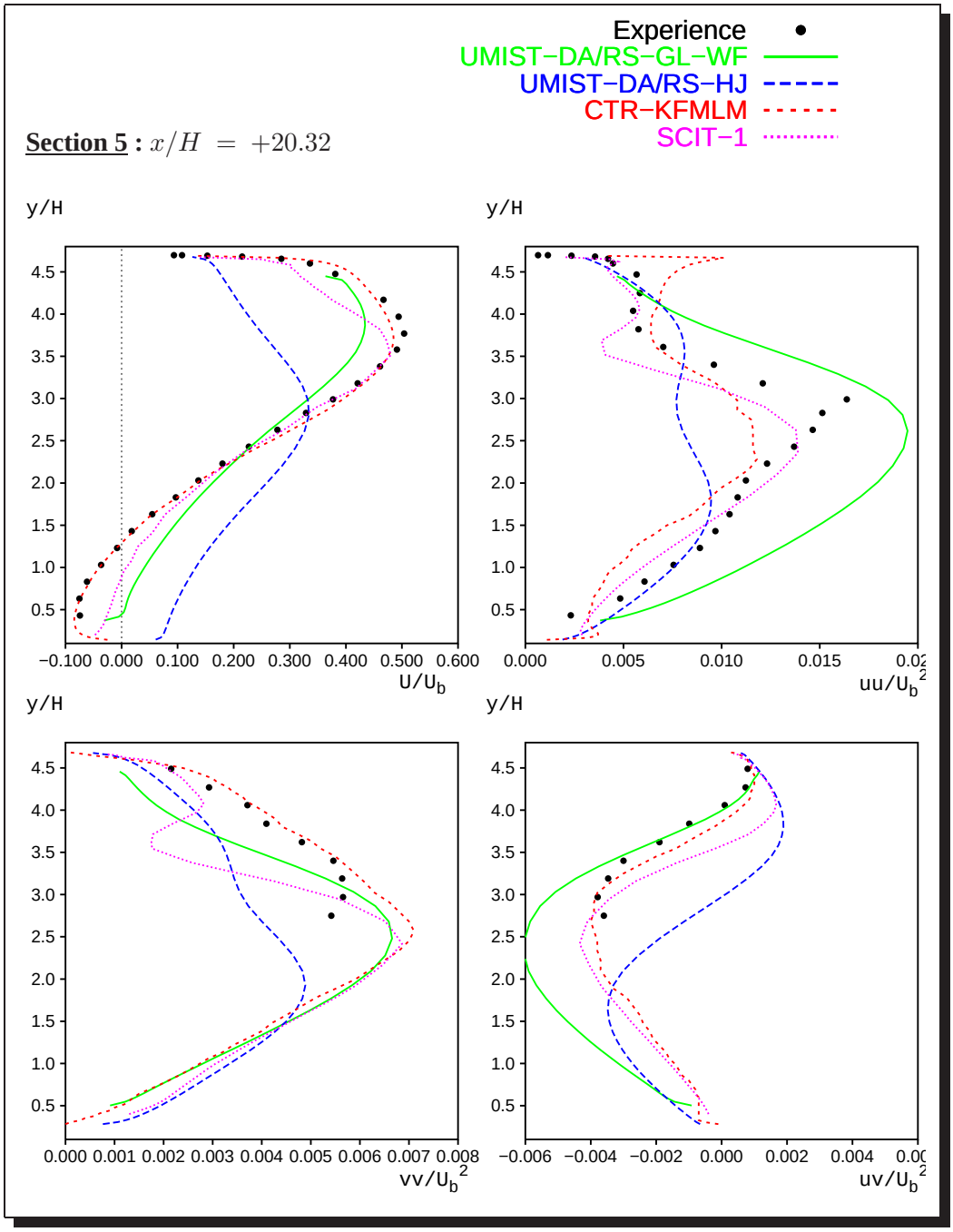

Figure D.5 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 5. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

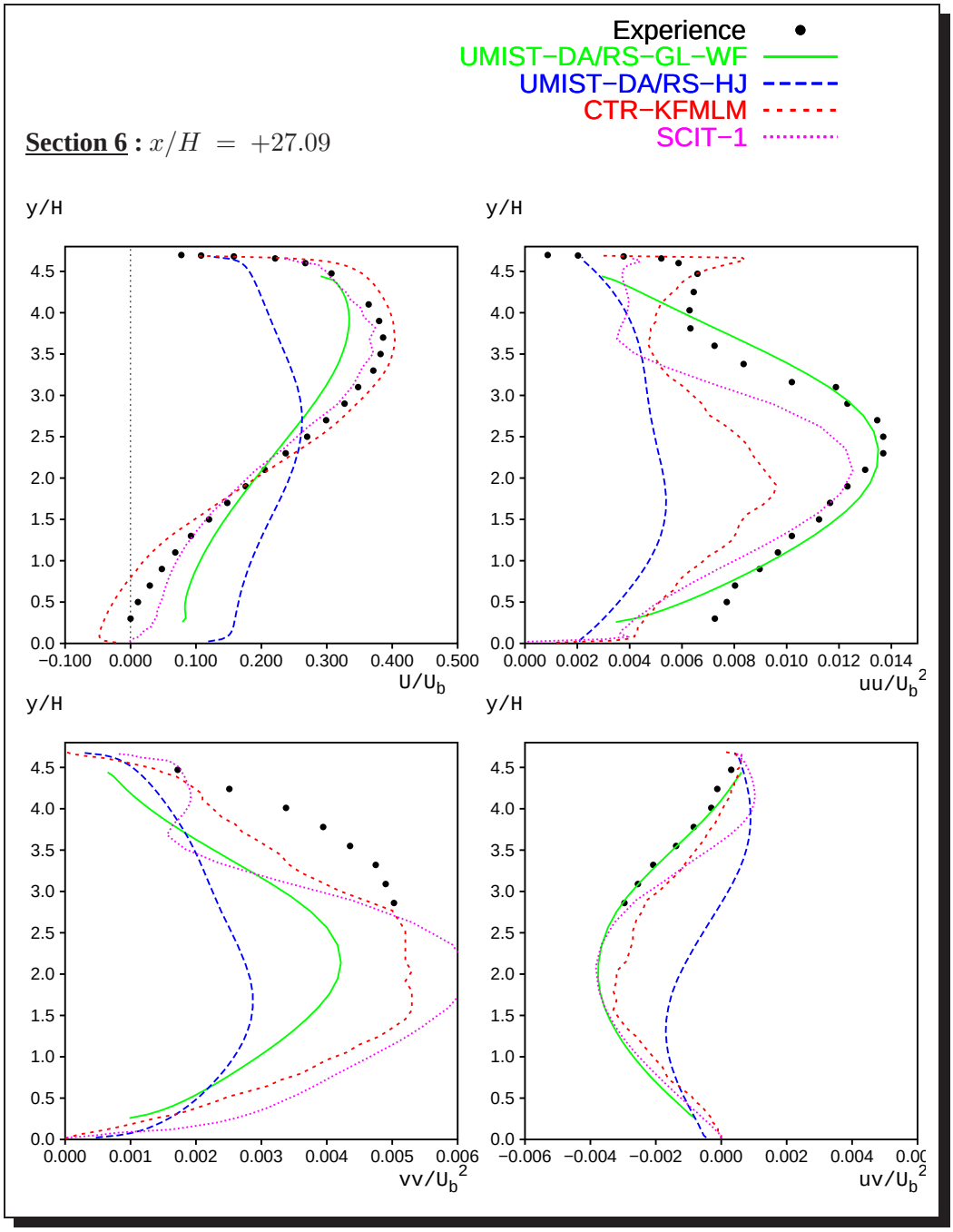

Figure D.6 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 6. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

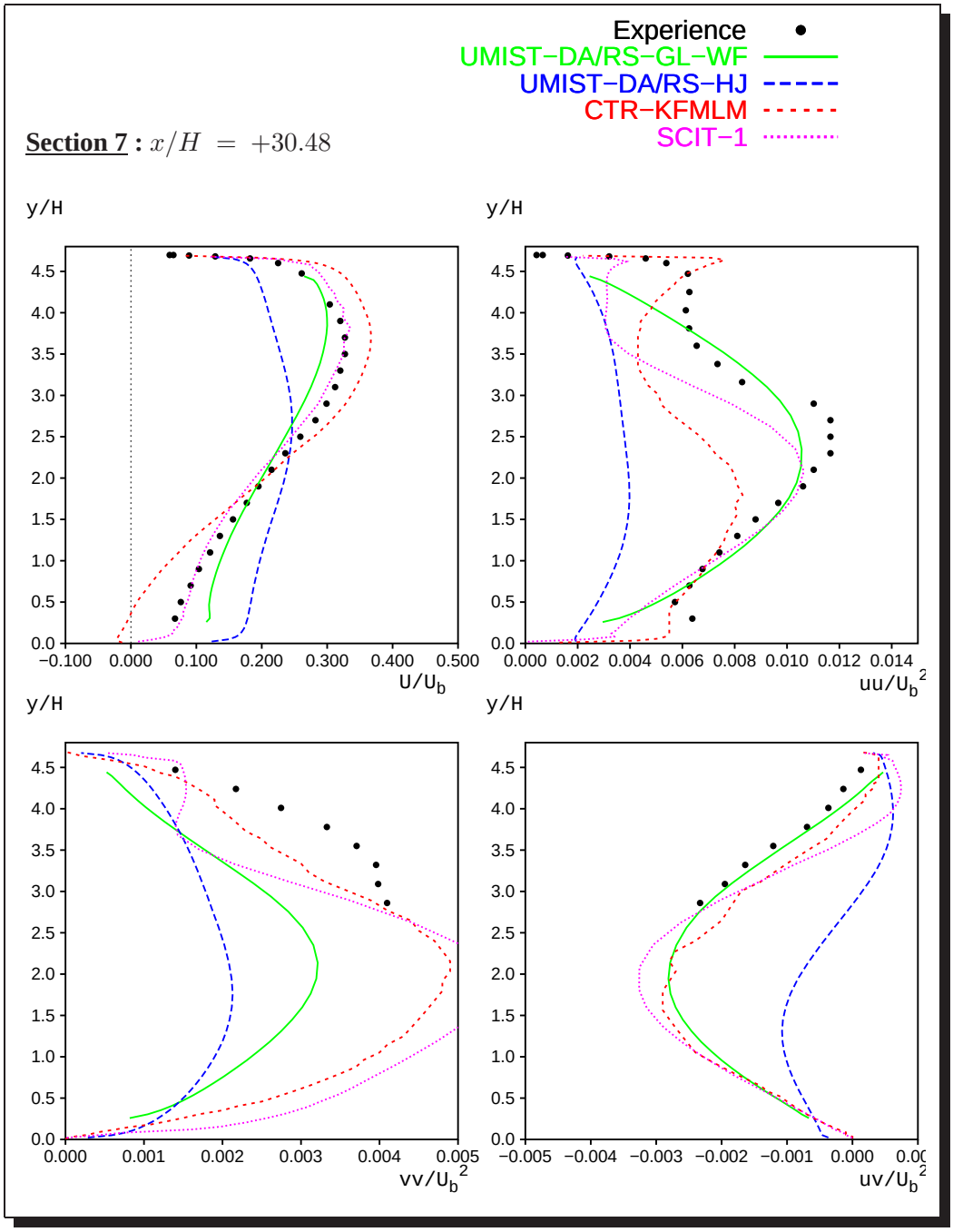

Figure D.7 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 7. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

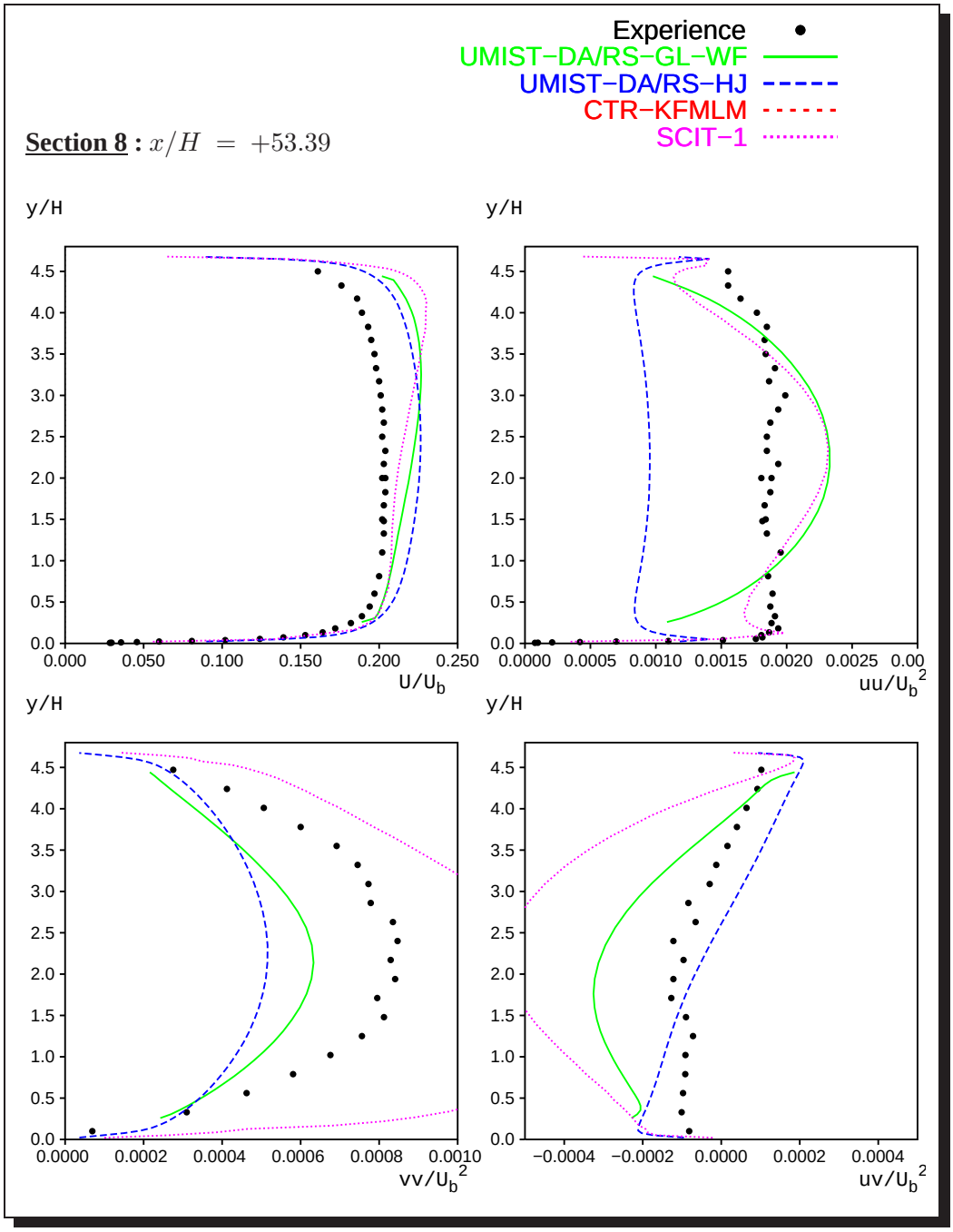

Figure D.8 : Profils des champs moyens dans le diffuseur asymétrique, section 8. De haut en bas et de gauche à droite : vitesse moyenne $\overline{U}_x$, tension de Reynolds $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ et $\overline{u\,v}$

Annexe E

Effets de la troncature spectrale sur le déclin d'une turbulence isotrope dans un domaine borné

Nous présentons dans cette annexe deux textes correspondants à des communications à des congrès [92, 93]. Le premier a également été accepté, dans une version modifiée, à *Journal of Turbulence*.

Ces deux textes ont trait à la décroissance d'une turbulence isotrope dans un domaine borné, l'influence des frontières du domaine étant simplement modélisée par une troncature spectrale semblable à celle introduite dans notre modèle. Nous avons utilisé des simulations directes (DNS), des simulations des grandes échelles (LES), le modèle EDQNM avec troncature et, pour finir notre modèle (SCIT). Une étude analytique est également proposée. Le résultat essentiel est que la troncature spectrale a pour effet, lorsque la "saturation" est atteinte, c'est à dire lorsque l'échelle intégrale turbulente a atteint la taille du domaine, d'induire une décroissance temporelle en $t^{-\frac{3}{2}}$ pour la vorticité r.m.s. ce qui est en accord avec l'expérience de Skrbek et Stalp [47] dans l'hélium liquide. Le second texte est une extension de l'étude au cas du scalaire passif.

ON THE DECAY OF SHEARLESS WALL BOUNDED TURBULENCE

J.P. Bertoglio, H. Touil and L. Shao
Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
UMR CNRS 5509 – Ecole Centrale de Lyon,
36 av. G. de Collongue, 69130 Ecully, France

ABSTRACT

The decay of turbulence in a wall bounded domain without mean velocity is investigated. Direct and Large-Eddy Simulations, as well as the Eddy Damped Quasi-Normal Markovian closure are used. The effect of the finite geometry of the domain is accounted for by introducing a low wave-number cutoff in the energy spectrum of isotropic turbulence. It is found that, once the saturation of the turbulent energy-containing length scale has occurred, the r.m.s. vorticity is decaying following a power law with a $-3/2$ exponent, in agreement with the helium superfluid experiment of Skrbek and Stalp (2000). The turbulent kinetic energy decay exponent is found to be -2, also in agreement with Skrbek and Stalp. Using scalings deduced from a simple analysis, all data can be collapsed into single curves for both the fixed scale turbulent regime and the final viscous period of decay. A spectral model for inhomogeneous turbulence is finally applied to the decay of turbulence between two plates. It is shown that results are in agreement with the helium experiment.

INTRODUCTION

In a recent study (Skrbek and Stalp, 2000), it was experimentally shown that wall bounded turbulence, generated by towing a grid in a channel, is decaying following a t^m power law for the r.m.s. vorticity, with m=-3/2. This regime is observed after a period of classical decay of unbounded isotropic homogeneous turbulence and once the turbulent energy-containing length scale has reached the size of the experimental facility (saturation time). The experiment was performed at the cryogenic Lab. of the University of Oregon, in helium superfluid. In liquid He_{II}, the (equivalent) Reynolds number is sufficiently high for the $-3/2$ decay regime to be observed before the final viscous decay occurs. In classical experiments, this would generally not be the case. In the same paper, it was also shown that the $-3/2$ exponent can be predicted by a simple spectral analysis, using the spectrum decay model originally proposed by Comte-Bellot and Corrsin (1966) modified by introducing a cutoff at low wave-numbers. The corresponding decay exponent for the turbulent kinetic energy was then predicted to be $n = -2$.

The idea of introducing a low wave-number cutoff (or infrared cutoff) in the spectrum to mimic the fact that in wall bounded flows, due to the presence of the geometrical boundaries, the energy-containing length scale must saturate at a size proportional to the wall distance, was suggested by Bertoglio & Jeandel (1986) and used in several related studies (Parpais, 1997, Touil *et al* , 2000). Indeed the infrared cutoff was one of the basic ingredients in the spectral approach of inhomogeneous turbulence followed by the above authors (development of the simplified spectral closure for inhomogeneous turbulence: SCIT model). The infrared cutoff assumption was found to lead to satisfactory results for wall bounded sheared turbulence. The high Reynolds number Oregon experiment is now offering an interesting opportunity to directly test this assumption against experimental data in a simple situation where there is no mean velocity gradient.

The purpose of the present study is then to further investigate the decay of turbulence with a low wave-number spectral cutoff. The low wave-number cutoff is therefore introduced in

1. the EDQNM closure for homogeneous isotropic turbulence (Orszag, 1970).
2. DNS and LES of isotropic turbulence.
3. the SCIT model (Parpais & Bertoglio, 1996).

In the case of the EDQNM closure, the problem of the finite size geometry was recently

addressed by Lesieur and Ossia (2000). They analysed the decay of turbulence at a high Reynolds number starting with an initial integral length scale one order of magnitude larger than the geometrical limit. In the present study, we use the same kind of approach to investigate the problem at different Reynolds numbers as well as to study the influence of the initial length scale ratios. In the case of numerical simulations, the problem was addressed by Borue and Orszag (1995) with an hyperviscosityand at high Renolds number. The periodicity of the numerical box was used for taking into account the length scale limitation. Existence of a self-similar decay with a -2 exponent for the turbulent kinetic energy was shown. In the present study, we use the same procedure to mimic the finite length scale effect in DNS and in LES. Reynolds number effect are also studied.

The results of the closure and those of the simulations are compared in section IV. They are also used to check the scaling laws deduced from the analytical study presented in section II. In the last section, the SCIT model is used to address the same problem in a situation in which the presence of walls is more realistically represented.

ANALYSIS AND SCALING

A simple analysis of the problem of the decay of turbulence with a constant length scale can easily be performed. It is indeed a problem that can be proposed to students as an application of a turbulence course (see Tennekes and Lumley, 1972, p. 25, problem 1.2). In the equation for the turbulent kinetic energy

$$k_{,t} = -\varepsilon \tag{1}$$

assuming that the dissipation ε is proportional to $k^{\frac{3}{2}}/L$ with L constant (equal to the dimension of the containing vessel d) immediately leads to a decay law with an exponent $n = -2$ for the turbulent kinetic energy. More precisely, writing

$$\varepsilon = c_2 \; u'^3/d \tag{2}$$

leads to the solution

$$k = 9d^2 c_2^{-2} \; (t - t_{vo})^{-2} \tag{3}$$

in which t_{vo} is a virtual origin. The corresponding decay exponents for the dissipation and the $r.m.s.$ vorticity are immediately found to be -3 and $-3/2$ respectively. Equation (3) corresponds to the regime in which the energy-containing length scale is saturated. A simple way to study the behaviour of the flow before saturation is to extend the spectrum analysis of Comte-Bellot and Corrsin by introducing a low wave-number cutoff at K_{inf}=$2\pi/d$. This was done by Skrbek and Stalp (2000). We reproduce here the simplest version of their approach (neglecting the influence of intermittency and of the "rounding" of the spectrum in the vicinity of its maximum). The turbulent energy spectrum is assumed to be

$$\begin{array}{lll} E(K,t) = 0 & \text{for} & K < K_{inf} \\ E(K,t) = A \; K^s & \text{for} & K_{inf} \leq K \leq K_e \\ E(K,t) = C \; \varepsilon^{\frac{2}{3}}(t) K^{\frac{-5}{3}} & \text{for} & K \geq K_e \end{array} \tag{4}$$

in which A is supposed to be constant during the decay and C is the Kolmogorov constant. Expressing the continuity of the spectrum at K_e, evaluating $k(t)$ by wave-number integration of $E(K,t)$ and replacing in (1) lead to the classical decay exponent $n = -2\frac{(s+1)}{s+3}$ in the regime before saturation, that is to say before K_e has reached K_{inf}. The approach also permits to evaluate the time ${t_{sat}}^*$ at which $K_e = K_{inf}$ (saturation time). For $s = 2$, this leads to expression (24) in Skrbek and Stalp (2000), whereas for $s = 4$, it is found

$${t_{sat}}^* = \frac{17}{7} A^{-\frac{1}{2}} C^{\frac{3}{2}} (K_{inf}^{-\frac{7}{2}} - K_e(0)^{-\frac{7}{2}}) \tag{5}$$

The energy at saturation can also be expressed. For $s = 4$, one obtains

$$k^*_{sat} = (3/2) \; A \; K^5_{inf} \tag{6}$$

After ${t_{sat}}^*$, saturation of scales occurs and the spectral analysis leads to recover equation (3), with $c_2 = 2\pi C^{-\frac{3}{2}}$. Turbulence then decays with the -2 exponent until the beginning of the final viscous regime. The characteristic time t^*_ν for the beginning of the viscous decay can also be estimated following Tennekes and Lumley. Assuming that during the viscous decay the dissipation is

$$\varepsilon = c_1 \nu u'^2/d^3 \tag{7}$$

and defining t^*_ν as the cross-over time at which both (2) and (7) are valid lead to

$$t^*_\nu = t^*_{sat} - \frac{6\pi}{c_2} A^{-1/2} K_{inf}^{-7/2} + \frac{12\pi^2}{\nu c_1} K^{-2}_{inf} \tag{8}$$

The corresponding turbulent kinetic energy is

$$k^*_\nu = \frac{3}{8\pi^2} \nu^2 (\frac{c_1}{c_2})^2 K^2_{inf} \tag{9}$$

Note that in Skrbek and Stalp (2000), the procedure for estimating the viscous scaling is different. However the resulting expressions only slightly differ. Both approaches lead to a $1/(\nu K_{inf}^2)$ scaling for t_ν^* with a slightly different prefactor.

DNS AND LES COMPUTATIONS

To investigate the decay of turbulence in a bounded domain using LES and DNS, a simple way is to use a low wave-number cutoff in a simulation of isotropic turbulence. This can be done by taking advantage of the scale limitation introduced by the periodicity of the computational domain when using a pseudo-spectral technique in a periodic box. The wave-number cutoff is then $K_{inf} = 2\pi/d$ in which d is the size of the computational box. Indeed, such a low wave-number cutoff is present in all simulations of isotropic turbulence, but one is usually trying to avoid its effect by performing the computations in a large enough box. In decaying turbulence, since the integral length scale is increasing with time, computations are usually stopped before K_e becomes of the order of K_{inf}. Instead, we are here performing simulations in a box whose dimensions are not necessarily large compared to the integral turbulence length scale and we are not stopping the runs when the scale limitation induced by the box size begins to take place. The same procedure was used by Borue and Orszag (1995) to mimic the finite length scale effect in their hyperviscosity computations when studying the self similar decay of turbulence.

The code used for the DNS and LES computations is a classical pseudo-spectral code with scond order Runge-Kutta time integration scheme. All the computations were performed at a resolution of 128^3 grid points. As initial spectrum, we use

$$E(K,0) = 2.5\ 10^{-3}(\tfrac{K}{K_{max}})^4(1+(\tfrac{K}{K_{max}})^2)^{-17/6} \quad (10)$$

with $K_{max} = 33\ m^{-1}$ (value corresponding to a fit of the spectrum measured by Comte-Bellot and Corrsin (1971) at $x/M = 42$). Note that the low wave-number cutoff is implicitly imposed at $K_{inf} = 2\pi/d$ by the numerical discretisation to this spectrum which would otherwise behaves as K^4 at small K.

In the case of DNS, the Reynolds number Re_{l_0}, built on the initial integral length scale l_0 is equal to 5000. To investigate larger Reynolds numbers, LES computations were performed. The subgrid model is the Chollet and Lesieur (1981) eddy viscosity model, modified to account for finite Reynolds number effects (see Chollet (1983) and Parpais (1997)). The spectral viscosity is:

d/l_0	$Re_{l_0} \simeq 5.10^3$	$Re_{l_0} \simeq 5.10^5$	$Re_{l_0} \simeq 5.10^7$
6	DNS	LES	LES
6	EDQNM		EDQNM
9	DNS	LES	LES
9	EDQNM		EDQNM
12	Quasi-DNS	LES	LES
12	EDQNM		EDQNM
24	LES	LES	
24	EDQNM		EDQNM
48		LES	
48		EDQNM	EDQNM
240			EDQNM

Table 1: The different computed cases.

$$\nu_t(K) = 0.267\sqrt{\frac{E(K_c)}{K_c}} * f(\frac{K_c}{K_\eta})g(\frac{K}{K_c}) \quad (11)$$

in which K_c is the LES wave-number cutoff. $f(K_c/K_\eta)$ is a low Re correction:

$$f(\frac{K_c}{K_\eta}) = (1-(\frac{K_c}{K_\eta}))^{4/3}\left(1+\frac{1}{a}ln\left(\frac{1+a(\frac{K_c}{K_\eta})^{-4}}{1+a}\right.\right. \quad (12)$$

K_η is the Kolmogorov wave-number estimated using $K_\eta = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$, a is equal to $\lambda\sqrt{3C}/2$ and $g(\frac{K}{K_C})$ represents the "cusp" effect :

$$g(K/K_c) = 1 + 0.4724(K/K_c)^{0.372} \quad (13)$$

Use of (11) instead of the original Chollet and Lesieur model has the advantage of permitting a smooth transition from LES to DNS as the Reynolds number decreases. This happens to be the case during the decay of isotropic turbulence. As a matter of fact, most of the LES computations presented in the paper are indeed DNS at the end of their time evolutions. Three values of the Reynolds number were investigated using LES. The influence of the finite size of the domain were investigated by varying d. All DNS and LES computations are summarized in table 1. The initial integral length scale l_0 is used for normalization.

EDQNM COMPUTATIONS

In the case of the Eddy Damped Quasi-Normal Markovian (EDQNM) closure, computations are performed using the classical formulation of the model for homogeneous isotropic turbulence (Orszag, 1970). The closed equation for the kinetic energy spectrum is

$$E(K,t)_{,t} = -2\nu K^2 E(K,t) + T(K,t) \quad (14)$$

The EDQNM characteristic time scale is given by

$$\theta_{KPQ}(t) = \frac{(1 - e^{-(\eta_K+\eta_P+\eta_Q)t})}{(\eta_K + \eta_P + \eta_Q)} \qquad (15)$$

in which the damping coefficient is expressed as

$$\eta_K = \lambda\sqrt{\int_0^K P^2 E\, dP} + \nu K^2 \qquad (16)$$

as proposed in Pouquet *et al* (1975). For λ we use the classical value $\lambda = 0.355$. Note that we have here used (**??**), instead of its large time asymptotical form $\theta_{KPQ} = \dfrac{1}{\eta_K + \eta_P + \eta_Q}$ in order to permit the comparisons with the DNS which start with zero third order correlations at $t = 0$. The model is applied to wave-numbers ranging from K_{inf} (low wave-number or infrared cutoff, related to the size d of the bounded domain by $K_{min} = 2\pi/d$) to K_η (Kolmogorov wave-number). The energy-containing range is characterized by the wave-number K_e. At time $t = 0$, the initial conditions are such that $K_e > K_{inf}$ and the spectrum is identical to the one used for the DNS and LES previously described. The different cases treated with the closure are summarized in table I (together with the DNS and LES computations). Compared to DNS, EDQNM has the advantage of permitting computations at higher Reynolds numbers as well as with larger initial values of the ratio K_e/K_{inf}. Compared to LES, it still has the advantage of permitting to account for larger K_e/K_{inf}. The maximum value of K_e/K_{inf} in LES is limited by the fact that the filter cutoff must be in the inertial (or dissipative) range of the spectrum for existing subgrid models to be reliable.

Note that to relate the results of these EDQNM and DNS/LES computations to the experimental situation of a grid generated turbulent field in a confined geometry, it has to be assumed that, even if the flow is bounded by rigid walls, its global behavior can be accounted for by an isotropic and quasi-homogeneous description. A similar assumption was made by Skrbek and Stalp (2000) when applying the spectral analysis to their experiment.

RESULTS

In Fig. 1, the time evolution of the r.m.s. vorticity is plotted for the low Reynolds number case ($Re_{l_0} = 5000$, see table I). Three d/l_0 ratios are considered. For $d/l_0 = 6$ and 9, the simulations are fully resolved DNS. The third case, referred to as quasi-DNS, corresponds to a low Reynolds number LES that rapidly becomes a DNS as time evolves, as the subgrid viscosity defined by (11) is rapidly decreasing. At $t/t_{turn-over} = 10$, ν_t is already smaller by a factor 100 than the molecular viscosity. Before $t/t_{turn-over} = 10$, the simulation is a LES and therefore the r.m.s. vorticity is not plotted. In the log-log plot in Fig. 1, the existence of a $-3/2$ power law is clearly observed for the DNS runs. Before the $-3/2$ regime, a less steep decay is observed, although it is difficult to really detect a power law, saturation occurring before it could develop. It has to be pointed out that no attempts were made in the present study to adjust the virtual origin to improve the fit of the data with a power law. The

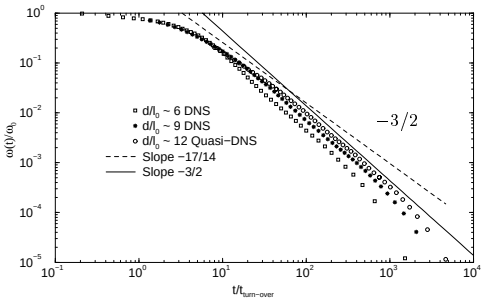

Figure 1: Decay of r.m.s. vorticity and comparison with theoritical decay laws. DNS and Quasi-DNS Re_{l_0}=5000

corresponding time evolutions of the turbulent kinetic energy are plotted in Fig. 2. Also shown in Fig. 2 are results of two LES runs. The first one corresponds to a value of d twice larger than for the quasi-DNS, at the same Reynolds number, whereas the second one corresponds to d four times larger and a higher Reynolds. In the case of the LES, only the filtered energy is plotted. After saturation has occurred, the -2 decay exponent is observed. Before saturation, a power law with an exponent close to $-10/7$ is clearly detected for the largest values of d. It can also be observed in Fig. 2 that at very large time, the power laws are no longer valid and that the viscous decay occurs. In Fig. 3, the same results are compared with the results of the EDQNM closure. The agreement is good and the EDQNM appears to capture the t^{-2} regime in agreement with Lesieur and Ossia (2000) results. All these results can be collapsed into a single curve in the time ranges corresponding to the two turbulent decay regimes (before and after saturation) by using the scalings provided by equations (5)

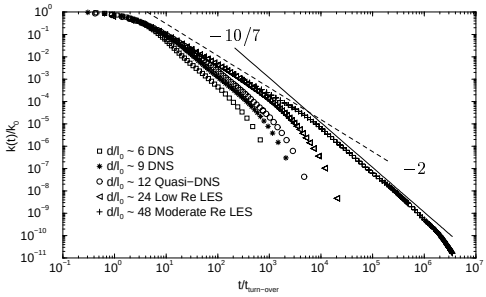

Figure 2: Decay of turbulent kinetic energy. DNS and LES results at low Re number.

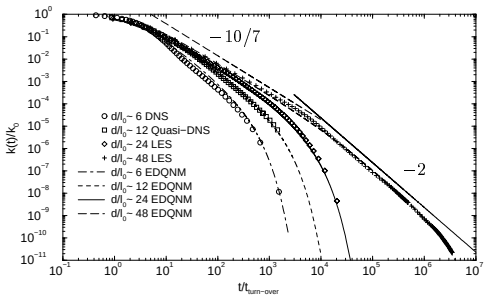

Figure 3: Same as Fig. 2, plus EDQNM results.

and (6), as appears in Fig. 4. Also plotted in Fig. 4 are results of the closure obtained for a much larger value of d ($d/l_0 = 240$ and $Rel_0 = 5 \times 10^7$). To collapse the data in the final viscous regime, we use the scaling provided by equations (8) and (9) (with the value for the ratio $c_1/c_2 = 10$ originally suggested in Tennekes and Lumley). The results are shown in Fig. 5. In figure 6, the turbulent kinetic en-

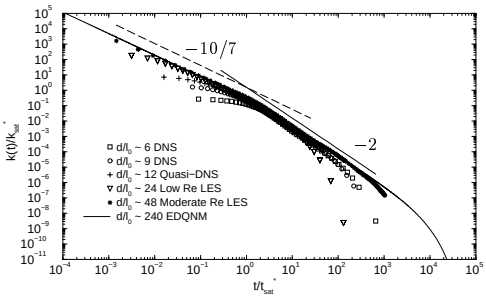

Figure 4: Decay of turbulent kinetic energy normalized by k^*_{sat} as a function of t/t^*_{sat}.

ergy spectra are plotted during the fixed scale decay regime (LES). The compensated spectra are normalised by $\varepsilon^{\frac{2}{3}}(t)$, with values of ε deduced from the LES by adding the subgrid flux to the molecular dissipation. It can be observed that the spectra collapse, which confirms the existence of a self similar regime, in agreement with what was found by Borue and

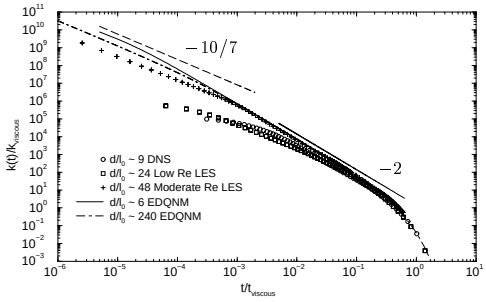

Figure 5: Decay of turbulent kinetic energy normalized by k^*_0 as a function of t/t^*_0.

Orszag (1995). A $k^{-\frac{5}{3}}$ range is clearly present, as was the case in Borue and Orszag, the main difference with their results being that their compensated spectra exhibited a large bump before the high wave-number cutoff due to the use of an hyperviscosity.

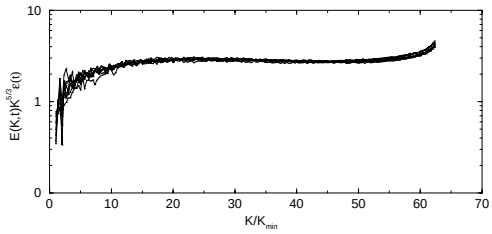

Figure 6: Energy spectra between $t/t_{turn-over} = 50$ and 5000, large Re LES computations.

SCIT MODEL RESULTS

As stated above to relate the results of the EDQNM and DNS/LES computations presented in the previous paragraphs to the experimental situation of a grid generated turbulent field in a confined geometry, it has to be assumed that the global behaviour of the flow can be accounted for by an isotropic and quasi-homogeneous description. In order to take into account more realistically the fact that the flow is bounded by rigid walls, we now use the SCIT model. The model proposed in Touil *et al* (2000) is applied to a flow between two plates, without mean velocity. In this case, the low wave-number cutoff is built in the model and it is no longer necessary to assume that the flow is behaving as if it was homogeneous and isotropic. Inhomogeneous transport effects as well as wall boundary conditions are accounted for in the model.

In the case of a turbulent field between two infinite plates, there is only one direction of inhomogeneity and the model equations can be reduced to a transport equation for the energy

spectrum

$$E_{,t} = -2\nu K^2 E + T + D \qquad (17)$$

T is the non linear transfer term. It is expressed using equation (13). $D(K,t)$ is a transport term typically associated with inhomogeneous effects. It is expressed as $D = (d_{eff} E(K, x_1, t)_{,x_2})_{,x_2}$ in which d_{eff} is a turbulent diffusivity. The low wave-number cutoff, it is now varying locally with the distance from the wall $K_{inf} = cte/x_2$, with $cte = 0.5$ (see Parpais, 1997). The results of the model are plotted in figure 6 and illustrate that again the $-3/2$ and -2 decay exponents are found.

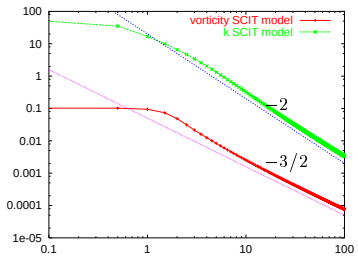

Figure 7: Decay of turbulent kinetic energy and vorticity between two plates, SCIT model.

CONCLUSION

The problem of the decay of turbulence in a finite domain was investigated using DNS, LES and the EDQNM closure by introducing a infrared cutoff length scale limitation. The results show that once the energy-containing turbulent length scale has reached the limit, a decay regime with a -2 exponent for the turbulent kinetic energy is found. The associated exponent for the r.m.s. vorticity is -3/2, in agreement with the experiment of Skrbek and Stalp (2000). Before the length scale saturation, a classical homogeneous decay regime takes place, whereas at very large time a viscous regime appears. The three regimes and the transition between them can be collapsed using the scalings deduced from a simple analysis similar to the one proposed by Skrbek and Stalp. The fact that a low wave-number spectral cutoff assumption leads to correctly reproduce the global behaviour of the turbulent decay observed in a wall bounded experiment provides support to models for inhomogeneous turbulence that rely on this assumption.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors would like to thank G. Comte-Bellot for helpful discussions and M. Lesieur who provided a numerical code that was used for the closure part of the study.

REFERENCES

Bertoglio, J.P., and Jeandel, D., 1986, "A Simplified Spectral Closure for Inhomogeneous Turbulence: application to the Boundary Layer", *5th TSF*, Springer-Verlag, Cornell Univ.

Borue, V., and Orszag, S., 1995, "Self-similar decay of three-dimensional homogeneous turbulence with hyperviscosity", *Phys. Rev. E*, Vol. 52, pp. 856-859.

Chollet, J.P. and Lesieur,M, 1981, "Parametrisation for small scales of three dimensional isotropic turbulence using spectral closure." *J. Atmos. Sci.*,38:2747-2757.

Chollet, J.P., 1983, "Statistical closure to derive a sub-grid-scale modeling for large eddy simulations of three dimensional turbulence", Tech. note TN 206, NCAR.

Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., 1966, "The use of contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence", *JFM* , Vol. 25(3), pp. 657-682.

Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., 1971, "Simple Eulerian Time-Correlation of Full and Narrow-Band Velocity Signals in Grid-Generated Isotropic Turbulence", *JFM*, vol. 48, pp. 273-337.

Lesieur, M., and Ossia, S., 2000, "3D isotropic turbulence at very high Reynolds numbers:EDQNM study", *J. of Turb.*, Vol. 1(7), pp. 1-25.

Orszag, S., 1970, "Analytical theories of turbulence", *J. Fluid Mech.*, Vol. 41(2), pp. 363-386.

Parpais, S., 1997, "Développement d'un modèle spectral pour la turbulence inhomogène. Résolution par une méthode d'éléments finis", PhD Th., Ecole Centrale de Lyon.

Pouquet, A., Lesieur, M., André, C., and Basdevant, J.-C., 1975, "Evolution of high Reynolds number two-dimensionnal turbulence", *JFM*, Vol. 72, pp. 305-319.

Skrbek, L., and Stalp, S.R., 2000, "On the decay of homogeneous isotropic turbulence", *Phys. Fluids*, Vol. 12(8), pp. 1997-2019.

Tennekes, H., and Lumley, J. L., 1972, "A first course in turbulence", *MIT Press.*

Touil, H., Bertoglio, J.-P., and Parpais, S., 2000, "A spectral closure applied to anisotropic inhomogeneous turbulence", *8th ETC EUROMECH*, Barcelona.

Decay of Wall Bounded Turbulence and Turbulent Scalar Field

J.P. Bertoglio, H. Touil L. Shao and G. Lamaison

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique
UMR CNRS 5509 – Ecole Centrale de Lyon,
36 av. G. de Collongue, 69130 Ecully, France

Abstract

The decay of turbulence and of an associated passive scalar, in a wall bounded domain without mean velocity is investigated. Direct and Large-Eddy Simulations, as well as the Eddy Damped Quasi-Normal Markovian closure are used. The effect of the finite geometry of the domain is accounted for by introducing a low wave-number cutoff in the energy spectrum of isotropic turbulence. It is found that, once the saturation of the turbulent energy-containing length scale has occurred, the r.m.s. vorticity is decaying following a power law with a $-3/2$ exponent, in agreement with the experiment of Skrbek and Stalp (2000). The turbulent kinetic energy decay exponent is found to be -2, also in agreement with Skrbek and Stalp. Using scalings deduced from a simple analysis, all data concerning the velocity field can be collapsed into single curves. The scalar variance is found to decay following a power law with an exponent that depends on the ratio between the Corrsin Obukhov and Kolmogorov constants.

Introduction

In a recent study (Skrbek and Stalp, 2000), it was experimentally shown that wall bounded turbulence, generated by towing a grid in a channel, is decaying following a t^m power law for the r.m.s. vorticity, with m=-3/2. This regime is observed after a period of classical decay of unbounded isotropic homogeneous turbulence and once the turbulent energy-containing length scale has reached the size of the experimental facility (saturation time). The experiment was performed in helium superfluid. In He_{II}, the (equivalent) Reynolds number is sufficiently high for the $-3/2$ decay regime to be observed before the final viscous decay occurs. In the same paper, it was also shown that the $-3/2$ exponent can be predicted by a simple spectral analysis, using the spectrum decay model originally proposed by Comte-Bellot and Corrsin (1966) modified by introducing a cutoff at low wave-numbers. The corresponding decay exponent for the turbulent kinetic energy was then predicted to be $n = -2$. The idea of introducing a low wave-number cutoff (or infrared cutoff) in the spectrum to mimic the fact that in wall bounded flows, due to the presence of the geometrical boundaries, the energy-containing length scale must saturate at a size proportional to the wall distance, was suggested by Bertoglio & Jeandel (1986) and used in several related studies. Indeed the infrared cutoff was one of the basic ingredients in the spectral approach of inhomogeneous turbulence followed by these authors. It is important to point out that to relate the results of this type of approach to the experimental situation of a grid generated turbulent field in a confined geometry, it has to be assumed that, even if the flow is bounded by rigid walls, its global behavior can be accounted for by an isotropic and quasi-homogeneous description in which inhomogeneous effects are only reflected through the low wave-number cutoff in the spectra. A similar assumption was made by Skrbek and Stalp (2000) when applying the spectral analysis to their experiment. This assumption will be discussed in the conclusion.

The purpose of the present study is to further investigate the decay of turbulence with a low wave-number spectral cutoff, as well as to address the problem of the influence of the upper bound for the length scale on the behavior of a passive scalar advected by the fluid. The low wave-number cutoff is therefore introduced in

1. the EDQNM closure for homogeneous isotropic turbulence with a scalar (Herring et al. 1982).
2. DNS and LES of isotropic turbulence and of the associated scalar field.

In the case of the EDQNM closure, the problem of the finite size geometry was recently addressed by Lesieur and Ossia (2000). In the present study, the same kind of approach is used to address the problem of the passive scalar decay. In the case of numerical simulations, the problem of decaying turbulence with an upper length scale bound was addressed by Borue and Orszag (1995) with an hyperviscosity. The periodicity of the numerical box was used for taking into account the length scale limitation. In the present paper, we use the same procedure to mimic the finite length scale effect in DNS and in LES, and the study is extended to the case of a passive scalar decaying field. The Prandtl number is set equal to unity.

Analysis and Scalings

A simple analysis of turbulence decay with a constant length scale can be performed (Tennekes and Lumley, 1972). In the equation for the turbulent kinetic energy

$$k_{,t} = -\varepsilon \tag{1}$$

assuming that the dissipation ε is proportional to $k^{\frac{3}{2}}/L$ with L constant (equal to the dimension of the containing vessel d) immediately leads to a decay law with an exponent $n = -2$ for the turbulent kinetic energy. More precisely, writing

$$\varepsilon = c_2 \ u'^3/d \tag{2}$$

leads to the solution

$$k = 9d^2 c_2^{-2} \ (t - t_{vo})^{-2} \tag{3}$$

in which t_{vo} is a virtual origin. The corresponding decay exponents for the dissipation and the $r.m.s.$ vorticity are -3 and $-3/2$ respectively.

Equation (3) corresponds to the regime in which the energy-containing length scale is saturated. A simple way to study the behavior of the flow before saturation

is to extend the spectrum analysis of Comte-Bellot and Corrsin (1966) by introducing a low wave-number cut-off at K_{inf}=$2\pi/d$. This was done by Skrbek and Stalp (2000) (see also Bertoglio et al (2001)). The turbulent energy spectrum is assumed to be

$$\begin{array}{lll} E(K,t) = 0 & \text{for} & K < K_{inf} \\ E(K,t) = A\ K^s & \text{for} & K_{inf} \leq K \leq K_e \\ E(K,t) = C_K\ \varepsilon^{\frac{2}{3}}(t) K^{-\frac{5}{3}} & \text{for} & K \geq K_e \end{array} \tag{4}$$

in which A is supposed to be constant and C_K is the Kolmogorov constant. Expressing the continuity of the spectrum at K_e, evaluating $k(t)$ by wave-number integration and replacing in (1) lead to the classical decay exponent $n = -2\frac{(s+1)}{s+3}$ in the regime before saturation, that is to say before K_e has reached K_{inf}. The approach permits to evaluate the time ${t_{sat}}^*$ at which $K_e = K_{inf}$ (saturation time). For $s = 4$, it is found

$${t_{sat}}^* = \frac{17}{7} A^{-\frac{1}{2}} C_K^{\frac{3}{2}} (K_{inf}^{-\frac{7}{2}} - K_e(0)^{-\frac{7}{2}}) \tag{5}$$

The energy at saturation can also be expressed:

$$k_{sat}^* = (3/2)\ A\ K_{inf}^5 \tag{6}$$

After ${t_{sat}}^*$, saturation of scales occurs and the spectral analysis leads to recover equation (3), with $c_2 = 2\pi C_K^{-\frac{3}{2}}$. Turbulence then decays with the -2 exponent until the final viscous regime. The characteristic time for the beginning of the viscous decay and the corresponding energy can also be estimated (see Bertoglio et al (2001)).

This simple spectral analysis can be extended to the passive scalar spectrum. After saturation has occurred, a Batchelor type of spectrum is postulated between K_{inf} and infinity (large Péclet number):

$$\begin{array}{lll} E_\theta(K,t) = 0 & \text{for} & K < K_{inf} \\ E_\theta(K,t) = C_{CO}\ \varepsilon_\theta(t) \varepsilon^{-\frac{1}{3}}(t) K^{-\frac{5}{3}} & \text{for} & K \geq K_{inf} \end{array} \tag{7}$$

in which C_{CO} is the Corrsin Obukhov constant and ε_θ is the scalar dissipation. Equation (7) together with the equation for the scalar variance

$$\langle \theta^2 \rangle_{,t} = -\varepsilon_\theta \tag{8}$$

lead to a closed equation for $\langle \theta^2 \rangle$, once the decay law for the turbulent velocity field is specified. In the saturated regime, using (3) and assuming that $\langle \theta^2 \rangle$ is decaying as $(t - t_{vo})^{-n_\theta}$ lead to

$$-n_\theta \frac{C_{CO}}{2C_K} (t - t_{vo})^{-(n_\theta+1)} = (t - t_{vo})^{-(n_\theta+1)} \tag{9}$$

It has to be noticed that, in contrast with what is usually found in this type of analysis, the value of n_θ is not obtained by just using the equality between the exponents in (9). This equality is clearly satisfied for any value of n_θ. Instead, the equality of the prefactors in (9) has to be used to find n_θ. One obtains

$$n_\theta = -\frac{2C_K}{C_{CO}} \tag{10}$$

and the decay exponent appears to be a function of the ratio of the Kolmogorov constant to the Corrsin Obukhov constant. Alternatively, n_θ can be found by writing

$$\frac{\epsilon_\theta}{\langle \theta^2 \rangle} = r \frac{\epsilon}{k} \tag{11}$$

with r constant. It is found

$$n_\theta = -2r \tag{12}$$

Note that (12) is strictly equivalent to (10) if both (7) an (4) (with K_{inf}=K_e) are assumed.

DNS and LES Computations

To investigate the decay of turbulence in a bounded domain using LES and DNS, a simple way is to use a low wave-number cutoff in a simulation of isotropic turbulence. This can be done by taking advantage of the scale limitation introduced by the periodicity of the computational domain when using a pseudo-spectral technique in a periodic box. The wave-number cutoff is then $K_{inf} = 2\pi/d$ in which d is the size of the computational box. Indeed, such a low wave-number cutoff is present in all simulations of isotropic turbulence, but one is usually trying to avoid its effect by performing the computations in a large enough box. In decaying turbulence, since the integral length scale is increasing with time, computations are usually stopped before K_e becomes of the order of K_{inf}. Instead, we are here performing simulations in a box whose dimension is not necessarily large compared to the integral turbulence length scale and we are not stopping the runs when the scale limitation induced by the box size begins to take place. The code used for the DNS and LES is a classical pseudo-spectral code with second order Runge-Kutta time integration scheme. Computations were performed at a resolution of 128^3 grid points. The initial spectrum is

$$E(K,0) = 2.5\ 10^{-3} (\tfrac{K}{K_{max}})^4 (1 + (\tfrac{K}{K_{max}})^2)^{-17/6} \tag{13}$$

with $K_{max} = 33\ m^{-1}$. The low wave-number cutoff is implicitly imposed at $K_{inf} = 2\pi/d$ by the numerical discretisation to this spectrum which would otherwise behave as K^4 at small K. For the scalar spectrum, the same type of initial condition is used, and the initial scalar length scale is equal to the velocity length scale.

For the DNS, the Reynolds number Re_{l_0}, built on the initial integral length scale l_0 is 5000. To investigate larger Reynolds numbers, LES computations were performed. The subgrid model is the Chollet and Lesieur (1981) eddy viscosity model, modified to account for finite Reynolds number effects. The spectral viscosity is:

$$\nu_t(K) = 0.267 \sqrt{\frac{E(K_c)}{K_c}} f(\frac{K_c}{K_\eta}) g(\frac{K}{K_c}) \tag{14}$$

K_c is the LES wave-number cutoff. $f(K_c/K_\eta)$ is the low Re correction and $g(\frac{K}{K_C})$ represents the "cusp" effect. Use of (14) instead of the original Chollet and Lesieur model has the advantage of permitting a smooth transition from LES to DNS as the Reynolds number decreases. For the scalar field, a subgrid eddy diffusivity $a_t(K)$ is introduced. It is assumed that the subgrid Prandtl number is constant. Different values of the Reynolds number were investigated using LES. The influence of the finite size of the domain was investigated by varying d.

EDQNM Computations

In the case of the Eddy Damped Quasi-Normal Markovian (EDQNM) closure, computations are performed using the formulation of the model for homogeneous isotropic turbulence (Orszag, 1970). The equations for the kinetic energy spectrum and the scalar spectrum are

$$E(K,t)_{,t} = -2\nu K^2 E(K,t) + T(K,t) \quad (15)$$

$$E_\theta(K,t)_{,t} = -2aK^2 E_\theta(K,t) + T_\theta(K,t) \quad (16)$$

in which T and T_θ are the transfer terms. The EDQNM characteristic times appearing in T and T_θ are given by

$$\Theta_{KPQ}(t) = \frac{(1 - e^{-(\eta_K + \eta_P + \eta_Q)t})}{(\eta_K + \eta_P + \eta_Q)} \quad (17)$$

$$\Theta^\theta_{KPQ}(t) = \frac{(1 - e^{-(a(K^2+P^2)+\eta''_Q)t})}{(a(K^2+P^2)+\eta''_Q)} \quad (18)$$

in which the damping coefficients are expressed as

$$\eta_K = \lambda \sqrt{\int_0^K P^2 E\, dP} + \nu K^2 \quad (19)$$

$$\eta''_Q = \lambda'' \sqrt{\int_0^Q P^2 E\, dP} + \nu Q^2 \quad (20)$$

λ is a constant whose value is related to the Kolmogorov constant. We use the classical value $\lambda = 0.355$. λ'' is a constant related to the Corrsin Obukhov constant (Herring et al 1983). The model is applied to wave-numbers ranging from K_{inf} (low wave-number cutoff, related to the size d of the bounded domain by $K_{min} = 2\pi/d$) to K_η (Kolmogorov wave-number). The energy-containing range is characterized by wave-number K_e. The initial conditions are such that $K_e > K_{inf}$ and the spectra are identical to the spectra used for the DNS and LES.

Results for the Velocity Field

In Fig. 1, the time evolution of the r.m.s. vorticity is plotted for the low Reynolds number case ($Re_{l_0} = 5000$). Three d/l_0 ratios are considered. For $d/l_0 = 6$ and 9, the simulations are fully resolved DNS. The third case, referred to as quasi-DNS, corresponds to a low Reynolds number LES that rapidly becomes a DNS as time evolves, as the subgrid viscosity defined by (14) is rapidly decreasing. At $t/t_{turn-over} = 10$, ν_t is already smaller by a factor 100 than the molecular viscosity. Before $t/t_{turn-over} = 10$, the simulation is considered a LES and therefore the r.m.s. vorticity is not plotted. In the log-log plot in Fig. 1, the existence of a $-3/2$ power law is clearly observed for the DNS runs. Before the $-3/2$ regime, a less steep decay is observed, although it is difficult to really detect a power law, saturation occurring before it could develop. The corresponding time evolutions of the turbulent kinetic energy are plotted in Fig. 2. Also shown in Fig. 2 are results of two LES runs and of the EDQNM closure. The first LES run corresponds to a value of d twice larger than for the quasi-DNS, at the same Reynolds number, whereas the second one corresponds to d four times larger and a higher Reynolds. In the case of the LES, only the filtered energy is plotted. After saturation has occurred, the -2 decay exponent is observed. Before saturation, a power law with an exponent close to $-10/7$ is clearly detected for the largest values of d. It can also be observed that at very large time, the power laws are no longer valid and that the viscous decay occurs. The agreement between LES and EDQNM is good and the closure appears to capture the t^{-2} regime. All these results can be collapsed into a single curve in the time ranges corresponding to the two

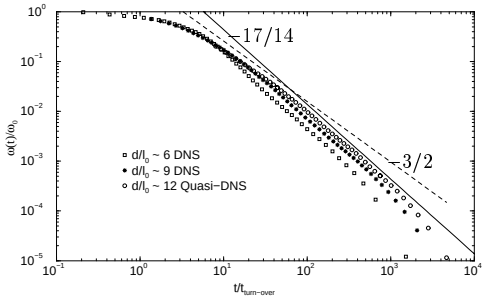

Figure 1: Decay of r.m.s. vorticity and comparison with theoretical decay laws. DNS and Quasi-DNS Re_{l_0}=5000

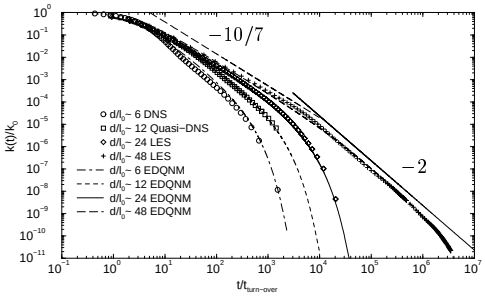

Figure 2: Decay of turbulent energy. DNS, LES and EDQNM results at different Re and for different $\frac{d}{l_0}$ ratios.

turbulent decay regimes (before and after saturation) by using the scalings provided by equations (5) and (6), as appears in Fig. 3. Also plotted in Fig. 3 are results of the closure obtained for a larger value of d ($d/l_0 = 240$ and $Re_{l_0} = 5 \times 10^7$).

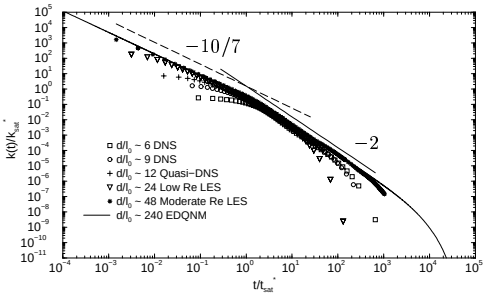

Figure 3: Decay of turbulent kinetic energy normalised by k^*_{sat} as a function of t/t^*_{sat}.

Results for the Scalar Field

In Fig. 4, an example of decay of the scalar variance is given in the case of LES at large Reynolds number. Also plotted is the time evolution of the turbulent kinetic energy. It can be observed that, after the classical period of unbounded turbulence decay, saturation occurs and that the time evolution of both quantities is affected. In the saturated regime, in which the decay exponent for k is -2, the scalar variance follows a power law whose expo-

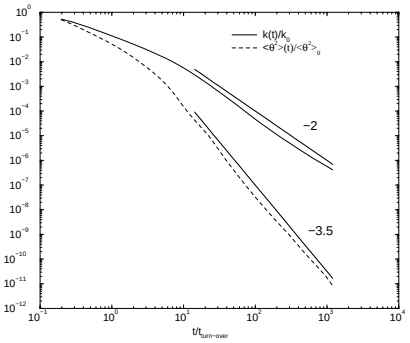

Figure 4: Decay of turbulent kinetic energy and scalar variance - LES results.

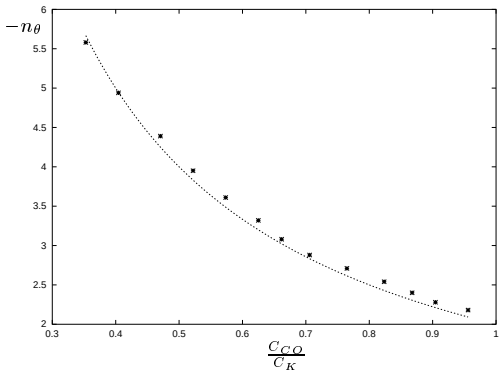

Figure 5: Decay exponent for the scalar variance as a function of the Corrsin Obukhov constant - Symbols : EDQNM results ; line : analytical expression (equ. 10).

nent is close to $n_\theta = -3.5$. With the EDQNM closure, the same kind of behavior is observed : once saturation is reached for the energy-containing length scale, that is to say when the turbulent kinetic energy starts to follow the -2 power law, the scalar variance starts to decay with a steeper slope. In order to check whether the scalar decay exponent in the saturated regime is depending on the Corrsin Obukhov constant as suggested by the analytical study proposed in section II, the EDQNM closure was used to explore a range of variation of C_{CO} between 0.5 and 1.3. The variation of C_{CO} is obtained by varying the value of the constant λ" appearing in the characteristic time for the scalar transfer term. In Fig. 5, the value of the decay exponent n_θ is plotted as a function of $\frac{C_{CO}}{C_K}$. The exponent is effectively found to depend on the ratio of the two constants, in good agreement with equation (10). It can be noticed than the value $n_\theta = -3.5$ obtained with LES (Fig. 4) is recovered for $\frac{C_{CO}}{C_K} \simeq 0.6$, a value which appears to be reasonably realistic.

Conclusion

Decaying turbulence with an upper bound of length scale imposed by a spectral cut-off was investigated using DNS, LES and the EDQNM closure. The turbulent length scale growth limitation due to the bounds is repredented by introducing an infrared spectral cutoff. The results show that once the energy-containing turbulent length scale has reached the limit, a decay regime with a -2 exponent for the turbulent kinetic energy is found. The associated exponent for the r.m.s. vorticity is -3/2, in agreement with the experiment of Skrbek and Stalp (2000). Before the length scale saturation, a classical homogeneous decay regime takes place, whereas at very large time a viscous regime appears. The three regimes and the transition between them are in good agreement with the scalings deduced from a simple analysis similar to the one proposed by Skrbek and Stalp (see also Bertoglio et al 2001). The same kind of behavior is observed on the scalar field, with the particularity that the decay exponent in the saturated regime is found to be a function of the Corrsin Obukhov constant in agreement with the analytical study proposed in section II. To relate the results the present study to the evolution of turbulence in a wall bounded domain and to the experimental situation of a grid generated turbulent field in a confined geometry, it has to be assumed that, even if the flow is bounded by rigid walls, its global behavior can be accounted for by an isotropic and quasi-homogeneous description. The fact that the results obtained in the paper are in agreement with the experimental results of Skrbek and Stalp (2000) provides some support to this assumption. However, the agreement remains partial, comparisons being made only on the decay exponent of the vorticity and the validity of the assumption deserves further scrutiny. A DNS of decaying turbulence between two plates will help assessing the validity of the assumption. However the decay regimes observed in the experiment occur at such a high Reynolds number that even a LES will require a huge computational effort.

References

[1] Bertoglio, J.P. Touil, H. and Shao, L., 2001, "On the decay of shearless wall bounded turbulence", *2nd TSFP*, Stockholm.

[2] Borue, V. and Orszag, S., 1995, "Self-similar decay of three-dimensional homogeneous turbulence with hyperviscosity", *Phys. Rev. E*, Vol. 52, pp. 856-859.

[3] Chollet, J.P. and Lesieur, M., 1981, "Parameterisation for small scales of three dimensional isotropic turbulence using spectral closure." *J. Atmos. Sci.*, 38:2747-2757.

[4] Comte-Bellot, G. and Corrsin, S., 1966, "The use of contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence", *JFM* , Vol. 25(3), pp. 657-682.

[5] Herring, J.R., Schertzer,D., Lesieur, M., Newman G.R., Chollet, J.P. and Larcheveque, M., 1983, "A comparative assessment of spectral closures as applied to passive scalar diffusion", *JFM* , Vol. 124, pp. 411-437.

[6] Lesieur, M. and Ossia, S., 2000, "3D isotropic turbulence at very high Reynolds numbers:EDQNM study", *J. of Turb.*, Vol. 1(7), pp. 1-25.

[7] Orszag, S., 1970, "Analytical theories of turbulence", *JFM* Vol. 41(2), pp. 363-386.

[8] Skrbek, L. and Stalp, S.R., 2000, "On the decay of homogeneous isotropic turbulence", *Phys. Fluids*, Vol. 12(8), pp. 1997-2019.

Modélisation spectrale de la turbulence inhomogène anisotrope

Ce travail de thèse porte sur le développement d'un modèle pour la turbulence anisotrope et inhomogène au moyen d'une approche statistique spectrale. La variable de base de ce nouveau modèle est le spectre du tenseur de Reynolds, quantité qui dépend des variables d'espace et du temps, mais aussi du module du vecteur d'onde. Ce travail s'appuie sur les fondements théoriques posés par A. Laporta (1995) pour le développement autour de l'homogénéité des équations des corrélations en deux points et sur les travaux de S. Parpais (1996) pour la modélisation des termes les plus complexes mis à jour dans ce type de démarche.

Dans cette thèse, un modèle exploitable numériquement dans des géométries complexes a été proposé. Il faut noter que ce modèle repose sur des hypothèses quasi-normales amorties pour représenter les flux d'énergie vers les petites échelles et ne nécessite donc pas, comme les modèles de turbulence usuels, l'utilisation d'une équation de transport pour la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Les informations spectrales fournies par le modèle ont été utilisées pour analyser finement la turbulence. Nous avons ainsi pu caractériser dans des écoulements tels que celui autour d'un profil d'aile en incidence certaines situations de déséquilibre de la turbulence. Ce déséquilibre s'exprime en particulier au niveau des spectres de l'énergie cinétique turbulente par un écart à la théorie de Kolmogorov (1941) et à une distribution d'énergie selon les nombres d'onde k proportionnelle à $k^{-5/3}$ (dans la zone inertielle). L'analyse spectrale permet aussi de proposer des quantités en un point pertinentes pour mettre en évidence ces états de déséquilibre, ouvrant ainsi de nouvelles voies de modélisation.

Mots clés : Modélisation, turbulence, anisotrope, inhomogène, approche spectrale, simulation numérique, éléments finis.

Spectral modelling for anisotropic and inhomogeneous turbulence

This work concerns the development of a model for anisotropic and inhomogeneous turbulence by means of a spectral statistical approach. The basic unknown of this new model is the spectrum of the Reynolds stress tensor, a quantity which depends on space and time variables as well as on the wave vector module. The theoretical base of this work was provided by A. Laporta (1995), who expanded about homogeneity the equations for the two point velocity correlations, and on the work of S. Parpais (1996) for the modelling part of the complex terms involved in this kind of approach.

In this thesis, a numerical model was proposed that can be used in complex geometries. It should be noted that this model is based on quasi-normal assumptions intended to represent the energy cascade towards the small scales and therefore does not require, like usual turbulence models, the use of a transport equation for the dissipation of the turbulent kinetic energy. The spectral information provided by this new model was used to scrutinize some properties of turbulence. The model allows to characterize situations of turbulence desequilibrium in flows such as that around an airfoil with incidence.

The spectral desequilibrium is characterized by comparisons with the Kolmogorov (1941) theory leading to a distribution of energy proportional to $k^{-5/3}$, for wave numbers k in the inertial range. The spectral analysis enables to propose relevant one-point quantities to highlight these non-equilibrium states, thus opening new modelling frontiers.

Keywords : Modelling, turbulence, anisotropic, inhomogeneous, spectral approach, numerical simulation, finite elements.

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR 5509 CNRS,
Ecole Centrale de Lyon.