HAL
open science

Modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques

Abdelaâziz Ezziani

To cite this version:

Abdelaâziz Ezziani. Modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques. Mathématiques [math]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 2005. Français. NNT : . tel-00009179v2

HAL Id: tel-00009179

https://theses.hal.science/tel-00009179v2

Submitted on 13 Jul 2005 (v2), last revised 13 Jul 2005 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

Mathématiques appliquées

soutenue par

Abdelaâziz EZZIANI

le 08 Février 2005

Titre

Modélisation mathématique et numérique de la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques et poroélastiques

Directeur de thèse	:	Patrick Joly
Co-directrice	:	Éliane Bécache

Rapporteurs

Guy Chavent
Christophe Hazard
William W. Symes

Jury

Présidente	**Michelle Schatzman**
Rapporteur	**Guy Chavent**
Examinateurs	**Éliane Bécache**
	Patrick Joly
	Wim Mulder
	Yann Hervé De Roeck

à mes parents

à mon frére et mes sœurs

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Patrick Joly et Éliane Bécache qui ont dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de DEA, et auprès desquels je me suis abreuvé de connaissances scientifiques durant ma thèse. Je suis très reconnaissant de leur encadrement, leurs idées constructives, leur soutien constant et leur disponibilité tout au long de ces années.

Je remercie Guy Chavent, Christophe Hazard et William Symes d'avoir accepté d'être rapporteurs sur cette thèse et pour leurs remarques sur mon mémoire.

Michelle Schatzman m'a fait l'honneur d'accepter d'être présidente de mon jury. Pour cela, ainsi pour ces commentaires judicieux, je lui exprime ma profonde gratitude.

Je remercie également Wim Mulder d'avoir bien voulu être membre de mon jury de thèse, ainsi que pour ses suggestions et pour les données réalistes qui m'a fourni.

Yann Hervé De Roeck m'a fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je le remercie profondément.

Merci à René-Edouard Plessix. Ses conseils avisés, sa grande connaissance du domaine de la poroélasticité m'ont été très utiles.

Mes chaleureux remerciements s'adressent aux membres des projets ONDES, ESTIME et OTTO de l'INRIA et aux membres du laboratoire de mathématiques appliquées à l'ENSTA. J'ai passé des moments inoubliables avec eux et ils étaient toujours présent lorsque j'en ai besoin.

Merci enfin à mes parents, mon frére, mes sœurs et à mes amis, en particulier Khalid, Laïla et Mohamed, pour leur soutien et leur aide.

Merci à tous.

Table des matières

Introduction **17**

I Propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques **19**

Introduction **21**

1 Modèles viscoélastiques linéaires **23**
Introduction 25
1.1 Modèles intégro-différentiels 25
1.1.1 Définitions 25
1.1.2 Dissipation du modèle 27
1.1.2.1 Notations et définitions 27
1.1.2.2 Quantité d'énergie 27
1.2 Modèles différentiels 29
1.3 Modèle de Zener 31
1.3.1 Modèle 1D 31
1.3.2 Extension 2D et 3D 32
1.4 Modèle de Zener généralisé 33
1.5 Autres modèles viscoélastiques 35

2 Analyse mathématique **37**
Introduction 39
2.1 Études des milieux hétérogène 39
2.1.1 Existence et unicité de solutions fortes 40
2.1.2 Résultats de régularité 44
2.1.3 Existence et unicité de solutions faibles 46
2.1.4 Décroissance de l'énergie 49
2.1.5 Propagation à vitesse finie 50
2.1.6 Du viscoélastique à l'élastique 55
2.1.6.1 Estimations a priori 55
2.1.6.2 Convergence et estimation de l'écart 57
2.2 Études des milieux homogènes 60
2.2.1 Analyse par ondes planes en 1D 60
2.2.2 Analyse par ondes planes en 3D 66
2.2.3 Facteur de qualité et conception de modèles réalistes 67
2.2.3.1 Définitions 67

2.2.3.2 Facteur de qualité quasi-constant 69
2.2.3.3 Validation de la méthode 72
2.2.4 Cas d'un milieu isotrope de dimension supérieure 73

3 Approximation et analyse numérique 77
Introduction 79
3.1 Cas 1D - Schémas aux différences finies 80
3.1.1 Semi-discrétisation en espace 80
3.1.2 Discrétisation en temps 81
3.1.3 Analyse de stabilité 82
3.1.3.1 Stabilité par méthode de Fourier 82
3.1.3.2 Stabilité par techniques énergétiques 88
3.2 Dimension supérieure - Eléments finis mixtes 91
3.2.1 Principe de la méthode en élasticité 91
3.2.2 Reformulation du problème 91
3.2.3 Formulation variationnelle déplacement-contrainte 93
3.2.4 Semi-discrétisation en espace 94
3.2.5 Discrétisation en temps 98
3.2.6 Energie discrète et analyse de stabilité 98
3.3 Traitement des milieux ouverts 105
3.3.1 Application des PML au problème de la viscoélasticité 105
3.3.2 Approximation des PML 109

4 Résultats numériques 111
Introduction 113
4.1 Résultats numériques unidimensionnels 113
4.1.1 Solution analytique 113
4.1.2 Tests numériques dans le cas 1D 115
4.2 Résultats bi-dimensionnels 117
4.2.1 Dissipation d'énergie discrète 119
4.2.2 Du viscoélastique à l'élastique 120
4.2.3 Milieu homogène isotrope 122
4.2.4 Efficacité des couches PML 123
4.2.4.1 Domaine borné sans couche PML 124
4.2.4.2 Domaine ouvert et domaine borné avec couches PML 124
4.2.5 Milieu homogène anisotrope 126
4.2.6 Influence de la fréquence 127
4.2.7 Expériences réalistes 130

II Propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques 135

Introduction 137

5 Problème modèle et analyse mathématique **139**
Introduction . . . 141
5.1 Problème modèle . . . 142
5.2 Analyse mathématique . . . 144
5.2.1 Etudes des milieux hétérogènes . . . 144
5.2.1.1 Existence et unicité de solutions fortes . . . 144
5.2.1.2 Dissipation de l'énergie . . . 148
5.2.2 Etudes des milieux homogènes . . . 149
5.2.2.1 Analyse par ondes planes . . . 149
5.2.2.2 Solution analytique dans un milieu homogène infini . . . 153

6 Choix d'une formulation variationnelle optimale **159**
Introduction . . . 161
6.1 Problème avec quatre inconnues . . . 161
6.1.1 Formulation 1 . . . 162
6.1.2 Formulation 2 . . . 163
6.1.3 Formulations 3 et 4 . . . 163
6.2 Problème avec trois inconnues . . . 166
6.2.1 Formulations 5 et 6 . . . 166
6.2.2 Formulations 7 et 8 . . . 167
6.3 Problème avec deux inconnues-Formulation 9 . . . 168
6.3.1 Récapitulation . . . 169

7 Approximation et analyse numérique **171**
Introduction . . . 173
7.1 Rappel du principe de la méthode . . . 174
7.2 Reformulation du problème . . . 174
7.3 Formulation variationnelle . . . 176
7.3.1 Energie en vitesse . . . 177
7.3.2 Semi-discrétisation en espace . . . 179
7.3.3 Calcul matriciel . . . 182
7.3.3.1 Calcul de la matrice de rigidité . . . 183
7.3.3.2 Calcul des matrices de masse . . . 184
7.3.3.3 Calcul des matrices de couplage . . . 185
7.3.4 Discrétisation en temps . . . 186
7.4 Stabilité et quantité d'énergie discrète . . . 190
7.4.1 Quantité d'énergie discrète . . . 190
7.4.2 Étude de stabilité . . . 193
7.5 Traitement des milieux ouverts . . . 196
7.5.1 Formulation variationnelle . . . 199
7.5.2 Discrétisation . . . 199
7.5.3 Mise en oeuvre de la méthode . . . 204

8 Simulations et résultats numériques **205**
8.1 Dispersion numérique et ordre élevé . . . 207
8.1.1 Méthode d'ordre 1 . . . 207
8.1.2 Méthodes d'ordre élevés . . . 209

8.2 Comparaison avec la solution analytique 212
8.3 Simulation dans un milieu homogène anisotrope 214
8.4 Simulations dans un milieu hétérogène 216

Conclusion et perspectives **221**

Table des figures

1.3.1 Modèle de Kelvin-Voigt 31
1.3.2 Modèle de Maxwell 31
1.3.3 Modèle de Zener 32
1.4.1 Modèle de Zener généralisé 34

2.1.1 Le demi-espace mobile 52
2.1.2 Support de u dans un milieu isotrope 55
2.1.3 Support de u dans un milieu anisotrope 55
2.2.1 Solution graphique 64
2.2.2 Allure de $k \longmapsto S^*(k)$ 64
2.2.3 Allure $k \longmapsto \eta(k)$ 65
2.2.4 Allure $k \longmapsto \omega^*(k)/k$ 65
2.2.5 La variation de Q^{-1} en fonction de ω 69
2.2.6 Facteur de qualité 73
2.2.7 Approximation de $Q_p = 10$ et $Q_p = 200$ 74
2.2.8 Ondes viscoélastiques associées à deux facteurs qualité différents 75

3.0.1 Fissure de géométrie complexe 79
3.1.1 Discrétisation en espace 80
3.1.2 Calcul de u_j^{n+1} en fonction de $u_j^n, u_j^{n-1}, \sigma_{j-1/2}^n$ et $\sigma_{j+1/2}^n$ 81
3.1.3 Calcul de $\sigma_{j+1/2}^{n+1}$ en fonction de $u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^n, u_j^n$ et $\sigma_{j+1/2}^n$ 81
3.1.4 Les trois cas possibles 86
3.2.1 Domaine d'étude 92
3.2.2 Maillage uniforme 94
3.2.3 Les degrés de liberté pour $\underline{\underline{\mathrm{X}}}_h^{sym}$ et $\underline{\mathrm{M}}_h$ 95
3.2.4 Exemple de maillage pour l'éléement fini $Q_1 - Q_0$ 96
3.2.5 Degrés de liberté pour l'élément $Q_3 - Q_2$ 97
3.3.1 Support des données initiales 107
3.3.2 Couches PML dans la directions des x_1 108

4.1.1 La variation d'erreur 115
4.1.2 Déplacement numérique et exact au point $x = 0.5$ en fonction du temps . . . 115
4.1.3 Convergence 116
4.1.4 Qualité d'amortissement et de propagation 117
4.1.5 Propagation d'onde viscoélastique au cours du temps avec couches PML . . . 118
4.2.1 La fonction source 119
4.2.2 Surface libre 119

4.2.3 Variation de l'énergie discrète 120
4.2.4 La variation de $\|u_\varepsilon - u\|$ dans L^2 en fonction de ε 121
4.2.5 La variation de $\|u_\varepsilon - u\|$ dans H^1 en fonction de ε 121
4.2.6 La variation des énergies élastique et viscoélastique en fonction de ε 121
4.2.7 La variation de l'énergie viscoélastique pour différents ε. 122
4.2.8 Comparaison entre la propagation d'ondes isotropes dans un milieu élastique (demi-figures du haut) et dans un milieu viscoélastique (demi-figures du bas) 123
4.2.9 Domaine borné, couches PML 124
4.2.10 Sismogramme dans un milieu borné sans PML 124
4.2.11 Efficacité des PMLs 125
4.2.12 Comparaison entre la propagation d'ondes dans des milieux anisotropes élastiques (demi-figures du haut) et viscoélastiques (demi-figures de bas) . . . 126
4.2.12 Comparaison entre la propagation d'ondes dans des milieux anisotropes élastiques et viscoélastiques (suite) 127
4.2.13 La norme du dépalcement 128
4.2.14 Atténuation en fonction de la fréquence 129
4.2.15 Sismogrammes pour différentes fréquences 129
4.2.16 Vitesse des ondes P 131
4.2.17 Vitesse des ondes S 131
4.2.18 Facteur de qualité associé aux ondes P 132
4.2.19 Exemple d'approximation de $Q_s = 20$ et $Q_p = 57.7901$ 132
4.2.21 $x_s = 135\,m$, $z_s = 805\,m$ 133
4.2.20 $x_s = 5\,m$, $z_s = 880\,m$ 134

5.0.1 Milieu poreux 142
5.2.1 Dispersion des ondes 152
5.2.1 Dispersion des ondes (suite) 153

6.0.1 Maillage uniforme de $(N-1)^2$ éléments 161
6.1.1 Les degrés de liberté associées à la formulation 1 163
6.1.2 Les degrés de liberté associés à la formulation 2 164
6.1.3 Les degrés de liberté associés à la formulation 3 164
6.1.4 Les degrés de liberté associés à la formulation 4 165

7.0.1 Exemple d'un maillage quadrangulaire adapté 174
7.3.1 Transformation F_e 180
7.3.2 Points d'interpolation avec $r = 5$ et $d = 2$. 181
7.3.3 Les degrés de libertés associées à $\mathbb{P}_h$, $\mathbb{U}_h$ et $\mathbb{W}_h$ pour $r = 5$ 182
7.3.4 Exemple des interactions de la matrice de rigidité 184
7.3.5 Cas simple (deux éléments) 186
7.3.6 La structure de D_{uw} 186
7.3.7 La structure de H 188
7.3.8 Exemple 188
7.3.9 La structure de N 189
7.5.1 Domaine de calcul 204

8.1.1 Fonction h(t) 208
8.1.2 Approximation d'ordre $r = 1$ 208

8.1.3 Zoom sur l'onde lente, $r = 1$ 209
8.1.4 Approximation d'ordre $r = 3$ 209
8.1.5 Zoom sur l'onde lente, $r = 3$ 210
8.1.6 Approximation d'ordre $r = 5$ 210
8.1.7 Zoom sur l'onde lente, $r = 5$ 210
8.1.8 Temps de Calcul CPU 211
8.1.9 Nombre d'itérations 212
8.2.1 Solution analytique et numérique 213
8.2.2 Erreur relative 213
8.3.1 La pression dans un milieu anisotrope 214
8.3.1 La pression dans un milieu anisotrope (suite) 215
8.4.1 Fonction h(t) 216
8.4.2 Milieu hétérogène avec couches PML 216
8.4.3 La norme de la vitesse 218
8.4.4 La pression 219
8.4.5 Exemple d'un milieu poreux à double porosité 222

Liste des tableaux

4.1.1 Tableau des résultats 114
4.2.1 Les données physiques 130
4.2.2 Temps de relaxations optimisés pour $Q_s = 20$ et $Q_p = 57.7901$ 132

6.1.1 Coût de stockage pour la formulation 1 163
6.1.2 Coût de stockage pour la formulation 2 164
6.1.3 Coût de stockage pour la formulation 3 165
6.1.4 Coût de stockage pour la formulation 4 166
6.3.1 Coût de stockage pour les différentes formulations 169

7.4.1 Les valeurs de α_r 195

8.1.1 Temps de calcul 211
8.1.2 Nombre d'itérations 212
8.4.1 Propriétés physiques du milieu 217

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre des travaux de recherche menés au sein du projet ONDES sur la modélisation mathématique et numérique de de la propagation d'ondes dans les milieux complexes, c'est-à-dire des milieux obéissant à une loi de comportement non classique. En l'occurence, il s'agira ici des milieux solides obeissant à une loi rhéologique destinée à prendre en compte la dissipation des ondes dans un matériau ou à la porosité du milieu d'étude. Ces dernières propriétés induisent des phénomènes spécifiques de nature variée (absorption intrinsèque, dispersion intrinsèque ...) qui correspondent à des difficultés nouvelles sur un plan mathématique ou numérique.

La modélisation numérique de la propagation des ondes élastiques dans les milieux hétérogènes est déjà un vieux sujet qui a connu un essor particulier au cours des années 80 avec pour motivation essentielle les applications à la sismique, en particulier la sismique pétrolière. Plus récemment les progrès des méthodes numériques, notamment des méthodes de discrétisation d'ordre élevé, et les améliorations constantes des performances des ordinateurs ont permis de traiter des problèmes de plus en plus réalistes, s'approchant de la dimension des vraies applications (mises en jeu) ou prenant en compte les phénomènes physiques de plus en plus complexes : on s'écarte alors des lois de comportements purement élastiques linéaires.

C'est dans cet esprit que se situe mon travail de thèse dont la spécifité consiste à chercher à modéliser d'une part les phénomènes d'atténuation intrinsèques des ondes liés à la nature **viscoélastique** des matériaux, d'autre part, modéliser la propagation des ondes dans les **milieux poreux** (milieux élastiques en présence de micro-perforations occupés par un ou plusieurs fluides). Ces deux sujets ont été définis au travers des contacts entre le projet Ondes de l'INRIA et l'IFREMER (Institut français de recherche pour l'exploitation de la mer, avec Y. H. De Roeck) pour les milieux viscoélastiques et d'autre part avec la société SHELL (avec W. Mulder et R. E. Plessix) pour les milieux poroélastiques. Par ailleurs ces sujets sont arrivés au moment ou deux thèses venaiennt d'être effectuées à l'INRIA : la thèse de Chrysoula Tsogka sur des méthodes d'**éléments finis mixtes vitesse-contrainte** couplées avec **domaine fictifs** et celle de Sandrine Fauqueux sur les méthodes d'**éléments finis spectraux** sur maillages **quadrangulaires** ou **hexaédriques**. Compte tenu de ce contexte, un de mes objectifs a été de faire évoluer les codes de calcul correspondant vers la prise en compte de la viscoélasticité (avec le code de C. Tsogka) et celle de la poroélasticité (avec le code de S. Fauqueux).

Ma thèse comporte naturellement **deux parties distinctes** et **indépendantes**, la première partie sur la **modélisation des milieux viscoélastiques linéaires** correspond au travail des deux premières années de ma thèse. La seconde partie sur la **modélisation des matériaux**

poroélastiques a été effectuée au cours de la troisième année.

Je renvoie aux introductions des deux parties pour plus de détails spécifiques à chaque problème. Je voudrais conclure cette introduction en présentant les points communs entre les deux parties de la thèse. Mon but était avant tout de développer des méthodes s'appuyant sur des **bases mathématiques solides**. En particulier, j'ai cherché à concevoir des méthodes dont la **stabilité** pouvait être démontrée à priori, y compris dans le cas des milieux hétérogènes quelconques. Pour cela on a fait le choix de s'appuyer sur des **approches variationnelles** et des approximations par **éléments finis mixtes** qui autorisent notamment l'utilisation des **méthode énergétiques** pour l'analyse des méthodes numériques. De ce point de vue, nous nous démarquons des méthodes plus traditionnelles de différences finies, méthodes encore largement utilisées au sein de la communauté géophysique. Enfin, la prise en compte de frontières artifficielles pour borner le domaine de calcul, peut être réalisée en **généralisant** les méthodes des **couches absorbantes parfaitement adaptées** (perfectly matched layers) récemment apparues dans la littérature. Chacune des deux parties de la thèse a débouché sur un **code de calcul bi-dimensionnel** (notons que l'extension 3D ne pose pas de problème conceptuel) qui ont fait l'objet de **nombreuses validations numériques**.

Première partie

Propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques

Introduction

Les matériaux réels, les roches en particulier dissipent de l'énergie lorsqu'ils sont soumis à des déformations. On verra dans la deuxième partie que le mouvement moyen d'un fluide par rapport à une matrice élastique conduit à un mécanisme dissipatif (Loi de Biot pour la propagation d'onde dans les milieux poreux) et donc une atténuation des ondes. Les origines de la dissipation en dehors de phénomène de Biot sont multiples. (les effets thermiques frottement grains a grains les mouvements locaux de fluide ...), les origines sont nombreuses et complexe et une modélisation physique qui tient compte de la totalité des causes sera très compliqué. Ces milieux sont le siège de phénomènes de dissipation intrinsèque qui provoquent une décroissance de l'énergie et une atténuation exponentielle de l'amplitude des ondes au cours de leur propagation. Pour bien simuler la réalité physique, il est important de tenir compte de ce phénomène d'absorption des ondes dû à une propriété viscoélastique du milieu de propagation. On s'intéresse à la modélisation de ce phénomène par l'introduction de modèles viscoélastiques linéaires, ces modèles sont bien adaptés à la description d'une large classe de phénomènes dissipatifs. Ces modèles nécessitent la connaissance non seulement des valeurs actuelles des contraintes et des déformations mais aussi des valeurs passés, ils sont dit des matériaux a mémoire.

L'objectif de cette étude est de construire une méthode numérique performante, c'est-à-dire une méthode qui respecte les quatre points suivants :

1. Le premier point concerne une méthode qui conduit à un schéma explicite en temps (en utilisant la technique de la condensation de masse)

2. Facile à implémenter en utilisant un maillage uniforme en espace.

3. Stable en temps avec une condition raisonnable.

4. La méthode doit être facile à adapter pour les modèles réalistes.

Le premier chapitre concerne le choix d'un modèle viscoélastique adapté, c'est à dire respecte les phénomènes physiques :(la dissipation d'énergie et l'absorbtion des ondes). On présente les différentes lois (différentes présentations de lois de comportements viscoélastiques).

Dans le deuxième, on fait une analyse mathématique pour s'assurer que le problème est bien posé, on montre des théorèmes d'existence et d'unicité de la solution forte et la solution faible et nous étudions les principales propriétés de la solution : la décroissance de l'énergie, propagation à vitesse finie et la dispersion des ondes ainsi que l'influence des temps de relaxation sur la qualité de l'atténuation et la propagation d'ondes.

Le troisième chapitre est le chapitre central de cette partie, dans lequel nous décrivons la méthode d'approximation numérique pour résoudre le problème de la viscoélasticité et ou nous étudions les principales propriétés de cette méthode (stabilité, précision). On s'est intéressé aussi à l'adaptation de couches absorbantes parfaitements adaptées (PML) à notre problème.

Finalement, au chapitre 4, nous accordons une large place aux résultats numériques, lesquels vont de tests de validation élémentaires jusqu'à la simulation d'expériences physiques réalistes.

Cette partie a donné lieu à un article :

E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation, Computational Geosciences, volume 8, pp 255-299, 2004.

deux rapports de recherche INRIA :

E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoéelastiques linéaires. **I.** Analyse mathématique. Rapport de Recherche 4785, INRIA, 2003.

E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoéelastiques linéaires. **II.** Analyse numérique. Rapport de Recherche 5159, INRIA, 2004.

et à trois proceding de conférence :

E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Modeling of wave propagation in linear viscoelastic media. *In Mathematical Modeling of Wave Phenomena* (Växjo, novembre 2002), volume 7, pp 39-48. Mathematical modeling in physics, engineering and cognitive sciences.

E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Mathematical and numerical modeling of wave propagation in linear viscoelastic media. *In Mathematical and Numerical Aspects of Wave propagation* (Jyväskylä, juillet 2003), pp 916-921, Springer.

E. Bécache, A. Ezziani et P. Joly. Propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques linéaires. *In Etude de la propagation ultrasonore en milieux non-homogènes en vue du contrôle non destructif* (Aussois, décembre 2003), GDR 2501, pp 11-20.

Chapitre 1

Modèles viscoélastiques linéaires

Dans ce chapitre nous rappellerons la définition des modèles viscoélastiques intégro-différentiels et nous présenterons les modèles qui feront l'objet de notre analyse. Il s'agit de modèles de type différentiels qui apparaissent comme des généralisations naturelles du modèle de Zener.

Sommaire

Introduction **25**
1.1 Modèles intégro-différentiels **25**
1.1.1 Définitions 25
1.1.2 Dissipation du modèle 27
1.1.2.1 Notations et définitions 27
1.1.2.2 Quantité d'énergie 27
1.2 Modèles différentiels **29**
1.3 Modèle de Zener **31**
1.3.1 Modèle 1D 31
1.3.2 Extension 2D et 3D 32
1.4 Modèle de Zener généralisé **33**
1.5 Autres modèles viscoélastiques **35**

Introduction

La loi de comportement élastique est instantanée, c'est-à-dire sans mémoire, et ne prend pas en compte les phénomènes de dissipation d'énergie. Or, les matériaux réels, les roches en particulier, dissipent de l'énergie lorsque ils sont soumis à des déformations. C'est le cas des milieux élastiques visqueux. On s'intéresse à la modélisation de ce phénomène dissipatif par l'introduction des modèles viscoélastiques linéaires. Ces modèles sont bien adaptés à la description d'une large classe de phénomènes dissipatifs.

L'objectif de ce chapitre est de présenter le modèle viscoélastique sur lequel on travaillera. On se propose de rappeler la représentation de la relation contrainte-déformation viscoélastique. Dans un premier temps, nous présentons le modèle intégro-différentiel, ou modèle de relaxation ; cette formulation est basée sur l'écriture du tenseur de contraintes comme un produit de convolution en temps entre un tenseur de relaxation et le tenseur de déformation. L'obtention de ce modèle découle directement des hypothèses de la viscoélasticité linéaire :

- la valeur instantanée du tenseur des contraintes s'exprime localement comme une fonction linéaire des valeurs passées des déformations.
- Les propriétés des matériaux n'évoluent pas avec le temps (matériaux non vieillissants).

Ensuite, nous montrons comment ces modèles garantissent la dissipation de l'énergie sous des conditions sur le tenseur de relaxation, en rappelant un théorème de décroissance de l'énergie (cf Théorème 1.1.1).

Dans un deuxième temps, nous présentons une classe générale de modèles différentiels, en montrant l'équivalence entre les deux présentations intégro-différentielle et différentielle. Bien que la dernière présentation soit moins générale que la première, elle est plus adaptée aux approximations et aux traitements numériques.

Dans un troisième temps, nous présentons la loi viscoélastique de Zener et son interprétation physique comme un cas particulier de la présentation différentielle. Nous proposons le modèle de travail en dimension 2 et 3 dans les deux cas anisotrope et isotrope, en étendant le modèle de Zener.

Enfin, nous rappelons une autre classe de modèles différentiels basée sur des dérivées non-entières. Malgré le degré de généralité des cette représentation par rapport à la représentation entière, on ne l'exploite pas dans cette étude car elle nécessite un traitement mathématique et numérique plus complexe (voir par exemple [74] pour le modèle de Zener).

1.1 Modèles intégro-différentiels

1.1.1 Définitions

Les modèles viscoélastiques linéaires [53] permettent de prendre en compte le phénomène de la dissipation dans un milieu. Dans un tel modèle, nous considérons le tenseur des déformations

à l'instant t :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.1.1}$$

associé à un champ de déplacement $u(x,t)$:

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbb{R}^d \times [0,T] & \mapsto & \mathbb{R}^d, \\ & & (x,t) = \left((x_1,\cdots,x_d)^t, t\right) & \mapsto & u(x,t) = (u_1(x,t),\cdots,u_d(x,t))^t, \end{array}$$

en adoptant dans tout ce qui suit la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés et en simplifiant les notations $\varepsilon(t) = \varepsilon(u(t))$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Alors, la relation liant la contrainte σ à ε [40, 78, 53] est donnée par la loi :

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{G}_{ijkl}(t-\tau)\,\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \tau}(\tau)\,d\tau, \tag{1.1.2}$$

où $\boldsymbol{G}$ est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur de **relaxation**, qui vérifie les symétries suivantes :

$$\boldsymbol{G}_{ijkl} = \boldsymbol{G}_{jikl} = \boldsymbol{G}_{klij}, \quad \forall\, i,j,k,l = 1,\cdots,d. \tag{1.1.3}$$

La formule (1.1.2) exprime que l'état de la contrainte à l'instant t dépend de l'histoire des déformations, c'est pourquoi on qualifie ces modèles de modèles à mémoire. De plus $\sigma(t)$ n'est pas influencé par le futur de la déformation (par $\varepsilon(\tau)$ pour $\tau > t$). Il existe, dans la littérature, plusieurs façons équivalentes d'exprimer la relation (1.1.2). Par exemple, une simple intégration par parties conduit à :

$$\sigma_{ij}(x,t) = \boldsymbol{G}_{ijkl}(0)\,\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{G}_{ijkl}}{\partial \tau}(\tau)\,\varepsilon_{kl}(t-\tau)\,d\tau. \tag{1.1.4}$$

Nous supposerons par la suite que toutes les quantités sont causales, c'est à dire nulles pour $t < 0$. L'expression (1.1.2) peut alors s'exprimer comme un produit de convolution [53, 56, 26] :

$$\sigma = \boldsymbol{G} * \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \boldsymbol{R} * \varepsilon \tag{1.1.5}$$

où $\boldsymbol{R} = \dfrac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t}$ est la dérivée au sens des distributions de $\boldsymbol{G}$ ($\boldsymbol{G}$ est discontinu en 0) et avec

$$(\boldsymbol{R} * \varepsilon)_{ij} = \boldsymbol{R}_{ijkl} * \varepsilon_{kl}. \tag{1.1.6}$$

On peut remarquer que (1.1.2) généralise la loi de Hooke : le cas des matériaux élastiques est obtenu avec le choix :

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{C}(x)\,H(t)$$

où H est la fonction de Heavside :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t > 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

et $\boldsymbol{C}$ est le tenseur d'élasticité standard.

Une forme alternative de la relation de contrainte-déformation peut être obtenue en inversant les rôles de la déformation et de la contrainte dans (1.1.2) de telle manière que la déformation à l'instant t soit déterminée par l'histoire de la contrainte. Ceci s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{J}_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau}\, d\tau \tag{1.1.7}$$

où $\boldsymbol{J}$ est le tenseur de **fluage** vérifiant :

$$\boldsymbol{J}_{ijkl} = \boldsymbol{J}_{jikl} = \boldsymbol{J}_{ijlk}, \quad \forall\, i,j,k,l = 1,\cdots,d. \tag{1.1.8}$$

1.1.2 Dissipation du modèle

1.1.2.1 Notations et définitions

On note par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des applications linéaires :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) = \{\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \text{ linéaire}\}, \tag{1.1.9}$$

nous munissons cet espace d'une structure euclidienne à l 'aide du produit scalaire :

$$\sigma : \tilde{\sigma} = \sigma_{ij}\,\tilde{\sigma}_{ij}, \quad \forall\,(\sigma,\tilde{\sigma}) \in [\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)]^2, \tag{1.1.10}$$

$|\sigma|$ désigne la norme associée. $\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)$ désigne le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ des tenseurs symétriques :

$$\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) = \{\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)\,/\,\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\ \forall\, i,j = 1,\cdots,d\}. \tag{1.1.11}$$

Soit $\boldsymbol{R}$ un tenseur d'ordre 4 symétrique, on dit que $\boldsymbol{R}$ est défini positif si il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\boldsymbol{R}\,\sigma : \sigma = \boldsymbol{R}_{ijkl}\,\sigma_{kl}\,\sigma_{ij} \geq C\,|\sigma|^2 \quad \forall\,\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d). \tag{1.1.12}$$

1.1.2.2 Quantité d'énergie

Sous des hypothèses appropriées sur le tenseur de relaxation $\boldsymbol{G}$ et par technique d"énergie, la loi de comportement viscoélastique linéaire (1.1.4) conduit à un mécanisme dissipatif [51], comme nous allons le voir.

On considère l'équation d'équilibre pour un milieu au repos mécanique :

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\,\sigma = 0, \tag{1.1.13}$$

où ρ est la densité volumique et **div** est l'opérateur divergence défini par :

$$\mathbf{div}\,\sigma = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{dj}}{\partial x_j} \end{pmatrix}. \tag{1.1.14}$$

On suppose de plus que le tenseur de relaxation $\boldsymbol{G}$ vérifie les hypothèses suivantes :

– $\boldsymbol{G} \in C^2(\mathbb{R}^+; L^\infty(\mathbb{R}^d))$.

– $\boldsymbol{G}$ est défini positif sur $\mathbb{R}^d$.

– $\boldsymbol{G}'$ est défini négatif sur $\mathbb{R}^d$.

– $\boldsymbol{G}''$ est défini positif sur $\mathbb{R}^d$.

– $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{G}(x,t)$ existe $p.p. x \in \mathbb{R}^d$

On définit la densité d'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} Q(u,t) &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} G'(\tau)\,[\varepsilon(u(t-\tau)) - \varepsilon(u(t))] : [\varepsilon(u(t-\tau)) - \varepsilon(u(t))]\,d\tau \\ &+ \boldsymbol{G}_\infty\,\varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t)) \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

avec $\boldsymbol{G}_\infty(x) = \boldsymbol{G}(x,+\infty)$ supposé fini défini positif. D'après les hypothèses ci-dessus, la densité Q est positive.

Définition 1.1.1 *Soit (u,σ) la solution du système d'équations (1.1.4) et (1.1.13), on définit l'énergie de ce système par :*

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\left[\rho\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + Q(u,t)\right]dx. \tag{1.1.16}$$

Cette quantité est décroissante grâce au théorème suivant :

Théorème 1.1.1 *La quantité d'énergie (1.1.16) vérifie l'identité :*

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}''(s)\,[\varepsilon(u(t-\tau)) - \varepsilon(u(t))] : [\varepsilon(u(t-\tau)) - \varepsilon(u(t))]\,d\tau\,dx. \tag{1.1.17}$$

Démonstration

On fait le produit scalaire de (1.1.13) par $\partial_t u$, on obtient après une intégration sur $\mathbb{R}^d$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\partial_t u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^d}\mathbf{div}\,\sigma\cdot\partial_t u\,dx = 0.$$

En faisant une intégration par parties en espace du deuxième terme de cette équation, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\partial_t u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d}\sigma : \varepsilon(\partial_t u)\,dx = 0. \tag{1.1.18}$$

Nous utilisons la loi de comportement (1.1.4) qui définit σ ; la densité d'énergie potentielle $\sigma : \varepsilon(\partial_t u)$ s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma : \varepsilon(\partial_t u) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{G}(0)\,\varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t))] + \int_0^{+\infty}\boldsymbol{G}'(\tau)\,\varepsilon(u(t-\tau)) : \varepsilon(\partial_t u(t))\,d\tau, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{G}(0)\,\varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t))] + \int_0^{+\infty}\boldsymbol{G}'(\tau)\,[\varepsilon(u(t-\tau)) - \varepsilon(u(t))] : \varepsilon(\partial_t u(t))\,d\tau \\ &+ \int_0^{+\infty}\boldsymbol{G}'(\tau)\varepsilon(u(t)) : \varepsilon(\partial_t u(t))\,d\tau, \end{aligned}$$

Le dernier terme vérifie :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} G'(\tau)\varepsilon(u(t)) : \varepsilon(\partial_t u(t))\, d\tau &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)\, \varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t))\, d\tau, \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{G}_\infty\, \varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t))] - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{G}(0)\, \varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t))]\end{aligned}$$

on en déduit alors :

$$\sigma : \varepsilon(\partial_t u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{G}_\infty\, \varepsilon(u(t)) : \varepsilon(u(t))] + I,$$

avec

$$I = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)\, [\varepsilon(u(t-\tau)) - \varepsilon(u(t))] : \varepsilon(\partial_t u(t))\, d\tau.$$

Nous montrons que I s'écrit comme la somme de la dérivée en temps d'une quantité positive plus un terme de dissipation. En effet :

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)\, [\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : \partial_t[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)]\, d\tau + K_1, \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)\, [\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : [\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)]\, d\tau + K_1,\end{aligned}$$

avec

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : \partial_t \varepsilon(t-\tau)\, d\tau,$$

Pour achever la démonstration du théorème nous montrons que K_1 est positif :

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : \partial_t \varepsilon(t-\tau)\, d\tau, \\ &= -\int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : \partial_\tau \varepsilon(t-\tau)\, d\tau, \\ &= -\int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}'(\tau)[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : \partial_\tau[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)]\, d\tau, \\ &= \int_0^{+\infty} \boldsymbol{G}''(\tau)[\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)] : [\varepsilon(t-\tau) - \varepsilon(t)]\, d\tau \geq 0. \blacksquare\end{aligned}$$

1.2 Modèles différentiels

Le type d'équations "intégro-différentielles" présentées précédemment est très "lourd" à résoudre dans le cadre d'une simulation numérique. Une façon plus pratique de présenter le comportement viscoélastique est de l'écrire sous une forme différentielle en se basant sur des analogies mécaniques qui font intervenir des assemblages de ressorts et d'amortisseurs dans le cas unidimensionnel (modèles rhéologiques élémentaires) [24, 40, 56] :

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{D})\, \sigma = \boldsymbol{Q}(\mathcal{D})\, \varepsilon(u), \tag{1.2.1}$$

où $\mathcal{D}$ est l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{D}^i : f \to \frac{\partial^i f}{\partial t^i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

$\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont des polynômes différentiels :

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{D}) = \sum_{m=0}^{N} a_m \mathcal{D}^m, \quad \boldsymbol{Q}(\mathcal{D}) = \sum_{m=0}^{M} b_m \mathcal{D}^m. \tag{1.2.2}$$

Gurtin et Sternberg [56] ont montré que cette classe de modèle (différentielle) s'écrit sous la forme générale (intégro-différentielle) lorsque $M = N$ et sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.2.1 $a_N \neq, b_N \neq 0$.

Hypothèse 1.2.2 *La condition initiale (ou condition de compatibilité) suivante est vérifiée :*

$$\sum_{m=n}^{N} a_m \frac{\partial^{m-n}}{\partial t^{m-n}} \sigma(0) = \sum_{m=n}^{N} b_m \frac{\partial^{m-n}}{\partial t^{m-n}} \varepsilon(0) \quad \forall n = 1, \cdots, N \tag{1.2.3}$$

Si ces hypothèses sont vérifiées, il existe une fonction de relaxation $\boldsymbol{G}$ telle que σ et ε sont liés par la relation (1.1.2). De plus $\boldsymbol{G}$ est la solution unique du problème différentiel :

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{D})\, \boldsymbol{G} = b_0 \quad \text{dans }]0, +\infty[, \tag{1.2.4}$$

avec les conditions initiales :

$$\boldsymbol{G}(0) = \frac{b_N}{a_N}, \ \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(0) = \frac{1}{a_N} \big[b_{N-n} - \sum_{m=0}^{n-1} a_{N-n+m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \boldsymbol{G}(0) \big] \quad \forall\, n = 1, \cdots, N. \tag{1.2.5}$$

Remarque 1.2.1 *Il est facile de voir que l'hypothèse (1.2.3) sur les conditions initiales est nécessaire. En effet, supposons d'une part que σ et ε sont liés par (1.2.1) et d'autre part qu'il existe $\boldsymbol{G}$ telle que (1.1.2) soit satisfaite. En appliquant la transformée de Laplace :*

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

aux deux relations (1.1.2) et (1.2.1), on obtient les deux relations suivantes :

$$\tilde{\sigma}(s) = s\, \tilde{\boldsymbol{G}}(s)\, \tilde{\varepsilon}(s) \tag{1.2.6}$$

et

$$\left| \begin{aligned} & \tilde{\boldsymbol{P}}(s)\tilde{\sigma}(s) - \sum_{m=1}^{N} a_m \big[s^{m-1}\sigma(0) + s^{m-2} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\sigma}{\partial^{m-1}}(0) \big] \\ & = \tilde{\boldsymbol{Q}}(s)\tilde{\varepsilon}(s) - \sum_{m=1}^{M} b_m \big[s^{m-1}\varepsilon(0) + s^{m-2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\varepsilon}{\partial^{m-1}}(0) \big]. \end{aligned} \right. \tag{1.2.7}$$

Ces deux relations sont compatibles si $\boldsymbol{G}$ vérifie :

$$\tilde{\boldsymbol{G}}(s) = \frac{\tilde{\boldsymbol{Q}}(s)}{s\tilde{\boldsymbol{P}}(s)} \tag{1.2.8}$$

et si de plus on a :

$$\left| \begin{aligned} & \sum_{m=1}^{N} a_m \big[s^{m-1}\sigma(0) + s^{m-2} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\sigma}{\partial^{m-1}}(0) \big] \\ & = \sum_{m=1}^{M} b_m \big[s^{m-1}\varepsilon(0) + s^{m-2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(0) + \cdots + \frac{\partial^{m-1}\varepsilon}{\partial^{m-1}}(0) \big]. \end{aligned} \right. \tag{1.2.9}$$

Cette dernière relation entraîne (1.2.3), lorsque $M = N$.

1.3 Modèle de Zener

1.3.1 Modèle 1D

Dans le cas unidimensionnel, les modèles viscoélastiques les plus couramment utilisés sont les modèles de Kelvin-Voigt (le prototype des modèles rhéologiques solides, Fig 1.3.1), de Maxwell (le prototype des modèles rhéologiques fluide, Fig 1.3.2) et de Zener (le modèle standard). Nous nous sommes intéressés au modèle de Zener, qui s'interprète physiquement comme l'assemblage du modèle élémentaire de Kelvin-Voigt (ressort et amortisseur en parallèle) avec un ressort en série [26] (Fig 1.3.3).

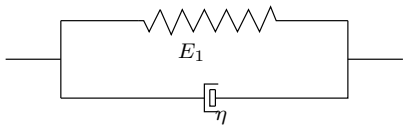


Fig. 1.3.1 – Modèle de Kelvin-Voigt

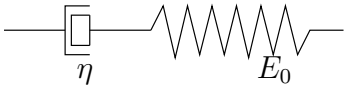


Fig. 1.3.2 – Modèle de Maxwell

Si ε_0 et ε_1 représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et σ la contrainte qui s'exerce sur l'élément, alors la loi de comportement s'écrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varepsilon & = & \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \\ \sigma & = & E_0\,\varepsilon_0, \\ \sigma & = & E_1\,\varepsilon_1 + \eta\,\dot{\varepsilon}_1, \end{array}\right. \tag{1.3.1}$$

avec :

- ε la déformation totale du modèle.
- E_0, E_1 les modules d'élasticité de chacun des ressorts.
- η la viscosité de l'amortisseur.

On déduit alors de (1.3.1) l'équation de comportement :

$$\sigma + \tau_0\dot{\sigma} = \mu\varepsilon + \mu\tau_1\dot{\varepsilon} \tag{1.3.2}$$

avec

$$\tau_0 = \frac{\eta}{E_0 + E_1},\ \mu = \frac{E_0\,E_1}{E0 + E_1},\ \text{et}\ \tau_1 = \frac{\eta}{E_1}. \tag{1.3.3}$$

Les paramètres τ_0, τ_1 sont appelés **temps de relaxation**. Le paramètre μ est **le module d'élasticité différé**.

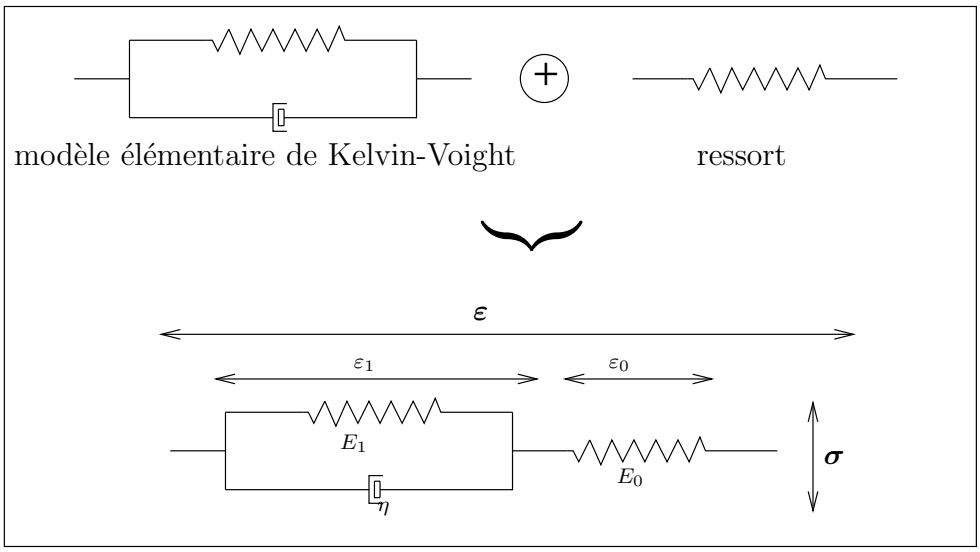


FIG. 1.3.3 – Modèle de Zener

Remarque 1.3.1 *On remarque que :*

- *D'après (1.3.3) on remarque que $E_0 > 0$, ce qui signifie que la condition physique $\tau_1 > \tau_0$ est toujours vérifiée.*
- *Les deux modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell s'obtiennent comme cas limites. Le premier est obtenu pour $E_0 \to \infty$. Le deuxième pour $E_1 \to 0$.*

1.3.2 Extension 2D et 3D

Pour une dimension supérieure, notre objectif est de présenter un modèle viscoélastique différentiel qui s'adapte aux milieux isotropes et anisotropes. Nous proposons un modèle qui généralise celui de Zener 1D, dont la loi de comportement est donnée par :

$$\sigma + \tau_0\, \partial_t \sigma = \boldsymbol{C}\, \varepsilon(u) + \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(\partial_t u), \tag{1.3.4}$$

où $\tau_0 > 0$ est un temps de relaxation, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sont deux tenseurs 4×4 symétriques, définis positifs. Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de ces tenseurs.

Remarque 1.3.2 *Dans les deux cas limites : $\tau_0 = 0$ ou $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C} = 0$, la loi de comportement (1.3.4) deviennent purement élastique. En effet :*

1. *Lorsque $\tau_0 = 0$, on trouve la loi de Hooke $\sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(u)$.*
2. *Lorsque $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$, l' équation de comportement (1.3.4), s'écrit sous la forme :*

$$\sigma(x,t) = \boldsymbol{C}(x)\, \varepsilon(u(x,t)) + e^{-\frac{t}{\tau_0}} \big[\sigma(x,0) - \boldsymbol{C}(x)\, \varepsilon(u(x,0))\big].$$

Si on a la condition de compatibilité $\sigma(x,0) = \boldsymbol{C}(x)\, \varepsilon(u(x,0))$ (voir 1.2.3), on obtient la loi de Hooke, dans le cas contraire, c'est l'équation d'un comportement élastique avec un terme source.

Écriture du modéle de Zener sous la forme intégro-différentielle

Sous l'hypothèse de compatibilité (1.2.3), nous montrons que la loi de comportement (1.3.4) s'écrit à l'aide d'une présentation intégro-différentielle. Le temps de relaxation τ_0 étant supposé strictement positif, la relation (1.3.4) peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{1}{\tau_0}(\sigma - \boldsymbol{D}\varepsilon(u)) + \partial_t(\sigma - \boldsymbol{D}\varepsilon(u)) = -\frac{1}{\tau_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})\,\varepsilon(u). \tag{1.3.5}$$

En multipliant cette équation par $exp(\tau/\tau_0)$ et en intégrant entre 0 et t, on obtient, en choisissant la condition initiale $\sigma(0) = \boldsymbol{D}\,\varepsilon(u(0))$:

$$\sigma(t) = \boldsymbol{D}\,\varepsilon(u(t)) + \int_0^t -\frac{1}{\tau_0}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})\,e^{(t-\tau)/\tau_0}\,\varepsilon(u(\tau))\,d\tau.$$

Ce qui donne la forme intégrale de la loi de Zener :

$$\sigma(t) = \boldsymbol{G}(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \tau}(\tau)\,\varepsilon(t-\tau)\,d\tau,$$

avec

$$\boldsymbol{G}(t) = \boldsymbol{C} + (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})\,e^{-t/\tau_0}. \tag{1.3.6}$$

La fonction de relaxation $\boldsymbol{G}$ s'écrit donc comme la superposition du tenseur d'élasticité et d'une fonction exponentielle qui s'annule à l'infini. Nous verrons que le tenseur $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ doit être défini positif pour que le modèle soit dissipatif. De plus, nous remarquons que le tenseur $\boldsymbol{G}$ vérifie les hypothèses du théorème 1.1.1.

Modèle isotrope

Par analogie avec le cas purement élastique, on dit que le milieu caractérisé par la loi de comportement (1.3.4) est **isotrope** si il existe des coefficients $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\tau_\lambda(x)$, $\tau_\mu(x)$ tels que :

$$(\boldsymbol{C}\sigma)_{ij} = \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\sigma_{ij}\ ;\ (\boldsymbol{D}\sigma)_{ij} = \lambda\gamma_\lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\gamma_\mu\sigma_{ij}$$

et on définit les coefficients :

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},\ v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\ \tau_p = \tau_0\frac{\lambda\gamma_\lambda + 2\mu\gamma_\mu}{\lambda + 2\mu},\ \tau_s = \tau_0\gamma_\mu, \tag{1.3.7}$$

avec v_p la vitesse, τ_p le temps de relaxation associés à l'onde de pression et v_s la vitesse, τ_s le temps de relaxation associés à l'onde de cisaillement (voir analyse par ondes planes §2.2.2).

1.4 Modèle de Zener généralisé

Une façon pratique pour caractériser la qualité de la dissipation des milieux viscoélastique d'une manière quantitative se fait à l'aide du facteur de qualité. En faisant une analyse par ondes planes, nous montrons que cette quantité dépendent de la fréquence (voir §2.2.1 et §2.2.2). Or en géophysique une classe des matériaux est caractérisée par des facteurs de qualité constants sur une large bande de fréquence. Pour décrire des milieux à facteur de qualité

quasi-constant nous considérons le modèle de Zener généralisé.

À partir du modèle de Zener "simple", il est facile de construire un modèle plus complexe, composé d'un certain nombre d'éléments de Zener en parallèle [34], comme ceci est illustré dans le cas 1D sur Fig 1.4.1. Sur cette figure, les paramètres $E_l, \tilde{E}_l,\ l = 1, \cdots, L$ représentent

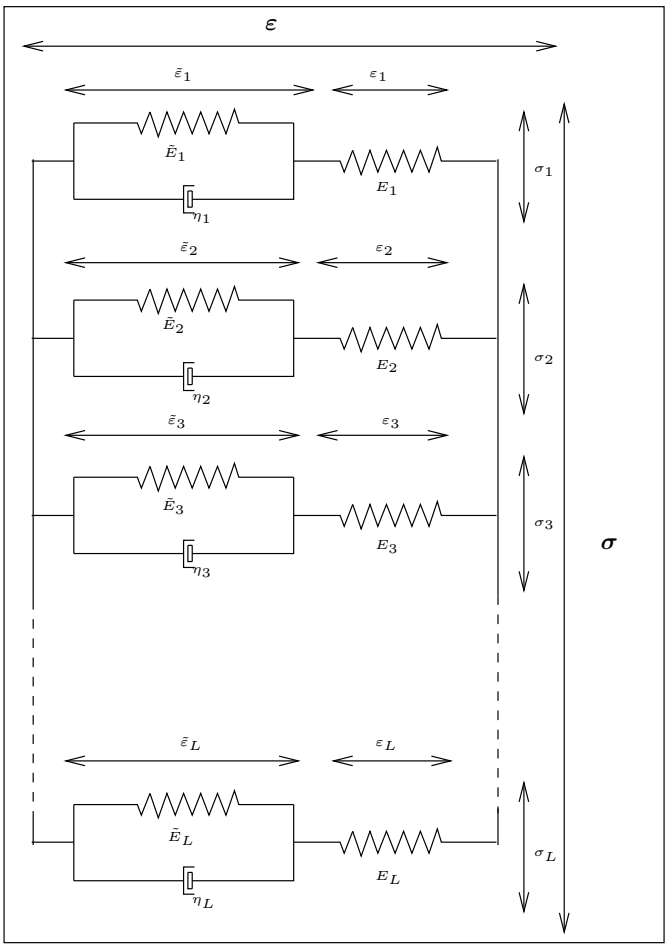


Fig. 1.4.1 – Modèle de Zener généralisé

les modules d'élasticité des ressorts et les $\eta_l,\ l = 1, \cdots, L$ les paramètres de viscosité des amortisseurs. En dimension supérieure, le modèle de Zener généralisé revient à définir le tenseur des contraintes comme une superposition :

$$\sigma = \sum_{l=1}^{L} \sigma_l. \tag{1.4.1}$$

où chaque σ_l est relié au tenseur des déformations par :

$$\sigma_l + \tau_l^0 \partial_t \sigma_l = \boldsymbol{C}\varepsilon(u) + \tau_l^0 \boldsymbol{D}_l \varepsilon(\partial_t u), \qquad l = 1, \cdots, L. \tag{1.4.2}$$

1.5 Autres modèles viscoélastiques

Dans la littérature on trouve une autre classe de modèles viscoélastiques, **les modèles différentiels fractionnaires** basés sur des dérivées non-entières, pour lesquels le tenseur des contraintes σ et le tenseur de déformation ε sont liés par la loi de comportement différentielle (1.2.1) où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre non-entier (voir par exemple [32]) :

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{D}) = a_0\,\mathcal{D}^0 + \sum_{m=1}^{M} a_m\,\mathcal{D}^{m+\alpha_m},\ \boldsymbol{Q}(\mathcal{D}) = b_0\,\mathcal{D}^0 + \sum_{m=1}^{N} b_m\,\mathcal{D}^{m+\beta_m} \tag{1.5.1}$$

avec $0 < \alpha_m < 1$, $0 < \beta_m < 1$ et

$$\mathcal{D}^\alpha\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\alpha}\, f'(\tau)\, d\tau, \quad \forall\, 0 < \alpha < 1, \tag{1.5.2}$$

où Γ est la fonction gamma classique définie par [1] :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\, dt, \quad (\Re e\, z > 0) \tag{1.5.3}$$

L'introduction de ces modèles a été motivée dès le début des années 70 par la modélisation des matériaux viscoélastique en particulier en géophysique [32, 35] et pour la modélisation des polymères [7, 8, 77, 82]. L'avantage de ces modèles avec dérivation fractionnaire est qu'ils sont capables de décrire le comportement de matériaux à facteur de qualité constant sur une bande de fréquences [31, 35], par contre la résolution numérique est compliquée et l'approximation des opérateurs différentiels fractionnaires n'est pas classique, de plus l'étude mathématique est plus complexe que les modèles différentiels classiques avec dérivation entière (voir par exemple [66] pour des pertes viscothermiques et [67] pour la stabilité de systèmes differentiels fractionnaires).

Chapitre 2

Analyse mathématique

Nous faisons ici une analyse mathématique du problème modèle, nous montrons un résultat d'existence et unicité de la solution forte et de la solution faible et nous étudions les principales propriétés de la propagation d'ondes associées à notre modèle : dissipation de l'énergie, propagation à vitesse finie, dispersion des ondes et le comportement de la solution lorsque l'absorption tend vers 0.

Sommaire

Introduction **39**
2.1 Études des milieux hétérogène **39**
2.1.1 Existence et unicité de solutions fortes 40
2.1.2 Résultats de régularité 44
2.1.3 Existence et unicité de solutions faibles 46
2.1.4 Décroissance de l'énergie 49
2.1.5 Propagation à vitesse finie 50
2.1.6 Du viscoélastique à l'élastique 55
2.1.6.1 Estimations a priori 55
2.1.6.2 Convergence et estimation de l'écart 57
2.2 Études des milieux homogènes **60**
2.2.1 Analyse par ondes planes en 1D 60
2.2.2 Analyse par ondes planes en 3D 66
2.2.3 Facteur de qualité et conception de modèles réalistes 67
2.2.3.1 Définitions 67
2.2.3.2 Facteur de qualité quasi-constant 69
2.2.3.3 Validation de la méthode 72
2.2.4 Cas d'un milieu isotrope de dimension supérieure 73

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse et l'étude mathématique du problème viscoélastique associé à la loi de comportement de type différentielle (1.3.4). Les modèles de viscoélasticité linéaires ont déjà été largement étudiés du point de vue mathématique [51, 56] dans un cadre assez général (modèle intégro-différentiel). Les résultats que nous présentons ici concernent plus spécifiquement le modèle de Zener généralisé.

La première section concerne l'analyse mathématique complète de ces modèles dans des milieux hétérogènes. En particulier, nous montrons des résultats d'existence et d'unicité de la solution forte et la solution faible en utilisant la théorie des semi-groupes, lequels ne semblent pas pouvoir être considérés comme des cas particuliers de résultats plus généraux [51]. Par ailleurs les théorèmes sur la dissipation d'énergie et la propagation à vitesse finie semblent originaux [11, 14]. Dans la dernière partie de cette section, nous démontrons mathématiquement en quel sens un milieu purement élastique peut être considéré comme la limite d'un milieu visco-élastique quand l'absorption tend vers 0. Enfin, l'intérêt de cette analyse est aussi (et peut-être surtout) de préparer l'analyse numérique que nous mènerons dans le chapitre 3 qui s'appuiera largement sur les techniques développées dans ce chapitre. Dans la dernière section, nous présentons des résultats classiques sur l'analyse de la propagation d'ondes planes dans des milieux homogènes. Nous mettons l'accent sur les phénomènes de dispersion et la dépendance de l'atténuation vis à vis de la fréquence, nous abordons la question de modélisation suivante : comment adapter les paramètres du modèle mathématique d'une façon à se caler sur des mesures ou pour obtenir des propriétés physiques données ? En particulier, nous rappelons la notion de facteur de qualité qui caractérise d'une manière quantitative la dissipation du milieu et en proposant une méthode pour approcher des milieux à facteur de qualité quasi-constant sur une bande de fréquence. Ceci nous permettera de comprendre les propriétés des ondes viscoélastiques, en particulier, l'influence des coefficients d'amortissements sur la qualité de la dissipation et la dispersion des ondes. Ces résultats nous seront en particulier utiles pour l'analyse de stabilité par Fourier des schémas numériques présentés dans le chapitre 3 mais aussi pour interpréter nos résultats numériques.

2.1 Études des milieux hétérogène

On s'intéresse à la propagation des ondes dans un milieu modélisé par une loi de comportement de type Zener (1.3.4) en dimension d ($d = 1, 2, 3$). On cherche donc à déterminer le champ de déplacement u et le tenseur des contraintes σ vérifiant :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\, \sigma = f, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, T], \tag{2.1.1a}$$

$$\sigma + \tau_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \boldsymbol{C} \varepsilon(u) + \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, T], \tag{2.1.1b}$$

$$u(x, 0) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d, \tag{2.1.1c}$$

$$\sigma(x, 0) = \sigma_0, \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d, \tag{2.1.1d}$$

où **div** est l'opérateur divergence défini par (1.1.14), ρ est la densité volumique, τ_0 un temps de relaxation, f la densité de source, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ deux tenseurs 4×4 qui satisfont :

$$\boldsymbol{C}_{ijkl} = \boldsymbol{C}_{jikl} = \boldsymbol{C}_{klij} \ , \ \ \boldsymbol{D}_{ijkl} = \boldsymbol{D}_{jikl} = \boldsymbol{D}_{klij}, \tag{2.1.2}$$

et il existe M_-, M_+ deux constantes positives, tels que :

$$0 < M_-|\sigma|^2 \leq \boldsymbol{C}\sigma : \sigma \leq M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) \ \ p.p.x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1.3a}$$

$$0 < M_-|\sigma|^2 \leq \boldsymbol{D}\sigma : \sigma \leq M_+|\sigma|^2, \ \ \forall \sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) \ \ p.p.x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1.3b}$$

Remarque 2.1.1 *La symétrie dans le sens (2.1.2) implique :*

$$\boldsymbol{G}\sigma : \tilde{\sigma} = \boldsymbol{G}\tilde{\sigma} : \sigma \ \ \textit{pour tout tenseur } \boldsymbol{G} \textit{symétrique et } (\sigma, \tilde{\sigma}) \in \left[\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)\right]^2.$$

Nous ferons en outre les hypothèses suivantes :

- ρ, τ_0, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ mesurables.
- La densité volumique ρ vérifie :

$$0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty \quad p.p.x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1.4}$$

- $0 < \tau_- \leq \tau_0(x) \leq \tau_+ < +\infty \quad p.p.x \in \mathbb{R}^d$.
- la condition d'absorption : $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ est définie positive :

$$0 < M_-|\sigma|^2 \leq \boldsymbol{Z}\sigma : \sigma \leq M_+|\sigma|^2, \ \ \forall\, \sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) \ \ p.p.x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1.5}$$

et on note par $\boldsymbol{Z}_\tau$ le tenseur symétrique défini positif $\tau_0\boldsymbol{Z}$.

2.1.1 Existence et unicité de solutions fortes

On considère les espaces fonctionnels :

$$\left| \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)) = \Big\{\sigma : \mathbb{R}^d \mapsto \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) \,/\, \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\sigma|^2\, dx < \infty\Big\}, \\ \underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d) = \Big\{\sigma \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \,/\, \mathbf{div}\, \sigma \in \left[L^2(\mathbb{R}^d)\right]^d\Big\}. \end{array} \right. \tag{2.1.6}$$

Pour tout tenseur symétrique $\boldsymbol{C}$, on note par :
- $(\cdot : \cdot)_{\boldsymbol{C}}$ le produit scalaire dans $\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)$ et $|\cdot|_{\boldsymbol{C}}$ sa norme associée :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d) & \longmapsto & \mathbb{R}, \\ (\sigma, \varepsilon) & \longmapsto & \boldsymbol{C}\,\sigma : \varepsilon \equiv (\sigma : \varepsilon)_{\boldsymbol{C}}. \end{array}$$

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\boldsymbol{C}}$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))$ et $\|.\|_{\boldsymbol{C}}$ sa norme associée :

$$\begin{array}{rcl} L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \times L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)) & \longmapsto & \mathbb{R}, \\ (\sigma, \varepsilon) & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{C}\,\sigma : \varepsilon\, dx \equiv \langle \sigma : \varepsilon \rangle_{\boldsymbol{C}}. \end{array}$$

On écrit le problème (2.1.1) sous la forme d'un système d'évolution du premier ordre en introduisant les variables : $v = \partial_t u$ (le champ de vitesse) et $s = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u)$ (la différence entre la contrainte viscoélastique et la contrainte élastique). On verra plus tard dans les sections qui vont suivre, que cette nouvelle variable s va jouer un rôle important. Le problème (2.1.1) se réécrit :

$$\text{(2.1.7)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\, s = \dfrac{f}{\rho}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} - \boldsymbol{Z}\varepsilon(v) + \dfrac{1}{\tau_0}s = 0, \\ u(x,0) = u_0,\ v(x,0) = u_1,\ s(x,0) = s_0 = \sigma_0 - \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0), \end{cases}$$

ou encore, en posant $W = (u, v, s)^t$:

$$\text{(2.1.8)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dW}{dt} + \boldsymbol{\Lambda} W = F, \\ W(0) = W_0, \end{cases}$$

avec

$$\text{(2.1.9)} \qquad \boldsymbol{\Lambda} W = \begin{pmatrix} -v \\ -\dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{div}\, s \\ -\boldsymbol{Z}\varepsilon(v) + \dfrac{1}{\tau_0}s \end{pmatrix}, \quad W_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ s_0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{f}{\rho} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On introduit l'espace de Hilbert :

$$\text{(2.1.10)} \qquad H = [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times [L^2(\mathbb{R}^d)]^d \times L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)),$$

muni du produit scalaire :

$$\text{(2.1.11)} \qquad (W_1, W_2)_H \;=\; (u_1, u_2)_\rho + \langle \varepsilon(u_1) : \varepsilon(u_2)\rangle_{\boldsymbol{C}} + (v_1, v_2)_\rho + \langle s_1 : s_2\rangle_{\boldsymbol{Z}^{-1}},$$

avec $W_1 = (u_1, v_1, s_1)^t$, $W_2 = (u_2, v_2, s_2)^t$ et

$$(u_1, u_2)_\rho = \int_{\mathbb{R}^d} \rho\, u_1.u_2\, dx,$$

où $u \cdot v$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$.

On considère l'opérateur non borné sur $D(\boldsymbol{\Lambda}) \subset H \to H$ défini par (2.1.9) avec :

$$\text{(2.1.12)} \qquad D(\boldsymbol{\Lambda}) = \Big\{(u, v, s) \in H \;/\; s + \boldsymbol{C}\varepsilon(u) \in \underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d), v \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d\Big\}.$$

Remarque 2.1.2 *Le produit scalaire (2.1.11) est bien défini grâce à (2.1.3)-(2.1.5).*

La preuve de l'existence et l'unicité de la solution forte du problème modèle (2.1.1) se fonde sur l'utilisation de la théorie de Hille-Yosida, ce qui nécessite le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *L'opérateur $\mathbf{\Lambda} + \lambda I$ est maximal monotone pour tout $\lambda > 1/2$.*

Démonstration

- **Monotonie** : soit $W = (u, v, s)^t \in D(\mathbf{\Lambda})$, on a :

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Lambda} W, W)_H &= -\int_{\mathbb{R}^d} \rho\, u \cdot v\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(v)\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{div}\left(\boldsymbol{C}\varepsilon(u) + s\right) \cdot v\, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} [\varepsilon(v) - \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} s] : s\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \rho\, u \cdot v\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} s : s\, dx,\end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{Z}_\tau = \tau_0 \boldsymbol{Z}$. D'autre part :

$$\|W\|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \rho\, |u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \rho\, |v|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{Z}^{-1} s : s\, dx.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(\mathbf{\Lambda} W, W)_H + \lambda \|W\|_H^2 &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\lambda |u|^2 - u \cdot v + \lambda |v|^2)\, dx, \\ &\geq (\lambda - \frac{1}{2}) \int_{\mathbb{R}^d} \rho(|u|^2 + |v|^2)\, dx,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbf{\Lambda} + \lambda I$ est monotone dès que $\lambda > 1/2$.

- **Surjectivité** : montrons que $\mathbf{\Lambda} + \nu I$ est surjective pour tout $\nu > 0$. Ceci équivaut à montrer que pour tout $F = (f, g, h)^t \in H$, il existe $W = (u, v, s)^t \in D(\mathbf{\Lambda})$ solution du système :

$$\nu u - v = f, \tag{2.1.13a}$$

$$-\frac{1}{\rho} \mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) + \nu v - \frac{1}{\rho} \mathbf{div}\, s = g, \tag{2.1.13b}$$

$$-\boldsymbol{Z}(x)\varepsilon(v) + \frac{1 + \nu\tau_0}{\tau_0} s = h. \tag{2.1.13c}$$

Si (2.1.13) a une solution, il est facile d'éliminer v et s et de voir que u doit vérifier l'équation :

$$-\mathbf{div}\left(\tilde{\boldsymbol{Z}}(x)\varepsilon(u)\right) + \rho\, \nu^2 u = \rho\, g + \rho\nu\, f + \mathbf{div}\left(\frac{\tau_0}{1 + \nu\tau_0} h\right) - \mathbf{div}\left(\frac{\tau_0}{1 + \nu\tau_0} \boldsymbol{Z}(x)\varepsilon(f)\right), \tag{2.1.14}$$

avec

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{C} + \frac{\nu\tau_0}{1 + \nu\tau_0} \boldsymbol{Z}. \tag{2.1.15}$$

La formulation variationnelle de (2.1.14) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \text{ tel que :} \\ a(u, \tilde{u}) = l(\tilde{u}), \quad \forall \tilde{u} \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d, \end{cases}$$

avec

$$
(2.1.16) \qquad \left| \begin{array}{l} a(u,\tilde{u}) = \left\langle \tilde{\boldsymbol{Z}}\varepsilon(u), \varepsilon(\tilde{u}) \right\rangle + \nu^2 \, (\rho \, u, \tilde{u}), \\ \\ l(\tilde{u}) = (\rho \, g, \tilde{u}) + \nu(\rho \, f, \tilde{u}) - \left\langle \dfrac{\tau_0}{1+\nu\tau_0} \, h, \varepsilon(\tilde{u}) \right\rangle + \left\langle \dfrac{\tau_0}{1+\nu\tau_0} \, \boldsymbol{Z}\varepsilon(f), \varepsilon(\tilde{u}) \right\rangle, \end{array} \right.
$$

où $(.,.)$ et $\langle .,. \rangle$ désignent le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))$.

D'après (2.1.3a), (2.1.5) et l'inégalité de Korn [48, 70] dans $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d$, la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue coercive sur $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d$ pour tout $\nu \neq 0$. Le théorème de Lax-Milgram permet alors d'affirmer que le problème (2.1.16) admet une solution unique u dans $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d$.

Les données (f,h) étant supposées appartenir à $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))$, on obtient l'existence de $s \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))$ en posant :

$$
(2.1.17) \qquad s = \frac{\nu\tau_0}{1+\nu\tau_0} \boldsymbol{Z}\varepsilon(u) + \frac{\tau_0}{1+\nu\tau_0} h - \frac{\tau_0}{1+\nu\tau_0} \boldsymbol{Z}\varepsilon(f).
$$

L'existence de $v \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d$ se déduit directement en utilisant (2.1.13a). Enfin en remontant à l'équation (2.1.13b), on voit facilement que s et u vérifient :

$$
\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u) + s) \in [L^2(\mathbb{R}^d)]^d.
$$

Nous avons donc démontré que l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda} + \nu I$ était surjectif $\forall \nu > 0$. Pour finir la démonstration du lemme, il suffit de raisonner avec $\nu = \lambda + 1$. ■

Maintenant, on peut énoncer le théorème d'existence et d'unicité :

Théorème 2.1.1 *Pour toutes conditions initiales* $(u_0, u_1, \sigma_0) \in \big([H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big)^2 \times \underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)$ *et tout* $f \in C^1(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d)$, *il existe une unique solution* (u,σ) *du problème (2.1.1) qui vérifie :*

$$
\left\{ \begin{array}{l} u \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \sigma \in C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big). \end{array} \right.
$$

Démonstration

Sous l'hypothèse $W_0 \in D(\boldsymbol{\Lambda})$ et grâce au théorème de Hille-Yosida [27], nous déduisons que le problème (2.1.7) admet une unique solution $W \in C^0(0,T;D(\boldsymbol{\Lambda})) \cap C^1(0,T;H)$. Ceci équivaut à :

- $u \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big)$,
- $v = \partial_t u \in C^0\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$,
- $\sigma = s + \boldsymbol{C}\varepsilon(u) \in C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big)$ et $p \in C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big)$,

ce qui entraîne :

$$
(2.1.18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \sigma \in C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big), \end{array} \right.
$$

et achève la démonstration. ■

Il n'y a aucune difficulté à obtenir un résultat analogue dans le cas du modèle de Zener général (1.4.2). Dans ce cas, on cherche le champ de déplacement u et les tenseurs des contraintes "élémentaires" σ_l, qui composent σ (voir relation (1.4.1)) solutions du problème :

$$
(2.1.19) \qquad \begin{cases} \rho\,\partial^2_{tt}u - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \mathbf{div}\,\sigma_l = f, \\ \sigma_l + \tau^0_l \partial_t \sigma_l = \boldsymbol{C}\varepsilon(u) + \tau^0_l \boldsymbol{D}_l\,\varepsilon(\partial_t u), \quad \forall\, l = 1, \cdots, L, \\ u(x,0) = u_0,\ \partial_t u(x,0) = u_1, \\ \sigma_l(x,0) = \sigma^0_l, \qquad\qquad\qquad\qquad \forall\, l = 1, \cdots, L. \end{cases}
$$

On peut alors montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1.2 *Si* $(u_0, u_1, \sigma^0_1, \cdots, \sigma^0_L) \in \big([H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big)^2 \times \big(\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big)^L$. *Alors pour tout* $f \in C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$ *il existe une unique solution du problème (2.1.19)*

$$
\begin{cases} u \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \sigma_l \in C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big), \quad \forall\, l = 1, \cdots, L. \end{cases}
$$

2.1.2 Résultats de régularité

En supposant plus de régularité sur les données, on peut obtenir un résultat de régularité en temps sur la solution :

Théorème 2.1.3 *On suppose que les données du problème (2.1.1) vérifient* ($k \geq 2$) *:*

$$
(2.1.20) \qquad \begin{cases} (\rho, \tau_0, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) \in \big(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)\big)^2 \times \Big(\big(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)\big)^{d^4}\Big)^2, \\ (u_0, u_1, \sigma_0) \in \big([H^k(\mathbb{R}^d)]^d\big)^2 \times [H^k(\mathbb{R}^d)]^{d^2}, \\ f \in C^k\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^{k-1}\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big). \end{cases}
$$

Alors la solution forte (u,σ) *du problème (2.1.1) vérifie :*

$$
\begin{cases} u \in C^k\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^{k+1}\big(0,T;[L^2(\mathbb{R})]^d\big), \\ \sigma \in C^{k-1}\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^k\big(0,T,L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big). \end{cases}
$$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur k. On commence par $k = 2$. Appliquant le théorème 2.1.1 au problème :

$$
(2.1.21) \qquad \begin{cases} \rho\,\partial^2_{tt}V - \mathbf{div}\,\Sigma = F = \partial_t f, \\ \Sigma + \tau_0\,\partial_t\Sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(V) + \tau_0\boldsymbol{D}\,\varepsilon(\partial_t V), \\ V|_{t=0} = V_0 = u_1,\ \partial_t V|_{t=0} = V_1 = \dfrac{1}{\rho}(f(x,0) + \mathbf{div}\,\sigma_0), \\ \Sigma|_{t=0} = \Sigma_0 = \dfrac{1}{\tau_0}\big(\boldsymbol{C}\varepsilon(u_0) + \tau_0\boldsymbol{D}\,\varepsilon(u_1) - \sigma_0\big). \end{cases}
$$

Sous les hypothèses (2.1.20), les données initiales (V_0, V_1, Σ_0, F) vérifient les conditions du théorème 2.1.1, d'où l'existence d'une solution unique (V, Σ) du système (2.1.21), qui vérifie :

$$\begin{cases} V \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \Sigma \in C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big). \end{cases}$$

Les primitives :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t V(s)\,ds, \quad \sigma(t) = \sigma_0 + \int_0^t \Sigma(s)\,ds \tag{2.1.22}$$

vérifient alors :

$$\begin{cases} u \in C^2\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^3\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \sigma \in C^1(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \cap C^2\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big). \end{cases}$$

Pour finir il suffit de montrer que (u, σ) est la solution du (2.1.1). Or (u, σ) vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t\big(\rho\,\partial^2_{tt}u - \mathbf{div}\,\sigma - f\big) = 0, \\ \partial_t\big(\sigma + \tau_0\partial_t\sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u) - \tau_0\boldsymbol{D}\,\varepsilon(\partial_t u)\big) = 0. \end{cases} \tag{2.1.23}$$

En intégrant (2.1.23) entre 0 et t et en tenant compte des conditions initiales :

$$\left| \begin{array}{l} V|_{t=0} = \partial_t u|_{t=0} = u_1, \\ \partial_t V|_{t=0} = \partial^2_{tt}u|_{t=0} = \dfrac{1}{\rho}(f(x,0) + \mathbf{div}\,\sigma_0), \\ \Sigma|_{t=0} = \partial_t\sigma|_{t=0} = \dfrac{1}{\tau_0}\big(\boldsymbol{C}\varepsilon(u_0) + \tau_0\boldsymbol{D}\varepsilon(u_1) - \sigma_0\big), \end{array} \right. \tag{2.1.24}$$

nous montrons que (u, σ) est la solution du (2.1.1).

Passons au cas général $k \geq 3$. Supposons que le résultat est vrai jusqu'à l'ordre $k-1$ et montrons qu'il est valable pour k. D'après le résultat précédent on sait que la solution (u, σ) de (2.1.1) appartient à $C^2\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^3\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^1(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \cap C^2\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big)$ et elle vérifie (2.1.23). Les dérivées :

$$(V, \Sigma) = (\partial_t u, \partial_t\sigma)$$

sont dans l'espace :

$$C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big)$$

et (V, Σ) est la solution du système (2.1.21). Comme les données initiales vérifient :

$$(V_0, V_1, \Sigma_0, F) \in \big([H^{k-1}(\mathbb{R}^d)]^d\big)^2 \times [H^{k-1}(\mathbb{R}^d)]^{d^2} \times C^{k-1}\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^{k-2}\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big),$$

d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{cases} V \in C^{k-1}\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^k\big(0,T;[L^2(\mathbb{R})]^d\big), \\ \Sigma \in C^{k-2}\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^{k-1}\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big), \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} u \in C^k\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^{k+1}\big(0,T;[L^2(\mathbb{R})]^d\big), \\ \sigma \in C^{k-1}\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^k\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big). \end{cases} \quad \blacksquare$$

2.1.3 Existence et unicité de solutions faibles

On note :

$$Q_T = \mathbb{R}^d \times [0,T] \ , \ \ Q_T^* = \mathbb{R}^d \times]0,T] \tag{2.1.25}$$

et les espaces

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(Q_T) = \{v \in C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^0\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \,/\, v(T) = 0 \ \text{ et } \ \partial_t v(T) = 0\}, \\ &\mathcal{L}(Q_T) = \{\tilde{\sigma} \in C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big) \,/\, \tilde{\sigma}(T) = 0\}. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

On dit que (u,σ) est une solution faible du problème (2.1.1) si elle vérifie :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho\, u \cdot \partial_{tt}^2 v + \sigma : \varepsilon(v) - f \cdot v\big]\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho\, \big[u_1 \cdot v(x,0) - u_0 \cdot \partial_t v(x,0)\big]\, dx, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\sigma : \tilde{\sigma} - \tau_0\, \sigma : \partial_t \tilde{\sigma} - \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \tilde{\sigma} + \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(u) : \partial_t \tilde{\sigma}\big]\, dx\, dt = \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \big[\tau_0\, \sigma_0 : \tilde{\sigma}(x,0) - \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(u_0) : \tilde{\sigma}(x,0)\big]\, dx, \\ \forall (v,\tilde{\sigma}) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{cases} \tag{2.1.27}$$

On a le théorème d'existence et d'unicité de la solution faible :

Théorème 2.1.4 *Si les données initiales vérifient*

$$(u_0, u_1, \sigma_0, f) \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times [L^2(\mathbb{R}^d)]^d \times L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)) \times L^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big).$$

Alors le problème (2.1.27) admet une unique solution :

$$(u,\sigma) \in C^0\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^0\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big).$$

Démonstration

1. **Existence.** Par densité, il existe une suite :

$$(u_0^n, u_1^n, \sigma_0^n, f^n) \in \big([H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big)^2 \times \underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d) \times C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$$

vérifiant :

$$\left| \begin{array}{lll} u_0^n \to u_0 & \text{dans} & (H^1(\mathbb{R}^d))^n, \\ u_1^n \to u_1 & \text{dans} & (L^2(\mathbb{R}^d))^n, \\ \sigma_0^n \to \sigma_0 & \text{dans} & L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)), \\ f^n \to f & \text{dans} & L^1\big(0,T,(L^2(\mathbb{R}^d))^n\big). \end{array} \right. \tag{2.1.28}$$

Soit (u^n, σ^n) la solution forte du problème (2.1.1) associée aux données initiales $(u_0^n, u_1^n, \sigma_0^n, f^n)$ (cf. théorème 2.1.1). Appliquons les estimations du théorème 2.1.8 aux différences $(u^p - u^q, \sigma^p - \sigma^q)$, nous remarquons que la suite (u^n, σ^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $W(0,T;\mathbb{R}^d)$ défini par :

$$C^0\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^0\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big),$$

muni de la norme :

$$\|(u,\sigma)\|_W = \sup_{t\in[0,T]} \Big[\|u(t)\|_\rho + \|\partial_t u\|_\rho + \|\nabla u(t)\| + \|\sigma(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}\Big]. \tag{2.1.29}$$

On en déduit l'existence de $(u,\sigma) \in W(0,T;\mathbb{R}^d)$ vérifiant :

$$\begin{cases} u^n \to u \quad \text{dans} \quad C^0\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \sigma^n \to \sigma \quad \text{dans} \quad C^0\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big). \end{cases}$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que si (u^n,σ^n) est une solution forte alors en particulier elle est solution faible du problème :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \Big[\rho\, u^n \cdot \partial^2_{tt} v + \sigma^n : \varepsilon(v)\Big]\, dx\, dt = \int_{Q_T} f\cdot v\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \rho\, \Big[u_1^n \cdot v(x,0) - u_0^n \cdot \partial_t v(x,0)\Big]\, dx, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \Big[\sigma^n : \tilde\sigma - \tau_0\, \sigma^n : \partial_t\tilde\sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u^n) : \tilde\sigma + \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(u^n) : \partial_t\tilde\sigma\Big]\, dx\, dt = \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \Big[\tau_0\sigma_0^n : \tilde\sigma(x,0) - \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(u_0^n) : \tilde\sigma(x,0)\Big]\, dx, \\ \forall (v,\tilde\sigma) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{cases}$$

par passage à la limite quand $n \to +\infty$.

2. **Unicité.** Par linéarité, il suffit de montrer l'unicité de la solution du problème (2.1.27) en l'absence de source et avec des données initiales nulles. Soit (u,σ) une solution du problème (2.1.27) avec $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\sigma_0 = 0$ et $f = 0$:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho\, u \cdot \partial^2_{tt} v + \sigma : \varepsilon(v)\big]\, dx\, dt = 0, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\sigma : \tilde\sigma - \tau_0\sigma : \partial_t\tilde\sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \tilde\sigma + \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(u) : \partial_t\tilde\sigma\big]\, dx\, dt = 0, \\ \forall (v,\tilde\sigma) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{cases} \tag{2.1.30}$$

On considère le problème :

$$\begin{cases} \rho\, \partial^2_{tt}\bar u - \mathbf{div}\, \bar\sigma = u, & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \times [0,T[, \\ \bar\sigma - \tau_0\, \partial_t\bar\sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(\bar u) - \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(\partial_t \bar u), & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d \times [0,T[, \\ \bar u(x,T) = \partial_t\bar u(x,T) = 0,\ \bar\sigma(x,T) = 0, & \text{dans} \quad \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.1.31}$$

ce problème admet une unique solution forte $(\bar u,\bar\sigma)$ dans l'espace :

$$C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big)^n) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \times C^0\big(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))\big).$$

car comme $u \in C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$ il suffit d'appliquer le théorème 2.1.1 en réécrivant le dernier problème sous la forme du système (2.1.1), en faisant le changement de variable $s = T - t$ et en prenant comme données les fonctions

$$(u_0, u_1, \sigma_0, f) = (0,0,0,u(T-s)).$$

Si on note $\pi = \sigma - \boldsymbol{D}\varepsilon(u)$, le système (2.1.30) se réécrit sous la forme suivante :

$$\text{(2.1.32)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho\, u \cdot \partial^2_{tt} v + \pi : \varepsilon(v) + \boldsymbol{D}\,\varepsilon(u) : \varepsilon(v)\big]\, dx\, dt = 0, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\pi : \tilde{\sigma} - \tau_0\, \pi : \partial_t \tilde{\sigma} + \boldsymbol{Z}\,\varepsilon : \tilde{\sigma}\big]\, dx\, dt = 0, \\ \forall (v, \tilde{\sigma}) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{cases}$$

On remarque que par construction de $(\bar{u}, \bar{\sigma})$ on peut choisir comme fonctions de test dans (2.1.30) :

$$\text{(2.1.33)} \qquad (v, \tilde{\sigma}) = (\bar{u}, \boldsymbol{Z}^{-1}\bar{\pi}) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T)\ ,\ \bar{\pi} = \bar{\sigma} - \boldsymbol{D}\,\varepsilon(\bar{u}).$$

Le système (2.1.32) donne alors :

$$\text{(2.1.34a)} \qquad \int_{Q_T} \big[\rho\, u \cdot \partial^2_{tt} \bar{u} + \pi : \bar{\varepsilon} + \boldsymbol{D}\,\varepsilon : \bar{\varepsilon}\big]\, dx\, dt = 0,$$

$$\text{(2.1.34b)} \qquad \int_{Q_T} \big[\boldsymbol{Z}^{-1}\pi : \bar{\pi} - \tau_0\, \boldsymbol{Z}^{-1}\pi : \partial_t \bar{\pi} + \varepsilon : \bar{\pi}\big]\, dx\, dt = 0,$$

où $\varepsilon = \varepsilon(u)$ et $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(\bar{u})$. On fait ensuite le produit scalaire au sens des tenseurs de la deuxième équation du système (2.1.31) avec $\boldsymbol{Z}^{-1}\pi$. Après intégration sur Q_T, nous obtenons :

$$\text{(2.1.35)} \qquad \int_{Q_T} \big[\boldsymbol{Z}^{-1}\bar{\pi} : \pi - \tau_0\, \boldsymbol{Z}^{-1}\partial_t \bar{\pi} : \pi + \bar{\varepsilon} : \pi\big]\, dx\, dt = 0.$$

Cette dernière équation et l'équation (2.1.34b) impliquent :

$$\int_{Q_T} \pi : \bar{\varepsilon}\, dx\, dt = \int_{Q_T} \bar{\pi} : \varepsilon\, dx\, dt.$$

D'où (2.1.34a) devient :

$$\int_{Q_T} [\rho\, u \cdot \partial^2_{tt} \bar{u} - \bar{\pi} : \varepsilon + \boldsymbol{D}\,\varepsilon : \bar{\varepsilon}]\, dx\, dt = 0.$$

En remplaçant $\bar{\pi}$ par sa valeur donnée par (2.1.33) et après une intégration par partie nous obtenons :

$$\int_{Q_T} u[\rho\, \partial^2_{tt} \bar{u} - \mathbf{div}\, \bar{\sigma}]\, dx\, dt = 0.$$

Or, comme $(\bar{u}, \bar{\sigma})$ est la solution du problème (2.1.31), on a :

$$\text{(2.1.36)} \qquad \int_{Q_T} |u(x,t)|^2\, dx\, dt = 0,$$

ce qui entraîne $u = 0$. Pour finir on montre que $\sigma = 0$ en utilisant la deuxième équation du système (2.1.27) :

$$\int_{Q_T} [\sigma : \tilde{\sigma} - \tau_0\, \sigma : \partial_t \tilde{\sigma}]\, dx\, dt = 0 \ \ \forall \tilde{\sigma} \in \mathcal{L}(Q_T).$$

D'où l'unicité de la solution. ■

2.1.4 Décroissance de l'énergie

Définition 2.1.1 *Soit (u, σ) la solution forte du système (2.1.1). On appelle énergie de (u, σ) à l'instant t la quantité :*

$$E(u, \sigma, t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_\rho^2 + \frac{1}{2}\|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}}^2 + \frac{1}{2}\|s\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2, \tag{2.1.37}$$

avec

$$s = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u). \tag{2.1.38}$$

Remarque 2.1.3 *On remarque que*

- *la quantité d'énergie se décompose en deux parties, la première $\left(\|\dot{u}\|_\rho^2\, dx + \|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}}^2\right)/2$ correspond à l'énergie classique du cas purement élastique (i.e. lorsque τ_0 est nul) et la deuxième $\frac{1}{2}\|p\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2$, due aux effets de la visco-élasticté, s'exprime comme la norme de la différence entre la contrainte viscoélastique et la contrainte élastique.*

- *Compte tenu de la régularité de (u, σ), l'énergie $E(t)$ vérifie :*

$$E \in C^1(0, T) \;\; ; \;\; E(u) < +\infty \quad \forall t \geq 0.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.1.5 *L'énergie $E(t)$ associée au problème (2.1.1) vérifie l'identité :*

$$\frac{dE}{dt} = -\|s\|_{\boldsymbol{Z}_\tau^{-1}}^2 + (f, \partial_t u) \tag{2.1.39}$$

et elle décroît en l'absence de terme source ($f = 0$).

Démonstration

• On remarque qu'on peut réécrire les équations (2.1.1a) et (2.1.1b) en fonction de u et s :

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\, s - \mathbf{div}\,(C\varepsilon(u)) = f, \tag{2.1.40a}$$

$$\boldsymbol{Z}^{-1}\partial_t s + \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} s = \varepsilon(\partial_t u). \tag{2.1.40b}$$

En faisant le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ de (2.1.40a) par $\partial_t u$, dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ celui de (2.1.40b) par s et après une intégration sur $\mathbb{R}^d$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u\|_\rho^2 - (\mathbf{div}\, s, \partial_t u) - (\mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)), \partial_t u) = (f, \partial_t u), \tag{2.1.41a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|s\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2 + \|s\|_{\boldsymbol{Z}_\tau^{-1}}^2 - (\varepsilon(\partial_t u) : s) = 0, \tag{2.1.41b}$$

en faisant une intégration par partie du deuxième et troisième terme de l'équation (2.1.41a), nous aurons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_t u\|_\rho^2 + (s, \varepsilon(\partial_t u)) + (\boldsymbol{C}\varepsilon(u) : \varepsilon(\partial_t u)) = (f, \partial_t u), \tag{2.1.42}$$

ce qui donne (2.1.39) en sommant les deux identités (2.1.41b) et (2.1.42).

• On en déduit la décroissance de l'énergie pour $f = 0$ car l'hypothèse (2.1.5) montre que $\boldsymbol{Z}$ est défini positif et par conséquent $-\|s\|^2_{\boldsymbol{Z}_\tau^{-1}}$ est un terme de dissipation. ■

Remarque 2.1.4 *On remarque toujours le rôle important de la condition d'absorption $\boldsymbol{Z} > 0$ que ce soit dans les résultat d'existence et d'unicité de la solution ou dans le résultat de dissipation d'énergie.*

De nouveau, on peut aisément étendre ce résultat au modèle de Zener généralisé (2.1.19).

Théorème 2.1.6 *La quantité d'énergie*

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\partial_t u\|^2_\rho + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{L}\left[\|\varepsilon(u)\|^2_{\boldsymbol{C}} + \|s_l\|^2_{\boldsymbol{Z}_l^{-1}}\right] \tag{2.1.43}$$

associée à la solution $(u, (\sigma_l)_{l=1,L})$ du problème (2.1.19) homogène ($f = 0$) vérifie

$$\frac{dE}{dt} = -\sum_{l=1}^{n}\|s_l\|^2_{(\boldsymbol{Z}_l^\tau)^{-1}} \leq 0, \tag{2.1.44}$$

avec

$$s_l = \sigma_l - \boldsymbol{C}\varepsilon(u), \quad \boldsymbol{Z}_l = \boldsymbol{D}_l - \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Z}_l^\tau = \tau_l^0 \boldsymbol{Z}_l, \quad \forall l = 1, \cdots, L.$$

2.1.5 Propagation à vitesse finie

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au problème de la propagation à vitesse finie des ondes viscoélastiques. Nous montrons que lorsqu'on part de données à support compact, la solution reste à support compact à tout instant. Finalement nous déterminons de façon géométrique un majorant du support des données. Dans ce contexte cette étude peut être considérée comme une généralisation du travail mené par Canadas [55] pour le problème unidimensionnel.

Soit $\boldsymbol{G}$ un tenseur d'ordre quatre symétrique défini positif et ν un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$, on note $\Gamma(\boldsymbol{G}, \nu)$ le tenseur de Christoffel [3] associé au tenseur $\boldsymbol{G}$ suivant le vecteur ν, c'est tenseur symétrique défini positif tel que :

$$\Gamma(\boldsymbol{G}, \nu) = \Gamma_{ij} = \boldsymbol{G}_{ikjl}\,\nu_k\,\nu_l,$$

Remarque 2.1.5 *Le tenseur de Christoffel intervient, lorsque on fait une analyse par ondes planes pour le problème purement élastique ($\tau_0 = 0$), c'est à dire si on cherche des solutions (u, σ) sous la forme (5.2.18) (cf. §2.2.2), on trouve une relation de dispersion :*

$$\Gamma(\boldsymbol{C}, k)\,d = \rho\,\omega^2 d \Leftrightarrow \Gamma(\boldsymbol{C}, \nu)\,d = \rho\,V^2 d,$$

avec $\nu = k/|k|$ et $V = \omega/|k|$ la vitesse de phase suivant la direction ν (V^2 apparaît comme l'une des valeurs propres de $\Gamma(\boldsymbol{C}, \nu)/\rho$).

Soit ν un vecteur de S^{d-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^d$; nous définissons les quantités :

$$V_p(x,\nu) = \Big(\sup_{v\neq 0} \frac{\Gamma(\boldsymbol{D},\nu)v.v}{\rho\,|v|^2}\Big)^{1/2} \tag{2.1.45}$$

et

$$V_p^+(\nu) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{V_p(x,\nu)\}. \tag{2.1.46}$$

La notation (2.1.45) est liée par analogie à v_p la vitesse des ondes P dans le cas d'un milieu élastique isotrope, dans ce cas $V_p(x,\nu) = v_p(x)$ dans toutes les directions ν. On considère les demi-espaces mobiles de vitesse $V \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{E}_\nu(V,t) = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, x.\nu \leq Vt\}. \tag{2.1.47}$$

On a le théorème :

Théorème 2.1.7 *Si les données (u_0, u_1, σ_0, f) sont à support compact et si elles ont la régularité du théorème 2.1.1, alors la solution du problème (2.1.1) reste à support compact. En particulier, si*

$$supp\ u_0 \cup supp\ u_1 \cup supp\ \sigma_0 \cup supp\ f(.,t) \subset K,$$

où K est un compact, alors

$$supp\ u(.,t) \subset K + \mathcal{E}(t), \quad \forall\, 0 \leq t \leq T,$$

avec :

$$\mathcal{E}(t) = \bigcap_{\nu\in S^{d-1}} \mathcal{E}_\nu(V_p^+(\nu),t).$$

Démonstration

Nous allons faire la démonstration dans le cas où les données du problème sont assez régulières et $K = B(0,R)$ une boule de centre 0 et de rayon R ; on se ramène au cas général en procédant par régularisation et en utilisant le fait que tout compact est limite d'une réunion finie de boules fermées. On considère ν un vecteur quelconque de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, le demi-espace mobile :

$$\Omega_\nu^t = (B(0,R) + \mathcal{E}_\nu(V,t))^c = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, x.\nu > R + Vt\},$$

Ω_ν^t est donc un demi-espace mobile qui "fuit" dans la direction ν à la vitesse V, $\Gamma_\nu^t = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x.\nu = R + Vt\}$ la frontière de Ω_ν^t (voir Fig 2.1.1) et $d\sigma$ la mesure surfacique sur Γ_ν^t.
On notera que par construction :

$$\begin{cases} u_0(x) = u_1(x) = 0,\ \sigma_0(x) = 0, \quad \forall\, x \in \Omega_\nu^0, \\ f(x,t) = 0, \quad \forall\, t > 0,\ \forall\, x \in \Omega_\nu^t. \end{cases} \tag{2.1.48}$$

En particulier, à l'instant $t = 0$, la solution est nulle dans Ω_ν^t. L'idée de la démonstration est de trouver V (assez grand) pour que la solution u soit nulle sur Ω_ν^t.

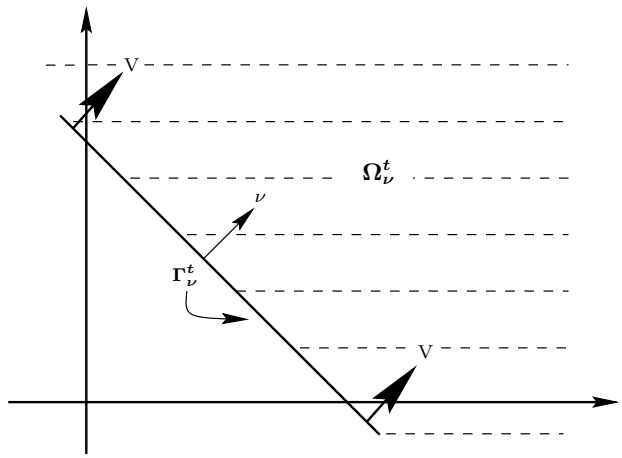


FIG. 2.1.1 – Le demi-espace mobile

Nous utilisons une technique d'estimation d'énergie ; considérons le système des équations (2.1.40a) et (2.1.40b) :

$$\rho\,\partial_{tt}^2 u - \mathbf{div}\, s - \mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\,\varepsilon(u)) = f, \tag{2.1.49a}$$

$$\boldsymbol{Z}_\tau^{-1} s + \boldsymbol{Z}^{-1}\partial_t s = \varepsilon(\partial_t u). \tag{2.1.49b}$$

La densité d'énergie est définie par :

$$e(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\rho\,|\partial_t u|^2 + \boldsymbol{C}\,\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \boldsymbol{Z}^{-1} s : s\Big]. \tag{2.1.50}$$

En faisant le produit scalaire de l'équation (2.1.49a) par $\partial_t u$ et de l'équation(2.1.49b) par s et en intégrant sur Ω_ν^t, on obtient aisément l'identité suivante :

$$\int_{\Omega_\nu^t} \partial_t e\, dx + \int_{\Omega_\nu^t} \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} s : s\, dx + \int_{\Gamma_\nu^t} \big(s + \boldsymbol{C}\,\varepsilon(u)\big)\nu.\partial_t u\, d\sigma = 0,$$

où ν est le vecteur normal à Γ_ν^t intérieur à Ω_ν^t, $\sigma\,\nu = \sigma_{ij}\nu_j$ désigne le produit matrice vecteur dans $\mathbb{R}^d$ et $\nu.v = \nu_i v_i$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^d$. En utilisant la relation (valable pour tout $e(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$) :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_\nu^t} e(x,t)\, dx = \int_{\Omega_\nu^t} \frac{\partial e}{\partial t}(x,t)\, dx - V \int_{\Gamma_\nu^t} e(x,t)\, dx, \tag{2.1.51}$$

on en déduit :

$$\frac{dE_\nu}{dt}(t) + \int_{\Omega_\nu^t} \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} s : s\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\nu^t} \phi_\nu(x,t)\, d\sigma = 0,$$

avec

$$E_\nu(t) = \int_{\Omega_\nu^t} e(x,t)\, dx,$$

et

$$\phi_\nu(x,t) = V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,|\varepsilon(u)|_{\boldsymbol{C}}^2 + V\,|s|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2 + 2\big(s + \boldsymbol{C}\,\varepsilon(u)\big)\nu.\partial_t u, \tag{2.1.52}$$

avec

$$|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\varepsilon : \varepsilon \quad \text{et} \quad |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}} = \boldsymbol{Z}^{-1}s : s.$$

On voit que l'énergie décroît si la forme quadratique ϕ_ν est positive. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.2 *Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$(\boldsymbol{C}\varepsilon)\nu.v \leq |\varepsilon|_{\boldsymbol{C}} \left(\Gamma(\boldsymbol{C},\nu)v.v\right)^{1/2}, \tag{2.1.53a}$$

$$s\,\nu.v \leq |s|_{\boldsymbol{Z}} \left(\Gamma(\boldsymbol{Z},\nu)v.v\right)^{1/2}. \tag{2.1.53b}$$

Démonstration

Soit $v \in \mathbb{R}^d$, on a alors :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{C}\varepsilon)\nu \cdot v &= C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,\nu_j\,v_i = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}\,(\nu \otimes v)_{ij} \\
&= \boldsymbol{C}\varepsilon : \nu \otimes v = (\varepsilon : \nu \otimes v)_{\boldsymbol{C}},
\end{aligned}$$

avec $(\nu \otimes v)_{ij} = (\nu_i\,v_j + \nu_j\,v_i)/2$. Comme $(\cdot : \cdot)_{\boldsymbol{C}}$ définit un produit scalaire dans $\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)$, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous obtenons :

$$(\varepsilon : \nu \otimes v)_{\boldsymbol{C}} \leq |\varepsilon|_{\boldsymbol{C}}\,|\nu \otimes v|_{\boldsymbol{C}}.$$

Alors pour avoir (2.1.53a) il suffit de montrer que

$$|\nu \otimes v|^2_{\boldsymbol{C}} = \Gamma(\boldsymbol{C},\nu)v \cdot v.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
|\nu \otimes v|^2_{\boldsymbol{C}} &= \boldsymbol{C}\,\nu \otimes v : \nu \otimes v \\
&= \boldsymbol{C}_{ijkl}(\nu \otimes v)_{kl}\,(\nu \otimes v)_{ij} \\
&= \boldsymbol{C}_{ijkl}\,\nu_k\,v_l\,\nu_i\,v_j \\
&= (\boldsymbol{C}_{ijkl}\,\nu_i\,\nu_k)v_l\,v_j = (C_{lkji}\,\nu_i\,\nu_k)v_j\,v_l \\
&= \Gamma_{lj}(\boldsymbol{C},\nu)\,v_j\,v_l = \Gamma(\boldsymbol{C},\nu)v \cdot v.
\end{aligned}$$

De même pour (2.1.53a), on a :

$$\begin{aligned}
s\,\nu.v &= s : \nu \otimes v \\
&= s : \boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{Z}\,\nu \otimes v \\
&= (\boldsymbol{Z}^{-1}s : \nu \otimes v)_{\boldsymbol{Z}} \\
&\leq |\boldsymbol{Z}^{-1}s|_{\boldsymbol{Z}}\,|\nu \otimes v|_{\boldsymbol{Z}} = |s|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}\left(\Gamma(\boldsymbol{Z},\nu)v \cdot v\right)^{1/2}. \ \square
\end{aligned}$$

En utilisant ce lemme et d'après (2.1.52), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\phi_\nu(x,t) &\geq V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + V\,|s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}} - 2\,|\varepsilon|_{\boldsymbol{C}}\,(\Gamma(\boldsymbol{C},\nu)\,\partial_t u\cdot\partial_t u)^{1/2} \\
&\quad -2\,|s|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}\,(\Gamma(\boldsymbol{Z},\nu)\,\partial_t u\cdot\partial_t u)^{1/2} \\
&\geq V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}}) - 2\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}})^{1/2}\,\big[\Gamma(\boldsymbol{C},\nu)\,\partial_t u\cdot\partial_t u \\
&\quad +\Gamma(\boldsymbol{Z},\nu)\,\partial_t u\cdot\partial_t u\big]^{1/2} \\
&= V\rho\,|\partial_t u|^2 + V\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}}) - 2\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}})^{1/2}\,\big[\Gamma(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{Z},\nu)\,\partial_t u\cdot\partial_t u\big]^{1/2} \\
&= V\rho\,|\partial_t u|^2 + V(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}}) - 2\,(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}})^{1/2}\,\big[\Gamma(\boldsymbol{D},\nu)\,\partial_t u\cdot\partial_t u\big]^{1/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition (2.1.45) de V_p, la dernière inégalité devient :

$$\phi_\nu(x,t) \geq V\rho\,|\partial_t u|^2 + V(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}_\tau}) - 2V_p\sqrt{\rho}(|\varepsilon|^2_{\boldsymbol{C}} + |s|^2_{\boldsymbol{Z}_\tau})^{1/2}|\partial_t u|. \tag{2.1.54}$$

Le deuxième terme de cette inégalité définit une forme quadratique positive si

$$\rho\,(V_p^2 - V^2) \leq 0 \Leftrightarrow V \geq V_p.$$

En choisissant la constante $V = V_p^+(\nu)$ donnée par (2.1.46), nous aurons $\phi_\nu \geq 0$ et par conséquent E_ν est décroissante. On a donc en particulier

$$E_\nu(t) \leq E_\nu(0) = 0, \quad \text{(par construction)}$$

ce qui nous donne $u(x,t) = 0$ dans Ω_ν^t, d'où *supp* $u(.,t) \subset \{\Omega_\nu^t\}^c = B(0,R) + \mathcal{E}_\nu(V_p^+(\nu),t)$. Le raisonnement étant valable pour tout $\nu \in S^{d-1}$, sphère unité de $\mathbb{R}^d$, on a :

$$supp\ u(.,t) \subset \bigcap_{\nu\in S^{d-1}} \{\Omega_\nu^t\}^c = B(0,R) + \mathcal{E}(t).$$

Remarque 2.1.6 *En particulier, dans le cas isotrope, V_p ne dépend pas de ν, on trouve*

$$\begin{aligned}
V_p(x,\nu) &= \left(\frac{\lambda(x)\gamma_\lambda(x) + 2\mu(x)\gamma_\mu(x)}{\rho(x)}\right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{\lambda(x)\gamma_\lambda(x) + 2\mu(x)\gamma_\mu(x)}{\lambda(x)+2\mu(x)}\,\frac{\lambda(x)+2\mu(x)}{\rho}\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{\frac{\tau_p(x)}{\tau_0(x)}}v_p(x)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$V_p^+(\nu) = V^+ = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sqrt{\frac{\tau_p(x)}{\tau_0(x)}}v_p(x).$$

d'où $supp\,u(.,t) \subset B(0,R+V^+t)$ *(voir FIG 2.1.2 dans le cas $d=2$)*

FIG. 2.1.2 – Support de u dans un milieu isotrope

FIG. 2.1.3 – Support de u dans un milieu anisotrope

2.1.6 Du viscoélastique à l'élastique

Dans cette partie nous nous sommes intéressés au comportement de l'onde viscoélastique quand le coefficient d'amortissement τ_0 tend vers zéro et nous montrons dans quel sens cette solution converge vers la solution de l'équation d'onde (équation de l'élasticité) obtenue lorsque on néglige ces coefficients. L'étude de ce problème est basée sur l'estimation a priori de la solution, qui fait l'objet de la section suivante.

2.1.6.1 Estimations a priori

L'identité d'énergie permet d'obtenir des estimations de la solution :

Théorème 2.1.8 *Pour tout $t \geq 0$, la solution forte du problème (2.1.1) vérifie les estimations suivantes :*

$$\|\partial_t u(t)\|_\rho + \|\sigma(t) - \boldsymbol{C}\,\varepsilon(u(t))\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}} \leq \sqrt{2E_0} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau, \tag{2.1.55}$$

$$\|u(t)\|_\rho \leq \|u_0\|_\rho + t\sqrt{2E_0} + \int_0^t (t-\tau)\, \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau, \tag{2.1.56}$$

Il existe une constante $C = C(d, M_-, M_+)$ telle que :

$$\|\nabla u(t)\| + \|\sigma(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}} \leq C\big(\sqrt{2E_0} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau\big). \tag{2.1.57}$$

Ici E_0 désigne la quantité d'énergie initiale :

$$E_0 = \frac{1}{2}\Big[\|u_1\|_\rho^2 + \|\varepsilon(u_0)\|_{\boldsymbol{C}}^2 + \|\sigma_0 - \boldsymbol{C}\,\varepsilon(u_0)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2\Big]. \tag{2.1.58}$$

Démonstration

En intégrant entre 0 et t l'identité d'énergie (2.1.39), on obtient :

$$E(t) \leq E_0 + \int_0^t (f(\tau), \partial_t u(\tau))\, d\tau \leq E_0 + \int_0^t \|\partial_t u(\tau)\|_\rho\, \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau, \tag{2.1.59}$$

la deuxième inégalité provenant de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Or, par définition de l'énergie (2.1.37), on a :

$$\|\partial_t u(\tau)\|_\rho^2 \leq 2E(\tau), \quad \forall\, \tau \geq 0.$$

Par conséquent

$$E(t) \leq E_0 + \sqrt{2} \int_0^t \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, E(\tau)^{1/2}\, d\tau, \tag{2.1.60}$$

et le lemme de Gronwall permet d'en déduire :

$$E(t) \leq \left(\sqrt{E_0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau\right)^2. \tag{2.1.61}$$

Pour obtenir l'estimation (2.1.55) il suffit de remarquer que $\|\partial_t u(t)\|_\rho$ et $\|s(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}$ sont majorées par $\sqrt{2E(t)}$. Pour la deuxième estimation (2.1.56), on remarque que u est une primitive de $\partial_t u$:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t \partial_t u(s)\, ds,$$

ce qui implique

$$\|u(t)\|_\rho \quad \leq \quad \|u_0\|_\rho + \|\int_0^t \partial_t u(\tau)\, d\tau\|_\rho \leq \|u_0\|_\rho + \int_0^t \|\partial_t u(\tau)\|_\rho\, d\tau$$

et on utilise (2.1.55) pour conclure. Pour la troisième estimation on utilise d'abord l'inégalité de Korn [48, 70] : il existe une constante C_k dépendant de d la dimension de l'espace, telle que :

$$\|\nabla u\| \leq C_k \|\varepsilon(u)\| \tag{2.1.62}$$

et comme $\varepsilon(u)$ vérifie

$$\sqrt{M_-}\ \|\varepsilon(u)\| \leq \|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}} \leq \sqrt{2E_0} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau, \tag{2.1.63}$$

on en déduit la première partie de (2.1.57). On majore enfin les contraintes par :

$$\|\sigma(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}} \leq \|s(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}} + \|\boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}.$$

Or $\|s(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}$ a été estimé par (2.1.55) et $\|\boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}$ est clairement majoré par :

$$\|\boldsymbol{C}\varepsilon(u(t))\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}} \quad \leq \quad C\|\varepsilon(u)\|$$

où C est une constante dépendant de M_-, M_+. Pour conclure on utilise (2.1.63). ■

2.1.6.2 Convergence et estimation de l'écart

Dans cette section on s'intéresse au cas où τ_0 tend vers zéro de la façon suivante :

$$\tau_0^\epsilon(x) = \epsilon\tau_0(x), \quad \epsilon \to 0^+$$

avec $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ ayant les propriétés (2.1.3) et (2.1.5). On considère $(u_\epsilon, \sigma_\epsilon)$ la solution du problème viscoélastique :

$$\text{(2.1.64)} \qquad \begin{cases} \rho\,\partial_{tt}^2 u_\epsilon - \mathbf{div}\,\sigma_\epsilon = f, & \text{dans } Q_T^*, \\ \sigma_\epsilon + \epsilon\tau_0\,\partial_t\sigma_\epsilon = \boldsymbol{C}\,\varepsilon(u_\epsilon) + \epsilon\tau_0\boldsymbol{D}\,\varepsilon(\partial_t u_\epsilon), & \text{dans } Q_T^*, \\ u_\epsilon(x,0) = u_0,\ \partial_t u_\epsilon(x,0) = u_1,\ \sigma_\epsilon(x,0) = \sigma_0, & \text{dans } \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

et (u, σ) la solution du problème purement élastique :

$$\text{(2.1.65)} \qquad \begin{cases} \rho\partial_{tt}^2 u - \mathbf{div}\,\sigma = f, & \text{dans } Q_T^*, \\ \sigma = \boldsymbol{C}\varepsilon(u), & \text{dans } Q_T^*, \\ u(x,0) = u_0,\ \partial_t u(x,0) = u_1, & \text{dans } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

De même que pour le problème de viscoélasticité on a un théorème d'existence et d'unicité de la solution forte et des estimations d'énergie [63] pour le problème (2.1.65) :

Théorème 2.1.9 *Sous l'hypothèse* $(u_0, u_1, f) \in D(\Delta_{\boldsymbol{C}}) \times [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$ *Le problème (2.1.65) admet une unique solution* (u, σ) *avec*

$$u \in C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^0(0,T;D(\Delta_{\boldsymbol{C}})),$$

$$\sigma \in C^1\big(0,T;(L^2(\mathbb{R}^d))_s^{n^2}\big) \cap C^0(0,T;\underline{\underline{X}}^{sym}(\mathbb{R}^d)).$$

Ici l'espace $D(\Delta_{\boldsymbol{C}})$ *est défini par :*

$$\text{(2.1.66)} \qquad D(\Delta_{\boldsymbol{C}}) = \big\{u \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \,/\, \Delta_{\boldsymbol{C}} = \mathbf{div}\,(\boldsymbol{C}\varepsilon(u)) \in [L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big\}.$$

L'objectif de cette étude est de montrer dans quel sens la solution $(u_\epsilon, \sigma_\epsilon)$ converge vers (u, σ) solution du problème (2.1.65). On a le théorème :

Théorème 2.1.10 *Si les données du problème vérifient les hypothèses suivantes :*

$$\text{(2.1.67)} \qquad \begin{cases} (\rho, \tau_0, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) \in \big(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)\big)^2 \times \big([W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)]^{d^4}\big)^2, \\ (u_0, u_1, \sigma_0) \in [H^3(\mathbb{R}^d)]^2 \times [H^3(\mathbb{R}^d)]^{d^2}, \\ f \in C^3\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(\mathbb{R}^+,[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big), \end{cases}$$

et si σ_ϵ *vérifie à l'instant initial la loi élastique :*

$$\text{(2.1.68)} \qquad \sigma_0 = \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0),$$

alors, on a les estimations :

$$\text{(2.1.69)} \qquad \begin{aligned} &\big\|u_\epsilon - u\big\|_{C^0(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d)} \le C(d, M_-, M_+, \tau_+, T)\,\epsilon, \\ &\big\|\sigma_\epsilon - \sigma\big\|_{C^0(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^{d^2})} \le C(d, M_-, M_+, \tau_+, T)\,\epsilon. \end{aligned}$$

De plus si les données initiales (u_0, u_1, σ_0, f) ne vérifient que les hypothèses des théorèmes 2.1.1 et 2.1.9, on a :

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\rightharpoonup u \quad \textit{dans } H^1(Q_T) \textit{ faible}, \\ u_\epsilon &\to u \quad \textit{dans } L^2_{loc}(Q_T) \textit{ fort}, \\ \sigma_\epsilon &\rightharpoonup \sigma \quad \textit{dans } L^2(Q_T) \textit{ faible}. \end{aligned} \tag{2.1.70}$$

Démonstration

On note $V_\epsilon = u_\epsilon - u$ et $\Sigma_\epsilon = \sigma_\epsilon - \sigma$, elles vérifient le problème

$$\begin{cases} \rho\, \partial^2_{tt} V_\epsilon - \mathbf{div}\, \Sigma_\epsilon = 0, & \text{dans } Q^*_T, \\ \Sigma_\epsilon - \boldsymbol{C}\varepsilon(V_\epsilon) = g_\epsilon, & \text{dans } Q^*_T, \\ V_\epsilon(x,0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \partial_t V_\epsilon(x,0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.1.71}$$

avec

$$g_\epsilon = \epsilon\tau_0\big(\boldsymbol{D}\,\varepsilon(\partial_t u_\epsilon) - \partial_t \sigma_\epsilon\big). \tag{2.1.72}$$

Notre but est de trouver une estimation de la norme de V_ϵ et Σ_ϵ en fonction de ϵ.
Si on note $W_\epsilon = \partial_t V_\epsilon$, le problème (2.1.71) se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \rho\, \partial_t W_\epsilon - \mathbf{div}\, \Sigma_\epsilon = 0, & \text{dans } Q^*_T, \\ \boldsymbol{C}^{-1}\, \partial_t \Sigma_\epsilon - \varepsilon(W_\epsilon) = \tilde{g}_\epsilon, & \text{dans } Q^*_T, \\ W_\epsilon(x,0) = 0, & \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \Sigma_\epsilon(x,0) = \Sigma_0 - \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0), & \text{dans } \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{2.1.73}$$

avec

$$\tilde{g}_\epsilon = \boldsymbol{C}^{-1}\partial_t g_\epsilon.$$

L'énergie :

$$\tilde{E}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \left[\rho|W_\epsilon|^2 + \boldsymbol{C}^{-1}\Sigma_\epsilon : \Sigma_\epsilon\right] dx,$$

vérifie

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{g}_\epsilon \Sigma_\epsilon\, dx.$$

En suivant les mêmes démarches que dans la démonstration du théorème 2.1.8, on obtient les estimations :

Théorème 2.1.11 *On a, pour tout $t \geq 0$*

$$\|W_\epsilon(t)\|_\rho \leq \sqrt{2\tilde{E}_0} + \int_0^t \|\tilde{g}_\epsilon(\tau)\|_{\boldsymbol{C}}\, d\tau, \tag{2.1.74}$$

$$\|\Sigma_\epsilon(t)\|_{\boldsymbol{C}^{-1}} \leq \sqrt{2\tilde{E}_0} + \int_0^t \|\tilde{g}_\epsilon(\tau)\|_{\boldsymbol{C}}\, d\tau. \tag{2.1.75}$$

L'hypothèse (2.1.68) implique que $\tilde{E}_0 = 0$. Pour avoir des estimations de la norme de V_ϵ et de Σ_ϵ il suffit donc d'estimer $\|\tilde{g}_\epsilon\|_{\boldsymbol{C}}$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}_\epsilon(s)\|_{\boldsymbol{C}} &= \|\epsilon \boldsymbol{D}\, \varepsilon(\partial^2_{tt} u_\epsilon) - \epsilon\, \partial^2_{tt}\sigma_\epsilon\|_{\boldsymbol{C}^{-1}} \\ &\leq C\epsilon \Big[\|\nabla \partial^2_{tt} u_\epsilon\| + \|\partial^2_{tt}\sigma_\epsilon\|\Big], \end{aligned}$$

où C ne dépend que de M_- et τ_+. En utilisant les résultats de régularité du §2.1.2 et en reprenant les estimations du théorème 2.1.8 (voir (2.1.77)) nous majorons les normes $\|\nabla \partial^2_{tt} u_\epsilon\|$ et $\|\partial^2_{tt}\sigma_\epsilon\|$ indépendamment de ϵ. Finalement, en utilise le fait que :

$$V_\epsilon(t) = \int_0^t W(s)\, ds \ \ , \ \ \boldsymbol{C}\varepsilon(V_\epsilon) = \Sigma_\epsilon - g_\varepsilon \tag{2.1.76}$$

et on conclut que $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|V_\epsilon(t)\|_{[H^1(\mathbb{R}^d)]^d} \leq C(d, M_-, M_+, \tau_+, T)\, \epsilon$.

Pour la démonstration de la deuxième partie du théorème, on suppose que (u_0, u_1, σ_0, f) vérifient les hypothèses des théorèmes 2.1.1 et 2.1.9. En reprenant les estimations à priori du théorème 2.1.8 pour la solution forte $(u_\epsilon, \sigma_\epsilon)$ du problème (2.1.64), on a :

(2.1.77)

$$\left|\begin{array}{l} \sup\limits_{[0,T]} \|\partial_t u_\epsilon(t)\|_\rho \leq \sqrt{2E_0} + \displaystyle\int_0^T \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau, \\ \sup\limits_{[0,T]} \|u_\epsilon(t)\|_\rho \leq \|u_0\|_\rho + T\sqrt{2E_0} + T\displaystyle\int_0^T \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau, \\ \sup\limits_{[0,T]} \big(\|\nabla u_\epsilon\| + \|\sigma_\epsilon(t)\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}\big) \leq C\Big[\sqrt{2E_0} + \displaystyle\int_0^T \|f(\tau)\|_{1/\rho}\, d\tau\Big] \ \ ; \ \ C = C(d, M_-, M_+). \end{array}\right.$$

Ces estimations sont indépendantes de ϵ, par suite $\partial_t u_\epsilon$, ∇u_ϵ, u_ϵ et σ_ϵ sont bornées dans $L^2(Q_T)$, ce qui entraîne l'existence des sous suites u_ϵ et σ_ϵ vérifiant :

$$\left|\begin{array}{llll} u_\epsilon & \rightharpoonup & \tilde{u} & \text{dans} \quad H^1(Q_T) \quad \text{faible}, \\ u_\epsilon & \to & \tilde{u} & \text{dans} \quad L^2_{loc}(Q_T) \quad \text{forte}, \\ \sigma_\epsilon & \rightharpoonup & \tilde{\sigma} & \text{dans} \quad L^2(Q_T) \quad \text{faible}. \end{array}\right. \tag{2.1.78}$$

Comme $(u_\epsilon, \sigma_\epsilon)$ est une solution faible du problème (2.1.27) avec $\tau_0^\epsilon = \epsilon\tau_0$, après un passage à la limite ($\epsilon \to 0$), on trouve que $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$ est une solution faible du problème élastique

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q_T} \big[\rho\, \tilde{u}\cdot \partial^2_{tt} v + \tilde{\sigma} : \varepsilon(v) - f\cdot v\big]\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho\, \big[u_1(x)\cdot v(x,0) - u_0(x)\cdot \partial_t v(x,0)\big]\, dx, \\ \displaystyle\int_{Q_T} \big[\tilde{\sigma} : \tau - \boldsymbol{C}\varepsilon(\tilde{u}) : \tau\big]\, dx\, dt = 0, \\ \forall (v,\tau) \in \mathcal{H}(Q_T) \times \mathcal{L}(Q_T). \end{array}\right.$$

Comme ce problème admet une solution faible unique [63] et que toute solution forte est une solution faible on a $(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) = (u, \sigma)$ ■

2.2 Études des milieux homogènes

Nous nous plaçons pour faire cette analyse en milieu homogène. Nous allons tout d'abord déterminer les ondes planes se propageant dans un milieu viscoélastique 1D. Nous pourrons ensuite étendre les résultats 1D au cas tridimensionnel.

2.2.1 Analyse par ondes planes en 1D

Dans ce qui suit ρ, μ, τ_0 et τ_1 sont des constantes strictement positives. On considère le problème de Zener unidimensionnel (1.3.2) :

$$\text{(2.2.1)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u(x,t) : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}, & \\ \rho\, \partial^2_{tt} u - \partial_x \sigma = f, & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \\ \sigma + \tau_0\, \partial_t \sigma = \mu\, \partial_x u + \mu \tau_1\, \partial^2_{xt} u, & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,+\infty[. \end{cases}$$

On s'intéresse aux solutions particulières du problème homogène (2.2.1) ($f = 0$), de type ondes planes ($\mathrm{i}^2 = -1$) :

$$\text{(2.2.2)} \qquad \begin{cases} u(x,t) &= u_0\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t - kx)}, \\ \sigma(x,t) &= \sigma_0\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t - kx)}, \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde. Pour que (u, σ) définis par (2.2.2) soit une solution de (2.2.1), k et ω doivent être reliés par la relation de dispersion :

$$\text{(2.2.3)} \qquad \omega^2 = c^2 k^2 \left(\frac{1 + \mathrm{i}\,\omega\tau_1}{1 + \mathrm{i}\,\omega\tau_0} \right), \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Nous allons étudier cette équation comme une équation en ω où k est un paramètre. Si on fait le changement de variable $S = \mathrm{i}\,\omega$, la relation (2.2.3) devient :

$$\text{(2.2.4)} \qquad \frac{S^2}{c^2 k^2} = -\frac{1 + S\tau_1}{1 + S\tau_0},$$

ce qui équivaut à l'équation à coefficients réels de degré 3 suivante :

$$\text{(2.2.5)} \qquad \tau_0 S^3 + S^2 + \tau_1 c^2 k^2 S + c^2 k^2 = 0.$$

Cette équation admet soit trois racines réelles, soit une racine réelle et deux racines complexes conjuguées. Notons qu'une racine réelle correspond à un mode non propagatif (mode purement amorti). nous montrons que dans "presque tous les cas", il y a deux modes propagatifs et un mode purement amorti, et que ce résultat est toujours vrai à hautes fréquences. Plus précisément, montrons le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Nous avons les résultats suvants :*

1. *Si $\tau_0 \geq \tau_1/9$, alors l'équation (2.2.5) admet, pour tout k, une racine réelle $\boldsymbol{S = S^*}$ comprise entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$ (mode purement amorti) et deux racines complexes conjuguées $\boldsymbol{S = \eta \pm \mathrm{i}\,\omega^*}$ (modes propagatifs).*

2. *Si $\tau_0 < \tau_1/9$, alors il existe $K_-(\tau_0, \tau_1, c) \geq 0$ et $K_+(\tau_0, \tau_1, c) \geq 0$ (donnés en (2.2.8-2.2.9)) tels que :*
   - *Si $|k| \in [K_-, K_+]$, l'équation (2.2.5) admet trois racines réelles comprises entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$ (trois modes purement amortis).*
   - *Si $|k| \notin [K_-, K_+]$, l'équation (2.2.5) admet une racine réelle $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^*$ comprise entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$ et deux racines complexes conjuguées $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\eta} \pm \mathbf{i}\,\boldsymbol{\omega}^*$*

Démonstration

Rappelons qu'une équation algébrique du troisième degré $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se ramène par le changement de variable : $x = X - \dfrac{b}{3a}$, à la forme canonique suivante :

$$X^3 + 3pX + 2q = 0, \tag{2.2.6}$$

avec

$$p = \frac{3ac - b^2}{9a^2} \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{2}\Big[\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\Big].$$

Cette équation a trois racines :

1. $\Delta > 0 \quad \rightarrow$ une racine réelle et deux complexes conjuguées.
2. $\Delta \leq 0 \quad \rightarrow$ trois racines réelles.

L' équation (2.2.5), après réduction à sa forme canonique, a pour discriminant

$$\Delta = p^3 + q^2 = \frac{c^2k^2}{27\tau_0^4}\left[\tau_0\tau_1^3c^4k^4 + \left(\frac{27}{4}\tau_0^2 - \frac{9}{2}\tau_0\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_1^2\right)c^2k^2 + 1\right]$$

Δ a le même signe que :

$$\tilde{\Delta}(k^2) = Ak^4 + Bk^2 + 1, \tag{2.2.7}$$

avec

$$A = \tau_0\tau_1^3c^4, \qquad B = \left(\frac{27}{4}\tau_0^2 - \frac{9}{2}\tau_0\tau_1 - \frac{1}{4}\tau_1^2\right)c^2.$$

Une étude du trinôme $\tilde{\Delta}(X)$ montre que :

– Si $\tau_0 < \tau_1/9$, le trinôme admet deux racines réelles positives

$$z_\pm(\tau_0, \tau_1, c) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4A}}{2A}$$

pouvant s'exprimer en fonction du rapport $R = \tau_0/\tau_1$:

$$z_\pm(\tau_0, \tau_1, c) = \frac{1}{2c^2\tau_0\tau_1}\left[-27(R - \alpha_-)(R - \alpha_+) \pm (1 - 9R)^{3/2}(1 - R)^{1/2}\right] \tag{2.2.8}$$

avec $\alpha_\pm = 1/3(2\sqrt{3}/3 \pm 1)$. Il est alors clair que $\tilde{\Delta}(k^2) \leq 0$ si $k^2 \in [z_-, z_+]$ c'est à dire si $|k| \in [K_-, K_+]$, avec

$$K_\pm = \sqrt{z_\pm}. \tag{2.2.9}$$

– Si $\tau_0 \geq \tau_1/9$, on montre que $\tilde{\Delta}$ est soit toujours positif (si $\tau_0 < \tau_1$) soit admet deux racines réelles négatives (si $\tau_0 \geq \tau_1$), donc dans tous les cas $\tilde{\Delta}(k^2) > 0$ pour tout k.

Il nous reste à montrer que les racines réelles sont comprises entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$. Ceci est immédiat en se rappelant qu'une racine S est solution de (2.2.4) et si S est réelle, le membre de gauche est positif ce qui montre que $(1 + S\tau_1)(1 + S\tau_0) < 0$ et par conséquent que toute racine réelle est située entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$. ■

Quelques propriétés des solutions. On s'intéresse ici au cas où (2.2.5) admet une racine réelle $\boldsymbol{S = S^*}$ et deux racines complexes conjuguées $\boldsymbol{S = \eta \pm \mathrm{i}\,\omega^*}$, ce qui d'après le lemme est toujours vérifié au moins dès que k est assez grand. Ces solutions correspondent à :

– deux modes propagatifs : $e^{\eta(k)t}e^{\mathrm{i}\,(\omega^*(k)t-kx)}$ et $e^{\eta(k)t}e^{\mathrm{i}\,(-\omega^*(k)t-kx)}$.

– un mode purement amorti : $e^{S^*(k)t}e^{-\mathrm{i}\,kx}$.

La somme des trois racines de (2.2.5) vaut :

$$2\eta(k) + S^*(k) = -\frac{1}{\tau_0},$$

par conséquent

$$\eta(k) = -\frac{1}{2}\left[S^*(k) + \frac{1}{\tau_0}\right]. \tag{2.2.10}$$

Or d'après le lemme précédent, $S^*(k)$ est située entre $-1/\tau_0$ et $-1/\tau_1$, ce qui montre que :

1. si $\tau_1 > \tau_0$, alors $-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_1}\Big) \leq \eta(k) \leq 0 \;\; \forall k$, ce qui correspond à de l'amortissement.
2. si $\tau_1 < \tau_0$, alors $-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau_1}\Big) \geq \eta(k) \geq 0 \;\; \forall k$, qui correspond cette fois-ci à un terme exponentiellement croissant en temps.

Remarque 2.2.1 *1. On retrouve donc ici le fait que le phénomène d'absorption est lié à l'inégalité $\tau_1 > \tau_0$.*

2. On remarque que même quand $\tau_1 < \tau_0$, $\eta(k)$ reste borné et le problème de Cauchy reste bien posé.

Hypothèse : dans toute la suite, on supposera que $\tau_0 < \tau_1$.

Propriétés du mode purement amorti. Nous montrons que, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, la racine réelle $S = S^*(k)$ vérifie :

– $\boldsymbol{(P_1)}$ $\quad -\dfrac{1}{\tau_0} < S^*(k) < -\dfrac{1}{\tau_1}, \;\; \forall k \in \mathbb{R}^*$.

– $\boldsymbol{(P_2)}$ $\quad k \longrightarrow S^*(k)$ est paire.

– $\boldsymbol{(P_3)}$ $\quad \lim\limits_{k\to 0} S^*(k) = -\dfrac{1}{\tau_0}, \quad \lim\limits_{k\to\infty} S^*(k) = -\dfrac{1}{\tau_1}$.

La première propriété a été démontrée dans le lemme précédent et est ici précisée dans le cadre de l'hypothèse $\tau_0 < \tau_1$. La deuxième propriété découle du fait que l'équation (2.2.5)

définissant les solutions ne dépend que de k^2. Enfin les limites (P_3) s'obtiennent aisément à partir de (2.2.4) en utilisant que S^* est réelle. On peut en fait montrer plus précisément que

$$S^*(k) \sim -\frac{1}{\tau_0} + (\tau_1 - \tau_0)c^2k^2. \tag{2.2.11}$$

Nous illustrons ces propriétés à la figure 2.2.2 où on représente un exemple de courbe $S^*(k)$. *Notons que les hautes fréquences sont moins amorties (temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_1}$) que les basses fréquences (temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_0 < \tau_1}$).*

Propriétés des modes propagatifs amortis, qui correspondent aux solutions $\eta(k) \pm \mathrm{i}\,\omega^*(k)$. La relation (2.2.10) permet de déduire des propriétés sur η c'est à dire sur l'amortissement des modes propagatifs :

- $\boldsymbol{(P_4)}$ $\quad \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_0}\Big] \leq \eta(k) \leq 0.$
- $\boldsymbol{(P_5)}$ $\quad k \longrightarrow \eta(k)$ paire.
- $\boldsymbol{(P_6)}$ $\quad \lim\limits_{k\to 0} \eta(k) = 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty} \eta(k) = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_0}\Big].$

On peut enfin déduire de (2.2.11) l'équivalence :

$$\eta(k) \sim -\frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_0)c^2k^2. \tag{2.2.12}$$

Nous illustrons ces propriétés à la figure2.2.3 où on représente un exemple de courbe $\eta(k)$. *Les hautes fréquences sont plus amorties que les basses fréquences, pour lesquels l'amortissement tend vers 0, et la constante de temps à haute fréquence est $2\tau_1\tau_0/(\tau_1 - \tau_0)$.*

En ce qui concerne la partie propagative, la vitesse de phase des modes propagatifs est donnée par $\omega^*(k)/k$. Le produit des racines de (2.2.5) s'exprime :

$$(\omega^*(k)^2 + \eta(k)^2)S^*(k) = -\frac{c^2k^2}{\tau_0}, \tag{2.2.13}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{\omega^*(k)^2}{c^2k^2} = -\frac{1}{\tau_0 S^*(k)} - \frac{\eta(k)^2}{c^2k^2}. \tag{2.2.14}$$

En utilisant la propriété (P_3) et le fait que $\eta(k)$ est en $O(k^2)$ au voisinage de $k = 0$ d'après (2.2.12), on montre que :

$$\lim_{k\to\pm\infty} \frac{\omega^*(k)^2}{c^2k^2} = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \qquad \lim_{k\to 0} \frac{\omega^*(k)^2}{c^2k^2} = 1. \tag{2.2.15}$$

Les hautes fréquences se propagent donc plus vite que les basses fréquences. On représente la vitesse de phase à la figure 2.2.4.

Conclusion : En conclusion, on a :

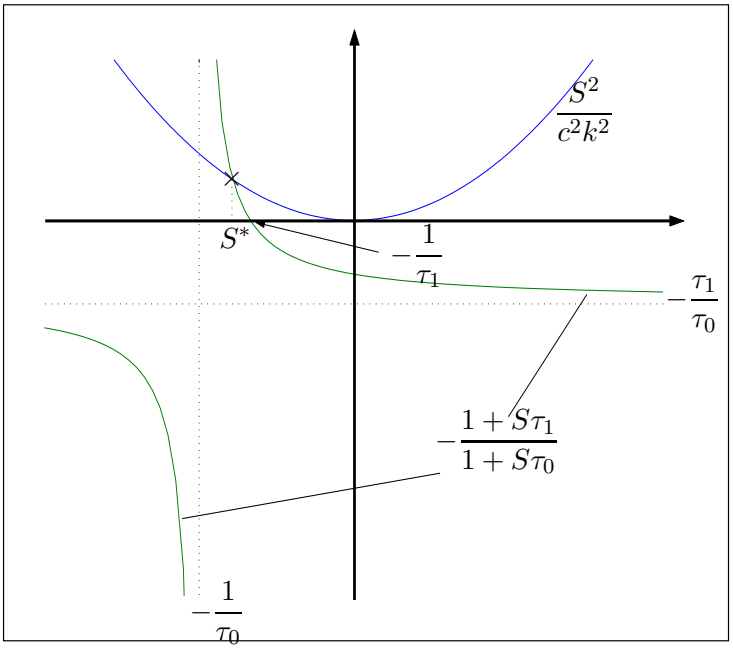


FIG. 2.2.1 – Solution graphique

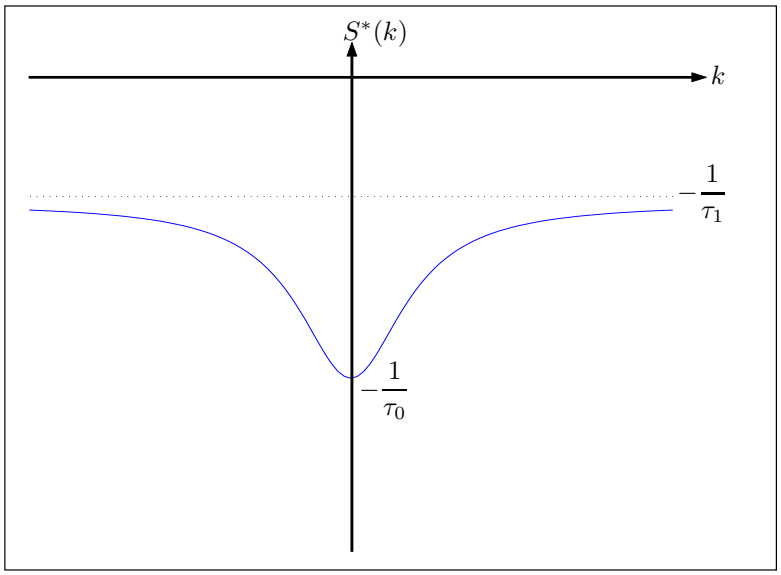


FIG. 2.2.2 – Allure de $k \longmapsto S^*(k)$

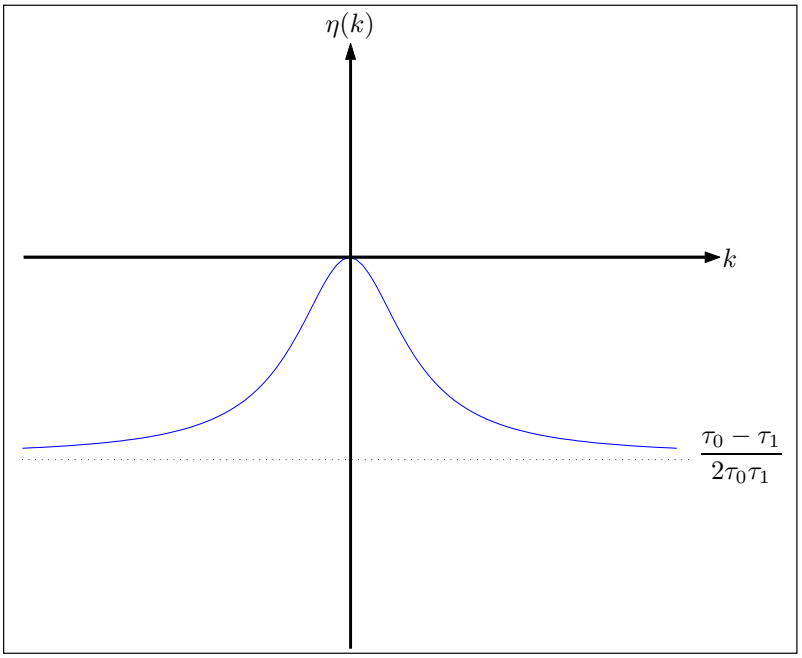


FIG. 2.2.3 – Allure $k \longmapsto \eta(k)$

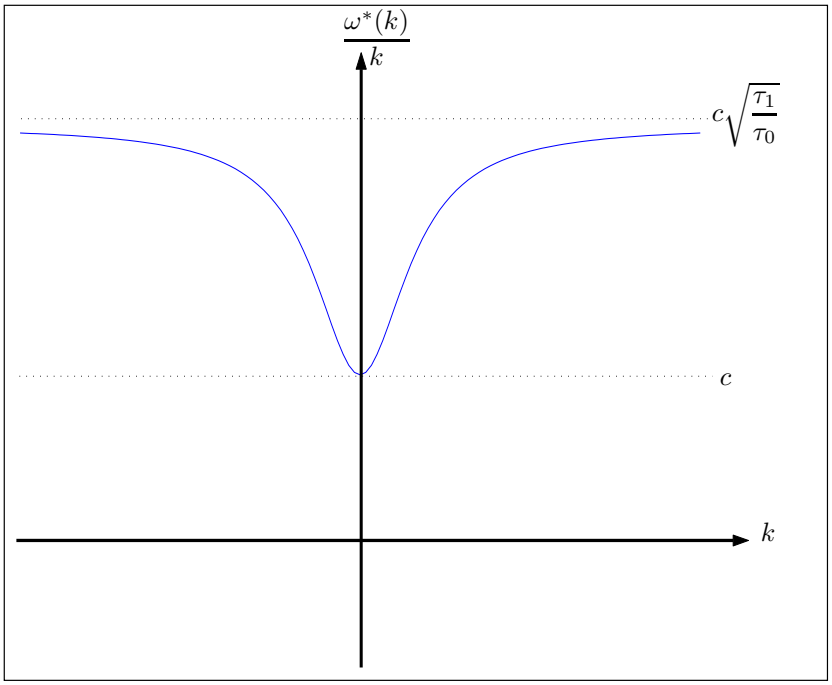


FIG. 2.2.4 – Allure $k \longmapsto \omega^*(k)/k$

1. un mode **purement amorti** correspondant à $\boldsymbol{S = S^*}$. Les hautes fréquences sont moins amorties(temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_1}$) que les basses fréquences(temps de relaxation $\boldsymbol{\tau_0 < \tau_1}$).

2. deux modes **propagatifs amortis** correspondant à $\boldsymbol{S = \eta \pm \mathrm{i}\,\omega}$. Les hautes fréquences sont plus amorties que les basses fréquences(pour lesquelles l'amortissement tend vers 0) et la constante de temps à haute fréquence est $\boldsymbol{2\tau_1\tau_0/(\tau_1 - \tau_0)}$.

3. pour les **modes propagatifs**, les hautes fréquences se propagent plus vite mais sont davantage amorties.

2.2.2 Analyse par ondes planes en 3D

Nous menons dans cette section une analyse par ondes planes analogue à celle du cas 1D, dans le cas d'un milieu viscoélastique isotrope 3D. On considère le problème isotrope en milieu homogène :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial^2_{tt}u - \mathbf{div}\,\sigma = 0, \\ \sigma + \tau_0\,\partial_t\sigma = \lambda\mathbf{Tr}(\varepsilon(u))\,\boldsymbol{I} + 2\mu\,\varepsilon(u) + \tau_0\big[\lambda\gamma_\lambda\mathbf{Tr}(\varepsilon(\partial_t u))\,\boldsymbol{I} + 2\mu\gamma_\mu\,\varepsilon(\partial_t u)\big]. \end{array}\right. \tag{2.2.16}$$

On s'intéresse aux solutions particulières de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,t) = u_0\,e^{\mathrm{i}\,(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}\,\boldsymbol{e}, \\ \sigma(x,t) = \sigma_0\,e^{\mathrm{i}\,(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}\,\boldsymbol{E}. \end{array}\right. \tag{2.2.17}$$

avec

$$\boldsymbol{k} = (k_1,k_2,k_3)^t,\ \boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)^t,\ \boldsymbol{e} = (e_1,e_2,e_3)^t$$

et

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix}.$$

Posons $\psi = e^{\mathrm{i}\,(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}$ et utilisons les expressions (2.2.16), on obtient les équations :

$$\left|\begin{array}{l} \partial^2_{tt}u = -\omega^2 u_0\psi\,\boldsymbol{d}, \\ \mathbf{div}\,\sigma = -\mathrm{i}\,\sigma_0\psi\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{k}, \\ \sigma + \tau_0\partial_t\sigma = (1+\mathrm{i}\,\omega\tau_0)\sigma_0\psi\,\boldsymbol{D}, \\ \varepsilon(u) = -\mathrm{i}\,u_0\psi\begin{bmatrix} k_1d_1 & (k_2d_1+k_1d_2)/2 & (k_3d_1+k_1d_3)/2 \\ (k_1d_2+k_2d_1)/2 & k_2d_2 & (k_3d_2+k_2d_3)/2 \\ (k_1d_3+k_3d_1)/2 & (k_2d_3+k_3d_2)/2 & k_3d_3 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon(\partial_t u) = \mathrm{i}\,\omega\,\varepsilon(u), \\ \mathbf{Tr}(\varepsilon(u)) = -\mathrm{i}\,u_0\psi\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}, \\ \mathbf{Tr}(\varepsilon(\partial_t u)) = \mathrm{i}\,\omega\,\mathbf{Tr}(\varepsilon(u)). \end{array}\right. \tag{2.2.18}$$

Remplaçons ces équations dans (2.2.16), on obtient la relation de dispersion :

$$\left[\mathrm{i}\,\omega^3\tau_0 + \omega^2 - (\frac{\mu}{\rho} + \mathrm{i}\,\omega\tau_0\frac{\mu\gamma_\mu}{\rho})|\boldsymbol{k}|^2\right]\,\boldsymbol{d} = \left[\frac{\lambda+\mu}{\rho} + \mathrm{i}\,\omega\tau_0\frac{\lambda\gamma_\lambda + \mu\gamma_\mu}{\rho}\right](\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{k}. \tag{2.2.19}$$

En introduisant les vitesses v_p et v_s et les temps de relaxation τ_p et τ_s (voir (1.3.7)), l'équation (2.2.19) devient :

$$\left[\mathrm{i}\,\omega^3\tau_0 + \omega^2 - v_s^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_s)|\boldsymbol{k}|^2\right]\,\boldsymbol{d} = \left[v_p^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_p) - v_s^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_s)\right](\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{k}. \tag{2.2.20}$$

Le produit scalaire de cette relation par $\boldsymbol{k}$ implique en particulier :

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}\left[\mathrm{i}\,\omega^3\tau_0 + \omega^2 - v_p^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_p)|\boldsymbol{k}|^2\right] = 0. \tag{2.2.21}$$

Deux cas se présentent alors, selon que $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}$ est nul ou non :

1. **Les ondes P** (ondes de compression) : $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$. Dans ce cas, la relation (2.2.20) montre que $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{d}$ sont colinéaires et (2.2.21) donne la relation de dispersion des ondes **P** :

$$\omega^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_0) = v_p^2|\boldsymbol{k}|^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_p). \tag{2.2.22}$$

2. **Les ondes S** (ondes de cisaillement) : $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$. Les vecteurs $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{d}$ sont donc orthogonaux et (2.2.20) donne la relation de dispersion des ondes **S** :

$$\omega^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_0) = v_s^2|\boldsymbol{k}|^2(1+\mathrm{i}\,\omega\tau_s). \tag{2.2.23}$$

On peut remarquer que, si on fait le changement de variable $S = \mathrm{i}\,\omega$, les équations (2.2.22) et (2.2.23) s'écrivent sous la forme :

$$\tau_0 S^3 + S^2 + \tau_i v_i^2|\boldsymbol{k}|^2 S + v_i^2|\boldsymbol{k}|^2 = 0 \quad \forall i = p, s. \tag{2.2.24}$$

L'équation (2.2.24) est la même que l'équation (2.2.5) obtenue en dimension un, en remplaçant τ_i par τ_1, v_i par c et $|\boldsymbol{k}|$ par k pour $i = p, s$. Les conclusions de l'analyse en 1D peuvent donc être étendues en 3D isotrope.

2.2.3 Facteur de qualité et conception de modèles réalistes

Bien qu'on ait à sa disposition un modèle mathématique faisant appel à de nombreux paramètres, comme c'est le cas des modèles de Zener généralisés que nous étudions dans ce travail, une difficulté subsiste au niveau de la modélisation dans le calage de ces paramètres sur la réalité physique. C'est dans cette direction que se situe le contenu de cette section. Nous commençons au paragraphe §2.2.3.1 par définir quelques notions qui sont plus liées aux mesures physiques, que de nature mathématique, en particulier celles de facteur de qualité. Puis, au paragraphe §2.2.3.2, nous montrons comment on peut décrire à l'aide de nos modèles des milieux qui sont dits à facteur de qualité quasi-constant, lesquels sont fréquemment rencontrés en géophysique.

2.2.3.1 Définitions

En faisant l'analyse par ondes planes nous avons montré que la dissipation du modèle viscoélastique est liée à la fréquence. Une façon d'étudier cette dissipation est de définir le facteur de qualité Q qui la caractérise d'une manière quantitative. Dans un premier temps, on définit le module complexe et le facteur de qualité dans le cas 1D et on généralisera cette étude dans le cas de dimension supérieure (voir § 2.2.4).

On considère la loi de comportement (3.1.1b) :

$$\sigma + \tau_0 \dot{\sigma} = \mu(\varepsilon + \tau_1 \dot{\varepsilon}). \tag{2.2.25}$$

La transformée de Fourier $\hat{f}$ d'une fonction f définie par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\,\omega t}\, dt.$$

En appliquant la transformée de Fourier à (2.2.25), on obtient :

$$\hat{\sigma}(\omega) = M(\omega)\hat{\varepsilon}(\omega), \tag{2.2.26}$$

où $\hat{\sigma}$ et $\hat{\varepsilon}$ sont respectivement les transformées de Fourier des fonctions σ et ε et $M(\omega)$ est appelé **module complexe** :

$$M(\omega) = \mu \frac{1 + \mathrm{i}\,\omega\tau_1}{1 + \mathrm{i}\,\omega\tau_0}. \tag{2.2.27}$$

On sépare M en ses parties réelle et imaginaire :

$$M = \Re e\,(M) + \mathrm{i}\,\Im m\,(M),$$

ce qui implique :

$$\hat{\sigma}(\omega) = \hat{\varepsilon}(\omega)|M|e^{\mathrm{i}\,\varphi(\omega)}, \tag{2.2.28}$$

avec

$$\tan\varphi(\omega) = \frac{\Im m\,(M)}{\Re e\,(M)};$$

φ est l'angle de déphasage entre la contrainte et la déformation, on l'appelle **angle de pertes** et il est relié à la viscoélasticité. Dans le cas d'un milieu élastique ($\tau_0 = \tau_1 = 0$) la fonction M est égale à μ, d'où $\Re e\,(M) = \mu$, $\Im m\,(M) = 0$ et $\varphi = 0$, ce qui entraîne que la partie imaginaire $\Im m\,(M)$ caractérise la dissipation des modèles viscoélastiques, par contre la partie réelle $\Re e\,(M)$ est liée à la réponse instantanée. On définit alors le facteur de qualité Q par [26, 34] :

$$Q(\omega) = \frac{\mathcal{R}e(M)}{\mathcal{I}m(M)} = \frac{1}{\tan\varphi(\omega)}. \tag{2.2.29}$$

Pour un milieu élastique non dissipatif, le facteur Q est infini, par contre un facteur de qualité nul implique un milieu absorbant.

Les parties réelle et imaginaire du modèle complexe M défini par l'équation (2.2.27), sont données par :

$$\Re e\,(M) = \mu \frac{1 + \omega^2\tau_1\tau_0}{1 + \omega^2\tau_0^2}, \quad \Im m\,(M) = \mu \frac{\omega(\tau_1 - \tau_0)}{1 + \omega^2\tau_0^2},$$

d'où le facteur de qualité et l'angle de pertes associés à la loi élémentaire (2.2.25) :

$$Q(\omega) = \frac{1 + \omega^2\tau_1\tau_0}{\omega(\tau_1 - \tau_0)} \tag{2.2.30a}$$

$$\tan\varphi(\omega) = Q^{-1} = \frac{\omega(\tau_1 - \tau_0)}{1 + \omega^2\tau_1\tau_0} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\sqrt{\tau_1\tau_0}} \frac{\omega\sqrt{\tau_1\tau_0}}{1 + \omega^2\tau_1\tau_0} \tag{2.2.30b}$$

Si on note par θ le rapport τ_1/τ_0, le maximum de Q^{-1}, représentant la dissipativité maximale, est atteint pour la pulsation $\omega_{max} = 1/\sqrt{\tau_1\tau_0}$, la fonction $Q^{-1}(\omega_{max}, \theta) = (\tau_1 - \tau_0)/(2\sqrt{\tau_1\tau_0}) = (\theta - 1)/\sqrt{\theta}$ est croissante par rapport à θ, ce qui implique que plus le rapport θ est grand, plus il y a d'amortissement. La figure 2.2.5 donne les variations de l'inverse de Q en fonction de la pulsation ω.

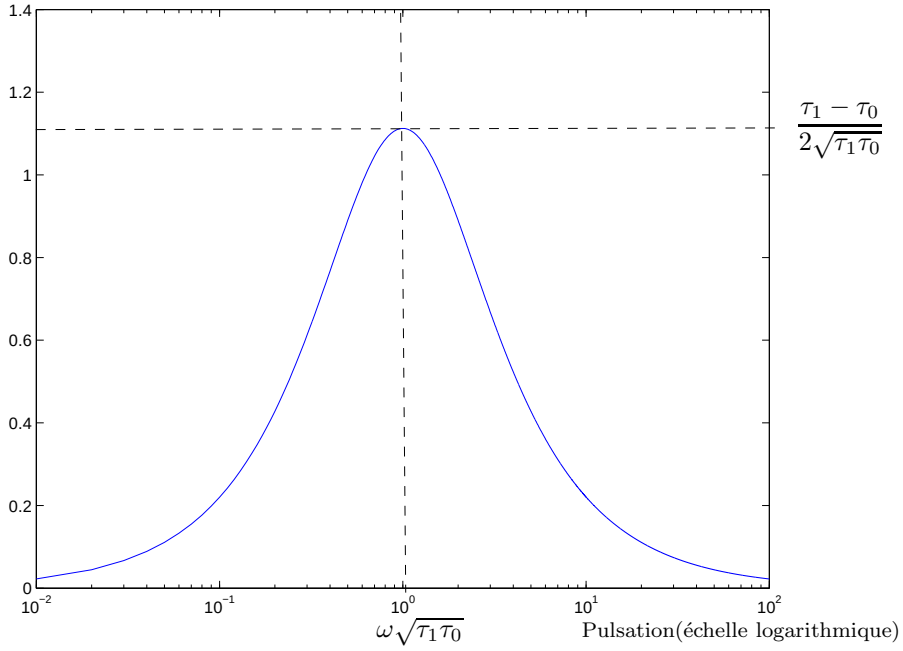


FIG. 2.2.5 – La variation de Q^{-1} en fonction de ω

2.2.3.2 Facteur de qualité quasi-constant

On voit que le facteur de qualité dépend de la fréquence (voir FIG 2.2.5). Or en géophysique une classe importante de matériaux est caractérisée par des facteurs de qualité constants sur une large bande de fréquence [80] ; on parle alors de matériaux à facteur de qualité constant ou quasi-constant. Le modèle de Zener élémentaire n'est pas suffisant (voir l'équation 2.2.30a), c'est pourquoi il est intéressant de considérer le modèle de Zener généralisé.

Nous déterminons un modèle avec un facteur de qualité quasi-constant, en superposant plusieurs modèles de Zener élémentaires ayant tous le même module relâché μ et on détermine les temps de relaxation pour avoir un facteur de qualité quasi-constant sur une bande de fréquence donnée. On considère la loi de comportement générale :

$$\sigma_l + \tau_l^0 \dot{\sigma}_l = \mu\varepsilon(u) + \mu\tau_l^1\varepsilon(\dot{u}) \quad \forall\, l = 1, \cdots, L, \tag{2.2.31a}$$

$$\sigma = \sum_{l=1}^{L} \sigma_l. \tag{2.2.31b}$$

et on désigne respectivement par M_l et $Q_l = \Re e\, M_l / \Im m\, M_l$ le module complexe et le facteur de qualité associés à la $l^{\text{ième}}$ loi élémentaire. Le facteur de qualité associé à la loi (2.2.31) est

donné par :

$$Q(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \Re e\,(M_l)}{\sum_{l=1}^{L} \mathcal{I}m(M_l)}, \tag{2.2.32}$$

avec

$$\Re e\, M_l(\omega) = \mu \frac{1+\omega^2\tau_{1,l}\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2} \text{ et } \Im m\, M_l(\omega) = \mu \frac{\omega(\tau_{1,l}-\tau_{0,l})}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}. \tag{2.2.33}$$

On écrit alors l'inverse du facteur de qualité sous la forme :

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega(\tau_{1,l}-\tau_{0,l})}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}}{\sum_{l=1}^{L} \frac{1+\omega^2\tau_{1,l}\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}}. \tag{2.2.34}$$

On écrit les coefficients d'amortissements $\tau_{1,l}$ pour tout $l = 1, \cdots, L$ sous la forme :

$$\tau_{1,l} = \tau_{0,l}(1+\gamma_l),\ \gamma_l > 0. \tag{2.2.35}$$

$Q^{-1}(\omega)$ se réécrit alors :

$$Q^{-1}(\omega) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\gamma_l}{L + \sum_{l=1}^{L} \frac{\omega^2\tau_{0,l}^2}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\gamma_l}. \tag{2.2.36}$$

Pour déterminer des modèles à facteur de qualité constant, on donne les $\tau_{0,l}$ et on cherche γ_l de façon que Q approche bien le facteur de qualité donné Q_0 sur une bande de fréquence $[f_a, f_b]$. Dans la littérature géophysique on trouve plusieurs algorithme pour approcher Q [23, 45, 50]. Blanch et al. [23] ont utilisé pour modéliser un modèle à facteur de qualité presque constant (nearly constant) l'approximation dite "τ-method" qui consiste à prendre les $\gamma_l = \tau$ constants pour tous les modèles élémentaires et à approcher $Q^{-1}(\omega)$ par :

$$\tilde{Q}^{-1}(\omega,\tau) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{0,l}}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\tau \quad (\tau << 1)$$

et à déterminer τ qui minimise la fonctionnelle $F(\tau) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} (\tilde{Q}^{-1}(\omega,\tau) - Q_0^{-1})^2\, d\omega$. On s'est intéressé à adapter à notre problème la méthode présentée dans [50] pour un modèle généralisé de Maxwell.

Le principe de la méthode consiste à approcher $Q^{-1}(\omega)$ par :

$$\tilde{Q}^{-1}(\omega) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} \frac{\omega\tau_{0,l}(1 - Q_0^{-1}\omega\tau_{0,l})}{1+\omega^2\tau_{0,l}^2}\gamma_l \tag{2.2.37}$$

et de déterminer les coefficients γ_l pour $l = 1, \cdots, L$ satisfaisant le système linéaire :

$$\tilde{Q}^{-1}(\tilde{\omega}_k) = Q_0^{-1}, \quad k = 1, \cdots, K, \tag{2.2.38}$$

avec $K = 2L - 1$ et $\{\tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_K\}$ une subdivision de l'intervalle $[\omega_a, \omega_b]$, équidistante en échelle logarithmique ; $\omega = 2\pi f$ est la pulsation associée à la fréquence f. Résoudre les équation (2.2.38) est équivalent à résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} A\gamma = q, & \text{(i)} \\ A_{kl} = \dfrac{\omega_k\tau_{0,l}(1 - Q_0^{-1}\omega_k\tau_{0,l})}{1+\omega_k^2\tau_{0,l}^2} \quad k = 1, \cdots, K, \ l = 1, \cdots, L, & \text{(ii)} \\ \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_L)^t \in \mathbb{R}^L, \ q = LQ_0^{-1}(1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^K. & \text{(iii)} \end{cases} \tag{2.2.39}$$

La résolution de ce système linéaire ne donne pas toujours des $\gamma \geq 0$. Nous réécrirons alors le dernier système sous la forme d'un problème de moindre carré en exigeant la contrainte $\gamma \geq 0$:

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma\in\mathbb{R}^L} \|A\gamma - q\|, \\ \gamma \geq 0, \end{cases} \tag{2.2.40}$$

ce qui est équivalent à minimiser une fonction quadratique avec contrainte :

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma\in\mathbb{R}^L} \dfrac{1}{2}\gamma^t H\gamma - f\gamma, \\ \gamma \geq 0 \end{cases} \tag{2.2.41}$$

ici $H = A^tA$ et $f = A^tq$.

Pour la résolution du problème (2.2.41), on trouve dans la littérature plusieurs méthodes [71]. Nous avons choisi d'utiliser la routine "**quapro**" de Scilab qui utilise des méthodes de projection avec activation de contraintes. Pour le choix des $\tau_{0,l}$, on a vu que pour chacun des modèles élémentaires le maximum de Q^{-1} est atteint pour une pulsation :

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\tau_{1,l}\tau_{0,l}}} = \frac{1}{\tau_{0,l}\sqrt{1+\tilde{\gamma}_l}} \approx \frac{1}{\tau_{0,l}}.$$

On prend pour chaque modèle élémentaire $\omega_{max} = \omega_l$, d'où le choix : $\tau_{0,l} = \omega_l^{-1} = \tilde{\omega}_{2l-1}^{-1}$. Après la résolution de (2.2.40), soit $\tilde{L}$ le nombre des $\gamma_l \neq 0$ et une permutation α sur $S_{\tilde{L}} = \{1, \cdots, \tilde{L}\}$ telle que : $\gamma_{\alpha(l)} \neq 0$ quelque soit $l = 1, \cdots, \tilde{L}$ et $\tilde{\gamma}_{\alpha(1)} < ... < \tilde{\gamma}_{\alpha(L)}$. Comme on s'est intéressé à des valeurs de $\tilde{\gamma}_l > 0$ ($\tau_{1,l} > \tau_{0,l}$), on néglige les termes nuls et au lieu de travailler avec L

modèles on utilise seulement les modèles physiques qui correspondent à $\gamma_l > 0$ pour lesquels on pose :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_l = \dfrac{\tilde{L}}{L}\gamma_{\alpha(l)}, & l = 1, \cdots, \tilde{L}, \\ \tau_{0,l} = \omega_{\alpha(l)}^{-1}, & l = 1, \cdots, \tilde{L}, \\ \tau_{1,l} = \tau_{0,l}(1 + \tilde{\gamma}_l), & l = 1, \cdots, \tilde{L}. \end{cases}$$

■

En récapitulant, l'algorithme de la méthode est donné par **Algorithme** 1 .

Algorithme 1 Algorithme d'approximation du facteur de qualité

1: Données : L, $K = 2L - 1$, f_a, f_b et Q_0.
2: Calculer :
   – $\Delta\omega = \dfrac{1}{K-1}\log\dfrac{\omega_b}{\omega_a}$ avec $\omega_a = 2\pi f_a$ et $\omega_b = 2\pi f_b$.
   – $\tilde{\omega}_k = \omega_a\, e^{(k-1)\Delta\omega}\ \forall\, k = 1, \cdots, K$.
3: Résoudre le problème :

$$\begin{cases} \min\limits_{\gamma \in \mathbb{R}^L} \dfrac{1}{2}\gamma^t A^t A\gamma - A^t e\gamma, \\ \gamma \geq 0. \end{cases} \tag{2.2.42}$$

avec $A_{kl} = \dfrac{\omega_k \tau_{0,l}(1 - Q_0^{-1}\omega_k\tau_{0,l})}{1 + \omega_k^2\tau_{0,l}^2}$ $k = 1, \cdots, K$, $l = 1, \cdots, L$ et $e = (1, \cdots, 1)^t \in \mathbb{R}^K$.

4: Définir :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{\gamma_l > 0 \,/\, \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_L) \text{ solution de (2.2.42)}\} \\ &= \{\gamma_{\alpha(l)}\ l = 1, \cdots, \tilde{L} \,/\, \gamma_{\alpha(1)} < ... < \gamma_{\alpha(\tilde{L})},\ \alpha \text{ une permutation sur } S_L\}. \end{aligned}$$

5: Calculer : $\forall l = 1, \cdots, \tilde{L}$:

$$\begin{cases} \tau_{0,l} = \tilde{\omega}_{\alpha(l)}^{-1}, \\ \tilde{\gamma}_l = \tilde{L}Q_0^{-1}\gamma_{\alpha(l)}, \\ \tau_{1,l} = \tau_{0,l}(1 + \tilde{\gamma}_l). \end{cases}$$

2.2.3.3 Validation de la méthode

On présente à la figure 2.2.6 les résultats obtenus par la méthode présentée ci-dessus, en approchant $Q = 50$ sur une bande de fréquence comprise entre 20 et 200 Hz et en faisant varier le nombre des modèles élémentaires qui constituent la loi viscoélastique.

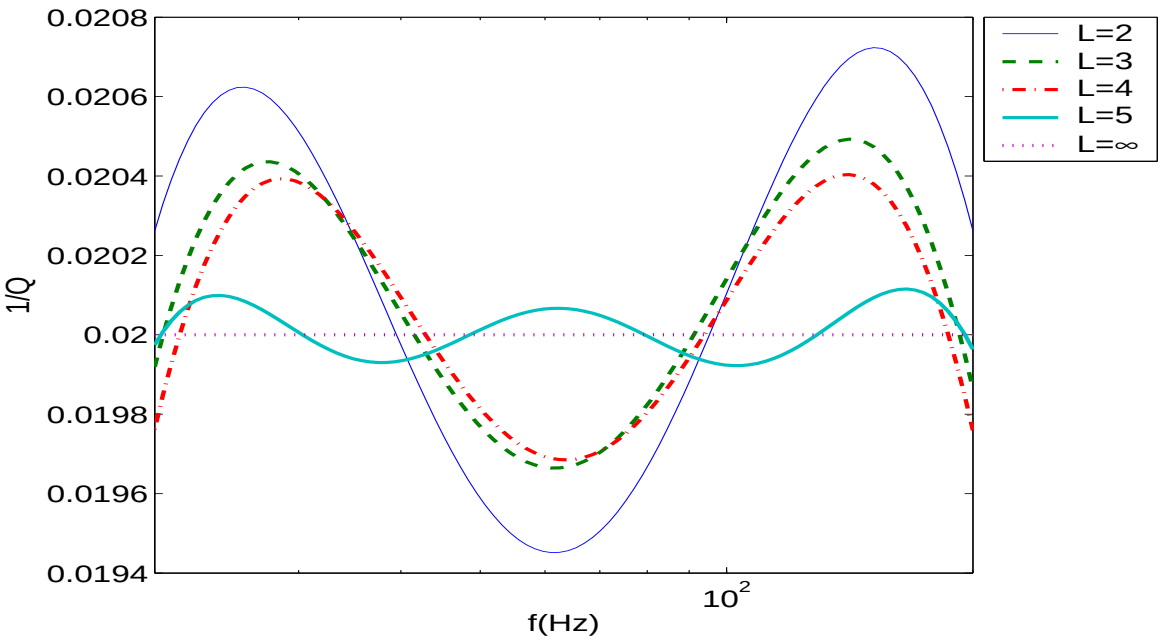


FIG. 2.2.6 – Facteur de qualité

2.2.4 Cas d'un milieu isotrope de dimension supérieure

Dans le cas d'un milieu isotrope de dimension $d \geq 2$, ces milieux sont caractérisés par les facteurs de qualité Q_p et Q_s associés respectivement aux ondes P et S. On considère la loi de comportement viscoélastique :

$$\sigma_{ij} + \tau_0 \dot{\sigma}_{ij} = \lambda[\varepsilon_{kk} + \tau_0 \gamma_\lambda \dot{\varepsilon}_{kk}]\delta_{ij} + 2\mu[\varepsilon_{ij} + \tau_0 \gamma_\mu \dot{\varepsilon}_{ij}] \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, d$$

l'analyse par ondes planes que nous avons effectuée (voir §2.2.2), nous a permis de montrer que l'onde viscoélastique isotrope se décompose en deux types d'ondes :

- Les ondes P ou ondes de compression pour lesquelles on associe les coefficients d'amortissement : τ_0 et $\tau_p = \tau_0 \dfrac{\lambda\gamma_\lambda + 2\mu\gamma_\mu}{\lambda + 2\mu}$.
- Les ondes S ou ondes de cisaillement pour lesquelles on associe les coefficients d'amortissement : τ_0 et $\tau_s = \tau_0 \mu$.

Pour modéliser des milieux viscoélastiques à facteurs de qualité Q_p (resp. Q_s) constants, on utilise la méthode présentée dans la section précédente en remplaçant τ_1 par τ_p (resp. τ_1 par τ_s). Nous présentons sur la figure 2.2.8 des instantanés de la norme du champ de déplacement u pour deux milieux ayant le même facteur de qualité $Q_s = 100$ et deux facteurs de qualité différents Q_p. Le premier a un facteur de qualité $Q_p = 10$ ce qui correspond à de forts amortissements (les figures à gauche) et le deuxième a un facteur de qualité $Q_p = 200$ correspondant à de faibles amortissements (les figures à droite). Pour obtenir les coefficients d'amortissement nous avons utilisé le modèle généralisé avec trois lois élémentaires sur une bande de fréquence $[20, 200]$ Hz (voir FIG 2.2.7).

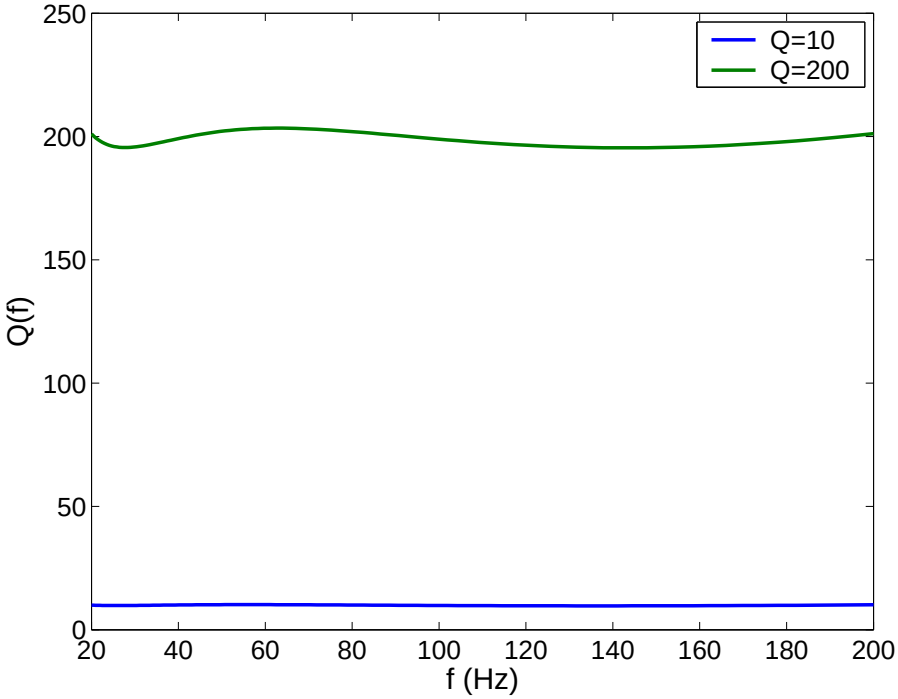


FIG. 2.2.7 – Approximation de $Q_p = 10$ et $Q_p = 200$

$Q_p = 10$ $Q_p = 200$

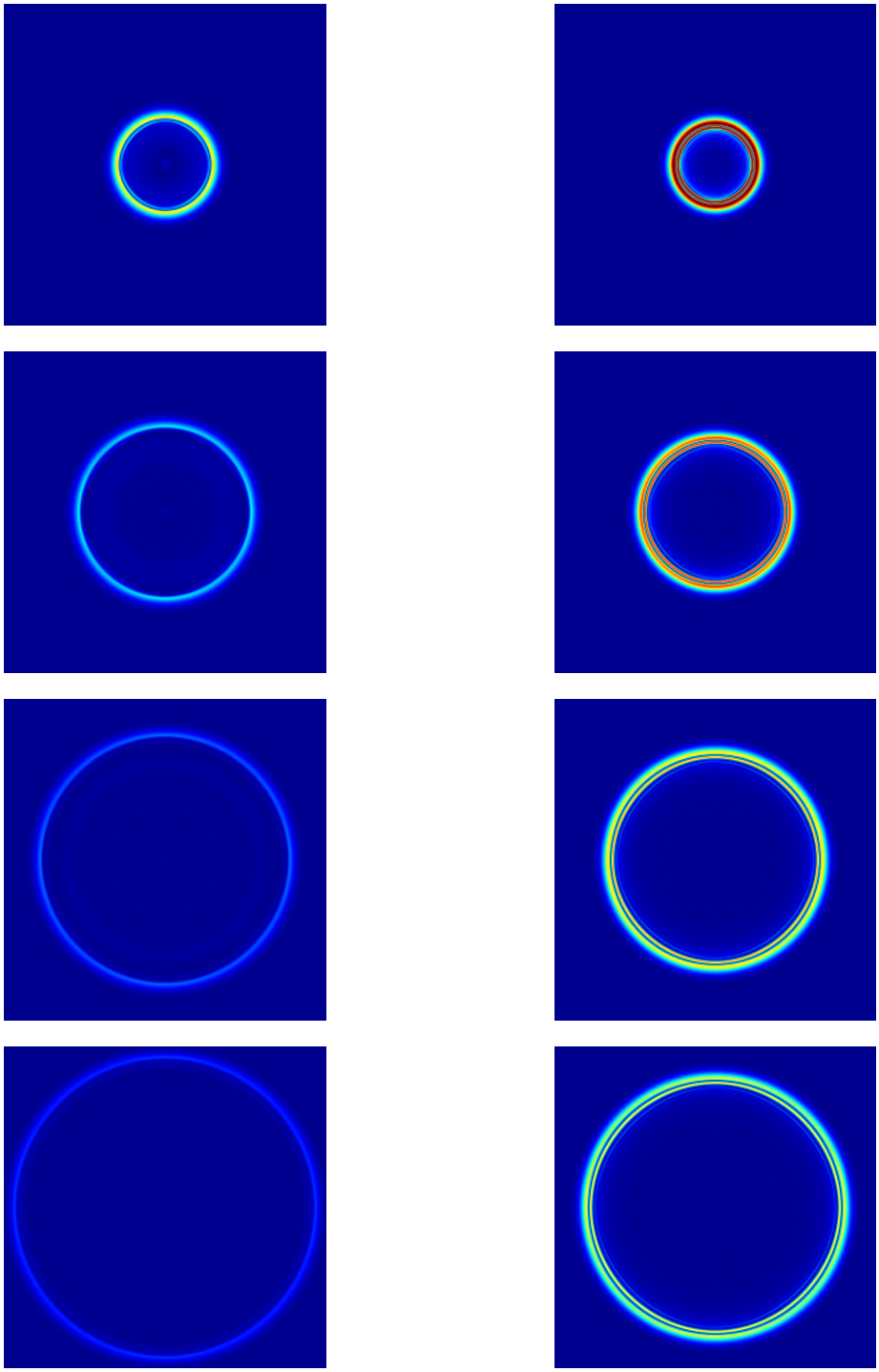


FIG. 2.2.8 – Ondes viscoélastiques associées à deux facteurs qualité différents

Chapitre 3

Approximation et analyse numérique

Nous présentons une méthode d'éléments finis mixtes pour approcher les équations viscoélastiques dans des milieux anisotropes hétérogènes. Cette méthode permet de faire la condensation de masse et ainsi d'obtenir un schéma explicite centré pour la discrétisation en temps. Nous démontrons, pour le schéma ainsi obtenu, un résultat de décroissance d'une énergie discrète et une condition suffisante de stabilité. Pour simuler la propagation dans les milieux ouverts, nous adaptons aux ondes viscoélastiques la technique des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML).

Sommaire

Introduction **79**
3.1 Cas 1D - Schémas aux différences finies **80**
3.1.1 Semi-discrétisation en espace 80
3.1.2 Discrétisation en temps 81
3.1.3 Analyse de stabilité 82
3.1.3.1 Stabilité par méthode de Fourier 82
3.1.3.2 Stabilité par techniques énergétiques 88
3.2 Dimension supérieure - Eléments finis mixtes **91**
3.2.1 Principe de la méthode en élasticité 91
3.2.2 Reformulation du problème 91
3.2.3 Formulation variationnelle déplacement-contrainte 93
3.2.4 Semi-discrétisation en espace 94
3.2.5 Discrétisation en temps 98
3.2.6 Energie discrète et analyse de stabilité 98
3.3 Traitement des milieux ouverts **105**
3.3.1 Application des PML au problème de la viscoélasticité 105
3.3.2 Approximation des PML 109

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse et l'approximation numérique du problème modèle étudié précédemment. L'étude numérique de ces problèmes a commencé il y a environ 15 ans (voir par exemple les travaux de Carcione et al [33, 36, 37]). La plupart des méthodes développées sont basées sur des schémas d'approximation aux différences finies [25, 39, 68]. En particulier, un travail de référence est dû à Robertson, Blanch et Symes [76]. Ces derniers proposent une analyse de Fourier de la stabilité de leur méthode qui est toutefois limitée aux milieux homogènes unidimensionnels. Les différence finies sont bien adaptées pour des géométries simples et pour le traitement des milieux homogènes. Cependant, une manière robuste de traiter les milieux hétérogènes et complexes est d'utiliser la méthode des éléments finis. Dans le cadre des ondes viscoélastiques, il semble qu'il n'y ait que très peu de travaux existants, en particulier de nature mathématique. Dans [62], les auteurs proposent une méthode d'éléments finis en espace et de quadrature pour l'intégration en temps, pour résoudre un problème viscoélastique isotrope basé sur une formulation en déplacement et une représentation intégrale du modèle de viscoélasticité. Mentionnons également l'approche par éléments finis espace-temps, de nature beaucoup moins mathématique, par Isedman, Niekamp et Stein [61] (voir aussi [79] pour des problèmes quasi-statiques). Finalement, soulignons le travail de Ha et al. [57], qui se sont intéressés à une méthode d'éléments finis non conformes pour un modèle viscoélastique complexe dans le domaine de fréquence, ce qui permet aux coefficients du modèle de dépendre de ω.

Récemment, dans [16], les auteurs ont développé une nouvelle méthode d'éléments finis mixtes pour les équations de l'élastodynamique. Notre objectif est essentiellement d'étendre cette méthode aux milieux viscoélastiques et d'en analyser les principales propriétés théoriques et pratiques. Cette méthode est conçue tout particulièrement pour les maillages réguliers et présente l'intérêt d'être compatible avec la condensation de masse (schémas explicites en temps) et l'utilisation de la méthode des domaines fictifs pour traiter des domaines de propagation en géométrie complexe [15, 41].

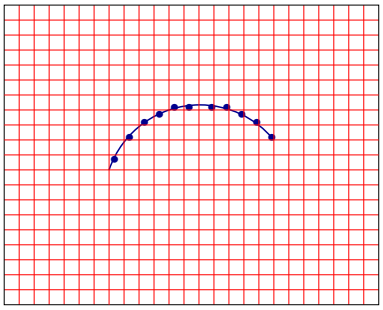


Fig. 3.0.1 – Fissure de géométrie complexe

Le plan que nous présentons est le suivant : à la section 1, nous traitons en détail le cas simplifié des milieux unidimensionnels. Dans ce cas notre analyse peut être directement confrontée à celle de Robertson et al [76]. La section centrale de ce chapitre est la section 2 dans laquelle nous décrivons et étudions la méthode dans le cas général. En particulier, nous considérons une formulation variationnelle **déplacement-contrainte**, nous présontons une méthode d'approximation numérique basée sur l'utilisation des éléments finis mixtes pour la discrétisation

en espace et un schéma aux différences finies d'ordre 2 en temps et à la fin de cette section nous démontrons la stabilité de notre schéma dans les milieux hétérogènes par des techniques de décroissance d'énergie discrète directement inspirées de celles utilisées pour l'analyse du problème continu [13, 14]. Finalement, la section 3 est consacrée à l'adaptation des couches absorbantes parfaitement adaptées aux milieux viscoélastiques.

3.1 Cas 1D - Schémas aux différences finies

Nous nous intéressons dans un premier temps au cas unidimensionnel. Notre objectif est de déterminer un schéma aux différences finies généralisable en dimension supérieure et qui soit explicite et stable.

On considère un domaine $I =]a, b[$ occupé par un milieu viscoélastique avec des conditions de Dirichlet au bord et on cherche à déterminer le déplacement u et la contrainte σ vérifiant :

$$\rho\, \partial^2_{tt} u - \partial_x \sigma = f, \qquad \text{dans } I \times]0, T], \tag{3.1.1a}$$

$$\sigma + \tau_0 \partial_t \sigma = \mu\big(\partial_x u + \tau_1 \partial^2_{xt} u\big), \qquad \text{dans } I \times]0, T] \tag{3.1.1b}$$

$$u(x, 0) = u_0,\ \partial_t u(x, 0) = u_1,\ \sigma(x, 0) = \sigma_0, \qquad \text{dans } I, \tag{3.1.1c}$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \qquad \text{dans }]0, T] \tag{3.1.1d}$$

avec $\tau_1(x) > \tau_0(x)$.

3.1.1 Semi-discrétisation en espace

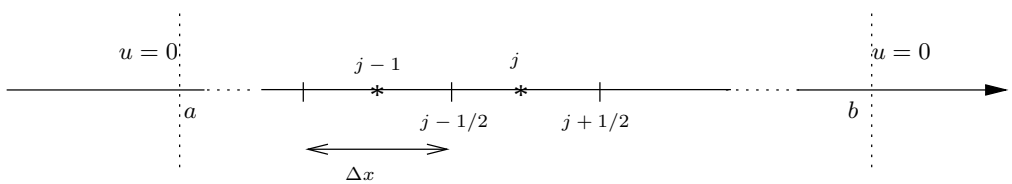


FIG. 3.1.1 – Discrétisation en espace

On introduit un maillage régulier du domaine I de pas $h = \Delta x$ constitué de segments $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \cdots, N$, avec $x_j = a + (j-1)h$ et $h = (b-a)/N$. On approche la première équation de (3.1.1) aux points x_j et la deuxième aux points milieux $x_{j+1/2} = x_j + 1/2h$ (voir figure 3.1.1). On note $u_j(t)$ l'approximation de $u(x_j, t)$ et $\sigma_{j+1/2}$ l'approximation de $\sigma(x_{j+1/2}, t)$ et on propose d'approcher (3.1.1) par le schéma centré d'ordre 2 suivant :

$$\begin{cases} \rho_j \dfrac{d^2 u_j}{dt^2} - \dfrac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h} = f_j, \\[2ex] \sigma_{j+1/2} + \tau_{0,j+1/2} \dfrac{d\sigma_{j+1/2}}{dt} = \dfrac{\mu_{j+1/2}}{h} \Big[\tau_{1,j+1/2}(\dfrac{du_{j+1}}{dt} - \dfrac{du_j}{dt}) + u_{j+1} - u_j\Big], \\[2ex] u_j(0) = u_{0,j},\ \dfrac{du_j}{dt}(0) = u_{1,j},\ \sigma_{j+1/2}(0) = \sigma_{0,j+1/2}, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

où ρ_j, f_j, $\tau_{0,j+1/2}$, $\mu_{j+1/2}$, $\tau_{1,j+1/2}$, $u_{0,j}$, $u_{1,j}$ et $\sigma_{0,j+1/2}$ sont respectivement des approximations des données $\rho(x_j)$, $f(x_j,t)$, $\tau_0(x_{j+1/2})$, $\mu(x_{j+1/2})$, $\tau_1(x_{j+1/2})$, $u_0(x_j)$, $u_1(x_j)$ et $\sigma_0(x_{j+1/2})$.

3.1.2 Discrétisation en temps

On considère une discrétisation en temps avec un pas de temps Δt. On note $t^n = n\Delta t$, u_j^n l'approximation de $u(x_j,t^n)$ et $\sigma_{j+1/2}^n$ l'approximation de $\sigma(x_{j+1/2},t^n)$ (voir les figures 3.1.2-3.1.3). Si on approche la première équation à $t = t^n$ en utilisant le schéma saute mouton et la deuxième équation en $t = t^{n+1/2}$ en utilisant un schéma centré d'ordre 2, nous obtenons le schéma totalement discrétisé :

(3.1.3)
$$\begin{cases} \rho_j \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma_{j+1/2}^n - \sigma_{j-1/2}^n}{h} = f_j^n, \\ \dfrac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} + \sigma_{j+1/2}^n}{2} + \tau_{0,j+1/2}\dfrac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} - \sigma_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \dfrac{\mu_{j+1/2}}{h}\Big[\tau_{1,j+1/2}\big(\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n}{2} - \dfrac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}\Big], \\ u_j^0 = u_{0,j},\ u_j^1 = \tilde{u}_j^1,\ \sigma_{j+1/2}^0 = \sigma_{0,j+1/2}, \end{cases}$$

où f_j^n est l'approximation de $f(x_j,t^n)$ et $\tilde{u}_j^1$ est une approximation de $u(x_j,\Delta t)$ d'ordre 2, on prend par exemple l'approximation suivante :

$$\tilde{u}_j^1 = u_j^0 + \Delta t\, u_{1,j} + \frac{\Delta t^2}{2\rho_j h}(\sigma_{j+1/2}^0 - \sigma_{j-1/2}^0).$$

Remarque 3.1.1 *On remarque que le schéma ainsi défini est centré, totalement explicite, de plus il est consistant d'ordre deux, c'est-à-dire l'erreur est en $O(h^2 + \Delta t^2)$.*

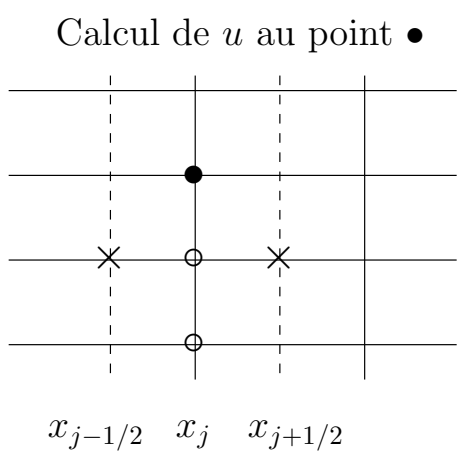


FIG. 3.1.2 – Calcul de u_j^{n+1} en fonction de $u_j^n, u_j^{n-1}, \sigma_{j-1/2}^n$ et $\sigma_{j+1/2}^n$

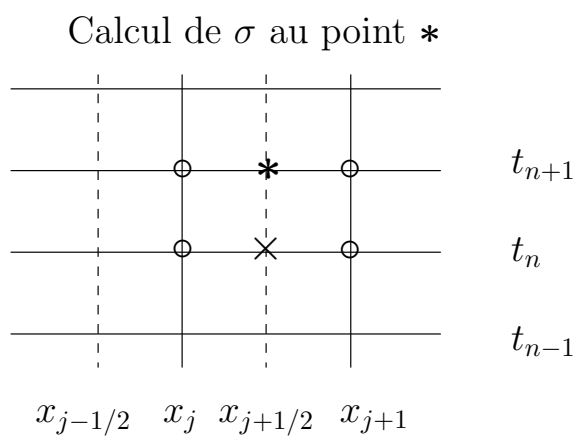


FIG. 3.1.3 – Calcul de $\sigma_{j+1/2}^{n+1}$ en fonction de $u_{j+1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^n, u_j^n$ et $\sigma_{j+1/2}^n$

3.1.3 Analyse de stabilité

Dans cette section nous nous sommes intéressés à la question de stabilité du schéma numérique (3.1.3). Dans un premier temps, nous présentons un résultat de stabilité en montrant une condition de stabilité nécessaire et suffisante dans les milieux homogènes, en utilisant la technique de Fourier. Dans un deuxième temps, nous montrons que cette condition reste suffisante dans le cas des milieux hétérogènes, en utilisant une technique énergétique.

3.1.3.1 Stabilité par méthode de Fourier

Pour montrer la stabilité par Fourier nous considérons le problème dans un milieu homogène infini. On introduit les espaces normés discrets :

$$L^2_{h,0} = \left\{ u_h = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}}, \sum_j |u_j|^2 < +\infty \right\}, \tag{3.1.4a}$$

$$L^2_{h,1/2} = \left\{ \sigma_h = (\sigma_{j+1/2})_{j\in\mathbb{Z}}, \sum_j |\sigma_{j+1/2}|^2 < +\infty \right\}, \tag{3.1.4b}$$

munis des produits scalaires :

$$(u_h, v_h)_0 = h \sum_j u_j \bar{v}_j, \quad (\sigma_h, \tau_h)_{1/2} = h \sum_j \sigma_{j+1/2} \bar{\tau}_{j+1/2}$$

et des normes associées :

$$||u_h||_0^2 = h \sum_j |u_j|^2, \quad ||\sigma_h||_{1/2}^2 = h \sum_j |\sigma_{j+1/2}|^2.$$

Le schéma (3.1.3) est alors équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho \dfrac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} & = & B\, \sigma_h^n, \\ \dfrac{\sigma_h^{n+1} + \sigma_h^n}{2} + \tau_0 \dfrac{\sigma_h^{n+1} - \sigma_h^n}{\Delta t} & = & \mu \tau_1 B_1 \left(\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} \right) + \mu B_1 \left(\dfrac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right), \\ u_h^0,\, u_h^1,\, \sigma_h^0 \text{ données}, & & \end{array} \right. \tag{3.1.5}$$

avec

$$u_h = (u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in L^2_{h,0}, \; \sigma_h = (\sigma_{j+1/2})_{j\in\mathbb{Z}} \in L^2_{h,\frac{1}{2}},$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B \;:\; L^2_{h,\frac{1}{2}} & \longmapsto & L^2_{h,0} \\ \sigma_h & \longmapsto & \left(\dfrac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h} \right)_{j\in\mathbb{Z}}, \end{array} \right. \tag{3.1.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} B_1 \;:\; L^2_{h,0} & \longmapsto & L^2_{h,\frac{1}{2}} \\ u_h & \longmapsto & \left(\dfrac{u_{j+1} - u_j}{h} \right)_{j\in\mathbb{Z}}. \end{array} \right. \tag{3.1.7}$$

Le système (3.1.5) s'écrit de manière équivalente sous la forme :

$$u_h^{n+1} = -u_h^{n-1} + 2u_h^n + \frac{\Delta t^2}{\rho} B\sigma_h^n, \tag{3.1.8a}$$

$$\sigma_h^{n+1} = \frac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}\,\sigma_h^n + \mu\frac{\Delta t + 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t}\,B_1\,u_h^{n+1} + \mu\frac{\Delta t - 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t}\,B_1 u_h^n. \tag{3.1.8b}$$

Nous montrons la proposition suivante :

Proposition 3.1.1 *Les opérateurs B et B_1 vérifient les propriétés suivantes :*

1. $B_1 = -B^\star$.
2. $\|B\| \leq 2/h$.

Démonstration

Soit $(u_h, \sigma_h) \in L^2_{h,0} \times L^2_{h,\frac{1}{2}}$, on a :

1.
$$\begin{aligned}
(B_1 u_h, \sigma_h)_{\frac{1}{2}} &= h\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{u_{j+1} - u_j}{h}\,\sigma_{j+1/2} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_{j+1}\sigma_{j+1/2} - \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\,\sigma_{j+1/2} \\
&= \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\,\sigma_{j-1/2} - \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\,\sigma_{j+1/2} = -h\sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j\,\frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h} \\
&= -(u_h, B\,\sigma_h)_0.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
(B\sigma_h, u_h)_{\frac{1}{2}} &= h\sum_{j\in\mathbf{Z}} \frac{\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}}{h}\,u_j \\
&\leq \left[\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\sigma_{j+1/2} - \sigma_{j-1/2}|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j|^2\right]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{h}\left[\left(h\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\sigma_{j+1/2}|^2\right)^{1/2} + \left(h\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\sigma_{j-1/2}|^2\right)^{1/2}\right] \left[h\sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j|^2\right]^{1/2} \\
&= \frac{2}{h}\|\sigma_h\|_{1/2}\|u_h\|_0,
\end{aligned}$$

ce qui montre $\|B\| \leq 2/h$. ■

Soit $K_h = [-\pi/h, \pi/h]$, on introduit les transformées de Fourier discrètes :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\mathcal{F}_{h,0} & : & L^2_{h,0} \longmapsto L^2(K_h) \\
 & & u_h \longmapsto \mathcal{F}_{h,0}u_h = \hat{u}_h \\
 & & \hat{u}_h(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\sum_j u_j e^{-ikx_j}\,h,
\end{array}\right. \tag{3.1.9}$$

et

$$
(3.1.10) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{F}_{h,1/2} & : & L^2_{h,1/2} \longmapsto L^2(K_h) \\ & & \sigma_h \longmapsto \mathcal{F}_{h,1/2}\sigma_h = \hat{\sigma}_h \\ & & \hat{\sigma}_h(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\sum_j \sigma_{j+1/2} e^{-ikx_{j+1/2}}\, h. \end{array} \right.
$$

Le schéma (3.1.5) est stable si la solution (u_h^n, σ_h^n) est bornée indépendamment des pas de discrétisation h et Δt. Pour montrer que la solution discrète est bornée dans $L^2_{h,0} \times L^2_{h,1/2}$, en utilisant l'identité de Plancherel-Parseval, il suffit de montrer que sa transformée de Fourier discrète est bornée dans $L^2(K_h) \times L^2(K_h)$. On applique à (3.1.8a) la transformée de Fourier (3.1.9) et à (6.2.4) la transformée (3.1.10), on obtient :

$$
(3.1.11) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \hat{u}_h^{n+1} & = & -\hat{u}_h^{n-1} + 2\hat{u}_h^n + \dfrac{\Delta t^2}{\rho}\, \hat{B}\, \hat{\sigma}_h^n, \\ \hat{\sigma}_h^{n+1} & = & \dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}\, \hat{\sigma}_h^n + \mu \dfrac{\Delta t + 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t}\, \hat{B}_1 \hat{u}_h^{n+1} + \mu \dfrac{\Delta t - 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t}\, \hat{B}_1 \hat{u}_h^n, \end{array} \right.
$$

où $\hat{B}$ et $\hat{B}_1$ sont respectivement les symboles des opérateurs B et B_1 ; ils vérifient ($\mathrm{i}^2 = -1$) :

$$
\hat{B}(k) = \hat{B}_1(k) = \frac{2\mathrm{i}}{h} \sin(\alpha), \quad \alpha = \frac{kh}{2}.
$$

On pose :

$$
w_h^n = \begin{pmatrix} \hat{u}_h^{n-1} \\ \hat{u}_h^n \\ \hat{\sigma}_h^n \end{pmatrix}
$$

le système (3.1.11) est équivalent à l'équation de récurrence suivante :

$$
(3.1.12) \qquad \mathcal{C} w_h^{n+1} = \mathcal{D} w_h^n,
$$

avec

$$
\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & d_{23} \\ 0 & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix};
$$

les constantes c_{32}, d_{23}, d_{32} et d_{33} sont données par :

$$
\left\{ \begin{array}{lll} c_{32} & = & -\mathrm{i}\, \dfrac{2\mu \sin\alpha}{h} \, [\dfrac{2\tau_1 + \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}], \\ d_{23} & = & \mathrm{i}\, \dfrac{2\Delta t^2}{\rho\, h} \, \sin\alpha, \\ d_{32} & = & \mathrm{i}\, \dfrac{2\mu \sin\alpha}{h} \, [\dfrac{\Delta t - 2\tau_1}{2\tau_0 + \Delta t}], \\ d_{33} & = & \dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}. \end{array} \right.
$$

La matrice $\mathcal{C}$ étant clairement inversible, (3.1.12) est équivalent à :

$$
w_h^{n+1} = G\, w_h^n,
$$

où $G = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{D}$ est la matrice d'**amplification**.

La stabilité du schéma est alors liée aux propriétés des valeurs propres de G, plus précisément :

Le schéma (3.1.3) est stable si et seulement si $\boldsymbol{\rho(G) \leq 1}$ $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$,

où $\rho(G)$ est le rayon spectral de G :

$$\rho(G) = \max\{|\lambda|/\lambda \text{ valeur propre de } G\}.$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice G est donné par :

$$P_G(\boldsymbol{\lambda}) = -(2\tau_0+\Delta t)\boldsymbol{\lambda}^3 + \Big[\Delta t + 6\tau_0 - \beta^2(2\tau_1+\Delta t)\Big]\boldsymbol{\lambda}^2 + \Big[\Delta t - 6\tau_0 + \beta^2(2\tau_1-\Delta t)\Big]\boldsymbol{\lambda} + 2\tau_0 - \Delta t$$

avec

$$\beta = \frac{2c\Delta t}{h}\sin\alpha, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Si on désigne par $c_\infty = c\sqrt{\tau_1/\tau_0}$ la vitesse des ondes à hautes fréquences, la condition nécessaire et suffisante de stabilité est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.1.2 *Le schéma (3.1.3) est L^2 stable si et seulement si :*

$$\frac{\Delta t}{h} \leq CFL = \frac{1}{c_\infty}. \tag{3.1.13}$$

Démonstration

Le polynôme P_G vérifie :

$$P_G(1) = -2\beta^2\Delta t \leq 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{R},$$

$$P_G(-1) = 16\tau_0 - 4\beta^2\tau_1 = 16(\tau_0 - \frac{c^2\Delta t^2\tau_1\sin^2\alpha}{h^2}).$$

1. **Supposons que la condition $\boldsymbol{CFL}$ (3.1.13) est vérifiée**.

   On remarque que cette condition impose que $P_G(-1) \geq 0 \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}\,(\forall k \in \mathbb{R})$. Le polynôme P_G est alors négatif en 1 et positif en -1. Il admet donc un zéro réel λ_0 dans l'intervalle $[-1, 1]$. Notons λ_0, λ_1 et λ_2 les racines de P ; elles vérifient :

   $$\lambda_0\lambda_1\lambda_2 = \frac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}, \tag{3.1.14}$$

   ce produit vérifie :

   $$P_G\left(\frac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}\right) = 4\frac{2\tau_0 - \Delta t}{(2\tau_0 + \Delta t)^2}\beta^2\Delta t(\tau_1 - \tau_0). \tag{3.1.15}$$

   On discute suivant le signe de $2\tau_0 - \Delta t$:

   si $2\tau_0 - \Delta t > 0$:

   $\dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t} \in [0, 1]$ et d'après (3.1.15) P_G est positif en ce point (puisque $\tau_1 > \tau_0$). Le polynôme P_G a alors au moins un zéro réel $\lambda_0 \in \Big[\dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}, 1\Big]$, ce qui implique :

(a) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,
$\lambda = \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ et comme $\lambda_0 \geq \dfrac{2\tau_0 - \Delta t}{2\tau_0 + \Delta t}$, on a $|\lambda| \leq 1$ d'après (3.1.14).

(b) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, d'après notre remarque précédente elles sont soit toutes les deux de module inférieur à 1, soit toutes les deux de module supérieur à 1. Ce dernier cas est impossible car d'après (3.1.14) le produit de leurs modules doit être inférieur à 1.

si $2\tau_0 - \Delta t < 0$:

on suit la même démarche que dans le premier cas et on montre que $\rho(G) \leq 1$.

si $2\tau_0 - \Delta t = 0$:

$\lambda_0 = 0$ et λ_1, λ_2 sont solutions de l'équation :

$$T(\lambda) = -2\tau_0\lambda^2 + [4\tau_0 - \beta^2(\tau_1 + \tau_0)]\lambda + \beta^2(\tau_1 - \tau_0) - 2\tau_0 = 0.$$

Elles vérifient :

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 - \beta^2\frac{\tau_1 - \tau_0}{2\tau_0} \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \tag{3.1.16}$$

(a) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$(3.1.16) \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = |\lambda|^2 \leq 1.$$

(b) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On remarque que :

$$T(1) = -2\beta^2\tau_0 \leq 0, \;\; T(-1) = 2\beta^2\tau_1 - 8\tau_0 = 8\tau_0(\frac{c_\infty^2\Delta t^2}{h^2} - 1) \leq 0.$$

Comme le montre la figure 3.1.4 ci-dessous on a deux possibilités : soit les deux racines sont de module inférieur à 1, soit elles sont de même signe et de module strictement supérieur à 1. Ce dernier cas est impossible d'après (3.1.16).

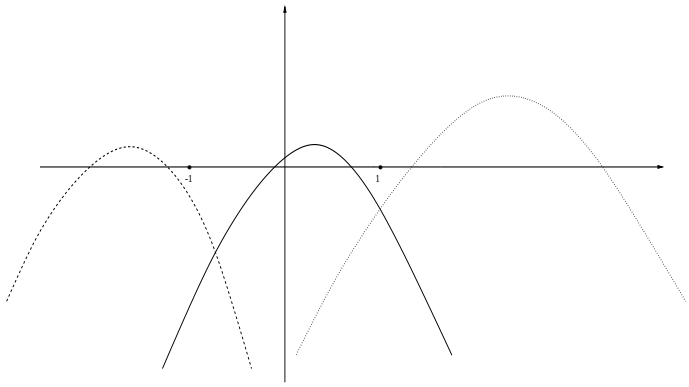


FIG. 3.1.4 – Les trois cas possibles

2. **La condition (3.1.13) est aussi nécessaire.**

Si le pas de temps Δt ne vérifie pas cette condition, on a alors :

$$P_G(-1) < \tau_0 \cos^2 \alpha = \tau_0 \cos^2(\frac{k\Delta x}{2}) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{E} = \{(2p+1)\frac{\pi}{h}/p \in \mathbb{Z}\}.$$

et comme P_G est positif au voisinage de $-\infty$, alors pour tout $k \in \mathcal{E}$ on trouve $\lambda(k)$ racine de P_G et inférieur à -1.

Conclusion. Si Δt vérifie la condition CFL (3.1.13), alors il existe C_1 une constante positive indépendante de Δt et h telle que :

$$(\|\hat{u}_h^n\|_{L^2} + \|\hat{\sigma}_h^n\|_{L^2}) \leq C_1(\|\hat{u}_h^0\|_{L^2} + \|\hat{u}_h^1\|_{L^2} + \|\hat{\sigma}_h^0\|_{L^2}), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ce qui nous donne en utilisant l'identité de Plancherel-Parseval :

$$(\|u_h^n\|_{L^2_{h,0}} + \|\sigma_h^n\|_{L^2_{h,\frac{1}{2}}}) \leq C_1(\|u_h^0\|_{L^2_{h,0}} + \|u_h^1\|_{L^2_{h,0}} + \|\sigma_h^0\|_{L^2_{h,\frac{1}{2}}}), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En faisant l'hypothèse sur l'approximation des données initiales :

$$(\|u_h^0\|_{L^2_{h,0}} + \|u_h^1\|_{L^2_{h,0}} + \|\sigma_h^0\|_{L^2_{h,\frac{1}{2}}}) \leq C_2(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2} + \|\sigma_0\|_{L^2}).$$

On montre que la solution est bornée dans L^2 indépendamment de Δt et h à tout instant. ■

Remarque 3.1.2 *On peut étendre cette étude aux schémas numériques associés aux modèles viscoélastiques de Maxwell et de Kelvin-Voigt :*
– *Si on considère le modèle de Maxwell [34] :*

$$\begin{cases} \rho\, \partial_{tt}^2 u - \partial_x \sigma = f, \\ \sigma + \tau \partial_t \sigma = \mu \partial_{xt}^2 u \end{cases} \tag{3.1.17}$$

et l'extension du schéma (3.1.3) au problème (3.1.17) :

$$\begin{cases} \rho_j \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma_{j+1/2}^n - \sigma_{j-1/2}^n}{h} = f_j^n, \\ \dfrac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} + \sigma_{j+1/2}^n}{2} + \tau_{j+1/2} \dfrac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} - \sigma_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \dfrac{\mu_{j+1/2}}{h} \Big[\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \Big]. \end{cases} \tag{3.1.18}$$

On montre, en utilisant la technique présentée dans la démonstration de la proposition 3.1.2 que le schéma (3.1.18) est stable dans le cas homogène si et seulement si Δt vérifie la condition de stabilité :

$$\Delta t \leq \frac{h\sqrt{\tau}}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3.1.19}$$

– *Si on considère le modèle de Kelvin-Voigt [34] :*

$$\begin{cases} \rho\, \partial_{tt}^2 u - \partial_x \sigma = f, \\ \sigma = \mu \partial_x u + \mu \tau \partial_{xt}^2 u. \end{cases} \tag{3.1.20}$$

et le schéma numérique associé :

$$
(3.1.21) \qquad \begin{cases} \rho_j \dfrac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \dfrac{\sigma_{j+1/2}^n - \sigma_{j-1/2}^n}{h} = f_j^n, \\ \dfrac{\sigma_{j+1/2}^{n+1} + \sigma_{j+1/2}^n}{2} = \dfrac{\mu_{j+1/2}}{h}\Big[\tau_{j+1/2}\big(\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} - \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n}{2} - \dfrac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}\Big]. \end{cases}
$$

Ce schéma est inconditionnellement instable. Pour avoir la stabilité on utilise des schémas d'approximations implicites ou on le stabilise en modifiant l'équation de comportement en ajoutant $\epsilon\partial_t\sigma$ au premier terme de la deuxième équation de (3.1.21). Si nous utilisons l'approximation centrée de $\epsilon\partial_t\sigma(x_{j+1/2}, t^{n+1/2}) \approx \epsilon(\sigma_{j+1/2}^{n+1} - \sigma_{j+1/2}^n)/\Delta t$ ($\epsilon \to 0$), le schéma est équivalent à (3.1.3) en considérant $\tau_0 = \epsilon$ et $\tau_1 = \tau$.

3.1.3.2 Stabilité par techniques énergétiques

On va montrer que la condition (3.1.13) est une condition suffisante de stabilité, en passant par une technique d'énergie qui reste valable pour des milieux à coefficients variables. De même que dans le cas continu, où la quantité d'énergie jouait un rôle important pour les estimations a priori de la solution, on établit un résultat de dissipation d'une énergie discrète qui nous conduit sous certaines conditions à des estimations de la solution approchée.

On rappelle les résultats de décroissance d'énergie dans le cas continu. La quantité d'énergie associée au problème unidimensionnel est donnée par :

$$
E(t) = \frac{1}{2}\left[\|\partial_t u\|_\rho^2 + \|\partial_x u\|_\mu^2 + \|s\|_{\tau_0/[\mu(\tau_1-\tau_0)]}^2\right]
$$

et elle vérifie :

$$
\frac{dE(t)}{dt} = -\|s\|_{1/[\mu(\tau_1-\tau_0)]}^2
$$

avec

$$
s = \sigma - \mu\,\partial_x u,\ \|v\|_\omega^2 = \int_\Omega \omega(x)|v(x)|^2\,dx, \quad \forall\,(v,\omega) \in L^2(\Omega) \times L^\infty(\Omega),\ \omega \geq 0.
$$

Nous définissons la variable discrète qui correspond à s :

$$
s_h^n = \sigma_h^n + A^{-1}B^\star\,u_h^n.
$$

Le schéma (3.1.3) est équivalent à :

$$
(3.1.22) \qquad \begin{cases} M_u\,\dfrac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} - B\,\sigma_h^n = f^n, \\ M_\tau\,\dfrac{s_h^{n+1} + s_h^n}{2} + M_s\,\dfrac{s_h^{n+1} - s_h^n}{\Delta t} + B^\star\,\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} = 0, \\ A\,\sigma_h^{n+1} - A\,s_h^{n+1} + B^\star\,u_h^{n+1} = 0, \end{cases}
$$

avec

$$
\left\|
\begin{array}{ll}
M_u\, u_h = (\rho_j u_j)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall u_h \in L^2_{h,0}, \\[2ex]
M_\tau\, \sigma_h = \left(\dfrac{\sigma_{j+1/2}}{\mu_{j+1/2}(\tau_{1,j+1/2} - \tau_{0,j+1/2})}\right)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall \sigma_h \in L^2_{h,\frac{1}{2}}, \\[2ex]
M_s\, \sigma_h = \left(\dfrac{\tau_{0,j+1/2}\, \sigma_{j+1/2}}{\mu_{j+1/2}(\tau_{1,j+1/2} - \tau_{0,j+1/2})}\right)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall \sigma_h \in L^2_{h,\frac{1}{2}}, \\[2ex]
A\, \sigma_h = \left(\dfrac{\sigma_{j+1/2}}{\mu_{j+1/2}}\right)_{j\in\mathbb{Z}}, & \forall \sigma_h \in L^2_{h,\frac{1}{2}}, \\[2ex]
B \text{ est donnée par (3.1.6).} &
\end{array}
\right. \tag{3.1.23}
$$

Définition 3.1.1 *On définit l'énergie discrète par :*

$$
\left\|
\begin{array}{l}
\boldsymbol{E}^{n+1/2} = \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}\right\|^2_{M_u} + \dfrac{1}{4}\left(\|s_h^{n+1}\|^2_{M_s} + \|s_h^n\|^2_{M_s}\right) \\[2ex]
\qquad + \dfrac{\Delta t^2}{4}\left(B^\star\, \dfrac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \dfrac{s_h^{n+1} - s_h^n}{\Delta t}\right) + \dfrac{1}{2}\left(M_\sigma^{-1} B^\star\, u_h^{n+1}, B^\star\, u_h^n\right)
\end{array}
\right. \tag{3.1.24}
$$

avec

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\|u_h\|^2_{M_u} = (M_u u_h, u_h) = u_h^t M_u u_h, & \forall\, u_h \in L^2_{h,0}, \\
\|s_h\|^2_{M_s} = (M_s s_h, s_h) = s_h^t M_s s_h, & \forall\, s_h \in L^2_{h,1/2}.
\end{array}
\right.
$$

On montre que l'énergie discrète est dissipative :

Théorème 3.1.1 *La quantité d'énergie discrète vérifie :*

$$
\frac{\boldsymbol{E}^{n+1/2} - \boldsymbol{E}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{8}(\|s_h^{n+1} + s_h^n\|^2_{M_\tau} + \|s_h^n + s_h^{n-1}\|^2_{M_\tau}) \tag{3.1.25}
$$

de plus une condition suffisante de la stabilité du schéma est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1.2 *Pour que le schéma numérique (3.1.22) soit stable dans L^2, il suffit que le pas de temps vérifie :*

$$
\frac{\Delta t}{2}\|B\| \leq 1. \tag{3.1.26}
$$

avec

$$
\|B\| = \sup_{u_h\neq 0, \sigma_h \neq 0} \frac{(B\sigma_h, u_h)}{\|u_h\|_{M_u}\|\sigma_h\|_K}
$$

et

$$
\mathbb{K} = (A^{-1} + M_s^{-1})^{-1}.
$$

La démonstration de ces deux théorèmes est présentée d'une façon générale dans le cas d'une dimension supérieure (voir §3.2.6).

Dans le cas 1D on trouve à partir de (3.1.23) :

$$\mathbb{K}\sigma_h = (\alpha_{j+1/2}\,\sigma_{j+1/2})_{j\in\mathbb{Z}},\ \forall \sigma_h \in L^2_{h,\frac{1}{2}}$$

où $\alpha_{j+1/2}$ est une approximation de $\alpha = \mu\,\tau_1/\tau_0$ au point $x_{j+1/2}$ (la valeur moyenne sur $[x_j, x_{j+1}]$) :

$$\alpha_{j+1/2} = \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \alpha(x)\,dx$$

et on définit ρ_j comme la valeur moyenne de ρ sur $[x_{j-1}, x_{j+1}]$:

$$\rho_j = \frac{1}{2h}\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \rho(x)\,dx = \frac{1}{2}(\rho_{j+1/2} + \rho_{j-1/2})$$

On détermine explicitement la condition de stabilité en majorant $\|B\|$:

$$\begin{aligned}
(B\,\sigma_h, u_h) &= (\sigma_h, B^\star\,u_h) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sigma_{j+1/2}(u_j - u_{j+1}) \\
&\le \frac{1}{h}c_\infty^+ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{j+1/2}^{-1/2}\,\sigma_{j+1/2}\,\rho_{j+1/2}^{1/2}\,(u_j - u_{j+1}) \\
&\le \frac{1}{h}c_\infty^+ \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_{j+1/2}^{-1}|\sigma_{j+1/2}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+1/2}|u_{j+1} - u_j|^2\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

avec $c_\infty^+ = \sup_{x\in\Omega} c_\infty(x) = \sup_{x\in\Omega} c(x)\,\sqrt{\tau_1(x)/\tau_0(x)}$.

Or, comme $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+1/2}|u_{j+1} - u_j|^2$ vérifie l'inégalité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+1/2}|u_{j+1} - u_j|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\rho_{j+1/2} + \rho_{j-\frac{1}{2}})|u_j|^2 - 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+1/2}u_{j+1}u_j \\
&\le 2\sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_j|u_j|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+1/2}|u_j|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \rho_{j+1/2}|u_{j+1}|^2 = 4\|u_h\|^2_{M_u}
\end{aligned}$$

on a d'après (3.1.27), l'inégalité :

$$(B\,\sigma_h, u_h) \le \frac{2}{h}c_\infty^+\|u_h\|_{M_u}\|\sigma_h\|_K.$$

d'où

$$\|B\| \le \frac{2}{h}c_\infty^+,$$

ce qui nous donne la condition de stabilité :

$$\frac{\Delta t}{h} \le (\sup_{x\in\Omega} c_\infty)^{-1}. \tag{3.1.28}$$

Dans le cas homogène :

$$\begin{cases} M_u = \rho\, \boldsymbol{I},\ M_s = \dfrac{\tau_0}{\mu(\tau_1 - \tau_0)}\, \boldsymbol{I}, \\ A = \dfrac{1}{\mu}\, \boldsymbol{I}. \end{cases}$$

et on retrouve la condition nécessaire et suffisante de stabilité qu'on a établie en utilisant une analyse par Fourier :

$$\frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{c_\infty}.$$

3.2 Dimension supérieure - Eléments finis mixtes

Notre objectif est de développer une méthode numérique efficace pour résoudre le problème modèle (2.1.1) c'est-à-dire une méthode performante ayant les propriétés suivantes :

- Facile à implémenter en utilisant un maillage régulier.
- Compatible avec la condensation de masse (schéma explicite en temps).
- Conduisant à un schéma stable en temps.

Pour atteindre ce but, nous adaptons au problème de la viscoélasticité les éléments finis mixtes avec condensation de masse présentés dans [16] pour l'équation de l'élastodynamique.

3.2.1 Principe de la méthode en élasticité

La base de cette méthode est une formulation mixte vitesse-contrainte du problème de l'élastodynamique dans laquelle on introduit la symétrie de la contraine d'une façon forte dans l'espace d'approximation, ce qui nous permet de chercher le tenseur des contraintes σ dans l'espace L^2 des tenseurs à divergence L^2 et symétriques qu'on note $H^{sym}(div)$ et la vitesse u (ou le déplacement pour une formulation déplacement-contrainte) dans L^2.

3.2.2 Reformulation du problème

On considère le problème modèle dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathbf{div}\, \sigma = f, \tag{3.2.1a}$$

$$\sigma + \tau_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \boldsymbol{C}\, \varepsilon(u) + \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(\frac{\partial u}{\partial t}), \tag{3.2.1b}$$

avec les conditions initiales :

$$u(t=0) = u_0\ ;\ \sigma(t=0) = \sigma_0\ ;\ \frac{\partial u}{\partial t}(t=0) = u_1 \tag{3.2.2}$$

et la condition aux limites :

$$\sigma.n = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.2.3}$$

où n est la normale extérieure au domaine.

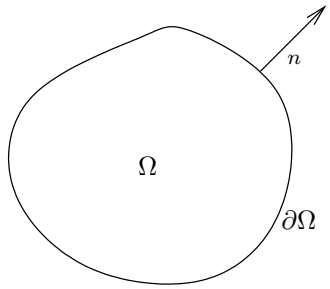


FIG. 3.2.1 – Domaine d'étude

En multipliant (3.2.1b) par une fonction de test $\tilde{\sigma}$ nous obtenons après l'intégration sur Ω :

$$\int_\Omega \sigma : \tilde{\sigma}\, dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega \tau_0\, \sigma : \tilde{\sigma}\, dx - \int_\Omega \boldsymbol{C}\, \varepsilon(u) : \tilde{\sigma}\, dx - \frac{d}{dt}\int_\Omega \tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(u) : \tilde{\sigma}\, dx = 0,$$

Le principe de la méthode impose la régularité sur la contrainte dans $H^{sym}(div)$ et le déplacement dans L^2, il faut alors porter les dérivées sur les contraintes σ et $\tilde{\sigma}$ au lieu de déplacement u. Le terme $\boldsymbol{C}\varepsilon(u)$ exige de multiplier l'équation (3.2.1b) par $\boldsymbol{C}^{-1}$, par contre le terme $\tau_0 \boldsymbol{D}\, \varepsilon(\partial_t u)$ exige la multiplication de cette équation par $(\tau_0 \boldsymbol{D})^{-1}$, donc l'obtention d'une formulation variationnelle à partir de cette loi est vouée à l'échec.

Pour appliquer cette méthode, comme dans le cas continu, dans la démonstration des résultats d'existence et d'unicité de la solution et de la décroissance d'énergie, l'introduction de la différence entre la contrainte viscoélastique et la contrainte dans le cas purement élastique :

$$s = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u)$$

joue un rôle important. Nous introduisons à nouveau cette variable auxiliaire, ce qui nous permet de découpler l'équation (3.2.1b) en deux équations possédant chacune un terme faisant apparaître l'opérateur ε :

$$\begin{cases} s + \tau_0\, \partial_t s = \tau_0 (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C})\, \varepsilon(\partial_t u), \\ s = \sigma - \boldsymbol{C}\varepsilon(u). \end{cases}$$

Ceci équivaut à réécrire la loi contrainte-déformation (3.2.1b) sous la forme de la loi de comportement déformation-contrainte suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\, \partial_t s = \varepsilon(\partial_t u), \\ \mathcal{A}\, \sigma - \mathcal{A}\, s = \varepsilon(u), \end{cases} \tag{3.2.4}$$

avec

$$\mathcal{M} = \boldsymbol{Z}^{-1},\ \mathcal{M}_\tau = \boldsymbol{Z}_\tau^{-1} = \tau_0^{-1}\, \mathcal{M},\ \mathcal{A} = \boldsymbol{C}^{-1}.$$

Le système (3.2.1) devient alors :

$$\rho\, \partial_t^2 u - \mathbf{div}\, \sigma = f, \tag{3.2.5a}$$

$$\mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\, \partial_t s = \varepsilon(\partial_t u), \tag{3.2.5b}$$

$$\mathcal{A}\, \sigma - \mathcal{A}\, s = \varepsilon(u), \tag{3.2.5c}$$

Dans tout ce qui suit nous prendrons comme problème modèle le problème (3.2.5) avec les conditions initiales (3.2.2), la condition :

$$s(t=0) = s_0 = \sigma_0 - \boldsymbol{C}\varepsilon(u_0) \tag{3.2.6}$$

et la condition aux limites (3.2.3).

Remarque 3.2.1 *On remarque que*
- *L'introduction de la variable s ne joue qu'un rôle intermédiaire pour obtenir la formulation mixte et la discrétisation en espace. Nous verrons qu'on peut réduire par la suite le nombre des inconnues à deux en éliminant σ ou s et en exprimant l'une en fonction de l'autre.*
- *La reformulation du problème généralisé (2.1.19) se fait de la même manière :*

$$\begin{cases} \rho\,\partial_t^2 u - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} \mathbf{div}\,\sigma_l = f, \\ \mathcal{M}_{l,\tau}\, s_l + \mathcal{M}_l\,\partial_t s_l = \varepsilon(\partial_t u), & \forall\, l = 1, \cdots, L, \\ \mathcal{A}_l\,\sigma_l - \mathcal{A}_l\, s_l = \varepsilon(u), & \forall\, l = 1, \cdots, L, \end{cases} \tag{3.2.7}$$

avec

$$\mathcal{M}_l = (\boldsymbol{D}_l - \boldsymbol{C}_l)^{-1},\ \mathcal{M}_{l,\tau} = \tau_{0,l}^{-1}\,\mathcal{M}_l,\ \mathcal{A}_l = \boldsymbol{C}_l^{-1},\ \ \forall\, l = 1, \cdots, L.$$

3.2.3 Formulation variationnelle déplacement-contrainte

On considère les espaces fonctionnels suivants :

$$\underline{M} = [L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)]^d,\ \underline{\underline{H}} = L^2(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)), \tag{3.2.8}$$

on définit l'espace des tenseurs :

$$\underline{\underline{X}} = \{\sigma \in \underline{\underline{H}} / \mathbf{div}\,\sigma \in \underline{M}\} \tag{3.2.9}$$

et aussi l'espace des tenseurs symétriques :

$$\underline{\underline{X}}^{sym} = \{\sigma \in \underline{\underline{X}} \,/\, \sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)\}. \tag{3.2.10}$$

On obtient la formulation mixte, en appliquant à l'équation (3.2.5a) le produit par $\tilde{u} \in \underline{M}$, à (3.2.5b) par $\tilde{s} \in \underline{\underline{X}}^{sym}$, à (3.2.5c) par $\tilde{\sigma} \in \underline{\underline{X}}^{sym}$ et en intégrant sur Ω. Après une intégration par parties des membres de droite des deux dernières équations, les termes où intervient le tenseur $\varepsilon(u)$, on obtient la formulation mixte suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u(t), s(t), \sigma(t)) : [0,T] \longmapsto \underline{M} \times \underline{\underline{X}}^{sym} \times \underline{\underline{X}}^{sym} \text{ tels que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\rho}(u(t), \tilde{u}) - \boldsymbol{b}(\tilde{u}, \sigma(t)) = (f, \tilde{u}), & \forall\, v \in \underline{M}, \\ \boldsymbol{m_\tau}(s(t), \tilde{s}) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{m}(s(t), \tilde{p}) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{b}(u(t), \tilde{s}) = 0, & \forall\, \tilde{s} \in \underline{\underline{X}}^{sym}, \\ \boldsymbol{a}(\sigma(t), \tilde{\sigma}) - \boldsymbol{a}(s(t), \tilde{\sigma}) + \boldsymbol{b}(u(t), \tilde{\sigma}) = 0, & \forall\, \tilde{\sigma} \in \underline{\underline{X}}^{sym}, \end{cases} \tag{3.2.11}$$

avec

$$
(3.2.12) \qquad \begin{cases}
\boldsymbol{\rho}(u,\tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega \rho\, u \cdot \tilde{u}\, dx, & \forall\, (u,\tilde{u}) \in \underline{M} \times \underline{M}, \\
\boldsymbol{m}(s,\tilde{s}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}\, s : \tilde{s}\, dx, & \forall\, (s,\tilde{s}) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\
\boldsymbol{m_\tau}(s,\tilde{s}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}_\tau\, s : \tilde{s}\, dx, & \forall\, (s,\tilde{s}) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\
\boldsymbol{a}(\sigma,\tilde{\sigma}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{A}\, \sigma : \tilde{\sigma}\, dx, & \forall\, (\sigma,\tilde{\sigma}) \in \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{H}}, \\
(f,\tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega f \cdot \tilde{u}\, dx, & \forall\, (f,\tilde{u}) \in \underline{M} \times \underline{M},
\end{cases}
$$

et

$$
(3.2.13) \qquad \boldsymbol{b}(u,\sigma) = \int_\Omega \mathbf{div}\, \sigma \cdot u\, dx, \qquad \forall\, (u,\sigma) \in \underline{M} \times \underline{\underline{H}}.
$$

3.2.4 Semi-discrétisation en espace

Nous supposons ici que le domaine Ω est une union de rectangles et nous considérons un maillage régulier $(\mathcal{T}_h)$ de Ω composé des carrés K de coté $h > 0$ (voir Fig 3.2.2). On introduit les espaces d'approximation de dimension finie :

$$
(3.2.14) \qquad \underline{M_h} \subset \underline{M},\ \underline{\underline{X_h}} \subset \underline{\underline{X}},\ \underline{\underline{X_h}}^{sym} = \underline{\underline{X_h}} \cap \underline{\underline{X}}^{sym}.
$$

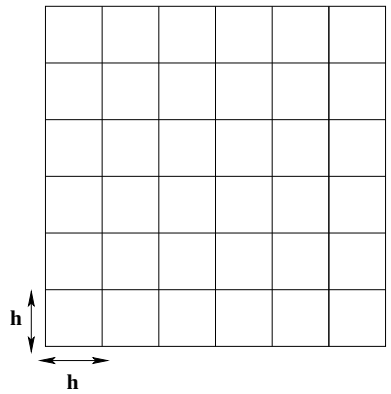


Fig. 3.2.2 – Maillage uniforme

Le problème approché de la formulation (3.2.11) consiste à chercher $(u_h(t), s_h(t), \sigma_h(t)) \in$

$\underline{M_h} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym}$ qui vérifient :

$$
(3.2.15) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h, \sigma_h) : [0,T] \longmapsto \underline{M_h} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{\underline{X_h}}^{sym} \text{ tels que :} \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{\rho}(u_h, \tilde{u}_h) - \boldsymbol{b}(\tilde{u}_h, \sigma_h) = (f, \tilde{u}_h), & \forall\, \tilde{u}_h \in \underline{M_h}, \\ \boldsymbol{m_\tau}(s_h, \tilde{s}_h) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{m}(s_h, \tilde{s}_h) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{b}(u_h, \tilde{s}_h) = 0, & \forall\, \tilde{s}_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}, \\ \boldsymbol{a}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) - \boldsymbol{a}(s_h, \tilde{\sigma}_h) + \boldsymbol{b}(u_h, \tilde{\sigma}_h) = 0, & \forall\, \tilde{\sigma}_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}. \end{cases}
$$

Puisqu'aucune continuité n'est exigée dans l'espace $\underline{M}$ $([L^2(\mathbb{R}^d)]^d)$, il sera approché avec des fonctions discontinues. Par conséquent la matrice de masse associée à $\boldsymbol{\rho}$ est diagonale par construction. Afin d'avoir la condensation de masse pour les matrices associées aux formes bilinéaires $\boldsymbol{m_\tau}$, $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{a}$, nous utilisons l'espace d'approximation $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ décrit dans [16], avec ce choix, les espaces d'approximation abstraits seront définis par :

$$
(3.2.16) \qquad \left| \begin{array}{l} \underline{M_h} = \{u_h \in \underline{M} \,/\, \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ (u_h)_i|K \in Q_0\}, \\ \underline{\underline{X_h}} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X}} \,/\, \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ (\sigma_h)_{ij}|K \in Q_1\}, \\ \underline{\underline{X_h}}^{sym} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X_h}} \,/\, \sigma_h \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)\}, \end{array} \right.
$$

où Q_0 et Q_1 sont les espaces des polynômes définis pour $k = 0$ ou 1 par :

$$
Q_k = \{p \,/\, p(x,y) = \sum_{i,j \leq k} a_{ij} x^i y^j,\ a_{ij} \in \mathbb{R}\}.
$$

Avec ce choix, le déplacement u_h est constant par élément (les degrés de libertés sont associés au centre des mailles) et le tenseur des contraintes σ_h (resp. s_h) est une fonction bilinéaire symétrique dans $H(div)$ (les degrés de libertés sont associés aux noeuds des éléments), ce qui impose la continuité de σ_{ii} dans la direction x_i et la continuité de $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $(i \neq j)$ dans les deux directions x_i et x_j. En conclusion, nous avons cinq degrés de liberté par sommet pour σ_h (resp. s_h) et un degré de liberté par élément pour u_h (voir la figure 3.2.3 pour $d = 2$).

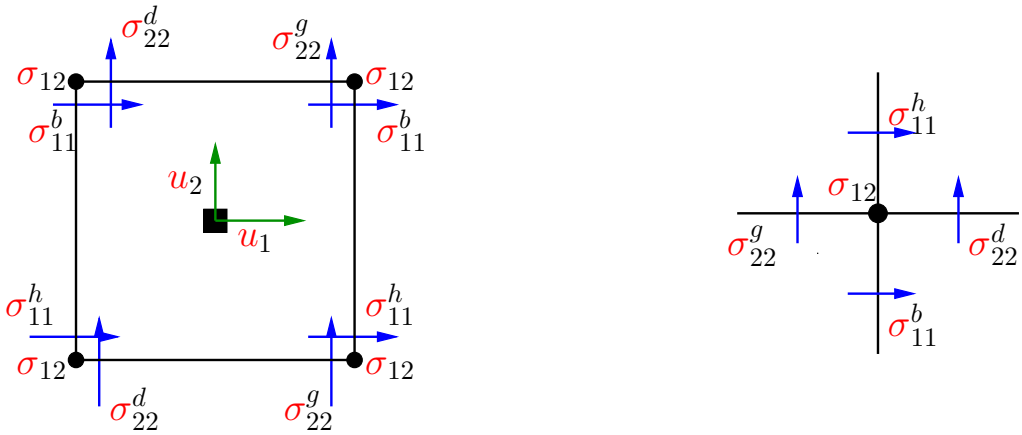


FIG. 3.2.3 – Les degrés de liberté pour $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$ et $\underline{M_h}$

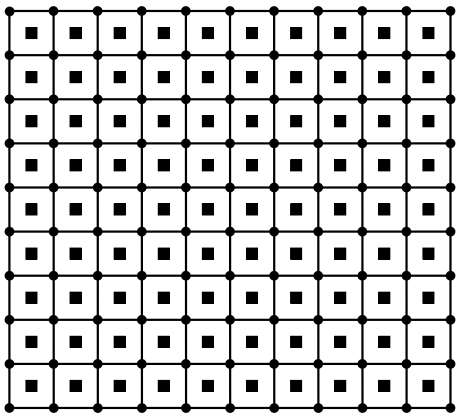


FIG. 3.2.4 – Exemple de maillage pour l'éléement fini $Q_1 - Q_0$

Les matrices de masse sont alors calculées à l'aide de la formule de Gauss-Lobatto :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) &\approx \boldsymbol{m}_h(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathcal{M}\, \sigma_h : \tilde{\sigma}_h, \\
\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) &\approx \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathcal{M}_\tau\, \sigma_h : \tilde{\sigma}_h, \\
\boldsymbol{a}(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) &\approx \boldsymbol{a}_h(\sigma_h, \tilde{\sigma}_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \mathcal{A}\, \sigma_h : \tilde{\sigma}_h,
\end{aligned}$$

avec $\displaystyle\oint_K f = h^2/4 \sum_{x \in K_s} f(x), \ \ \forall\, f \in C^0(K)$ et $K_s = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, x$ sommet de $K\}$.

On introduit $B_{N_1} = \{\omega_i \,/\, i = 1, \cdots N_1\}$ (resp. $B_{N_2} = \{\phi_i \,/\, i = 1, \cdots N_2\}$) les fonctions de base de $\underline{M_h}$ (resp. $\underline{\underline{X_h}}^{sym}$) avec $N_1 = \dim \underline{M_h}$ (resp. $N_2 = \dim \underline{\underline{X_h}}^{sym}$). On considère $U_h = (U_1, \cdots, U_{N_1})$, $P_h = (S_1, \cdots, S_{N_2})$ et $\Sigma_h = (\Sigma_1, \cdots, \Sigma_{N_2})$ les coordonnées des fonctions u_h, s_h et σ_h sur ces bases, le problème (3.2.15) se réécrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\text{(3.2.17)} \qquad \begin{cases}
M_u \dfrac{d^2 U_h}{dt^2} - B\Sigma_h = F, \\
M_\tau\, S_h + M_s\, \dfrac{dS_h}{dt} + B^\star \dfrac{dU_h}{dt} = 0, \\
A\Sigma_h - AS_h + B^\star U_h = 0.
\end{cases}$$

avec

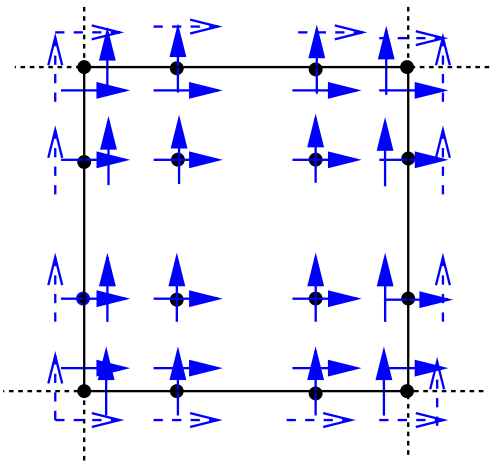
$$
(3.2.18)\qquad \left|\begin{array}{ll}
(M_u)_{i,j} = \boldsymbol{\rho}_h(\omega_i,\omega_j), & 1 \le i,j \le N_1,\\
(M_\tau)_{i,j} = \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}(\phi_i,\phi_j), & 1 \le i,j \le N_2,\\
(M_s)_{i,j} = \boldsymbol{m}_h(\phi_i,\phi_j), & 1 \le i,j \le N_2,\\
(A)_{i,j} = \boldsymbol{a}_h(\phi_i,\phi_j), & 1 \le i,j \le N_2,\\
(B)_{i,j} = \boldsymbol{b}_h(\omega_i,\phi_j), & 1 \le i \le N_1,\ 1 \le j \le N_2,\\
(F)_i = (f,\omega_i), & 1 \le i \le N_1.
\end{array}\right.
$$

La matrice M_u est diagonale et les matrices de masse M_τ, M_s et A sont diagonales par blocs ; la dimension de chaque bloc est le nombre des degrés de liberté associés à chaque sommet.

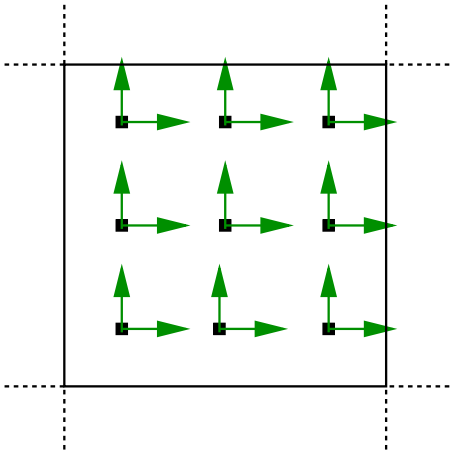
Nous avons présenté l'élément fini d'ordre 1 (de plus bas degré) $Q_1^{div} - Q_0$, la généralisation de cet élément aux ordres supérieurs est la familles des éléments finis mixtes $Q_{k+1}^{div} - Q_k$ est présentée dans [83]. Pour cet élément les espaces d'approximations sont donnés par :

$$
(3.2.19)\qquad \left|\begin{array}{l}
\underline{M_h} = \{u_h \in \underline{M} \,/\, \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ (u_h)_i|K \in Q_k\},\\
\underline{\underline{X_h}} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X}} \,/\, \forall\, K \in \mathcal{T}_h,\ (\sigma_h)_{ij}|K \in Q_{k+1}\},\\
\underline{\underline{X_h}}^{sym} = \{\sigma_h \in \underline{\underline{X_h}} \,/\, \sigma_h \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)\}.
\end{array}\right.
$$

et la position des degrés de liberté correponde aux points de Gauss-Lobatto pour la contrainte σ (respectivemnt la variable auxiliaire s) et de Gauss-Legendre pour le déplacement u (voir Fig 3.2.5 pour $k = 2$)



(a) Les degrés de liberté pour $\underline{\underline{X}}_h^{sym}$



(b) Les degré de liberté pour $\underline{M}_h$

Fig. 3.2.5 – Degrés de liberté pour l'élément $Q_3 - Q_2$

3.2.5 Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps nous utilisons un schéma aux différences finies centré, explicite et d'ordre deux : en approchant la première équation à l'instant $t^n = n\Delta t$ en utilisant le schéma saute mouton, la deuxième équation à $t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$ avec un schéma centré d'ordre 2 et la dernière à t^{n+1}, ce qui nous donne le schéma suivant :

$$\text{(3.2.20)} \qquad \begin{cases} M_u \dfrac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - B\Sigma_h^n = F^n, \\ M_\tau \dfrac{S_h^{n+1} + S_h^n}{2} + M_s \dfrac{S_h^{n+1} - S_h^n}{\Delta t} + B^\star \dfrac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} = 0, \\ A\,\Sigma_h^{n+1} - A\,S_h^{n+1} + B^\star U_h^{n+1} = 0. \end{cases}$$

On remarque qu'on peut réduire le nombre des inconnues à deux, en exprimant Σ_h ou S_h grâce à la dernière équation du système (3.2.20), ce qui nous donne, en éliminant Σ_h^n de la première équation du système (3.2.20) le schéma numérique :

$$\text{(3.2.21)} \qquad \begin{cases} M_u \dfrac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - BS_h^n + BA^{-1}B^\star U_h^n = 0, \\ M_\tau \dfrac{S_h^{n+1} + S_h^n}{2} + M_s \dfrac{S_h^{n+1} - S_h^n}{\Delta t} + B^\star \dfrac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} = 0. \end{cases}$$

On peut étendre ce schéma au problème généralisé (3.2.7) et on obtient facilement le schéma suivant :

$$\text{(3.2.22)} \qquad \begin{cases} M_u \dfrac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} - \displaystyle\sum_{l=1}^{L} BS_{l,h}^n + \sum_{l=1}^{L} BA_l^{-1}B^\star U_h^n = F^n, \\ M_{l,\tau} \dfrac{S_{l,h}^{n+1} + S_{l,h}^n}{2} + M_{l,s} \dfrac{S_{l,h}^{n+1} - S_{l,h}^n}{\Delta t} + B^\star \dfrac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} = 0, \qquad \forall\, l = 1, \cdots, L. \end{cases}$$

avec

$$\text{(3.2.23)} \qquad \left\| \begin{array}{ll} (M_{l,\tau})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}_{l,\tau}\, \phi_i : \phi_j, & 1 \le i,j \le N_2, \quad \forall\, l = 1, \cdots, L, \\ (M_{l,s})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{M}_l\, \phi_i : \phi_j, & 1 \le i,j \le N_2, \quad \forall\, l = 1, \cdots, L, \\ (A_l)_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{A}_l\, \phi_i : \phi_j, & 1 \le i,j \le N_2, \quad \forall\, l = 1, \cdots, L, \\ M_u \text{ et } B \text{ sont données par (3.2.18).} & \end{array} \right.$$

3.2.6 Energie discrète et analyse de stabilité

En utilisant une technique d'énergie nous avons établi la décroissance d'une quantité d'énergie discrète et une condition suffisante de stabilité. Si on considère le problème modèle avec un second membre $f = 0$, la quantité d'énergie continue E est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}[\|\partial_t u\|_\rho^2 + \|\varepsilon(u)\|_{\boldsymbol{C}}^2 + \|s\|_{\boldsymbol{Z}^{-1}}^2]$$

et le résultat de la décroissance de cette quantité :

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\|s\|^2_{\boldsymbol{Z}_\tau^{-1}}.$$

avec

$$\begin{cases} \|u\|^2_\omega = \displaystyle\int_\Omega \omega(x)|u(x)|^2\,dx \;\; \forall\,(v,\omega) \in L^2(\Omega)\times L^\infty(\Omega),\ \omega \geq 0, \\ \|\sigma\|^2_{\boldsymbol{G}} = \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{G}(x)\,\sigma(x) : \sigma(x)\,dx \;\; \forall\,(\sigma,\boldsymbol{G}) \in L^2(\Omega,\mathcal{L}^{sym}(\Omega)) \times L^\infty(\Omega,\mathcal{L}^{sym}\big(\mathcal{L}^{sym}(\Omega),\mathcal{L}^{sym}(\Omega)\big)), \\ \boldsymbol{G} \text{ défini positif.} \end{cases}$$

On définit l'énergie discrète associée au schéma numérique (3.2.20) par :

Définition 3.2.1

$$\text{(3.2.24)} \quad \begin{cases} \boldsymbol{E}^{n+1/2} \;=\; \dfrac{1}{2}\left\|\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1},\sigma_h^n-s_h^n) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{4}\left[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h} + \|s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\right] + \dfrac{\Delta t^2}{4}\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t},\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right), \end{cases}$$

avec

$$\|u_h\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} = \boldsymbol{\rho}_h(u_h,u_h) \quad \forall\, u_h \in \underline{M_h},$$

$$\|s_h\|^2_{\boldsymbol{m}_h} = \boldsymbol{m}_h(s_h,s_h) \quad \forall\, s_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym}.$$

Remarque 3.2.2

1. *On remarque que l'énergie discrète se décompose en trois parties :*
   - *La première,* $1/2\left\|\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} + 1/2\,\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1},\sigma_h^n-s_h^n)$ *qu'on trouve dans le cas purement élastique* ($s=0$) *et qui approche la première partie de l'énergie continue* $1/2\left[\|\partial_t u\|^2_\rho + \|\varepsilon(u)\|^2_{\boldsymbol{C}}\right]$.
   - *La deuxième,* $1/2\left[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h} + \|s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\right]$ *où intervient la variable* s_h *due à la viscoélasticité et approche le terme* $1/2\,\|s\|^2_{\boldsymbol{Z}^{-1}}$ *dans l'énergie continue.*
   - *La dernière,* $\Delta t^2/4\;\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t},\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right)$ *est un terme assez petit en* $O(\Delta t^2)$, *due au schéma aux différences finies.*
2. *Dans le cas purement élastique le coefficient d'absorbtion* τ_0 *égale à 0* ($s=0$), *la quantité d'énergie discrète s'écrit alors sous la forme :*

$$\text{(3.2.25)} \qquad \boldsymbol{E}_e^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1},\sigma_h^n)$$

Comme dans le cas continu, on montre que l'énergie discrète associée au schéma numérique est décroissante. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *La quantité d'énergie discrète vérifie :*

$$\frac{\boldsymbol{E}^{n+1/2}-\boldsymbol{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=-\frac{1}{8}\Big[\|s_h^{n+1}+s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}+\|s_h^n+s_h^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}\Big], \tag{3.2.26}$$

avec $\|s_h\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}=\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}(s_h,s_h)\quad\forall\, s_h\in \underline{\underline{X_h}}^{sym}$.

Démonstration

On considère la formulation variationnelle associée au schéma (3.2.20) :

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{\rho}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-2u_h^n+u_h^{n-1}}{\Delta t^2},\tilde{u}_h\right)-\boldsymbol{b}_h\left(\tilde{u}_h,\sigma_h^n\right)=0,\\[2ex] \boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}\left(\dfrac{s_h^{n+1}+s_h^n}{2},\tilde{s}_h\right)+\boldsymbol{m}_h\left(\dfrac{s_h^{n+1}-s_h^n}{\Delta t},\tilde{s}_h\right)+\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},\tilde{s}_h\right)=0,\\[2ex] \boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1},\tilde{\sigma}_h)-\boldsymbol{a}_h(s_h^{n+1},\tilde{\sigma}_h)+\boldsymbol{b}_h(u_h^{n+1},\tilde{\sigma}_h)=0,\\[2ex] \forall\,(\tilde{u}_h,\tilde{s}_h,\tilde{\sigma}_h)\in \underline{M_h}\times\underline{\underline{X_h}}^{sym}\times\underline{\underline{X_h}}^{sym}.\end{array}\right. \tag{3.2.27}$$

Prenons $\tilde{u}_h=\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}$ (l'approximation centrée de $\partial_t u_h$ à l'instant t^n) et $\tilde{s}_h=s_h^{n+1}+s_h^n$, nous obtenons alors :

$$\frac{1}{2\Delta t}\left[\left\|\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}-\left\|\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}\right]-\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},\sigma_h^n\right)=0, \tag{3.2.28a}$$

$$\frac{1}{2}\|s_h^{n+1}+s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}+\frac{1}{\Delta t}\left[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h}-\|s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\right]+\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t},s_h^{n+1}+s_h^n\right)=0. \tag{3.2.28b}$$

En utilisant la dernière équation du système (3.2.27), nous avons :

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},\sigma_h^n\right)=\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},\sigma_h^n-s_h^n\right)+\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n\right)\\[2ex] \qquad\qquad=-\dfrac{1}{2\Delta t}\left[\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1},\sigma_h^n-s_h^n)-\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^n-s_h^n,\sigma_h^{n-1}-s_h^{n-1})\right]\\[2ex] \qquad\qquad+\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n\right),\end{array}\right. \tag{3.2.29}$$

ce qui nous permet de réécrire (3.2.28a) sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{2\Delta t}\left[\left\|\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}-\left\|\dfrac{u_h^n-u_h^{n-1}}{\Delta t}\right\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h}\right]-\boldsymbol{b}_h\left(\dfrac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t},s_h^n\right)\\[2ex] +\dfrac{1}{2\Delta t}\Big[\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^{n+1}-s_h^{n+1},\sigma_h^n-s_h^n)-\boldsymbol{a}_h(\sigma_h^n-s_h^n,\sigma_h^{n-1}-s_h^{n-1})\Big]=0.\end{array}\right. \tag{3.2.30}$$

Si on fait la moyenne de l'équation (3.2.28b) entre les deux instant $t^{n+\frac{1}{2}}$ et $t^{n-\frac{1}{2}}$, on obtient alors :

$$(3.2.31)\quad \begin{cases} \frac{1}{4}\|s_h^{n+1}+s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}} + \frac{1}{4}\|s_h^n+s_h^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}} + \frac{1}{2\Delta t}\Big[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h} - \|s_h^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\Big] \\ +\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t}, s_h^{n+1}+s_h^n\right) + \boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t}, s_h^n+s_h^{n-1}\right) = 0. \end{cases}$$

On décompose les deux derniers termes de cette égalité sous la forme :

$$(3.2.32)\quad \begin{cases} \boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t}, s_h^{n+1}+s_h^n\right) = \boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t}, s_h^{n+1}-s_h^n\right) + 2\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{2\Delta t}, s_h^n\right), \\ \boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t}, s_h^n+s_h^{n-1}\right) = -\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t}, s_h^n-s_h^{n-1}\right) + 2\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^n-u_h^{n-1}}{2\Delta t}, s_h^n\right). \end{cases}$$

Remplaçons (3.2.32) dans (3.2.31), nous obtenons alors :

$$(3.2.33)\quad -\boldsymbol{b}_h\left(\frac{u_h^{n+1}-u_h^{n-1}}{2\Delta t}, s_h^n\right) = \frac{1}{2\Delta t}(T_1^{n+1/2}-T_1^{n-1/2}) + \frac{1}{4\Delta t}(T_2^{n+1/2}-T_2^{n-1/2}) + T^n,$$

avec

$$T_1^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Big[\|s_h^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h} + \|s_h^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h}\Big],\ \ T_2^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{b}_h(u_h^{n+1}-u_h^n, s_h^{n+1}-s_h^n)$$

et

$$T^n = \frac{1}{2}\left[\left\|\frac{s_h^{n+1}+s_h^n}{2}\right\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}} + \left\|\frac{s_h^n+s_h^{n-1}}{2}\right\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}}\right] \geq 0.$$

Après la substitution de la quantité (3.2.33) dans (3.2.30), nous retrouvons (3.2.26) :

$$\frac{\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{E}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -T^n \leq 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Afin d'établir une condition suffisante de stabilité, grâce au théorème 3.2.26, il suffit de prouver que l'énergie $\boldsymbol{E}^{n+1/2}$ est une forme quadratique positive ; le reste de la preuve est classique voir par exemple [64].

Pour établir cette condition, nous devrons revenir à la formulation matricielle (3.2.21) de notre schéma et introduire une nouvelle matrice :

$$\mathbb{K} = (A^{-1} + M_s^{-1})^{-1}.$$

Nous utilisons également les notations suivantes pour les normes des vecteurs dans $\mathbb{R}^N$:
– $\|.\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$ et $(.,.)$ le produit scalaire associé.

– Si P désigne une matrice symétrique définie positive, on définit la norme :

$$\|U\|_P = \sup_{U\neq 0} \frac{(PU,U)^{\frac{1}{2}}}{\|U\|} \quad \forall U \in \mathbb{R}^N.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de stabilité :

Théorème 3.2.2 *Une condition suffisante de stabilité du schéma numérique (3.2.20) dans L^2 est donnée par :*

$$\frac{\Delta t}{2}\|B\| \leq 1, \tag{3.2.34}$$

avec, par définition :

$$\|B\| = \sup_{U_h\neq 0, \Sigma_h \neq 0} \frac{(B\Sigma_h, U_h)}{\|U_h\|_{M_u}\|\Sigma_h\|_{\mathbb{K}}}. \tag{3.2.35}$$

Démonstration

L'idée de la démonstration est de chercher une condition sous laquelle l'énergie $\boldsymbol{E}^{n+\frac{1}{2}}$ reste toujours positive. On réécrit l'énergie sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{n+1/2} &= \frac{1}{2}\Big\|\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\Big\|_{M_u}^2 + \frac{1}{2}\big(A^{-1}B^\star U_h^{n+1}, B^\star U_h^n\big) + \frac{1}{4}(\|S_h^{n+1}\|_{M_s}^2 + \|S_h^n\|_{M_s}^2)\\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{4}\left(B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\right).\end{aligned}$$

Comme les quantités suivantes vérifient :

$$\left\{\begin{aligned}\|S_h^{n+1}\|_{M_s}^2 + \|S_h^n\|_{M_s}^2 &= \frac{1}{2}(\|S_h^{n+1}+S_h^n\|_{M_s}^2 + \|S_h^{n+1}-S_h^n\|_{M_s}^2),\\ \big(A^{-1}B^\star U_h^{n+1}, B^\star U_h^n\big) &= \frac{1}{4}\|B^\star(U_h^{n+1}+U_h^n)\|_{A^{-1}}^2 - \frac{1}{4}\|B^\star(U_h^{n+1}-U_h^n)\|_{A^{-1}}^2,\end{aligned}\right.$$

on peut réécrire alors $\boldsymbol{E}^{n+1/2}$ sous la forme d'une somme de deux quantités :

$$\boldsymbol{E}^{n+1/2} = \boldsymbol{E}_1^{n+1/2} + \boldsymbol{E}_2^{n+1/2},$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1^{n+1/2} &= \frac{1}{2}\left\|B^\star\frac{U_h^{n+1}+U_h^n}{2}\right\|_{A^{-1}}^2 + \frac{1}{2}\left\|\frac{S_h^{n+1}+S_h^n}{2}\right\|_{M_s}^2 \geq 0,\\ \boldsymbol{E}_2^{n+1/2} &= \frac{1}{2}\left\|\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\right\|_{M_u}^2 - \frac{\Delta t^2}{8}\left\|B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\right\|_{A^{-1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{8}\left\|\frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\right\|_{M_s}^2\\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{4}\left(B^\star\frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\right).\end{aligned}\right.$$

La quantité $\boldsymbol{E}_1^{n+1/2}$ est positive, il suffit de montrer sous quelle condition la quantité $\boldsymbol{E}_2^{n+1/2}$ reste positive. Cette dernière vérifie :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_2^{n+1/2} \geq \frac{1}{2}\left(\left[M_u - \frac{\Delta t^2}{4} B A^{-1} B^\star\right] \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\right) + \frac{\Delta t^2}{8}\left\|\frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\right\|_{M_s}^2 \\
-\frac{\Delta t^2}{8}\left(B M_s^{-1} B^\star \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\right) - \frac{\Delta t^2}{8}\left\|\frac{S_h^{n+1}-S_h^n}{\Delta t}\right\|_{M_s}^2 \\
= \frac{1}{2}\left(M_u \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\right) - \frac{\Delta t^2}{8}\left(B(A^{-1}+M_s^{-1})B^\star \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}, \frac{U_h^{n+1}-U_h^n}{\Delta t}\right).
\end{aligned}$$

Pour que $\boldsymbol{E}^{n+1/2} \geq 0$, il suffit qu'on ait l'inégalité :

$$\frac{\Delta t^2}{4}\left(B\left[A^{-1}+M_s^{-1}\right]B^\star U_h, U_h\right) \leq (M_u U_h, U_h) \quad \forall\, U_h \in \underline{\underline{X_h}}^{sym},$$

ce qui est équivalent à : $\Delta t^2 \|\mathbb{L}\|/4 \leq 1$, avec

$$\mathbb{L} = B(A^{-1}+M_s^{-1})B^\star \text{ et } \|\mathbb{L}\| = \sup_{U\neq 0} \frac{(\mathbb{L}U, U)}{(M_u U, U)}. \tag{3.2.36}$$

Ceci implique la condition de stabilité suffisante (3.2.34) grâce au lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Si $\|B\|$ et $\|\mathbb{L}\|$ sont respectivement définies par (3.2.35) et (3.2.36), nous avons l'identité $\|B\|^2 = \|\mathbb{L}\|$.*

Démonstration

On montre les deux inégalités $\|B\|^2 \leq \|\mathbb{L}\|$ et $\|B\|^2 \geq \|\mathbb{L}\|$:

1. $\|B\|^2 \leq \|\mathbb{L}\|$. Soit $(\Sigma, U) \in \underline{\underline{X_h}}^{sym} \times \underline{M_h}$:

$$\begin{aligned}
(B\Sigma, U) = (\Sigma, B^\star U) &\leq \|\Sigma\|_{\mathbb{K}} \|B^\star U\|_{\mathbb{K}^{-1}} \\
&= \|\Sigma\|_{\mathbb{K}} (B\mathbb{K}^{-1}B^\star U, U)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\Sigma\|_{\mathbb{K}} (\mathbb{L}U, U)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\mathbb{L}\|^{\frac{1}{2}} \|\Sigma\|_{\mathbb{K}} \|U\|_{M_u}.
\end{aligned}$$

2. $\|B\|^2 \geq \|\mathbb{L}\|$. Soit $U \in \underline{M_h}$, en utilisant le changement de variable $\Sigma = \mathbb{K}^{-1}B^\star U$, on a :

$$(\mathbb{L}U, U) = (B\mathbb{K}^{-1}B^\star U, U) = (B\Sigma, U) \leq \|B\|\, \|U\|_{M_u} \|\Sigma\|_{\mathbb{K}}. \tag{3.2.37}$$

Or, la norme $\|\Sigma\|_{\mathbb{K}}^2$ s'écrit :

$$\|\Sigma\|_{\mathbb{K}}^2 = (\mathbb{K}\Sigma, \Sigma) = (B^\star U, \Sigma) = (B\Sigma, U) \leq \|B\|\, \|U\|_{M_u} \|\Sigma\|_{\mathbb{K}}, \tag{3.2.38}$$

ce qui nous donne d'après (3.2.37) : $\|\mathbb{L}\| \leq \|B\|^2$. ■

Remarque 3.2.3 *Nous n'avons pas réussi à exprimer la norme $\|B\|$ (voir (3.2.35)) en fonction des formes bilinéaires $\boldsymbol{b}_h$, $\boldsymbol{\rho}_h$, $\boldsymbol{a}_h$ et $\boldsymbol{m}_h$. Cependant, quand on tend vers le cas purement élastique, c'est-à-dire quand la matrice $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}$ tend vers zéro, alors la matrice M_s tend vers 0 et $\mathbb{K}$ tend vers A. Par conséquent, à la limite $\boldsymbol{Z} \to 0$, nous obtenons :*

$$\|B\| = \sup_{U_h \neq 0, S_h \neq 0} \frac{(B\Sigma_h, U_h)}{\|U_h\|_{M_u} \|\Sigma_h\|_{\mathbb{K}}} = \sup \frac{\boldsymbol{b}_h(\sigma, u)}{\|u\|_{\boldsymbol{\rho}_h} \|\sigma\|_{\boldsymbol{a}_h}}. \tag{3.2.39}$$

et on retrouve la condition de stabilité de l'équation de l'élastodynamique [83].

Cas particulier d'un milieu homogène isotrope. Dans ce cas, les deux tenseurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ s'écrivent sous la forme :

$$(\boldsymbol{C}\sigma)_{ij} = \lambda \sigma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \sigma_{ij}, \ (\boldsymbol{D}\sigma)_{ij} = \lambda \gamma_\lambda \sigma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_\mu \sigma_{ij} \ \ \forall\, i, j = 1, n,$$

on trouve $\|B\| = \max\left(v_p \dfrac{2\sqrt{\tau_p}}{h\sqrt{\tau_0}}, v_s \dfrac{2\sqrt{\tau_s}}{h\sqrt{\tau_0}}\right)$, d'où la condition suffisante de stabilité du schéma :

$$\Delta t \leq \frac{h}{c_\infty}, \ c_\infty = \max(c_{p,\infty}, c_{s,\infty}) = \max\left(v_p \sqrt{\tau_p/\tau_0}, v_s \sqrt{\tau_s/\tau_0}\right), \tag{3.2.40}$$

où $c_{p,\infty}$ (repectivement $c_{s,\infty}$) est la vitesse des ondes P (respectivement ondes S) à hautes fréquences [12, 10]. Cette condition est plus exigeante que celle qu'on trouve avec le même schéma dans le cas d'un milieu purement élastique, où la condition de stabilité est donnée par [83] :

$$\Delta t \leq \frac{h}{v_p}.$$

La condition (3.2.40) est aussi nécessaire, car on peut se ramener à l'étude de la stabilité par la méthode de Fourier présentée dans le cas unidimensionnel §3.1.3.1 en faisant une étude dans une seule direction.

Pour le problème généralisé (3.2.7), on obtient aisément des résultats de décroissance d'énergie discrète et de stabilité. Dans ce cas la quantité d'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_g^{n+1/2} \ = \ & \frac{1}{2} \|\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} + \sum_{i=1}^{k} \Big[\frac{1}{4}(\|s_{i,h}^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{m}_h^i} + \|s_{i,h}^n\|^2_{\boldsymbol{m}_h^i}) \\ & + \frac{\Delta t^2}{4} \boldsymbol{b}_h(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \frac{u_{i,h}^{n+1} - u_{i,h}^n}{\Delta t}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{a}_h^i(\sigma_{i,h}^{n+1} - s_{i,h}^{n+1}, \sigma_{i,h}^n - s_{i,h}^n)\Big], \end{aligned}$$

et le résultat de dissipation par :

$$\frac{\boldsymbol{E}_g^{n+1/2} - \boldsymbol{E}_g^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{k} \Big[\|s_{i,h}^{n+1} + s_{i,h}^n\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}^i} + \|s_{i,h}^n + s_{i,h}^{n-1}\|^2_{\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{\tau}h}^i}\Big].$$

Par conséquent la condition suffisante de stabilité est donnée par :

$$\frac{\Delta t^2}{4} \left\| \sum_{l=1}^{L} \mathbb{L}_{l,h} \right\| \leq 1. \tag{3.2.41}$$

avec

$$\mathbb{L}_{l,h} = B(A_l^{-1} + M_{l,s}^{-1})B^\star \ \ \forall\, l = 1, \cdots, L.$$

En pratique, au lieu de travailler avec la condition générale (3.2.41) nous utilisons :

$$\frac{\Delta t^2}{4} \sum_{l=1}^{L} \left\| \mathbb{L}_{l,h} \right\| \leq 1, \tag{3.2.42}$$

ce qui nous donne dans le cas isotrope homogène la condition suffisante :

$$\Delta t \leq h(\sum_{l=1}^{L} c_l^2)^{-\frac{1}{2}}, \ \ c_l = \max\left(v_{p,l}\sqrt{\tau_{p,l}/\tau_{0,l}}, v_{s,l}\sqrt{\tau_{s,l}/\tau_{0,l}} \right), \tag{3.2.43}$$

où $v_{p,l}$ (repectivement $v_{s,l}$) est la vitesse des ondes P (respectivement des ondes S) et $\tau_{0,l}$ et $\tau_{p,l}$ (respectivement $\tau_{0,l}$ et $\tau_{s,l}$) sont les deux temps de relaxation associés à la $l^{\text{ème}}$ loi élémentaire dans le modèle généralisé (2.1.19).

Remarque 3.2.4 *D'après la condition de stabilité (3.2.43), l'utilisation d'un modèle généralisé exige un pas de temps plus petit que pour le modèle standard ; de plus le pas de temps est décroissant par rapport au nombre L de modèles élémentaires, c'est pour cette raison que en pratique on utilise un nombre inférieur à 5.*

3.3 Traitement des milieux ouverts

Nous traitons la propagation des ondes viscoélastique dans les milieux ouverts en appliquant un modèle des couche absorbantes parfaitement adaptées (perfectly matched layers ou PML). Le principe général de la méthode est d'accoler au milieu de propagation, un milieu absorbant qui ne génère aucune réflexion à l'interface, afin que la restriction de la solution au "domaine propagatif" coïncide avec la solution exacte et que l'onde transmise décroisse exponentiellement au cours de la propagation. Le modèle PML a été introduit la première fois par Bérenger [17] pour les équations de Maxwell dans les milieux non bornés et a été adapté pour d'autre problèmes, par exemple en élastodynamiques [43, 52] et en acoustique [47, 58, 60]. Nous l'avons adapté ici aux équations de la viscoélasticité.

3.3.1 Application des PML au problème de la viscoélasticité

Nous présentons le modèle PML, en adaptant la méthode utilisée pour les équations de l'élastodynamique [43] au problème de la visco-élastodynamique. Dans [43] les auteurs présentent les principes de base de la méthode pour un système hyperbolique du premier ordre, et ils les appliquent aux équations de l'élastodynamique avec une formulation mixte vitesse-contrainte. Ces principes consistent essentiellement en deux étapes. D'abord il faut décomposer les opérateurs différentiels en somme de deux opérateurs : le premier ne comporte que des dérivées parallèles à la couche et le deuxième ne comporte que des dérivées perpendiculaire à celle-ci. La deuxième étape consiste à ajouter un coefficient d'amortissement uniquement sur les composantes faisant intervenir des dérivées normales à l'interface, par exemple la dérivée associée à x_1 pour une couche verticale. Ici nous présentons la méthode pour une formulation en

déplacement-contrainte, du second ordre en temps, des équations de la visco-élastodynamique. Nous considérons donc notre problème sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial^2_{tt}u - \mathbf{div}\,\sigma = 0, \\ \mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\,\partial_t s - \varepsilon(\partial_t u) = 0, \\ \mathcal{A}\,\sigma - \mathcal{A}\, s - \varepsilon(u) = 0. \end{array}\right. \tag{3.3.1}$$

On décompose les opérateurs différentiels en deux parties suivants les dérivées par rapport à x_1 et par rapport à x_2 et le système (3.3.1) se réécrit alors sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial^2_{tt}u = D_2\partial_{x_2}\sigma + D_1\partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s + \mathcal{M}\,\partial_t s = E_2\partial^2_{x_2t}u + E_1\partial^2_{x_1t}u, \\ \mathcal{A}\,\sigma - \mathcal{A}\, s = E_2\partial_{x_2}u + E_1\partial_{x_1}u, \end{array}\right. \tag{3.3.2}$$

avec

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^t,\ D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = (D_2)^t \text{ et } E_1 = (D_1)^t.$$

Le système (3.3.2) est alors équivalent à :

$$u = u_2 + u_1,\ \sigma = \sigma_2 + \sigma_1,\ s = s_2 + s_1 \tag{3.3.3a}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial^2_{tt}u_2 = D_2\partial_{x_2}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_2 + \mathcal{M}\,\partial_t s_2 = E_2\partial^2_{x_2t}u, \\ \mathcal{A}\,\sigma_2 - \mathcal{A}\, s_2 = E_2\partial_{x_2}u. \end{array}\right. \tag{3.3.3b}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial^2_{tt}u_1 = D_1\partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\,\partial_t s_1 = E_1\partial^2_{x_1t}u, \\ \mathcal{A}\,\sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1\partial_{x_1}u. \end{array}\right. \tag{3.3.3c}$$

Nous supposons que le support des fonctions initiales est contenu dans le demi-espace à gauche, comme elles sont représentées sur la figure ci-dessus (pour une couche parallèle à Ox_2).

L'amortissement ne concerne que le système (3.3.3c) qui fait intervenir des dérivées normales à l'interface avec la couche. Afin d'introduire les termes d'absorption, nous rappelons l'interprétation des PMLs dans le domaine fréquentiel (voir [38, 42, 43, 75]) qui consiste à faire le changement de variable dans le plan complexe :

$$x_1 \longrightarrow x_1 + \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega}\int_0^x d_1(s)\,ds. \tag{3.3.4}$$

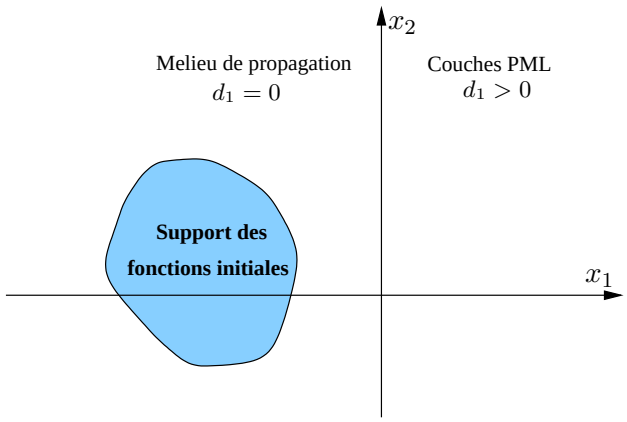


FIG. 3.3.1 – Support des données initiales

Ceci est équivalent à :

$$\partial_{x_1} \longrightarrow \eta_1\, \partial_{x_1}, \quad \eta_1 = \frac{\mathrm{i}\,\omega}{\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1)}, \tag{3.3.5}$$

où $d_1(x_1)$ est un coefficient d'amortissement égal à 0 dans le milieu de propagation et positif dans les couches (voir FIG 3.3.2).

Pour appliquer ce principe, nous écrirons le système (3.3.3c) en domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} -\rho\,\omega^2 u_1 = D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathrm{i}\,\omega \mathcal{M}\, s_1 = \mathrm{i}\,\omega E_1 \partial_{x_1} u, \\ \mathcal{A}\,\sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Appliquons le changement de variable (3.3.5) à (3.3.6) ; nous obtenons alors :

$$\begin{cases} -\rho\,\omega^2 (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, u_1 = \mathrm{i}\,\omega\, D_1 \partial_{x_1}\sigma, \\ (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathrm{i}\,\omega (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, \mathcal{M}\, s_1 = -\omega^2\, E_1 \partial_{x_1} u, \\ (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, \mathcal{A}\,\sigma_1 - (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, \mathcal{A}\, s_1 = \mathrm{i}\,\omega\, E_1 \partial_{x_1} u. \end{cases} \tag{3.3.7}$$

Pour revenir au domaine temporel, il est utile d'introduire quelques inconnues auxiliaires (U_1, S_1 et Σ_1) :

$$\begin{cases} \mathrm{i}\,\omega\, U_1 = (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, u_1, \\ \mathrm{i}\,\omega\, \Sigma_1 = (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, \sigma_1, \\ \mathrm{i}\,\omega\, S_1 = (\mathrm{i}\,\omega + d_1(x_1))\, s_1, \end{cases} \tag{3.3.8}$$

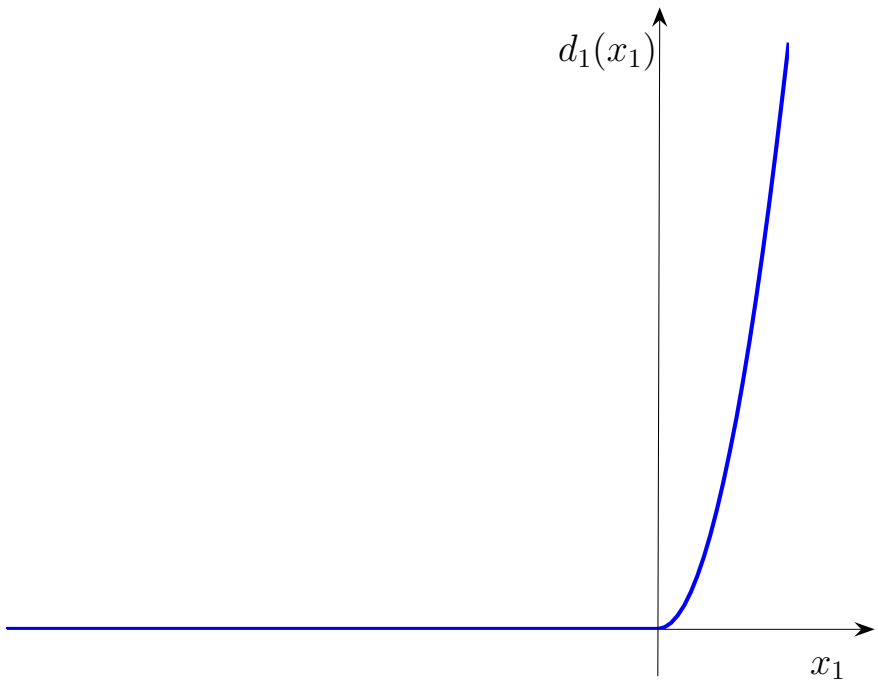


FIG. 3.3.2 – Couches PML dans la directions des x_1

et il est facile de prouver que nous obtenons finalement le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\partial^2_{tt}U_1 = D_1\partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, S_1 + \mathcal{M}\,\partial_t S_1 = E_1\partial^2_{x_1 t}u, \\ \mathcal{A}\,\Sigma_1 - \mathcal{A}\,S_1 = E_1\partial_{x_1}u, \\ \partial_t U_1 = \partial_t u_1 + d_1(x_1)\,u_1, \\ \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\,\sigma_1, \\ \partial_t S_1 = \partial_t s_1 + d_1(x_1)\,s_1. \end{array}\right. \tag{3.3.9}$$

On remplace $\partial^2_{tt}U_1$ par $\partial^2_{tt}u_1 + d(x_1)\partial_t u_1$. Comme s_1 n'intervient pas dans les trois premières équations, on peut l'éliminer et ne garder que l'inconnue S_1. Pour des raisons de cohérence de notation avec les équations sans PML, dans ce qui suit nous désignons par s_1 cette inconnue ; remarquons que dans le milieu sans PML, d_1 étant nul, les deux inconnues s_1 et S_1 coïncident. Le système (3.3.9) s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,(\partial^2_t u_1 + d_1(x_1)\,\partial_t u_1) = D_1\partial_{x_1}\sigma, \\ \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\,\partial_t s_1 = E_1\partial^2_{x_1 t}u, \\ \mathcal{A}\,\Sigma_1 - \mathcal{A}\,s_1 = E_1\partial_{x_1}u, \\ \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\,\sigma_1. \end{array}\right. \tag{3.3.10}$$

Finalement le modèle PML (dans la direction des x_1) associé au problème (3.3.1) est donné par le système :

$$
(3.3.11) \qquad \begin{cases}
u = u_2 + u_1 & ; \quad \sigma = \sigma_2 + \sigma_1, \\
\rho\, \partial^2_{tt} u_2 = D_2 \partial_{x_2} \sigma & ; \quad \rho\, (\partial^2_{tt} u_1 + d_1(x_1)\, \partial_t u_1) = D_1 \partial_{x_1} \sigma, \\
\mathcal{M}_\tau\, s_2 + \mathcal{M}\, \partial_t s_2 = E_2 \partial^2_{x_2 t} u & ; \quad \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\, \partial_t s_1 = E_1 \partial^2_{x_1 t} u, \\
\mathcal{A}\, \sigma_2 - \mathcal{A}\, s_2 = E_2 \partial_{x_2} u & ; \quad \mathcal{A}\, \Sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u, \\
 & \quad \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\, \sigma_1.
\end{cases}
$$

On traite de la même façon une couche PML dans la direction des x_2 et finalement le modèle PML général s'écrit :

$$
(3.3.12) \qquad \begin{cases}
u = u_2 + u_1 & ; \quad \sigma = \sigma_2 + \sigma_1, \\
\rho\, (\partial^2_t u_2 + d_2(x_2)\, \partial_t u_2) = D_2 \partial_{x_2} \sigma, & \rho\, (\partial^2_t u_1 + d_1(x_1)\, \partial_t u_1) = D_1 \partial_{x_1} \sigma, \\
\mathcal{M}_\tau\, s_2 + \mathcal{M}\, \partial_t s_2 = E_2 \partial^2_{x_2 t} u, & \mathcal{M}_\tau\, s_1 + \mathcal{M}\, \partial_t s_1 = E_1 \partial^2_{x_1 t} u, \\
\mathcal{A}\, \Sigma_2 - \mathcal{A}\, s_2 = E_2 \partial_{x_2} u, & \mathcal{A}\, \Sigma_1 - \mathcal{A}\, s_1 = E_1 \partial_{x_1} u, \\
\partial_t \Sigma_2 = \partial_t \sigma_2 + d_2(x_2)\, \sigma_2, & \partial_t \Sigma_1 = \partial_t \sigma_1 + d_1(x_1)\, \sigma_1.
\end{cases}
$$

3.3.2 Approximation des PML

Pour l'approximation on utilise la méthode des éléments finis mixtes avec condensation de masse présentée dans § 3.2.4 pour la discrétisation en espace et un schéma aux différences finies centré d'ordre deux pour la discrétisation en temps, ce qui nous donne le système suivant :

$$
(3.3.13) \qquad \begin{cases}
u_h = u_{h,1} + u_{h,2}, \quad \sigma_h = \sigma_{h,1} + \sigma_{h,2}, \quad s_h = s_{h,1} + s_{h,2}, \\
M_u \Big[\dfrac{u^{n+1}_{h,m} - 2u^n_{h,m} + u^{n-1}_{h,m}}{\Delta t} + D_{u,m} \dfrac{u^{n+1}_{h,m} - u^n_{h,m}}{\Delta t} \Big] - B_i\, \sigma^n_{h,m} = f^n, \\
M_\tau\, \dfrac{s^{n+1}_{h,m} + s^n_{h,m}}{2} + M_s\, \dfrac{s^{n+1}_{h,m} - s^n_{h,m}}{\Delta t} + B^\star_i \dfrac{u^{n+1}_{h,m} - u^n_{h,m}}{\Delta t} = 0, \\
A\, \Sigma^{n+1}_{h,m} - A\, s^{n+1}_{h,m} + B^\star_i u^{n+1}_{h,m} = 0, \\
\dfrac{\Sigma^{n+1}_{h,m} - \Sigma^n_{h,m}}{\Delta t} - \dfrac{\sigma^{n+1}_{h,m} - \sigma^n_{h,m}}{\Delta t} - D_{\sigma,m} \dfrac{\sigma^{n+1}_{h,m} + \sigma^n_{h,m}}{2} = 0, \\
\text{pour } m = 1,\, 2,
\end{cases}
$$

où M_u, M_s, M_τ et A sont données par (3.2.18) et

$$
(3.3.14) \qquad \left|
\begin{array}{ll}
(B_m)_{i,j} = b_m(\omega, \phi_j) = \displaystyle\int_\Omega D_m\, \partial_{x_m} \phi_j \omega_i\, dx, & 1 \le i \le N_1,\, 1 \le j \le N_2, \\
(D_{u,m})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega d_m(x_m)\, \omega_{\mathrm{i}}\, \omega_j\, dx, & 1 \le i \le N_1,\, 1 \le j \le N_1, \\
(D_{\sigma,m})_{i,j} = \displaystyle\int_\Omega d_m(x_m)\, \phi_i : \phi_j\, dx, & 1 \le i \le N_2,\, 1 \le j \le N_2 \\
\text{pour } m = 1,\, 2. &
\end{array}
\right.
$$

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce chapitre nous validons les résultats et les méthodes numériques développées dans les sections précédentes. Nous présentons des résultats en une et deux dimensions dans les cas des milieux isotropes ou anisotropes, hétérogènes et réalistes.

Sommaire

Introduction **113**
4.1 Résultats numériques unidimensionnels **113**
4.1.1 Solution analytique 113
4.1.2 Tests numériques dans le cas 1D 115
4.2 Résultats bi-dimensionnels **117**
4.2.1 Dissipation d'énergie discrète 119
4.2.2 Du viscoélastique à l'élastique 120
4.2.3 Milieu homogène isotrope 122
4.2.4 Efficacité des couches PML 123
4.2.4.1 Domaine borné sans couche PML 124
4.2.4.2 Domaine ouvert et domaine borné avec couches PML . . . 124
4.2.5 Milieu homogène anisotrope 126
4.2.6 Influence de la fréquence 127
4.2.7 Expériences réalistes 130

Introduction

Ce chapitre est consacré à la validation de la méthode numérique développée dans le chapitre précédent.

La section 4.1 est consacré à la validation du schéma numérique unidimensionnel, nous comparons la solution numérique avec une solution analytique en calculant l'ordre de la précision et nous montrons à l'aide des simulations l'influence des coefficients d'amortissement sur l'atténuation et la vitesse de propagation des ondes.

Dans la section 4.2 nous proposons des résultats numériques en dimension 2. Dans un premier temps, nous présentons des tests numériques, nous comparons la propagation des ondes élastiques et viscoélastiques dans les milieux isotropes et anisotropes, nous montrons l'influence de la fréquence de la source sur l'atténuation et la vitesse de propagation et nous faisons des tests numériques pour montrer l'efficacité des couches PML. Dans un second temps, nous faisons une simulations d'un modèle réaliste. Celui-ci est constitué d'un grand nombre de milieux de propriétés physique différentes (17 couches).

4.1 Résultats numériques unidimensionnels

4.1.1 Solution analytique

Pour le problème 1D, il est facile de valider le schéma numérique proposé car on dispose d'une solution exacte pour des conditions initiales particulières. On suppose ici que le domaine Ω est le segment unité $]0,1[$ et on considère les données suivantes :

$$\begin{cases} f(x,t) = u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = \sin(\pi x), \\ u_t(x,0) = u_1(x) = 0, \\ \sigma(x,0) = \dfrac{\mu\tau_1}{\tau_0}\pi\cos(\pi x), \end{cases}$$

et les coefficients :

$$\rho = 1,\ \mu = 1,\ \tau_0 = 1,\ \tau_1 = 1.2.$$

La solution exacte (u,σ) du problème (3.1.1) est calculée par la méthode de séparation des variables, c'est à dire en la cherchant sous la forme :

$$\begin{cases} u(x,t) = U(t)\sin(\pi x), \\ \sigma(x,t) = \Sigma(t)\pi\cos(\pi x), \\ U(0) = 1,\ \dot{U}(0) = 0,\ \Sigma(0) = \dfrac{\mu\tau_1}{\tau_0}. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

En remplaçant (4.1.1) dans (3.1.1) on trouve facilement :

$$\begin{cases} \ddot{U} + \pi^2\Sigma = 0, \\ \Sigma + \tau_0\dot{\Sigma} = U + \tau_1\dot{U}. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Ce qui implique que U est solution de :

$$\text{(4.1.3)} \qquad \begin{cases} \tau_0 \dfrac{d^3U}{dt^3} + \dfrac{d^2U}{dt^2} + \pi^2\tau_1 \dfrac{dU}{dt} + \pi^2 U = 0, \\ U(0) = 1,\ \dot{U}(0) = 0,\ \ddot{U}(0) = -\dfrac{\pi^2\mu\tau_1}{\tau_0}. \end{cases}$$

En faisant la transformée de Fourier, on remarque que la solution de ce système est nécessairement de la forme :

$$U(t) = Ce^{S^*t} + e^{\eta t}[A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t],$$

où S^* et $\eta \pm \mathrm{i}\,\omega^*$ sont les solutions de :

$$\tau_0 X^3 + X^2 + \tau_1\pi^2 X + \pi^2 = 0.$$

et A, B, et C sont des constantes réelles qu'on détermine à partir des conditions initiales.

Pour le calcul de la solution numérique on choisit comme paramètres de discrétisation vérifiant la condition de stabilité : $\Delta t = 0.01$, $h = 1/80$. On note par u_{exa} le déplacement associé à la solution exacte et par u_{num} le déplacement associé à la solution obtenue par notre schéma numérique. On présente sur la figure 4.1.1 la variation de $|u_{exa} - u_{num}|$ en fonction du temps et de l'espace et sur la figure 4.1.2 on compare la variation du déplacement maximale (au point $x = 0.5$) en fonction du temps pour les deux solutions exacte et numérique. A partir des figures ci-dessous, on voit que le schéma numérique approche bien le problème initial (l'erreur relative est inférieure à 0.022%).

On fait ensuite varier les paramètres de discrétisation h et Δt pour étudier la convergence de notre schéma, tout en maintenant le rapport $\Delta t/h$ fixé égal à 0.9 ($\leq$ CFL=0.91287). Dans le tableau 4.1.1 nous avons présenté la norme L^∞ de l'erreur correspondant à différents pas de temps et d'espace et sur la figure 4.1.3 nous présentons la variation de la norme dans L^∞ de l'erreur en fonction de h, en échelle loglog. Ceci nous permet d'affirmer que la solution approchée converge bien vers la solution exacte et que l'erreur est d'ordre 2.

h	Δt	$\lVert u_{exa} - u_{num}\rVert_\infty$
10^{-1}	$9\ 10^{-2}$	$6.11162\ 10^{-03}$
$5\ 10^{-2}$	$4.5\ 10^{-2}$	$1.46935\ 10^{-03}$
$2.5\ 10^{-2}$	$2.25\ 10^{-2}$	$3.61645\ 10^{-04}$
$1.25\ 10^{-2}$	$1.125\ 10^{-2}$	$8.97108\ 10^{-05}$
$6.25\ 10^{-3}$	$5.625\ 10^{-3}$	$2.23409\ 10^{-05}$
$3.125\ 10^{-3}$	$2.8125\ 10^{-3}$	$5.57442\ 10^{-06}$

TAB. 4.1.1 – Tableau des résultats

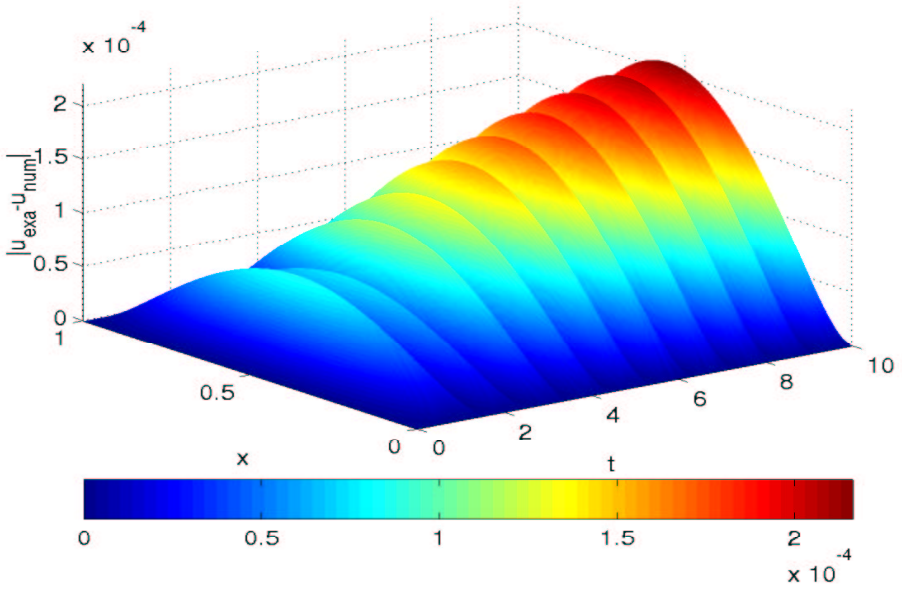


FIG. 4.1.1 – La variation d'erreur

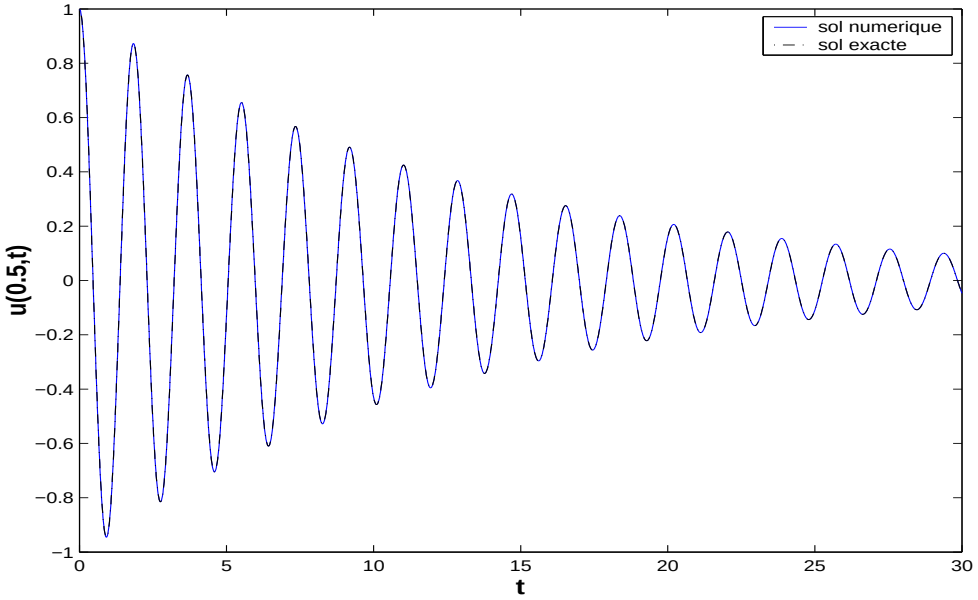


FIG. 4.1.2 – Déplacement numérique et exact au point $x = 0.5$ en fonction du temps

4.1.2 Tests numériques dans le cas 1D

Dans une première expérience, afin de montrer l'influence des coefficients d'amortissement τ_0 et τ_1 sur l'atténuation et la vitesse de propagation des ondes viscoélastiques, on présente sur la figure 4.1.4 une expérience numérique où on fait varier le rapport $\theta = \tau_1/\tau_0$; $\theta = 4$

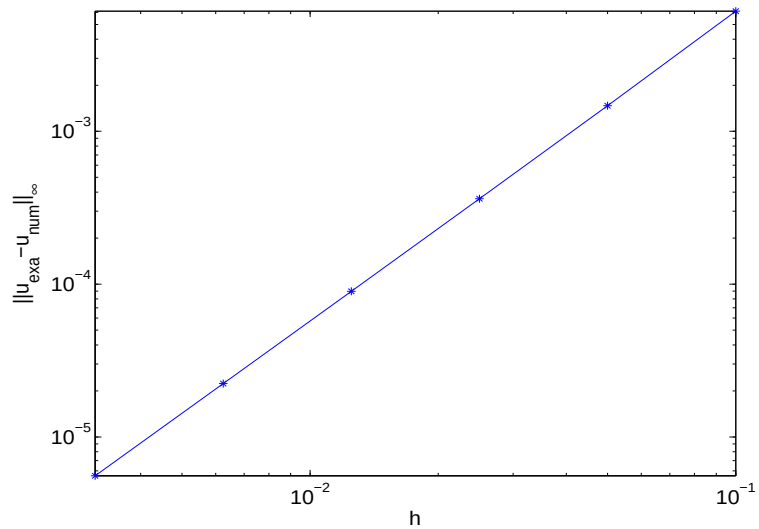


FIG. 4.1.3 – Convergence

pour la courbe rouge, $\theta = 2$ pour la courbe bleue et $\theta = 1.2$ pour celle en verte. On voit que l'absorption et la vitesse de propagation sont liées au rapport θ : pour une grande valeur de θ on a plus d'amortissement et une plus grande vitesse de propagation.

Dans une deuxième expérience, on présente des résultats numériques en appliquant la méthode PML au problème homogène de la viscoélasticité. On s'intéresse à la simulation de la propagation d'onde viscoélastique dans un milieu semi borné $\Omega =]-1, +\infty[$. On considère une couche PML de longueur δ, on discrétise le nouveau domaine $D =]-1, \delta[$ et on utilise la restriction du schéma numérique (3.3.13) dans le cas 1D avec des conditions au bord de Dirichlet, un pas de temps Δt qui vérifie la condition de stabilité et

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-1, 0], \\ d_0(x/\delta)^2 & \text{si} \quad x \in [0, \delta[, \ d_0 > 0 \end{cases}$$

Pour la présente étude, on a pris :

1. Les coefficients qui caractérisent le milieu : $\rho = 1, \ \mu = 1, \ \tau_0 = 1, \ \tau_1 = 1.2$.
2. Les constantes : $d_0 = 45, \ h = 1/150, \ \Delta t = CFL\, h, \ \delta = 20h$.
3. Les conditions initiales :

$$u_0(x) = \begin{cases} \left(1 - (12x+6)^2/4\right)^3 & \text{si} \quad -\dfrac{2}{3} \leq x \leq -\dfrac{1}{3}, \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) = 0, \ \sigma_0 = \frac{\mu\tau_1}{\tau_0} \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

On présente sur la figure 4.1.5 l'évolution de la solution numérique au cours du temps. On remarque que les ondes traversent l'interface sans réflexion et qu'elles sont amorties dans la couche $[0, \delta]$.

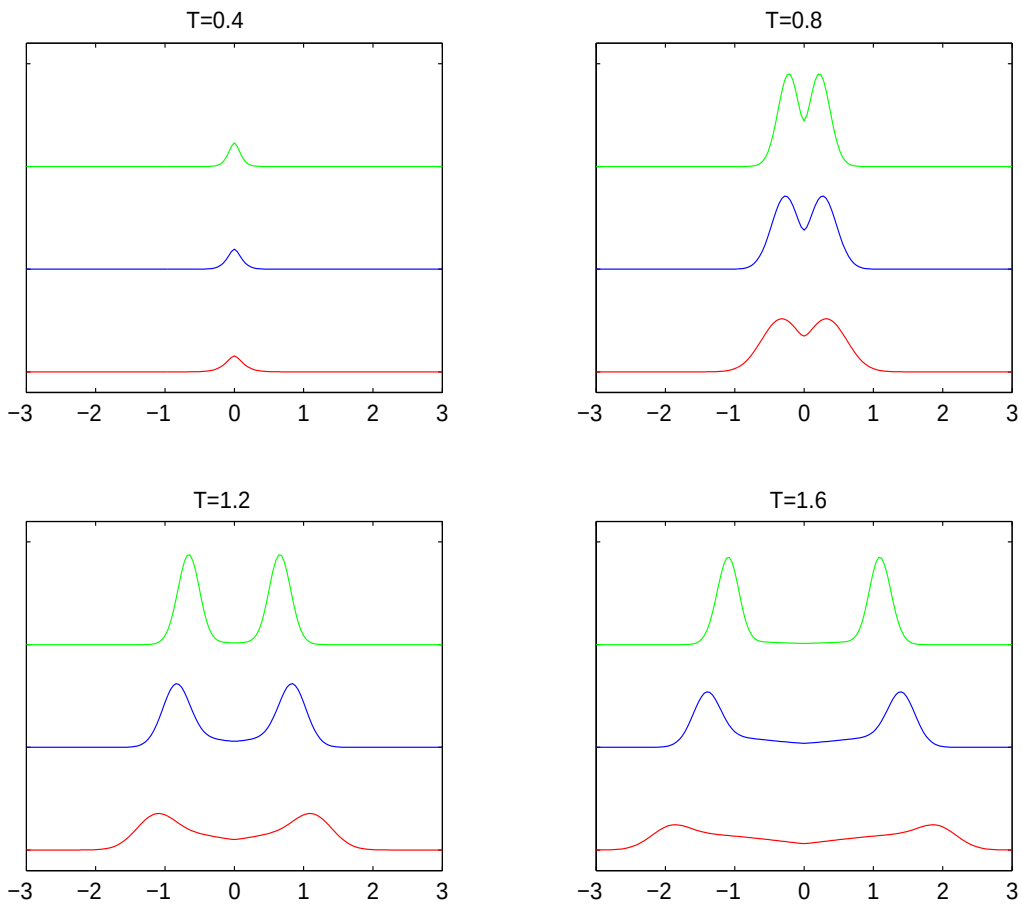


FIG. 4.1.4 – Qualité d'amortissement et de propagation

4.2 Résultats bi-dimensionnels

Dans les expériences qui vont suivre nous considérons un domaine $\Omega = [0,10] \times [0,10]$ et un maillage régulier composé de carrés de coté $h = 0.1$, un pas de discrétisation en temps vérifiant la condition de stabilité :

$$\Delta t = CFL\, h,$$

avec $CFL = (v_p\sqrt{\tau_p/\tau_0})^{-1}$ (resp. $CFL = v_p^{-1}$) dans le cas d'un comportement viscoélastique (resp. comportement élastique) et on considère une source f comme second membre à support compact dans Ω localiséé au point $S(x_s, z_s)$ et vérifiant :

$$f(x,z,t) = F(t)\vec{g}(r),\ r = \left[(x-x_s)^2 + (z-z_s)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.2.1}$$

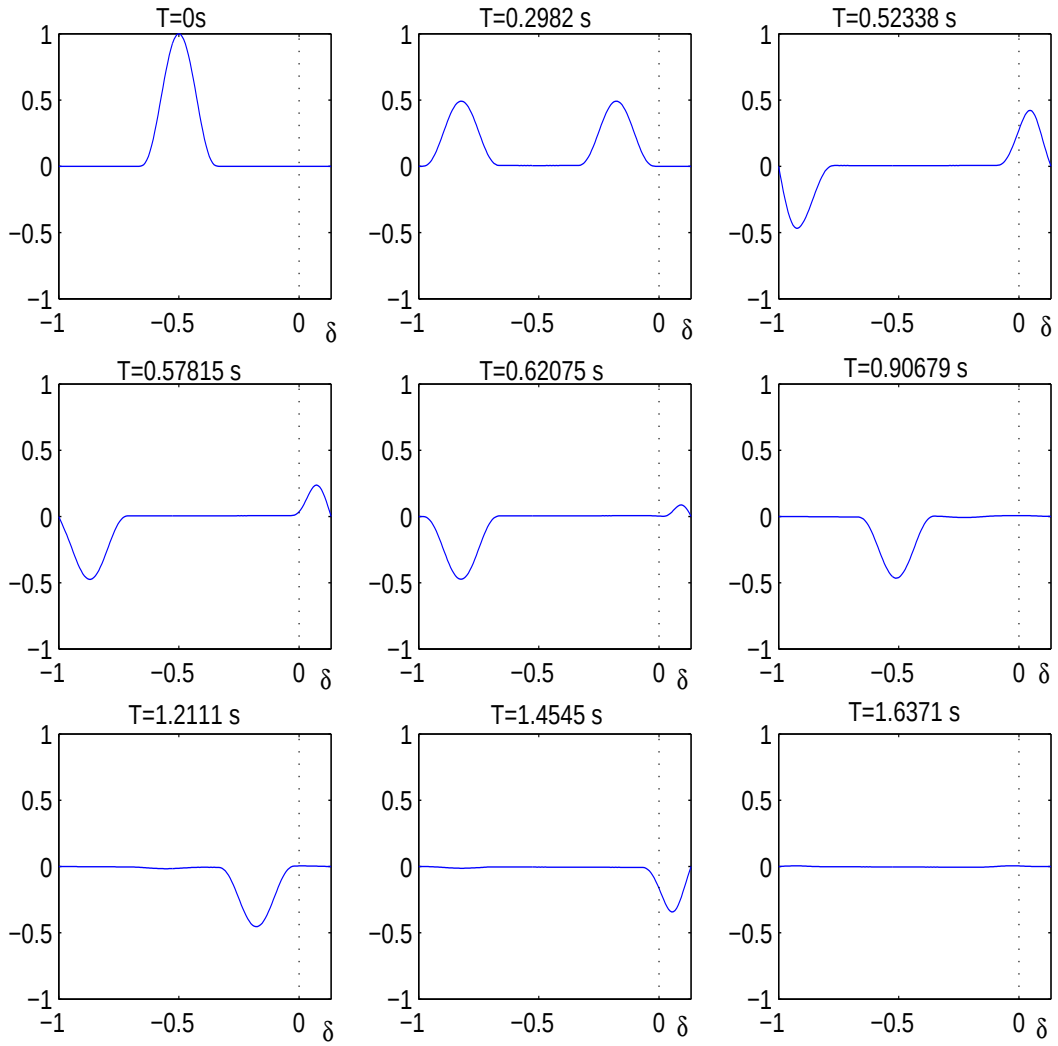
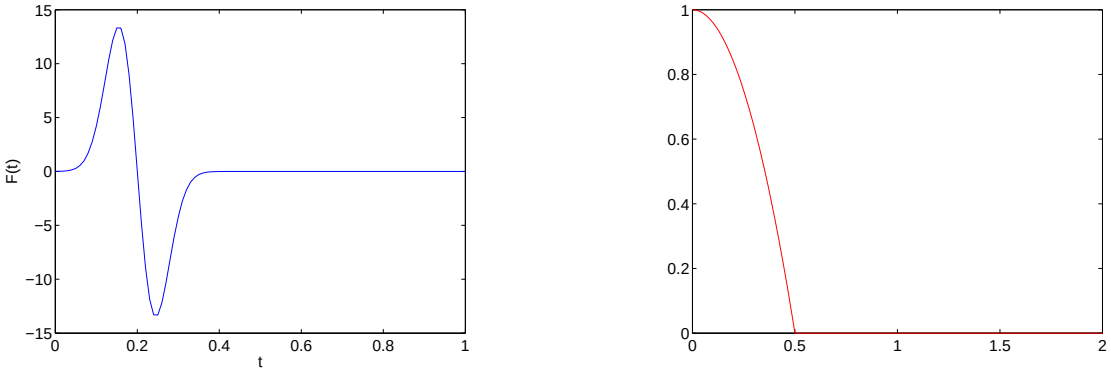


FIG. 4.1.5 – Propagation d'onde viscoélastique au cours du temps avec couches PML

avec

$$
\begin{aligned}
&F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t-t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \leq 2t_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&t_0 = \frac{1}{f_0}, f_0 = \frac{v_s}{hN_L} \text{ la fréquence centrale,} \\
&\vec{g}(r) = (1 - \frac{r^2}{a^2}) \mathbf{1}_{B_a} \vec{e},\ \vec{e} = (\frac{x - x_s}{r}, \frac{z - z_s}{r}),
\end{aligned}
\tag{4.2.2}
$$

où $\mathbf{1}_{B_a}$ est la fonction indicatrice du disque B_a, le disque de centre S et de rayon $a = 5h$ et N_L le nombre de points par longueur d'onde S.(voir FIG 4.2.1)



(a) Fonction $F(t)$

(b) Fonction $g(r)$

FIG. 4.2.1 – La fonction source

Nous donnons les caractéristiques des milieux viscoélastiques isotropes : les vitesses des ondes P et S, la densité volumique ρ et les trois temps de relaxation τ_0, τ_p et τ_s.

4.2.1 Dissipation d'énergie discrète

Nous présentons une expérience numérique concernant la dissipation de l'énergie discrète en comparant les deux cas : le cas élastique où on a la conservation d'énergie et le cas viscoélastique.

Le milieu élastique est caractérisé par :

$$\rho = 1., \; v_p = 2.74, \; v_s = 1.43 \tag{4.2.3}$$

et le milieu viscoélastique par les mêmes v_p, ρ, v_s et les temps de relaxation :

$$\tau_0 = 0.7, \; \tau_p = 1.0133, \; \tau_s = 1.01470 \tag{4.2.4}$$

L'expérience est considérée dans un milieu borné avec la condition de surface libre et une source localisée au centre (voir la figure ci-dessous).

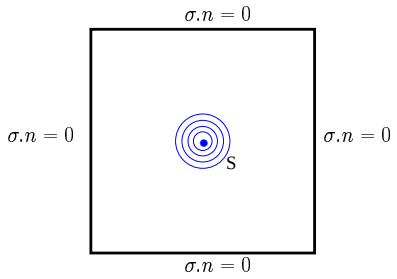


FIG. 4.2.2 – Surface libre

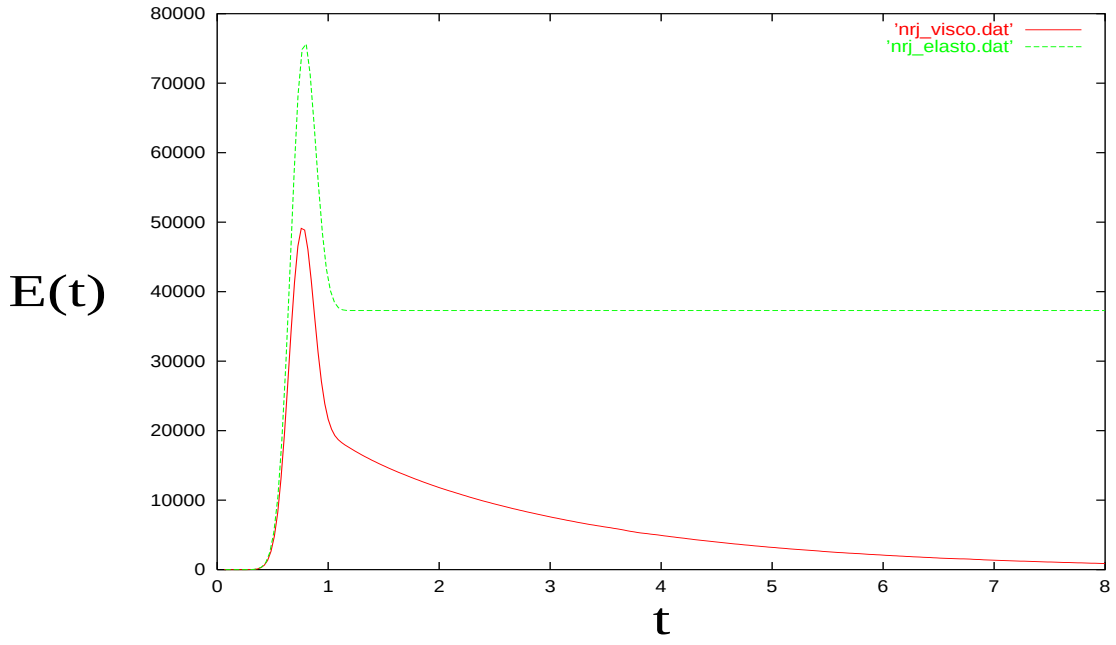


FIG. 4.2.3 – Variation de l'énergie discrète

On voit sur la figure 4.2.3 que après l'extinction de la source f, l'énergie élastique (3.2.25) est constante alors que l'énergie viscoélastique (3.2.24) est décroissante, ce qui confirme nos résultats théoriques [12].

4.2.2 Du viscoélastique à l'élastique

Dans cette partie nous validons les résultats théoriques présentés dans [12] concernant le comportement de l'onde viscoélastique quand le coefficient d'amortissement $\tau_0 \longrightarrow 0$. nous nous plaçons dans un milieu homogène isotrope caractérisé par (4.2.3) et $\tau_0 = \varepsilon,\ \tau_p = 1.447\tau_0,\ \tau_s = 1.451\tau_0$.

Dans une première expérience (FIG 4.2.4 et FIG 4.2.5) nous présentons la variation de la norme de la différence entre la solution viscoélastique et la solution élastique ($\varepsilon = 0$) en fonction de ε dans les espaces $(L^2(\Omega))^2$ et $(H^1(\Omega))^2$ à l'instant $t = 4$. Sur les deux figures on remarque que la solution du problème viscoélastique converge vers la solution élastique.

Dans une deuxième expérience (FIG 4.2.6) nous présentons la variation de l'énergie viscoélastique en fonction de ε à l'instant $t = 4$ et on la compare avec l'énergie élastique ($\varepsilon = 0$).

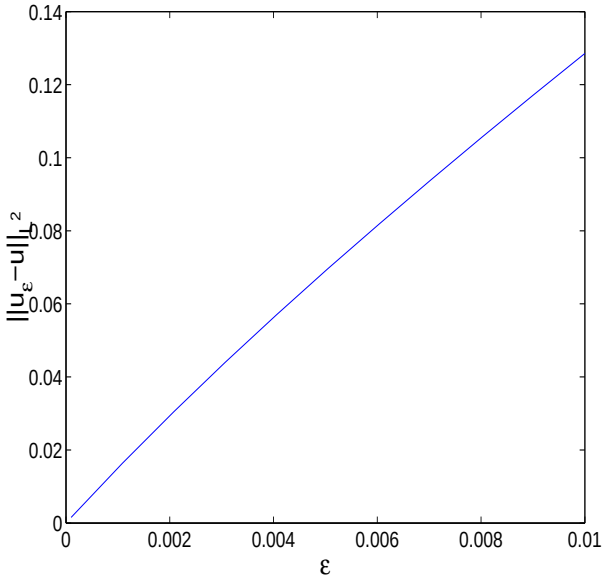


FIG. 4.2.4 – La variation de $\|u_\varepsilon - u\|$ dans L^2 en fonction de ε

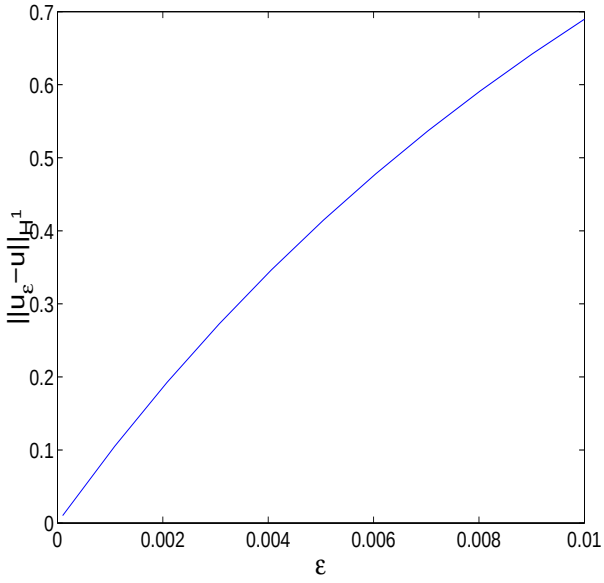


FIG. 4.2.5 – La variation de $\|u_\varepsilon - u\|$ dans H^1 en fonction de ε

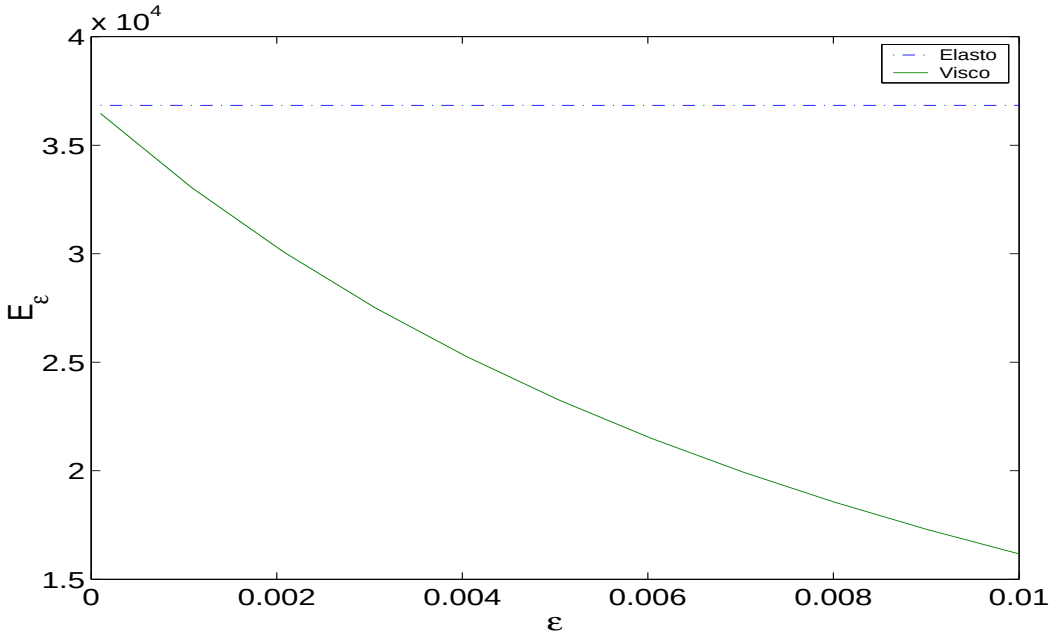


FIG. 4.2.6 – La variation des énergies élastique et viscoélastique en fonction de ε

Dans la dernière expérience (FIG 4.2.7) nous présentons la variation des énergies élastique et viscoélastique en fonction du temps pour différentes valeurs de ε.

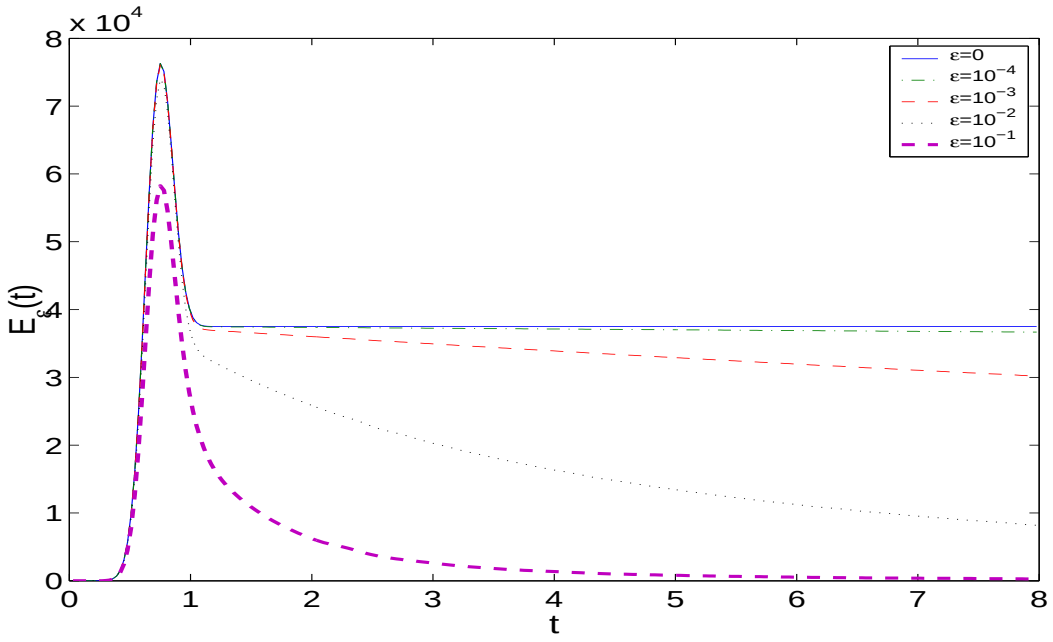


FIG. 4.2.7 – La variation de l'énergie viscoélastique pour différents ε.

Sur les deux figures 4.2.6 et 4.2.7 nous montrons que l'énergie viscoélastique tend vers l'énergie élastique quand le coefficient d'amortissement $\tau_0 = \varepsilon$ tend vers zéro.

4.2.3 Milieu homogène isotrope

Dans cette simulation, nous faisons une comparaison entre la propagation d'ondes dans des milieux ouverts : élastique caractérisé par (4.2.3) et viscoélastique caractérisé par (4.2.3)-(4.2.4). Pour modéliser les milieux ouverts nous utilisons la méthode PML développée dans la section §3.3. Nous entourons le domaine Ω avec des couches absorbantes PML de longueur $\delta = 10h$ (voir la figure 4.2.9). Pour le choix des coefficients d'absorption, nous utilisons la fonction définie par [43] :

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{3v_p}{2\delta^3}\log(1/R)r^2 & \text{dans la couche,} \end{cases} \tag{4.2.5}$$

où v_p est la vitesse des ondes P, $R = 1/1000$ le pourcentage d'énergie réfléchie par le bord extérieur de la PML et $r = dist(x, \text{Interface})$ est la distance entre le point de coordonnées x et l'interface avec la couche.

À la figure 4.2.8 on a présenté la restriction du déplacement de l'onde viscoélastique (resp. élastique) sur le sous domaine inférieur $[-\delta, 10+\delta] \times [-\delta, 5]$ (resp. supérieur $[-\delta, 10+\delta] \times [5, 10+\delta]$) en bas (resp. haut) aux différents instants. On observe sur cette figure que les ondes viscoélastiques se propagent plus vite que les ondes élastiques et qu'elles sont plus amorties. De plus on voit que les couches PML absorbent bien les ondes transmises.

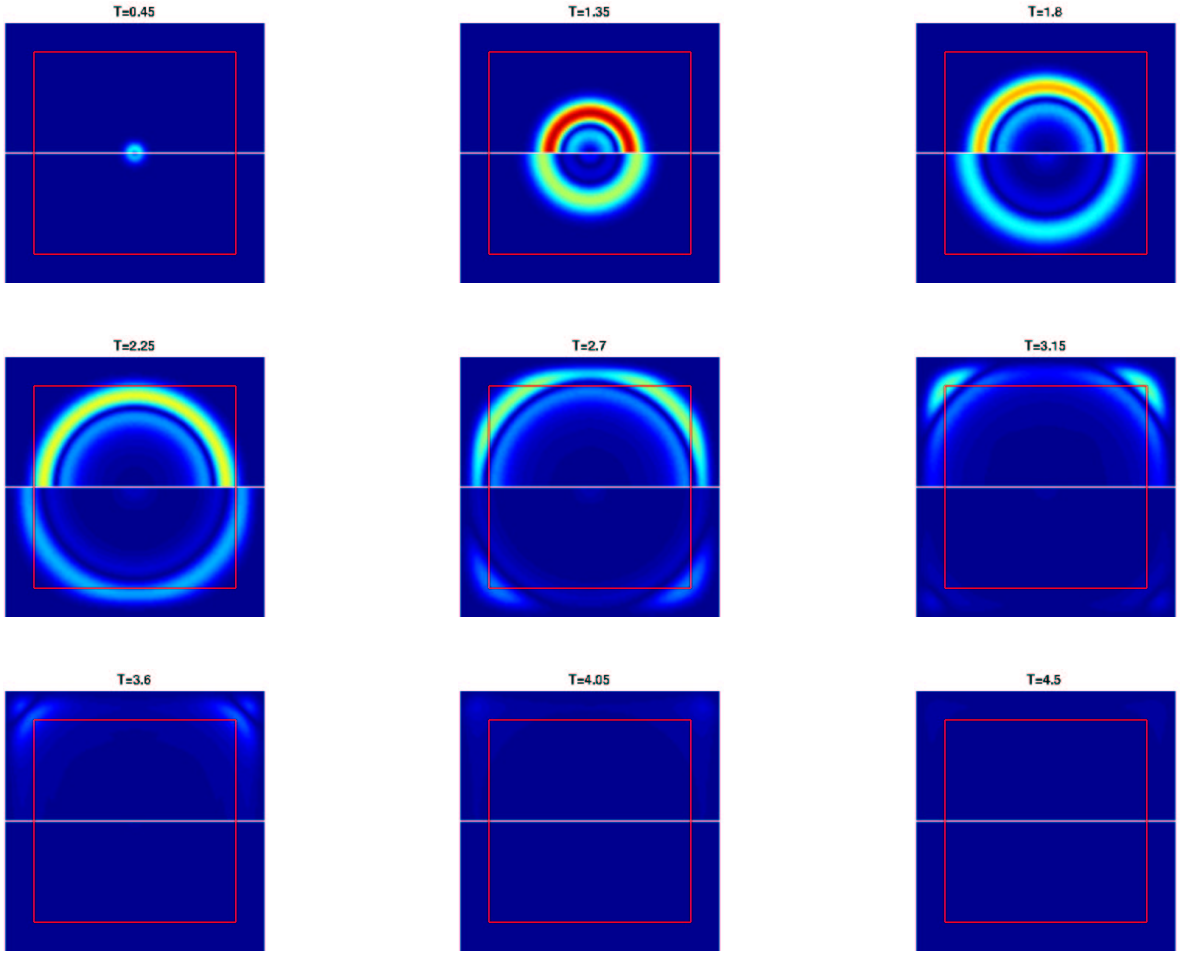


FIG. 4.2.8 – Comparaison entre la propagation d'ondes isotropes dans un milieu élastique (demi-figures du haut) et dans un milieu viscoélastique (demi-figures du bas)

4.2.4 Efficacité des couches PML

Afin de montrer que les couches absorbantes sont bien adaptées au problème de la viscoélasticité, nous présentons la variation au cours du temps du déplacement en un point d'observation X_o (voir figure 4.2.9) au voisinage de l'interface avec la couche ; $X_o(x_o, z_o) = (9.9, 5)$. Nous considérons la propagation d'ondes dans un milieu viscoélastique isotrope et nous comparons les trois expériences :

1. Domaine borné sans couche PML avec condition au bord de type Dirichlet (voir figure 4.2.10).
2. Domaine ouvert et domaine borné avec des couches PML de longueur $\delta = 10h$ (voir figure 4.2.11(a))

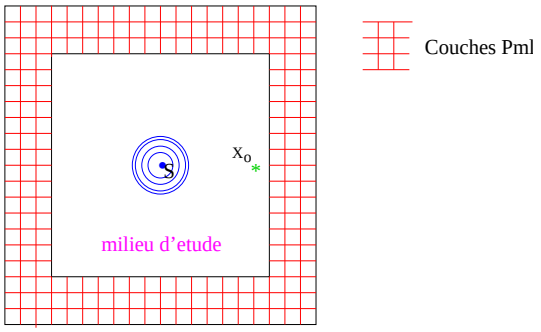


FIG. 4.2.9 – Domaine borné, couches PML

4.2.4.1 Domaine borné sans couche PML

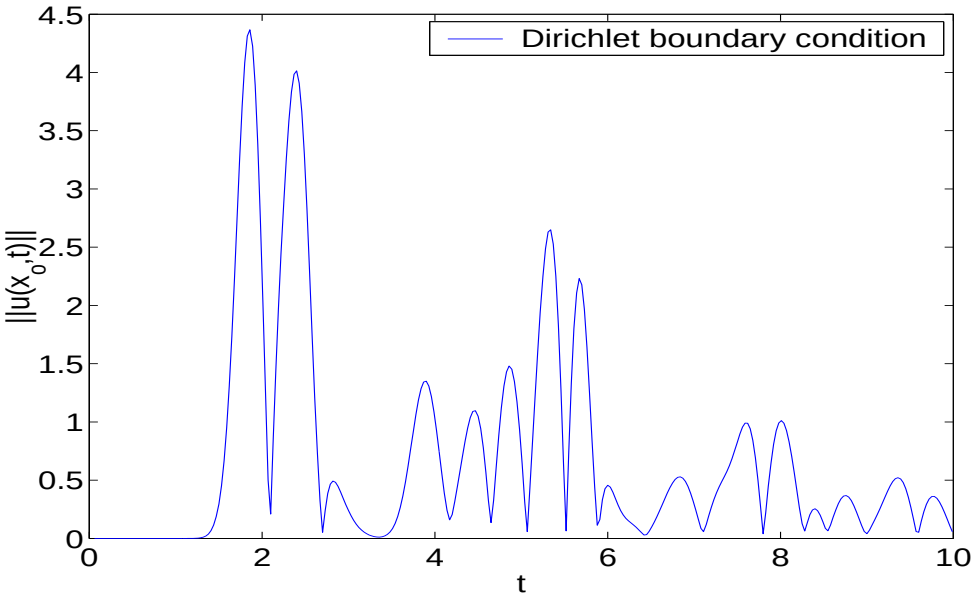


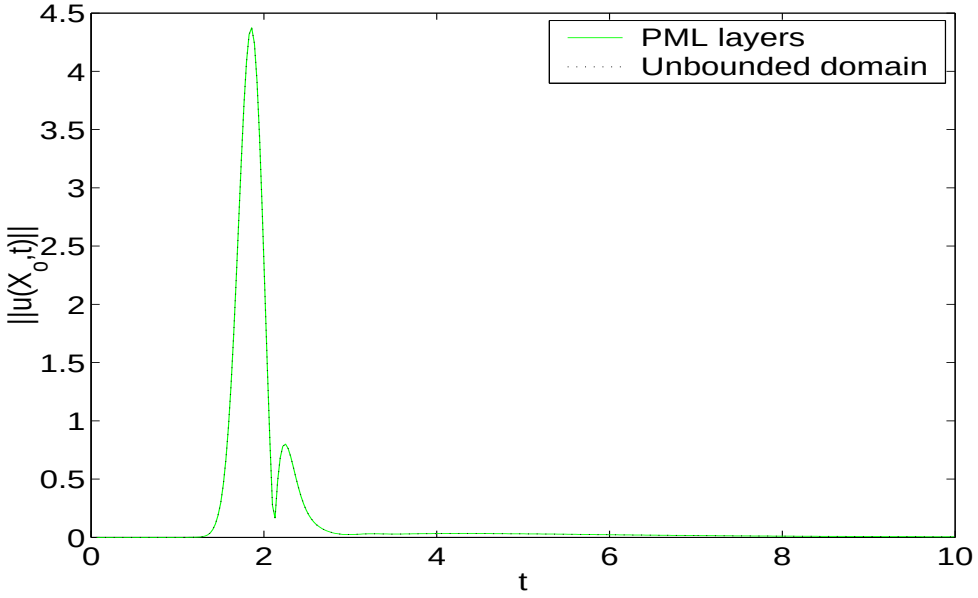
FIG. 4.2.10 – Sismogramme dans un milieu borné sans PML

Malgré l'amortissement des ondes viscoélastiques, la réflextion de l'onde est clairement visible lorsqu'on met une condition de Dirichlet sur le bord extérieur du domaine, d'où la nécessité des couches PML.

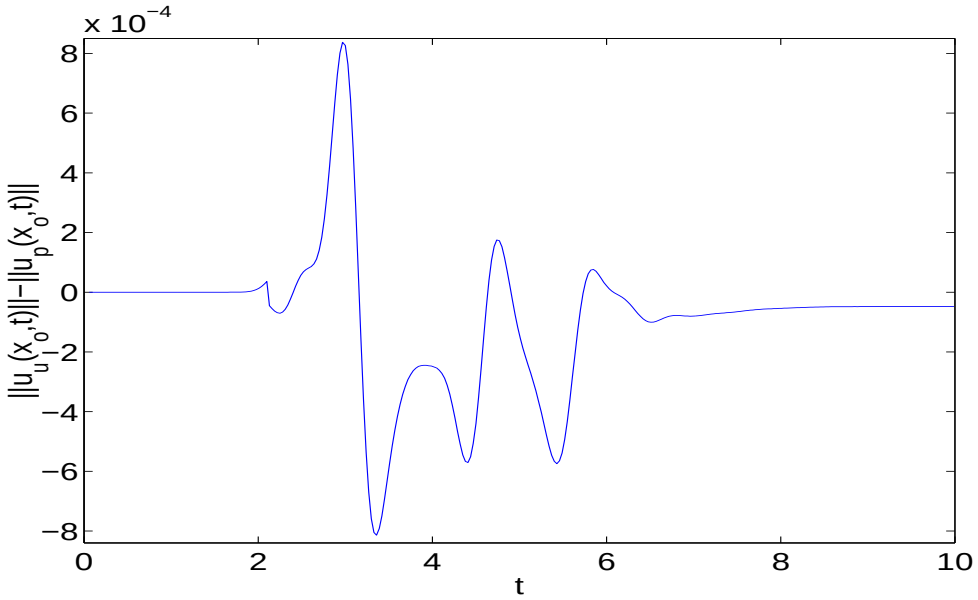
4.2.4.2 Domaine ouvert et domaine borné avec couches PML

Dans cette expérience nous illustrons la variation du déplacement au point X_o dans deux simulations : dans un domaine ouvert en noir pointillé et dans un domaine borné avec couches PML en vert (figure 4.2.11(a)). La réflexion due à l'utilisation des PML est trop faible pour être visible et les deux graphes paraissent confondus. Pour voir l'ordre de cette réflexion, nous

présentons la différence entre les deux déplacements sur la figure 4.2.11(b)



(a) Sismogramme dans un milieu avec couche PML et dans un milieu ouvert



(b) Réflextion dû aux couches PML

FIG. 4.2.11 – Efficacité des PMLs

Nous constatons que cette réflexion est très faible et ne dépasse pas 8.10^{-4} c'est-à-dire 0.017% du maximum de déplacement (égal à 4.5).

4.2.5 Milieu homogène anisotrope

Notation. La symétrie (2.1.2) nous permet d'écrire les deux tenseurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ sous la forme d'une matrice 3×3 :

$$\boldsymbol{C}_{ijkl} = \boldsymbol{c}_{p(i,j),p(k,l)}, \quad \boldsymbol{D}_{ijkl} = \boldsymbol{d}_{p(i,j),p(k,l)}$$

où p est une correspondance sur les indices, définie par :

$$p(1,1) = 1,\ p(2,2) = 2,\ p(1,2) = p(2,1) = 3. \tag{4.2.6}$$

Dans une deuxième expérience de comparaison entre le cas élastique et viscoélastique, nous considèrons un milieu anisotrope de densité volumique $\rho = 1.$, le temps de relaxation $\tau_0 = 0.7$ et les deux tenseurs $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{D}$ donnés par :

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 20 & 3.8 & 0 \\ 3.8 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 29.3 & 6 & 0 \\ 6 & 29.3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6 \end{pmatrix}$$

Le domaine de calcul est un carré $[0, 10] \times [0, 10]$, entouré par des couches PML de longueur $\delta = 20h$ avec $h = 0.05$.

Nous avons présenté sur la figure 4.2.12 la comparaison entre la norme du déplacement des ondes élastique et viscoélastique dans le milieu anisotrope caractérisé par les données ci-dessus. on observe comme dans le cas isotrope que les ondes viscoélastiques se propagent plus vite que les ondes élastiques et qu'elles sont plus amorties.

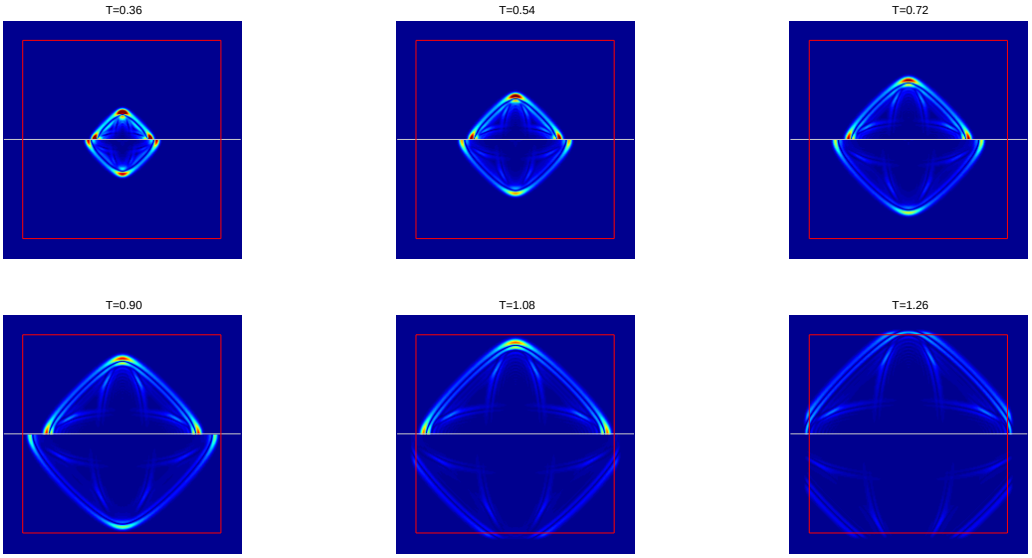


FIG. 4.2.12 – Comparaison entre la propagation d'ondes dans des milieux anisotropes élastiques (demi-figures du haut) et viscoélastiques (demi-figures de bas)

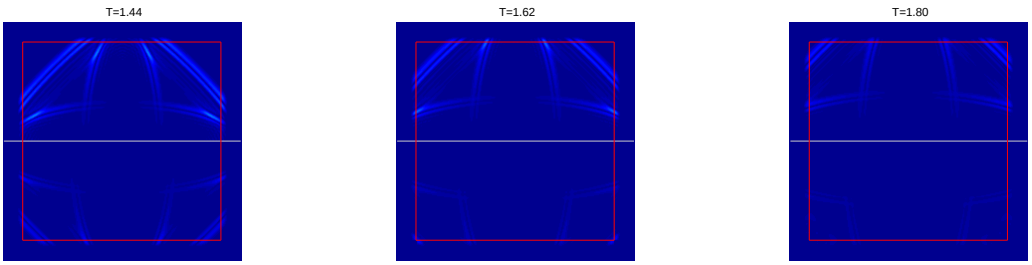


FIG. 4.2.12 – Comparaison entre la propagation d'ondes dans des milieux anisotropes élastiques et viscoélastiques (suite)

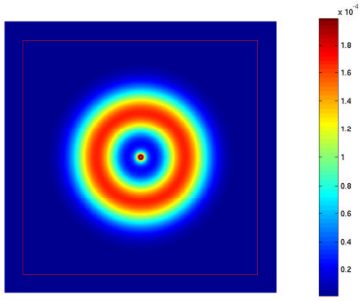
4.2.6 Influence de la fréquence

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats numériques et nous montrons l'influence de la fréquence de la source sur l'atténuation et la vitesse de propagation des ondes. nous nous plaçons dans un domaine $\Omega = [0,2]\times[0,2]$, entouré par des couches PML. Nous considérons un maillage régulier composé de carrées de coté $h = 4.\,10^{-3}$, avec le pas de discrétisation en temps Δt vérifiant la condition de stabilité $\Delta t = CFL\,h = 1.21\,10^{-3}$. Le milieu est caractérisé par les données physiques (4.2.3)-(4.2.4). Nous considérons un système au repos à $t = 0$ alimenté par une source $f = F(t)\,g(r)$ localisée au centre de Ω ; g est radiale en espace et F est la dérivée d'une gaussienne :

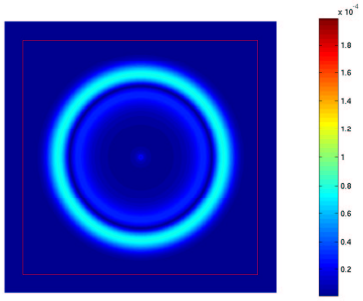
$$
\begin{aligned}
&F(t) = \begin{cases} -2\pi^2 f_0^2 (t-t_0) e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2} & \text{si } t \le 2t_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&t_0 = \frac{1}{f_0}, f_0 \text{ la fréquence centrale,} \\
&g(r) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \mathbf{1}_{B_a} \vec{e},\ \vec{e} = \left(\frac{x - x_s}{r}, \frac{z - z_s}{r}\right).
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

Nous présentons plusieurs simulations où nous changeons la fréquence f_0 du signal temporel, Dans la figure 4.2.13 nous représentons la norme du déplacement normalisé par la norme L^∞ de F pour différentes fréquences f_0 à l'instant $t = 0.242$. Nous avons aussi tracé sur la figure 4.2.15 la variation de la première composante du déplacement u_1 en un point d'observation x_o de coordonnées $(1.8, 1)$ et à la figure 4.2.14 la valeur supérieure de la norme de u normalisé par $\|F\|_\infty$ pour $0 \le t \le t_f$ en fonction de la fréquence : $\sup\limits_{0\le t\le tf} \|u(x_o,t)\|/\|F\|_\infty$.

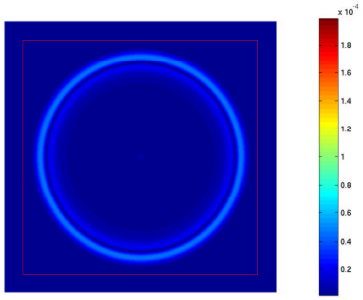
Nous observons sur les figures 4.2.13 et 4.2.14 que la qualité de la dissipation est liée à la fréquence c'est-à-dire pour une grande valeur de f_0 on a plus d'amortissement. La figure 4.2.15, nous permet de confirmer les résultats théoriques de la section §2.2.2 et de démontrer à nouveau l'influence de la fréquence sur la vitesse de propagation.



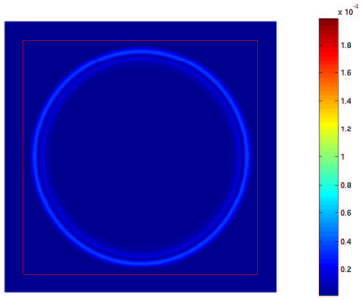
(a) $f_0 = 5$ Hz



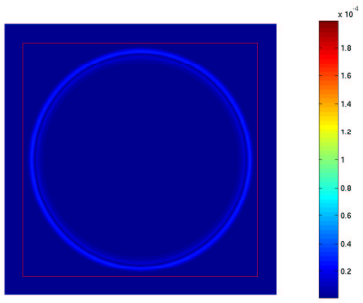
(b) $f_0 = 10$ Hz



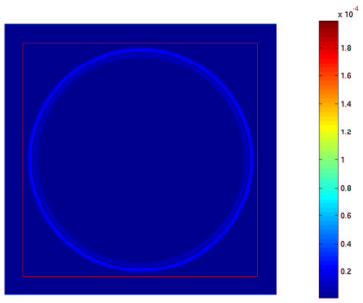
(c) $f_0 = 20$ Hz



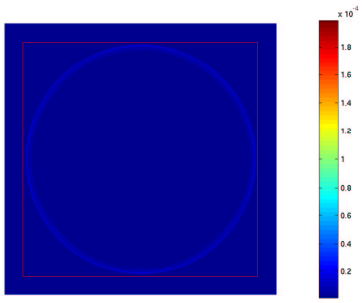
(d) $f_0 = 30$ Hz



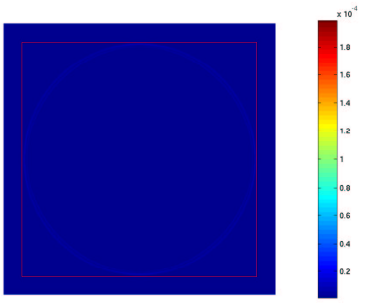
(e) $f_0 = 40$ Hz



(f) $f_0 = 50$ Hz



(g) $f_0 = 90$ Hz



(h) $f_0 = 150$ Hz

FIG. 4.2.13 – La norme du dépalcement

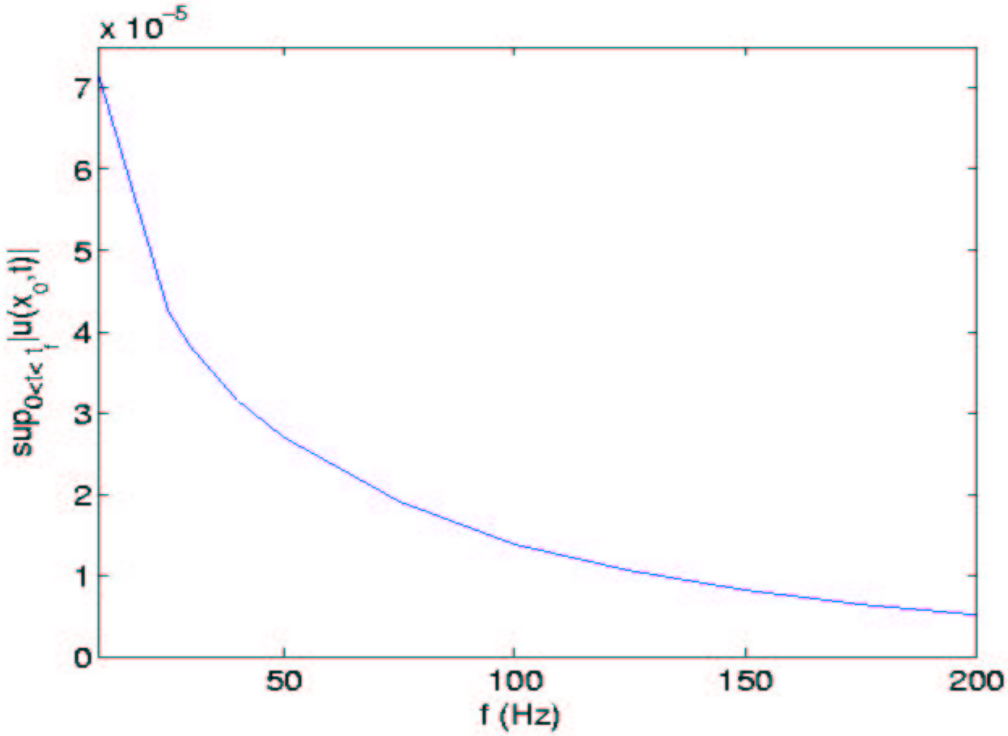


FIG. 4.2.14 – Atténuation en fonction de la fréquence

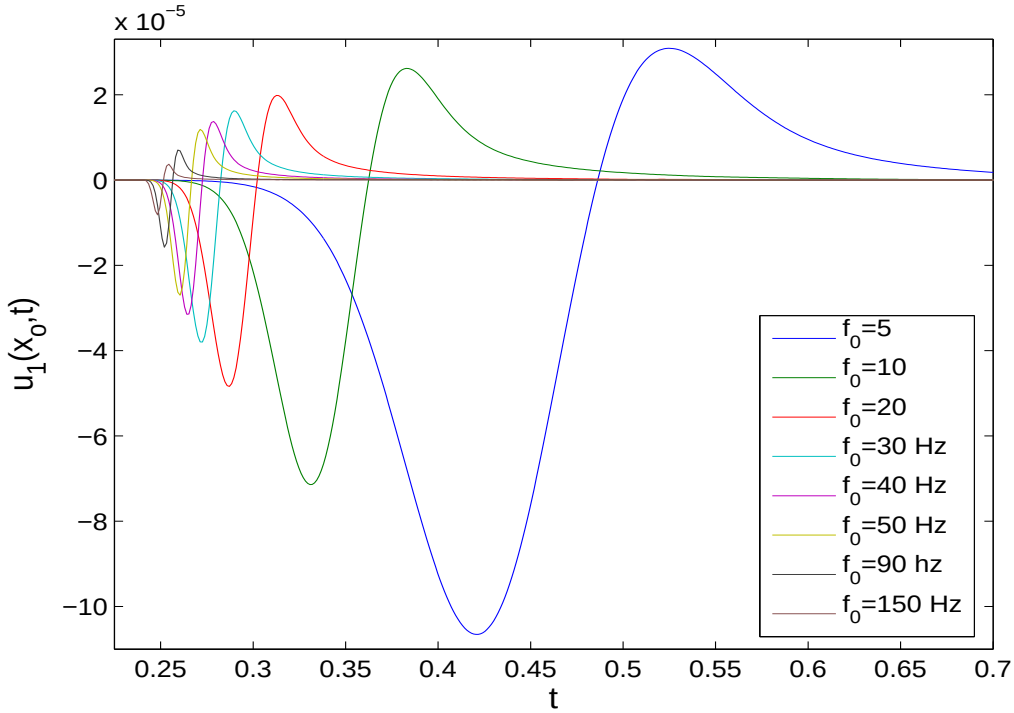


FIG. 4.2.15 – Sismogrammes pour différentes fréquences

4.2.7 Expériences réalistes

Nous considèrons ici une expérience réaliste modélisant un réservoir pétrolier situé dans un domaine $\Omega = [0, 270] \times [800, 960]$ (champ Mc Elroy au Texas) avec une zone productive forte entre 880 m et 900 m. Le milieu hétérogène est caractérisé par les données physiques du tableau 4.2.1.

depth(m)	$v_p(m/s)$	$v_s(m/s)$	Q_p	Q_s	$\rho(kg/m^3)$
800.00	5924.884	2928.865	67.06922	20.00	2280.533900
810.00	5773.175	2738.594	35.43660	20.00	2242.557601
820.00	5313.743	3004.746	21.44790	20.00	2295.163535
830.00	5311.784	2564.933	17.41970	20.00	2206.127967
840.00	5986.338	2993.962	31.28279	20.00	2293.101428
850.00	6176.533	3050.588	40.08961	20.00	2303.867950
860.00	5619.798	3065.524	34.76888	20.00	2306.682782
870.00	5163.070	2940.252	53.11094	20.00	2282.747271
880.00	5191.213	2473.413	36.02421	20.00	2186.179681
890.00	5613.954	2583.599	24.61245	20.00	2210.130769
900.00	5579.241	2644.431	31.45738	20.00	2223.027083
910.00	5712.608	2905.288	57.79010	20.00	2275.930476
920.00	6219.111	2876.129	47.12633	20.00	2270.198248
930.00	6386.336	3111.822	27.59576	20.00	2315.343230
940.00	6489.850	2866.232	133.56708	20.00	2268.242737
950.00	6517.794	2866.232	24.26944	20.00	2268.242737
960.00	6111.120	2866.232	63.14770	20.00	2268.242737

TAB. 4.2.1 – Les données physiques

Remarque 4.2.1 *La densité ρ est calculé à partir des valeurs de v_s par la loi de Gardner [6] : $\rho = av_s^{\frac{1}{4}}$ avec $a = 0.31$ lorsque ρ est en g/cm^3 et v en m/s.*

Pour approcher les facteurs de qualité Q_p et Q_s nous utilisons l'algorithme présenté dans §2.2.3.2 sur une bande de fréquence $[f_a, f_b] = [20, 200]$ et le modèle de Zener généralisé avec 3 lois élémentaires (voir la figure 4.2.19 et le tableau 4.2.2 pour $Q_s = 20$ et $Q_p = 57.7901$). Nous considérons un maillage régulier composé de carrés de coté $h = 1$ m, de pas de temps $\Delta t = 8.272\,10^{-5}$ satisfaisant la condition de stabilité ($\Delta t = CFL\,h$) et d'une source f à support compact dans Ω située en un point $S(x_s, z_s)$ et vérifiant : (4.2.1)-(4.2.2) avec $f_0 = 100$ Hz. Nous présentons sur les figures 4.2.20 et 4.2.21 des instantanés de la composante u_z avec deux points sources différents. L'intérêt de ces expériences est que les deux localisations de la source provoquent différents phénomènes. Dans le premier cas, on peut observer les phénomènes de transmission-réflexion, tandis que dans le deuxième cas on observe les ondes guidées.

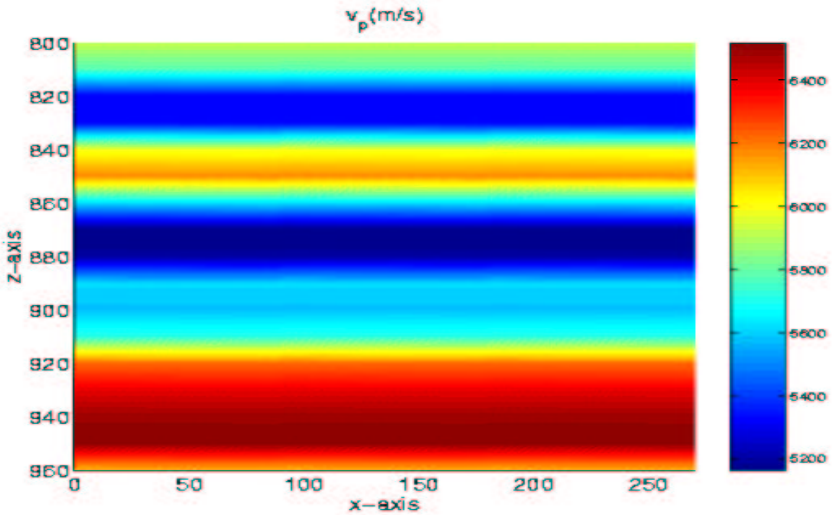


FIG. 4.2.16 – Vitesse des ondes P

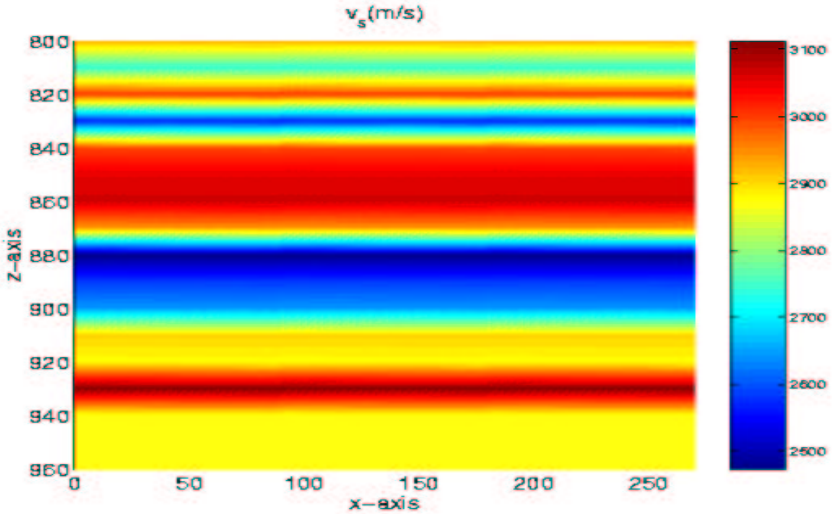


FIG. 4.2.17 – Vitesse des ondes S

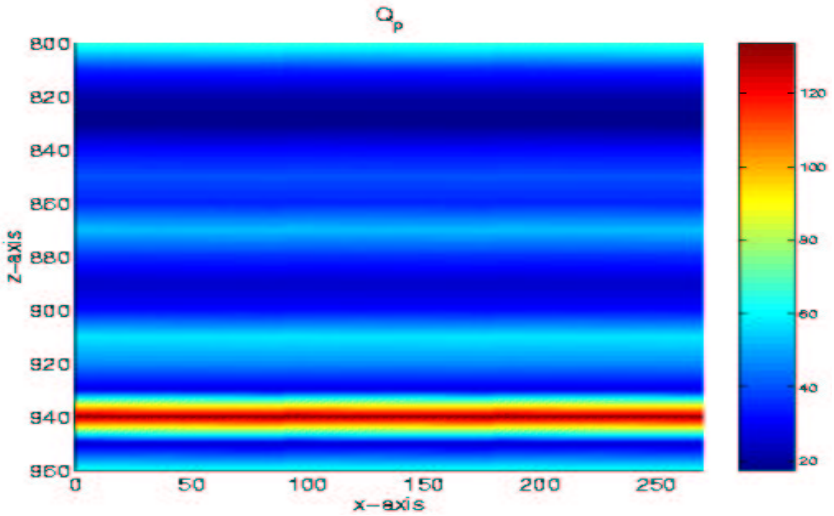


FIG. 4.2.18 – Facteur de qualité associé aux ondes P

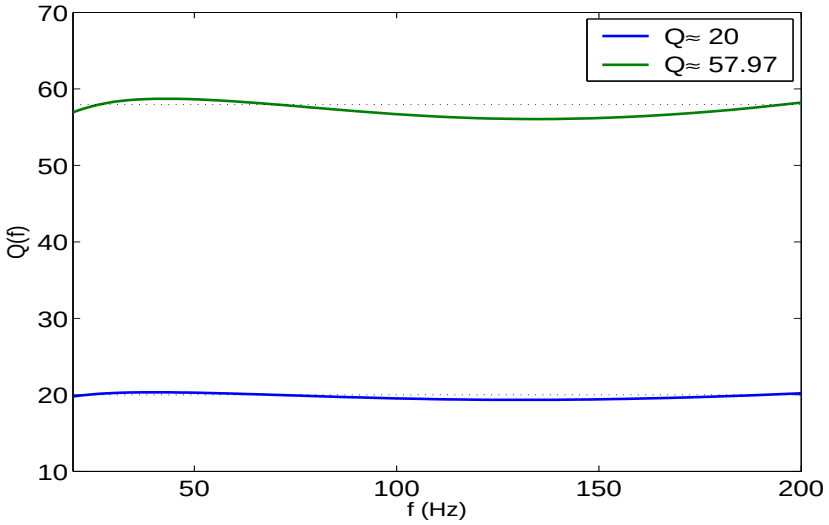


FIG. 4.2.19 – Exemple d'approximation de $Q_s = 20$ et $Q_p = 57.7901$

Modèle élémentaire	$\tau_0(ms)$	$\tau_p(ms)$	$\tau_p(ms)$
1	7.9577	9.9147	8.6238
2	2.5165	2.5664	2.5336
3	0.7956	1.0160	0.8652

TAB. 4.2.2 – Temps de relaxations optimisés pour $Q_s = 20$ et $Q_p = 57.7901$

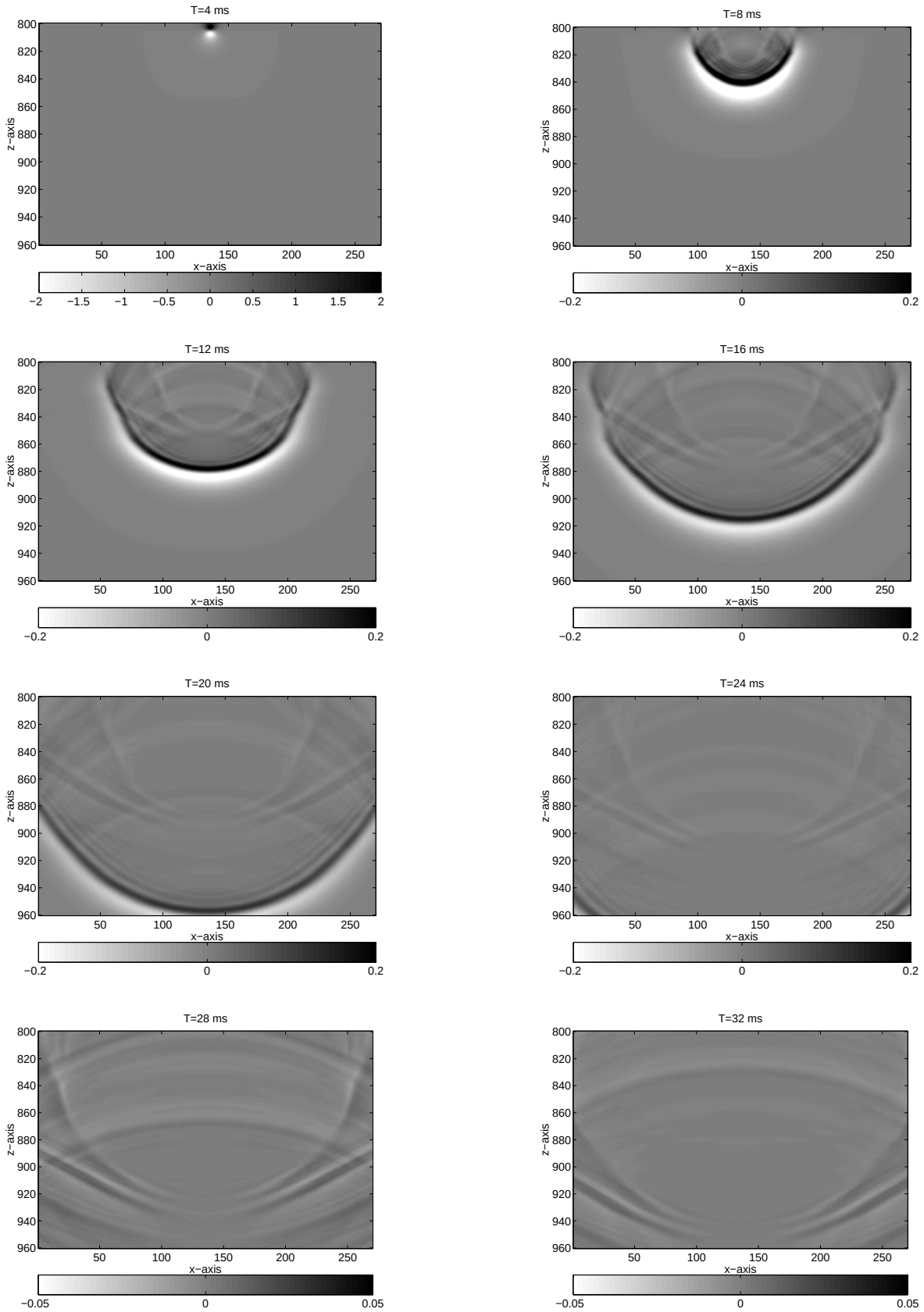


FIG. 4.2.21 – $x_s = 135\,m,\ z_s = 805\,m$

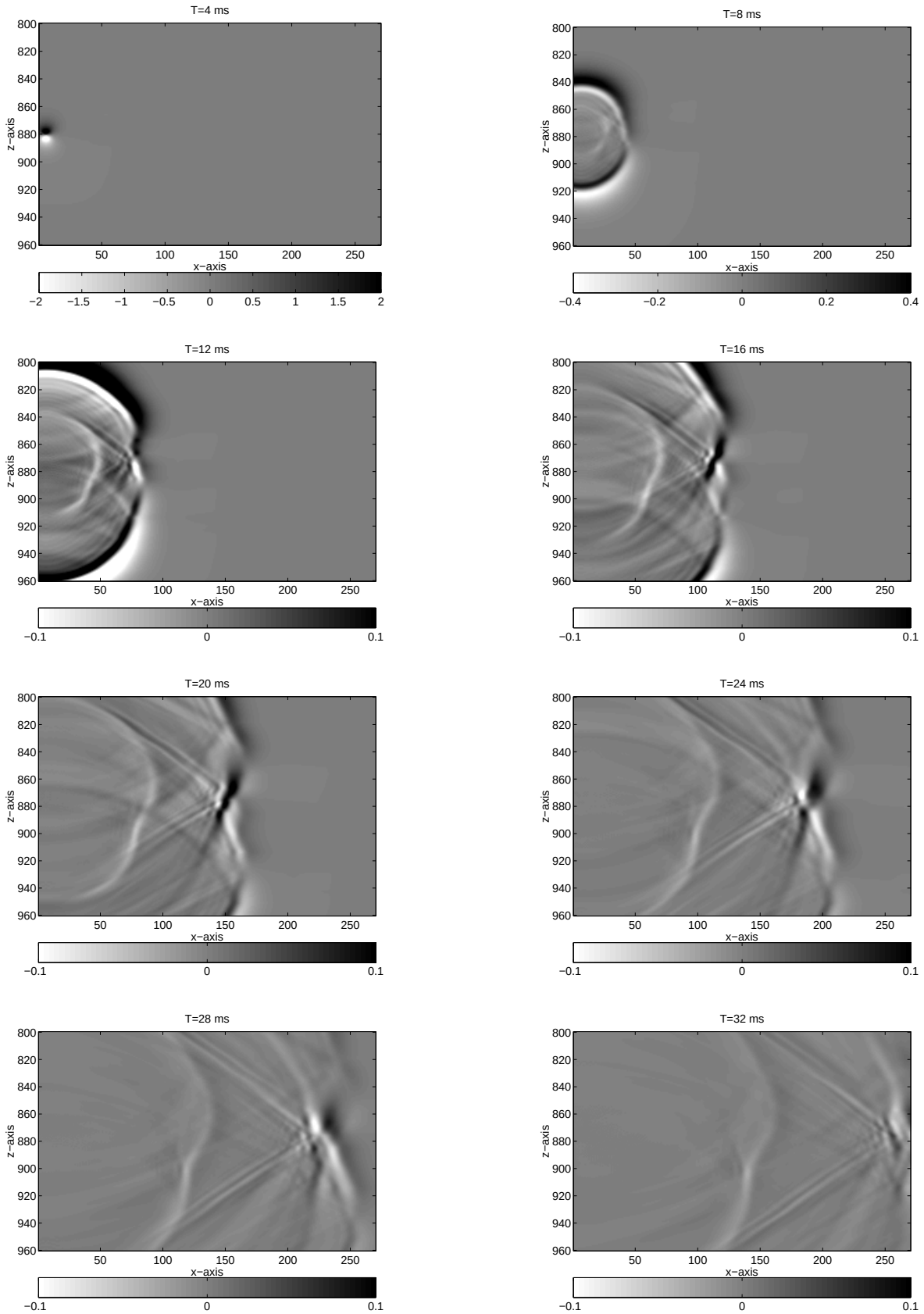


FIG. 4.2.20 – $x_s = 5\,m,\ z_s = 880\,m$

Deuxième partie

Propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques

Introduction

Toujours dans le cadre de la propagation d'ondes dans les milieux complexes absorbants, nous allons nous intéresser à la propagation d'ondes dans les milieux poreux. De nombreux sous-sols ne peuvent être considérés comme des matériaux exclusivement solides. Ce sont souvent des milieux poreux c'est à dire constitués de solides perforés par une multitude de petits trous (appelés pores) occupés par un fluide. C'est notamment souvent le cas des réservoirs pétroliers. Il est clair que l'analyse de résultats par méthodes sismiques de l'exploration de tels milieux doit tenir compte du fait qu'une onde se propageant dans un tel milieu rencontre une succession de phases solide et fluide : on parle de milieu poroélastique. On s'intéresse alors à la modélisation de ce phénomène par l'introduction de modèle de Biot [20, 21].

L'objectif de cette étude est la résolution numérique du problème de la poroélasticité, en utilisant une méthode basée sur des approches variationnelles et des approximations par éléments finis mixtes compatibles avec la condensation de masse. Pour traiter ce sujet, nous avons divisé cette partie en quatre chapitre :

Dans le premier chapitre, nous présentons le problème modèle de la poroélasticité dans un milieu hétérogène et anisotrope. Nous faisons une analyse mathématique complète du problème en montrant un théorème d'existence et unicité de la solution forte à l'aide de la théorie des semi-groupes, un résultat de la décroissance de l'énergie, nous étudions les propriétés des ondes dans les milieux poreux en faisant une analyse par ondes planes et à la fin du chapitre nous calculons une solution analytique en déterminant la fonction de Green.

Dans le deuxième chapitre, nous faisons une étude préliminaire concernant le choix d'une formulation variationnelle mixte optimale associée au problème modèle, afin de construire une méthode performante ; nous nous intéressons surtout au coût de stockage et calcul des inconnues.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'approximation en espace et en temps du problème. Nous développons une méthode numérique robuste au niveau du temps de calcul, stockage des matrices et des inconnues et ordre de la précision, nous adaptons les éléments finis mixtes développés dans [52] pour les ondes en acoustique et en élastique pour le problème en poroélastique. Nous menons l'étude des principales propriétés de cette méthode (stabilité, précision). Pour la modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux non bornés, nous avons adapté la technique des couches absorbantes parfaitements adaptées (PML) pour notre problème.

Le dernier chapitre est consacré à la validation numérique de la méthode. Nous présentons plu-

sieurs simulations et expériences numériques dans les différents milieux : homogène, isotrope, anisotrope et hétérogène.

Chapitre 5

Problème modèle et analyse mathématique

Nous présentons la loi de comportement dans les milieux poroélastiques en proposant la loi de Biot qui gouverne les milieux bi-phasiques. Nous faisons une analyse mathématique du problème, nous montrons un théorème d'existence et unicité de la solution forte, nous rappelons les propriétés et le comportement des ondes dans ces milieux en faisant une analyse par ondes planes et nous déterminons aussi une solution analytique du problème modèle grâce à la méthode de Cagniard-de Hoop.

Sommaire

Introduction **141**
5.1 Problème modèle **142**
5.2 Analyse mathématique **144**
5.2.1 Etudes des milieux hétérogènes 144
5.2.1.1 Existence et unicité de solutions fortes 144
5.2.1.2 Dissipation de l'énergie 148
5.2.2 Etudes des milieux homogènes 149
5.2.2.1 Analyse par ondes planes 149
5.2.2.2 Solution analytique dans un milieu homogène infini 153

Introduction

Les milieux poreux sont des solides perforés par une multitude de petits trous (pores) occupés par un ou plusieurs fluide (solide saturé par un ou plusieurs fluides), lorsque les hypothèses [26] suivantes sont vérifiées :

- La distance moyenne entre les pores est petite devant la longueur d'onde.
- Des petits déplacements pour la phase solide et fluide.
- La phase fluide est continue.
- La matrice élastique est isotrope.
- Absence de tout couplage.

Plutôt que de considérer un tel milieu comme un milieu complètement hétérogène, il est légitime de faire appel, au moins localement, à la théorie de l'homogénéisation [4, 28, 59, 65] qui permet de passer des lois à l'échelle microscopique à des lois macroscopique, on aboutit alors au modèle de Biot [20, 21, 22] qui fait intervenir comme inconnues non seulement le champ de déplacement dans le solide mais aussi la pression dans le fluide. La principale caractéristique de ce modèle est qu'aux ondes standards P et S dans un solide se rajoute une onde P "lente" (qu'on pourrait aussi qualifier de "fluide", voir §5.2.2.1).

Récemment, la recherche dans la modélisation de tels milieux a fait des progrès notables, en particulier en ce qui concerne l'obtention de modèles de plus en plus réalistes vis à vis des applications. On a vu aussi apparaître des généralisations du modèle de Biot qui permettent notamment de prendre en compte l'atténuation des ondes, on parle alors de milieux poro-viscoélastiques [9, 19, 34, 69] ou encore la présence de plusieurs phases fluides on parle alors de multi-porosité [5, 18, 73] (ou milieux multi-phasiques).

La première section de ce chapitre concerne la présentation du modèle de la propagation d'ondes dans les milieux poreux anisotropes et hétérogènes. La section 5.2 concerne l'analyse mathématique du problème modèle. Dans un premier temps, nous étudions les milieux hétérogènes en montrant un résultat d'existence et unicité de la solution forte en utilisant la théorie des semi-groupes (théorème 5.2.1) et un théorème de la dissipation d'énergie (théorème 5.2.2). Dans un deuxième temps nous considérons le cas particulier des milieux homogènes isotropes, nous rappelons les résultats de la propagation d'ondes planes dans les milieux poreux, ceci nous permettra surtout de comprendre l'influence de la porosité sur le comportement des ondes, en particulier la présence d'une deuxième ondes de compression qu'on l'appelle onde lente ou onde de seconde espèce. Pour finir, en utilisant la méthode de Cagniard-de Hoop [30, 46], nous déterminons une solution analytique dans un milieu infini en calculant la fonction de Green pour le cas particulier d'une source de pression.

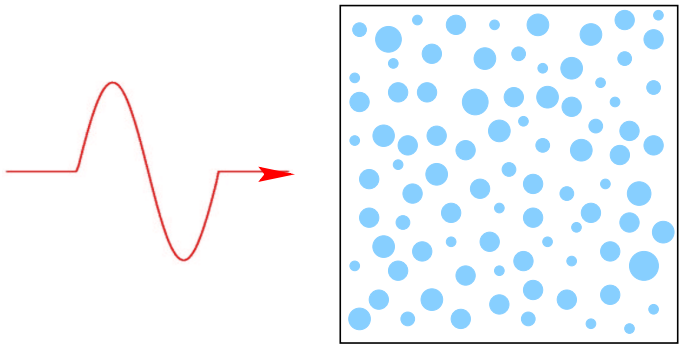


FIG. 5.0.1 – Milieu poreux

5.1 Problème modèle

Dans le cas des basses fréquences la loi de Biot [20] en dimension (d=2,3) est donnée par le système :

$$\rho \ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_f \ddot{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \sigma = f_u \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, T] \tag{5.1.1a}$$

$$\rho_f \ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_w \ddot{\boldsymbol{w}} + \frac{1}{\mathcal{K}} \dot{\boldsymbol{w}} + \nabla p = f_w \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, T] \tag{5.1.1b}$$

$$\sigma = C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s) - \beta\, p\, \boldsymbol{I}_d \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, T] \tag{5.1.1c}$$

$$\frac{1}{m} p + \beta\, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_s + \nabla \cdot \boldsymbol{w} = f_p. \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d \times]0, T], \tag{5.1.1d}$$

$$\boldsymbol{u}_s(x, 0) = \boldsymbol{u}_0(x),\ \partial_t \boldsymbol{u}_s(x, 0) = \boldsymbol{u}_1(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d, \tag{5.1.1e}$$

$$\boldsymbol{w}(x, 0) = \boldsymbol{w}_0(x),\ \partial_t \boldsymbol{w}(x, 0) = \boldsymbol{w}_1(x) \qquad \text{dans } \mathbb{R}^d. \tag{5.1.1f}$$

où les inconnues du problème sont :

- $\boldsymbol{u}_s$ le déplacement dans le solide.
- $\boldsymbol{w} = \phi[\boldsymbol{u}_f - \boldsymbol{u}_s]$ le déplacement du fluide par rapport au solide, avec u_f le déplacement dans le fluide et ϕ la porosité du milieu.
- p la pression dans le fluide.
- σ le tenseur des contraintes.

et

- $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial x_i}\right)$ le tenseur des déformations.
- f_u, f_w et f_p sont des densités de source.
- $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{w}_0$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{w}_1$ sont des données initiales.

avec les coefficients physiques :

- ρ_f la densité du fluide.
- $\rho = \rho_f\,\phi + (1-\phi)\rho_s$ la densité du milieu saturé avec ρ_s la densité du solide.
- $\rho_w = \dfrac{a}{\phi}\,\rho_f$ (a la tortuosité) .
- C est un tenseur 4×4.
- $\boldsymbol{I}_d$ est la matrice unité de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{K}$ est la perméabilité hydraulique et s'écrit sous la forme : $\mathcal{K} = \dfrac{\kappa}{\eta}$, où η est la viscosité du fluide et κ la perméabilité absolue.
- m et β sont des coefficients positifs qui s'expriment en fonction de ϕ, K_s, K_0 et K_f ($\beta = 1 - K_0/K_s$, $m = \left[\phi/K_f + (\beta-\phi)/K_s\right]^{-1}$), avec :
  - K_s est le module d'incompressibilité du solide.
  - K_0 est le module d'incompressibilité saturé.
  - K_f est le module d'incompressibilité du fluide.

On note par $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ l'application : $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma = (\nabla\cdot\sigma_1, \cdots, \nabla\cdot\sigma_d)^t,\ \sigma_i = (\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{id})^t,\ \nabla\cdot\sigma_i = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \forall\, i = 1, \cdots, d.$$

Nous ferons en outre les hypothèse suivantes :

1. ρ, ρ_f, ρ_w, $\mathcal{K}$, m, β et C mesurables.

2. $\exists\, c_-$, c_+ deux constantes positives, tels que :

$$0 < c_- \leq \rho,\ \rho_f,\ \rho_w,\ \mathcal{K},\ m,\ \beta \leq c_+ < +\infty \ \ p.p.\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.1.2}$$

3. le tenseur C satisfait :

$$\left|\begin{array}{l} C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \quad \forall\, i,j,k,l = 1, \cdots, d, \\ \exists\, M_-,\ M_+ > 0 \text{ tels que } \forall\, \sigma \in \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d), 0 < M_-|\sigma|^2 \leq C\,\sigma : \sigma \leq M_+|\sigma|^2. \end{array}\right. \tag{5.1.3}$$

Modèle isotrope

Dans le cas d'un milieu isotrope, le tenseur C vérifie :

$$(C\sigma)_{ij} = \lambda_0\,\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\,\sigma_{ij}, \tag{5.1.4}$$

où

- μ est le module de cisaillement.
- $\lambda_0 = \lambda_f - \beta^2 m$ est le coefficient de Lamé avec λ_f est le coefficient de Lamé dans le milieu saturé.

5.2 Analyse mathématique

5.2.1 Etudes des milieux hétérogènes

5.2.1.1 Existence et unicité de solutions fortes

On note par M la matrice définie par :

$$M = \begin{bmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & \rho_w \end{bmatrix}.$$

Remarque 5.2.1 *La matrice M est symétrique définie positive grâce aux conditions physiques : $a \geq 1$ (la tortuosité) et $\phi \leq 1$ (la porosité), ce qui nous permet d'avoir :*

$$\begin{aligned} \rho\rho_w - \rho_f^2 &= \big(\rho_f\phi + (1-\phi)\rho_s\big)\frac{a}{\phi}\rho_f - \rho_f^2 \\ &= (a-1)\rho_f^2 + \frac{(1-\phi)a}{\phi}\rho_f\rho_s \geq 0. \end{aligned}$$

On introduit les variables : $\tilde{\boldsymbol{u}}_s = \partial_t \boldsymbol{u}_s$ (le champ de vitesse) et $\tilde{\boldsymbol{w}} = \partial_t \boldsymbol{w}$ (la vitesse de filtration) Le problème (5.1.1) se réécrit alors sous la forme d'un système d'évolution du premier ordre :

$$\text{(5.2.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u}_s - \tilde{\boldsymbol{u}}_s = 0, \\ \partial_t \boldsymbol{w} - \tilde{\boldsymbol{w}} = 0, \\ \partial_t \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_s \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla} \cdot (C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)) - \nabla(\beta\, p) \\ -\dfrac{1}{\mathcal{K}}\tilde{\boldsymbol{w}} - \nabla p \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix}, \\ \partial_t p + m\beta\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} = m\, f_p, \\ \boldsymbol{u}_s(x,0) = \boldsymbol{u}_0,\ \tilde{\boldsymbol{u}}_s(x,0) = \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{w}(x,0) = \boldsymbol{w}_0,\ \tilde{\boldsymbol{w}}(x,0) = \boldsymbol{w}_1, \\ p(x,0) = p_0 = m\beta\, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 + m\, \nabla \cdot \boldsymbol{w}_0, \end{cases}$$

ou encore, en posant $U = (\boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{u}}_s, \tilde{\boldsymbol{w}}, p)^t$:

$$\text{(5.2.2)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \boldsymbol{\Lambda} U = F, \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

avec

$$\text{(5.2.3)} \qquad \boldsymbol{\Lambda} U = \begin{pmatrix} -\tilde{\boldsymbol{u}}_s \\ -\tilde{\boldsymbol{w}} \\ -M^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla} \cdot (C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)) - \nabla(\beta\, p) \\ -\dfrac{1}{\mathcal{K}}\tilde{\boldsymbol{w}} - \nabla p \end{bmatrix} \\ m\beta\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_s + m\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} \end{pmatrix},$$

et

$$U_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{w}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_0 \\ \tilde{\boldsymbol{w}}_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M^{-1} \begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} \\ m\, f_p \end{pmatrix}.$$

avec $f_p = \partial_t F_p$.

On introduit l'espace de Hilbert :

$$H = [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times [L^2(\mathbb{R}^d)]^d \times \Big([L^2(\mathbb{R}^d)]^d\Big)^2 \times L^2(\mathbb{R}^d), \tag{5.2.4}$$

muni du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (U_1, U_2)_H &= \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} C\varepsilon(\boldsymbol{u}_1) : \varepsilon(\boldsymbol{u}_2) \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} M \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \end{bmatrix} dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{m} p_1 \, p_2 \, dx, \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

avec $U_1 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_1, \tilde{\boldsymbol{u}}_1, \tilde{\boldsymbol{w}}_1, p_1)^t$ et $U_2 = (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_2, \tilde{\boldsymbol{u}}_2, \tilde{\boldsymbol{w}}_2, p_2)^t$.

On considère l'opérateur non borné sur $D(\boldsymbol{\Lambda}) \subset H \longmapsto H$ défini par (5.2.3) avec :

$$D(\boldsymbol{\Lambda}) = \left\{ \begin{array}{l} U = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{w}}, p) \in H \,/\, \tilde{\boldsymbol{u}} \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d, \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(C\varepsilon(\boldsymbol{u})\big) - \nabla(\beta\, p) \in [L^2(\mathbb{R}^d)]^d, \\ p \in H^1(\mathbb{R}^d), \; \tilde{\boldsymbol{w}} \in H(div, \mathbb{R}^d) \end{array} \right\}.$$

Lemme 5.2.1 *L'opérateur $\boldsymbol{\Lambda} + \lambda \boldsymbol{I}_d$ est maximal monotone pour $\lambda > \max(\rho^{-1/2}, \rho_w^{-1/2})/\sqrt{2}$.*

Démonstration

- **Monotonie** : soit $U = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{w}}, p)^t \in D(\boldsymbol{\Lambda})$, on a :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Lambda} U, U)_H &= -\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{u} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} C\varepsilon(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}}) \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{w} \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{\nabla} \cdot (C\varepsilon(\boldsymbol{u})) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \\ &- \int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\beta\, p) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathcal{K}} \tilde{\boldsymbol{w}} \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla p \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} \beta \, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \, p \, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} \, p \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green pour les trois intégrales :

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{\nabla} \cdot (C\varepsilon(\boldsymbol{u})) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} C\varepsilon(\boldsymbol{u}) : \varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}}) \, dx, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\beta\, p) \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \beta \, p \, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} \, dx, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}} \, p \, dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\boldsymbol{w}} \cdot \nabla p \, dx, \end{array} \right.$$

on obtient :

$$(\mathbf{\Lambda} U, U)_H \;=\; -\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{u}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{w}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathcal{K}}\tilde{\boldsymbol{w}}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}\,dx.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|U\|_H^2 \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{u}|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{C}\varepsilon(\boldsymbol{u}):\varepsilon(\boldsymbol{u})\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{w}|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \rho\,|\tilde{\boldsymbol{u}}|^2\,dx \\ &+\; \int_d \rho_w\,|\tilde{\boldsymbol{w}}|^2\,dx + 2\int_{\mathbb{R}^d} \rho_f\,\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}\,dx.\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(\mathbf{\Lambda} U, U)_H + \lambda\|U\|_H^2 \;\geq\; \int_d \left[\lambda\,|\boldsymbol{u}|^2 + \lambda\,|\boldsymbol{w}|^2 + \lambda\,\rho\,|\tilde{\boldsymbol{u}}|^2 + \lambda\,\rho_w\,|\tilde{\boldsymbol{w}}|^2 + 2\lambda\,\rho_f\,\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{u}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{w}\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}\right]dx$$

ce qui montre que $\mathbf{\Lambda} + \lambda I$ est monotone dès que $\lambda > \max(\rho^{-1/2}, \rho_w^{-1/2})/\sqrt{2}$.

- **Surjectivité** : montrons que $\mathbf{\Lambda}+\nu I$ est surjective pour tout $\nu > 0$. Ceci équivaut à montrer que pour tout $F = (f_u, f_w, f_{\tilde{u}}, f_{\tilde{\boldsymbol{w}}}, f_p)^t \in H$, il existe $U = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{w}}, p)^t \in D(\mathbf{\Lambda})$ solution du système :

$$\nu\,\boldsymbol{u} - \tilde{\boldsymbol{u}} = f_u, \tag{5.2.6a}$$

$$\nu\,\boldsymbol{w} - \tilde{\boldsymbol{w}} = f_w, \tag{5.2.6b}$$

$$\nu \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot(C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)) - \nabla(\beta\,p) \\ -\dfrac{1}{\mathcal{K}}\tilde{\boldsymbol{w}} - \nabla p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\tilde{\boldsymbol{u}}} \\ f_{\tilde{\boldsymbol{w}}} \end{bmatrix}, \tag{5.2.6c}$$

$$m\beta\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} + m\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{w}} + \nu\,p = f_p. \tag{5.2.6d}$$

Si le système (5.2.6) a une solution, il est facile d'éliminer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}$ et p et de voir que $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{\boldsymbol{w}}$ doivent vérifier l'équation :

$$\begin{aligned} &-\begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(C\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}})\big) + \nabla(m\beta^2\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}) + \nabla(m\beta\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}) \\ \nabla\big[m\beta\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} + m\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{w}}\big] \end{bmatrix} + \nu^2\,M \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{u}} \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} + \frac{\nu}{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\boldsymbol{w}} \end{bmatrix} = \\ &\nu\,M \begin{bmatrix} f_{\tilde{\boldsymbol{u}}} \\ f_{\tilde{\boldsymbol{w}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla}\cdot\big(C\varepsilon(f_u)\big) - \nabla(\beta\,f_p) \\ -\nabla f_p \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

La formulation variationnelle de (5.2.7) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{U} = (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{w}}) \in \tilde{H} \text{ tel que :} \\ a(\tilde{U}, V) = l(V), \;\; \forall\, V = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}) \in \tilde{H}, \end{cases} \tag{5.2.8}$$

où $\tilde{H}$ est l'espace de Hilbert, défini par :

$$\tilde{H} = [H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times H(div, \mathbb{R}^d),$$

muni du produit scalaire :

$$(\tilde{U},V)_{\tilde{H}} = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{s}\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}\, \nabla \cdot \boldsymbol{s}\, dx$$

$a : \tilde{H} \times \tilde{H} \longmapsto \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire :

$$a(\tilde{U},V) = \int_{\mathbb{R}^d} \big[C\varepsilon(\tilde{\boldsymbol{u}}) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) + m\beta^2\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} + m\beta\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} + m\beta\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}\, \nabla \cdot \boldsymbol{s} + m\, \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}\, \nabla \cdot \boldsymbol{s}\big]\, dx$$
$$+\nu^2 \int_{\mathbb{R}^d} \big[\rho\, \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{v} + \rho_f\, \tilde{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v} \rho_f\, \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot s\rho_w\, \tilde{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{s}\big]\, dx + \nu \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\mathcal{K}} \tilde{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{s}\, dx,$$

et $l : \tilde{H} \longmapsto \mathbb{R}$ est la forme linéaire :

$$l(V) = \nu \int_{\mathbb{R}^d} \big[\rho\, f_{\tilde{\boldsymbol{u}}} \cdot \boldsymbol{v} + \rho_f f_{\tilde{\boldsymbol{w}}} \cdot \boldsymbol{v} + \rho_f\, f_{\tilde{\boldsymbol{u}}} \cdot \boldsymbol{s} + \rho_w\, f_{\tilde{\boldsymbol{w}}} \cdot \boldsymbol{s}\big]\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \big[C\varepsilon(f_u) : \varepsilon(\boldsymbol{v}) - \beta\, f_p\, \nabla \cdot \boldsymbol{v} - f_p\, \nabla \cdot \boldsymbol{s}\big]\, dx$$

D'après (5.1.3), (5.1.2) et l'inégalité de Korn [48, 70] dans $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d$, la forme linéaire $l(.)$ est continue sur $\tilde{H}$ et la forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue coercive sur $\tilde{H}$ pour tout $\nu > 0$. Le théorème de Lax-Milgram permet alors d'affirmer que le problème (5.2.8) admet une solution unique $\tilde{\boldsymbol{u}} = (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{w}})^t$ dans $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times H(div, \mathbb{R}^d)$.

Les données (f_u, f_w, f_p) étant supposées appartenir à $[H^1(\mathbb{R}^d)]^d \times [L^2(\mathbb{R}^d)]^d \times [L^2(\mathbb{R}^d)]^d$, on obtient l'existence de $\boldsymbol{u} \in [H^1(\mathbb{R}^d)]^d$ à partir de l'équation (5.2.6a), $\boldsymbol{w} \in [L^2(\mathbb{R}^d)]^d$ à partir de (5.2.6b) et $p \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à partir de (5.2.6d). Enfin en utilisant l'équation (5.2.6c), on voit facilement que u et p vérifient :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(C\varepsilon(\boldsymbol{u}) - \beta\, p\, \boldsymbol{I}_d\big) \in [L^2(\mathbb{R}^d)]^d \text{ et } p \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Nous avons donc démontré que l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda} + \nu I$ était surjectif $\forall \nu > 0$. Pour finir la démonstration du lemme, il suffit de raisonner avec $\nu = \lambda + 1$. ■

Maintenant, on peut énoncer le théorème d'existence et d'unicité :

Théorème 5.2.1 *Pour toutes conditions initiales* $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_1, p_0) \in D(\boldsymbol{\Lambda})$ *et tout* $(f_u, f_w, f_p) \in C^1(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d) \times C^1(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d) \times C^2(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d)$*, il existe une unique solution* $(\boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}, p)$ *du problème (5.1.1) qui vérifie :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_s \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \boldsymbol{w} \in C^1\big(0,T;H(div,\mathbb{R}^d)\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ p \in C^0\big(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)\big). \end{cases}$$

Démonstration

Sous l'hypothèse $U_0 \in D(\boldsymbol{\Lambda})$ et grâce au théorème de Hille-Yosida [27], nous déduisons que le problème (5.2.1) admet une unique solution $U \in C^0(0,T;D(\boldsymbol{\Lambda})) \cap C^1(0,T;H)$. Ceci équivaut à :

– $\boldsymbol{u}_s \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big)$,

– $\boldsymbol{w} \in C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$,

– $\tilde{\boldsymbol{u}} = \partial_t \boldsymbol{u}_s \in C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big)$,

– $\tilde{\boldsymbol{w}} = \partial_t \boldsymbol{w} \in C^1\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^0\big(0,T;H(div,\mathbb{R}^d)\big)$,

– $p \in C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^0\big(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)\big)$,

ce qui entraîne :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_s \in C^1\big(0,T;[H^1(\mathbb{R}^d)]^d\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ \boldsymbol{w} \in C^1\big(0,T;H(div,\mathbb{R}^d)\big) \cap C^2\big(0,T;[L^2(\mathbb{R}^d)]^d\big), \\ p \in C^0\big(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)\big) \cap C^1\big(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)\big), \end{array}\right. \tag{5.2.9}$$

et achève la démonstration. ■

5.2.1.2 Dissipation de l'énergie

Définition 5.2.1 *Soit $(\boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}, p)$ la solution forte du problème (5.1.1), La quantité d'énergie associée à cette solution est définie par :*

$$\begin{aligned} E_d(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\rho|\dot{\boldsymbol{u}}_s|^2 + C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s):\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)\Big]\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\rho_w|\dot{\boldsymbol{w}}|^2 + \frac{1}{m}|p|^2\Big]\,dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\dot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

La quantité E_d définit bien une énergie positive grâce à la remarque 5.2.1.

Remarque 5.2.2 *On remarque que la quantité d'énergie E_d se décompose en trois parties, la première $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\rho|\dot{\boldsymbol{u}}_s|^2 + C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s):\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)\Big]\,dx$ correspond à l'énergie qu'on trouve dans le cas élastique, la deuxième partie $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\rho_w|\dot{\boldsymbol{w}}|^2 + \frac{1}{m}|p|^2\Big]\,dx$ est l'énergie dans le cas acoustique et la dernière partie $\int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\dot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx$ est dûe au couplage solide-fluide.*

On a le résultat de la décroissance d'énergie :

Théorème 5.2.2 *L'énergie $E_d(t)$ vérifie l'identité :*

$$\frac{dE_d}{dt} = -\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\mathcal{K}}|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} f_u\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} f_w\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx + \int_{\mathbb{R}^d}\dot{f}_p\,p\,dx. \tag{5.2.11}$$

et elle décroît en l'absence des termes sources.

Démonstration

• On applique le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ à (5.1.1a) par $\dot{\boldsymbol{u}}_s$ et à (5.1.1b) par $\dot{\boldsymbol{w}}$, après une intégration sur $\mathbb{R}^d$, on obtient alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\dot{\boldsymbol{u}}_s|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\ddot{w}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx - \int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_u\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx, \tag{5.2.12a}$$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\mathcal{K}}|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d}\nabla p\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx = \\ &\int_{\mathbb{R}^d} f_w\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx \end{aligned} \tag{5.2.12b}$$

Après une intégration par parties des derniers termes des deux équations (5.2.12a) et (5.2.12b), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\dot{\boldsymbol{u}}_s|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\ddot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}\sigma:\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}_s)\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}f_u\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx, \tag{5.2.13a}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\mathcal{K}}|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx-\int_{\mathbb{R}^d}p\,\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx=\\&\int_{\mathbb{R}^d}f_w\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx\end{aligned}. \tag{5.2.13b}$$

En utilisant l'équation (5.1.1c), on peut remplacer σ dans (5.2.13a), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\dot{\boldsymbol{u}}_s|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\ddot{\boldsymbol{w}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}C\,\varepsilon(\boldsymbol{u}_s):\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)\,dx\\&-\int_{\mathbb{R}^d}\beta\,p\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}f_u\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx.\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

En faisant une dérivation par rapport au temps de l'équation (5.1.1d), ceci nous permet de écrire $\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{w}}$ sous la forme :

$$\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{w}}=\dot{f}_p-\frac{1}{m}\dot{p}-\beta\,\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s,$$

En remplaçant $\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{w}}$ dans (5.2.13b), nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\rho_f\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\rho\,|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\mathcal{K}}|\dot{\boldsymbol{w}}|^2\,dx+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{m}|p|^2\,dx\\&+\int_{\mathbb{R}^d}\beta\,p\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s\,dx=\int_{\mathbb{R}^d}\dot{f}_p\,p\,dx.\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

En sommant les deux dernières équations, nous aurons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\rho\,|\dot{\boldsymbol{u}}_s|^2+C\varepsilon(\boldsymbol{u}_s):\varepsilon(\boldsymbol{u}_s)+\frac{1}{m}|p^2|+\rho_w\,|\dot{\boldsymbol{w}}|^2+2\rho_f\,\dot{\boldsymbol{u}}_s\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\Big]\,dx=\\&-\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{\mathcal{K}}|\dot{\boldsymbol{w}}|\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}f_u\cdot\dot{\boldsymbol{u}}_s\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}f_w\cdot\dot{\boldsymbol{w}}\,dx+\int_{\mathbb{R}^d}\dot{f}_p\,p\,dx,\end{aligned}$$

d'où l'identité (5.2.11).

• On en déduit la décroissance de l'énergie pour $f_u=f_w=0$ et $f_p=cte.$ ■

5.2.2 Etudes des milieux homogènes

5.2.2.1 Analyse par ondes planes

Dans ce paragraphe, en faisant une analyse par ondes planes, on rappelle les propriétés des ondes poroélastiques et l'influence de la porosité sur son comportement. On se place dans le cas homogène avec une source nulle. En remplaçant w par sa valeur en fonction des déplacements $\boldsymbol{u}_s$ (dans le solide) et $\boldsymbol{u}_f$ (dans le fluide, $w=\phi(\boldsymbol{u}_f-\boldsymbol{u}_s)$) et en éliminant le tenseur des

contraintes σ et la pression p, le système (5.1.1) se réécrit alors en fonction de $\boldsymbol{u}_s$ et $\boldsymbol{u}_f$ sous la forme équivalente :

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_{11}\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s+\rho_{12}\,\ddot{\boldsymbol{u}}_f+b(\dot{\boldsymbol{u}}_s-\dot{\boldsymbol{u}}_f)=S\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s)+R\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_f)-\mu\,\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}_s),\\ \rho_{12}\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s+\rho_{22}\,\ddot{\boldsymbol{u}}_f-b(\dot{\boldsymbol{u}}_s-\dot{\boldsymbol{u}}_f)=R\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s)+T\,\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_f).\end{array}\right. \tag{5.2.16}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l}S=\lambda+2\mu,\ \lambda=\lambda_0+M(\beta-\phi)^2,\ R=M\phi(\beta-\phi),\\ T=M\phi^2,\ \rho_{11}=\rho+\phi\rho_f(a-2),\\ \rho_{12}=\phi\rho_f(1-a),\ \rho_{22}=a\phi\,\rho_f,\ b=\phi^2/\mathcal{K}.\end{array}\right. \tag{5.2.17}$$

On s'intéresse aux solutions particulières du problème (5.2.16), de type ondes planes :

$$\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{u}_s(x,t)=u_s^0\,e^{\mathrm{i}\,(\omega t-k\cdot x)}\,\boldsymbol{d},\\ \boldsymbol{u}_f(x,t)=u_f^0\,e^{\mathrm{i}\,(\omega t-k\cdot x)}\,\boldsymbol{d}.\end{array}\right. \tag{5.2.18}$$

avec

$$k=(k_1,\cdots,k_d)^t,\ x=(x_1,\cdots,x_d)^t,\ \boldsymbol{d}=(\boldsymbol{d}_1,\cdots,\boldsymbol{d}_d)^t.$$

Cas sans atténuation

Remplaçons ces expressions dans le système (5.2.16) dans le cas sans dissipation ($b=0$), nous obtenons les relations de dispersion :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[S\,u_s^0+R\,u_f^0\right](k\cdot\boldsymbol{d})k+\mu\left[|k|^2\boldsymbol{d}-(k\cdot\boldsymbol{d})k\right]u_s^0=\left[\omega^2\rho_{11}\,u_s^0+\omega^2\rho_{12}\,u_f^0\right]\boldsymbol{d},\\ \left[R\,u_s^0+T\,u_f^0\right](k\cdot\boldsymbol{d})k=\left[\omega^2\rho_{12}\,u_s^0+\omega^2\rho_{22}\,u_f^0\right]\boldsymbol{d}.\end{array}\right. \tag{5.2.19}$$

Deux cas se présentent :

1. Les ondes P (ondes de compression) : ondes irrotationnelles, pour lesquelles on a : $k\wedge\boldsymbol{d}=0$. On introduit la vitesse $V=\omega/|k|$, en éliminant u_s^0 et u_f^0 dans le système (5.2.19), la relation de dispersion des ondes P s'écrit alors sous la forme :

$$\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{H}\Phi=V^2\Phi, \tag{5.2.20}$$

avec

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}\\ \rho_{12}&\rho_{22}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}S&R\\ R&T\end{pmatrix}\ \text{et}\ \Phi=(u_s^0,u_f^0)^t. \tag{5.2.21}$$

Les deux matrices $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$ sont symétriques définies positives, la matrice $\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{H}$ admet alors deux valeurs propres positives. Elles sont les solutions de l'équation suivante :

$$(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)V^2-(T\rho_{11}+S\rho_{22}-2R\rho_{12})V+ST-R^2=0. \tag{5.2.22}$$

Ceci implique que à l'habituelle onde P de vitesse V_{pf} (fast wave) dans un solide se rajoute une onde lente (slow wave ou onde de seconde espèce) de vitesse $V_{ps}\leq V_{pf}$. Biot a montré dans [20] que ces ondes ont la propriété : le déplacement d'ensemble et du fluide sont en phase pour l'onde de première espèce (de vitesse V_{pf}) et en opposition de phase pour l'onde de seconde espèce.

2. Les ondes S (ondes de cisaillement) : ondes isovolumiques, pour lesquelles on a $k \cdot \boldsymbol{d} = 0$, ce qui nous donne la relation de dispersion des ondes S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\rho_{11}\, u_s^0 + \rho_{12}\, u_f^0\right)\, V^2 = \mu\, u_s^0, \\ \left(\rho_{12}\, u_s^0 + \rho_{22}\, u_f^0\right)\, V^2 = 0. \end{array} \right. \tag{5.2.23}$$

En éliminant u_s^0 et u_f^0 dans ce système, on trouve la vitesse des ondes S :

$$V_s = \left[\frac{\mu\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}\right]^{1/2}. \tag{5.2.24}$$

Cas avec atténuation

On introduit maintenant la dissipation ($b \neq 0$). On suit les mêmes démarches que dans le cas sans dissipation, on porte (5.2.18) dans (5.2.16) on obtient la relation de dispersion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[S\, u_s^0 + R\, u_f^0\right] (k \cdot \boldsymbol{d})k + \mu \left[|k|^2 \boldsymbol{d} - (k \cdot \boldsymbol{d})k\right] u_s^0 = \left[\omega^2 \rho_{11}\, u_s^0 + \omega^2 \rho_{12}\, u_f^0\right] \boldsymbol{d} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \left[\mathrm{i}\, \omega b (u_s^0 - u_f^0)\right]\, \boldsymbol{d}, \\ \left[R\, u_s^0 + T\, u_f^0\right] (k \cdot \boldsymbol{d})k = \left[\omega^2 \rho_{12}\, u_s^0 + \omega^2 \rho_{22}\, u_f^0 + \mathrm{i}\, \omega b (u_s^0 - u_f^0)\right]\, \boldsymbol{d}. \end{array} \right. \tag{5.2.25}$$

On suit les mêmes démarches comme dans le cas sans dissipation et on montre la présence de deux types d'ondes :

1. Pour les ondes S, le système (5.2.25) se réécrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\omega^2 \rho_{11}\, u_s^0 + \omega^2 \rho_{12}\, u_f^0 - \mathrm{i}\, \omega b (u_s^0 - u_f^0)\right]\, \boldsymbol{d} = \mu |k|^2\, u_s^0, \\ \left[\omega^2 \rho_{12}\, u_s^0 + \omega^2 \rho_{22}\, u_f^0 + \mathrm{i}\, \omega b (u_s^0 - u_f^0)\right]\, \boldsymbol{d} = 0. \end{array} \right. \tag{5.2.26}$$

En éliminant u_s^0 et u_f^0 dans ce système, on obtient l'équation de dispersion :

$$\omega^2 = \mu |k|^2 \left(\frac{\rho_{22}\, \omega - \mathrm{i}\, b}{\gamma\, \omega - \mathrm{i}\, \bar{\rho}\, b}\right), \tag{5.2.27}$$

où γ et $\bar{\rho}$ sont deux coefficients positifs, s écrivent en fonction de ρ_{11}, ρ_{12} et ρ_{22} :

$$\gamma = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2, \quad \bar{\rho} = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}.$$

La relation (5.2.27) est dispersive car ω^2 ne varie pas linéairement avec $|k|^2$. Si on note par V' la vitesse complexe $V' = \omega/|k|$, la relation (5.2.27) se réécrit en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$ sous la forme :

$$V'^2 = A_r(f) + \mathrm{i}\ A_i(f)$$

avec

$$\begin{aligned} A_r(f) &= \mu \frac{4\pi^2 \rho_{22} \gamma\, f^2 + \bar{\rho} b^2}{4\pi^2 \gamma\, f^2 + \bar{\rho}^2\, b^2}, \\ A_i(f) &= \mu \frac{\rho_{22} \bar{\rho} b - \gamma b}{4\pi^2 \gamma\, f^2 + \bar{\rho}^2\, b^2}\, 2\pi\, f. \end{aligned}$$

On remarque que dans le cas sans dissipation ($b = 0$), on retrouve l'équation (5.2.24) : $\omega^2 = \mu |k|^2 \rho_{22}/\gamma$.

2. Nous considérons le cas des ondes P, après l'élimination de u_s^0 et u_f^0 l'équation de dispersion (5.2.25) se réécrit sous la forme :

$$(ST - R^2)z^2 - (T\rho_{11} + S\rho_{22} - 2R\rho_{12})z + \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 + \frac{ib}{\bar{\rho}\omega}(z-1) = 0 \tag{5.2.28}$$

avec $z = V_c/V'$, $V_c^2 = \dfrac{S+T+2R}{\bar{\rho}}$ et $\bar{\rho} = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}$. Dans le cas $b = 0$ on retrouve l'équation (5.2.22) avec $z = 1/V'$. En considérant les solutions $z_1 = V_{pf}^{-1}$ et $z_2 = V_{ps}^{-1}$ de cette équation (5.2.22), l'équation (5.2.28) se réécrit sous la forme :

$$(z - z_1)(z - z_2) + iA(z-1) = 0 \tag{5.2.29}$$

avec

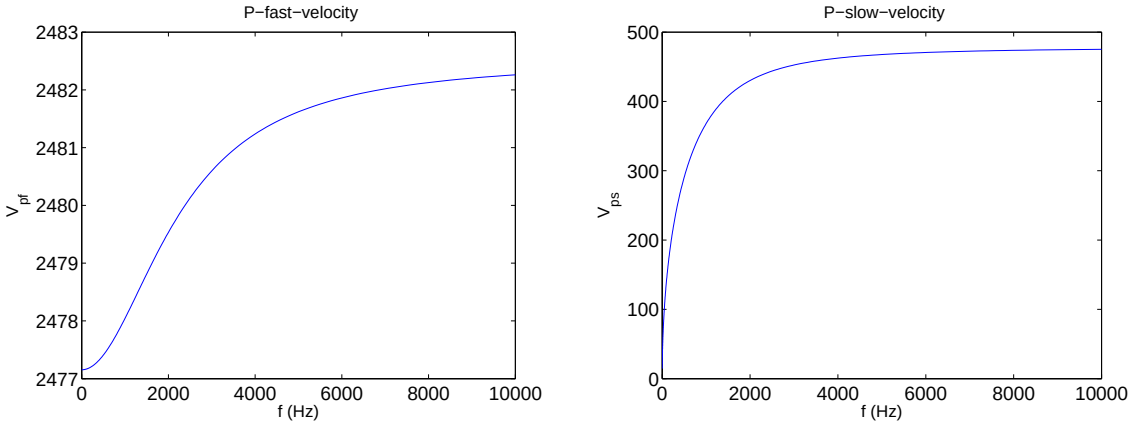
$$A = \frac{b}{\bar{\rho}\omega(ST - R^2)} = \frac{b}{2\pi f(ST - R^2)}.$$

Les solutions z de l'équation (5.2.29) sont donc fonction de de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$, de A et des solutions z_1 et z_2 de l'équation (5.2.22) qui correspond au cas sans dissipation.

Sur la figure 5.2.1 nous avons tracé les vitesse ($\Re e\,(\omega/|k|)$) de différentes type d'ondes en fonction de la fréquence pour des données physiques :

$$\left|\begin{array}{l} \rho = 1828\,kg/m^3, \rho_f = 500.\,kg/m^3,\ \rho_w = 7500\,kg/m^3,\ \mu = 4.516\,10^9\ Pa, \\ \lambda_0 = 8.29\,10^8\ Pa,\ \beta = 0.84, m = 1.92\,10^9\ Pa,\ \dfrac{1}{\mathcal{K}} = 10^8.\,N\,s/m^4, \end{array}\right.$$

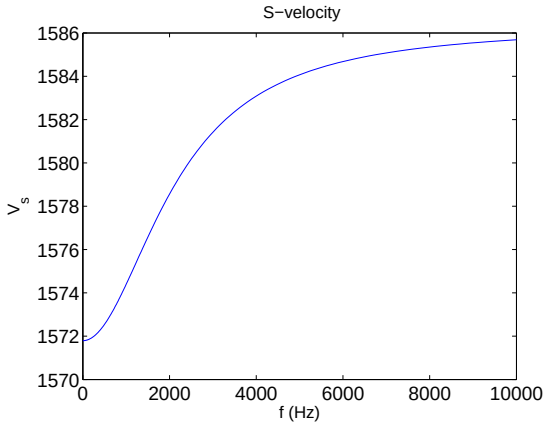
On observe sur ces figures que les vitesses sont croissantes en fonction de la fréquence et surtout pour l'onde lente qui est plus dispersive.



(a) Onde rapide

(b) Onde lente

FIG. 5.2.1 – Dispersion des ondes



(c) Onde de cisaillement

FIG. 5.2.1 – Dispersion des ondes (suite)

5.2.2.2 Solution analytique dans un milieu homogène infini

L'objectif de ce paragraphe est de calculer la solution analytique du problème modèle dans un milieu infini en dimension 2. On se place dans le cas d'un milieu homogène sans dissipation avec une source $f_p = \delta(x)\delta(y)\delta(t)$ ponctuelle en espace et en temps. Nous utilisons la méthode de Cagniard-de Hoop [30, 46] pour déterminer la solution exacte du problème modèle. Le principe de la méthode consiste à appliquer aux inconnues la transformation de Laplace en temps et celle de Fourier suivant l'une des variables d'espace (x ou y). Une fois le problème est résolu dans l'espace de Laplace-Fourier, nous revenons en espace physique temps-espace en manipulant les contours complexe. Nous renvoyons le lecteur à la thèse de J. Diaz [47] pour plus de détails sur la méthode et son application aux ondes acoustiques et élastiques.

Le système (5.1.1) se réécrit en fonction de $\boldsymbol{u}_s$, $\boldsymbol{u}_f$ et p sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_{11}\ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_{12}\ddot{\boldsymbol{u}}_f - (\lambda_0 + 2\mu)\nabla(\nabla.\boldsymbol{u}_s) + \mu\,\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}_s) + (\beta-\phi)\nabla p = 0, \\ \rho_{12}\ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_{22}\ddot{\boldsymbol{u}}_f + \phi\,\nabla p = 0, \\ p + M(\beta-\phi)\,\nabla.\boldsymbol{u}_s + M\phi\,\nabla.\boldsymbol{u}_f = M\delta(x)\delta(y)\delta(t). \end{array}\right. \tag{5.2.30}$$

où les coefficients ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} sont définis par (5.2.17).

Nous simplifions le système (5.2.30), en décomposant les champs de déplacement $\boldsymbol{u}_s$ et $\boldsymbol{u}_f$ en champs irrotationnels et isovolumiques (ondes P et S). On pose :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_s &= \nabla\Phi_s + \nabla\times\Psi_s, \\ \boldsymbol{u}_f &= \nabla\Phi_f + \nabla\times\Psi_f. \end{aligned} \tag{5.2.31}$$

Le système (5.2.30) devient alors :

$$A\ddot{\Phi} - B\Delta\Phi = F, \tag{5.2.32a}$$

$$\frac{1}{V_s^2}\ddot{\Psi}_s - \Delta\Psi_s = 0. \tag{5.2.32b}$$

où Φ et F sont deux vecteurs :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Phi_f \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} \phi - \beta \\ -\phi \end{pmatrix} M\,\delta(x)\delta(y)\delta(t)$$

A et B sont deux matrices symétriques définies positives, définies par :

$$A = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} S & R \\ R & T \end{pmatrix}$$

avec

$$S = \lambda + 2\mu,\ \lambda = \lambda_0 + M(\beta - \phi)^2,\ R = M\phi(\beta - \phi),\ T = M\phi^2$$

$V_s = \left[\frac{\mu\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}\right]^{1/2}$ est la vitesse des ondes S.

La matrice B est inversible, nous multiplions l'équation (5.2.32a), le système (5.2.32) se réécrit alors sous la forme :

$$B^{-1}A\,\ddot{\Phi} - \Delta\Phi = B^{-1}F, \tag{5.2.33a}$$

$$\frac{1}{V_s^2}\ddot{\Psi}_s - \Delta\Psi_s = 0. \tag{5.2.33b}$$

La matrice $B^{-1}A$ est diagonalisable $B^{-1}A = \mathcal{P}\,D\,\mathcal{P}^{-1}$, où $\mathcal{P}$ est la matrice de passage, $D = diag(V_{pf}^{-2}, V_{ps}^{-2})$ est la matrice diagonale semblable à $B^{-1}A$ et V_{pf} et V_{ps} sont respectivement le vitesses rapide et lente associées aux ondes P. En faisant le changement des variables $\Phi^* = \mathcal{P}^{-1}\Phi$ et $F^* = (B\mathcal{P})^{-1}F = (f_1^*, f_2^*)^t$, le système devient :

$$\begin{cases} D\ddot{\Phi}^* - \Delta\Phi^* = F^* \\ \dfrac{1}{V_s^2}\ddot{\Psi}_s - \Delta\Psi_s = 0. \end{cases} \tag{5.2.34}$$

Si on décompose les opérateurs différentiels en espace, le système (5.2.32) se réécrit alors sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V_{pf}^2}\ddot{\Phi}_{p1}^* - (\partial_{xx}^2\Phi_{p1}^* + \partial_{yy}^2\Phi_{p1}^*) = f_1^*\,\delta(x)\delta(y)\delta(t), \\ \dfrac{1}{V_{ps}^2}\ddot{\Phi}_{p2}^* - (\partial_{xx}^2\Phi_{p2}^* + \partial_{yy}^2\Phi_{p2}^*) = f_2^*\,\delta(x)\delta(y)\delta(t), \\ \dfrac{1}{V_s^2}\ddot{\Psi}_s - (\partial_{xx}^2\Psi_s + \partial_{yy}^2\Psi_s) = 0, \\ \Psi_f = -\dfrac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\Psi_s, \\ (\Phi_s, \Phi_f)^t = \mathcal{P}\,\Phi^*, \\ \boldsymbol{u}_s = \nabla\Phi_s + \nabla\times\Psi_s, \\ \boldsymbol{u}_f = \nabla\Phi_f + \nabla\times\Psi_f. \end{cases} \tag{5.2.35}$$

Appliquons la transformée de Laplace en temps et la transformée de Fourier suivant x à ce système, nous obtenons :

$$
(5.2.36) \qquad \begin{cases}
(\dfrac{s^2}{V_{pf}^2} + k^2)\hat{\Phi}_{p1}^* - \partial_{yy}^2 \hat{\Phi}_{p1}^* = f_1^* \delta(y), \\
(\dfrac{s^2}{V_{ps}^2} + k^2)\hat{\Phi}_{p2}^* - \partial_{yy}^2 \hat{\Phi}_{p2}^* = f_2^* \, \delta(y), \\
(\dfrac{s^2}{V_s^2} + k^2)\hat{\Psi}_s - \partial_{yy}^2 \hat{\Psi}_s = 0, \\
\hat{\Psi}_f = -\dfrac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \hat{\Psi}_s, \\
(\hat{\Phi}_s, \hat{\Phi}_f)^t = \mathcal{P} \, \hat{\Phi}^*, \\
\hat{\boldsymbol{u}}_s^x = ik\hat{\Phi}_s + \partial_y \hat{\Psi}_s, \; \hat{\boldsymbol{u}}_s^y = \partial_y \hat{\Phi}_s - ik\hat{\Psi}_s, \\
\hat{\boldsymbol{u}}_f^x = ik\hat{\Phi}_f + \partial_y \hat{\Psi}_f, \; \hat{\boldsymbol{u}}_f^y = \partial_y \hat{\Phi}_f - ik\hat{\Psi}_f.
\end{cases}
$$

Dans le cas d'une condition initiale nulle, la solution de ce système dans un milieu infini est donnée par :

$$
(5.2.37) \qquad \begin{cases}
\hat{\Phi}_{p1}^*(k, y, s) = \dfrac{f_1^*}{2z_{p_1}} e^{-|y| z_{p_1}} \\
\hat{\Phi}_{p2}^*(k, y, s) = \dfrac{f_1^*}{2z_{p_2}} e^{-|y| z_{p_2}} \\
\hat{\Psi}_s = 0, \; \hat{\Psi}_f = 0, \\
(\hat{\Phi}_s, \hat{\Phi}_f)^t = \mathcal{P} \, \hat{\Phi}^*, \\
\hat{\boldsymbol{u}}_s^x = ik\hat{\Phi}_s + \partial_y \hat{\Psi}_s, \; \hat{\boldsymbol{u}}_s^y = \partial_y \hat{\Phi}_s - ik\hat{\Psi}_s, \\
\hat{\boldsymbol{u}}_f^x = ik\hat{\Phi}_f + \partial_y \hat{\Psi}_f, \; \hat{\boldsymbol{u}}_f^y = \partial_y \hat{\Phi}_f - ik\hat{\Psi}_f.
\end{cases}
$$

avec $z_{p1}^2 = k^2 + \dfrac{s^2}{V_{pf}^2}$, $z_{p2}^2 = k^2 + \dfrac{s^2}{V_{ps}^2}$, $\boldsymbol{u}_s = (\boldsymbol{u}_s^x, \boldsymbol{u}_s^y)^t$ et $\boldsymbol{u}_f = (\boldsymbol{u}_f^x, \boldsymbol{u}_f^y)^t$.

On n'a traité que le cas particulier de la propagation d'une onde de compression (onde P). on peut généraliser cette étude en mettant la source sur les deux premières équations d'équilibre du système (5.1.1).

A partir du dernier système (5.2.37), on déduit la forme des solutions :

$$
(5.2.38) \qquad \begin{cases}
\hat{\boldsymbol{u}}_s^x = ik\left[\dfrac{\mathcal{P}_{11}f_1^*}{2z_{p1}}e^{-|y|z_{p1}} + \dfrac{\mathcal{P}_{12}f_2^*}{2z_{p2}}e^{-|y|z_{p2}}\right], \\[2ex]
\hat{\boldsymbol{u}}_s^y = -\dfrac{sign(y)}{2}\left[\mathcal{P}_{11}f_1^*e^{-|y|z_{p1}} + \mathcal{P}_{12}f_2^*e^{-|y|z_{p2}}\right], \\[2ex]
\hat{\boldsymbol{u}}_f^x = ik\left[\dfrac{\mathcal{P}_{21}f_1^*}{2z_{p1}}e^{-|y|z_{p1}} + \dfrac{\mathcal{P}_{22}f_2^*}{2z_{p2}}e^{-|y|z_{p2}}\right], \\[2ex]
\hat{\boldsymbol{u}}_f^y = -\dfrac{sign(y)}{2}\left[\mathcal{P}_{21}f_1^*e^{-|y|z_{p1}} + \mathcal{P}_{22}f_2^*e^{-|y|z_{p2}}\right].
\end{cases}
$$

avec $sign(x) = x/|x|$.

Pour calculer les solutions $\boldsymbol{u}_s$ et $\boldsymbol{u}_f$, il suffit de déterminer la transformée inverse de Laplace en s et la transformée inverse de Fourier en k. On pose alors

$$\hat{u}(k,y,s) = \frac{ik}{2z}e^{-|y|z},\ \hat{v}(k,y,s) = \frac{sign(y)}{2}e^{-|y|z}$$

avec $z = (k^2 + s^2/c^2)^{1/2}$ et c une constante positive.

En appliquant la transformée de Fourier inverse en k à $\hat{u}$, on obtient :

$$\hat{u}(x,y,s) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ik}{z}e^{-(|y|z+ikx)}\,dk.$$

En faisant le changement de variable $k = \dfrac{ps}{c}$, on aura :

$$
\begin{aligned}
\hat{u}(x,y,s) &= \frac{1}{4c\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ips}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\,e^{-\frac{s}{c}\left(|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+ipx\right)}\,dp, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,p,s)\,dp.
\end{aligned}
$$

Pour retourner au domaine temporel, on cherche un chemin Γ dans le plan complexe, vérifie $|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx = ct\ \ \forall p \in \Gamma$ avec $t \in \mathbb{R}^+$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,p,s)\,dp = \int_{\Gamma} f(x,y,p,s)\,dp.$$

Ceci nous permet par unicité de la transformé de Laplace et en utilisant le changement de variable $p = \gamma(t)$ de calculer $u(x,y,t) = h(x,y,t)$:

$$\hat{u}(x,y,s) = \int_0^{+\infty} h(x,y,t)\,e^{-st}\,dt.$$

On pose

$$
(5.2.39) \qquad \begin{cases}
|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx = ct, \\[2ex]
\Gamma = \{p \in \mathbb{C}\,/\,|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}} + ipx \in \mathbb{R}^+\}.
\end{cases}
$$

En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on trouve $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \gamma^+ \cup \gamma^-$, avec

$$\begin{aligned} \Gamma^{\pm} &= \{-i\frac{ct}{r}\cos\theta \pm |\sin\theta|(\frac{c^2t^2}{r^2}-1)^{\frac{1}{2}},\ \frac{r}{c} \le t\}, \\ \gamma^{\pm} &= \{-i\big(\frac{ct}{r}\cos\theta \pm |\sin\theta|(1-\frac{c^2t^2}{r^2}1)^{\frac{1}{2}}\big),\ 0 \le t \le \frac{r}{c}\}. \end{aligned} \tag{5.2.40}$$

Remarque 5.2.3 *Puisque, on s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu infini, nous n'utilisons pas les contours γ.*

En utilisant cette méthode, on calcule :

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,y,s) &= \frac{1}{4c\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ips}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{s}{c}\left(|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+ipx\right)}\, dp, \\ &= -\frac{1}{4c\pi}\left[\int_{\Gamma^+} \frac{ips}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{s}{c}\left(|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+ipx\right)}\, dp + \int_{\Gamma^-} \frac{ips}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{s}{c}\left(|y|(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+ipx\right)}\, dp\right], \\ &= \frac{\cos\theta}{2\pi r}\int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c^2}}} se^{-st}\, dt = \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} h_c(x,y,t) se^{-st}\, dt, \\ &= \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \partial_t h_c(x,y,t) e^{-st}\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'unicité de la transformée de Laplace, on déduit :

$$u(x,y,t) = H(t-\frac{r}{c})\, \partial_t h_c(x,y,t), \tag{5.2.41}$$

où H est la fonction de Heavside et $h_c(x,y,t) = \dfrac{xt}{2\pi r^2\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c^2}}}$.

On utilise les mêmes démarches pour $\hat{v}(k,y,s) = \dfrac{sign(y)}{2}e^{-|y|z}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{v}(x,y,s) &= \frac{sign(y)}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|y|z+ikx)}\, dk, \\ &= \frac{sign(y)}{4c\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} se^{-st}\, dp, \\ &= -\frac{sign(y)}{4c\pi}\left[\int_{\Gamma^+} se^{-st}\, dp + \int_{\Gamma^-} se^{-st}\, dp\right], \\ &= \frac{sign(y)|\sin\theta|}{2\pi r}\int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c^2}}} se^{-st}\, dt = \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} g_c(x,y,t) se^{-st}\, dt, \\ &= \int_{\frac{r}{c}}^{+\infty} \partial_t g_c(x,y,t) e^{-st}\, dt, \end{aligned}$$

On déduit alors :

$$v(x,y,t) = H(t-\frac{r}{c})\, \partial_t g_c(x,y,t),$$

avec $g_c(x,y,t) = \dfrac{yt}{2\pi r^2\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}}}$.

Finalement, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_s^x(x,y,t) &= \mathcal{P}_{11}^*\,\partial_t h_{c_1}(x,y,t) + \mathcal{P}_{12}^*\,\partial_t h_{c_2}(x,y,t),\\
\boldsymbol{u}_s^y(x,y,t) &= \mathcal{P}_{11}^*\,\partial_t g_{c_1}(x,y,t) + \mathcal{P}_{12}^*\,\partial_t g_{c_2}(x,y,t),\\
\boldsymbol{u}_f^x(x,y,t) &= \mathcal{P}_{21}^*\,\partial_t h_{c_1}(x,y,t) + \mathcal{P}_{22}^*\,\partial_t h_{c_2}(x,y,t),\\
\boldsymbol{u}_f^y(x,y,t) &= \mathcal{P}_{21}^*\,\partial_t g_{c_1}(x,y,t) + \mathcal{P}_{22}^*\,\partial_t g_{c_2}(x,y,t),
\end{aligned}
\tag{5.2.42}
$$

avec $c_1 = V_{pf}$, $c_2 = V_{ps}$ et $\mathcal{P}_{ij}^* = \mathcal{P}_{ij} f_j^* \;\; \forall\, i,j = 1,2$.

Dans le cas d'une source quelconque en temps et ponctuelle en espace $\delta(x)\delta(y)f(t)$, la solution de ce problème est obtenue à l'aide de la convolution de la fonction source avec les fonction de Green :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_s(x,y,t) &= \int_0^t \boldsymbol{u}_s^\delta(x,y,\tau) f(t-\tau)\,d\tau,\\
\boldsymbol{w}(x,y,t) &= \int_0^t \boldsymbol{w}^\delta(x,y,\tau) f(t-\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{5.2.43}
$$

où $(\boldsymbol{u}_s^\delta, \boldsymbol{w}^\delta)$ est la solution associée à une source ponctuelle en temps.

Chapitre 6

Choix d'une formulation variationnelle optimale

Ce chapitre a pour objectif d'étudier les formulations variationnelles mixtes possibles associées au problème modèle ainsi que le coût de stockage et la mise en oeuvre de chacune de ces formulations.

Sommaire

Introduction **161**
6.1 Problème avec quatre inconnues **161**
6.1.1 Formulation 1 162
6.1.2 Formulation 2 163
6.1.3 Formulations 3 et 4 163
6.2 Problème avec trois inconnues **166**
6.2.1 Formulations 5 et 6 166
6.2.2 Formulations 7 et 8 167
6.3 Problème avec deux inconnues-Formulation 9 . . . . . **168**
6.3.1 Récapitulation 169

Introduction

Pour utiliser une méthode numérique d'éléments finis, le choix de la formulation variationnelle est un outil préliminaire afin d'étudier l'efficacité de cette méthode. Le problème modèle comporte 4 équations et 4 inconnues et pour l'approcher, plusieurs formulations variationnelles sont possibles. C'est pour cette raison que nous avons consacré un chapitre pour l'étude des formulations variationnelles mixtes associées au problème modèle. Pour comparer les diverses formulations, on considère le problème dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et un maillage régulier de $(N-1)^2$ carrés. Nous calculons le coût de stockage des inconnues et nous étudions la mise en oeuvre de chacune des 7 formulations proposées, en utilisant les méthodes des éléments finis mixtes compatibles avec la condensation de masse [16, 52, 81, 83] développées au sein du projet Ondes.

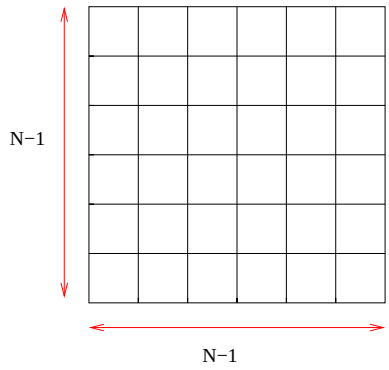


FIG. 6.0.1 – Maillage uniforme de $(N-1)^2$ éléments

6.1 Problème avec quatre inconnues

Pour réduire le coût de stockage des inconnues, on dérive les deux équations (5.1.1c)-(5.1.1d) par rapport au temps, et on note repectivement par u_s et w les dérivées de $\boldsymbol{u}_s$ et $\boldsymbol{w}$ par rapport au temps ($u_s = \dot{\boldsymbol{u}}_s$, $w = \dot{\boldsymbol{w}}$) le problème (5.1.1) se réécrit sous la forme d'un système d'évolution du premier ordre :

$$\rho\,\partial_t u_s + \rho_f\,\partial_t w - \boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma = f_u \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{6.1.1a}$$

$$\rho_f\,\partial_t u_s + \rho_w\,\partial_t w + \frac{1}{\mathcal{K}}\,w + \nabla\,p = f_w \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{6.1.1b}$$

$$A\,\partial_t\sigma = \varepsilon(u_s) - \beta\,A\boldsymbol{I}\,\partial_t p \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{6.1.1c}$$

$$\frac{1}{m}\partial_t p + \beta\,\nabla\cdot u_s + \nabla\cdot w = f_p \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{6.1.1d}$$

$$u_s(x,0) = u_0(x),\ w(x,0) = w_0(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{6.1.1e}$$

$$\sigma.n = 0,\ p = 0 \qquad \text{sur } \Gamma\times[0,T], \tag{6.1.1f}$$

où A est le tenseur inverse de C : $A = C^{-1}$ et f_p est la dérivée de F_p : $f_p = \dot{F}_p$.

6.1.1 Formulation 1

On considère les espaces fonctionnels :

$$\left\{\begin{array}{l} H_u = [H^1(\Omega)]^d, \quad H_w = [L^2(\Omega)]^d, \\ H_\sigma = L^2(\Omega, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)), \quad H_p = H^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{6.1.2}$$

On multiple l'équation (6.1.1a) par $\tilde{u} \in H_u$, (6.1.1b) par $\tilde{w} \in H_w$, (6.1.1c) par $\tilde{\sigma} \in H_\sigma$ et (6.1.1d) par $\tilde{p} \in H_p$. En intégrant sur Ω, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \rho\, u_s \cdot \tilde{u}\, dx + \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \rho_f\, w \cdot \tilde{u}\, dx - \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\sigma \cdot \tilde{u}\, dx = \displaystyle\int_\Omega f_u \cdot \tilde{u}\, dx, & \forall\, \tilde{u} \in H_u, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \rho_f\, u_s \cdot \tilde{w}\, dx + \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \rho_w\, w \cdot \tilde{w}\, dx + \displaystyle\int_\Omega \dfrac{1}{\mathcal{K}} w \cdot \tilde{w}\, dx & \\ + \displaystyle\int_\Omega \nabla p \cdot \tilde{w}\, dx = \displaystyle\int_\Omega f_w \cdot \tilde{w}\, dx, & \forall\, \tilde{w} \in H_w, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega A\, \sigma : \tilde{\sigma}\, dx - \displaystyle\int_\Omega \varepsilon(u_s) : \tilde{\sigma}\, dx - \displaystyle\int_\Omega \beta\, p\, A\boldsymbol{I} : \tilde{\sigma}\, dx = 0, & \forall\, \tilde{\sigma} \in H_\sigma, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\Omega \dfrac{1}{m} p\tilde{p} + \displaystyle\int_\Omega \beta\, \nabla \cdot u_s\, \tilde{p}\, dx + \displaystyle\int_\Omega \nabla \cdot w\, \tilde{p}\, dx = \displaystyle\int_\Omega f_p\, \tilde{p}\, dx, & \forall\, \tilde{p} \in H_p. \end{array}\right. \tag{6.1.3}$$

Après une intégration par parties de

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\sigma \cdot \tilde{u}\, dx = -\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u)\, dx \text{ et de } \int_\Omega \nabla \cdot w\, \tilde{p} = \int_\Omega w \cdot \nabla\tilde{p}\, dx,$$

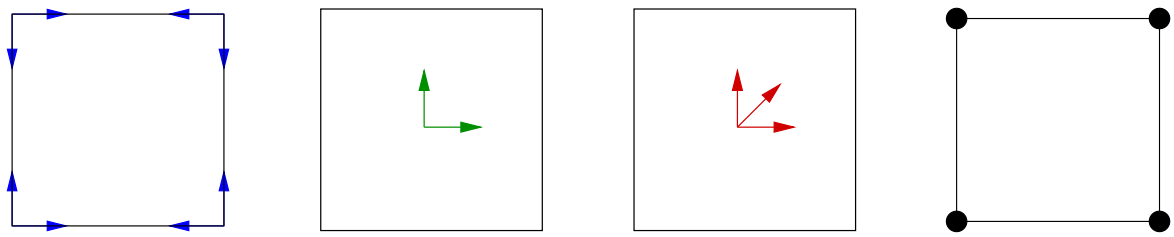
on aura la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } (u_s(t), w(t), \sigma(t), p(t)) \in H_u \times H_w \times H_\sigma \times H_p : & \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}(u_s, \tilde{u}) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\rho_f}(w, \tilde{u}) + \boldsymbol{b}(\sigma, \tilde{u}) = (f_u, \tilde{u}) & \forall\, \tilde{u} \in H_u, \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\rho_f}(u_s, \tilde{w}) + \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\rho_w}(w, \tilde{w}) + \boldsymbol{k}(w, \tilde{w}) + \boldsymbol{d}(p, \tilde{w}) = (f_w, \tilde{w}) & \forall \tilde{w} \in H_w, \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{a}(\sigma, \tilde{\sigma}) - \boldsymbol{b}(\tilde{\sigma}, u_s) - \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{c}(p, \tilde{\sigma}) = 0 & \forall\, \tilde{\sigma} \in H_\sigma, \\ \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{m}(p, \tilde{p}) + \boldsymbol{\beta}(u_s, \tilde{p}) - \boldsymbol{d}(\tilde{p}, w) = (f_p, \tilde{p}) & \forall\, \tilde{p} \in H_p. \end{array}\right. \tag{6.1.4}$$

avec les formes bilinéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\rho}(u_s, \tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega \rho\, u_s \cdot \tilde{u}\, dx, \quad \boldsymbol{\rho_f}(w, \tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega \rho_f\, w \cdot \tilde{u}\, dx, \quad \boldsymbol{\rho_w}(w, \tilde{w}) = \displaystyle\int_\Omega \rho_w\, w \cdot \tilde{w}\, dx \\ \boldsymbol{k}(w, \tilde{w}) = \displaystyle\int_\Omega \dfrac{1}{\mathcal{K}}\, w\tilde{w}\, dx, \quad \boldsymbol{a}(\sigma, \tilde{\sigma}) = \displaystyle\int_\Omega \mathcal{A}\sigma : \tilde{\sigma}\, dx, \quad \boldsymbol{m}(p, \tilde{p}) = \displaystyle\int_\Omega \dfrac{1}{m}\, p\tilde{p}\, dx \\ \boldsymbol{b}(\sigma, u_s) = \displaystyle\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u_s)\, dx, \quad \boldsymbol{d}(p, w) = \displaystyle\int_\Omega \nabla p \cdot w\, dx, \\ \boldsymbol{c}(p, \sigma) = \displaystyle\int_\Omega \beta p\, \mathcal{A}\boldsymbol{I} : \sigma\, dx = 0, \quad \boldsymbol{\beta}(u_s, p) = \displaystyle\int_\Omega \beta\, \nabla \cdot u_s\, p\, dx. \end{array}\right. \tag{6.1.5}$$

En utilisant les éléments finis de plus bas degré, l'approximation en espace de la formulation variationnelle, nécessite 2 degrés de liberté par noeud pour u_s, 2 degrés de liberté par élément pour w, 3 degrés de liberté par élément pour σ (symétrique) et 1 degré de liberté par noeud pour p (voir la figure ci-dessous).



(a) u_s (b) w (c) σ (d) p

FIG. 6.1.1 – Les degrés de liberté associées à la formulation 1

Pour le coût de stockage associé au maillage uniforme présenté sur la figure 6.0.1, nous avons le tableau suivant :

inconnue	degré de liberté (noeud/élément)	degré de liberté (domaine)
u_s	2 par noeud	$2N^2$
w	2 par élément	$2(N-1)^2$
σ	3 par élément	$3(N-1)^2$
p	1 par noeud	N^2
total		$\approx 8N^2$

TAB. 6.1.1 – Coût de stockage pour la formulation 1

6.1.2 Formulation 2

Si on exige la régularité sur w au lieu de p, en faisant l'intégration par partie :

$$\int_\Omega \nabla p\, w\, dx = -\int_\Omega p\, \nabla \cdot w\, dx$$

On obtient donc une deuxième formulation (6.1.4) avec les quatre inconnues, en exprimant dans (6.1.5) : $\boldsymbol{d}(p,w)$ par $-\displaystyle\int_\Omega p\, \nabla\cdot w\, dx$ et dans (6.1.2) : H_w par $[H(div,\Omega)]^d$ et H_p par $L^2(\Omega)$.

Le coût de stockage et le nombre de degrés de liberté associés à cette formulation sont donnés sur la figure 6.1.2 et le tableau 6.1.2.

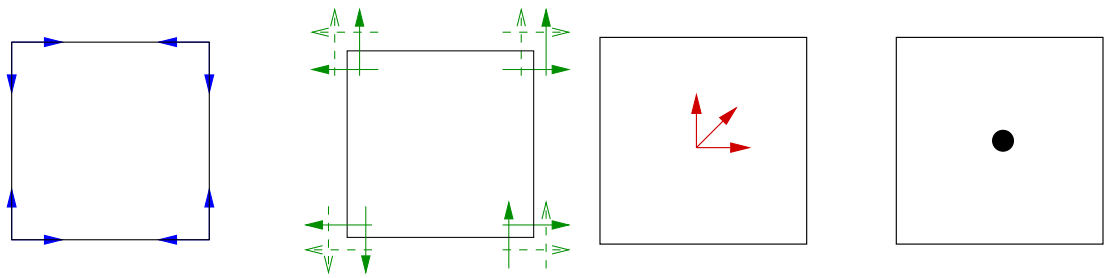
6.1.3 Formulations 3 et 4

On peut exiger la régularité sur σ au lieu de u_s en faisant l'intégration par partie :

$$\int_\Omega \sigma : \varepsilon(u_s)\, dx = -\int_\Omega u \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \sigma)\, dx, \tag{6.1.6}$$

inconnue	degré de liberté (noeud/élément)	degré de liberté (domaine)
u_s	2 par noeud	$2N^2$
w	4 par noeud	$4N^2$
σ	3 par élément	$3(N-1)^2$
p	1 par élément	$(N-1)^2$
total		$\approx 10N^2$

TAB. 6.1.2 – Coût de stockage pour la formulation 2



(a) u_s (b) w (c) σ (d) p

FIG. 6.1.2 – Les degrés de liberté associés à la formulation 2

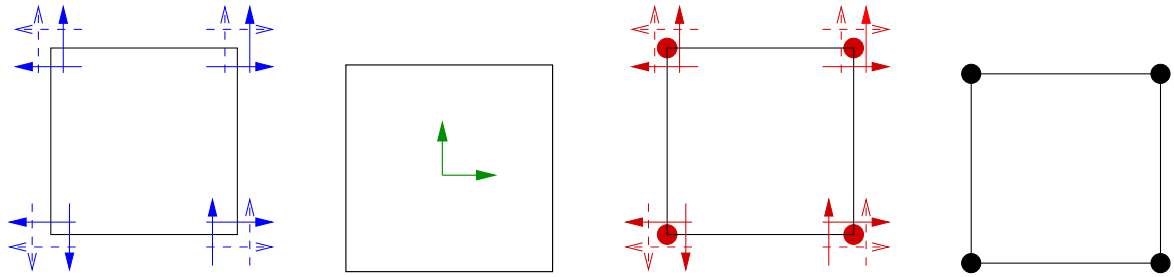
ce qui nous donne deux formulations possibles :

1. La formulation 3 consiste à remplacer dans (6.1.2) les espaces H_u et H_σ par

$$H_u = [H(div, \Omega)]^d, \quad H_\sigma = H(div, \Omega, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))$$

et dans (6.1.5) la forme bilinéaire $\boldsymbol{b}$ par

$$\boldsymbol{b}(\sigma, u) = -\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} \cdot \sigma) \cdot u \, dx. \tag{6.1.7}$$



(a) u_s (b) w (c) σ (d) p

FIG. 6.1.3 – Les degrés de liberté associés à la formulation 3

inconnue	degré de liberté (noeud/élément)	degré de liberté (domaine)
u_s	4 par noeud	$4N^2$
w	2 par élément	$2(N-1)^2$
σ	5 par noeud	$5N^2$
p	1 par noeud	N^2
total		$\approx 12N^2$

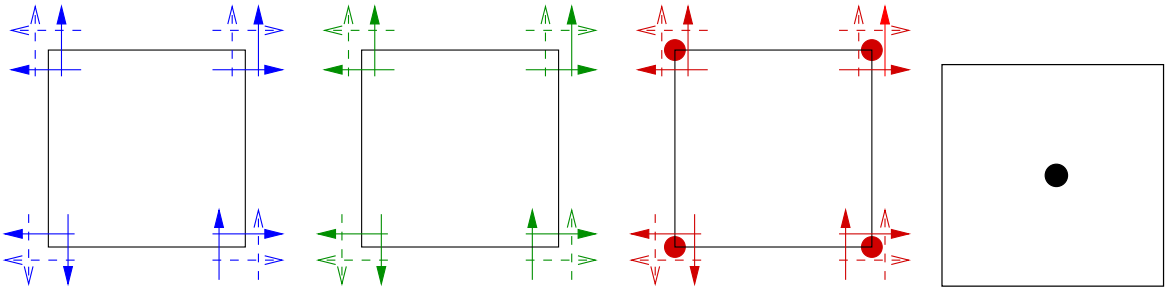
TAB. 6.1.3 – Coût de stockage pour la formulation 3

2. La formulation 4 consiste à prendre les espaces :

$$\begin{cases} H_u = [H(div,\Omega)]^d, \quad H_w = [H(div,\Omega)]^d, \\ H_\sigma = H(div,\Omega,\mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)), \quad H_p = L^2(\Omega), \end{cases}$$

et les deux formes bilinéaires :

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}(\sigma,u) = -\displaystyle\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma)\cdot u\,dx, \\ \boldsymbol{d}(p,w) = -\displaystyle\int_\Omega p\,\nabla\cdot w\,dx. \end{cases}$$



(a) u_s (b) w (c) σ (d) p

FIG. 6.1.4 – Les degrés de liberté associés à la formulation 4

Remarque 6.1.1 *Les deux dernières formulations ne sont pas classiques et ne présentent pas un grand intérêt par rapport aux deux formulations précédentes ; on a augmenté la régularité pour le tenseur des contraintes σ, par contre on n'a pas gagné beaucoup sur la régularité du déplacement $u \in H(div,\Omega)$ au lieu de $u \in H^1(\Omega)$.*

inconnue	degré de liberté (noeud/élément)	degré de liberté (domaine)
u_s	2 4 par noeud	$4N^2$
w	2 4 par noeud	$4N^2$
σ	3 par noeud	$5N^2$
p	1 par élément	$(N-1)^2$
total		$\approx 14N^2$

TAB. 6.1.4 – Coût de stockage pour la formulation 4

6.2 Problème avec trois inconnues

6.2.1 Formulations 5 et 6

En éliminant la pression p du système (6.1.1), on obtient un système avec trois inconnues :

$$\text{(6.2.1)} \qquad \begin{cases} \rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_f\,\ddot{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma = f_u, \\ \rho_f\,\ddot{\boldsymbol{w}} + \rho_w\,\ddot{\boldsymbol{w}} + \dfrac{1}{\mathcal{K}}\,\dot{\boldsymbol{w}} - \nabla(M\beta\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s) - \nabla(m\nabla\cdot\boldsymbol{w}) = f_w + \nabla(m\,F_p), \\ A\,\sigma = \varepsilon(\boldsymbol{u}_s) + m\beta^2\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s\,A\boldsymbol{I} + m\beta\,\nabla\cdot\boldsymbol{w}\,A\boldsymbol{I}. \end{cases}$$

Pour ce système, on a deux formulations variationnelles possibles :

1. La formulation 5 est donnée par :

$$\text{(6.2.2)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } (\boldsymbol{u}_s(t), \boldsymbol{w}(t), \sigma(t)) \in H_u \times H_w \times H_\sigma : \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{u}) + \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho_f}(\boldsymbol{w}, \tilde{u}) + \boldsymbol{b}(\sigma, \tilde{u}) = (f_u, \tilde{u}) & \forall\,\tilde{u} \in H_u, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho_f}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{w}) + \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho_w}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) + \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) + \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{w}) & \\ +\boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) = (f_w, \tilde{w}) - (m\,F_p, \nabla\cdot\tilde{w}) & \forall \tilde{w} \in H_w, \\ \boldsymbol{a}(\sigma, \tilde{\sigma}) - \boldsymbol{b}(\tilde{\sigma}, u_s) - \boldsymbol{c_1}(u_s, \tilde{\sigma}) - \boldsymbol{c_2}(w, \tilde{\sigma}) = 0 & \forall\,\tilde{\sigma} \in H_\sigma. \end{cases}$$

où les espaces fonctionnels H_u, H_w et H_σ sont définis par :

$$\text{(6.2.3)} \qquad \begin{cases} H_u = [H^1(\Omega)]^d, \quad H_w = [H(div, \Omega)]^d, \\ H_\sigma = L^2(\Omega, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d)), \end{cases}$$

et les formes bilinéaires sont données par :

$$\text{(6.2.4)} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{d_1}(\boldsymbol{u}_s, \boldsymbol{w}) = \displaystyle\int_\Omega m\beta\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s\,\nabla\cdot\boldsymbol{w}\,dx, \quad \boldsymbol{d_2}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) = \int_\Omega m\nabla\cdot\boldsymbol{w}\,\nabla\cdot\tilde{w}\,dx \\ \boldsymbol{c_1}(\boldsymbol{u}_s, \sigma) = \displaystyle\int_\Omega \beta^2 m\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s\,A\boldsymbol{I} : \sigma\,dx, \quad \boldsymbol{c_2}(\boldsymbol{w}, \sigma) = \int_\Omega \beta m\,\nabla\cdot\boldsymbol{w}\,A\boldsymbol{I} : \sigma\,dx, \\ \boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho_f},\ \boldsymbol{\rho_w},\ \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{a} \text{ et } \boldsymbol{b} \text{ sont d'finies par (6.1.5).} \end{cases}$$

Pour cette formulation variationnelle, le nombre de degrés de liberté associés aux inconnues $\boldsymbol{u}_s$, $\boldsymbol{w}$ est le même que celui de la formulation 2 et comme le système est du second ordre en temps, on aura besoin de $15N^2$ place mémoire pour le stockage des inconnues $\boldsymbol{u}_s$, $\boldsymbol{w}$ et σ.

2. La formulation 6 consiste à définir la forme bilinéaire $\boldsymbol{b}$ par (6.1.7) et prendre les espaces $H_u = [H(div, \Omega)]^d$ et $H_\sigma = H(div, \Omega, \mathcal{L}^{sym}(\mathbb{R}^d))$.

   Remarque 6.2.1 *Comme dans la dernière remarque, cette formulation ne présente pas un grand intérêt pratique.*

6.2.2 Formulations 7 et 8

En éliminant le tenseur des contraintes σ du système (5.1.1), on obtient un système avec les trois inconnues $\boldsymbol{u}_s$, $\boldsymbol{w}$ et p :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_f\,\ddot{\boldsymbol{w}} - \displaystyle\sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathcal{C}^{kl}\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial x_l}) - \nabla(\beta\, p) = f_u, \\ \rho_f\,\ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_w\,\ddot{\boldsymbol{w}} + \dfrac{1}{\mathcal{K}}\dot{\boldsymbol{w}} + \nabla\, p = f_w, \\ \dfrac{1}{m}p + \beta\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s + \nabla\cdot\boldsymbol{w} = F_p. \end{array}\right. \tag{6.2.5}$$

Avec $\mathcal{C}^{kl} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{C}^{kl}_{ij} = C_{iklj} = C_{ikjl}.$$

La formulation 7 associée au problème (6.2.5), est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } (u_s(t), w(t), p(t)) \in H_u \times H_w \times H_p : & \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{u}) + \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho_f}(\boldsymbol{w}, \tilde{u}) + \bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{u}) + \boldsymbol{\beta}(\tilde{u}, p) = (f_u, \tilde{u}) & \forall\, \tilde{u} \in H_u, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho_f}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{w}) + \dfrac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{\rho_w}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) + \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) + \boldsymbol{d}(p, \tilde{w}) = (f_w, \tilde{w}) & \forall \tilde{w} \in H_w, \\ \boldsymbol{m}(p, \tilde{p}) + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{p}) - \boldsymbol{d}(\boldsymbol{w}, \tilde{p}) = (F_p, \tilde{p}) & \forall\, \tilde{p} \in H_p. \end{array}\right. \tag{6.2.6}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} H_u = [H^1(\Omega)]^d, \quad H_w = [L^2(\Omega)]^d, \\ H_p = H^1(\Omega), \end{array}\right. \tag{6.2.7}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{u}) = \displaystyle\sum_{k,l} \int_\Omega \mathcal{C}^{kl}\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial x_l}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k}\,dx, \\ \boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho_f},\ \boldsymbol{\rho_w},\ \boldsymbol{k}, \text{ et } \boldsymbol{d} \text{ sont données par (6.1.5).} \end{array}\right. \tag{6.2.8}$$

On a les même espaces fonctionnels que dans la première formulation, par contre le système est du second ordre en temps, il exige alors le double d'espace mémoire pour les inconnues $\boldsymbol{u}_s$ et $\boldsymbol{w}$, ce qui nous donne au total $9N^2$.

La formulation 8 consiste à prendre comme espaces fonctionnels :

$$\left\{\begin{array}{l} H_u = [H^1(\Omega))]^d, \quad H_w = H(div,\Omega), \\ H_p = L^2(\Omega), \end{array}\right. \tag{6.2.9}$$

et à faire une intégration par parties des termes $\displaystyle\int_\Omega \nabla p \cdot w\, dx = -\int_\Omega p\, \nabla \cdot w\, dx$, ce qui équivaut à remplacer $\boldsymbol{b}$ dans (6.1.5) par :

$$\boldsymbol{b}(p,w) = -\int_\Omega p\, \nabla \cdot w\, dx. \tag{6.2.10}$$

Pour cette formulation, on a $13N^2$ place mémoire pour les inconnues.

6.3 Problème avec deux inconnues-Formulation 9

En éliminant la pression p et le tenseur des contraintes σ du système (5.1.1), on obtient un système avec deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\, \ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_f\, \ddot{\boldsymbol{w}} - \displaystyle\sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_k}(\mathcal{C}^{kl} \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial x_l}) - \nabla(m\beta^2 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_s) \\ -\nabla(m\beta\, \nabla \cdot \boldsymbol{w}) = f_u - \nabla(m\beta\, F_p), \\ \rho_f\, \ddot{\boldsymbol{u}}_s + \rho_w\, \ddot{\boldsymbol{w}} + \dfrac{1}{\mathcal{K}}\, \dot{\boldsymbol{w}} - \nabla(m\beta\, \nabla \cdot \boldsymbol{u}_s) - \nabla(M \nabla \cdot \boldsymbol{w}) = f_w - \nabla(m\, F_p). \end{array}\right. \tag{6.3.1}$$

La formulation variationnelle associée a ce problème est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver } (\boldsymbol{u}_s(t), \boldsymbol{w}(t)) \in H_u \times H_w : & \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\, \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{u}) + \dfrac{d^2}{dt^2}\, \boldsymbol{\rho_f}(\boldsymbol{w}, \tilde{u}) + \boldsymbol{\beta_2}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{u}) + \boldsymbol{\beta_1}(\boldsymbol{w}, \tilde{u}) = & \\ (f_u, \tilde{u}) + (m\beta\, F_p, \nabla \cdot \tilde{u}) & \forall\, \tilde{u} \in H_u, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\, \boldsymbol{\rho_f}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{w}) + \dfrac{d^2}{dt^2}\, \boldsymbol{\rho_w}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) + \dfrac{d}{dt}\, \boldsymbol{k}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) + \boldsymbol{\beta_1}(\boldsymbol{u}_s, \tilde{w}) & \\ +\boldsymbol{\beta_0}(\boldsymbol{w}, \tilde{w}) = (f_w, \tilde{w}) + (m\, F_u, \nabla \cdot \tilde{w}) & \forall \tilde{w} \in H_w. \end{array}\right. \tag{6.3.2}$$

où les espaces fonctionnels H_u et H_w sont donnés par :

$$\left\{\begin{array}{l} H_u = [H^1(\Omega)]^d, \\ H_w = H(div,\Omega), \end{array}\right. \tag{6.3.3}$$

et les formes bilinéaires $\boldsymbol{\beta_i}$ $i = 0,1,2$ sont difinies par :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\beta_i}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \displaystyle\int_\Omega M\beta^i \nabla \cdot \tilde{u}\, \nabla \cdot \tilde{v}\, dx, \\ \forall\, (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H(div,\Omega) \times H(div,\Omega) \text{ et } i = 0,1,2. \end{array}\right. \tag{6.3.4}$$

Avec ce choix, nous aurons un coût de stockage de $12N^2$.

6.3.1 Récapitulation

En récapitulant, nous aurons le tableau suivant :

Formulation	Espaces fonctionnels	Stockage	Maillage
1	$u \in H^1$, $w \in L^2$, $\sigma \in L^2$, $p \in H^1$	$8N^2$	irrégulier
2	$u \in H^1$, $w \in H(div)$, $\sigma \in L^2$, $p \in L^2$	$10N^2$	régulier
5	$u \in H^1$, $w \in H(div)$, $\sigma \in L^2$	$15N^2$	régulier
7	$u \in H^1$, $w \in L^2$, $p \in H^1$	$9N^2$	irrégulier
8	$u \in H^1$, $w \in H(div)$, $p \in L^2$	$13N^2$	régulier
9	$u \in H^1$, $w \in H(div)$	$12N^2$	régulier

TAB. 6.3.1 – Coût de stockage pour les différentes formulations

Dans cette étude nous n'avons pas présenté les formulations d'ordre 1 en temps associées aux formulations 5-9, elles nécessitent l'introduction des inconnues supplémentaires et n'améliore pas le coût de stockage des inconnues par rapport à celles d'ordre 2.

Pour la suite nous retenons la formulation la plus robuste, nous faisons le choix de la formulation 1, c'est la moins coûteuse pour le stockage des inconnues, elle est compatible avec l'utilisation des maillages irréguliers. Nous notons que cette formulation est adaptive au code éléments finis mixtes [52] que on en dispose (voir le chapitre suivant).

Chapitre 7

Approximation et analyse numérique

Dans ce chapitre nous considérons une formulation mixte du premier ordre en temps pour le problème de la propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques, nous présentons une méthode numérique basée sur l'utilisation des éléments finis mixtes d'ordre élevé avec condensation de masse ; nous proposons un schémas aux différences finies en temps pour lequel nous démontrons une condition suffisante de stabilité, et pour modéliser les milieux non bornés, nous adaptons la technique de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML).

Sommaire

Introduction **173**
7.1 Rappel du principe de la méthode **174**
7.2 Reformulation du problème **174**
7.3 Formulation variationnelle **176**
7.3.1 Energie en vitesse 177
7.3.2 Semi-discrétisation en espace 179
7.3.3 Calcul matriciel 182
7.3.3.1 Calcul de la matrice de rigidité 183
7.3.3.2 Calcul des matrices de masse 184
7.3.3.3 Calcul des matrices de couplage 185
7.3.4 Discrétisation en temps 186
7.4 Stabilité et quantité d'énergie discrète **190**
7.4.1 Quantité d'énergie discrète 190
7.4.2 Étude de stabilité 193
7.5 Traitement des milieux ouverts **196**
7.5.1 Formulation variationnelle 199
7.5.2 Discrétisation 199
7.5.3 Mise en oeuvre de la méthode 204

Introduction

Nous nous intéressons à l'adaptation de la méthode des éléments finis mixtes spectraux développés par S. Fauqueux [52] pour les problèmes de la propagation d'ondes en milieu acoustique et élastique au problème de la propagation d'ondes dans les milieux poroélastique hétérogènes. Le choix de cette méthode est motivé par les raisons suivantes :

- Compatible avec la formulation variationnelle 1 retenue dans le chapitre précédent.
- Un stockage moins coûteux (inconnues et matrice de rigidité).
- Compatible avec la technique de condensation de masse.
- Utilisation d'un maillage hexaédrique pour les milieux hétérogènes.
- Méthode d'ordre élevé (intéressante pour le problème de la dispersion numérique et la modélisation des interfaces courbes).

La plupart des méthodes numériques développées pour la propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques qu'on trouve dans la littérature géophysique sont dans le domaine fréquentiel ou basées sur des schémas d'approximation aux différences finies. Dans ce cadre nous citons en particulier les travaux de Atalla et al. [2, 72] et de Gauzellino et al. [54] pour les méthodes dans le domaine fréquentiel et les travaux de Zeng et al. [84, 85] et celui de Dai et al. [44] pour les schémas aux différences finies. Cependant, une manière robuste pour traiter les milieux hétérogènes et à géométries complexes est d'utiliser la méthode des éléments finis. Dans ce cadre, S. Fauqueux [52] a développé pour son travail de thèse une méthode d'éléments finis mixtes pour les ondes en acoustique et en élastique. Notre but est essentiellement d'étendre cette méthode aux milieux poroélastiques et d'en analyser les principales propriétés théoriques et pratiques. Cette méthode est particulièrement conçue pour les maillages quadrangles ou hexaédriques pour traiter les milieux hétérogènes et présente l'intérêt d'être compatible avec la condensation de masse (schémas explicites en temps).

Ce chapitre est consacré à l'approximation et l'analyse numérique du problème de la poroélasticité. Dans un premier temps, nous rappelons le principe de la méthode dans le cadre de la propagation d'ondes en milieu acoustique. Dans un second temps, nous décrivons la méthode dans un cadre assez général (dimension $d = 2, 3$), nous considérons une formulation varitionnelle mixte en premier ordre en temps qui fait intervenir la vitesse dans le solide, la vitesse de filtration et la pression. Nous présentons une méthode d'approximation numérique basée sur l'utilisation des éléments finis mixtes pour la semi-discrétisation en espace et un schéma aux différences finies d'ordre 2. En section 7.4 nous démontrons la stabilité de notre schéma dans les milieux hétérogène à l'aide d'une technique d'énergie discrète. Finalement dans un dernier temps, nous consacrons la dernière section de ce chapitre à la modélisation des milieux ouverts par l'adaptation des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) à notre problème.

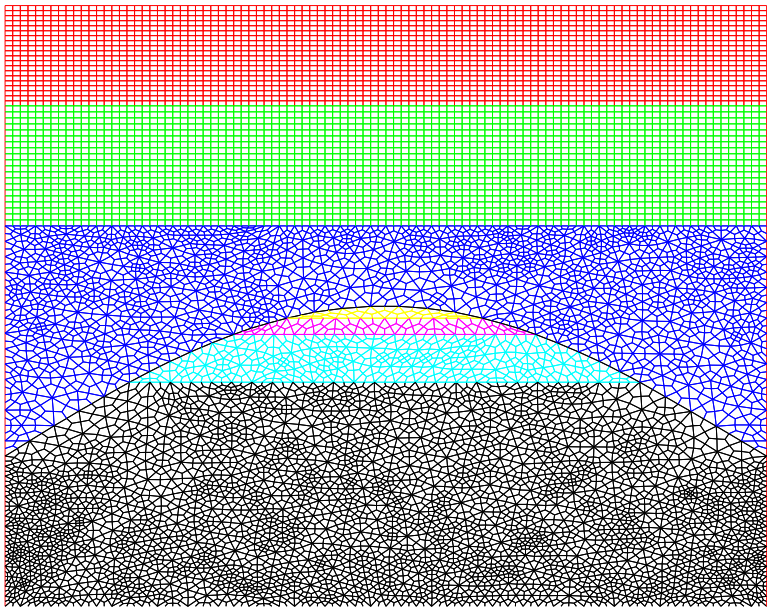


FIG. 7.0.1 – Exemple d'un maillage quadrangulaire adapté

7.1 Rappel du principe de la méthode

La méthode a été introduite pour la propagation d'ondes en milieu acoustique et a été adaptée pour un modèle dérivé du système de l'élastodynamique [52]. Le principe de cette méthode est basé d'une part sur une reformulation du problème initial ; en le réécrivant sous la forme d'un système qui ne fait intervenir que le gradient ∇ et la divergence $\nabla\cdot$ (son adjoint) en exprimant tout ce qui est tensoriel à l'aide des vecteurs, et d'autre part sur l'utilisation d'une formulation mixte $H^1 - L^2$ dans des espaces d'approximation non classiques et l'utilisation de la technique de la condensation de masse. Ceci permet en particulier d'avoir un schéma explicite et des matrices de rigidité indépendantes des propriétés géométriques et physiques du domaine.

Nous adaptons cette méthode aux équations de la poroélasticité, pour le faire nous reformulons d'abord notre problème.

7.2 Reformulation du problème

Dans le chapitre précédent nous avons fait une étude préliminaire pour un choix optimal de la formulation variationnelle. nous utilisons la moins coûteuse (6.1.4). En utilisant la symétrie du tenseur de l'élasticité C, nous pouvons réécrire la loi de comportement :

$$\sigma = C\,\varepsilon(u_s) - \beta\,p\,\boldsymbol{I}_d$$

sous la forme [52] :

$$\begin{aligned}
\sigma_{ik} &= \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d} C_{ikjl}\,(\partial_{x_l}u_j + \partial_{x_j}u_l) - \beta\, p\, \delta_{ik} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d} C_{ikjl}\,\partial_{x_l}u_j + \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d} C_{iklj}\,\partial_{x_l}u_j - \beta\, p\, \delta_{ik} \\
&= \sum_{j,l=1}^{d} C_{ikjl}\,\partial_{x_l}u_j - \beta p\, \delta_{ik} \;\; (C_{iklj} = C_{ikjl}) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \big(\sum_{l=1}^{d} C_{ikjl}\,\partial_{x_l}u_j\big) - \beta p\, \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{d} (A_{ij}\nabla u_j)_k - \beta p\, \delta_{ik},
\end{aligned}$$

avec A_{ij} la matrice carrée définie par $(A_{ij})_{kl} = C_{ikjl}$. Nous avons alors :

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{id})^t = \sum_{j=1}^{d} A_{ij}\nabla u_j - \beta\, p\, \vec{e}_i.$$

avec $A_{ij} = \begin{pmatrix} C_{i1j1} & C_{i1j2} \\ C_{i2j1} & C_{i2j2} \end{pmatrix}$ pour $d = 2$ et $A_{ij} = \begin{pmatrix} C_{i1j1} & C_{i1j2} & C_{i1j3} \\ C_{i2j1} & C_{i2j2} & C_{i2j3} \\ C_{i3j1} & C_{i3j2} & C_{i3j3} \end{pmatrix}$ pour $d = 3$.

Remarque 7.2.1 *Nous remarquons que :*

1. *Les propriétés de la symétrie du tenseur C impliquent :*

$$A_{ji} = A_{ij}^* \;\; \forall\, i, j = 1, d. \tag{7.2.1}$$

2. *Dans le cas isotrope, nous avons, en 2D :*

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\; A_{12} = A_{21}^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix},\; A_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda_0 + 2\mu \end{pmatrix},$$

et, en 3D :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_0 + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\; A_{12} = A_{21}^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\; A_{13} = A_{31}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\; A_{23} = A_{32}^* \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},\; A_{33} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 + 2\mu \end{pmatrix}.$$

On introduit les nouvelles variables vectorielles $(\gamma_i)_{i=1,d}$:

$$\dot{\gamma}_i = \nabla u_i \;\; \forall\, i = 1, d. \tag{7.2.2}$$

On considère le problème modèle (5.1.1) dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, en gardant les notations u_s et w pour le champs de vitesse dans le solide et la vitesse de filtration, nous pouvons écrire

une nouvelle reformulation du problème modèle en premier ordre en temps, sous la forme :

$$\rho\,\dot{u}_s + \rho_f\,\dot{w} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma = f_u \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{7.2.3a}$$

$$\rho_f\,\dot{u}_s + \rho_w\,\dot{w} + \frac{1}{\mathcal{K}}\,w + \nabla p = f_w \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{7.2.3b}$$

$$\dot{\gamma}_i = \nabla u_i \quad \forall\, i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{7.2.3c}$$

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{d} A_{ij}\gamma_j - \beta\,p\,\vec{e}_i \quad \forall\, i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{7.2.3d}$$

$$\frac{1}{m}\,\dot{p} + \beta\sum_{j=1}^{d}\dot{\gamma}_j.\vec{e}_j + \nabla\cdot w = f_p \qquad \text{dans } \Omega\times]0,T], \tag{7.2.3e}$$

$$u_s(x,0) = u_0(x),\ w(x,0) = w_0(x) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{7.2.3f}$$

$$p(x,0) = p_0(x),\ \gamma_i(x,0) = \gamma_{i0}(x) \ \ \forall\, i = 1,d \qquad \text{dans } \Omega, \tag{7.2.3g}$$

$$p = 0,\ \sigma_i.n = 0 \ \ \forall\, i = 1,d \qquad \text{sur } \partial\Omega\times[0,T]. \tag{7.2.3h}$$

où n est la normale extérieure au domaine.

Dans tout ce qui suit nous prendrons comme problème modèle le système du premier ordre en temps et en espace (7.2.3).

7.3 Formulation variationnelle

Nous obtenons la formulation variationnelle mixte, en appliquant à l'équation (7.2.3a) le produit par $\tilde{u} \in H_u = [H^1(\Omega)]^d$, à (7.2.3b) par $\tilde{w} \in H_w = [L^2(\Omega)]^d$, à (7.2.3c) par $\tilde{\gamma} \in H_\gamma = H_w$, à (7.2.3d) par $\tilde{\sigma} \in H_\sigma = H_w$, à (7.2.3e) par $\tilde{p} \in H_p = H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω. Après une intégration par parties des termes :

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma).\tilde{u}\,dx = -\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \sigma_i.\nabla\tilde{u}_i\,dx,$$

$$\int_\Omega \nabla\cdot w\,\tilde{p}\,dx = -\int_\Omega w.\nabla\tilde{p}\,dx,$$

nous obtenons la formulation mixte suivante :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}(u_s,\tilde{u}) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_f(w,\tilde{u}) + \sum_{i=1}^{d}\boldsymbol{r}(\sigma_i,\tilde{u}_i) = (f_u,\tilde{u}), \quad \forall\,\tilde{u}\in H_u \tag{7.3.1a}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_f(\tilde{w},u_s) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_w(w,\tilde{w}) + \boldsymbol{k}(w,\tilde{w}) + \boldsymbol{r}(\tilde{w},p) = (f_w,\tilde{w}), \quad \forall\,\tilde{w}\in H_w \tag{7.3.1b}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(\gamma_i,\tilde{\gamma}) - \boldsymbol{r}(\tilde{\gamma},u_i) = 0 \qquad \forall\, i=1,d, \quad \forall\,\tilde{\gamma}\in H_w \tag{7.3.1c}$$

$$\boldsymbol{d}(\sigma_i,\tilde{\sigma}) - \sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j,\tilde{\sigma}) + \boldsymbol{b}_i(p,\tilde{\sigma}) = 0 \qquad \forall\, i=1,d, \quad \forall\,\tilde{\sigma}\in H_w \tag{7.3.1d}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}(p,\tilde{p}) + \sum_{i=1}^{d}\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}_i(\tilde{p},\gamma_i) - \boldsymbol{r}(w,\tilde{p}) = (f_p,\tilde{p}). \quad \forall\,\tilde{p}\in H_p \tag{7.3.1e}$$

avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}(u,\tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega \rho\, u.\tilde{u}\,dx,\ \boldsymbol{m}(p,\tilde{p}) = \int_\Omega \frac{1}{m} p\,\tilde{p}\,dx, \\ \boldsymbol{\rho}_w(w,\tilde{w}) = \displaystyle\int_\Omega \rho_w\, w.\tilde{w}\,dx,\ \boldsymbol{k}(w,\tilde{w}) = \int_\Omega \frac{1}{\mathcal{K}} w.\tilde{w}\,dx, \\ \boldsymbol{d}(w,\tilde{w}) = \displaystyle\int_\Omega w.\tilde{w}\,dx,\ \boldsymbol{a}_{ij}(w,\tilde{w}) = \int_\Omega A_{ij} w.\tilde{w}\,dx, \\ \boldsymbol{\rho}_f(w,u) = \displaystyle\int_\Omega \rho_f\, u.w\,dx,\ \boldsymbol{b}_i(p,w) = \int_\Omega \beta\, p\,\vec{e}_i.w\,dx,\ \boldsymbol{r}(w,p) = \int_\Omega w.\nabla p\,dx, \\ (f_u,\tilde{u}) = \displaystyle\int_\Omega f_u\cdot\tilde{u}\,dx,\ (f_w,\tilde{w}) = \int_\Omega f_w\cdot\tilde{w}\,dx,\ (f_p,\tilde{p}) = \int_\Omega f_p\,\tilde{p}\,dx. \end{cases} \tag{7.3.2}$$

7.3.1 Energie en vitesse

La formulation variationnelle (7.3.1) vérifie une propriété de décroissance d'énergie lorsque les termes source sont nuls ($f_u = f_w = 0,\ f_p = 0$).

Définition 7.3.1 *La quantité d'énergie associée au problème (7.3.1) est définie par l'identité :*

$$E_v(t) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\rho}(u_s,u_s) + \sum_{i,j=1}^{d}\boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j,\gamma_i) + \boldsymbol{\rho}_w(w,w) + \boldsymbol{m}(p,p) + 2\boldsymbol{\rho}_f(w,u_s)\right]. \tag{7.3.3}$$

la quantité $\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \gamma_i)$ est positive :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \gamma_i) &= \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega A_{ij}\gamma_j \cdot \gamma_i \, dx, \\
&= \sum_{i,j,k,l} \int_\Omega (A_{ij})_{kl} \, (\gamma_j)_l \, (\gamma_i)_k \, dx, \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j,k,l} C_{ikjl} \, \tau_{ik} \, \tau_{jl} \, dx \\
&= \int_\Omega C\tau : \tau \, dx \geq 0,
\end{aligned}$$

avec $\tau_{ij} = \tau_{ji} = 1/2 \, [(\gamma_i)_j + (\gamma_j)_i]$.

Alors sous la condition $\rho \, \rho_w \geq \rho_f^2$, E_v définit bien une quantité d'énergie positive et elle vérifie la propriété de dissipation :

Théorème 7.3.1

$$\frac{dE_v}{dt} = -\boldsymbol{k}(w, w) + (f_u, u) + (f_w, w) + (f_p, p). \tag{7.3.4}$$

Démonstration

On considère la formulation variationnelle (7.3.1), en prenant comme fonctions tests $\tilde{u} = u_s$, $\tilde{w} = w$, $\tilde{\gamma} = \sigma_i$, $\tilde{\sigma} = \partial_t \gamma_i$ et $\tilde{p} = p$, on obtient :

$$\boldsymbol{\rho}(\partial_t u_s, u_s) + \boldsymbol{\rho}_f(\partial_t w, u_s) + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{r}(\sigma_i, u_i) = (f_u, u), \tag{7.3.5a}$$

$$\boldsymbol{\rho}_f(w, \partial_t u_s) + \boldsymbol{\rho}_w(\partial_t w, w) + \boldsymbol{k}(w, w) + \boldsymbol{r}(w, p) = (f_w, w), \tag{7.3.5b}$$

$$\boldsymbol{d}(\partial_t \gamma_i, \sigma_i) - \boldsymbol{r}(\sigma_i, u_i) = 0 \;\; \forall \, i = 1, d, \tag{7.3.5c}$$

$$\boldsymbol{d}(\sigma_i, \partial_t \gamma_i) - \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i) + \boldsymbol{b}_i(p, \partial_t \gamma_i) = 0 \;\; \forall \, i = 1, d, \tag{7.3.5d}$$

$$\boldsymbol{m}(\partial_t p, p) + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{b}_i(p, \partial_t \gamma_i) - \boldsymbol{r}(w, p) = (f_p, p). \tag{7.3.5e}$$

De la somme des égalités (7.3.5a), (7.3.5b), (7.3.5c) pour $i = 1, d$ et (7.3.5e), et la soustraction de (7.3.5d) pour $i = 1, d$ découle l'identité :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{\rho}(u_s, u_s) + \boldsymbol{\rho}_w(w, w) + \boldsymbol{m}(p, p) + 2\boldsymbol{\rho}_f(w, u_s)\right] + \sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i) = \\
&-\boldsymbol{k}(w, w) + (f_u, u) + (f_w, w) + (f_p, p).
\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

En utilisant la propriété des matrices A_{ij} (7.2.1), les formes bilinéaires $\boldsymbol{a}_{ij}$ vérifient pour tout $(\gamma, \tilde{\gamma}) \in H_w \times H_w$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{ij}(\gamma, \tilde{\gamma}) &= \int_\Omega A_{ij}\gamma \cdot \tilde{\gamma}\, dx, \\
&= \int_\Omega A_{ij}^* \tilde{\gamma} \cdot \gamma\, dx, \\
&= \int_\Omega A_{ji} \tilde{\gamma} \cdot \gamma\, dx, \\
&= \boldsymbol{a}_{ji}(\tilde{\gamma}, \gamma).
\end{aligned}$$

Cette propriété, nous permet d'écrire la somme $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i)$ sous la forme de :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i), \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ji}(\partial_t \gamma_i, \gamma_j), \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \partial_t \gamma_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\partial_t \gamma_j, \gamma_i), \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j, \gamma_i).
\end{aligned}$$

En remplaçant cette dernière égalité dans (7.3.6), on obtient le résultat de la décroissance de l'énergie (7.3.4). ■

7.3.2 Semi-discrétisation en espace

Pour l'approximation de notre problème nous utilisons les éléments finis mixtes d'ordre élevé avec condensation de masse développés dans [52]. Nous supposons ici que le domaine est une union de quadrangles en dimension 2 ou de hexaédres en dimension 3. Nous considérons un maillage $\mathcal{T}_h = \cup_{e=1}^{N_e} K_e$ de Ω, le carré unité $\hat{K} = [0,1]^d$, $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i=1,d}$ le système de coordonnées associé et F_e l'application vectorielle transformant $\hat{K}$ en K_e (voir Fig 7.3.1). Nous approchons les inconnues par des fonctions Q_r. Plus précisément, nous introduisons les espaces d'approximation :

$$\left|\begin{aligned}
&\mathbb{P}_h = \left\{\varphi \in C^0(\Omega) \,/\, q|_{K_e} \circ F_e \in Q_r(\hat{K}) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\} \subset H_p, \\
&\mathbb{U}_h = \left\{\phi \in [C^0(\Omega)]^d \,/\, \phi|_{K_e} \circ F_e \in [Q_r(\hat{K})]^d\right\} \subset H_u, \\
&\mathbb{W}_h = \left\{\psi \in [L^2(\Omega)]^d \,/\, |J_e| DF_e^{-1} \psi|_{K_e} \circ F_e \in [Q_r(\hat{K})]^d\right\} \subset H_w,
\end{aligned}\right. \tag{7.3.7}$$

avec $|J_e|$ est le jacobien de F_e, DF_e la matrice jacobien et

$$Q_r(\hat{K}) = \left\{q : \hat{K} \to \mathbb{R} \,/\, q(\hat{x}) = \sum_{\boldsymbol{l} \in \{0,\cdots,r\}^d} a_{\boldsymbol{l}} \prod_{i=1}^{d} \hat{x}_i^{l_i}\right\}.$$

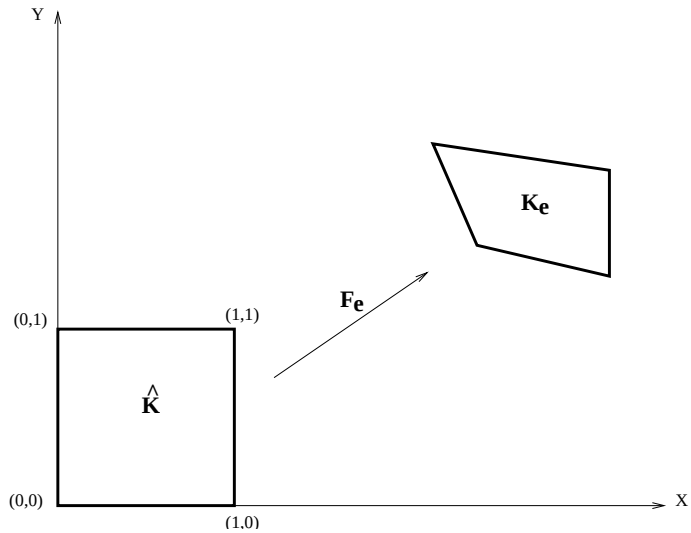


FIG. 7.3.1 – Transformation F_e

Remarque 7.3.1 *Le choix (7.3.7) des espaces d'approximation nous permet d'avoir une matrice de rigidité indépendemment du maillage (voir plus tard dans §7.3.3.1, Calcul matriciel). Nous avons donc un gain de stockage très important car il suffit de calculer la matrice de rigidité localement sur l'élément de référence $\hat{K}$.*

Le problème approché associé à la formulation (7.3.1) consiste à chercher $(u_h(t), w_h(t), \gamma_{i\,t}(t), \sigma_{i\,h}(t), p_h(t)) \in \mathbb{U}_h \times \mathbb{W}_h \times \mathbb{W}_h \times \mathbb{W}_h \times \mathbb{P}_h$ qui vérifient :

$$
(7.3.8)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{\rho}(u_h, \tilde{u}_h) + \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{\rho}_f(w_h, \tilde{u}_h) + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{r}(\sigma_{i\,h}, \tilde{u}_{i\,h}) = (f_u, \tilde{u}_h), & \forall\, \tilde{u}_h \in \mathbb{U}_h \\
\dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{\rho}_f(\tilde{w}_h, u_h) + \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{\rho}_w(w_h, \tilde{w}_h) + \boldsymbol{k}(w_h, \tilde{w}_h) + \boldsymbol{r}(\tilde{w}_h, p_h) = (f_w, \tilde{w}_h), & \forall\, \tilde{w}_h \in \mathbb{W}_h \\
\dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{d}(\gamma_{i\,h}, \tilde{\gamma}_h) - \boldsymbol{r}(\tilde{\gamma}_h, u_{i\,h}) = 0 \;\; \forall\, i = 1, d, & \forall\, \tilde{\gamma}_h \in \mathbb{W}_h \\
\boldsymbol{d}(\sigma_{i\,h}, \tilde{\sigma}_h) - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_{j\,h}, \tilde{\sigma}_h) + \boldsymbol{b}_i(p_h, \tilde{\sigma}_h) = 0 \;\; \forall\, i = 1, d, & \forall\, \tilde{\sigma}_h \in \mathbb{W}_h \\
\dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{m}(p_h, \tilde{p}_h) + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \dfrac{d}{dt}\,\boldsymbol{b}_i(\tilde{p}_h, \gamma_{i\,h}) - \boldsymbol{r}(w_h, \tilde{p}_h) = (f_p, \tilde{p}_h). & \forall\, \tilde{p}_h \in \mathbb{P}_h
\end{array}
\right.
$$

Afin d'appliquer la technique de la condensation de masse, les formes bilinéaires ci-dessus sont calculées à l'aide de la formule de Gauss-Lobatto :

$$
\boldsymbol{\rho}(u_h, \tilde{u}_h) \approx \boldsymbol{\rho}_h(u_h, \tilde{u}_h) = \sum_{e=1}^{N_e} \oint_{K_e} \rho u_h . \tilde{u}_h \, dx,
$$

avec

$$
(7.3.9)\qquad \oint_{K_e} g(x)\, dx = \int_{\hat{K}} |J_e| g \circ F_e \, d\hat{x} \approx \sum_{\boldsymbol{l} \in \{1, \cdots, r+1\}^d} \hat{\omega}_{\boldsymbol{l}} |J_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}})|\, g \circ F_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}),
$$

$$
\forall\, g \in C^0(K_e),
$$

où $\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}} = (\hat{\xi}_{l_1}, \cdots, \hat{\xi}_{l_d})$ $\boldsymbol{l} \in \{1, \cdots, r+1\}^d$ sont les points de Gauss-Lobatto dans le carré unité et $\hat{\omega}_{\boldsymbol{l}}$ sont les poids associés (voir la figure 7.3.2).

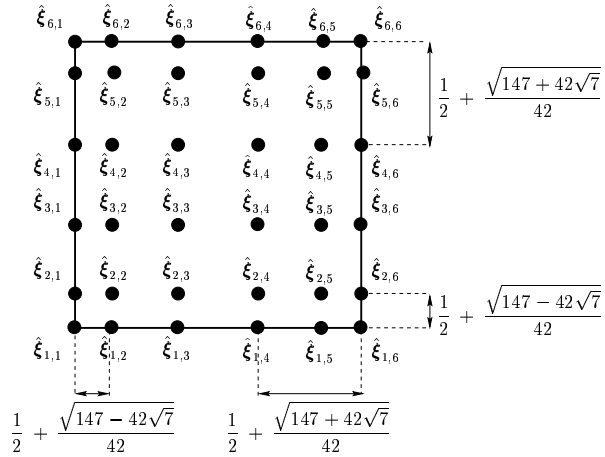


FIG. 7.3.2 – Points d'interpolation avec $r = 5$ et $d = 2$.

On introduit les bases des espaces $\mathbb{P}_h$, $\mathbb{U}_h$, $\mathbb{W}_h$:

$$B_{\mathbb{P}_h} = \{\varphi_i \; i = 1, \cdots, N\},$$
$$B_{\mathbb{U}_h} = \{\phi_{i,j} \; i = 1, \cdots, N, j = 1, \cdots, d\},$$
$$B_{\mathbb{W}_h} = \{\psi^e_{\boldsymbol{l},j} \; \boldsymbol{l} \in \{1, \cdots, r+1\}^d, \; j = 1, \cdots, d, \; e = 1, \cdots, Ne\}$$

où N est le nombre de degrés de liberté du maillage, N_e le nombre d'éléments, $\phi_{i,j}$ et $\psi^e_{\boldsymbol{l},j}$ vérifient :

$$\phi_{i,j} = \varphi_i \, \vec{e}_j,$$
$$|J_e| DF_e^{-1} \psi^e_{\boldsymbol{l},j} \circ F_e = \hat{\varphi}_{\boldsymbol{l}} \, \vec{e}_j.$$

où $(\hat{\varphi}_{\boldsymbol{l}})_{\boldsymbol{l} \in \{1, \cdots, r+1\}^d}$ sont les fonctions d'interpolation de Lagrange sur $\hat{K}$ qui satisfont :

$$\hat{\varphi}_{\boldsymbol{k}}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}) = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}}.$$

et $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d)$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^d$.

On considère U_h (respectivement W_h, $\Gamma_{i\,h}$, $\Sigma_{i\,h}$ et P_h) les cordonnées de u_h (respectivement w_h, $\gamma_{i\,h}$, $\sigma_{i\,h}$ et p_h) sur la base $\mathbb{U}_h$ (respectivement $\mathbb{W}_h$, $\mathbb{W}_h$, $\mathbb{W}_h$ et $\mathbb{P}_h$), le système (7.3.8) se

réécrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$
(7.3.10) \qquad \begin{cases}
D_u \dfrac{dU_h}{dt} + D_{uw} \dfrac{dW_h}{dt} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} R_i \, \Sigma_{i\,h} = 0, \\
D^*_{uw} \dfrac{dU_h}{dt} + D_w \dfrac{dW_h}{dt} + KW_h + R^* P_h = 0, \\
D_\gamma \dfrac{d\Gamma_{i\,h}}{dt} - R^* U_{i\,h} = 0, & \forall\, i = 1, d \\
D_\gamma \Sigma_{i\,h} - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} T_{ij} \Gamma_{j\,h} + G_i P_h = 0, & \forall i = 1, d \\
D_p \dfrac{dP_h}{dt} + \displaystyle\sum_{j=1}^{d} G^*_j \dfrac{d\Gamma_{i\,h}}{dt} - RW_h = F.
\end{cases}
$$

La matrice D_γ est inversible, nous simplifions le dernier système, en éliminant les inconnues $\Sigma_{i\,h} = D_\gamma^{-1} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} T_{ij} \Gamma_{j\,h} - \boldsymbol{D}_\gamma^{-1} G_i P_h \quad \forall\, i = 1, d.$

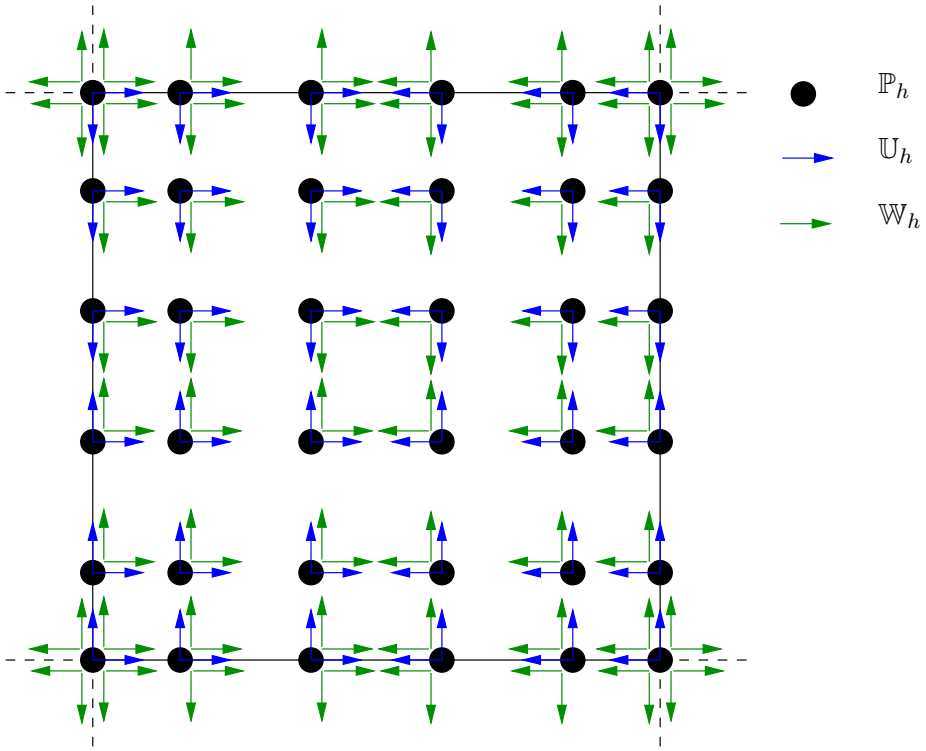


FIG. 7.3.3 – Les degrés de libertés associées à $\mathbb{P}_h$, $\mathbb{U}_h$ et $\mathbb{W}_h$ pour $r = 5$

7.3.3 Calcul matriciel

Soit $\boldsymbol{S}_i$ le support de la fonction de base φ_i :

$$
(7.3.11) \qquad \boldsymbol{S}_i = \{K_e \,/\, e = 1, \cdots, N_e, \, \xi_i \in K_e\}
$$

Nous définissons aussi les deux fonctions : loc_e et $glob_e$, permettant de passer de la numérotation globale sur K_e à la numérotation locale sur $\hat{K}$, et inversement :

$$\begin{cases} \forall\, e = 1, \cdots, N_e, \\ loc_e(i) = \boldsymbol{n} & \forall\, i = 1, \cdots, N, \\ glob_e(\boldsymbol{n}) = i & \forall\, \boldsymbol{n} \in \{1, \cdots, r+1\}^d. \end{cases}$$

Dans cette section nous rappelons le calcul de la matrice de rigidité et les matrices de masse présenté dans [52]. Nous faisons le calcul des matrices reliées à la poroélasticité : les matrices de couplage entre les deux phases solide et fluide (D_{uw} et $G_i\, \forall i = 1, d$) et la matrice D_u.

7.3.3.1 Calcul de la matrice de rigidité

Pour montrer que la matrice de rigidité ne dépend pas du maillage (voir Remarque 7.3.1), nous calculons les termes de R :

$$\begin{aligned} (R)^e_{\boldsymbol{n},i,j} &= \boldsymbol{r}(\psi^e_{\boldsymbol{n},l}, \varphi_k) \\ &= \int_{K_e} \psi^e_{\boldsymbol{n},i} \cdot \nabla \varphi_j \, dx, \\ &= \int_{\hat{K}} |J_e| \frac{1}{|J_e|} DF_e \hat{\psi}_{\boldsymbol{n},i} \cdot DF_e^{*-1} \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}} \, d\hat{x}, \quad \boldsymbol{m} = loc_e(j), \\ &= \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_{\boldsymbol{n},i} \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}} \, d\hat{x}. \end{aligned}$$

Par conséquant, les termes de R ne dépendent pas de la transformation F_e. De plus après l'intégration numérique par la formule de Gauss-Lobatto (7.3.9), nous aurons :

$$\begin{aligned} (R)^e_{\boldsymbol{n},i,j} &= \sum_{\boldsymbol{l} \in \{1,\cdots,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\boldsymbol{l}}\, \hat{\psi}_{\boldsymbol{n},i}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}) \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}), \\ &= \sum_{\boldsymbol{l} \in \{1,\cdots,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\boldsymbol{l}}\, \hat{\varphi}_{\boldsymbol{n}}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}) \vec{e}_i \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}), \\ &= \sum_{\boldsymbol{l} \in \{1,\cdots,r+1\}^d} \hat{\omega}_{\boldsymbol{l}}\, \delta_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}} \vec{e}_i \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{l}}), \\ &= \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}\, \vec{e}_i \cdot \hat{\nabla} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}), \\ &= \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \frac{\partial \hat{\varphi}_{\boldsymbol{m}}}{\partial \hat{x}_i}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}), \ \boldsymbol{m} = loc_e(j). \end{aligned}$$

Par définition, les points de Gauss-Lobatto sur le carré unité $\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}$ ont les cordonnées $\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}} = (\hat{\xi}_{n1}, \cdots, \hat{\xi}_{nd})$, les fonctions $\hat{\varphi}_{\boldsymbol{n}}$ d'interpolations de Lagrange associées à ces points s'écrivent alors comme produit de d fonctions $\hat{\varphi}_{ni}$ définies sur $[0, 1]$ et vérifient :

$$\hat{\varphi}_{ni}(\hat{\xi}_{mj}) = \delta_{ni,mj}.$$

Ceci nous permet de montrer que les interactions entre deux degrés de liberté n'ayant pas la même abscisse ou la même ordonnée sont nulles. On a illustré sur la figure 7.3.4 un exemple pour un degré de liberté donné (point noir) en dimension 2 et pour $r = 5$, les degrés de liberté vectoriels interagissant de façon non nulle sont les degré de liberté présentés en vert.

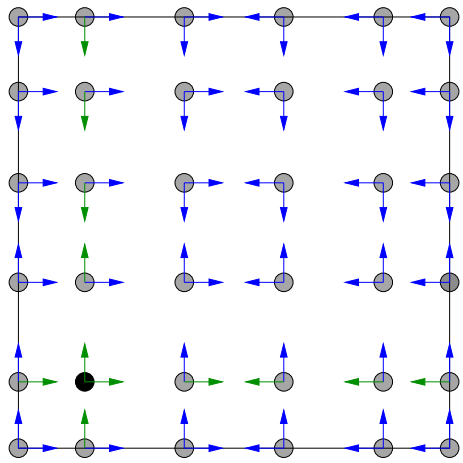


FIG. 7.3.4 – Exemple des interactions de la matrice de rigidité

7.3.3.2 Calcul des matrices de masse

Grâce à la formule d'intégration de Gauss-Lobatto, les matrices de masse sont diagonales.

$$\begin{aligned}
(D_u)_{i,l,j,k} &= \boldsymbol{\rho}_h(\phi_{i,l}, \phi_{j,k}) \\
&= \sum_{e\,/\,\boldsymbol{S}_i \cap \boldsymbol{S}_j \cap K_e \neq \emptyset} \int_{\hat{K}} \rho \circ F_e \, \hat{\varphi}_{loc_e(i)} \hat{\varphi}_{loc_e(j)} \, \vec{e}_l \cdot \vec{e}_k \, d\hat{x} \\
&= \delta_{ij}\delta_{lk} \, \rho(\xi_i) \sum_{e/\xi_i \in K_e} \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} |J_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}})|, \quad \hat{\xi}_{\boldsymbol{n}} = F_e^{-1}(\xi_i)
\end{aligned}$$

De même pour la matrice D_p :

$$\begin{aligned}
(D_p)_{i,j} &= \boldsymbol{m}_h(\varphi_i, \varphi_j) \\
&= \sum_{e\,/\,\boldsymbol{S}_i \cap \boldsymbol{S}_j \cap K_e \neq \emptyset} \int_{\hat{K}} \frac{1}{m \circ F_e} \hat{\varphi}_{loc_e(i)} \, \hat{\varphi}_{loc_e(j)} \, d\hat{x} \\
&= \delta_{ij} \, M(\xi_i) \sum_{e/\xi_i \in K_e} \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} |J_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}})|, \quad \hat{\xi}_{\boldsymbol{n}} = F_e^{-1}(\xi_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_w)^e_{\boldsymbol{n},l,\boldsymbol{m},k} &= \boldsymbol{m}_{wh}(\psi^e_{\boldsymbol{n},l}, \psi^e_{\boldsymbol{m},k}) \\
&= \int_{K_e} \rho_w \, \psi^e_{\boldsymbol{n},l} \cdot \psi^e_{\boldsymbol{m},k} \, dx, \\
&= \int_{\hat{K}} |J_e| \big[\rho_w \, \psi^e_{\boldsymbol{n},l} \cdot \psi^e_{\boldsymbol{m},k}\big] \circ F_e \, d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{K}} \frac{\rho_w \circ F_e}{|J_e|} \varphi_{\boldsymbol{n}} \varphi_{\boldsymbol{m}} [DF_e^* DF_e] \vec{e}_l \cdot \vec{e}_k \, d\hat{x} \\
&= \delta_{\boldsymbol{nm}} \, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \big[\frac{\rho_w \circ F_e}{|J_e|} DF_e^* DF_e\big](\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \, \vec{e}_l \cdot \vec{e}_k
\end{aligned}$$

La matrice D_w est alors diagonale par bloc avec des blocs de taille $d \times d$ dont le bloc associé au n-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s' écrit :

$$\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \frac{\rho_w \circ F_e}{|J_e|} DF_e^* DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}).$$

Les matrices K, D_γ et T_{ij} ont la même structure :

- le bloc $d \times d$ de la matrice K associé au n-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :
$$\frac{\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}}{|J_e| \mathcal{K} \circ F_e} DF_e^* DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}),$$
- le bloc $d \times d$ de la matrice D_γ associé au n-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :
$$\frac{\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}}{|J_e|} DF_e^* DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}),$$
- le bloc $d \times d$ de la matrice T_{ij} associé au n-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :
$$\frac{\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}}{|J_e|} DF_e^* \, A_{ij} \, DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}).$$

7.3.3.3 Calcul des matrices de couplage

Pour les matrices de couplage D_{uw} et G_j $j = 1, d$, on a :

$$\begin{aligned}
(D_{uw})^e_{i,l,\boldsymbol{n},k} &= \boldsymbol{\rho}_{uw\,h}(\phi_{i,l}, \psi^e_{\boldsymbol{n},l}) \\
&= \int_{\hat{K}} |J_e| \big[\rho_f \, \phi_{i,l} \cdot \psi^e_{\boldsymbol{n},k}\big] \circ F_e \, d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{K}} \rho_f \circ F_e \, \hat{\varphi}_{loc_e(i)} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{n}} DF_e \, \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l \, d\hat{x} \\
&= \begin{cases} \delta_{\boldsymbol{n}\, loc_e(i)} \, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \rho_f(\xi_i) \, DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l & \text{si } \xi_i \in K_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
(G_j)^e_{i,\boldsymbol{n},l} &= \boldsymbol{b}_{j\,h}(\varphi_i, \psi^e_{\boldsymbol{n},l}) \\
&= \int_{\hat{K}} |J_e| \big[\beta \, \varphi_i \vec{e}_j \cdot \psi^e_{\boldsymbol{n},k}\big] \circ F_e \, d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{K}} \beta \circ F_e \, \hat{\varphi}_{loc_e(i)} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{n}} DF_e \vec{e}_l \cdot \vec{e}_i \, d\hat{x} \\
&= \begin{cases} \delta_{\boldsymbol{n}\, loc_e(i)} \, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \beta(\xi_i) \, DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \vec{e}_l \cdot \vec{e}_i & \text{si } \xi_i \in K_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Les matrices de couplage D_{uw} et G_j $\forall\, j = 1, d$ sont très creuses ce qui nous permet de les stocker d'une façon optimale. Nous avons présenté sur la figure 7.3.5 un exemple d'un cas simple de deux éléments et sur 7.3.6 la structure de la matrice D_{uw} associée à cet exemple.

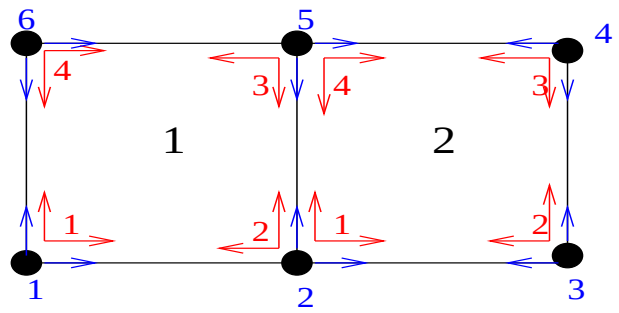


FIG. 7.3.5 – Cas simple (deux éléments)

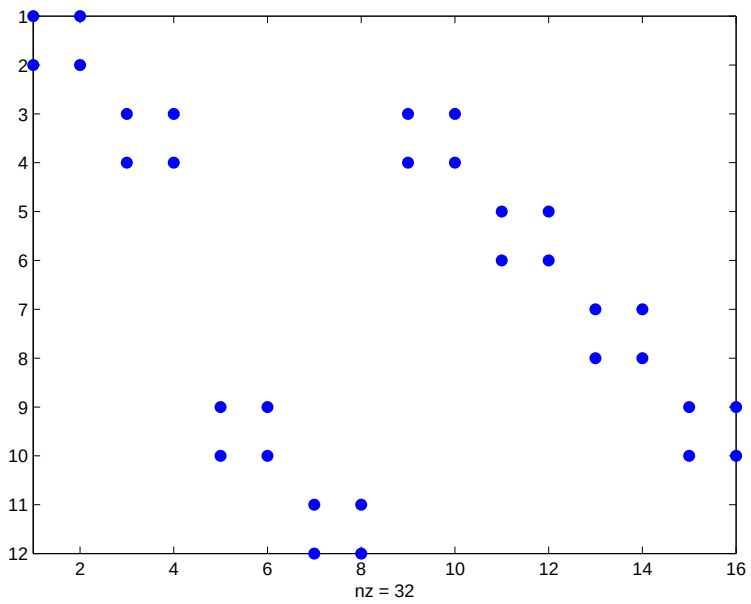


FIG. 7.3.6 – La structure de D_{uw}

7.3.4 Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps du système (7.3.10), nous utilisons un schéma aux différences finies sur deux maillages décalés en temps, centré, d'ordre 2, totalement explicite et auquel on a associé une quantité d'énergie discréte décroissante (voir la section suivante). Nous approchons les deux premières équations à l'instant $t^{n+\frac{1}{2}}$ et les deux dernières à l'instant t^n :

$$
\begin{aligned}
&D_u \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + D_{uw} \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t} + R D_\gamma^{-1} \sum_{i,j=1}^{d} T_{ij} \Gamma_{j,h}^{n+1/2} \\
&- R D_\gamma^{-1} \sum_{j=1}^{d} G_j P_h^{n+1/2} = F_u^{n+1/2},
\end{aligned} \tag{7.3.12a}
$$

$$
D_{uw}^* \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + D_w \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t} + K \frac{W_h^{n+1} + W_h^n}{2} + R^* P_h^{n+1/2} = F_w^{n+1/2}, \tag{7.3.12b}
$$

$$
D_\gamma \frac{\Gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t} - R^* U_{i\,h}^n = 0, \quad \forall\, j = 1, d, \tag{7.3.12c}
$$

$$
D_p \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{d} G_j^* \frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t} - R W_h^n = F_p^n. \tag{7.3.12d}
$$

La résolution de ce schéma est totalement explicite, il est clair que le calcul de $\Gamma_h^{n+1/2}$ et $P_h^{n+1/2}$ se fait facilement grâce à la diagonalité des matrices D_γ et D_p. D'autre part malgré la diagonalité de D_u et D_w, comme les équations (7.3.12a) et (7.3.12b) sont couplées en U_h et W_h, le calcul de U_h^{n+1} et W_h^{n+1} n'est pas immédiat. Pour les déterminer nous utilisons le complément de Schur pour ces deux équations couplées :

$$
\left[\begin{array}{c|c} D_u & D_{uw} \\ \hline D_{uw}^* & D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_h^{n+1} \\ \hline W_h^{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \end{array}\right], \tag{7.3.13}
$$

avec

$$
\left\{\begin{array}{rcl}
F_1 & = & F_u^{n+1/2} + \Delta t R D_\gamma^{-1} (\sum_{j=1}^{d} G_j P_h^{n+1/2} - \sum_{i,j=1}^{d} T_{ij} \Gamma_{j,h}^{n+1/2}) + D_u U_h^n + D_{uw} W_h^n, \\
F_2 & = & F_w^{n+1/2} + D_{uw}^* U_h^n + (D_w - \dfrac{\Delta t}{2} K) W_h^n - \Delta t\, R^* P_h^{n+1/2}.
\end{array}\right. \tag{7.3.14}
$$

Nous remplaçons W_h^{n+1} du système (7.3.13), en utilisant : $W_h^{n+1} = (D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K)^{-1} \left[F2 - D_{uw}^* U_h^{n+1}\right]$, nous aurons :

$$
H U_h^{n+1} = F, \tag{7.3.15}
$$

avec

$$
\left\{\begin{array}{l}
H = D_u - D_{uw} (D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K)^{-1} D_{uw}^*, \\
F = F_1 - D_{uw} (D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K)^{-1} F_2.
\end{array}\right.
$$

La résolution de (7.3.15) est explicite grâce au lemme suivant :

Lemme 7.3.1 *La matrice H est diagonale par bloc, avec des blocs de taille $d \times d$.*

Démonstration

La matrice D_u est diagonale par construction, comme la matrice $D_w + \Delta t/2\, K$ est diagonale, avec des blocs de taille $d \times d$, la matrice du produit $(D_w + \Delta t/2\, K)^{-1} D^*_{uw}$ a la même structure que D^*_{uw}. Pour montrer alors la diagonalité de H, il suffit de montrer que $S = D_{uw} D^*_{uw}$ est diagonale.

$$\begin{aligned}
S_{i,l\,i',l'} &= \sum_{\boldsymbol{n},k,e} (D_{uw})^e_{i,l,\boldsymbol{n},k} \times (D_{uw})^e_{i',l',\boldsymbol{n},k} \\
&= \sum_{\boldsymbol{n},k,e/\xi_i \in K_e} \delta_{\boldsymbol{n}\, loc_e(i)}\, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}\, \rho_f(\xi_i)\, DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \vec{e_k}.\vec{e_l} \\
&\quad \times \sum_{\boldsymbol{n},k,e/\xi_{i'} \in K_e} \delta_{\boldsymbol{n}\, loc_e(i')}\, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}\, \rho_f(\xi_{i'})\, DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \vec{e_k}.\vec{e_{l'}} \\
&= \delta_{i\,i'} \rho_f(\xi_i) \sum_{k,e/\xi_i \in K_e} \hat{\omega}_{loc_e(i)}\, DF_e(\hat{\xi}_{loc_e(i)}) \vec{e_k}.(\vec{e_l} + \vec{e_{l'}}).
\end{aligned}$$

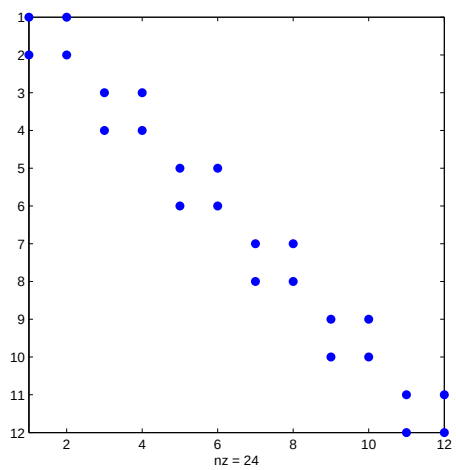


FIG. 7.3.7 – La structure de H

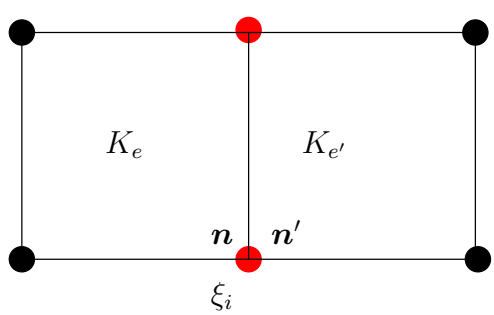


FIG. 7.3.8 – Exemple

Remarque 7.3.2 *L'autre choix de remplacer U_h^{n+1} dans (7.3.13) n'est pas pratique puisque la matrice $G = D_w + \Delta t/2\, K - D_{uw}^* D_u^{-1} D_{uw}$ n'est pas nécessairement diagonale. En effet, la matrice G a la même structure que $N = D_{uw}^* D_{uw}$, en calculant les termes de N, nous aurons :*

$$\begin{aligned}
N^{e\,e'}_{\boldsymbol{n},k\,\boldsymbol{n}',k'} &= \sum_{i,l/\xi_i \in K_e \cap K_{e'}} (D_{uw})^e_{i,l,\boldsymbol{n},k} \times (D_{uw})^{e'}_{i,l,\boldsymbol{n}',k'} \\
&= \sum_{i,l/\xi_i \in K_e \cap K_{e'}} \delta_{\boldsymbol{n}\, loc_e(i)} \delta_{\boldsymbol{n}'\, loc_{e'}(i)}\, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}'}\, \rho_f(\xi_i)^2\, DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \vec{e_k}.\vec{e_l} \times DF_{e'}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}'}) \vec{e_{k'}}.\vec{e_l} \\
&= \delta_{glob_e(\boldsymbol{n})\, glob_{e'}(\boldsymbol{n}')}\, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}} \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}'}\, \rho_f(\xi_{glob_e(\boldsymbol{n})})^2 \\
&\quad \times \sum_{l=1}^{d} DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) \vec{e_k}.\vec{e_l} \times DF_{e'}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}'}) \vec{e_{k'}}.\vec{e_l} \quad (K_e \cap K_{e'} \neq \emptyset)
\end{aligned}$$

Le calcul des termes de N montre que il existe des termes non nuls $N^{e\,e'}_{\boldsymbol{n},k\,\boldsymbol{n}',k'}$ lorsque on a : $glob_e(\boldsymbol{n}) = glob_{e'}(\boldsymbol{n}')$ même sans avoir $e = e'$ ou $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}'$ (voir la structure de G sur la figure 7.3.9 pour un exemple avec deux éléments figure 7.3.8)

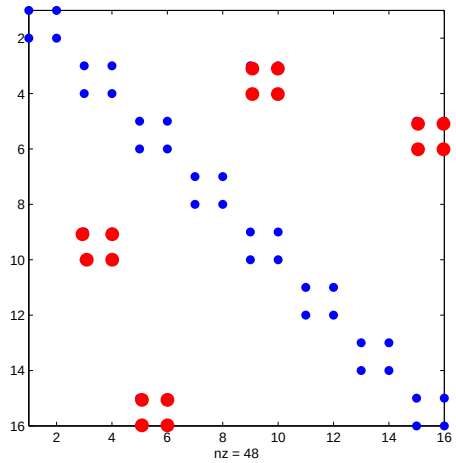


FIG. 7.3.9 – La structure de N

En récapitulant, l'algorithme est donné par :

1. On suppose connues les données suivantes :
   - Δt, U^0, W^0, $P^{-1/2}$, $\Gamma_i^{-1/2}$ $i = 1, d$
   - F_u, F_w, F_p, D_u, D_w, D_p, D_γ, D_{uw}, R, T_{ij}, G_i $i, j = 1, d$
2. Calcul de $\Gamma_i^{n+1/2}$ $i = 1, \cdots, d$ à partir de l'équation (7.3.12c) :
$$\Gamma_i^{n+1/2} = \Gamma_i^{n-1/2} + \Delta t R^* U_i^n$$
3. Calcul de $P^{n+1/2}$ à partir de l'équation (7.3.12c) et (7.3.17b) :
$$P^{n+1/2} = P^{n-1/2} + \Delta t (F_p - D_p^{-1} \sum_{j=1}^{d} G_j^* R^* U_j^n + D_p^{-1} R W^n)$$

4. Calcul de U^{n+1} à partir de (7.3.12a) et (7.3.12b) : $U^{n+1} = H^{-1}F$, avec :

$$\begin{cases} H = D_u - D_{uw}(D_w + \dfrac{\Delta t}{2}K)^{-1}D_{uw}^*, \\ F = F_1 - D_{uw}(D_w + \dfrac{\Delta t}{2}K)^{-1}F_2, \\ F_1 = F_u^{n+1/2} + \Delta t R D_\gamma^{-1}(\sum_{j=1}^{d} G_j P_h^{n+1/2} - \sum_{i,j=1}^{d} T_{ij}\Gamma_{j,h}^{n+1/2}) + D_u U_h^n + D_{uw}W_h^n, \\ F_2 = F_w^{n+1/2} + D_{uw}^* U_h^n + (D_w - \dfrac{\Delta t}{2}K)W_h^n - \Delta t\, R^* P_h^{n+1/2}. \end{cases}$$

5. Calcul de W^{n+1} à partir de (7.3.12b) : $W^{n+1} = (D_w + \dfrac{\Delta t}{2}K)^{-1}(F_2 - D_{uw}^* U^{n+1})$

Remarque 7.3.3 *On remarque que lorsque on prend les coefficients de couplage entre les deux phase solide et fluide $\rho_f = \beta = 0$ dans le problème modèle (5.1.1), le code associé au schéma numérique (7.3.12a) permet aussi de résoudre les problème de propagation d'ondes dans les milieux purement élastique et acoustique. Pour le cas élastique il suffit de prendre les termes source f_w et f_p nuls et donner à ρ_w et m des valeurs non nulles pour que les matrice D_w et D_p restent inversibles, dans ce cas le schéma numérique est donné par :*

$$D_u \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + R D_\gamma^{-1} \sum_{i,j=1}^{d} T_{ij}\Gamma_{j,h}^{n+1/2} = F_u^{n+1/2}, \tag{7.3.16a}$$

$$D_\gamma \frac{\Gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t} - R^* U_{i\,h}^n = 0, \quad \forall\, j = 1, d. \tag{7.3.16b}$$

De même pour le cas acoustique il suffit de prendre les termes source f_u et f_p nuls et donner à ρ une valeur non nulle, dans ce cas le schéma numérique est donné par :

$$D_w \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t} + K\frac{W_h^{n+1} + W_h^n}{2} + R^* P_h^{n+1/2} = F_w^{n+1/2}, \tag{7.3.17a}$$

$$D_p \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} - R W_h^n = 0. \tag{7.3.17b}$$

7.4 Stabilité et quantité d'énergie discrète

7.4.1 Quantité d'énergie discrète

On considère le problème modèle avec des termes source nuls. On définit l'énergie discrète associée au schéma (7.3.12) :

Définition 7.4.1

$$\left| \begin{array}{rcl} \boldsymbol{E}^n & = & \dfrac{1}{2}\left[\|u_h^n\|_{\boldsymbol{\rho}_h}^2 + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}\left(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \gamma_{i\,h}^{n-1/2}\right) + \|w_h\|_{\boldsymbol{\rho}_{w\,h}}^2 + \|p_h^{n-1/2}\|_{\boldsymbol{m}_h}^2 + 2\,\boldsymbol{\rho}_{f\,h}\,(w_h^n, u_h^n) \right] \\ & + & \dfrac{\Delta t}{2}\left[\boldsymbol{r}_h(w_h^n, p_h^{n-1/2}) - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{b}_{j\,h}\left(p_h^{n-1/2}, \dfrac{\gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}\right)\right] \end{array} \right.$$

avec

$$\|u_h\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} = \boldsymbol{\rho}_h(u_h, u_h), \qquad \forall\, u_h \in \mathbb{U}_h$$
$$\|w_h\|^2_{\boldsymbol{\rho}_{w\,h}} = \boldsymbol{\rho}_{w\,h}(w_h, w_h), \quad \forall\, w_h \in \mathbb{W}_h$$
$$\|p_h\|^2_{\boldsymbol{m}_h} = \boldsymbol{m}_h(p_h, p_h). \qquad \forall\, p_h \in \mathbb{U}_h$$

La quantité d'énergie $\boldsymbol{E}^n$ se décompose en deux parties :

1. La première, $\Big[\|u_h^n\|^2_{\boldsymbol{\rho}_h} + \sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \gamma_{i\,h}^{n-1/2}) + \|w_h\|^2_{\boldsymbol{\rho}_{w\,h}} + \|p_h^{n-1/2}\|^2_{\boldsymbol{m}_h} + 2\,\boldsymbol{\rho}_{f\,h}(w_h^n, u_h^n)\Big]/2$ approche la quantité d'énergie continue (7.3.3).
2. La deuxième, $\Delta t/2\left[\boldsymbol{r}_h(w_h^n, p_h^{n-1/2}) - \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{b}_{j\,h}(p_h^{n-1/2}, \dfrac{\gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t})\right]$ est un terme assez petit on $O(\Delta t)$, dûe à la discrétisation en temps.

On a le résultat de la dissipation de la quantité d'énergie discrète :

Théorème 7.4.1

$$\frac{\boldsymbol{E}^{n+1} - \boldsymbol{E}^n}{\Delta t} = -\left\|\frac{w_h^{n+1} + w_h^n}{2}\right\|^2_{\boldsymbol{k}_h} \tag{7.4.1}$$

avec $\|w_h\|^2_{\boldsymbol{k}_h} = \boldsymbol{k}_h(w_h, w_h) \quad \forall\, w_h \in \mathbb{W}_h$.

Démonstration

On considère la formulation variationnelle discrète associée au système (7.3.8) :

$$\boldsymbol{\rho}_h(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, \tilde{u}_h) + \boldsymbol{\rho}_{f\,h}(\frac{w_h^{n+1} - w_h^n}{\Delta t}, \tilde{u}_h) + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{r}_h(\sigma_{i\,h}^{n+1/2}, \tilde{u}_{i\,h}) = 0, \forall\, \tilde{u}_h \in \mathbb{U}_h \tag{7.4.2a}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\rho}_{f\,h}(\tilde{w}_h, \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}) + \boldsymbol{\rho}_{w\,h}(\frac{w_h^{n+1} - w_h^n}{\Delta t}, \tilde{w}_h) + \boldsymbol{k}_h(\frac{w_h^{n+1} + w_h^n}{2}, \tilde{w}_h) \\ &+\boldsymbol{r}_h(\tilde{w}_h, p_h^{n+1/2}) = 0, \end{aligned} \qquad \forall\, \tilde{w}_h \in \mathbb{W}_h \tag{7.4.2b}$$

$$\boldsymbol{d}_h(\frac{\gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}, \tilde{\gamma}_h) - \boldsymbol{r}_h(\tilde{\gamma}_h, u_{i\,h}^n) = 0 \;\; \forall\, i = 1, d, \qquad \forall\, \tilde{\gamma}_h \in \mathbb{W}_h \tag{7.4.2c}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{d}_h(\sigma_{i\,h}^{n+1/2}, \tilde{\sigma}_h) - \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \tilde{\sigma}_h) \\ &+\boldsymbol{b}_{i\,h}(p_h^{n+1/2}, \tilde{\sigma}_h) = 0 \;\; \forall\, i = 1, d, \end{aligned} \qquad \forall\, \tilde{\sigma}_h \in \mathbb{W}_h \tag{7.4.2d}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{m}_h(\frac{p_h^{n+1/2} - p_h^{n-1/2}}{\Delta t}, \tilde{p}_h) + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{b}_{i\,h}(\tilde{p}_h, \frac{\gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}) \\ &-\boldsymbol{r}_h(w_h^n, \tilde{p}_h) = 0. \end{aligned} \qquad \forall\, \tilde{p}_h \in \mathbb{P}_h \tag{7.4.2e}$$

Prenons $\tilde{u}_h = (u_h^{n+1} + u_h^n)/2$ (respectivement $\tilde{w}_h = (w_h^{n+1} + w_h^n)/2$, $\tilde{p}_h = (p_h^{n+1/2} + p_h^{n-1/2})/2$) l'approximation centrée de u_h (respectivement w_h, p_h) à l'instant $t^{n+1/2}$ (respectivement $t^{n+1/2}$, t^n), en sommant les équations (7.4.2a), (7.4.2b) et (7.4.2e) du système (7.4.2), nous obtenons :

(7.4.3)

$$\frac{1}{2\Delta t}(\boldsymbol{E}_1^{n+1} - \boldsymbol{E}_1^n) + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{r}_h \left(\sigma_{i\,h}^{n+1/2}, \frac{u_{i\,h}^{n+1} + u_{i\,h}^n}{2} \right) + \sum_{i=1}^{d} \boldsymbol{b}_{i\,h} \left(\frac{p_h^{n+1/2} + p_h^{n-1/2}}{2}, \frac{\gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t} \right)$$

$$= - \left\| \frac{w_h^{n+1} + w_h^n}{2} \right\|_{\boldsymbol{k}_h}^2 .$$

avec

$$\boldsymbol{E}_1^n = \|u_h^n\|_{\boldsymbol{\rho}_h}^2 + \|w_h^n\|_{\boldsymbol{\rho}_{w\,h}}^2 + \|p_h^{n-1/2}\|_{\boldsymbol{m}_h}^2 + 2\,\boldsymbol{\rho}_{f\,h}(w_h^n, u_h^n) + \Delta t\, \boldsymbol{r}_h(w_h^n, p_h^{n-1/2}) \tag{7.4.4}$$

En utilisant l'équation (7.4.2c) avec $\tilde{\gamma}_{i\,h} = \sigma_{i\,h}^{n+1/2}$, nous aurons :

$$\boldsymbol{r}_h \left(\sigma_{i\,h}^{n+1/2}, \frac{u_{i\,h}^{n+1} + u_{i\,h}^n}{2} \right) = \boldsymbol{d}_h \left(\frac{\gamma_{i\,h}^{n+1/2ac32} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t}, \sigma_{i\,h}^{n+1/2} \right) \tag{7.4.5}$$

Or, en prenant $\tilde{\sigma}_h$ dans (7.4.2d) égale à $\dfrac{\gamma_{i\,h}^{n+3/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t}$, nous obtenons :

(7.4.6)

$$\boldsymbol{d}_h(\frac{\gamma_{i\,h}^{n+3/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t}, \sigma_{i\,h}^{n+1/2}) = \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \frac{\gamma_{i\,h}^{n+1/2ac32} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t}) - \boldsymbol{b}_{i\,h}(p_h^{n+1/2}, \frac{\gamma_{i\,h}^{n+1/2ac32} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t})$$

Remplaçons $\boldsymbol{r}_h(\sigma_{i\,h}^{n+1/2}, \dfrac{u_{i\,h}^{n+1} + u_{i\,h}^n}{2})$ par sa valeur dans (7.4.6), l'équation (7.4.3) se réécrit alors sous la forme :

$$\frac{1}{2\Delta t}(\boldsymbol{E}_2^{n+1} - \boldsymbol{E}_2^n) + \sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \frac{\gamma_{i\,h}^{n+3/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t}) - \boldsymbol{k}_h(\frac{w_h^{n+1} + w_h^n}{2}, \frac{w_h^{n+1} + w_h^n}{2}). \tag{7.4.7}$$

avec

$$\boldsymbol{E}_2^n = \boldsymbol{E}_1^n - \Delta t \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{b}_{j\,h} \left(p_h^{n-1/2}, \frac{\gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t} \right)$$

De plus, en utilisant la propriété des matrices $A_{ij}^* = A_{ji}$, nous avons :

$$\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \frac{\gamma_{i\,h}^{n+3/2} - \gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2\Delta t}) = \frac{1}{2\Delta t}\Big[\sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+3/2}, \gamma_{i\,h}^{n+1/2}) - \sum_{i,j=1}^{d} \boldsymbol{a}_{ij\,h}(\gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \gamma_{i\,h}^{n-1/2}) \Big]$$

Après la substitution de cette quantité dans (7.4.7), nous retrouvons (7.4.1), ce qui achève la démonstration du théorème. ■

7.4.2 Étude de stabilité

La quantité d'énergie discrète $\boldsymbol{E}^n$ est décroissante, le schéma numérique (7.3.12) est stable si le pas de temps Δt garanti la positivité de $\boldsymbol{E}^n$ [64].

Pour établir la condition de stabilité, nous devons revenir à la formulation matricielle (7.3.12) de notre schéma. On réécrit l'énergie $\boldsymbol{E}^n$ sous la forme équivalente suivante :
(7.4.8)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^n &= \frac{1}{2}\left[(D_u U_h^n, U_h^n) + \sum_{i,j=1}^{d}\left(T_{ij}\Gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}\right) + (D_w W_h^n, W_h^n) + \left(D_p P_h^{n-1/2}, P_h^{n-1/2}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[2\,(D_{uw} W_h^n, U_h^n) + \Delta t\left(R W_h^n, P_h^{n-1/2}\right) - \Delta t \sum_{j=1}^{d}\left(G_j P_h^{n-1/2}, \frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}\right)\right]\end{aligned}$$

En utilisant la propriété $T_{ij} = T_{ji}^*$, on vérifie facilement l'égalité :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{d}\left(T_{ij}\Gamma_{j\,h}^{n+1/2}, \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}\right) &= \sum_{i,j=1}^{d}\left(T_{ij}\frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2} + \Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{2}, \frac{\Gamma_{i\,h}^{n+1/2} + \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2}\right) \\ &- \frac{\Delta t^2}{4}\sum_{i,j=1}^{d}\left(T_{ij}\frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}, \frac{\Gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}\right)\end{aligned}$$

Utilisant l'équation (7.3.12c), on a :

$$\left(T_{ij}\frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}, \frac{\Gamma_{i\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}\right) = \left(R D_\gamma^{-1} T_{ij} D_\gamma^{-1} R^* U_{j\,h}^n, U_{i\,h}^n\right) \tag{7.4.9a}$$

$$\left(G_j P_h^{n-1/2}, \frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2} - \Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{\Delta t}\right) = \left(R D_\gamma^{-1} G_j P_h^{n-1/2}, U_{j\,h}^n\right) \tag{7.4.9b}$$

On pose $\mathbb{K}_{ij} = R D_\gamma^{-1} T_{ij} D_\gamma^{-1} R^*$ et $\mathbb{L}_j = G_j^* D_\gamma^{-1} R^*$, en faisant la somme sur $i, j = 1, d$ à l'équation (7.4.9a) et sur $j = 1, d$ à l'équation (7.4.9b), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{d}\left(\mathbb{K}_{ij} U_{j\,h}^n, U_{i\,h}^n\right) &= \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}\mathbb{K}_{ij} U_{j\,h}^n, U_{i\,h}^n\right) = \left(\mathbb{K} U_h^n, U_h^n\right), \\ \sum_{j=1}^{d}\left(\mathbb{L}_j U_{j\,h}^n, P_h^{n-1/2}\right) &= \left(\mathbb{L} U_h^n, P_h^{n-1/2}\right)\end{aligned}$$

avec $U_h = \begin{bmatrix} U_{1\,h} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{d\,h}\end{bmatrix}$, $\mathbb{K} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbb{K}_{11} & \cdots & \mathbb{K}_{1d} \\ \hline \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline \mathbb{K}_{d1} & \cdots & \mathbb{K}_{dd}\end{array}\right]$ et $\mathbb{L} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbb{L}_1 & \cdots & \mathbb{L}_d \end{array}\right]$.

La quantité d'énergie (7.4.8) s'écrit alors sous la forme : $\boldsymbol{E}^n = E_1^n + E_2^n$, avec

$$\begin{aligned} E_1^n &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\left(T_{ij}\frac{\Gamma_{j\,h}^{n+1/2}+\Gamma_{j\,h}^{n-1/2}}{2}, \frac{\Gamma_{i\,h}^{n+1/2}+\Gamma_{i\,h}^{n-1/2}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(T\frac{\Gamma_{h}^{n+1/2}+\Gamma_{h}^{n-1/2}}{2}, \frac{\Gamma_{h}^{n+1/2}+\Gamma_{h}^{n-1/2}}{2}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2^n &= \frac{1}{2}\left[\left((D_u - \frac{\Delta t^2}{4}\mathbb{K})U_h^n, U_h^n\right) + (D_w W_h^n, W_h^n) + \left(D_p P_h^{n-1/2}, P_h^{n-1/2}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[2\left(D_{uw}W_h^n, U_h^n\right) + \Delta t\left(RW_h^n, P_h^{n-1/2}\right) - \Delta t\left(\mathbb{L}U_h^n, P_h^{n-1/2}\right)\right] \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

Pour avoir la stabilité du schéma numérique (7.3.12c), il suffit que la forme quadratique E_2^n soit positive. Pour le faire on minore cette dernière par une quantité qui ne fait intervenir que les deux variable U_h^n et W_h^n. Les deux derniers termes de E_2^n vérifient :

$$\begin{aligned} \Delta t\left(R\,W_h^n, P_h^{n-1/2}\right) &= \Delta t\left(D_p^{-\frac{1}{2}}R\,W_h^n, D_p^{\frac{1}{2}}\,P_h^{n-1/2}\right), \\ &\geq -\frac{\Delta t^2}{2}\left(R^* D_p^{-1}R\,W_h^n, W_h^n\right) - \frac{1}{2}\left(D_p\,P_h^{n-1/2}, P_h^{n-1/2}\right), \end{aligned}$$

de même pour le dernier terme $-\Delta t(\mathbb{L}\,U_h^n, P_h^{n-1/2})$, on a la minoration suivante :

$$-\Delta t\left(\mathbb{L}U_h^n, P_h^{n-1/2}\right) \geq -\frac{\Delta t^2}{2}\left(\mathbb{L}^* D_p^{-1}\mathbb{L}\,U_h^n, U_h^n\right) - \frac{1}{2}\left(D_p\,P_h^{n-1/2}, P_h^{n-1/2}\right).$$

Ces deux inégalités, nous permettent de minorer E_2^n :

$$\begin{aligned} E_2^n &\geq \frac{1}{2}\left[\left(\left(D_u - \frac{\Delta t^2}{4}\mathbb{K} - \frac{\Delta t^2}{2}\mathbb{L}^* D_p^{-1}\mathbb{L}\right)U_h^n, U_h^n\right) + \left(\left(D_w - \frac{\Delta t^2}{2}R^* D_p^{-1}R\right)W_h^n, W_h^n\right)\right] \\ &+ (D_{uw}W_h^n, U_h^n) \end{aligned}$$

Pour avoir alors une quantité d'énergie discrète positive il suffit qu'on ait pour tout $(U_h, W_h) \in \mathbb{U}_h \times \mathbb{W}_h$ l'inégalité :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^2}{4}\left[\left(\left(\mathbb{K} + 2\mathbb{L}^* D_p^{-1}\mathbb{L}\right)U_h, U_h\right) + 2\left(R^* D_p^{-1}R\,W_h, W_h\right)\right] &\leq (D_u\,U_h, U_h) + (D_w\,W_h, W_h) \\ &\quad +2(D_{uw}\,W_h, U_h). \end{aligned}$$

D'où la condition suffisante de stabilité :

$$\frac{\Delta t^2}{4}\sup_{U_h, W_h}\frac{\boldsymbol{q}_1(U_h, W_h)}{\boldsymbol{q}_2(U_h, W_h)} \leq 1. \tag{7.4.11}$$

où $\boldsymbol{q}_1$ et $\boldsymbol{q}_2$ sont deux formes quadratiques positives sur $\mathbb{U}_h \times \mathbb{W}_h$ et définies par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_1(U_h, W_h) = \left(\left(\mathbb{K} + 2\mathbb{L}^* D_p^{-1}\mathbb{L}\right)U_h, U_h\right) + 2\left(R^* D_p^{-1}R\,W_h, W_h\right), \\ \boldsymbol{q}_2(U_h, W_h) = (D_u\,U_h, U_h) + (D_w\,W_h, W_h) + 2(D_{uw}\,W_h, U_h). \end{cases} \tag{7.4.12}$$

La condition de stabilité établie ci-dessus reste abstraite et on a pas réussi à l'exploiter analytiquement pour déterminer une condition en fonction des vitesses des ondes, pratiquement nous prenons

$$\Delta t \leq \alpha_r \frac{h}{V_{pf}}$$

où V_{pf} est la vitesse de l'onde rapide, α_r est une constante déterminée numériquement et qui dépend de r l'ordre du schéma et dont les valeurs sont données par le tableau suivant pour $r = 1, \cdots, 5$:

r	1	2	3	4	5
α_r	0.9	0.367	0.208	0.132	0.0909

TAB. 7.4.1 – Les valeurs de α_r

Remarque 7.4.1 *On remarque que la positivité de la quantité E_2^n définie par l'égalité (7.4.10) est équivalente à la positivité de la matrice :*

$$M_p = \left[\begin{array}{c|c|c} D_u - \frac{\Delta t^2}{4}\mathbb{K} & D_{uw} & -\frac{\Delta t}{2}\mathbb{L}^* \\ \hline D_{uw}^* & D_w & \frac{\Delta t}{2}R^* \\ \hline -\frac{\Delta t}{2}\mathbb{L} & \frac{\Delta t}{2}R & D_p \end{array}\right] \tag{7.4.13}$$

dans ce cas les sous matrices diagonales :

$$M_e = D_u - \frac{\Delta t^2}{4}\mathbb{K} \text{ et } M_a = \left[\begin{array}{c|c} D_w & \frac{\Delta t}{2}R^* \\ \hline \frac{\Delta t}{2}R & D_p \end{array}\right]$$

seront aussi définies positives. Ceci nous permet de déduire la condition de stabilité dans les cas particuliers :

1. *Dans le cas élastique, le schéma numérique (7.3.16) est stable si :*

$$\frac{\Delta t^2}{4} \sup_{U_h \neq 0} \frac{(\mathbb{K}U_h, U_h)}{(D_u U_h, U_h)} \leq 1. \tag{7.4.14}$$

2. *Dans le cas acoustique, le schéma numérique (7.3.17) est stable si :*

$$\frac{\Delta t^2}{4} \sup_{W_h \neq 0} \frac{(RD_p^{-1}R^* W_h, W_h)}{(D_w W_h, W_h)} \leq 1. \tag{7.4.15}$$

7.5 Traitement des milieux ouverts

Pour traiter la propagation des ondes dans les milieux non bornés, nous utilisons la méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées. Le principe de la méthode a été présenté dans la section §3.3 pour le problème de la viscoélasticité (formulation d'ordre 2 en temps). Dans cette section nous présentons la méthode pour une formulation d'ordre 1 en temps.

On considère le problème poroélastique en ordre 1, et on suppose que les données initiales sont à support dans le domaine sans couche (domaine physique).

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\rho\,\partial_t u_i + \rho_f\,\partial_t w_i - \nabla\cdot\sigma_i = 0, & \forall\, i = 1,d \\
\rho_f\,\partial_t u_i + \rho_w\,\partial_t w_i + \dfrac{1}{\mathcal{K}} w_i + \partial_{x_i} p = 0, & \forall\, i = 1,d \\
\partial_t \gamma_i = \nabla u_i, & \forall\, i = 1,d \\
\sigma_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_{ij}\gamma_j - \beta p\,\vec{e}_i, & \forall\, i = 1,d \\
\dfrac{1}{m}\,\partial_t p + \beta \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \partial_t \gamma_i.\vec{e}_i + \nabla\cdot w = 0. &
\end{array}
\right.
\tag{7.5.1}
$$

Nous écrirons le système (7.5.1) en domaine fréquentiel :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,u_i + \mathrm{i}\,\omega\rho_f\,w_i - \nabla\cdot\sigma_i = 0, & \forall\, i = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,\rho_f\,u_i + \mathrm{i}\,\omega\,\rho_w\,w_i + \dfrac{1}{\mathcal{K}} w_i + \partial_{x_i} p = 0, & \forall\, i = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,\gamma_i = \nabla u_i, & \forall\, i = 1,d \\
\sigma_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_{ij}\gamma_j - \beta p\,\vec{e}_i, & \forall\, i = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,\dfrac{1}{m}\,p + \mathrm{i}\,\omega\,\beta \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \gamma_i.\vec{e}_i + \nabla\cdot w = 0. &
\end{array}
\right.
\tag{7.5.2}
$$

Appliquons le changement de variable $\partial_{x_i} \to z_i\,\partial_{x_i}$ avec $z_i = \dfrac{\mathrm{i}\,\omega}{\mathrm{i}\,\omega + \eta_i(x_i)}$, le dernier système devient :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{i}\,\omega\rho\,u_i + \mathrm{i}\,\omega\,\rho_f\,w_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} z_j\,\partial_{x_j}(\sigma_i)_j = 0, & \forall\, i = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,\rho_f\,u_i + \mathrm{i}\,\omega\,\rho_w\,w_i + \dfrac{1}{\mathcal{K}} w_i + z_i\,\partial_{x_i} p = 0, & \forall\, i = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,(\gamma_i)_j = z_j\,\partial_{x_j} u_i, & \forall\, i,j = 1,d \\
\sigma_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_{ij}\gamma_j - \beta p\,\vec{e}_i, & \forall\, i = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,\dfrac{1}{m}\,p + \mathrm{i}\,\omega\,\beta \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \gamma_i.\vec{e}_i + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} z_i\,\partial_{x_i} w_i = 0. &
\end{array}
\right.
\tag{7.5.3}
$$

En introduisant les nouvelles inconnues : w^* et σ^*, définies par :

$$\left| \begin{array}{ll} w_i^* = z_i\, w_i, & \forall\, i = 1, d \\ (\sigma_i^*)_j = z_j\, (\sigma_i)_j. & \forall\, i, j = 1, d \end{array} \right.$$

un calcul élémentaire nous permis d'obtenir :

$$\left| \begin{array}{ll} z_i \partial_{x_i} w_i = \partial_{x_i} w_i^* + \dfrac{\partial_{x_i}\eta_i}{\mathrm{i}\,\omega + \eta_i} w_i^* & \forall\, i = 1, d \\ z_j \partial_{x_j} (\sigma_i)_j = \partial_{x_j} (\sigma_i^*)_j + \dfrac{\partial_{x_j}\eta_j}{\mathrm{i}\,\omega + \eta_j} (\sigma_i^*)_j & \forall i, j = 1, d. \end{array} \right.$$

Le système (7.5.3) se réécrit alors :

$$\text{(7.5.4)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{i}\,\omega\, \rho\, u_i + \mathrm{i}\,\omega\, \rho_f\, w_i - \nabla \cdot \sigma_i^* - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial_{x_j}\eta_j}{\mathrm{i}\,\omega + \eta_j} (\sigma_i^*)_j = 0 & \forall\, i = 1, d \\ \mathrm{i}\,\omega\, (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i) \rho_f\, u_i + \mathrm{i}\,\omega \rho_w (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i) w_i + \dfrac{\mathrm{i}\,\omega + \eta_i}{\mathcal{K}} w_i + \mathrm{i}\,\omega\, \partial_{x_i} p = 0 & \forall\, i = 1, d, \\ (\mathrm{i}\,\omega + \eta_j)(\gamma_i)_l = \partial_{x_j} u_i & \forall\, i, j = 1, d, \\ \sigma_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} A_{ij} \gamma_j - \beta\, p\, \vec{e}_i & \forall\, i = 1, d, \\ \dfrac{\mathrm{i}\,\omega}{m} p + \mathrm{i}\,\omega \beta \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \gamma_i \cdot \vec{e}_i + \nabla \cdot w^* + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial_{x_i}\eta_i}{\mathrm{i}\,\omega + \eta_i} w_i^* = 0, & \\ \mathrm{i}\,\omega\, (\sigma_i)_j = (\mathrm{i}\,\omega + \eta_j)(\sigma_i^*)_j & \forall\, i, j = 1, d, \\ \mathrm{i}\,\omega\, w_i = (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\, w_i^* & \forall\, i = 1, d. \end{array} \right.$$

Pour revenir au domaine temporel, il est utile d'introduire quelques variables vectorielles auxiliaires ($\bar{\sigma}$, $\bar{w}$, $\tilde{w}$) :

$$\text{(7.5.5)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\mathrm{i}\,\omega + \eta_j)\, \bar{\sigma}_{ij} = \partial_{x_j} \eta_j\, \sigma_{ij}^* & \forall\, i, j = 1, d, \\ (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\, \bar{w}_i = \partial_{x_i} \eta_i\, w_i^* & \forall\, i = 1, d \\ \mathrm{i}\,\omega\, \tilde{w}_i = (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\, w_i & \forall\, i = 1, d. \end{array} \right.$$

Nous pouvons alors écrire le système (7.5.4) sous la forme :

$$
(7.5.6) \qquad \begin{cases}
\mathrm{i}\,\omega\,\rho\,u_i + \mathrm{i}\,\omega\,\rho_f\,w_i - \nabla\cdot\sigma_i^* - \displaystyle\sum_{j=1}^{d}\bar{\sigma}_i\cdot\vec{e}_j = 0 & \forall\, i = 1,d \\
(\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\,\rho_f\,u_i + \mathrm{i}\,\omega\,\rho_w\,\tilde{w}_i + \dfrac{1}{\mathcal{K}}\tilde{w}_i + \partial_{x_i}p = 0 & \forall\, i = 1,d \\
(\mathrm{i}\,\omega + \eta_l)\,(\gamma_i)_j = \partial_{x_j}u_i & \forall\, i,j = 1,d \\
\mathrm{i}\,\omega\,\sigma_i = \mathrm{i}\,\omega\displaystyle\sum_{j=1}^{d}A_{ij}\gamma_j - \mathrm{i}\,\omega\,\beta\,p\,\vec{e}_i & \forall\, i = 1,d \\
\dfrac{\mathrm{i}\,\omega}{m}p + \mathrm{i}\,\omega\beta\displaystyle\sum_{i=1}^{d}\gamma_i\cdot\vec{e}_i + \nabla\cdot w^* + \sum_{i=1}^{d}\bar{w}.\vec{e}_i = 0, & \\
\mathrm{i}\,\omega\,\sigma_{ij} = (\mathrm{i}\,\omega + \eta_j)\,\sigma_{ij}^* & \forall\, i,j = 1,d, \\
(\mathrm{i}\,\omega + \eta_j)\,\bar{\sigma}_{ij} = \partial_{x_j}\eta_j\,\sigma_{ij}^* & \forall\, i,j = 1,d, \\
(\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\,w_i = \mathrm{i}\,\omega\,\tilde{w}_i & \forall\, i = 1,d, \\
\mathrm{i}\,\omega\,w_i = (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\,w_i^*,\ (\mathrm{i}\,\omega + \eta_i)\,\bar{w}_i = \partial_{x_i}\eta_i\,w_i^* & \forall\, i = 1,d.
\end{cases}
$$

Nous écrirons $\mathrm{i}\,\omega\,\sigma_i$ dans la quatrième équation en fonction de σ_i^* en utilisant la sixième équation du dernier système. Comme $\sigma^* = \sigma$ dans le domaine physique (sans PML), nous prolongeons par continuité cette égalité dans les PML. Nous obtenons alors après le retour au domaine temporel :

$$
(7.5.7a) \qquad \rho\,\partial_t u + \rho_f\,\partial_t w - \boldsymbol{\nabla}\cdot\sigma - (\sum_{j=1}^{d}\bar{\sigma}_i.\vec{e}_j)_{i=1,d} = 0,
$$

$$
(7.5.7b) \qquad \rho_f\,\partial_t u + \rho_w\,\partial_t\tilde{w} + \rho_f\mathcal{E}\,u + \frac{1}{\mathcal{K}}\tilde{w} + \nabla p = 0,
$$

$$
(7.5.7c) \qquad \partial_t\gamma_i + \mathcal{E}\,\gamma_i = \nabla u_i, \quad \forall i = 1,d,
$$

$$
(7.5.7d) \qquad \partial_t\sigma_i + \mathcal{E}\,\sigma_i = \sum_{j=1}^{d}A_{ij}\partial_t\gamma_j - \beta\,\partial_t p\,\vec{e}_i, \quad \forall\, i = 1,d,
$$

$$
(7.5.7e) \qquad \frac{1}{m}\,\partial_t p + \beta\sum_{i=1}^{d}\partial_t\gamma_i\cdot\vec{e}_i + \nabla\cdot w^* + \sum_{i=1}^{d}\bar{w}_i = 0,
$$

$$
(7.5.7f) \qquad \partial_t\bar{\sigma}_i + \mathcal{E}\,\bar{\sigma}_i = \mathcal{E}'\sigma_i, \quad \forall\, i = 1,d,
$$

$$
(7.5.7g) \qquad \partial_t\bar{w} + \mathcal{E}\,\bar{w} = \mathcal{E}'\,w^*,
$$

$$
(7.5.7h) \qquad \partial_t w + \mathcal{E}\,w = \partial_t\tilde{w},
$$

$$
(7.5.7i) \qquad \partial_t w = \partial_t w^* + \mathcal{E}\,w^*.
$$

avec $\mathcal{E} = diag(\eta_1,\cdots,\eta_d)$ et $\mathcal{E}' = diag(\eta_1',\cdots,\eta_d')$

7.5.1 Formulation variationnelle

En utilisant les mêmes techniques que dans le cas sans PML, la formulation variationnelle associée au problème (7.5.7) est la suivante :

(7.5.8)
$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}(u,u^\diamond) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_f(w,u^\diamond) + \sum_{i=1}^{d}\boldsymbol{r}(\sigma_i,u_i^\diamond) - \sum_{i,j=1}^{d}\boldsymbol{s}_j(\bar\sigma_i,u_i^\diamond) = 0, & \forall u^\diamond \in H_u \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_f(\tilde w^\diamond,u) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\rho}_w(\tilde w,\tilde w^\diamond) + \boldsymbol{e}_f(u,\tilde w^\diamond) + \boldsymbol{k}(\tilde w,\tilde w^\diamond) + \boldsymbol{r}(\tilde w^\diamond,p) = 0, & \forall \tilde w^\diamond \in H_w \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(\gamma_i,\gamma^\diamond) + \boldsymbol{e}(\gamma_i,\gamma^\diamond) - \boldsymbol{r}(\gamma^\diamond,u_i) = 0 \quad \forall\, i=1,d, & \forall\, \gamma^\diamond \in H_w \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(\sigma_i,\sigma^\diamond) + \boldsymbol{e}(\sigma_i,\sigma^\diamond) - \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{d}\boldsymbol{a}_{ij}(\gamma_j,\sigma^\diamond) + \boldsymbol{b}_i(p,\sigma^\diamond) = 0 \quad \forall\, i=1,d, & \forall\, \sigma^\diamond \in H_w \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{m}(p,p^\diamond) + \sum_{i=1}^{d}\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}_i(p^\diamond,\gamma_i) - \boldsymbol{r}(w^*,p^\diamond) + \boldsymbol{s}_i(\bar w,p^\diamond) = 0, & \forall\, p^\diamond \in H_p \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(\bar\sigma_i,\bar\sigma^\diamond) + \boldsymbol{e}(\bar\sigma_i,\bar\sigma^\diamond) - \boldsymbol{e}'(\sigma_i,\bar\sigma^\diamond) = 0, \quad \forall\, i=1,d & \forall\, \bar\sigma^\diamond \in H_w \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(\bar w,\bar w^\diamond) + \boldsymbol{e}(\bar w,\bar w^\diamond) - \boldsymbol{e}'(w^*,\bar w^\diamond) = 0, & \forall\, \bar w^\diamond \in H_w \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(w,w^\diamond) - \frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(\tilde w,w^\diamond) + \boldsymbol{e}(w,w^\diamond) = 0, & \forall\, w^\diamond \in H_w \\
\frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(w^*,w^{*\diamond}) - \frac{d}{dt}\boldsymbol{d}(w,w^{*\diamond}) + \boldsymbol{e}(w^*,w^{*\diamond}) = 0, & \forall\, w^{*\diamond} \in H_w
\end{cases}$$

où les formes bilinéaires $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho}_f$, $\boldsymbol{\rho}_w$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{a}_{ij}$ $\forall\, i,j=1,d$ sont données par (7.3.2), et les autres formes sont définies par :

(7.5.9)
$$\left|\begin{array}{ll}
\boldsymbol{s}_i(w,p) = \int_\Omega w\cdot\vec e_i\, p\, dx & \forall\,(w,p)\in H_w\times H_p \\
\boldsymbol{e}_f(u,w) = \int_\Omega \rho_f\,\mathcal{E}\,u\cdot w\, dx, & \forall\,(u,w)\in H_u\times H_w \\
\boldsymbol{e}(w,\tilde w) = \int_\Omega \mathcal{E}\,w\cdot\tilde w\, dx, & \forall\,(w,\tilde w)\in H_w\times H_w \\
\boldsymbol{e}'(w,\tilde w) = \int_\Omega \mathcal{E}'\,w\cdot\tilde w\, dx. & \forall\,(w,\tilde w)\in H_w\times H_w
\end{array}\right.$$

7.5.2 Discrétisation

Pour la discrétisation en espace nous considérons les espace d'approximations (7.3.7), en effectuant les mêmes opérations que sur le système dans le domaine physique (sans PML),

nous obtenons le schéma semi-discret en espace :

$$
(7.5.10)\qquad \begin{cases}
D_u\,\dfrac{dU_h}{dt} + D_{uw}\,\dfrac{dW_h}{dt} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} R\,\Sigma_{ih} - \sum_{i,j=1}^{d} S_j\,\bar{\Sigma}_{ih} = 0, & \\
D^*_{uw}\,\dfrac{dU_h}{dt} + D_w\,\dfrac{d\tilde{W}_h}{dt} + E_f\,U_h + K\,\tilde{W}_h + R^*\,P_h = 0, & \\
D_\gamma\,\dfrac{d\Gamma_{ih}}{dt} + E\,\Gamma_{ih} - R^* U_{ih} = 0, & \forall\, i = 1, d, \\
D_\gamma\,\dfrac{d\Sigma_{ih}}{dt} + E\,\Sigma_{ih} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} T_{ij}\dfrac{d\Gamma_{jh}}{dt} - G_i\dfrac{dP_h}{dt}, & \forall\, i = 1, d \\
D_p\,\dfrac{dP_h}{dt} + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} G_i^*\dfrac{d\Gamma_{ih}}{dt} - R\,W_h^* + \sum_{i=1}^{d} S_i\,\bar{W}_h = 0, & \\
D_\gamma\,\dfrac{d\bar{\Sigma}_{ih}}{dt} + E\,\bar{\Sigma}_{ih} = E'\,\Sigma_{ih}, & \forall\, i = 1, d, \\
D_\gamma\,\dfrac{d\bar{W}_h}{dt} + E\,\bar{W}_h = E'\,W_h^*, & \\
D_\gamma\,\dfrac{dW_h}{dt} + E\,W_h = D_\gamma\,\dfrac{d\tilde{W}_h}{dt}, & \\
D_\gamma\,\dfrac{dW_h^*}{dt} + E\,W_h^* = D_\gamma\,\dfrac{dW_h}{dt}. &
\end{cases}
$$

où D_u, D_p, D_w, D_γ, D_{uw}, R, T_{ij} et G_i sont les mêmes matrices que celles obtenues dans (7.3.10) pour le semi-discrétisation en espace du problème modèle dans le domaine sans couches PML et avec :

– E_f a la même structure que D_{uw} :

$$
\begin{aligned}
(E_f)^e_{i,l,\boldsymbol{n},k} &= \boldsymbol{e}_{fh}(\phi_{i,l}, \psi^e_{\boldsymbol{n},k}) = \int_{\hat{K}} |J_e| \big[\rho_f\,\mathcal{E}\,\phi_{i,l}\cdot\psi^e_{\boldsymbol{n},k}\big]\circ F_e\,d\hat{x} \\
&= \int_{\hat{K}} \rho_f\circ F_e\,\hat{\varphi}_{loc_e(i)}\hat{\varphi}_{\boldsymbol{n}} DF_e\,\vec{e}_k\cdot\mathcal{E}\,\vec{e}_l\,d\hat{x} \\
&= \begin{cases} \delta_{\boldsymbol{n}\,loc_e(i)}\,\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}\,\rho_f(\xi_i)\eta_l(\xi_i)\,DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}})\vec{e}_k\cdot\vec{e}_l & \text{si } \xi_i\in K_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \eta_l(\xi_i)\,(D_{uw})^e_{i,l,\boldsymbol{n},k}.
\end{aligned}
$$

– E est une matrice diagonale par bloc $d\times d$ qui a la même structure que D_w, le bloc associé au n-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :

$$
\frac{\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}}{|J_e|} DF_e^*\,\mathcal{E}\,DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}),
$$

– E' est une matrice diagonale par bloc $d\times d$ dont le bloc associé au n-ième degré de liberté du e-ième élément du maillage s'écrit :

$$
\frac{\hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}}{|J_e|} DF_e^*\,\mathcal{E}'\,DF_e(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}),
$$

– S_l est une matrice très creuse et ses termes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
(S_l)^e_{i,\boldsymbol{n},k} &= s_l(\psi^e_{\boldsymbol{n},k}, \varphi_i) = \int_{K_e} (\psi^e_{\boldsymbol{n},k} \cdot \vec{e}_l)\, \varphi_i \, dx \\
&= \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_{\boldsymbol{n}} (DF_e\, \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l) \varphi_{loc_e(i)} \, d\hat{x} \\
&= \begin{cases} \delta_{\boldsymbol{n}\, loc_e(i)}\, \hat{\omega}_{\boldsymbol{n}}\, (DF_e)_{lk}(\hat{\xi}_{\boldsymbol{n}}) & \text{si } \xi_i \in K_e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

où $(DF_e)_{lk}$ est le terme de DF_e situé à la l-ième ligne et à la k-ième colonne.

Remarque 7.5.1 *On remarque que on retrouve le schémas semi-discret en espace dans le domaine physique lorsque les coefficients d'amortissement $\eta_i = 0 \; \forall\, i = 1, d$.*

Pour la discrétisation en temps nous utilisons des différences finies d'ordre deux analogues à celles qu'on a utilisés pour problème dans le domaine physique (lorsque $\eta_i = 0 \; \forall\, i = 1, d$), d'où le schéma suivant :

$$D_u \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + D_{uw} \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t} + \sum_i^d R\, \Sigma_{ih}^{n+1/2} - \sum_{i,j=1}^d S_i \bar{\Sigma}_{jh}^{n+1/2} = 0, \tag{7.5.11a}$$

$$\begin{aligned}
&D^*_{uw} \frac{U_h^{n+1} - U_h^n}{\Delta t} + D_w \frac{\tilde{W}_h^{n+1} - \tilde{W}_h^n}{\Delta t} + E_f \frac{U_h^{n+1} + U_h^n}{2} \\
&+K \frac{\tilde{W}_h^{n+1} + \tilde{W}_h^n}{2} + R^*\, P_h^{n+1/2} = 0,
\end{aligned} \tag{7.5.11b}$$

$$D_\gamma \frac{\Gamma_{ih}^{n+1/2} - \Gamma_{ih}^{n-1/2}}{\Delta t} + E \frac{\Gamma_{ih}^{n+1/2} + \Gamma_{ih}^{n-1/2}}{2} = R^*\, U_{ih}^n, \quad \forall\, i = 1, d \tag{7.5.11c}$$

$$\begin{aligned}
&D_\gamma \frac{\Sigma_{ih}^{n+1/2} - \Sigma_{ih}^{n-1/2}}{\Delta t} + E \frac{\Sigma_{ih}^{n+1/2} + \Sigma_{ih}^{n-1/2}}{2} = \sum_{j=1}^d T_{ij} \frac{\Gamma_{jh}^{n+1/2} - \Gamma_{jh}^{n-1/2}}{\Delta t} \qquad \forall\, i = 1, d \\
&-G_i \frac{P^{n+1/2} - P^{n-1/2}}{\Delta t},
\end{aligned} \tag{7.5.11d}$$

$$M \frac{P_h^{n+1/2} - P_h^{n-1/2}}{\Delta t} + \sum_{i=1}^d G_k^* \frac{\Gamma_{ih}^{n+1/2} - \Gamma_{ih}^{n-1/2}}{\Delta t} - R\, W_h^{*n} + \sum_{i=1}^d S_i\, \bar{W}_h^n = 0, \tag{7.5.11e}$$

$$D_\gamma \frac{\bar{\Sigma}_{ih}^{n+1/2} - \bar{\Sigma}_{ih}^{n-1/2}}{\Delta t} + E \frac{\bar{\Sigma}_{ih}^{n+1/2} + \bar{\Sigma}_{ih}^{n-1/2}}{2} = E' \frac{\Sigma_{ih}^{n+1/2} + \Sigma_{ih}^{n-1/2}}{2}, \quad \forall\, i = 1, d \tag{7.5.11f}$$

$$D_\gamma \frac{\bar{W}_h^{n+1} - \bar{W}_h^n}{\Delta t} + E \frac{\bar{W}_h^{n+1} + \bar{W}_h^n}{2} = E' \frac{W_h^{*n+1} + W_h^{*n}}{2}, \tag{7.5.11g}$$

$$D_\gamma \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t} + E \frac{W_h^{n+1} + W_h^n}{2} = D_\gamma \frac{\tilde{W}_h^{n+1} - \tilde{W}_h^n}{\Delta t}, \tag{7.5.11h}$$

$$D_\gamma \frac{W_h^{*n+1} - W_h^{*n}}{\Delta t} + E \frac{W_h^{*n+1} + W_h^{*n}}{2} = D_\gamma \frac{W_h^{n+1} - W_h^n}{\Delta t}. \tag{7.5.11i}$$

La résolution de ce système est explicite, en utilisant les équations (7.5.11c)-(7.5.11f) on peut déterminer facilement Γ_h^{n+1}, P_h^{n+1}, $\Sigma_h^{n+1/2}$ et $\bar{\Sigma}_h^{n+1/2}$ grâce à la dioganalité des matrices D_γ, D_p et E. Pour le calcul des inconnues couplées, nous remplaçons $\tilde{W}_h^{n+1}$ dans (7.5.11b) en utilisant l'équation (7.5.11h) :

$$\tilde{W}_h^{n+1} = W_h^{n+1} - W_h^n + \frac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E\,(W_h^{n+1} + W_h^n) + \tilde{W}_h^n.$$

Les deux premières équations se réécrivent alors sous la forme d'un système linéaire :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_h^{n+1} \\ \hline W_h^{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \end{array}\right],$$

avec

$$\begin{cases} A_{11} = D_u,\ A_{12} = D_{uw},\ A_{21} = D_{uw}^* + \dfrac{\Delta t}{2} E_f, \\ A_{22} = (D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K)(\boldsymbol{I}_d + \dfrac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E), \\ F_1 = -\Delta t \displaystyle\sum_i^d R\,\Sigma_{ih}^{n+1/2} + \Delta t \sum_{i,j} S_i \bar{\Sigma}_{jh}^{n+1/2} + D_u\, U_h^n + D_{uw}\, W_h^n, \\ F_2 = (D_{uw}^* - \dfrac{\Delta t}{2} E_f) U_h^n + (D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K)(\boldsymbol{I}_d - \dfrac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E) W_h^n - \Delta t K \tilde{W}_h^n - \Delta t R^*\, P_h^{n+1/2}. \end{cases}$$

En posant :

$$W_h^{n+1} = A_{22}^{-1}(F_2 - A_{21} U_h^{n+1}), \tag{7.5.12}$$

on en déduit que U_h^{n+1} est la solution du système :

$$H\, U_h^{n+1} = F, \tag{7.5.13}$$

avec

$$\left| \begin{array}{l} H = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} = D_u - D_{uw} A_{22}^{-1} A_{21}, \\ F = F_1 - D_{uw} A_{22}^{-1} F_2 \end{array} \right.$$

La matrice H est diagonale par bloc de taille $d \times d$, pour calculer alors U_h^{n+1} il suffit d'inverser des matrice de taille $d \times d$. Une fois qu'on a calculé U_h^{n+1} nous déterminons W_h^{n+1} à l'aide de l'équation (7.5.12) et enfin nous pouvons calculer facilement W_h^{n+1}, $\tilde{W}_h^{n+1}$ et $\bar{W}_h^{n+1}$ en utilisant les trois dernières équations du système (7.5.11).

En récapitulant l'algorithme de la méthode dans les couches PML est donné par :

1. On suppose connues les données suivantes :
   - Δt, U^0, W^0, $\tilde{W}^0$, $\bar{W}^0$, W^{*0}, $P^{-1/2}$, $\Gamma_i^{-1/2}\,\Sigma_i^{-1/2}$, $\bar{\Sigma}_i^{-1/2}$ $\ i = 1, d$
   - D_u, D_w, D_p, D_γ, D_{uw}, R, E, E_f, E', T_{ij}, G_i, S_i $\ i, j = 1, d$
2. Calcul de $\Gamma_i^{n+1/2}$ $\ i = 1, \cdots, d$ à l'aide de l'équation (7.5.11c) :

$$(D_\gamma + \frac{\Delta t}{2} E)^{-1} \Big[\Delta t R^* U_i^n + (D_\gamma - \frac{\Delta t}{2} E) \Gamma_i^{n-1/2}\Big].$$

3. Calcul de $P^{n+1/2}$ à l'aide de l'équation (7.5.11e) :

$$P^{n+1/2} = P^{n-1/2} - D_p^{-1} \sum_{i=1}^{d} G_i^* (\Gamma_i^{n+1/2} - \Gamma_i^{n-1/2}) + \Delta t D_p^{-1} R\, W^{*n} - \Delta t D_p^{-1} \sum_{j=1}^{d} S_j \bar{W}^n.$$

4. Calcul de $\Sigma_i^{n+1/2}$ $\forall\, i = 1, d$ à l'aide de l'équation (7.5.11d) :

$$\Sigma_i^{n+1/2} = \left(D_\gamma + \frac{\Delta t}{2} E\right)^{-1} \left[\sum_{j=1}^{d} T_{ij} (\Gamma_j^{n+1/2} - \Gamma_j^{n-1/2}) - G_i (P^{n+1/2} - P^{n-1/2}) + (D_\gamma - \frac{\Delta t}{2} E) \Sigma_i^{n-1/2}\right]$$

5. Calcul de $\bar{\Sigma}_i^{n+1/2}$ $\forall\, i = 1, d$ à l'aide de l'équation (7.5.11f) :

$$\bar{\Sigma}_i^{n+1/2} = \left(D_\gamma + \frac{\Delta t}{2} E\right)^{-1} \left[\frac{\Delta t}{2} E' (\Sigma_i^{n+1/2} + \Sigma_i^{n-1/2}) + (D_\gamma - \frac{\Delta t}{2} E) \bar{\Sigma}_i^{n-1/2}\right]$$

6. Calcul de $U^{n+1} = H^{-1} F$, avec :

$$\begin{cases} H = D_u - D_{uw} A_{22}^{-1} \left(D_{uw}^* + \dfrac{\Delta t}{2} E_f\right), \\ A_{22} = \left(D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K\right) \left(\boldsymbol{I}_d + \dfrac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E\right), \\ F = F_1 - D_{uw} A_{22}^{-1} F_2, \\ F_1 = -\Delta t \displaystyle\sum_i^d R\, \Sigma_{ih}^{n+1/2} + \Delta t \sum_{i,j} S_i \bar{\Sigma}_{jh}^{n+1/2} + D_u\, U_h^n + D_{uw}\, W_h^n, \\ F_2 = \left(D_{uw}^* - \dfrac{\Delta t}{2} E_f\right) U_h^n + \left(D_w + \dfrac{\Delta t}{2} K\right) \left(\boldsymbol{I}_d - \dfrac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E\right) W_h^n - \Delta t K \tilde{W}_h^n - \Delta t R^*\, P_h^{n+1/2}. \end{cases}$$

7. Calcul de $W^{n+1} = A_{22}^{-1} \left[F_2 - \left(D_{uw}^* + \dfrac{\Delta t}{2} E_f\right) U^{n+1}\right]$.

8. Calcul de $\tilde{W}^{n+1}$ à l'aide de l'équation (7.5.11h) :

$$\tilde{W}^{n+1} = \tilde{W}^n + \left(\boldsymbol{I}_d + \frac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E\right) W^{n+1} - \left(\boldsymbol{I}_d - \frac{\Delta t}{2} D_\gamma^{-1} E\right) W^n.$$

9. Calcul de W^{*n+1} à l'aide de l'équation (7.5.11i) :

$$W^{*n+1} = \left(D_\gamma + \frac{\Delta t}{2} E\right)^{-1} \left[D_\gamma (W^{n+1} - W^n) + (D_\gamma - \frac{\Delta t}{2} E) W^{*n}\right]$$

10. Calcul de $\bar{W}^{n+1}$ à l'aide de l'équation (7.5.11g) :

$$\bar{W}^{n+1} = \left(D_\gamma + \frac{\Delta t}{2} E\right)^{-1} \left[\frac{\Delta t}{2} E' (W^{*n+1} + W^{*n}) + (D_\gamma - \frac{\Delta t}{2} E) \bar{W}^n\right] \quad \blacksquare$$

7.5.3 Mise en oeuvre de la méthode

Pour la mise en oeuvre de la méthode nous considérons un domaine :

$$\Omega = \prod_{i=1}^{d} [x_{i\,min}, x_{i\,max}]$$

entouré par des couches absorbantes d'épaisseur δ_i dans chaque direction x_i (voir la figure 7.5.1) et nous supposons que les supports des fonctions initiales sont contenus dans le domaine sans couches absorbantes.

Remarque 7.5.2 *Pratiquement, on prend les épaisseurs* $\delta_i = \dfrac{3}{2}\lambda_c$, *où* λ_c *est la longueur de l'onde qui a la plus grande vitesse.*

Pour le choix des coefficients d'amortissements η_i, nous utilisons les fonctions définies par [43] :

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \dfrac{3c}{2\delta_i^3} \log(1/R)(x_{i\,min} - x)^2 & x_i \leq x_{i\,min}, \\ 0 & x_{i\,min} \leq x_i \leq x_{i\,max}, \\ \dfrac{3c}{2\delta_i^3} \log(1/R)(x_{i\,max} - x)^2 & x_i \geq x_{i\,max}, \end{cases}$$

où c est la plus grande vitesse dans le domaine et $R = 1/1000$ le pourcentage de énergie réfléchie par le bord extérieur de la PML.

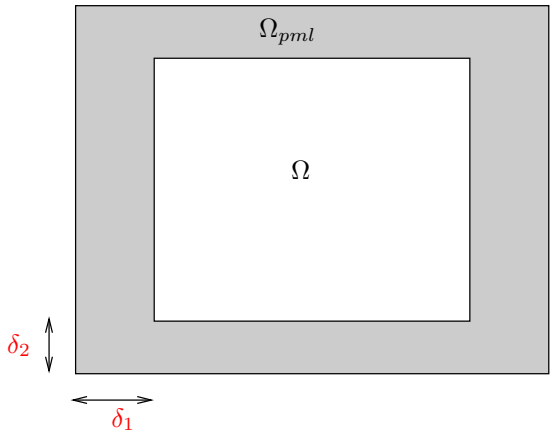


FIG. 7.5.1 – Domaine de calcul

Chapitre 8

Simulations et résultats numériques

Dans ce chapitre nous validons les résultats obtenus par la méthode présentée dans cette partie. Nous présentons des simulations dans différents milieux : homogènes, isotropes, anisotropes et hétérogènes.

Sommaire

8.1 Dispersion numérique et ordre élevé 207
8.1.1 Méthode d'ordre 1 207
8.1.2 Méthodes d'ordre élevés 209
8.2 Comparaison avec la solution analytique 212
8.3 Simulation dans un milieu homogène anisotrope 214
8.4 Simulations dans un milieu hétérogène 216

Ce chapitre est consacré à la validation de la méthode numérique développée dans le chapitre précédent. Dans un premier temps nous présentons plusieurs simulations où on montre l'influence de l'ordre de la méthode sur la dispersion et la qualité de la précision. Dans un deuxième temps nous comparons la solution approchée obtenue par notre méthode avec une solution analytique. Finalement, nous terminons le chapitre par des simulations dans des milieux anisotropes et hétérogènes.

8.1 Dispersion numérique et ordre élevé

Dans cette section on présente des expériences numériques où on montre l'influence de l'ordre de la méthode sur l'approximation et la dispersion numérique de la solution.

8.1.1 Méthode d'ordre 1

Dans une première expérience, on se place dans un milieu poroélastique, caractérisé par les données physiques :

$$\left| \begin{array}{l} \rho = 3\,kg/m^3, \rho_f = 1.\,kg/m^3,\ \rho_w = 7.5\,kg/m^3,\ \mu = 4\,Pa, \\ \lambda_0 = 5.93\,Pa,\ \beta = 0.295, m = 10\,Pa,\ \dfrac{1}{\mathcal{K}} = 50.\,N\,s/m^4, \end{array} \right. \tag{8.1.1}$$

ce qui correspond aux vitesses :

$$V_{pf} = 2.24\,m/s,\ V_{ps} = 1.19\,m/s,\ V_s = 1.18\,m/s$$

où V_{pf} est la vitesse de la première onde P (de première espèce), V_{ps} est la vitesse de la deuxième onde P (de seconde espèce ou onde lente) et V_s la vitesse des ondes S.

On considère le domaine $\Omega = [0,6] \times [0,6]\,m^2$ avec une source de pression f_p ponctuelle en espace localisée au centre du milieu, le signal temporel est une gaussienne (voir la figure 8.1.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_p(x,y,t) = \delta(x)\delta(y)\,h(t), \\ h(t) = e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2},\ t_0 = \dfrac{1}{f_0}, \end{array} \right. \tag{8.1.2}$$

de fréquence $f_0 = 2.4$ Hz.

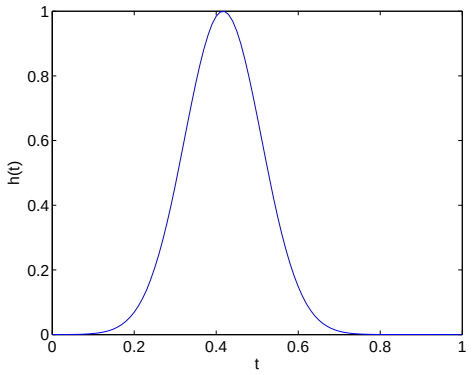
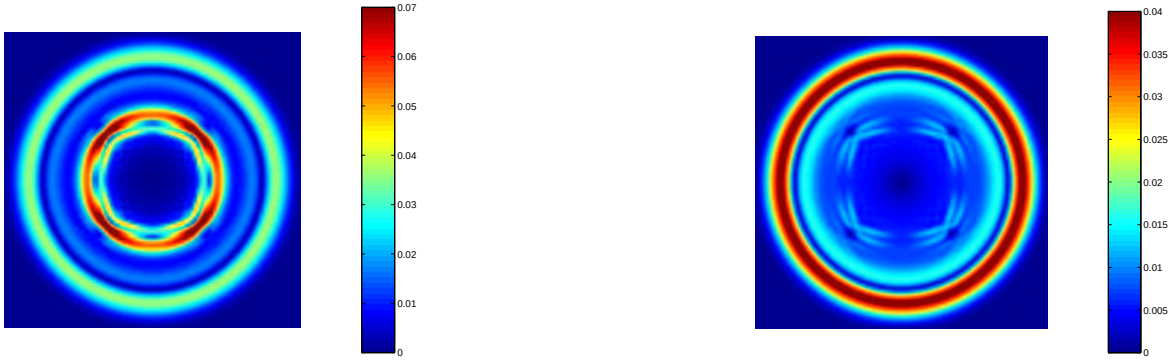


FIG. 8.1.1 – Fonction h(t)

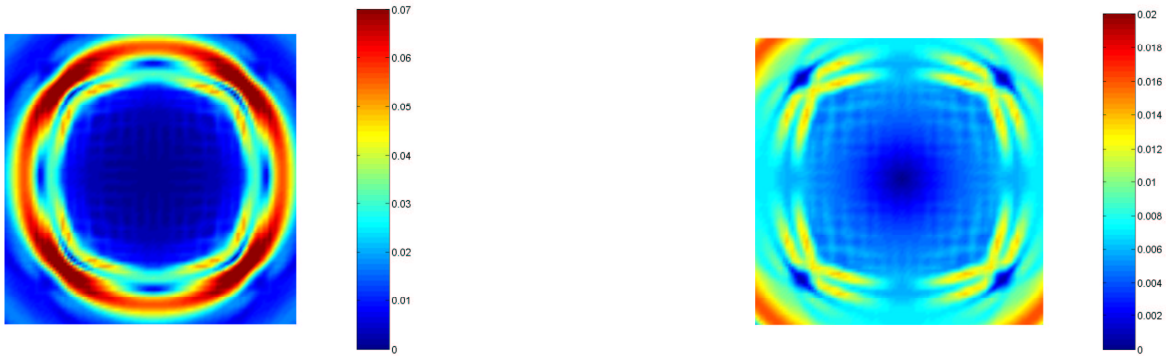
Nous considérons un maillage avec un pas d'espace $h = 1/20$ (10 points par longueur d'onde). Nous présentons sur la figure 8.1.2 la norme de la vitesse à l'instant $t = 1.5s$ calculée par la méthode d'ordre $r = 1$. La première figure 8.1.2(a) pour le cas sans amortissement ce qui correspond à une valeur nulle de la viscosité η ($\frac{1}{\mathcal{K}} = 0$), la deuxième 8.1.2(b) est avec amortissement ($\frac{1}{\mathcal{K}} = 50.$).



(a) Sans amortissement

(b) Avec amortissement

FIG. 8.1.2 – Approximation d'ordre $r = 1$



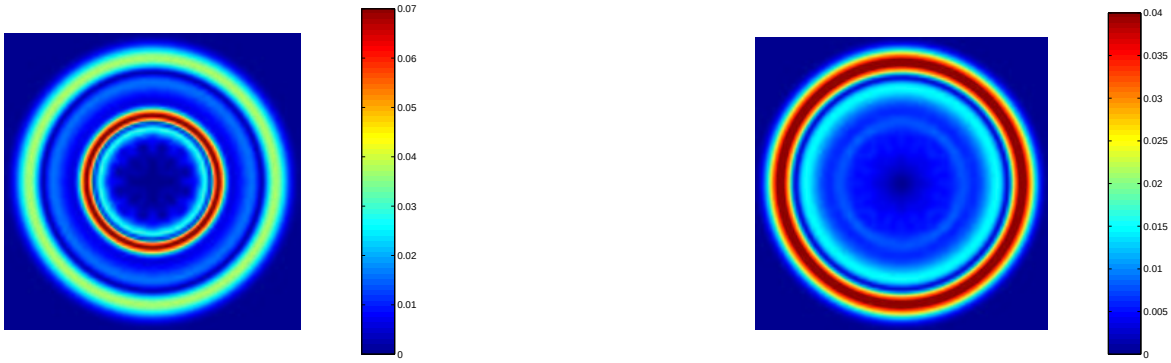
(a) Sans amortissement (b) Avec amortissement

FIG. 8.1.3 – Zoom sur l'onde lente, $r = 1$

On remarque qu'on a un problème de dispersion et d'anisotropie numérique surtout pour l'onde lente, voir la figure plus dispersive 8.1.3 lorsque on fait un zoom sur la partie de l'onde lente, dans les deux cas sans amortissement et avec amortissement.

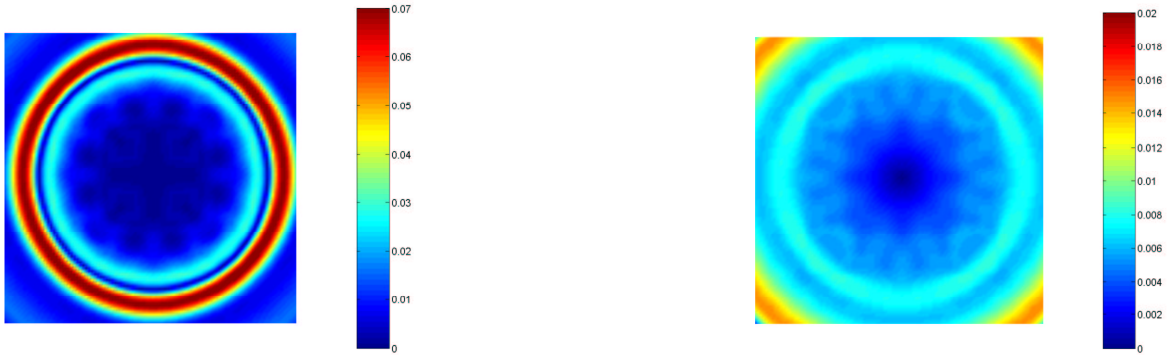
8.1.2 Méthodes d'ordre élevés

Pour résoudre ce problème de dispersion et d'anisotropie numérique, nous augmentons l'ordre de la méthode, sur les figures 8.1.4-8.1.7 nous présentons une deuxième expérience en utilisant des schémas d'ordre 3 et 5, en gardant le même nombre de points par longueur d'onde que dans la simulation précédente.



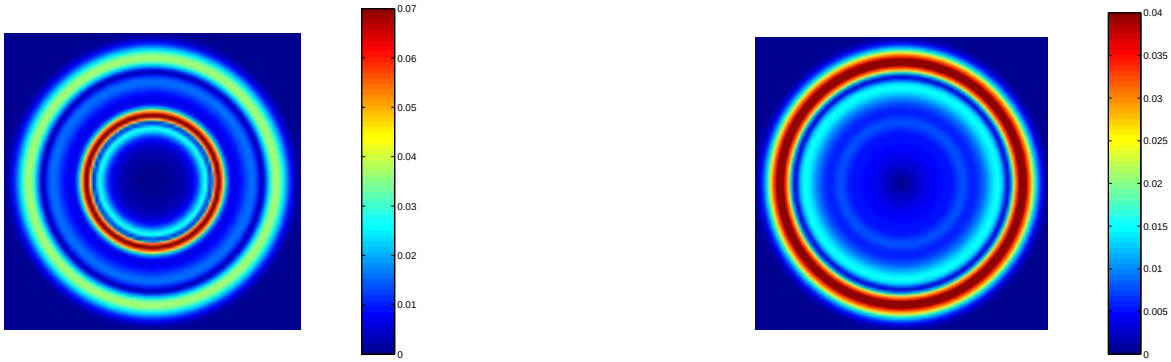
(a) Sans amortissement (b) Avec amortissement

FIG. 8.1.4 – Approximation d'ordre $r = 3$



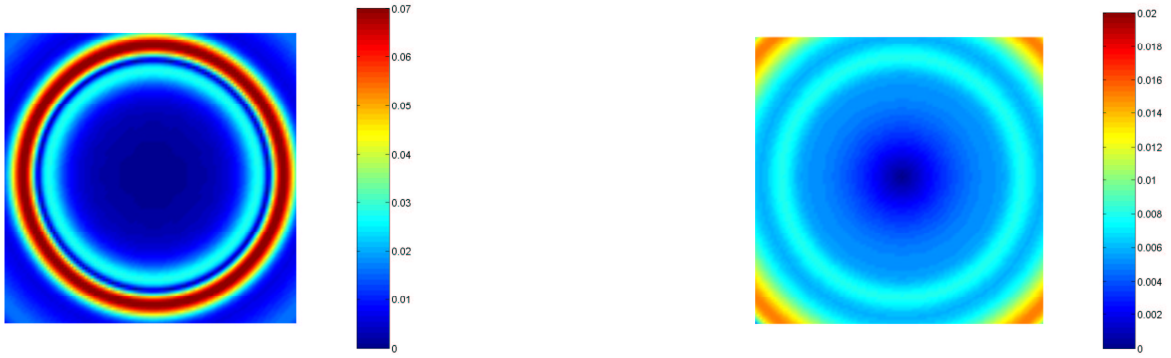
(a) Sans amortissement (b) Avec amortissement

FIG. 8.1.5 – Zoom sur l'onde lente, $r = 3$



(a) Sans amortissement (b) Avec amortissement

FIG. 8.1.6 – Approximation d'ordre $r = 5$



(a) Sans amortissement (b) Avec amortissement

FIG. 8.1.7 – Zoom sur l'onde lente, $r = 5$

Nous avons présenté sur le tableau 8.1.1 les temps de calcul CPU pour des différentes

expériences. Pour chaque ligne du tableau nous avons pris le même nombre par longueur d'onde (le même nombre de degrés de liberté associés à p et u) et nous avons changé l'ordre de la précision $r = 1, \cdots, 5$.

Nombre des degrés de liberté	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
14641	5.84	4.58	4.82	5.80	5.92
32761	16.58	14.01	14.02	16.85	18.40
58081	38.25	29.23	30.44	36.06	38.57
90601	77.38	59.90	66.04	75.10	84.18
130321	127.55	95.85	98.55	117.07	130.04
177241	203.62	161.52	159.90	190.69	206.40
231361	371.01	245.27	246.51	255.37	304.26

Tab. 8.1.1 – Temps de calcul

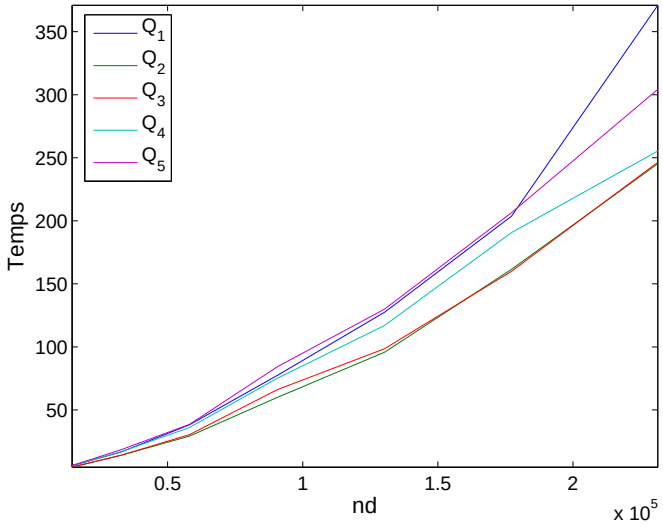


Fig. 8.1.8 – Temps de Calcul CPU

Nous remarquons que en montant en ordre, nous obtenons des résultats plus précis et la méthode reste robuste, bien que les schémas d'ordre élevé nécessitent un pas de temps Δt assez petit d'où un nombre d'itérations plus grand (voir le tableau 8.1.2 et la figure 8.1.9), nous ne perdons presque rien au niveau du temps de calcul (figure 8.1.8) car nous gagnons plus d'espace mémoire pour le stockage des inconnues et des matrices de résolution.

Nombre des degrés de liberté	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
14641	74	183	323	509	739
32761	112	274	484	763	1108
58081	149	366	646	1018	1478
90601	186	457	807	1272	1848
130321	224	549	969	1527	2217
177241	261	640	1130	1781	2587
231361	298	732	1292	2036	2957

TAB. 8.1.2 – Nombre d'itérations

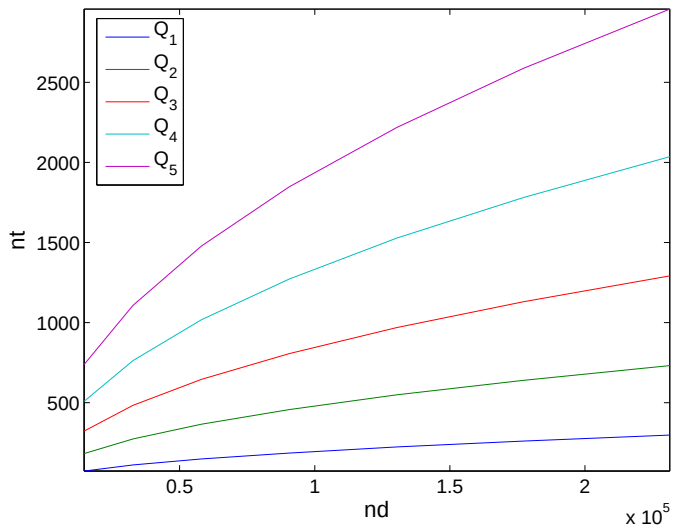


FIG. 8.1.9 – Nombre d'itérations

8.2 Comparaison avec la solution analytique

On se place dans domaine $\Omega = [0,6] \times [0,6]\, m^2$ occupé par un matériau poroélastique non amorti ($\eta = 0$) caractérisé par les données :

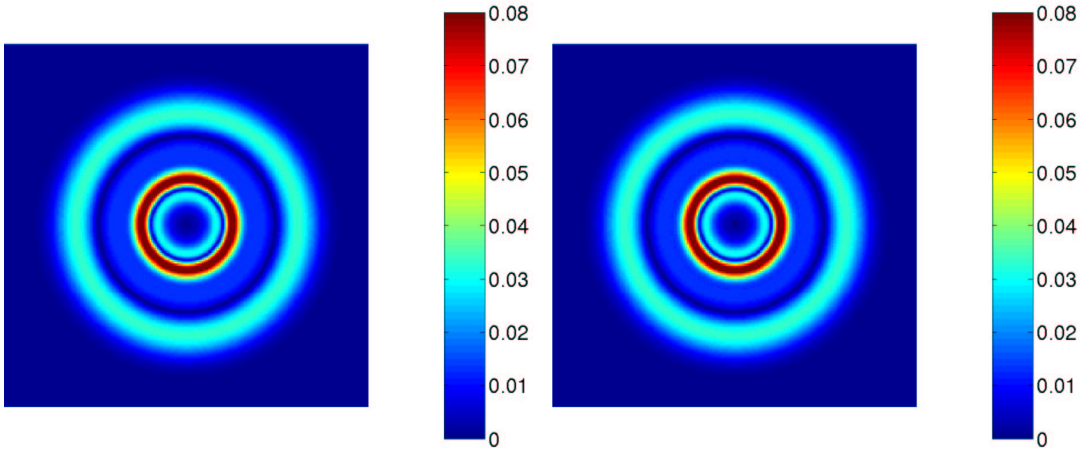
$$\left| \begin{array}{l} \rho = 1.8\, kg/m^3,\ \rho_f = 1.\, kg/s,\ \rho_w = 7.5\, kg/m^3, \\ \mu = 4\, Pa,\ \lambda_0 = 5.93\, Pa,\ m = 10\, Pa,\ \beta = 0.295. \end{array} \right.$$

ce qui correspond aux vitesses :

$$V_{pf} = 2.93\, m/s,\ V_{ps} = 1.19\, m/s, V_s = 1.59\, m/s.$$

On considère la source de pression f_p donnée par (8.1.2) et localisée au centre de Ω.

La solution analytique est déterminée à l'aide d'un code MATLAB en utilisant la convolution en temps de la source et la fonction de Green dans un milieu infini, calculée par la méthode présentée dans la section § 5.2.2.2. On présente sur la figure 8.2.1 la norme de la vitesse à l'instant $t = 1.s$ de la solution analytique (figure 8.2.1(a)) et de la solution numérique (figure 8.2.1(b)) obtenue par notre méthode numérique en utilisant un maillage avec 3600 élément et une méthode d'ordre 5 ($r = 5$). Sur la figure 8.2.1(c) on a tracé l'erreur relative entre les deux solutions numérique et analytique. On observe que la solution numérique approche bien la solution analytique (erreur relative $\leq 0.43\%$).



(a) Solution analytique (b) Solution numérique

Fig. 8.2.1 – Solution analytique et numérique

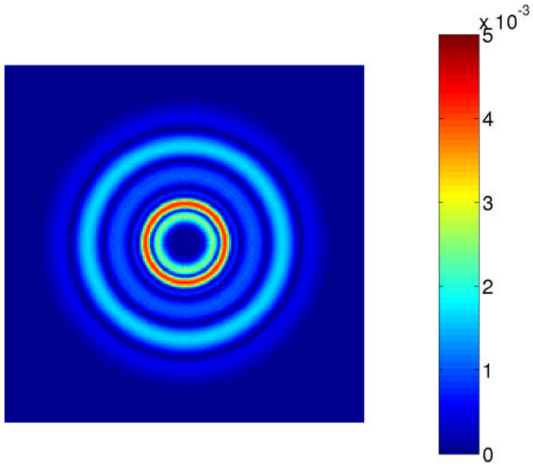


Fig. 8.2.2 – Erreur relative

8.3 Simulation dans un milieu homogène anisotrope

Dans cette section, nous simulons la propagation d'ondes dans un milieu poroélastique anisotrope, Le domaine de calcul est un carré $\Omega = [0.6, 5.4] \times [0.6, 5.4]$, entouré par des couches PML de longueur $\delta = 0.6$. Nous considérons ici une source f_u à support compact, gaussienne en temps, radiale en espace et localisée au centre, qui vérifie :

$$f_u(x, y, t) = F(t)\,\vec{g}(r),\ r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{8.3.1}$$

avec :

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t0)^2} & \text{si } t \leq t_1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
$$t_0 = \frac{1}{f_0},\ t_1 = \frac{5}{2}\,t_0,\ f_0 = 2.4\,\text{Hz},$$
$$\vec{g}(r) = (1 - \frac{r^2}{a^2})\mathbf{1}_{B_a}\,\vec{e},\ \vec{e} = \frac{1}{r}(x, y),$$

où $\mathbf{1}_{B_a}$ est la fonction indicatrice du disque B_a, le disque de centre $(x, y) = (0, 0)$ et de rayon $a = 0.4$.

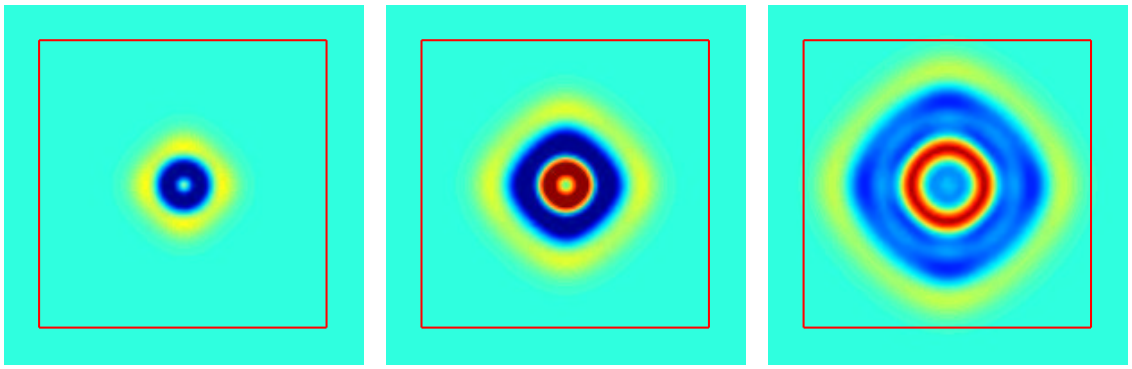
Les coefficients du milieu anisotrope vérifient :

$$\rho = 3\,kg/m^3, \rho_f = 1.\,kg/m^3,\ \rho_w = 7.5\,kg/m^3,\ \beta = 0.295\,m = 10\,Pa.$$

En considérant la correspondance sur les indices du tenseur C défini par (4.2.6) dans la première partie, il est donné par :

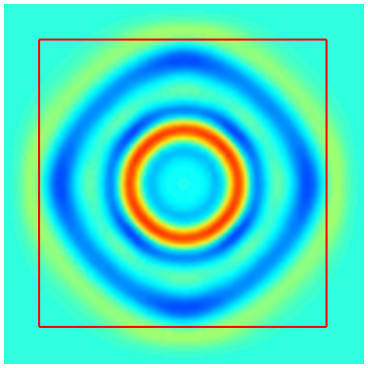
$$C = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 0 \\ 6 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nous présentons sur la figure 8.3.1 des instantanés de la pression p. Nous observons sur cette figure que les milieux poroélastiques anisotropes sont caractérisés par la présence de deux types d'ondes lente et rapide. Nous remarquons de plus que les couches PML absorbent bien les ondes transmises.

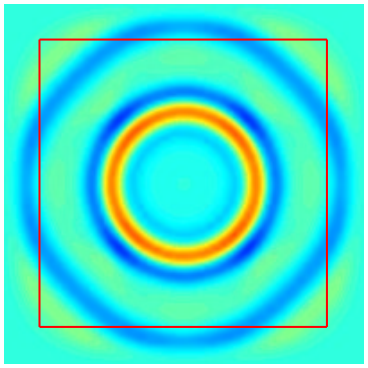


(a) $t = 0.5\,s$ (b) $t = 0.75\,S$ (c) $t = 1.\,s$

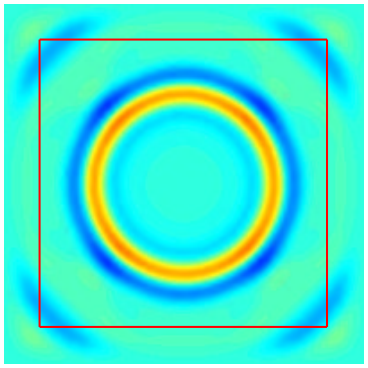
FIG. 8.3.1 – La pression dans un milieu anisotrope



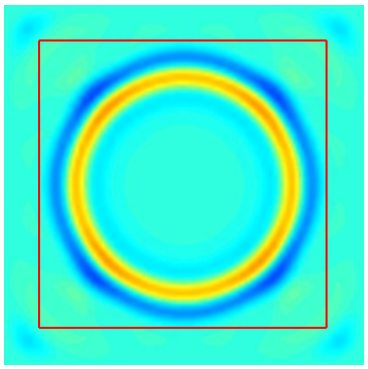
(j) $t = 1.25\,s$



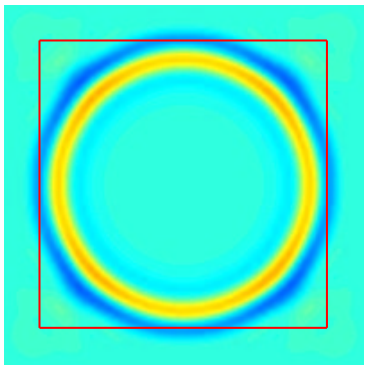
(k) $t = 1.5\,s$



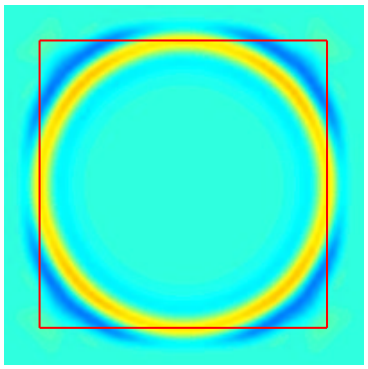
(l) $t = 1.25\,s$



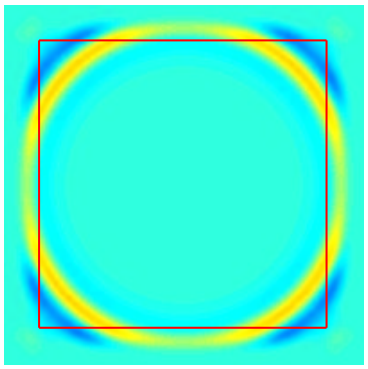
(m) $t = 2.\,s$



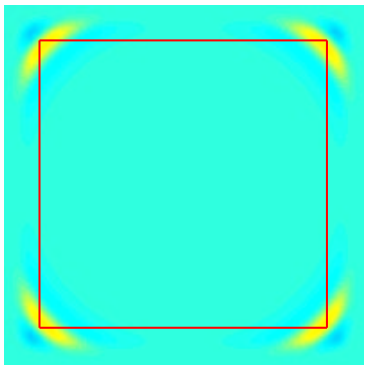
(n) $t = 2.25\,s$



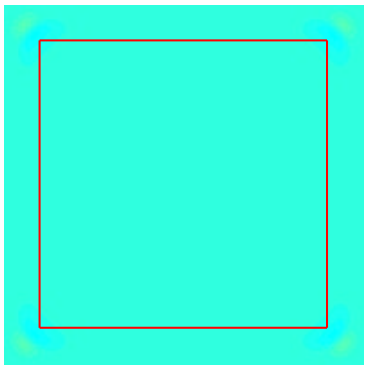
(o) $t = 2.5\,s$



(p) $t = 2.75\,s$



(q) $t = 3.25\,s$



(r) $t = 3.75\,s$

FIG. 8.3.1 – La pression dans un milieu anisotrope (suite)

8.4 Simulations dans un milieu hétérogène

Dans la deuxième expérience, nous simulons la propagation d'ondes poroélastiques dans un milieu hétérogène $\Omega = [0, 300] \times [0, 300]$, entouré par une couche PML. Le milieu est composé de deux couches $[0, 300] \times [0, 105]$ et $[0, 300] \times [105, 300]$ caractérisées par les données physiques [84] présentées sur le tableau 8.4.1. La source est ponctuelle en espace et une dérivée de gaussienne en temps de fréquence $f_0 = 40$ Hz localisé au centre (voir figure 8.4.2) :

$$\begin{cases} f(x, y, t) = \delta(x)\delta(y)\, h(t), \\ h(t) = h_m\,(t - t_0)e^{-\pi^2 f_0^2 (t-t_0)^2},\ t_0 = \dfrac{1}{f_0},\ h_m = 100. \end{cases} \tag{8.4.1}$$

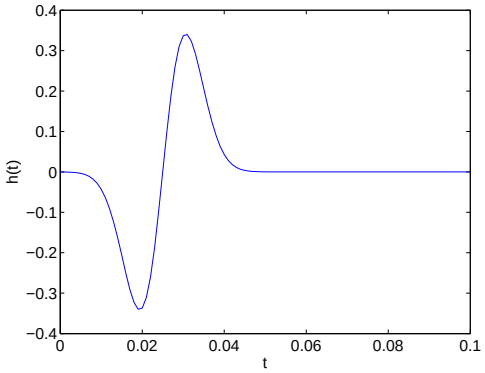


FIG. 8.4.1 – Fonction h(t)

On présente sur la figure 8.4.3 des instantanés de la norme de la vitesse et sur la figure 8.4.4 des instantanés de la pression. Les résultats que nous obtenons sont qualitativement similaires à ceux que ont été obtenus par Zeng et al. dans [84] à partir d'un schéma aux différences finies avec des PML, discrétisant la formulation en déplacements.

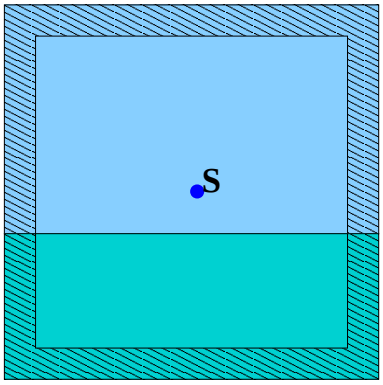
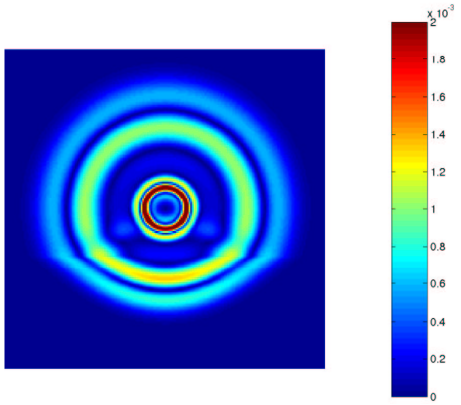


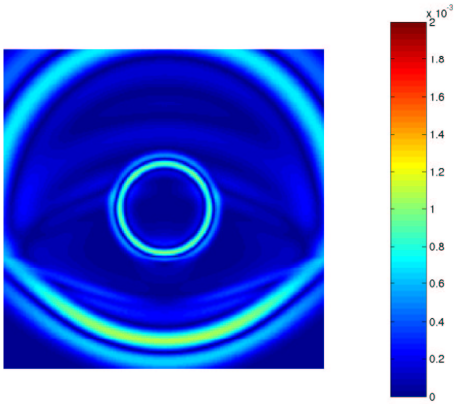
FIG. 8.4.2 – Milieu hétérogène avec couches PML

Propriété physique	Première couche	Deuxième couche
ρ (Kg/m^3)	2179.1	2129
ρ_f (Kg/m^3)	952.4	1040
ρ_w (Kg/m^3)	9486	25168
μ (Pa)	$5.25\,10^9$	$2.4\,10^9$
λ_0 (Pa)	$6.2\,10^8$	$6.\,10^8$
m (Pa)	$7.71\,10^9$	$7.34\,10^9$
β	0.89	0.58
$\frac{1}{\mathcal{K}}$ (N s/m^4)	$3.38\,10^5$	$3.33\,10^6$
V_{pf} (m/s)	2817.33	1919.76
V_{ps} (m/s)	739.44	452.73
V_s (m/s)	1587.4	1072.61

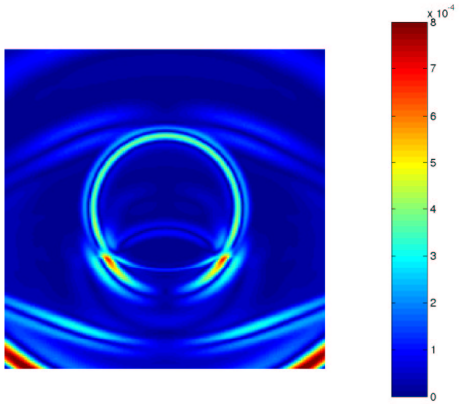
Tab. 8.4.1 – Propriétés physiques du milieu



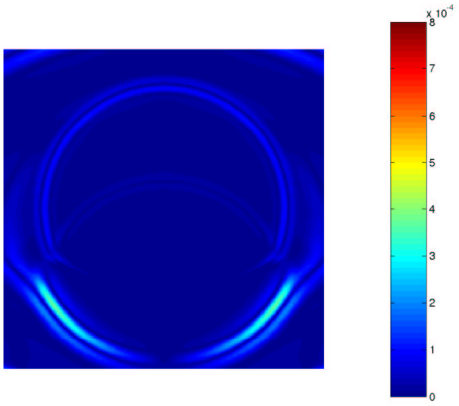
(a) $t = 0.055$ s



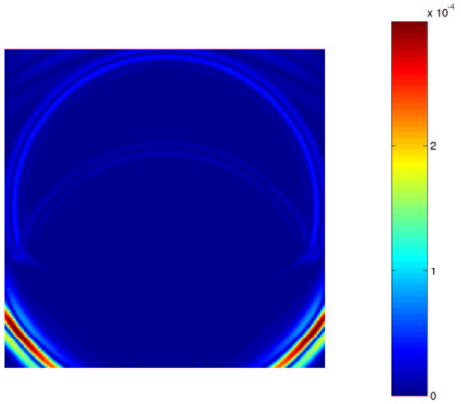
(b) $t = 0.085$ s



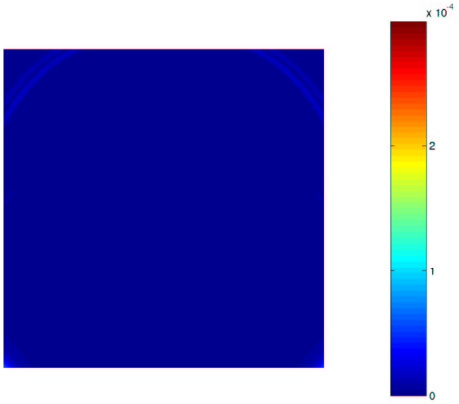
(c) $t = 0.12$ s



(d) $t = 0.18$ s

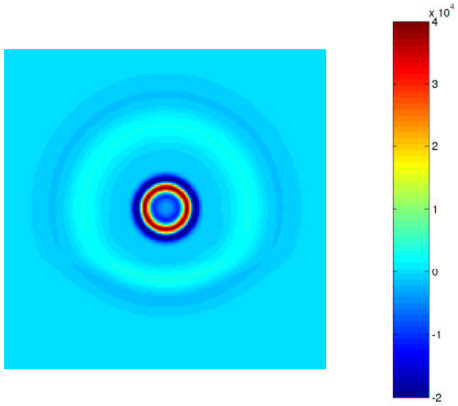


(e) $t = 0.22$ s

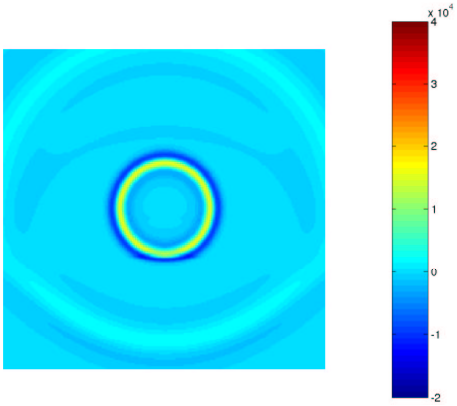


(f) $t = 0.26$ s

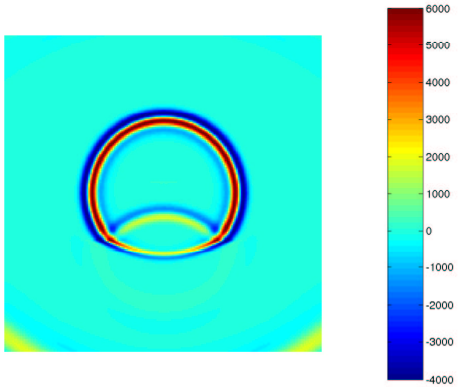
FIG. 8.4.3 – La norme de la vitesse



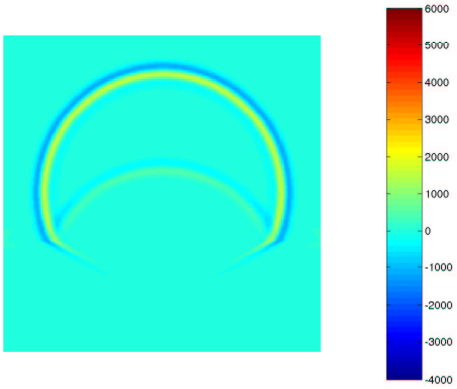
(a) $t = 0.055$ s



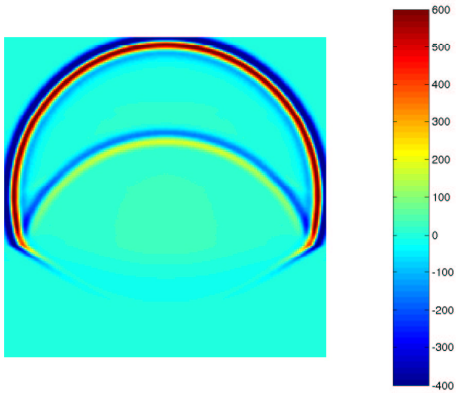
(b) $t = 0.085$ s



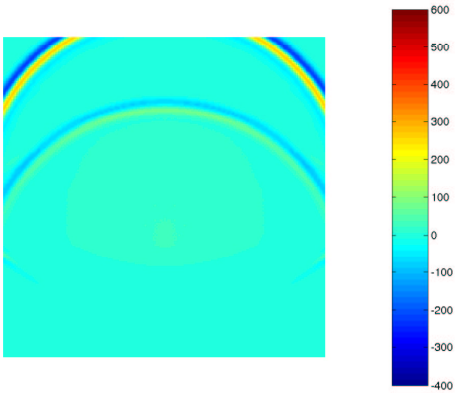
(c) $t = 0.12$ s



(d) $t = 0.18$ s



(e) $t = 0.22$ s



(f) $t = 0.26$ s

FIG. 8.4.4 – La pression

Conclusion et perspectives

Dans les deux parties de ce travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation de la propagation d'ondes dans le sous sol. Nous avons présenté deux modèles de propagation en espace-temps. Le premier modèle concerne la propagation d'ondes dans les milieux viscoélastiques, nous avons proposé un modèle différentiel en généralisant le modèle 1D de Zener au cas 2D et 3D pour les milieux isotropes et anisotropes. Le deuxième modèle concerne la propagation d'ondes dans les milieux poroélastiques pour lesquels nous avons adopté le modèle de Biot [20].

Sur le plan théorique (analyse mathématique) nous avons étudié les deux problèmes modèles dans un cadre assez général (dimension 2 et 3). En particulier, en s'appuyant sur la théorie des semi-groupes, des résultats d'existence et unicité de la solution forte ont été établis. Nous avons également démontré des résultats de la décroissance d'énergie pour chacun des problèmes. Afin d'étudier les propriétés des ondes dans ces milieux, une analyse par ondes planes nous a permis de comprendre le comportement des ondes, l'influence des temps de relaxation et la fréquence sur la vitesse de propagation et la qualité d'atténuation pour les milieux viscoélastiques et l'influence de la porosité sur la propagation des ondes pour les milieux poroélastiques.

Sur le plan analyse et approximation numérique, nous avons proposé deux différentes méthodes basées sur des approches variationnelles et des approximations par éléments finis mixtes en espace et des schémas aux différences finies en temps. Le premier modèle a été approché à l'aide des éléments finis mixtes développés par C. Tsogka [83]. Pour le deuxième modèle, nous avons adapté les éléments finis mixtes spectraux de S. Fauqueux [52] au problème poroélastique. Les deux méthodes proposées ont l'avantage d'être totalement explicites grâce à la technique de condensation de masse. Pour la modélisation des milieux non bornés, nous avons adapté la méthode des couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) aux problèmes de la viscoélasticité et de la poroélasticité. D'un point de vue théorique, la stabilité des schémas proposés dans les milieux hétérogènes est démontrée par des techniques de décroissance d'énergie discrète inspirées de celle utilisées pour le cas continu.

Les méthodes proposées dans ce travail ont été validées sur des solutions analytiques. Enfin plusieurs tests numériques dans les différents milieux isotropes, anisotropes et réalistes ont été présentés.

Ces travaux ouvrent sur plusieurs voies de recherche :

– L'extension et la validation des méthodes présentées au cas 3D. Notons que cette extension ne posera pas de problème conceptuel pour les deux modèles.

- La modélisation des milieux viscoélastiques fissurés. Un premier travail dans ce sens a été réalisé par V. Duwig [49] dans lequel elle a généralisé la méthode aux milieux fissurés en introduisant les domaines fictifs au niveau de la fissure.
- Le traitement de modèles plus complexes. Il serait intéressant d'étudier :
  1. La prise en compte de l'atténuation des ondes dans les milieu poreux par l'introduction des termes viscoélastiques (milieux poro-viscoélastiques).
  2. L'introduction de modèles multi-phasiques (c'est-à-dire des milieux avec plusieurs phases fluides). C'est le cas des milieux poreux avec des fissures qui contiennent du pétrole, du gaz ou de l'eau (voir Fig 8.4.5).
- L'étude plus spécifique de milieux poroélastiques dans lesquels l'écart entre les vitesses de l'onde lente (slow wave) et l'onde rapide (fast wave) est très important. Pour ces milieux, la méthode présentée dans ce document nécessite de choisir le nombre de points par longueur d'onde en fonction de la vitesse de l'onde la plus lente, ce qui peut alors révéler très coûteux. Il semblerait intéressant, surtout à haute fréquence, de développer des méthodes asymptotiques adaptées.

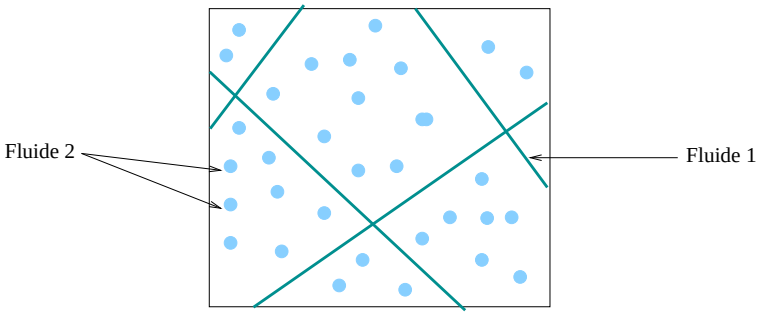


Fig. 8.4.5 – Exemple d'un milieu poreux à double porosité

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions (with formulas, graphs, and mathematical tables).* US Governement Printing Office, 1972.

[2] N. Atalla, R. Panneton, and P. Debergue. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 104(3) :1444–1452, 1998.

[3] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Elastic Waves in solids*, volume I et II. Wiley, 1973.

[4] J.-L. Auriault. Dynamic behavior of a porous medium saturated by a newtonian fluid. *Internat. J. Eng. Sci.*, 18 :775–785, 1980.

[5] J.-L. Auriault and P. Royer. Short note. seismic waves in fractured porous media. *Geophysics*, 67(1) :259–263, 2002.

[6] K. D. Ayon and R. S. Robert. Predicting density using v_s and gardner's relationship. Technical report, CREWES, 1997.

[7] R. L. Bagely and P.J. Torvic. A therotical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology*, 27 :201–210, 1983.

[8] R. L. Bagely and P.J. Torvic. On fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology*, 30 :133–155, 1986.

[9] J. P. Bardet. A viscoelastic model for the dynamic behavior of saturated poroelastic soils. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 59(1) :128–135, 1992.

[10] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Modeling of wave propagation in linear viscoelastic media. In *Mathematical Modelling of Wave Phenomena*, volume 7, pages 39–48. Mathematical modelling in physics, engineering and cognitive sciences, 2002.

[11] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Mathematical and numerical modeling of wave propagation in linear viscoelastic media. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 916–921. Springer, 2003.

[12] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoéelastiques linéaires. I. Analyse mathématique. Technical Report 4785, INRIA, 2003.

[13] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. Modélisation de la propagation d'ondes dans les milieux viscoéelastiques linéaires. II. Analyse numérique. Technical Report 5159, INRIA, 2004.

[14] E. Bécache, A. Ezziani, and P. Joly. A mixed finite element approach for viscoelastic wave propagation. *Computational Geosciences*, 8(3) :255–299, 2005.

[15] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. Fictitious domains, mixed finite elements and perfectly matched layers for 2-D elastic wave propagation. *J. Comput. Acoust.*, 9(3) :1175–1201, 2001.

[16] E. Bécache, P. Joly, and C. Tsogka. A new family of mixed finite elements for the linear elastodynamic problem. *SIAM J. on Num. Anal.*, 39(6) :2109–2132, 2002.

[17] J.P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Comp. Physics*, 1994.

[18] J. G. Berryman and H. F. Wang. Elastic wave propagation and attenuation in a double-porosity dual-permeability medium. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 37 :63–78, 2000.

[19] M. A. Biot. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. *J. Appl. Phys.*, 27 :459–467, 1956.

[20] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am*, 28 :168–178, 1956.

[21] M. A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am*, 28 :179–191, 1956.

[22] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.*, 33 :1482–1498, 1962.

[23] J. O. Blanch, J. O. A. Robertsson, and W. W. Symes. Modeling of a constant Q : Methodology and algorithm for an efficient and optimaly inexpensive viscoelastic technique. *Geophysics*, 60(1) :179–184, 1995.

[24] D. R. Bland. *The theory of linear viscoelasticity.* Pergamon press inc, 1960.

[25] T. Bohlen. Parallel 3-D viscoelastic finite-difference seismic modelling. *Computers & Geosciences*, 28(8) :887–899, 2002.

[26] T. Bourbié, O. Coussy, and B. Zinszner. *Acoustique des milieux poreux.* Publications de l'Institut Français du Pétrole, 1986.

[27] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle-Théorie et applications.* Masson, 1983.

[28] R. Burridge and J. B. Keller. Biot's poroelasticity equations by homogenization. In *Macroscopic Properties of Disordered Media*, pages 51–57. Springer, 1982.

[29] L. Cagniard. *Réflexion et Réfraction des Ondes Sismiques Progressives.* Gauthier-Villard, 1939.

[30] L. Cagniard. *Reflection and refraction of progressive seismic waves.* McGraw-Hill, 1962. traduit de [29].

[31] M. Caputo. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q. *JASA*, 60(3) :634–639, 1976.

[32] M. Caputo and F. Mainardi. Linear models of dissipation in anelastic solids. *Rivista del Nuovo Cimento*, 1 :161–198, 1971.

[33] J. M. Carcione. Seismic modeling in viscoelastic media. *Geophysics*, 58 :110–120, 1995.

[34] J. M. Carcione. *Wave Fields in Real Media : Wave propagation in Anisotropic, Anelastic and Porous Media.* Pergamon, 2001.

[35] J. M. Carcione, F. Cavallini, F. Mainardi, and A. Hanyga. Time-domain modeling of constant-Q seismic waves using fractional derivatives. *Pure Appl. Geophys*, 159 :1719–1736, 2002.

[36] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 93 :393–407, 1988.

[37] J. M. Carcione, D. Kosloff, and R. Kosloff. Wave propagation simulation in a visco-elastic medium. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 95 :597–611, 1988.

[38] W. C. Chew and W. H. Weedon. A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. *IEEE Mocrowave. Opt. Technol Lett.*, 7 :599–604, 1994.

[39] T. Chichinina, G. R. Jarillo, and V. Sabinin. Numerical model of seismic wave propagation in viscoelastic media. In *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 922–927. Springer, 2003.

[40] R.M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity-An introduction.* Academic Press Inc, 1982.

[41] F. Collino, P. Joly, and F. Millot. Fictitious domain method for unsteady problems : application to electromagnetic scattering. *J. Comput. Phys.*, 138(2) :907–938, 1997.

[42] F. Collino and P. B. Monk. Optimizing the perfectly matched layer. exterior problems of wave propagation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1998.

[43] F. Collino and C. Tsogka. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heteregeneous media. *Geophysics*, 66 :294–307, 2001.

[44] N. Dai, A. Vafidis, and E. R. Kanasewich. Wave propagation in heterogeneous, porous media :a velocity-stress, finite-difference method. *Geophysics*, 60(2) :327–340, 1995.

[45] S. M. Day and J. B. Minster. Numerical simulation of wave fields using a padé approximant method. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 78 :105–118, 1984.

[46] A. T. de Hoop. The surface line source problem. *Appl. Sci. Res. B*, 8 :349–356, 1959.

[47] J. Diaz. *Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d'ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées.* PhD thesis, Université Paris 6, 2005.

[48] G. Duvaut and J. L. Lions. *Inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.

[49] V. Duwig. Modélisation d'un milieu viscoélastique dans Athena : problèmes dûs aux fissures. Technical report, EDF, 2004.

[50] H. Emmerich and M. Korn. Incorporation of attenuation into time-domain computations. *Geophysics*, 52(9) :1252–1264, 1987.

[51] M. Fabrizio and A. Morro. *Mathematical problems in linear viscoelasticity.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[52] S. Fauqueux. *Eléments finis mixtes spectraux et couches absorbantes parfaitement adaptées pour la propagation d' ondes élastiques en regime transitoire.* PhD thesis, Université Paris 9, 2003.

[53] Y.C. Fung. *Foundations of solid mechanics.* Prentice Hall Inc, New-Jersey, 1965.

[54] P. M. Gauzellino, J. E. Santos, and D. Sheen. Frequency domain wave propagation modeling in ultrasonic waves in rocks with patchly saturation and fractal properties exploration seismology. *J. Computational Acoustics*, 9 :941–955, 2001.

[55] G.Canadas. *Etude mathématique et numrique d'une équation hyperbolique du troisième ordre intervenant en sismique.* PhD thesis, Université de Pau, 1979.

[56] M. E. Gurtin and E. Sternberg. On the linear theory of viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11 :291–356, 1962.

[57] T. Ha, J. E. Santos, and D. Sheen. Nonconforming finite element methods for the simulation of waves in viscoelastic solids. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 191 :5647–5670, 2002.

[58] T. Hagstrom and I. Nazarov. Absorbing layers and radiation boundary conditions for jet flow simulations. In *Proc. of the 8th AIAA/CEAS aeroacoustics conference, 17-19 june 2002, Breckenridge, CO, USA*, 2002. AIAA paper 2002-2606.

[59] U. Hornung. *Homogenization and porous media*, volume 6 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, 1997.

[60] F. Q. Hu. A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables. *J. Comput. Phys.*, 173 :455–480, 2001.

[61] A. Idesman, R. Niekamp, and E. Stein. Finite elements in space and time for generalized viscoelastic maxwell model. *Computational Mechanics*, 27 :49–60, 2001.

[62] V. Janovský, S. Shaw, M. K. Warby, and J. R Whiteman. Numerical methods for treating problems of viscoelastic isotropic solid deformation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 63 :91–107, 1995.

[63] P. Joly. Analyse et approximation de modèle de propagation d'ondes. Cours de l'Ecole polytechnique, Paris, 2001.

[64] P. Joly. Variational methods for time-dependent wave propagation problems. In *Topics in Computational Wave Propagation Direct and Inverse Problems*, volume 31 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 201–264. Springer, 2003.

[65] T. Levy. Propagation of waves in a fluid saturated porous elastic solid. *Internat. J. Eng. Sci.*, 17 :1005–1014, 1979.

[66] D. Matignon. *Représentation en variables d'état de modèles de guide d'ondes avec dérivation fractionnaire*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 1994.

[67] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM : Proceedings*, 5 :145–158, 1998.

[68] G. A. McMechan and T. Xu. Efficient 3-D viscoelastic modeling with application to near-surface land seismic data. *geophysics*, 69(2) :601–612, 1998.

[69] V. Morochnik and J. P. Bardet. Viscoelastic approximation of poroelastic media for wave scattering problems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15 :337–346, 1996.

[70] J. A. Nitsche. On korn's second inequality. *R.A.I.R.O Numerical Analysis*, 15(3) :237–248, 1981.

[71] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer, New York, 1999.

[72] R. Panneton and N. Atalla. An efficient element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics. *J. Acoust. Soc. Am*, 101(6) :3287–3297, 1997.

[73] S. R. Pride and J. G. Berryman. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials. *J. Acoust. Soc. Am*, 2002.

[74] T. Pritz. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 195(1) :103–115, 1996.

[75] C. M. Rappaport. Perfectly matched absorbing conditions based on anisotropic lossy mapping of space. *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.*, 3 :90–92, 1995.

[76] J. O. A. Robertsson, J. O. Blanch, and W. W. Symes. Viscoelastic finite difference modeling. *Geophysics*, 59(9) :1444–1456, 1994.

[77] L. Rogers. Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations. *Journal of Rheology*, 27 :351–372, 1983.

[78] J. Salencon. *Viscoélasticité*. Presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1983.

[79] S. Shaw, M. K. Warby, J. R Whiteman, C. Dawson, and M. F Wheeler. Numerical techniques for the treatment of quasistatic viscoelastic stress problems in linear isotropic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 118 :211–237, 1994.

[80] T. A. Spencer, J. R. Sonnad, and T. M. Butler. Seismic Q. stratigraphy or dissipation. *Geophysics*, 47 :16–24, 1982.

[81] N. Tordjman. *Eléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Université Paris 9, 1995.

[82] P.J. Torvic and R. L. Bagely. On the appereance of the fractional derivative in the behavior of reals materials. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 51 :294–298, 1984.

[83] C. Tsogka. *Modélisation mathématique et numérique de la propagation des ondes élastiques tridimensionnelles dans les milieux fissurés*. PhD thesis, Université Paris 9, 1999.

[84] Y. Q. Zeng, J. Q. He, and Q. H. Liu. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 66(4) :1258–1266, 2001.

[85] Y. Q. Zeng and Q. H. Liu. A staggered-grid finite-difference method with perfectly matched layers for poroelastic wave equations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(6) :2571–2580, 2001.

Résumé

Nous nous intéressons à la modélisation de la propagation d'ondes dans le sous sol. Nous présentons deux modèles de propagation : (i) une généralisation du modèle de Zener pour les milieux viscoélastiques, (ii) le modèle de Biot pour les milieux poroélastiques. Nous menons une analyse mathématique complète de ces modèles : résultat d'existence, d'unicité et de décroissance de l'énergie. Pour la résolution numérique nous construisons une méthode spécifique à chaque modèle, basée sur des approches variationnelles, une approximation par éléments finis mixtes en espace et différences finies en temps. Nous montrons pour chaque schéma, un résultat de décroissance d'énergie discrète qui conduit à une condition suffisante de stabilité. Pour simuler la propagation d'ondes dans les milieux ouverts, nous adaptons la technique de couches absorbantes parfaitement adaptées aux ondes viscoélastiques et poroélastiques. Enfin, nous présentons des validations numériques des méthodes développées.

Mot clés : ondes poroélastiques, ondes viscoélastiques, éléments finis mixtes, condensation de masse, différences finies, analyse de stabilité, énergie.

Mathematical and numerical modeling of wave propagation in viscoelastic and poroelastic media

Abstract

We are interested in the mathematical and numerical modeling of wave propagation in underground media. We present two propagation model : (i) a generalization of Zener's model for viscoelastic media, (ii) Biot's model for poroelastic media. For each model we achieve a mathematical analysis, In particular, an existence and uniqueness of solution and an energy decay result. For the numerical resolution we construct a method specific to each model, based on a variational approach, a mixed finite elements approximation in space and a finite difference in time. We prove for each scheme obtained, a result of discrete energy decay which provides a sufficient stability condition. To simulate the waves propagation in unbounded domains, we adapt the perfectly matched layers techniques to viscoelastic and poroelastic waves. Finally, we present various numerical validations of the developed methods.

Key words : poroelastic waves, viscoelastic waves, mixed finite element, mass lumping, finite difference, stability analysis, energy.