



**HAL**  
open science

# Espaces de longueur d'entropie majorée : rigidité topologique, adhérence des variétés, noyau de la chaleur

Guillemette Reviron

## ► To cite this version:

Guillemette Reviron. Espaces de longueur d'entropie majorée : rigidité topologique, adhérence des variétés, noyau de la chaleur. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00009203

**HAL Id: tel-00009203**

**<https://theses.hal.science/tel-00009203>**

Submitted on 9 May 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Remerciements

Les dernières corrections sont faites et le point final est posé : il est grand temps maintenant de remercier tous ceux qui ont contribué directement ou moins directement - mais néanmoins fondamentalement - à la réalisation de ce travail.

Tout d'abord, un immense merci mêlé d'une incommensurable reconnaissance à Sylvain qui m'a donné ma chance et a accepté de courir le risque de diriger cette thèse. Je ne compterai pas les heures qu'il a passées à me faire partager sa passion pour la géométrie et à répondre à mes nombreuses questions, et encore moins celles qu'il a consacrées à rendre ce manuscrit lisible. Je ne saurais le remercier assez pour son investissement et son soutien.

Un immense merci également à Bruno, qui a co-dirigé cette thèse avec beaucoup de patience, pour sa disponibilité, son écoute et sa curiosité. Sans son aide, je n'aurais probablement pas pu entreprendre ce travail. Par la suite, nos nombreuses discussions m'ont aidée à mieux cerner mon premier sujet de recherche et à prendre du recul par rapport à mes travaux. Merci.

Un grand merci à Marc Bourdon et Marc Troyanov pour avoir lu ce texte avec autant d'attention. Leurs remarques m'ont beaucoup aidée à clarifier certains points un peu anguleux et me donnent de nouvelles pistes pour continuer ce travail ;

Merci également à Hervé Pajot, toujours très disponible pour répondre à mes questions (particulièrement nombreuses ces derniers temps), ainsi qu'à Michel Benaïm, qui m'a écoutée longuement et patiemment raconter ce travail, pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Un grand merci

A Barbara Shapira qui a passé une bonne partie de ses vacances à relire la toute première version de cette thèse. Ses nombreux conseils m'ont été d'une grande utilité ;

Aux membres de l'équipe de Géométrie et Théorie spectrale de l'Institut Fourier, et plus particulièrement à son Big Boss Gérard, pour la bonne ambiance qu'ils ont su instaurer et pour la place qu'ils donnent aux jeunes ;

A Lucien Guillou et Christophe Champetier que j'ai souvent sollicités pour m'initier aux joies de la topologie et des actions de groupes ;

A Manlio Bordoni et à Andrea Sambusetti, pour le temps qu'ils m'ont accordé ;

A Stéphane Attal pour ses nombreux coups de pouce dans les moments difficiles ;

A Gérard pour les séances de tutorat du Mardi soir et le dîner qui suivait, ainsi que pour son aide récurrente durant les années qui ont suivi.

Un immense merci

Aux nombreux thésards, DEA et - bien moins nombreuses - thésardes de l'Institut Fourier dont j'ai croisé la route et à qui j'ai confié tous mes déboires scientifiques, en particulier à tous les géomètres pour leur dynamisme et leur soutien ;

A Yan pour ses encouragements incessants, ainsi que la qualité de son écoute et de ses conseils lors de nos interminables discussions existentielles ;

A Manu, qui a assisté très philosophiquement à mes nombreux coups de gueule, pour sa bonne humeur permanente et ses éclats de rire vivifiants ;

A Jérôme, toujours de bon conseil, pour son humour bien à lui et ses propos encourageants ;

A Eric, qui a été désigné volontaire pour relire l'introduction qui suit, et qui l'a fait presque gratuitement (quelques cigarettes, pas plus!) ;

Aux taroteurs pour leur conscience professionnelle en ce qui concerne les statistiques ;

Un grand merci à Marie-Françoise Gomez, Nicolas Tosel, Marc Legrand, Catherine Bouvier et Laurent Bonavéro qui ont su stimuler ma curiosité tout au long de ma (longue) formation.

Comme tous les membres de l'Institut, je ne peux que m'incliner devant l'efficacité et les sourires de celles et ceux qui font tourner l'IF : toutes ces dames du premier étage, le spécialiste des processeurs capricieux, le virtuose de la reprographie et les petits rats (fort sympatiques) de notre toute nouvelle bibliothèque.

J'ai réalisé une bonne partie de ce travail dans la contrée lointaine de Neuchâtel et j'ai particulièrement apprécié l'accueil chaleureux de celles et ceux qui ont égayé mes nombreuses soirées suisses ; sans eux, j'aurais (sans nul doute) passé beaucoup plus de temps à faire grandement avancer les Mathématiques, mais ce fut un plaisir de faire patienter la Science en leur compagnie.

Après une longue (ou moins longue mais très intense) journée de recherche, ce fut chaque fois un vrai plaisir d'enseigner à des élèves demandeurs et particulièrement motivés. Un grand merci aux professeurs et aux CPE de l'Ecole des Pupilles de l'Air pour la confiance et la liberté qu'ils m'ont accordées pendant ces quatre années.

Si ce travail a nécessité des années de réflexion, il est également le fruit de nombreuses rencontres dans le monde des "extra-mathématiciens". J'ai été extrêmement entourée durant toutes ces années, par des gens très différents les uns des autres, mais qui ont tous en commun une générosité extraordinaire : j'ai puisé dans cet entourage l'énergie et l'amitié dont j'avais besoin pour tenir la distance.

En traversant une fontaine ou au coin d'un feu ; autour d'une bière ou d'un thé bien chaud ; au son des guitares ; sur des skis ou sur le siège d'une vieille

Lada ; pendue dans le devers, les pieds dans les straps ou posée au Yassou ; autour d'une bonne pizza ou d'une tartiflette ; pendant les soirées filles ou les soirées boulot ; chez Vassilie, dans le Larzac, dans la boucle du Kerry, aux Ribes, à Madrid, à Sienne, à Fontvieille, à Denia ou à Saint-Phi ... j'ai avancé avec eux jour après jour. Au fil de nos discussions et des bons moments passés ensemble, les "je n'y arriverai jamais" ont disparu. Le fardot des questions sans réponse et de "la thèse qui n'avance pas" s'est allégé pour laisser place au simple bonheur d'être là et de faire ce que j'aime, particulièrement bien accompagnée qui plus est...

Merci, donc, à Olivier dont l'amitié me suit depuis mes premiers pas dans l'Univers des Mathématiques ; à Alain qui, le premier, a ouvert et contemplé d'un air intéressé la version initiale de cette thèse ; à la famille Magnol -une de mes plus belles trouvailles !- ; à la "petite bande" de l'Ile Verte (qui s'agrandit à vue d'oeil !), maintenant éparpillée aux quatre coins du monde mais toujours là ; à la sacrée troupe d'energumènes dont j'ai croisé la route il y a quelques années, en particulier aux Z'arioulettes ;

J'ai souvent eu le vent dans le nez depuis que j'ai commencé ce travail ; du moins, tous les symptômes étaient là : "deux fois la distance, trois fois le temps et cinq fois la grogne". Mais j'ai la chance considérable d'avoir une famille nombreuse et toujours présente pour m'aider à tenir la barre et garder le cap. Je voudrais vous dire aujourd'hui à quel point je suis heureuse de vous avoir à mes côtés et de vous savoir "là", mais la pudeur m'en empêche une fois de plus. Alors, plus simplement, du fond du coeur, merci.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Présentation des résultats . . . . .	9
1.2	Outils . . . . .	20
1.2.1	Espaces de longueur . . . . .	20
1.2.2	Revêtements de longueur réguliers . . . . .	26
1.2.3	Distances sur les classes d'isométrie d'espaces métriques	27
<b>2</b>	<b>L'entropie volumique</b>	<b>35</b>
2.1	Définitions et premières propriétés . . . . .	36
2.1.1	Cas non compact . . . . .	36
2.1.2	Cas compact . . . . .	43
2.1.3	Entropie et métrique . . . . .	45
2.2	Comparaison avec d'autres entropies . . . . .	48
2.3	Comparaison avec la courbure de Ricci . . . . .	49
2.4	Entropie et variations locales de la métrique . . . . .	52
2.4.1	Entropie et applications contractantes . . . . .	52
2.4.2	Cas des variétés riemanniennes . . . . .	55
2.4.3	Applications . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Approximations de Hausdorff équivariantes entre revêtements</b>	<b>69</b>
3.1	Présentation des questions . . . . .	71
3.2	La famille $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ . . . . .	81
3.3	Rappels sur les $\alpha$ -revêtements . . . . .	84
3.4	Construction d'approximations équivariantes entre revêtements	88
3.4.1	Enoncé du théorème 3.30 . . . . .	88
3.4.2	Démonstration du théorème 3.30 . . . . .	92
3.4.3	Démonstration du corollaire 3.32 . . . . .	114
3.5	Autres applications . . . . .	116
3.5.1	Approximation d'une variété par un graphe . . . . .	116
3.5.2	Rigidité du groupe des automorphismes du revêtement universel . . . . .	120
3.5.3	Comparaison du spectre des longueurs . . . . .	124

3.5.4	Continuité uniforme de l'entropie par rapport à la distance de Gromov-Hausdorff . . . . .	127
3.5.5	Comparaison des volumes et précompacité . . . . .	131
3.5.6	Complétude de la famille $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ pour la distance de Gromov-Hausdorff . . . . .	136
3.6	Optimalité des résultats . . . . .	140
3.6.1	Discussion sur l'hypothèse "Entropie majorée" dans les théorèmes 3.30 et 3.61 . . . . .	140
3.6.2	Discussion sur l'hypothèse de " $\delta$ -non-abélianité" dans les théorèmes 3.30 et 3.61 . . . . .	141
3.6.3	Optimalité des résultats topologiques dans la section 3.5.2 . . . . .	142
3.6.4	Discussion sur la définition de l'espace $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ . . . . .	142
<b>4</b>	<b>Estimations de type Bishop</b>	<b>147</b>
4.1	Cas général . . . . .	148
4.2	Cas particulier : les mesures de comptage . . . . .	156
4.3	Application . . . . .	159
<b>5</b>	<b>Estimations du noyau de l'opérateur de la chaleur</b>	<b>161</b>
5.1	Majoration du noyau de la chaleur en tout temps . . . . .	162
5.2	Majoration du noyau de la chaleur optimale en petit temps . . . . .	165
5.2.1	Majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur sur la diagonale . . . . .	169
5.2.2	Majoration du noyau de la chaleur en dehors de la diagonale . . . . .	175
5.3	Majoration universelle sur les boules de $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ et précompacité	179
5.4	Questions ouvertes . . . . .	186
<b>A</b>	<b>Espaces de longueur</b>	<b>189</b>
<b>B</b>	<b>Théorie des revêtements</b>	<b>191</b>
B.1	Définition d'un revêtement topologique régulier . . . . .	191
B.2	Définition et existence de revêtements de longueur réguliers . . . . .	193
<b>C</b>	<b>Distance de Gromov-Hausdorff</b>	<b>197</b>
<b>D</b>	<b>Exemples de convergence de revêtements universels</b>	<b>201</b>
<b>E</b>	<b>Lemme de Margulis sans courbure</b>	<b>205</b>
E.1	Groupes $\delta$ -non-abéliens . . . . .	205
E.2	Entropie et petits lacets . . . . .	206
E.3	Géométrie des variétés dont le groupe fondamental est $\delta$ -non-abélien . . . . .	207

<b>F Majoration universelle du noyau de l'opérateur de la chaleur et précompacité</b>	<b>215</b>
---	------------



# Chapitre 1

## Introduction

### NOTE :

Nous avons voulu éviter au maximum de supposer connus les résultats déjà démontrés dans des articles antérieurs à cette thèse et nous avons tenté de rassembler et d'écrire tous les éléments nécessaires pour comprendre les résultats présentés ici (ces éléments étant parfois peu détaillés dans la littérature). Ceci implique que beaucoup des résultats énoncés dans ce qui suit sont classiques ou quasi-classiques. Pour permettre au lecteur habitué aux objets utilisés d'accéder plus rapidement aux résultats originaux, nous les avons encadrés et nous avons essayé de faire suivre chacun de ces énoncés d'une remarque qui tend à insister sur ce qu'il contient de nouveau.

### 1.1 Présentation des résultats

Nous avons abordé dans cette thèse, selon deux approches différentes, quelques questions autour de la précompacité des familles de variétés riemanniennes compactes ou, plus généralement, d'espaces de longueur compacts, en substituant aux hypothèses habituellement faites sur la courbure une hypothèse bien plus faible sur l'entropie volumique.

La première approche consiste à étudier un invariant (l'entropie volumique) qui se comporte "bien" vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff et à établir un résultat de fermeture sur certaines familles d'espaces de longueur dont l'entropie volumique est uniformément majorée ; la deuxième approche consiste à établir des majorations du noyau de la chaleur sur des familles de variétés riemanniennes, qui sont universelles sur ces familles de variétés et qui nous permettent d'aborder les questions de précompacité via la distance spectrale définie par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot, et dont les propriétés de convergence et de passage à la limite ont été étudiées par A. Kasué et H. Kumura.

## Première partie (chapitres 2, 3 et 4)

L'ensemble des espaces métriques compacts et connexes peut être muni d'une pseudo-distance, qui s'avère être une distance sur les classes d'isométrie d'espaces métriques compacts et connexes. Cette distance, appelée distance de Gromov-Hausdorff (et définie dans l'annexe C) a été construite, a priori, pour généraliser la distance de Hausdorff entre deux sous-espaces d'un même espace métrique. M. Gromov a alors montré le

**Théorème 1.1.** ([Gr], théorème 5.3)

Soit  $k > 0$  et  $D > 0$  deux réels fixés.

La famille  $\mathcal{M}_{k,D}$  des classes d'isométries des variétés riemanniennes compactes  $(M, g)$  dont le diamètre est inférieur à  $D$  et dont la courbure de Ricci vérifie  $\text{Ricci}(M, g) \geq -(n-1)k^2g$  est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff.

Il devient alors naturel d'étudier l'adhérence des familles  $\mathcal{M}_{k,D}$  de classes d'isométrie des variétés riemanniennes dans l'ensemble des espaces métriques compacts et de se demander si les invariants qui ont servi à définir cette famille de variétés riemanniennes sont encore définis sur cette adhérence. Cependant, la courbure de Ricci est un invariant qui se comporte mal vis-à-vis de la distance de Gromov-Hausdorff. C'est en effet un invariant qui ne peut être défini que sur les variétés munies d'une métrique au moins de classe  $C^2$  et l'adhérence de la famille  $\mathcal{M}_{k,D}$  contient des espaces de longueur très singuliers (voir [CC1],[CC2],[CC3]). De plus, même si l'on ajoute des hypothèses beaucoup plus fortes qui assurent que la limite de la suite de variétés est encore une variété riemannienne (comme c'est le cas dans le célèbre théorème de compacité de M. Gromov), on ne peut pas toujours garantir qu'elle est munie d'une métrique suffisamment régulière, comme le montre, par exemple, l'exemple de S. Peters qui construit une variété  $M$  munie d'une métrique  $g$  de classe  $C^{1,\alpha}$  (où  $0 < \alpha < 1$ ) comme limite de variétés riemanniennes  $C^\infty$  compactes de courbure sectionnelle et de diamètre bornés et de rayon d'injectivité minoré (voir [Pe], paragraphe 5).

Il devient alors nécessaire de trouver un autre invariant qui puisse être défini sur l'adhérence des familles de variétés riemanniennes considérées. Cet invariant doit donc en particulier être défini sur les espaces de longueur compacts. Un des bons candidats est l'entropie volumique, dont l'importance a été illustrée en particulier par M. Gromov, dans le cadre de ses travaux sur le volume minimal. C'est un invariant qui mesure la croissance exponentielle asymptotique du volume des boules du revêtement universel. Elle a d'abord été définie sur les variétés riemanniennes compactes par

$$\text{Ent}(M, g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \text{Vol}(B_{\tilde{g}}(\tilde{x}, R))$$

où  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  est le revêtement universel de  $M$  et  $\tilde{x}$  est un point quelconque

(dont l'entropie ne dépend pas) de  $\widetilde{M}$ .  
Il est par ailleurs classique que

$$Ent(M, g) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \#(\Gamma.\tilde{x} \cap B(\tilde{x}, R))$$

où  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $M$ .  
Cette deuxième écriture permet de définir l'entropie volumique sur tout espace de longueur compact qui admet un revêtement universel.  
Remarquons qu'une hypothèse du type "Entropie volumique majorée" est bien plus faible qu'une hypothèse du type "Courbure de Ricci minorée", non seulement parce que le théorème de comparaison de R-L. Bishop prouve que, si la courbure de Ricci de la variété riemannienne  $(M, g)$  vérifie  $\text{Ricci}(M, g) \geq -(n-1)k^2g$  alors  $Ent(M, g) \leq (n-1)k$ , mais aussi parce que l'entropie volumique est majorée par une intégrale de la courbure de Ricci (voir [Ga], théorème 1 (ii)) et surtout parce que, comme nous le montrons dans le chapitre 2, contrairement à la courbure de Ricci, l'entropie volumique est très peu sensible aux variations locales de la métrique (voir la proposition 2.24). C'est ce qu'illustre la

**Proposition 1.2.**

Fixons deux réels strictement positifs  $\delta$  et  $K$ . Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte, connexe de dimension  $n$  supérieure ou égale à 3, de rayon d'injectivité  $\delta > 0$  et de courbure sectionnelle  $|\sigma| \leq K^2$ .

Soit  $(B(x_k, \varepsilon_k))_{k \in \{1..n\}}$  une famille finie de boules ouvertes dont le rayon  $\varepsilon_k$  vérifie

(i)  $\varepsilon_k \leq \min\{\frac{1}{K}, \frac{\delta}{2\pi}\}$ ,

(ii) les boules  $(B(x_k, 5\varepsilon_k))_{k \in \{1..n\}}$  sont disjointes.

Pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ , fixons un réel  $L_k > 2\varepsilon'_k$  où  $\varepsilon'_k := (1 + (K\varepsilon_k)^2)\pi\varepsilon_k$ .

On construit une nouvelle variété riemannienne  $(X', g_{X'})$  en recollant sur  $X \setminus (\cup_{k \in \{1..n\}} B(x_k, \varepsilon_k))$  un cylindre  $\partial B(x_k, \varepsilon_k) \times [0, L_k]$  le long de chaque  $\partial B(x_k, \varepsilon_k)$  (en identifiant  $\partial B(x_k, \varepsilon_k)$  et  $\partial B(x_k, \varepsilon_k) \times \{0\}$ ) et, au bout de chaque cylindre, une variété simplement connexe  $M_k$ . On a alors

$$\left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{2\delta - \varepsilon'_k}\right)^{-1} Ent(X, g_X) \leq Ent(X', g_{X'}) \leq Ent(X, g_X)$$

La famille des variétés riemanniennes compactes dont l'entropie est uniformément majorée par  $(n-1)$  contient donc également des variétés riemanniennes dont la courbure de Ricci est arbitrairement proche de  $-\infty$ . De plus, cette construction nous permet d'établir que la famille des variétés riemanniennes compactes dont l'entropie est uniformément majorée par  $(n-1)$  est bien plus vaste que la famille des variétés riemanniennes dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(n-1)g$  dans le sens suivant :

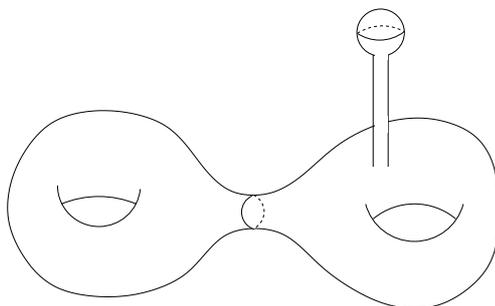


FIG. 1.1 – Exemple de variété dont l'entropie est majorée

(i) Il existe une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension, toutes différentes du point de vue topologique (et même homologique), dont l'entropie est uniformément majorée, qui converge (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété riemannienne compacte de même dimension, de topologie encore différente de celle des variétés de la suite (voir l'exemple 2.31). La même situation est impossible si l'on suppose que la courbure de Ricci est minorée, puisqu'un théorème de J. Cheeger et T-H. Colding assure alors la stabilité de la structure différentiable (voir [CC1], théorème A.112).

(ii) Il existe une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension, toutes difféomorphes, dont l'entropie est uniformément majorée, dont le volume tend vers l'infini et qui converge (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété riemannienne compacte de même dimension (donc de volume fini), difféomorphe aux variétés de la suite (voir l'exemple 2.33). La même situation est impossible si l'on suppose que la courbure de Ricci est minorée, puisqu'un théorème de T-H. Colding assure alors la continuité du volume (voir [Co], théorème 0.1).

(iii) Il existe une suite de variétés riemanniennes de même dimension, toutes difféomorphes, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés, mais qui ne contient aucune sous-suite de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir l'exemple 2.29). Ceci signifie que la famille des variétés riemanniennes compactes de même dimension, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés, n'est pas précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Rappelons cependant qu'une famille de variétés riemanniennes compactes de même dimension, dont la courbure de Ricci est uniformément minorée et dont le diamètre est uniformément majoré est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir [Gr], théorème 5.3).

Par ailleurs, nous travaillerons avec des espaces de longueur compacts. Faire des hypothèses sur la dimension des objets n'a donc aucun sens. Si les exemples précédents laissent envisager une éventuelle stabilité du groupe fondamental, l'exemple 1.1 de [P1] nous enlève cet espoir si l'on ne s'au-

torise pas d'hypothèse sur la dimension, puisqu'il construit une suite de tores plats (dont l'entropie est nulle) dont la dimension tend vers l'infini et qui convergent pour la distance de Gromov-Hausdorff vers un bouquet de cercles compact. Nous avons donc choisi d'imposer certaines contraintes sur le groupe des automorphismes du revêtement universel des objets que nous étudierons.

Plus précisément, dans le chapitre 3, nous nous consacrons à l'étude de la famille des classes d'isométrie des espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe - voir la définition page 27 du revêtement universel choisie), dont l'entropie volumique est majorée par  $H$  et dont le diamètre est inférieur à  $D$ , ainsi qu'à l'adhérence de cette famille dans l'ensemble des espaces de longueur compacts munis de la distance de Gromov-Hausdorff. Nous ferons de plus une hypothèse sur la structure algébrique du groupe des automorphismes du revêtement universel, appelée *hypothèse de  $\delta$ -non-abélianité* (voir la définition E.1 ainsi que de nombreux exemples dans [BCG1], page 9 à 13), qui consiste à exiger de ces groupes certaines des propriétés algébriques que possèdent les groupes fondamentaux des variétés riemanniennes compactes de courbure sectionnelle strictement négative. Nous noterons  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  la famille des classes d'isométries des espaces de longueur compacts qui vérifient toutes ces hypothèses (voir la définition exacte 3.18) .

Un des résultats principaux du chapitre 3 est le théorème 3.72 :

**Théorème 1.3.**

*Fixons arbitrairement trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ .*

*L'ensemble  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff dans l'ensemble des espaces de longueur compacts.*

Notons que l'ensemble  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  n'est pas compact pour la distance de Gromov-Hausdorff (ceci est une conséquence du point (iii)). Pour montrer ce résultat, nous nous sommes intéressés à la continuité uniforme de l'entropie sur la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  et nous avons montré le théorème suivant :

**Théorème 1.4.** *(extrait du théorème 3.61)*

*Soient  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  trois réels strictement positifs fixés et posons*

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta}HD}$$

*Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ . Si la distance de Gromov-Hausdorff entre les espaces  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  vérifie*

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

alors

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X) \leq Ent(Y, d_Y) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

**Remarque 1.5.** *Ce théorème est réellement un résultat de type "approximation avec majoration de l'erreur" plus qu'un résultat de type "convergence", puisqu'il permet d'estimer, uniquement en fonction des bornes fixées sur les invariants, la distance entre deux espaces de longueur à partir de laquelle le théorème s'applique, sans avoir à faire tendre cette distance vers zéro.*

L'étude de la continuité uniforme de l'entropie nécessite une étude assez précise de la proximité des revêtements universels de deux espaces de longueur proches pour la distance de Gromov-Hausdorff, ainsi que l'étude de la structure algébrique de leurs groupes des automorphismes du revêtement universel et de la manière dont ces groupes agissent sur le revêtement universel. De nombreux travaux ont été effectués dans ce sens, essentiellement sous des hypothèses de courbure (voir [Fu], [Pet], [Tu1], [Tu2], [SW]...). En particulier, C. Sormani et G. Wei montrent le

**Théorème 1.6.** (*[SW], théorème 1.4*)

*Soit  $D$  un réel positif. Soit  $((M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension  $n$  qui vérifient  $\text{Ricci}(M_i, g_i) \geq -(n-1)g_i$  et  $\text{diam}(M_i, g_i) \leq D$ . Supposons que la suite  $((M_i, g_i))_{i \in \mathbb{N}}$  converge vers un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  au sens de Gromov-Hausdorff. Alors le revêtement universel  $\tilde{Y}$  de  $Y$  existe et, pour  $N$  suffisamment grand (qui dépend de  $Y$ ), il existe un homomorphisme surjectif du groupe fondamental de  $M_N$  dans le groupe des transformations du revêtement  $\tilde{Y} \rightarrow Y$ .*

Cependant, la preuve donnée dans [SW] ne permet pas d'estimer le rang à partir duquel l'homomorphisme surjectif existe. Il n'est pas non plus précisé si ces morphismes proviennent d'une application entre les revêtements universels, ce qui ne permet pas de comparer leurs actions.

Pour établir le théorème 1.6, C. Sormani et G. Wei utilisent des revêtements intermédiaires réguliers particuliers, appelés  $\alpha$ -revêtements (et définis pour tout réel  $\alpha > 0$ ), qui coïncident avec le revêtement universel (quand il existe) dès que  $\alpha$  est suffisamment petit. Elles montrent que la limite des revêtements universels des variétés  $M_i$  est un revêtement du  $\alpha$ -revêtement de l'espace  $Y$  pour  $\alpha$  suffisamment petit, mais ne précisent pas la valeur de ce réel  $\alpha$ . En adaptant et en affinant la preuve de ce résultat (qui reprend déjà des idées présentes dans [Tu1] et [Tu2]) et en s'appuyant très fortement sur la version du lemme de Margulis de [BCG1], nous obtenons le résultat plus précis suivant :

**Théorème 1.7.** (Reformulation du théorème 3.30)

Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Fixons arbitrairement deux réels  $\varepsilon$  et  $\alpha$  tels que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et  $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ .

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact (connexe) quelconque qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ . Soit  $(Y, d_Y)$  n'importe quel autre espace de longueur compact (connexe).

Si la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ , alors

(i) il existe un isomorphisme  $\bar{\rho}$  entre le groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des automorphismes du revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  et le groupe  $G(Y^\alpha, Y)$  des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$ .

(ii) il existe deux applications

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow Y^\alpha$$

$$\tilde{\psi} : Y^\alpha \rightarrow \tilde{X}$$

qui sont, pour tout  $R > 0$ , des  $(\frac{3\varepsilon}{2\alpha}R + 3\varepsilon)$ -approximations de Gromov-Hausdorff entre les boules de rayon  $R$  de  $\tilde{X}$  et  $Y^\alpha$ . De plus, les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  sont respectivement  $\bar{\rho}$ -équivariante et  $(\bar{\rho})^{-1}$ -équivariante.

**Remarque 1.8.**

- Ce théorème est plus un résultat de type "approximation" que de type "convergence", puisque la constante  $\varepsilon_0$  est explicite.
- Nous insistons sur le fait que  $\alpha$  est également explicite, ce qui permet en particulier d'établir l'existence d'un isomorphisme (explicite) entre le groupe fondamental d'une variété de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et le groupe des automorphismes d'un  $\alpha$ -revêtement explicite d'un graphe qui approche la variété (voir la proposition 3.56). On s'aperçoit, dans cet exemple, qu'il est possible d'utiliser le théorème 1.7, non seulement si une variété "régulière" approche un espace singulier, mais également dans le sens contraire (ce qui est inenvisageable avec des théorèmes de convergence).
- Il est possible d'établir le même genre de résultat, si  $(Y, d_Y)$  appartient également à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ , en considérant le revêtement universel de  $Y$  à la place du  $\alpha$ -revêtement (voir le corollaire 3.32).

Comme le théorème 1.7 n'exige aucune hypothèse sur l'espace  $(Y, d_Y)$ , il permet non seulement d'établir l'existence d'un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes du revêtement universel de deux éléments de

$\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  suffisamment proches, mais il permet également d'établir le fait que, si  $(X, d_X)$  est la limite d'une suite d'espaces de longueur  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , l'espace  $(X, d_X)$  admet un revêtement universel qui est la limite des revêtements universels des espaces  $(X_n, d_n)$  (ce qui est faux dans le cas général) ; il est donc possible de définir l'entropie de  $(X, d_X)$ . De plus, le théorème 1.7 donne l'existence d'un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes de  $(X, d_X)$  et de  $(X_n, d_n)$  pour  $n$  suffisamment grand, ce qui assure que les hypothèses algébriques faites sur le groupe des automorphismes des revêtements universels des  $(X_n, d_n)$  sont encore valables pour le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $(X, d_X)$ . Le théorème 1.7 donne de plus un moyen de comparer les actions de ces groupes d'automorphismes sur les revêtements universels respectifs (par l'intermédiaire des applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  qui sont respectivement  $\bar{\rho}$ -équivariante et  $(\bar{\rho})^{-1}$ -équivariante). Il en découle que la suite  $(Ent(X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'entropie de  $(X, d_X)$ . C'est ainsi que l'on démontre la fermeture de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ .

A la fin du chapitre 3, nous discutons les hypothèses choisies : notons que l'hypothèse de majoration uniforme de l'entropie est nécessaire (voir la section "Optimalité des résultats" dans le chapitre 3). Il est par ailleurs fondamental d'imposer également des contraintes sur la structure algébrique du groupe des transformations du revêtement universel. On pourrait en effet croire, à première vue, que la nécessité d'imposer ces conditions est uniquement due au passage de l'hypothèse "Courbure de Ricci minorée" à l'hypothèse plus faible "Entropie majorée", mais, sous la seule hypothèse "Courbure de Ricci minorée", tous les résultats précédents sont également faux (il est en effet possible de faire converger une suite de tores plats dont la dimension devient de plus en plus grande vers un bouquet dénombrable de cercles, qui n'admet pas de revêtement universel et dont le groupe fondamental est de type infini). Le théorème 1.7 a de nombreuses conséquences développées également dans le chapitre 3 : si deux variétés de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  sont à distance inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ , il permet de comparer leur spectre des longueurs (voir le corollaire 3.60), et leur volume (à condition de rajouter des hypothèses de courbure) (voir la section "Comparaison des volumes"). Inversement, on montre que, pour être  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ -proche (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) d'une variété  $(X, g_0)$  de grande entropie, une variété  $(Y, g)$  doit avoir beaucoup de courbure négative (voir la proposition 3.63). Ce théorème permet également d'établir que, si l'on rajoute aux bornes géométriques qui définissent les variétés de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  une hypothèse de "volume majoré", on obtient une famille qui est d'adhérence compacte dans  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  (voir le corollaire 3.74).

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à la croissance des mesures des boules sur des espaces de longueur mesurés non compacts. Nous établissons des estimations du type "estimations de Bishop-Gromov" sur le rapport entre la mesure d'une boule de grand rayon et la mesure d'une boule de petit rayon, sans imposer de contraintes sur la courbure (nous ne faisons intervenir que

l'entropie de la variété). Associées aux résultats du chapitre 3, elles donnent en particulier le

**Théorème 1.9.**

Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\left(\frac{4+\delta}{\delta}\right)HD}$$

Fixons arbitrairement un réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et un réel  $\alpha > 0$ .

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact (connexe) quelconque qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et soit  $(Y, g_Y)$  n'importe quelle variété riemannienne compacte de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  telle que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, g_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ .

Si l'on note  $(\tilde{Y}, g_{\tilde{Y}})$  le revêtement universel de  $(Y, g_Y)$ , pour tout réel  $R$  supérieur ou égal à  $2\alpha$ , on a

$$e^{\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) \text{Ent}(X, d_X)(R - 2\alpha)} \leq \frac{\sup_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \text{Vol}(B(\tilde{y}, R))}{\inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \text{Vol}(B(\tilde{y}, \alpha))} \leq \left( \frac{\sup_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \text{Vol}(B(\tilde{y}, 4\alpha))}{\inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \text{Vol}(B(\tilde{y}, \alpha))} \right)^{E\left[\frac{R}{2\alpha}\right]}$$

## Deuxième partie (chapitre 5)

Une autre approche de la précompacité sur la famille des espaces métriques compacts, amorcée dans [BBG1] puis développée dans [KK1], [KK2] et [Ka], fait intervenir le noyau de la chaleur. L'idée générale consiste à plonger chaque variété riemannienne compacte dans un espace de Hilbert ou de Banach en construisant le plongement  $p$  à l'aide du noyau de la chaleur. On définit alors ("grosso-modo") la distance spectrale entre deux variétés compactes  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  comme la distance de Hausdorff, dans l'espace de Hilbert ou de Banach, entre leurs images par  $p$  (des rappels sur cette notion sont disponibles dans l'annexe F).

Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte, notons

$$k_M(., ., .) : \mathbb{R}_*^+ \times M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

le noyau de l'opérateur de la chaleur, c'est à dire que, pour tout point  $x$  de  $M$ ,  $k_M(., x, .)$  est l'unique solution de l'équation

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta u(., .) + \frac{\partial}{\partial t} u(., .) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, .) dv_g = \delta_x(., .) \end{cases}$$

où la condition initiale doit être vérifiée au sens de la convergence faible des mesures.

A. Kasué et H. Kumura ont alors montré le

**Théorème 1.10.**

*Fixons arbitrairement un réel  $\alpha > 0$  et une constante  $C > 0$ .*

*Soit  $\mathcal{F}$  une famille de classes d'isométries de variétés riemanniennes telle que, pour toute variété  $(M, g)$  de  $\mathcal{F}$ , pour tout point  $x$  de  $M$  et pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,*

$$\text{Vol}(M, g) k_M(t, x, x) \leq \frac{C}{t^\alpha}$$

*Alors, la famille  $\mathcal{F}$  est précompacte pour la distance spectrale ainsi que pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

Ils donnent de plus une description très précise du compactifié de  $\mathcal{F}$  pour la distance spectrale (voir l'annexe F, théorèmes F.3, F.4 et F.6).

Nous nous sommes intéressés, dans le chapitre 5, à la majoration du noyau de la chaleur sur la famille  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ , dont une des applications sera d'obtenir un résultat de précompacité. Il nous a donc fallu établir une majoration qui soit universelle (i.e. uniforme sur la famille des variétés riemanniennes considérées).

La raison pour laquelle une majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur est difficile à obtenir peut se comprendre comme suit : pour établir une majoration du noyau de la chaleur par une fonction de la distance à l'aide du principe du maximum, il est nécessaire de majorer le laplacien de la fonction distance et, en particulier, sa partie singulière qui est une mesure positive supportée par le cut-locus du point source ; sa majoration nécessite trop d'informations sur la géométrie particulière de la variété. Nous contour-nons ici cette difficulté en travaillant sur le revêtement universel riemannien de la variété  $(M, g)$ , où il devient raisonnable de supposer que le cut-locus du point source  $x$  n'est pas trop proche de  $x$  (il est même vide en courbure négative ou nulle). En courbure négative ou nulle, il est alors classique que

$$k_M(t, x, y) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma \tilde{y})}$$

où  $m$  est la dimension de  $M$  et où  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes du revêtement universel et  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont des antécédents fixés respectifs de  $x$  et  $y$  (voir [Bo], pour une preuve dans un cadre bien plus général).

Comme dans la première partie, il nous faut comprendre la structure algébrique du groupe des automorphismes du revêtement universel de  $M$  ainsi que la manière dont il déplace les points. En particulier, il faut contrôler, de manière uniforme, le nombre et la disposition des éléments de  $\Gamma$  qui déplacent peu les points (ce qui est rendu possible grâce à la version du lemme de Margulis de [BCG1]) ainsi que le nombre de grands lacets (ce que nous faisons grâce aux estimations de type Bishop du chapitre 4). Nous obtenons ainsi, dans les théorèmes 5.8 et 5.13, une majoration de  $k_M(t, x, y)$  valable en

tout temps, optimale en temps petit mais qui fait intervenir, en plus des invariants  $m$ ,  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  considérés ci-dessus, un majorant du nombre  $N_x(3D)$  de classes d'homotopie de lacets non homotopes à zéro et de longueur inférieure à  $3D$ . En associant cette majoration aux résultats d'approximation de Gromov-Hausdorff du chapitre 3, nous obtenons le

**Théorème 1.11.**

Fixons trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et un entier  $m$  et notons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD} \quad \text{et} \quad \varepsilon_1 = \frac{\delta \text{Log} 2}{(4 + \delta)H}.$$

Notons  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  l'ensemble des classes d'isométries des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle, dont l'entropie est majorée par  $H$ , dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.

Pour toute variété fixée  $(M_0, g_0)$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ , posons

$$A = \sup_{x \in M_0} N_x(4D + \varepsilon_0) \leq \inf_{x \in M_0} N_x(5D + \varepsilon_0)$$

Considérons la boule  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isométries des variétés de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  qui sont à distance de Gromov-Hausdorff de  $(M_0, g_0)$  inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ .

Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque de  $\mathcal{B}$  et si  $x$  est un point quelconque de  $M$ , alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}_*^+$ ,

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \varepsilon_0^2 / 4t} \right] + \frac{A - 1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-\varepsilon_1^2 / 4t} + \sum_{n=1}^{+\infty} A^{n-1} e^{-n^2 D^2 / 4t} \right]$$

On déduit de cette majoration uniforme et du théorème 2.3 de [KK1] le théorème de précompacité suivant

**Corollaire 1.12.**

Fixons quatre réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$ ,  $D$  et  $V$  et un entier  $m$ .

Notons  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  la famille des classes d'isométries des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  et dont le volume est majoré par  $V$ .

La famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  est précompacte pour la distance spectrale.

Remarquons que G. Besson, G. Courtois et S. Gallot ont déjà obtenu

la précompacité de cette famille de variétés pour la distance de Gromov-Hausdorff avec des hypothèses plus faibles, puisqu'ils remplacent l'hypothèse "courbure sectionnelle négative ou nulle" par l'hypothèse plus faible "minoration du rayon de contractibilité du revêtement universel" (voir [BCG1], proposition 4.1). Cependant, la précompacité pour la distance spectrale donne plus d'informations sur l'espace-limite. En particulier, on obtient des résultats sur la convergence du spectre, sur l'existence d'un noyau de la chaleur sur l'espace de longueur limite ... (voir l'annexe F)

## 1.2 Outils

Dans cette partie, qui ne contient pas de résultats originaux, nous rappelons et illustrons rapidement les définitions et premières propriétés des objets utilisés dans cette thèse. Un rappel plus académique de ces notions est disponible en annexe, où nous justifions en particulier les choix que nous avons faits quand les définitions ne sont pas les définitions classiques.

### 1.2.1 Espaces de longueur

Intuitivement, un espace de longueur est un espace métrique connexe dont la distance entre deux points est l'infimum des longueurs des courbes qui relient ces deux points. Pour définir un espace de longueur il faut donc se donner une famille de courbes sur cet espace et un moyen de mesurer leur longueur.

#### Définitions

Considérons un espace  $X$  muni d'une distance  $d$  et connexe par arcs et l'ensemble des courbes continues sur  $X$  pour la topologie induite par la distance  $d$ . Nous définissons la longueur d'une courbe de la manière suivante :

#### Définition 1.13.

*Soit  $X$  un espace topologique muni d'une distance  $d$  et connexe par arcs. Soit  $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$  un chemin continu sur  $X$ . Considérons une partition  $P$  de  $[a, b]$ , c'est-à-dire une collection finie de points  $\{y_0..y_N\}$  tels que  $a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_N = b$ . Alors, le supremum (sur l'ensemble des partitions de  $[a, b]$ ) des sommes  $\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1}))$  est appelé longueur de  $\gamma$  par rapport à la distance  $d$  et est notée  $L_d(\gamma)$ . Un chemin est dit rectifiable si sa longueur est finie.*

Considérons à présent l'ensemble  $\mathcal{R}$  des courbes (paramétrées par un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ ) continues (pour la topologie induite par  $d$ ) et définissons

$$d_\ell(x, y) = \inf\{L_d(\gamma) / \gamma : [a, b] \longrightarrow X \in \mathcal{R} \text{ telle que } \gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) = y\}$$

L'application  $d_\ell$  vérifie toutes les conditions pour être une distance, à l'exception (éventuelle) du fait qu'elle peut prendre la valeur  $+\infty$ . On a évidemment  $d_\ell \geq d$ , mais, en général,  $d_\ell$  et  $d$  ne coïncident pas (voir l'exemple 1.18). Posons alors la définition :

**Définition 1.14.**

*Nous dirons qu'un espace métrique  $(X, d)$  connexe par arcs est un espace de longueur si  $d_\ell$  et  $d$  coïncident.*

**Remarque 1.15.**

*Si  $(X, d)$  n'est pas un espace de longueur, l'application  $d_\ell$  construite à partir de  $d$  est une distance qui confère à  $X$  une structure d'espace de longueur car la distance  $d_{\ell\ell}$ , construite à partir de  $d_\ell$  en utilisant le procédé décrit dans la définition 1.14, coïncide avec  $d_\ell$ . Par conséquent, la distance de longueur  $d_\ell$  est canonique dans le sens où l'on n'obtient pas d'autre distance de longueur en itérant le processus.*

Avant de montrer la remarque, nous vérifions le lemme suivant

**Lemme 1.16.**

*Toute courbe  $\gamma$   $d$ -continue telle que  $L_d(\gamma) < +\infty$  est  $d_\ell$ -continue.*

*Preuve du lemme 1.16.*

Prouvons la continuité à droite en tout point  $t_0 \in [a, b]$ , la continuité à gauche se faisant de la même manière.

Il nous suffit de montrer que, si  $t_n \rightarrow t_0$  de manière décroissante, alors  $L_d(\gamma|_{[t_0, t_n]})$  tend vers zéro. Or, si  $l_n = L_d(\gamma|_{[t_0, t_n]})$ , la suite  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante de nombres réels positifs *finis* donc elle admet une limite  $\alpha \geq 0$ .

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , puisque  $L_d(\gamma)$  est supposée *finie*, il existe une subdivision de  $[t_0, b]$

$$t_0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N = b$$

telle que

$$L_d(\gamma|_{[t_0, b]}) < \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Si  $N$  est suffisamment grand, on a, pour tout  $n \geq N$ ,  $t_0 < t_n < s_1$  et donc l'additivité de la longueur et l'inégalité triangulaire donnent

$$\begin{aligned} L_d(\gamma|_{[t_0, t_n]}) + L_d(\gamma|_{[t_n, b]}) &= L_d(\gamma|_{[t_0, b]}) \\ &< d(\gamma(t_0), \gamma(t_n)) + d(\gamma(t_n), \gamma(s_1)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Comme

$$L_d(\gamma|_{[t_n, b]}) \geq d(\gamma(t_n), \gamma(s_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1}))$$

on a nécessairement

$$L_d(\gamma|_{[t_0, t_n]}) < d(\gamma(t_0), \gamma(t_n)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si  $n$  est suffisamment grand, la  $d$ -continuité de  $\gamma$  implique que

$$L_d(\gamma|_{[t_0, t_n]}) < \varepsilon$$

et, comme  $d_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t_n)) \leq L_d(\gamma|_{[t_0, t_n]})$ , il en découle que  $d_\ell(\gamma(t_0), \gamma(t_n))$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , ce qui achève la preuve du lemme 1.16.  $\square$

*Preuve de la remarque 1.15.*

Fixons un espace métrique  $(X, d)$  connexe par arcs et itérons le procédé décrit ci-dessus : on construit la distance  $d_{\ell\ell}$  à partir de la distance  $d_\ell$ . Nous allons montrer que  $d_{\ell\ell} = d_\ell$ , donc que  $d_\ell$  est une distance de longueur.

Il est clair que  $d_{\ell\ell} \geq d_\ell$ .

Pour prouver l'inégalité opposée, on peut se restreindre aux paires de points  $(x, y)$  telles que  $d_\ell(x, y) < +\infty$ . Commençons par montrer que, pour toute courbe  $d_\ell$ -continue  $\gamma$ ,  $L_{d_\ell}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$ . Considérons donc une courbe  $d_\ell$ -continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  et une subdivision quelconque  $a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_N = b$  de  $[a, b]$ . Alors, par définition de  $d_\ell$ ,

$$d_\ell(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1})) \leq L_d(\gamma|_{[y_i, y_{i+1}]})$$

Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{N-1} d_\ell(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1})) \leq \sum_{i=0}^{N-1} L_d(\gamma|_{[y_i, y_{i+1}]})$$

Or  $L_d$  est une longueur donc  $\sum_{i=0}^{N-1} L_d(\gamma|_{[y_i, y_{i+1}]}) = L_d(\gamma)$ . Comme la subdivision fixée est quelconque, en prenant le supremum sur l'ensemble des subdivisions de  $[a, b]$ , on obtient finalement, pour toute courbe  $d_\ell$ -continue joignant  $x$  et  $y$ ,

$$L_{d_\ell}(\gamma) \leq L_d(\gamma)$$

Or, d'après le lemme 1.16, si une courbe  $\gamma$  est continue et de longueur finie pour  $d$ , elle est continue pour la distance  $d_\ell$ , ce qui implique que

$$\inf\{L_{d_\ell}(\gamma) / \gamma \text{ est } d_\ell\text{-continue}\} \leq \inf\{L_d(\gamma) / \gamma \text{ est } d\text{-continue et } L_d(\gamma) < +\infty\}$$

Finalement,  $d_{\ell\ell} \leq d_\ell$  ce qui termine la preuve.  $\square$

### Exemples d'espaces de longueur

#### Exemple 1.17.

Si  $X$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , la distance de longueur induite sur  $X$  par la distance euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  coïncide avec la distance associée à la métrique riemannienne  $g$  induite sur  $X$  par restriction du produit scalaire euclidien.

Remarquons que, dans un cadre plus général, si  $X$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , la distance  $d_{\mathbb{R}^n}$  restreinte à  $X$  et la distance de longueur sur  $X$  construite à partir de  $d_{\mathbb{R}^n}$  peuvent ne pas définir la même topologie sur  $X$ . Nous décrivons ci-dessous un exemple qui met en relief ce phénomène (dans le cas d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ).

**Exemple 1.18.** Un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  compact pour la topologie induite par la distance canonique de  $\mathbb{R}^2$  et non compact (et même non borné) pour la distance de longueur induite par la distance canonique de  $\mathbb{R}^2$  :

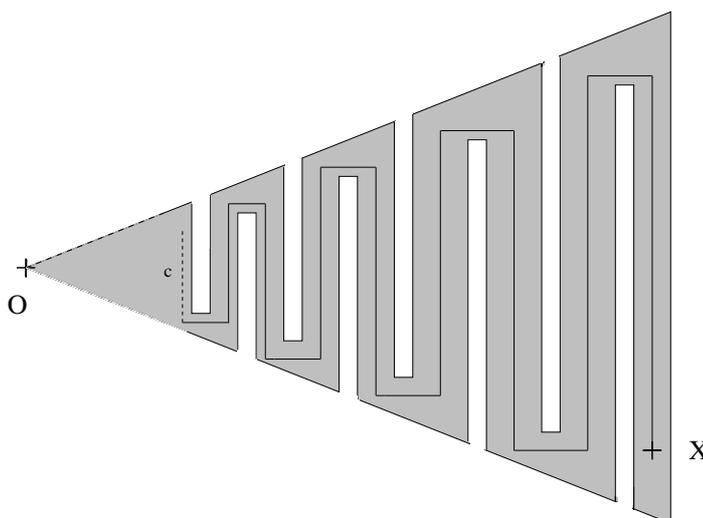


FIG. 1.2 – Espace de longueur non compact

*Construction de l'exemple 1.18.* (voir figure 1.2)

Considérons le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } |y| \leq x\}$$

Notons, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$

$$C_p = \{(x, y) \in X_0 / \frac{1}{2p} - \frac{1}{16p^4} < x < \frac{1}{2p} + \frac{1}{16p^4} \text{ et } y < \frac{1}{4p}\}$$

et

$$D_p = \{(x, y) \in X_0 / \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{16p^4} < x < \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{16p^4} \text{ et } y > -\frac{1}{4p}\}$$

L'espace  $X = X_0 \setminus \left[ \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} (C_p \cup D_p) \right]$  possède les propriétés requises. En effet,  $(X, d_{\mathbb{R}^2})$  est compact comme sous-ensemble fermé et borné de  $\mathbb{R}^2$ . En revanche,  $(X, d_X)$  (où  $d_X$  est la distance de longueur induite par  $d_{\mathbb{R}^2}$ ) n'est plus borné : soit en effet

$$A_n = \{(x, y) \in X / x = \frac{1}{n}\}$$

Alors

$$A_n = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left[ \frac{1}{4p}, \frac{1}{2p} \right] & \text{si } n = 2p \\ \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times \left[ -\frac{1}{2p+1}, -\frac{1}{4p} \right] & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

Fixons un point  $p = (x, y)$  ( $p \neq (0, 0)$ ) de  $X$  et une courbe continue quelconque  $c$  reliant  $p$  et  $O = (0, 0)$  dans  $X$ . La courbe  $c$  rencontre alors  $A_n$  (si  $n > \frac{1}{x}$ ) en un point  $c(t_n) = (x(t_n), y(t_n))$ . On a alors

$$d(c(t_n), c(t_{n+1})) \geq |y(t_n) - y(t_{n+1})| \geq \frac{1}{n}$$

Comme  $\text{long}(c) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} d(c(t_n), c(t_{n+1}))$ , la longueur de  $c$  est infinie. Comme

ceci est vrai pour toute courbe continue (pour la distance  $d_{\mathbb{R}^2}$ ) de  $X$  reliant  $p$  et  $O$ , la distance de longueur induite par  $d_{\mathbb{R}^2}$  entre  $O$  et n'importe quel point de  $X$  est infinie et l'espace de longueur  $(X, d_X)$  n'est pas borné.  $\square$

**Exemple 1.19.** (*exemple classique*)

Soit  $G$  un groupe de type fini, dont un système symétrique de générateurs est noté  $S$ . Notons  $\mathcal{C}(G, S)$  le graphe de Cayley du groupe  $G$  relativement au système symétrique de générateurs  $S$ . Les sommets de ce graphe sont les éléments de  $G$  et deux éléments  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $G$  sont reliés par une arête si et seulement si  $\gamma^{-1} \cdot \gamma'$  (ou, ce qui est équivalent,  $(\gamma')^{-1} \cdot \gamma$ ) appartient à  $S$ . Comme tout chemin fini dans  $\mathcal{C}(G, S)$  est une suite finie d'éléments de  $S$ , toute application  $l : S \rightarrow \mathbb{R}^+$  (telle que  $l(s) = l(s^{-1})$ ) définit une notion de longueur de ce chemin en posant que toute arête  $[\gamma, \gamma \cdot s]$  du graphe a pour longueur  $l(s)$ . Cette notion de longueur permet de construire sur  $\mathcal{C}(G, S)$  une distance de longueur  $d_\ell$ . Remarquons que, si  $s$  est un élément de  $S$  et si  $g$  est un élément de  $G$ , la distance  $d_\ell(g, g \cdot s)$  n'est pas nécessairement égale à  $l(s)$  (il suffit en effet de considérer un cycle dont une des arêtes est grande par rapport à la somme des longueurs des autres arêtes).

Ce dernier exemple ne semble pas découler du processus décrit dans la définition 1, puisqu'on ne part pas d'une distance  $d$  pré-établie sur  $\mathcal{C}(G, S)$ . Remarquons cependant que, une fois que  $l(s)$  est fixé pour tout  $s \in S$ , chaque arête  $[g, g.s]$  de  $\mathcal{C}(G, S)$  est paramétrée par l'intervalle réel  $[0, l(s)]$  et peut être munie de la distance induite par cette paramétrisation, que nous noterons  $d$ . En utilisant des subdivisions  $y_1, \dots, y_n$  qui respectent les arêtes (i.e. telles que, pour tout  $i$ , la portion de la courbe  $\gamma$  comprise entre  $\gamma(y_i)$  et  $\gamma(y_{i+1})$  soit entièrement incluse dans la même arête), on vérifie que la notion de longueur d'une courbe  $\gamma$  du graphe  $\mathcal{C}(G, S)$  définie dans l'exemple 1.19

correspond bien à  $\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1}))$ .

Un cas qui nous intéressera particulièrement est celui où le groupe  $G$  agit (proprement discontinûment, sans point fixe) par isométries sur une variété riemannienne  $(X, g)$ . L'arête  $[e, s]$  peut être représentée par une géodésique minimisante  $c_s$  joignant  $x_0$  à  $s.x_0$ ; l'arête  $[g, gs]$  est alors représentée par la géodésique  $g \circ c_s$  et l'arête  $[e, s^{-1}]$  par  $s^{-1} \circ c_s$  parcourue en sens inverse. On définit alors la distance  $d$  comme la restriction de la distance riemannienne  $d_g$  au graphe ainsi plongé; en particulier,  $d(\gamma, \gamma') = d_g(\gamma.x_0, \gamma'.x_0)$ . Toutes les arêtes  $[g, g.s]$  ont alors même longueur que  $[e, s]$  et  $[e, s^{-1}]$  (puisque  $d_g(g.x_0, gs.x_0) = d_g(x_0, s.x_0) = d_g(s^{-1}.x_0, x_0)$ ). En partant de la distance  $d$  ainsi définie, le processus décrit dans la définition 1.13 définit une distance de longueur  $d_\ell$ . Cette distance est identique à la distance de longueur définie dans l'exemple 1.19, à condition de définir  $l(s)$  comme  $d(x_0, s.x_0)$ .

### Hypothèses générales fixées sur les espaces de longueur

Dans un cadre général, une distance de longueur, même construite à partir d'une métrique finie, n'est pas finie (en particulier, si  $X$  n'est pas connexe par arcs, aucune distance de longueur n'est finie - voir aussi l'exemple 1.18 ci-dessus).

**Dans toute la suite de cette thèse, nous ne considérerons que des espaces connexes par arcs, munis d'une distance de longueur finie. De plus, nous supposerons toujours que la distance entre deux points est réalisée par la longueur d'au moins une courbe (appelée géodésique minimisante) qui joint ces deux points.**

Notons que cette dernière hypothèse est toujours vérifiée sur les espaces compacts (pour la topologie induite par la distance de longueur) ainsi que sur les espaces complets et localement compacts (voir [Gr], page 9). Lorsque nous travaillerons sur des espaces de longueur sur lesquels la distance entre deux points n'est a priori pas réalisée par la longueur d'une courbe, nous préciserons que nous travaillons avec des espaces de longueur au sens faible .

En outre, remarquons qu'un espace de longueur est nécessairement localement connexe par arcs. Cette propriété est particulièrement intéressante lorsqu'on s'intéresse à l'existence de revêtements de  $X$ .

### 1.2.2 Revêtements de longueur réguliers

Un rappel sur les revêtements topologiques réguliers (ou galoisiens) est disponible dans l'annexe B.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à des revêtements d'espaces de longueur qui sont de plus des isométries locales (ce qui est en particulier le cas des revêtements riemanniens d'une variété riemannienne). Il est naturel de se demander si de tels revêtements existent. Or, si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur et si  $p : Y \rightarrow X$  est un revêtement topologique régulier (ou galoisien ; voir la définition B.5 de l'annexe B), il existe une et une seule distance de longueur  $d_Y$  sur  $Y$  (invariante par l'action du groupe des automorphismes du revêtement  $p : Y \rightarrow X$ ) telle que  $p$  soit une isométrie locale entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  (voir la proposition B.9 de l'annexe B). Nous dirons alors que  $p : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$  est un revêtement de longueur régulier. Son groupe de transformations de revêtement agit alors par isométrie (librement et de manière totalement discontinue). Réciproquement, si  $\Gamma$  est un groupe d'isométries d'un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  qui agit librement et de manière totalement discontinue sur  $Y$ , posons  $X = Y/\Gamma$  ; il existe alors sur  $X$  une distance de longueur (notée  $d_X$ ) qui fait de la projection  $p : (Y, d_Y) \rightarrow (Y/\Gamma, d_{Y/\Gamma})$  un revêtement de longueur régulier dont le groupe de transformations est isomorphe à  $\Gamma$  (voir la proposition B.9 de l'annexe B).

Si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur semi-localement simplement connexe (voir la définition B.13 de l'annexe B), pour tout sous-groupe normal  $\Gamma$  du groupe fondamental de  $X$ , il existe un revêtement de longueur régulier  $p : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$  dont le groupe des automorphismes de revêtement est  $\pi_1(X, x)/\Gamma$  (voir [Sp] p.82 et [Go], théorème IX.4.5 p.136). De plus, dans ce cas, il existe un revêtement de longueur régulier simplement connexe de  $X$  (voir [Go], théorème IX.5.3 p.137). Ce revêtement (qui est unique à équivalence de revêtement près) est particulièrement intéressant pour les deux raisons suivantes : le groupe fondamental de  $X$  et le groupe des transformations de revêtement sont dans ce cas isomorphes et, par ailleurs, ce revêtement est le plus grand revêtement de  $X$  dans le sens où c'est un revêtement de tous les revêtements de  $X$  (voir l'annexe B pour plus de précisions).

Remarquons toutefois que, si le revêtement simplement connexe (quand il existe) est automatiquement le plus grand revêtement de  $X$ , le plus grand revêtement de  $X$  (quand il existe) n'est pas nécessairement simplement connexe (voir par exemple [Sp], exemple 18, p. 84). Dans ce cas, le groupe des automorphismes du revêtement universel n'est pas isomorphe au groupe fondamental de  $X$ .

**Nous appellerons revêtement universel de  $X$  le plus grand revêtement de  $X$  quand il existe. Plus précisément, nous posons la**

**Définition 1.20.** (voir [Sp], p.80)

*L'application  $p : Y \rightarrow X$  est un revêtement universel de  $X$  si pour tout autre revêtement  $p' : Y' \rightarrow X$  il existe un revêtement  $p'' : Y \rightarrow Y'$  tel que  $p = p' \circ p''$ .*

*Un tel revêtement est unique (à équivalence de revêtement près).*

(nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ce n'est pas toujours la définition choisie dans la littérature où l'on définit souvent le revêtement universel comme le revêtement simplement connexe).

Cependant, même avec cette définition, un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs n'admet pas toujours de revêtement universel (voir par exemple [Sp], ex. 16 et 17 p 84). Dans le cadre des espaces de longueur, C. Sormani et G. Wei ont établi une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence d'un revêtement universel :

**Théorème 1.21.** ([SW], théorème 3.7)

*Un espace de longueur compact  $(X, d)$  (qui n'est pas supposé semi-localement simplement connexe) admet un revêtement universel si et seulement si il existe un réel strictement positif  $\alpha_0$  (dépendant de  $X$ ) tel que, pour tout  $\alpha$  strictement inférieur à  $\alpha_0$ , on ait l'égalité  $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ , où  $p_\alpha : X^\alpha \rightarrow X$  désigne le  $\alpha$ -revêtement de  $X$  (voir la construction de ces revêtements dans le paragraphe qui précède la proposition B.16). Dans ce cas, le revêtement universel de  $X$  est  $X^{\alpha_0}$ .*

### 1.2.3 Distances sur les classes d'isométrie d'espaces métriques

#### Distance de Gromov-Hausdorff

La distance de Gromov-Hausdorff est, à l'origine, une généralisation de la distance de Hausdorff entre deux sous-ensembles compacts d'un espace métrique  $(X, d_X)$ , munis de la métrique induite par  $d_X$ . Le but recherché était de construire une distance entre deux classes d'isométrie d'espaces métriques compacts abstraits. La définition originale de cette distance se trouve dans l'annexe C (voir la définition C.1). Nous avons préféré appeler distance de Gromov-Hausdorff l'écart  $d'_{GH}$  défini dans la définition 1.23, qui n'est pas tout à fait une distance sur les classes d'isométries d'espaces métriques compacts mais qui définit la même topologie que la distance de Gromov-Hausdorff et qui s'avère être plus maniable dans les problèmes que nous nous proposons de résoudre.

**Définition 1.22.**

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Une application  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  (qui n'est pas nécessairement continue) est une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff si elle vérifie, pour tous les points  $x$  et  $x'$  de  $X$ ,

$$|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| < \varepsilon$$

et si  $f(X)$  est un  $\varepsilon$ -réseau de  $Y$  (c'est-à-dire que, pour tout point  $y$  de  $Y$ , il existe un point  $x$  de  $X$  tel que  $d_Y(y, f(x)) < \varepsilon$ ).

**Définition 1.23.**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. Nous définissons l'écart  $d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$  par l'infimum des réels  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe simultanément deux  $\varepsilon$ -approximations

$$f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$$

et

$$g : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$$

qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (i) pour tout point  $x$  de  $X$ ,  $d_X(g \circ f(x), x) < \varepsilon$
- (ii) pour tout point  $y$  de  $Y$ ,  $d_Y(f \circ g(y), y) < \varepsilon$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'a posteriori la distance de Gromov-Hausdorff ne prolonge pas vraiment la distance de Hausdorff (voir l'exemple 1.26).

**Remarque 1.24.** L'existence d'une  $\varepsilon$ -approximation  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  entraîne automatiquement l'existence d'une  $3\varepsilon$ -approximation  $g : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  telle que :

- $d_X(g \circ f(x), x) < \varepsilon$  pour tout  $x \in X$
- $d_Y(f \circ g(y), y) < \varepsilon$  pour tout  $y \in Y$

Cette remarque est prouvée dans l'annexe C, remarque C.5.

Notons que l'application  $d'_{GH}$  n'est pas exactement une distance sur les classes d'isométries d'espaces métriques compacts puisqu'elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire. Cependant, elle vérifie l'inégalité

$$d'_{GH}((X, d_X), (Z, d_Z)) \leq 2 [d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) + d'_{GH}((Y, d_Y), (Z, d_Z))]$$

et elle définit la même topologie que la distance de Gromov-Hausdorff. En effet, on a le théorème suivant :

**Théorème 1.25.** ([BBI], adaptation du corollaire 7.3.28)

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts.

- (i) Si  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$ , alors  $d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < 2\varepsilon$ .
- (ii) Si  $d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$ , alors  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < 2\varepsilon$ .

Par abus de langage, si rien d'autre n'est précisé, nous appellerons distance de Gromov-Hausdorff (et nous noterons  $d_{GH}$ ) l'application  $d'_{GH}$  définie dans la définition 1.23 sur les couples d'espaces métriques compacts. Nous insistons sur le fait qu'elle ne vérifie l'inégalité triangulaire qu'à un facteur 2 près.

Si nous voulons faire référence à l'autre définition, nous précisons qu'il s'agit de la distance de Gromov-Hausdorff classique.

### Distance de Hausdorff et distance de Gromov-Hausdorff

La définition classique de la distance de Gromov-Hausdorff (voir dans l'annexe C) définit celle-ci comme l'infimum des distances de Hausdorff des images de  $X$  et de  $Y$  dans un espace métrique  $(Z, d_Z)$  par des plongements **isométriques**  $i_X$  et  $i_Y$ , ce qui signifie que  $i_X$  et  $i_Y$  préservent les distances. Dans ce sens, l'inclusion d'une sous-variété riemannienne de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  n'est pas "isométrique", ce que souligne l'exemple suivant :

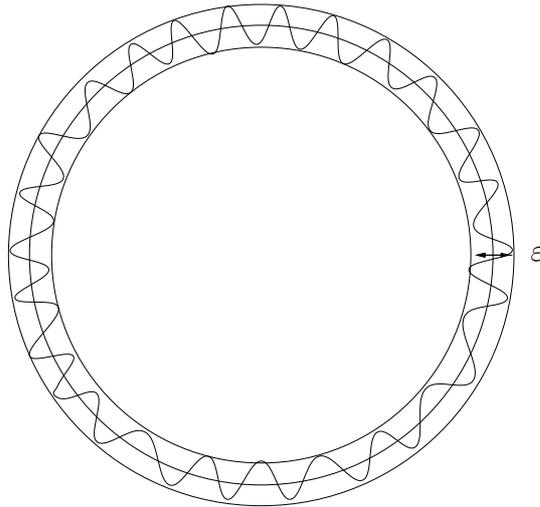


FIG. 1.3 – Exemple 1.26

**Exemple 1.26.** Soit  $X_1$  le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon 1 et  $X_2$  une courbe qui oscille beaucoup autour de  $X_1$  (avec des oscillations de taille inférieure à  $\varepsilon$ ). La distance de Hausdorff  $d_H((X_1, d_{\mathbb{R}^2}), (X_2, d_{\mathbb{R}^2}))$  est inférieure à  $\varepsilon$ .

Par ailleurs, le diamètre de l'espace de longueur  $(X_2, d_{X_2})$  peut être rendu arbitrairement grand (en augmentant le nombre d'oscillations). Comme

$$d_{GH}((X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2})) \geq \frac{1}{2} |\text{diam}(X_2, d_{X_2}) - \text{diam}(X_1, d_{X_1})|$$

(voir par exemple [BBI], p.255), la distance de Gromov-Hausdorff classique  $d_{GH}((X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2}))$  peut être rendue arbitrairement grande (et, par conséquent,  $d'_{GH}$  aussi).

Deux sous-variétés  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^n$  peuvent donc être à distance de Hausdorff petite dans  $\mathbb{R}^n$  (en tant que sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$ ) tandis que, si  $d_X$  et  $d_Y$  désignent les distances riemanniennes de  $X$  et  $Y$ , la distance de Gromov-Hausdorff  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$  est grande.

En fait, si l'on munit  $X$  et  $Y$  de la distance induite par celle de  $\mathbb{R}^n$  (notée ici  $d_{\mathbb{R}^n}$ ), on obtient bien que  $d_{GH}((X, d_{\mathbb{R}^n}), (Y, d_{\mathbb{R}^n}))$  est petite. Autrement dit, le procédé décrit dans la définition 1.13 pour construire des distances de longueur n'est pas stable pour la distance de Gromov-Hausdorff, dans le sens où deux espaces métriques  $(X, d)$  et  $(Y, d')$  peuvent être proches pour la distance de Gromov-Hausdorff, tandis que les espaces de longueur  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  (construits en utilisant le procédé décrit dans la définition 1.13) sont très distants.

### Exemples

**Exemple 1.27.** *Une suite de variétés riemanniennes qui converge au sens de la distance de Gromov-Hausdorff et telle que la limite soit un espace métrique singulier :*

*Description de l'exemple 1.27.*

Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte, et si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'applications continues et strictement positives sur  $M$  qui converge uniformément vers une fonction  $f$  positive ou nulle, la suite  $((M, f_n g))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'espace métrique  $(M/\sim, d)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff où la relation d'équivalence  $\sim$  et la distance  $d$  entre les classes d'équivalence sont définies de la manière suivante :

- $x \sim y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(x, y) = 0$

et

- $d$  est la distance induite par la pseudo-métrique  $f g$  sur  $M/\sim$ .

(La preuve de ce résultat découle de l'exemple 7.4.4 p.260 de [BBI]).

Comme la distance de Gromov-Hausdorff est définie par un infimum, il suffit d'exhiber une  $\varepsilon$ -approximation entre deux espaces pour montrer qu'ils sont à distance de Gromov-Hausdorff inférieure à  $\varepsilon$ . En revanche, minorer la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts peut s'avérer plus ardu. C'est pourtant nécessaire si l'on veut montrer, par exemple, qu'une famille d'espaces métriques compacts n'est pas précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Nous donnons donc ci-dessous un exemple de suite non convergente pour la distance de Gromov-Hausdorff.

**Exemple 1.28.** *Une suite non-convergente pour la distance de Gromov-Hausdorff :*

*Description de l'exemple 1.28.*

Fixons une variété riemannienne compacte  $(X, g)$  de dimension  $m$ . Choisissons  $n$  points  $x_1, \dots, x_n$  de cette variété et  $n$  nombres réels strictement positifs  $r_1, \dots, r_n$  tels que les boules  $B(x_i, r_i)$  soient disjointes et tels que chaque  $r_i$  soit inférieur au rayon d'injectivité de  $(X, g)$  en  $x_i$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous construisons la  $n$ -ième variété  $(X_n, g_n)$  de la suite en recollant à  $(X \setminus \cup_{i=1..n} B(x_i, r_i))$   $n$  cylindres  $C_i = [0, 1 + \varepsilon_n] \times \partial B(x_i, r_i)$  (le recollement étant obtenu en identifiant  $\partial B(x_i, r_i)$  avec le bord  $\{0\} \times \partial B(x_i, r_i)$  de  $C_i$ ), munis de la métrique-produit

$$h_i = (dr)^2 \times g_{\partial B(x_i, r_i)}$$

où  $g_{\partial B(x_i, r_i)}$  est la métrique induite par  $g$  sur  $\partial B(x_i, r_i)$ .

On recolle ensuite une variété riemannienne compacte quelconque  $(M'_i, g'_i)$  (privée d'une boule  $B'(z'_i, \varepsilon'_i)$  telle que  $\varepsilon'_i$  soit inférieure au rayon d'injectivité de  $(M'_i, g'_i)$  au point  $z'_i$ ) en identifiant (de manière classique)  $[1, 1 + \varepsilon_n] \times \partial B(x_i, r_i)$  avec  $B'(z'_i, 2\varepsilon'_i) \setminus B'(z'_i, \varepsilon'_i)$  de telle manière que  $\{1 + t\varepsilon_n\} \times \partial B(x_i, r_i)$  soit identifié avec  $\partial B'(z'_i, (1 + t)\varepsilon'_i)$ . On modifie alors la métrique  $h_i$  sur  $[1, 1 + \varepsilon_n] \times \partial B(x_i, r_i)$  en la remplaçant par la métrique  $\tilde{h}_i = (1 - \varphi) \cdot h_i + \varphi \cdot g'_i$ , où  $\varphi$  est une fonction définie par  $\varphi(t, x) = \tilde{\varphi}(t)$  où  $\tilde{\varphi} : [1, 1 + \varepsilon_n] \rightarrow [0, 1]$  est une fonction  $C^\infty$  nulle au voisinage de 1 et qui vaut 1 au voisinage de  $1 + \varepsilon_n$ . On définit la métrique  $g_n$  en posant

$$g_n = \begin{cases} g & \text{sur } X \setminus \cup_{i=1..n} B(x_i, r_i) \\ h_i & \text{sur } [0, 1] \times \partial B(x_i, r_i) \\ \tilde{h}_i & \text{sur } [1, 1 + \varepsilon_n] \times \partial B(x_i, r_i) \\ g'_i & \text{sur } M'_i \setminus B'(z'_i, 2\varepsilon'_i) \end{cases}$$

Alors la suite  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne contient pas de sous-suite de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff.

*Preuve de l'exemple 1.28.*

Sur chacune des variétés  $(X_n, g_n)$  de la suite, fixons, pour chaque  $i \leq n$  un point  $y_i$  appartenant au cercle  $\{1\} \times \partial B(x_i, r_i)$  du cylindre  $C_i$ ; tout chemin joignant deux points  $y_i$  et  $y_j$  (où  $i \neq j$ ) doit alors rencontrer les bords  $\{0\} \times \partial B(x_i, r_i)$  et  $\{0\} \times \partial B(x_j, r_j)$  des cylindres  $C_i$  et  $C_j$  et est, par conséquent, de longueur supérieure à 2. En particulier, dès que  $i \neq j$ , on a

$$d_n(y_i, y_j) \geq 2$$

Si maintenant  $f$  est une 1-approximation de  $(X_n, g_n)$  sur un espace métrique  $(Y, d)$ , ceci implique que

$$d(f(y_i), f(y_j)) > 1$$

donc les boules sur  $(X, g)$  de rayon  $\frac{1}{2}$  centrées en les  $f(x_i)$  sont disjointes. Une telle approximation n'existe donc que si  $n \leq N(Y, d)$ , où  $N(Y, d)$  est le nombre maximal de  $d$ -boules disjointes de rayon  $\frac{1}{2}$  que l'on peut inclure dans  $Y$  (ce nombre est fini lorsque  $Y$  est une variété compacte et  $d$  provient d'une métrique riemannienne complète).

Fixons à présent un entier  $n$ . Comme  $(X_n, g_n)$  est une variété riemannienne compacte,  $N(X_n, d_{g_n})$  est un nombre fini et fixé. En appliquant ce qui précède à la variété riemannienne  $(X_n, g_n)$ , on déduit que, pour tout  $k > N(X_n, d_{g_n})$ , il n'existe aucune 1-approximation de  $(X_k, g_k)$  sur  $(X_n, g_n)$ .

Finalement, pour tout  $k > N(X_n, d_{g_n})$ ,

$$d_{GH}((X_k, g_k), (X_n, g_n)) \geq 1$$

En particulier, la suite  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne contient pas de sous-suite de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff.  $\square$

### Distance spectrale

La distance spectrale est une distance sur l'ensemble des classes d'isométrie de variétés riemanniennes compactes. Une première distance spectrale a été introduite par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot dans [BBG]; nous présentons ici celle définie par A. Kasué et H. Kumura dans [KK1], construite suivant le même principe que celle de [BBG]. L'idée consiste à plonger chaque variété riemannienne  $(M, g)$  compacte de volume 1 dans un même espace de Banach grâce au noyau de l'opérateur de la chaleur. On définit alors "grosso-modo" la distance spectrale entre deux variétés riemanniennes compactes  $(M, g)$  et  $(N, h)$  comme la distance de Hausdorff entre leurs images par le plongement, munies de la distance induite par la distance de l'espace de Banach (pour une description plus précise de la relation entre ces deux distances, voir l'annexe F).

De brefs rappels sur les résultats obtenus par A. Kasué et H. Kumura sur certaines familles de variétés riemanniennes compactes munies de la distance spectrale sont disponibles dans l'annexe F.

#### Définition 1.29.

*Soient  $(M, g)$  et  $(N, h)$  deux variétés riemanniennes compactes et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.*

*Une application mesurable  $f : M \rightarrow N$  est une  $\varepsilon$ -approximation spectrale si elle satisfait*

$$e^{-(t+1/t)} |k_M(t, x, x') - k_N(t, f(x), f(x'))| < \varepsilon$$

*pour tout temps  $t > 0$  et tous les points  $x$  et  $x'$  de  $M$ .*

#### Définition 1.30.

*Soient  $(M, g)$  et  $(N, h)$  deux variétés riemanniennes compactes.*

*La distance spectrale entre  $(M, g)$  et  $(N, h)$  est l'infimum des réels  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe deux  $\varepsilon$ -approximations spectrales  $f : M \rightarrow N$  et  $h : N \rightarrow M$ .*

Dans [KK1] et [KK2], A. Kasué et H. Kumura montrent qu'il suffit de majorer uniformément le noyau de la chaleur pour établir qu'une famille de variétés riemanniennes compactes est précompacte pour la distance spectrale (un schéma de preuve de ce résultat est disponible dans l'annexe F) ainsi que pour la distance de Gromov-Hausdorff. Ils donnent également une description très détaillée du compactifié de ces familles pour la distance spectrale et relie ce compactifié au compactifié de la famille considérée pour la distance de Gromov-Hausdorff.

### Topologie de Gromov équivariante

La distance de Gromov-Hausdorff est une distance sur la famille des espaces métriques compacts. Elle a été généralisée pour donner une topologie sur la famille des espaces métriques non compacts, appelée topologie de Gromov-Hausdorff pointée. Nous aurons besoin dans cette thèse d'une topologie qui prenne également en compte l'action par isométrie d'un groupe sur les espaces métriques non compacts considérés : c'est le rôle joué par la topologie de Gromov-équivariante, définie, par exemple, dans [Fu2].

#### Définition 1.31.

Soient  $(X, d_X, p)$  et  $(Y, d_Y, q)$  deux espaces métriques pointés (éventuellement non compacts, mais dont toutes les boules sont compactes). Soient  $G$  et  $H$  deux groupes qui agissent par isométrie librement et proprement discontinûment sur  $X$  et  $Y$  respectivement. Une paire d'applications  $(f, \varphi)$  (où  $f : X \rightarrow Y$  est une application éventuellement non continue et  $\varphi$  est une application de  $G$  dans  $H$ ) est une  $\varepsilon$ -approximation équivariante si elle vérifie :

- (i)  $f$  est une  $\varepsilon$ -approximation de Gromov-Hausdorff entre la boule  $B(p, \frac{1}{\varepsilon})$  de  $X$  et la boule  $B(q, \frac{1}{\varepsilon})$  de  $Y$ ,
- (ii) Si  $x$  est un point de  $B(p, \frac{1}{\varepsilon})$ , si  $g$  est un élément de  $G$  tel que  $g.x$  appartienne également à  $B(p, \frac{1}{\varepsilon})$  et si les points  $f(x)$ ,  $f(g(x))$  et  $\varphi(g)(f(x))$  appartiennent à la boule  $B(q, \frac{1}{\varepsilon})$ , alors,

$$d_Y(\varphi(g)(f(x)), f(g(x))) < \varepsilon$$

#### Définition 1.32.

Soient  $(X, d_X, p)$  et  $(Y, d_Y, q)$  deux espaces métriques pointés (éventuellement non compacts, mais dont toutes les boules sont compactes). Soient  $G$  et  $H$  deux groupes qui agissent par isométrie respectivement sur  $X$  et  $Y$ .

La distance de Gromov-équivariante entre  $((X, d_X), p, G)$  et  $((Y, d_Y), q, H)$ , que nous noterons  $d_{GHe}((X, d_X), p, G), ((Y, d_Y), q, H))$ , est l'infimum des réels  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe une  $\varepsilon$ -approximation équivariante de  $((X, d_X), p, G)$  sur  $((Y, d_Y), q, H)$  et de  $((Y, d_Y), q, H)$  sur  $((X, d_X), p, G)$ .



## Chapitre 2

# L'entropie volumique

Nous commençons, dans ce chapitre, par définir l'entropie volumique sur les espaces métriques mesurés non compacts  $(Y, d, \mu)$  puis nous vérifions plusieurs propriétés de cet invariant qui sont classiques dans le cadre des variétés riemanniennes et qui se généralisent sans grande difficulté au cas des espaces de longueur mesurés. S'il existe un groupe  $\Gamma$  qui agit par isométrie de manière discontinue et cocompacte sur l'espace  $(Y, d)$ , nous vérifions en particulier que l'entropie volumique ne dépend pas de la mesure borélienne choisie, pourvu qu'elle soit  $\Gamma$ -invariante. Cette propriété permet de définir l'entropie volumique de tout espace de longueur compact qui admet un revêtement universel. Nous donnons ensuite quelques propriétés (tout aussi classiques dans le cas des variétés riemanniennes) de cette entropie.

Dans la dernière partie, nous étudions le comportement de cet invariant vis-à-vis de variations locales de la métrique, qui permettent de vérifier que l'entropie est bien moins sensible à ces variations que la courbure. En particulier, l'ensemble des variétés riemanniennes dont l'entropie volumique est majorée par  $(n-1)K_0$  est bien plus vaste que l'ensemble des variétés riemanniennes dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(n-1)K_0^2g$ . Ainsi, on construit

(i) une suite de variétés riemanniennes de même dimension, toutes différentes du point de vue topologique (et même homologique), dont l'entropie est uniformément majorée, qui converge (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété riemannienne de même dimension, de topologie encore différente de celle des variétés de la suite et qui ont pourtant toutes leur entropie uniformément majorée. La même situation est impossible si l'on suppose que la courbure de Ricci est minorée, puisqu'un théorème de J. Cheeger et T. Colding assure alors la stabilité de la structure différentiable (voir [CC1], théorème A.112).

(ii) une suite de variétés riemanniennes de même dimension, toutes diféomorphes, dont l'entropie est uniformément majorée, dont le volume tend

vers l'infini et qui convergent (au sens de la distance de Gromov-Hausdorff) vers une variété riemannienne de même dimension, difféomorphe à toutes les variétés de la suite. La même situation est impossible si l'on suppose que la courbure de Ricci est minorée, puisqu'un théorème de T. Colding assure alors la convergence du volume (voir [Co], théorème 0.1).

(iii) une suite de variétés riemanniennes de même dimension, toutes difféomorphes, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés, mais qui ne contient aucune sous-suite de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff. Ceci signifie qu'une famille de variétés riemanniennes compactes de même dimension, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés, n'est a priori pas précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Rappelons cependant qu'une famille de variétés riemanniennes compactes de même dimension, dont la courbure de Ricci est uniformément minorée et dont le diamètre est uniformément majoré est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir [Gr], théorème 5.3).

## 2.1 Définitions et premières propriétés

### 2.1.1 Cas non compact

Nous définissons dans un premier temps l'entropie volumique des espaces métriques mesurés  $(Y, d_Y, \mu_Y)$  non compacts et

nous supposons **dans ce cas** et tout au long de cette thèse que  $\mu_Y$  est une mesure borélienne non nulle, que l'espace  $Y$  est de masse totale infinie et que tout compact  $K$  de  $Y$  est de mesure finie.

Nous ne supposons pas a priori que cette mesure est régulière (nous pouvons en particulier choisir des mesures de comptage sur les orbites d'un groupe discret agissant proprement discontinûment sur  $Y$ ).

#### Définition 2.1.

Soit  $(Y, d_Y, \mu_Y)$  un tel espace métrique mesuré non compact et  $y$  un point de  $Y$ . Nous définissons l'entropie volumique de  $(Y, d_Y, \mu_Y)$  (au point  $y$ ) par

$$Ent_y(Y, d_Y, \mu_Y) = \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \mu_Y(B_{d_Y}(y, R))$$

L'entropie volumique mesure donc la croissance exponentielle asymptotique de la mesure des boules de grand rayon. Elle peut être nulle ou égale à l'infini.

#### Fait 2.2.

Cette définition ne dépend pas du point  $y$  choisi.

Nous noterons donc  $Ent(Y, d_Y, \mu_Y)$  l'entropie de  $(Y, d_Y, \mu_Y)$ .

*Preuve du fait 2.2.*

Soit  $y'$  un autre point de  $Y$  et  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rayons tels que  $R_n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et tels que

$$Ent_y(Y, d_Y, \mu_Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{R_n} \log \mu_Y(B(y, R_n))$$

Dès que  $R_n$  est supérieur à  $d_Y(y, y')$ , on a l'inclusion  $B(y', R_n - d_Y(y, y')) \subset B(y, R_n)$ . Alors, si  $\varepsilon$  est un réel strictement positif fixé, pour tout  $n$  suffisamment grand,

$$\begin{aligned} Ent_y(Y, d_Y, \mu_Y) + \varepsilon &\geq \frac{\log[\mu_Y(B(y, R_n))]}{R_n} \\ &\geq \frac{R_n - d_Y(y, y')}{R_n} \frac{\log[\mu_Y(B(y', R_n - d_Y(y, y')))]}{R_n - d_Y(y, y')} \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite inférieure, on obtient

$$Ent_y(Y, d_Y, \mu_Y) + \varepsilon \geq Ent_{y'}(Y, d_Y, \mu_Y)$$

Comme cette dernière inégalité est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient finalement que

$$Ent_y(Y, d_Y, \mu_Y) \geq Ent_{y'}(Y, d_Y, \mu_Y)$$

Puisque  $y$  et  $y'$  sont quelconques, ceci montre aussi l'inégalité inverse.  $\square$

### Propriété 2.3.

*Soit  $(Y, d_Y)$  un espace métrique non compact.*

*S'il existe un sous-groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $(Y, d_Y)$  qui agit discontinûment (c'est-à-dire que pour tout réel  $R > 0$  et pour tout point  $y$  de  $Y$ , l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma / d_Y(y, \gamma.y) < R\}$  est fini) et de manière cocompacte, alors l'entropie ne dépend pas de la mesure borélienne  $\mu$  choisie pourvu qu'elle soit  $\Gamma$ -invariante, que  $\mu(Y) = +\infty$  et que l'adhérence d'au moins un domaine fondamental soit de mesure finie. De plus, pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $Y$ , on a*

$$Ent(Y, d_Y, \mu_Y) = \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log (\# [B(y, R) \cap \Gamma.x])$$

Remarquons que nous ne supposons pas que le groupe  $\Gamma$  agit librement : il peut exister un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  et un point  $x$  de  $Y$  tels que  $\gamma.x = x$ . Avant de démontrer la propriété 2.3, nous vérifions le

### Fait 2.4.

*Soit  $(Y, d_Y)$  un espace métrique non compact et un point  $x$  quelconque de  $Y$ . S'il existe un sous-groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $(Y, d_Y)$  qui agit discontinûment et de manière cocompacte, la mesure  $\mu_x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma.x}$  est non nulle, de masse totale infinie, finie sur tout compact et  $\Gamma$ -invariante.*

*Preuve du fait 2.4.*

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe d'isométries de  $(Y, d_Y)$  qui agit discontinûment et de manière cocompacte sur  $Y$ .

• Par définition, pour tout élément  $g$  de  $\Gamma$ , si  $f$  est une fonction continue à support compact, on a

$$\langle g_*\mu_x, f \rangle = \langle \mu_x, f \circ g \rangle$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle g_*\mu_x, f \rangle &= \sum_{\gamma \in \Gamma} f \circ g[\gamma.x] \\ &= \sum_{\gamma' \in \Gamma} f \circ \gamma'(x) \\ &= \langle \mu_x, f \rangle \end{aligned}$$

Finalement,  $g_*\mu_x = \mu_x$  et la mesure  $\mu_x$  est  $\Gamma$ -invariante.

• Remarquons que  $\mu_x(Y) = \#\Gamma = +\infty$  car un groupe d'isométries d'un espace de longueur non compact qui agit de manière cocompacte est infini.

La mesure  $\mu_x$  est donc de masse totale infinie.

• Soit  $K$  un compact de  $Y$ . Soit  $R$  un réel strictement positif tel que le compact  $K$  soit inclus dans la boule  $B(x, R)$ . Comme le groupe  $\Gamma$  agit discontinûment, l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma / d_Y(x, \gamma.x) < R\}$  est fini donc  $\mu_x(B(x, R))$  est finie. Il en est alors de même pour le compact  $K$  qui est inclus dans  $B(x, R)$ .  $\square$

*Preuve de la propriété 2.3.*

Fixons une mesure

borélienne  $\mu_Y$  sur  $Y$  qui est  $\Gamma$ -invariante. Considérons à présent un domaine fondamental compact  $K$  pour l'action de  $\Gamma$  sur  $Y$  (c'est-à-dire un compact  $K$  tel que  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(K) = Y$ ) tel que  $\mu_Y(K) < +\infty$ . Alors, pour tout  $x \in K$ ,

$$\begin{aligned} \mu_Y(B(x, R)) &\leq \mu_Y \left( \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d_Y(x, \gamma.x) \leq R + \text{diam}(K)}} \gamma.K \right) \\ &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d_Y(x, \gamma.x) \leq R + \text{diam}(K)}} \mu_Y(\gamma.K) \\ &\leq \mu_Y(K) \cdot \mu_x[B(x, R + \text{diam}(K))] \end{aligned}$$

Il en découle que, si  $R$  est un réel strictement positif,

$$\frac{1}{R} \log(\mu_Y(B(x, R))) \leq \frac{1}{R} \log(\mu_Y(K)) + \frac{R + \text{diam}(K)}{R} \frac{\log[\mu_x(B(x, R + \text{diam}(K)))]}{R + \text{diam}(K)}$$

En passant à la limite inférieure d'abord à droite puis à gauche, on obtient bien, lorsque  $\mu_Y(K) < +\infty$ ,

$$Ent(Y, d_Y, \mu_Y) \leq Ent(Y, d_Y, \mu_x)$$

Par ailleurs,  $\mu_Y(K) > 0$ . En effet, si  $\mu_Y(K)$  était nulle, comme

$$\mu_Y(B(x, R)) \leq \mu_Y(K) \cdot \#\{\gamma \in \Gamma/d_Y(x, \gamma.x) \leq R + \text{diam}(K)\},$$

on aurait  $\mu_Y(B(x, R)) = 0$  pour tout rayon  $R$ . De plus,  $Y = \cup_{n \in \mathbb{N}} B(x, n)$ , où la réunion est croissante. On ne pourrait donc pas avoir  $\mu_Y(Y) = +\infty$ .

De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement fini de  $K$  par des boules de rayon  $\varepsilon$ , ce qui entraîne l'existence d'un point  $x_0$  tel que  $\mu_Y(B(x_0, \varepsilon)) > 0$ . Notons  $H_{x_0}$  le stabilisateur du point  $x_0$ . Comme  $\#\{\gamma \in \Gamma/d_Y(x_0, \gamma.x_0) \leq 1\}$  est fini, il en est de même pour  $\#H_{x_0}$  et  $\{d_Y(x_0, \gamma.x_0)/\gamma \in \Gamma - H_{x_0}\}$  est minoré par un certain  $\varepsilon' > 0$ . Alors, si l'intersection  $B(\gamma.x_0, \frac{\varepsilon'}{2}) \cap B(\gamma'.x_0, \frac{\varepsilon'}{2})$  est non vide, on a nécessairement

$$d_Y(x_0, \gamma^{-1}.\gamma'.x_0) < \varepsilon'$$

donc  $\gamma^{-1}.\gamma'$  appartient à  $H_{x_0}$  donc  $\gamma'.x_0 = \gamma.x_0$ . Par conséquent, l'intersection  $B(x, \frac{\varepsilon'}{2}) \cap B(x', \frac{\varepsilon'}{2})$  est vide si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $\Gamma.x_0$ . Ainsi, en posant  $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ , nous obtenons, pour tout  $R > 0$

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}(B(x_0, R)) &= \#\{\gamma \in \Gamma/d_Y(x_0, \gamma.x_0) < R\} \\ &= \frac{1}{\mu_Y(B(x_0, \varepsilon))} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ d_Y(x_0, \gamma.x_0) < R}} \mu_Y(B(\gamma.x_0, \varepsilon)) \\ &\leq \frac{1}{\mu_Y(B(x_0, \varepsilon))} \sum_{x \in (\Gamma.x_0 \cap B(x_0, R))} \#\{\gamma \in \Gamma/\gamma.x_0 = x\} \mu_Y(B(x, \varepsilon)) \\ &\leq \frac{\#H_{x_0}}{\mu_Y(B(x_0, \varepsilon))} \sum_{x \in (\Gamma.x_0 \cap B(x_0, R))} \mu_Y(B(x, \varepsilon)) \\ &\leq \frac{\#H_{x_0}}{\mu_Y(B(x_0, \varepsilon))} \mu_Y(B(x_0, R + \varepsilon)), \end{aligned}$$

l'avant-dernière inégalité provenant du fait que  $g.x_0 = \gamma.x_0$  si et seulement si  $\gamma^{-1}g$  appartient à  $H_{x_0}$  et la dernière inégalité provenant du fait que la réunion

disjointe  $\left( \bigcup_{x \in \Gamma.x_0 \cap B(x_0, R)} B(x, \varepsilon) \right)$  est incluse dans la boule  $B(x_0, R + \varepsilon)$ .

Ceci prouve que

$$Ent(Y, d_Y, \mu_{x_0}) \leq Ent(Y, d_Y, \mu_Y)$$

Comme on a déjà montré que  $Ent(Y, d_Y, \mu_Y) \leq Ent(Y, d_Y, \mu_{x_0})$ , ceci permet de conclure que

$$Ent(Y, d_Y, \mu_Y) = Ent(Y, d_Y, \mu_{x_0})$$

En particulier, ceci montre aussi que

$$Ent(Y, d_Y, \mu_x) = Ent(Y, d_Y, \mu_{x_0}) = Ent(Y, d_Y, \mu_Y)$$

pour tout point  $x$  de  $Y$  et toute mesure borélienne  $\mu_Y$  supposée  $\Gamma$ -invariante telle que  $\mu_Y(Y) = +\infty$  et telle que l'adhérence d'au moins un domaine fondamental soit de mesure finie. Ceci et le fait que l'entropie ne dépend pas du choix du centre commun à toutes les boules termine la preuve de la proposition 2.3.  $\square$

### Propriété 2.5.

Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur non compact.

S'il existe un sous-groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $(Y, d_Y)$  qui agit discontinûment et de manière cocompacte et si  $\mu_Y$  est une mesure  $\Gamma$ -invariante sur  $Y$  alors  $\frac{1}{R} \log[\mu_Y(B(x, R))]$  admet une limite finie quand  $R$  tend vers l'infini et, par conséquent,

$$\begin{aligned} Ent(Y, d_Y, \mu_Y) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \mu_Y(B(y, R)) \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \#(B(y, R) \cap \Gamma.y) < +\infty \end{aligned}$$

Avant de démontrer cette proposition, nous rappelons le lemme suivant dont la proposition découle :

### Lemme 2.6. ([Ro], proposition 1.4.10)

Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur non compact et  $x_0$  un point de  $Y$ . Supposons qu'il existe un groupe  $\Gamma$  d'isométries qui agit de manière discontinue et cocompacte sur  $Y$ . Notons  $D$  le diamètre de  $Y/\Gamma$ , plus précisément  $D = \sup_{x, y \in Y} d_Y(y, \Gamma.x)$  et munissons  $\Gamma$  de la semi-distance  $d_{x_0}$  définie par

$d_{x_0}(\gamma, \gamma') = d_Y(\gamma.x_0, \gamma'.x_0)$ . Nous noterons  $B_{d_{x_0}}(e, R)$  l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d_{x_0}(e, \gamma) < R$ .

Soient  $R$  et  $R'$  deux réels positifs tels que  $R + R' > 2D$ .

Alors, l'application

$$\begin{aligned} \rho : B_{d_{x_0}}(e, R) \times B_{d_{x_0}}(e, R') &\longrightarrow \Gamma \\ (\gamma, \gamma') &\longmapsto \gamma\gamma' \end{aligned}$$

est surjective sur  $B_{d_{x_0}}(e, R + R' - 2D)$ .

*Preuve du lemme 2.6.*

Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur.

Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma$  tel que  $d_Y(x_0, \gamma.x_0) = 0$ , comme  $\gamma$  appartient alors trivialement à  $B_{d_{x_0}}(e, R')$ , que  $id$  appartient à  $B_{d_{x_0}}(e, R)$  et que  $\gamma = \gamma \circ id$ , l'élément  $\gamma$  est atteint par  $\rho$ .

Si  $\gamma$  est à présent un élément de  $\Gamma$  tel que  $0 < d(x_0, \gamma.x_0) < R + R' - 2D$ , il

existe un point  $x$  sur une géodésique minimisante reliant  $x_0$  et  $\gamma.x_0$  tel que  $d_Y(x_0, x) < R - D$  et  $d_Y(x, \gamma.x_0) < R' - D$ .

Soit alors  $g$  l'élément de  $\Gamma$  tel que  $d_Y(x, g.x_0) = d_Y(x, \Gamma.x_0)$ .

Comme  $d_Y(x, \Gamma.x_0) \leq D$ , l'inégalité triangulaire prouve que le couple  $(g, g^{-1}.\gamma)$  est un antécédent de  $\gamma$  (pour l'application  $\rho$ ) qui vérifie :

$$\begin{cases} d_Y(x_0, g.x_0) < R \\ d_Y(x_0, g^{-1}.\gamma.x_0) = d_Y(g.x_0, \gamma.x_0) < R' \end{cases}$$

et l'application  $\rho$  est bien surjective sur  $B_{d_{x_0}}(e, R + R' - 2D)$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 2.5.*

Une conséquence immédiate du lemme 2.6 est que, pour tout point  $x$  de  $Y$ , pour tout  $R > 0$  et tout  $R' > 0$ ,

$$\#B_{d_{x_0}}(e, R + R' + 2D) \leq \#B_{d_{x_0}}(e, R + 2D) \cdot \#B_{d_{x_0}}(e, R' + 2D)$$

Ainsi, la fonction  $g$  définie par

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ R &\longmapsto \log \# \left[ B_{d_{x_0}}(e, R + 2D) \right] \end{aligned}$$

est croissante et sous-additive. L'application  $R \longrightarrow \frac{g(R)}{R}$  admet donc une limite quand  $R$  tend vers l'infini. En effet, fixons un réel  $R > 0$  et une suite quelconque de réels  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  qui tend vers l'infini. Notons alors pour tout  $k$ ,  $n(k) = E[\frac{R_k}{R}]$ . Comme  $g$  est croissante et sous-additive,

$$\frac{g(R_k)}{R_k} \leq \frac{g[(n(k) + 1)R]}{n(k)R} \leq \frac{(n(k) + 1)g(R)}{n(k)R}$$

Il vient donc que, pour tout  $R > 0$ ,

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(r)}{r} \leq \frac{g(R)}{R}$$

et, finalement,

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(r)}{r} \leq \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{g(R)}{R}$$

Il en découle que l'application  $R \longrightarrow \frac{g(R)}{R}$  admet une limite quand  $R$  tend vers l'infini et  $Ent(Y, d_Y, \mu_x)$  est une limite pour tout point  $x$  de  $Y$ .

Par ailleurs, nous avons vu dans la preuve de la proposition 2.3 que, pour toute mesure  $\Gamma$ -invariante  $\mu_Y$ , en choisissant convenablement le point  $x_0$  dans  $Y$ , il existe trois réels  $C > 0$ ,  $C' > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que, pour tout  $R > \varepsilon$ ,

$$C' \mu_{x_0}(B(x_0, R - \varepsilon)) \leq \mu_Y(B(x_0, R)) \leq C \mu_{x_0}(B(x_0, R + D)).$$

La quantité  $Ent(Y, d_Y, \mu_Y)$  est donc une limite pour toute mesure borélienne  $\mu_Y$ , pourvu qu'elle soit  $\Gamma$ -invariante.  $\square$

Dans le cas des espaces de longueur, l'entropie peut aussi être définie de la façon suivante :

**Proposition 2.7.**

Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur non compact sur lequel agit de manière cocompacte et discontinue un groupe d'isométries  $\Gamma$ . Soit  $\mu_Y$  une mesure  $\Gamma$ -invariante (telle que  $\mu(Y) = +\infty$  et  $\mu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K$ ). Alors,

$$\text{Ent}(Y, d_Y, \mu_Y) = \inf\{c > 0 / \int_Y e^{-cd_Y(x,y)} d\mu_Y(y) < +\infty\}$$

Une preuve de cette proposition avait déjà été établie dans le cas cocompact par A. Manning (voir [Ma]) dans le cas des variétés riemanniennes et par G. Robert ([Ro], proposition 1.4.7) dans le cas des espaces de longueur. Nous suivons ici la preuve donnée dans [Ro].

*Preuve de la proposition 2.7.*

Notons  $\alpha = \inf\{c > 0 / \int_Y e^{-cd_Y(x,y)} d\mu_Y(y) < +\infty\}$ .

Sous les hypothèses de l'énoncé, en notant  $h$  l'entropie de  $(Y, d_Y, \mu_Y)$ , nous avons l'égalité  $h = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \mu_Y(B(y, R))$  et cette limite peut éventuellement être nulle. Montrons que  $h = \alpha$ .

Remarquons que pour tout réel  $R_0 > 0$ , le théorème de Fubini pour les fonctions positives donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{R_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR \\ &= \int_0^{R_0} \int_{B(x, R)} e^{-cR} d\mu_Y(y) dR \\ &= \int_{B(x, R_0)} \int_{d_Y(x, y)}^{R_0} e^{-cR} dR d\mu_Y(y) \\ &= \frac{1}{c} \int_{B(x, R_0)} e^{-cd_Y(x, y)} d\mu_Y(y) - \frac{1}{c} e^{-cR_0} \mu_Y(B(x, R_0)) \end{aligned}$$

• Premier cas :  $h = 0$ .

Soit  $c$  n'importe quel réel strictement positif et choisissons  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < c$ . Il existe un réel  $r_0$  tel que, pour tout  $R > r_0$ , on ait  $\frac{1}{R} \log \mu_Y[B(x, R)] < \varepsilon$ ,

donc  $\mu_Y(B(x, R)) < e^{\varepsilon R}$ . Soit alors  $R_0 \geq r_0$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{c} \int_{B(x, R_0)} e^{-cd_Y(x, y)} d\mu_Y(y) \\
 = & \int_0^{r_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR + \int_{r_0}^{R_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR \\
 & + \frac{1}{c} e^{-cR_0} \mu_Y(B(x, R_0)) \\
 \leq & \int_0^{r_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR + \int_{r_0}^{R_0} e^{(\varepsilon-c)R} dR \\
 & + \frac{1}{c} e^{(\varepsilon-c)R_0} \\
 \leq & \int_0^{r_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c-\varepsilon}\right) e^{(\varepsilon-c)R_0} + \frac{1}{c-\varepsilon} e^{(\varepsilon-c)r_0}
 \end{aligned}$$

En faisant tendre  $R_0$  vers l'infini, on obtient donc

$$\frac{1}{c} \int_Y e^{-cd_Y(x, y)} d\mu_Y(y) \leq \int_0^{r_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR - \frac{1}{\varepsilon - c} e^{r_0}$$

et l'intégrale  $\int_Y e^{-cd_Y(x, y)} d\mu_Y(y)$  est finie pour tout  $c > 0$ . On en conclut que  $\alpha = 0 = h$ .

• Deuxième cas :  $0 < h < +\infty$ .

Remarquons que dans le cas cocompact, l'entropie est toujours finie.

Pour tout  $c$  strictement supérieur à  $h$ , il existe un réel  $r_0 > 0$  tel que, pour tout  $R \geq r_0$ , on ait

$$\mu_Y(B(x, R)) < e^{\frac{(c+h)}{2}R}$$

ce qui donne

$$e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) < e^{\frac{-(c-h)}{2}R}$$

Ceci implique d'une part que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR$  converge et d'autre part que  $e^{-cR_0} \mu_Y(B(x, R_0))$  tend vers 0 quand  $R_0$  tend vers l'infini. On en déduit la convergence de l'intégrale  $\int_Y e^{-cd_Y(x, y)} d\mu_Y(y)$ . Ainsi,  $c \geq \alpha$ . En faisant tendre  $c$  vers  $h$  par valeurs supérieures, il vient que  $h \geq \alpha$ . De même, pour  $c$  strictement inférieur à  $h$ , il existe  $r_0$  tel que, pour tout  $R \geq r_0$ , on ait  $\mu_Y[B(x, R)] > e^{\frac{c+h}{2}R}$ , donc l'intégrale  $\int_0^{R_0} e^{-cR} \mu_Y(B(x, R)) dR$  tend vers l'infini quand  $R_0$  tend vers l'infini. Par ailleurs,  $e^{-cR_0} \mu_Y(B(x, R_0))$  tend vers l'infini quand  $R_0$  tend vers l'infini, donc, finalement, l'intégrale  $\int_Y e^{-cd_Y(x, y)} d\mu_Y(y)$  diverge. Ceci implique que  $c < \alpha$  et que  $h \leq \alpha$ , ce qui termine la preuve de la proposition 2.7.  $\square$

### 2.1.2 Cas compact

La définition de l'entropie volumique donnée précédemment ne convient évidemment pas pour des espaces métriques mesurés compacts, puisqu'elle

vaut toujours zéro dans ce cas. Nous définissons donc ici *l'entropie volumique d'un espace de longueur mesuré*  $(X, d_X, \mu_X)$  par rapport à l'un de ses revêtements de longueur  $p : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  tel que  $(Y, d_Y)$  soit non compact. Soit  $(X, d_X)$  un espace métrique compact et  $p : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  un revêtement de longueur régulier dont l'espace total  $Y$  est connexe par arcs et non compact. Notons  $\Gamma$  les groupes des automorphismes de revêtement et commençons par vérifier le lemme (très classique) suivant :

**Lemme 2.8.**

*Le groupe  $\Gamma$  est un sous-groupe infini de  $\text{Isom}(Y, d_Y)$  qui agit librement, discontinûment et de manière cocompacte.*

*Preuve du lemme 2.8.*

Le groupe  $\Gamma$  agit librement en vertu du corollaire VII.6.5 de [Go]. L'espace  $Y$  est localement compact car  $X$  est compact (donc localement compact) et localement homéomorphe à  $Y$ . L'espace de longueur  $(Y, d_Y)$  a donc toutes ses boules fermées compactes ([Gr], théorème 1.10). La boule fermée  $B_F(y_0, R)$  est donc recouverte par un nombre fini d'ouverts  $U_i$  trivialisants (i.e. tels que  $p$  soit un homéomorphisme de  $U_i$  sur  $p(U_i)$ ), dont chacun contient au plus un  $\gamma \cdot y_0$ . L'ensemble des  $\gamma$  tels que  $\gamma \cdot y_0$  appartient à  $B_F(y_0, R)$  est donc fini. Par ailleurs, posons  $K = \{y \in Y / \forall \gamma \in \Gamma, d_Y(y, y_0) \leq d_Y(y, \gamma \cdot y_0)\}$ . On a alors

$$\sup_{y \in K} d(y_0, y) \leq \sup_{y \in K} \inf_{\gamma \in \Gamma} d(y, \gamma \cdot y_0) = \text{diam}(X, d_X) := D$$

donc  $K \subset B_F(y_0, D)$  et  $K$  est un compact tel que  $Y = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\gamma \cdot K)$ .

Donc l'action de  $\Gamma$  sur  $Y$  est cocompacte ; de plus, comme  $\gamma K$  est compact pour tout  $\gamma$  et comme  $Y$  est non compact, le groupe  $\Gamma$  est nécessairement infini.  $\square$

Notons à présent  $\mathcal{M}_Y(\Gamma)$  l'ensemble des mesures boréliennes positives  $\mu$  sur  $Y$  qui sont  $\Gamma$ -invariantes et qui vérifient  $\mu(Y) = +\infty$  et  $\mu(K) < +\infty$  pour au moins un domaine fondamental compact  $K$  de l'action de  $\Gamma$ .

Alors, on a la

**Proposition 2.9.**

(i)  $\mathcal{M}_Y(\Gamma)$  est non vide et contient en particulier la mesure  $\mu_x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma \cdot x}$

pour tout point  $x$  de  $Y$ .

(ii) L'invariant  $\text{Ent}(Y, d_Y, \mu)$  est correctement défini si  $\mu$  est une mesure de  $\mathcal{M}_Y(\Gamma)$  et ne dépend pas du choix de la mesure  $\mu$ , pourvu que celle-ci appartienne à  $\mathcal{M}_Y(\Gamma)$ .

*Preuve de la proposition 2.9.*

Le point (i) découle du fait 2.4.

Le point (ii) découle de la propriété 2.3 et des propriétés de l'action de  $\Gamma$  vérifiées dans le lemme 2.8.  $\square$

Cette proposition justifie la définition suivante

**Définition 2.10.**

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur et  $p : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  un revêtement de longueur régulier dont l'espace total  $Y$  est connexe par arcs et non compact et dont le groupe des transformations est noté  $\Gamma$ . On définit l'entropie volumique de  $(X, d_X)$  par rapport au revêtement  $p$  comme l'entropie  $Ent(Y, d_Y, \mu)$ , où  $\mu$  est n'importe quelle mesure qui appartient à  $\mathcal{M}_Y(\Gamma)$

Pour définir de manière canonique l'entropie volumique d'un espace de longueur compact  $(X, d_X)$ , il reste donc à choisir un revêtement régulier particulier de  $(X, d_X)$ . Dans le cas où  $(X, d_X)$  admet un revêtement universel, nous définissons l'entropie par

**Définition 2.11.**

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact (connexe par arcs et localement connexe par arcs) qui admet un revêtement universel  $\pi : (\tilde{X}, d_{\tilde{X}}) \longrightarrow (X, d_X)$ . On appelle entropie volumique de  $(X, d_X)$  et l'on note  $Ent(X, d_X)$ , l'invariant défini par

$$Ent(X, d_X) = \begin{cases} \bullet 0 \text{ si l'espace } \tilde{X} \text{ est compact} \\ \bullet \text{l'entropie de } (X, d_X) \text{ par rapport à son revêtement} \\ \bullet \text{universel si l'espace } \tilde{X} \text{ est non compact} \end{cases}$$

### 2.1.3 Entropie et métrique

Dans cette partie, nous donnons quelques propriétés élémentaires sur le lien entre l'entropie volumique et la distance.

**Propriété 2.12.**

(i) Si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs alors, pour tout  $\lambda > 0$

$$Ent(X, \lambda d_X) = \frac{1}{\lambda} Ent(X, d_X)$$

(ii) Pour toute variété riemannienne non compacte  $(M, g)$  et pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$Ent(M, \lambda^2 g, dv_{\lambda^2 g}) = \frac{1}{\lambda} Ent(M, g, dv_g)$$

*Preuve de la propriété 2.12.*

• **Preuve du point (i) :**

Elle découle du fait que

$$\frac{1}{R} \log [\#\{\gamma \in \Gamma / \lambda d_X(x_0, \gamma.x_0) < R\}] = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{R/\lambda} \log \left[ \#\{\gamma \in \Gamma / d_X(x_0, \gamma.x_0) < \frac{R}{\lambda}\} \right]$$

en passant à la limite inférieure quand  $R$  tend vers l'infini.

• **Preuve du point (ii) :**

Notons  $B_{\lambda^2 g}(R)$  la boule de rayon  $R$  pour la métrique  $\lambda^2 g$ . Si  $n$  est la dimension de  $M$ , alors

$$\begin{aligned} Vol_{\lambda^2 g}(B_{\lambda^2 g}(R)) &= \lambda^n Vol_g(B_{\lambda^2 g}(R)) \\ &= \lambda^n Vol_g(B_g(R/\lambda)) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\log Vol_{\lambda^2 g}(B_{\lambda^2 g}(R))}{R} = \frac{n \log(\lambda)}{R} + \frac{\log Vol_g(B_g(R/\lambda))}{R/\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

On termine la preuve en passant à la limite inférieure quand  $R$  tend vers l'infini.  $\square$

**Propriété 2.13.**

*Soit  $(Y, g)$  une variété riemannienne non compacte sur laquelle agit un groupe d'isométries  $\Gamma$  librement, proprement discontinûment et de manière cocompacte. Le fait que  $Ent(Y, g, dv_g) > 0$  ou  $Ent(Y, g, dv_g) = 0$  ne dépend pas de la métrique riemannienne  $g$  choisie sur  $Y$ , pourvu que cette métrique soit  $\Gamma$ -invariante.*

*Preuve de la propriété 2.13.*

Soit  $g'$  une autre métrique  $\Gamma$ -invariante sur  $Y$ . Comme le groupe  $\Gamma$  agit de manière cocompacte, et que les métriques  $g$  et  $g'$  sont  $\Gamma$ -invariantes, les deux métriques sont équivalentes : il existe alors deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que  $C_1^2 g' \leq g \leq C_2^2 g'$ . En particulier, on a  $C_1 d_{g'} \leq d_g \leq C_2 d_{g'}$ . Il en découle que, pour tout  $R > 0$ ,

$$B_{g'}(x, R/C_2) \subset B_g(x, R) \subset B_{g'}(x, R/C_1)$$

et

$$\frac{1}{C_2} \frac{\log Vol_{g'}(B_{g'}(x, R/C_2))}{R/C_2} \leq \frac{\log Vol_g(B_g(x, R))}{R} \leq \frac{1}{C_1} \frac{\log Vol_{g'}(B_{g'}(x, R/C_1))}{R/C_1}$$

En passant à la limite inférieure quand  $R$  tend vers l'infini, on obtient que

$$\frac{1}{C_2} Ent(Y, g', dv_{g'}) \leq Ent(Y, g, dv_g) \leq \frac{1}{C_1} Ent(Y, g', dv_{g'})$$

Comme l'entropie ne dépend pas de la mesure choisie sur  $Y$  (pourvu qu'elle soit  $\Gamma$ -invariante, de masse totale infinie et qu'il existe au moins un domaine fondamental compact de mesure finie) et que  $dv_g$  et  $dv_{g'}$  sont deux telles mesures, on a finalement

$$\frac{1}{C_2} Ent(Y, g', dv_{g'}) \leq Ent(Y, g, dv_g) \leq \frac{1}{C_1} Ent(Y, g', dv_{g'})$$

ce qui termine la preuve de la propriété 2.13. □

**Fait 2.14.**

*Si l'on considère un espace de longueur non compact  $(X, d)$  sur lequel agit un groupe d'isométries  $\Gamma$  de manière discontinue et cocompacte, alors, pour toute mesure  $\mu$  de masse totale infinie, telle qu'il existe au moins un domaine fondamental compact de mesure finie et  $\Gamma$ -invariante, on a, pour tout point  $x$  de  $X$ ,*

$$Ent(X, d, \mu) = Ent(\Gamma, d_x, \mu_\Gamma)$$

où  $d_x$  est la distance géométrique sur  $\Gamma$  définie par  $d_x(\gamma, \gamma') = d(\gamma.x, \gamma'.x)$  et  $\mu_\Gamma$  est la mesure de comptage définie par  $\mu_\Gamma(A) = \#A$  pour toute partie  $A$  de  $\Gamma$ .

L'entropie mesure donc aussi la croissance exponentielle asymptotique du groupe  $\Gamma$  muni de la distance géométrique  $d_x$ .

*Preuve du fait 2.14.*

Rappelons que  $\mu_x$  est la mesure définie sur  $X$  par  $\mu_x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma.x}$  et que, d'après la propriété 2.3,  $Ent(X, d, \mu) = Ent(X, d, \mu_x)$ . D'autre part,  $Ent(X, d, \mu_x) = Ent(\Gamma, d_x, \mu_\Gamma)$  car  $\mu_x[B_d(x, R)] = \mu_\Gamma[B_{d_x}(e, R)]$ . □

**Exemple 2.15.**

(i) *Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $n$  dont la courbure sectionnelle vérifie  $\sigma = -k^2$ , alors*

$$Ent(M, g, dv_g) = (n - 1)k$$

(ii) *Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne dont la courbure de Ricci vérifie  $Ricci(M, g) \geq -(n-1)k^2g$ , alors, d'après le théorème de R.L. Bishop,*

$$Ent(M, g, dv_g) \leq (n - 1)k$$

## 2.2 Comparaison avec d'autres entropies

Nous nous proposons ici de rappeler quelques liens entre l'entropie volumique et d'autres entropies (topologique et algébrique).

### • Entropie volumique et entropie algébrique du groupe fondamental :

#### Définition 2.16.

Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $S$  un système complet de générateurs (i.e. si  $s$  est un élément de  $S$ , alors  $s^{-1}$  appartient à  $S$ ). Notons  $long_{alg}$  la longueur algébrique associée à  $S$  définie par

$$long_{alg}(s_{i_1} \dots s_{i_p}) = p$$

On définit la distance algébrique  $d_S$  (qui est une distance de longueur) sur le groupe  $\Gamma$  par

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = \min\{long_{alg}(s_{i_1} \dots s_{i_p}) / s_{i_1}, \dots, s_{i_p} \in S \text{ et } s_{i_1} \dots s_{i_p} = \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_2\}$$

On note alors

$$Ent_S(\Gamma) = Ent(\Gamma, d_S, \#)$$

où  $\#$  est la mesure de comptage. Finalement, l'entropie algébrique du groupe  $\Gamma$  est définie par

$$Ent_{alg}(\Gamma) = \inf\{Ent_S(\Gamma) / S \text{ est un système générateur fini complet de } \Gamma\}$$

Rappelons que, comme il l'est noté dans l'exemple 1.19, le groupe  $\Gamma$  muni de la distance  $d_S$  peut être considéré comme un espace de longueur. Comparer l'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte  $(M, g)$  et l'entropie algébrique de son groupe fondamental  $\Gamma$  revient alors à comparer, pour chaque système de générateurs  $S$ , l'entropie de l'espace de longueur (non compact) mesuré  $(\Gamma, d_S, \#)$  et l'entropie de l'espace (non compact) mesuré  $(\Gamma, d_{x_0}, \#)$ , où  $x_0$  est un point quelconque du revêtement universel  $\widetilde{M}$  de  $M$  et  $d_{x_0}$  est la distance géométrique sur  $\Gamma$  définie par

$$d_{x_0}(\gamma, \gamma') = d_{\widetilde{g}}(\gamma.x_0, \gamma'.x_0)$$

M. Gromov a en fait établi le

#### **Théorème 2.17.** (voir [Gr1], théorème 5.16)

Pour toute variété riemannienne compacte  $(M, g)$ , l'entropie algébrique du groupe fondamental de  $(M, g)$  permet de minorer son entropie volumique à l'aide de la formule

$$diam(M, g) Ent(M, g) \geq \frac{1}{2} Ent_{alg}(\pi_1(M))$$

• **Entropie volumique et entropie topologique du flot géodésique :**

Le flot géodésique  $\Phi = (\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  d'une variété riemannienne compacte  $M$  agit sur le fibré unitaire tangent  $T^1M$  de la manière suivante. Si  $v$  est un vecteur, notons  $(c_v(t))_{t \in \mathbb{R}}$  le paramétrage de l'unique géodésique sur  $M$  telle que  $\dot{c}_v(0) = v$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on associe alors à  $v$  le vecteur  $\Phi^t(v) := \dot{c}_v(t)$  tangent à l'instant  $t$  à la géodésique  $(c_v(t))_{t \in \mathbb{R}}$ . C'est un flot différentiable.

Définissons à présent l'entropie topologique  $h_{top}(T)$  d'une transformation continue  $T$  sur un espace compact  $X$ . Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , notons  $N(\mathcal{U})$  le cardinal minimal d'un sous-recouvrement fini de  $X$ . Le raffinement  $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$  de deux recouvrements est le recouvrement formé des ouverts  $U \cap V$ , avec  $U \in \mathcal{U}$  et  $V \in \mathcal{V}$ . On pose  $T^{-1}\mathcal{U} = \{T^{-1}U / U \in \mathcal{U}\}$  et, pour  $n \geq 1$ , on note

$$N_n(T, \mathcal{U}) := N(\mathcal{U} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{U})$$

L'entropie de  $T$  pour le recouvrement  $\mathcal{U}$  est donnée par

$$h_{top}(T, \mathcal{U}) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N_n(T, \mathcal{U})$$

et l'entropie topologique de  $T$  est définie par

$$h_{top}(T) = \sup\{h_{top}(T, \mathcal{U}) / \mathcal{U} \text{ recouvrement ouvert de } X\}$$

L'entropie topologique d'une transformation continue  $T$  vérifie la propriété d'homogénéité  $h_{top}(T^n) = |n|h_{top}(T)$ . Il est alors naturel de définir l'entropie topologique du flot géodésique par

$$h_{top}(\Phi) := h_{top}(\Phi^1)$$

A. Manning a établi le théorème de comparaison suivant :

**Théorème 2.18.** (*[Ma], théorèmes 1 et 2*)

*Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte et soit  $\Phi = (\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot géodésique sur  $T^1M$ . Alors,*

$$h_{top}(\Phi) \geq Ent(M, g)$$

*De plus, si  $(M, g)$  est de courbure sectionnelle négative ou nulle,*

$$h_{top}(\Phi) = Ent(M, g)$$

### 2.3 Comparaison avec la courbure de Ricci

Un autre moyen fréquemment utilisé pour contrôler le volume des boules sur une variété riemannienne est de faire des hypothèses du type "courbure

bornée". Il est donc intéressant de comparer les hypothèses "minoration de la courbure de Ricci" et "majoration de l'entropie volumique".

Une première remarque évidente consiste à dire que l'entropie est définie sur tout espace métrique mesuré non compact ou sur tout espace de longueur compact qui admet un revêtement universel. En fait, l'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte ne "voit" pas la structure différentielle de cette variété. Plus précisément, la remarque (quasi-triviale) suivante est la base des constructions que nous allons faire dans ce chapitre :

**Remarque 2.19.**

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte,  $p : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$  son revêtement riemannien universel et  $x_0$  un point quelconque de  $M$ . Fixons deux constantes réelles positives quelconques  $\varepsilon$  et  $C$ . Notons  $d_{\widetilde{x}_0}$  la distance induite par  $d_{\widetilde{g}}$  sur  $p^{-1}(x_0)$  et  $\mu$  la mesure de comptage (i.e.  $\mu(A) = \#(A \cap p^{-1}(x_0))$ ). On a alors

$$Ent(M, g) = Ent(p^{-1}(x_0), d_{\widetilde{x}_0}, \mu)$$

De plus, pour toute distance  $d'$  sur  $p^{-1}(x_0)$  qui vérifie

$$(1 + \varepsilon)^{-1}d_{\widetilde{x}_0} - C \leq d' \leq (1 + \varepsilon)d_{\widetilde{x}_0} + C$$

on a

$$\frac{1}{1 + \varepsilon}Ent(M, g) \leq Ent(p^{-1}(x_0), d', \mu) \leq (1 + \varepsilon)Ent(M, g)$$

*Preuve de la remarque 2.19.*

Notons  $\Gamma$  le groupe des transformations du revêtement universel, il agit proprement discontinûment sans point fixe sur  $\widetilde{M}$ . En fixant un point  $\widetilde{x}_0$  dans  $p^{-1}(x_0)$ , on a  $p^{-1}(x_0) = \Gamma.\widetilde{x}_0$  et  $\mu = \mu_{\widetilde{x}_0}$ , où  $\mu_{\widetilde{x}_0}$  est la mesure  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma.\widetilde{x}_0}$  qu'on considérera comme définie simultanément sur  $p^{-1}(x_0)$  et sur  $\widetilde{M}$ .

Le fait que  $\#\{\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0) / d_{\widetilde{g}}(\widetilde{x}, \widetilde{x}_0) < R\}$  soit égal à  $\mu_{\widetilde{x}_0}[B(\widetilde{x}_0, R)]$  implique que

$$Ent(p^{-1}(x_0), d_{\widetilde{x}_0}, \mu) = Ent(\widetilde{M}, \widetilde{g}, dv_{\widetilde{g}}) = Ent(M, g)$$

ce qui prouve la première inégalité.

La double inégalité se prouve en remarquant que l'hypothèse faite sur  $d'$  implique que

$$B_{d_{\widetilde{x}_0}}\left(\frac{R - C}{1 + \varepsilon}\right) \subset B_{d'}(\widetilde{x}_0, R) \subset B_{d_{\widetilde{x}_0}}((1 + \varepsilon)(R + C))$$

où les boules sont prises dans  $p^{-1}(x_0)$ . Ceci donne un encadrement de  $\frac{1}{R} \log(\mu[B_{d'}(\widetilde{x}_0, R)])$ . On conclut en passant à la limite inférieure dans les trois membres de l'inégalité.  $\square$

Il est clair que supposer l'entropie majorée est une hypothèse plus faible que d'exiger que la courbure de Ricci soit minorée : plus précisément, le théorème de R.L. Bishop prouve que, si la courbure de Ricci a toutes ses valeurs propres minorées par  $-(n-1)K_0^2$ , alors le volume de toute boule de rayon  $R$  du revêtement universel est majoré par le volume de la boule de même rayon dans l'espace simplement connexe de courbure sectionnelle constante et égale à  $-K_0^2$ , donc par

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^R \left( \frac{\text{sh}(K_0 t)}{K_0} \right)^{n-1} dt$$

En appliquant ce théorème aux boules de grand rayon, on en déduit que toute variété riemannienne dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(n-1)K_0^2$  a son entropie majorée par  $(n-1)K_0$ .

Il reste à savoir si l'hypothèse "Entropie majorée" est *significativement* plus faible que l'hypothèse "courbure de Ricci minorée". Une première manière de s'en convaincre et de remarquer que la seconde hypothèse implique que le volume de *toutes* les boules, quel que soit leur rayon, est majoré, alors que la première hypothèse est un contrôle asymptotique très faible (beaucoup plus faible, par exemple, que la donnée d'un équivalent) du volume des boules de rayon  $R$  (l'exemple 2.33 qui suit prouve que, sur la famille des variétés riemanniennes compactes d'entropie et de diamètre uniformément majorés, le comportement du volume des boules (sur le revêtement universel) de rayon  $R$  inférieur au diamètre est à peu près arbitraire). Ce phénomène est illustré par le fait que l'entropie peut être majorée par une intégrale de la courbure de Ricci, citons par exemple le résultat de [Ga2] (théorème 1 (ii) en posant  $H = \{x\}$  et  $s = 0$ ) :

**Théorème 2.20.** ([Ga2])

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour toute variété riemannienne  $(Y, g)$  complète et non compacte, on a, pour tout  $y \in Y$

$$\text{Ent}(Y, d_g, dv_g) \leq C(n, \varepsilon) \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\text{Vol}[B(y, R)]} \int_{B(y, R)} r_-^{(n+\varepsilon)/2} \right)^{1/(n+\varepsilon)}$$

où  $r(x)$  est la plus petite valeur propre du tenseur de courbure de Ricci sur l'espace  $T_x Y$  et où  $r_-(x) := \max(0, -r(x))$  est sa partie négative.

Les exemples 2.31, 2.33 et 2.29 qui suivent prouvent également que les résultats de J. Cheeger et T. Colding (voir [CC1], théorème A.112 et [Co], théorème 0.1) "stabilité de la structure différentiable et continuité du volume" (pour une suite de variétés de courbure de Ricci minorée qui convergent vers une variété de même dimension) et le théorème de précompacité de M. Gromov (voir [Gr], théorème 5.3)(pour l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de courbure de Ricci minorée et de diamètre borné), ne sont plus

valables si l'on remplace l'hypothèse "courbure de Ricci minorée" par l'hypothèse "entropie majorée". Ceci est dû au fait (illustré par la proposition 2.24 et les exemples qui suivent) que l'entropie est (à une constante additive  $\pm\varepsilon$  près) insensible à des variations drastiques de la métrique ou de la topologie, alors même que ces variations sont impossibles en courbure de Ricci minorée.

## 2.4 Entropie et variations locales de la métrique

Dans cette section, nous nous consacrons à l'étude des variations de l'entropie lorsque l'on modifie localement la métrique (même de manière significative). On sait que la courbure de Ricci réagit très mal à ce genre de phénomènes. Nous vérifions ici que l'entropie est beaucoup plus souple.

Si  $(X, d_1)$  est un espace de longueur et  $d_2$  est une autre distance de longueur sur  $X$ , supérieure à  $d_1$ , on remarque que  $Ent(X, d_2)$  est inférieure à  $Ent(X, d_1)$ .

Dans un premier temps, nous présentons une généralisation classique de ce phénomène : dans la première partie, nous comparons les entropies de deux espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  quand il existe une application contractante  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  qui induit un morphisme injectif entre  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(Y, f(x))$ .

Remarquons ensuite que, pour construire deux espaces de longueur compacts dont les entropies sont proches, il suffit de construire deux espaces qui ont même groupe fondamental et dont les distances (sur le revêtement universel) entre deux points quelconques de l'orbite sont "proches". C'est en particulier le cas si l'on part d'une variété riemannienne et que l'on fait exploser la métrique sur des boules dont le bord est de petit diamètre (on ne modifie pas beaucoup la distance entre deux points qui n'appartiennent pas aux boules). La proposition 2.24 et les exemples qui suivent reposent sur cette remarque.

### 2.4.1 Entropie et applications contractantes

#### Proposition 2.21.

*Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur non compacts. Soit  $\Gamma_X$  (resp.  $\Gamma_Y$ ) un groupe qui agit par isométries sur  $(X, d_X)$  (resp. sur  $(Y, d_Y)$ ) librement, proprement discontinûment et de manière cocompacte. Supposons qu'il existe un morphisme injectif  $\rho : \Gamma_Y \longrightarrow \Gamma_X$ , deux mesures  $\mu_Y$  et  $\mu_X$  (respectivement  $\Gamma_Y$ -invariante et  $\Gamma_X$ -invariante) et une application  $f : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  contractante et  $\rho$ -équivariante. Alors,*

$$Ent(Y, d_Y, \mu_Y) \leq Ent(X, d_X, \mu_X)$$

*Preuve de la proposition 2.21.*

Rappelons que, sous ces hypothèses, les entropies volumiques de  $(X, d_X, \mu_X)$

et  $(Y, d_Y, \mu_Y)$  peuvent être définies par (voir la proposition 2.7) :

$$Ent(Z, d_Z, \mu_Z) = \inf\{c > 0 / \int_Z e^{-cd_Z(x,y)} d\mu_Z(y) < +\infty\}$$

(où  $Z$  est soit  $X$ , soit  $Y$ ). Comme par ailleurs l'entropie ne dépend pas de la mesure  $\Gamma_Z$ -invariante choisie, en prenant pour mesure la mesure orbitale définie par  $\mu_z = \sum_{\gamma \in \Gamma_Z} \delta_{\gamma.z}$  (où  $z$  est un point quelconque de  $Z$ ), nous avons également l'égalité

$$Ent(Z, d_Z, \mu_Z) = \inf\{c > 0 / \sum_{\gamma \in \Gamma_Z} e^{-cd_Z(z, \gamma.z)} < +\infty\}$$

Comme l'action de  $\Gamma$  est cocompacte, l'entropie de  $(X, d_X, \mu_X)$  est finie. Fixons un point  $y$  de  $Y$  et un réel  $c$  strictement positif et strictement supérieur à  $Ent(X, d_X, \mu_X)$ , ce qui implique que  $\sum_{\gamma \in \Gamma_X} e^{-cd_X(f(y), \gamma.f(y))} < +\infty$ .

Comme  $\rho$  est injectif,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_X} e^{-cd_X(f(y), \gamma.f(y))} \geq \sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_X(f(y), \rho(\gamma).f(y))}$$

Par ailleurs,  $f$  est  $\rho$ -équivariante, donc

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_X(f(y), \rho(\gamma).f(y))} \geq \sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_X(f(y), f(\gamma.y))}$$

et finalement, comme  $f$  est contractante,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_X(f(y), f(\gamma.y))} \geq \sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_Y(y, \gamma.y)}$$

Finalement,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_X} e^{-cd_X(f(y), \gamma.f(y))} \geq \sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_Y(y, \gamma.y)}$$

En particulier,  $\sum_{\gamma \in \Gamma_Y} e^{-cd_Y(y, \gamma.y)} < +\infty$  donc  $c > Ent(Y, d_Y, \mu_Y)$ .

Puisque cette inégalité reste vraie pour tout  $c > Ent(X, d_X, \mu_X)$ , on conclut que  $Ent(Y, d_Y, \mu_Y) \leq Ent(X, d_X, \mu_X)$ . □

Un corollaire de cette proposition est le résultat suivant :

**Corollaire 2.22.**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur compacts qui possèdent des revêtements de longueur réguliers  $p_X : (\bar{X}, d_{\bar{X}}) \longrightarrow (X, d_X)$  et

$p_Y : (\bar{Y}, d_{\bar{Y}}) \longrightarrow (Y, d_Y)$ . Supposons qu'il existe une application  $f : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  contractante qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) pour au moins un point  $y_0$  de  $Y$ , pour un élément  $\bar{y}_0$  de  $p_Y^{-1}(y_0)$  et un point  $\bar{x}_0$  dans  $p_X^{-1}[f(y_0)]$ ,

$$f_*[(p_Y)_*(\pi_1(\bar{Y}, \bar{y}_0))] \subset (p_X)_*(\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0))$$

(ii) le morphisme  $\rho : \Gamma_Y \longrightarrow \Gamma_X$  induit par  $f$  entre les groupes de transformations de revêtement est injectif. Alors,

$$Ent_{(\bar{Y}, d_{\bar{Y}})}(Y, d_Y) \leq Ent_{(\bar{X}, d_{\bar{X}})}(X, d_X)$$

Avant de démontrer le corollaire 2.22, nous allons rappeler le lemme classique suivant :

**Lemme 2.23.**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur compacts.

Soit  $p_X : (\bar{X}, d_{\bar{X}}) \longrightarrow (X, d_X)$  (resp.  $p_Y : (\bar{Y}, d_{\bar{Y}}) \longrightarrow (Y, d_Y)$ ) un revêtement de longueur régulier de  $(X, d_X)$  (resp. de  $(Y, d_Y)$ ). Alors toute application contractante entre  $(Y, d_Y)$  et  $(X, d_X)$  qui vérifie la condition (i) du corollaire 2.22 induit un morphisme  $\rho : \Gamma_Y \longrightarrow \Gamma_X$  et se relève en une application contractante et  $\rho$ -équivariante entre  $(\bar{Y}, d_{\bar{Y}})$  et  $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$ .

*Preuve du lemme 2.23.*

Soit  $f : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  une application contractante, elle est en particulier continue. Comme elle vérifie l'hypothèse (i) du corollaire 2.22, d'après le lemme IX.3.2 de [Go], le morphisme  $f_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, f(x_0))$  passe au quotient en un morphisme de  $\pi_1(Y, y_0)/(p_Y)_*(\pi_1(\bar{Y}, \bar{y}_0))$  (égal à  $\Gamma_Y$ , d'après le corollaire IX.4.5 de [Go]) sur  $\pi_1(X, f(x_0))/(p_X)_*(\pi_1(\bar{X}, \bar{x}_0))$  (égal à  $\Gamma_X$ ). De plus, le théorème IX.3.2 de [Go] implique qu'il existe une application  $\bar{f} : \bar{Y} \longrightarrow \bar{X}$  continue telle que  $\bar{f}(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$  et  $f \circ p_Y = p_X \circ \bar{f}$ .

Soient maintenant  $\bar{x}$  et  $\bar{x}'$  deux points de  $\bar{Y}$  et  $\bar{c}$  une courbe minimisante (pour  $d_{\bar{Y}}$ ) entre ces deux points, paramétrée par  $[0, 1]$ , dont la projection par  $p_Y$  sera notée  $c$ . Alors  $\bar{f} \circ \bar{c}$  est une courbe qui relie  $\bar{f}(\bar{x})$  et  $\bar{f}(\bar{x}')$  et, comme  $(\bar{X}, d_{\bar{X}})$  est un espace de longueur,  $d_{\bar{X}}(\bar{f}(\bar{x}), \bar{f}(\bar{x}')) \leq \text{long}(\bar{f} \circ \bar{c})$ .

Par ailleurs, comme le revêtement  $p_Y$  est une isométrie locale,

$$\text{long}_{d_{\bar{Y}}}(\bar{c}) = \text{long}_{d_Y}(p_Y \circ \bar{c}) \geq \text{long}_{d_X}(f \circ p_Y \circ \bar{c})$$

D'autre part,

$$\text{long}_{d_{\bar{X}}}(\bar{f} \circ \bar{c}) = \text{long}_{d_X}(p_X \circ \bar{f} \circ \bar{c}) = \text{long}_{d_X}(f \circ p_Y \circ \bar{c})$$

car  $f \circ p_Y = p_X \circ \bar{f}$  par la construction ci-dessus. On en déduit que

$$\text{long}_{d_{\bar{Y}}}(\bar{c}) \geq \text{long}_{d_{\bar{X}}}(\bar{f} \circ \bar{c})$$

donc que

$$d_{\bar{Y}}(\bar{x}, \bar{x}') \geq d_{\bar{X}}(\bar{f}(\bar{x}), \bar{f}(\bar{x}'))$$

ce qui prouve que le relevé  $\bar{f}$  de  $f$  est contractant.  $\square$

*Preuve du corollaire 2.22.*

Si  $\bar{X}$  est compact, le groupe de revêtement  $\Gamma_X$  est fini donc  $\Gamma_Y$  est fini. Ceci implique que  $\bar{Y}$  est compact et  $Ent_{(\bar{Y}, d_{\bar{Y}})}(Y, d_Y) = Ent_{(\bar{X}, d_{\bar{X}})}(X, d_X) = 0$ .

Si  $\bar{X}$  est non compact, en utilisant le lemme 2.23, on peut relever  $f$  en une application  $\bar{f} : (\bar{Y}, d_{\bar{Y}}) \longrightarrow (\bar{X}, d_{\bar{X}})$  contractante et  $\rho$ -équivariante. Par ailleurs, les groupes de transformations de revêtement  $\Gamma_Y$  et  $\Gamma_X$  agissent librement et de manière totalement discontinue et cocompacte sur  $\bar{Y}$  et  $\bar{X}$ . En appliquant alors la proposition 2.21, on obtient l'inégalité  $Ent(\bar{Y}, d_{\bar{Y}}, \mu_{\bar{y}}) \leq Ent(\bar{X}, d_{\bar{X}}, \mu_{\bar{f}(\bar{y})})$ . On conclut en appliquant la définition des entropies des espaces de longueur compacts  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  associées aux revêtements respectifs  $p_Y$  et  $p_X$ . □

## 2.4.2 Cas des variétés riemanniennes

Nous étudions ici le comportement de l'entropie lorsque l'on modifie la métrique (même significativement) sur une petite boule. Nous établissons la

### Proposition 2.24.

*Fixons deux réels strictement positifs  $\delta$  et  $K$ . Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne compacte, connexe de dimension  $m$  supérieure ou égale à 3, de rayon d'injectivité  $\delta > 0$  et de courbure sectionnelle  $|\sigma| \leq K^2$ .*

*Soit  $(B(x_k, \varepsilon_k))_{k \in \{1..n\}}$  une famille finie de boules ouvertes dont le rayon  $\varepsilon_k$  vérifie*

$$(i) \ \varepsilon_k \leq \min\left\{\frac{1}{K}, \frac{\delta}{2\pi}\right\},$$

*(ii) les boules  $(B(x_k, 5\varepsilon_k))_{k \in \{1..n\}}$  sont disjointes.*

*Pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ , fixons un réel  $L_k > 2\varepsilon'_k$  où*

$$\varepsilon'_k := (1 + (K\varepsilon_k)^2)\pi\varepsilon_k.$$

*On construit la variété riemannienne  $(X', g_{X'})$  en recollant sur*

$X \setminus \left( \bigcup_{k \in \{1..n\}} B(x_k, \varepsilon_k) \right)$  *un cylindre  $\partial B(x_k, \varepsilon_k) \times [0, L_k]$  le long de chaque*

$\partial B(x_k, \varepsilon_k)$  *(en identifiant  $\partial B(x_k, \varepsilon_k)$  et  $\partial B(x_k, \varepsilon_k) \times \{0\}$ ) et, au bout de chaque cylindre, une variété simplement connexe  $M_k$ . On a alors*

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{2\delta - \varepsilon'_k} \right)^{-1} Ent(X, g_X) \leq Ent(X', g_{X'}) \leq Ent(X, g_X)$$

### Quelques précisions sur le recollement de deux variétés :

Soient  $(X, g)$  et  $(M, h)$  deux variétés riemanniennes et  $x$  et  $y$  deux points respectifs de  $X$  et  $M$ . Soit  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  et  $L$  trois nombres réels positifs quelconques qui vérifient  $L > 2\varepsilon' > 0$  et  $\varepsilon < \min\{inj_M(y), inj_X(x)\}$ , où  $inj_M(y)$  est le rayon d'injectivité de  $(M, h)$  au point  $y$ .

Si on excise de  $X$  (resp. de  $M$ ) la boule  $B_X$  de centre  $x$  (resp. la boule  $B_M$

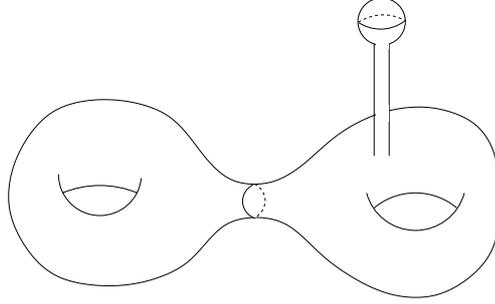


FIG. 2.1 – Exemple de variété dont l'entropie est majorée

de centre  $y$ ) de rayon  $\varepsilon$  et qu'on recolle  $X \setminus B_X$  et  $M \setminus B_M$  aux deux bouts du cylindre  $C = [0, L] \times \partial B_X$  (en identifiant  $\{0\} \times \partial B_X$  avec  $\partial B_X$  et  $\{L\} \times \partial B_X$  avec  $\partial B_M$  puisque  $\partial B_X$  et  $\partial B_M$  sont difféomorphes), on obtient une nouvelle variété  $C^\infty$ , notée  $X'$ , qu'on munit de la métrique  $g'$  qui coïncide

- avec  $g$  sur  $X \setminus B_X$ ,
- avec  $h$  sur  $M \setminus B_M$ ,
- avec  $(dr)^2 + g|_{\partial B_X}$  sur la partie  $[0, \varepsilon'[\times \partial B_X$  du cylindre
- avec  $(dr)^2 + g|_{\partial B_M}$  sur la partie  $]L - \varepsilon', L] \times \partial B_M$

(ici,  $g|_{\partial B_X}$  et  $h|_{\partial B_M}$  désignent les métriques induites par  $g$  et  $h$  sur les sous-variétés riemanniennes  $\partial B_X$  et  $\partial B_M$  de  $X$  et  $M$  respectivement). Le recollement entre les deux dernières métriques sur le cylindre pouvant se faire (par exemple) en choisissant une fonction  $C^\infty$

$$\varphi : [0, L] \longrightarrow [0, 1]$$

égale à 0 sur  $[0, \varepsilon'[\$  et à 1 sur  $]L - \varepsilon', L]$  et en définissant  $g'$ , au point  $(r, x)$  de  $[0, L] \times \partial B_X$  par

$$g' = (dr)^2 \oplus [(1 - \varphi(r))g_{\partial B_X} + \varphi(r).h_{\partial B_M}]$$

La métrique  $g'$  ainsi obtenue est seulement  $C^0$ , mais est la limite  $C^0$  d'une suite de métriques  $g'_n$  de classe  $X^\infty$  telles que  $Ent(X', g'_n) \longrightarrow Ent(X', g')$ .

Nous avons déjà remarqué que, pour comparer l'entropie de deux espaces compacts  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , il faut pouvoir comparer la structure algébrique de leurs groupes d'automorphismes du revêtement universel, puis la manière dont ces groupes déplacent les points, c'est-à-dire qu'il faut s'assurer que l'on n'a pas trop modifié la distance du revêtement universel en réalisant la construction. Avant de montrer la proposition 2.24, nous commençons par vérifier que nous ne modifions pas le groupe fondamental (lemme 2.25) puis nous majorons le diamètre du bord des boules excisées (en tant que sous-variétés riemanniennes), majoration dont nous aurons besoin pour comparer les distances  $d_{\tilde{X}}$  et  $d_{\tilde{X}'}$ .

**Lemme 2.25.**

Si  $X$  est une variété de dimension  $m \geq 2$ , les groupes fondamentaux de  $X$  et  $X'$  sont isomorphes et cet isomorphisme  $f_*$  est induit par l'application continue  $f : X' \rightarrow X$  qui consiste à envoyer

- la partie  $M_k$  sur le point  $\{x_k\}$ ,
- le cylindre  $\partial B(x_k, \varepsilon_k) \times ]0, L_k[$  sur  $B(x_k, \varepsilon_k) \setminus \{x_k\}$
- $X_0 = X \setminus \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon_k)$  sur lui-même par l'identité .

*Preuve du lemme 2.25.*

En dimension 2, la seule variété riemannienne compacte simplement connexe est la sphère  $\mathbb{S}^2$  et la somme connexe  $X \# \mathbb{S}^2$  est homéomorphe à  $X$ . Le lemme 2.25 est alors trivialement vérifié dans ce cas.

Supposons donc que la dimension de  $X$  est supérieure ou égale à 3.

Notons  $p : (\tilde{X}, \tilde{g}) \rightarrow (X, g)$  le revêtement universel de  $(X, g)$ . Fixons des relevés  $\tilde{B}_k$  de chaque boule  $B_k$  et notons  $\tilde{X}_0$  l'espace  $\tilde{X} \setminus \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{\gamma \in \Gamma_X} \gamma(\tilde{B}_k)$ .

Notons  $C_k$  le  $k^{\text{ième}}$  élément recollé, c'est-à-dire le cylindre  $\partial B(x_k, \varepsilon_k) \times ]0, L_k[$  sur lequel on a recollé la variété simplement connexe  $M_k$ .

Soit  $\tilde{X}'$  l'espace de longueur obtenu en recollant, pour chaque  $k \in \{1..n\}$ , l'élément  $C_k$  le long de chaque  $\gamma(\partial \tilde{B}_k)$  (où  $\gamma$  parcourt  $\Gamma_X$ ) sur  $\tilde{X}_0$ . Puisque toutes les boules excisées sur  $X$  sont de rayon inférieur au rayon d'injectivité de  $X$ , l'espace de longueur  $(\tilde{X}', d_{\tilde{X}'})$  est localement isométrique à  $(X', d_{X'})$  et est un revêtement de longueur de  $(X', d_{X'})$  dont le groupe de revêtement est également  $\Gamma_X$ . Il nous suffit donc de vérifier que  $\tilde{X}'$  est simplement connexe car, si c'est effectivement le cas,  $\tilde{X}'$  est le revêtement universel de  $X'$  et son groupe de revêtement (isomorphe à  $\Gamma_X$  donc isomorphe à  $\pi_1(X)$ ) est isomorphe au groupe fondamental de  $X'$ , ce qui terminera la preuve du lemme 2.25.

Considérons donc un lacet  $\gamma : [a, b] \rightarrow \tilde{X}'$  sur  $\tilde{X}'$  de point-base  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$  et montrons qu'il est homotope à zéro.

Pour tous les  $0 \leq \alpha < \beta \leq L$ , notons  $C_{(\alpha, \beta)}^{k, \gamma}$  la portion du cylindre que l'on a recollé à  $\gamma \cdot \partial \tilde{B}_k$ , i.e.

$$C_{(\alpha, \beta)}^{k, \gamma} = \gamma(\partial \tilde{B}_k) \times (\alpha, \beta)$$

Notons

$$C_{(\alpha, \beta)} := \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{\gamma \in \Gamma_X} C_{(\alpha, \beta)}^{k, \gamma}$$

Posons, pour  $\varepsilon \ll \frac{L}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\varepsilon &= \tilde{X}_0 \cup C_{[0, \varepsilon[} & ; & \tilde{X}_L = \tilde{X}_0 \cup C_{[0, L[} \\ \tilde{M}_\varepsilon &= \tilde{X}' \setminus \left( \tilde{X}_0 \cup C_{[0, L-\varepsilon[} \right) & ; & \tilde{M}_\varepsilon = \tilde{X}' \setminus \tilde{X}_0 \\ \tilde{C} &= C_{]0, L[} \end{aligned}$$

Si l'image de  $\gamma$  est entièrement incluse dans  $\widetilde{X}_L$  ou dans  $\widetilde{M}_L$ ,  $\gamma$  est homotope à zéro car, en dimension supérieure ou égale à 3, une variété simplement connexe privée d'une boule de rayon inférieur au rayon d'injectivité reste simplement connexe.

Si l'image de  $\gamma$  rencontre  $\widetilde{C}$ , chacun des ouverts  $\gamma^{-1}(\widetilde{X}_\varepsilon)$ ,  $\gamma^{-1}(\widetilde{M}_\varepsilon)$  et  $\gamma^{-1}(\widetilde{C})$  est une réunion de composantes connexes qui sont tous des ouverts de  $[a, b]$  et dont un nombre fini  $I_1, \dots, I_k$  suffit pour recouvrir  $[a, b]$ . Notons  $I_{r_1}, \dots, I_{r_p}$  ceux de ces intervalles qui sont inclus dans  $\gamma^{-1}(\widetilde{M}_\varepsilon)$ .

Chaque  $I_{r_j}$  s'écrit  $]a_j, b_j[$  (car  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à  $I_{r_j}$ ) et  $\gamma(a_j)$  et  $\gamma(b_j)$  appartiennent à la frontière d'une même composante connexe de  $\widetilde{M}_\varepsilon$  (puisque  $\gamma(]a_j, b_j[)$  est connexe et inclus dans  $\widetilde{M}_\varepsilon$  et que  $]a_j, b_j[$  est une composante connexe de  $\gamma^{-1}(\widetilde{M}_\varepsilon)$ ). Les points  $\gamma(a_j)$  et  $\gamma(b_j)$  appartiennent donc à un même cercle  $\gamma(\partial\widetilde{B}_k) \times \{L - \varepsilon\}$  d'un des cylindres qui constituent  $\widetilde{C}$ . La géodésique minimisante  $c_j$  qui, dans ce cylindre, joint  $\gamma(a_j)$  à  $\gamma(b_j)$  est homotope à  $\gamma(]a_j, b_j[)$  (où l'homotopie se fait dans  $\widetilde{M}_L$ ). On obtient un lacet homotope à  $\gamma$  en remplaçant  $\gamma$  par  $c_j$  sur chacun des intervalles  $[a_j, b_j]$ . Après ces transformations, on obtient un lacet homotope à  $\gamma$  et entièrement contenu dans  $\widetilde{X}_L$ , donc homotope à zéro, ce qui termine la preuve du lemme 2.25.  $\square$

**Lemme 2.26.**

Si  $K\varepsilon_k \leq 1$ , le diamètre du bord  $\partial B_k$  de la boule  $B(x_k, \varepsilon_k)$  (en tant que sous-variété riemannienne de  $(X, g)$ ) est inférieur à  $\varepsilon'_k := (1 + (K\varepsilon_k)^2)\pi\varepsilon_k$ .

*Preuve du lemme 2.26.*

Par le théorème de Rauch, si  $g_0$  est la métrique euclidienne sur l'espace tangent  $T_{x_k}X$ , on a l'inégalité

$$\exp_{x_k}^* g \leq \left( \frac{\text{sh}(K\varepsilon_k)}{K\varepsilon_k} \right)^2 g_0$$

Comme par ailleurs  $\text{diam}_g(\partial B_k) = \text{diam}_{\exp_{x_k}^* g}(\partial B(0, \varepsilon_k))$  (où  $B(0, \varepsilon_k)$  est la boule de centre 0 et de rayon  $\varepsilon_k$  de  $T_{x_k}X$ ), on en déduit que

$$\text{diam}_g(\partial B_k) \leq \left( \frac{\text{sh}(K\varepsilon_k)}{K\varepsilon_k} \right) \pi\varepsilon_k \leq (1 + (K\varepsilon_k)^2)\pi\varepsilon_k := \varepsilon'_k$$

la dernière inégalité étant valable si  $K\varepsilon_k \leq 1$ .  $\square$

**Lemme 2.27.**

Soit  $X$  une variété riemannienne compacte de dimension  $m \geq 3$ .

Notons  $X_0$  le sous-ensemble  $X \setminus \left( \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon_k) \right)$  de  $X$ , que l'on munit de la

distance de longueur  $d_0(x, y)$  définie comme l'infimum des longueurs (mesurées relativement à  $d$ ) des courbes  $c$  (de classe  $C^1$  par morceaux) qui joignent

$x$  à  $y$  dans  $X_0$ .

Notons  $(Y_0, d_{Y_0})$  le revêtement de  $(X_0, d_0)$  défini par

$$Y_0 = \tilde{X} \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma_X} \left( \bigcup_{k \in \{1..n\}} \gamma.B(\tilde{x}_k, \varepsilon_k) \right)$$

(où les  $\tilde{x}_k$  sont des relevés fixés des  $x_k$ ), muni de la distance de longueur naturelle  $d_{Y_0}$ .

Sous les hypothèses de la proposition 2.24 on a

$$\begin{aligned} \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{2\delta - \varepsilon'_k} \right)^{-1} Ent(X, d_X) &\leq Ent_{(Y_0, d_{Y_0})}(X_0, d_0) \\ &\leq Ent(X, d_X) \end{aligned}$$

**Remarque 2.28.**

Dans le revêtement universel  $(\tilde{X}, \tilde{g})$  de  $(X, g)$ , tous les domaines de la forme  $\gamma.B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k)$  (pour  $\gamma$  appartenant à  $\Gamma$  et  $k$  appartenant à  $\{1, \dots, n\}$ ) sont disjoints. Par suite, si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux éléments distincts de  $\Gamma$ ,

$$d_{\tilde{X}}[\gamma.B(\tilde{x}_k, \varepsilon_k), \gamma'.B(\tilde{x}_{k'}, \varepsilon_{k'})] > \frac{1}{2}(\varepsilon'_k + \varepsilon'_{k'})$$

*Preuve de la remarque 2.28.*

Supposons en effet qu'il existe  $k$  et  $k'$  appartenant à  $\{1..n\}$  et deux éléments  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $\Gamma$  tels que l'intersection  $\gamma(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k)) \cap \gamma'(B(\tilde{x}_{k'}, 5\varepsilon_{k'}))$  soit non vide. Si  $y$  est un point dans cette intersection,  $p_X(y)$  est alors dans l'intersection  $B(x_k, 5\varepsilon_k) \cap B(x_{k'}, 5\varepsilon_{k'})$ . Comme les boules  $B(x_k, 5\varepsilon_k)$  et  $B(x_{k'}, 5\varepsilon_{k'})$  sont supposées disjointes, on a nécessairement  $k = k'$ .

Si, maintenant, l'intersection  $\gamma(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k)) \cap \gamma'(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k))$  est non vide, il existe un élément  $z$  de la boule  $B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k)$  tel que  $\gamma.z$  appartienne à  $\gamma'(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k))$ . En particulier,  $d_{\tilde{X}}(\gamma.z, \gamma'.z)$  est inférieure au diamètre de  $\gamma'(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k))$ , ce qui entraîne que  $d_{\tilde{X}}(\gamma.z, \gamma'.z) < 10\varepsilon_k < 2\delta$ . Ceci contredit le fait que  $inj_X > \delta$ , donc  $\gamma = \gamma'$ .

Par ailleurs, si  $\gamma(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k)) \cap \gamma'(B(\tilde{x}_k, 5\varepsilon_k))$  est vide, comme  $\varepsilon'_k \leq 2\pi\varepsilon_k$ , alors

$$d[\gamma.B(\tilde{x}_k, \varepsilon_k), \gamma'.B(\tilde{x}_{k'}, \varepsilon_{k'})] \geq 5(\varepsilon_k + \varepsilon_{k'}) > \frac{1}{2}(\varepsilon'_k + \varepsilon'_{k'})$$

Ceci termine la preuve de la remarque 2.28. □

*Preuve du lemme 2.27.*

Notons  $B_k$  la boule  $B(x_k, \varepsilon_k)$  et  $X_0 = X \setminus \bigcup_{k \in \{1..n\}} B_k$ .

Remarquons que l'injection canonique  $i : (X_0, d_0) \longrightarrow (X, d_X)$  est contractante, car tous les chemins de  $X_0$  sont aussi des chemins de  $X$ . De plus, les groupes fondamentaux de  $\tilde{X}$  et de  $Y_0$  sont nuls (car la dimension de  $X$  est

supérieure à 3) et l'application  $i$  induit un isomorphisme entre le groupe  $\Gamma_X$  des transformations du revêtement  $p_X : (\tilde{X}, d_{\tilde{X}}) \longrightarrow (X, d_X)$  et le groupe  $\Gamma_{X_0}$  des transformations du revêtement  $p_{X_0} : (Y_0, d_{Y_0}) \longrightarrow (X_0, d_0)$  (nous avons en effet vu, dans la preuve du lemme 2.25, que  $\gamma$  est homotope à zéro dans  $X_0$  si et seulement si il est homotope à zéro dans  $X$  puisque, en dimension supérieure ou égale à 3, toute homotopie peut éviter une boule de rayon inférieur au rayon d'injectivité). Le corollaire 2.22 donne l'inégalité de droite du lemme 2.27.

Pour l'inégalité de gauche, comme les groupes de transformations de revêtement  $\Gamma_X$  et  $\Gamma_{X_0}$  sont isomorphes, il nous reste essentiellement à comparer les distances  $d_{Y_0}$  et  $d_{\tilde{X}}$ .

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $Y_0$ . Soit  $c : [a, b] \longrightarrow \tilde{X}$  une courbe minimisante (pour  $d_{\tilde{X}}$ ) entre  $x$  et  $y$ . Si  $c$  ne rencontre pas  $\cup_{\gamma \in \Gamma_X} (\cup_{k \in \{1..n\}} \gamma \cdot \tilde{B}_k)$ , alors  $d_{Y_0}(x, y) = d_{\tilde{X}}(x, y)$ .

Supposons à présent qu'il existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $c$  rencontre  $\cup_{\gamma \in \Gamma_X} \gamma \cdot \tilde{B}_k$ .

Commençons par montrer que  $c$  rencontre au plus  $\frac{d_{\tilde{X}}(x, y)}{2\delta - \varepsilon'_k} + 1$  domaines

différents de la forme  $\gamma \cdot \tilde{B}_k$ .

Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux éléments distincts de  $\Gamma_X$  et  $x$  et  $x'$  deux points de  $\partial \tilde{B}_k$ . L'inégalité triangulaire nous donne

$$d_{\tilde{X}}(\gamma \cdot x, \gamma' \cdot x') \geq d_{\tilde{X}}(\gamma' \cdot x', \gamma \cdot x') - d_{\tilde{X}}(\gamma \cdot x', \gamma \cdot x)$$

Fixons, dans un premier temps, un entier  $k$  quelconque dans  $\{1, \dots, n\}$ . Comme, d'une part, les points  $\gamma \cdot x$  et  $\gamma \cdot x'$  appartiennent tous les deux à  $\gamma \cdot \partial \tilde{B}_k$  qui est de diamètre inférieur à  $\varepsilon'_k$  (d'après le lemme 2.26), d'autre part  $\inf\{(d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{x}))/\tilde{x} \in \tilde{X} \text{ et } \gamma \in \Gamma_X \setminus \{id\}\}$  est supérieur à  $2\delta$ , on obtient

$$d_{\tilde{X}}(\gamma \cdot x, \gamma' \cdot x') \geq 2\delta - \varepsilon'_k$$

Finalement, pour tous les éléments distincts  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $\Gamma_X$ ,

$$d_{\tilde{X}}(\gamma \cdot \partial \tilde{B}_k, \gamma' \cdot \partial \tilde{B}_k) \geq 2\delta - \varepsilon'_k$$

Cette dernière inégalité implique en particulier que  $c$  ne peut rencontrer qu'un nombre fini  $N_k$  de domaines de la forme  $\gamma \cdot \tilde{B}_k$  (ce nombre ne tient pas compte du nombre de fois où la courbe  $c$  rencontre le même  $\gamma \cdot \tilde{B}_k$ ).

Notons  $(\gamma_i \cdot \tilde{B}_k)_{i \in \{1..N_k\}}$  ces domaines (distincts), notons  $t_{i,k}$  (resp.  $s_{i,k}$ ) l'infimum (resp. le supremum) dans  $[a, b]$  du compact  $c^{-1}(\gamma_i \cdot \partial \tilde{B}_k)$  et posons  $x_{i,k} = c(t_{i,k})$  et  $y_{i,k} = c(s_{i,k})$  (i.e. le premier et le dernier point où  $c$  rencontre  $\gamma_i \cdot \tilde{B}_k$ ). Alors,

$$d_{\tilde{X}}(x, y) = \text{long}(c) \geq \sum_{i=1}^{N_k-1} d_{\tilde{X}}(x_{i,k}, x_{(i+1),k})$$

Comme chaque  $x_{i,k}$  appartient à  $\gamma_i \cdot \partial \tilde{B}_k$  et comme nous venons d'établir que

$$d_{\tilde{X}}(\gamma_i \cdot \partial \tilde{B}_k, \gamma_{i+1} \cdot \partial \tilde{B}_k) \geq 2\delta - \varepsilon'_k$$

nous obtenons que  $d_{\tilde{X}}(x, y) \geq (N_k - 1)(2\delta - \varepsilon'_k)$  et finalement,

$$N_k < \frac{d_{\tilde{X}}(x, y)}{2\delta - \varepsilon'_k} + 1$$

On en déduit que le nombre total  $N$  de boules différentes intersectées vérifie

$$N = \sum_{k=1}^n N_k < \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d_{\tilde{X}}(x, y)}{2\delta - \varepsilon'_k} \right] + n$$

(on ne tient pas compte ici des intersections multiples de  $c$  avec une même boule).

Pour simplifier les notations, nous renommerons les boules intersectées en les appelant  $B'_1, \dots, B'_N$ . Pour chaque  $B'_i$ , nous notons  $t_i$  (resp.  $s_i$ ) l'infimum (resp. le supremum) dans  $[a, b]$  de l'ensemble relativement compact  $c^{-1}(\tilde{B}'_i)$ .

Vérifions que, si  $i \neq j$ , les intervalles  $[t_i, s_i]$  et  $[t_j, s_j]$  sont disjoints :

Quitte à permuter l'ordre de numérotation des boules, on peut supposer que  $t_i \leq t_j$ ; les deux intervalles ne peuvent donc s'intersecter que si  $t_j \leq s_i$ . Supposons que ce soit le cas, on a alors

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{k(i)} &\geq \text{diam}(\partial B'_i) \geq d(c(s_i), c(t_i)) \\ &= |s_i - t_i| = |t_j - t_i| + |s_i - t_j| \\ &= d(c(t_j), c(t_i)) + d(c(s_i), c(t_j)) \\ &\geq 2d(\partial B'_j, \partial B'_i) \\ &\geq \varepsilon'_{k(i)} + \varepsilon'_{k(j)} \end{aligned}$$

(où  $k(i)$  et  $k(j)$  sont les indices tels que  $B'_i = \gamma \cdot (\tilde{B}_{k(i)})$  et  $B'_j = \gamma \cdot (\tilde{B}_{k(j)})$ ), où la dernière inégalité provient de la remarque 2.28. Ceci donne une contradiction qui implique que, si  $i \neq j$ , les intervalles  $[t_i, s_i]$  et  $[t_j, s_j]$  sont disjoints.

On définit alors la courbe  $c' : [a, b] \rightarrow Y_0$  en choisissant, pour chaque  $i$ , une courbe  $c_i : [t_i, s_i] \rightarrow \partial B'_i$  qui réalise la longueur minimale parmi toutes les courbes de  $\partial B'_i$  qui joignent  $c(t_i)$  à  $c(s_i)$ . On pose

$$c'(t) = \begin{cases} c_i(t) & \text{si } t \in [t_i, s_i] \\ c(t) & \text{si } t \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^n [t_i, s_i] \end{cases}$$

La courbe  $c$  est continue et sa longueur vérifie

$$\begin{aligned}
d_{Y_0}(x, y) &\leq \text{long}_{Y_0}(c') \\
&\leq \text{long}_{\tilde{X}}(c) + \sum_{k=1}^N \text{long}_{\partial B'_k}(c_k) \\
&\leq d_{\tilde{X}}(x, y) + \sum_{i=1}^n N_i \cdot \varepsilon'_i \\
&\leq d_{\tilde{X}}(x, y) \left[ 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{2\delta - \varepsilon'_k} \right] + \sum_{k=1}^n \varepsilon'_k
\end{aligned}$$

Or, le fait 2.19 implique que, si  $\tilde{x}_0$  est un point de  $p^{-1}(x_0)$  et si la distance  $d'$  induite sur  $p^{-1}(x_0)$  par  $d_{\tilde{X}}$  vérifie

$$d'(\tilde{x}_0, \gamma \cdot \tilde{x}_0) \leq C_1 d_{\tilde{X}}(\tilde{x}_0, \gamma \cdot \tilde{x}_0) + C_2$$

alors

$$\text{Ent}(p^{-1}(x_0), d', \mu_{\tilde{x}_0}) \geq \frac{1}{C_1} \text{Ent}(X, g)$$

et, par ailleurs,  $\text{Ent}(Y_0, d_{Y_0}) = \text{Ent}(p^{-1}(x_0), d', \mu_{\tilde{x}_0})$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

*Preuve de la proposition 2.24.*

**Preuve de l'inégalité de gauche de la proposition 2.24**

En appliquant le lemme 2.27 aux espaces  $(X, d_X)$  et  $(X_0, d_0)$ , on obtient

$$\left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{2\delta - \varepsilon'_k} \right)^{-1} \text{Ent}(X, d_X) \leq \text{Ent}_{(Y_0, d_{Y_0})}(X_0, d_0)$$

Soit  $X'_0 = X' \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ .

Notons  $Y'_0 = \tilde{X}' \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma_X} \left( \bigcup_{k \in \{1..n\}} \gamma \cdot C_k \right)$  (où les  $\tilde{x}_k$  sont des relevés fixés des  $x_k$  et où  $\gamma \cdot C_k$  désigne un exemplaire de  $C_k$  recollé en identifiant son bord à  $\gamma \cdot \partial \tilde{B}_k$ ) et muni de la distance de longueur naturelle.

Il est clair que  $X'_0$  et  $X_0$  (munis de leur distance de longueur naturelle) sont isométriques. Par ailleurs, même si les domaines  $C_k$  ne sont pas des boules et ne vérifient pas les hypothèses imposées sur les domaines excisés dans la construction proposée dans la proposition 2.24, la preuve du lemme 2.27 fonctionne encore si l'on remplace respectivement  $X$ ,  $X_0$  et  $B_k$  par  $X'$ ,

$X'_0$  et  $C_k$  (puisque les  $C_k$  sont disjoints, ont des bords de même diamètre que les boules  $B_k$  et sont à la même distance les uns des autres que les boules  $B_k$ ). En appliquant alors l'inégalité de droite du lemme 2.27 avec  $(X', d_{X'})$  et  $(X'_0, d'_0)$ , on obtient que

$$Ent_{(Y_0, d_{Y_0})}(X_0, d_0) = Ent_{(Y'_0, d_{Y'_0})}(X'_0, d'_0) \leq Ent(X', d_{X'})$$

En conclusion,

$$\left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon'_k}{2\delta - \varepsilon'_k}\right)^{-1} Ent(X, d_X) \leq Ent(X', d_{X'})$$

**Preuve de l'inégalité de droite de la proposition 2.24**

Soit  $X_0$  l'espace de longueur  $X \setminus \bigcup_{k \in \{1..n\}} B(x_k, \varepsilon_k)$  et  $Y_0$  son revêtement défini

par  $\tilde{X} \setminus \bigcup_{i \in \{1..n\}} \bigcup_{\gamma \in \Gamma_X} \tilde{B}(\tilde{x}_i, \varepsilon_i)$ , où les points  $\tilde{x}_i$  sont des relevés des points  $x_i$ .

Par la proposition 2.25, on sait que  $X$  et  $X'$  ont des groupes fondamentaux isomorphes, donc leurs groupes de transformations du revêtement universel sont également isomorphes (puisque toute variété est semi-localement simplement connexe); nous noterons ce groupe  $\Gamma$ . Alors  $\Gamma$  est aussi le groupe des transformations du revêtement  $p : (Y_0, d_{Y_0}) \rightarrow (X_0, d_0)$ . De plus, l'injection canonique de  $(Y_0, d_{Y_0})$  dans  $(\tilde{X}, g_{\tilde{X}})$  est  $\Gamma$ -équivariante et contractante. Le corollaire 2.22 implique alors que  $Ent_{(Y_0, d_{Y_0})}(X_0, d_0) \leq Ent(X, d_X)$ .

Soit maintenant  $x_0$  un point de  $Y_0$  et  $\tilde{x}_0$  son image dans  $\tilde{X}'$  par l'injection canonique. Comme, par définition de  $Y_0$ , une courbe  $c$  sur  $Y_0$  évite les endroits où l'on a déformé la métrique, la longueur de  $c$  sur  $Y_0$  et la longueur de son injection canonique sur  $\tilde{X}'$  sont identiques. Par ailleurs, il y a davantage de courbes dans  $\tilde{X}'$ . Ainsi,  $d_{Y_0}(x_0, \gamma.x_0) \geq d_{\tilde{X}'}(\tilde{x}_0, \gamma.\tilde{x}_0)$ .

Soit maintenant une géodésique minimisante  $c$  qui joint  $\tilde{x}_0$  à  $\gamma.\tilde{x}_0$  dans  $(\tilde{X}', g_{\tilde{X}'})$ . Nous allons montrer que  $c$  est nécessairement incluse dans  $Y_0$ , i.e. que l'ouvert  $c^{-1}(\tilde{X}' \setminus Y_0)$  est vide. Supposons que ce ne soit pas le cas et notons  $]t_i^-, t_i^+[$  une des composantes connexes de cet ouvert. Alors, les points  $x_i^- = c(t_i^-)$  et  $x_i^+ = c(t_i^+)$  appartiennent au bord  $\gamma.\partial\tilde{B}_i$  d'une même composante connexe  $\gamma.c_i$  de  $\tilde{X}' \setminus Y_0$  (car ils sont adhérents à  $\tilde{X}' \setminus Y_0$  et à son complémentaire et  $c(]t_i^-, t_i^+[)$  est inclus dans une seule composante connexe de  $\tilde{X}' \setminus Y_0$ ).

Pour simplifier les notations, nous fixons  $i$  et nous noterons  $B$  et  $\partial B$  pour  $\gamma.\tilde{B}_i$  et  $\gamma.\partial\tilde{B}_i$ . L'image  $c(]t_i^-, t_i^+[)$  ne rencontre ni  $[\varepsilon'_i, L[ \times \partial B$ , ni (a fortiori) la partie  $M_i$  recollée au bord  $\{L\} \times \partial B$  de ce cylindre, car, sinon,  $c$  ne serait

pas minimisante sur l'intervalle  $[t_i^-, t_i^+]$ . On aurait en effet,

$$\begin{aligned} \text{long}_{g'}(c_{\llbracket t_i^-, t_i^+ \rrbracket}) &\geq 2d_{g'}(\{0\} \times \partial B, \{\varepsilon'_i\} \times \partial B) \\ &= 2\varepsilon'_i \\ &\geq 2d_{\partial B}(x_i^-, x_i^+) \\ &\geq 2d_{\tilde{X}'}(x_i^-, x_i^+) \\ &> d_{\tilde{X}'}(x_i^-, x_i^+) \end{aligned}$$

l'inégalité  $d_{\partial B} \geq d_{\tilde{X}'}$ , venant du fait qu'il y a plus de courbes qui joignent  $x_i^-$  et  $x_i^+$  dans  $\tilde{X}'$  que dans  $\partial B$ .

On en déduit que  $c_{\llbracket t_i^-, t_i^+ \rrbracket}$  est contenue dans  $]0, \varepsilon'_i[ \times \partial B$ , donc qu'elle s'écrit

$$c_{\llbracket t_i^-, t_i^+ \rrbracket} : t \longrightarrow (r(t), x(t))$$

où  $r(t) \in ]0, \varepsilon'_i[$  et où  $t \longrightarrow x(t)$  est une courbe qui joint  $x_i^-$  et  $x_i^+$  dans  $\partial B$ . Il vient que

$$\begin{aligned} \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} &= \sqrt{|r'(t)|^2 + g_{\partial B}(x'(t), x'(t))} \\ &\geq \sqrt{g_{\partial B}(x'(t), x'(t))} \end{aligned}$$

Or, les deux métriques  $g_{\tilde{X}'}$  et  $g_{Y_0}$  coïncident sur  $\partial B$  donc

$$\begin{aligned} d_{\tilde{X}'}(x_i^-, x_i^+) &\geq \int_{[x_i^-, x_i^+]} \sqrt{g_{\partial B}(x'(t), x'(t))} \\ &\geq \int_{[x_i^-, x_i^+]} \sqrt{g_{Y_0}(x'(t), x'(t))} \\ &= d_{\partial B}(x_i^-, x_i^+) \\ &\geq d_{Y_0}(x_i^-, x_i^+) \end{aligned}$$

Comme  $g_{\tilde{X}'}$  et  $g_{Y_0}$  coïncident en dehors des segments de la forme  $[x_i^-, x_i^+]$ , on a

$$d_{\tilde{X}'}(\tilde{x}_0, \gamma.\tilde{x}_0) \geq d_{Y_0}(\tilde{x}_0, \gamma.\tilde{x}_0)$$

Puisqu'on a également montré l'inégalité inverse, on obtient

$$d_{\tilde{X}'}(\tilde{x}_0, \gamma.\tilde{x}_0) = d_{Y_0}(x_0, \gamma.x_0)$$

Ceci entraîne en particulier que

$$\text{Ent}(X', d_{X'}) = \text{Ent}_{(Y_0, d_{Y_0})}(X_0, d_0)$$

On a vu dans le lemme 2.27 que  $\text{Ent}(X, d_X) \geq \text{Ent}_{(Y_0, d_{Y_0})}(X_0, d_0)$ , ce qui termine la démonstration de la proposition 2.24.  $\square$

### 2.4.3 Applications

Nous décrivons ici plusieurs exemples de familles de variétés riemanniennes compactes de même dimension, qui montrent que l'hypothèse "Entropie uniformément majorée" est bien plus faible que l'hypothèse "Courbure de Ricci uniformément minorée", comme le précisent les remarques qui suivent chacun des énoncés suivants :

**Exemple 2.29.** *Sur toute variété compacte  $X^m$  de dimension  $m \geq 3$ , il existe une suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de métriques riemanniennes dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés et telles que la suite  $((X^m, g_k))_{k \in \mathbb{N}}$  ne contienne aucune sous-suite de Cauchy pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

**Remarque 2.30.** *L'existence d'une telle suite implique qu'une famille de variétés riemanniennes compactes de même dimension, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés n'est pas nécessairement précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Notons que toute famille de variétés riemanniennes compactes de même dimension, dont la courbure de Ricci est uniformément minorée et dont le diamètre est uniformément majoré est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir [Gr], théorème 5.3). Notons par ailleurs que le résultat énoncé dans l'exemple 2.29 est bien connu des spécialistes du sujet, mais sa preuve ne semble pas rédigée dans la littérature. Nous en donnons une preuve ci-dessous.*

*Construction de l'exemple 2.29.*

Soit  $X^m$  ( $m \geq 3$ ) une variété compacte, connexe, de dimension  $m$ , et  $g$  une métrique riemannienne fixée sur  $X^m$  dont nous noterons  $\delta$  le rayon d'injectivité et  $K^2$  le supremum des valeurs absolues des courbures sectionnelles. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $\varepsilon_n$  suffisamment petit pour que le nombre de boules disjointes  $B(x_k, 5\varepsilon_n)$  qu'on peut inclure dans  $(X^m, g)$  soit supérieur à  $n$  et pour que  $\varepsilon_n < \min\{\frac{1}{K}, \frac{\delta}{2\pi}, \frac{1}{8\pi}, \frac{1}{n^2}\}$ , on peut construire la variété  $X_n$  et la métrique  $g_n$  comme décrit dans la proposition 2.24 et la remarque qui la suit : i.e. on excise  $n$  boules  $B(x_k, \varepsilon_n)$ , on recolle  $n$  cylindres de longueur  $L = 1$ , au bout de chacun desquels on recolle une sphère  $\mathbb{S}^m$  (de manière canonique).

La variété  $X_n$  est alors difféomorphe à  $X$  et la proposition 2.24 prouve que  $Ent(X_n, g_n) \leq Ent(X, d_X)$ . Par ailleurs, le diamètre de  $(X_n, g_n)$  est majoré (par exemple) par  $diam(X, g)(1 + \frac{\pi}{\delta}) + 2\pi + 6$ . En effet, notons comme

précédemment  $X_0 = X \setminus \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon_n)$  et  $Y_0$  son relevé dans le revêtement

universel de  $X$ , et notons  $C_k$  le  $k^{\text{ième}}$  cylindre sur lequel on a recollé la sphère de diamètre  $2\varepsilon_n$ .

Si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $C_{k_0}$ , on montre aisément que

$$d_n(x, y) \leq L + 2\varepsilon_n \leq 3$$

Supposons donc, dans un premier temps, que  $x$  et  $y$  sont deux points de  $X_0$ . Soit  $c : [a, b] \rightarrow M_n$  une géodésique minimisante entre  $x$  et  $y$  sur  $X$  et  $\tilde{c}$  un de ses relevés dans  $\tilde{X}$  dont les extrémités  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  sont des antécédents respectifs de  $x$  et  $y$ . Alors,

$$\text{long}_{\tilde{X}}(\tilde{c}) = \text{long}_X(c) = d_X(x, y) \leq \text{diam}(X, g)$$

On construit ensuite, comme dans la preuve du lemme 2.27, une courbe  $\bar{c}$  sur  $Y_0$  en remplaçant chaque portion de la courbe  $\tilde{c}$  qui rencontre le relevé d'une boule  $B(x_k, \varepsilon_n)$  par une courbe sur le bord de ce relevé. Alors, si  $\varepsilon'_n := (1 + (K\varepsilon_n)^2)\pi\varepsilon_n$ ,

$$\begin{aligned} d_n(x, y) &\leq \text{long}_{\tilde{X}_n}(\bar{c}) \\ &\leq \text{long}_{Y_0}(\bar{c}) \\ &\leq \text{long}_{\tilde{X}}(\tilde{c}) \left(1 + n \frac{\varepsilon'_n}{\delta - \varepsilon'_n}\right) + n\varepsilon'_n \\ &\leq \text{diam}(X, g) \left(1 + n \frac{2\pi\varepsilon_n}{\delta - 2\pi\varepsilon_n}\right) + 2n\pi\varepsilon_n \\ &\leq \text{diam}(X, g) \left(1 + \frac{2\pi}{\delta}\right) + 2\pi \end{aligned}$$

la première inégalité provenant du fait que  $\bar{c}$  est une courbe qui relie deux antécédents de  $x$  et  $y$  dans le revêtement universel de  $X_n$  et qu'une application de revêtement est contractante, la troisième ayant déjà été démontrée dans la preuve du lemme 2.27, la quatrième provenant du fait que  $K\varepsilon_n \leq 1$ , et la dernière du fait que  $\varepsilon_n \leq \min\{1, \frac{\delta}{2\pi}\}$ .

Dans le cas où  $x$  appartient à  $X_0 = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^n C_k$  et  $y$  appartient à  $C_{k_0}$ , on fixe un point  $y_1$  quelconque sur le bord  $\partial B(x_k, \varepsilon_n) \times \{0\}$  de  $C_k$ . Comme  $y$  et  $y_1$  appartiennent à  $C_{k_0}$  et  $y_1$  et  $x$  appartiennent à  $X_n \setminus \bigcup_{k=1..n} C_k$ ,

$$\begin{aligned} d_n(x, y) &\leq d_n(y, y_1) + d_n(y_1, x) \\ &\leq 3 + \text{diam}(X, g) \left(1 + \frac{2\pi}{\delta}\right) + 2\pi \end{aligned}$$

Finalement, si  $x$  appartient à  $C_k$  et  $y$  appartient à  $C_{k'}$  (où  $k \neq k'$ ), en utilisant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} d_n(x, y) &\leq d_n(x, x_1) + d_n(x_1, y_1) + d_n(y_1, y) \\ &\leq 3 + \text{diam}(X, g) \left(1 + \frac{2\pi}{\delta}\right) + 2\pi + 3 \end{aligned}$$

et, finalement, le diamètre de  $(X_n, g_n)$  est inférieur à  $\text{diam}(X, g) \left(1 + \frac{2\pi}{\delta}\right) + 2\pi + 6$

Fixons à présent un entier  $n$  quelconque. Si  $l$  est suffisamment grand, nous avons vu dans la preuve de l'exemple 1.28 que  $d_{GH}((X_n, d_n), (X_{n+l}, d_{n+l})) \geq 1$ . La suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne contient donc aucune sous-suite de Cauchy et la famille  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Ceci termine la preuve du corollaire 2.29.  $\square$

**Exemple 2.31.** *Toute variété riemannienne de dimension  $m$  paire ( $m \geq 4$ ) peut être obtenue comme la limite (pour la distance de Gromov-Hausdorff) d'une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension  $m$ , dont l'entropie est uniformément majorée, mais telles que deux variétés quelconques de la suite n'ont ni la même structure différentiable, ni la même structure homotopique, ni la même structure homologique, ni la même caractéristique d'Euler.*

**Remarque 2.32.**

(i) Remarquons tout de même que les groupes fondamentaux des variétés de la suite construite ci-dessous sont tous isomorphes.

(ii) La même situation est impossible si l'on remplace l'hypothèse "Entropie majorée" par l'hypothèse "Courbure de Ricci minorée", puisqu'un théorème de J. Cheeger et T. Colding assure alors la stabilité de la structure différentiable des éléments de la suite (voir [CC1], théorème A.112).

*Construction de l'exemple 2.31.*

Fixons une variété riemannienne compacte  $(X, g)$  de dimension  $m$  paire et supérieure ou égale à 4, munie d'une métrique riemannienne fixée  $g$  dont nous noterons  $\delta$  le rayon d'injectivité et  $K^2$  le supremum des valeurs absolues des courbures sectionnelles.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , fixons un réel  $\varepsilon_n > 0$  suffisamment petit pour que :

- le nombre de boules disjointes  $B(x_k, 5\varepsilon_n)$  qu'on peut inclure dans  $(X^m, g)$  soit supérieur à  $n$
- $\varepsilon_n < \min\left\{\frac{1}{K}, \frac{\delta}{2\pi}\right\}$ .

On peut alors construire la variété  $X_n$  et la métrique  $g_n$  comme décrit dans la proposition 2.24 et la remarque qui la suit : i.e. on excise  $n$  boules  $B(x_k, \varepsilon_n)$ , on leur recolle  $n$  cylindres de longueur  $L_n = 2(1 + K^2\varepsilon_n^2)\pi\varepsilon_n$  au bout duquel on recolle un espace projectif complexe, de dimension réelle  $m$ , et de diamètre  $2\varepsilon_n$ .

Vérifions que la suite  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie les propriétés annoncées dans l'exemple 2.31.

D'après la proposition 2.24, l'entropie de  $(X_n, g_n)$  est inférieure à l'entropie de  $(X, g)$  et l'on peut montrer, en mimant la preuve de l'exemple 2.29, que le diamètre est uniformément majoré. De plus, la suite  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers

la variété  $(X, g)$  (pour la distance de Gromov-Hausdorff) qui est également de dimension  $m$ . Pour montrer que deux variétés distinctes de la suite n'ont pas même type d'homologie, calculons la caractéristique d'Euler de chaque variété  $X_n$  : notons que  $X_n$  est la somme connexe de la variété  $(X, g)$  avec  $n$  espaces projectifs complexes  $\mathbb{P}_d(\mathbb{C})$  de dimension réelle  $m = 2d \geq 4$ . Alors

$$\begin{aligned}\chi(X_n) &= \chi(X) + n\chi(\mathbb{P}_d(\mathbb{C})) - 2n \\ &= \chi(X) + n(d+1) - 2n \\ &= \chi(X) + n(d-1)\end{aligned}$$

Ainsi, la suite  $(\chi(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante (donc deux éléments de la suite ont deux caractéristiques d'Euler différentes, en particulier, ils n'ont pas même type d'homologie) et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les caractéristiques d'Euler de  $X_n$  et  $X$  sont différentes.  $\square$

**Exemple 2.33.** *Toute variété riemannienne  $(X, g)$  compacte de dimension  $m \geq 3$  peut être obtenue comme la limite d'une suite de variétés riemanniennes compactes  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de même dimension  $m$ , toutes diféomorphes à  $X$ , dont l'entropie est uniformément majorée, mais telle que  $(Vol(M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tende vers l'infini.*

**Remarque 2.34.**

(i) *Remarquons tout de même que les groupes fondamentaux des variétés de la suite construite ci-dessous sont tous isomorphes.*

(ii) *La même situation est impossible si l'on remplace l'hypothèse "Entropie majorée" par l'hypothèse "Courbure de Ricci minorée", puisqu'un théorème de T. Colding assure alors la continuité du volume (voir [Co], théorème 0.1).*

*Construction de l'exemple 2.33.*

Fixons une variété riemannienne  $(X, g)$  de dimension  $m$  supérieure ou égale à 3.

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous construisons la  $n$ -ième variété  $(X_n, g_n)$  de la suite comme dans l'exemple précédent (en utilisant les mêmes notations) et en recollant à  $(X \setminus \cup_{i=1..n} B(x_i, \varepsilon_n))$   $n$  cylindres  $C_i = [0, L_n] \times \partial B(x_i, \varepsilon_n)$  sur lesquels on recolle une sphère  $S_n$  de dimension  $m$  (privée d'une boule  $B'(z'_i, \varepsilon_n)$ ), de diamètre  $d_n$  supérieur à  $4\varepsilon_n$  et qui tend vers zéro et de volume supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ .

D'après la proposition 2.24, l'entropie de  $(X_n, g_n)$  est inférieure à l'entropie de  $(X, g)$ . De plus, la suite  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers la variété  $(X, g)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff, qui est de dimension  $m$ . Par ailleurs,

$$Vol(X_n, g_n) \geq n \frac{1}{2} Vol(S_n) \geq \frac{n}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

Ainsi, la suite  $(Vol(X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  tend vers l'infini.  $\square$

## Chapitre 3

# Approximations de Hausdorff équivariantes entre revêtements

Dans ce chapitre, nous nous consacrons à l'étude de la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  des (classes d'isométrie des) espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe - voir la définition page 27 du revêtement universel choisie), dont le groupe des automorphismes du revêtement universel est de centre réduit à zéro et  $\delta$ -non-abélien (voir la définition E.1 et de nombreux exemples dans [BCG1], page 9 à 13), dont l'entropie volumique (par rapport au revêtement universel) est inférieure ou égale à  $H$  et dont le diamètre est inférieur ou égal à  $D$ . Puisque toutes les variétés construites dans les exemples 2.29, 2.33 et 2.31 possèdent le même groupe fondamental que la variété compacte  $(X, d_X)$  initiale, si l'on réalise les constructions à partir d'une variété riemannienne dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien, toutes les variétés riemanniennes obtenues appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  pour des réels  $H$  et  $D$  strictement positifs bien choisis. On ne peut donc espérer aucun résultat de précompacité, de continuité du volume ou de stabilité de la structure différentielle, homotopique ou homologique sur  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ . Nous établissons cependant dans ce chapitre le résultat de stabilité du groupe des transformations de revêtement universel (qui est isomorphe au groupe fondamental quand le revêtement universel est simplement connexe) suivant :

**Théorème 3.1.** (*Reformulation du corollaire 3.32*)

*Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons*

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

*Fixons arbitrairement un réel  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ .*

*Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur compacts (connexes) quelconques, qui admettent un revêtement universel (pas nécessairement*

*simplement connexe), tel que le groupe des automorphismes de ce revêtement soit  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro. Supposons de plus que le diamètre et l'entropie de  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont respectivement majorés par  $D$  et  $H$ .*

*Si la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ ,*

*(i) il existe un isomorphisme  $\bar{\rho}$  entre le groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des automorphismes du revêtement universel  $p_X : \tilde{X} \rightarrow X$  et le groupe  $G(\tilde{Y}, Y)$  des automorphismes du revêtement universel  $p_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$ .*

*(ii) il existe deux applications*

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$$

$$\tilde{\psi} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$$

*qui sont, pour tout  $R > 0$  des  $\varepsilon'$ -approximations entre les boules de rayon  $R$  de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  (où  $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon, R, \varepsilon_0)$  tend vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro).*

*De plus, les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  sont respectivement  $\bar{\rho}$ -équivariante et  $(\bar{\rho})^{-1}$ -équivariante.*

Remarquons que ce résultat n'est pas simplement un résultat de type "convergence", mais plus un résultat de type "approximation avec majoration de l'erreur", puisque la distance à partir de laquelle les revêtements sont proches peut être calculé uniquement en fonction des bornes sur les invariants de  $X$  préalablement fixées. De plus, la version de corollaire 3.32 donnée dans le théorème 3.1 est également un résultat de rigidité topologique sur l'ensemble des (classes d'isométrie) des espaces de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  qui sont à distance de Gromov-Hausdorff inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  d'un espace donné de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ .

Ce résultat peut être énoncé de manière plus générale (voir le théorème 3.30) : étant donné un espace de longueur  $(X, d_X)$  (qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ ), si  $(Y, d_Y)$  est un espace de longueur compact *quelconque*  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ -proche de  $(X, d_X)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff, ce théorème donne un procédé universel

- de construction d'un revêtement galoisien de  $(Y, d_Y)$ ,
- de construction d'un isomorphisme entre les groupes d'automorphismes de ce revêtement et du revêtement universel de  $X$ ,
- de construction d'approximations de Gromov-Hausdorff entre ces deux revêtements qui conjuguent les actions des groupes des automorphismes de revêtement (dans cette version, aucune hypothèse n'est faite sur  $(Y, d_Y)$  ; en particulier, il n'est pas supposé appartenir à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ ).

Une application immédiate de cette version plus générale est la suivante : considérons une variété riemannienne compacte  $(X, d_X)$  de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et un graphe  $G$  (explicitement construit dans l'exemple 3.55), muni d'une distance de longueur  $d_G$ , tel que  $(G, d_G)$  soit à distance de Gromov-Hausdorff de la

variété  $(X, d_X)$  inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{26}$  (où  $\varepsilon_0$  a été donné uniquement en fonction de  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  dans l'énoncé du théorème ci-dessus). Cette autre version (voir théorème 3.30) donne en particulier (de manière explicite) un isomorphisme entre le groupe fondamental de  $(X, d_X)$  et le groupe des transformations d'un revêtement bien choisi (et explicite) du graphe  $G$ , ce revêtement étant le revêtement de  $G$  dont le groupe fondamental est le sous-groupe normal de  $\pi_1(G, x_0)$  engendré par les cycles de  $G$  de longueur inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  (voir la proposition 3.56).

Par ailleurs, nous avons déjà noté que, pour avoir un contrôle de l'entropie volumique, il est nécessaire de connaître la structure algébrique du groupe des transformations du revêtement universel et la manière dont il déplace les points sur ce revêtement universel : le théorème 3.1, qui nous donne justement ces informations, permet ainsi d'établir que l'entropie volumique, qui est un invariant continu par rapport à la métrique sur les variétés riemanniennes, est de plus *uniformément continue par rapport à la distance de Gromov-Hausdorff sur la famille  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  considérée* (voir le théorème 3.61). De plus, *si  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  qui converge vers un espace de longueur  $(Y, d_Y)$ , alors,  $(Y, d_Y)$  possède un revêtement universel* (voir le corollaire 3.69), *ce qui permet de définir l'entropie de l'espace  $(Y, d_Y)$ . La suite des entropies des espaces  $(X_n, d_n)$  converge alors vers l'entropie de  $(Y, d_Y)$*  (voir la proposition 3.70).

Ceci nous conduit alors naturellement au théorème de fermeture suivant :

**Théorème 3.2.**

*Fixons arbitrairement trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ .  
L'espace  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

Dans la dernière section de ce chapitre, nous justifions les hypothèses choisies en discutant de l'optimalité des résultats établis.

## 3.1 Présentation des questions

### Exemples et contre-exemples

Nous donnons ici un inventaire (non exhaustif) des situations qui peuvent se présenter lorsqu'on étudie la convergence de revêtements universels. Nous mettons l'accent sur le fait que, même dans le cas où ces revêtements sont supposés simplement connexes, il n'est pas forcément possible d'obtenir des informations sur leur limite. Considérons en effet une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de longueur compacts et semi-localement simplement connexes (voir la définition B.13) qui converge pour la distance de Gromov-Hausdorff vers un espace de longueur  $(X, d)$ . Savoir si l'espace-limite  $(X, d)$  admet un revêtement universel simplement connexe équivaut à savoir si cet espace-limite est semi-localement simplement connexe, c'est-à-dire savoir s'il existe

ou non des lacets (non homotopes à zéro) arbitrairement petits en un point base donné. Il nous faut donc étudier le groupe fondamental de l'espace-limite et comprendre la relation entre ce groupe et les groupes fondamentaux des éléments de la suite.

D'une façon générale, il est facile de construire des suites  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de longueur dont la limite admet un groupe fondamental "plus petit" que le groupe fondamental des éléments de la suite, dans le sens où il existe une surjection du groupe fondamental des éléments de la suite dans celui de l'espace-limite : il suffit de penser à une famille de métriques  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur le tore telle que la suite  $((\mathbb{T}^2, g_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  tende vers le cercle quand  $n$  tend vers l'infini (considérer par exemple la suite de métriques sur  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$  définie par  $g_n = g_{\mathbb{T}} + \frac{1}{n^2}g_{\mathbb{T}}$ , où  $g_{\mathbb{T}}$  est la métrique canonique du cercle  $\mathbb{T}$ ). Un exemple plus élaboré est donné par le bord  $M_\varepsilon$  du  $\varepsilon^2$ -voisinage tubulaire d'un graphe provenant d'une triangulation d'une variété riemannienne quelconque  $(M, g)$  dont les triangles sont de taille  $\varepsilon$ . Il est alors possible de munir  $M_\varepsilon$  d'une distance de longueur  $d_\varepsilon$  (et même d'une métrique riemannienne, si  $\varepsilon$  est suffisamment petit) telle que  $(M_\varepsilon, d_\varepsilon)$  tende vers  $(M, g)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Il peut par ailleurs arriver que le groupe fondamental de la limite soit "plus gros" que celui de chacun des éléments de la suite (dans le sens où il n'existe pas de surjection du groupe fondamental d'un élément de la suite dans le groupe fondamental de la limite) : un premier exemple est donné par l'exemple D.1 (dans l'annexe D), où les groupes fondamentaux des éléments de la suite deviennent de plus en plus "gros". Dans cet exemple, l'espace limite ne possède pas de revêtement universel.

Mais il peut aussi arriver que les groupes fondamentaux des éléments de la suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  soient tous isomorphes entre eux et que, cependant, il n'existe pas de surjection de ces groupes dans le groupe fondamental de l'espace-limite  $(X, d)$ , comme c'est le cas dans l'exemple D.2. Dans cet exemple, la limite des revêtements universels (simplement connexes) n'est pas simplement connexe mais est tout de même le revêtement universel de l'espace-limite (nous rappelons que la définition du revêtement universel que nous avons choisie se trouve page 27).

Dans le cas général, même si l'espace-limite admet un revêtement universel, celui-ci n'est pas nécessairement la limite des revêtements universels des éléments de la suite : il existe des suites d'espaces de longueur (compacts)  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent vers un espace  $(X, d)$  et dont les revêtements universels convergent mais ne convergent pas vers le revêtement universel de l'espace limite  $(X, d)$  (voir l'exemple D.3). La limite des revêtements universels est alors un revêtement intermédiaire de  $(X, d)$ .

### Quelques résultats connus sur ce sujet

De nombreux travaux ont permis d'établir un lien entre le groupe fon-

damental des éléments d'une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergente et le groupe fondamental de la limite, ce qui permet aussi d'établir dans de nombreux cas si l'espace limite admet un revêtement universel. Nous commençons par énoncer quelques résultats établis dans le cadre des variétés riemanniennes.

**Théorème 3.3.** ([Tu1] et [Tu2])

Soit  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de variétés riemanniennes compactes connexes, dont la dimension est uniformément majorée et dont la courbure sectionnelle est uniformément bornée. Soit  $(X, d_X)$  l'espace de longueur limite. Alors,

1.  $X$  est localement simplement connexe et admet un revêtement universel simplement connexe.
2. Pour  $n$  suffisamment grand, il existe un morphisme surjectif du groupe fondamental de  $M_n$  dans le groupe fondamental de  $X$ .

**Théorème 3.4.** ([SW], théorème 1.4)

Soit  $D$  un réel positif. Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes compactes connexes de même dimension  $m$  et vérifiant  $\text{Ricci}(M_i, g_i) \geq -(m-1)g_i$  et  $\text{diam}(M_i, g_i) \leq D$ , qui converge vers un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  au sens de Gromov-Hausdorff. Alors le revêtement universel  $\tilde{Y}$  de  $Y$  existe et, pour  $N$  suffisamment grand (qui dépend de  $Y$ ), il existe un homomorphisme surjectif du groupe fondamental de  $M_N$  dans le groupe des transformations de revêtement de  $\tilde{Y} \rightarrow Y$ .

C. Sormani et G. Wei construisent le revêtement universel de la limite comme la limite  $(\bar{Y}, d_{\bar{Y}})$  (pour la topologie de Gromov-Hausdorff pointée) d'une sous-suite des revêtements universels des éléments de la suite. Elles s'intéressent à des revêtements réguliers particuliers, appelés  $\alpha$ -revêtements et notés  $Y^\alpha$ , définis pour tout  $\alpha > 0$  (voir la définition 3.22) qui coïncident avec le revêtement universel (quand il existe) dès que  $\alpha$  est suffisamment petit. Elles montrent en particulier que, si  $\alpha$  est suffisamment petit et si  $\alpha' < \alpha$ , alors on a la chaîne de revêtements

$$Y^{\alpha'} \longrightarrow \bar{Y} \longrightarrow Y^\alpha$$

Mais la preuve donnée ne permet ni d'évaluer la distance à partir de laquelle il existe un homomorphisme surjectif entre les groupes des transformations du revêtement universel, ni de calculer le réel  $\alpha$  (c'est-à-dire, qu'on ne sait pas à partir de quel  $\alpha > 0$ ,  $\bar{Y} = Y^\alpha$ , en particulier, on ne sait pas construire  $\bar{Y}$  à partir de  $Y$ ). Remarquons qu'il n'est toujours pas précisé si le revêtement universel de  $Y$  est simplement connexe sous ces hypothèses (cf [SW], où cette question est posée).

Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 3.4 mais en supposant de plus que la limite  $Y$  est une variété de même dimension que les variétés  $M_i$ , J. Cheeger et T. Colding prouvent le

**Théorème 3.5.** ([CC1], théorème A.112)

Soit  $(M_i, g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension  $m$  et vérifiant  $\text{Ricci}(M_i, g_i) \geq -(m-1)g_i$  qui converge vers une variété  $Y$  de même dimension  $m$ . Alors  $Y$  est difféomorphe aux variétés  $M_i$  lorsque  $i$  est suffisamment grand.

Certains auteurs ont également établis des résultats de finitude ou de stabilité topologique sans faire d'hypothèse sur la courbure des variétés étudiées. S. Ferry (voir [Fe]) et R. Greene-P. Petersen (voir [GP]) ont par exemple choisi de remplacer les hypothèses de courbure par des hypothèses sur la fonction de contractibilité que l'on définit de la manière suivante :

**Définition 3.6.**

Fixons une fonction continue  $\rho : [0, R] \rightarrow [0, +\infty)$  telle que  $\rho(0) = 0$  et  $\rho(r) \geq r$  pour tout  $r \in [0, R]$ . La fonction  $\rho$  est une fonction de contractibilité pour l'espace de longueur  $(X, d_X)$  si toute boule de rayon  $t \leq R$  est contractible dans une boule concentrique de rayon  $\rho(t)$ , c'est-à-dire que, dans l'espace des applications de  $B(x, t)$  dans  $B(x, \rho(t))$ , il existe une homotopie de l'inclusion canonique sur l'application constante.

Fixons un réel  $R > 0$  et une fonction  $\rho : [0, R] \rightarrow [0, +\infty)$  vérifiant les propriétés de la définition 3.6. Notons  $\mathcal{M}(m, \rho)$  l'ensemble des (classes d'isométrie des) espaces métriques qui admettent la fonction  $\rho$  comme fonction de contractibilité et dont la dimension de Hausdorff est  $m$ . Les travaux de S. Ferry (voir [Fe]) associés aux travaux de R. Greene-P. Petersen (voir [GP]) donnent le théorème de finitude suivant :

**Théorème 3.7.** ([Fe], théorème 2)

Si  $m \geq 4$ , la famille  $\mathcal{C}_{m, \rho, V_0}$  des classes d'isométrie des variétés riemanniennes qui appartiennent à  $\mathcal{M}(m, \rho)$  et dont le volume est majoré par  $V_0$  contient un nombre fini de types d'homéomorphismes.

Si  $m \geq 5$ , la famille  $\mathcal{C}_{m, \rho, V_0}$  contient un nombre fini de types de difféomorphismes.

D'autres résultats de ce type ont été établis dans le cadre des espaces de longueur :

**Définition 3.8.**

Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur. Nous appellerons rayon de simple-connexité locale et nous noterons  $r(Y, d_Y)$  le maximum des réels positifs  $r$  tels que tout lacet sur  $Y$  entièrement inclus dans une boule de rayon  $r$  soit homotope à zéro dans  $Y$ .

Remarquons que, si  $Y$  est compact et semi-localement simplement connexe,  $r(Y)$  est strictement positif.

Nous pouvons énoncer à présent la

**Proposition 3.9.** ([Tu1])

Soient  $(Y_1, d_1)$  et  $(Y_2, d_2)$  deux espaces de longueur compacts et localement simplement connexes. Si la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(Y_1, d_1)$  et  $(Y_2, d_2)$  est inférieure à  $\frac{r(Y_2, d_2)}{20}$ , il existe un morphisme surjectif du groupe fondamental de  $Y_1$  sur celui de  $Y_2$ .

En fait, ce résultat est énoncé dans [Tu1] (et corrigé dans [Tu2]) dans le cas particulier d'une suite de variétés riemanniennes de courbure sectionnelle bornée qui converge vers  $(Y_2, d_2)$ , mais la preuve de [Tu1] prouve la proposition 3.9.

Remarquons tout d'abord que ce résultat est plus un résultat de type "approximation" qu'un résultat de type "convergence" puisqu'il estime la distance à partir de laquelle le morphisme est surjectif. Cependant, la limite de cet énoncé réside dans le fait que cette distance dépend des objets  $Y_1$  et  $Y_2$  considérés, ce qui peut poser un problème quand  $Y_2$  n'est pas connu (en particulier, si c'est la limite d'une suite d'espaces métriques). Par ailleurs, ce résultat ne stipule pas si l'épimorphisme provient d'une application entre les revêtements universels des deux espaces de longueur. Plus précisément, si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux espaces topologiques compacts, et si  $\rho$  est un épimorphisme entre les groupes fondamentaux  $\pi_1(Y_1)$  et  $\pi_1(Y_2)$ , on peut se demander s'il existe une application  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  telle que  $f_* = \rho$  et si  $f$  se relève en une approximation de Gromov-Hausdorff équivariante entre les revêtements universels. La preuve de [Tu1] ne permet pas de répondre à cette question. On ne peut donc pas "comparer" les actions des groupes fondamentaux sur les revêtements.

S. Sabourau établit un résultat de stabilité du type d'homotopie sous l'hypothèse de minoration de la longueur du plus petit lacet géodésique (non constant) :

**Théorème 3.10.** ([Sa], proposition 3.5.4)

Soient  $(M, g_M)$  et  $(N, g_N)$  deux variétés riemanniennes compactes de même dimension  $m$  et dont la longueur du plus petit lacet géodésique (non constant) est supérieure à  $l_0$ . Si  $d_{GH}((M, g_M), (N, g_N)) \leq \beta_n l_0$  (où  $\beta_n = \frac{1}{16 \cdot 3^m} \frac{1}{4 \cdot 3^{m-1} - 1}$ ), alors les variétés  $M$  et  $N$  sont homotopiquement équivalentes.

On remarquera que, si la conclusion du théorème 3.10 est plus forte que celle de la proposition 3.9, son hypothèse est également plus forte puisqu'elle exige non seulement que le rayon de simple connexité locale soit minoré, mais aussi que la longueur des lacets géodésiques du revêtement universel soit minorée. Cette dernière hypothèse est indispensable puisque l'exemple 2.31 donne une suite de variétés riemanniennes compactes dont le rayon de simple connexité locale est minoré uniformément, dont la caractéristique d'Euler tend vers l'infini et qui convergent vers une variété de même dimension.

### Comparaison des hypothèses

#### Définition 3.11.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique qui admet un revêtement universel  $\tilde{X}$  (éventuellement non simplement connexe) et  $G(\tilde{X}, X)$  le groupe des transformations de son revêtement universel. Munissons alors  $\tilde{X}$  de l'unique distance, notée  $d_{\tilde{X}}$ , qui fait de l'application de revêtement  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  une isométrie locale (voir la proposition B.9). Nous appellerons alors systole de  $(X, d)$ , et nous noterons  $sys(X, d)$ , le réel

$$sys(X, d) = \inf\{d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})/\tilde{x} \in \tilde{X}, \gamma \in G(\tilde{X}, X) \setminus \{id\}\}$$

Si  $(X, d_X)$  est son propre revêtement universel, le groupe  $G(\tilde{X}, X)$  est trivial; dans ce cas on pose

$$sys(X, d) = +\infty$$

Dans cette thèse, nous travaillons avec des familles  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  de classes d'isométrie d'espaces métriques sur lesquelles la systole est uniformément minorée en fonction de l'entropie volumique (grâce à la version du lemme de Margulis sans courbure de [BCG1]), mais sur lesquelles il n'est pas possible d'assurer une minoration uniforme de la longueur du plus petit lacet géodésique ou de trouver une fonction de contractibilité uniforme (voir les exemples ?? et 3.16 ainsi que la remarque 3.17). Bien que ces résultats soient classiques, il nous a donc paru intéressant de comparer rapidement l'invariant "systole" avec les invariants "rayon de simple-connexité locale", "longueur du plus petit lacet géodésique" et "rayon de contractibilité", pour donner un aperçu des situations évitées sous les hypothèses des théorèmes 3.3, 3.10 et 3.7 mais qui peuvent se produire dans notre cas.

#### • Systole et rayon de simple-connexité locale :

#### Proposition 3.12.

Si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur, notons  $r(X, d_X)$  son rayon de simple-connexité locale (voir la définition 3.8) et  $sys(X, d_X)$  sa systole. Alors, si  $(X, d_X)$  est semi-localement simplement connexe

$$sys(X, d_X) = 2r(X, d_X)$$

et la systole de  $(X, d_X)$  est alors égale à la longueur du plus petit lacet non homotope à zéro sur  $X$ .

Si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur qui n'est pas semi-localement simplement connexe, alors  $r(X, d_X) = 0$

*Preuve de la proposition 3.12.*

Notons  $sys_l(X, d_X)$  l'infimum des longueurs des lacets non homotopes à zéro sur  $X$  et commençons par montrer que  $sys_l(X, d_X) = sys(X, d_X)$ .

A tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$  et à tout élément  $\gamma$  du groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des automorphismes du revêtement universel, on associe une courbe  $\tilde{c}$  minimisante qui joint  $\tilde{x}$  à  $\gamma.\tilde{x}$  et le lacet  $c = p \circ \tilde{c}$ , qui est non homotope à zéro car son relevé  $\tilde{c}$  n'est pas un lacet. Alors,  $\text{long}(c) = d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})$  et, en passant à l'infimum en  $\tilde{x}$  et en  $\gamma$ , on obtient

$$\text{sys}(X, d_X) \geq \text{sys}_l(X, d_X)$$

Réciproquement, si  $c$  est un lacet, fixons un point  $\tilde{x}$  dans  $p^{-1}[c(0)]$  et notons  $\tilde{c}$  le relevé de  $c$  d'origine  $\tilde{x}$ . Si  $c$  n'est pas homotope à zéro,  $\tilde{c}$  n'est pas un lacet et il existe un élément  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X)$  qui envoie l'origine sur l'extrémité de  $\tilde{c}$ . On en déduit que  $\gamma$  n'est pas l'identité et que  $\text{long}(c) = \text{long}(\tilde{c}) \geq d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})$ . En passant à l'infimum en  $c$ , on obtient

$$\text{sys}_l(X, d_X) \geq \text{sys}(X, d_X)$$

Considérons donc un lacet  $c$  non homotope à zéro sur  $X$ , dont le point-base est noté  $x_0$ . Par définition du rayon de simple-connexité locale, le lacet  $c$  sort nécessairement de la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $r(X, d_X)$ . Il s'ensuit que la longueur de  $c$  est supérieure ou égale à  $2r(X, d_X)$ . Comme ceci reste vrai pour tout lacet non homotope à zéro,

$$\text{sys}(X, d_X) \geq 2r(X, d_X)$$

Pour montrer l'inégalité inverse, nous allons commencer par vérifier qu'un lacet entièrement inclus dans une boule de rayon  $\frac{\text{sys}(X, d_X)}{2}$  se relève en un lacet sur le revêtement universel, donc est homotope à un point.

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du point (i) de la proposition 3.27, on montre que, pour tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$ , le revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  est un homéomorphisme de la boule  $B\left(\tilde{x}, \frac{\text{sys}(X, d_X)}{2}\right)$  sur la boule  $B\left(p(\tilde{x}), \frac{\text{sys}(X, d_X)}{2}\right)$ . Considérons un lacet  $c$ , de point-base  $x_0$ , entièrement inclus dans une boule  $B\left(x, \frac{\text{sys}(X, d_X)}{2}\right)$ . Choisissons un point  $\tilde{x}$  dans  $p^{-1}(\{x\})$ , comme  $p$  est un homéomorphisme de la boule  $\tilde{B} = B\left(\tilde{x}, \frac{\text{sys}(X, d_X)}{2}\right)$  sur  $B\left(x, \frac{\text{sys}(X, d_X)}{2}\right)$ , la courbe  $\tilde{c} = (p|_{\tilde{B}})^{-1} \circ c$  est un lacet relevé de  $c$ , donc homotope au point dans  $\tilde{X}$ . En composant par  $p$ , on obtient une homotopie de  $c$  sur le point dans  $X$ . Il s'ensuit que

$$\text{sys}(X, d_X) \leq 2r(X, d_X)$$

ce qui termine la preuve de la proposition 3.12 □

• **Systole et plus petit lacet géodésique :**

**Fait 3.13.**

Fixons une variété riemannienne  $(X, g)$  compacte dont le plus petit lacet géodésique est de longueur  $L$ . Alors,  $sys(X, g) \geq L$ .

*Preuve du fait 3.13.*

Considérons une variété riemannienne compacte  $(X, g)$ , son revêtement universel  $p : (\tilde{X}, \tilde{g}) \rightarrow (X, g)$  et son groupe des automorphismes du revêtement universel  $G(\tilde{X}, X)$ . Remarquons tout d'abord que si la variété  $X$  est compacte, on a

$$sys(X, g) = \min\{d_{\tilde{g}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})/\tilde{x} \in \tilde{X}, \gamma \in G(\tilde{X}, X) \setminus \{id\}\}$$

Choisissons donc un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$  ainsi qu'un élément  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X) \setminus \{id\}$  tel que  $sys(X, g) = d_{\tilde{g}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})$ . Fixons une géodésique  $c$  minimisante entre  $\tilde{x}$  et  $\gamma.\tilde{x}$ . Alors, la géodésique  $c$  se projette sur  $X$  en un lacet géodésique  $p(c)$  de point base  $p(\tilde{x})$  et de même longueur que  $c$ . Finalement,

$$sys(X, d) = \text{long}_{\tilde{g}}(c) = \text{long}_g(p(c)) \geq L$$

ce qui termine la preuve du fait 3.13. □

En fait, sur une variété riemannienne compacte  $(X, g)$ , la systole  $sys(X, d_g)$  est la longueur du plus petit lacet géodésique non homotope au point (qui est automatiquement une géodésique périodique) alors que  $L$  est la longueur du plus petit lacet géodésique, qu'il soit homotope à zéro ou non.

**Exemple 3.14.** *Une suite d'espaces de longueur compacts pour laquelle la systole est uniformément minorée tandis que la longueur du plus petit lacet géodésique tend vers zéro.*

*Construction de l'exemple 3.14.*

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif fixé.

Fixons une variété hyperbolique compacte  $(M_0, g_0)$  de dimension au moins trois dont le rayon d'injectivité est noté  $i_0$ . Soit  $c_1$  une géodésique périodique non homotope à zéro dont la longueur est égale à  $2i_0 = sys(M_0, g_0)$ .

On excise alors sur  $M_0$  une boule  $B$  qui ne rencontre pas  $c_1$ , dont le rayon est inférieur à  $i_0$  et dont le bord (en tant que sous-variété riemannienne) est de diamètre inférieur à  $\varepsilon$ . On recolle un cylindre  $\partial B \times [0, 1]$  le long de  $\partial B$ , sur lequel on recolle une sphère euclidienne  $\mathbb{S}^3(\varepsilon)$  de rayon  $\varepsilon$ , donc de diamètre  $\pi\varepsilon$ . Nous noterons  $(Y_\varepsilon, d_\varepsilon)$  l'espace de longueur ainsi obtenu (voir la figure 3.1).

Il existe alors sur  $\mathbb{S}^3(\varepsilon)$  une géodésique périodique  $c_2$  de longueur  $\pi\varepsilon$ .

Par ailleurs, comme on l'a déjà montré dans la preuve du lemme 2.27, si  $c$  est un lacet géodésique minimisant (dans une classe d'homotopie non triviale)

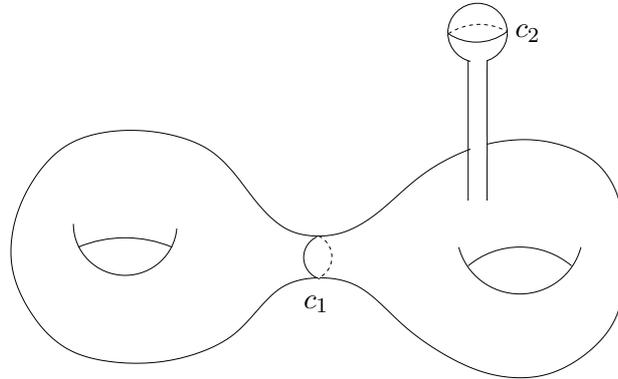


FIG. 3.1 – Exemple 3.14

de  $Y_\varepsilon$  (pour la métrique construite ci-dessus) qui rencontre  $\partial B \times [0, 1]$ , la courbe  $c$  reste alors dans  $Y_\varepsilon \setminus [(\partial B \times [0, 1]) \cup \mathbb{S}^3(\varepsilon)]$  et, comme la longueur de  $c$  dans  $Y_\varepsilon$  est alors égale à sa longueur pour la métrique  $g_0$  sur  $M_0$ , elle est minorée par la systole de  $(M_0, g_0)$ , ceci implique que

$$\text{sys}(Y_\varepsilon, d_\varepsilon) \geq \text{sys}(M_0, g_0) = 2i_0$$

La systole de  $(Y_\varepsilon, d_\varepsilon)$  est donc minorée indépendamment de  $\varepsilon$  mais il existe un lacet géodésique sur  $Y_\varepsilon$  de longueur  $\pi\varepsilon$ . La suite des espaces de longueur  $((Y_{1/n}, d_{1/n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  possède donc les propriétés annoncées dans l'exemple ??.

□

• **Systole et fonction de contractibilité locale :**

**Fait 3.15.**

Considérons un espace de longueur  $(X, d)$  semi-localement simplement connexe et compact. Si  $\rho : [0, R] \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction de contractibilité locale sur  $(X, d)$ , alors  $\text{sys}(X, d) \geq 2R$ .

*Preuve du fait 3.15.*

Si  $c$  est un lacet de point-base  $x_0$  entièrement inclus dans la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $R$ , il est homotope à zéro dans la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $\rho(R)$ , donc dans  $X$ . Il en découle que, si  $c$  est un lacet non homotope à zéro de point-base  $x$ , il sort nécessairement de la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$  et sa longueur est alors supérieure à  $2R$ . Le fait 3.15 en découle. □

**Exemple 3.16.** Une suite d'espaces de longueurs compacts pour laquelle la systole est uniformément minorée tandis qu'il n'existe pas de fonction de contractibilité uniforme.

*Construction de l'exemple 3.16.*

Soit  $(M_0, g_0)$  une variété hyperbolique compacte de dimension  $m \geq 3$ , dont la systole est réalisée par la longueur d'une courbe qui sera notée  $c$ . Soit  $x_0$

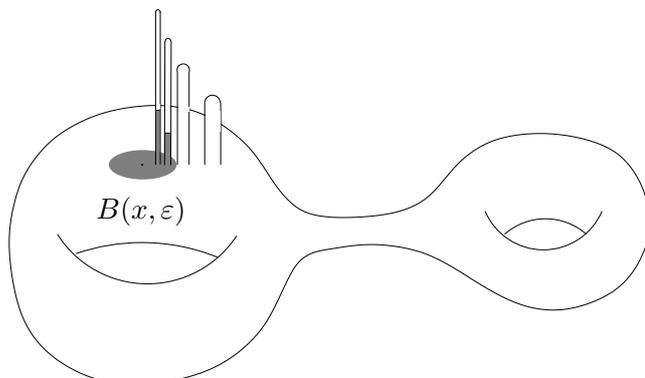


FIG. 3.2 – Exemple 3.16

un point fixé sur  $M_0$ .

Pour tout entier  $k \geq 3$ , on considère une boule  $B_k$  de rayon  $\varepsilon_k = \frac{1}{20k^2}$  et dont le centre  $x_k$  vérifie

$$d_{g_0}(x_0, x_k) = \frac{1}{k}$$

On construit alors l'espace de longueur  $(X_n, d_n)$  en excisant les boules  $(B_k)_{k=1\dots n}$  et en recollant, le long de chaque  $\partial B_k$ , un cylindre  $\partial B_k \times [0, 1]$  sur lequel on recolle une sphère, que nous noterons  $S_k$ .

Comme dans l'exemple ??, la systole de  $(X_n, d_n)$  est supérieure à la systole de  $(M_0, g_0)$  (c'est là aussi, un corollaire de la méthode de la preuve du lemme 2.27).

En revanche, il n'existe pas de fonction de contractibilité uniforme pour la famille  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Raisonnons en effet par l'absurde et supposons qu'il existe un réel  $R > 0$  et une fonction continue

$$\rho : [0, R] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que

- $\rho(0) = 0$ ,
- pour tout  $r \leq R$ ,  $\rho(r) \geq r$
- pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , toute boule de rayon  $r \leq R$  sur  $X_n$  est contractable dans la boule concentrique de rayon  $\rho(r)$ .

Comme  $\rho$  est continue et  $\rho(0) = 0$ , il existe un réel  $r_0$  tel que  $\rho(r_0) \leq \min\{\frac{1}{2}, \frac{\text{inj}(M_0, g_0)}{2}\}$ .

Par ailleurs, si  $n$  est assez grand pour que  $\frac{1}{n} + 2\varepsilon_n + \pi \sinh \varepsilon_n < r_0$ , la boule  $B_n$  a son adhérence entièrement incluse dans la boule  $B(x_0, r_0 - \pi\varepsilon_n)$ .

Nous noterons  $B(x, r)$  les boules de  $(M_0, g_0)$  et  $B'(x, r)$  les boules de  $(X_n, d_n)$ . Nous avons prouvé que  $B'(x_0, r_0)$  contient  $C_0 := B(x_0, \frac{1}{n} + 2\varepsilon_n) \setminus B_n$  (puisque  $d_n(x_0, x) \leq d_{g_0}(x_0, x) + \pi \sinh \varepsilon_n$  pour tout point  $x$  de  $C_0$  qui ne rencontre aucune des autres boules  $B_k$  pour  $k < n$ ). Comme  $d_n(x_0, x) \geq d_{g_0}(x_0, x)$  quand  $x$  appartient à  $B(x_0, \rho(r_0)) \setminus (\cup_{k \in \{1..n\}} B_k)$  (d'après la preuve du lemme 2.27),

comme la boule  $B(x_0, \rho(r_0))$  est homéomorphe à  $B^n$  et comme on ne change rien à sa topologie en excisant un certain nombre de boules  $B_k$  que l'on remplace par  $(\partial B_k \times [0, 1]) \cup S_k$ , la boule  $B'(x_0, \rho(r_0))$  est incluse dans un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$ , qui contient  $C_0$  et est homéomorphe à  $B^m$ , donc homéomorphe à  $\mathbb{R}^m$ . En fait,  $B'(x_0, \rho(r_0))$  est inclus dans  $U \setminus S_n \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  puisque tout chemin qui joint un point  $z$  de  $S_n$  à  $x_0$  rencontre  $\partial B_k \times \{1\}$  et  $\partial B_k \times \{0\}$  : sa longueur est donc minorée par  $d_n(\partial B_k \times \{0\}, \partial B_k \times \{1\}) = 1$ . Si la boule  $B'(x_0, \rho(r_0))$  se contractait sur un point dans  $B'(x_0, \rho(r_0))$ , alors  $C_0$  se contracterait sur un point dans  $U \setminus S_n$ , ce qui impliquerait (via l'homéomorphisme ci-dessus qui envoie  $U$  sur  $\mathbb{R}^m$  et  $x_k$  sur  $O$ , donc  $C_0$  sur une couronne entourant  $O$ ) que  $B^m \setminus \frac{1}{2}B^m$  se contracte sur un point dans  $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , ce qui est impossible.

Il n'existe donc pas de fonction de contractibilité uniforme sur  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et la suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est un exemple de suite d'espaces de longueurs compacts pour laquelle la systole est uniformément minorée tandis qu'il n'existe pas de fonction de contractibilité uniforme.  $\square$

**Remarque 3.17.** *Si les variétés construites dans les exemples ?? et 3.16 sont de dimension supérieure ou égale à trois, elles sont toutes de diamètre et d'entropie uniformément majorés (voir la proposition 2.24) et ont un groupe fondamental isomorphe au groupe fondamental de la variété de départ. On peut donc construire une famille de telles variétés qui appartiennent toutes à une même famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  (que nous étudions dans la suite de cette thèse). Ceci implique que, sous nos hypothèses, nous ne pouvons pas espérer l'existence d'une fonction de contractibilité uniforme ou la minoration uniforme de la longueur du plus petit lacet géodésique différent du lacet constant.*

## 3.2 La famille $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$

Nous définissons ici la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  sur laquelle portent les travaux présentés dans ce chapitre et nous donnons quelques premières propriétés.

### Définition 3.18.

*Fixons arbitrairement trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ .*

*Nous noterons  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  l'ensemble des (classes d'isométrie des) espaces de longueur compacts (connexes) qui admettent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont l'entropie volumique (par rapport à ce revêtement universel) est majorée par  $H$ , dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont le groupe des transformations de revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien (voir la définition E.1 et de nombreux exemples dans [BCG1], pages 9 à 13) et de centre réduit à zéro.*

Notons que la collection des espaces de longueur compacts n'est pas un ensemble. Cependant, par la suite, nous considérerons chaque espace mé-

trique "à isométrie près" et nous parlerons, par abus de langage, de "l'ensemble des espaces métriques".

Une des grandes caractéristiques de ces familles d'espaces de longueur est qu'un lemme de Margulis (sans hypothèse de courbure) a été établi dans [BCG1] sur  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  (voir un bref résumé dans l'annexe E). La systole de n'importe quel espace de longueur qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  est en particulier minorée uniquement en fonction de  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ .

**Remarque 3.19.**

(i) Pour que la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  soit non vide, il est nécessaire que

$$2D > \frac{\delta \log 2}{(4 + \delta)H}$$

(ii) Nous avons montré dans le corollaire 2.29 que, même si l'on se restreint à la sous-famille des éléments de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  qui sont des variété riemanniennes, celle-ci n'est pas précompacte dans la famille des espaces de longueur compacts munie de la distance de Gromov-Hausdorff.

(iii) Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel, dont les groupes de transformations du revêtement universel sont  $\delta$ -non-abéliens et de centre réduit à zéro et dont l'entropie est majorée par  $H$ . Posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-\frac{5}{2} \frac{(4+\delta)}{\delta} HD}$$

où  $D$  est un majorant du diamètre de  $(X, d_X)$ . Si la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ , alors les espaces  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  appartiennent tous les deux à  $\mathcal{M}_{\delta,H,\frac{5}{4}D}$ .

*Preuve de la remarque 3.19.*

S'il existe un espace de longueur  $(X, d_X)$  qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , d'après le théorème 2.1 (iv) de [BCG1], on a

$$HD \geq Ent(X, d_X) \cdot diam(X, d_X) \geq \frac{\delta \log 2}{2(4 + \delta)}$$

ce qui prouve le point (i).

De (i), on déduit que  $\varepsilon_0 < \frac{3}{2}D$ . Cette inégalité et l'hypothèse sur la distance de Gromov-Hausdorff impliquent que

$$diam(Y, d_Y) \leq diam(X, d_X) + 2\frac{\varepsilon_0}{13} \leq \frac{5}{4}D$$

donc l'espace de longueur  $(Y, d_Y)$  appartient à  $\mathcal{M}_{\delta,H,\frac{5}{4}D}$ . □

**Remarque 3.20.** *Si l'on ne s'intéresse (dans un premier temps) qu'à la sous-famille des éléments de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  qui sont des variétés riemanniennes, nous avons déjà remarqué dans le chapitre 2 que la famille des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m \geq 3$ , d'entropie majorée par  $(m-1)$  et de diamètre inférieur à  $D$  est bien plus vaste que la famille des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$ , dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(m-1)g$  et de diamètre inférieur à  $D$ . Nous avons rajouté ici une hypothèse algébrique qui, dans le cas des variétés, s'écrit : "le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro" et l'on peut se demander si cette adjonction ne réduit pas exagérément la taille de cette famille de variétés et la généralité des résultats qui y seront valables.*

*Une première réponse à cette question est le point (ii) de la remarque 3.19, qui établit que la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  n'est pas précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff.*

*Plus généralement, tous les exemples de variétés riemanniennes que nous avons construites dans les exemples 2.33 et 2.31 (à partir de la proposition 2.24, en ôtant à une variété  $(X, g)$  des petites boules en nombre arbitraires et en y recollant des variétés simplement connexes au bout de cylindres) sont (comme nous l'avons prouvé à la fin du chapitre 2) d'entropie et de diamètre majorés par une même valeur de  $H$  et de  $D$ , mais de plus, leur groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien (pour une même valeur de  $\delta > 0$ ) et de centre réduit à zéro dès que la variété  $(X, g)$  de départ est compacte, de courbure sectionnelle strictement négative. En effet, le groupe fondamental de  $X$  est  $\delta$ -épais (voir la définition de cette notion dans la définition E.1), donc a fortiori  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, pour un  $\delta = \delta_0(X, g) = \text{inj}(X, g) \sqrt{-\max(K_{X,g})}$ , où  $\max(K_{X,g})$  est le maximum (sur tous les deux plans tangents) des courbures sectionnelles de  $(X, g)$ . Ainsi, on obtient les exemples suivants :*

- *Toute variété compacte de courbure strictement négative  $(X^{2m}, g)$  (où  $m \geq 2$ ) est la limite (au sens de Gromov-Hausdorff) d'une suite de variétés riemanniennes  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  (où  $\delta = \delta_0(X, g)$ ,  $H = \text{Ent}(X, g)$  et  $D = \text{diam}(X, g) + \varepsilon$ ) telles que la caractéristique d'Euler de  $M_n$ , notée  $\chi_n$ , est différente de la caractéristique d'Euler de  $X$  et  $\chi_n$  tend vers l'infini (il suffit de reprendre l'exemple 2.31).*
- *Sur toute variété compacte  $(X^m, g)$  (où  $m \geq 3$ ) de courbure strictement négative, l'ensemble des métriques riemanniennes d'entropie et de diamètre majorés par  $H$  et  $D$  est inclus dans  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  pour tout  $\delta \leq \delta_0(X, g)$ . En particulier, il existe des suites  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de métriques telles que  $(X, g_n)$  appartient à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ ,  $\text{Vol}(X, g_n)$  tend vers l'infini et qui convergent (au sens de Gromov-Hausdorff) vers  $(X, g)$  (voir l'exemple 2.33).*

*En revanche, l'hypothèse algébrique sur le groupe fondamental que l'on a rajoutée permet quand même d'espérer un peu plus de rigidité topologique ;*

en effet, si l'on ne suppose pas que le groupe fondamental des variétés considérées est  $\delta$ -non-abélien, on ne peut même pas espérer une stabilité du groupe fondamental, puisqu'il existe une suite de tores plats (donc d'entropie nulle), de dimension de plus en plus grande, qui convergent vers un bouquet de cercles pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir l'exemple 1.1 de [Pl]). L'hypothèse algébrique imposée sur les variétés de la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  n'est pas vérifiée par les groupes fondamentaux des tores, ce qui permet d'espérer qu'il existe un résultat de stabilité du groupe fondamental sur  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , seul résultat de stabilité topologique que l'on peut envisager obtenir sur  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ .

### 3.3 Rappels sur les $\alpha$ -revêtements

Dans cette section, nous introduisons des revêtements intermédiaires réguliers (ou galoisiens) d'un espace de longueur, qui sont amplement utilisés dans les ouvrages classiques sur les revêtements et dont les propriétés de convergence (à courbure de Ricci minorée) ont été largement étudiées dans [SW].

#### Définition d'un $\alpha$ -revêtement

Sur tout espace topologique  $X$  (connexe par arcs et localement connexe par arcs), on peut construire des sous-groupes normaux  $H$  du groupe fondamental de  $X$  de la manière suivante : soit  $x$  un point de  $X$ , considérons un recouvrement  $U = (U_i)_{i \in I}$  de  $X$  par des ouverts  $U_i$ . Considérons le sous-groupe normal (noté  $\pi_1(X, U, x)$ ) de  $\pi_1(X, x)$  engendré par les classes d'homotopie des lacets qui peuvent s'écrire sous la forme  $\gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma$ , où  $\beta$  est un lacet entièrement inclus dans un des ouverts  $U_i$  et  $\gamma$  est un chemin qui relie  $x$  et  $\beta(0)$ . On a alors la

**Proposition 3.21.** ([Sp], p.82)

Soit  $X$  un espace topologique (connexe par arcs et localement connexe par arcs). Il existe un revêtement topologique régulier  $p : X^U \rightarrow X$  tel que, si  $x$  est un point de  $X$  et si  $\tilde{x}$  est un élément de  $p^{-1}(x)$ , alors  $p_*[\pi_1(X^U, \tilde{x})] = \pi_1(X, U, x)$ . Le groupe de transformations de revêtement  $G(X^U, X)$  est alors isomorphe à  $\pi_1(X, x)/\pi_1(X, U, x)$ .

**Définition 3.22.**

On reprend le procédé de construction d'un revêtement associé à un recouvrement  $U$  décrit ci-dessus, en privilégiant les revêtements du type  $(B(x, \alpha))_{x \in X}$ , où  $B(x, \alpha)$  est la boule de  $(X, d)$  de centre  $x$  et de rayon fixé  $\alpha$  ; on appelle  $\alpha$ -revêtement (noté  $p_\alpha : X^\alpha \rightarrow X$ ) le revêtement associé à ce recouvrement (dont l'existence est assurée par la proposition 3.21). On munit alors l'espace  $X^\alpha$  de la distance de longueur induite par celle de  $X$ , qui fait de  $p_\alpha$  une

isométrie locale (ce qui est rendu possible par la proposition B.9).  
 Nous noterons  $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$  le groupe  $\pi_1(X, (B(x, \alpha))_{x \in X}, x_0)$ .

### Premières propriétés

La famille des revêtements  $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}$  ainsi définie est décroissante par rapport à  $\alpha$  dans le sens suivant :

**Propriété 3.23.** ([SW], p.3592)

Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux réels strictement positifs tels que  $\alpha_1 < \alpha_2$ , il existe un revêtement  $p : X^{\alpha_1} \longrightarrow X^{\alpha_2}$ .

Remarquons qu'un revêtement régulier d'un espace de longueur n'est pas nécessairement un  $\alpha$ -revêtement. Cependant, lorsqu'un espace de longueur  $X$  est connexe, localement compact et semi-localement simplement connexe et lorsque  $\alpha > 0$  est suffisamment petit, le  $\alpha$ -revêtement  $X^\alpha \longrightarrow X$  est le revêtement universel. Inversement, on peut montrer (voir par exemple [SW]) que, si le revêtement universel de  $X$  existe (même s'il n'est pas simplement connexe), il existe  $\alpha > 0$  tel que le revêtement universel coïncide avec le  $\alpha$ -revêtement de  $X$ . Plus généralement, on a l'équivalence suivante :

**Théorème 3.24.** ([SW], théorème 3.7)

Un espace de longueur compact  $(X, d)$  (qui n'est pas nécessairement supposé semi-localement simplement connexe) admet un revêtement universel si et seulement si il existe un réel strictement positif  $\alpha_0$  (qui dépend de  $X$ ) tel que, pour tout  $\alpha$  strictement inférieur à  $\alpha_0$ , les revêtements  $p_\alpha : X^\alpha \longrightarrow X$  et  $p_{\alpha_0} : X^{\alpha_0} \longrightarrow X$  coïncident. Dans ce cas, le revêtement universel de  $X$  est  $p_{\alpha_0} : X^{\alpha_0} \longrightarrow X$ .

### Propriétés classiques des $\alpha$ -revêtements

Nous donnons ici quelques propriétés de base sur les  $\alpha$ -revêtements, propriétés dont nous nous servons abondamment par la suite, en particulier dans les preuves des résultats principaux de ce chapitre (le théorème 3.30 et le corollaire 3.32).

Commençons par rappeler une propriété générale des revêtements :

**Proposition 3.25.** ([Go], proposition 2.7, p131)

Soit  $p : E \longrightarrow B$  un revêtement d'un espace topologique  $B$  connexe par arcs. Soit  $x$  un point de  $E$  et  $b = p(x)$ . Si  $c$  et  $c'$  sont deux lacets de base  $b$  dans  $B$ , leurs relevés  $\gamma$  et  $\gamma'$  dans  $E$  d'origine  $x$  ont même extrémité si et seulement si les classes d'homotopie  $[c]$  et  $[c']$  des lacets  $c$  et  $c'$  vérifient

$$[c].[c']^{-1} \in p_*[\pi_1(E, x)]$$

Dans le cas particulier où  $p$  est un  $\alpha$ -revêtement, par construction de  $p$  et d'après la proposition 3.21, on obtient la

**Proposition 3.26.**

Soit  $p_\alpha : (X^\alpha, d_{X^\alpha}) \longrightarrow (X, d_X)$  un revêtement de longueur de l'espace de longueur compact  $(X, d_X)$  et soit  $x_0$  un point de  $X$ . Le relevé d'un lacet  $c$  sur  $X$  de point-base  $x_0$  est un lacet de  $X^\alpha$  si et seulement si la classe de  $c$  dans  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$  est nulle.

En particulier, deux courbes  $c^\alpha$  et  $\gamma^\alpha$  sur  $X^\alpha$  de même origine  $x^\alpha$  ont même extrémité si et seulement si leurs projetés  $c$  et  $\gamma$  ont mêmes extrémités et si la classe du lacet  $c.\gamma^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_\alpha, p_\alpha(x^\alpha))$ .

**Propriété 3.27.**

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact et considérons son  $\alpha$ -revêtement de longueur  $p_\alpha : (X^\alpha, d_{X^\alpha}) \longrightarrow (X, d_X)$ , où  $d_{X^\alpha}$  est la distance relevée de  $d_X$ . Alors, pour tout point  $\tilde{x}$  de  $X^\alpha$ , l'application  $p_\alpha$  (en restriction) est

- (i) un homéomorphisme de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$  sur  $B_X(x, r)$  (où  $x = p_\alpha(\tilde{x})$ ) si  $r \leq \alpha$
- (ii) une isométrie globale de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$  sur  $B_X(x, r)$  si  $r \leq \alpha/2$ .

*Preuve de la propriété 3.27.*

Remarquons tout d'abord que l'application  $p_\alpha$  est contractante; il en découle que  $p_\alpha[B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)]$  est inclus dans  $B_X(x, r)$ .

**• L'application  $p_\alpha$  est injective :**

Soit  $r$  un réel fixé inférieur ou égal à  $\alpha$ , fixons un point  $x^\alpha$  de  $X^\alpha$  et considérons un point  $\tilde{x}$  quelconque de  $X^\alpha$ .

Si deux points  $\tilde{z}_1$  et  $\tilde{z}_2$  de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$  sont tels que  $p_\alpha(\tilde{z}_1) = p_\alpha(\tilde{z}_2)$ , notons  $\tilde{c}$  un chemin minimisant de  $x^\alpha$  à  $\tilde{x}$  et  $\tilde{\gamma}_1$  (respectivement  $\tilde{\gamma}_2$ ) un chemin minimisant de  $\tilde{x}$  à  $\tilde{z}_1$  (respectivement  $\tilde{z}_2$ ). Posons

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{c}_1 &= \tilde{c}.\tilde{\gamma}_1 & \bullet c_1 &= p_\alpha(\tilde{c}_1) & \bullet \gamma_1 &= p_\alpha(\tilde{\gamma}_1) \\ \bullet \tilde{c}_2 &= \tilde{c}.\tilde{\gamma}_2 & \bullet c_2 &= p_\alpha(\tilde{c}_2) & \bullet \gamma_2 &= p_\alpha(\tilde{\gamma}_2) \end{aligned}$$

Si  $x_0 = p_\alpha(x^\alpha)$ , le chemin  $c_1.c_2^{-1} = c.(\gamma_1.\gamma_2^{-1}).c^{-1}$  est un lacet représentant un élément de  $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$  (car les chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont contenus dans la boule  $B_X(x, \alpha)$  puisque  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  sont contenus dans  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$  et que  $p_\alpha$  est contractante). D'après la proposition 3.26, les relevés  $\tilde{c}_1$  et  $\tilde{c}_2$  de  $c_1$  et  $c_2$  issus de  $x^\alpha$  ont la même extrémité et  $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2$ .

**• L'application  $p_\alpha$  est surjective :**

Soit  $z$  un point de  $B_X(x, r)$  et notons  $c$  un chemin minimisant (donc de longueur inférieure à  $r$ ) de  $x$  à  $z$ . Ce chemin peut se relever en un chemin  $\tilde{c}$  d'origine  $\tilde{x}$  de même longueur (car le revêtement  $p_\alpha$  est une isométrie locale). Ceci implique que  $p_\alpha[\tilde{c}(1)] = z$  et, comme

$$d_{X^\alpha}(\tilde{x}, \tilde{c}(1)) \leq \text{long}_{X^\alpha}(\tilde{c}) = \text{long}_X(c) < r$$

le point  $\tilde{c}(1)$  appartient bien à la boule  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$ .

• **L'application  $p_\alpha$  est ouverte :**

Pour tout  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < \alpha$ , nous venons de voir que  $p_\alpha$  envoie la boule  $B_{X^\alpha}(\tilde{z}, \varepsilon)$  surjectivement sur  $B_X(p_\alpha(\tilde{z}), \varepsilon)$ . En particulier,  $p_\alpha$  est une application ouverte.

Finalement, comme le revêtement  $p_\alpha$  est de plus continu, c'est un homéomorphisme. Ceci achève la preuve du point (i).

• **Preuve du point (ii) :**

Fixons un réel  $0 < r \leq \frac{\alpha}{2}$ .

Tout d'abord, l'application  $p_\alpha$  est contractante.

Inversement, fixons deux points  $\tilde{z}_1$  et  $\tilde{z}_2$  de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$ . Alors,  $z_1 = p_\alpha(\tilde{z}_1)$  et  $z_2 = p_\alpha(\tilde{z}_2)$  sont deux points de  $B_X(x, r)$ . Notons  $c$  un chemin minimisant qui les joint dans  $X$ ; ce chemin est contenu dans  $B_X(x, \alpha)$  lorsque  $r \leq \alpha/2$  (car la distance entre les points  $z_1$  et  $z_2$  est strictement inférieure à  $2r$ , donc la longueur de la courbe minimisante  $c$  est également inférieure à  $2r$ ; ainsi, pour tout  $t$ ,  $\inf[d_X(c(t), z_1), d_X(c(t), z_2)] < r$  et, par l'inégalité triangulaire,  $d_X(c(t), x) < 2r$ ). Comme  $p_\alpha$  est un homéomorphisme de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, \alpha)$  sur  $B_X(x, \alpha)$ , le chemin  $\tilde{c} = [p_{\alpha|B_{X^\alpha}(\tilde{x}, \alpha)}]^{-1}(c)$  est un relevé de  $c$  qui joint  $\tilde{z}_1$  et  $\tilde{z}_2$  et qui est contenu dans  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, \alpha)$ . On a donc

$$d_{X^\alpha}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \leq \text{long}(\tilde{c}) = \text{long}(c) = d_X(z_1, z_2)$$

et l'application  $p_\alpha$  est un isométrie globale de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$  sur  $B_X(x, r)$  si  $r \leq \alpha/2$ .  $\square$

**Fait 3.28.**

Fixons trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $D$  et  $H$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Considérons un espace de longueur compact  $(X, d_X)$  qui admet un revêtement universel  $(\tilde{X}, d_{\tilde{X}})$  (pas nécessairement supposé simplement connexe), tel que le groupe des automorphismes de ce revêtement soit  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro. Si le diamètre de  $(X, d_X)$  est majoré par  $D$  et si son entropie est majorée par  $H$ , alors, pour tout  $0 < \alpha \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , le revêtement universel  $(\tilde{X}, d_{\tilde{X}})$  coïncide avec le  $\alpha$ -revêtement de  $X$  (ou, ce qui revient au même, pour tout  $\alpha \in ]0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$ , les groupes  $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$  et  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  coïncident).

*Preuve de la remarque 3.28.*

Notons  $\Gamma = G(X^\alpha, X)$  le groupe des transformations du revêtement  $p_\alpha : X^\alpha \rightarrow X$  (notons que  $\Gamma$  est isomorphe à  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$ ). Alors, comme  $p_\alpha$  est un revêtement régulier, le groupe  $\Gamma$  opère transitivement sur chaque fibre  $p_\alpha^{-1}(x)$  et, en supposant  $\alpha$  suffisamment petit, ce revêtement est le revêtement universel  $\tilde{X} \rightarrow X$  (voir [SW], proposition 3.2). La proposition E.2 prouvée dans [BCG1] (théorème 2.1) implique alors que

la distance entre deux points (distincts) de  $p_\alpha^{-1}(x)$  est supérieure ou égale à  $\varepsilon_0$ . En utilisant les mêmes arguments que ceux de la preuve de la propriété 3.27, on montre que  $p_\alpha$  est un homéomorphisme de  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, \frac{\varepsilon_0}{2})$  sur  $B_X(p_\alpha(\tilde{x}), \frac{\varepsilon_0}{2})$  pour tout point  $\tilde{x}$  de  $X^\alpha$ . Ainsi, si le point  $\tilde{x}$  appartient à  $p_\alpha^{-1}(x)$ , tout lacet  $c$  de  $X$  contenu dans une boule  $B_X(x, \frac{\varepsilon_0}{2})$  se relève en un lacet  $[p_{\alpha|B_{X^\alpha}(\tilde{x}, \varepsilon_0/2)}]^{-1} \circ c$  qui est inclus dans la boule  $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, \frac{\varepsilon_0}{2})$ . Il découle de la proposition 3.26, que la classe dans  $\pi_1(X, x_0)$  du lacet  $c$  appartient à  $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$ . Finalement, le groupe  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  est inclus dans le groupe  $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$ . Comme l'inclusion inverse est évidente, on obtient ainsi la remarque 3.28.  $\square$

## 3.4 Construction d'approximations équivariantes entre revêtements

### 3.4.1 Énoncé du théorème 3.30

On rappelle que la définition de la distance de Gromov-Hausdorff choisie dans cette thèse est la

#### Définition 3.29.

La distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est l'infimum des  $\varepsilon > 0$  tels qu'il existe deux  $\varepsilon$ -approximations (voir la définition 3.29)  $\varphi : X \rightarrow Y$  et  $\psi : Y \rightarrow X$  telles que, pour tout point  $x$  de  $X$  et tout point  $y$  de  $Y$ ,

$$d_X(\psi \circ \varphi(x), x) < \varepsilon$$

et

$$d_Y(\varphi \circ \psi(y), y) < \varepsilon$$

Commençons par donner une version très générale du résultat avant de faire quelques remarques et de réécrire ce théorème dans un cas particulier (voir le corollaire 3.32). La preuve se situe dans la section suivante.

#### Théorème 3.30.

Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Fixons arbitrairement deux réels  $\varepsilon$  et  $\alpha$  tels que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et  $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ .

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact (connexe) quelconque, qui admet un revêtement universel (pas nécessairement simplement connexe), tel que le groupe des automorphismes de ce revêtement soit  $\delta$ -non-abélien et

de centre réduit à zéro. Supposons de plus que le diamètre et l'entropie de  $(X, d_X)$  sont respectivement majorés par  $D$  et  $H$ .

Soit  $(Y, d_Y)$  n'importe quel espace de longueur compact (connexe).

Si la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ ,

(i) il existe un isomorphisme  $\bar{\rho}$  entre le groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des automorphismes du revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  et le groupe  $G(Y^\alpha, Y)$  des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$ .

(ii) il existe deux applications

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow Y^\alpha$$

$$\tilde{\psi} : Y^\alpha \rightarrow \tilde{X}$$

telles que, pour tout élément  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X)$  et tout élément  $\beta$  de  $G(Y^\alpha, Y)$ , on ait

- $\tilde{\varphi} \circ \gamma = \bar{\rho}(\gamma) \circ \tilde{\varphi}$
- $\tilde{\psi} \circ \beta = (\bar{\rho})^{-1}(\beta) \circ \tilde{\psi}$

De plus, les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  vérifient les inégalités suivantes :

- pour tous les points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $\tilde{X}$ , on a

$$\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon \leq d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon$$

- pour tous les points  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  de  $Y^\alpha$ , on a

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon \leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon$$

- pour tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$ ,

$$d_{\tilde{X}}((\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x}), \tilde{x}) < \varepsilon$$

- pour tout point  $\tilde{y}$  de  $Y^\alpha$ ,

$$d_{Y^\alpha}((\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(\tilde{y}), \tilde{y}) < \varepsilon$$

### Remarque 3.31.

(i) Remarquons que les quatre dernières propriétés des applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  signifient que ce sont des approximations de Hausdorff entre  $(\tilde{X}, d_{\tilde{X}})$  et  $(Y^\alpha, d_{Y^\alpha})$ , qui sont presque "inverse" l'une de l'autre. Plus exactement, l'application  $\tilde{\varphi}$  est une application de  $\tilde{X}$  sur  $Y^\alpha$  qui est une  $\left(\left(\frac{3\varepsilon}{2\alpha-3\varepsilon}\right)R + 2\varepsilon\right)$ -approximation de Hausdorff entre les boules de rayon  $R$  de  $\tilde{X}$  et  $Y^\alpha$  centrées en des points  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{y}_0 = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_0)$ .

Le point (i) et les deux premières propriétés du point (ii) signifient qu'il existe de plus un isomorphisme  $\bar{\rho}$  entre le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $X$  et le groupe des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement de  $Y$  tel que les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  soient respectivement  $\bar{\rho}$ -équivariante et  $(\bar{\rho})^{-1}$ -équivariante.

(ii) Les hypothèses  $5\varepsilon < \alpha$  et  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$  semblent nécessaires (en tout cas,  $\alpha$  ne peut pas être choisi arbitrairement petit par rapport à  $\varepsilon$  ou arbitrairement grand par rapport à  $\frac{\varepsilon_0}{2}$ ) : il suffit de considérer l'exemple 3.55 et la remarque 3.57, qui consistent à construire un isomorphisme entre le groupe fondamental d'une variété riemannienne et le groupe des transformations d'un  $\alpha$ -revêtement d'un graphe qui approche la variété.

(iii) En affinant la preuve du théorème 3.4 de [SW], nous avons pu nous affranchir de l'hypothèse sur la courbure de Ricci (en la remplaçant par une hypothèse plus faible sur l'entropie) et nous avons obtenu une version quantitative de ce résultat, qui permet d'obtenir une estimation de la distance entre les espaces  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  suffisante pour que le théorème 3.30 puisse s'appliquer, ainsi qu'une estimation du réel  $\alpha$ .

(iv) Il peut sembler, au premier abord, que l'hypothèse de  $\delta$ -non-abélianité exigée sur le groupe des transformations du revêtement universel de  $X$  provient uniquement du fait que l'on est passé d'une hypothèse de type "courbure de Ricci minorée" à une hypothèse plus faible "Entropie majorée". Mais cette hypothèse est absolument nécessaire même si l'on suppose seulement que la courbure de Ricci est minorée (sans faire d'hypothèse sur la dimension des variétés) : il est en effet possible de faire converger une suite de tores plats (dont la dimension tend vers l'infini) vers un bouquet dénombrable de cercles (voir [Pl]).

(v) Le fait de supposer que l'entropie de  $(X, d_X)$  est majorée est indispensable. Nous en discutons dans la partie "Optimalité des résultats".

(vi) On remarquera que, dans le théorème 3.30, il est démontré que  $\tilde{\varphi}$  est une quasi-isométrie mais pas une approximation de Gromov-Hausdorff lorsque le revêtement universel  $\tilde{X}$  n'est pas compact : ceci est dû à la présence des constantes multiplicatives  $(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha})$  et  $(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})^{-1}$  dans les inégalités du théorème 3.30, qui impliquent que l'écart entre  $d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}'))$  et  $d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}')$  peut tendre vers l'infini lorsque  $d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}')$  tend vers l'infini. La présence de ce terme est incontournable, comme le prouve l'exemple suivant :

Soit  $X$  une variété riemannienne compacte munie de deux métriques  $g$  et  $g_\varepsilon$  telles que  $g_\varepsilon = (1 + \varepsilon)^2 g$  et des deux distances associées, notées  $d$  et  $d_\varepsilon$ . Alors, l'application  $\varphi = id_X$  vérifie

$$d(x, x') \leq d_\varepsilon(\varphi(x), \varphi(x')) \leq (1 + \varepsilon)d(x, x') \leq d(x, x') + \varepsilon D$$

où  $D$  est un majorant du diamètre de  $(X, g)$ . L'application  $\varphi$  est donc une  $\varepsilon D$ -approximation de Gromov-Hausdorff de  $(X, d)$  sur  $(X, d_\varepsilon)$ .

Les métriques relevées sur  $\tilde{X}$  étant notées  $\tilde{g}$  et  $\tilde{g}_\varepsilon$  (où  $\tilde{g}_\varepsilon = (1 + \varepsilon)^2 \tilde{g}$ ) et

les distances associées  $\tilde{d}$  et  $\tilde{d}_\varepsilon$ , la construction proposée dans la preuve du théorème 3.30, donne  $\tilde{\varphi} = id_{\tilde{X}}$  et  $\tilde{\varphi}$  vérifie

$$\tilde{d}_\varepsilon(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) = (1 + \varepsilon)\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}')$$

donc l'écart  $|\tilde{d}_\varepsilon(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) - \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}')|$  tend vers l'infini avec  $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{x}')$ .

Avant de démontrer le théorème 3.30, nous étudions le cas où l'espace de longueur  $(Y, d_Y)$  appartient également à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ . D'après la remarque 3.28, le revêtement universel de  $Y$  coïncide avec le  $\alpha$ -revêtement  $Y^\alpha$  de  $Y$  pour tout  $\alpha \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Il nous a donc paru intéressant de réécrire le théorème 3.30 dans ce cas particulier :

**Corollaire 3.32.**

Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Fixons arbitrairement un réel  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ .

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur compacts (connexes) quelconques, qui admettent un revêtement universel (pas nécessairement simplement connexe), tel que le groupe des automorphismes de ce revêtement soit  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro. Supposons de plus que le diamètre et l'entropie de  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont respectivement majorés par  $D$  et  $H$ .

Si la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ ,

(i) il existe un isomorphisme  $\bar{\rho}$  entre le groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des automorphismes du revêtement universel  $p_X : \tilde{X} \rightarrow X$  et le groupe  $G(\tilde{Y}, Y)$  des automorphismes du revêtement universel  $p_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$ .

(ii) il existe deux applications

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$$

$$\tilde{\psi} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$$

telles que, pour tout élément  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X)$  et tout élément  $\beta$  de  $G(\tilde{Y}, Y)$ , on ait

- $\tilde{\varphi} \circ \gamma = \bar{\rho}(\gamma) \circ \tilde{\varphi}$
- $\tilde{\psi} \circ \beta = (\bar{\rho})^{-1}(\beta) \circ \tilde{\psi}$

De plus, les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  vérifient les inégalités suivantes :

- pour tous les points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $\tilde{X}$ , on a

$$\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon \leq d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon$$

<ul style="list-style-type: none"> <li>• pour tous les points <math>\tilde{y}</math> et <math>\tilde{y}'</math> de <math>\tilde{Y}</math>, on a           <math display="block">\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon \leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon</math> </li> <li>• pour tout point <math>\tilde{x}</math> de <math>\tilde{X}</math>,           <math display="block">d_{\tilde{X}}((\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x}), \tilde{x}) &lt; \varepsilon</math> </li> <li>• pour tout point <math>\tilde{y}</math> de <math>\tilde{Y}</math>,           <math display="block">d_{\tilde{Y}}((\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(\tilde{y}), \tilde{y}) &lt; \varepsilon</math> </li> </ul>
--

Nous démontrons le corollaire 3.32 dans la section 3.4.3.

### 3.4.2 Démonstration du théorème 3.30

En fait, supposer que l'espace de longueur  $(X, d_X)$  appartient à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  sert uniquement, grâce à la version du lemme de Margulis de [BCG1] (voir le théorème E.2), à minorer la systole de  $(X, d_X)$  en fonction d'invariants de  $X$  fixés au préalable. Nous combinons ensuite cette estimation avec le résultat général suivant :

#### **Théorème 3.33.**

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe) dont la systole est minorée par un réel  $\varepsilon_0 > 0$ . Fixons arbitrairement deux réels  $\varepsilon$  et  $\alpha$  tels que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et  $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ .

Soit alors  $(Y, d_Y)$  n'importe quel espace de longueur compact (connexe) tel que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  soit inférieure à  $\varepsilon$ . Il existe alors un isomorphisme  $\bar{p}$  entre le groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des automorphismes du revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  et le groupe  $G(Y^\alpha, Y)$  des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$  ainsi que deux applications

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow Y^\alpha$$

$$\tilde{\psi} : Y^\alpha \rightarrow \tilde{X}$$

qui vérifient toutes les propriétés des applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  et du morphisme  $\bar{p}$  du théorème 3.30.

**Remarque 3.34.** Dans le cas où  $(X, d_X)$  est son propre revêtement universel, le théorème 3.33 s'écrit de la manière suivante :

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact qui est son propre revêtement universel. Fixons arbitrairement deux réels  $\varepsilon$  et  $\alpha$  tels que  $0 < 5\varepsilon < \alpha$ .

Si  $(Y, d_Y)$  est un espace de longueur compact (connexe) quelconque tel que la

distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  soit inférieure à  $\varepsilon$ , le groupe fondamental  $\pi_1(Y, y)$  de  $Y$  est isomorphe à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y)$ .

Dans la preuve qui suit, nous démontrons ce résultat.

Ce résultat est une version quantitative précisée du théorème 3.4 de [SW], dont les idées étaient déjà présentes dans [Tu1] et [Tu2].

Commençons par donner un schéma et l'idée de la preuve : il est très facile (et classique) de vérifier qu'une application continue  $f$  entre deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  induit un morphisme  $f_*$  entre leurs groupes fondamentaux ; il suffit en effet de définir  $f_*$  de la manière suivante : si  $[c]$  est une classe d'homotopie sur  $X$  représentée par le lacet  $c$ , on pose  $f_*([c]) = [f \circ c]$  (où  $[f \circ c]$  est la classe d'homotopie sur  $Y$  du lacet  $f \circ c$ ). Si les espaces  $X$  et  $Y$  considérés sont de plus semi-localement simplement connexes (voir la définition B.13), le morphisme  $f_*$  induit un morphisme (que nous noterons également  $f_*$ ) entre les groupes de transformations des revêtements universels  $G(\tilde{X}, X)$  et  $G(\tilde{Y}, Y)$  (puisque dans ce cas, le groupe fondamental et le groupe des transformations du revêtement universel sont isomorphes). Le relevé  $\tilde{f}$  de  $f$  entre les revêtements universels est alors  $f_*$ -équivariant ; ceci permet alors de "relier" et de "comparer" les actions des groupes  $G(\tilde{X}, X)$  et  $G(\tilde{Y}, Y)$  sur les revêtements universels respectifs de  $X$  et  $Y$ .

Nous nous intéressons dans ce chapitre à des espaces de longueur  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  qui sont "proches" pour la distance de Gromov-Hausdorff, ce qui signifie qu'il existe des approximations de Gromov-Hausdorff entre ces deux espaces. De telles approximations ne sont a priori pas continues mais sont "presque" continues (voir la définition 3.29). L'image d'un lacet n'est plus nécessairement un lacet, mais l'idée (classique) de la preuve qui suit (qui s'inspire de [Tu1] et de la preuve du théorème 3.4 de [SW]) est de subdiviser un lacet  $c$  en petits segments et de transporter les extrémités de ces segments  $(c(t_i))_{i \in \{0 \dots n\}}$  sur  $Y$  (par l'intermédiaire de l'approximation de Hausdorff  $\varphi$  entre  $X$  et  $Y$ ). Si  $\beta$  est un réel strictement positif fixé arbitrairement et si la longueur de  $c|_{[t_i, t_{i+1}]}$  est suffisamment petite, comme  $\varphi$  est une approximation de Gromov-Hausdorff et modifie donc peu les distances, il est possible d'assurer que  $d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{i+1}))$  est strictement inférieure à  $\beta$ . Il est alors possible de relier (dans l'ordre croissant) les points  $(\varphi \circ c(t_i))_{i \in \{1 \dots n\}}$  par des géodésiques minimisantes quelconques sans que la classe dans  $\pi_1(Y, U_\beta, y_0)$  du lacet  $c_T$  ainsi obtenu dépende du choix de ces géodésiques minimisantes. Ceci nous permet de construire un morphisme  $\rho$  entre les groupes  $\pi_1(X, x_0)$  et  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\beta, y_0)$ . Nous nous assurons ensuite que ce morphisme  $\rho$  passe au quotient en un morphisme

$$\rho_1 : \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_\alpha, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\beta, y_0)$$

où  $\alpha$  est un réel suffisamment petit par rapport à  $\beta$  (la différence entre  $\alpha$  et  $\beta$  dépend uniquement de la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  et de la longueur des segments choisie). On obtient alors, comme

l'ont montré C. Sormani et G. Wei, un morphisme entre le groupe des transformations  $G(X^\alpha, X)$  du  $\alpha$ -revêtement  $p_\alpha : X^\alpha \longrightarrow X$  et le groupe des transformations  $G(Y^\beta, X)$  du  $\beta$ -revêtement  $p_\beta : Y^\beta \longrightarrow Y$ .

Si  $\alpha'$  est suffisamment grand par rapport à  $\beta'$ , il est évidemment possible de réaliser la même construction pour obtenir un morphisme entre  $G(Y^{\beta'}, Y)$  et  $G(X^{\alpha'}, X)$ .

Sans hypothèse supplémentaire sur  $X$ , cette méthode permet donc uniquement de construire deux morphismes

$$\rho_1 : G(X^\alpha, X) \longrightarrow G(Y^\beta, Y)$$

et

$$\rho_2 : G(Y^\beta, Y) \longrightarrow G(X^{\alpha'}, X)$$

où  $\alpha < \beta < \alpha'$ , ce qui n'est pas très concluant car, a priori,  $p_\alpha$  et  $p_{\alpha'}$  sont deux revêtements différents.

Cependant, grâce à la version du lemme de Margulis de [BCG1] (comme il est stipulé dans la remarque 3.28) si l'espace de longueur  $(X, d_X)$  vérifie les hypothèses du théorème 3.30, pour tout  $\alpha \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , les groupes  $\pi_1(X, U_\alpha, x_0)$  et  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  sont isomorphes (c'est également le cas si l'on suppose seulement que la systole de  $(X, d_X)$  est minorée par  $\varepsilon_0$ ). Si les espaces sont suffisamment proches et si  $\beta$  est suffisamment petit par rapport à  $\frac{\varepsilon_0}{2}$ , il existe alors  $\varepsilon > 0$  et deux morphismes (construits explicitement)

$$\rho_1 : G(X^{\varepsilon_0/2}, X) = G(X^{\beta-\varepsilon}, X) \longrightarrow G(Y^\beta, Y)$$

et

$$\rho_2 : G(Y^\beta, Y) \longrightarrow G(X^{\varepsilon_0/2}, X)$$

Ces deux morphismes sont les isomorphismes recherchés.

La construction de  $\tilde{\varphi}$  est assez naturelle et calquée sur la construction classique (décrite ci-dessus) du relevé d'une application continue  $f : X \longrightarrow Y$ . On commence par fixer un point  $\tilde{x}_0$  sur  $\tilde{X}$ . On note  $x_0 = p(\tilde{x}_0)$  et on fixe un point  $y^\beta$  sur  $Y^\beta$  qui appartient à  $p_\beta^{-1}(\varphi(x_0))$ . Si  $\tilde{x}$  est un point de  $\tilde{X}$ , on définit  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  de la manière suivante : on choisit un chemin  $\tilde{c} : [0, a] \longrightarrow \tilde{X}$  entre les points  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}$  que l'on projette en un chemin  $c$  sur  $X$  entre les points  $x_0$  et  $x = p(\tilde{x})$ . Comme dans la construction de l'isomorphisme  $\rho$ , on considère une subdivision  $T = (t_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  suffisamment fine de  $[0, a]$ , et on construit une courbe  $c_T$  sur  $Y$  en reliant les points  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$  par une géodésique minimisante. On relève ensuite le chemin  $c_T$  en un chemin de  $Y^\beta$  d'origine  $y^\beta$  : si la distance entre  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$  est suffisamment petite par rapport à  $\beta$  (c'est en particulier le cas si l'erreur d'approximation  $\varepsilon > 0$  d'une part et la distance initiale entre  $c(t_i)$  et  $c(t_{i+1})$  d'autre part sont suffisamment petites par rapport à  $\beta$ ), l'extrémité du relevé de  $c_T$  d'origine  $y^\beta$  ne dépend pas du choix de la subdivision  $T$  ni du choix des géodésiques minimisantes entre les points  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$ .

L'image  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  de  $\tilde{x}$  est alors l'extrémité de ce relevé. Nous vérifions que cette construction ne dépend ni du chemin  $\tilde{c}$  choisi entre les points  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}$ , ni de la subdivision  $T$  choisie (tant qu'elle est assez fine), ni des géodésiques minimisantes entre les points  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$ .

Il nous reste maintenant à développer la preuve que nous avons seulement esquissée ci-dessus. Même si cette preuve s'appuie sur des techniques classiques, nous avons décidé de la détailler d'une part pour montrer que les idées classiques de preuve (valables dans le cas d'applications continues) s'appliquent encore (avec quelques précautions) dans le cas d'approximations de Hausdorff non continues, mais aussi pour montrer qu'un calcul effectif des valeurs admises de  $\varepsilon$  et de  $\alpha$  est possible en fonction seulement de  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  sur la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  (ou en fonction de  $\varepsilon_0$  si l'on suppose uniquement que la systole est minorée par  $\varepsilon_0$ , ce qui est le cas dans le théorème 3.33).

Avant de commencer la preuve, nous définissons les subdivisions dites  $\delta$ -admissibles d'un intervalle  $[0, a]$ , qui nous permettront de garantir que la distance entre  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$  est suffisamment petite par rapport à  $\beta$  :

**Définition 3.35.**

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur. Fixons un réel  $\delta$  strictement positif et une courbe  $c : [0, a] \rightarrow X$ .

Une subdivision  $T = (t_i)_{i=0\dots p}$  de l'intervalle  $[0, a]$  sera dite  $\delta$ -admissible pour la courbe  $c$  si

- $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = a$

et

- pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , la distance entre  $c(t_i)$  et  $c(t)$  est strictement inférieure à  $\delta$ .

**Note :** Nous avons décomposé la preuve du théorème 3.30 en de nombreux lemmes dans lesquels apparaissent, au fur et à mesure, des conditions sur les réels  $\alpha$  et  $\varepsilon$ . Nous supposerons, dans l'énoncé et la preuve d'un lemme, que les objets introduits avant ce lemme sont bien définis, c'est-à-dire que les conditions exigées dans les lemmes précédents sont vérifiées. Un récapitulatif de ces conditions est donné à la fin de la preuve du théorème 3.30.

**Construction de l'application  $\tilde{\varphi}$  et du morphisme  $\tilde{\rho}$**

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur qui vérifient les hypothèses du théorème 3.30 et tels que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est un réel strictement positif.

Fixons deux  $\varepsilon$ -approximations

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

et

$$\psi : Y \longrightarrow X$$

Notons  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  le revêtement universel de  $X$  et, si  $\alpha$  est un réel strictement positif, notons  $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$  le  $\alpha$ -revêtement de  $Y$ . On munit alors  $\tilde{X}$  et  $Y^\alpha$  des distances de longueur (uniques) qui font de  $p$  et  $p_\alpha$  des isométries locales (voir la proposition B.9).

Fixons définitivement un point  $x_0$  de  $X$ , un point  $\tilde{x}_0$  qui appartient à  $p^{-1}(x_0)$ , notons  $y_0 = \varphi(x_0)$  et fixons un point  $y^\alpha$  dans  $(p_\alpha)^{-1}(y_0)$ .

Soit  $\tilde{c}$  une courbe qui relie  $\tilde{x}_0$  à  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{X}$ , on note  $c$  la courbe image par  $p$  dans  $X$  et  $\varphi \circ c$  la pseudo-courbe (non continue) image dans  $Y$ .

**Lemme 3.36.**

*Soit  $\delta$  un réel strictement positif fixé. Si  $T$  est une subdivision  $\delta$ -admissible pour  $\tilde{c}$ , pour tous les éléments  $t_i < t_j$  de  $T$ , pour tout point  $z$  d'une courbe minimisante qui joint  $\varphi \circ c(t_j)$  et  $\varphi \circ c(t_{j+1})$ , on a :*

$$d_Y(\varphi \circ c(t_i), z) < d_X(c(t_i), c(t_{j+1})) + \frac{\delta}{2} + \frac{3\varepsilon}{2}$$

*Preuve du lemme 3.36.*

La première inégalité découle immédiatement du fait que  $\varphi$  est une  $\varepsilon$ -approximation de Gromov-Hausdorff et du fait que  $d_X(c(t_i), c(t_j)) \leq \text{long}(c|_{[t_i, t_j]})$ .

Pour vérifier la seconde inégalité, considérons une géodésique  $\gamma$  minimisante entre  $\varphi \circ c(t_j)$  et  $\varphi \circ c(t_{j+1})$  et notons  $t_*$  l'élément de  $[0, a]$  tel que

$$\text{long}(\gamma|_{[t_j, t_*]}) = \frac{1}{2} \text{long}(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]})$$

Remarquons que, si  $y$  est un point qui appartient à la portion de courbe  $\gamma|_{[t_j, t_*]}$ , en utilisant d'une part le fait que  $\varphi$  est une  $\varepsilon$ -approximation de Gromov-Hausdorff, d'autre part le fait que la courbe  $\gamma|_{[t_j, t_*]}$  est minimisante (donc rectifiable), on obtient

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi \circ c(t_i), y) &\leq d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_j)) + d_Y(\varphi \circ c(t_j), y) \\ &\leq d_X(c(t_i), c(t_j)) + \varepsilon + \frac{1}{2} \text{long}(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) \\ &\leq d_X(c(t_i), c(t_j)) + \varepsilon + \frac{1}{2} d_Y(\varphi \circ c(t_j), \varphi \circ c(t_{j+1})) \end{aligned}$$

et, finalement,

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi \circ c(t_i), y) &\leq d_X(c(t_i), c(t_j)) + \varepsilon + \frac{1}{2} [d_X(c(t_i), c(t_j)) + \varepsilon] \\ &< d_X(c(t_i), c(t_j)) + \varepsilon + \frac{1}{2}(\delta + \varepsilon) \end{aligned}$$

On procède de même si le point  $y$  appartient à  $\gamma|_{[t_*, t_{j+1}]}$  à partir de l'inégalité triangulaire

$$d_Y(\varphi \circ c(t_i), y) \leq d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{j+1})) + d_Y(\varphi \circ c(t_{j+1}), y)$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.36.  $\square$

**Lemme 3.37.**

Soit  $\delta$  un réel strictement positif et  $T = (t_i)_{i=1\dots p}$  une subdivision  $\delta$ -admissible pour la courbe  $c$ . On construit sur  $Y$  une courbe  $c_T$  qui joint  $y_0 = \varphi(x_0)$  et  $\varphi(x)$  en joignant, pour tout  $i$ ,  $\varphi \circ c(t_i)$  à  $\varphi \circ c(t_{i+1})$  par une courbe minimisante quelconque de  $(Y, d_Y)$ . On relève alors cette courbe en une courbe (continue)  $c_T^\alpha$  de  $Y^\alpha$  telle que  $c_T^\alpha(0) = y^\alpha$ .

L'extrémité  $c_T^\alpha(1)$  de ce chemin ne dépend ni du choix de la subdivision  $T$  (pourvu qu'elle soit  $\delta$ -admissible pour  $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$ ), ni du choix des courbes minimisantes entre les points  $\varphi \circ c(t_i)$  à  $\varphi \circ c(t_{i+1})$ .

*Preuve du lemme 3.37.*

Fixons deux réels strictement positifs  $\delta$  et  $\delta'$  inférieurs ou égaux à  $\frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$ . Considérons une subdivision  $\delta$ -admissible (respectivement  $\delta'$ -admissible) de  $[0, a]$ , notée  $T' = (t'_i)_{i=1\dots p}$  (respectivement  $T'' = (t''_j)_{j=1\dots q}$ ), et construisons la courbe  $c_{T'}$  (respectivement  $c_{T''}$ ) en joignant les points  $\varphi \circ c(t'_i)$  et  $\varphi \circ c(t'_{i+1})$  pour tout  $0 \leq i \leq p-1$  (respectivement  $\varphi \circ c(t''_j)$  et  $\varphi \circ c(t''_{j+1})$  pour tout  $0 \leq j \leq q-1$ ) par une courbe minimisante.

Posons alors  $T = T' \cup T''$  et construisons de la même manière  $c_T$ .

Commençons par montrer que le lacet  $c_T \cdot c_{T'}^{-1}$  est un lacet de  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ , c'est-à-dire qu'il s'écrit comme produit de lacets du type  $\beta \cdot c \cdot \beta^{-1}$ , où  $c$  est un lacet inclus dans une boule  $B_Y(y, \alpha)$  pour un point  $y$  convenablement choisi et  $\beta$  est un chemin qui relie les points  $y_0$  et  $y$ .

Nous allons tout d'abord vérifier que  $c_T \cdot c_{T'}^{-1}$  est le produit des lacets  $\beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1}$  où

- $\beta_i = c_{T'|[t'_0, t'_i]}$
- $\gamma_i$  est le lacet de point base  $\varphi \circ c(t'_i)$  donné par  $\gamma_i = c_{T|[t'_i, t'_{i+1}]} \cdot c_{T'}^{-1}|[t'_i, t'_{i+1}]$

En effet, en homotopie, on a :

$$\beta_i^{-1} \cdot \beta_{i+1} \sim c_{T'|[t'_i, t'_{i+1}]}$$

ce qui implique que

$$\gamma_i \cdot \beta_i^{-1} \cdot \beta_{i+1} \sim c_{T|[t'_i, t'_{i+1}]}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{p-1} \beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1} &\sim \beta_0 \cdot \left( \prod_{i=0}^{p-2} c_{T|[t'_i, t'_{i+1}]} \right) \cdot \gamma_{p-1} \cdot (\beta_{p-1})^{-1} \\ &\sim c_{T|[t'_0, t'_{p-1}]} \cdot c_{T|[t'_{p-1}, t'_p]} \cdot (\beta_p)^{-1} \\ &\sim c_T \cdot c_{T'}^{-1} \end{aligned}$$

car  $(\beta_p)^{-1}$  est, par définition, la courbe  $c_{T'}^{-1}$ .

Par ailleurs, chacun des lacets  $\gamma_i$  est inclus dans la boule

$B_Y(\varphi \circ c(t'_i), \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon))$ . En effet, pour tout élément  $t_k$  de  $T$  tel que

$t'_i \leq t_k \leq t'_{i+1}$  et pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , on a, d'après le lemme 3.36,

$$\begin{aligned} d_Y[\varphi \circ c(t'_i), c_T(t)] &< \text{long}(c_{|[t'_i, t_{k+1}]}) + \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon \\ &\leq d_X(c(t'_i), c(t_{k+1})) + \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon \\ &< \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) \end{aligned}$$

la deuxième inégalité provenant du fait que  $t_{k+1}$  appartient à  $[t'_i, t'_{i+1}]$  et que la subdivision  $T'$  est  $\delta$ -admissible.

Par ailleurs, comme la courbe  $c_{T'}$  est minimisante sur  $[t'_i, t'_{i+1}]$ , pour tout  $t \in [t'_i, t'_{i+1}]$ ,

$$\begin{aligned} d_Y[\varphi \circ c(t'_i), c_{T'}(t)] &\leq d_Y(\varphi \circ c(t'_i), \varphi \circ c(t'_{i+1})) \\ &\leq d_X(c(t'_i), c(t'_{i+1})) \\ &< \delta + \varepsilon < \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) \end{aligned}$$

Dès que  $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)$ , on en déduit que tous les lacets de la forme  $\beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1}$  appartiennent au groupe  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ . En particulier, le lacet  $c_T \cdot c_{T'}^{-1}$  appartient également à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  : il se relève sur  $Y^\alpha$  en une courbe  $c_T^\alpha \cdot (c_{T'}^{-1})^\alpha$ , où  $c_T^\alpha$  et  $(c_{T'}^{-1})^\alpha$  sont les relevés de  $c_T$  et  $c_{T'}^{-1}$  d'origines respectives  $y^\alpha$  et  $c_T^\alpha(a)$  ; cette courbe est un lacet d'après la proposition 3.26, et donc  $c_T^\alpha \cdot (c_{T'}^{-1})^\alpha = c_T^\alpha \cdot (c_{T'}^\alpha)^{-1}$ . Il s'ensuit que les courbes  $c_T^\alpha$  et  $c_{T'}^\alpha$  ont même extrémité.

De même, si  $c_{T'}^\alpha$  est le relevé de la courbe  $c_{T'}$  d'origine  $y^\alpha$ , les courbes  $c_T^\alpha$  et  $c_{T'}^\alpha$  ont même extrémité.

Il en découle que, si  $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)$ , les courbes  $c_T^\alpha$  et  $c_{T'}^\alpha$  ont même extrémité, ce qui termine la preuve du lemme 3.37.  $\square$

**Remarque 3.38.** *Le lemme 3.37 entraîne que l'on peut toujours remplacer une subdivision  $\delta$ -admissible  $T$  par une subdivision  $T'$  plus fine (ce qui veut dire que  $\delta$  peut être choisi arbitrairement petit) pourvu que  $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$  (remarquons que  $\frac{2}{3}\alpha - \varepsilon > 0$  car on a supposé que  $5\varepsilon < \alpha$  ; il existe donc un tel  $\delta$ ).*

Fixons les points  $x_0, y_0 = \varphi(x_0)$  et  $y^\alpha$  comme au début de la preuve du théorème 3.30. Fixons un réel  $\delta$  tel que  $0 < \delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$ .

A tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$ , on associe le point  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  construit de la manière suivante : soit  $\tilde{c}$  une courbe quelconque reliant  $\tilde{x}_0$  à  $\tilde{x}$  et soit  $c = p \circ \tilde{c}$  sa projection sur  $X$ . A toute subdivision  $\delta$ -admissible de  $\tilde{c}$ , notée  $T$ , on associe la courbe  $c_T$  de  $Y$  construite comme au lemme 3.37 et l'on note  $c_T^\alpha$  l'unique relevé de  $c_T$  dans  $Y^\alpha$  tel que  $c_T^\alpha(0) = y^\alpha$ . On note  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  l'extrémité  $c_T^\alpha(1)$  de ce chemin.

Notons que  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  ne dépend pas de la subdivision  $T$ ; en effet, si  $\tilde{c}$  est fixée et si  $T$  et  $T'$  sont deux subdivisions  $\delta$ -admissibles pour  $\tilde{c}$ , on a vu dans le lemme 3.37 que les courbes  $c_T^\alpha$  et  $c_{T'}^\alpha$  (d'origine  $y^\alpha$ ) ont même extrémité. Pour s'assurer que l'application  $\tilde{\varphi}$  est bien définie, il nous reste à vérifier que la construction de  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  ne dépend pas du chemin  $\tilde{c}$  choisi entre  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}$ , c'est-à-dire que si  $\tilde{\gamma}$  est un autre chemin qui relie ces deux points, alors  $\gamma_T^\alpha(1) = c_T^\alpha(1)$ . D'après la proposition 3.26, ceci équivaut à prouver que  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  appartient à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ . Pour montrer ceci, nous établissons d'abord les lemmes 3.39, 3.40 et 3.41. Nous montrons l'indépendance de la construction de  $\tilde{\varphi}$  par rapport au chemin choisi dans le lemme 3.42.

**Lemme 3.39.**

*Si  $\gamma$  et  $c$  sont deux lacets d'origine  $x_0$  homotopes sur  $X$ , alors le chemin  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  est un lacet dont la classe est dans  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  dès que  $\alpha > \max\{\delta + 2\varepsilon; \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)\}$ .*

*Preuve du lemme 3.39.*

Si  $\gamma$  et  $c$  sont deux chemins homotopes sur  $X$ , il existe une homotopie

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

continue (donc uniformément continue) telle que

$$H(0, \cdot) = c \text{ et } H(1, \cdot) = \gamma$$

Notons  $\gamma_s = H(s, \cdot)$ . Pour tout  $\eta > 0$ , on peut trouver une subdivision  $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_N = 1$  de  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $t$ ,

$$d_X(\gamma_{s_i}(t), \gamma_{s_{i+1}}(t)) < \eta$$

Nous nous ramenons donc à prouver le lemme 3.39 lorsque, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$d_X(c(t), \gamma(t)) < \eta$$

où  $\eta$  est un nombre positif arbitraire.

Par ailleurs, en vertu du lemme 3.37, nous sommes autorisés à choisir la même subdivision  $\delta$ -admissible pour  $c$  et  $\gamma$  et nous devons prouver que la courbe  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  est un lacet de  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ .

Pour tout élément  $t_i$  de  $T$ , choisissons un chemin minimisant  $\alpha_i$  qui joint  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ \gamma(t_i)$ . Posons

$$\beta_i = c_{T|[t_0, t_i]}$$

et notons  $\gamma_i$  le lacet de point-base  $\varphi \circ c(t_i)$  donné par

$$\gamma_i = \alpha_i \cdot \gamma_{T|[t_i, t_{i+1}]} \cdot \alpha_{i+1}^{-1} \cdot (c_{T|[t_i, t_{i+1}]})^{-1}$$

On a donc, à homotopie près,

$$\gamma_i \cdot \beta_i^{-1} \cdot \beta_{i+1} \sim \alpha_i \cdot \gamma_{T|[t_i, t_{i+1}]} \cdot \alpha_{i+1}^{-1}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{p-1} \beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1} &\sim \beta_0 \cdot \left( \prod_{i=0}^{p-1} \gamma_i \beta_i^{-1} \beta_{i+1} \right) \cdot \beta_p^{-1} \\ &\sim \beta_0 \cdot \alpha_0 \cdot \left( \prod_{i=0}^{p-1} \gamma_{T|[t_i, t_{i+1}]} \right) \cdot \alpha_p^{-1} \cdot \beta_p^{-1} \\ &\sim \gamma_T \cdot c_T^{-1} \end{aligned}$$

car  $\beta_0$ ,  $\alpha_0$  et  $\alpha_p$  sont réduits à un point et  $\beta_p = c_T$ .

Par ailleurs, le lacet  $\gamma_i$  est tout entier inclus dans la boule de centre  $\varphi \circ c(t_i)$  et de rayon  $\eta + \delta + 2\varepsilon$  car, pour tout  $s$ ,

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi \circ c(t_i), \alpha_i(s)) &\leq d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ \gamma(t_i)) \\ &\leq d_X(c(t_i), \gamma(t_i)) + \varepsilon \\ &< \eta + \varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $s$ ,

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi \circ c(t_i), \alpha_{i+1}(s)) &\leq d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{i+1})) + d_Y(\varphi \circ c(t_{i+1}), \alpha_{i+1}(s)) \\ &< (\delta + \varepsilon) + (\eta + \varepsilon) = \delta + \eta + 2\varepsilon \end{aligned}$$

et, par ailleurs, comme la courbe  $c_T$  est minimisante sur  $[t_i, t_{i+1}]$ , pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , on a

$$d_Y(\varphi \circ c(t_i), c_T(t)) \leq d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{i+1})) < \delta + \varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi \circ c(t_i), \gamma_T(t)) &\leq d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ \gamma(t_i)) + d_Y(\varphi \circ \gamma(t_i), \gamma_T(t)) \\ &< (\eta + \varepsilon) + d_Y(\varphi \circ \gamma(t_i), \varphi \circ \gamma(t_{i+1})) \\ &< (\eta + \varepsilon) + (\delta + \varepsilon) = \eta + \delta + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi, dès que  $\alpha > \max \left\{ \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon), \delta + 2\varepsilon \right\}$ , on fait le choix

$$\eta = \alpha - (\delta + 2\varepsilon) > 0$$

On obtient alors que le lacet  $\gamma_i$  appartient à la boule  $B_Y(c(t_i), \alpha)$ , donc que  $\beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1}$  appartient à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ . Ceci entraîne que le lacet  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  appartient aussi à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ , ce qui achève la preuve du lemme 3.39.  $\square$

**Lemme 3.40.**

Soit  $\delta > 0$  un réel tel que  $\alpha > \max \left\{ \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon), \delta + 2\varepsilon \right\}$ .

Si  $c$  parcourt l'espace des lacets de point-base  $x_0$ , l'application  $c \mapsto c_T$  (où  $T$  est une subdivision quelconque  $\delta$ -admissible pour  $c$ ) induit, par passage aux classes d'homotopie, un morphisme  $\rho$  de  $\pi_1(X, x_0)$  dans  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ .

*Preuve du lemme 3.40.*

Tout d'abord,  $\rho$  est bien défini. En effet, soient  $\alpha$  et  $\delta$  deux réels strictement positifs tels que  $\alpha > \max \left\{ \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon), \delta + 2\varepsilon \right\}$ , fixons deux lacets homotopes, notés  $c$  et  $\gamma$ , de point-base  $x_0$ . Si  $T$  et  $T'$  sont deux subdivisions respectivement  $\delta$ -admissibles pour les lacets  $c$  et  $\gamma$ , alors

- $c_T$  et  $\gamma_{T'}$  sont (par construction) des lacets de  $Y$  car  $\varphi \circ c(1) = \varphi \circ c(0)$  et  $\varphi \circ \gamma(1) = \varphi \circ \gamma(0)$

- d'après le lemme 3.39, le lacet  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  appartient à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  (et donc les classes  $[\gamma_T]$  et  $[c_T]$  des lacets  $\gamma_T$  et  $c_T$  dans  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  sont égales)

et

- d'après le lemme 3.37 et la proposition 3.26, les classes  $[\gamma_T]$  et  $[\gamma_{T'}]$  des lacets  $\gamma_T$  et  $\gamma_{T'}$  dans  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  sont égales.

On en conclut que les classes  $[c_T]$  et  $[\gamma_{T'}]$  sont égales.

Remarquons à présent que, si  $c$  est un lacet homotope à zéro de point-base  $x_0$ , le lemme 3.39 implique que le lacet  $c_T$  appartient à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ . Ainsi,  $\rho([e]) = [e]$ .

Considérons maintenant deux lacets quelconques  $c$  et  $\gamma$  de  $Y$ , de point-base  $x_0$ , et notons  $\alpha = c \cdot \gamma$  le lacet obtenu en paramétrant  $c$  par  $[0, 1]$ ,  $\gamma$  par  $[1, 2]$  (quitte à opérer une translation  $t \rightarrow t + 1$  sur la variable) et en posant

$$\alpha(t) = \begin{cases} c(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ \gamma(t) & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

(notons que  $c(1) = c(0) = \gamma(1) = \gamma(0)$ ).

Si  $T' = (t'_i)_{i=0 \dots p}$  et  $T'' = (t''_j)_{j=0 \dots q}$  sont des subdivisions  $\delta$ -admissibles de  $c$  et  $\gamma$ , alors  $T = T' \cup T''$  est une subdivision  $\delta$ -admissible pour  $\alpha$ . Posons alors

$$t_i = \begin{cases} t'_i & \text{si } 0 \leq i \leq p \\ t''_{i-p} & \text{si } p \leq i \leq p + q \end{cases}$$

On a  $t_p = t'_p = t''_0 = 1$ . On vérifie facilement que  $\alpha_T$  est obtenue (par construction) par concaténation de  $c_{T'}$  et de  $\gamma_{T''}$ , ce qui prouve que

$$\begin{aligned} \rho([c] \cdot [\gamma]) &= \rho([\alpha]) \\ &= [\alpha_T] \\ &= [c_{T'} \cdot \gamma_{T''}] \\ &= [c_{T'}][\gamma_{T''}] \\ &= \rho([c]) \cdot \rho([\gamma]) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du fait que  $\rho$  est un morphisme.  $\square$

**Lemme 3.41.**

Si  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$  et  $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$ , le morphisme  $\rho$  passe au quotient en un morphisme

$$\bar{\rho} : \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$$

(Le morphisme  $\bar{\rho}$  est un morphisme du groupe des automorphismes du revêtement universel  $\tilde{X} \longrightarrow X$  dans le groupe des transformations du  $\alpha$ -revêtement  $Y^\alpha \longrightarrow Y$ ; rappelons que  $\tilde{X}$  n'est pas nécessairement simplement connexe).

*Preuve du lemme 3.41.*

D'après la remarque 3.28, les groupes  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  et  $\pi_1(X, U_r, x_0)$  sont égaux pour tout  $0 < r \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ . En particulier, si  $0 < r \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , un système générateur de  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  est donné par les classes de lacets (dans  $\pi_1(X, x_0)$ ) de la forme  $\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}$ , où  $\gamma$  est un lacet inclus dans une boule  $B_X(x, r)$  et où  $\beta$  est un chemin qui joint  $x_0$  et  $x$ . Il nous suffit donc de montrer que, pour de tels lacets,  $\rho([\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}])$  est trivial.

Posons  $c = \beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}$ . On obtient une subdivision  $\delta$ -admissible de  $c$ , notée  $T''$ , en mettant bout à bout une partition  $T$  ( $\delta$ -admissible pour  $\beta$ ), une partition  $T'$  ( $\delta$ -admissible pour  $\gamma$ ) et à nouveau la partition  $T$  (numérotée en sens inverse). Ceci nous donne

$$c_{T''} = \beta_T \cdot \gamma_{T'} \cdot (\beta_T)^{-1}$$

D'autre part, puisque  $\gamma(t)$  appartient à la boule  $B_X(x, r)$  pour tout  $t$ , on a, pour tout  $t_i \in T'$ ,

$$\gamma_{T'}(t_i) = \varphi \circ \gamma(t_i) \in B_Y(\varphi(x), r + \varepsilon)$$

On en déduit que, pour tout  $t$ ,

$$\gamma_{T'}(t) \in B_Y\left(\varphi(x), r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)$$

Si  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ , on pose  $r = \frac{\alpha}{2}$  (ce qui est possible car  $\frac{\alpha}{2} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ ).

Si  $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$ , en vertu du lemme 3.37, on peut choisir  $0 < \delta < \alpha - 3\varepsilon$ , ce qui assure que  $r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2} < \alpha$ . Le lacet  $\gamma_{T'}$  est alors inclus dans la boule  $B_Y(\varphi(x), \alpha)$  donc le lacet  $c_{T''}$  appartient à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ ; il s'ensuit que

$$\rho([\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]) = [c_{T''}] = 0$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.41.  $\square$

**Remarque.** Notons que nous avons fortement utilisé dans la preuve du lemme 3.41 le fait que l'espace de longueur  $(X, d_X)$  appartient à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ , qui implique que, si  $0 < r \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , les revêtements  $p_r : X^r \rightarrow X$  et  $p_{\varepsilon_0/2} : X^{\varepsilon_0/2} \rightarrow X$  coïncident. Sans cette hypothèse, cette construction ne donne que l'existence d'un morphisme

$$\rho : G(X^r, X) \rightarrow G(Y^\alpha, Y)$$

où  $r < \alpha - \frac{3\varepsilon}{2}$ .

Remarquons également que, pour obtenir un morphisme en sens inverse, il faut que  $\alpha < r' - \frac{3\varepsilon}{2}$ , ce qui ne rend la construction de l'inverse possible que si  $X^{r'} = X^r$  où  $r < r' - 3\varepsilon$ .

**Lemme 3.42.**

La construction de  $\tilde{\varphi}(\tilde{x})$  ne dépend pas du choix du chemin  $\tilde{c}$ , pourvu que celui-ci relie  $\tilde{x}_0$  à  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{X}$ ; l'application  $\tilde{\varphi} : \tilde{x} \rightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{x})$  est donc correctement définie.

*Preuve du lemme 3.42.*

Si  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  et  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  sont deux chemins continus d'origine  $\tilde{x}_0$  et d'extrémité  $\tilde{x}$ , et si l'on note  $c = p \circ \tilde{c}$  et  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ , le chemin  $\gamma.c^{-1}$  est un lacet de  $X$  dont un relevé est  $\tilde{\gamma}.\tilde{c}^{-1}$  (puisque l'origine  $\tilde{x}$  de  $(\tilde{c})^{-1}$  coïncide avec l'extrémité de  $\tilde{\gamma}$ ); ce relevé de  $\gamma.c^{-1}$  est un lacet sur  $\tilde{X}$ . Il s'ensuit que le lacet  $\gamma.c^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  (d'après la proposition 3.26). Si  $T$  est une subdivision  $\delta$ -admissible pour les courbes  $\gamma$  et  $c$ , le lemme 3.41 permet d'en déduire que

$$0 = \bar{\rho}([\gamma.c^{-1}]) = [\gamma_T.(c_T)^{-1}]$$

Le lacet  $\gamma_T.(c_T)^{-1}$  sur  $Y$  appartient donc à  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ : son relevé  $\gamma_T^\alpha.(c_T^\alpha)^{-1}$  est alors un lacet sur  $Y^\alpha$  et les relevés  $\gamma_T^\alpha$  et  $c_T^\alpha$  des courbes  $\gamma_T$  et  $c_T$ , qui ont même origine  $y^\alpha$ , ont même extrémité dans  $Y^\alpha$ . Il en découle que la construction de  $\tilde{\varphi}$  ne dépend pas du chemin choisi entre  $\tilde{x}_0$  à  $\tilde{x}$ .

Par ailleurs, nous avons vu que la construction de  $\tilde{\varphi}$  ne dépend pas de la subdivision choisie (pourvu qu'elle soit  $\delta$ -admissible pour un réel  $\delta > 0$  qui vérifie les hypothèses des lemmes précédents), ni de la géodésique minimisante choisie entre les points  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$ . L'application  $\tilde{\varphi}$  est donc correctement définie.  $\square$

**Construction de l'application  $\tilde{\psi}$**

On construit l'application  $\tilde{\psi} : Y^\alpha \rightarrow \tilde{X}$  comme on a construit l'application  $\tilde{\varphi}$  et de nombreuses preuves de cette partie sont identiques à celles faites précédemment. Cependant, les estimations changent un peu; nous réécrivons donc (rapidement) les preuves où les calculs sont un peu différents.

Soit  $\tilde{y}$  un point quelconque de  $Y^\alpha$  et  $\tilde{c}$  une courbe sur  $Y^\alpha$  qui relie  $y^\alpha$  (où, comme précédemment,  $y^\alpha = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_0)$ ) et  $\tilde{y}$ . On note  $c$  la courbe image de  $\tilde{c}$  par  $p_\alpha$ . On note  $\psi \circ c$  la pseudo-courbe (non continue) image dans  $X$ . On peut considérer que  $\psi(y_0) = x_0$ , car on peut éventuellement modifier  $\psi$  de telle sorte que  $\psi(y_0) = x_0$ , sans changer le fait que ce soit une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff. Les preuves étant identiques à celles que nous avons faites à partir de  $\varphi$ , on montre que

**Lemme 3.43.**

Soit  $\delta$  un réel strictement positif fixé. Si  $T$  est une subdivision  $\delta$ -admissible pour  $\tilde{c}$ , pour tous les éléments  $t_i < t_j$  de  $T$ , pour tout point  $z$  d'une courbe minimisante qui joint  $\psi \circ c(t_j)$  et  $\psi \circ c(t_{j+1})$ , on a :

$$d_X(\psi \circ c(t_i), z) < d_Y(c(t_i), c(t_{j+1})) + \frac{\delta}{2} + \frac{3\varepsilon}{2}$$

**Lemme 3.44.**

Soit  $\delta > 0$  un réel tel que  $\delta \leq \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$ , considérons une subdivision  $\delta$ -admissible pour la courbe  $c$ . On construit une courbe  $c_T$  qui joint  $x_0 = \psi(y_0)$  à  $\psi(y)$  en joignant (pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ) les points  $\psi \circ c(t_i)$  et  $\psi \circ c(t_{i+1})$  par une courbe minimisante de  $(X, d_X)$ ; notons  $\tilde{c}_T$  le relevé continu sur  $\tilde{X}$  de la courbe  $c_T$  d'origine  $\tilde{x}_0$ .

L'extrémité de  $\tilde{c}_T$  est alors indépendante des courbes minimisantes choisies entre les points  $\psi \circ c(t_i)$  et  $\psi \circ c(t_{i+1})$  et du choix de la subdivision  $T$  (pourvu qu'elle soit  $\delta$ -admissible avec  $\delta \leq \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$ ).

*Preuve du lemme 3.44.*

Fixons une courbe  $c$  entre  $y_0$  et  $y$  et considérons deux subdivisions  $\delta$ -admissibles pour  $c$ , notées  $T' = (t'_i)_{i=0\dots p}$  et  $T'' = (t''_j)_{j=0\dots q}$ . Posons  $T = T' \cup T''$  et construisons les courbes  $c_T$ ,  $c_{T'}$  et  $c_{T''}$  sur  $X$ . Il nous faut vérifier que la courbe  $c_T \cdot c_{T'}^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  (notons que c'est un lacet de point-base  $x_0$  car  $c_T(0) = \psi \circ c(0) = c_{T'}(0) = x_0$  et  $c_T(1) = \psi \circ c(1) = c_{T'}(1) = \psi(y)$ ); la preuve du fait que  $c_T \cdot c_{T''}^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  est identique.

On prouve, de la même manière que dans la preuve du lemme 3.37, que (à homotopie près)

$$c_T \cdot c_{T'}^{-1} \sim \prod_{i=0}^{p-1} \beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1}$$

où

- $\beta_i = c_{T'|[t'_0, t'_i]}$
- $\gamma_i$  est le lacet de point base  $\psi \circ c(t'_i)$  donné par  $\gamma_i = c_{T'|[t'_i, t'_{i+1}]} \cdot c_{T'|[t'_i, t'_{i+1}]}^{-1}$ .

On obtient également que chacun des lacets  $\gamma_i$  est inclus dans la boule  $B_X(\psi \circ c(t'_i), \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon))$ . Ainsi, dès que  $\frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ , le lacet  $c_T \cdot c_{T'}^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ . Les relevés  $\tilde{c}_T$  et  $\tilde{c}_{T'}$  sur  $\tilde{X}$  d'origine  $\tilde{x}_0$  ont donc même extrémité, ce qui achève la preuve du lemme 3.44.  $\square$

A tout point  $\tilde{y}$  de  $Y^\alpha$ , on associe le point  $\tilde{\psi}(\tilde{y})$  de  $\tilde{X}$  construit de la manière suivante : soit  $\tilde{c}$  une courbe quelconque qui relie  $y^\alpha$  à  $\tilde{y}$  et soit  $c = p_\alpha \circ \tilde{c}$  sa projection sur  $Y$ . A toute subdivision  $\delta$ -admissible  $T$  de  $\tilde{c}$ , on associe la courbe  $\tilde{c}_T$  de  $\tilde{X}$  construite comme dans le lemme 3.44 et on note  $\tilde{\psi}(\tilde{y})$  son extrémité  $\tilde{c}_T(1)$ .

Nous avons vu au lemme 3.44 que  $\tilde{\psi}(\tilde{y})$  ne dépend pas de la subdivision  $\delta$ -admissible  $T$  (si  $0 < \delta < \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$ ).

Il nous reste donc à voir que la construction de  $\tilde{\psi}(\tilde{y})$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{c}$ , c'est-à-dire que, si une autre courbe relie  $y^\alpha$  et  $\tilde{y}$ , alors  $\tilde{\gamma}_T(1) = \tilde{c}_T(1)$ . Ceci équivaut à montrer que  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ .

**Lemme 3.45.**

*Si  $\gamma$  et  $c$  sont deux lacets d'origine  $y_0$  homotopes sur  $Y$ , alors le chemin  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  est un lacet dont la classe est dans  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  dès que  $\frac{\varepsilon_0}{2} > \max\{\delta + 2\varepsilon; \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)\}$ .*

*Preuve du lemme 3.45.*

La preuve est identique à celle du lemme 3.39 : si  $\gamma$  et  $c$  sont deux chemins homotopes sur  $Y$ , il existe une homotopie  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$  uniformément continue telle que  $H(0, \cdot) = c$  et  $H(1, \cdot) = \gamma$ . Notons  $\gamma_s = H(s, \cdot)$ . Nous sommes donc ramenés, comme au lemme 3.39, à prouver le lemme 3.45 lorsque, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$d_X(c(t), \gamma(t)) < \eta$$

où  $\eta$  est un nombre positif arbitraire.

Par ailleurs, nous sommes autorisés à choisir la même subdivision  $\delta$ -admissible (pour  $\delta < \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$ ) pour  $c$  et  $\gamma$  en vertu du lemme 3.44 et nous devons alors prouver que la courbe  $\gamma_T \cdot c_T^{-1}$  est un lacet de  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ .

Pour tout élément  $t_i$  de  $T$ , choisissons un chemin minimisant  $\alpha_i$  qui joint  $\psi \circ c(t_i)$  et  $\psi \circ \gamma(t_i)$ .

Comme dans le lemme 3.39, nous prouvons que, à homotopie près,

$$\gamma_T \cdot c_T^{-1} \sim \prod_{i=0}^{p-1} \beta_i \cdot \gamma_i \cdot \beta_i^{-1}$$

où

- $\beta_i = c_{T|[t_i, t_{i+1}]}$
- $\gamma_i$  est le lacet de point-base  $\psi \circ c(t_i)$  donné par

$$\gamma_i = \alpha_i \cdot \gamma_{T|[t_i, t_{i+1}]} \cdot \alpha_{i+1}^{-1} \cdot (c_{T|[t_i, t_{i+1}]})^{-1}$$

En mimant de nouveau la preuve du lemme 3.39, on montre que chaque lacet  $\gamma_i$  est entièrement inclus dans la boule  $B_X(\psi \circ c(t_i), \eta + \delta + 2\varepsilon)$ .

Si  $\frac{\varepsilon_0}{2} > \delta + 2\varepsilon$ , on choisit  $\eta$  tel que  $0 < \eta < \frac{\varepsilon_0}{2} - (\delta + 2\varepsilon)$ . On obtient alors

que le lacet  $\gamma_i$  est inclus dans  $B_X(\psi \circ c(t_i), \frac{\varepsilon_0}{2})$ , ce qui permet de conclure qu'il en est de même pour le lacet  $\gamma_T.c_T^{-1}$  et termine la preuve du lemme 3.45.  $\square$

**Lemme 3.46.**

Si  $c$  parcourt l'espace des lacets de point-base  $y_0$ , l'application  $c \mapsto c_T$  (où  $T$  est une subdivision quelconque  $\delta$ -admissible telle que  $\frac{\varepsilon_0}{2} > \max\{\delta + 2\varepsilon; \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)\}$ ) induit, par passage aux classes d'homotopie, un morphisme  $r$  de  $\pi_1(Y, y_0)$  dans  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ .

*Preuve du lemme 3.46.*

Tout d'abord,  $r$  est bien défini. En effet, soit  $\delta$  un réel strictement positif tel que  $\frac{\varepsilon_0}{2} > \max\{\frac{3}{2}(\delta + \varepsilon), \delta + 2\varepsilon\}$ , fixons  $c$  et  $\gamma$  deux lacets homotopes de point-base  $y_0$ . Si  $T$  et  $T'$  sont deux subdivisions  $\delta$ -admissibles pour  $c$  et  $\gamma$ , alors

- d'après le lemme 3.45, le lacet  $\gamma_T.c_T^{-1}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  (et donc les classes  $[\gamma_T]$  et  $[c_T]$  des lacets  $\gamma_T$  et  $c_T$  dans  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  sont égales)

et

- d'après le lemme 3.44, les classes  $[\gamma_T]$  et  $[\gamma_{T'}]$  des lacets  $\gamma_T$  et  $\gamma_{T'}$  dans  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0}, x_0)$  sont égales.

On en conclut que les classes  $[c_T]$  et  $[\gamma_{T'}]$  sont égales.

On montre comme dans la preuve du lemme 3.40 que  $r$  est un morphisme.  $\square$

**Lemme 3.47.**

Si  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , le morphisme  $r$  passe au quotient en un morphisme

$$\bar{r} : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$$

(Le morphisme  $\bar{r}$  est un morphisme du groupe des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement  $Y^\alpha \longrightarrow Y$  dans le groupe des automorphismes du revêtement universel  $\tilde{X} \longrightarrow X$ ).

*Preuve du lemme 3.47.*

Un système générateur du groupe  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  est donné par les classes de lacets de la forme  $\beta.\gamma.\beta^{-1}$ , où  $\gamma$  est un lacet inclus dans une boule  $B_Y(y, \alpha)$  et où  $\beta$  est un chemin qui joint  $y_0$  et  $y$ . Comme dans la preuve du lemme 3.41, il nous suffit donc de montrer que, pour de tels lacets,  $r([\beta.\gamma.\beta^{-1}])$  est trivial.

Posons  $c = \beta.\gamma.\beta^{-1}$ . On construit une subdivision  $\delta$ -admissible de  $c$ , notée  $T''$ , comme dans la preuve du lemme 3.41. En gardant les mêmes notations, ceci nous donne

$$c_{T''} = \beta_T.\gamma_{T''}.\beta_T^{-1}$$

On montre alors que, pour tout  $t$ ,

$$\gamma_{T''}(t) \in B_X\left(\psi(y), \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}\right)$$

Si  $\boxed{\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}}$ , on fixe  $\boxed{\varepsilon < \frac{2}{3}(\frac{\varepsilon_0}{2} - \alpha)}$  et, en vertu du lemme 3.44, on a le droit de choisir  $0 < \delta \leq \varepsilon_0 - 2\alpha - 2\varepsilon$ , ce qui assure que  $\alpha + \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Le lacet  $\gamma_{T'}$  est alors inclus dans la boule  $B_X(\psi(y), \frac{\varepsilon_0}{2})$  donc le lacet  $c_{T'}$  appartient à  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ ; il s'ensuit que

$$r([\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]) = [c_{T'}] = 0$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.47. □

**Lemme 3.48.**

Pourvu que  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$  et  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4}$ , la construction de  $\tilde{\psi}(\tilde{y})$  ne dépend pas du choix du chemin  $\tilde{c}$  qui relie  $y^\alpha$  à  $\tilde{y}$  dans  $Y^\alpha$ ; l'application  $\tilde{\psi}$  est donc correctement définie.

*Preuve du lemme 3.48.*

La preuve est identique à celle du lemme 3.42, en utilisant le lemme 3.47 à la place du lemme 3.41. □

**Preuve des inégalités du théorème 3.30**

**Lemme 3.49.**

Si  $3\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  (bien) définies ci-dessus vérifient, pour tous les points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $\tilde{X}$  et pour tous les points  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  de  $Y^\alpha$ ,

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon$$

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon$$

*Preuve du lemme 3.49.*

Comme  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$  et  $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$ , le lemme 3.41 nous assure l'existence de  $\tilde{\varphi}$ . De même, comme  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$  et  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4}$ , le lemme 3.47 assure l'existence de  $\tilde{\psi}$ . Supposons que  $\delta$  est un réel qui vérifie  $\max\{\delta + 2\varepsilon; \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)\} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ .

Soit  $\tilde{c}$  une courbe minimisante qui relie les points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  dans  $\tilde{X}$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  un chemin qui joint les points  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}$ . Pour construire  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}')$ , comme  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$  et  $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$ , le lemme 3.42 nous permet de choisir le chemin  $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{c}$  comme chemin qui relie  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}'$ . Si  $T$  (resp.  $T'$ ) est une subdivision  $\delta$ -admissible pour  $\tilde{\gamma}$  (resp.  $\tilde{c}$ ) paramétrée par  $[0, 1]$  (resp.  $[1, 2]$ ), alors  $T \cup T' = T_1$  est une subdivision  $\delta$ -admissible pour  $\tilde{\beta}$ .

Si  $\varepsilon < \frac{\alpha}{3}$  et si  $T''$  est une subdivision  $\delta'$ -admissible pour  $\tilde{c}$  (où  $\delta' = \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$ ), alors, la subdivision  $T_2 = T \cup T''$  est une subdivision de  $\tilde{\beta}$  qui, bien que n'étant plus  $\delta$ -admissible, permet de construire une courbe  $\beta_{T_2}^\alpha$  de  $Y^\alpha$  qui a la même extrémité que  $\beta_{T_1}^\alpha$  d'après le lemme 3.37 et le paragraphe qui le

suit (car on a bien alors  $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta' + \varepsilon)$ ). On a donc, puisque  $\tilde{x} = \tilde{\beta}(1)$  et  $\tilde{x}' = \tilde{\beta}(2)$ ,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \gamma_T^\alpha(1) = \beta_{T_2}^\alpha(1)$$

et

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}') = \beta_{T_1}^\alpha(2) = \beta_{T_2}^\alpha(2)$$

Ainsi,

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \sum_{t_i \in T^m \setminus \{2\}} d_{Y^\alpha}(\beta_{T_2}^\alpha(t_i), \beta_{T_2}^\alpha(t_{i+1}))$$

Puisque la courbe  $\beta_{T_2}^\alpha$  est la courbe relevée de  $\beta_{T_2}$ , on a

$$\begin{aligned} d_{Y^\alpha}(\beta_{T_2}^\alpha(t_i), \beta_{T_2}^\alpha(t_{i+1})) &\leq \text{long}(\beta_{T_2}^\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ &= \text{long}(\beta_{T_2}|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ &= d_Y(\varphi \circ \beta(t_i), \varphi \circ \beta(t_{i+1})) \\ &< d_X(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) + \varepsilon \\ &\leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\beta}(t_i), \tilde{\beta}(t_{i+1})) + \varepsilon \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que  $p$  est contractante.

Soit  $\eta$  une constante positive arbitrairement petite, si on espace les points  $\tilde{c}(t_i)$  de sorte que, pour tous les éléments  $t_i \in T^m \setminus \{2\}$  sauf le dernier,  $d_{\tilde{X}}(\tilde{c}(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) = \delta' - \eta$ , comme  $T^m \subset [1, 2]$  et comme  $\tilde{\beta}|_{[1, 2]} = \tilde{c}$  est minimisante, on a

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \sum_{t_i \in T^m \setminus \{2\}} d_{\tilde{X}}(\tilde{c}(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) + \left( E \left[ \frac{d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}')}{\delta' - \eta} \right] + 1 \right) \varepsilon$$

On en déduit, en faisant tendre  $\eta$  vers zéro, que

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \left( \frac{d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}')}{\delta'} + 1 \right) \varepsilon$$

ce qui termine la preuve de la première inégalité du lemme 3.49.

On procède de la même manière pour la deuxième inégalité du lemme 3.49, en remplaçant  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  par deux points quelconques  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  de  $Y^\alpha$ , reliés par une courbe minimisante  $\tilde{c}$ . On fixe également un chemin  $\tilde{\gamma}$  qui relie  $y^\alpha$  et  $\tilde{y}$ . Si  $T \cup T' = T_1$  est une subdivision  $\delta$ -admissible pour  $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{c}$ , si  $2\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$  et si  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , l'indépendance par rapport au chemin choisi entre  $y^\alpha$  à  $\tilde{y}'$  (voir le lemme 3.48) permet bien de choisir le chemin  $\tilde{\beta}$  pour relier  $y^\alpha$  à  $\tilde{y}'$  et de définir  $\tilde{\psi}(\tilde{y}')$  comme  $\tilde{\beta}_{T_1}(2)$ . Si  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{3}$ , on peut remplacer  $T_1$  par  $T_2 = T \cup T^m$ , où  $T^m$  est une subdivision  $\delta''$ -admissible pour  $\tilde{c}$  (où  $\delta'' = \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$ ); on construit ensuite les courbes  $\beta_{T_1}$ ,  $\gamma_T$  et  $\beta_{T_2}$  selon le procédé du lemme

3.44 et on relève ces courbes en des courbes de  $\tilde{X}$  de point-base  $\tilde{x}_0$ , notées  $\tilde{\beta}_{T_1}$ ,  $\tilde{\gamma}_T$  et  $\tilde{\beta}_{T_2}$ . Le lemme 3.44 entraîne alors que

$$\tilde{\psi}(\tilde{y}') = \tilde{\beta}_{T_1}(2) = \tilde{\beta}_{T_2}(2)$$

Comme on a par ailleurs

$$\tilde{\psi}(\tilde{y}) = \tilde{\gamma}_T(1) = \tilde{\beta}_{T_2}(1),$$

le même calcul que précédemment (en remplaçant  $\beta_{T_2}^\alpha$  par  $\tilde{\beta}_{T_2}$ ) donne

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \left( \frac{d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}')}{\delta^n} + 1 \right) \varepsilon$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.49.  $\square$

**Lemme 3.50.**

Les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  définies dans les paragraphes qui suivent la remarque 3.38 et le lemme 3.44 vérifient, pour tous les points  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$  et pour tous les points  $\tilde{y}$  de  $Y^\alpha$ ,

$$\begin{aligned} d_{\tilde{X}}((\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(\tilde{x}), \tilde{x}) &< \varepsilon & \text{si } \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10} \\ d_{Y^\alpha}((\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi})(\tilde{y}), \tilde{y}) &< \varepsilon & \text{si } \varepsilon < \frac{\alpha}{5} \end{aligned}$$

*Preuve du lemme 3.50.*

• **Preuve de la première inégalité du lemme 3.50**

Soit  $\tilde{c}$  une courbe qui joint  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}$ ; fixons une subdivision  $T = (t_i)_{0 \leq i \leq N}$   $\delta$ -admissible pour  $\tilde{c}$ . Nous allons prouver par récurrence sur  $i$  que, si  $c_T^\alpha$  est la courbe sur  $Y^\alpha$  associée à  $c = p \circ \tilde{c}$  selon le procédé décrit avant le lemme 3.39, alors, pour tout  $t_i \in T$ ,

$$(H_i) \quad d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_i)) < \varepsilon$$

Ceci est vrai au rang  $i = 0$ , puisque  $\tilde{\psi}(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$  par construction.

Supposons que ce soit vrai à l'ordre  $i$ , alors

$$(1) \quad d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_i)) < \varepsilon \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$(2) \quad d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) < \varepsilon + \delta \quad \text{car}$$

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) \leq d_{\tilde{X}}(\tilde{c}(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) + d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_i))$$

Par ailleurs, la courbe  $c_T^\alpha$  est un relevé de la courbe  $c_T$  minimisante entre les points  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} d_{Y^\alpha}(c_T^\alpha(t_i), c_T^\alpha(t_{i+1})) &\leq \text{long}(c_T^\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ &= \text{long}(c_T|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ &= d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{i+1})) \\ &< \delta + \varepsilon \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième inégalité du lemme 3.49 et en posant  $C = \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}$ , nous en déduisons

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})) \leq C d_{Y^\alpha}(c_T^\alpha(t_i), c_T^\alpha(t_{i+1})) + \varepsilon$$

D'où l'inégalité

$$(3) \quad d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})) < \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} (\delta + \varepsilon) + \varepsilon \\ \leq \frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon$$

la dernière ligne étant valable si  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$ .

Si l'on choisit  $\delta$  tel que  $\frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4}$ , les membres de droite des inégalités (2) et (3) sont majorés par  $\frac{\varepsilon_0}{4}$ . Comme  $(\tilde{X}, d_{\tilde{X}})$  coïncide avec le  $\frac{\varepsilon_0}{2}$ -revêtement  $(X^{\varepsilon_0/2}, d_{X^{\varepsilon_0/2}})$  de  $X$  d'après le fait 3.28, le point (i) de la propriété 3.27 implique que les points  $\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})$  et  $\tilde{c}(t_{i+1})$  sont les uniques relevés de  $\psi \circ \varphi[c(t_{i+1})]$  et de  $c(t_{i+1})$  dans la boule de  $\tilde{X}$  de centre  $\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i)$  et de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{4}$ . Comme, d'après le point (ii) de la propriété 3.27, l'application  $p$  est une isométrie en restriction à cette boule, on a

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1}), \tilde{c}(t_{i+1})) = d_X(\psi \circ \varphi(t_{i+1}), c(t_{i+1})) < \varepsilon$$

ce qui prouve l'inégalité  $(H_i)$  pour tout  $i$ . En l'appliquant pour  $t_i = 1$ , on obtient

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{x}) < \varepsilon$$

### • Preuve de la deuxième inégalité du lemme 3.50

On procède de la même manière que pour montrer la première inégalité du lemme 3.50 : soit  $c^\alpha$  une courbe qui joint  $y^\alpha$  et  $\tilde{y}$  dans  $Y^\alpha$  ; fixons une subdivision  $T = (t_i)_{0 \leq i \leq N}$  ( $\delta$ -admissible) pour  $c^\alpha$  et construisons la courbe  $\tilde{c}_T$  sur  $\tilde{X}$  associée à la courbe  $c = p_\alpha \circ c^\alpha$ . Prouvons par récurrence que, pour tout  $t_i \in T$ ,

$$(H'_i) \quad d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), c^\alpha(t_i)) < \varepsilon$$

On utilise les mêmes arguments que ceux présentés dans la preuve de la première inégalité du lemme 3.50 pour montrer que  $(H_i)$  implique  $(H_{i+1})$  en s'appuyant sur les inégalités

$$(2') \quad d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), c^\alpha(t_{i+1})) < \varepsilon + \delta \quad \text{car} \\ d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), c^\alpha(t_{i+1})) \leq d_{Y^\alpha}(c^\alpha(t_i), c^\alpha(t_{i+1})) + d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), c^\alpha(t_i))$$

De même que précédemment, on a

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{c}_T(t_i), \tilde{c}_T(t_{i+1})) \leq \text{long}(\tilde{c}_T|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ = \text{long}(c_T|_{[t_i, t_{i+1}]}) \\ = d_Y(\psi \circ c(t_i), \psi \circ c(t_{i+1})) \\ < \delta + \varepsilon$$

En utilisant la première inégalité du lemme 3.49, nous en déduisons

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), \tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_{i+1})) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{c}_T(t_i), \tilde{c}_T(t_{i+1})) + \varepsilon$$

D'où l'inégalité

$$(3') \quad d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), \tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_{i+1})) < \frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon$$

la dernière ligne étant valable si  $\boxed{\varepsilon < \frac{\alpha}{5}}$ .

Si l'on choisit  $\delta$  tel que  $\boxed{\frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon < \frac{\alpha}{2}}$ , on en déduit que les points  $\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_{i+1})$  et  $c^\alpha(t_{i+1})$  appartiennent à la boule de  $Y^\alpha$  de centre  $\tilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i)$  et de rayon  $\frac{\alpha}{2}$ . Comme précédemment, l'application  $p_\alpha$  est une isométrie de cette boule sur son image (voir le point (ii) de la propriété 3.27) ce qui implique (de la même manière que dans la preuve de la première inégalité du lemme 3.50) que

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{y}) < \varepsilon$$

□

**Lemme 3.51.**

Si  $\varepsilon < \min\{\frac{\varepsilon_0}{10}, \frac{\alpha}{5}\}$  et si  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  définies ci-dessus vérifient, pour tous les points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $\tilde{X}$  et pour tous les points  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  de  $Y^\alpha$ ,

$$\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon \leq d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}'))$$

et

$$\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon \leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}'))$$

*Preuve du lemme 3.51.*

En appliquant l'inégalité triangulaire et le lemme 3.50, puis le lemme 3.49, nous obtenons

$$\begin{aligned} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') &\leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) + 3\varepsilon \\ &\leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité du lemme 3.51.

La deuxième inégalité se montre exactement de la même manière.

□

$\bar{\rho}$  est un isomorphisme

**Lemme 3.52.**

Si les inégalités précédentes sur  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\alpha$  sont vérifiées, le morphisme  $\bar{\rho}$  défini dans le lemme 3.41 est un isomorphisme dont l'inverse est le morphisme  $\bar{r}$  défini dans le lemme 3.47.

*Preuve du lemme 3.52.*

Rappelons tout d'abord que  $(\tilde{X}, d_{\tilde{X}})$  coïncide avec le  $\frac{\varepsilon_0}{2}$ -revêtement de  $X$   $(X^{\varepsilon_0/2}, d_{X^{\varepsilon_0/2}})$  d'après le fait 3.28. Notons  $[c]$  la classe d'un lacet sur  $X$  dans le groupe  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  et  $[c]_\alpha$  la classe d'un lacet sur  $Y$  dans le groupe  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ .

Par définition de l'action de  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  (respectivement  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ ) sur  $\tilde{X}$  (resp. sur  $Y^\alpha$ ), on a, pour l'origine  $\tilde{x}_0$  (resp.  $y^\alpha$ ) choisie - et pour cette origine seulement - et pour tout lacet  $c$  (resp.  $\gamma$ ) de point-base  $x_0$  dans  $X$  (resp. de point-base  $y_0$  dans  $Y$ ) :

$$(4) \quad \bar{r}([\gamma]_\alpha).\tilde{x}_0 = [\gamma_{T'}].\tilde{x}_0 = \tilde{\gamma}_{T'}(1) = \tilde{\psi}(\gamma^\alpha(1)) = \tilde{\psi}([\gamma]_\alpha.y^\alpha)$$

$$(5) \quad \bar{\rho}([c]).y^\alpha = [c_{T'}]_\alpha.y^\alpha = c_{T'}^\alpha(1) = \tilde{\varphi}(\tilde{c}(1)) = \tilde{\varphi}([c].\tilde{x}_0)$$

On obtient ainsi

$$(\bar{r} \circ \bar{\rho}([c])).\tilde{x}_0 = \tilde{\psi}[\bar{\rho}([c]).y^\alpha] = \tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}([c].\tilde{x}_0)$$

donc, en appliquant le lemme 3.50, il s'ensuit que

$$d_{\tilde{X}}([\bar{r} \circ \bar{\rho}([c])).\tilde{x}_0, [c].\tilde{x}_0) < \varepsilon$$

Les points  $\bar{r} \circ \bar{\rho}([c]).\tilde{x}_0$  et  $[c].\tilde{x}_0$  sont donc deux éléments de  $p^{-1}(x_0)$  situés à une distance inférieure à  $\varepsilon$  et, si  $\boxed{\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}}$ , ils sont confondus d'après le point (i) de la propriété 3.27. Ainsi, comme l'action de  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  sur  $\tilde{X}$  est sans point fixe (ou encore, d'après la proposition 3.26, le relevé d'un lacet  $c$  est un lacet  $\tilde{c}$  si et seulement si  $[c] = 0$  dans  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$ ), on a  $\bar{r} \circ \bar{\rho} = id$ .

On prouve de même que  $\bar{\rho} \circ \bar{r} = id$ , donc que  $\bar{\rho}$  et  $\bar{r}$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. □

### Equivariance des applications $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$

**Lemme 3.53.**

Pour tous les points  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{y}$  de  $Y^\alpha$ , pour tous les éléments  $[\gamma]$  de  $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0)$  et tous les éléments  $[\beta]_\alpha$  de  $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$ , on a

$$\tilde{\varphi}([\gamma].\tilde{x}) = \bar{\rho}([\gamma]).\tilde{\varphi}(\tilde{x})$$

$$\tilde{\psi}([\beta]_\alpha.\tilde{y}) = \bar{r}([\beta]_\alpha).\tilde{\beta}(\tilde{y})$$

**Remarque 3.54.** Notons  $\phi_{\tilde{x}_0} : \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, x_0) \longrightarrow G(\tilde{X}, X)$  l'isomorphisme qui identifie la classe de lacets  $[\gamma]$  avec l'unique élément de  $G(\tilde{X}, X)$  qui envoie  $\tilde{x}_0$  sur  $[\gamma].\tilde{x}_0$ , où  $[\gamma].\tilde{x}_0$  est l'extrémité d'une courbe  $\tilde{c}$  relevée d'origine  $\tilde{x}_0$  d'un représentant quelconque  $c$  de  $[\gamma]$ .

Notons  $\phi_{y^\alpha} : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) \longrightarrow G(Y^\alpha, Y)$  l'isomorphisme qui identifie la classe de lacets  $[\beta]_\alpha$  avec l'unique élément de  $G(Y^\alpha, Y)$  qui envoie  $y^\alpha$

sur  $[\beta]_\alpha.y^\alpha$ , où  $[\beta]_\alpha.y^\alpha$  est l'extrémité d'une courbe  $b^\alpha$  relevée d'un représentant quelconque  $b$  de  $[\beta]_\alpha$  et d'origine  $y^\alpha$ .

Plus rigoureusement, la conclusion du lemme 3.53 s'écrit

$$\tilde{\varphi} \circ \phi_{\tilde{x}_0}([\gamma]) = \phi_{y^\alpha}(\bar{\rho}([\gamma])) \circ \tilde{\varphi}$$

$$\tilde{\psi} \circ \phi_{y^\alpha}([\beta]_\alpha) = \phi_{\tilde{x}_0}(\tilde{r}([\beta]_\alpha)) \circ \tilde{\psi}$$

*Preuve du lemme 3.53.*

Fixons l'origine  $y^\alpha$  de  $Y^\alpha$  telle que  $p_\alpha(y^\alpha) = y_0$ .

Si  $[c]_\alpha$  est un élément de  $\Gamma_Y = \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  et si  $c$  est un lacet qui représente  $[c]_\alpha$ , de point-base  $y_0$ , nous adopterons la notation

$$[c]_\alpha.\tilde{y} := \phi_{y^\alpha}([c]_\alpha)(\tilde{y})$$

c'est-à-dire que l'action de  $\Gamma_Y$  sur  $Y^\alpha$  via  $\phi_{y^\alpha}$  est décrite par

$$\begin{cases} \Gamma_Y \times Y^\alpha & \longrightarrow & Y^\alpha \\ ([c]_\alpha, \tilde{y}) & \longmapsto & [c]_\alpha.\tilde{y} \end{cases}$$

Nous avons déjà vu que  $[c]_\alpha.y^\alpha$  est l'extrémité du relevé  $c^\alpha$  de  $c$  d'origine  $y^\alpha$ . Si  $\tilde{y}$  est un point quelconque de  $Y^\alpha$ , choisissons une courbe  $b^\alpha$  qui joint  $y^\alpha$  à  $\tilde{y}$  et notons  $\bar{b}$  la courbe relevée de  $b = p_\alpha \circ b^\alpha$  en partant de l'origine  $[c]_\alpha.y^\alpha = c^\alpha(1)$ . On a alors,

$$\begin{aligned} (6) \quad [c]_\alpha.\tilde{y} &= \text{extrémité de } \bar{b} \\ &= \text{extrémité du relevé } c^\alpha.\bar{b} \text{ dans } Y^\alpha \text{ de la courbe } c.b \\ &\quad \text{d'origine } y^\alpha \end{aligned}$$

En effet, la courbe  $t \longrightarrow [c]_\alpha.b^\alpha(t)$  est un relevé de  $b$  de même origine que  $\bar{b}$ ; il coïncide donc avec  $\bar{b}$  (car  $p_\alpha$  est un homéomorphisme local) et

$$\text{extrémité de } \bar{b} = [c]_\alpha.(\text{extrémité de } b^\alpha) = [c]_\alpha.\tilde{y}$$

Il s'agit là d'une propriété classique des revêtements galoisiens, qui vaut aussi pour le revêtement  $\tilde{X} \longrightarrow X$  (ne serait-ce que parce que  $\tilde{X} = X^\delta$  si  $\delta$  est suffisamment petit).

Paramétrons  $c^\alpha$  par  $[0, 1]$  et  $\bar{b}$  par  $[1, 2]$ , ce qui paramètre la courbe  $c^\alpha.\bar{b}$  par  $[0, 2]$ . Choisissons une subdivision  $T'$  (respectivement  $T''$ ) de  $[0, 1]$  (respectivement de  $[1, 2]$ ) qui soit  $\delta$ -admissible pour  $c^\alpha$  (resp. pour  $\bar{b}$ ) et notons  $T = T' \cup T''$  la subdivision de  $[0, 2]$  qui est  $\delta$ -admissible pour la courbe  $c^\alpha.\bar{b}$ .

Remarquons que  $c.b = p_\alpha(c^\alpha.\bar{b})$  et rappelons que

$$(7) \quad [c_{T'}] = \tilde{r}([c]_\alpha) \text{ d'après les lemmes 3.46 et 3.47}$$

$$(8) \quad \tilde{\psi}(\tilde{y}) = \tilde{\psi}(b^\alpha(1)) = \text{extrémité du relevé } \tilde{b}_{T''} \text{ de } b_{T''} \text{ d'origine } \tilde{x}_0$$

(voir la définition de  $\tilde{\psi}$  au lemme 3.44 et le paragraphe qui le suit)

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}([c]_\alpha.\tilde{y}) &= \tilde{\psi}((c^\alpha.\bar{b})(2)) \\
&= \text{extrémité du relevé } \widetilde{(c.b)_T} \text{ de } (c.b)_T \text{ d'origine } \tilde{x}_0 \\
&= \text{extrémité du relevé de } c_{T'}.b_{T''} \text{ d'origine } \tilde{x}_0 \\
&= [c_{T'}].(\text{extrémité du relevé } \tilde{b}_{T''} \text{ de } b_{T''} \text{ d'origine } \tilde{x}_0) \\
&= [c_{T'}].\tilde{\psi}(\tilde{y}) \\
&= \bar{r}([c]_\alpha).\tilde{\psi}(\tilde{y})
\end{aligned}$$

où la première et la quatrième égalité découlent de (6), la seconde et la cinquième de la définition de  $\tilde{\psi}$  (voir (8)), la troisième de la construction de  $(c.b)_T$  à partir de  $c.b$  qui donne  $(c.b)_T = c_{T'}.b_{T''}$  et la sixième des égalités (7) et (8).

Ceci prouve l'équivariance de  $\tilde{\psi}$  par rapport à la représentation  $\bar{r}$ ; l'équivariance de  $\tilde{\varphi}$  par rapport à  $\bar{\rho}$  se prouve de la même manière.  $\square$

### Récapitulatif des conditions

Tous ces résultats ont été établis à la condition qu'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que les conditions suivantes soient vérifiées **simultanément** :

$$\begin{array}{llll}
\alpha > \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) & ; & \alpha > \delta + 2\varepsilon & ; & \frac{\varepsilon_0}{2} > \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) & ; \\
\frac{\varepsilon_0}{2} > \delta + 2\varepsilon & ; & \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon_0}{2} & ; & \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10} & ; \\
\varepsilon < \frac{\alpha}{5} & ; & \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} & ; & \varepsilon < \frac{\alpha}{2} & ; \\
\delta + \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4} & ; & \frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4} & ; & \frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon < \frac{\alpha}{2} & ;
\end{array}$$

Il suffit de supposer que

$$0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

et

$$5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$$

pour qu'un tel réel  $\delta > 0$  existe. Ceci termine la preuve du théorème 3.30.  $\square$

### 3.4.3 Démonstration du corollaire 3.32

Fixons deux éléments de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , notés  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , tels que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

on a alors  $5\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$  et on peut fixer un réel  $\alpha > 0$  tel que  $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . Le théorème 3.30 implique alors que les groupes  $G(\tilde{X}, X)$  et  $G(Y^\alpha, Y)$  sont isomorphes. Comme l'espace de longueur  $(Y, d_Y)$  est un

élément de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  et comme  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ , la remarque 3.28 entraîne que le  $\alpha$ -revêtement  $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$  coïncide avec le revêtement universel  $p_Y : \tilde{Y} \longrightarrow Y$  et que les groupes  $G(\tilde{Y}, Y)$  et  $G(Y^\alpha, Y)$  sont identiques. Les groupes  $G(\tilde{X}, X)$  et  $G(\tilde{Y}, Y)$  sont alors également isomorphes, ce qui suffit pour obtenir le point (i) du corollaire 3.32 à partir du point (i) du théorème 3.30. De plus, la construction proposée dans la preuve de théorème 3.30 donne les mêmes applications  $\tilde{\varphi} : Y^\alpha = \tilde{Y} \longrightarrow Y$  et  $\tilde{\psi} : Y \longrightarrow Y^\alpha = \tilde{Y}$  pour tout  $\alpha$  tel que  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . Comme  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  sont les applications du théorème 3.30 pour tout  $\alpha$  qui vérifie  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , elles vérifient en particulier les deux derniers points du point (ii).

Fixons à présent un réel  $\alpha$  tel que  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . On a alors

- pour tous les points  $\tilde{x}$  et  $\tilde{x}'$  de  $\tilde{X}$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon &\leq d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \\ &\leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon \end{aligned}$$

Comme les revêtements  $p_\alpha : Y^\alpha \longrightarrow Y$  et  $p : \tilde{Y} \longrightarrow Y$  coïncident, on a, pour tout  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon &\leq d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\tilde{x}')) \\ &\leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon \end{aligned}$$

En passant à la limite quand  $\alpha$  tend vers  $\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , on obtient le troisième point du point (ii) du corollaire 3.32.

- de même, pour tous les points  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}'$  de  $\tilde{Y}$ , on a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon &= \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon \\ &\leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}')) \\ &\leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon \\ &= \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon \end{aligned}$$

et, pour tout  $\alpha$  tel que  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ ,

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon \leq d_{\tilde{X}}(\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon$$

Comme ceci reste vrai pour tous les réels  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , on peut passer à la limite quand  $\alpha$  tend vers  $\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , et l'on obtient ainsi le quatrième point du point (ii) du corollaire 3.32, ce qui termine la preuve.

## 3.5 Autres applications

### 3.5.1 Approximation d'une variété par un graphe

Fixons un espace de longueur compact (connexe)  $(X, d)$  quelconque, semi-localement simplement connexe (ce qui équivaut au fait qu'il admette un revêtement universel simplement connexe) et soit  $G$  un graphe muni d'une distance de longueur  $d_G$  tels qu'il existe une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff entre  $(G, d_G)$  et  $(X, d)$ . La question que l'on se pose ici consiste à savoir si l'on peut déduire le groupe fondamental de  $X$  à partir d'un quotient explicitable du groupe fondamental de  $G$ . Intuitivement, l'idée est que le graphe  $G$  contient beaucoup plus de cycles non triviaux que  $X$ . Il convient alors de considérer comme homotopes à zéro (au moins) les cycles de petite taille, puisqu'ils sont remplis par un triangle "plein" de l'espace de longueur. C'est le rôle des  $\alpha$ -revêtements (pour  $\alpha$  bien choisi) qui consistent à considérer comme nuls (dans le groupe des transformations de ce revêtement) tous les éléments du groupe fondamental de  $G$  qui sont des produits de cycles de  $G$  contenus dans une  $d_G$ -boule de rayon inférieur à  $\alpha$ , en particulier les triangles du graphe formés de trois arêtes de longueur inférieures à  $2\alpha/3$ .

#### Construction d'un graphe qui approche un espace de longueur

Fixons un espace de longueur  $(X, d_X)$  compact de diamètre inférieur à un réel arbitraire strictement positif  $D$ .

**Exemple 3.55.** *Un graphe  $G$  compact et connexe muni d'une distance de longueur  $d_G$  telle que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(G, d_G)$  soit inférieure à  $4\varepsilon(D + \varepsilon)$  où  $\varepsilon$  est un réel arbitraire strictement positif et strictement inférieur à  $\frac{1}{4}$  (le graphe  $G$  est un graphe de recouvrement).*

*Construction de l'exemple 3.55.*

Fixons arbitrairement un réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ . Considérons un espace de longueur  $(X, d_X)$  compact et semi-localement simplement connexe et un  $\varepsilon^2$ -réseau fini sur  $(X, d_X)$ , noté  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ . On construit le graphe  $G$  (fini donc compact), dont l'ensemble des sommets est  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ , en mettant une arête entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$  si et seulement si la distance (sur  $X$ ) entre ces deux points est strictement inférieure à  $\varepsilon$ ; on attribue alors à cette arête la longueur  $d_X(x, y)$ .

#### • Le graphe $G$ est connexe par arcs :

Fixons en effet deux sommets  $x$  et  $y$  de  $G$ , c'est-à-dire deux éléments de  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ ; nous allons construire un chemin, dans  $G$ , qui relie ces deux points. Soit  $c$  une courbe minimisante sur  $X$  (paramétrée par  $[0, 1]$ ) qui relie  $x$  et  $y$ , fixons une subdivision  $T = (t_i)_{i=0 \dots N}$  de  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $i \in \{0, \dots, N-2\}$ ,

$$d_X(c(t_i), c(t_{i+1})) = \text{long}(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Considérons alors un ensemble de points de  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ , noté  $\{x_i\}_{i=0\dots N}$ , tel que  $x_0 = c(t_0) = x$ ,  $x_N = c(t_N) = y$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ ,

$$d_X(c(t_i), x_i) < \varepsilon^2$$

Si  $i$  appartient à  $\{0, \dots, N\}$ , comme  $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ , on a

$$d_X(x_i, x_{i+1}) \leq d_X(x_i, c(t_i)) + d_X(c(t_i), c(t_{i+1})) + d_X(x_i, c(t_i)) < 2\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Par construction, les points  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont donc reliés par une arête dans  $G$ , ce qui implique en particulier que  $x$  et  $y$  sont reliés par un chemin  $\gamma$  sur  $G$ ; le graphe  $G$  est donc connexe par arcs.

En utilisant les mêmes arguments que dans le paragraphe qui suit l'exemple 1.19, on munit le graphe  $G$  d'une distance de longueur  $d_G$ .

• **La distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(G, d_G)$  est inférieure à  $4\varepsilon(D + \varepsilon)$  :**

Remarquons tout d'abord que, si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ , une courbe  $c$  sur  $G$  entre  $x$  et  $y$  correspond naturellement à une courbe  $\bar{c}$  sur  $X$  (entre les points  $x$  et  $y$ ) de même longueur (il suffit en effet de considérer la courbe sur  $X$  qui coïncide avec une géodésique minimisante entre chaque paire de sommets de  $G$  consécutifs sur  $c$ ). Si la courbe  $c$  est minimisante entre  $x$  et  $y$  sur  $G$ , il s'ensuit alors que

$$d_G(x, y) = \text{long}_G(c) = \text{long}_X(\bar{c}) \geq d_X(x, y)$$

Fixons à présent une courbe  $c$  minimisante sur  $X$  entre  $x$  et  $y$ .

Soit  $T = (t_i)_{i=0\dots N}$  une subdivision de  $[0, 1]$  telle que, pour tout  $i \in \{0, \dots, N-2\}$ ,

$$d_X(c(t_i), c(t_{i+1})) = \text{long}(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Considérons alors, comme dans le paragraphe précédent, un ensemble de points de  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ , noté  $\{x_i\}_{i=0\dots N}$ , tel que  $x_0 = x$ ,  $x_N = y$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ ,

$$d_X(c(t_i), x_i) < \varepsilon^2$$

Nous avons déjà vu que les points  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont alors reliés dans  $G$  par une arête (qui est de longueur  $d_X(x_i, x_{i+1})$ ), ce qui permet de construire une

courbe  $\gamma$  sur  $G$  entre  $x$  et  $y$ . Il en découle que

$$\begin{aligned}
d_G(x, y) &\leq \text{long}_G(\gamma) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \text{long}_G(\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}) \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} d_X(x_i, x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} d_X(x_i, c(t_i)) + d_X(c(t_i), c(t_{i+1})) + d_X(c(t_{i+1}), x_{i+1}) \\
&< \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon^2 + d_X(c(t_i), c(t_{i+1})) + \varepsilon^2 \\
&\leq d_X(x, y) + 2N\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par construction de la subdivision  $T$ ,

$$(N-1)\frac{\varepsilon}{2} \leq \text{long}_X(c)$$

Ceci entraîne que

$$d_G(x, y) \leq d_X(x, y) + 2 \left( E \left[ \frac{2 \text{long}_X(c)}{\varepsilon} \right] + 1 \right) \varepsilon^2$$

et, finalement, si  $D$  est un majorant du diamètre de  $(X, d_X)$ ,

$$d_G(x, y) \leq d_X(x, y) + 2\varepsilon(2D + \varepsilon)$$

Si  $x$  et  $y$  sont deux points situés sur deux arêtes du graphe  $G$  (i.e. différents des sommets), en identifiant chaque arête  $[x_i, x_j]$  à une géodésique minimisante  $c_{x_i, x_j}$  qui joint les points  $x_i$  et  $x_j$  dans  $X$  et en identifiant tout point  $z$  de cette arête avec le point  $\varphi(z)$  qui partage  $c_{x_i, x_j}$  dans le même rapport, on obtient que

$$d_G(x, y) \geq d_G(\varphi(x), \varphi(y))$$

la preuve étant identique à celle de ci-dessus. Par ailleurs, la même preuve que celle que nous venons de faire nous donne

$$d_G(x, y) \leq d_X(\varphi(x), \varphi(y)) + 2(N+1)\varepsilon^2$$

donc

$$d_G(x, y) \leq d_X(\varphi(x), \varphi(y)) + 4\varepsilon(D + \varepsilon)$$

Le graphe  $G$  possède donc les propriétés annoncées dans l'exemple 3.55

□

**Comparaison des groupes fondamentaux du graphe et de la variété**

**Proposition 3.56.**

Fixons trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact (connexe) quelconque, semi-localement simplement connexe, dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et dont le centre est réduit à zéro, dont le diamètre et l'entropie sont respectivement majorés par  $D$  et  $H$ .

Soient  $\varepsilon$  un réel strictement positif, fixé arbitrairement tel que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et  $\varepsilon'$  un réel strictement positif tel que  $\varepsilon' < \min\{\frac{\varepsilon}{6D}, \varepsilon' \leq \frac{D}{2}\}$ .

Soit  $G$  un graphe de recouvrement compact et connexe associé à un réseau  $\mathcal{R}_{(\varepsilon')^2}$  et construit d'après le procédé décrit dans l'exemple 3.55. On munit  $G$  de la distance de longueur  $d_G$  également construite dans l'exemple 3.55. On peut alors construire explicitement un isomorphisme  $\rho$  entre le groupe fondamental de  $X$  et le groupe des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement  $G^\alpha \rightarrow G$  pour tout  $\alpha > 0$  tel que  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$

**Remarque 3.57.** On comprend à présent sur cet exemple que le réel  $\alpha$  ne peut pas être choisi arbitrairement petit dans le théorème 3.30 (ce qui justifie la condition  $5\varepsilon < \alpha$ ). Le graphe  $G$  contient en effet de nombreux petits lacets, de longueur inférieure à  $\varepsilon'$ , qui ne proviennent pas de lacets sur  $X$  mais qui apparaissent systématiquement (sans aucun rapport avec la topologie de  $X$ ) du fait de la présence d'arêtes joignant deux à deux tout triplet de points dont les distances sont inférieures à  $\varepsilon'$ . Pour espérer retrouver le groupe fondamental de  $X$ , ces lacets doivent être identifiés à zéro, ce qui ne serait plus le cas si on considérait un  $\alpha$ -revêtement de  $G$  avec une valeur de  $\alpha$  trop petite par rapport à  $\varepsilon$ .

De même, si on choisissait  $\alpha > \frac{\varepsilon_0}{2}$ , on identifierait à zéro des lacets sur  $G$  qui pourraient être des lacets non homotopes à zéro sur  $X$ . C'est en particulier le cas s'il existe un sous-ensemble de  $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$  qui est un  $\varepsilon^2$ -réseau d'une courbe sur  $X$  (en tant qu'espace de longueur) dont la longueur réalise la systole. Il est donc nécessaire de choisir  $\alpha$  suffisamment petit par rapport à  $\frac{\varepsilon_0}{2}$ .

*Preuve de la proposition 3.56.*

Soit

$$\varphi : G \longrightarrow X$$

l'application définie de la manière suivante :

- $\varphi$  est l'injection canonique de l'ensemble  $\mathcal{R}_{(\varepsilon')^2}$  des sommets (qui est égal

à  $S$  dans  $X$ ).

• A chaque arête entre deux sommets  $x_1$  et  $x_2$  on associe une géodésique minimisante sur  $X$ , notée  $c_{x_1, x_2}$ , entre les points  $\varphi(x_1)$  et  $\varphi(x_2)$ . Si  $y$  est un point de l'arête qui relie les sommets  $x_1$  et  $x_2$ , on définit  $\varphi(y)$  comme l'unique point de la géodésique  $c_{x_1, x_2}$  tel que  $d_X(\varphi(x_1), \varphi(y)) = d_G(x_1, y)$ . Nous avons montré dans la construction de l'exemple 3.55 que l'application  $\varphi$  est une  $4\varepsilon'(D + \varepsilon')$ -approximation entre  $(G, d_G)$  et  $(X, d_X)$ . Comme nous avons supposé que  $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{6D}$ , que  $\varepsilon' < \frac{D}{2}$  et que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon}{13} < D$ , l'application  $\varphi$  est une  $\varepsilon$ -approximation.

Pour construire  $\bar{r}$ , on procède de la manière suivante : on choisit a priori un réel  $\delta > 0$  qui vérifie toutes les hypothèses rassemblées dans la partie "Récapitulatif des conditions" à la fin de la preuve du théorème 3.30. Si  $c$  est un lacet sur  $G$ , on choisit une subdivision  $T = (t_i)_{i \in \{0, \dots, p\}}$  qui soit  $\delta$ -admissible pour  $c$  et qui contienne tous les sommets de  $G$  rencontrés par le lacet  $c$  (ce qui est rendu possible par la remarque 3.38, quitte à affiner la subdivision). On construit alors le lacet  $c_T$  sur  $X$  en suivant le procédé décrit dans le lemme 3.37 et en choisissant, si  $c(t_i)$  et  $c(t_{i+1})$  appartiennent tous les deux à l'arête qui relie les deux sommets  $x_1$  et  $x_2$ , la géodésique minimisante  $c_{x_1, x_2|_{[t_i, t_{i+1}]}}$  entre les points  $\varphi \circ c(t_i)$  et  $\varphi \circ c(t_{i+1})$  (qui appartiennent tous les deux à la géodésique  $c_{x_1, x_2}$  par construction). Ceci permet donc a posteriori de s'affranchir du choix d'une subdivision  $\delta$ -admissible pour construire le lacet  $c_T$  : il suffit en effet de relier tous les points du réseau  $\mathcal{R}_{(\varepsilon')^2}$  rencontrés par  $c$  (dans le même ordre) par une géodésique minimisante sur  $X$ . Le lacet  $c_T$  est donc l'image par l'injection canonique  $\varphi$  de  $c$ . Si l'on note  $[c]_\alpha$  la classe du lacet  $c$  sur  $G$  dans le groupe  $\pi_1(G, s_0)/\pi_1(G, U_\alpha, s_0)$  et  $[c_T]$  la classe du lacet sur  $X$  construit ci-dessus dans le groupe  $\pi_1(X, \varphi(s_0))/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, \varphi(s_0))$ , le morphisme  $\bar{r}$ , obtenu par passage au quotient de l'application qui, à tout lacet de  $G$ , associe son image par l'injection canonique de  $G$  dans  $X$ , est un isomorphisme (d'après le lemme 3.47) entre  $\pi_1(G, s_0)/\pi_1(G, U_\alpha, s_0)$  et  $\pi_1(X, \varphi(s_0))/\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, \varphi(s_0))$ .

Comme par ailleurs  $(X, d_X)$  est semi-localement simplement connexe et que sa systole est supérieure à  $\varepsilon_0$ , le groupe  $\pi_1(X, U_{\varepsilon_0/2}, \varphi(s_0))$  est trivial et  $\bar{r}$  est un isomorphisme entre  $\pi_1(G, s_0)/\pi_1(G, U_\alpha, s_0)$  et  $\pi_1(X, \varphi(s_0))$ , ce qui termine la preuve de la proposition 3.56.  $\square$

### 3.5.2 Rigidité du groupe des automorphismes du revêtement universel

#### Corollaire 3.58.

Fixons trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Notons  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  l'ensemble des classes d'isométrie des espaces de longueur compacts qui possèdent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont le groupe des transformations de ce revêtement est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont l'entropie est majorée par  $H$ .

Si  $(X, d_X)$  est un élément de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  et si  $(Y, d_Y)$  est n'importe quel autre élément de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  tel que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

le groupe  $G(\tilde{Y}, Y)$  des transformations du revêtement universel de  $Y$  est isomorphe au groupe  $G(\tilde{X}, X)$  des transformations du revêtement universel de  $X$ . Si, de plus,  $X$  et  $Y$  sont semi-localement simplement connexes, ceci donne un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de  $X$  et  $Y$ .

**Remarque.** (i) L'espace  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  n'est pas précompact pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir le corollaire 2.29); on ne peut donc pas affirmer, à partir du corollaire 3.58, que  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  ne contient qu'un nombre fini de groupes d'automorphismes du revêtement universel.

(ii) Contrairement au théorème de [Tu1], nous ne supposons pas ici que les espaces  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont semi-localement simplement connexes.

*Preuve du corollaire 3.58.*

Fixons deux éléments de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , notés  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , tels que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

on a alors  $5\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$  et on peut fixer un réel  $\alpha > 0$  tel que  $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . Le théorème 3.30 implique alors que les groupes  $G(\tilde{X}, X)$  et  $G(Y^\alpha, Y)$  sont isomorphes. Comme l'espace de longueur  $(Y, d_Y)$  est un élément de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  et comme  $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ , la remarque 3.28 entraîne que le  $\alpha$ -revêtement  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$  coïncide avec le revêtement universel  $p_Y : \tilde{Y} \rightarrow Y$  et que les groupes  $G(\tilde{Y}, Y)$  et  $G(Y^\alpha, Y)$  sont identiques. Les groupes  $G(\tilde{X}, X)$  et  $G(\tilde{Y}, Y)$  sont alors également isomorphes, ce qui achève la preuve du corollaire 3.58.  $\square$

En fait, nous avons montré dans le théorème 3.30 (respectivement dans le corollaire 3.32) que l'isomorphisme entre le groupe des transformations du revêtement universel de  $X$  et le groupe des transformations du  $\alpha$ -revêtement de  $Y$  (respectivement le groupe des transformations du revêtement universel de  $Y$ ) provient du relevé  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow Y^\alpha$  (respectivement  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ ) d'une  $\varepsilon$ -approximation de Gromov-Hausdorff entre  $X$  et  $Y$ .

Notons

$$N_{\tilde{x}}[\tilde{X}, R] = \# \left[ G(\tilde{X}, X) \cdot \tilde{x} \cap B(\tilde{x}, R) \right]$$

et

$$N_{\tilde{y}}[Y^\alpha, R] = \# [G(Y^\alpha, Y) \cdot \tilde{y} \cap B(\tilde{y}, R)]$$

Le théorème 3.30 (respectivement le corollaire 3.32) permet alors de comparer les nombres  $N_{\tilde{x}}[\tilde{X}, R]$  et  $N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[Y^\alpha, R]$  (respectivement  $N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R]$ ). Plus précisément, on a la

**Proposition 3.59.**

Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

(i) Soient  $(X, d_X)$  un élément de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et  $(Y, d_Y)$  n'importe quel autre élément de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  tel que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

alors, pour n'importe quel point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$ ,

$$\begin{aligned} N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R - \varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right) \right] &\leq N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R] \\ &\leq N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R + 3\varepsilon) \left( 1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

où  $\tilde{\varphi}$  est l'application définie dans le corollaire 3.32 entre  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$ .

(ii) Soient  $(X, d_X)$  un élément de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur compact (connexe) quelconque tel que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

Alors, si  $\alpha$  est un réel qui vérifie  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ , pour tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{X}$ ,

$$\begin{aligned} N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R - \varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha} \right) \right] &\leq N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[Y^\alpha, R] \\ &\leq N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R + 3\varepsilon) \left( 1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1} \right] \end{aligned}$$

où  $\tilde{\varphi}$  est l'application définie dans le théorème 3.30 entre  $\tilde{X}$  et  $Y^\alpha$ .

*Preuve de la proposition 3.59.*

**Preuve du point (i) :**

Soit  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  l'application du corollaire 3.32 obtenue en relevant une  $\varepsilon$ -approximation  $\varphi$  de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ . Notons  $\rho$  l'isomorphisme induit par  $\tilde{\varphi}$  entre les groupes d'automorphismes des revêtements universels de  $X$  et  $Y$ . Fixons un élément quelconque  $\gamma$  de  $G(\tilde{Y}, Y)$  tel que

$$d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \gamma(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) < R$$

Alors, puisque  $\gamma(\tilde{\varphi}(\tilde{x})) = \tilde{\varphi}(\rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x}))$  d'après le corollaire 3.32, on vérifie que

$$d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x}))) < R$$

et, de nouveau grâce au corollaire 3.32,

$$\begin{aligned} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x})) &\leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} [d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x}))) + 3\varepsilon] \\ &< (R + 3\varepsilon) \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Comme l'isomorphisme  $\rho^{-1}$  est en particulier injectif, on obtient

$$N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R] \leq N_{\tilde{x}}\left[\tilde{X}, (R + 3\varepsilon) \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right]$$

Fixons à présent un élément quelconque  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X)$  tel que

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x})) < (R - \varepsilon) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)$$

En utilisant le corollaire 3.32, on obtient

$$\begin{aligned} d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \rho(\gamma)\tilde{\varphi}(\tilde{x})) &= d_{\tilde{Y}}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(\gamma(\tilde{x}))) \\ &\leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-1} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x})) + \varepsilon \\ &< R \end{aligned}$$

et, finalement, comme l'isomorphisme  $\rho$  est en particulier injectif,

$$N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R] \geq N_{\tilde{x}}\left[\tilde{X}, (R - \varepsilon) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)\right],$$

ce qui termine la preuve du point (ii) de la proposition 3.59.

**Preuve du point (ii) :**

Fixons un réel  $\alpha$  tel que  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . Considérons l'application

$$\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow Y^\alpha$$

et l'isomorphisme

$$\rho : G(\tilde{X}, X) \longrightarrow G(Y^\alpha, Y)$$

construits dans le théorème 3.30.

Soit  $\tilde{x}$  un point fixé de  $\tilde{X}$  et  $\gamma$  un élément du groupe  $G(Y^\alpha, y)$  tel que

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \gamma(\tilde{\varphi}(\tilde{x}))) < R$$

En utilisant le théorème 3.30, nous montrons, comme dans la preuve du point (i), que

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x})) < (R + 3\varepsilon) \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}$$

ce qui implique de la même manière que

$$N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[Y^\alpha, R] \leq N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R + 3\varepsilon) \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \right]$$

Fixons à présent un élément  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X)$  tel que

$$d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma(\tilde{x})) < (R - \varepsilon) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)$$

En utilisant la troisième inégalité du point (ii) du théorème 3.30, on montre comme dans la preuve du point (i) de la proposition 3.59 que

$$d_{Y^\alpha}(\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \rho(\gamma)\tilde{\varphi}(\tilde{x})) < R$$

ce qui implique

$$N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[Y^\alpha, R] \geq N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R - \varepsilon) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) \right]$$

Ceci achève la preuve du point (ii) de la proposition 3.59.  $\square$

### 3.5.3 Comparaison du spectre des longueurs

Soit  $(X, d)$  un espace de longueur compact connexe. Notons  $\pi_{libre}(X)$  l'ensemble des classes d'homotopies libres de lacets dans  $X$ . Considérons l'application canonique

$$h : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_{libre}(X)$$

Elle est correctement définie (puisque deux courbes homotopes à extrémités fixées sont a fortiori librement homotopes), surjective (tout lacet  $c$  est librement homotope au lacet  $\beta.c.\beta^{-1}$ , de point-base  $x$ , où  $\beta$  est un chemin reliant  $x$  à  $c(0)$ ). Mettons sur  $\pi_1(X, x)$  la relation  $\sim$  définie par  $\gamma \sim \gamma'$  si et seulement si il existe un élément  $g$  de  $\pi_1(X, x)$  tel que  $\gamma' = g^{-1}\gamma g$  :

les classes d'équivalence sont appelées "classes de conjugaison de  $\pi_1(X, x)$ ". Alors, l'application  $h$  passe au quotient en une bijection

$$\bar{h} : (\pi_1(X, x) / \sim) \longrightarrow \pi_{libre}(X)$$

En effet,  $h$  est constante sur chaque classe de conjugaison puisque, si  $c$  et  $c'$  sont deux lacets de point-base  $x$ , le lacet  $c.c'.c^{-1}$  est librement homotope à  $c'$  (par rétraction du point-base le long de  $c$ ), donc

$$h([c].[c'].[c]^{-1}) = h([c.c'.c^{-1}]) = h([c'])$$

Inversement, si deux lacets  $c_0$  et  $c_1$  de point-base  $x$  sont librement homotopes par une homotopie  $H$  telle que  $H(0, \cdot) = c_0$  et  $H(1, \cdot) = c_1$ , la courbe  $\beta(s) = H(s, a) = H(s, b)$  est un lacet de point-base  $x$ , et  $H$  fournit une homotopie de  $\beta.c_1.\beta^{-1}$  sur  $c_0$ , donc  $h([c_1]) = h([c_0])$  implique  $[c_0] = [\beta][c_1][\beta]^{-1}$  et  $[c_0] \sim [c_1]$ .

Si  $X$  est semi-localement simplement connexe, le groupe  $\Gamma$  des automorphismes du revêtement universel est isomorphe à  $\pi_1(X, x)$ ; comme cet isomorphisme respecte la conjugaison, il induit une bijection de l'ensemble  $\Gamma / \sim$  des classes de conjugaison de  $\Gamma$  sur  $\pi_{libre}(X)$ .

On appelle "spectre des longueurs marqué" l'application  $\bar{l}_X : \Gamma / \sim \longrightarrow \mathbb{R}^+$  obtenue par passage au quotient de l'application  $l_X : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$l_X(\gamma) = \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})$$

cette application passe bien au quotient car

$$l_X(g^{-1}\gamma g) = \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} d_{\tilde{X}}(g\tilde{x}, \gamma.[g\tilde{x}]) = l_X(\gamma)$$

Ce spectre des longueurs marqué a un sens géométrique, puisque (via la bijection entre  $(\Gamma / \sim)$  et  $\pi_{libre}(X)$ ), il correspond à l'application qui, à chaque classe d'homotopie libre, associe la plus petite longueur d'un lacet de la classe. Lorsque  $(X, d_X)$  est une variété riemannienne (compacte) de courbure négative, la plus petite longueur d'un lacet dans chaque classe d'homotopie libre est réalisée par l'unique géodésique périodique de la classe : le spectre des longueurs marqué coïncide donc avec le spectre (marqué) des longueurs des géodésiques périodiques, ce qui renforce sa signification géométrique, mais lui confère également une signification dynamique, puisqu'il s'agit de l'ensemble (marqué) des périodes des trajectoires périodiques du flot géodésique.

**Corollaire 3.60.**

Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  semi-localement simplement connexes tels que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

Alors, si  $\rho : G(\tilde{X}, X) \longrightarrow G(\tilde{Y}, Y)$  est l'isomorphisme entre leurs groupes de transformations du revêtement universel construit dans le corollaire 3.32, si  $\bar{\rho}$  est la bijection induite par  $\rho$  entre les ensembles de classes de conjugaison  $G(\tilde{X}, X)/\sim$  et  $G(\tilde{Y}, Y)/\sim$ , et si  $\bar{l}_X$  et  $\bar{l}_Y$  désignent les spectres marqués des longueurs de  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  respectivement, on a, pour tout élément  $\gamma$  de  $G(\tilde{X}, X)$ ,

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) (\bar{l}_X(\gamma) - \varepsilon) \leq \bar{l}_Y(\bar{\rho}(\gamma)) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-1} \bar{l}_X(\gamma) + \varepsilon$$

*Preuve du corollaire 3.60.*

Pour tout élément  $g$  de  $G(\tilde{X}, X)$  et tout élément  $h$  de  $G(\tilde{Y}, Y)$ , posons

$$l_X(g) = \inf_{\tilde{x} \in \tilde{X}} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, g(\tilde{x}))$$

$$l_Y(h) = \inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, h(\tilde{y}))$$

on a  $\bar{l}_X(\text{classe de } g \text{ modulo } \sim) = l_X(g)$  et  $\bar{l}_Y(\text{classe de } h \text{ modulo } \sim) = l_Y(h)$ .

Il nous suffit donc de prouver que

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) (l_X(\gamma) - \varepsilon) \leq l_Y(\rho(\gamma)) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-1} l_X(\gamma) + \varepsilon$$

Or, d'après le corollaire 3.32,

$$\begin{aligned} d_{\tilde{X}}(\tilde{x}, g(\tilde{x})) &\geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) (d_{\tilde{Y}}[\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}(g(\tilde{x}))] - \varepsilon) \\ &\geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) (d_{\tilde{Y}}[\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \rho(g) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{x})] - \varepsilon) \end{aligned}$$

En passant à l'infimum en  $\tilde{x}$ , nous obtenons

$$l_X(g) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) (l_Y(\rho(g)) - \varepsilon)$$

De même, le corollaire 3.32 donne

$$\begin{aligned} d_{\tilde{Y}}(\tilde{y}, h(\tilde{y})) &\geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) (d_{\tilde{X}}[\tilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{\psi}(h(\tilde{y}))] - \varepsilon) \\ &\geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) (d_{\tilde{X}}[\tilde{\psi}(\tilde{y}), \rho^{-1}(h) \cdot \tilde{\psi}(\tilde{y})] - \varepsilon) \end{aligned}$$

En passant à l'infimum en  $\tilde{x}$ , nous obtenons

$$l_Y(h) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) (l_X(\rho^{-1}(h)) - \varepsilon)$$

ce qui termine la preuve du corollaire 3.60.  $\square$

### 3.5.4 Continuité uniforme de l'entropie par rapport à la distance de Gromov-Hausdorff

#### **Théorème 3.61.**

Soient  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  trois réels strictement positifs fixés, posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-\frac{2(4+\delta)}{\delta}HD}$$

(i) Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont le groupe des automorphismes du revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont l'entropie est majorée par  $H$ . Si

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

Alors,

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X) \leq Ent(Y, d_Y) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

(ii) Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont le groupe des automorphismes du revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont l'entropie est majorée par  $H$ .

Soit  $(Y, d_Y)$  n'importe quel autre espace de longueur compact (et connexe) tel que

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

Alors, pour tout réel  $\alpha$  tel que  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ ,

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) Ent(X, d_X) \leq Ent_{(Y^\alpha, d_{Y^\alpha})}(Y, d_Y) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

où  $Ent_{(Y^\alpha, d_{Y^\alpha})}(Y, d_Y)$  est l'entropie de  $(Y, d_Y)$  par rapport à son  $\alpha$ -revêtement (voir la définition 2.10).

**Remarque 3.62.** Le théorème 3.61 implique que l'application  $(X, d_X) \longrightarrow Ent(X, d_X)$  est  $\frac{4H}{\varepsilon_0}$ -lipschitzienne (donc uniformément continue) sur les boules de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{26}$  de l'espace  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  (muni de la distance de Gromov-Hausdorff) sur  $\mathbb{R}^+$ .

*Preuve de la remarque 3.62.*

Si  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  tels que  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$ , le point (i) du théorème 3.61 donne,

$$|Ent(Y, d_Y) - Ent(X, d_X)| \leq \frac{4H}{\varepsilon_0} d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$$

□

*Preuve du théorème 3.61.*

• **Preuve du point (i) :**

D'après le point (i) de la proposition 3.59, on a

$$\frac{\log N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R - \varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right) \right]}{(R - \varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right)} \frac{(R - \varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right)}{R} \leq \frac{\log N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R]}{R}$$

Comme, d'après la propriété 2.5,

$$Ent(X, d_X) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log N_{\tilde{x}}[\tilde{X}, R]}{R}$$

et

$$Ent(Y, d_Y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R]}{R}$$

on obtient, par passage à la limite quand  $R$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right) Ent(X, d_X) \leq Ent(Y, d_Y)$$

De même, comme

$$\frac{\log N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[\tilde{Y}, R]}{R} \leq \frac{\log N_{\tilde{x}} \left[ \tilde{X}, (R + 2\varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1} \right]}{(R + 2\varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1}} \frac{(R + 2\varepsilon) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1}}{R}$$

on obtient finalement

$$Ent(Y, d_Y) \leq \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

ce qui achève la preuve du point (i) du théorème 3.61.

• **Preuve du point (ii) :**

La preuve du point (ii) se fait exactement de la même manière, en utilisant le point (ii) de la proposition 3.59 et le fait que

$$Ent_{(Y^\alpha, d_{Y^\alpha})}(Y, d_Y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\log N_{\tilde{\varphi}(\tilde{x})}[Y^\alpha, R]}{R}$$

□

**Note :** On peut s'étonner du fait que l'étude de la continuité de l'entropie ne nécessite absolument pas d'étude sur la continuité de la mesure du revêtement universel. Ceci provient du fait que l'entropie volumique d'un espace de longueur compact  $(X, d_X)$  ne dépend pas de la mesure borélienne choisie, pourvu que celle-ci soit finie et non nulle (voir le fait 2.3) et que l'on peut ainsi définir l'entropie à partir de la mesure de comptage sur l'orbite d'un point.

**Proposition 3.63.**

Soient  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  trois réels strictement positifs arbitraires et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-\frac{5}{2} \frac{(4+\delta)}{\delta} HD}$$

Fixons un nombre réel positif  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ .

Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur qui admet un revêtement universel (qui n'est pas nécessairement supposé simplement connexe), dont le groupe des automorphismes du revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont l'entropie est majorée par  $H$ .

Soit  $Y$  une variété compacte de dimension  $m$  dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.

Alors, parmi toutes les métriques  $g$  sur  $Y$  telles que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(Y, g)$  et  $(X, d_X)$  soit inférieure à  $\varepsilon$ ,

(i) il n'en existe aucune dont la courbure de Ricci soit (strictement) minorée par

$$-(m-1) \left[ \frac{Ent(X, d_X)}{(m-1)} \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right) \right]^2$$

(ii) il n'en existe aucune dont la courbure sectionnelle soit (strictement) majorée par

$$- \left( \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1} \frac{Ent(X, d_X)}{(m-1)} \right)^2$$

et dont l'entropie volumique soit majorée par  $H$ .

Remarquons, que, dans la proposition 3.63, la borne  $H$  peut être choisie arbitrairement grande (en particulier, beaucoup plus grande que l'entropie de  $(X, d_X)$ ); la seule contrainte réside dans le fait que  $\varepsilon_0$  se calcule en fonction d'un majorant des entropies de  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ .

**Remarque.** Appliquée au cas où  $(X, d_X)$  est une variété hyperbolique, cette proposition conclut à l'absence de toute variété vérifiant les hypothèses ci-dessus et de courbure de Ricci minorée par  $-(m-1) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^2$  (respectivement de courbure sectionnelle majorée par  $-\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2$  et dont l'entropie est inférieure à  $(m-1)$ ), ce qui souligne l'optimalité de la proposition 3.63.

*Preuve de la proposition 3.63.*

Pour toute métrique  $g$  sur  $Y$  dont la courbure de Ricci est minorée par

$$-(m-1) \left[ \frac{Ent(X, d_X)}{(m-1)} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) \right]^2$$

par le théorème de R-L. Bishop, on a

$$Ent(Y, g) < Ent(X, d_X) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) < H$$

car  $Ent(X, d_X) < H$ .

Par ailleurs, si la même métrique  $g$  vérifie  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_g)) < \varepsilon$ , le point (iii) de la remarque 3.19 permet d'en déduire que les espaces  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  appartiennent tous les deux à  $\mathcal{M}_{\delta, H, \frac{5}{4}D}$ . En appliquant le théorème 3.61, on en déduit que

$$Ent(Y, g) \geq Ent(X, d_X) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)$$

ce qui contredit la première inégalité établie dans cette preuve et achève la preuve du point (i).

Pour toute métrique  $g$  sur  $Y$  dont la courbure sectionnelle est majorée par

$$-\left( \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \frac{Ent(X, d_X)}{(m-1)} \right)^2$$

le théorème de comparaison de Rauch implique que

$$Ent(Y, g) > \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

Si la même métrique  $g$  vérifie  $Ent(Y, g) \leq H$  et  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_g)) < \varepsilon$ , le point (iii) de la remarque 3.19 implique que  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  appartiennent

tous les deux à  $\mathcal{M}_{\delta, H, \frac{5}{4}D}$ . En appliquant le théorème 3.61, on en déduit que

$$Ent(Y, g) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X, d_X)$$

ce qui contredit la première inégalité et termine la preuve du point (ii).  $\square$

### 3.5.5 Comparaison des volumes et précompacité

#### Corollaire 3.64.

Soient  $k, H, D$  et  $\delta$  quatre réels positifs arbitraires. Posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$$

Fixons une variété riemannienne compacte  $(M_0^m, g_0)$  de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle  $\sigma$  vérifie  $\sigma \leq -k^2$  et qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ .

Notons  $\mathcal{B}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$  la boule de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ .

Alors, si  $Y$  est une variété compacte de dimension  $m$  qui admet une métrique  $g_*$  de courbure strictement négative et telle que  $(Y, g_*)$  appartienne à  $\mathcal{B}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$ , pour n'importe quelle autre métrique  $g$  sur  $Y$  on a :

$$Ent(Y, g)^m Vol(Y, g) \geq ((m - 1)k)^m Vol(M_0, g_0)$$

Si, de plus,  $(Y, g)$  appartient à  $\mathcal{B}((M_0, g_0), \varepsilon)$  où  $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ ,

$$Vol(Y, g) \geq \left(\frac{(m - 1)k}{Ent(M_0, g_0)}\right)^m \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m Vol(M_0, g_0)$$

*Preuve du corollaire 3.64.*

Comme  $(M_0, g_0)$  et  $(Y, g_*)$  sont deux éléments de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  qui vérifient  $d_{GH}((M_0, g_0), (Y, g_*)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$ , le corollaire 3.58 implique que les groupes fondamentaux de  $Y$  et  $M_0$  sont isomorphes. Par ailleurs,  $g_0$  et  $g_*$  sont deux métriques de courbure strictement négative donc  $Y$  et  $M_0$  ont même type d'homotopie. Il existe alors une application de degré un entre  $Y$  et  $M_0$ . La première inégalité du corollaire 3.64 découle alors du résultat suivant, démontré dans [BCG2], mais énoncé de manière moins générale dans le théorème 1.5 de [BCG2] : si  $(X, g_X)$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle vérifie  $\sigma \leq -k^2$  et si  $(Y, g_Y)$  est n'importe quelle variété riemannienne compacte de même dimension  $m$  telle qu'il existe une application  $f : Y \rightarrow X$  de degré 1, alors,

$$Ent(Y, g)^m Vol(Y, g) \geq ((m - 1)k)^m Vol(M_0, g_0)$$

Si, de plus,  $(Y, g)$  appartient à  $\mathcal{B}((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$ , le théorème 3.61 implique que

$$\text{Ent}(Y, g)^m \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-m} \text{Ent}(M_0, g_0)^m$$

ce qui, à l'aide de la première inégalité du corollaire 3.64, prouve la deuxième inégalité du corollaire 3.64.  $\square$

**Corollaire 3.65.**

Soient  $k, H, D$  et  $\delta$  quatre réels positifs. Posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$$

Soit  $M_0^m$  une variété compacte de dimension  $m$  qui admet une métrique  $g_*$  de courbure strictement négative et une métrique  $g_0$  (éventuellement différente de  $g_*$ ) telle que  $(M_0, g_0)$  appartienne à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ .

Notons  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \varepsilon)$  la boule de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\varepsilon$  (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de l'ensemble des classes d'isométrie des variétés riemanniennes de dimension  $m$  qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et dont la courbure sectionnelle  $\sigma$  est majorée par  $-k^2$ .

Alors, pour toute variété  $(Y, g)$  qui appartient à  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \varepsilon)$  où  $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ ,

$$\text{Vol}(Y, g) \leq \left(\frac{\text{Ent}(M_0, g_0)}{(m-1)k}\right)^m \text{Vol}(M_0, g_0)$$

Si de plus la courbure de Ricci de  $(M_0, g_0)$  est minorée par  $-(m-1)k^2$ , alors

$$\text{Vol}(Y, g) \leq \text{Vol}(M_0, g_0)$$

*Preuve du corollaire 3.65.*

Ce corollaire est une conséquence quasi-directe du résultat suivant, démontré dans [BCG2] mais énoncé de manière moins générale dans le théorème 1.4 de [BCG2] : si  $(Y, g_Y)$  est une variété riemannienne compacte dont la courbure sectionnelle est inférieure à  $-k^2$  et si  $(X, g_X)$  est n'importe quelle autre variété riemannienne compacte telle qu'il existe une application continue  $f : (X, g_X) \rightarrow (Y, g_Y)$ , alors

$$\left(\frac{\text{Ent}(X, g_X)}{(m-1)k}\right)^m \text{Vol}(X, g_X) \geq |\text{deg} f| \text{Vol}(Y, g_Y)$$

Puisque  $(M_0, g_*)$  et  $(Y, g)$  sont deux variétés riemanniennes de courbure sectionnelle strictement négative dont les groupes fondamentaux sont isomorphes d'après le corollaire 3.58,  $M_0$  et  $Y$  sont homotopiquement équiva-

lentes ; il existe alors une application continue de degré un entre ces deux variétés, ce qui termine la preuve du corollaire 3.65.  $\square$

**Corollaire 3.66.**

Soient  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  trois réels strictement positifs arbitraires. Posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$$

Notons  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \varepsilon)$  la boule de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\varepsilon$  (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de l'ensemble des classes d'isométrie des variétés riemanniennes de dimension  $m$  qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  et dont la courbure sectionnelle  $\sigma$  est majorée par  $-k^2$ .

Si  $M_0^m$  est une variété compacte de dimension  $m$  qui admet une métrique  $g_*$  de courbure strictement négative et une métrique  $g_0$  (éventuellement différente de  $g_*$ ) telle que  $(M_0, g_0)$  appartienne à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$ , la boule  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$  est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff.

*Preuve du corollaire 3.66.*

Le corollaire 3.65 donne

$$((m - 1)k)^m \text{Vol}(Y, g) \leq \text{Ent}(M_0, g_0)^m \text{Vol}(M_0, g_0) := C$$

Par ailleurs, toute boule de  $(Y, g)$  de rayon  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$  a un volume supérieur à celui de la boule euclidienne de rayon  $\varepsilon$  (ceci est vrai pour les boules de rayon  $\varepsilon$  dans  $(\tilde{Y}, \tilde{g})$  et, en restriction à une telle boule, la projection de revêtement  $p$  est un difféomorphisme qui préserve la métrique riemannienne). Le nombre  $N$  de boules disjointes de rayon  $\varepsilon$  qu'on peut mettre dans  $Y$  vérifie donc

$$\begin{aligned} N &\leq \frac{\text{Vol}(Y, g)}{\min\{\text{Vol}[B(x, \varepsilon)]/x \in Y\}} \\ &\leq \frac{C}{((m - 1)k)^m \text{Vol}[B_{eucl}(\varepsilon)]} \\ &\leq \frac{C}{((m - 1)k)^m \frac{\varepsilon^n}{\text{Vol}[B_{eucl}(1)]}} \end{aligned}$$

Il résulte de la proposition 5.2 de [Gr] que la famille  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$  est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff.  $\square$

On rappelle que le volume de toute variété compacte de dimension  $m$ , localement symétrique dont la courbure sectionnelle est comprise entre  $-4$  et  $-1$  est minoré par une constante universelle que nous noterons  $c_m$  qui ne dépend que de  $m$  (voir le théorème 37.1.1 de [BZ]). On établit alors la proposition suivante :

**Proposition 3.67.**

Soient  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  trois réels positifs arbitraires et  $c_m$  la constante définie ci-dessus. Fixons les valeurs

$$H_0 = \max\{2m, H\}$$

$$\delta_0 = \min \left\{ \delta, \frac{(m-1)2^{m-2}c_m}{\text{Vol}_{\text{eucl}}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}} \right\}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta_0}{(4+\delta_0)H_0} e^{-\frac{5}{2} \frac{(4+\delta_0)}{\delta_0} H_0 D}$$

Fixons un nombre réel positif quelconque  $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ .

Considérons une variété compacte  $(X, g_0)$  de dimension  $m$ , localement symétrique de rang 1 (normalisée de sorte que le maximum de sa courbure sectionnelle soit égal à  $-1$ ), de diamètre majoré par  $D$ .

Toute variété riemannienne compacte  $(Y, g)$  de même dimension, de courbure sectionnelle négative, dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre nul, dont l'entropie est majorée par  $H$  et qui est à distance de Gromov-Hausdorff de  $(X, g_0)$  inférieure à  $\varepsilon$  est homotopiquement équivalente à  $X$  et vérifie

$$\text{Vol}(Y, g) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \text{Vol}(X, g_0)$$

Si, de plus, la courbure sectionnelle de  $(Y, g)$  est majorée par  $-k^2$ , on a

$$\text{Vol}(Y, g) \leq \left(\frac{\text{Ent}(X, g_0)}{(m-1)k}\right)^m \text{Vol}(X, g_0)$$

**Remarque 3.68.**

- Rappelons que  $\text{Ent}(X, g_0)$  se calcule et est égale à  $(m-1)$  (resp.  $m$ , resp.  $(m+2)$ , resp.  $(m+6)$ ) lorsque  $(X, g_0)$  est hyperbolique réel (resp. complexe, resp. quaternionien, resp. de Cayley).
- La proposition 3.63 montre que l'ensemble des variétés  $(Y, g)$  qui vérifient les hypothèses de cette proposition et  $\sigma \leq -k^2$  (où  $k > \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \frac{\text{Ent}(X, g_0)}{m-1}$ ) est vide, ce que confirme cette proposition.
- Nous insistons sur le fait que ces résultats sont valables même lorsque  $\varepsilon$  ne tend pas vers zéro (pour  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{14}$ , par exemple).

*Preuve de la proposition 3.67.*

- Commençons par vérifier que le groupe fondamental de  $(X, g_0)$  est  $\delta'_0$ -épais (voir la définition E.1) avec  $\delta'_0 = \frac{2^{m-2}(m-1)c_m}{\text{Vol}_{\text{eucl}}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}}$  :  
La courbure sectionnelle de  $(X, g_0)$  est supérieure ou égale à  $-4$ . Notons  $l$  la

longueur de la plus courte géodésique périodique de  $(X, g_0)$ , le théorème de J. Cheeger (voir [BZ], corollaire 34.1.9) donne alors

$$Vol(X, g_0) \leq l.Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2}) \int_0^D \cosh(2t) \left( \frac{\sinh(2t)}{2} \right)^{m-2} dt$$

ce qui assure que

$$c_m \leq \frac{l.Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2})}{(m-1)} \left( \frac{\sinh(2D)}{2} \right)^{m-1}$$

d'où

$$inj(X, g_0) = \frac{l}{2} \geq \frac{2^{m-2}(m-1)c_m}{Vol_{eucl}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}} = \delta'_0$$

et le groupe fondamental de  $(X, g_0)$  est  $\delta'_0$ -épais, donc, a fortiori,  $\delta_0$ -épais.

• Par ailleurs, l'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte localement symétrique de rang 1 est inférieure à  $2m$  (voir la remarque 3.68). On déduit de tout ceci que  $(X, g_0)$  appartient à  $\mathcal{M}_{\delta_0, H_0, D}$  (qui est inclus dans  $\mathcal{M}_{\delta_0, H_0, \frac{5}{4}D}$ ).

Du point (ii) de la remarque 3.19, on déduit que  $(Y, g)$  appartient également à  $\mathcal{M}_{\delta_0, H_0, \frac{5}{4}D}$ .

Le corollaire 3.32 assure que les groupes fondamentaux de  $X$  et  $Y$  sont isomorphes (car  $X$  et  $Y$  sont des variétés donc leur groupe fondamental est isomorphe au groupe des transformations de leur revêtement universel). Il s'ensuit que  $Y$  et  $X$  sont homotopiquement équivalentes (car ce sont des  $K(\pi, 1)$  de courbure sectionnelle strictement négative).

Le théorème 1.4 de [BCG2] assure alors que

$$Ent(Y, g)^m Vol(Y, g) \geq Ent(X, g_0)^m Vol(X, g_0)$$

Comme le théorème 3.61 assure que

$$Ent(Y, g) \leq Ent(X, g_0) \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{-1}$$

nous en déduisons la minoration recherchée

$$Vol(Y, g) \geq \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m Vol(X, g_0)$$

• Par ailleurs, si la courbure sectionnelle de  $(Y, g)$  est majorée par  $-k^2$ , le corollaire 3.64 implique

$$Vol(X, g_0) Ent(X, g_0)^m \geq ((m-1)k)^m Vol(Y, g)$$

ce qui prouve la deuxième inégalité de la proposition 3.67.  $\square$

### 3.5.6 Complétude de la famille $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ pour la distance de Gromov-Hausdorff

Considérons une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de longueur compacts de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  qui converge vers un espace métrique (nécessairement de longueur) compact  $(X, d_X)$ . Il nous faut encore vérifier que  $(X, d_X)$  admet un revêtement universel, ce qui n'est pas le cas dans un cadre plus général (voir les exemples présentés dans l'annexe D). Ceci permet de définir l'entropie de  $(X, d_X)$ . Il reste alors à s'assurer que l'entropie de  $(X, d_X)$  est la limite des entropies des éléments de la suite et que le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $X$  est bien  $\delta$ -non-abélien.

#### Convergence des revêtements universels

##### Corollaire 3.69.

Fixons arbitrairement trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$$

Si une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de longueur qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  converge vers un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  au sens de Gromov-Hausdorff, alors,

(i) L'espace limite  $(Y, d_Y)$  admet un revêtement universel (qui n'est pas nécessairement simplement connexe), noté  $(\bar{Y}, d_{\bar{Y}})$ .

(ii) Le revêtement  $Y^\alpha \rightarrow Y$  coïncide avec le revêtement  $\bar{Y} \rightarrow Y$  pour tout réel  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ .

(iii)  $(\bar{Y}, d_{\bar{Y}})$  est la limite pour la topologie Gromov équivariante (au sens de K. Fukaya; voir la définition 1.32) de la suite des revêtements universels  $((\tilde{X}_n, d_{\tilde{X}_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Preuve du corollaire 3.69.*

Pour montrer le point (i), il suffit de vérifier que, pour tous les réels  $\alpha$  et  $\alpha'$  tels que  $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ , les revêtements  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$  et  $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \rightarrow Y$  coïncident. Remarquons que la propriété 3.23 implique qu'il existe un revêtement

$$\pi : Y^{\alpha'} \rightarrow Y^\alpha$$

On a alors la chaîne de revêtements

$$\begin{array}{ccc} Y^{\alpha'} & \longrightarrow & Y^\alpha \\ & \searrow & \swarrow \\ & Y & \end{array}$$

Nous allons vérifier que  $\pi$  est un isomorphisme de revêtement.

Soit  $\varepsilon > 0$  un réel tel que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et  $5\varepsilon < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ .

Si  $n$  est suffisamment grand, on peut supposer que

$$d_{GH}((X_n, d_n), (Y, d_Y)) < \varepsilon$$

Les deux réels  $\alpha$  et  $\alpha'$  vérifient alors les hypothèses du théorème 3.30 : on peut donc appliquer ce dernier soit au revêtement  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$ , soit au revêtement  $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \rightarrow Y$ . Le lemme 3.46 prouve qu'il existe un point  $x_n$  de  $X_n$  et un point  $y_0$  de  $Y$  tels que l'application

$$\begin{array}{ccc} \rho_n : \pi_1(Y, y_0) & \longrightarrow & \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, U_{\varepsilon_0/2}, x_n) \\ [c] & \longmapsto & [c_T] \end{array}$$

soit un morphisme dont le noyau contient  $\pi_1(Y, U_\alpha, y_0)$  (en appliquant le lemme 3.47) et  $\pi_1(Y, U_{\alpha'}, y_0)$  (en remplaçant  $\alpha$  par  $\alpha'$  dans le lemme 3.47).

Il s'ensuit que le morphisme  $\rho_n$  passe au quotient en deux morphismes

$$\rho_n^\alpha : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) \longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, U_{\varepsilon_0/2}, x_n)$$

$$\rho_n^{\alpha'} : \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, U_{\alpha'}, y_0) \longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, U_{\varepsilon_0/2}, x_n)$$

Le lemme 3.52 prouve que ces deux morphismes sont deux isomorphismes ; il en découle que

$$\pi_1(Y, U_\alpha, y_0) = \text{Ker} \rho_n = \pi_1(Y, U_{\alpha'}, y_0)$$

Le corollaire IX.3.6 de [Go] permet d'en déduire que  $\pi : Y^{\alpha'} \rightarrow Y^\alpha$  est un isomorphisme de revêtement. Ceci implique que les revêtements  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$  et  $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \rightarrow Y$  sont identiques pour tous les réels  $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Le théorème 3.7 de [SW] (cité dans le théorème B.17 de l'annexe B) implique que l'espace  $Y$  admet un revêtement universel (ce qui termine la preuve du point (i)) et que ce revêtement universel coïncide avec  $p_\alpha : Y^\alpha \rightarrow Y$  pour tout  $\alpha \in ]0, \frac{\varepsilon_0}{2}[$  (ce qui termine la preuve du point (ii)).

Soient  $\alpha$  et  $\varepsilon$  deux réels strictement positifs tels que  $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$  et  $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . Si  $n$  est suffisamment grand pour que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X_n, d_n)$  et  $(Y, d_Y)$  soit inférieure à  $\varepsilon$ , les applications  $\tilde{\varphi}$  et  $\tilde{\psi}$  construites dans le théorème 3.30 sont des  $\left[ \frac{3R}{2\alpha - 3\varepsilon} + 2 \right] \varepsilon$ -approximations de Gromov-Hausdorff entre les boules de rayon  $R$  des espaces  $\tilde{X}$  et  $Y^\alpha$ , donc entre les boules de rayon  $R$  des espaces  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  (car, d'après ce qui précède, les revêtements  $Y^\alpha$  et  $\tilde{Y}$  coïncident). De plus, ces applications sont respectivement  $\tilde{\rho}$ -équivariante et  $(\tilde{\rho})^{-1}$ -équivariante. La suite des revêtements universels  $((\tilde{X}_n, d_{\tilde{X}_n}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $(\tilde{Y}, d_{\tilde{Y}})$  au sens de la topologie de Gromov-équivariante de K. Fukaya. □

**Passage à la limite de l'entropie**

Puisque nous venons d'établir dans le paragraphe qui précède que, si une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de longueur compacts qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  converge vers un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  au sens de Gromov-Hausdorff, l'espace-limite  $(Y, d_Y)$  admet un revêtement universel, on peut définir l'entropie volumique de  $(Y, d_Y)$ . On a alors la

**Proposition 3.70.**

*Fixons arbitrairement trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ . Si une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'espaces de longueur qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  converge vers un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  au sens de Gromov-Hausdorff, alors la suite des entropies  $(Ent(X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'entropie de  $(Y, d_Y)$ .*

**Remarque 3.71.**

*Dans la remarque qui suit le théorème 3.61, nous avons vu que l'application  $(X, d) \rightarrow Ent(X, d)$  est uniformément continue en restriction aux boules de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  de la famille  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  munie de la distance de Gromov-Hausdorff, mais ceci ne suffit pas pour prouver la proposition 3.70, car nous ne savons pas a priori que  $(Y, d_Y)$  appartient aussi à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  (nous aurons besoin de la proposition 3.70 pour le prouver).*

*Preuve de la proposition 3.70.*

Posons  $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4+\delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$  et  $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{4}$  et fixons arbitrairement un réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et  $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ . A partir d'un certain rang, la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X_n, d_n)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ . Le point (ii) du théorème 3.61 entraîne que

$$\left(1 - \frac{6\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) Ent(X_n, d_n) \leq Ent_{(Y^\alpha, d_{Y^\alpha})}(Y, d_Y) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X_n, d_n)$$

D'après le point (ii) du corollaire 3.69, le  $\alpha$ -revêtement de  $Y$  coïncide avec son revêtement universel donc  $Ent_{(Y^\alpha, d_{Y^\alpha})}(Y, d_Y) = Ent(Y, d_Y)$  et

$$\left(1 - \frac{6\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) Ent(X_n, d_n) \leq Ent(Y, d_Y) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} Ent(X_n, d_n)$$

On a donc prouvé que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait

$$|Ent(Y, d_Y) - Ent(X_n, d_n)| \leq \frac{6H}{\varepsilon_0}$$

ce qui signifie que la suite  $(Ent(X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Ent(Y, d_Y)$ .  $\square$

**Conclusion****Théorème 3.72.**

*Fixons arbitrairement trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ .*

*Notons  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  l'ensemble des (classes d'isométries des) espaces de longueur compacts qui possèdent un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont le groupe des transformations du revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, dont l'entropie est majorée par  $H$  et dont le diamètre est majoré par  $D$ .*

*L'ensemble  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  est complet pour la distance de Gromov-Hausdorff dans la famille des espaces métriques compacts.*

**Remarque 3.73.**

*Notons que l'espace  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  n'est pas compact pour la distance de Gromov-Hausdorff, puisque nous avons déjà vu dans le corollaire 2.29 qu'il n'est pas précompact.*

*Preuve du théorème 3.72.*

Posons  $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4+\delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$  et  $\alpha = \frac{\varepsilon_0}{4}$ .

Considérons une suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  qui converge vers un espace métrique  $(Y, d_Y)$  au sens de Gromov-Hausdorff. D'après (par exemple) le théorème 6.3 de [Sak], l'espace  $(Y, d_Y)$  est compact et, d'après la proposition 3.8 de [Gr], c'est un espace de longueur. De plus, la suite  $(\text{diam}(X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  des diamètres des espaces  $(X_n, d_n)$  converge vers le diamètre de  $(Y, d_Y)$  qui est en particulier inférieur ou égal à  $D$ .

Nous avons montré dans la proposition 3.69 que  $Y$  admet un revêtement universel et dans le théorème 3.70 que l'entropie de  $(Y, d_Y)$  est la limite de la suite des entropies des espaces  $(X_n, d_n)$  (elle est en particulier inférieure ou égale à  $H$ ). Finalement, d'après la proposition 3.69, le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $Y$  coïncide avec celui des automorphismes de son  $\alpha$ -revêtement (dès que  $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ ) et le théorème 3.30 assure que, si  $n$  est suffisamment grand, le groupe des automorphismes du revêtement universel de  $X_n$  est isomorphe à celui des automorphismes du  $\alpha$ -revêtement de  $Y$  (pour  $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}d_{GH}((X_n, d_{X_n}), (Y, d_Y))$ ). Il s'ensuit que le groupe des transformations du revêtement universel de  $Y$  est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro (puisque c'est le cas des groupes  $G(\tilde{X}_n, X_n)$ ). L'espace  $(Y, d_Y)$  appartient donc à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , ce qui achève la preuve du théorème 3.72.  $\square$

**Corollaire 3.74.**

Fixons arbitrairement quatre réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$ ,  $D$  et  $V$  et un entier  $m$ .

Notons  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  la famille des (classes d'isométries des) variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$ , de courbure sectionnelle négative ou nulle, dont l'entropie, le diamètre et le volume sont respectivement majorés par  $H$ ,  $D$  et  $V$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.

L'adhérence de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  est compacte (pour la distance de Gromov-Hausdorff) dans l'ensemble  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ .

*Preuve du corollaire 3.74.*

Il est montré dans la proposition 4.1 de [BCG1] que la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D,V}^0$  est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff. Le corollaire 3.74 découle donc du théorème 3.72 qui assure que la famille  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  est fermée pour la distance de Gromov-Hausdorff.  $\square$

## 3.6 Optimalité des résultats

### 3.6.1 Discussion sur l'hypothèse "Entropie majorée" dans les théorèmes 3.30 et 3.61

Nous avons exigé une majoration uniforme de l'entropie dans les théorèmes 3.30 et 3.61. On peut se demander si cette hypothèse est réellement nécessaire ou s'il s'agit seulement d'une hypothèse technique. En fait, nous construisons ici

**Exemple 3.75.** Une suite d'espaces de longueur  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  compacts qui vérifie

- le diamètre des espaces  $(X_n, d_n)$  est uniformément majoré
- leur groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien (pour un  $\delta$  uniforme) et de centre réduit à zéro
- la suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un espace de longueur  $(X, d_X)$  d'entropie finie
- la suite des entropies  $(Ent(X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers l'infini
- le groupe fondamental de l'espace  $(X, d_X)$  n'est pas isomorphe à celui de  $(X_n, d_n)$  (quel que soit  $n$ ).

*Construction de l'exemple 3.75.*

Plus précisément, nous construisons une suite de surfaces riemanniennes  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , dont les entropies  $H_n$  tendent vers l'infini et telle que  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un espace de longueur  $(X, d_X)$  homéomorphe à une surface de

genre deux.

Soient  $S$  une surface hyperbolique de genre trois,  $g_0$  la métrique hyperbolique sur  $S$  et  $c$  une géodésique périodique séparant  $S$  en deux composantes connexes  $C_1$  et  $C_2$ . Soit  $V$  un voisinage tubulaire de  $c$  tel que  $C_1 \setminus V$  et  $C_2 \setminus V$  soient des rétractes de  $C_1$  et  $C_2$ . On pose  $g_n = f_n^2 \times g_0$  où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de fonctions continues strictement positives telles que

$$\begin{cases} f_n = 1 & \text{sur } C_1 \setminus V; \\ f_n = \frac{1}{n} & \text{sur } C_2 \setminus V \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} & \text{converge uniformément sur } S \text{ vers une fonction } f \end{cases}$$

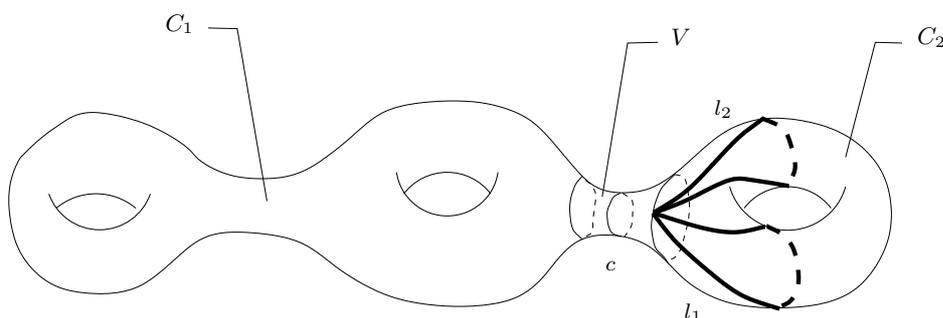


FIG. 3.3 – Exemple 3.75

La limite  $(Y, d_Y)$  (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de la suite  $((S, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une surface  $S'$  de genre deux (voir l'exemple 1.27); son entropie est donc finie et son groupe fondamental n'est pas isomorphe à celui de  $S$ .

Par ailleurs, la suite des entropies de  $(S, g_n)$  tend vers l'infini. En effet, il existe deux lacets  $l_1$  et  $l_2$  entièrement inclus dans  $C_2$  qui ne commutent pas et dont les longueurs tendent vers zéro. Le théorème 2.1 de [BCG1] (rappelé dans le point (i) du théorème E.2 de l'annexe) permet d'affirmer que la suite des entropies de  $(S, g_n)$  tend effectivement vers l'infini.

Ceci donne un contre-exemple à la rigidité du groupe des automorphismes du revêtement universel (qui est ici isomorphe au groupe fondamental) établie dans le théorème 3.30 ainsi qu'à la continuité de l'entropie quand on ne suppose pas que l'entropie est bornée, tout en conservant les autres hypothèses.  $\square$

### 3.6.2 Discussion sur l'hypothèse de " $\delta$ -non-abélianité" dans les théorèmes 3.30 et 3.61

On peut se demander si les hypothèses algébriques imposées sur le groupe des transformations du revêtement universel des objets de  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  (à savoir, le fait que ce groupe est supposé  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro) sont nécessaires. On pourrait répondre que c'est le prix à payer pour pouvoir

remplacer l'hypothèse "Courbure de Ricci minorée" (faite dans le théorème 3.4) par l'hypothèse (bien plus faible) "Entropie volumique majorée". Cependant, cette réponse serait incomplète. Notons en effet que nos théorèmes 3.30 et 3.61 sont valables sans faire d'hypothèse sur la dimension (puisqu'on considère des espaces de longueur). Or, si on ne fait pas d'hypothèse de type "contrôle de la dimension", il existe des suites convergentes de variétés riemanniennes de diamètre majoré et de courbure de Ricci uniformément minorée dont les groupes fondamentaux ne sont pas isomorphes (en particulier, on ne peut pas espérer obtenir les conclusions du théorème 3.30 sous ces hypothèses) : il existe en effet une suite de tores plats, dont la dimension tend vers l'infini, qui converge vers un bouquet de cercles (voir [Pl]). Deux éléments de la suite ont donc des groupes fondamentaux différents.

Ainsi, même si on remplace l'hypothèse "Entropie majorée" par l'hypothèse "Courbure de Ricci minorée", il reste nécessaire de rajouter une hypothèse sur la structure des groupes fondamentaux des variétés riemanniennes de la suite.

### 3.6.3 Optimalité des résultats topologiques dans la section 3.5.2

Nous avons établi dans la section 3.5.2 un résultat de rigidité du groupe fondamental. On peut se demander s'il est possible, sous nos hypothèses, d'obtenir des résultats plus forts sur la rigidité de la topologie, comme c'est le cas en particulier dans les théorèmes 3.7, 3.10 ou 3.5. En fait, nous avons vu que, si  $(X, g)$  est une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle strictement négative et de dimension  $m$  paire et supérieure ou égale à 4, il existe une suite de variétés riemanniennes compactes  $((X_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $(X, d_X)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff, dont le groupe fondamental est isomorphe à celui de  $(X, d_X)$  et dont l'entropie est arbitrairement proche de celle de  $(X, d_X)$  mais qui ne sont ni difféomorphes, ni homéomorphes, ni homologiquement équivalentes à  $X$  ; pourtant, toutes ces variétés appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$  où  $D = \text{diam}(X, g) + 1$ ,  $H = \text{Ent}(X, g) + 1$  et  $\delta = \delta_0(X, g) = \text{inj}(X, g) \sqrt{-\max(K_{X, g})}$  (la construction de cet exemple et la preuve sont données dans la remarque 3.20).

On ne peut donc pas espérer obtenir des résultats du type "Sous les hypothèses du corollaire 3.58, les espaces  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes (resp. homologiquement équivalents)".

### 3.6.4 Discussion sur la définition de l'espace $\mathcal{M}_{\delta, H, D}$

Nous avons choisi de travailler avec des espaces de longueur qui admettent un revêtement universel (ce qui permet de définir une entropie volumique en choisissant pour revêtement de référence ce revêtement universel) mais nous ne supposons pas que ce revêtement universel est simplement connexe. En

effet, nous avons établi que, ainsi défini, l'espace  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  est fermé pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir le théorème 3.72). On peut se demander si le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  constitué des éléments qui possèdent un revêtement universel simplement connexe est également fermé, ce qui revient à se poser la question suivante :

**Question :** Si l'on considère une suite convergente (pour la distance de Gromov-Hausdorff) d'éléments de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  qui possèdent un revêtement universel simplement connexe, le revêtement universel de la limite de cette suite (qui existe d'après la proposition 3.69) est-il également simplement connexe ? Nous construisons ci-dessous un exemple qui permet de répondre par la négative à cette question ; le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  constitué des éléments qui possèdent un revêtement universel simplement connexe n'est donc pas fermé pour la distance de Gromov-Hausdorff, ce qui justifie notre choix de définition de l'espace  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  étudié dans cette thèse (ainsi que la définition choisie du revêtement universel).

**Exemple 3.76.**

*Il existe une suite d'espaces de longueur  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  compacts, de diamètre uniformément majoré, d'entropie uniformément majorée et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non abélien (pour un  $\delta > 0$  uniforme) et de centre réduit à zéro, tels que*

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace  $X_n$  admet un revêtement universel simplement connexe
- la suite  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un espace de longueur  $(X, d_X)$
- l'espace limite  $X$  n'admet pas de revêtement universel simplement connexe

*Construction de l'exemple 3.76.*

Utilisons l'exemple D.2 de C. Sormani et G. Wei pour construire une suite d'espaces de longueur vérifiant toutes ces hypothèses : partons d'une surface hyperbolique  $(S, g_0)$  de rayon d'injectivité  $\delta$  et fixons une boule  $B$  de  $S$  de rayon inférieur à  $\frac{\delta}{2}$ . Soit  $H$  la réunion des supports de trois géodésiques  $c_0$ ,  $c_1$  et  $c_2$  entièrement incluses dans  $B$ , paramétrées par leur longueur d'arc et telles que

- $c_0$  et  $c_1$  soient orthogonales en  $c_0(0)$
- $c_0$  et  $c_2$  soient orthogonales en  $c_0(1)$
- $\text{long}_S(c_1) = \text{long}_S(c_2) = 2 \text{long}_S(c_0)$

Notons  $\bar{\mathcal{H}}_n$  le  $n^{\text{ième}}$  élément de la suite d'espaces de longueur donnée dans l'exemple D.2 comme réunion de  $K_{n,1}$ ,  $K_{n,2}$  et de  $K_{n,3}$  (voir l'annexe D, exemple D.2). Notons alors

- $c'_0$  la géodésique de  $\bar{\mathcal{H}}_n$  (paramétrée par sa longueur d'arc) représentée par le segment  $\{-1\} \times [-1, 1] \times \{0\}$ ,
- $c'_1$  la géodésique de  $\bar{\mathcal{H}}_n$  (paramétrée par sa longueur d'arc) représentée par le segment  $\{-1\} \times \{-1\} \times [-2, 2]$ ,
- $c'_2$  la géodésique de  $\bar{\mathcal{H}}_n$  (paramétrée par sa longueur d'arc) représentée par

le segment  $\{-1\} \times \{1\} \times [-2, 2]$ .

Finalement, nous noterons  $\mathcal{H}_n$  l'homothétique de  $\bar{\mathcal{H}}_n$  tel que

$\text{long}_{eucl}(c'_i) = \text{long}_S(c_i)$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

Soit  $(X_n, d_n)$  l'espace obtenu en recollant  $S$  et  $\mathcal{H}_n$  le long de  $H$ . On le munit de la distance de longueur  $d_n$ , où la longueur d'une courbe incluse dans  $X_n \setminus \mathcal{H}_n$  est donnée par la longueur de cette même courbe dans  $S$ , la longueur d'une courbe incluse dans  $\mathcal{H}_n$  est sa longueur dans l'espace de longueur  $\mathcal{H}_n$  et la longueur d'une courbe quelconque est la somme des longueurs des morceaux de courbes entièrement inclus dans  $X_n \setminus \mathcal{H}_n$  et des longueurs des morceaux entièrement inclus dans  $\mathcal{H}_n$ .

L'espace de longueur  $X_n$  est donc compact, son diamètre est borné indépendamment de  $n$  (car celui de  $\mathcal{H}_n$  est uniformément borné) et son groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien puisqu'il est isomorphe à celui de  $S$ . De plus, la suite  $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le recollement sur  $S$  (le long de  $H$ ) de la limite  $\mathcal{H}$  des  $\mathcal{H}_n$ . L'espace limite de  $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas semi-localement simplement connexe puisque  $\mathcal{H}$  ne l'est pas.

Ceci montre que nous avons construit une suite d'espaces de longueur qui vérifie les hypothèses de l'exemple 3.76, moyennant la preuve du lemme 3.77 ci-dessous.  $\square$

**Lemme 3.77.**

*Pour tout entier  $n$ , l'entropie de l'espace  $(X_n, d_n)$  décrit ci-dessus est égale à celle de  $(S, g_0)$*

*Preuve du lemme 3.77.*

Commençons par construire le revêtement universel de  $X_n$  à partir de celui de  $S$  : fixons un relevé (connexe)  $\tilde{H}$  de  $H$  et considérons l'espace obtenu en recollant un exemplaire de  $\mathcal{H}_n$  le long de chaque  $\gamma \cdot \tilde{H}$ , où  $\gamma$  parcourt le groupe des automorphismes du revêtement universel  $\tilde{S}$  de  $S$ . Comme l'espace de longueur obtenu est simplement connexe et localement isométrique à  $(X_n, d_n)$ , c'est son revêtement universel, et nous le noterons dorénavant  $(\tilde{X}_n, \tilde{d}_n)$ .

L'injection canonique  $\tilde{j}_n : \tilde{S} \rightarrow \tilde{X}_n$  associée aux recollements que nous venons de décrire n'est autre que la relevée de l'injection canonique  $j_n : S \rightarrow X_n$ . Si  $\Gamma_S$  (resp.  $\Gamma_n$ ) est le groupe des transformations du revêtement universel  $\tilde{S} \rightarrow S$  (resp. du revêtement  $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$ ), l'application  $j_n$  induit un isomorphisme  $\rho = (j_n)_*$  entre ces deux groupes tel que  $\rho(\gamma)(\tilde{j}_n(\tilde{x})) = \tilde{j}_n(\gamma \cdot \tilde{x})$  pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma_S$ .

Soit  $x_0$  un point de  $S$  n'appartenant pas à  $H$  et  $\tilde{x}_0$  un de ses relevés. Alors,

$$\text{Ent}_{vol}(X_n, d_n) = \inf \left\{ c > 0 / \sum_{\gamma \in \Gamma_n} e^{-c\tilde{d}_n(\tilde{j}_n(\tilde{x}_0), \gamma \cdot \tilde{j}_n(\tilde{x}_0))} < +\infty \right\}$$

et

$$Ent_{vol}(X_n, d_n) = \inf \left\{ c > 0 / \sum_{\gamma \in \Gamma_S} e^{-c\tilde{d}_n(\tilde{j}_n(\tilde{x}_0), \gamma \cdot \tilde{j}_n(\tilde{x}_0))} < +\infty \right\}$$

De même,

$$Ent_{vol}(S, d_S) = \inf \left\{ c > 0 / \sum_{\gamma \in \Gamma_S} e^{-cd_{\tilde{S}}(\tilde{x}_0, \gamma \cdot \tilde{x}_0)} < +\infty \right\}$$

Comme  $\Gamma_n$  et  $\Gamma_S$  sont isomorphes, il suffit de comparer les distances  $\tilde{d}_n(\tilde{j}_n(\tilde{x}), \tilde{j}_n(\tilde{y}))$  et  $d_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Or, si  $c$  est une courbe de  $\tilde{X}_n$  qui relie les points  $\tilde{j}_n(\tilde{x})$  et  $\tilde{j}_n(\tilde{y})$  en traversant au moins un domaine  $\gamma \cdot (\mathcal{H}_n \setminus H)$  (où  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_n$ ),  $c$  n'est pas minimisante. En effet, si  $t^-$  et  $t^+$  sont deux éléments de  $[0, 1]$  tels que

- $c(t^-)$  et  $c(t^+)$  appartiennent à  $\gamma \cdot \tilde{H}$
- la courbe  $c|_{[t^-, t^+]}$  est incluse dans  $\gamma \cdot \mathcal{H}_n$  il suffit de remplacer la partie de la courbe  $c|_{[t^-, t^+]}$  par une courbe entre  $c(t^-)$  et  $c(t^+)$  sur  $\gamma \cdot \tilde{H}$  pour obtenir une courbe plus courte. La distance entre  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  est donc nécessairement réalisée par une courbe entièrement incluse dans l'adhérence de  $\tilde{X}_n \setminus \cup_{\gamma \in \Gamma_S} \gamma \cdot \mathcal{H}_n$ , c'est-à-dire dans  $\tilde{S}$ . Ainsi,

$$\tilde{d}_n(\tilde{j}_n(\tilde{x}), \tilde{j}_n(\tilde{y})) = d_{\tilde{S}}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

et

$$Ent_{vol}(X_n, d_n) = Ent_{vol}(S, d_S)$$

□

**Remarque 3.78.**

*Remarquons que, dans cet exemple, l'espace-limite admet un revêtement universel : celui de  $S$  sur lequel recolle  $\mathcal{H}$  le long de chaque  $\gamma \cdot (\partial \tilde{H})$ , où  $\gamma$  parcourt  $\Gamma_S$ . Son revêtement universel n'est donc pas simplement connexe mais il n'y a pas vraiment de "trou", dans le sens où l'infimum des longueurs des lacets dans une classe d'homotopie libre est zéro.*



## Chapitre 4

# Estimations de type Bishop sans hypothèses de courbure

Dans ce chapitre, nous considérons des espaces de longueur au sens faible, qui ne sont donc pas supposés localement compacts (en particulier, les boules ne sont pas nécessairement compactes), munis d'une mesure de masse totale infinie et finie sur toutes les boules. Nous établissons des estimations de type Bishop (dans le sens où nous encadrons les rapports entre le volume des boules de "grand" rayon et le volume des boules de "petit" rayon). Nous insistons sur le fait que ces estimations sont valables sans hypothèses de courbure sur les variétés riemanniennes.

### Notations

Si  $(Y, d)$  est un espace de longueur au sens faible (voir la définition page 25), et si  $\Gamma$  est un groupe d'isométries qui agit de manière discontinue et cocompacte, nous noterons, pour toute paire de points  $(x, y)$  et tout  $R > 0$ ,

$$N_{x,y}(R) = \# \{ \Gamma.y \cap B(x, R) \}$$

Remarquons que

$$N_{x,y}(R) = N_{y,x}(R)$$

et que, pour tous les éléments  $\gamma$  et  $g$  de  $\Gamma$ ,

$$N_{x,y}(R) = N_{\gamma.x, g.y}(R)$$

Nous noterons également  $N_x(R) = N_{x,x}(R)$

Si  $a$  est un réel,  $E[a]$  désignera la partie entière de  $a$ .

## 4.1 Cas général

### Proposition 4.1.

Considérons un espace de longueur au sens faible  $(X, d)$ , non compact, sur lequel existe une mesure  $\mu$  borélienne de masse totale infinie qui vérifie les deux hypothèses :

- (i) pour tout  $R > 0$ ,  $\sup_{y \in X} \mu(B(y, R)) < +\infty$
- (ii) il existe un réel  $\alpha$  strictement positif tel que  $\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha)) > 0$ .

Fixons une valeur  $\alpha > 0$  donnée par l'hypothèse (ii). Alors, pour tout réel  $R$  supérieur ou égal à  $2\alpha$ ,

$$e^{Ent(X, d, \mu)(R-2\alpha)} \leq \frac{\sup_{x \in X} \mu(B(x, R))}{\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha))} \leq \left( \frac{\sup_{x \in X} \mu(B(x, 4\alpha))}{\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha))} \right)^{E[\frac{R}{2\alpha}]}$$

### Corollaire 4.2.

Considérons un espace de longueur  $(X, d)$  (complet), non compact et localement compact qui admet un groupe d'isométries de  $(X, d)$ , noté  $\Gamma$ , qui agit de manière cocompacte et totalement discontinue sur  $(X, d)$  et une mesure  $\mu$  borélienne de masse totale infinie et  $\Gamma$ -invariante qui vérifie les deux hypothèses :

- (i) pour tout  $R > 0$  et tout point  $y \in X$ ,  $\mu(B(y, R)) < +\infty$
- (ii) il existe un réel  $\alpha$  strictement positif tel que, pour tout  $x \in X$ ,  $\mu(B(x, \alpha)) > 0$ .

Fixons une valeur  $\alpha > 0$  donnée par l'hypothèse (ii). Alors, pour tout réel  $R$  supérieur ou égal à  $2\alpha$ ,

$$e^{Ent(X, d, \mu)(R-2\alpha)} \leq \frac{\sup_{x \in X} \mu(B(x, R))}{\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha))} \leq \left( \frac{\sup_{x \in X} \mu(B(x, 4\alpha))}{\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha))} \right)^{E[\frac{R}{2\alpha}]}$$

où le minorant ne dépend pas du choix de la mesure  $\mu$  et se calcule par la formule

$$Ent(X, d, \mu) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log[\#\{\gamma \in \Gamma / d(x_0, \gamma.x_0) < R\}]$$

### Corollaire 4.3.

(i) Sur une variété riemannienne complète  $(M, g)$  sur laquelle agit un groupe  $\Gamma$  de manière discontinue et cocompacte et munie de la mesure vo-

lumique  $\mu_g$ , pour tout  $\alpha > 0$  et tout  $R > 2\alpha$ ,

$$e^{Ent(M,g,\mu_g)(R-2\alpha)} \leq \frac{\sup_{x \in X} Vol(B(x,R))}{\inf_{x \in X} Vol(B(x,\alpha))} \leq \left( \frac{\sup_{x \in X} Vol(B(x,4\alpha))}{\inf_{x \in X} Vol(B(x,\alpha))} \right)^{E[\frac{R}{2\alpha}]}$$

(ii) Considérons un espace de longueur  $(X, d)$  non compact, localement compact. Supposons qu'il existe un groupe  $\Gamma$  d'isométries qui agit de manière discontinue et cocompacte sur  $X$ . Posons  $\mu_x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma.x}$ . Si  $D$  est un majorant du diamètre d'un domaine fondamental compact, alors, pour tout  $R > 2D$ ,

$$e^{Ent(X,d,\mu_x)(R-2D)} \leq \sup_{y \in X} N_{x,y}(R) \leq \left( \sup_{y \in X} N_{x,y}(4D) \right)^{E[\frac{R}{2D}]},$$

l'inégalité de droite restant vraie comme précédemment lorsque l'action de  $\Gamma$  n'est pas cocompacte.

**Remarque :** On remarque aisément que, pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $X$ , on a  $N_{x,y}(4D) = N_{y,x}(4D) \leq N_x(5D)$  (car, pour tout point  $y$ , il existe un élément  $\gamma$  tel que  $d(x, \gamma.y) \leq D$  donc  $B(\gamma.y, 4D) \subset B(x, 5D)$ ). Le point (ii) du corollaire 4.3 entraîne donc que, pour tout point  $x$  de  $X$  et tout  $R \geq 2D$ ,

$$N_x(R) \leq \sup_{y \in X} N_{x,y}(R) \leq (N_x(5D))^{E[\frac{R}{2D}]}$$

Une approche directe donne un résultat un peu plus fin que nous présentons dans le paragraphe 4.2.

Avant de montrer la proposition 4.1, nous allons faire quelques remarques sur les hypothèses choisies.

### Remarques sur les hypothèses

(1) Sous les hypothèses de la proposition 4.1, on ne peut pas espérer minorer (pour  $x$ ,  $R$  et  $\alpha$  donnés) le quotient  $\frac{\mu(B(x,R))}{\inf_{x \in X} \mu(B(x,\alpha))}$  (au lieu du quotient  $\frac{\sup_{y \in X} \mu(B(y,R))}{\inf_{y \in X} \mu(B(y,\alpha))}$ ) par  $e^{Ent(X,d,\mu)(R-2\alpha)}$ ; la présence du "sup" est donc nécessaire

En effet, recollons une demi-sphère  $\mathbb{S}_+^m$  à une variété hyperbolique simplement connexe par un cylindre euclidien  $\mathbb{S}^{m-1} \times ]0, R[$  muni de la métrique  $g_{\mathbb{S}^{m-1}} \oplus dr^2$  (de rayon  $\varepsilon > 0$  et de longueur  $R > 0$ ). Sur la variété riemannienne  $(Y, g)$  ainsi obtenue, on a

$$\inf_{y \in Y} Vol[B(y, \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2} Vol(\mathbb{S}^m) \geq c(m) Vol(\mathbb{S}^{m-1})$$

et, si  $x$  est le pôle central de la demi-sphère  $\mathbb{S}_+^m$ ,

$$\text{Vol}(B(x, R)) = \frac{1}{2}\text{Vol}(\mathbb{S}^m) + \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1})(R - \frac{\pi}{2})$$

Il en découle que

$$\frac{\text{Vol}(B(x, R))}{\inf_{y \in Y} \text{Vol}[B(y, \frac{\pi}{2})]} = 1 + \frac{1}{c(m)}(R - \frac{\pi}{2})$$

et  $\frac{\text{Vol}(B(x, R))}{\inf_{y \in Y} \text{Vol}[B(y, \frac{\pi}{2})]}$  n'est pas minoré par  $e^{\text{Ent}(Y, g, dv_g)(R-\pi)}$  si  $R$  est suffisamment grand.

(2) Il peut arriver que  $\sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) = +\infty$  bien que toutes les boules de rayon  $R$  soient de mesure finie, d'où la nécessité de l'hypothèse (i) dans la proposition 4.1.

**Fait 4.4.**

Soit  $(X^m, g)$  une variété complète, simplement connexe, de courbure sectionnelle négative ou nulle, dont la courbure sectionnelle tend vers  $-\infty$  à l'infini. Alors, pour chaque valeur de  $R > 0$ , on a  $\sup_{x \in X} \text{Vol}B(x, R) = +\infty$ , bien que, pour tout point  $x$  et pour tout  $R > 0$ , on ait  $\text{Vol}(B(x, R)) < +\infty$ .

*Preuve du fait 4.4.*

Fixons un point  $x_0$  de  $X$  et un réel  $R > 0$ . Montrons que pour tout  $A$ , il existe un point  $x$  de  $X$  tel que  $\text{Vol}(B(x, R)) > A$ .

Choisissons  $K_0$  suffisamment grand pour que  $K_0 > \frac{1}{R^2}$  et pour que

$$\frac{1}{K_0^n} \int_0^{\sqrt{K_0}} (\sinh t)^{m-1} dt > \frac{A}{\text{Vol}(\mathbb{S})^{m-1}}$$

Il existe un réel  $R_0 > 0$  tel que la courbure sectionnelle soit majorée par  $-K_0^2$  en tout point de  $X \setminus B(x_0, R_0)$ . Considérons un point  $x$  situé à une distance de  $x_0$  supérieure à  $R_0 + R$ . Alors, la courbure sectionnelle en tout point de  $B(x, R)$  est majorée par  $-K_0^2$ .

Par ailleurs, comme  $(X, g)$  est simplement connexe et de courbure négative ou nulle, le rayon d'injectivité est infini en tous les points de  $(X, g)$ , donc l'application  $\exp_x$  est un difféomorphisme de la boule euclidienne de rayon  $R$  sur  $B(x, R)$ . Le théorème de Rauch implique alors que

$$(4.1) \quad \text{Vol}(B(x, R)) \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^R \left( \frac{\text{sh}(K_0 t)}{K_0} \right)^{m-1} dt$$

$$(4.2) \quad \geq \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{K_0^n} \int_0^{\sqrt{K_0}} (\sinh t)^{m-1} dt > A$$

ce qui termine la preuve □

- (3) Sous les hypothèses du corollaire 4.2, il suffit de supposer que le volume de toutes les boules de rayon  $R$  sont de volume fini pour que le supremum du volume des boules de rayon  $R$  soit également fini.

Plus précisément, on a le

**Fait 4.5.**

*S'il existe un groupe d'isométries  $\Gamma$  qui agit sur l'espace de longueur  $(X, d)$  de manière cocompacte et totalement discontinue, qui laisse invariante la mesure  $\mu$ ,*

*(i) il suffit de supposer, pour tout point  $x$  et tout réel  $R > 0$ , que  $\mu(B(x, R))$  est finie pour obtenir automatiquement que, pour tout  $R > 0$ ,  $\sup_{x \in X} \mu(B(x, R))$  est fini.*

*(ii) il suffit de supposer, pour tout point  $x$  et tout réel  $\alpha > 0$ , que  $\mu(B(x, \alpha))$  est strictement positive pour obtenir automatiquement que, pour tout  $R > 0$ ,  $\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha))$  est strictement positif.*

Remarquons que les propriétés (i) et (ii) sont automatiquement vérifiées quand  $(X, d)$  est une variété riemannienne.

*Preuve du fait 4.5.*

**Preuve du point (i) :** Soit  $K$  un domaine fondamental compact pour l'action de  $\Gamma$ , notons  $D$  son diamètre. Fixons un point  $x_0$  de  $K$ , alors, on a, pour tout point  $x$  de  $K$ ,

$$\mu[B(\gamma.x, R)] = \mu[\gamma.B(x, R)] = \mu[B(x, R)]$$

Pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  tel que  $\gamma.x$  appartienne à  $K$ , donc

$$(4.3) \quad \sup_{x \in X} \mu[B(x, R)] = \sup_{x \in K} \mu[B(x, R)]$$

$$(4.4) \quad \leq \mu[B(x_0, R + D)]$$

car la boule  $B(x, R)$  est incluse dans la boule  $B(x_0, R + D)$  pour tout point  $x$  de  $K$  (notons que nous n'avons pas besoin de supposer que l'application  $x \rightarrow \mu[B(x, R)]$  est continue), ce qui termine la preuve du point (i).

**Preuve du point (ii) :** De la même manière, on montre que

$$\inf_{x \in X} \mu[B(x, \alpha)] = \inf_{x \in K} \mu[B(x, \alpha)]$$

Pour  $\alpha$  fixé, soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $K$  telle que

$$\mu[B(x_k, \alpha)] \longrightarrow \inf_{x \in K} \mu[B(x, \alpha)]$$

Comme  $K$  est compact, la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite (encore notée  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ) convergente, dont la limite est notée  $x_*$ . Posons  $\varepsilon_k = d(x_*, x_k)$ .

Comme  $\varepsilon_k$  tend vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini, on a, pour  $k$  suffisamment grand,

$$B(x_*, \frac{\alpha}{2}) \subset B(x_*, \alpha - \varepsilon_k) \subset B(x_k, \alpha)$$

et, finalement,

$$\inf_{x \in X} \mu[B(x, \alpha)] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu[B(x_k, \alpha)] \geq \mu[B(x_*, \frac{\alpha}{2})] > 0$$

□

Remarquons que, dans l'exemple du point (2), pour tout  $R > 0$ ,  $\sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) = +\infty$ . L'inégalité de droite de la proposition 4.1 reste tout de même vraie. Cependant,

(4)	<p>Il peut exister deux réels <math>r</math> et <math>R</math> tels que <math>0 &lt; r &lt; R</math> et <math>\sup_{x \in X} \mu(B(x, R)) = +\infty</math> tandis que <math>\sup_{x \in X} \mu(B(x, r)) &lt; +\infty</math>, ce qui justifie le fait d'exiger que pour tout <math>R &gt; 0</math>, <math>\sup_{x \in X} \mu(B(x, R))</math> soit fini.</p>
-----	--

Nous allons construire un espace de longueur mesuré (voir la figure 4.1) tel que

- $\sup_{x \in X} \mu(B(x, 1)) \leq 2$
- $\sup_{x \in X} \mu(B(x, 2)) = +\infty$
- $\inf_{x \in X} \mu(B(x, \frac{1}{2})) > 0$

Recollons un segment de longueur 1 et un rectangle de longueur 1 et d'aire  $1/2$ . Construisons un arbre en recollant  $2^{n-1}$  éléments de ce type sur tous les sommets de la  $n^{ieme}$  génération (voir figure 4.1). Notons  $A_n$  l'ensemble des points milieux des arêtes qui partent d'un sommet de la  $n^{ieme}$  génération. Nous définissons la mesure  $\mu$  par la mesure d'aire sur les rectangles à laquelle

$$\text{on ajoute la mesure } \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{x \in A_{n-1}} \delta_x.$$

Alors,  $\inf_{x \in X} \mu(B(x, \frac{1}{2})) > 0$  car toute boule de rayon  $\frac{1}{2}$  rencontre soit un rectangle, soit contient le milieu d'une arête.

Une boule  $B(x, 1)$  de rayon 1 rencontre au plus deux rectangles (un seul rectangle si  $x$  appartient à un rectangle, les deux rectangles situés aux deux extrémités de l'arête si  $x$  appartient à une arête); de plus, si  $(B(x, 1))$  rencontre des points milieux d'arêtes, ceux-ci appartiennent tous à la même génération  $A_n$  (car deux milieux de deux générations différentes sont à une distance au moins égale à deux). Le cas échéant, la boule de rayon 1 contient au plus  $2^{n-1}$  points de  $A_n$ , chacun étant de poids  $\frac{1}{2^{n-1}}$  : la mesure d'une boule de rayon 1 est donc inférieure à 2.

Finalement, une boule de rayon 2 basée en un sommet rencontre  $(2^{n-1} + 1)$  rectangles et l'aire de l'intersection de chacun de ces rectangles avec une telle boule est supérieure à  $\frac{1}{4}$ , ce qui permet de conclure que

$$\sup_{x \in X} \mu(B(x, 2)) = +\infty.$$

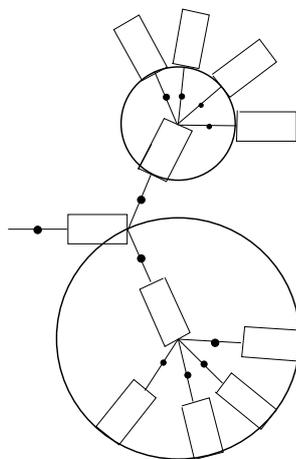


FIG. 4.1 – Les trois premières étapes de l'exemple (ii)

(5) Il n'existe pas toujours de réel  $\alpha > 0$  tel que  $\inf_{x \in X} \mu(B(x, \alpha))$  soit non nul.

Pour voir cela, il suffit de vérifier le

**Fait 4.6.**

Pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  non compacte de volume fini et pour tout  $\alpha > 0$ , on a  $\inf_{x \in M} Vol[B(x, \alpha)] = 0$

*Preuve du fait 4.6.*

Fixons un réel  $\alpha$  strictement positif.

Si  $\inf_{x \in M} Vol[B(x, \alpha)] = a > 0$ , prenons une géodésique minimisante  $c$  qui va à l'infini et posons  $x_k = c(2k\alpha)$ . On a alors  $d(x_k, x_{k+1}) = 2\alpha$  donc les boules  $B(x_k, \alpha)$  sont disjointes. Ainsi,

$Vol(M, g) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} Vol(B(x_k, \alpha))$  et  $Vol(M, g)$  est infini, ce qui contredit nos hypothèses. Ainsi,  $\inf_{x \in M} Vol[B(x, \alpha)] = 0$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

**Preuve de la proposition 4.1**

Avant de faire la preuve de la proposition 4.1, nous allons établir deux lemmes puis une proposition sur lesquels la preuve repose.

**Lemme 4.7.**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique non compact muni de deux mesures boréliennes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  infinies mais finies sur toutes les boules. Soit  $\Omega$  un domaine de mesure finie. Alors, pour tout  $R > 0$ ,

$$\int_{\Omega} \mu_1(B(y, R)) d\mu_2(y) = \int_X \mu_2(\Omega \cap B(y, R)) d\mu_1(y)$$

*Preuve du lemme 4.7.*

Notons  $\chi_A$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ . Le théorème de Fubini pour les fonctions positives mesurables donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mu_1(B(y, R)) d\mu_2(y) &= \int_X \int_X \chi_{\Omega}(y) \chi_{[0, R[}(d(x, y)) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&= \int_X \int_X \chi_{\Omega}(y) \chi_{B(x, R)}(y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\
&= \int_X \int_X \chi_{\Omega}(y) \chi_{B(x, R)}(y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) \\
&= \int_X \int_X \chi_{\Omega \cap B(x, R)}(y) d\mu_2(y) d\mu_1(x) \\
&= \int_X \mu_2(\Omega \cap B(x, R)) d\mu_1(x)
\end{aligned}$$

□

**Lemme 4.8.**

*Soient  $R, R'$ , et  $\alpha$  trois réels strictement positifs.*

*Soient  $(X, d_X)$  un espace de longueur au sens faible et  $x$  un point de  $X$ . Alors, pour tout point  $y$  appartenant à la boule  $B(x, R + R' + 2\alpha)$ , l'intersection  $B(x, R + 2\alpha) \cap B(y, R' + 2\alpha)$  contient une boule de rayon  $\alpha$ .*

*Preuve du lemme 4.8.* (classique et élémentaire)

Comme  $d(x, y) < R + R' + 2\alpha$  il existe une courbe  $c$  (paramétrée par sa longueur) qui joint  $x$  et  $y$  et telle que  $d(x, y) \leq l(c) < R + R' + 2\alpha$ . Donc  $l(c) - R' - \alpha < R + \alpha$ . Choisissons  $t_0$  tel que  $l(c) - R' - \alpha \leq t_0 \leq R + \alpha$  et posons  $z = c(t_0)$ . Alors, pour tout  $z'$  appartenant à  $B(z, \alpha)$ , on a d'abord :

$$\begin{aligned}
d(x, z') &\leq d(x, z) + d(z, z') \\
&< t_0 + \alpha
\end{aligned}$$

et, finalement

$$d(x, z') < R + 2\alpha$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
d(y, z') &\leq d(y, z) + d(z, z') \\
&\leq l(c) - \text{long}_{c|_{[0, t_0]}} + d(z, z') \\
&< l(c) - t_0 + \alpha \\
&\leq R' + 2\alpha
\end{aligned}$$

donc  $z'$  appartient à  $B(x, R + 2\alpha) \cap B(y, R' + 2\alpha)$  et la boule  $B(z, \alpha)$  est incluse dans  $B(x, R + 2\alpha) \cap B(y, R' + 2\alpha)$ . □

**Proposition 4.9.**

Soit  $(X, d)$  un espace de longueur au sens faible, non compact. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures infinies non nulles sur  $X$  et telles que, pour tout  $R > 0$ , le supremum des mesures des boules de rayon  $R$  soit fini. Soient  $\alpha$ ,  $R$  et  $R'$  trois réels strictement positifs. Alors, pour tout point  $x$  appartenant à  $X$ ,

$$\begin{aligned} \mu_2(B(x, R + 2\alpha)) \times \sup_{y \in X} \mu_1(B(y, R' + 2\alpha)) \\ \geq \mu_1(B(x, R + R' + 2\alpha)) \times \inf_{z \in X} \mu_2(B(z, \alpha)) \end{aligned}$$

*Preuve de la proposition 4.9.*

Fixons un réel  $R$  strictement positif et appliquons le lemme 4.7 en y remplaçant  $R$  par  $R' + 2\alpha$  et  $\Omega$  par  $B(x, R + 2\alpha)$ . On obtient

$$\begin{aligned} \sup_{y \in M} \mu_1(B(y, R' + 2\alpha)) \times \mu_2(B(x, R + 2\alpha)) \\ \geq \int_{B(x, R+R'+2\alpha)} \mu_2(B(x, R + 2\alpha) \cap B(y, R' + 2\alpha)) d\mu_1(y) \end{aligned}$$

et le lemme 4.8 permet de conclure que, pour tout point  $x$  appartenant à  $X$ ,

$$\begin{aligned} \mu_2(B(x, R + 2\alpha)) \times \sup_{y \in X} \mu_1(B(y, R' + 2\alpha)) \\ \geq \mu_1(B(x, R + R' + 2\alpha)) \times \inf_{z \in X} \mu_2(B(z, \alpha)) \end{aligned}$$

□

*Preuve de la proposition 4.1.*

Soient  $x$  un point de  $X$  et  $R$  un réel positif. Notons  $b_{sup}(R) = \sup_{x \in X} (\mu(B(x, R)))$

et  $b_{inf}(R) = \inf_{y \in X} (\mu(B(y, R)))$ . La proposition 4.9, appliquée en faisant  $\mu_1 =$

$\mu_2 = \mu$ , implique que l'application  $g : R \longrightarrow \log \left( \frac{b_{sup}(R+2\alpha)}{b_{inf}(\alpha)} \right)$  est sous-additive. Par conséquent, puisque  $g$  est également croissante, pour tout réel  $R$  positif,

$$\begin{aligned} g(R) &\leq g\left(\left(E \left[ \frac{R}{2\alpha} \right] + 1\right) \times 2\alpha\right) \\ &\leq \left(E \left[ \frac{R}{2\alpha} \right] + 1\right) g(2\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{b_{sup}(R + 2\alpha)}{b_{inf}(\alpha)} \leq \left( \frac{b_{sup}(4\alpha)}{b_{inf}(\alpha)} \right)^{E[\frac{R}{2\alpha}] + 1},$$

Dès lors, en posant  $R' = R + 2\alpha$  dans cette dernière inégalité, on obtient l'inégalité de droite de la proposition 4.1 pour tout  $R' > 2\alpha$ .

Pour montrer l'inégalité de gauche, remarquons que la sous-additivité et la croissance de  $g$  impliquent que, pour tout  $R > 0$ , si  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite qui tend vers l'infini et si  $n(k) := E \left[ \frac{R_k}{R} \right]$ , on a

$$\frac{g(R_k)}{R_k} \leq \frac{n(k) + 1}{n(k)} \cdot \frac{g(R)}{R} \longrightarrow \frac{g(R)}{R}$$

donc

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{g(R_k)}{R_k} \leq \frac{g(R)}{R}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{g(R)}{R} &\geq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{g(r)}{r} \\ &\geq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left[ \frac{\sup_{x \in X} (\mu(B(x, r + 2\alpha)))}{\inf_{y \in X} (\mu(B(y, \alpha)))} \right] \\ &\geq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left[ \frac{\mu(B(x, r + 2\alpha))}{\inf_{y \in X} (\mu(B(y, \alpha)))} \right] \\ &\geq Ent(X, d, \mu) \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 4.1.  $\square$

## 4.2 Cas particulier : les mesures de comptage

Considérons un espace de longueur  $(Y, d_Y)$  dont le groupe des isométries  $Isom(Y)$  admet un sous-groupe  $\Gamma$  qui agit de manière discontinue et cocompacte sur  $Y$ . Soit  $y$  un point de  $Y$ . On définit la distance  $d_y$  sur  $\Gamma$  par

$$d_y(\gamma, \gamma') = d_Y(\gamma.y, \gamma'.y) \text{ pour tous les couples } (\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma.$$

On appellera "mesure de comptage" toute mesure du type  $\mu_y := \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma.y}$  (où

$y$  est un point de  $Y$ ).

Pour tout réel  $R$  strictement positif, nous noterons  $N_y(R) = \mu_y(B(y, R))$  le cardinal de  $\Gamma.y \cap B(y, R)$  et  $N_{y,z}(R) = \mu_z(B(y, R))$  celui de  $\Gamma.z \cap B(y, R)$ .

### Proposition 4.10.

*Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur non compact.*

*Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries qui agit sur  $Y$  discontinûment et de manière cocompacte.*

*Soit  $D$  un majorant du diamètre d'un domaine fondamental compact pour*

cette action et  $h$  l'entropie de  $(Y, d_Y)$ .

Alors, pour tout  $R > 2D$ , et pour tout  $x$  appartenant à  $Y$ ,

$$e^{h(R-2D)} \leq N_x(R) \leq N_x(3D)^{E[(R-D)/D]}$$

De plus, pour tout  $n \geq 3$ ,

$$N_x(nD) \leq N_x(3D)^{n-2}$$

*Preuve de la proposition 4.10 .*

Soient  $y$  un point de  $Y$  et  $g$  l'application  $g : R \rightarrow \log(N_y(R + 2D))$ .

Commençons par montrer que  $Ent(Y, d_Y, \mu_y) \leq \frac{g(R)}{R}$  : dans la preuve de la propriété 2.5, nous montrons que  $g$  est sous-additive. Par la même méthode que dans la preuve de la proposition 4.1, nous en déduisons que, pour tout  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{g(R)}{R} &\geq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{g(r)}{r} \\ &\geq Ent(Y, d_Y, \mu_y) \end{aligned}$$

Ceci donne l'inégalité de gauche en remarquant que l'entropie ne dépend pas de la mesure d'après la proposition 2.3.

Montrons à présent que  $g(R) \leq \frac{R+D}{D}$  pour tout  $R > 0$ .

Fixons  $R > 0$  et posons  $k = E \left[ \frac{R+D}{D} \right]$ .

Alors, comme  $R < kD$ , la croissance de  $g$  ainsi que sa sous-additivité entraînent que

$$g(R) \leq g(kD) \leq kg(D) = E \left[ \frac{R+D}{D} \right] g(D)$$

Ceci montre l'inégalité de droite en posant  $R' = R + 2D$ . Par ailleurs, en remplaçant  $k$  par  $(k - 2)$  dans l'inégalité ci-dessus, on obtient la dernière inégalité de la proposition 4.10.  $\square$

#### **Corollaire 4.11.**

*Soit  $(N, g_N)$  une variété riemannienne non compacte.*

*Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries qui agit sur  $N$  librement proprement discontinûment et de manière cocompacte.*

*Soit  $D$  un majorant du diamètre de la variété quotient  $(M, g_M)$ .*

*Alors, pour tout  $R \geq 3D$ ,*

$$e^{(R-3D)Ent(M, g_M)} \leq \frac{Vol_N(B(x, R))}{Vol(M, g)} \leq N_x(3D)^{E[R/D]}$$

*l'inégalité de droite restant vraie pour tout  $R \geq D$*

*Preuve du corollaire 4.11.*

Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$ . Si  $x$  est un point de  $N$ , nous noterons  $\mathcal{D}_x$  le domaine de Dirichlet pour l'action de  $\Gamma$  pointé en  $x$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{D}_x = \{y \in N / d_N(y, x) < d_N(y, \gamma.x) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}\}$$

Remarquons que  $\mathcal{D}_{\gamma.x} = \gamma(\mathcal{D}_x)$  et que, pour tout point  $y$  de  $\mathcal{D}_{\gamma.x}$ , on a  $d_N(\gamma.x, y) \leq D$ . Nous en déduisons que la réunion disjointe des  $\mathcal{D}_{\gamma.x}$  pour tous les  $\gamma$  tels que  $\gamma.x \in B(x, R)$  est incluse dans  $B(x, R + D)$ . Comme  $Vol(\mathcal{D}_{\gamma.x}, g_N) = Vol(\mathcal{D}_x, g_N) = Vol(M, g)$ , ceci entraîne que, pour tout  $R > D$ ,

$$N_x(R - D) \leq \frac{Vol(B(x, R))}{Vol(M, g)}$$

Par ailleurs, si  $y$  est un point de  $B(x, R)$ , il existe un élément  $\gamma_0$  de  $\Gamma$  tel que

$$\begin{cases} y \in \mathcal{D}_{\gamma_0.x} \\ d_N(x, \gamma_0.x) \leq d_N(x, y) + d_N(y, \gamma_0.x) \leq R + D \end{cases}$$

Ainsi,

$$B(x, R) \subset \bigcup_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ \gamma.x \in B(x, R + D)}} \mathcal{D}_{\gamma.x},$$

ce qui implique que

$$\frac{Vol_N(B(x, R))}{Vol(M, g)} \leq N_x(R + D).$$

On obtient les estimations du corollaire 4.11 en combinant ces deux inégalités avec celles de la proposition 4.10.  $\square$

**Proposition 4.12.**

*Soit  $(Y, d_Y)$  un espace de longueur non compact.*

*Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries qui agit sur  $Y$  de manière discontinue et cocompacte, notons  $D$  un majorant du diamètre d'un domaine fondamental compact pour cette action.*

*Alors,*

*(i) pour tous les réels  $R > 0$  et  $R' > 0$ , pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $Y$ ,*

$$N_{x,y}(R + R' + 2D) \leq N_{x,y}(R + 2D)N_x(R' + 2D)$$

*(ii) pour tout  $k \geq 2$ ,*

$$N_{x,y}((k + 1)D) \leq N_{x,y}(kD)N_x(3D)$$

*(iii) pour tout  $k \geq 3$ ,*

$$N_{x,y}(kD) \leq N_{x,y}(3D)N_x(3D)^{k-3} \leq N_x(3D)^{k-1}$$

*Preuve de la proposition 4.12.*

On peut montrer, en utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 2.6, que l'application

$$(\gamma.x, \gamma'.x) \longmapsto \gamma\gamma'.x$$

restreinte à  $(B(y, R + D) \cap \Gamma.x) \times (B(x, R' + D) \cap \Gamma.x)$  est surjective sur  $B(y, R + R') \cap \Gamma.x$  (cf preuve du lemme 2.6).

Ainsi,

$$N_{x,y}(R + R') \leq N_{x,y}(R + D)N_x(R' + D)$$

et on obtient (i) en remplaçant  $R$  et  $R'$  par  $R + D$  et  $R' + D$ , et (ii) en appliquant (i) au cas où  $R' = D$  et  $R = (k - 2)D$ .

La première inégalité de (iii) s'obtient en itérant (ii), la deuxième en remarquant que  $N_{x,y}(3D) \leq N_x(4D) \leq N_x(3D)^2$  (cf proposition 4.10).  $\square$

### 4.3 Application

#### **Proposition 4.13.**

*Fixons trois réels strictement positifs arbitraires  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et posons*

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

*Fixons arbitrairement un réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$  et un réel  $\alpha > 0$ .*

*Soit  $(X, d_X)$  un espace de longueur compact (connexe) quelconque qui appartient à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  et soit  $(Y, d_Y)$  n'importe quelle variété riemannienne compacte de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  telle que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$ . Si l'on note  $(\tilde{Y}, d_{\tilde{Y}})$  le revêtement universel de  $(Y, d_Y)$ , pour tout réel  $R$  supérieur ou égal à  $2\alpha$ , on a*

$$e^{\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X)(R - 2\alpha)} \leq \frac{\sup_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} Vol(B(\tilde{y}, R))}{\inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} Vol(B(\tilde{y}, \alpha))} \leq \left( \frac{\sup_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} Vol(B(\tilde{y}, 4\alpha))}{\inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} Vol(B(\tilde{y}, \alpha))} \right)^{E\left[\frac{R}{2\alpha}\right]}$$

#### **Remarque 4.14.**

*Plus généralement, sous les mêmes hypothèses que dans la proposition 4.13, si  $(Y, d_Y)$  est n'importe quel espace de longueur compact de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  tel que la distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  est inférieure à  $\varepsilon$  et si  $\mu$  est n'importe quelle mesure borélienne non nulle sur  $\tilde{Y}$ , de mesure*

totale infinie et de mesure finie sur toutes les boules, on a

$$e^{\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X)(R-2\alpha)} \leq \frac{\sup_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \mu(B(\tilde{y}, R))}{\inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \mu(B(\tilde{y}, \alpha))} \leq \left( \frac{\sup_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \mu(B(\tilde{y}, 4\alpha))}{\inf_{\tilde{y} \in \tilde{Y}} \mu(B(\tilde{y}, \alpha))} \right)^{E\left[\frac{R}{2\alpha}\right]}$$

*Preuve du corollaire 4.13.*

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème 3.61 où nous avons montré que, si

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

Alors,

$$Ent(Y, d_Y) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right) Ent(X, d_X)$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 4.1. □

## Chapitre 5

# Estimations du noyau de l'opérateur de la chaleur

Considérons une variété riemannienne  $(M, g)$  connexe et complète. Si  $(M, g)$  est compacte, on appelle *noyau de l'opérateur de la chaleur* (ou noyau de la chaleur) l'application  $k_{(M,g)} : \mathbb{R}^+ \times M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  (ou  $k_M$  quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la métrique  $g$ ) telle que, pour tout point  $x$  de  $M$ , l'application  $k_{(M,g)}(\cdot, x, \cdot)$  est la solution minimale de l'équation :

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta u(\cdot, \cdot) + \frac{\partial}{\partial t} u(\cdot, \cdot) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \int u(t, \cdot) dv_g = \delta_x(\cdot) \end{cases}$$

où la condition initiale doit être vérifiée au sens de la convergence faible des mesures. Le noyau de l'opérateur de la chaleur est alors  $C^\infty$ .

Lorsque  $(M, g)$  n'est pas compacte, il existe une solution positive à cette équation, mais, dans ce cas, la solution n'est pas nécessairement unique. Le noyau de la chaleur est la solution positive minimale de (\*). On montre que

$$k_M(t, x, y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} k_R^D(t, x, y)$$

où  $k_R^D$  est l'unique solution positive de (\*) sur la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$  qui vérifie la condition de Dirichlet sur le bord de la boule, que l'on prolonge par la fonction nulle en dehors de la boule.

Intuitivement, le comportement du noyau de l'opérateur sur une variété riemannienne  $(X, d_X)$  est relié à la géométrie de cette variété de la manière suivante : le comportement en temps "grand" reflète la géométrie globale de la variété, tandis que le comportement en temps petit reflète la géométrie locale.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à trois types de questions sur l'estimation du noyau de la chaleur. Dans un premier temps, nous majorons, en fonction de l'entropie, le noyau de la chaleur en grand temps sur une variété riemannienne non compacte donnée dont la courbure de Ricci est minorée,

en partant de la majoration (valable en tout temps) de P. Li et S-T. Yau. Ensuite, nous majorons le noyau de la chaleur sur une variété riemannienne compacte donnée de courbure sectionnelle négative ou nulle, la majoration étant valable pour tout temps et optimale en petit temps. Finalement, nous considérons une sous-famille de variétés riemanniennes compactes de courbure négative ou nulle, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés et dont les groupes fondamentaux vérifient une condition qui les fait ressembler au groupe fondamental d'une variété riemannienne de courbure strictement négative. Nous démontrons qu'il existe une fonction  $f$  de  $t$  et des seules bornes sur les invariants que nous nous sommes fixés, telle que le noyau de l'opérateur de la chaleur de n'importe quelle variété riemannienne de la famille considérée soit majorée par  $f$ . En utilisant les résultats de A. Kasué, cette dernière majoration nous permet d'établir un résultat de précompacité pour la distance spectrale.

## 5.1 Majoration du noyau de la chaleur en tout temps

P. Li et S-T. Yau ont établi (dans [LY], corollaire 3.1) la majoration suivante (valable pour tout temps) du noyau de l'opérateur de la chaleur

### Théorème 5.1.

Soit  $K$  un réel positif. Fixons une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $m$ , complète, sans bord et dont la courbure de Ricci est minorée par  $-K$ . Alors, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $M$  et pour tout temps  $t > 0$ ,

$$k(t, x, y) \leq \frac{e^{(m+\frac{4}{\varepsilon})} \exp(C(m)K\varepsilon t)}{\sqrt{\text{Vol}(B(x, \sqrt{t}))} \sqrt{\text{Vol}(B(y, \sqrt{t}))}} \exp\left[-\frac{d_M^2(x, y)}{4(1+\varepsilon)^2 t}\right]$$

où  $C_m$  est une constante qui ne dépend que de  $m$ .

*Preuve du théorème 5.1.*

L'estimée de P. Li et S-T. Yau donnée dans [LY], s'écrit, pour tout  $\delta > 0$  et tout  $\alpha \in ]1, 2[$ ,

$$(*) \quad k(t, x, y) \leq \frac{(1+\delta)^{m\alpha} \exp\left[\frac{C_6(m)}{1-\alpha} K\delta(1+\delta)t\right] \cdot \exp\left[\frac{\alpha}{4\delta}\right]}{\sqrt{\text{Vol}(B(x, \sqrt{t}))} \sqrt{\text{Vol}(B(y, \sqrt{t}))}} \exp[-\rho(t, x, y)]$$

où

$$\rho(t, x, y) \geq \begin{cases} \frac{d^2(x, y)}{4t} - \frac{1}{4} & \text{si } d(x, y) < \sqrt{t} \\ \frac{(d^2(x, y) - \sqrt{t})^2}{4(1+2\delta)(1+\delta)t} & \text{si } d(x, y) \geq \sqrt{t} \end{cases}$$

Comme  $(u - 1)^2 \geq \frac{u^2}{1+\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$  lorsque  $u \geq 1$ , on a

$$\rho(t, x, y) \geq \frac{1}{4(1+2\delta)(1+\delta)} \left( \frac{d^2(x, y)}{(1+\varepsilon)t} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Posons  $\varepsilon = 4\delta$  et choisissons  $0 < \delta < \frac{1}{4}$ , on obtient

$$\rho(t, x, y) \geq \frac{1}{4(1+\varepsilon)} \left( \frac{d^2(x, y)}{(1+\varepsilon)t} - \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Par ailleurs, on a

$$\delta(2+\delta) \leq \frac{9}{16}\varepsilon; \quad \frac{\alpha}{2\delta(2+\delta)} \leq \frac{\alpha}{\varepsilon}; \quad \frac{\alpha}{4\delta} = \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

En remplaçant dans (\*) et en posant  $\alpha = \frac{3}{2}$ , nous obtenons

$$k(t, x, y) \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{3m/2} \frac{\exp\left[\frac{3}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon(1+\varepsilon)}\right] \cdot \exp[2C_6(m)K\varepsilon t]}{\sqrt{\text{Vol}(B(x, \sqrt{t}))} \sqrt{\text{Vol}(B(y, \sqrt{t}))}} \exp\left[-\frac{d^2(x, y)}{4(1+\varepsilon)^2 t}\right]$$

On conclut en remarquant que  $(\frac{5}{4})^{3m/2} < (\frac{25}{16})^m < e^m$ , que  $\frac{3}{\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon(1+\varepsilon)} < \frac{4}{\varepsilon}$  et en posant  $C(m) = 2C_6(m)$ .  $\square$

Pour obtenir une majoration de noyau de la chaleur qui ne dépende que des bornes sur des invariants fixés au préalable, il reste donc à contrôler les volumes des boules  $\text{Vol}(B(x, \sqrt{t}))$  et  $\text{Vol}(B(y, \sqrt{t}))$ . En "petit" temps, cela est possible grâce à l'inégalité de Bishop-Gromov et il est facile (et classique) d'établir le corollaire suivant :

**Corollaire 5.2.**

Soient  $K$  et  $D$  deux réels positifs. Fixons une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $m$ , compacte, sans bord, dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(m-1)Kg$  et dont le diamètre est inférieur à  $D$ .

Alors, pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $M$  et pour tout temps  $t \leq D^2$ ,

$$\text{Vol}(M, g) k_M(t, x, y) \leq e^{(m+\frac{4}{\varepsilon})} \frac{V_K(D)}{V_K(\sqrt{t})} \exp(C(m)K\varepsilon t) \exp\left[-\frac{d_M^2(x, y)}{4(1+\varepsilon)^2 t}\right]$$

où  $V_K(r)$  désigne le volume d'une boule de rayon  $r$  dans la variété simplement connexe dont la courbure sectionnelle est constante et égale à  $-K$ .

**Remarque 5.3.** Rappelons que

$$\begin{aligned} V_K(r) &= \text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1}) \int_0^r \frac{(\sinh(\sqrt{K}x))^{m-1}}{\sqrt{K}} dx \\ &= \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{m-1})}{K^{m/2}} \int_0^{r\sqrt{K}} (\sinh(x))^{m-1} dx \end{aligned}$$

Ceci implique en particulier que, pour tout  $t \leq D^2$ ,

$$\text{Vol}(M, g) k_M(t, x, y) \leq C'_1 \exp [C(m)K\varepsilon t] \frac{1}{t^{m/2}} \exp \left[ -\frac{d_M^2(x, y)}{4(1 + \varepsilon)^2 t} \right]$$

où  $C'_1 = e^{(m+\frac{4}{\varepsilon})} V_K(D)/\text{Vol}(B^m)$ .

Il en découle que, pour tout  $t \leq D^2$ ,

$$\text{Vol}(M, g) k_M(t, x, x) \leq C'_1 \exp [C(m)K\varepsilon D^2] \frac{1}{t^{m/2}}$$

La famille des variétés riemanniennes compactes dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(m-1)Kg$  et dont le diamètre est inférieur à  $D$  est donc précompacte pour la distance spectrale (voir l'annexe F). Cette famille et son compactifié pour la distance spectrale ont été très étudiés dans [KK1].

*Preuve du corollaire 5.2.*

Si  $r$  et  $R$  sont deux réels strictement positifs tels que  $r \leq R$ , l'inégalité de Bishop-Gromov dit que

$$\frac{\text{Vol}(B(x, r))}{\text{Vol}(B(x, R))} \geq \frac{V_K(r)}{V_K(R)}$$

Il suffit d'appliquer ceci en faisant  $r = \sqrt{t}$  et  $R = D$  et de remarquer que, pour tout point  $z$  de  $M$ ,  $\text{Vol}(B(z, D)) \geq \text{Vol}(M, g)$  pour obtenir le corollaire 5.2.  $\square$

**Corollaire 5.4.**

Soient  $K$  et  $D$  deux réels positifs.

Fixons une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $m$ , non compacte, complète, sans bord et dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(m-1)Kg$ . Supposons de plus qu'il existe un groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $(M, g)$  qui agit sans point fixe, de manière totalement discontinue et cocompacte et tel que le diamètre de la variété quotient  $(M/\Gamma, \bar{g})$  soit inférieur à  $D$ . Alors, pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $M$  et pour tout temps  $t \leq D^2$ ,

$$\text{Vol}(M/\Gamma, \bar{g}) k_M(t, x, y) \leq e^{m+\frac{4}{\varepsilon}} \frac{V_K(D)}{V_K(\sqrt{t})} \exp (C(m)K\varepsilon t) \exp \left[ -\frac{d_M^2(x, y)}{4(1 + \varepsilon)^2 t} \right]$$

*Preuve du corollaire 5.4.*

On commence par appliquer l'inégalité de Bishop-Gromov de la même manière que dans la preuve du corollaire 5.2 en remarquant que, pour tout point  $z$  de  $M$ ,  $\text{Vol}(B(z, D)) \geq \text{Vol}(M/\Gamma, \bar{g})$  pour obtenir le corollaire 5.4.  $\square$

Il reste maintenant à établir le même genre de majoration en grand temps. Or, nous avons montré dans le chapitre 4 des estimations de type Bishop qui nous permettent d'écrire le

**Corollaire 5.5.**

Soient  $K$  et  $D$  deux réels positifs.

Fixons une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $m$ , non compacte, complète, sans bord et dont la courbure de Ricci est minorée par  $-(m - 1)K$ .

Supposons de plus qu'il existe un groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $(M, g)$  qui agit sans point fixe, de manière totalement discontinue et cocompacte et tel que le diamètre de la variété quotient  $(M/\Gamma, \bar{g})$  soit inférieur à  $D$ . Alors, pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $M$  et pour tout temps  $t \geq 9D^2$ ,

$$\text{Vol}(M/\Gamma, \bar{g}) k_M(t, x, y) \leq e^{(m+\frac{4}{\varepsilon})} \exp\left(C(m)K\varepsilon t - h(\sqrt{t} - 3D)\right) \exp\left[-\frac{d_M^2(x, y)}{4(1 + \varepsilon)^2 t}\right]$$

où  $h$  est l'entropie de  $(M/\Gamma, \bar{g})$  par rapport à son revêtement  $(M, g)$ .

*Preuve du corollaire 5.5.*

Nous avons montré dans la proposition 4.1 que, pour tout  $R \geq 2D$ , on a

$$\sup_{z \in M} \text{Vol}(B(z, R)) \geq \inf\{\text{Vol}(B(z, D))/z \in M\} \exp[h(R - 2D)]$$

Il en découle que, pour tout point  $z$  de  $M$ ,

$$\text{Vol}(B(z, R + D)) \geq \inf\{\text{Vol}(B(z, D))/z \in M\} \exp[h(R - 2D)]$$

ce qui s'écrit aussi, pour tout  $R \geq 3D$

$$\text{Vol}(B(z, R)) \geq \text{Vol}(M/\Gamma, \bar{g}) \exp[h(R - 3D)]$$

En reportant ceci dans la majoration du théorème 5.1 avec  $R = \sqrt{t}$ , on obtient de corollaire 5.5. □

## 5.2 Majoration du noyau de la chaleur optimale en petit temps

Les résultats présentés ici sont basés sur les travaux récents de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot qui décrivent dans [BCG1] la géométrie des variétés compactes dont l'entropie volumique (voir les définition et propriétés de cette notion dans le chapitre 2) est majorée par  $H$  et dont le groupe fondamental est " $\delta$ -non-abélien" (voir la définition E.1). Ils montrent que ces variétés peuvent être décomposées en une partie épaisse (définie comme l'ensemble des points  $x$  tels qu'il n'existe pas de lacet de point-base  $x$  non homotope à zéro et de longueur inférieure à  $\varepsilon_1$ , où  $\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ ) et une partie fine (définie comme l'ensemble des points bases de lacets non homotopes à zéro de longueur inférieure à  $\varepsilon_1$ ). De plus, en courbure négative, chaque composante

connexe de la partie fine est un cylindre de même topologie que  $\mathbb{S}^1 \times B^{n-1}$ . Un court rappel de ces résultats est présenté dans l'annexe E.

Dans ce paragraphe, nous fixons une variété riemannienne  $(M, g)$  et nous nous proposons d'obtenir une majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur valable pour les variétés riemanniennes compactes qui satisfait aux objectifs suivants :

1. Les hypothèses géométriques sur les variétés doivent avoir un comportement  $C^0$  par rapport à la métrique et, si possible, passer à la limite pour la convergence associée à la distance de Gromov-Hausdorff entre variétés. En particulier, on préférera faire une hypothèse de majoration de l'entropie volumique (voir le chapitre 3 où la continuité de l'entropie et son passage à la limite quand une suite de variétés converge vers un espace de longueur sont étudiés) plutôt que de faire une hypothèse de minoration de la courbure de Ricci (hypothèse qui ne passe pas à la limite, comme le montre l'exemple du paragraphe 5 de [Pe]). En compensation, certaines hypothèses algébriques seront imposées au groupe fondamental de la variété considérée, qui le fera ressembler à un groupe fondamental de variété de courbure négative. Nous supposerons en effet que le groupe fondamental de  $M$  est  $\delta$ -non-abélien (voir définition E.1).
2. La majoration doit être valable et pertinente en tout point de la variété et optimale en temps petit. En particulier, en temps petit, on voudrait que le majorant soit équivalent au noyau de la chaleur du cylindre de même rayon d'injectivité sur la partie fine et à celui de l'espace euclidien sur la partie épaisse.

La raison pour laquelle une majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur est difficile à obtenir peut se comprendre comme suit : pour établir une majoration du noyau de la chaleur par une fonction de la distance à l'aide du principe de maximum, il est nécessaire de majorer le laplacien de la fonction distance et, en particulier, sa partie singulière qui est une mesure positive supportée par le cut-locus du point-source ; sa majoration nécessite trop d'informations sur la géométrie particulière de la variété. Nous contour-nons ici cette difficulté en travaillant sur le revêtement universel riemannien de la variété  $(M, g)$ , où il devient raisonnable de supposer que le cut-locus du point source  $x$  n'est pas trop proche de  $x$  (il est même vide en courbure négative ou nulle). Le noyau de l'opérateur de la chaleur du revêtement universel peut donc être majoré par une fonction de la distance. De plus, le noyau de l'opérateur de la chaleur de  $(M, g)$  est relié au noyau de l'opérateur de la chaleur de son revêtement universel de la manière suivante :

$$k_M(t, x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{y})$$

où  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes du revêtement universel et  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$

sont des antécédents arbitraires fixés respectifs de  $x$  et  $y$  (voir [Bo] pour une preuve valable dans un cadre bien plus général).

Pour majorer  $k_M$  il nous faut donc contrôler le nombre et la disposition des "petits" lacets ainsi que le nombre de "grands" lacets. La version du lemme de Margulis donnée dans [BCG1] nous permet d'évaluer le nombre des petits lacets. Pour dénombrer les grands lacets, nous utiliserons les estimations de type Bishop présentées dans le chapitre 4.

### Notations

Fixons  $H$  et  $\delta$  deux réels strictement positifs.

Dans cette partie nous supposons que la variété compacte  $(M, g)$  est d'entropie volumique inférieure à  $H$  et que le groupe fondamental de  $M$  est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro, ce qui assure (voir le théorème 5.6) que  $M$  peut être découpée en une partie fine et une partie épaisse (définies au début de cette partie ou plus précisément dans l'annexe E).

Notons  $\Gamma$  le groupe des automorphismes du revêtement universel  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ . Nous noterons  $\Phi_{\tilde{x}}$  l'isomorphisme entre  $\pi_1(M, x)$  et  $\Gamma$ , obtenu en fixant un relevé  $\tilde{x}$  de  $x$  dans  $\widetilde{M}$  et en notant  $\Phi_{\tilde{x}}^{-1}(g)$  la classe du lacet  $\pi \circ \tilde{c}$  où  $\tilde{c}$  est un chemin qui joint  $\tilde{x}$  et  $g.\tilde{x}$  dans  $\widetilde{M}$ .

Dans la suite, afin de simplifier les formules, si  $\gamma$  est une classe d'homotopie de lacets de point-base  $x$  sur  $M$ , nous noterons encore  $\gamma$  (au lieu de  $\Phi_{\tilde{x}}(\gamma)$ ) l'élément correspondant de  $\Gamma$  via l'isomorphisme  $\Phi_{\tilde{x}}$ .

Nous noterons  $l_x(\gamma)$  l'infimum des longueurs des lacets homotopes à  $\gamma$  et de point base  $x$  (nous avons alors évidemment  $l_x(\gamma) = d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, \Phi_{\tilde{x}}(\gamma).\tilde{x})$ ) et  $l(x)$  l'infimum des longueurs  $l_x(\gamma)$  quand  $\gamma$  parcourt  $\pi_1(M, x) \setminus \{e\}$ . Nous désignerons par  $N_x(R)$  le nombre de classes d'homotopie de lacets  $\gamma$  de point base  $x$  tels que  $l_x(\gamma) < R$  (remarquons que, si  $\tilde{x}$  est un antécédent de  $x$  et si  $\tilde{N}_{\tilde{x}}(R)$  est le nombre de points de l'orbite  $\Gamma.\tilde{x}$  dans la boule de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $R$ , alors  $N_x(R) = \tilde{N}_{\tilde{x}}(R)$ ).

Nous noterons  $\Gamma_\alpha(\tilde{x})$  le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par les éléments  $g$  de  $\Gamma$  tels que  $d_{\widetilde{M}}(\tilde{x}, g.\tilde{x}) < \alpha$ .

Rappelons la version du lemme de Margulis de [BCG1] qui décrit très précisément la partie fine :

**Théorème 5.6.** ([BCG1], extrait du cor 3.4)

Fixons des nombres réels positifs arbitraires  $\delta$  et  $H$  et posons  $\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ . Considérons n'importe quelle variété connexe  $Y$  qui a les propriétés topologiques suivantes : son groupe fondamental  $\Gamma$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'au moins une variété compacte  $X$  qui admet une métrique de courbure strictement négative.

Considérons sur  $Y$  n'importe quelle métrique riemannienne  $g$  dont l'entropie volumique est majorée par  $H$ . Chacune des composantes connexes  $Y_{mince}^i$  de  $Y_{mince}$  a les propriétés suivantes :

(i) Il existe un ouvert  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  de  $\tilde{Y}$  tel que la restriction  $\pi_i$  de  $\pi$  à  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  soit un revêtement de  $Y_{mince}^i$  et coïncide avec le quotient de  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  par l'action d'un sous-groupe  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

(ii) Pour tout point  $y$  appartenant à  $Y_{mince}^i$ , l'image  $\tilde{\Gamma}_i = \psi_{\tilde{y}}(\Gamma_i)$  du groupe  $\pi_1(Y_{mince}^i, y)$  dans  $\pi_1(\tilde{Y}, y)$  (par le morphisme associé à l'inclusion) s'identifie à  $\Gamma_i$ , est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et  $\Gamma_i$  contient  $\Gamma_{\varepsilon_1}(\tilde{z})$  pour tout  $\tilde{z}$  appartenant à  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$ .

(iii) Si  $Y$  est compacte,  $Y_{mince}^i$  contient au moins une géodésique périodique de  $(Y, g)$ , non homotope à zéro, dont la longueur réalise le minimum de  $l(z)$  quand  $z$  appartient à  $Y_{mince}^i$ .

Si de plus la courbure sectionnelle de  $(M, g)$  est négative ou nulle, il est possible de décrire le générateur du groupe  $\Gamma_i$  :

**Proposition 5.7.**

Fixons des nombres réels positifs arbitraires  $\delta$  et  $H$  et posons  $\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ . Considérons n'importe quelle variété connexe  $Y$  qui a les propriétés topologiques suivantes : son groupe fondamental  $\Gamma$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'au moins une variété compacte  $X$  de courbure négative.

Considérons sur  $Y$  n'importe quelle métrique riemannienne  $g$  de courbure négative ou nulle dont l'entropie volumique est majorée par  $H$ . Fixons une composante connexe  $Y_{mince}^i$  de la partie fine. Alors, toutes les géodésiques périodiques qui minimisent  $\{l(z)/z \in Y_{mince}^i\}$  sont homotopes (à un changement de leur orientation près). De plus, le groupe  $\Gamma_i$  est engendré par l'élément qui est représenté par une telle géodésique (dans un sens que nous précisons dans la preuve de la proposition E.5).

*Preuve de la proposition 5.7.*

Ce résultat est déjà démontré dans [BCG1] en courbure strictement négative. Nous le généralisons ici en courbure négative ou nulle. Cependant, bien que la preuve soit originale, nous avons préféré la mettre en annexe (voir proposition E.5 dans l'annexe E), puisque tous les éléments utiles pour comprendre la preuve y sont rassemblés.  $\square$

### 5.2.1 Majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur sur la diagonale

Dans cette partie, nous majorons la diagonale du noyau de la chaleur (sans hypothèse sur la courbure de Ricci), et la majoration donnée est optimale en temps petit.

#### Théorème 5.8.

Fixons deux réels strictement positifs  $H$  et  $\delta$  et notons  $\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ .

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $m$ , de courbure sectionnelle  $\sigma \leq 0$  et d'entropie volumique  $\text{Ent}(M, g) \leq H$ . Supposons de plus que le groupe fondamental de  $M$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'au moins une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative. Alors, si  $d$  est le diamètre de  $(M, g)$ , pour tout  $t > 0$ ,

(i) Si le point  $x$  appartient à une composante connexe  $C$  de la partie fine

Notons  $l(C) = \inf\{l(y)/y \in C\}$ . Alors

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 l(C)^2 / 4t} \right) + \frac{(N_x(3d) - 1)}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-\varepsilon_1^2 / 4t} + \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2 / 4t} \right]$$

Si, de plus, le rayon d'injectivité  $i(x)$  de  $(M, g)$  au point  $x$  est inférieur à  $\varepsilon_1/4$ , on a

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 l(C)^2 / 4t} \right) + \frac{(N_x(3d) - 1)}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-R(i(x))^2 / 4t} + \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2 / 4t} \right]$$

où  $R(s) = \frac{\delta}{(4+\delta)H} \log \left( \frac{\delta}{2(4+\delta)} \cdot \frac{1}{Hs} \right)$ .

(ii) Si le point  $x$  appartient à la partie épaisse

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} + \frac{(N_x(3d) - 1)}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-\varepsilon_1^2 / 4t} + \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2 / 4t} \right]$$

Avant de démontrer ce théorème, nous faisons quelques remarques sur l'optimalité de ces estimations :

**Remarque 5.9.**

(i) Nous insistons sur le fait que cette majoration dépend beaucoup du diamètre de  $(M, g)$  ; en effet, si le diamètre est grand, les cylindres de la partie fine peuvent devenir très fins et, dans ce cas, le noyau de la chaleur "explose".

Par ailleurs, cette majoration dépend fortement du nombre  $N_x(3d)$  qui est difficile à majorer en fonction des invariants que nous nous sommes donnés au préalable ( $H$ ,  $\delta$  et  $d$ ) (en effet, une majoration uniforme de  $N_x(3d)$  donne en particulier une majoration uniforme du cardinal d'un système de générateurs du groupe fondamental). Il serait donc intéressant d'obtenir une majoration qui ne dépende plus de  $N_x(3d)$ , mais plutôt (par exemple) du volume de la variété  $M$ .

(ii) Notons que la majoration peut être rendue indépendante de  $x$  en remarquant que  $N_x(3d) \leq \inf\{N_y(5d)/y \in M\}$

(iii) Ces inégalités sont optimales en temps petit. En effet,

•  $\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}}$  est la valeur sur la diagonale du noyau de la chaleur  $k_{\mathbb{R}^m}$  de l'espace euclidien  $(\mathbb{R}^m, \text{can})$  (pour tout point source)

et

•  $\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 l(C)^2 / 4t} \right)$  est la valeur sur la diagonale du noyau de la chaleur  $k_{l(C)}$  du cylindre  $(\mathbb{R}/l(C).\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^{m-1} \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{m-1}$  de rayon d'injectivité  $\frac{l(C)}{2}$  (pour tout point source).

Si le point-source  $x$  appartient à  $C$ , le théorème 5.8 (i) fournit donc une majoration (sur la diagonale) de  $k_M(t, x, x)$  par la somme du noyau de la chaleur du cylindre  $k_{l(C)}$  de même rayon d'injectivité et de termes qui sont négligeables (quand  $t$  tend vers zéro) devant  $k_{l(C)}$ .

Si le point-source  $x$  appartient à la partie épaisse, le point (ii) du théorème 5.8 fournit une majoration (sur la diagonale) de  $k_M(t, x, x)$  par la somme du noyau de la chaleur  $k_{\mathbb{R}^m}$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^m$  et de termes qui sont négligeables devant  $k_{\mathbb{R}^m}$  quand  $t$  tend vers zéro.

Vérifions que, dans ces deux cas, les termes supplémentaires sont négligeables par rapport au noyau de la chaleur de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^m$  et au noyau de la chaleur du cylindre de même rayon d'injectivité.

Commençons par remarquer que

$$(4\pi t)^{m/2} k_{\mathbb{R}^m}(t, x, x) = 1$$

et

$$(4\pi t)^{m/2} k_{l(C)}(t, x, x) \geq 1 + 2e^{-l(C)^2/4t}$$

Par ailleurs, il est clair que  $(N_x(3d) - 1) e^{-\varepsilon_1^2/4t}$  est négligeable devant 1 et  $2e^{-l(C)^2/4t}$  quand  $t$  tend vers zéro (car  $\varepsilon_1 > l(C)$  quand on se place dans la partie mince), donc ce dernier terme est également négligeable devant  $k_{\mathbb{R}^m}(t, x, x)$  et  $k_{l(C)}(t, x, x)$ .

Pour vérifier qu'il en est de même pour

$$(N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t}, \text{ nous allons établir le}$$

**Lemme 5.10.**

Il existe  $t_0 > 0$  tel que, pour tout  $0 < t \leq t_0$ ,

$$(N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t} \leq 2 (N_x(3d))^2 e^{-9d^2/4t}$$

*Preuve du lemme 5.10.*

Commençons par remarquer que, pour tout  $t \in ]0, \frac{4 \log(N_x(3d))}{3d^2}[$ ,

$$\begin{aligned} & (N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t} \\ & \leq (N_x(3d))^2 \sum_{n \geq 0} (N_x(3d))^n e^{-6nd^2/4t} e^{-9d^2/4t} \\ & \leq (N_x(3d))^2 e^{-9d^2/4t} \frac{1}{1 - N_x(3d)e^{-3d^2/2t}} \end{aligned}$$

Comme  $N_x(3d)e^{-3d^2/2t}$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers zéro, il existe  $t_0 \in ]0, \frac{4 \log(N_x(3d))}{3D^2}[$  tel que, dès que  $t \leq t_0$ ,

$$N_x(3d)e^{-3d^2/2t} \leq \frac{1}{2}$$

Il en découle que, pour tout  $t \leq t_0$ ,

$$(N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t} \leq 2 (N_x(3d))^2 e^{-9d^2/4t}$$

ce qui démontre le lemme 5.10. □

Comme  $3d > l(C)$ , le lemme 5.10 implique que le terme  $(N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t}$  est négligeable devant 1 et  $2e^{-l(C)^2/4t}$ , donc devant  $k_{\mathbb{R}^m}(t, x, x)$  et  $k_{l(C)}(t, x, x)$ . Ceci prouve que les majorations proposées dans le théorème 5.8 sont optimales en petit temps.

*Preuve du théorème 5.8.*

Toutes les notations utilisées dans cette preuve et quelques rappels sur la version du lemme de Margulis de [BCG1] utilisée ici sont donnés dans l'introduction de la section 5.2.

Soit  $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$  le revêtement universel de  $(M, g)$ .

Fixons deux points  $x$  et  $y$  de  $M$ . Comme la variété  $M$  est compacte, il vient que

$$k_M(t, x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k_{\widetilde{M}}(t, \widetilde{x}, \gamma \cdot \widetilde{y})$$

où  $\widetilde{x}$  et  $\widetilde{y}$  sont deux antécédents fixés respectifs de  $x$  et  $y$  (voir [Bo] pour un résultat bien plus général). En appliquant à  $k_{\widetilde{M}}$  la majoration du noyau de la chaleur de A. Debiard, B. Gaveau et E. Mazet (voir [DGM]), (qui est valable en particulier pour n'importe quels points du revêtement universel en courbure négative ou nulle puisque le cut-locus y est vide), on obtient le

**Fait 5.11.** (corollaire de [DGM])

Si  $\widetilde{M}$  est une variété riemannienne simplement connexe de dimension  $m$  et de courbure sectionnelle négative ou nulle, pour tout  $t > 0$  et tous les points  $\widetilde{x}$  et  $\widetilde{y}$  on a

$$k_{\widetilde{M}}(t, \widetilde{x}, \widetilde{y}) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} e^{-d_{\widetilde{M}}^2(\widetilde{x}, \widetilde{y})/4t}$$

Il en découle

$$\begin{aligned} k_M(t, x, y) &= k_M(t, y, x) \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d_{\widetilde{M}}^2(\widetilde{y}, \gamma \cdot \widetilde{x})/4t} \end{aligned}$$

Soit  $C$  une composante connexe de  $Y_{\varepsilon_1} = \{y \in M / l(y) < \varepsilon_1\}$ .

Fixons une composante  $\widetilde{C}$  de  $\pi^{-1}(C)$  et notons  $\Gamma_C$  l'ensemble des éléments de  $\Gamma$  qui laissent stable cette composante connexe. Nous avons vu, dans l'annexe E, qu'il existe une géodésique périodique  $c_0$  entièrement incluse dans  $C$ , d'origine  $x_0$  et de période  $L_0$  telle que

$$L_0 = \inf_{x \in C} l(x) = l(C)$$

Posons  $x_0 = c_0(0)$  et fixons un relevé  $\widetilde{x}_0$  de  $x_0$  dans la composante connexe choisie  $\widetilde{C}$  de  $\pi^{-1}(C)$  et notons  $\widetilde{c}_0(0)$  le relevé de  $c_0$  d'origine  $\widetilde{x}_0$ . Notons  $\gamma_0$  l'élément  $\Phi_{\widetilde{x}_0}(c_0|_{[0, L_0]})$  de  $\Gamma_C$  (cet élément est indépendant du choix de  $\widetilde{x}_0$  dans  $\pi^{-1}(x_0) \cap C$ , voir le corollaire 3.4 (iv) de [BCG1]). Nous avons vu dans l'annexe E (théorème E.4 et corollaires E.10 et E.11) que

- (i)  $\Gamma_C = \{\gamma_0^k / k \in \mathbb{Z}\}$ ,
- (ii) pour tout point  $\widetilde{y}$  de  $\widetilde{C}$ ,  $\Gamma_{\varepsilon_1}(\widetilde{y}) \subset \Gamma_C$ , donc  $\Gamma \setminus \Gamma_C$  ne contient aucun élément de longueur inférieure à  $\varepsilon_1$  sur  $\widetilde{C}$ ,
- (iii) pour tout point  $y$  de  $C$  tel que  $inj(y) < \frac{\varepsilon_1}{4}$  et pour tout point  $\widetilde{y}$  de  $\widetilde{C} \cap \pi^{-1}(y)$ , on a

$$\Gamma_{R[i(y)]}(\widetilde{y}) \subset \Gamma_C$$

Il s'ensuit que  $\Gamma \setminus \Gamma_C$  ne contient aucun élément de longueur inférieure à  $R[i(y)]$  sur  $\widetilde{C}$ .

Si  $x$  est un point quelconque de  $C$ , choisissons le relevé  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{C} \cap \pi^{-1}(x)$ , et notons  $B_{\tilde{x}}(R)$  le sous-ensemble de  $\Gamma$  formé des éléments  $\gamma$  tels que  $d_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) < R$ . La propriété (i) permet d'établir la majoration

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{m/2} k_M(t, x, x) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-d_{\tilde{M}}^2(\tilde{x}, \gamma_0^k.\tilde{x})/4t} \\ &\quad + \sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}}(3d) \setminus \Gamma_C} e^{-d_{\tilde{M}}^2(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})/4t} \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_{\tilde{M}}^2(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})/4t} \end{aligned}$$

La propriété (ii) (respectivement (iii)) prouve que  $B_{\tilde{x}}(3d) \setminus \Gamma_C$  est inclus dans  $B_{\tilde{x}}(3d) \setminus B_{\tilde{x}}(\varepsilon_1)$  (respectivement dans  $B_{\tilde{x}}(3d) \setminus B_{\tilde{x}}(R[i(x)])$ ). Ceci et le fait (prouvé dans la preuve du lemme E.8) que

$$d_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \gamma_0^k.\tilde{x}) \geq |k|.L_0 = |k|.l(C)$$

donne les deux inégalités

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{m/2} k_M(t, x, x) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2 l^2(C)/4t} \\ &\quad + \left( \tilde{N}_{\tilde{x}}(3d) - 1 \right) e^{-\varepsilon_1^2/4t} \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_{\tilde{M}}^2(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})/4t}, \end{aligned}$$

valable pour tout point  $x$  de  $C$  et

$$\begin{aligned} (4\pi t)^{m/2} k_M(t, x, x) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-k^2 l^2(C)/4t} \\ &\quad + \left( \tilde{N}_{\tilde{x}}(3d) - 1 \right) e^{-R[i(x)]^2/4t} \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_{\tilde{M}}^2(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})/4t}, \end{aligned}$$

valable pour tout point  $x$  de  $C$  tel que le rayon d'injectivité  $i(x)$  de  $M$  au point  $x$  vérifie  $i(x) < \frac{\varepsilon_1}{4}$ .

En revanche, en tout point  $x$  de la partie épaisse et pour tout point  $\tilde{x}$  de  $\pi^{-1}(x)$ , tous les éléments  $\gamma$  de  $\Gamma \setminus \{id\}$  vérifient

$$d_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) \geq \varepsilon_1$$

et on obtient, dans ce cas, l'inégalité

$$\begin{aligned}
 (4\pi t)^{m/2} k_M(t, x, x) &\leq 1 + \sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}}(3d) \setminus B_{\tilde{x}}(\varepsilon_1)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} \\
 &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} \\
 &\leq 1 + \left( \tilde{N}_{\tilde{x}}(3d) - 1 \right) e^{-\varepsilon_1^2/4t} \\
 &\quad + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t}
 \end{aligned}$$

Pour achever la preuve du théorème 5.8, il suffit donc de prouver le

**Lemme 5.12.**

Pour tout  $t > 0$  et tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{M}$ ,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} \leq (N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t}$$

*Preuve du lemme 5.12.*

Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} &= \sum_{n \geq 3} \sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}}((n+1)d) \setminus B_{\tilde{x}}(nd)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} \\
 &\leq \sum_{n \geq 3} e^{-n^2 d^2/4t} [N_x((n+1)d) - N_x(nd)]
 \end{aligned}$$

Cependant, la proposition 4.12 assure que  $N_x((n+1)d) \leq N_x(nd)N_x(3d)$ . Ainsi,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} \leq (N_x(3d) - 1) \sum_{n=3}^{+\infty} N_x(nd) e^{-n^2 d^2/4t}$$

De plus, la proposition 4.10 implique que, pour tout  $n \geq 3$ ,  $N_x(nd) \leq N_x(3d)^{n-2}$  donc finalement,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}}(3d)} e^{-d_M^2(\tilde{x}, \gamma, \tilde{x})/4t} \leq (N_x(3d) - 1) \sum_{n=3}^{+\infty} N_x(3d)^{n-2} e^{-n^2 d^2/4t}$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.12. □

Ceci achève la preuve du théorème 5.8. □

### 5.2.2 Majoration du noyau de la chaleur en dehors de la diagonale

**Théorème 5.13.** Soit  $\delta$  et  $H$  deux réels strictement positifs. Posons

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H} \text{ et } \varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4+\delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}Hd}.$$

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $m$ , de diamètre  $d$ , de courbure sectionnelle  $\sigma \leq 0$ , d'entropie volumique  $\text{Ent}(M, g) \leq H$ .

Si le groupe fondamental de  $M$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle strictement négative, alors pour tout  $x \in M$ , tout  $y \in M$  et tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} k_M(t, x, y) &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-d_M^2(x,y)/4t} + K_0(t, x, y) \right] \\ &\quad + \frac{N_x(3d)}{(4\pi t)^{m/2}} \min\{e^{-d_M^2(x,y)/4t}, e^{-\varepsilon_1^2/16t}\} \\ &\quad + \frac{(N_x(3d) - 1)}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{n \geq 2} N_x(3d)^{n-1} e^{-n^2 d^2/4t} \end{aligned}$$

où

- $K_0(t, x, y) = 0$  si  $x$  appartient à la partie épaisse,
- $K_0(t, x, y) = 0$  si  $x$  appartient à la partie mince et si  $d_M(x, y) \geq \frac{\varepsilon_1}{2}$ ,
- $K_0(t, x, y) = \frac{2\varepsilon_1}{l(C)} \cdot e^{-d_M^2(x,y)/4t}$  si  $x$  appartient à la composante connexe  $C$  de la partie mince et si  $\frac{\varepsilon_0}{2} \leq d_M(x, y) < \frac{\varepsilon_1}{2}$ ,
- $K_0(t, x, y) = \sum_{n \geq 1} e^{-n^2 l(C)^2/4t} + e^{-(n-\frac{1}{2})^2 l(C)^2/4t}$  si  $x$  appartient à la composante connexe  $C$  de la partie mince et si  $d_M(x, y) < \frac{\varepsilon_0}{2}$  où  $l(C) = \inf\{l(y) / y \in M\}$ .

*Preuve du théorème 5.13.*

Comme précédemment, nous avons, pour tout  $(x, y) \in M \times M$ , pour tout antécédent  $\tilde{x}$  de  $x$  et pour tout antécédent  $\tilde{y}$  de  $y$ , pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} k_M(t, x, y) &= k_M(t, y, x) \\ &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t} \end{aligned}$$

Fixons un antécédent quelconque  $\tilde{y}$  de  $y$ , choisissons l'antécédent  $\tilde{x}$  de  $x$  le plus proche de  $\tilde{y}$  et notons  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(R)$  l'ensemble des éléments  $\gamma$  de  $\Gamma$  tels que  $d_M(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x}) < R$ .

Rappelons que  $N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(R)$  désigne le nombre d'éléments de  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(R)$  (voir le

chapitre 4).

Comme  $d_{\tilde{M}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_M(x, y)$ , on obtient, pour cet antécédent  $\tilde{x}$  de  $x$ , la majoration

$$(4\pi t)^{\frac{m}{2}} \left( k_M(t, x, y) - e^{-d_M^2(x, y)/4t} \right) \leq (I) + (II) + (III)$$

où

- (I) =  $\sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\varepsilon_1/2) \setminus \{id\}} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t}$
- (II) =  $\sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d) \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\varepsilon_1/2)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t}$
- (III) =  $\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t}$

• **Majoration de (III) :**

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t} \leq \sum_{n \geq 2} (N_{\tilde{y}, \tilde{x}}((n+1)d) - N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(nd)) e^{-n^2 d^2 / 4t}$$

La proposition 4.12 assure alors que, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$N_{\tilde{y}, \tilde{x}}((n+1)d) \leq N_{\tilde{x}}(3d) N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(nd)$$

Ainsi,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t} \leq (N_{\tilde{x}}(3d) - 1) \sum_{n \geq 2} N_{y, x}(nd) e^{-n^2 d^2 / 4t}$$

Finalement, comme  $N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(nd) \leq N_{\tilde{x}}(3d)^{n-1}$  pour tout  $n \geq 3$  d'après la proposition 4.12,

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t} &\leq N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(2d) (N_{\tilde{x}}(3d) - 1) e^{-d^2/t} \\ &+ (N_x(3d) - 1) \sum_{n \geq 3} e^{-n^2 d^2 / 4t} N_{\tilde{x}}(3d)^{n-1} \\ &\leq (N_{\tilde{x}}(3d) - 1) \sum_{n \geq 2} N_{\tilde{x}}(3d)^{n-1} e^{-n^2 d^2 / 4t} \end{aligned}$$

• **Majoration de (II) :**

Pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  qui n'appartient pas à  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\varepsilon_1/2)$ , on a

$$d_{\tilde{M}}(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x}) \geq \max\{d_M(x, y), \frac{\varepsilon_1}{2}\}$$

d'où

$$\sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d) \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\varepsilon_1/2)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma.\tilde{x})/4t} \leq N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(2d) \min\{e^{-d_M^2(x, y)/4t}, e^{-\varepsilon_1^2/16t}\}$$

Or, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} N_{\tilde{y}, \tilde{x}}(2d) &\leq N_{\tilde{x}}(2d + d_M(\tilde{y}, \tilde{x})) \\ &\leq N_{\tilde{x}}(3d) \end{aligned}$$

Finalement, comme  $N_{\tilde{x}}(R) = N_x(R)$  (voir le sous-chapitre "notations" qui précède le théorème 5.6).

$$(II) \leq N_x(3d) \min\{e^{-d_M^2(x, y)/4t}, e^{-\varepsilon_1^2/16t}\}$$

• **Majoration de (I) :**

• Si le point  $x$  appartient à la partie épaisse :

L'ensemble  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\frac{\varepsilon_1}{2}) \setminus \{id\}$  est vide car, si  $\gamma$  est différent de  $id$ , puisque  $\tilde{x}$  a été choisi comme le relevé de  $x$  le plus proche de  $\tilde{y}$ ,

$$2d_M(\tilde{y}, \gamma.\tilde{x}) \geq d_M(\tilde{y}, \gamma.\tilde{x}) + d_M(\tilde{y}, \tilde{x}) \geq d_M(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) \geq \varepsilon_1$$

Il en découle que  $(I) = 0$ .

• Si  $x$  appartient à la partie mince et si  $d_M(x, y) \geq \frac{\varepsilon_1}{2}$  :

Comme  $d_M(\tilde{y}, \gamma.\tilde{x}) \geq d_M(x, y)$ , l'ensemble  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\frac{\varepsilon_1}{2})$  est vide et  $(I) = 0$ .

• Si  $x$  appartient à une composante connexe  $C$  de la partie mince et si  $\frac{\varepsilon_0}{2} \leq d_M(x, y) \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$  :

Comme  $\tilde{x}$  est le relevé de  $x$  le plus proche de  $\tilde{y}$ , on a

$$d_M(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_M(x, y) \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

donc, pour tout élément  $\gamma$  de  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\frac{\varepsilon_1}{2}) \setminus \{id\}$ , on a

$$d_M(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) \leq d_M(\tilde{y}, \gamma.\tilde{x}) + d_M(\tilde{y}, \tilde{x}) \leq \varepsilon_1$$

Fixons une composante connexe  $\tilde{C}$  de  $\pi^{-1}(C)$  et considérons le sous-groupe  $\Gamma_C$  qui fixe  $\tilde{C}$ . Si  $\gamma$  est un élément de  $B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\frac{\varepsilon_1}{2}) \setminus \{id\}$ , il s'ensuit que  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_{\varepsilon_1}(\tilde{x})$ , donc à  $(\Gamma_C \setminus \{id\}) \cap B_{\tilde{x}}(\varepsilon_1)$  et  $\gamma$  est de la forme  $\tau^k$  où  $\tau$  est le générateur de  $\Gamma_C$  et  $k$  est un entier relatif non nul (voir la proposition E.5). Dans ce cas, on a donc

$$(I) \leq e^{-d_M^2(y, x)/4t} \cdot \#\{p \in \mathbb{Z}^* / d_M(\tilde{x}, \tau^p.\tilde{x}) < \varepsilon_1\}$$

car  $d_M(\tilde{y}, \gamma.\tilde{x}) \geq d_M(x, y)$  pour tout  $\gamma$ . Nous avons déjà vu dans la preuve du lemme E.8 qu'en courbure négative ou nulle,

$$d_M(\tilde{x}, \tau^p.\tilde{x}) \geq |p|.l(C)$$

donc

$$\#\{p \in \mathbb{Z}^* / d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}, \tau^p.\widetilde{x}) < \varepsilon_1\} \leq \frac{2\varepsilon_1}{l(C)}$$

et, finalement,

$$(I) \leq \frac{2\varepsilon_1}{l(C)} \cdot e^{-d_M^2(x,y)/4t}$$

• Si  $x$  appartient à la partie mince et si  $d_M(x, y) < \frac{\varepsilon_0}{2}$  :

le raisonnement fait dans le cas précédent tient toujours, à savoir que tout élément  $\gamma$  de  $B_{\widetilde{x}, \widetilde{y}}(\frac{\varepsilon_1}{2}) \setminus \{id\}$  est de la forme  $\tau^k$ , où  $\tau$  est le générateur de  $\Gamma_C$  et  $k$  est un entier relatif non nul.

Notons  $\widetilde{c}$  un axe géodésique  $\tau$ -invariant (qui existe d'après le point (i) du lemme E.6) et (comme dans la preuve du lemme E.8)  $\widetilde{x}^\perp$  et  $\widetilde{y}^\perp$  les projections géodésiques orthogonales de  $\widetilde{x}$  et  $\widetilde{y}$  sur  $\widetilde{c}$  dans  $\widetilde{M}$  : comme  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  est simplement connexe et de courbure négative ou nulle, nous avons vu (dans la preuve du lemme E.8) que ces projections sont bien définies et vérifient

$$d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}^\perp, \widetilde{y}^\perp) \leq d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et

$$d_{\widetilde{M}}(\widetilde{y}, \tau^k.\widetilde{x}) \geq d_{\widetilde{M}}(\widetilde{y}^\perp, (\tau^k.\widetilde{x})^\perp) = d_{\widetilde{M}}(\widetilde{y}^\perp, \tau^k(\widetilde{x}^\perp))$$

Choisissons l'origine de  $\widetilde{c}$  en  $\widetilde{x}^\perp$  et changeons, si besoin est, l'orientation de  $\widetilde{c}$  pour que  $\widetilde{y}^\perp = \widetilde{c}(a)$ , avec

$$a = d_{\widetilde{M}}(\widetilde{x}^\perp, \widetilde{y}^\perp) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Comme le théorème E.2 assure que  $l(C) \geq \varepsilon_0$ , on a

$$a < \frac{l(C)}{2}$$

Comme  $\tau^k(\widetilde{x}^\perp) = \widetilde{c}(k.l(C))$ , on obtient que

$$d_{\widetilde{M}}(\widetilde{y}, \tau^k.\widetilde{x}) \geq |k.l(C) - a|$$

et

$$\begin{aligned} (I) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} e^{-d_{\widetilde{M}}^2(\widetilde{y}, \tau^k.\widetilde{x})/4t} \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-(kl(C)-a)^2/4t} + e^{-(kl(C)+a)^2/4t} \end{aligned}$$

et finalement

$$(I) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-(k-\frac{1}{2})^2 l(C)^2/4t} + e^{-k^2 l(C)^2/4t}$$

ce qui achève la preuve du théorème 5.13 □

### 5.3 Majoration universelle sur les boules de $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ et précompacité

Notons  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  l'ensemble des classes d'isométries des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$ , dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle, dont le diamètre et l'entropie sont respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro. Ainsi noté, cet ensemble sera toujours considéré comme muni de la topologie induite par la distance de Gromov-Hausdorff.

Dans la majoration du noyau de la chaleur optimale en petit temps présentée dans la partie précédente, on remarque que tous les termes sont majorés en fonction des majorants des invariants préalablement fixés, sauf le nombre  $N_x(3d)$  de classes d'homotopie des lacets de point-base  $x$  et de longueur inférieure à  $3d$ . Or, nous avons établi dans le chapitre 3 que, si l'on considère une boule  $\mathcal{B}$  de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  dans  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  (où  $\varepsilon_0$  est explicite et ne dépend que de  $\delta$ ,  $H$  et  $D$ ), ce cardinal est uniformément majoré sur  $\mathcal{B}$ , ce qui nous permet d'obtenir une majoration universelle du noyau de la chaleur sur toute boule de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ , valable sur toutes les variétés riemanniennes compactes (de dimension  $m$  fixée) dans n'importe quelle famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ . Ceci implique alors que, si  $\mathcal{F}$  est une famille précompacte de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  pour la distance de Gromov-Hausdorff, les noyaux de l'opérateur de la chaleur de toutes les variétés de  $\mathcal{F}$  sont majorés par une même fonction de  $t$ , qui est optimale en temps petit dans le sens précisé dans la partie précédente. Si l'on suppose de plus que le volume des variétés de  $\mathcal{F}$  est uniformément majoré, il découle du théorème 2.3 de [KK2] que  $\mathcal{F}$  est également précompacte pour la distance spectrale.

### Majoration universelle du noyau de la chaleur sur la diagonale

Nous donnons ici une majoration du noyau de la chaleur (sur la diagonale), uniforme sur toute boule (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  :

#### **Théorème 5.14.**

Fixons trois réels strictement positifs  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et notons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4+\delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD} \text{ et } \varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}.$$

Notons  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle, dont l'entropie est majorée par  $H$ , dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.

Pour toute variété fixée  $(M_0, g_0)$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ , posons

$$A = \sup_{x \in M_0} N_x(4D + \varepsilon_0) \leq \inf_{x \in M_0} N_x(5D + \varepsilon_0)$$

Considérons la boule  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isométries de variétés de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  qui sont à distance de Gromov-Hausdorff de  $(M_0, g_0)$  inférieure à  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ .

Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque de  $\mathcal{B}$  et si  $x$  est un point quelconque de  $M$ , alors, pour tout  $t > 0$ ,

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \varepsilon_0^2 / 4t} \right] + \frac{A-1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-\varepsilon_1^2 / 4t} + \sum_{n=1}^{+\infty} A^{n-2} e^{-n^2 D^2 / 4t} \right]$$

#### **Remarque 5.15.**

Nous obtenons ici une majoration uniforme du noyau de l'opérateur de la chaleur uniquement en fonction de bornes sur les invariants que nous nous sommes fixés au préalable, sans faire d'hypothèse sur la courbure de Ricci. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de supposer ici que le groupe fondamental de  $M$  s'injecte dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle strictement négative (comme c'est le cas dans le théorème 5.8), puisque nous supposons que le diamètre est majoré et, dans ce cas, le lemme de Margulis de [BCG] assure que les cylindres de la partie fine ne peuvent pas être fins.

*Preuve du théorème 5.14.*

Commençons par préciser que, comme le diamètre est majoré, le lemme de Margulis de [BCG] implique que la systole de  $M$  est minorée par  $\varepsilon_0$ . Si  $\tilde{x}$  est

un antécédent fixé du point  $x$  sur le revêtement universel de  $M$ , l'ensemble des antécédents du point  $x$  dans la boule de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $\varepsilon_0$  de  $\widetilde{M}$  est réduit au point  $\tilde{x}$ . En mimant la preuve du théorème 5.8, on montre donc que

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} + \frac{N_x(3D) - 1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-\varepsilon_0^2/4t} + \sum_{n=1}^{+\infty} N_x(3D)^{n-2} e^{-n^2 D^2/4t} \right]$$

Pour montrer le théorème 5.14, il suffit donc de vérifier que  $N_x(3D)$  est inférieur à  $A$  et d'appliquer ensuite le théorème 5.8. Or, si  $(M, g)$  est une variété quelconque de  $\mathcal{B}$ ,

$$d_{GH}((M, g), (M_0, g_0)) := \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$$

On peut donc utiliser l'inégalité de gauche du point (i) de la proposition 3.59 en posant

$$R = 3D \left( 1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon} \right)^{-1} + \frac{\varepsilon_0}{13}$$

On obtient ainsi que

$$N_x(3D) \leq \sup_{x \in M_0} N_x(4D + \varepsilon_0),$$

ce qui termine la preuve du théorème 5.14. □

**Corollaire 5.16.**

Soient cinq réels strictement positifs fixés  $m, \delta, H, D$  et  $V$ .  
 Considérons la famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  des classes d'isométrie des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle, dont l'entropie, le diamètre et le volume sont respectivement majorés par  $H, D$  et  $V$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.

Il existe une constante  $C > 0$  telle que, si  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  et si  $x$  est un point quelconque de  $M$ , alors, pour tout  $t > 0$ ,

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \varepsilon_0^2/4t} \right] + \frac{C - 1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ e^{-\varepsilon_1^2/4t} + \sum_{n=1}^{+\infty} C^{n-2} e^{-n^2 D^2/4t} \right]$$

**Remarque 5.17.**

La conclusion du corollaire 5.16 reste valable sur toute famille précompacte dans  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  pour la distance de Gromov-Hausdorff.

*Preuve du corollaire 5.16.*

Il est prouvé dans la proposition 4.1 de [BCG1] que la famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff : il est donc possible de recouvrir cette famille par un nombre fini de boules  $(\mathcal{B}_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$  de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ .

Comme le théorème 5.14 implique que, pour chacune de ces boules  $\mathcal{B}_i$ , il existe une constante  $A_i > 0$  telle que, si la variété  $(M, g)$  appartient à  $\mathcal{B}_i$ , pour tout  $t > 0$  et tout point  $x$  de  $M$ ,

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \varepsilon_0^2 / 4t} \right. \\ \left. + (A_i - 1) e^{-\varepsilon_1^2 / 4t} + (A_i - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} A_i^{n-1} e^{-n^2 D^2 / 4t} \right]$$

Il existe alors une constante  $C = \max\{A_i\}_{i \in \{1, \dots, N\}} > 0$  telle que, pour toute variété de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$ , on ait

$$k_M(t, x, x) \leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \varepsilon_0^2 / 4t} \right. \\ \left. + (C - 1) e^{-\varepsilon_1^2 / 4t} + (C - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} C^{n-2} e^{-n^2 D^2 / 4t} \right]$$

□

### Majoration universelle du noyau de la chaleur en dehors de la diagonale

En majorant uniformément  $N_x(3D)$  de la même manière que dans la preuve du théorème 5.14, on obtient

**Corollaire 5.18.** *Soit  $\delta, H, D$  trois réels strictement positifs et  $m$  un entier. Posons  $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4+\delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$ .*

*Notons  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  l'ensemble des classes d'isométrie des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle, dont l'entropie est majorée par  $H$ , dont le diamètre est majoré par  $D$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.*

*Pour toute variété fixée  $(M_0, g_0)$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ , posons*

$$A = \sup_{x \in M_0} N_x(4D + \varepsilon_0) \leq \inf_{x \in M_0} N_x(5D + \varepsilon_0)$$

*Considérons la boule  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$ . Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque de  $\mathcal{B}$  et si  $x$  est un point quelconque de  $M$ , alors, pour tout  $t > 0$ ,*

$$\begin{aligned} k_M(t, x, y) \leq & \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} e^{-d_M^2(x,y)/4t} \\ & + \frac{A}{(4\pi t)^{m/2}} \min\{e^{-d_M^2(x,y)/4t}, e^{-\varepsilon_0^2/16t}\} \\ & + \frac{(A-1)}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{n \geq 2} A^{n-1} e^{-n^2 D^2/4t} \end{aligned}$$

*Preuve du corollaire 5.18.* Ce corollaire découle du fait que, sur la famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ , la systole est minorée par  $\varepsilon_0$ . Comme dans la preuve du théorème 5.13, on écrit

$$(4\pi t)^{\frac{m}{2}} \left( k_M(t, x, y) - e^{-d_M^2(x,y)/4t} \right) \leq (I') + (II') + (III)$$

où

- $(I') = \sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\varepsilon_0/2) \setminus \{id\}} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t}$
- $(II') = \sum_{\gamma \in B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d) \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(\varepsilon_0/2)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t}$
- $(III) = \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus B_{\tilde{x}, \tilde{y}}(2d)} e^{-d_M^2(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{x})/4t}$

Les termes  $(II')$  et  $(III)$  se majorent comme dans la preuve du théorème 5.13. Le terme  $(I)$  est nul (comme la systole est minorée, il suffit de mimer

la démonstration de la majoration de (I) dans le cas où  $x$  appartient à la partie épaisse dans la preuve du théorème 5.13). Ceci termine la preuve.  $\square$

En utilisant, comme dans la preuve du corollaire 5.16, le fait que la famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir [BCG1], proposition 4.1), on obtient alors le

**Corollaire 5.19.** *Soit cinq réels strictement positifs fixés  $m, \delta, H, D$  et  $V$ . Considérons la famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  des classes d'isométrie des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle, dont l'entropie, le diamètre et le volume sont respectivement majorés par  $H, D$  et  $V$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro.*

*Il existe une constante  $E > 0$  telle que, si  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  et si  $x$  et  $y$  sont deux points quelconques de  $M$ , alors, pour tout  $t > 0$ ,*

$$\begin{aligned}
 k_M(t, x, y) &\leq \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} e^{-d_M^2(x,y)/4t} \\
 &\quad + \frac{E}{(4\pi t)^{m/2}} \min\{e^{-d_M^2(x,y)/4t}, e^{-\varepsilon_0^2/16t}\} \\
 &\quad + \frac{(E-1)}{(4\pi t)^{m/2}} \sum_{n \geq 2} E^{n-1} e^{-n^2 D^2/4t}
 \end{aligned}$$

### Précompacité pour la distance spectrale

La distance spectrale est une distance sur la famille des classes d'isométrie des variétés riemanniennes compactes qui a été introduite dans [BBG1]. Nous avons rappelé sa définition dans la définition F.2 et quelques résultats de A. Kasué et H. Kumura (qui ont étudié la précompacité de certaines familles de variétés, ainsi que leur compactifié pour la distance spectrale) sont disponibles dans l'annexe F.

**Corollaire 5.20.**

*Fixons cinq réels strictement positifs  $m, \delta, H, D$  et  $V$ .*

*Considérons la famille  $\mathcal{F}_{m,\delta,H,D,V}^0$  des classes d'isométrie des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  de courbure négative ou nulle, dont le diamètre, l'entropie et le volume sont uniformément majorés par  $D, H$  et  $V$  et dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien et de centre réduit à zéro. La famille  $\mathcal{F}_{m,\delta,H,D,V}^0$  est précompacte pour la distance spectrale (voir la définition F.2).*

**Remarque 5.21.**

(i) Notons que G. Besson, G. Courtois et S. Gallot ont déjà obtenu la précompacité de cette famille de variétés pour la distance de Gromov-Hausdorff avec des hypothèses plus faibles, puisqu'ils remplacent l'hypothèse "courbure sectionnelle négative ou nulle" par l'hypothèse plus faible "minoration du rayon de contractibilité du revêtement universel" (voir [BCG1], proposition 4.1). Cependant, la précompacité pour la distance spectrale donne plus d'informations sur l'espace-limite. En particulier, on obtient des résultats sur la convergence du spectre, sur l'existence d'un noyau de la chaleur sur l'espace de longueur limite ... (voir l'annexe F).

(ii) La conclusion du corollaire 5.20 reste valable sur n'importe quelle famille de variétés précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff dans  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ .

(iii) A. Kasué a montré, sous hypothèse de courbure de Ricci minorée, que la précompacité d'une famille  $\mathcal{F}$  pour la distance spectrale implique la précompacité de la famille  $\mathcal{F}$  pour la distance de Gromov-Hausdorff (voir le point (ii) du théorème F.6). Nous montrons ici, sous d'autres hypothèses, la réciproque sur toute famille précompacte  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$  pour la distance de Gromov-Hausdorff.

*Preuve du corollaire 5.20.*

Fixons une famille  $\mathcal{F}$  de classes d'isométrie de variétés riemanniennes compactes  $(M, g)$  qui vérifie la condition suivante : il existe deux constantes strictement positives  $C$  et  $\alpha$  telles que, pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  qui appartient à  $\mathcal{F}$ , tout  $t \in ]0, 1]$  et tout point-source  $x$  sur  $M$ ,

$$Vol(M, g) k_M(t, x, x) \leq \frac{C}{t^\alpha}$$

(en fait, si  $\mu_g$  est la mesure de probabilité  $\frac{1}{Vol(M,g)} dv_g$ , A. Kasué et H. Kumura font l'hypothèse équivalente  $p_M(t, x, x) \leq \frac{C}{t^\alpha}$ , où  $p_M(t, x, \cdot) \mu_g := k_M(t, x, \cdot) dv_g$  est la mesure de probabilité canoniquement associée au noyau de l'opérateur de la chaleur).

A. Kasué a montré dans [KK1] (voir l'annexe F, théorème F.3) que la famille  $\mathcal{F}$  est alors précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff, ainsi que pour la distance spectrale.

Par ailleurs, nous avons établi dans le corollaire 5.16 qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, si  $(M, g)$  est une variété riemannienne quelconque de  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  et si  $x$  est un point quelconque de  $M$ , alors, pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,

$$Vol(M, g) k_M(t, x, x) \leq \frac{V}{(4\pi t)^{m/2}} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \varepsilon_0^2 / 4} + (C - 1) e^{-\varepsilon_1^2 / 4} + (C - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} C^{n-2} e^{-n^2 D^2 / 4} \right]$$

La famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  vérifie alors l'hypothèse du théorème F.3 de [KK1]. La famille  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D,V}^0$  est alors précompacte pour la distance spectrale. Ceci termine la preuve du corollaire 5.20.  $\square$

**Corollaire 5.22.**

Soient  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  trois réels strictement positifs arbitraires. Posons

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} e^{-2\frac{(4+\delta)}{\delta}HD}$$

Notons  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \varepsilon)$  la boule de centre  $(M_0, g_0)$  et de rayon  $\varepsilon$  (pour la distance de Gromov-Hausdorff) de l'ensemble des variétés riemanniennes de dimension  $m$  qui appartiennent à  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$ , dont la courbure sectionnelle  $\sigma$  est majorée par  $-k^2$ .

Si  $(M_0^m, g_0)$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $m$  qui appartient à  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}$ , la boule  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \frac{\varepsilon_0}{13})$  est précompacte pour la distance spectrale.

*Preuve du corollaire 5.22.*

Nous avons vu dans le corollaire 3.65 que, pour toute variété  $(Y, g)$  qui appartient à  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \varepsilon)$  où  $0 < \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ ,

$$\text{Vol}(Y, g) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0 - 3\varepsilon}\right)^{-m} \left(\frac{H}{(m-1)k}\right)^m \text{Vol}(M_0, g_0)$$

Il est par ailleurs évident que, si la variété  $(Y, g)$  appartient à  $\mathcal{B}^k((M_0, g_0), \varepsilon)$ , alors  $(Y, g)$  appartient à  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ .

Le corollaire 5.22 découle donc du corollaire 5.20.  $\square$

## 5.4 Questions ouvertes

• **Question 1 :**

Pour établir la majoration de noyau de l'opérateur de la chaleur du théorème 5.8, nous avons besoin de la version du lemme de Margulis de [BCG1] (qui reste valable sans faire d'hypothèse sur la courbure de la variété considérée) et d'une majoration du noyau de la chaleur sur le revêtement universel (qui existe également en dessous du rayon d'injectivité si la courbure sectionnelle est majorée). On peut donc se demander s'il existe une généralisation de cette majoration lorsque l'on suppose que la courbure sectionnelle  $\sigma$  vérifie  $|\sigma| \leq k^2$ .

• **Question 2 :**

Pour établir une majoration uniforme du noyau de l'opérateur de la chaleur

sur  $\mathcal{M}_{m,\delta,H,D}^0$ , nous avons vu qu'il nous suffisait de majorer uniformément le nombre  $N_x(3D)$  (qui est le nombre d'éléments de l'orbite de n'importe quel antécédent  $\tilde{x}$  de  $x$  dans une boule de rayon  $3D$ ). Nous l'avons fait dans le cas où l'on suppose de plus que le volume est uniformément majoré, en utilisant le fait que cette famille est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff et qu'il est par ailleurs possible de majorer  $N_x(3D)$  uniformément sur les boules de rayon  $\frac{\varepsilon_0}{13}$  pour la distance de Gromov-Hausdorff.

On peut se demander s'il existe une famille  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de variétés riemanniennes compactes, dont le groupe fondamental est  $\delta$ -non-abélien, dont l'entropie et le diamètre sont uniformément majorés, et telles que le nombre  $N_{x_n}(3D)$  tende vers l'infini. Si la réponse est oui, qu'en est-il si l'on suppose de plus que la courbure de chaque variété est négative ou nulle et que leur groupe fondamental s'injecte dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative ?

• **Question 3 :**

Nous avons vu dans, l'annexe *F*, que A. Kasué et H. Kumura donnent une description très précise de la compactification pour la distance spectrale d'une famille de variétés riemanniennes de dimension  $m$  dont la courbure de Ricci est uniformément minorée et dont le volume et le diamètre sont uniformément majorés. Ils montrent en particulier que la convergence d'une suite pour la distance spectrale implique la convergence de cette suite pour la distance de Gromov-Hausdorff, dans le sens du point (ii) du théorème F.6. Il serait intéressant d'étudier la compactification pour la distance spectrale de la famille  $\mathcal{F}_{m,\delta,H,D,V}^0$ .

• **Question 4 :** Nous avons vu dans la proposition 3.56 qu'il est possible de construire un isomorphisme entre le groupe fondamental d'une variété riemannienne de  $\mathcal{M}_{\delta,H,D}$  et le groupe des transformations d'un revêtement (explicite)  $p_\alpha : G^\alpha \rightarrow G$  d'un graphe (explicitable) qui approche la variété. La méthode de majoration du noyau de l'opérateur de la chaleur présentée dans la preuve du théorème 5.8 permet-elle de calculer un majorant commun du noyau de la chaleur de la variété et du noyau de la chaleur du graphe si l'on connaît un majorant du noyau de la chaleur de  $G^\alpha$  ?



# Annexe A

## Espaces de longueur

Cette annexe est très inspirée du chapitre 2 de [BBI].

### Définition d'une structure de longueur

Une structure de longueur sur un espace topologique  $X$  consiste en la donnée d'une classe de chemins (c'est-à-dire d'applications continues d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  sur  $X$ ) dits admissibles et dont on peut mesurer la longueur. Plus précisément,

#### Définition A.1.

Une classe  $A$  de chemins sur l'espace topologique  $X$  est admissible si elle vérifie les propriétés naturelles suivantes :

(i)  $A$  est fermée par restriction : si  $I$  est un intervalle, si  $I'$  est un sous-intervalle de  $I$  et si  $\gamma : I \rightarrow X$  est un chemin appartenant à  $A$ , alors la restriction de  $\gamma$  à  $I'$  appartient également à  $A$ .

(ii)  $A$  est fermée par concaténation : si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est un chemin dont les restrictions aux intervalles  $[a, c]$  et  $[c, d]$  (où  $c$  appartient à  $[a, b]$ ) sont admissibles,  $\gamma$  est admissible.

(iii)  $A$  est fermée par reparamétrisation linéaire : si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est un chemin admissible et  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  est un homéomorphisme de la forme  $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ , la composition  $\gamma \circ \varphi$  est également un chemin admissible.

#### Définition A.2.

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une classe admissible de chemins sur  $X$ . Une application  $L : A \rightarrow \mathbb{R}^+$  est appelée longueur si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i)  $L$  est additive :  $L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$  pour tout  $c \in [a, b]$ .

(ii) La longueur d'une partie d'un chemin dépend continûment de la partie : si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est un chemin admissible de longueur finie, notons  $L(\gamma, t)$  la longueur de la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $[a, t]$ . Alors l'application  $L(\gamma, \cdot)$  est continue en  $t$ . En particulier,  $L(\gamma, a) = 0$ .

(iii) La longueur est invariante par reparamétrisation linéaire.

(iv) La longueur est compatible avec la topologie de  $X$  : pour un voisinage  $U_x$  d'un point  $x$ , on demande que

$$\inf\{L(\gamma)/\gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) \in X \setminus U_x\} > 0$$

### Définition d'un espace de longueur

Une fois que l'on a une structure de longueur  $(A, L)$  sur un espace topologique  $X$ , on peut lui associer une distance de la manière suivante : si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $X$ , on définit la distance de longueur entre  $x$  et  $y$  par

$$d_L(x, y) = \inf\{L(\gamma)/\gamma \in A, \gamma(a) = x \text{ et } \gamma(b) = y\}$$

### Définition A.3.

Un espace de longueur est un espace métrique connexe par arcs dont la distance est associée à une structure de longueur.

### Propriétés des espaces de longueurs

#### Remarque A.4.

Une conséquence immédiate de la définition A.3 est qu'un espace de longueur est nécessairement localement connexe par arcs.

#### Proposition A.5. ([Gr], théorème 1.10)

Si  $(X, d)$  est un espace de longueur complet et localement compact, toutes les boules fermées sont compactes.

### Structure de longueur induite par une distance

#### Définition A.6.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  un chemin continu sur  $X$ . Considérons une partition  $P$  de  $[a, b]$ , c'est-à-dire une collection finie de points  $\{y_0, \dots, y_N\}$  tels que  $a = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_N = b$ . Alors, le supremum

des sommes  $\sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(y_i), \gamma(y_{i+1}))$  est appelée longueur de  $\gamma$  par rapport à la distance  $d$  et est notée  $L_d(\gamma)$ .

Un chemin est dit rectifiable si cette longueur est finie.

#### Proposition A.7. ([BBI], paragraphe 2.3.2)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique connexe par arcs, notons  $\mathcal{R}$  l'ensemble des courbes continues et rectifiables (paramétrées par un intervalle de fermé de  $\mathbb{R}$ ) sur  $(X, d_X)$ . Le couple  $(\mathcal{R}, L_d)$  est une structure de longueur sur  $X$ .

En particulier, la définition d'un espace de longueur donnée dans le chapitre 1 (voir la définition 1.13) définit bien une structure de longueur au sens de la définition A.3.

## Annexe B

# Théorie des revêtements

Dans cette thèse, nous travaillons essentiellement avec des espaces de longueur, espaces en particulier connexes par arcs et localement connexes par arcs (comme nous l'avons précisé dans la remarque A.4). Dans les définitions qui suivent, nous ne considérerons donc que les espaces topologiques connexes par arcs et localement connexes par arcs.

Nous rappelons ici succinctement la notion de revêtement régulier d'un espace de longueur (nous ne ferons pas les preuves que l'on pourra trouver par exemple dans [BBI], [Go], [Sp]...). Remarquons tout de même que nous nous plaçons dans un cadre plus général que celui étudié dans les deux premiers ouvrages : nous ne supposons pas, en général, que les espaces topologiques considérés admettent un revêtement universel simplement connexe.

### B.1 Définition d'un revêtement topologique régulier

#### Définition B.1.

*Soit  $X$  un espace topologique séparé connexe par arcs et localement connexe par arcs. Un revêtement (topologique) de  $X$  consiste en la donnée d'un espace  $Y$  et d'une application continue  $p : Y \rightarrow X$  tels que tout point  $x$  de  $X$  possède un voisinage ouvert  $U$  (connexe par arcs) tel que la restriction de  $p$  à chaque composante connexe de  $p^{-1}(U)$  soit un homéomorphisme sur  $U$ . L'application  $p$  est appelée projection de revêtement.*

#### Définition B.2.

*Soit  $X$  un espace topologique. Le groupe fondamental de  $X$  pointé en  $x$  est l'ensemble des classes d'homotopie des lacets de  $X$  basés en  $x$ . Il est noté  $\pi_1(X, x)$ .*

Remarquons que, si  $x$  et  $y$  sont deux points quelconques de  $X$ , les groupes fondamentaux  $\pi_1(X, x)$  et  $\pi_1(X, y)$  sont isomorphes, bien que cet isomor-

phisme ne soit pas canonique, puisqu'il dépend du choix d'une classe d'homotopie de chemins  $\beta$  joignant  $x$  à  $y$  (l'identification s'écrit alors  $[\gamma] \longrightarrow [\beta^{-1} \cdot \gamma \cdot \beta]$ ).

Le groupe fondamental est un objet très présent dans la théorie des revêtements. En particulier, le théorème suivant montre que ces deux objets sont très liés :

**Théorème B.3.** (*[Go], théorèmes IX.6.1, IX.6.2 et IX.3.6*)

*Si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur (connexe par arcs et localement connexe par arcs) semi-localement simplement connexe, pour tout sous-groupe  $\Gamma$  du groupe fondamental  $\pi_1(X, x)$ , il existe un revêtement  $p : Y \longrightarrow X$  tel que  $\pi_1(Y, y)$  (où  $y$  est un point de  $p^{-1}(x)$ ) soit isomorphe à  $\Gamma$ .*

En fait, certains revêtements sont plus intéressants du point de vue géométrique que d'autres et le groupe fondamental permet de caractériser les "bons" revêtements, qui seront appelés revêtements réguliers de  $X$ . Plus précisément, si  $f : Y \longrightarrow X$  est une application continue entre deux espaces topologiques, elle induit un homomorphisme naturel  $f_* : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, f(y))$  qui associe à la classe d'un lacet  $\gamma$  (pointé en  $y$ ) sur  $Y$  la classe du lacet  $f \circ \gamma$ . Dans le cas particulier où  $f$  est un revêtement, on a de plus la propriété suivante :

**Proposition B.4.** (*voir par exemple [BBI], p.82*)

*Soit  $X$  un espace topologique et  $p : Y \longrightarrow X$  un revêtement topologique de  $X$ . Alors  $p$  induit un morphisme injectif  $p_* : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X, p(y))$ .*

Un revêtement régulier est défini de la manière suivante :

**Définition B.5.** (*voir [Go], paragraphe VIII p119*)

*Soit  $X$  un espace topologique connexe. Un revêtement topologique  $p : Y \longrightarrow X$  est dit régulier si et seulement si une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

- (i)  $p_*(\pi_1(Y, y))$  est un sous-groupe normal de  $\pi_1(X, p(y))$
- (ii)  $p_*(\pi_1(Y, y))$  ne dépend pas du point  $y$  dans la fibre  $p^{-1}(x)$  (où  $x = p(y)$ )

Pour pouvoir justifier l'intérêt que nous portons aux revêtements réguliers de  $X$ , nous avons besoin de la notion de groupe d'automorphismes d'un revêtement régulier.

**Définition B.6.**

*Un automorphisme du revêtement  $p : Y \longrightarrow X$  est un homéomorphisme  $h : Y \longrightarrow Y$  tel que  $p \circ h = p$*

L'ensemble des automorphismes de revêtement est un groupe.

Géométriquement, un *automorphisme de revêtement* est un homéomorphisme

de  $X$  sur lui-même qui permute les feuilles du revêtement, c'est-à-dire qui permute les points de  $p^{-1}(x)$ . Un revêtement  $p : Y \rightarrow X$  est régulier si et seulement si son groupe de transformations agit transitivement sur les fibres  $p^{-1}(x)$  pour tout point  $x$  de  $X$ . Ceci donne une nouvelle définition d'un revêtement régulier.

On peut montrer que le groupe des transformations de revêtement d'un revêtement régulier est isomorphe au groupe quotient  $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(Y, y))$  (qui ne dépend pas du point  $y$  mais uniquement de sa projection  $x = p(y)$ ).

### Propriété B.7.

*Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement régulier. Le groupe des transformations de revêtement  $\Gamma_Y$  agit librement et de manière totalement discontinue. De plus,  $X$  est homéomorphe à  $Y/\Gamma_Y$ .*

La notion de revêtement régulier coïncide donc avec la notion de revêtement galoisien (voir la proposition IX.4.3 de [Go] p135).

## B.2 Définition et existence de revêtements de longueur réguliers

### Définition

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des espaces topologiques. Les espaces auxquels nous nous intéresserons par la suite possèdent également une structure de longueur (et restent connexes par arcs et localement connexes par arcs). Il est raisonnable d'attendre d'un revêtement qu'il soit compatible avec cette structure. Pour cela nous avons besoin de la notion d'isométrie locale :

### Définition B.8.

*Soient  $(Y, d_Y)$  et  $(X, d_X)$  deux espaces métriques.*

*Une application  $f : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$  est une isométrie locale au voisinage du point  $y$  de  $Y$  s'il existe un voisinage ouvert de  $y$  (noté  $U_y$ ) et un voisinage ouvert de  $f(y)$  (noté  $U_{f(y)}$ ) tel que  $f$  soit une isométrie entre  $U_y$  et  $U_{f(y)}$ .*

*Une application  $(Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$  qui est une isométrie locale au voisinage de tout point de  $Y$  est appelée une isométrie locale.*

### Proposition B.9. ([BBI], prop. 3.4.16)

*Soit  $p : Y \rightarrow X$  un revêtement topologique régulier et  $\Gamma_Y$  son groupe d'automorphismes. Alors, les distances de longueur sur  $X$  (compatibles avec la topologie choisie sur  $X$ ) sont en bijection avec les distances de longueur  $\Gamma_Y$ -invariantes sur  $Y$  (compatibles avec la topologie choisie sur  $Y$  qui donne lieu au revêtement) et, si  $d_Y$  et  $d_X$  sont deux distances de longueur qui se correspondent par cette bijection, le revêtement  $p$  est une isométrie locale.*

Ce résultat nous permet de définir ce que nous appellerons par la suite des revêtements de longueur réguliers :

**Définition B.10.**

Nous appellerons revêtement de longueur régulier (de l'espace de longueur  $(X, d_X)$ ) un couple  $((Y, d_Y), p)$  tel que

(i)  $p : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  est un revêtement topologique régulier dont le groupe de transformations de revêtement est noté  $\Gamma_Y$

(ii)  $d_Y$  est la distance de longueur  $\Gamma_Y$ -invariante sur  $Y$  qui correspond à  $d_X$ , ce qui implique de plus que  $p$  est une isométrie locale.

**Exemple :** Un revêtement riemannien régulier est un revêtement de longueur régulier.

### Existence de revêtements réguliers

Une première façon d'obtenir un revêtement régulier est de faire agir un groupe de manière suffisamment régulière sur un espace de longueur :

**Proposition B.11.** ([BBI], prop. 3.4.15)

Soit  $X$  un espace topologique localement compact et  $G$  un groupe qui agit librement (i.e. pour tout point  $x$  et tout élément  $g$  de  $G \setminus \{id\}$ ,  $g.x \neq x$ ) et totalement discontinûment (i.e. tout point  $x$  possède un voisinage  $U$  tel que  $g.U \cap U = \emptyset$  pour tout  $g$  tel que  $gx \neq x$ ) sur  $X$ . Alors la projection  $p : X \longrightarrow X/G$  est un revêtement régulier, dont le groupe de transformations est  $G$ .

Un autre point de vue est de considérer un espace topologique  $X$  et de construire un revêtement topologique de  $X$ . Considérons un revêtement topologique  $p : Y \longrightarrow X$  de l'espace topologique  $X$ . Par définition, si l'image du groupe fondamental de  $Y$  par le morphisme induit par  $p$  est un sous-groupe normal du groupe fondamental de  $X$ , le revêtement est régulier. On peut alors se demander si, à chaque sous-groupe normal  $H$  du groupe fondamental  $\pi_1(X, x)$ , on peut associer un revêtement topologique (régulier)  $p : Y \longrightarrow X$  tel que  $p_*(\pi_1(Y, y)) = H$  (où  $y$  est un point de  $p^{-1}(x)$ ). Ce n'est généralement pas le cas (il existe en effet des espaces topologiques qui n'admettent pas de revêtement simplement connexe - voir les espaces limite des exemples D.1 et D.2) mais, sur tout espace topologique  $X$  (connexe par arcs et localement connexe par arcs), on peut construire des sous-groupes normaux  $H$  du groupe fondamental de  $X$  auxquels on peut associer un revêtement régulier  $p : Y \longrightarrow X$  tel que  $p_*[\pi_1(Y, y)] = H$ , de la manière suivante : soit  $x$  un point de  $X$ , considérons un recouvrement  $U = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $X$  par des ouverts  $U_\alpha$ . Considérons le sous-groupe normal (noté  $\pi_1(X, U, x)$ ) de  $\pi_1(X, x)$  engendré par les classes d'homotopie des lacets qui peuvent s'écrire sous la forme  $\gamma^{-1}.\beta.\gamma$ , où  $\beta$  est un lacet entièrement inclus dans un des ouverts  $U_\alpha$  et où  $\gamma$  est un chemin quelconque qui relie  $x$  et  $\beta(0)$ .

**Propriété B.12.** ([Sp], p.82)

Soit  $X$  un espace topologique (connexe par arcs et localement connexe par arcs). Il existe un revêtement topologique régulier  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  tel que, si  $x$  est un point de  $X$  et si  $\tilde{x}$  est un de ses antécédents, alors  $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})] = \pi_1(X, U, x)$  (en particulier le groupe fondamental  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  et le groupe  $\pi_1(X, U, x)$  sont isomorphes et le groupe  $G(X, U)$  des transformations du revêtement  $p$  est isomorphe à  $\pi_1(X, x)/\pi_1(X, U, x)$ ).

Comme le sous-groupe trivial est en particulier un sous-groupe normal du groupe fondamental de  $X$ , il est naturel de se demander s'il existe toujours un revêtement de  $X$  simplement connexe. La proposition B.12 implique qu'un tel revêtement existe si  $X$  est semi-localement simplement connexe, où cette notion est définie de la manière suivante :

**Définition B.13.**

Un espace topologique  $X$  est semi-localement simplement connexe s'il existe autour de chaque point  $x$  un voisinage  $U_x$  tel que tout lacet entièrement inclus dans  $U_x$  soit homotope à zéro dans  $X$ .

En fait, on a l'équivalence suivante :

**Proposition B.14.** (voir par exemple [BBI], p.81)

Un espace topologique  $X$  (connexe et localement connexe par arcs) admet un revêtement simplement connexe si et seulement si  $X$  est semi-localement simplement connexe.

Un revêtement simplement connexe de l'espace topologique  $X$  est particulièrement intéressant, non seulement parce que son groupe des transformations est isomorphe au groupe fondamental, mais aussi parce qu'il est le "plus grand" revêtement (régulier) de  $X$ , dans le sens suivant : si  $p : Y \rightarrow X$  est un revêtement tel que  $Y$  soit connexe et simplement connexe alors, pour tout revêtement connexe  $p' : Y' \rightarrow X$ , il existe un revêtement  $p'' : Y \rightarrow Y'$  tel que  $p' \circ p'' = p$  (la preuve s'appuie sur les théorèmes IX.6.1 et IX.3.7 de [Go]). Nous adopterons pour définition du revêtement universel la définition suivante (qui n'est pas la définition "classique") :

**Définition B.15.** (voir [Sp], p.80)

L'application  $p : Y \rightarrow X$  est un revêtement universel de  $X$  si pour tout autre revêtement régulier  $p' : Y' \rightarrow X$  il existe un revêtement régulier  $p'' : Y \rightarrow Y'$  tel que  $p = p' \circ p''$ . Un tel revêtement est unique (à équivalence de revêtement près).

Remarquons que, si tout revêtement simplement connexe de  $X$  est le revêtement universel de  $X$ , le revêtement universel (quand il existe) n'est pas nécessairement simplement connexe (voir, par exemple, l'exemple 18 p.84 dans [Sp]). De plus, il existe des espaces topologiques qui n'admettent pas

de revêtement universel (voir, par exemple, les exemples 16 et 17 p.84 dans [Sp]). Cependant, C. Sormani et G. Wei donnent (dans [SW]) une condition nécessaire et suffisante d'existence du revêtement universel (celui-ci n'étant pas nécessairement simplement connexe) dans le cadre des espaces de longueurs compacts : on reprend le procédé de construction d'un revêtement associé à un recouvrement  $U$  décrit ci-dessus, en privilégiant les revêtements du type  $(B(x, \alpha))_{x \in X}$ , où  $B(x, \alpha)$  est la boule de  $(X, d)$  de centre  $x$  et de rayon fixé  $\alpha$  ; on appelle  $\alpha$ -revêtement (noté  $X^\alpha$ ) le revêtement associé à ce recouvrement (dont l'existence et la régularité sont assurées par la proposition B.12). La famille des revêtements  $(X^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}$  ainsi définie est décroissante par rapport à  $\alpha$  dans le sens suivant :

**Propriété B.16.** ([SW], p.3592)

*Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux réels strictement positifs tels que  $\alpha_1 < \alpha_2$ , il existe une projection de revêtement  $p : X^{\alpha_1} \longrightarrow X^{\alpha_2}$ .*

Un revêtement d'un espace de longueur n'est pas nécessairement un  $\alpha$ -revêtement. Cependant, lorsqu'un espace de longueur  $X$  est connexe, localement compact et semi-localement simplement connexe et lorsque  $\alpha > 0$  est suffisamment petit, le  $\alpha$ -revêtement  $X^\alpha \longrightarrow X$  est le revêtement universel. En fait, il n'est pas nécessaire de supposer que le revêtement universel est simplement connexe : la seule existence du revêtement universel (même non simplement connexe) suffit pour conclure qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que le revêtement universel coïncide avec le  $\alpha$ -revêtement de  $X$  (voir par exemple [SW]). Plus précisément, on a l'équivalence suivante :

**Théorème B.17.** ([SW], 3.7)

*Un espace de longueur compact  $(X, d)$  (qui n'est pas supposé semi-localement simplement connexe) admet un revêtement universel si et seulement si il existe un réel strictement positif  $\alpha_0$  (dépendant de  $X$ ) tel que, pour tout  $\alpha$  strictement inférieur à  $\alpha_0$ , on ait l'égalité  $X^\alpha = X^{\alpha_0}$ . Dans ce cas, le revêtement universel de  $X$  est  $X^{\alpha_0}$ .*

## Annexe C

# Distance de Gromov-Hausdorff

La distance de Gromov-Hausdorff est une distance sur l'ensemble des classes d'isométries des espaces métriques compacts. C'est, en quelque sorte, une extension aux espaces métriques compacts abstraits de la distance de Hausdorff entre deux sous-espaces compacts d'un même espace métrique. Si  $X$  est un sous-ensemble d'un espace métrique  $(Z, d_Z)$ , nous noterons  $X_\varepsilon$  le  $\varepsilon$ -voisinage de  $X$  pour la distance  $d_Z$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $z$  appartenant à  $Z$  tels qu'il existe un point  $x$  de  $X$  qui vérifie  $d_Z(x, z) < \varepsilon$ .

### Définition C.1.

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux sous-espaces métriques compacts d'un même espace métrique  $(Z, d_Z)$ . La distance de Hausdorff dans  $(Z, d_Z)$  entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , notée  $d_H^{(Z, d_Z)}((X, d_X), (Y, d_Y))$ , est définie par

$$d_H^{(Z, d_Z)}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf\{\varepsilon > 0 / X \subset Y_\varepsilon \text{ et } Y \subset X_\varepsilon\}$$

Remarquons que la distance de Hausdorff n'est en réalité qu'une semi-distance sur l'ensemble des sous-espaces de  $(Z, d_Z)$  (en effet, pour tout sous-ensemble  $X \subset Z$ ,  $d_H(X, \bar{X}) = 0$ ), mais c'est une distance sur l'ensemble des sous-ensembles fermés de  $Z$ .

L'idée de M. Gromov, pour étendre la définition à deux espaces métriques quelconques (donc a priori non inclus dans un troisième espace métrique) a été de les comparer en considérant tous leurs plongements isométriques dans un autre espace commun :

### Définition C.2.

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. La distance de Gromov-Hausdorff entre  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , notée  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$  est définie par

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf_{((Z, d_Z), i, j)} \{d_H^{(Z, d_Z)}(i(X), j(Y))\}$$

où  $i : (X, d_X) \longrightarrow (Z, d_Z)$  et  $j : (Y, d_Y) \longrightarrow (Z, d_Z)$  sont des plongements isométriques dans le sens suivant :  $i$  (resp.  $j$ ) est une isométrie de  $X$  (resp.  $Y$ ) sur  $i(X)$  (resp.  $j(Y)$ ) munis de la distance induite par  $d_Z$ .

On notera que la notion de plongement isométrique utilisée ici n'est pas la notion usuelle de plongement isométrique riemannien : par exemple, le plongement usuel de  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (muni de la distance canonique) dans  $\mathbb{R}^2$  (muni de la distance canonique) n'est pas un plongement isométrique au sens de la définition C.2.

Comme la distance de Hausdorff, la distance de Gromov-Hausdorff n'est qu'une semi-distance sur l'ensemble des espaces métriques compacts. Cependant, c'est une distance sur les classes d'isométries d'espaces métriques compacts. En particulier,  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = 0$  si et seulement si  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  sont isométriques. Par abus de langage, nous utiliserons l'appellation "distance de Gromov-Hausdorff entre les espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ " pour désigner la distance de Gromov-Hausdorff entre les classes d'isométrie des espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ .

**Remarque C.3.**

*Pour définir la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques, il faut a priori considérer tous les espaces  $Z$  tels que  $X$  et  $Y$  se plongent isométriquement dans  $Z$ . En fait, il est possible de ne considérer que les plongements isométriques de  $X$  et  $Y$  dans la réunion disjointe  $X \cup Y$ . Plus précisément, la distance de Gromov-Hausdorff entre deux espaces métriques compacts  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  peut être définie par*

$$d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf \left\{ d_H^{(X \cup Y, d)}((X, d_X), (Y, d_Y)) / d \text{ distance définie sur } X \cup Y \text{ qui prolonge } d_X \text{ et } d_Y \right\}$$

Pour estimer la distance entre deux espaces métriques compacts  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ , il nous faut donc construire un nouvel espace métrique (ou une distance sur la réunion des deux espaces métriques considérés), ce qui, même dans les cas simples, n'est pas toujours évident. Nous préférierions pouvoir estimer leur distance de Gromov-Hausdorff en comparant les distances  $d_X$  et  $d_Y$ . Pour cela, nous définissons les  $\varepsilon$ -approximations de Hausdorff de la manière suivante :

**Définition C.4.**

*Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Une application  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  (éventuellement non continue) est une  $\varepsilon$ -approximation si elle vérifie*

$$\forall x, x' \in X, |d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| < \varepsilon$$

*et si  $f(X)$  est un  $\varepsilon$ -réseau de  $Y$  (c'est-à-dire que, pour tout point  $y$  de  $Y$ , il existe un point  $x$  de  $X$  tel que  $d_Y(y, f(x)) < \varepsilon$ ).*

**Remarque C.5.**

*Remarquons que l'existence d'une  $\varepsilon$ -approximation  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  entraîne automatiquement l'existence d'une  $3\varepsilon$ -approximation  $g : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X)$  telle que :*

- $d_X(g \circ f(x), x) < \varepsilon$  pour tout  $x \in X$
- $d_Y(f \circ g(y), y) < \varepsilon$  pour tout  $y \in Y$

*Preuve de la remarque C.5 .*

Fixons en effet un point  $y$  de  $Y$ . Soit  $y'$  un point de  $f(X)$  tel que  $d_Y(y, y') < \varepsilon$ . On définit  $g(y)$  comme un point quelconque de  $f^{-1}(\{y'\})$ . Soient maintenant  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) un point de  $Y$  et  $y'_1$  (resp.  $y'_2$ ) un point de  $f(X)$  tel que  $d_Y(y_1, y'_1) < \varepsilon$  (resp.  $d_Y(y_2, y'_2) < \varepsilon$ ). On a alors

$$\begin{aligned} |d_X(g(y_1), g(y_2)) - d_Y(y_1, y_2)| &\leq |d_Y(f \circ g(y_1), f \circ g(y_2)) - d_X(g(y_1), g(y_2))| \\ &\quad + |d_Y(f \circ g(y_1), f \circ g(y_2)) - d_Y(y_1, y_2)| \\ &\leq \varepsilon + |d_Y(y'_1, y'_2) - d_Y(y_1, y_2)| \\ &< 3\varepsilon \end{aligned}$$

Par ailleurs, on montre que  $g(Y)$  est un  $2\varepsilon$ -réseau de  $X$  en remarquant que, si  $x$  est un point de  $X$ , le point  $g \circ f(x)$  est  $\varepsilon$ -proche de  $x$  (car, pour tout  $x$ , le diamètre de  $f^{-1}(\{f(x)\})$  est inférieur à  $\varepsilon$ ). Il est facile de vérifier que  $d_Y(f \circ g(y), y) < \varepsilon$  pour tout  $y \in Y$ .  $\square$

Cette remarque suggère qu'il y aurait une autre définition possible de la notion de  $\varepsilon$ -approximation :

### Définition C.6.

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Une application  $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$  (éventuellement non continue) est une  $\varepsilon$ -approximation si elle vérifie

- (i)  $\forall x, x' \in X, |d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| < \varepsilon$  et s'il existe une application  $g : Y \longrightarrow X$  qui vérifie
- (ii)  $\forall y, y' \in Y, |d_Y(y, y') - d_X(g(y), g(y'))| < \varepsilon$
- (iii)  $\forall x \in X, d_X(x, g \circ f(x)) < \varepsilon$
- (iv)  $\forall y \in Y, d_Y(y, f \circ g(y)) < \varepsilon$

La remarque C.5 implique donc que les deux définitions C.4 et C.6 sont équivalentes à un facteur 3 près. Plus précisément, si  $f$  est une  $\varepsilon$ -approximation au sens de la définition C.6, c'est automatiquement une  $\varepsilon$ -approximation au sens de la définition C.4 puisque la condition (iv) implique que  $d_Y(y, f(X)) < \varepsilon$ .

Réciproquement, si  $f$  est une  $\varepsilon$ -approximation au sens de la définition C.4, la remarque C.5 assure qu'une application  $g$  vérifiant les points (ii), (iii) et (iv) existe si l'on remplace  $\varepsilon$  par  $3\varepsilon$ .

### Définition C.7.

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. Nous définissons l'écart  $d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y))$  par

$$d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \inf\{\varepsilon > 0 / \begin{array}{l} \text{il existe deux } \varepsilon\text{-approximations} \\ f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y) \text{ et} \\ g : (Y, d_Y) \longrightarrow (X, d_X) \end{array}\}$$

Cet écart n'est pas exactement une distance (car elle ne vérifie pas l'inégalité triangulaire) mais elle vérifie tout de même l'inégalité

$$d'_{GH}((X, d_X), (Z, d_Z)) \leq 2 [d'_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) + d'_{GH}((Y, d_Y), (Z, d_Z))]$$

Cependant elle définit la même topologie que la distance de Gromov-Hausdorff. En effet,

**Théorème C.8.** (*[BBI], cor.7.3.28*)

*Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques compacts. Alors*

*(i) Si  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$ , il existe deux  $2\varepsilon$ -approximations  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  et  $g : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ .*

*(ii) S'il existe deux  $\varepsilon$ -approximations  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  et  $g : (Y, d_Y) \rightarrow (X, d_X)$ , alors  $d_{GH}((X, d_X), (Y, d_Y)) < 2\varepsilon$ .*

**Par abus de langage, si rien d'autre n'est précisé, nous appellerons distance de Gromov-Hausdorff (et nous noterons  $d_{GH}$ ) l'application  $d'_{GH}$  définie dans la définition C.7 sur les couples d'espaces métriques compacts. Nous insistons sur le fait qu'elle ne vérifie l'inégalité triangulaire qu'à un facteur deux près.**

Si nous voulons faire référence à l'autre définition, nous préciserons qu'il s'agit de la distance de Gromov-Hausdorff classique.

**Théorème C.9.** (*[Gr], corollaire de la proposition 5.2*)

*L'ensemble des espaces métriques compacts muni de la distance de Gromov-Hausdorff est complet.*

De plus, la famille des espaces de longueur compacts est fermée pour la distance de Gromov-Hausdorff :

**Proposition C.10.** (*voir, par exemple, [BBI], théorème 7.5.1*)

*Soit  $((X_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'espaces de longueur compacts qui converge vers un espace métrique  $(X, d_X)$  complet pour la distance de Gromov-Hausdorff. Alors,  $(X, d_X)$  est un espace de longueur compact.*

## Annexe D

# Exemples de convergence de revêtements universels

**Exemple D.1.** *Une suite d'espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel, dont les groupes fondamentaux sont finiment engendrés et dont la limite n'admet pas de revêtement universel (le cardinal d'un système minimal de générateurs du groupe fondamental tend vers l'infini)*

*Construction de l'exemple D.1.*

Soit  $j$  un entier strictement positif. On note  $C_j$  le cercle de  $\mathbb{R}^2$  de centre  $(\frac{1}{j}, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{j}$ .

Notons  $X_k = \bigcup_{j \leq k} C_j$  et munissons cet espace de la distance de longueur  $d_k$  induite par  $d_{\mathbb{R}^2}$ .

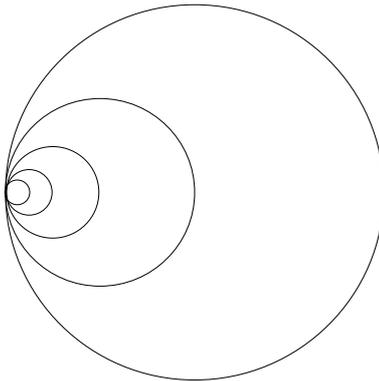


FIG. D.1 – Exemple D.1 -  $(X_5, d_5)$

La suite  $((X_k, d_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} C_j$  (muni de la distance de longueur induite par  $d_{\mathbb{R}^2}$ ), qui n'admet pas de revêtement universel. En effet, les sous-groupes  $\pi_1(X, U_{2\pi/j}, (0, 0))$  (voir la définition 3.22) du groupe fon-

damental  $\pi_1(X, (0, 0))$  forment une suite strictement croissante. Les groupes  $\pi_1(X, x)/\pi_1(X, U_{2\pi/j}, x)$  ne sont donc pas isomorphes à partir d'un certain rang et les  $\frac{2\pi}{j}$ -revêtements de  $X$  sont tous différents. Le théorème B.17 nous assure que  $X$  n'admet pas de revêtement universel.  $\square$

**Exemple D.2.** *Une suite d'espaces de longueur, compacts et simplement connexes qui converge vers un espace de longueur qui admet un revêtement universel non simplement connexe (d'après C. Sormani-G. Wei - voir [SW], exemple 2.6 pour les preuves).*

*Construction de l'exemple D.2.*

Commençons par construire l'espace de longueur limite  $(X, d_X)$ , espace de longueur (donc connexe par arc) mais non simplement connexe :

Soit

$$K_1 = \left\{ \left( x, y, \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right) / x \in \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right] \text{ et } |y| \leq |x| \right\}$$

et

$$K_2 = \left\{ (x, y, z) / |x| = |y| \leq \frac{1}{\pi} \text{ et } z \in [-2, 2] \right\}$$

On définit alors  $X = K_1 \cup K_2$  que l'on munit de la distance de longueur induite par la distance canonique de  $\mathbb{R}^3$  (voir la figure D.2).

Pour montrer que  $X$  n'est pas simplement connexe, considérons les courbes  $(C_j)_{j \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} C_j : [0, \frac{4}{j\pi}] \longrightarrow X \\ C_j(t) = (t, -t, 0) \subset K_2 & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{j\pi}] \\ C_j(t) = (\frac{1}{j\pi}, t - \frac{2}{j\pi}, 0) \subset K_1 & \text{pour } t \in [\frac{1}{j\pi}, \frac{3}{j\pi}] \\ C_j(t) = (\frac{4}{j\pi} - t, \frac{4}{j\pi} - t, 0) \subset K_2 & \text{pour } t \in [\frac{3}{j\pi}, \frac{4}{j\pi}] \end{cases}$$

Ces courbes sont toutes homotopes entre elles, leur longueur tend vers zéro, mais elles sont non homotopes à un point :  $X$  n'est pas simplement connexe. Cependant, le théorème B.17 assure que  $(X, d_X)$  est son propre revêtement de longueur universel.

Construisons à présent la suite d'espaces de longueur  $((X_k, d_k))_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $(X, d_X)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff : l'espace  $X_k$  est la réunion des trois ensembles suivants :

$$K_{k,1} = \left\{ (x, y, \sin(\frac{1}{y})) / \frac{1}{k\pi} \leq |x| \leq \frac{1}{\pi} \text{ et } \frac{1}{k\pi} \leq |y| \leq |x| \right\},$$

$$K_{k,2} = \left\{ (x, y, 0) / |x| \leq \frac{1}{k\pi} \text{ et } |y| \leq |x| \right\},$$

$$K_{k,3} = \left\{ (x, y, z) / |x| = |y| \leq \frac{1}{\pi} \text{ et } z \in [-2, 2] \right\}.$$

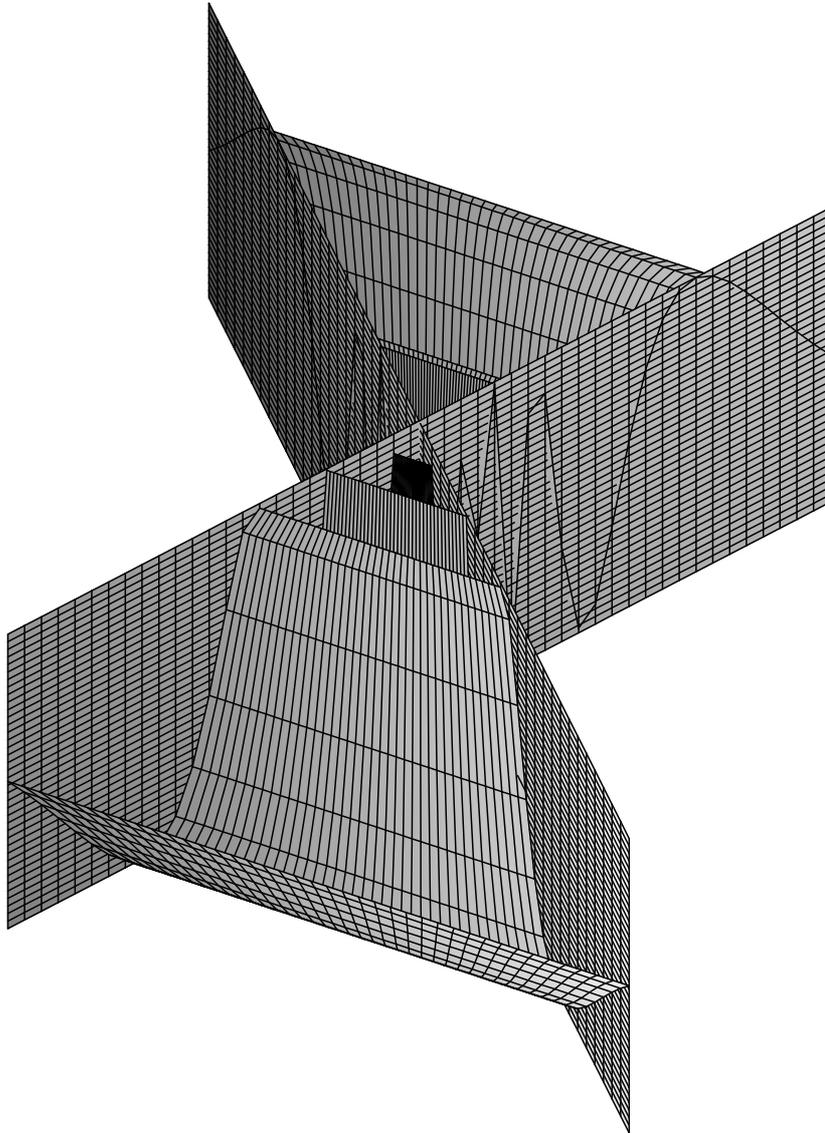


FIG. D.2 – Espace-limite de l'exemple D.2

Tous ces espaces sont compacts, de diamètre uniformément borné et simplement connexes et la suite  $(X_k, d_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(X, d_X)$  au sens de Gromov-Hausdorff.  $\square$

**Exemple D.3.** *Une suite convergente d'espaces de longueur compacts qui convergent vers un espace de longueur qui admet un revêtement universel, dont les revêtements universels convergent mais ne convergent pas vers le revêtement universel de la limite.*

*Description de l'exemple D.3.*

Si  $p$  est un entier, le groupe  $\mathbb{Z}_p$  agit librement proprement discontinûment sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  via la fibration de Hopf. La suite  $((\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p, can))_{p \in \mathbb{N}}$  converge alors vers la sphère  $(\mathbb{S}^2, can)$  quand  $p$  tend vers l'infini mais la suite des revêtements universels  $((\mathbb{S}^3, can))_{p \in \mathbb{N}}$  ne tend pas vers  $(\mathbb{S}^2, can)$ .  $\square$

## Annexe E

# Lemme de Margulis sans courbure

Objectif : remplacer les hypothèses de courbure dans le lemme de Margulis par une hypothèse (plus faible) sur l'entropie. En contrepartie, on impose des hypothèses algébriques sur le groupe fondamental pour qu'il ressemble au groupe fondamental d'une variété de courbure strictement négative. Les résultats obtenus seront valables pour toute variété dont le groupe fondamental vérifie ces hypothèses et pour toute métrique d'entropie bornée sur cette variété, même si cette métrique admet de la courbure positive (sauf si le contraire est précisé).

### E.1 Groupes $\delta$ -non-abéliens

#### Définition E.1.

Soit  $\delta$  un nombre réel positif.

(i) Un groupe discret  $\Gamma$  sera dit  $\delta$ -épais s'il appartient à l'ensemble des groupes fondamentaux des variétés différentiables compactes connexes (de n'importe quelle dimension) qui admettent une métrique de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$  et de rayon d'injectivité supérieur ou égal à  $\delta$ .

(ii) Un groupe discret  $\Gamma$  sera dit  $\delta$ -non-abélien s'il est non-abélien et si, pour toute paire d'éléments  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $\Gamma$  qui ne commutent pas, il existe un groupe  $\delta$ -épais  $\Gamma'$  et un morphisme

$$\rho : \langle \gamma, \gamma' \rangle \longrightarrow \Gamma'$$

(où  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  est le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\gamma$  et  $\gamma'$ ) tel que  $\rho(\langle \gamma, \gamma' \rangle)$  ne soit isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $(\mathbb{Z}, +)$ .

Remarquons que si un groupe  $\Gamma$  admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte dont la courbure

sectionnelle est inférieure à  $-1$  et dont le rayon d'injectivité est minoré par  $\delta$ , alors  $\Gamma$  est évidemment  $\delta$ -non-abélien. Nous précisons que nous travaillons sur des familles de variétés ou d'espaces de longueur compacts et que nous exigeons que leur groupe des automorphismes du revêtement universel soit  $\delta$ -non-abélien pour un réel  $\delta$  *uniforme*. De nombreux exemples de telles familles sont donnés dans [BCG1] (page 9 à 13). Notons ici, par exemple, que toutes les surfaces orientables de caractéristique d'Euler négative ont un groupe fondamental *Argch2*-abélien et que le produit de deux groupes  $\delta$ -non-abélien reste  $\delta$ -non-abélien.

## E.2 Entropie et petits lacets

Considérons un espace de longueur compact  $(X, d_X)$  qui admet un revêtement universel  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  et dont le groupe des transformations du revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien. L'idée sous-jacente du résultat qui suit est le fait que, dans un groupe  $\Gamma$  qui est  $\delta$ -non-abélien, il existe un entier  $N$  (qui ne dépend que de  $\delta$ ) tel que, si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux éléments de  $\Gamma$  qui ne commutent pas, le semi-groupe engendré par  $\gamma_1^N$  et  $\gamma_2^N$  (ou bien celui engendré par  $\gamma_1^N$  et  $\gamma_2^{-N}$ ) est libre. Si ces deux éléments déplacent peu un point  $\tilde{x}$  donné sur  $\tilde{X}$ , le nombre de points de l'orbite  $\Gamma.\tilde{x}$  dans une boule de rayon  $R$  est grand, ce qui a pour conséquence que l'entropie de  $(X, d_X)$  est grande. Si l'on suppose que l'entropie de  $(X, d_X)$  est inférieure à  $H$ , il devient alors possible de minorer uniformément la longueur de tout lacet qui représente un élément de  $\Gamma \setminus \{id\}$  qui ne commute pas avec au moins un élément qui déplace peu un point.

**Théorème E.2.** ([BCG1], thm 2.1)

Soient  $\delta$  un réel positif fixé. Considérons un espace métrique mesuré  $(Y, d, \mu)$  sur lequel agit par isométries un sous-groupe  $\Gamma$ , supposé  $\delta$ -non-abélien. Fixons un point  $y \in Y$  dont l'orbite par  $\Gamma$  est discrète et dont le stabilisateur dans  $\Gamma$  est trivial.

(i) Si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux éléments de  $\Gamma$  qui ne commutent pas et si  $l_i$  désigne la distance  $d(y, \gamma_i.y)$ , on a

$$Ent(Y, d, \mu) \geq \frac{\delta \log 2}{4 + \delta} \frac{1}{\max(l_1, l_2)}$$

(ii) Si de plus  $(Y, d)$  est un espace de longueur et si le centre de  $\Gamma$  est nul, alors

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} [d(y, \gamma(y))] \geq \frac{\delta}{4 + \delta} \frac{1}{H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$$

pour tout majorant  $D$  de  $\sup_{z \in Y} [d(\Gamma.y, \Gamma.z)]$ .

(iii) Si  $(X, d_X)$  est un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel (éventuellement non simplement connexe), dont le diamètre

est majoré par  $D$ , dont l'entropie est inférieure à  $H$  et dont le groupe de transformations du revêtement universel est  $\delta$ -non-abélien, alors la systole de  $(X, d_X)$  (voir la définition 3.11) est minorée par  $\varepsilon_0$  où  $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{4+\delta} \frac{1}{H} e^{-2(\frac{4+\delta}{\delta})HD}$ .

Nous insistons sur le fait que ce théorème est valable sur les espaces de longueur (en particulier, il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèse de courbure sur la métrique  $g$  d'une variété riemannienne).

Remarquons que, si  $(Y, d_Y)$  est un revêtement (métrique) d'un espace de longueur  $(X, d_X)$  et si le groupe  $\Gamma$  des automorphismes de ce revêtement est  $\delta$ -non-abélien et de centre nul, son action sur  $(Y, d)$  vérifie toutes les hypothèses du théorème E.2 pour tout point  $y$ . En appliquant ceci dans le cas où  $(Y, d)$  est le revêtement universel d'un espace de longueur  $(X, d_X)$  semi-localement simplement connexe et en exploitant l'isomorphisme entre le groupe des automorphismes du revêtement universel et  $\pi_1(X, x)$ , le point (i) du théorème E.2 donne en particulier un moyen de repérer des espaces de longueur compacts (qui admettent un revêtement universel simplement connexe) qui possèdent une "grande entropie" : il suffit de trouver deux petits lacets (non homotopes à zéro) qui ne commutent pas.

Le point (ii) donne une minoration de la longueur de tous les lacets non homotopes à zéro (quel que soit leur point-base) sur l'espace quotient.

### E.3 Géométrie des variétés dont le groupe fondamental est $\delta$ -non-abélien

Les résultats présentés ici sont valables sur les variétés compactes. Notons que nous ne supposons pas, dans cette partie, que le diamètre des variétés est majoré (ce qui entraîne l'existence d'une vraie partie fine).

#### Notations

Considérons une variété riemannienne compacte  $(Y, g)$  quelconque. Pour tout point  $y$  de  $Y$ , nous noterons  $l(y)$  la longueur du plus petit lacet non homotope à zéro de point base  $y$ . Nous noterons  $(\tilde{Y}, \tilde{g})$  son revêtement universel et  $\Gamma$  son groupe des transformations du revêtement universel. Si  $y$  est un point de  $Y$  et si  $\tilde{y}$  est un quelconque de ses antécédents, on a

$$\inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y}) = l(y) > 0$$

Si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma$ , nous appellerons longueur de  $\gamma$  en  $y$  et nous noterons  $l_y(\gamma)$  la distance  $d(\tilde{y}, \gamma \cdot \tilde{y})$  qui est aussi la longueur du plus petit lacet de point base  $y$  sur  $Y$  qui représente  $\gamma$ .

Si  $\psi_{\tilde{y}}$  est l'isomorphisme de  $\Gamma$  sur  $\pi_1(Y, y)$  qui envoie un élément  $\gamma$  sur la classe du lacet  $\pi \circ \tilde{c}$ , où  $\tilde{c}$  est un chemin sur  $\tilde{Y}$  qui joint  $\tilde{y}$  à  $\gamma \cdot \tilde{y}$ , la longueur

de  $\gamma$  est aussi l'infimum des longueurs des lacets de la classe  $\psi_{\tilde{y}}(\gamma)$ . Si  $R$  est un réel positif fixé, nous noterons  $\Gamma_R(\tilde{y})$  le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par les éléments  $\gamma$  de longueur strictement inférieure à  $R$ .

### Décomposition de la variété en parties fine et épaisse

**Théorème E.3.** ([BCG1], corollaire 3.3 et remarque 2.7)

Fixons un réel  $\delta$  strictement positif.

Considérons une variété connexe  $Y$  dont le groupe fondamental  $\Gamma$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte quelconque de courbure strictement négative. Alors, pour toute métrique riemannienne  $g$  sur  $Y$ , on a

$$(\sup_{y \in Y} l(y)) \text{Ent}(Y, g) \geq \frac{\delta \log 2}{4 + \delta}$$

Fixons  $\delta$  et  $H$  deux réels strictement positifs. Considérons l'ensemble des variétés dont le groupe fondamental  $\Gamma$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte quelconque de courbure négative. Soit  $(Y, g)$  une variété de cet ensemble munie d'une métrique  $g$  d'entropie volumique inférieure à  $H$ . Ce résultat suggère de décomposer la variété considérée en

- une partie épaisse composée des points  $y$  de  $Y$  pour lesquels  $l(y) \geq \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$  (et qui s'avère non vide d'après le théorème E.3)

et

- une partie fine composée des points  $y$  pour lesquels  $l(y) < \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ .

Notons que le théorème E.2 donne un minorant de  $l(z)$  pour tout point  $z$  de  $Y$ .

Nous faisons ci-dessous quelques rappels sur la description de la partie fine réalisée dans [BCG1].

### Description de la partie fine

**Théorème E.4.** ([BCG1], extrait du corollaire 3.4)

Fixons des nombres réels positifs arbitraires  $\delta$  et  $H$  et posons  $\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ . Considérons n'importe quelle variété connexe  $Y$  qui a les propriétés topologiques suivantes : son groupe fondamental  $\Gamma$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'au moins une variété compacte  $X$  qui admet une métrique de courbure strictement négative.

Considérons sur  $Y$  n'importe quelle métrique riemannienne  $g$  dont l'entropie volumique est majorée par  $H$ . Chacune des composantes connexes  $Y_{\text{mince}}^i$  de la partie fine  $Y_{\text{mince}}$  a les propriétés suivantes :

(i) Il existe un ouvert  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  de  $\tilde{Y}$  tel que la restriction  $\pi_i$  de  $\pi$  à  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  soit un revêtement de  $Y_{\text{mince}}^i$  et coïncide avec le quotient de  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  par l'action d'un sous-groupe  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$  (qui laisse stable  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$ ).

(ii) Pour tout point  $y$  appartenant à  $Y_{mince}^i$ , l'image  $\tilde{\Gamma}_i = \psi_{\tilde{y}}(\Gamma_i)$  du groupe  $\pi_1(Y_{mince}^i, y)$  dans  $\pi_1(Y, y)$  (par le morphisme associé à l'inclusion) s'identifie à  $\Gamma_i$ , est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et  $\Gamma_i$  contient  $\Gamma_{\varepsilon_1}(\tilde{z})$  pour tout  $\tilde{z}$  appartenant à  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$ .

(iii) Si  $Y$  est compacte,  $Y_{mince}^i$  contient au moins une géodésique périodique de  $(Y, g)$ , non homotope à zéro, dont la longueur réalise le minimum de  $l(z)$  quand  $z$  appartient à  $Y_{mince}^i$ .

Dans le chapitre V de cette thèse, nous aurons besoin de renseignements supplémentaires sur l'élément qui engendre  $\Gamma_i$  dans le cas où la métrique  $g$  est de courbure négative ou nulle. Le résultat suivant est une conséquence directe du théorème E.4 en courbure sectionnelle strictement négative. Nous le généralisons en courbure négative ou nulle.

**Proposition E.5.**

Fixons des nombres réels positifs arbitraires  $\delta$  et  $H$  et posons  $\varepsilon_1 = \frac{\delta \log 2}{(4+\delta)H}$ . Considérons n'importe quelle variété connexe  $Y$  qui a les propriétés topologiques suivantes : son groupe fondamental  $\Gamma$  est  $\delta$ -non-abélien et admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'au moins une variété compacte  $X$  de courbure strictement négative.

Considérons sur  $Y$  n'importe quelle métrique riemannienne  $g$  de courbure négative ou nulle et dont l'entropie volumique est majorée par  $H$ . Fixons une composante connexe  $Y_{mince}^i$  de la partie fine. Alors, toutes les géodésiques périodiques qui minimisent  $\{l(z)/z \in Y_{mince}^i\}$  sont homotopes (à un changement de leur orientation près). De plus, le groupe  $\Gamma_i$  est engendré par l'élément qui est représenté une telle géodésique.

*Preuve de la proposition E.5.*

Nous allons établir que, si un élément de  $\Gamma$  est représenté (dans un sens que nous préciserons) par une géodésique périodique entièrement incluse dans  $Y_{mince}^i$  et qui minimise  $\{l(z)/z \in Y_{mince}^i\}$ , alors il engendre  $\Gamma_i$ . Ceci suffit à montrer que toutes les géodésiques périodiques qui minimisent  $\{l(z)/z \in Y_{mince}^i\}$  sont homotopes : en effet, le théorème E.4 de G. Besson, G. Courtois et S. Gallot nous assure que  $\Gamma_i$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Si deux géodésiques périodiques représentent deux générateurs de  $\Gamma_i$ , ces générateurs ne peuvent alors être qu'identiques ou inverses l'un de l'autre et les géodésiques correspondantes (à condition de les orienter convenablement) sont homotopes.

Soit  $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$  le revêtement universel de  $Y$ .

Pour n'importe quel point  $\tilde{y}$  de  $\pi^{-1}(y)$ , rappelons que nous notons  $\psi_{\tilde{y}}$  l'isomorphisme du groupe  $\Gamma$  des automorphismes du revêtement universel dans  $\pi_1(Y, y)$ , tel que  $\psi_{\tilde{y}}(\gamma)$  soit la classe du lacet  $\pi \circ \tilde{c}$ , où  $\tilde{c}$  est un chemin qui joint  $\tilde{y}$  et  $\gamma \cdot \tilde{y}$ .

Notons  $\Phi_{\tilde{y}}$  l'isomorphisme réciproque. On a alors, pour tout lacet de point-

base  $y$ ,

(1)  $\Phi_{\tilde{y}}([c]).\tilde{y} =$  l'extrémité du relevé de  $c$  dans  $\tilde{Y}$  qui a pour origine  $\tilde{y}$

**Lemme E.6.**

Si  $c : \mathbb{R} \longrightarrow Y$  est une géodésique périodique d'origine  $c(0) = x_0$  et de période  $L$ , notons  $[c]$  la classe du lacet  $c_{[0,L]}$ . Si  $\tilde{x}_0$  est un élément quelconque de  $\pi^{-1}(x_0)$ ,

(i) Si  $\tilde{c}$  est le relevé de  $c$  d'origine  $\tilde{x}_0$ , on a

$$\Phi_{\tilde{x}_0}([c])^k.\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + kL)$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

(ii) Si  $y$  est un point quelconque de  $Y$  (en général extérieur à  $c$ ) et si  $\tilde{y}$  est un point quelconque de  $\pi^{-1}(y)$ , si  $\tilde{\beta} : [0, 1] \longrightarrow \tilde{Y}$  est un chemin qui joint  $\tilde{y}$  et  $\tilde{x}_0$ , notons  $\beta = \pi \circ \tilde{\beta}$ . Alors,  $\Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{y}$  est l'extrémité du relevé dans  $\tilde{Y}$  du lacet  $\beta.c_{[0,L]}. \beta^{-1}$  qui a pour origine  $\tilde{y}$ . En particulier,

$$\Phi_{\tilde{x}_0}([c]) = \Phi_{\tilde{x}_0}([\beta.c_{[0,L]}. \beta^{-1}])$$

*Preuve du lemme E.6.*

Il suffit de faire la preuve du point (i) lorsque  $k = 1$ , après quoi on itère le procédé.

La formule (1) donne

$$\Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{x}_0 = \tilde{c}(L)$$

donc les applications  $t \longmapsto \Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{c}(t)$  et  $t \longmapsto \tilde{c}(t + L)$  sont deux relevés de l'application  $t \longrightarrow c(t + L) = c(t)$  d'origine  $\tilde{c}(L)$ . En particulier, pour tout  $t$ ,

$$\Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + L)$$

ce qui prouve le point (i).

Posons

$$\tilde{\beta}_1(t) = \Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{\beta}(t)$$

et

$$(\tilde{\beta}_1)^{-1}(t) = \tilde{\beta}_1(1 - t)$$

$(\tilde{\beta}_1)^{-1}$  est le relevé de  $\beta^{-1}$  d'origine  $\Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{x}_0 = \tilde{c}(L)$ , donc  $\tilde{\beta}.\tilde{c}_{[0,L]}. \tilde{\beta}^{-1}$  est le relevé de  $\beta.c_{[0,L]}. \beta^{-1}$  d'origine  $\tilde{y}$ ; son extrémité est donc

$$\begin{aligned} (\tilde{\beta}_1)^{-1}(1) &= \tilde{\beta}_1(0) \\ &= \Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{\beta}(0) \\ &= \Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{y} \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme E.6 □

**Lemme E.7.**

A tout élément  $\tau$  de  $\Gamma$ , on peut associer une géodésique périodique  $c : \mathbb{R} \longrightarrow Y$  et un relevé  $\tilde{c}$  de cette géodésique dans  $\tilde{Y}$  tel que  $\tilde{c}$  soit globalement invariante par  $\tau$ ; plus précisément, si  $L$  est la période (ou longueur) de la géodésique périodique, on a

$$\tau^k[\tilde{c}(t)] = \tilde{c}(t + kL)$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Construction de  $c$  et choix de  $\tilde{c}$  :*

Fixons un point  $y$  sur  $Y$  et un point  $\tilde{y}$  de  $\pi^{-1}(y)$ . Il existe un lacet  $\gamma$  de point-base  $y$  tel que  $\Phi_{\tilde{y}}([\gamma]) = \tau$ . On définit alors  $c$  comme une des géodésiques périodiques qui réalisent l'infimum de la longueur dans la classe d'homotopie libre de  $\gamma$  (l'existence d'une telle géodésique est assurée par le théorème d'Ascoli et la compacité de  $Y$ ).

Notons  $x_0 = c_0(0)$ .

Posons  $c_0 = c|_{[0,L]}$  et paramétrons également  $\gamma$  par  $[0, L]$ . Notons

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

une homotopie libre de lacets (i.e., pour tout  $s$ ,  $\gamma_s = H(s, \cdot)$  est un lacet) telle que  $\gamma_0 = \gamma$  et  $\gamma_1 = c_0$ . Définissons alors le chemin  $\beta$  d'origine  $y$  et d'extrémité  $x_0$  en posant

$$\beta(s) = H(s, 0) = \gamma_s(0) = \gamma_s(L) = H(s, L)$$

On choisit  $\tilde{x}_0$  dans  $\pi^{-1}(x_0)$  comme l'extrémité du relevé  $\tilde{\beta}$  de  $\beta$  qui a pour origine  $\tilde{y}$ .

On choisit  $\tilde{c}$  comme le relevé de  $c$  d'origine  $\tilde{x}_0$ .

*Preuve du lemme E.7.*

Par construction, les deux lacets  $\beta.c_0.\beta^{-1}$  et  $\gamma$  représentent le même élément de  $\pi_1(Y, y)$ . On a donc

$$\tau = \Phi_{\tilde{y}}([\gamma]) = \Phi_{\tilde{y}}([\beta.c_0.\beta^{-1}])$$

Le lemme E.6 (ii) prouve par ailleurs que

$$\Phi_{\tilde{y}}([\beta.c_0.\beta^{-1}]) = \Phi_{\tilde{x}_0}([c_0])$$

D'après le lemme E.6 (i), on en déduit que

$$\tau^k.\tilde{c}(t) = \Phi_{\tilde{x}_0}([c_0])^k.\tilde{c}(t) = \tilde{c}(t + kL)$$

□

D'après le corollaire 3.4 (iv) de [BCG1] (cité dans le théorème E.4), il existe une géodésique périodique  $c_0$  entièrement incluse dans  $Y_{mince}^i$ , dont la période  $L_0$  est égale à l'infimum de  $l(z)$  quand  $z$  parcourt  $Y_{mince}^i$ . Posons  $x_0 = c_0(0)$  et fixons un relevé  $\tilde{x}_0$  de  $x_0$  dans la composante connexe choisie  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  de  $\pi^{-1}(Y_{mince}^i)$  et notons  $\tilde{c}_0(0)$  le relevé de  $c_0$  d'origine  $\tilde{x}_0$ . Notons  $\gamma_0$  l'élément  $\Phi_{\tilde{x}_0}(c_0|_{[0, L_0]})$  de  $\Gamma_i$  (cet élément est indépendant du choix de  $x_0$  dans  $\pi^{-1}(x_0) \cap \tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  d'après le corollaire 3.4 (iv) de [BCG1]).

**Lemme E.8.**

*Tout élément de  $\Gamma$  qui commute avec  $\gamma_0$  est de la forme  $\gamma_0^p$ , où  $p$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .*

*Preuve du lemme E.8.*

Soit  $\gamma_1$  un élément de  $\Gamma$  qui commute avec  $\gamma_0$ ; comme le groupe  $\langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle$  engendré par  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  est abélien et que nous avons supposé que le groupe  $\Gamma$  s'injecte dans le groupe fondamental d'une variété de courbure sectionnelle strictement négative,  $\Gamma$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et est engendré par un unique élément  $\tau$ . Nous allons vérifier que  $\tau = \gamma_0$ .

Quitte à remplacer  $\tau$  par  $\tau^{-1}$ , on peut donc supposer que  $\gamma_0 = \tau^k$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{N}^*$ .

Le lemme E.7 assure l'existence d'une géodésique périodique  $c_1$  telle qu'un de ses relevés  $\tilde{c}_1$  vérifie, pour tout  $q \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\tau^q \cdot [\tilde{c}_1(t)] = \tilde{c}_1(t + qL_1)$$

où  $L_1$  est la période de  $c_1$ .

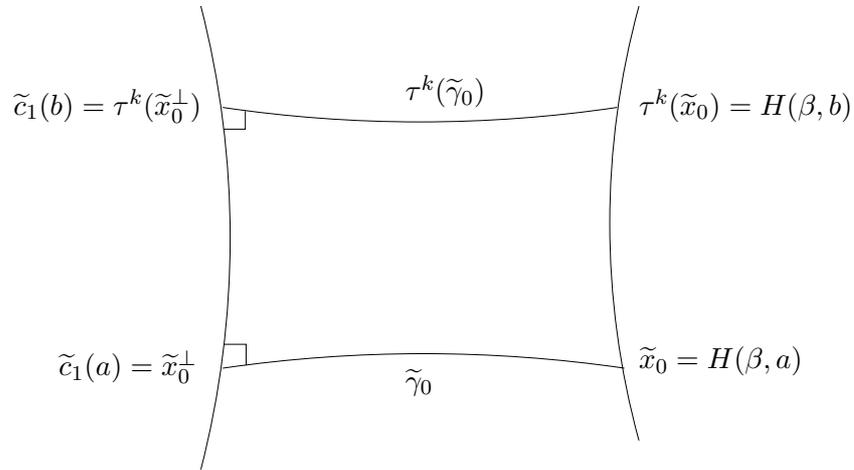
Notons  $\tilde{x}_0^\perp$  la projection orthogonale de  $\tilde{x}_0$  sur  $\tilde{c}_1$  (elle est définie sans ambiguïté car  $\tilde{Y}$  est simplement connexe et de courbure négative ou nulle) et  $\tilde{\gamma}_0$  la géodésique normale à  $\tilde{c}_1$  qui joint  $\tilde{x}_0^\perp$  et  $\tilde{x}_0$ . La géodésique  $\tau^k \circ \tilde{\gamma}_0$  est elle aussi normale à  $\tau^k \circ \tilde{c}_1 = \tilde{c}_1$  au point  $\tau^k(\tilde{x}_0^\perp)$ .

Il découle de la formule de la variation seconde que la fonction

$$t \longmapsto d_{\tilde{Y}}(\tilde{\gamma}_0(t), \tau^k \circ \tilde{\gamma}_0(t))$$

est convexe et de dérivée nulle en  $t = 0$ , donc croissante (au sens large). On a donc, si  $\tilde{c}_1$  est paramétrée normalement et si  $\tilde{x}_0^\perp = \tilde{c}_1(a)$ ,

$$\begin{aligned} kL_1 &= d_{\tilde{Y}}(\tilde{c}_1(a), \tilde{c}_1(a + kL_1)) \\ &= d_{\tilde{Y}}(\tilde{x}_0^\perp, \tau^k \cdot \tilde{x}_0^\perp) \\ &\leq d_{\tilde{Y}}(\tilde{\gamma}_0(t), \tau^k \circ \tilde{\gamma}_0(t)) \quad \forall t \in [0, 1] \\ &\leq d_{\tilde{Y}}(\tilde{x}_0, \tau^k \cdot \tilde{x}_0) \\ &= d_{\tilde{Y}}(\tilde{x}_0, \gamma_0(\tilde{x}_0)) \\ &= L_0 < \varepsilon_1 \end{aligned}$$



On en déduit que, pour tout  $t$ , le point  $\tilde{\gamma}(t)$  appartient à  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}$ , donc à la composante connexe  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  de  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}$  qui contient  $\tilde{x}_0$ . Il s'ensuit que le point  $\tilde{x}_0^\perp$  appartient à  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  et que, par définition de  $L_0$  et  $L_1$ ,

$$L_1 \geq l(\pi(\tilde{x}_0^\perp)) \geq L_0$$

Ceci n'est compatible avec l'inégalité précédente que si  $L_1 = L_0$  et  $k = 1$ . Il en découle que  $\gamma_0 = \tau$  et  $\gamma_0$  est le générateur du groupe  $\langle \gamma_0, \gamma_1 \rangle$ .  $\square$

**Note :** Nous avons utilisé le fait que tout sous-groupe abélien non trivial de  $\Gamma$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , ce qui est en général faux pour une variété de courbure négative ou nulle; il est donc nécessaire de supposer que  $\Gamma$  admet une représentation injective dans le groupe fondamental d'une variété de courbure strictement négative.

**Remarque E.9.**

*En courbure strictement négative, la géodésique  $\tilde{c}_0$  est l'unique relevé de la géodésique  $c_0$  qui rencontre  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$ ; elle est invariante par tous les éléments de  $\Gamma_i$ .*

En effet, nous avons vu que la géodésique  $\tilde{c}_0$  est  $\tau$ -invariante donc

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i \cap \pi^{-1}(x_0) &= \pi_i^{-1}(x_0) = \Gamma_i \cdot \tilde{x}_0 \\ &= \{\tau^k \cdot \tilde{c}_0(0) / k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\tilde{c}_0(kL_0) / k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Tout autre relevé de  $c_0$  qui rencontre  $\tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$  passe par un point de  $\pi^{-1}(x_0) \cap \tilde{Y}_{\varepsilon_1}^i$ , donc par un point de la forme  $\tilde{c}_0(kL_0)$ , donc coïncide avec  $\tilde{c}_0$  (à translation du temps près).

**Lemme E.10.**

*Le groupe  $\Gamma_i$  est l'ensemble des  $\gamma_0^p$ , où  $p$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .*

*Preuve du lemme E.10.*

Comme  $L_0 < \varepsilon_1$ , l'élément  $\gamma_0$  appartient à  $\Gamma_{\varepsilon_1}(\tilde{x}_0)$  donc tout élément de  $\Gamma_i$  commute avec  $\gamma_0$  et on applique le lemme E.8.  $\square$

Le corollaire E.10 prouve la proposition E.5.  $\square$

Considérons à présent la fonction  $s \mapsto R(s)$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$R(s) = \frac{\delta}{(4 + \delta)H} \log \left( \frac{\delta}{2(4 + \delta)} \cdot \frac{1}{Hs} \right)$$

**Lemme E.11.**

*En un point  $y$  de  $Y_{mince}^i$  où le rayon d'injectivité  $i(y)$  est inférieur à  $\frac{\varepsilon_1}{4}$ , pour tout relevé  $\tilde{y}$  de  $y$  qui appartient à la même composante connexe de  $\pi^{-1}(Y_{mince}^i)$  que  $\tilde{x}_0$ , le groupe  $\Gamma_{R(i(y))}(\tilde{y})$  est inclus dans le groupe  $\Gamma_i = \{\gamma_0^p / p \in \mathbb{Z}\}$ .*

*Preuve du lemme E.11.*

Si  $s < \frac{\varepsilon_1}{4}$ , on a

$$\frac{\delta}{2(4 + \delta)} \cdot \frac{1}{Hs} > \frac{2\delta}{(4 + \delta)H\varepsilon_1} = \frac{2}{\log 2} > 2$$

On en déduit que  $R(i(y)) > \varepsilon_1$  donc que  $\Gamma_{\varepsilon_1}$  est un sous-groupe non-trivial de  $\Gamma_{R(i(y))}(\tilde{y})$  et de  $\Gamma_i$ . En courbure négative ou nulle, le rayon d'injectivité en  $y$  est la demi-longueur du plus court lacet-géodésique  $\sigma$  de point-base  $y$ , ce lacet étant automatiquement non homotope à zéro. On peut donc appliquer le corollaire 3.8 (ii) de [BCG1], qui assure l'abélianité de  $\Gamma_{R(i(y))}(\tilde{y})$ . La transitivité de la relation de commutation, valable sur tous les groupes fondamentaux de variétés de courbure strictement négative, est également vérifiée sur  $\Gamma \setminus \{id\}$ , donc tous les éléments de  $\Gamma_{R(i(y))}(\tilde{y})$  commutent avec tous les éléments de  $\Gamma_i$ , donc avec  $\gamma_0$ . Le lemme E.8 permet de finir la preuve du lemme E.11.  $\square$

## Annexe F

# Majoration universelle du noyau de l'opérateur de la chaleur et précompacité

### Définitions

La distance spectrale est une distance sur l'ensemble des classes d'isométries de variétés riemanniennes compactes. La distance spectrale a été introduite par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot dans [BBG], puis légèrement modifiée par A. Kasué et H. Kumura dans [KK1]. L'idée consiste à plonger chaque variété riemannienne  $(M, g)$  compacte de volume 1 dans un même espace de Banach grâce au noyau de l'opérateur de la chaleur. On définit alors ("grosso-modo") la distance spectrale entre deux variétés riemanniennes compactes  $(M, g)$  et  $(N, h)$  comme la distance de Hausdorff entre leurs images par le plongement, munies de la distance induite par la distance sur l'espace de Banach.

Plus précisément, considérons une variété riemannienne  $(M, g)$  compacte munie de la mesure normalisée  $\mu_g := \frac{1}{\text{Vol}(M, g)} dv_g$ .

Notons  $p_M : \mathbb{R}_*^+ \times M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$  le noyau de l'opérateur de la chaleur de  $(M, g)$  pour la mesure  $\mu_g$ , c'est-à-dire que, pour tout point  $x$  de  $M$ ,  $p_M(\cdot, x, \cdot)$  est l'unique solution de

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta u(\cdot, \cdot) + \frac{\partial}{\partial t} u(\cdot, \cdot) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, \cdot) \mu_g = \delta_x(\cdot) \end{cases}$$

où la condition initiale doit être vérifiée au sens de la convergence faible des mesures. Nous avons défini dans le chapitre 5 le noyau de la chaleur  $k_M$  d'une variété riemannienne qui vérifie, pour tout point  $x$ , la condition initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, \cdot) dv_g = \delta_x(\cdot)$$

au sens de la convergence faible des mesures. Remarquons que les deux noyaux sont reliés par la relation

$$p_M = Vol(M, g)k_M$$

•**Définition du plongement d'une variété dans  $C_0([0, +\infty], l^2)$  :**

Notons  $C_0([0, +\infty], l^2)$  l'ensemble des courbes continues  $\gamma : [0, +\infty] \rightarrow l^2$  (où  $l^2$  est l'ensemble des suites de carré sommable) telles que  $\gamma(0) = \gamma(\infty) = 0$ . L'espace  $C_0([0, +\infty], l^2)$  est considéré comme un espace métrique muni de la distance

$$\Theta(\gamma, \sigma) = \sup\{\|\gamma(t) - \sigma(t)\|_{l^2} / t \in [0, +\infty]\}$$

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte munie de la mesure  $\frac{1}{Vol(M, g)}dv_g$  et  $\Phi = \{\phi_i\}$  un système complet orthonormal (pour la mesure  $\frac{1}{Vol(M, g)}dv_g$ ) de fonctions propres sur  $M$ , où  $\phi_i$  est associée à la valeur propre  $\lambda_i(M)$ . Pour une paire  $(M, \Phi)$  on définit une application de  $M$  dans  $C_0([0, +\infty], l^2)$  par

$$I_\Phi[x](t) = \left( e^{-(t+1/t)/2} e^{-\lambda_i(M)t/2} \phi_i(x) \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

$I_\Phi$  est en fait un plongement de  $M$  dans  $C_0([0, +\infty], l^2)$  et vérifie de plus

$$\Theta(I_\Phi[x], I_\Phi[x'])^2 = \sup_{t>0} e^{-(t+1/t)} (p_M(t, x, x) + p_M(t, x', x') - 2p_M(t, x, x'))$$

•**Définition de la distance sur  $M$  induite par le plongement :**

Si l'on définit la distance  $d_M^{spec}$  sur  $M$  par

$$d_M^{spec}(x, x')^2 = \sup_{t>0} e^{-(t+1/t)} (p_M(t, x, x) + p_M(t, x', x') - 2p_M(t, x, x')),$$

le plongement  $I_\Phi$  est un plongement isométrique de l'espace métrique  $(M, d_M^{spec})$  dans  $C_0([0, +\infty], l^2)$ .

•**Définition de la distance spectrale entre deux variétés :**

**Définition F.1.**

Soient  $(M, g)$  et  $(N, h)$  deux variétés riemanniennes compactes et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Une application mesurable  $f : M \rightarrow N$  est une  $\varepsilon$ -approximation spectrale si elle satisfait

$$e^{-(t+1/t)} |p_M(t, x, x') - p_N(t, f(x), f(x'))| < \varepsilon$$

pour tout temps  $t > 0$  et tous les points  $x$  et  $x'$  de  $M$ .

**Définition F.2.**

Soient  $(M, g)$  et  $(N, h)$  deux variétés riemanniennes compactes.

La distance spectrale entre  $(M, g)$  et  $(N, h)$  est définie par

$$d_{\text{spec}}((M, g), (N, h)) = \inf\{\varepsilon > 0 / \text{ il existe deux } \varepsilon\text{-approximations} \\ f : M \longrightarrow N \text{ et } h : N \longrightarrow M\}$$

**Remarque :** Si  $d_{\text{spec}}((M, g), (N, h)) = 0$ , on peut montrer qu'il existe un homéomorphisme  $f : M \longrightarrow N$  qui préserve le noyau de la chaleur ainsi que la mesure. Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} 4t \log p_M(t, x, y) = -d_M^2(x, y),$$

il en découle que  $f$  est une isométrie qui préserve la mesure. Ainsi, si  $d_{\text{spec}}((M, g), (N, h)) = 0$ , les variétés  $(M, g)$  et  $(N, h)$  sont isométriques.

**Cas général**

Dans un premier article (voir [KK1]), A. Kasué et H. Kumura montrent qu'il suffit de majorer uniformément (sur la diagonale) le noyau de l'opérateur la chaleur sur une famille de variétés riemanniennes compactes pour montrer que cette famille est précompacte pour la distance spectrale ainsi que pour la distance de Gromov-Hausdorff. Ils étudient ensuite de manière très précise l'espace compactifié (pour la distance spectrale) de ce type de famille dans [KK1], [KK2] et [Ka].

**Théorème F.3.** ([KK2], théorèmes 2.3, 2.6 et 3.1)

Soit  $\mathcal{F} = \{(M, g)\}$  une famille de variétés riemanniennes compactes telle qu'il existe deux constantes  $C$  et  $\nu$  telles que, pour toute variété riemannienne  $M$  de  $\mathcal{F}$ , pour tout temps  $t \in ]0, 1]$  et tout point  $x$  de  $M$ ,

$$p_M(t, x, x) \leq \frac{C}{t^{\nu/2}}$$

Alors,

(i) La famille  $\mathcal{F}$  est précompacte pour la distance spectrale et pour la distance de Gromov-Hausdorff.

(ii) Soit  $((M_n, g_n, \mu_{M_n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de Cauchy de  $\mathcal{F}$  où  $\mu_{M_n}$  est la mesure normalisée. Il existe alors un espace de Hausdorff compact et connexe, une mesure de Radon positive  $\mu_X$  sur  $X$  et une forme de Dirichlet régulière  $(\mathcal{E}_X, D[\mathcal{E}_X])$  définie sur  $L^2(X, \mu_X)$  tel que le semi-groupe  $p_{X,t}$  sur  $L^2(X, \mu_X)$  (fortement) continu associé à la forme de Dirichlet possède un noyau  $p_X(t, x, x')$ .

De plus, il existe une paire de  $\varepsilon_n$ -approximations spectrales  $f_n : (M_n, k_{M_n}) \longrightarrow (X, k_X)$  et  $h_n : (X, k_X) \longrightarrow (M_n, k_{M_n})$  (où  $\varepsilon_n$  tend vers zéro), et ces deux

applications sont aussi des  $\varepsilon_n$ -approximations de Gromov-Hausdorff entre  $(M_n, d_{M_n}^{spec})$  et  $(X, d_X^{spec})$ , où  $d_X^{spec}$  est définie par

$$d_X^{spec}(x, x')^2 = \sup_{t>0} e^{-(t+1/t)} (p_X(t, x, x) + p_X(t, x', x') - 2p_X(t, x, x'))$$

De plus, la suite des mesures  $f_{n*}\mu_{M_n}$  converge vers  $\mu_X$  pour la topologie faible\* quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

(iii) Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la  $i^{\text{ième}}$  valeur propre  $\lambda_i(M_n)$  converge vers la  $i^{\text{ième}}$  valeur propre  $\lambda_i(X)$  du générateur  $\mathcal{L}_X$  de la forme de Dirichlet  $\mathcal{E}_X$  et, si  $u$  est une fonction propre de  $M_n$  associée à la valeur propre  $\lambda_i(M_n)$  et telle que  $\|u\|_{L^2} = 1$ , il existe une fonction propre  $v$  de  $\mathcal{L}_X$  associé à la valeur propre  $\lambda_i(X)$  et tel que  $\|v\|_{L^2} = 1$ , tel que

$$\sup_{a \in M_n} |u(a) - v(f_n(a))| < \varepsilon_{n,i}; \quad \sup_{x \in X} |u(h_n(x)) - v(x)| < \varepsilon_{n,i}$$

où  $\varepsilon_{n,i}$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Les fonctions propres de  $\mathcal{L}_X$  sont toutes continues.

Une question naturelle qui se pose une fois le théorème F.3 établi, est de savoir si le compactifié de la famille  $\mathcal{F}$  pour la distance spectrale coïncide avec le compactifié de cette même famille pour la distance de Gromov-Hausdorff; plus précisément, si  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente pour la distance spectrale vers un espace métrique compact  $X$  munis de la distance  $d_X^{spec}$ , on peut se demander s'il existe une distance de longueur  $\delta_X$  sur  $X$  telle que la suite  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'espace de longueur  $(X, \delta)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff. Dans le cas général, on a le

**Théorème F.4.** ([KK1], théorème )

Soient  $f_n : (M_n, k_{M_n}) \rightarrow (X, p_X)$ ,  $h_n : (X, p_X) \rightarrow (M_n, p_{M_n})$ ,  $\mathcal{E}_X$  et  $p_X$  définis dans le théorème F.3. Alors,

(i) Il existe une sous-suite  $\{M_m, g_m\}$ , une suite de réels strictement positifs  $\{\varepsilon_m\}$  qui tend vers zéro et une pseudo-distance continue  $\delta$  sur  $X$  telles que les applications  $f_m : (M_m, p_{M_m}) \rightarrow (X, p_X)$ ,  $h_m : (X, p_X) \rightarrow (M_m, p_{M_m})$  soient des  $\varepsilon_m$ -approximations de Gromov-Hausdorff entre  $(M_m, g_m)$  et  $(X, \delta)$ .

(ii) Le noyau  $p_X$  admet la majoration suivante pour tout temps  $t \in [0, 1]$ , et tous les points  $x$  et  $x'$  de  $X$  :

$$p_X(t, x, x') \leq \frac{C(\alpha)}{t^{\nu/2}} \exp\left(-\frac{\delta^2(x, x')}{(4 + \alpha)t}\right)$$

où  $\alpha$  est un réel strictement positif et  $C(\alpha)$  est une constante qui ne dépend que de  $C$  et de  $\alpha$ .

**Remarque F.5.** Le point (i) du théorème F.4 implique d'après l'exemple 1.27 que la sous-suite  $\{M_m, g_m\}$  converge vers l'espace de longueur  $(X/\sim, \delta)$  qui consiste à identifier les points de  $X$  à distance nulle. Ceci signifie que  $(\mathcal{F}, d_{spec})$  et  $(\mathcal{F}, d_{GH})$  n'ont pas nécessairement la même adhérence.

**Etude du cas particulier où la courbure de Ricci est  
uniformément minorée**

Dans [KK2], les auteurs raffinent la description de l'espace-limite des familles de variétés dont le noyau de la chaleur est uniformément majoré et dont la courbure de Ricci est uniformément minorée :

**Théorème F.6.** ([KK2], théorèmes 3.5, 3.6, 3.8, 4.5)

Soient  $m$ ,  $k$  et  $D$  trois réels strictement positifs.

Considérons la famille  $\mathcal{F}_{k,D}$  des variétés riemanniennes compactes de dimension  $m$  dont la courbure de Ricci est uniformément minorée par  $-k$ , dont le diamètre est uniformément majoré et telle qu'il existe deux constantes  $C$  et  $\nu$  telles que, pour toute variété riemannienne  $(M, g)$  de  $\mathcal{F}_{k,D}$ , pour tout temps  $t \in ]0, 1]$  et tout point  $x$  de  $M$ ,

$$p_M(t, x, x) \leq \frac{C}{t^{\nu/2}}$$

Alors

(i) La famille  $\mathcal{F}_{k,D}$  est précompacte pour la distance spectrale ainsi que pour la distance de Gromov-Hausdorff; de plus, les théorèmes F.3 et F.4 s'appliquent pour toute suite de Cauchy sur cette classe;

(ii) Sur  $\mathcal{F}_{k,D}$ , la topologie uniforme donnée par la distance spectrale est plus fine que celle donnée par la distance de Gromov-Hausdorff. En fait, si une suite  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{F}_{k,D}$  converge pour la distance spectrale, alors il existe une distance  $d$  sur  $X$  telle que la suite  $((M_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'espace  $(X, d)$  pour la distance de Gromov-Hausdorff (en particulier, la distance  $d$  est une distance de longueur).

De plus, pour tous les points  $x$  et  $y$  de  $X$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} 4t \log p_X(t, x, y) = -d^2(x, y)$$



# Bibliographie

- [BBG1] P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot. Embedding Riemannian manifolds by their heat kernel. *Geom. Funct. Anal.*, 4 (4), p.373-398, 1994.
- [BBG2] P. Bérard, G. Besson, and S. Gallot. Sur une inégalité isopérimétrique qui généralise celle de Paul Lévy-Gromov. *Invent. Math.*, 80 (2), p.295-308, 1985.
- [BBI] D. Burago, Y-D. Burago, S. Ivanov. *A course in metric geometry, Graduate Studies in Mathematics*, volume 33. Am. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [BCG1] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot. Un lemme de Margulis sans courbure et ses applications. *Prépublication de l'Institut Fourier*, 595, p.1-59, 2003.
- [BCG2] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot. Lemme de Schwarz réel et applications géométriques. *Acta Math.*, 183 (2), p.145-169, 1999.
- [Bo] M. Bordoni. Comparing heat operators through local isometries or fibrations. *Bull. Soc. Math. France*, 128(2), p.151-178, 2000.
- [BZ] Y-D Burago, V-A. Zalgaller. *Geometric inequalities, A serie of Comprehensive Studies in Mathematics*, volume 285. Springer-Verlag, Berlin.
- [CC1] J. Cheeger, T.-H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.*, 46 (3), p.406-480, 1997.
- [CC2] J. Cheeger, T.-H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II. *J. Differential Geom.*, 54 (1), p.13-35, 2000.
- [CC3] J. Cheeger, T.-H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III. *J. Differential Geom.*, 54 (1), p.37-74, 2000.
- [CG] J. Cheeger, D. Gromoll. On the lower bound for the injectivity radius of  $1/4$ -pinched Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 15 (3), p.437-442 (1981), 1980.

- [Co] T.-H. Colding. Ricci curvature and volume convergence. *Ann. of Math.*, 145(3) p.477-501, 1997.
- [DGM] A. Debiard, B. Gaveau, E. Mazet. Théorèmes de comparaison en géométrie riemannienne. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 12 (2), p.391-425, 1976/77.
- [Fe] S.-C. Ferry. Topological finiteness theorems for manifolds in Gromov-Hausdorff space. *Duke Math. J.*, 74 (1), p.95-106, 1994.
- [Fu1] K. Fukaya. Theory of convergence for riemannian orbifolds. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 12 (1), p.121-160, 1986.
- [Fu2] K. Fukaya. A boundary of the set of the riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters *J. Diff. Geom*, 28, p.1-21, 1986.
- [Ga1] S. Gallot. Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes. *Astérisque*, (163-164), p.5-6, p.31-91, 281 (1989), 1988. On the geometry of differentiable manifolds (Rome, 1986).
- [Ga2] S. Gallot. Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature, *Astérisque*, (157-158), p.191-216 (1988). SMF edit.
- [Go] C. Godbillon. *Eléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, 1971.
- [GP] R.-E. Greene, P. Petersen, V. Little topology, big volume. *Duke Math. J.*, 67 (2), p.273-290, 1992
- [Gr] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes, Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*, volume 1. CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [Ka] A. Kasue. Convergence of Riemannian manifolds and Laplace operators. I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52 (4), p.1219-1257, 2002.
- [KK1] A. Kasue, H. Kumura. Spectral convergence of Riemannian manifolds. *Tohoku Math. J. (2)*, 46 (2), p.147-179, 1994.
- [KK2] A. Kasue, H. Kumura. Spectral convergence of Riemannian manifolds. II. *Tohoku Math. J. (2)*, 48 (1), p.71-120, 1996.
- [LY] P. Li and S.-T. Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.*, 156 (3-4), p.153-201, 1986.
- [Ma] A. Manning. Topological entropy for geodesic flows. *Ann. of Math. (2)*, 110 (3), p.567-573, 1979.
- [Pe] S. Peters. Convergence of riemannian manifolds. *Compositio Math.*, 62, p.3-16, 1987.
- [Pet] P. Petersen, V. Gromov-Hausdorff convergence of metric spaces. In *Differential geometry : Riemannian geometry (Los Angeles, CA,*

- 1990), volume 54 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, p.489-504. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Pl] C. Plaut. Geometrizing infinite-dimensional locally compact groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (3), p.941-962, 1996.
- [Ro] G. Robert. Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibrés. *Thèse* 1994.
- [Sa] S. Sabourau. Sur quelques problèmes de la géométrie des systoles. *Thèse* 2001.
- [Sak] T. Sakai. *Riemannian geometry*, volume 149 of *Translations of Mathematical Monographs*. Am. Math. Soc., 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author.
- [Sp] E.-H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [SW] C. Sormani, G. Wei. Hausdorff convergence and universal covers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 (9), p.3585-3602 (electronic), 2001.
- [Tu1] W. Tuschmann. Hausdorff convergence and the fundamental group. *Math. Zeit.*, 218 (2), p.207-211, 1995.
- [Tu2] W. Tuschmann. Erratum : "Hausdorff convergence and the fundamental group" [Math. Zeit. **218** (1995), no. 2, p.207-211]. *Math. Zeit.*, 224 (3), p.493, 1997.