



HAL
open science

Commande predictive a base de programmation semi definie

Ernesto Granado

► **To cite this version:**

Ernesto Granado. Commande predictive a base de programmation semi definie. Automatique / Robotique. INSA de Toulouse, 2004. Français. NNT: . tel-00009241

HAL Id: tel-00009241

<https://theses.hal.science/tel-00009241v1>

Submitted on 12 May 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Préparée au

Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

En vue de l'obtention du

Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Spécialité: Systèmes Automatiques

par

Ernesto GRANADO MIGLIORE

COMMANDE PREDICTIVE A BASE DE PROGRAMMATION SEMI DEFINIE

Soutenue le 5 juillet 2004 devant le jury :

Président	J.	ERSCHLER
Directeurs de thèse	J.	BERNUSSOU
	G.	GARCIA
	W.	COLMENARES
Rapporteurs	P.	BOUCHER
	M.	M'SAAD

Rapport LASS N° 04341

Avant-Propos

L'aboutissement de ce travail de thèse a été possible grâce à la collaboration d'un groupe de personnes, tant en France qu'au Vénézuéla, auxquelles je dois exprimer mes remerciements.

Une grande partie du travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS) du CNRS, à Toulouse, au sein du groupe "Méthodes et Algorithmes en Commande (MAC)".

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Jean-Claude LAPRIE et Malik GHALLAB, respectivement ancien et actuel Directeurs du LAAS, pour m'avoir accueilli dans le laboratoire, ainsi que Mademoiselle Sophie TARBOURIECH, Directeur de Recherche et responsable du groupe MAC.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Jaques ERSCHLER, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Toulouse, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

J'exprime ma gratitude à Messieurs Patrick BOUCHER, Professeur à l'École Supérieure d'Électricité (SUPELEC) et Mohammed M'SAAD, Professeur à l'Institut des Sciences de la Matière et du Rayonnement (ISMRA), pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et pour leurs précieuses et judicieuses remarques.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à mes Directeurs de thèse: à Monsieur Jacques BERNUSSOU, directeur de recherche du CNRS-LAAS, pour sa patience sans limites sa rigueur scientifique, son soutien permanent et pour la profonde attention qu'il a porté au mémoire; à Monsieur William COLMENARES, Professeur du Département de Processus et Systèmes à l'Université Simón Bolívar (USB) au Vénézuéla, pour son enthousiasme, sa confiance, ses bonnes idées lors des moments clés de cette thèse et pour sa disponibilité malgré ses nombreuses activités et à Monsieur Germain Garcia, Professeur à l'INSA de Toulouse et responsable du "Pôle MOCOSY" au CNRS-LAAS, pour ses conseils et sa collaboration fructueuse à la réalisation de ce travail. Il est un honneur pour moi, avoir eu l'occasion de travailler au côté de personnes d'une qualité humaine exceptionnelle.

Je remercie vivement les personnes du Programme de Coopération de Post-graduation (PCP) "Optimisation et intégration des processus" en France et les personnes du "Fondo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación" (FONACIT) au Vénézuéla, qui ont rendu possible le déroulement de ce travail de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Alfonso ALONSO, Professeur à l'USB et collègue au LAAS, pour sa disponibilité permanente pour rendre service malgré ses activités et qui m'a aidé à résoudre les problèmes dans des terres éloignées.

J'adresse aussi ma sympathie à tous mes collègues du Département de Processus et Systèmes à l'USB, le personnel administratif et membres du groupe MAC pour leur aide et leur collaboration. Et à tous ceux qui m'ont apporté leur aide, à un moment ou à un autre: Brigitte, à l'imprimerie, le personnel administratif et de la documentation.

Et enfin, cet avant-propos serait incomplet sans un grand merci à Selene et à ma famille pour leur soutien, leur patience et leur grande disponibilité pour m'offrir leur aide, et qui ont contribué à mon enrichissement personnel.

Table des matières

<i>Table des matières</i>	<i>i</i>
<i>Notations</i>	<i>v</i>
<i>Introduction générale</i>	<i>1</i>
Chapitre 1 Introduction à la commande prédictive	5
1.1 Résumé historique de la commande prédictive	7
1.2 La méthodologie du MPC	9
1.3 Éléments du MPC	10
1.3.1 Modèle de prédiction	11
1.3.1.1 Modèle du processus	11
1.3.1.2 Modèle de perturbation	13
1.3.2 Fonction objectif et obtention de la loi de commande	13
1.3.2.1 Paramètres	14
1.3.2.2 Trajectoire de référence	14
1.3.2.3 Contraintes	14
1.4 Modélisation des contraintes	16
1.4.1 Restrictions sur l'amplitude du signal de commande	16
1.4.2 Restrictions sur la vitesse de variation du signal de commande.	17
1.4.3 Restrictions sur l'amplitude de la sortie	17
1.4.4 Restrictions sur les oscillations permises dans la sortie du système	18
1.4.5 Restrictions pour éviter des comportements de phase de non minimale	18
1.4.6 Restrictions sur l'état final atteint	19
1.5 Conclusion	19
Chapitre 2 Sur la stabilité et la robustesse en MPC	21
2.1 Stabilité dans MPC avec des contraintes	21
2.1.1 Stabilité de systèmes dynamiques	22
2.1.1.1 Définitions	23
2.1.1.2 Méthode directe ou deuxième méthode de Lyapunov	25
2.1.1.3 Analyse de stabilité de Lyapunov de systèmes en temps discret	26
2.1.2 Solutions au problème de stabilité en MPC	27

2.1.2.1 Première Solution	27
2.1.2.2 Seconde Solution	29
2.2 Robustesse en MPC avec des contraintes	31
2.2.1 Modèles d'incertitude	33
2.2.1.1 Incertitude bornée en norme	34
2.2.1.2 Incertitude polyédrique	34
2.2.2 Incertitude en MPC	35
2.2.2.1 Réponse impulsionnelle tronquée	35
2.2.2.2 Matrice de transfert	35
2.2.2.3 Incertitude globale	36
2.2.2.4 Descriptions multimodèle	37
2.3 Conclusion	38
Chapitre 3 Commande robuste et LMI	39
3.1 Inégalités Matricielles Linéaires	39
3.1.1 Définition de LMI	39
3.1.2 Importance des LMI's	40
3.1.2.1 La convexité	40
3.1.2.2 De multiples LMIs peuvent être exprimées comme une simple	40
3.1.2.3 Inégalités non linéaires (convexes) comme inégalités linéaires	41
3.2 Stabilizabilité quadratique de systèmes discrets incertains	42
3.2.1 Stabilizabilité par retour d'état	42
3.2.2 Stabilizabilité par contrôleur dynamique	43
3.2.2.1 Construction du contrôleur	44
3.3 Critères de performance	44
3.3.1 Critère quadratique	45
3.3.2 Critère H_2 ($D=0$)	45
3.3.3 Critère H_∞	46
3.3.4 Localisation de pôles	47
3.4 Conception de contrôleurs en utilisant des critères de performance	49
3.4.1 Contrôleur H_2	49
3.4.1.1 Incertitude de type polyédrique	49
3.4.1.2 Incertitude bornée en norme	50
3.4.2 Contrôleur H_∞	51
3.4.3 Contrôleur avec localisation de pôles	52
3.5 MPC robuste basé en LMI	53
3.6 Conclusion	55
Chapitre 4 MPC en utilisant les inégalités matricielles linéaires	57
4.1 Introduction	57
4.2 Formulation du problème	58
4.2.1 Modèle mathématique du système étendu	59
4.2.2 Fonction de coût	60
4.2.3 Caractérisation des états non mesurés (domaine d'appartenance)	61
4.2.4 Définition des contraintes	63

4.3 Conception du contrôleur quadratique	64
4.3.1 Fonction objectif et ellipsoïde initial	65
4.3.2 Contrôleur stabilisant	66
4.3.3 Contraintes sur l'entrée et sur la sortie	67
4.3.3.1 Contraintes sur l'entrée	68
4.3.3.2 Contraintes sur la sortie	69
4.3.4 Stabilité "robuste" du système	69
4.4 Construction du contrôleur	71
4.5 Autres caractérisation des états non mesurée	72
4.5.1 Information statistique	73
4.5.2 Utilisation d'un observateur	76
4.5.2.1 Plusieurs schémas sont possibles	77
4.6 Exemples numériques	78
4.6.1 Premier exemple (système du 2 ^{me} ordre)	78
4.6.2 Second exemple (système d'ordre quatre)	80
4.7 Conclusion	84
Chapitre 5 MPC robuste basé LMIs	85
5.1 Introduction	85
5.2 Position du problème	86
5.2.1 Modèle mathématique du système incertain étendu	87
5.2.2 Fonction de coût	87
5.2.3 Caractérisation des états non mesurés	88
5.3 Conception du contrôleur robuste quadratique	89
5.3.1 Contrôleur robuste stabilisant	90
5.3.2 Fonction objectif et ellipsoïde initial	91
5.4 Construction du contrôleur robuste	92
5.5 Procédure de calcul du contrôleur robuste	93
5.5.1 Algorithme	93
5.6 Contrôleur dynamique robuste: incertitude polytopique	94
5.7 Exemples numériques	95
5.7.1 Premier exemple (système du 2 ^{me} ordre)	96
5.7.2 Second exemple (système d'ordre quatre)	98
5.8 Conclusion	102
Chapitre 6 MPC robuste basé LMI's (modèle entrée-sortie)	103
6.1 Introduction	103
6.2 Position du problème	104
6.2.1 Représentation d'états (équivalents)	105
6.2.2 Fonction objectif	106
6.2.3 Définition de contraintes	107
6.3 Conception du contrôleur quadratique	107
6.3.1 Fonction objectif et ellipsoïde initial	108

6.3.2 Contrôleur robuste stabilisant _____	109
6.3.3 Contraintes sur l'entrée et sur la sortie _____	110
6.3.3.1 Contraintes sur l'entrée _____	110
6.3.3.2 Contraintes sur la sortie _____	111
6.4 Exemples numériques _____	112
6.4.1 Premier exemple (système SISO) _____	112
6.4.2 Second exemple (système MIMO) _____	113
6.5 Conclusion _____	116
<i>Conclusions générale</i> _____	<i>117</i>
<i>Références bibliographiques</i> _____	<i>121</i>

Notations

\mathfrak{R}^n	Corps des nombres réels.
I	Matrice identité.
0	Matrice nulle.
M_{ij}	Élément de M situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne.
$(\bullet)^T$	Transposée de (\bullet) .
$(\bullet)^{-1}$	Inverse de (\bullet) .
$\ (\bullet)\ $	Norme Euclidéenne de (\bullet) .
s	Variable de Laplace.
δ	opérateur de décalage.
$\min_{x \in X} J$	Valeur minimale de J sur X .
$\bar{\sigma}(M)$	Valeur singulière maximale de la matrice M .
Co	Enveloppe convexe.
tr	Trace de une matrice

Les symboles suivants indiquent la fin de:

- Une définition.
- Une démonstration.
- Une observation.
- ▷ Un lemme.
- Un théorème.

Introduction générale

Actuellement, avec les progrès observés dans le domaine des ordinateurs numériques, il est presque impossible de trouver un secteur de l'activité humaine qui ne soit touché par ce phénomène.

L'ingénierie de la commande, n'a pas échappé à ce mouvement et change rapidement avec le développement conséquent qui se produit dans le domaine numérique et, en particulier, avec la croissance de la capacité de calcul qui est accompagnée, en plus, d'une réduction de coût.

L'emploi de l'ordinateur dans les processus de commande a permis l'implantation de techniques compliquées et sophistiquées qui permettent le développement de stratégies efficaces tout en restant de coût raisonnable ce qui était pratiquement impossible d'envisager avec les mécanismes et les dispositifs précédents. Des exemples de telles techniques incluent la commande non linéaire, la commande multivariable et la commande robuste.

La commande prédictive basée modèle (MPC, sigle Anglais correspondant à Model Predictive Control) connue plus simplement comme commande prédictive, doit aussi son origine et son développement à l'emploi de l'ordinateur dans les processus de commande.

Le MPC est une des théories de commande avancée qui a été intensivement étudiée par la communauté des chercheurs, ces dernières décennies. La raison peut être attribuée au fait qu'elle permet d'inclure de manière explicite des restrictions sur les variables du système dans l'étape de calcul de la loi commande ou de conception du contrôleur.

Tous les processus réels sont soumis à des contraintes; les vannes de commande, par exemple, sont limitées par les positions totalement ouvertes ou fermées. Des raisons de sécurité, d'environnement, des considérations économiques ou des limitations propres aux capteurs ou aux actionneurs (vitesse), imposent des limites sur les variables du processus à commander.

Traditionnellement, on concevait les systèmes de commande sans prendre en compte ces restrictions mentionnées. Ceci pouvait affecter le comportement du processus, et écartier sensiblement la réponse du système contrôlé de celle, idéale, souhaitée.

Le MPC se différencie des autres techniques de commande par le fait que doit être résolu en ligne, pour le système en boucle ouverte, un problème d'optimisation à chaque instant d'échantillonnage en tenant compte de l'état réel mesuré du processus. La loi de commande est obtenue, en général, par le biais de l'optimisation d'un critère qui pénalise l'effort de commande et l'état du système. Du profil de commande obtenu par la solution du problème, on applique au système à commander le premier signal seulement, et le même processus de calculs est répété pour l'instant suivant à partir de la mesure nouvelle. En ce sens on peut également parler de boucle fermée intermittente.

Naturellement, le succès de cette technique dépend du degré de précision du modèle du système à contrôler. Des erreurs de modélisation entraînent une dégradation dans la performance du système commandé et peuvent même causer une instabilité, puisque la prédiction des sorties du système dans les moments de temps futurs, est faite par utilisation du modèle.

Dans l'étape de conception de la commande MPC, il est désirable de pouvoir prédire le comportement dynamique, pour cela il est nécessaire d'avoir une connaissance précise des constituants du processus. Toutefois, dans les problèmes réels, la difficulté vient du fait que, souvent il n'existe pas de modèle précis du processus. Ceci peut avoir des raisons multiples: l'information a priori est incomplète, les caractéristiques varient avec le temps ou des perturbations inconnues agissent sur le processus à maîtriser.

Pour cette raison, il est désirable de faire la conception de contrôleurs en information incomplète sur le comportement dynamique des processus, et de les rendre insensibles aux incertitudes ou perturbations qui sont présentes dans le modèle réel. Autrement dit, il est désirable que les contrôleurs soient Robustes. Un système robuste est celui qui maintient ses propriétés (stabilité et performance) en présence d'incertitudes ou de perturbations internes ou externes.

Concrètement, on souhaite la conception de contrôleurs qui maintiennent les propriétés du système non seulement pour la valeurs nominale, mais aussi pour tous les éléments de la famille définie par des incertitudes qui sont caractérisées a priori. Il existe principalement deux manières pour satisfaire ces demandes: d'une part par conception d'une commande adaptative, qui consiste en un contrôleur qui a la capacité de modifier les paramètres réglables de la commande par apprentissage en ligne sur le processus, (plus d'information sur ce sujet peut être trouvée, par exemple, dans Åström et Wittenmark (1989) et Sastry et Bodson (1990)), et, d'autre part, par conception d'un contrôleur fixe pour lequel ont été considérées a priori les incertitudes du système et qui est donc un contrôleur robuste. Ce type de conception, est celui étudié dans ce travail.

Bien que l'information dont on dispose sur un système soit incomplète, il est légitime de faire l'hypothèse que l'on pourra toujours effectuer des essais permettant de quantifier d'une certaine manière le domaine d'incertitude et de le décrire dans les termes qui conviennent pour la conception du contrôleur.

S'appuyant sur les avancées de la théorie de la commande robuste, il est possible d'inclure des caractéristiques de robustesse en MPC de manière à pouvoir garantir stabilité et performance adéquate quand le modèle du processus est incertain.

L'objectif de ce travail est d'étudier une procédure systématique que permet de concevoir un contrôleur robuste par retour de sortie basé sur la stratégie MPC qui doit répondre aux deux exigences: garantir la stabilité des systèmes en boucle fermée et satisfaire certaines exigences exprimées sous forme de contraintes et de sous optimalité vis à vis d'un critère donné. Ceci doit se réaliser en présence d'incertitudes dans le modèle.

L'extension de travaux antérieurs au cas du retour de sortie se justifie, bien sûr, d'un point de vue pratique car, en général, on a seulement accès à une information partielle sur l'état du système à commander.

La synthèse du compensateur sera basée sur des techniques de LMIs (Boyd, El Ghaoui, Feron et Balakrishnan, 1994). Il existe de nos jours des algorithmes puissants qui permettent d'obtenir la solution de problème à base de LMI en un temps polynomial, parfois comparable à ce qui est nécessaire pour obtenir la solution analytique d'un problème semblable. Ceci fait que l'optimisation par LMI puisse être faite en ligne ce qui s'avère essentiel pour la stratégie MPC. En outre, cette formulation permet d'utiliser beaucoup de résultats de problèmes de commande Robuste et de commande multicritère développés dans le cadre de la théorie des LMIs.

Cette recherche propose une extension des résultats développés dans le travail de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), dans lequel on conçoit un contrôleur robuste de retour d'état, qui satisfait des restrictions sur l'entrée, sur la sortie et sur les états.

Ce travail est divisé en six chapitres qui seront décrits brièvement par la suite.

Dans le chapitre 1 une introduction est faite sur la commande prédictive: historique de cette stratégie de commande, méthodologie et techniques. La manière de formuler les contraintes en MPC y est décrite.

Les chapitres 2 et 3 rappellent une variété de résultats utilisés dans le travail. On énonce le critère de stabilité de Lyapunov, on révisé les solutions au problème de stabilité et robustesse en MPC, on décrit d'importants modèles d'incertitudes. Il est fait une introduction aux inégalités linéaires matricielles, à la stabilisabilité quadratique et aux principaux critères utilisés comme: le critère quadratique, les normes H_2 et H_∞ , le placement de pôles. On pose aussi les conditions pour la conception de contrôleurs dynamiques qui satisfont ces critères.

Le chapitre 4 contient une partie des résultats principaux de ce travail. On énonce un théorème qui donne des conditions suffisantes pour obtenir un contrôleur dynamique de retour de sortie, qui assure la stabilité d'un système nominal avec restrictions sur les variables du processus. La synthèse du contrôleur est obtenue par la solution d'un problème posé en fonction d'inégalités matricielles linéaires. On démontre l'efficacité des résultats obtenus au moyen de deux exemples numériques.

Dans le chapitre 5 une extension des travaux développés dans le chapitre précédent est fait au cas de systèmes incertains, c'est-à-dire, sont données des conditions pour l'obtention d'un contrôleur dynamique robuste de retour de sortie. On étudie le cas de systèmes avec incertitude bornée en norme et incertitude polytopique. On vérifie les résultats au moyen de deux exemples numériques.

Le chapitre 6 présente aussi la synthèse d'un contrôleur robuste mais, en utilisant uniquement la sortie du système. La conception est faite à partir du modèle entrée-sortie. À partir de celui-ci, on dérive une représentation équivalente de variables d'état lequel dépend uniquement des sorties et des entrées passées (valeurs connues). De cette manière il est possible d'utiliser des algorithmes de conception de contrôleurs robustes prédictifs de retour d'états.

Pour finir, il est proposé une conclusion générale où sont soulignés les résultats principaux de ce travail ainsi que quelques éléments de prospective.

Chapitre 1

Introduction à la commande prédictive

Le but principal de la commande de systèmes, est de pouvoir satisfaire les objectifs définis par le cahier des charges, de manière la plus performante possible. Il s'agit, par exemple, de contrôler certains signaux (de sortie) par actions sur d'autres signaux (d'entrée) de sorte qu'il soit possible de pouvoir satisfaire les objectifs en présence d'incertitudes et changements des caractéristiques du processus (modèle) et de restrictions sur les variables opérationnelles. Il s'agit là d'un problème pratique car bien des processus réels présentent ces caractéristiques.

Les actionneurs ont souvent un champ limité d'opération (position totalement ouverte ou fermée). Entrent en compte des raisons de sécurité, d'environnement ou de propres limitations des capteurs, des limites sur les variables des processus, (e.g. des niveaux, des flux, des températures et des pressions). Tout ceci rend nécessaire de considérer des contraintes dans l'étape de conception et d'implantation du contrôleur pour obtenir une meilleure performance du système.

La synthèse de la commande sans prendre en compte les restrictions mentionnées peut écartier la réponse du système commandé de celle désirée.

Les techniques de commande prédictive (MPC) (Model Predictive Control) constituent des outils puissants pour affronter le problème de commande avec restrictions. Une synthèse sur ces méthodes où sont exposées les caractéristiques les plus représentatives peut être trouvée dans Camacho et Bordons (1998) et dans Maciejowski (2002).

Le MPC est une technique de commande pour systèmes à dynamique relativement lente ou, du moins, compatible avec le fait qu'à chaque temps d'échantillonnage le signal de commande découle de la résolution d'un problème d'optimisation.

La commande prédictive constitue un domaine ample et varié et intègre des disciplines comme la commande optimale, la commande multivariable et la commande avec contrainte. Les avantages les plus importants que le MPC présente par rapport à d'autres méthodes sont les suivants:

- Il peut être employé pour contrôler une grande variété de processus, des systèmes avec un comportement relativement simple à d'autres qui présentent un comportement dynamique peu habituel comme ceux avec de grands retards, oscillant fortement, de phase non minimale ou instables. Également les systèmes multivariables et non linéaires rentrent dans le domaine d'application d'une telle approche.
- Il possède intrinsèquement la compensation de retard et la compensation par anticipation (feedforward) de perturbations mesurables.
- Le traitement des restrictions peut être inclus systématiquement pendant le développement de la conception et de l'implantation du contrôleur.
- Les concepts manipulés sont intuitifs et peuvent être assimilés par un personnel sans connaissance profonde en commande.

A côté de tous ces avantages, restent quelques inconvénients associés. L'un d'eux est la charge nécessairement élevée de calcul: la résolution des algorithmes numériques en ligne nécessite un volume et un temps de calcul plus grands que ceux impliqués, par exemple, par la mise en œuvre de contrôleurs classiques de type PID. Un autre inconvénient est dû au fait qu'il est nécessaire d'avoir un modèle approprié du processus. L'approche de commande prédictive est basée sur la connaissance d'un modèle et donc, les performances obtenues dépendront des écart existant entre le vrai processus et le modèle utilisé.

Néanmoins à l'heure actuelle, nombreux sont les travaux ainsi que le nombre d'applications des contrôleurs prédictifs fonctionnant avec succès dans l'industrie des processus. Les avances technologiques et l'utilisation de l'ordinateur a permis l'implantation de techniques plus compliquées et sophistiquées, ce qui a permis le développement de l'approche MPC. Parmi les aspects qui ont permis le développement du MPC notons:

- Les techniques de modélisation et d'identification qui sont maintenant diverses et puissantes. Il est, en particulier, possible de travailler dans des environnements défavorables avec un rapport signal sur bruit faible.
- Les techniques de commande robuste permettent l'utilisation d'algorithmes MPC où est intégré un modèle d'incertitudes.
- Les calculateurs numériques sont chaque jour plus rapides et permettent l'exécution en ligne d'algorithmes plus complexes tels que ceux abordant l'optimisation avec des contraintes.

Le MPC n'est pas une stratégie spécifique de commande mais c'est une méthodologie développée autour de certaines idées communes. Les principes qui apparaissent à un degré plus ou moins élevé dans les classes de la commande prédictive sont basiquement les suivants:

- Utilisation du modèle du système pour prévoir la sortie du système à de futurs moments du temps.
- Calcul des actions optimales de commande basé sur la minimisation d'une ou plusieurs fonctions de coût ce qui peut inclure des restrictions sur les variables du processus.
- La stratégie de l'horizon mobile, c'est-à-dire, à chaque itération et en se servant d'un modèle du processus, des futures consignes sur un certain horizon d'une fonction objectif, les futurs changements de la commande sont calculés en prenant en compte des restrictions qui agissent sur le processus. Finalement, seulement le premier signal de commande est appliqué au système, rejetant le reste et déplaçant l'horizon vers le futur, répétant les calculs dans la période suivante.

Les divers algorithmes, membres de la famille des MPC (appelée également LRPC - long range prédictive control), diffèrent seulement par le type de modèle à utiliser pour représenter le processus et les perturbations, la fonction de coût à optimiser, la prise en compte des contraintes. Ce type de commande est de nature "boucle ouverte", mais apparaît un aspect de "boucle fermée" intermittente à chaque itération de calcul.

1.1 Résumé historique de la commande prédictive

La fin de la décennie 70 été marquée par un intérêt pour le MPC et surtout dans ses développements industriels. En Europe, on peut citer les travaux de Richalet *et al.* (1976), (1978), où est formulé le problème de la commande heuristique prédictive basée modèle [MPHC "*Model Prédictive Heuristic Control*" appelé plus tard MAC "*Model Algorithmic Control*"]. Aux Etats-Unis, Cutler et Ramaker (1980), ont développé ce qui sera connu, plus tard, comme DMC "*Dynamic Matrix Control*". Un modèle dynamique du processus est utilisé dans les deux contributions (la réponse impulsionnelle dans la première et la réponse indicielle dans la seconde) en vue de quantifier l'effet des actions de commande sur la sortie, les commandes sont calculées pour minimiser l'erreur prédite sous restrictions d'exécution (fonction objectif). L'optimisation est répétée à chaque période d'échantillonnage, s'appuyant aussi sur les données mesurées sur le processus.

Rapidement ces techniques sont devenues populaires en particulier dans les processus industriels chimiques grâce à la simplicité de l'algorithme et au fait qu'est utilisé un modèle dérivé de la réponse impulsionnelle ou indicielle, ce qui nécessite moins de paramètres que la formulation dans l'espace d'état ou la formulation entrée-sortie (fonction transfert). Il s'agit d'approches plus intuitives qui exigent une information moindre pour l'identification. Un état complet de ces applications dans le secteur pétrochimique pendant les années quatre-vingt peut être trouvé dans García, Prett et Morari (1989); la plupart des applications se centrent dans le domaine des systèmes multivariables avec restrictions.

En même temps et indépendamment, certains groupes européens de recherche académique, avec une histoire forte dans la commande adaptative, ont commencé à développer des travaux basés sur les idées du prédictif pour des modèles formulés à partir d'une représentation entrée-sortie du système (fonction transfert). La commande auto-adaptative prédictive étendue développée par De Keyser et Van Cauwenberghe (1979) [le EPSAC "*Extended Prediction Self Adaptive Control*"] propose un signal de commande constant pour tout l'horizon de prédiction, et qui est appliqué dès le début du calcul de la commande qui optimise le critère de coût choisi. Dans la commande adaptative à horizon étendu de Ydstie (1984), [le EHAC "*Extended Horizon Adaptive Control*"], l'idée fondamentale consiste à calculer à chaque instant la séquence des signaux de commande pour essayer de maintenir la sortie future la plus proche possible de la consigne pour un horizon de temps plus grand que le retard présent sur le processus. La commande prédictive généralisée par Clarke, Mohtadi y Tuffs (1987), le GPC "*Generalized Predictive Control*", est en, ce moment, la méthode la plus populaire.

On peut trouver un résumé de ces méthodes et de leurs caractéristiques les plus importantes dans Clarke et Mohtadi (1989) et dans De Keyser, Van de Velde et Dumortier (1988).

Après ces travaux pilotes, l'intérêt pour le MPC a augmenté graduellement depuis les années 80, et d'autres méthodologies –partageant les mêmes idées– sont apparues dans la littérature spécialisée de la commande. Entre autres, peuvent être mentionnées: MUSMAR "*MULTI Step Multivariable Adaptive Control*" -Greco et al. (1984)-, MURHAC "*MULTIpredictor Receding Horizon Adaptive Control*" -Lemos et Mosca (1985)-, PFC "*Predictive Functional Control*" [RAA87], UPC "*Unified Predictive Control*" -Söeterboek (1992)-, SMC de Setpoint et PCT de Honeywell.

Les années 90, ont marqué une vraie explosion dans le nombre des applications du MPC (d'abord aux Etats-Unis, plus tard au Japon et maintenant aussi en Europe). Il existe plusieurs applications réelles qui fonctionnent avec succès (voir De Keyser (1988) par exemple), dans l'industrie des processus chimiques ainsi que dans le domaine de la robotique. Cela s'est toujours accompagné d'une forte activité de recherche, voir Camacho et Bordons (1998) et la liste des références.

Malgré le développement étendu qu'a connu le MPC pendant la fin de la décennie 70 et celle de 80, ce n'est qu'au début des années 90 qu'on commence à se préoccuper de l'étude de la stabilité et de la robustesse en MPC. Dans le chapitre suivant est faite une description de ces travaux.

Le MPC peut aussi être formulé dans le contexte de la représentation en variables d'état -Morari (1994)-. Ceci permet non seulement de faire usage de théorèmes et résultats existant dans la théorie d'espace d'état, mais aussi facilite l'extension de la théorie MPC à des cas plus complexes comme ceux des systèmes avec perturbations stochastiques, bruits sur les variables de mesure ou commande multivariable.

Étant donné la charge élevée de calcul qu'exigent les algorithmes de programmation quadratique dans la stratégie MPC, beaucoup d'auteurs commencent à étudier la possibilité d'obtenir une solution rapide fournissant un résultat le plus souvent sous-optimal dans le problème d'optimisation. Dans cette catégorie on peut mentionner les travaux de Bemporad *et al.* (2002), Ramirez et Camacho (2001). On y présente une solution explicite pour le cas de retour d'états pour systèmes nominaux. On démontre que la loi de commande obtenue, peut être considérée linéaire à morceaux ("piecewise").

Cette approche présente l'inconvénient lié au nombre de régions dans lequel doit être divisé l'espace d'état, ce qui croît de manière combinatoire dans la mesure où augmente l'horizon de prévision. Ceci exige un temps de recherche important pour déterminer la région de travail appropriée, ce qui n'est pas convenable pour beaucoup de cas d'application pratique.

1.2 La méthodologie du MPC

Dans sa formulation la plus générale, la méthodologie concernant l'approche du MPC peut s'illustrer sur le schéma représenté sur la figure 1.1.

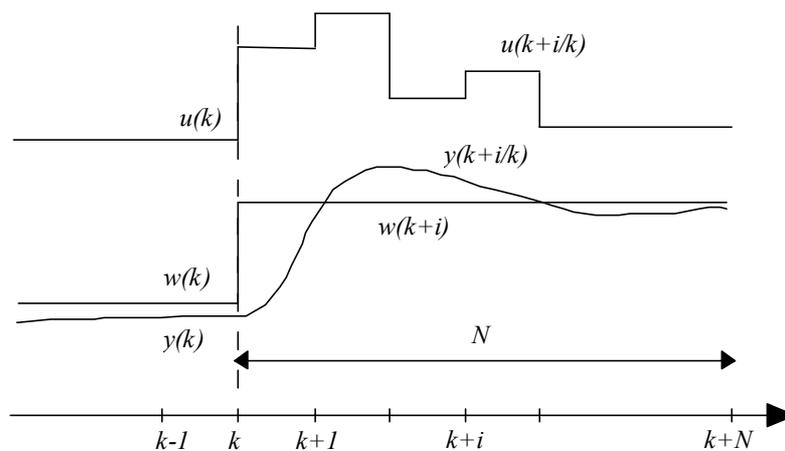


Figure 1.1. La méthodologie du MPC.

Où

k dénote le temps discret.

$u(k)$ dénote l'entrée du système au temps k .

$w(k)$ dénote la référence du système au temps k .

$y(k)$ dénote la sortie du système au temps k .

Le principe du fonctionnement du MPC peut être caractérisé ainsi:

1. À chaque instant k , en disposant d'un modèle et de connaissance de la sortie en k du système, on fait la prédiction de la sortie pour un certain horizon N , (dénommé horizon de prédiction), les sorties prédites sont dénotées $y(k+i/k)$ où $k=1,2,\dots,N$.
2. La prédiction de la sortie, est faite en calculant le vecteur des futurs signaux de commande $\{u(k+i/k), i=0,1,\dots,N-1\}$ à travers l'optimisation d'une fonction objectif. Cette fonction (en général, convexe) force à rendre la sortie future la plus proche possible de la trajectoire de référence $\{consigne\ connue\ } w(k+i)$, tout en réduisant les efforts de la commande. Des contraintes sur la sortie ou sur la commande peuvent être également imposées.
3. Le premier élément $\{u(k)\}$ du vecteur du signal de commande optimale $\{u(k+i/k), i=0,1,\dots,N-1\}$ issu du problème précédent est appliqué au système et le reste est rejeté car à l'instant suivant la nouvelle sortie $\{y(k+1)\}$ est disponible et en conséquence l'étape 1 est répétée. Ceci est connu comme le concept de l'horizon fuyant (ou mobile).

1.3 Éléments du MPC

Dans la figure 1.2 on montre la structure basique, commune à toutes les stratégies de commande prédictive.

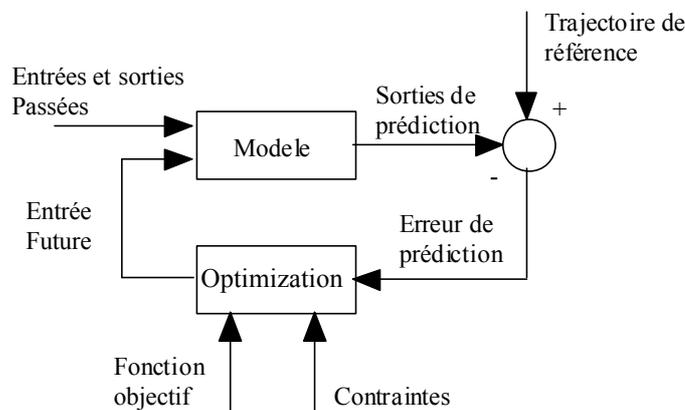


Figure 1.2. Le schéma fonctionnel de la structure de base des algorithmes MPC

Tous les algorithmes MPC ont:

- Un modèle de prédiction.
- Une fonction objectif pour calculer la stratégie optimale de commande.

Les différences portent sur le type de la fonction objectif, le traitement de l'erreur de prédiction et sur le modèle de prédiction.

1.3.1 Modèle de prédiction

Le modèle joue un rôle décisif dans le calcul de la commande. Il doit reproduire avec une exactitude suffisante les caractéristiques dynamiques du processus à de futurs moments du temps $\{y(k+i/k)\}$ en se servant des valeurs passées de la commande, de la sortie et des valeurs optimales de la commande future $\{u(k+i/k)\}$.

Les différentes stratégies du MPC emploient différents modèles pour représenter la relation entre la sortie et l'entrée du système. Parmi les signaux d'entrée sont les variables manipulées (ou commande) et des perturbations mesurables qui peuvent être "traitées" par compensation par «avance» ("*feedforward*"). De plus, doivent être pris en considération les composantes non considérées par le modèle du système, ce qui inclut l'effet des entrées non mesurables, des bruits et des erreurs de modélisation. Ainsi, le modèle peut être divisé en deux parties: le modèle du processus et le modèle des perturbations (exogènes ou endogènes). Les prédictions de la sortie seront fonction des deux.

1.3.1.1 Modèle du processus

Dans l'approche classique de la commande prédictive toute forme de modélisation, et le plus souvent linéaire, est utilisée. La réponse impulsionnelle ou celle à un échelon, sont les plus usitées, mais existent aussi les représentations par fonction de transfert et par formalisme d'état. Donnons une vision rapide de ces types de modélisation.

Réponse impulsionnelle: elle apparaît dans l'algorithme MAC et dans les cas spéciaux de GPC et d'EPSAC, notamment pour les systèmes stables. Le modèle (tronqué) à utiliser pour la prédiction, est celui obtenu de la réponse impulsionnelle du système:

$$y(k+i/k) = \sum_{j=1}^N h_j u(k+i-j/k) \quad (1.1)$$

$y(k+i/k)$ est la prédiction de la sortie en $k+i$ étant donnée sa connaissance en k , $u(k+i-j/k)$ est l'entrée en $k+i-j$, h_j sont les valeurs de la sortie à chaque période d'échantillonnage quand on met à l'entrée un signal impulsionnel d'amplitude 1.

Un inconvénient de ce type de modélisation est le nombre élevé de paramètres nécessaires pour une précision appropriée. Habituellement N a une valeur comprise entre 40 et 50. Néanmoins c'est le modèle le plus appliqué dans l'industrie peut être parce qu'il est tout à fait intuitif et compréhensible. Un grand avantage pour utiliser ce modèle est qu'il n'est pas besoin d'information a priori et que l'identification est simple. De plus des dynamiques complexes telles que celles à phase non minimale ou en présence de retards considérables, sont facilement pris en compte.

Réponse indicielle: elle est utilisée dans l'algorithme DMC, et ce cas est assez semblable au précédent à la différence près que le signal d'entrée est un échelon. A nouveau, le modèle tronqué, pour les systèmes stables, est utilisé pour la prédiction de la sortie. Il se présente sous la forme:

$$y(k+i/k) = \sum_{j=1}^N g_j \Delta u(k+i-j/k) \quad (1.2)$$

$y(k+i/k)$ est la prédiction de la sortie en $k+i$ étant donnée sa connaissance en k , les g_j sont les paramètres obtenus à la sortie du système lorsqu'on applique un échelon à l'entrée, et $\Delta u(k) \{u(k)-u(k-1)\}$ les changements de l'entrée du système. Le modèle a les mêmes avantages et inconvénients que ceux expliqués précédemment.

Fonction de transfert: utilisé dans GPC, UPC, EPSAC, EHAC, MUSMAR et MURHAC entre autres. Le modèle de prédiction est:

$$y(k+i/k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(k+i/k) \quad (1.3)$$

où

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{na} z^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{nb} z^{-nb} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Cette représentation est valide également pour des processus instables et elle a l'avantage d'avoir besoin de peu de paramètres, néanmoins il est nécessaire une connaissance a priori du processus, particulièrement pour déterminer l'ordre des polynômes $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$.

L'espace des états: utilisé dans PFC, elle a la représentation suivante:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $x(k)$ est le vecteur d'état, $u(k)$ le vecteur des entrées et $y(k)$ des sorties, A , B , et C sont les matrices du système, de l'entrée et de la sortie respectivement. Alors la prédiction de la sortie s'écrit:

$$y(k+i/k) = C \left[A^i x(k) + \sum_{j=1}^i A^{j-1} B u(k+i-j/k) \right] \quad (1.6)$$

Ce modèle a l'avantage de pouvoir être utilisé pour les systèmes multivariables. Son utilisation présuppose la mesure de l'état global ce qui n'est pas toujours possible, dans ce cas un observateur des états doit être envisagé.

Remarque 1.1. Des modèles non linéaires peuvent être employés pour représenter le processus, néanmoins, le problème d'optimisation peut alors devenir très compliqué Rawling, Meadows y Muske (1994). Les réseaux neuromimétiques peuvent également être utilisés Zamarreño et Vega (1999) ou la modélisation floue Kuvsec-Biasizzo, Skrjane et Matko (1997) pour tenter d'atténuer la difficulté imposée par la non linéarité.

•

1.3.1.2 Modèle de perturbation

La sélection du modèle à utiliser pour représenter les perturbations affectant le système est aussi important que la sélection du modèle du processus. Le modèle le plus utilisé est le modèle auto-régressif de moyenne mobile intégré CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average) (Ljung, 1987), où les perturbations qui sont la différence entre la sortie mesurée et calculée par le modèle, sont données par:

$$\eta(t) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} e(k) \quad (1.7)$$

où le polynôme $C(z^{-1})$ peut être égal à un, le polynôme $D(z^{-1})$ est un intégrateur $\Delta = 1 - z^{-1}$ et $e(t)$ est un bruit blanc de moyenne nulle, ce modèle est utilisé dans GPC, EPSAC, EHAC et UPC, et avec de petites variations dans les autres méthodes. Il est possible de noter que l'inclusion de l'intégrateur élimine l'erreur stationnaire. Le filtre $C(z^{-1})/D(z^{-1})$ peut également être choisi de sorte à éliminer les perturbations de fréquence définie.

1.3.2 Fonction objectif et obtention de la loi de commande

Les divers algorithmes MPC proposent différentes fonctions de coût pour obtenir la loi de commande. L'objectif principal consiste à faire en sorte que la sortie future pour l'horizon de prédiction considéré s'approche de la meilleure façon possible de la trajectoire de référence $\{w(k)\}$ tout, en même temps, pénalisant l'effort de commande $\{\Delta u(k)\}$ nécessaire. Une expression générale de fonction objectif adaptée à cette tâche est donnée par:

$$J(N_1, N_2, N_U) = E \left\{ \sum_{i=N_1}^{N_2} \sigma(i) [y(k+i/k) - w(k+i/k)]^2 + \sum_{i=1}^{N_U} \lambda(i) [\Delta u(k+i-1/k)]^2 \right\} \quad (1.8)$$

Dans quelques méthodes le deuxième terme, relatif à l'effort de commande, n'est pas pris en compte. Une comparaison de différents types de fonction objectif, peut être trouvée dans Campo et Morari (1986).

1.3.2.1 Paramètres

N_1 et N_2 définissent l'intervalle de temps où l'on désire que la sortie se rapproche de la référence. Si est prise une valeur élevée de N_1 c'est parce qu'il n'est pas important d'observer une erreur aux premiers instants. Dans les processus avec retard d , il n'existe pas de raison pour que N_1 soit plus petit que ce temps puisque la sortie ne commencera pas à réagir à la commande appliquée en k avant le moment $k+d$. De même si le processus est de phase non minimale, ce paramètre permet d'éliminer de la fonction objectif, les moments du temps où la réponse est inverse, N_U est l'horizon de commande. Les coefficients σ' et λ sont des valeurs qui pénalisent le comportement futur, habituellement sont utilisées des valeurs constantes ou des valeurs exponentielles. Par exemple, il est possible d'obtenir un poids exponentiel pour σ'

$$\sigma(j) = \alpha^{N_2-j} \quad (1.9)$$

Si α a une valeur entre 0 et 1, alors cela signifie que les erreurs les plus éloignées du moment k sont pénalisées plus que les valeurs proches, favorisant l'obtention d'une réponse douce associé à un plus petit effort de commande. Si au contraire, $\alpha > 1$, les premières erreurs sont plus pénalisées, ce qui cause une commande plus forte.

1.3.2.2 Trajectoire de référence

Un des grands avantages des commandes prédictives est que, si l'on connaît l'évolution future de la trajectoire de référence, le système peut commencer à répondre avant que le changement ne soit détecté.

L'évolution future de la référence est bien connue dans beaucoup d'applications, comme en robotique, ou les processus batch. Dans la plupart des méthodes habituelles, utilisation est faite d'une trajectoire de référence qui n'est pas nécessairement égale à la vraie référence. Par exemple, on peut approcher celle ci au moyen d'un système du premier ordre:

$$w(k+i) = \alpha w(k+i-1) + (1-\alpha)r(k+i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.10)$$

Où α est un paramètre contenu entre 0 et 1 qui constitue une valeur réglable qui influencera la réponse dynamique du système (ainsi, α proche de 1 conduira à une réponse "douce").

1.3.2.3 Contraintes

Dans la pratique, les processus sont sujets à des contraintes qui doivent, bien sûr, être prises en compte dans le problème d'optimisation afin d'obtenir des commandes admissibles.

Les techniques de la commande MPC intègrent les contraintes pendant la phase de synthèse et d'implantation du contrôleur, permettant à l'ingénieur de présenter les contraintes d'une façon directe de sorte que l'algorithme trouve automatiquement la meilleure solution admissible.

Le système de commande, particulièrement dans le cas de la commande prédictive avec de grands horizons de prédiction, doit prévoir la violation des restrictions et corriger d'une forme appropriée. Bien que les restrictions à l'entrée et à la sortie du processus se traitent de même manière, les implications de chaque type de contraintes sont différentes.

Les restrictions en sortie sont fondamentalement dues à des raisons de sécurité opérationnelles, et doivent être contrôlées à l'avance puisqu'elles peuvent endommager les équipements physiques et causer des pertes dans la production. Dans le cas des variables d'entrée, elles peuvent toujours être bornées dans leurs limites permises en fonction des mécanismes de saturation.

En pratique il est habituel d'employer le GPC standard pour calculer le signal $u(k)$, sans contraintes, puis, de le saturer à ses limites permises. Cette façon de procéder ne garantit pas que soit obtenue l'optimalité quand les restrictions sont violées par la solution sans contraintes. La proposition principale du GPC, qui est d'appliquer la meilleure action de commande possible en vue de minimiser la fonction objectif, ne sera pas atteinte de cette façon.

Afin d'illustrer ce fait, et pour considérer le cas de la violation des restrictions dans l'amplitude du signal d'entrée est représenté sur la figure 1.3 un problème de GPC avec vecteur de commande de valeur 2. Sont tracées les courbes de valeur constante d'une fonction objectif quadratique qui dépend de deux variables $\{u_1, u_2\}$.

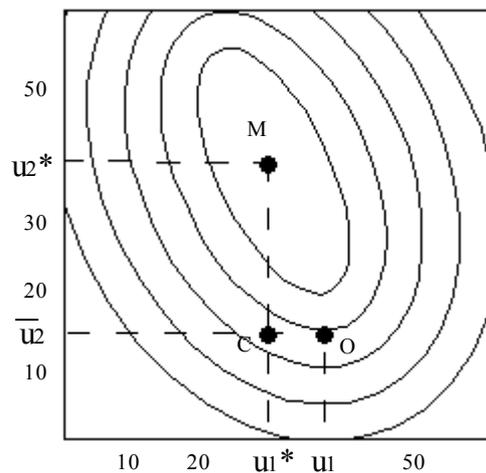


Figure 1.3. Signal de commande avec des restrictions.

- Si les restrictions n'existent pas, la solution optimale de coût minimum est clairement donnée par $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*\}$.
- Si l'action de commande \mathbf{u}_2 a une limite supérieure \mathbf{u}_2 la solution appliquée par un stratégie ne prenant pas en compte des contraintes dans la minimisation sera $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2\}$ qui correspond au point **C** de la figure.
- Si l'action \mathbf{u}_2 de commande a une limite supérieure \mathbf{u}_2 et si les contraintes sont considérées dans l'optimisation, la solution optimale correspond au point **O** dans la figure: \mathbf{u}_2 se maintient à sa valeur maximum \mathbf{u}_2 mais \mathbf{u}_1 est déplacé de sa valeur initiale \mathbf{u}_1^* pour compenser la saturation de \mathbf{u}_2 .

Le fait de ne pas considérer les restrictions dans les variables manipulables peut causer une détérioration de la fonction objectif et conduire à un comportement peu désirable du système commandé.

1.4 Modélisation des contraintes

Les différentes méthodologies de la commande MPC permettent d'anticiper la violation des restrictions compte tenu de leur caractère prédictif. Les prochains paragraphes se proposent d'analyser les différentes restrictions considérées habituellement dans l'industrie des processus (autant du point de vue des restrictions physiques et de la sécurité, que du point de vue du comportement désiré), et de présenter la forme dans laquelle elles doivent être formulées pour les décrire dans l'étape d'optimisation.

1.4.1 Restrictions sur l'amplitude du signal de commande

Les restrictions sur l'amplitude du signal de la commande, assez fréquentes en pratique (pour prendre en compte, par exemple, des effets de saturation à forts signaux), peuvent s'exprimer au moyen de l'inégalité suivante:

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(\bullet) \leq \mathbf{u}_{\max} \quad (1.11)$$

Ces contraintes sont à satisfaire sur tout l'horizon N d'optimisation:

$$\mathbf{1} \mathbf{u}_{\min} \leq U(k) \leq \mathbf{1} \mathbf{u}_{\max} \quad (1.12)$$

où $U(k) = [u(k) \ u(k+1) \ \dots \ u(k+N-1)]^T$, $\mathbf{1}$ vecteur de dimension N à éléments égaux à 1 (l'écriture est faite dans le cas scalaire, sa généralisation au cas multivariable étant triviale).

Il convient parfois de représenter cette contrainte en fonction des accroissements successifs $\Delta \mathbf{u}(\bullet)$ de la commande, soit

$$\mathbf{1}u_{\min} \leq T\Delta\mathbf{U}(k) + \mathbf{1}u(k-1) \leq \mathbf{1}u_{\max} \quad (1.13)$$

où T est une matrice $N \times N$, triangulaire inférieure à éléments égaux à I .

1.4.2 Restrictions sur la vitesse de variation du signal de commande.

Les restrictions sur l'augmentation du signal de commande prennent une forme très simple, et peuvent être exprimées au moyen de l'inégalité:

$$\Delta u_{\min} \leq u(k) - u(k-1) \leq \Delta u_{\max} \quad (1.14)$$

Ou sous la forme vectorielle, portant sur les variations $\Delta\mathbf{u}(\bullet)$

$$\mathbf{1}\Delta u_{\min} \leq \Delta\mathbf{U}(k) \leq \mathbf{1}\Delta u_{\max} \quad (1.15)$$

1.4.3 Restrictions sur l'amplitude de la sortie

Il est très fréquent de trouver comme spécification désirée dans les processus commandés que leur sortie se trouve dans une fourchette autour d'une trajectoire désirée, par exemple, dans les cas de poursuite d'un certain profil avec une certaine tolérance. Ce type de condition peut être introduite pour le système de commande le forçant à ce que la sortie du système soit à tout moment comprise dans la bande constituée par la trajectoire indiquée plus ou moins la tolérance ceci se traduit par une inégalité de la forme:

$$y(\bullet)_{\min} \leq y(\bullet) \leq y(\bullet)_{\max} \quad (1.16)$$

Soit $Y(k) = [y(k) \quad y(k+1) \quad \dots \quad y(k+N)]^T$ (hypothèse y scalaire). Sur l'horizon d'optimisation la contrainte s'écrit:

$$Y(k)_{\min} \leq Y(k) \leq Y(k)_{\max} \quad (1.17)$$

où, à la évidence,

$$\begin{aligned} Y(k)_{\min} &= [y_{\min}(k+1) \quad y_{\min}(k+2) \quad \dots \quad y_{\min}(k+N)] \\ Y(k)_{\max} &= [y_{\max}(k+1) \quad y_{\max}(k+2) \quad \dots \quad y_{\max}(k+N)] \end{aligned} \quad (1.18)$$

les inégalités s'entendent composantes par composantes.

Par rapport aux incréments sur la variable de commande une telle contrainte peut s'écrire:

$$Y(k)_{\min} \leq G\Delta\mathbf{U}(k) + f(k) \leq Y(k)_{\max} \quad (1.19)$$

où $f(k)$ est la sortie de régime libre a partir de k et.

$$G = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g^2 & g & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{N-1} & g^{N-2} & g^{N-3} & \cdots & g \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

où g est la réponse indicielle sur une période.

Sur les accroissements de la commande, ces diverses contraintes peuvent s'exprimer sous forme condensée comme, $R\Delta u \leq c$, avec:

$$R = \begin{bmatrix} I_{N \times N} \\ -I_{N \times N} \\ T \\ -T \\ G \\ -G \end{bmatrix}; \quad c(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}\Delta u_{\max} \\ -\mathbf{1}\Delta u_{\min} \\ \mathbf{1}u_{\max} - \mathbf{1}u(k-1) \\ -\mathbf{1}u_{\min} + \mathbf{1}u(k-1) \\ \mathbf{1}Y(k)_{\max} - f(k) \\ -\mathbf{1}Y(k)_{\min} + f(k) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

1.4.4 Restrictions sur les oscillations permises dans la sortie du système

Dans de nombreux processus de fortes oscillations pour les variables de sortie du système ne sont pas souhaitables, c'est le cas des manipulateurs, pour lesquels une sur-oscillation peut produire des collisions avec d'autres éléments dans l'aire de travail. Il est également très facile de traiter ce type de restrictions dans le contexte prédictif. Toutes les fois qu'un changement de la référence intervient, et qui est maintenue constante sur une période suffisamment longue, les restrictions suivantes sont ajoutés au système de commande:

$$y(k+i) \leq \gamma w(k) \text{ pour } i = N_{01} \dots N_{02} \quad (1.22)$$

où N_{01} et N_{02} définissent l'horizon pendant lequel la sur-oscillation peut être observée (ils peuvent toujours être pris égaux à l et à N respectivement si cet horizon n'est pas connu) et $\gamma > 1$ est un facteur généralement près de l'unité qui permet de définir le maximum permis pour les sur-oscillations par rapport à la référence. En termes d'augmentation des variables manipulées, il est ainsi possible d'écrire:

$$G\Delta u \leq \mathbf{1}\gamma w(k) - f \quad (1.23)$$

1.4.5 Restrictions pour éviter des comportements de phase de non minimale

Il existe des processus qui exhibent naturellement un comportement de phase non minimale, cela se produit quand le processus sous l'effet de variation brusque de l'entrée tend à voir, aux premiers moments transitoires, la variable de sortie évoluer dans le sens

contraire à sa position finale. Ce comportement peut ne pas être souhaitable dans certains cas, des restrictions de la forme suivante peuvent alors être définies:

$$\begin{aligned} y(k+j) &\leq y(k) & \text{si } y(k) > w(k) \\ y(k+j) &\geq y(k) & \text{si } y(k) < w(k) \end{aligned} \quad (1.24)$$

En termes de variables de commande ces contraintes peuvent être représentées par l'inégalité (choisissant par exemple les restrictions $y(k) < w(k)$):

$$G\Delta\mathbf{u} \geq \mathbf{1}y(k) - f \quad (1.25)$$

1.4.6 Restrictions sur l'état final atteint

Ce type de restrictions apparaît dans une série d'algorithmes de commande. Dans le cas de la méthodologie GPC elles se rencontrent dans la stratégie connue comme "commande prédictive restreinte de l'horizon glissant" CRHPC (Constrained Receding Horizon Predictive Control), où sont introduites des restrictions artificielles en vue de garantir la stabilité du système commandé. Ceci est fait au moyen de l'imposition sur les sorties prévues à ce qu'elles suivent la référence pendant un certain nombre m de périodes après un certain horizon N .

Les restrictions terminales de l'état du système peuvent être exprimées comme des restrictions d'égalité sur les incréments de la commande future en utilisant l'équation de prédiction pour $Y_m = [y(k+N+1) \quad y(k+N+2) \quad \dots \quad y(k+N+m)]$, soit

$$Y_m = G\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f}_m \quad (1.26)$$

où \mathbf{f}_m étant le régime libre à partir de $k+N$.

Toutes les restrictions exposées peuvent être exprimées sous la forme $R\Delta\mathbf{u} \leq c$ et $A\Delta\mathbf{u} = a$. L'algorithme GPC quand sont considérées les restrictions consiste en la minimisation de la fonction objectif $J(k)$ (1.8) sous l'ensemble des contraintes linéaires.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a décrit la méthodologie et le fondement de la commande prédictive. On a fait une étude comparative des caractéristiques les plus importantes que présentent les principales méthodes de commande prédictive: DMC, MAC, GPC, PFC, EPSAC ET EHAC. On a décrit les principaux éléments qui apparaissent dans chacune de ces méthodologies, à savoir, le modèle de prédiction et la fonction objectif.

A été aussi présenté un résumé historique sur l'évolution et les perspectives de la commande prédictive. On a mentionné les premiers travaux et, également, les débuts de

l'étude de procédures et stratégies pour garantir la stabilité et la robustesse dans la méthodologie de commande prédictive.

Chapitre 2

Sur la stabilité et la robustesse en MPC

Ce chapitre est un résumé ou réflexion sur certains travaux en commande prédictive par rapport aux questions de stabilité et de robustesse. Il est développé autour des deux approches les plus importantes, développées pour cette stratégie de commande.

Une brève description des modèles d'incertitude est faite, spécialement, l'incertitude dite bornée en norme et l'incertitude polyédrique, lesquelles seront employées dans les chapitres suivants. Finalement, sont présents les principaux résultats sur la robustesse en MPC qui servent de base pour le développement du présent travail.

Toutefois avant d'aborder ces sujets, il est fait un bref examen du critère de stabilité de Lyapunov. Ce sujet reste de grande actualité et importance, car il est un point focal dans les problèmes de synthèse de contrôleurs. En particulier, beaucoup de problèmes de commande robuste, comprise la procédure de synthèse développée dans ce travail, sont résolus en tenant en compte le concept de stabilité.

2.1 Stabilité dans MPC avec des contraintes

Dans la conception des systèmes de commande, il est évident que l'une des exigences les plus importantes à vérifier est celle de la stabilité. Pour des systèmes continus linéaires et invariants dans le temps, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ont été données il y a plus d'un siècle par Routh et Hurwitz [Hahn (1963)]. Les conditions correspondantes pour la stabilité dans les systèmes à temps discret peuvent être trouvées, par exemple, dans le travail de Jury (1971). Toutefois ces critères algébriques intéressants pour l'analyse sont tous peu utilisables à des fins de synthèse. Un critère très utilisé pour la conception et l'étude de la stabilité de systèmes, est le critère de stabilité de Lyapunov [Hahn (1963)], qui sera expliqué par la suite.

Les contrôleurs linéaires, tel que le contrôleur linéaire quadratique (LQG), sont relativement faciles à mettre en œuvre et garantissent, sous certaines hypothèses générales, la stabilité en boucle fermée. Cependant, les problèmes de commande à horizon infini n'ont

de solution simple et "fermée" que lorsque aucune des variables du procédé n'est contrainte. La difficulté principale pour l'usage d'horizons infinis dans les processus avec contraintes est liée au fait qu'ils doivent se résoudre au moyen de méthodes numériques, qui exigent pour leur solution la mise en œuvre d'un nombre fini (même si grand) de variables.

Les premiers travaux de MPC utilisaient un horizon de prédiction fini. De cette manière on pouvait incorporer de manière naturelle les contraintes dans la formulation et la conception de la stratégie de commande. L'analyse de la stabilité dans les problèmes de commande prédictive avec horizon fini, est une tâche compliquée spécialement dans le cas avec contraintes -Zafiriou (1990) et Zafiriou et Marchal (1991)-, en outre la stabilité est, en général, faible -Bitmead, Gevers et Wertz (1990), Rawlings et Muske (1993)-. Cependant, depuis le début des années 90 un grand effort est fait pour résoudre le problème de la commande prédictive stabilisante avec de nouveaux outils et sous certaines hypothèses de base.

Jusqu'au début des années 90, la recherche de résultats de stabilité dans des systèmes de commande prédictive en présence de contraintes, n'avait pas été étudiée. À partir de cette date, apparaissent des travaux en horizons fini ou infini, dans lesquels il est possible de démontrer la stabilité du système contrôlé par une stratégie MPC sous certaines hypothèses de base. La démonstration de la stabilité du système, s'inspire, en général, de la théorie de Lyapunov.

2.1.1 Stabilité de systèmes dynamiques

Il est fait référence aux concepts stabilité et instabilité dans nombre de branches de la science. Il est commun d'entendre dire qu'une monnaie est stable; à un ingénieur dire qu'une structure est stable ou instable, à un chimiste dire qu'une réaction est stabilisée, etc...

En 1892, M Lyapunov a formulé de manière précise le concept de stabilité, et ses travaux ont constitué le point de départ pour établir d'autres variantes du concept.

À titre d'exemple, il est d'usage de considérer le mouvement d'une balle qui se déplace sous l'action de la gravité sur différentes surfaces comme celles montrées Figure 2.1. Dans les trois cas, la balle se trouve dans une position d'équilibre, mais quel sera le mouvement résultant si la balle est écartée "un peu" de son état d'équilibre? Dans le cas (a), la balle se maintiendra près de sa position d'équilibre en oscillant autour de celle-ci, et tendra à revenir à cette position d'équilibre, si l'on admet d'existence de frottements, phénomènes dissipateurs d'énergie mécanique (stabilité dite asymptotique). Dans ce cas, l'équilibre est dit asymptotiquement stable. Dans le cas (b), pour toute petite perturbation de la balle, celle-ci restera "près" de la position d'équilibre mais ne tendra pas à s'approcher de cette position, on parlera alors de stabilité (non asymptotique). Finalement en (c), toute petite perturbation entraînera la balle à s'éloigner de sa position d'équilibre; dans ce cas l'équilibre est alors instable.

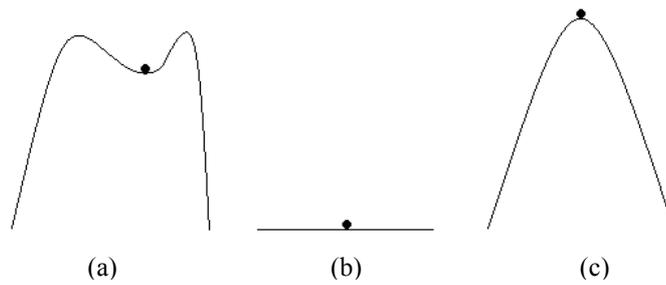


Figure 2.1. (a) asymptotiquement stable; (b) stable; (c) instable.

2.1.1.1 Définitions

Il est possible d'introduire d'une manière plus mathématique les concepts précédemment mentionnés [Hahn (1963)].

Soit l'équation différentielle autonome:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.1)$$

avec $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ continue et $f(0) = 0$. L'origine est un point d'équilibre. La solution de (2.1) qui à $t = 0$ "passe" par x_0 est dénotée $\varphi(t, x_0)$. $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Définition 2.1. L'équilibre du système (2.1) est **stable** (au sens de Lyapunov) si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que:

$$\forall \|x_0\| < \eta \Rightarrow \|\varphi(t, x_0)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (2.2)$$

□

Toute solution qui à $t = 0$ commence dans le cercle de rayon η , ne va pas abandonner le cylindre de rayon ε , (Figure 2.2).

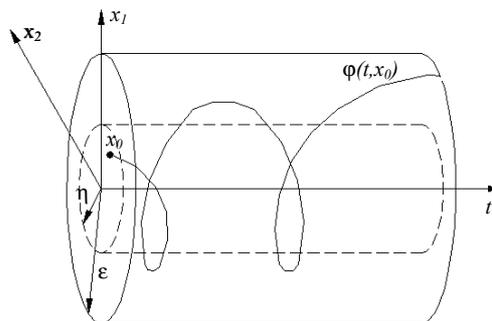


Figure 2.2. Stabilité de l'origine pour le cas de $n=2$.

Définition 2.2. L'équilibre du système (2.1) est **asymptotiquement stable** (au sens de Lyapunov) et attractif, s'il existe $\eta > 0$ tel que:

$$\forall \|x_0\| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0)\| = 0. \quad (2.3)$$

□

Toute solution qui à $t=0$ commence dans le cercle de rayon η , termine finalement à l'origine, (Figure 2.3).

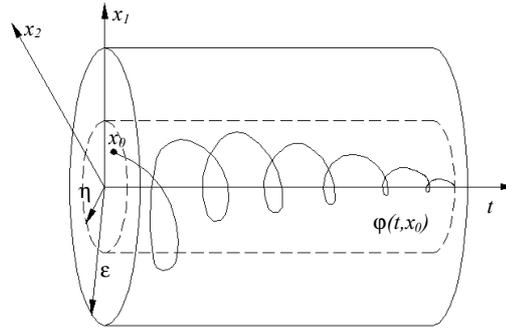


Figure 2.3. Stabilité asymptote de l'origine pour le cas de $n=2$.

Définition 2.3. L'équilibre du système (2.1) dit être **instable** (au sens de Lyapunov), s'il n'est pas stable.

□

La Figure 2.4 illustre ce concept dans le cas où $n = 2$.

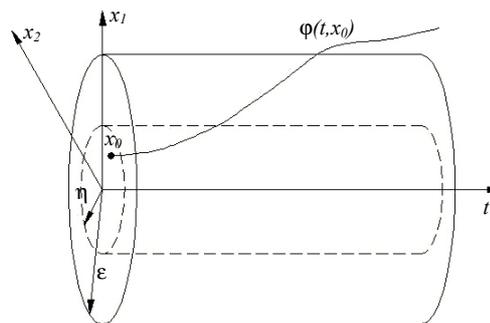


Figure 2.4. Instabilité de l'origine pour le cas de $n=2$.

Bien que les définitions précédentes se réfèrent à l'origine comme "l'équilibre", ces concepts peuvent être définis pour un équilibre qui n'est pas nécessairement l'origine, ou même pour une solution arbitraire (non nécessairement un équilibre).

L'étude de la stabilité d'une solution arbitraire peut toujours être réduite à l'étude de la stabilité de l'origine en faisant un changement variable adéquat [Hahn (1963)].

2.1.1.2 Méthode directe ou deuxième méthode de Lyapunov

En 1892, M Lyapunov a présenté deux méthodes (appelées première et seconde méthode de Lyapunov) pour étudier la stabilité de systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles -Hahn (1963)-. La deuxième méthode permet d'obtenir des conditions suffisantes de stabilité.

En mécanique, un système est stable si son énergie totale (une fonction définie positive) est continuellement décroissante (ce qui signifie que la dérivée temporelle de l'énergie totale doit être définie négative) jusqu'à atteindre un état d'équilibre.

La seconde méthode de Lyapunov est basée sur une généralisation de ce fait, toutefois, pour des systèmes purement mathématiques il n'y a pas de manière simple pour définir une fonction énergie. Lyapunov a ainsi introduit ce qui est appelé fonction de Lyapunov, qui peut être vue comme une fonction énergie fictive.

Théorème 2.1. (théorème de Lyapunov). Soit la fonction $V(x)$ qui satisfait les conditions suivantes:

1. $V(x)$ est continue et différentiable.
2. $V(0) = 0$.
3. $V(x) > 0, \forall x \neq 0$.

L'état d'équilibre $x = 0$ de l'équation (2.1) est:

(a) Stable dans le sens de Lyapunov si $\dot{V}(x)$ est semi défini négatif.

(b) Asymptotiquement stable dans le sens de Lyapunov si $\dot{V}(x)$ est défini négatif.

□

$\dot{V}(x)$ est la dérivée temporelle de la fonction $V(x)$ évaluée le long des trajectoires de (2.1).

Cette fonction $V(x)$ est appelée fonction de Lyapunov.

La stabilité (ou stabilité asymptotique) de la position d'équilibre, étant satisfaites les conditions du théorème de Lyapunov, est due au fait que pour la fonction $V(x)$, qui possède les propriétés précédemment indiquées, on peut construire dans un environnement de l'origine des coordonnées une famille de surfaces fermées iso-valeur décrites au moyen de l'équation :

$$V(x) = C \quad (C \geq 0) \quad (2.4)$$

Ces surfaces entourent l'origine des coordonnées. Dans ce cas, au fur et à mesure que diminue le scalaire C ces surfaces viennent se contracter vers l'origine des coordonnées.

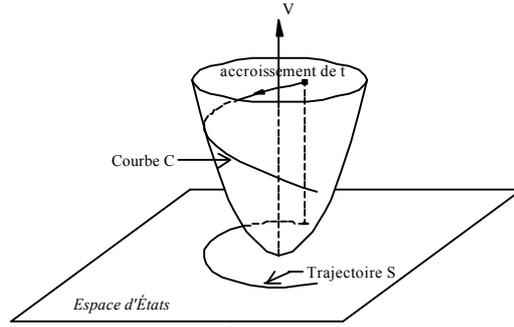


Figure 2.5. Fonction de Lyapunov pour un système autonome.

L'idée de ce théorème est facile à comprendre sur la Figure 2.5. Si nous nous déplaçons le long de la courbe C sur la surface $V(x)$ dans la direction de croissance de t , la valeur de $V(x)$ diminue (c'est le cas montré) ou au moins reste constante. Ainsi, la trajectoire S , qui est la projection de la courbe C dans l'espace d'état, se situe dans une surface délimitée qui enferme l'origine. Par conséquent l'origine est stable [La Salle et Lefschetz (1973)].

Bien que la théorie de Lyapunov ait été établie pour des équations différentielles, on peut développer une théorie semblable pour les équations aux différences. Il est fait un rappel d'un résultat fondamental qui sera repris par la suite par le cas de systèmes linéaires discrets.

2.1.1.3 Analyse de stabilité de Lyapunov de systèmes en temps discret

Soit le système autonome en temps discret décrit par:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (2.5)$$

ou $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur des variables d'état dans le temps k , $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est la matrice dynamique du système.

On choisit une fonction de Lyapunov candidate

$$V(x(k)) = x(k)^T Px(k), \quad (2.6)$$

ou $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique, définie positive. L'accroissement de $V(x(k))$ est donné par:

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x(k)^T A^T P A x(k) - x(k)^T P x(k). \\ &= x(k)^T [A^T P A - P] x(k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme $V(x(k))$ a été choisie positive définie, il est requis pour avoir la stabilité asymptotique que $\Delta V(x(k))$ soit défini négatif. Par conséquent:

$$\Delta V(x(k)) = -x(k)^T Q x(k), \quad Q > 0 \quad (2.8)$$

donc,

$$Q = -(A^T P A - P). \quad (2.9)$$

L'équation précédente est appelée équation de Lyapunov pour les systèmes discrets.

On peut aussi démontrer la nécessité.

Théorème 2.2. *Soit le système en temps discret décrit par l'équation (2.5). Une condition nécessaire et suffisante pour que l'état d'équilibre $x = 0$ soit asymptotiquement stable, est que, étant donnée une matrice $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ symétrique et définie positive, il existe une matrice $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ symétrique et définie positive satisfaisant*

$$A^T P A - P = -Q. \quad (2.10)$$

□

L'équation précédente est appelée équation de Lyapunov pour les systèmes discrets.

2.1.2 Solutions au problème de stabilité en MPC

Sur le problème de la stabilité de stratégies MPC en présence de contraintes, sont considérées les deux approches qui paraissent les plus significatives, vu l'écho qu'elles ont soulevé dans la communauté internationale de commande.

Les deux approches sont proches en ce sens que la démonstration de la stabilité se base sur le fait qu'il est possible de démontrer que, s'il existe une solution admissible, la fonction de coût y est décroissante de manière monotone et qu'elle peut, aussi, être interprétée comme une fonction de Lyapunov.

2.1.2.1 Première Solution

Elle est présente dans des méthodes comme celles développées par Clarke et Scatolini (1991), Clarke, Mouche et Scatolini (1991), Mouche et Zhang (1992), et dans Kouvaritakis, Rossiter et Chang (1992). Il s'agit de forcer à ce que la sortie prédite du modèle coïncide avec la référence (ou une valeur proche) après un nombre fini d'instant d'échantillonnages. Ceci se fait en ajoutant une restriction d'égalité sur la sortie finale atteinte par le système. Cette stratégie est connue comme CRHPC "*Constrained Receding Horizon Predictive Control*".

Cette solution introduit une restriction artificielle qui s'ajoute au problème. On obtient par conséquent une solution sous-optimale en réduisant l'espace admissible et, dans le pire des cas cela peut apporter des problèmes de faisabilité. On pourrait essayer d'atténuer ce problème en choisissant un long horizon de prévision m après l'horizon de d'optimisation N_Y , ce qui présente l'inconvénient d'augmenter le nombre de variables de décision et par conséquent de rendre difficile la solution du problème d'optimisation, (Figure 2.6).

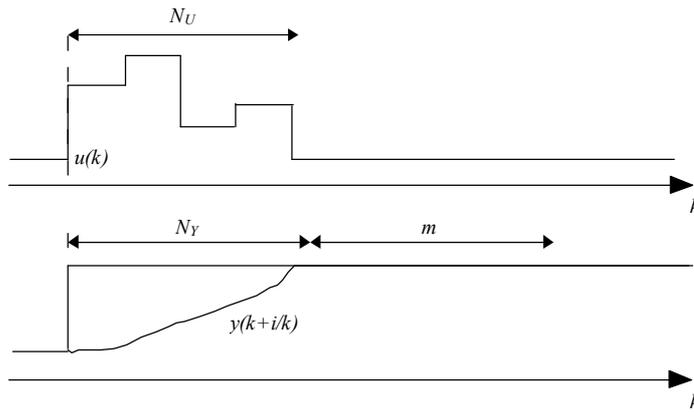


Figure 2.6. Stratégie CRHPC.

On suppose qu'il n'existe pas de perturbations ni de bruit agissant sur le système. Il n'existe pas non plus de changement de consigne, le système est stabilisable et contrôlable et le problème a une solution (il est faisable).

La solution du problème consiste à minimiser la fonction coût:

$$J(N_Y, N_U) = \sum_{j=1}^{N_Y} \eta [y(k+i/k) - w(k+i/k)]^2 + \sum_{j=1}^{N_U} \lambda [\Delta u(k+i-1/k)]^2, \quad (2.11)$$

sous les contraintes:

$$\begin{aligned} \Delta u(k + N_U + i/k) &= 0, \quad i > 0 \\ y(k + N_Y + i/k) &= w(k + N_Y + 1/k), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Démonstration

L'idée principale de la démonstration de la stabilité est que si l'on trouve une solution admissible et que l'horizon N_Y est suffisamment grand pour couvrir la partie transitoire des variables de sortie, la fonction coût est monotonement décroissante (s'il n'existe pas de perturbation externe ni de bruit) et il est possible de l'interpréter comme une fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité.

Dans la démonstration, est considéré le vecteur des valeurs futures des incréments de la commande à l'instant $k+1$, celui calculé au moment précédent (optimal), en ajoutant un zéro comme dernier élément: $\Delta u^*(k+1) = [\Delta u(k+1/k), \dots, \Delta u(k+N_U-1/k), 0]^T$. Ce vecteur de signaux de commande future a les propriétés suivantes:

1. $\Delta u^*(k+i/k+1) = \Delta u(k+i/k)$.
2. $y^*(k+i/k+1) = y(k+i/k)$.
3. $\Delta u^*(k+N_U+i/k+1) = 0, \quad \forall i \geq 0$.

Le fait que la commande sous optimale $\Delta u^*(k+1)$ soit simplement une version décalée dans le temps de la commande optimale $\Delta u(k)$ additionnant un zéro à la fin, fait que le problème, en plus d'être faisable car il l'était à l'instant précédent (on a supposé que le problème a initialement une solution), entraîne une diminution ou au moins l'égalité de la valeur de la fonction coût ($J^*(k+1) \leq J(k)$) étant donné que:

$$J^*(k+1) = J(k) + \eta[e(k+N_Y+1/k)]^2 - \eta[e(k+1/k)]^2 - \lambda[\Delta u(k/k)]^2, \quad (2.13)$$

où $e(k+1/k) = \hat{y}(k+1/k) - w(k+1/k)$. Comme le vecteur des incréments futurs des signaux de commande appliqués satisfont les contraintes finales $e(k+N_Y+1/k) = 0$, on a:

$$J^*(k+1) = J(k) - \eta[e(k+1/k)]^2 - \lambda[\Delta u(k/k)]^2, \quad (2.14)$$

c'est-à-dire, la valeur de $J^*(k+1)$ est celle de $J(k)$ moins quelques termes positifs ou nuls.

Etant donné que le vecteur Δu^* est tel que $\Delta u^*(k+i/k+1) = \Delta u(k+i/k)$ et en l'absence de perturbations, l'implantation à l'instant $k+1$ du vecteur de commande $\Delta u^*(k+1)$ produit les prévisions $y^*(k+i/k+1) = y(k+i/k)$. Ainsi, ce vecteur satisfait les contraintes terminales ($\Delta u^*(k+N_U+i/k+1) = 0, \forall i \geq 0$). Par conséquent le vecteur des futures augmentations de la commande optimale $\Delta u(k+1)$ qui satisfait également les contraintes finales et qui minimise la fonction de coût, conduira à une fonction coût qui sera plus petite ou égale à celle calculée avec le vecteur des signaux sous optimaux:

$$J(k+1) \leq J^*(k+1) \leq J(k). \quad (2.15)$$

Par conséquent $J(k)$ peut être interprète comme une fonction de Lyapunov dont la non croissance permet d'affirmer la stabilité du système commandé.

■

2.1.2.2 Seconde Solution

Elle est formée par des algorithmes qui utilisent un horizon de prédiction infini comme: Rawlings et Muske (1993), le GPC $^\infty$ de Scokaert (1997) ou le contrôleur d'horizon infini de Rossiter, Gossner et Kouvaritakis (1996) et Lit, Kwon et Choi (1998).

Ces contrôleurs peuvent être déterminés, du fait que le problème associé est transformé, après quelques manipulations, en un problème équivalent d'horizon fini avec un système dépendant de matrices de poids. De cette manière, on résout la difficulté de manier des restrictions dans le cadre d'horizon de prédiction infini.

Pour transformer la fonction d'horizon infini:

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right) \quad (2.16)$$

en une fonction équivalente d'horizon fini, il est fait l'hypothèse que pour $i \geq N$ la loi de commande appliquée est un retour d'état $u(k+i-1/k) = Kx(k+i-1/k)$ -Chmielewski et Manousiouthakis (1996) et Scokaert et Rawlings (1998)-.

Ainsi la fonction coût peut être réécrite de la manière suivante:

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right) + \sum_{i=N}^{\infty} \left(x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right). \quad (2.17)$$

En développant le second terme de l'expression précédente, il vient:

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{\infty} \left(x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right) = & \\ & x(k+N/k)^T (Q + K^T R K) x(k+N/k) + \\ & x(k+N+1/k)^T (Q + K^T R K) x(k+N+1/k) + \quad (2.18) \\ & \vdots \\ & x(k+N+j/k)^T (Q + K^T R K) x(k+N+j/k) + \\ & \vdots \end{aligned}$$

ou de manière équivalente:

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{\infty} \left(x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right) = & \\ & x(k+N/k)^T (Q + K^T R K) x(k+N/k) + \\ & x(k+N/k)^T (A + BK)^T (Q + K^T R K) (A + BK) x(k+N/k) \quad (2.19) \\ & \vdots \\ & x(k+N/k)^T (A + BK)^{Tj} (Q + K^T R K) (A + BK)^j x(k+N/k) \\ & \vdots \end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned} \sum_{i=N}^{\infty} \left(x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right) = & \\ & x(k+N/k)^T \sum_{i=0}^{\infty} \left[(A^T + K^T B^T)^i (Q + K^T R K) (A + BK)^i \right] x(k+N/k). \quad (2.20) \end{aligned}$$

S'on fait:

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} (A^T + K^T B^T)^i (Q + K^T R K) (A + BK)^i, \quad (2.21)$$

la série converge si le système est stable, alors

$$\begin{aligned} (A + BK)^T P (A + BK) &= \sum_{i=1}^{\infty} ((A^T + K^T B^T)^i (Q + K^T R K) (A + BK)^i) \\ &= P - (Q + K^T R K). \end{aligned} \quad (2.22)$$

L'équation précédente est une équation de Lyapunov. Le problème de MPC à horizon infini, se transforme en la minimisation de la fonction objectif d'horizon fini suivante:

$$J(k) = x(N/k)^T P x(N/k) + \sum_{i=0}^{N-1} (x(k+i/k)^T Q x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k)). \quad (2.23)$$

Remarque 2.1. Il est possible de dériver une procédure semblable à celle effectuée par les équations (2.16)-(2.23), si au lieu de considérer $u(k+i-1/k) = Kx(k+i-1/k)$ pour $i \geq N$, on utilise $u(k+i-1/k) = 0$ -Rawlings et Muske (1993)-. Ceci implique que "on éteint" le contrôle et on laisse le système opérer en boucle ouverte. Ceci n'est possible que si le système est stable en boucle ouverte.

•

2.2 Robustesse en MPC avec des contraintes

Pour un modèle mathématique à utiliser dans le but de concevoir un système de contrôle, il est préférable que celui-ci ait une structure simple (linéaire, par exemple) et d'une taille suffisamment petite pour pouvoir employer de manière efficace les techniques d'optimisation disponibles. Cela permet ainsi d'effectuer le calcul des actions de commande en un temps raisonnable compatibles aux conditions du temps réel.

Pour cette raison, pour le choix du modèle mathématique, il s'avère nécessaire d'effectuer des simplifications pour ne retenir que les aspects essentiels du comportement. Il est aussi commun d'envisager des problèmes pour lesquels on dispose d'une information incomplète du processus. Pour ces raisons le modèle ne sera pas une description précise du comportement du processus réel, mais plutôt, une approximation de celui-ci.

La majorité des techniques de conception de contrôleurs, se basent sur modèle avec une structure et des paramètres fixes (modèle nominal). Mais, de manière plus réaliste, on doit tenir compte des erreurs qui peuvent affecter défavorablement l'action du système de commande. L'objectif est que le contrôleur conçu soit insensible à ces incertitudes de modèle, c'est-à-dire, qu'il soit robuste.

Le but de la commande robuste est de concevoir des contrôleurs qui préservent la stabilité et les performances du système malgré les erreurs de modèle et les incertitudes.

Bien que le concept de boucle fermée satisfasse des critères de robustesse de manière implicite, le terme de commande robuste est utilisé dans la littérature pour des systèmes de commande qui sont basés sur une prise en compte explicite des divergences entre le modèle et le processus réel, c'est-à-dire, quand on incorpore l'incertitude dans la formulation des problèmes de synthèse.

L'étude de contrôleurs robustes est un domaine d'actualité de grand intérêt, et sont nombreuses les publications écrites sur ce sujet durant les dernières années. Pour davantage de détails consulter: Barmish (1983), Bernussou, Peres et Geromel (1989), Bernussou (1996), Sánchez-Peña et Sznaier (1998) et Zhou (1998).

Toutes les formulations MPC mentionnées au chapitre 1, se basent sur l'utilisation d'un modèle nominal du processus pour la prédiction de la sortie, c'est-à-dire, ne considèrent pas explicitement les erreurs du modèle du système.

Le fait de calculer une commande avec performance optimale pour un modèle unique particulier, peut conduire à une performance pauvre quand implantée sur un système réel lequel n'est pas précisément décrit par le modèle, voir Zheng et Morari (1993).

Motivé par les avancées de la théorie de la commande robuste, vers la fin de la décennie 80 et les débuts de celle de 90, s'est produit un accroissement dans l'intérêt de la communauté scientifique, à réviser les techniques de commande prédictive avec l'intention d'inclure des caractéristiques de robustesse, garantissant stabilité et performances adéquates quand le modèle du processus est incertain.

L'idée de base de la conception de contrôleurs MPC robustes, consiste à prendre en considération les incertitudes du modèle d'une manière explicite et à concevoir le contrôleur de manière à diminuer la fonction objectif pour le pire cas de l'ensemble des modèles incertains (problème min-max).

Basés sur ce concept on peut mentionner les travaux de Domaine et Morari (1987), Allwright et Papavasiliou (1992), et Zheng et Morari (1993) qui ont présenté des schémas robustes MPC pour systèmes à une entrée et une sortie (SISO) où on étudie les cas de réponse impulsionnelle finie (FIR).

Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) et Cuzzola, Geromel et Morari (2002) font usage de modèles linéaires polyédriques (incertitude structurée) et inégalités linéaires matricielles (Boyd, El Ghaoui, Feron et Balakrishnan 1994), pour concevoir des commandes robustes efficaces qui garantissent des restrictions sur l'entrée et la sortie du système.

Camacho et Bordons (1998), et Megías, Montagnard et Prada (2000) emploient une description d'incertitude très globale dans le modèle mathématique, qui permet d'englober un grand nombre de phénomènes tels que non linéaires, perturbations non mesurables et paramètres variant dans le temps. La loi de commande est déterminée en résolvant un problème min-max sur l'ensemble des familles incertaines définies par l'incertitude (il s'agit là d'une solution très "suffisante").

Avant de présenter certains des résultats les plus importants sur la robustesse en MPC, on fera un bref examen des modèles mathématiques d'incertitudes.

2.2.1 Modèles d'incertitude

Au moyen des incertitudes on représente une famille de modèles dans laquelle le processus réel (inconnu) se trouve précisément décrit par un des éléments de la famille.

Bien que l'information dont on dispose sur un système soit incomplète, il est toujours possible d'effectuer des essais qui permettent de quantifier d'une certaine manière le domaine et la structure de l'incertitude, et la décrire de la manière la plus adaptée pour la conception du contrôleur -Dahleh et Diaz (1995), et Granado, Colmenares et Pérez (1996)-.

L'incertitude peut être décrite en termes de changements non prédictibles dans les paramètres. Elle peut aussi être décrite dans le domaine fréquentiel comme des variations non prédictible sur l'amplitude et la phase de la fonction de transfert.

Pour l'analyse de systèmes incertains et la conception de leurs contrôleurs, on utilise principalement deux types de stratégies, à savoir: les méthodes fréquentielles et les méthodes temporelles. Le choix est étroitement liée à la modélisation du système et de ses incertitudes.

Si le modèle a été construit à partir d'observations de l'entrée et la sortie (représentation entre-sortie), la stratégie habituelle est fréquentielle, tandis que si le modèle a été construit à partir de lois physiques, la tendance est vers l'utilisation des méthodes temporelles.

Les méthodes fréquentielles modélisent l'incertitude comme une famille de fonctions de transfert autour d'une fonction nominale, c'est-à-dire, à une fréquence particulière l'amplitude et la phase de la fonction de transfert ne définissent pas un point du plan de Nyquist mais forment plutôt une région de ce plan. (Doyle *et al.* (1989), Doyle, Francis et Tannenbaun (1992), et Younce et Rohrs (1992)).

Les méthodes temporelles se basent sur des modèles de systèmes incertains formulés à partir de lois physiques et dans lesquels l'incertitude est exprimée selon des intervalles sur des valeurs paramétriques. Ils sont formulés avec des systèmes de variables d'états et requièrent une connaissance des principes physiques qui régissent le système.

L'incertitude présente dans les processus peut appartenir à diverses classes:

- Paramétrique/non paramétrique.
- Structurée/non structurée.
- Stochastique / déterministe.

Deux descriptions très utilisées dans la littérature de commande robuste sont: l'incertitude bornée en norme et l'incertitude polyédrique. Les deux définissent des ensembles convexes.

2.2.1.1 Incertitude bornée en norme [Petersen (1987), Zhou et Khargonekar (1988)]

Soit $A_n \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ une matrice constante qui représente un système nominal, $D \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ et $E \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ des matrices constantes connues qui vont caractériser comment le modèle nominal est affectée par l'incertitude, et $F \in \mathfrak{R}^{q \times q}$ qui représente l'incertitude du modèle, et satisfait:

$$F^T F \leq 1. \tag{2.24}$$

Le système avec incertitude bornée en norme, peut être décrit de la manière suivante:

$$\mathbf{A} = (A_n + DFE) \in \mathbf{A}. \tag{2.25}$$

\mathbf{A} c'est un ensemble convexe ellipsoïdal avec A_n centre de l'ensemble (Figure 2.7).

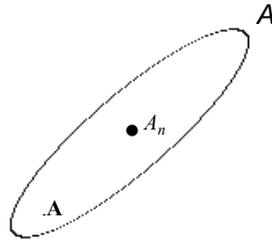


Figure 2.7. Incertitude bornée en norme.

2.2.1.2 Incertitude polyédrique [Bernussou, Peres et Geromel (1989)]

Soit $V_A = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ un ensemble de matrices de dimensions $n \times n$, il est possible de décrire l'incertitude polyédrique comme l'ensemble défini par:

$$\mathbf{A} = Co \{A_1, A_2, \dots, A_r\}, \tag{2.26}$$

ainsi

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_j, \quad \alpha \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \alpha : \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1 \right\}, \tag{2.27}$$

c'est-à-dire, \mathbf{A} est combinaison linéaire convexe des matrices sommet A_i .

Figure 2.8 on montre un schéma d'incertitude polyédrique.

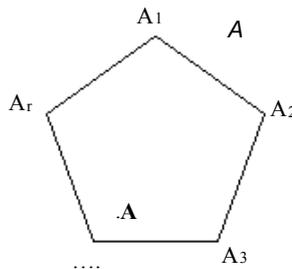


Figure 2.8. Incertitude polyédrique.

2.2.2 Incertitude en MPC

Au lieu d'utiliser une famille de modèles, la voie la plus appropriée jusqu'à l'heure actuelle, pour décrire l'incertitude dans la commande MPC est, pour une même entrée, de produire les trajectoires qui résultent des différents systèmes appartenant à la famille des modèles, définissant la bande dans laquelle devra s'inscrire la trajectoire du système.

Dans la suite sont décrites les formes les plus utilisées pour décrire les erreurs, dans les systèmes MPC.

2.2.2.1 Réponse impulsionnelle tronquée

Pour un système stable à m entrées et n sorties (MIMO), la réponse impulsionnelle tronquée de N éléments est donnée par N matrices H_t de $(n \times m)$ éléments.

La voie normale pour considérer l'incertitude est de supposer que les coefficients tronqués de la réponse à l'impulsion, qui sont mesurés expérimentalement, ne sont pas connus exactement et sont fonction des paramètres incertains. Des types différents pour caractériser l'incertitude peuvent être utilisés, néanmoins, la voie la plus générale est de considérer que la réponse à l'impulsion doit être dans un intervalle défini par $(\underline{H}_t)_{ij} \leq (H_t)_{ij} \leq (\overline{H}_t)_{ij}$, c'est-à-dire, $(H_t)_{ij}(\theta) = (H_{mt})_{ij} + \theta_{ij}$, où $\theta \in \Theta$ défini par $(H_{mt})_{ij} - (\overline{H}_t)_{ij} \leq (\theta)_{ij} \leq (\underline{H}_t)_{ij} - (H_{mt})_{ij}$ et H_{mt} la réponse nominale. La dimension du vecteur des paramètres incertains est alors $N*(m*n)$.

Par analogie à la réponse des systèmes SISO celle des systèmes MIMO peut être écrite par:

$$y(k+i/k) = \sum_{j=1}^N (h_{mj} + \theta_j) u(k+i-j/k). \quad (2.28)$$

La bande de prédiction autour de la réponse nominale dans laquelle doivent se contenir toutes les réponses des éléments de la famille d'incertitude est limitée par:

$$\min_{\theta \in \Theta} = \sum_{j=1}^N \theta_j u(k+i-j/k) \text{ et } \max_{\theta \in \Theta} = \sum_{j=1}^N \theta_j u(k+i-j/k). \quad (2.29)$$

2.2.2.2 Matrice de transfert

Pour un système discret à m entrées et n sorties (MIMO) une fonction de transfert est définie par:

$$A(z^{-1})y(k+i/k) = B(z^{-1})u(k+i-j/k), \quad (2.30)$$

où $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ sont des matrices premières polynomiales avec des éléments de la forme décrite par (1.4).

L'incertitude paramétrique peut alors être décrite par $(\underline{A}k)_{ij} \leq (A_k)_{ij} \leq (\overline{A}k)_{ij}$ et $(\underline{B}k)_{ij} \leq (B_k)_{ij} \leq (\overline{B}k)_{ij}$, c'est-à-dire, $(A_k)_{ij} = (A_{km})_{ij} + \theta_{akij}$ et $(B_k)_{ij} = (B_{km})_{ij} + \theta_{bkij}$, A_{km} et B_{km} étant les matrices nominales. Le nombre de paramètres incertains pour cette description est: $n_a * n * n + n_b * n * m$, et n_a, n_b étant le degré maximum des polynômes éléments de A et B .

Est utilisée une méthodologie min-max pour l'obtention du contrôleur robuste. Le problème consiste à obtenir la commande qui minimise le maximum de la fonction coût $\{J(k)\}$ sur l'ensemble des modèles définis dans la bande qui limite toutes les familles:

$$\Delta u_{OPT} = \arg \min_{\Delta u} \max_{\theta \in \Theta} J(k). \quad (2.31)$$

L'inconvénient de ce procédé est la grande quantité de calculs qui doivent être faits pour évaluer tous les modèles.

2.2.2.3 Incertitude globale

Cette description tente de s'adresser à beaucoup de problèmes pratiques, l'idée principale pour modéliser l'incertitude, est de supposer que toutes les erreurs du modèle sont globalisées dans un vecteur de paramètres [Camacho et Bordons (1998)], que le processus peut être décrit par la famille de modèles:

$$\hat{y}(k+1) = f(y(k), \dots, y(k-n_a), u(k), \dots, u(k-n_b)) + \theta(k), \quad (2.32)$$

où la dimension de $\theta(k)$ est n et $(\underline{\theta}) \leq (\theta(k)) \leq (\overline{\theta})$.

Il est possible d'observer que l'incertitude globale peut être liée aux autres types d'incertitude. Pour le modèle de la réponse impulsionnelle, la sortie à l'instant $k+i$ est donnée par:

$$\begin{aligned} y(k+i/k) &= \sum_{j=1}^N (h_{mj} + \theta_i) u(k+i-j/k) \\ &= \sum_{j=1}^N (h_{mj}) u(k+i-j/k) + \theta(k+i), \end{aligned} \quad (2.33)$$

où $\theta(k+i) = \sum_{j=1}^N (\theta_j) u(k-j/k)$.

Le nombre de paramètres incertains est réduit de $N*(n*n)$ à n , mais le procédé est plus conservateur puisque la limite du domaine des paramètres incertains a été augmentée jusqu'à inclure la plus mauvaise situation globale. Toutefois, cette façon de définir l'incertitude paraît assez intuitive.

Pour la description selon la matrice de transfert, le modèle de l'incertitude globale $\theta(k)$ peut être vu comme un signal de commande incorporé au modèle CARIMA comme:

$$A(z^{-1})y(k+i/k) = B(z^{-1})u(k+i-j/k) + \frac{\theta(k)}{\Delta}. \quad (2.34)$$

Il est possible d'observer qu'avec ce type d'incertitude, il n'est pas nécessaire de supposer que le modèle est linéaire, il suffit de supposer que le processus peut être approché par un modèle linéaire de sorte que toute trajectoire restera inscrite dans les bandes définies à partir de $(\underline{\theta})$ et $(\bar{\theta})$.

L'incertitude globale $\theta(k)$ inconnue mais bornée, est ajoutée à la sortie du modèle pour produire la vraie sortie du système. Ainsi toutes les sources d'incertitude, (linéaires ou non linéaires, variant dans le temps, erreurs non mesurables de modèle, perturbations, etc.) sont agrégées dans un paramètre unique $\theta(k)$.

Le vecteur de la commande optimale peut être obtenu au moyen de la solution du problème:

$$\Delta u_{OPT} = \arg \min_{\Delta u} \max_{\theta^N \in \Theta^N} J(k), \quad (2.35)$$

sous les contraintes additionnelles.

$J(k)$ est la fonction de coût (ou objectif) et Θ^N est l'enveloppe convexe polyhedral du domaine incertain constitué par 2^N sommets résultant de toutes les combinaisons possibles des valeurs extrêmes de θ^N dans tout l'horizon N .

$$\Theta^N = Co\{\theta_1^N, \theta_2^N, \dots, \theta_{2^N}^N\}. \quad (2.36)$$

Toutes les incertitudes globales possibles sont des combinaisons linéaires des sommets du polyèdre:

$$\theta^N = \sum_{i=1}^{2^N} \lambda_i \theta_i^N, \quad (2.37)$$

où

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{2^N} \lambda_i = 1, \quad 1 \leq i \leq 2^N. \quad (2.38)$$

N'importe quelle fonction de coût $J(k)$ peut être utilisée pour la formulation min-max, néanmoins, si celle-ci est convexe, le maximum de $J(k)$ nécessairement se produit sur un des sommets de Θ^N , ce qui réduit la complexité du problème d'optimisation puisque il suffit de considérer les fonctions coût en chaque sommet de θ_i^N .

2.2.2.4 Descriptions multimodèle

Une méthode alternative au min-max pour l'approche MBPC est décrite dans Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), dans cette approche sont utilisées des descriptions polyédrales pour des modèles linéaires incertains. Sont utilisées "les inégalités matricielles

linéaires" (LMI), pour la conception du contrôleur robuste qui satisfait les restrictions en entrée, en sortie et sur les états.

Le problème initial est celui de la détermination de la commande minimisant le cas le plus mauvais de la fonction coût sur l'ensemble convexe du polyèdre des modèles linéaires

$$g = \text{Co}\{G_1, G_2, \dots, G_L\} \quad (2.39)$$

avec l'ensemble des restrictions. Le vrai modèle (non connu) est supposé être une combinaison linéaire des sommets du polyèdre (multimodèle):

$$G = \sum_{i=1}^L \lambda_i G_i, \quad (2.40)$$

où

$$\lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1; \quad 1 \leq i \leq L. \quad (2.41)$$

Le problème d'optimisation peut être formulé:

$$\Delta u_{OPT} = \arg \min_{\Delta u} \max_{G \in g} J(k), \quad (2.42)$$

où Δu est le vecteur de commande et $J(k)$ est la fonction coût (ou objectif).

Ce problème d'optimisation, exige un grand effort de calcul et il est réduit en définissant une borne supérieure de la fonction objectif, le problème d'optimisation porte alors sur l'optimisation de la borne supérieure, ramenant le problème à une optimisation convexe qui implique les inégalités matricielles linéaires (LMI).

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre quelques définitions et résultats utiles pour les chapitres suivants ont été présentés. On a brièvement rappelé le critère de stabilité de Lyapunov (deuxième méthode ou méthode directe). On a défini les modèles d'incertitude polyédrique et bornée en norme qui sont deux types de représentation mathématique de modèles d'incertitude très utilisés dans la théorie de la commande robuste, et qui seront utilisés dans les prochains chapitres de ce travail.

On a présenté les deux approches les plus importantes pour le problème de l'étude de la stabilité en commande prédictive. Il a été rappelé que toutes deux s'appuient sur le fait que la fonction de coût est monotonnement décroissante, ce qui peut être interprété comme la décroissance d'une fonction de Lyapunov.

On a aussi présenté les façons les plus communes et appropriées de décrire l'incertitude pour le contrôle MPC. Ceci a pour but d'effectuer la conception de contrôleurs robustes qui permettent de garantir la stabilité et les performances pour tous les modèles possibles pour un système incertain.

Chapitre 3

Commande robuste et LMI

Quelques définitions et résultats qui serviront de base pour le développement de la méthodologie de synthèse de contrôleurs proposée dans ce travail sont rappelés.

On commence le chapitre par un bref examen des inégalités matricielles linéaires (LMI). On révisera quelques résultats de la théorie de la commande robuste. Sera notamment considéré le concept de stabilisabilité quadratique et seront posées les conditions pour la garantir dans les systèmes incertains discrets, par commande de retour d'état et par retour de sortie dynamique.

On fera une étude de différents critères de performance pour systèmes linéaires, spécialement: l'indice quadratique, la norme H_2 , la norme H_∞ et la localisation de pôles. Seront aussi rappelées les conditions pour la conception de contrôleurs dynamiques pour systèmes incertains à temps discret, de manière à satisfaire ces critères.

Finalement, on rappellera le résultat du travail de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) qui traite de MPC robuste par retour d'état, la synthèse étant réalisée au moyen de LMIs. Ce travail sert de base pour le développement des chapitres suivants.

3.1 Inégalités Matricielles Linéaires

Nombre de résultats de la théorie de la commande robuste, sont développés dans le cadre de l'utilisation des inégalités matricielles linéaires (LMI). On en fait une brève description, pour davantage de détail se référer à Boyd *et al.* (1994).

3.1.1 Définition de LMI

Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une expression du type:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (3.1)$$

où $x = [x_1, \dots, x_m]^T \in \mathfrak{R}^m$ est un vecteur de valeurs inconnues (variables). Les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ sont connues et l'inégalité " >0 " signifie "défini positif", c'est-à-dire, $u^T F(x) u > 0$ pour tout $u \in \mathfrak{R}^n$, $u \neq 0$. De manière équivalente, la valeur propre la plus petit de $F(x)$ est positive.

Remarque 3.1. On peut avoir une inégalité matricielle linéaire non stricte dénotée par le symbole " \geq ".

•

Remarque 3.2. L'expression $F(x) < 0$ c'est un cas spécial de (3.1), qui peut être réécrit comme $-F(x) > 0$.

•

3.1.2 Importance des LMI's

Parmi les propriétés les plus importantes des inégalités matricielles linéaires, peuvent être mentionnées:

3.1.2.1 La convexité

Définition 3.1. Un ensemble C est dit convexe si $\lambda x + (1-\lambda)y \in C \forall x, y \in C$ et $\lambda \in (0,1)$.

□

Lemme 3.1. L'inégalité matricielle linéaire donnée par l'expression (3.1) définit un ensemble convexe sur la variable x .

▷

Dans la majorité des cas il n'y a pas de solution analytique à l'expression (3.1). La propriété de convexité permet la mise en œuvre d'algorithmes numériques efficaces.

3.1.2.2 De multiples LMIs peuvent être exprimées comme une simple

Des inégalités linéaires matricielles multiples $F_1(x), F_2(x), \dots, F_p(x) > 0$ peuvent être représentées comme une simple LMI.

$$\begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & F_p(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.2)$$

3.1.2.3 Inégalités non linéaires (convexes) comme inégalités linéaires

Le lemme qui suit montre que par "complément de Schur" certains types d'inégalités matricielles non linéaires peuvent être converties en LMI.

Lemme 3.2. (Boyd, El Ghaoui, Feron et Balakrishnan 1994). Soient les matrices $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et les matrices symétriques $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, les propositions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0, \quad (3.3)$$

$$Q > 0; R - S^T Q^{-1} S > 0, \quad (3.4)$$

$$R > 0; Q - S R^{-1} S^T > 0. \quad (3.5)$$

▷

Preuve:

Soient:

$$M_1 = \begin{bmatrix} I & -Q^{-1}S \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^T & I \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

La multiplication de (3.3) à gauche par M_1^T et à droite par M_1 , donne:

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} > 0. \quad (3.7)$$

De manière semblable, la multiplication de (3.3) à gauche par M_2^T et à droite par M_2 , fournit:

$$\begin{bmatrix} Q - S^T R^{-1} S & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0. \quad (3.8)$$

■

Remarque 3.3. Une fois écrite une inégalité matricielle comme une LMI, il existe des algorithmes effectifs et puissants pour la solution de cette classe de problèmes: Alizadeh, Haeberly et Overton (1998), Nesterov et Nemirovsky (1994) et Vandenberghe et Boyd (1995). Il y a aussi sur le marché des outils effectifs pour la résolution de tels problèmes, comme par exemple, la toolbox de LMIs de Matlab®.

•

3.2 Stabilizabilité quadratique de systèmes discrets incertains

Le concept de stabilisabilité quadratique, qui consiste simplement à tester les propriétés de stabilité au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique unique, sur tout le domaine d'incertitude, a été introduit par Hollot et Barmish (1980). En 1985, Barmish (1985) a donné une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique sans donner toutefois de technique constructive pour la tester, c'est à dire, pour définir la fonction de Lyapunov candidate.

Dans le cadre d'incertitudes polytopiques, un des premiers résultats fournissant une condition constructive peut être trouvé dans Bernussou, Peres et Geromel (1989), et développée par la suite dans Geromel, Peres et Bernussou (1991), Kucera (1991).

Soit un système décrit par les équations d'état suivantes:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k) \\ z(k) &= C_1x(k) + D_{12}u(k) \\ y(k) &= C_2x(k) + D_{21}w(k) \end{aligned} \quad , \quad (3.9)$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$, $w(k) \in \mathfrak{R}^l$ sont respectivement le vecteur de variables d'état, d'entrée et de perturbation, $z(k) \in \mathfrak{R}^p$, $y \in \mathfrak{R}^q$ sont respectivement la sortie commandée et la sortie mesurée. Les matrices $B_1, C_1, C_2, D_{12}, D_{21}$ sont des matrices connues de valeurs constantes et les matrices incertaines A, B_2 sont définies par un domaine polyédrique convexe, comme:

$$\begin{aligned} D_A &= Co \{A_1, A_2, \dots, A_N\}, \\ D_{B_2} &= Co \{B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2M}\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j, \quad : \quad \alpha \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \alpha : \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\} \\ B_2 &= \sum_{i=1}^M \beta_i B_{2i}, \quad : \quad \beta \in \Theta, \quad \Theta = \left\{ \beta : \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^M \beta_i = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.1 Stabilizabilité par retour d'état

Une condition de stabilizabilité par retour d'état, pour systèmes à temps discrets avec incertitude polyédrique, est définie par le théorème suivant:

Théorème 3.1. [Geromel, Peres et Bernussou (1991)]. *Le système linéaire incertain à temps discret défini par (3.9), il est quadratiquement stabilisable par retour d'état $u(k) = Kx(k)$ si et seulement si, il existe une matrice symétrique définie positive $S \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ solutions du problème suivant:*

$$\begin{bmatrix} S & A_i S + B_{2j} R \\ SA_i^T + R^T B_{2j}^T & S \end{bmatrix} > 0, \quad i=1,2,\dots,N, \quad j=1,2,\dots,M. \quad (3.12)$$

La matrice de retour d'état est alors donnée par $K = RS^{-1}$.

□

3.2.2 Stabilizabilité par contrôleur dynamique [Courties (1999)]

Ensuite sont énoncées les conditions qui garantissent la stabilizabilité en boucle fermé du système à temps discret avec incertitude polyédrique décrit par (3.9), en utilisant un contrôleur dynamique:

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k) \\ u(k) &= C_c x_c(k) \end{aligned}, \quad (3.13)$$

où $x_c(k) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état du contrôleur, les matrices $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ et $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ définissant le contrôleur dynamique.

Le domaine d'incertitude polyédrique est défini par:

$$A_g = \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{Ag} = Co \{A_{g1}, A_{g2}, \dots, A_{gN}\}, \quad (3.14)$$

où

$$A_g = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_{gj}, \quad \alpha \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \alpha : \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\}. \quad (3.15)$$

Théorème 3.2. *S'il existe des matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et des matrices $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ solutions de l'inégalité matricielle:*

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA_i + FC_{2i} & Z_i + M \\ I & X & A_i & A_i X + B_{2i} L \\ A_i^T Y + C_{2i}^T F^T & A_i^T & Y & I \\ Z_i^T + M^T & XA_i^T + L^T B_{2i}^T & I & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.16)$$

avec

$$Z = YA_i X + YB_{2i} L + FC_{2i} X \quad (3.17)$$

alors le système incertain décrit par (3.9) est quadratiquement stabilisable par un contrôleur de retour de sortie dynamique du type (3.13).

□

Remarque 3.4. La synthèse du contrôleur en utilisant ce résultat, ne peut pas être effectuée par l'utilisation de méthodes LMI du fait que l'inégalité matricielle (3.16) n'est pas linéaire, mais bilinéaire. Pour l'obtention du contrôleur on peut appliquer un algorithme itératif de décomposition croisée [Geromel, Bernussou et Oliveira (1999)] ou tout autre méthode de relaxation.

•

3.2.2.1 Construction du contrôleur

Pour construire un contrôleur dynamique, après l'obtention de la solution du Théorème 3.2, on peut utiliser les équations suivantes:

1. $A_c = (1 - YX)^{-1} M$.
2. $B_c = (1 - YX)^{-1} F$.
3. $C_c = L$.

3.3 Critères de performance

La stabilité, condition nécessaire, n'est, en général, pas suffisante pour garantir des performances convenables, c'est la raison pour laquelle on ajoute au problème de synthèse quelques conditions additionnelles de performance en boucle fermée.

Parmi les caractéristiques de performance désirables pour un système, on peut envisager:

- Des indices en rapport avec l'énergie dans le système en vue, par exemple, de limiter l'effort du signal de contrôle.
- Des indices en rapport avec la capacité du système à rejeter des perturbations ou à atténuer leur effet sur les variables commandées.
- Des indices en rapport avec les exigences de la réponse dynamique du système, par exemple, rapidité, amortissement, etc.

Par la suite, sont décrits, succinctement, quelques moyens pour répondre à des exigences de performances associées au système discret suivant:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et $y(k) \in \mathfrak{R}^q$ sont respectivement le vecteur de variables d'état, d'entrée et de sortie. $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ sont respectivement la matrice du système, la matrice d'entrée et la matrice de sortie.

3.3.1 Critère quadratique

Il existe une vaste littérature qui traite de la synthèse de contrôleurs basée sur la minimisation d'un critère quadratique, dans lequel on pondère la valeur de l'effort de contrôle et les états du système, par exemple:

$$J_{\infty}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x(k+i)^T Q x(k+i) + u(k+i)^T R u(k+i) \right). \quad (3.19)$$

La sélection des matrices de poids Q et R , influencent le comportement dynamique du système en boucle fermé en modifiant la localisation des pôles -Anderson et Moore (1990), Kwakernaak et Sivan (1972)-.

3.3.2 Critère H_2 ($D=0$)

Dans la théorie de la commande robuste, il est commun de trouver la conception de stratégies de commande pour des systèmes, qui se basent la minimisation d'une norme H_2 .

La définition de la norme H_2 peut être faite de deux manières équivalentes, d'une dans le domaine fréquentiel et l'autre dans le domaine temporel.

Définition 3.2. La norme H_2 d'un système linéaire stable correspond à l'énergie de la réponse impulsionnelle.

□

Définition 3.3. La norme H_2 d'un système linéaire stable, peut également être caractérisée par la variance de la sortie, l'entrée étant bruit blanc gaussien unitaire.

□

On peut obtenir une expression algébrique précise de la norme H_2 . Pour son calcul on emploie les grammiens d'observabilité et de commandabilité, qui sont solutions des équations de Lyapunov suivantes [Zhou, Doyle et Glover (1996)]:

$$\begin{aligned} A^T L_O A - L_O + C^T C &= 0, \\ A L_C A^T - L_C + B B^T &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

L_o est le grammien d'observabilité et L_c est le grammien de commandabilité.

Théorème 3.3. *Pour le système décrit par (3.18), avec A stable, il vient:*

$$\|T_{uy}\|_2^2 = \text{tr}(CL_c C^T) = \text{tr}(B^T L_o B), \quad (3.21)$$

où $T_{uy} = C(\delta I - A)^{-1} B$.

□

En fait le problème de la minimisation de la norme H_2 peut être vu comme une généralisation des problème LQ et LQG (Linear Quadratic Gaussian), largement étudiés entre les années 60 et 70 [Anderson et Moore (1990)].

3.3.3 Critère H_∞

L'utilisation de la norme H_∞ est un peu plus complexe que celle de la norme H_2 , étant donné la difficulté de la calculer précisément. Toutefois il existe des procédures qui permettent de déterminer une borne supérieure de celle-ci, et c'est d'ailleurs ce qui est intéressant en pratique.

Si le système est stable, une expression connue de la norme H_∞ est:

$$\|T_{uy}\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(T_{uy}(j\omega)). \quad (3.22)$$

Dans le cas monovariante, la norme H_∞ correspond à la valeur maximale du gain de la fonction de transfert. Cette norme peut être utilisée pour résoudre des problèmes de performance comme, par exemple, le rejet de perturbations de même que des problèmes de robustesse. Le problème consiste à déterminer un contrôle qui permet d'assurer la stabilité d'un système et à la fois, réduire l'effet d'une perturbation (diminuer la norme H_∞ du système). Ce problème est difficile à résoudre du fait qu'il n'existe pas une méthode de calcul direct de cette norme. Par contre il peut être vérifié si la norme H_∞ du système est inférieure à une valeur γ donnée. Le lecteur intéressé pourra trouver une plus grande information sur ce type de contrôleurs dans Gahinet et Apkarian (1994).

La conception de contrôleurs type H_∞ se base le lemme suivant:

Lemme 3.3. [Doyle, Packard et Zhou (1991)]. *Soit la matrice de transfert $T_{uy} = C(\delta I - A)^{-1} B$ du système (3.18). Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- $\|T_{uy}\|_\infty < \gamma$ et A c'est une matrice stable (dans le sens discret, c'est-à-dire, $|\lambda_i(A)| < 1$).

- Il existe une matrice symétrique définie positive P , satisfaisant:

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B & C^T \\ B^T P A & B^T P B - \gamma I & D^T \\ C & D & \gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.23)$$

- Il existe une matrice symétrique définie positive P , satisfaisant:

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -P & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -\gamma I & D \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.24)$$

▷

3.3.4 Localisation de pôles

La localisation des pôles dans le plan complexe détermine les caractéristiques du comportement dynamique d'un système, c'est-à-dire, sa rapidité, son amortissement, et d'autres indices de la réponse transitoire du système.

Une manière effective de garantir un bon compromis entre oscillations et vitesse, est de placer les pôles dans un disque de rayon r centré au point $\alpha + j0$, dénoté $D(r, \alpha)$, comme il est illustré dans la Figure 3.1.

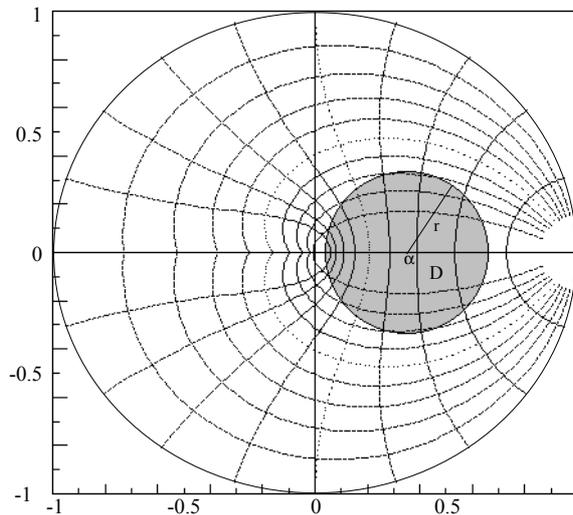


Figure 3.1. Localisation de pôles en région du cercle unitaire.

c'est-à-dire,

$$D(r, \alpha) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re}(\lambda) - \alpha)^2 + \operatorname{Im}(\lambda)^2 \leq r^2 \right\}, |\alpha| + r < 1. \quad (3.25)$$

Dans ce cas d'intérêt pratique, l'objectif consiste à concevoir un contrôleur qui permette de placer les pôles du système en boucle fermée, dans une certaine région (disque) du cercle unitaire. De nombreux résultats de ce problème se trouvent dans la littérature – Garcia et Bernussou (1995), Garcia, Daafouz et Bernussou (1996), Garcia, Bernussou et Camozzi (1996)-.

Définition 3.4. Une matrice M est dite d -stable si toutes ses valeurs propres appartiennent au disque $D(r, \alpha)$.

□

Lemme 3.4. [Furuta et Kim (1987)]: Une matrice A est d -stable si, et seulement si, quelle que soit $Q = Q^T > 0$, l'équation de Lyapunov modifiée:

$$A^T P A - \alpha (A^T P + P A) + (\alpha^2 - r^2) P + Q = 0. \quad (3.26)$$

admet une solution symétrique définie positive P .

▷

D'une manière équivalente, tester l'équation (3.26) revient à vérifier si l'équation de Lyapunov suivante admet une solution définie positive:

$$\frac{(A - \alpha I)^T}{r} P \frac{(A - \alpha I)}{r} - P + \frac{Q}{r^2} = 0. \quad (3.27)$$

Ainsi, l'appartenance des valeurs propres de A au disque $D(r, \alpha)$ est alors équivalente à l'appartenance des valeurs propres de la matrice auxiliaire:

$$A_r = \frac{(A - \alpha I)}{r}. \quad (3.28)$$

au disque unité. Ainsi, la résolution du problème de placement de pôles dans un disque, peut donc être ramenée à la résolution d'un problème de stabilisabilité pour un système auxiliaire.

3.4 Conception de contrôleurs en utilisant des critères de performance

Dans cette section sont rappelées un ensemble de résultats, basés sur l'utilisation des inégalités matricielles linéaires, pour la conception de contrôleurs dynamiques pour systèmes linéaires incertains, représentés au moyen d'équations d'états.

Pour la conception de tels contrôleurs on emploie certains des critères de performance mentionnés dans la section précédente.

3.4.1 Contrôleur H_2

Sont rappelées les conditions pour la conception de contrôleurs de sortie dynamiques type H_2 . On étudie les cas d'incertitude polyédrique et bornée en norme.

3.4.1.1 Incertitude de type polyédrique

Pour ce cas, on considère le système décrit par les équations d'état (3.9) et les incertitudes (3.14)-(3.15). Le problème consiste à déterminer un contrôleur dynamique (3.13) qui garantit la stabilisabilité du système en boucle fermé, et qui garantit que la norme H_2 de la fonction de transfert entre les signaux w et z soit inférieure ou égale à une valeur $\sqrt{\gamma} > 0$:

$$\|T_{wz}\|_2^2 \leq \gamma, \quad (3.29)$$

où $T_{wz} = C_1(\delta I - A)^{-1} B_1$.

Théorème 3.4. *S'il existe les matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, une matrice symétrique définie positive $W \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ et les matrices $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ solutions des inégalités matricielles:*

$$\text{tr}[W] \leq \gamma, \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & B_1 \\ 1 & X & XB_1 + FD_{21} \\ B_1^T & B_1^T X + D_{21}^T F^T & W \end{bmatrix} > 0, \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA_i^T + L^T B_{2i}^T & Z_i + M & YC_1^T + L^T D_{12}^T \\ I & X & A_i^T & A_i^T X + C_{2i}^T F^T & C_1^T \\ A_i Y + B_{2i} L & A_i & Y & I & 0 \\ Z_i^T + M^T & XA_i + FC_{2i} & I & X & 0 \\ C_1 Y + D_{12} L & C_1 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.32)$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, N$$

où

$$Z_i = YA_i^T X + YC_{2i}^T F^T + L^T B_{2i}^T X \quad (3.33)$$

alors le système discret (3.9) avec incertitude de type polyédrique (3.14)-(3.15), est quadratiquement stabilisé par un contrôleur dynamique de retour de sortie du type (3.13), et en outre $\|T_{wz}\|_2^2 < \text{tr}[W]$.

□

Remarque 3.5. La présence de variables d'optimisation bilinéaires dans Z_i , ne permet pas de résoudre le problème directement en utilisant les outils LMI. Afin de déterminer ce compensateur, on utilise un algorithme de décomposition croisée ou tout autre méthode de relaxation.

•

3.4.1.2 Incertitude bornée en norme

Considère le système incertain discret représenté par les équations d'état suivantes:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + DF_1 E_1)x(k) + (B + DF_1 E_2)u(k) + B_1 w(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_1 u(k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et $y(k) \in \mathfrak{R}^p$ sont respectivement le vecteur de variables d'état, de commande et de sorties mesurées, $w(k) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ est la perturbation externe et $z(k) \in \mathfrak{R}^{n_z}$ est la sortie commandée. A, B, C, B_1, C_1, D_1 , sont des matrices connues de valeurs constantes qui définissent le système nominal. Les matrices D, E_1, E_2 sont des matrices connues de valeurs constantes qui définissent la structure de l'incertitude.

La matrice inconnue $F_1 \in \mathfrak{R}^{n_d \times n_e}$ représente l'incertitude -bornée en norme - du modèle (Petersen, 1987), et satisfait:

$$D_F = \{F_1 \in \mathfrak{R}^{n_d \times n_e} : F_1^T F_1 \leq I\}. \quad (3.35)$$

Le problème consiste à trouver un contrôleur dynamique de type:

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k) \\ u(k) &= C_c x_c(k) \end{aligned} \quad (3.36)$$

tel que le système en boucle fermée soit stable et que la norme H_2 de la fonction de transfert entre les signaux w et z soit inférieur ou égale à une valeur $\sqrt{\gamma} > 0$ pour tout $F \in \mathcal{DF}$, c'est-à-dire:

$$\|T_{wz}\|_2^2 \leq \gamma \quad \forall F \in \mathcal{DF}. \quad (3.37)$$

Théorème 3.5. [Colmenares et al. (2000)]: le système (3.34) est quadratiquement stabilisé avec coût garanti H_2 inférieur à γ si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^n$ et des matrices $F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ solutions de l'inégalité matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} Y & I & YB_1 \\ 1 & X & B_1 \\ B_1^T Y & B_1^T & \varepsilon \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & E_1 & E_1 X + E_2 L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-1} I & C_1 & C_1 X + D_1 L & 0 & 0 & 0 \\ E_1^T & C_1^T & -Y & -I & A^T Y + C^T F^T & A^T & 0 \\ XE_1^T + L^T E_2^T & XC_1^T + L^T D_1^T & -I & -X & Z & XA^T + L^T B^T & 0 \\ 0 & 0 & YA + FC & Z^T & -Y & -I & YD \\ 0 & 0 & A & AX + BL & -I & -X & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D^T Y & D^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.39)$$

□

Remarque 3.6. La présence de la variable ε^{-1} et $\varepsilon \gamma$ ne permet pas de résoudre le problème directement en utilisant les outils LMI. Toutefois ε étant scalaire, une recherche unidirectionnelle permet d'approcher la résolution sans trop de problème.

•

3.4.2 Contrôleur H_∞

Il est aussi commun de trouver dans la théorie de la commande robuste, la conception de stratégies de commande pour des systèmes, qui se basent sur la norme H_∞ .

Pour ce cas, on considère le système décrit par les équations d'état (3.9) et l'incertitude (3.14)-(3.15). Le problème consiste à déterminer un contrôleur dynamique (3.13), qui garantit la stabilisabilité du système à boucle fermée et tel que $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$.

Le théorème suivant donne les conditions pour l'obtention de ce contrôleur.

Théorème 3.6. *S'il existe des matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, et des matrices $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}, L \in \mathfrak{R}^{m \times n}, F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ solutions de l'inégalité matricielle:*

$$\left[\begin{array}{cccccc} -X & -I & Z_i + M & XA_i + FC_{2i} & XB_1 + FD_{21} & 0 \\ -I & -Y & A_i Y + B_{2i} L & A_i & B_1 & 0 \\ Z_i^T + M^T & YA_i^T + L^T B_{2i}^T & -Y & -I & 0 & YC_1^T + L^T D_{12}^T \\ A_i^T X + C_{2i}^T F^T & A_i^T & -I & X & 0 & C_1^T \\ B_1^T X + D_{21}^T F^T & B_1^T & 0 & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & C_1 Y + D_{12} L & C_1^T & 0 & -\gamma I \end{array} \right] < 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.40)$$

où

$$Z_i = YA_i^T X + YC_{2i}^T F^T + L^T B_{2i}^T X \quad (3.41)$$

alors le système discret (3.9) avec incertitude type polyédrique (3.14)-(3.15) est quadratiquement stabilisable par un contrôleur dynamique de retour de la sortie du type (3.13), et en outre $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$.

□

Remarque 3.7. Tout comme dans les cas précédents, le problème de la détermination du compensateur ne peut pas être résolu directement par les outils LMI. Il est ici aussi nécessaire d'utiliser un algorithme de décomposition croisée ou tout autre méthode de relaxation.

•

3.4.3 Contrôleur avec localisation de pôles

Quand on souhaite obtenir certaines spécifications de performance dans la réponse transitoire du système, on peut penser à placer les pôles du système dans une certaine région du cercle unitaire. Comme il a été mentionné dans la section 3.3.4, une manière effective d'obtenir ceci, est de placer les pôles dans un disque de rayon r centré un point $\alpha + j0$, dénoté $D(r, \alpha)$.

Soit le système linéaire incertain à temps discret représenté par les équations d'état (3.18) et le domaine d'incertitude polytopique (3.14)-(3.15).

L'objectif est de concevoir un contrôleur dynamique de retour de sortie de (3.13) tel que le système en boucle fermé ait tous ses pôles dans le cercle $D(r, \alpha)$ sur tout le domaine d'incertitude.

Le système en boucle fermé peut, de manière équivalente, être écrit comme:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Théorème 3.7. *Le système étendu (3.42) a tous ses pôles dans le disque $D(r, \alpha)$, si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive P , telle que:*

$$\left(\frac{\tilde{A} - \alpha I}{r} \right)^T P \left(\frac{\tilde{A} - \alpha I}{r} \right) - P < 0, \quad (3.43)$$

où

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

□

Pour toute procédure de synthèse de contrôleurs basés en LMI, on calcule les valeurs du contrôleur (A_c, B_c, C_c) qui satisfont la condition posée dans le Théorème 3.7. De cette manière on garantit que les pôles du système en boucle fermé sont situés dans un disque de rayon r centré au point $\alpha + j0$.

3.5 MPC robuste basé en LMI

Dans le travail de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) propose la conception d'un contrôleur MPC robuste de retour d'état par inégalités linéaires matricielles. Le résultat principal est présenté par la suite.

Soit le système linéaire variant dans le temps représenté par les équations d'état suivantes:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$[A(k) \quad B(k)] \in \Omega$$

et la fonction de coût.

$$J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x(k+i/k)^T Q_1 x(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right); \quad Q_1 > 0, R > 0, \quad (3.46)$$

les restrictions sur le signal de contrôle et sur l'entrée sont données par:

$$\begin{aligned} \|u(k+i/k)\|_2 &\leq u_{\max}, \quad i \geq 0, \\ \|y(k+i/k)\|_2 &\leq y_{\max}, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le problème d'optimisation robuste se pose dans les termes suivants

$$\min_{u(k+i/k), i \geq 0} \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J(k). \quad (3.48)$$

On définit une fonction quadratique $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$ avec $P > 0$, $V(x)$ majore $J(k)$, et γ sa borne supérieure:

$$\begin{aligned} \min_{u(k+i/k), i \geq 0} \gamma \\ V(x(k/k)) \leq \gamma \\ \max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J(k) \leq V(x(k/k)) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Le problème est résolu en trouvant une loi de contrôle de retour d'état $u(k+i/k) = Fx(k+i/k)$. En considérant que les incertitudes sont définies par:

$$\Omega = Co\{[A_1, B_1], [A_2, B_2], \dots, [A_L, B_L]\} \quad (3.50)$$

$[A, B] \in \Omega$ peut être exprimé comme:

$$[A, B] = \sum_{i=1}^L \lambda_i [A_i, B_i], \quad \lambda \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \lambda : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1 \right\}. \quad (3.51)$$

Le problème de contrôle prédictif robuste peut être résolu à chaque itération par le problème LMI suivant:

Théorème 3.8. Soient $x(k) = x(k/k)$ la valeur de l'état du système incertain (3.45) mesuré en chaque temps d'échantillonnage k , et les vecteurs connus y_{\max}, u_{\max} , le système est asymptotiquement stabilisé par un contrôleur de retour d'état, tout en minimisant une borne supérieure du coût quadratique sous contraintes, si à chaque temps d'échantillonnage ($k = 0, 1, \dots, \infty$) il existe une matrice symétrique définie positive Q et une matrice Y solutions du problème suivant:

$$\min \gamma \quad (3.52)$$

sous

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k/k)^T \\ x(k/k) & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.53)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T B_j^T & QQ_1^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2} Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L, \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} y_{\max}^2 I & C(A_j Q + B_j Y) \\ (A_j Q + B_j Y)^T C^T & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, L. \quad (3.56)$$

Une fois résolu le problème LMI précédent, le contrôleur de retour d'état est déterminé par:

$$F = YQ^{-1}. \quad (3.57)$$

□

Dans les chapitres suivants est fait une extension du travail Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), pour le cas d'un contrôleur dynamique de retour de la sortie. Dans une première partie, on décrit la procédure pour la conception du contrôleur pour le cas de systèmes nominaux et on présente postérieurement le résultat du contrôleur dynamique pour le cas de systèmes incertains.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre a été fait un rappel sur les LMI, qui constituent des outils puissants pour la synthèse de contrôleurs, et qui seront la base pour la conception des contrôleurs développés dans ce travail.

Quelques résultats de la théorie de la commande robuste ont été mentionnés: la notion de stabilisabilité quadratique, où une seule fonction de Lyapunov est utilisée pour tester la stabilité en boucle fermée du système sur tout le domaine d'incertitude admissible, les conditions pour garantir la stabilisabilité de systèmes discrets incertains par retour d'état, et par retour dynamique de sortie.

Différents critères de performance pour systèmes linéaires ont été définis: le critère quadratique, la norme H_2 , la norme H_∞ et la localisation de pôles.

On a été fournis les conditions pour la conception de contrôleurs dynamiques pour systèmes incertains à temps discret, de manière à satisfaire les critères de performance

mentionnés précédemment. Ces résultats sont basés sur l'utilisation des inégalités matricielles et sur le principe de stabilisabilité quadratique.

Parfois les conditions obtenues ne sont pas linéaires et il n'est pas possible d'utiliser directement des programmes de solution de problèmes LMIs, toutefois, en faisant usage d'algorithmes de relaxation, on peut définir des approches suffisantes à base de LMIs.

On a rappelé le résultat du travail Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) qui porte sur le "MPC" robuste par retour d'état et synthèse LMI. Les idées ici mentionnées, servent de base pour le développement du chapitre suivant, qui traite de la synthèse d'un contrôleur dynamique de sortie.

Chapitre 4

MPC en utilisant les inégalités matricielles linéaires

Dans ce chapitre, on présente la synthèse d'un contrôleur dynamique par retour de sortie pour systèmes nominaux (sans incertitude). La conception est effectuée à chaque instant d'échantillonnage par la minimisation d'une borne supérieure d'une fonction objectif sur un horizon infini, en suivant la méthodologie MPC. La stratégie permet d'inclure des contraintes sur les variables du processus (limites sur l'entrée et la sortie) pendant l'étape de calcul du contrôleur.

On formule la conception en programmation semidéfinie (SDP) à l'aide de LMIs (Boyd, El Ghaoui, Feron et Balakrishnan, 1994), ce choix tire sa justification par le fait qu'il existe des algorithmes puissants qui permettent d'obtenir la solution du problème en temps polynomial, parfois comparable à ce qui est nécessaire pour obtenir la solution analytique d'un problème semblable. Ceci permet que l'optimisation par résolution de LMIs puisse être faite en ligne ce qui s'avère essentiel pour l'application de l'approche de commande prédictive. Cette technique de synthèse est illustrée sur deux exemples numériques.

4.1 Introduction

La procédure de synthèse du contrôleur qui est développée par la suite, est une extension du résultat de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), dans lequel on suppose tous les états du système mesurables. Dans ce chapitre la conception d'un contrôleur dynamique par retour de sortie, est proposée.

La synthèse du contrôleur dynamique se fait dans le cadre de la méthodologie de commande prédictive, c'est-à-dire, à chaque instant d'échantillonnage on actualise les données avec les valeurs réelles des variables du système, et on recalcule les paramètres du contrôleur.

La méthode permet d'inclure des contraintes sur les variables du processus ainsi que sur la commande. En utilisant le concept d'ellipsoïde invariant celles-ci sont traduites sous

forme de LMIs additionnelles et, ensuite, incorporées comme contraintes dans le problème d'optimisation.

Bien qu'on utilise la représentation d'état, seulement la sortie mesurée est utilisée pour déterminer le contrôleur. Les états non mesurés sont caractérisés par un domaine d'appartenance estimé et fixé a priori. On obtient alors une formulation qui présente une "certaine similitude" avec le problème de contrôle robuste.

Le problème d'optimisation à résoudre à chaque itération porte sur une fonction objectif quadratique définie sur un horizon infini. Ceci a pour conséquence immédiate de définir à chaque instant de réactualisation de la commande, un retour de sortie stabilisant pour le système, condition quasiment nécessaire pour pouvoir penser à démontrer la stabilité à long terme de la stratégie MPC. Compte tenu de la présence de contraintes (sur la commande et sur l'état) une solution analytique du problème est hors de portée et il faut se rabattre sur la détermination d'une solution numérique.

S'inspirant d'approches de type coût garanti développés en commande robuste et reprise par Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), on va transformer le problème en un problème de minimisation d'une borne supérieure du coût défini par la fonction objectif. Il est alors possible de formuler ce problème de minimisation sous contrainte sous la forme d'un problème LMI. De plus il sera alors possible de l'enrichir d'autres contraintes de performances (telles que la satisfaction de contraintes sur des normes H_2 , H_∞ et la localisation de pôles), tout type de contrainte à condition qu'elle puisse s'exprimer sous forme LMI.

4.2 Formulation du problème

On considère le système linéaire en temps discret invariant décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et $y(k) \in \mathfrak{R}^q$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie. $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ sont respectivement les matrices dynamique, de commande et de sortie. En outre sont faites les hypothèses que la paire (A, B) est contrôlable et la paire (A, C) est observable.

On souhaite trouver en chaque instant d'échantillonnage k , une loi de commande linéaire qui stabilise le système (4.1), tout en minimisant une fonction objectif sous contraintes, par l'emploi d'un contrôleur qui s'écrit:

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k) \\ u(k) &= C_c x_c(k) \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $x_c(k) \in \mathfrak{R}^n$ représente l'état du contrôleur, et $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ et $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ constituent le triplet des matrices du contrôleur dynamique.

Sur la Figure 4.1 on illustre le schéma du contrôleur proposé. Comme on peut l'observer, contrairement au cas MPC classique pour lequel l'optimiseur calcule directement la loi de commande, dans ce cas il agit directement sur le contrôleur dynamique (A_c, B_c, C_c), c'est-à-dire, à chaque itération, la valeur des matrices du contrôleur est réactualisée.

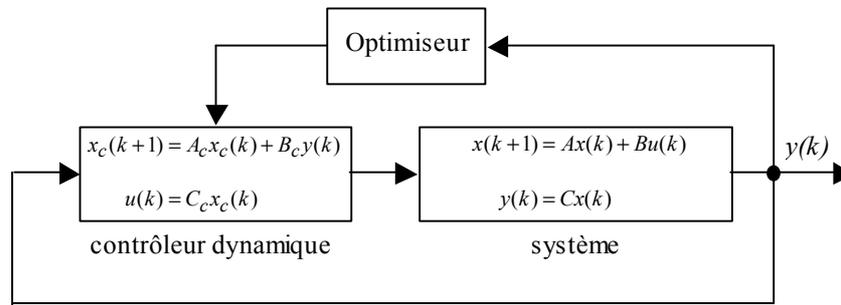


Figure 4.1. Schéma du système contrôlé proposé.

Remarque 4.1. Les équations (4.2) définissent un contrôleur strictement propre. Le choix a été fait uniquement pour raison de simplification des expressions intervenant dans l'optimisation. Toutefois, l'extension au cas non strictement propre où apparaîtrait le terme $D_c y(k)$ dans l'expression de $u(k)$ ne pose aucun problème théorique fondamental.

4.2.1 Modèle mathématique du système étendu

Le système en boucle fermée formé par les équations (4.1) et (4.2) peut être représenté de manière équivalente par le système étendu suivant:

$$\begin{aligned} x_e(k+1) &= \hat{A}(k)x_e(k) + \hat{B}u(k) \\ u(k) &= \hat{K}(k)x_e(k) \\ y(k) &= \hat{C}x_e(k) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où

$$\begin{aligned}\hat{A}(k) &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_c(k)C & A_c(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times m}, \\ \hat{C} &= [C \ 0] \in \mathfrak{R}^{q \times 2n}, \hat{K}(k) = [0 \ C_c(k)] \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}\end{aligned}\quad (4.4)$$

et

$$x_e(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n}. \quad (4.5)$$

4.2.2 Fonction de coût

Comme il a été précédemment mentionné, on considère une fonction objectif d'horizon infini quadratique, où l'on pénalise les états et l'effort de contrôle. Celle-ci exprimée en fonction des variables d'état du système global (4.3) et de la commande à l'instante k , s'écrit:

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(x_e(k+i/k)^T \hat{Q} x_e(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right), \quad (4.6)$$

où

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0, \quad R \in \mathfrak{R}^{m \times m} > 0 \quad (4.7)$$

et $x_e(k+i/k)$ représente la prévision de l'état x_e à l'instant $k+i$, à partir de l'état actuel $x_e(k/k)$ en appliquant le modèle mathématique récurrent (4.3). Bien sûr, $x_e(k/k) = x_e(k)$.

On considère la fonction quadratique suivante:

$$V_L(x_e(k/k)) = x_e(k/k)^T P x_e(k/k), \quad P > 0 \quad (4.8)$$

avec $P = P(k/k)$.

On a $V_L(0) = 0$. A chaque instant d'échantillonnage k , $V_L(\bullet)$ doit satisfaire l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned}\Delta V_L(x_e(k+i/k)) &= V_L(x_e(k+i+1/k)) - V_L(x_e(k+i/k)) \leq \\ &\quad - \left(x_e(k+i/k)^T \hat{Q} x_e(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right)\end{aligned}\quad (4.9)$$

Si la fonction objectif (4.6) est définie correctement, c'est-à-dire, $x_e(\infty/k) = 0$; en sommant (4.9) depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$, on obtient:

$$V_L(x_e(k/k)) \geq J_\infty(k). \quad (4.10)$$

La fonction quadratique (4.8) représente donc une borne supérieure de la fonction objectif (4.6). Par la suite, l'approche proposée consistera à synthétiser en chaque instant d'échantillonnage k , un contrôleur par retour de sortie (4.2) qui minimise $V_L(x_e(k/k))$, tout en satisfaisant la condition (4.9).

Remarque 4.2. Il est à noter que, sans contraintes additionnelles sur l'état ou la commande, il est possible d'obtenir la solution optimale (type LQG) du problème

$$\min_{u(k+i/k), i \geq 0} J_\infty(k) \quad (4.11)$$

Sous (4.3).

au moyen de LMI, avec P , matrice constante (4.8) permettant l'évaluation du coût optimal.

La solution du problème où vont être prises en compte les contraintes se réalisera également sous cette hypothèse de P constant $P = P(k/k) = P(k+i/k), \forall i > 1$ ce qui permettra de définir un triplet (A_c, B_c, C_c) constant telle que \hat{A} soit asymptotiquement stable.

•

4.2.3 Caractérisation des états non mesurés (domaine d'appartenance)

Pour l'implantation de l'algorithme de détermination du contrôleur proposé, il est nécessaire "de connaître" l'état du système. Dans nombre de problèmes pratiques, il est difficile de faire l'hypothèse que l'état global du système est mesurable. En réalité, on ne dispose, en général, que d'une information partielle: la mesure du vecteur de sortie.

Pour pallier ce manque, on va supposer une information a priori sur les états non mesurés sous la forme d'appartenance à un domaine d'état.

Soit la partition du vecteur d'état sous la forme

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_m(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{X}^n, \quad (4.12)$$

où $x_m(k) \in \mathfrak{X}^p$ est le vecteur des composantes accessibles à la mesure et $x_r(k) \in \mathfrak{X}^{n-p}$ est le vecteur non mesuré.

A l'instant initial ($k=0$), il est supposé que $x_r(0)$ appartient au polytope (hyper parallélépipède) convexe défini à partir des intervalles d'appartenance pour les composantes de x_r

$$x_{r,i}^{\min} \leq x_{r,i}(0) \leq x_{r,i}^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n-p, \quad (4.13)$$

soient

$$x_r^j(0), \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad l = 2^{n-p}, \quad (4.14)$$

les sommets de ce polytope (x_r^j a pour composantes $x_{r,i}^{\min}$ et $x_{r,i}^{\max}$), notons

$$\chi_j(k) = \begin{bmatrix} x_r^j(k) \\ x_m(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (4.15)$$

Définissant

$$\Omega_{ej}(0) = Co \left\{ \chi_{ej}(0) = \begin{bmatrix} x_r^j(0) \\ x_m(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, l \right\} \text{ et } \chi_e(0) = \begin{bmatrix} x_r(0) \\ x_m(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} \in \Omega(0) \quad (4.16)$$

$\Omega(0)$ est le domaine d'appartenance du vecteur étendu à l'instant initial,

$$\Omega(0) = Co \{ \chi_{ej}(0) \}, \text{ ainsi } \chi_e(0) = \sum_{j=1}^l \lambda_j \chi_{ej}(0), \quad \lambda \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \lambda : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1 \right\} \quad (4.17)$$

Ainsi, le système étant linéaire

$$\chi_e(1) = \begin{bmatrix} x_r(1) \\ x_m(1) \\ x_c(1) \end{bmatrix} \in \Omega(1) \quad (4.18)$$

où $\Omega(1)$ est le domaine d'appartenance du vecteur $\chi_e(1)$.

$$\Omega(1) = Co \{ \chi_{ej}(1) \}, \quad \chi_e(1) = \sum_{j=1}^l \lambda_j \chi_{ej}(1), \quad \lambda \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \lambda : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1 \right\} \quad (4.19)$$

où

$$\chi_{ej}(1) = (\hat{A}(1) + \hat{B}\hat{K}(1))\chi_{ej}(0), \quad (4.20)$$

que l'on peut noter

$$\Omega(1) = (\hat{A}(1) + \hat{B}\hat{K}(1))\Omega(0), \quad (4.21)$$

Ainsi, récursivement à chaque itération de l'algorithme MPC, il est possible, par simple propagation des domaines d'appartenance, de définir les domaines polytopiques d'appartenance successifs

$$\begin{aligned} \Omega(k+1) &= (\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))\Omega(k), \\ \chi_{ej}(k+1) &= (\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))\chi_{ej}(k). \end{aligned} \quad (4.22)$$

ainsi:

$$\chi_{ej}(k+1) \in \Omega(k+1) \text{ si } \chi_{ej}(k) \in \Omega(k) \quad (4.23)$$

Cette manière de "propager" les domaines d'appartenance induits par les hypothèses initiales sur l'état non mesuré est en cohérence avec le travail précédent, de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) et va permettre de démontrer la stabilité.

Remarque 4.3. On utilise le modèle dynamique seulement pour obtenir la valeur de l'état non mesuré. Les états du contrôleur et l'état mesuré, sont obtenus directement.

Remarque 4.4. Cette manière de modéliser l'incertitude sur les états non mesurés, permet de poser le problème de manière analogue à la formulation de commande robuste. C'est-à-dire, on doit résoudre le problème de stabilité, pour chacun des états possibles du système défini dans le domaine d'incertitude.

De cette manière il est possible d'utiliser une analyse semblable à celle de la stabilisabilité quadratique, introduite par Barmish (1985), qui s'est avérée féconde pour la synthèse de contrôleurs robustes. La définition de la stabilisabilité quadratique se base sur l'existence d'une matrice de Lyapunov qui est commune à toutes les représentations possibles du système incertain.

Dans le cas du présent travail, la matrice de Lyapunov (P) dans (4.8) est commune à chacun des états possibles dans le domaine d'incertitude.

Il y a une certaine analogie car dans les deux cas la solution du problème d'optimisation doit satisfaire un ensemble de contraintes, qui définissent un ensemble convexe.

Pour le cas robuste, cet ensemble est liée à la représentation possible du système incertain. Dans ce cas, c'est la représentation possible des états du système dans leur domaine d'incertitude.

4.2.4 Définition des contraintes

Les processus réels sont, en général, soumis à des restrictions portant sur les variables du processus. Dans ce travail, il sera montré comment les contraintes peuvent être intégrées dans l'algorithme sous forme de LMIs.

Les contraintes sur l'entrée $u(k)$ représentent les limitations physiques des équipements présents dans le processus. On considérera une contrainte de type norme euclidienne donnée par:

$$\|u(k+i/k)\|_2 \leq u_{\max}, \quad i \geq 0. \quad (4.24)$$

Les contraintes sur la sortie sont moins strictes que celles qui précèdent puisqu'elles représentent des spécifications sur le comportement. On considérera également une contrainte de type norme euclidienne donnée par:

$$\|y(k+i/k)\|_2 \leq y_{\max}, \quad i \geq 1. \quad (4.25)$$

Le vecteur $y(k+i/k)$ représente la sortie du système prédite à l'instant $k+i$, $i \geq 1$, sachant que $y(k/k)$ est la mesure (donc connue) à l'instant k .

Remarque 4.5. Les restrictions sur la sortie seront strictement imposées sur l'horizon de prévision futur ($i \geq 1$) et non sur l'instant actuel ($i = 0$). Ceci est naturel car la sortie actuelle ne peut pas être modifiée par l'action de commande.

4.3 Conception du contrôleur quadratique

Le théorème suivant donne les conditions d'existence du contrôleur souhaité.

Théorème 4.1. Soient $\chi(k) = \chi(k/k)$ et $x_c(k) = x_c(k/k)$ les valeurs de l'état du système (4.1) et du contrôleur (4.2) à chaque instant d'échantillonnage k , et soient les vecteurs connus y_{\max}, u_{\max} , le système à temps discret défini par (4.1), est asymptotiquement stabilisé par un contrôleur dynamique par retour de sortie du type (4.2), tout en minimisant une borne supérieure du coût quadratique sous contraintes, si en chaque instant d'échantillonnage ($k=0,1,\dots,\infty$), il existe des matrices $F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $V \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et des matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ solutions du problème suivant:

$$\min \gamma \quad (4.26)$$

sous

$$\begin{bmatrix} Y & I & Y\chi_j(k) + Vx_c(k) \\ I & X & \chi_j(k) \\ (Y\chi_j(k) + Vx_c(k))^T & \chi_j(k)^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad j=1,2,\dots,l, \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA + FC & Z & 0 & 0 \\ I & X & A & AX + BL & 0 & 0 \\ (YA + FC)^T & A^T & Y & I & 0 & Q^{1/2} \\ Z^T & (AX + BL)^T & I & X & L^T R^{1/2} & XQ^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & R^{1/2} L & \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & Q^{1/2} & Q^{1/2} X & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.28)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & 0 \\ I & X & L^T \\ 0 & L & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & A^T C^T \\ I & X & XA^T C^T + L^T B^T C^T \\ CA & CAX + CBL & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.30)$$

□

Comme il sera vu dans la section 4.4, le contrôleur dynamique est construit à partir des matrices X, Y, L, F, Z , solutions du problème d'optimisation précédent qui est un problème où seules interviennent des relations LMI.

Remarque 4.6. Les variables γ, X, Y, L, F, Z dans le problème d'optimisation devraient être dénotées $\gamma(k), X(k), Y(k), L(k), F(k), Z(k)$ pour souligner qu'elles sont calculées à chaque instant k . Les indices sont omis pour alléger la notation

•

Remarque 4.7. Le contrôleur dynamique dépend de l'état du système. La présence de perturbations telles que l'incertitude des états non mesurés affecte les performances du système en boucle fermée. Dans ce cas, en utilisant la méthodologie d'horizon mobile et en recalculant le contrôleur dynamique en chaque instant d'échantillonnage, on peut obtenir une meilleure performance en boucle fermée. Ceci est dû au fait qu'à chaque itération, de nouvelles valeurs de la sortie du système sont mesurées et utilisées dans l'algorithme de synthèse du contrôleur avec la diminution de l'incertitude sur l'état non mesuré.

•

Dans les sections suivantes est détaillée la démonstration du Théorème 4.1.

4.3.1 Fonction objectif et ellipsoïde initial

La minimisation de (4.8) qui représente la borne supérieure de la fonction objectif (4.6) est donnée par:

$$\min \gamma \quad (4.31)$$

sous

$$x_e(k)^T P x_e(k) < \gamma \quad (4.32)$$

où γ est un scalaire non négatif.

Si on définit $\tilde{P} = \gamma P^{-1}$ et en utilisant le complément de Schur, l'inégalité précédente est exprimée par

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & x_e(k) \\ x_e(k)^T & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.33)$$

Si on définit maintenant les matrices \tilde{P} et \tilde{P}^{-1} de la manière suivante:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

et la matrice:

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

En multipliant (4.33) à gauche par \hat{T}_1^T et à droite par \hat{T}_1 , avec:

$$\hat{T}_1 = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

on obtient:

$$\begin{bmatrix} Y & I & Yx(k) + Vx_c(k) \\ I & X & x(k) \\ (Yx(k) + Vx_c(k))^T & x(k)^T & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.37)$$

L'inégalité précédente est à satisfaire $\forall \chi \in \Omega$, condition de dimension infinie. Comme Ω est un polytope et que (4.37) est linéaire par rapport x et x_c , cette condition se réduit à son test sur les sommets seulement conduisant alors aux LMI (4.27). ■

Remarque 4.8. Sans perte de généralité, il peut être supposé que V est une matrice non singulière et par conséquent T est aussi non singulière [Scherer, Gahinet et Chilali (1997)]. ●

4.3.2 Contrôleur stabilisant

A partir de (4.3), (4.8) et (4.9) il vient

$$(\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))^T P(\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k)) - P + \hat{Q} + \hat{K}(k)^T R\hat{K}(k) < 0. \quad (4.38)$$

En remplaçant $\tilde{P} = \gamma P^{-1}$ et en exprimant l'inégalité précédente sous forme de LMI on a:

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & (\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))\tilde{P} & 0 & 0 \\ \tilde{P}(\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))^T & \tilde{P} & \tilde{P}\hat{K}(k)^T R^{1/2} & \tilde{P}\hat{Q}^{1/2} \\ 0 & R^{1/2}\hat{K}(k)\tilde{P} & \gamma I & 0 \\ 0 & \hat{Q}^{1/2}\tilde{P} & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.39)$$

Si l'inégalité précédente est multipliée à gauche se par \hat{T}_2^T et à droite par \hat{T}_2 , où:

$$\hat{T}_2 = \text{blockdiag}[T, T, I, I], \quad (4.40)$$

il vient

$$\begin{bmatrix} T^T \tilde{P} T & T^T (\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))\tilde{P} T & 0 & 0 \\ T^T \tilde{P} (\hat{A}(k) + \hat{B}\hat{K}(k))^T T & T^T \tilde{P} T & T^T \tilde{P} \hat{K}(k)^T R^{1/2} & T^T \tilde{P} \hat{Q}^{1/2} \\ 0 & R^{1/2} \hat{K}(k) \tilde{P} T & \gamma I & 0 \\ 0 & \hat{Q}^{1/2} \tilde{P} T & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.41)$$

En utilisant (4.4), (4.34) et (4.35) dans (4.41), et en définissant les variables intermédiaires

$$\begin{aligned} F &= V B_c, \\ L &= C_c U^T, \\ M &= V A_c U^T, \\ Z &= Y A X + F C X + Y B L + M, \end{aligned} \quad (4.42)$$

on obtient la condition (4.28) qui est convexe (linéaire) en les variables γ, X, Y, F, L et Z .

■

4.3.3 Contraintes sur l'entrée et sur la sortie

Dans cette section, est montré comment les contraintes sur l'entrée et sur la sortie, peuvent être intégrées comme des LMIs dans le problème d'optimisation. Pour ceci on utilise le concept d'ellipsoïde invariant (Blanchini, 1999).

Pour un système dynamique, un ellipsoïde invariant est un sous-ensemble de l'espace d'état, qui a la propriété suivante: s'il contient l'état du système en un certain instant, alors il contient l'état pour tous les instants ultérieurs.

Pour inclure les contraintes sur les variables de contrôle et sur la sortie, on considère l'ellipsoïde suivant:

$$\varepsilon = \{z / z^T P z < \gamma\} \text{ (ou manière équivalente } \varepsilon = \{z / z^T \tilde{P}^{-1} z < 1\} \text{ avec } \tilde{P}^{-1} = \gamma^{-1} P). \quad (4.43)$$

Lemme 4.1. Ellipsoïde invariant [Kothare, Balakrishnan et Morari (1996)]. Soit le système décrit par l'équation (4.1), avec les états exprimés à partir de (4.15) et avec un contrôleur dynamique défini par (4.2). En supposant qu'à l'instant d'échantillonnage k , il existe les matrices γ, X, Y, L, F, Z (ou $\gamma, \tilde{P}, A_c, B_c, C_c$) solutions du Théorème 4.1, ce qui implique que (4.28) est satisfaite, alors si

$$x_e(k/k)^T \tilde{P}^{-1} x_e(k/k) < 1 \text{ (ou, } x_e(k/k)^T P x_e(k/k) < \gamma, P = \gamma \tilde{P}^{-1}) \quad (4.44)$$

on a:

$$x_e(k+i/k)^T \tilde{P}^{-1} x_e(k+i/k) < 1, i \geq 1, \forall \chi(0) \in \Omega, \quad (4.45)$$

soit

$$x_e(k+i/k)^T P x_e(k+i/k) < \gamma, i \geq 1, \forall \chi(0) \in \Omega, \quad (4.46)$$

et donc $\varepsilon = \{z / z^T \tilde{P}^{-1} z < 1\} = \{z / z^T P z < \gamma\}$ est un ellipsoïde invariant pour tous les états prédits du système.

▷

4.3.3.1 Contraintes sur l'entrée

A l'instant k , on considère la contrainte de type norme euclidienne (4.24) ($\|u(k+i/k)\|_2 \leq u_{\max}, i \geq 0$). La contrainte est imposée à l'instant actuel ($i = 0$) et sur l'horizon de contrôle futur ($i > 0$), (même si l'on emploie seulement le premier élément du vecteur de contrôle $u(k/k) = u(k)$):

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|u(k+i/k)\|_2^2 &= \max_{i \geq 0} \|\hat{K}(k) x_e(k+i/k)\|_2^2 \\ &\leq \max_{z \in \varepsilon} \|\hat{K}(k) z\|_2^2 \\ &= \lambda_{\max} \left(\tilde{P}^{1/2} \hat{K}(k)^T \hat{K}(k) \tilde{P}^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

En exprimant l'inégalité précédente sous forme de LMI, $\|u(k+i/k)\|_2^2 \leq u_{\max}^2, i \geq 0$ si

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{P} \hat{K}(k)^T \\ \hat{K}(k) \tilde{P} & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.48)$$

Si l'inégalité précédente est multipliée à gauche par \hat{T}_1^T et à droite par \hat{T}_1 , en utilisant (4.4), (4.34), (4.35), (4.42) et (4.48) on obtient l'inégalité (4.29).

■

4.3.3.2 Contraintes sur la sortie

A l'instant k , on considère la contrainte de type norme euclidienne (4.25) ($\|y(k+i/k)\|_2 \leq y_{\max}, i \geq 1$), on a:

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|y(k+i+1/k)\|_2^2 &= \max_{i \geq 0} \left\| \hat{C}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))x_e(k+i/k) \right\|_2^2, \quad i \geq 0 \\ &\leq \max_{z \in \mathcal{E}} \left\| \hat{C}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))z \right\|_2^2, \\ &= \lambda_{\max} \left(\tilde{P}^{1/2}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))^T \hat{C}^T \hat{C}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))\tilde{P}^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

alors $\|y(k+i/k)\|_2^2 \leq y_{\max}^2, i \geq 1$ si

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & \tilde{P}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))^T \hat{C}^T \\ \hat{C}(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))\tilde{P} & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.50)$$

Si l'inégalité précédente est multipliée à gauche par \hat{T}_1^T et à droite par \hat{T}_1 , en utilisant (4.4), (4.34), (4.35), (4.42) et (4.50) on obtient la condition (4.30). ■

4.3.4 Stabilité "robuste" du système

Dans cette section on démontre que le contrôleur dynamique, garantit la stabilité du système boucle fermée bien que à chaque itération les paramètres de celui-ci soient recalculés.

Pour garantir que ceci se produise, le problème d'optimisation posé dans le Théorème 4.1, doit avoir une solution faisable à chaque itération.

Lemme 4.2. (Faisabilité) [Kothare, Balakrishnan et Morari (1996)]. *Toute solution faisable trouvée à l'instant k qui satisfait le problème d'optimisation du Théorème 4.1, est aussi solution faisable pour tout l'instant $t > k$. C'est-à-dire, si le problème à résoudre (Théorème 4.1) est faisable à l'instant k , il l'est à tout instant $t > k$.*

▷

Démonstration

On considère que le problème d'optimisation posé dans le Théorème 4.1 est faisable à l'instant k . La seule LMI du problème qui dépend de la valeur de nouvelles mesures effectuées sur le système, et par conséquent peut changer à chaque itération est l'inégalité (4.27).

Pour démontrer le lemme, il est seulement nécessaire de vérifier que cette inégalité est faisable pour toutes les mesures futures de l'état $x_e(k+i/k+i) = x_e(k+i); i \geq 1$.

La faisabilité du Théorème 4.1 à l'instant k , implique qu'on satisfait la condition (4.28). Du Lemme 4.1 on déduit que $\forall \chi \in \Omega$ on a:

$$x_e(k+i/k)^T \tilde{P}^{-1} x_e(k+i/k) < 1, \quad i \geq 1. \quad (4.51)$$

A l'instant $k+1$, la valeur de l'état $x_e(k+1/k+1) = x_e(k+1)$, auquel on arrive après avoir appliqué le contrôleur obtenu à l'instant k , doit aussi satisfaire la condition (4.51) $\forall \chi \in \Omega$, ceci s'écrit

$$x_e(k+1/k+1)^T \tilde{P}^{-1} x_e(k+1/k+1) < 1, \quad (4.52)$$

ou de manière équivalente

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} & x_e(k+1/k+1) \\ x_e(k+1/k+1)^T & I \end{bmatrix} > 0. \quad (4.53)$$

C'est-à-dire, la solution faisable du Théorème 4.1 à l'instant k , est aussi faisable à l'instant $k+1$, et par suite le problème est faisable à l'instant $k+1$. En répétant cet argument pour les instant successifs, on complète la démonstration. ■

Théorème 4.2. (stabilité "Robuste"). *Le contrôleur dynamique d'horizon mobile obtenu à partir de la solution du Théorème 4.1, assure la stabilité asymptotique du système en boucle fermé.* □

Démonstration

Elle se fait en établissant que la procédure préconisée définit une séquence de fonctions quadratiques (strictement définies positives) décroissantes. Du fait $P(k) > 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} x_e(k/k)^T P(k) x_e(k/k) = 0 \Rightarrow \|x_e(k/k)\| \rightarrow 0$.

On considère d'abord que le problème a une solution faisable à $k = 0$. De cette manière on assure la faisabilité du Théorème 4.1 (Lemme 4.2).

Le problème est convexe, donc possède un seul minimum et une solution optimale correspondante (γ, X, Y, L, F, Z) à chaque instant d'échantillonnage $k \geq 0$.

Du Lemme 4.1 il peut être observé que les valeurs de γ, X, Y, L, F, Z (ou de manière équivalente γ, P, A_c, B_c, C_c) obtenues à la solution optimale pour l'instant k , sont des solutions possibles (non nécessairement optimales) à l'instant $k+1$.

Si on dénote $P(k)$ et $P(k+1)$ les matrices correspondant à la solution optimale aux instants k et $k+1$ respectivement, il vient:

$$x_e(k+1/k+1)^T P(k+1) x_e(k+1/k+1) \leq x_e(k+1/k+1)^T P(k) x_e(k+1/k+1), \quad (4.54)$$

ceci puisque $P(k+1)$ est optimal tandis que $P(k)$ est seulement faisable au temps $k+1$.

Le contrôleur obtenu étant un contrôleur stabilisant pour tous états possibles du système dans le domaine d'incertitude $\Omega(k)$ et que $P(k)$ est une matrice de Lyapunov, il se vérifie que:

$$x_e(k+1/k)^T P(k) x_e(k+1/k) \leq x_e(k/k)^T P(k) x_e(k/k). \quad (4.55)$$

Si à l'instant k , on applique le contrôleur déterminé à cet instant, alors l'état du système à l'instant suivant ($x_e(k+1/k+1) = x_e(k+1/k)$), satisfait aussi l'inégalité (4.55).

En combinant ceci avec l'inégalité (4.54), on obtient:

$$x_e(k+1/k+1)^T P(k+1) x_e(k+1/k+1) \leq x_e(k/k)^T P(k) x_e(k/k). \quad (4.56)$$

On obtient bien une séquence de fonctions $x_e(k/k)^T P(k) x_e(k/k)$, $P(k) > 0$ qui décroissent.

■

4.4 Construction du contrôleur

À partir des matrices X, Y, L, F, Z obtenues par résolution du problème d'optimisation posé par le Théorème 4.1, il est possible de déterminer un contrôleur dynamique qui garantit la stabilité du système en boucle fermée.

Du changement de variables suggéré en (4.42), il est possible de déterminer les matrices du contrôleur dynamique (A_c, B_c, C_c); toutefois il est nécessaire de connaître la valeur des matrices U, V .

De fait, il est possible de calculer un contrôleur sans la connaissance de celles-ci. Pour cela on suit une procédure similaire développée dans Geromel, Bernussou et Oliveira (1999).

A partir de la représentation entrée/sortie du contrôleur dynamique:

$$T_c(\delta) = C_c (\delta I - A_c)^{-1} B_c. \quad (4.57)$$

et en utilisant (4.42) on obtient:

$$T_c(\delta) = L(U^T)^{-1} (\delta I - V^{-1} M (U^T)^{-1})^{-1} V^{-1} F = L(\delta V U^T - M)^{-1} F, \quad (4.58)$$

où $M = Z - YAX - FCX - YBL$.

De la définition (4.34), $YX + VU^T = 1$, donc

$$T_c(\delta) = L(\delta(I - YX) - M)^{-1} F, \quad (4.59)$$

qui correspond à la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} (I - YX)x_c(k+1) &= Mx_c(k) + Fy(k) \\ u(k) &= Lx_c(k) \end{aligned} \quad (4.60)$$

d'où

4. $A_c = (I - YX)^{-1}M$.
5. $B_c = (I - YX)^{-1}F$.
6. $C_c = L$.

Remarque 4.9. Il faut souligner que pour la représentation entrée-sortie, le contrôleur dynamique est déterminé uniquement par la valeur des matrices X, Y, L, F, Z , et est indépendant de la valeur des matrices U, V .

•
Remarque 4.10. A chaque instant d'échantillonnage, pour l'obtention des matrices du contrôleur dynamique (solution de le Théorème 4.1), on emploie la valeur de l'état du contrôleur à cet instant. Celui-ci doit être fixé arbitrairement à la première itération et, en général, il est choisi la valeur zéro ($x_c(0) = 0$).

•
Remarque 4.11. Comme il est dit précédemment il est possible d'enrichir la synthèse faite dans le Théorème 4.1 par un rajout d'autres contraintes de performances de type norme H_2 ou H_∞ inférieures à une valeur donnée, de placement de pôles. Ce type de contraintes peut également s'exprimer sous forme de LMI en les variables définies au Théorème 4.1 (voir Courties, 1999).

4.5 Autres caractérisation des états non mesurée

Dans la conception d'un contrôleur dynamique délivrant une commande qui satisfait les contraintes imposées la complexité vient, bien sûr, de la prise en compte des états non accessibles à la mesure. L'information a priori utilisée dans ce qui précède permet d'assurer l'existence d'une solution satisfaisant ces contraintes.

Il est possible d'envisager diverses approches plus ou moins rigoureuses, plus ou moins heuristiques qui sont proposées à la discussion à dessous.

4.5.1 Information statistique

Le vecteur des états non mesurées est considéré comme un vecteur aléatoire de moyenne et covariance données, par exemple $(0, C_r C_r^T)$. Le fait de considérer une moyenne nulle ne constitue pas une restriction fondamentale mais permet de simplifier les calculs.

Ainsi, le problème d'optimisation peut il s'exprimer comme celui de la minimisation de l'espérance mathématique d'une forme quadratique soit:

$$J_\infty(k) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(x_e(k+i/k)^T \hat{Q} x_e(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k) \right) \right]. \quad (4.61)$$

Pour chaque tirage du vecteur aléatoire, la même définition de la fonction quadratique (4.8) avec la contrainte (4.9) conduit à l'inégalité:

$$\mathbb{E}[V_L(x_e(k/k))] \geq J_\infty(k). \quad (4.62)$$

Le problème défini sera donc celui de minimiser

$$\mathbb{E}[V_L(x_e(k/k))]. \quad (4.63)$$

Pour raison de simplifier l'écriture on omet les indices dans ce qui suit.

$$V_L(\bullet) = \text{Trace} \left(P \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_m(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r(k)^T & x_m(k)^T & x_c(k)^T \end{bmatrix} \right) \quad (4.64)$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_L(\bullet)] &= \text{Trace} \left(P \begin{bmatrix} C_r C_r^T & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k) x_m(k)^T & x_m(k) x_c(k)^T \\ 0 & x_c(k) x_m(k)^T & x_c(k) x_c(k)^T \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Trace} \left(\begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k) \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

En reprenant de manière similaire les développements établis aux paragraphes 4.3.1 et 4.3.2, en l'absence de contraintes sur la commande et sur la sortie, le problème d'optimisation conduisant à la détermination du contrôleur de sortie dynamique à l'étape k , s'exprime par:

$$\min \gamma \quad (4.66)$$

sous

$$\begin{bmatrix} Y & I & Y \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & x_m(k) \end{bmatrix} & Vx_e(k) \\ I & X & \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & x_m(k) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (\bullet)^T & & I & \end{bmatrix} > 0, \quad (4.67)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA+FC & Z & 0 & 0 \\ I & X & A & AX+BL & 0 & 0 \\ (YA+FC)^T & A^T & Y & I & 0 & Q^{1/2} \\ Z^T & (AX+BL)^T & I & X & L^T R^{1/2} & XQ^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & R^{1/2}L & \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & Q^{1/2} & Q^{1/2}X & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.68)$$

La prise en compte de contraintes sur l'amplitude de la commande et la sortie est à définir d'une manière statistique, également en probabilité. Il est en effet impossible d'écrire avec les hypothèses retenues des contraintes qui puissent être satisfaites pour toute réalisation de vecteur aléatoire mais il est possible, et naturel, de définir, comme contrainte, une probabilité sous laquelle doit être satisfaite la contrainte. Par exemple:

$$\text{Prob}(\|u(k+i/k)\|_2 \leq u_{\max}) \geq \mu, \quad \forall i \geq 0, \quad (4.69)$$

et de manière similaire pour la contrainte sur la sortie.

Le développement de l'expression précédente donne:

$$\begin{aligned} & \text{Prob}(x_e(k+i/k)^T \hat{K}(k)^T \hat{K}(k) x_e(k+i/k) \leq u_{\max}) = \\ & \text{Prob}\left(x_e(k/k)^T (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))^{Ti} \hat{K}^T \hat{K} (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))^i x_e(k/k) \leq u_{\max}\right), \end{aligned} \quad (4.70)$$

où $x_e(k) = [x_r(k)^T \quad x_m(k)^T \quad x_c(k)^T]^T$ et $x_r(k)$ est un vecteur aléatoire de moyenne et covariance connues. Même si l'on connaît la loi de distribution (en supposant, par exemple, que $x_r(k)$ est gaussien), il semble pratiquement impossible de traduire la contrainte précédente sous forme de LMI.

Une solution pourrait être d'imposer une contrainte en moyenne du type:

$$\mathbb{E}(\|u(k+i/k)\|_2) \leq u_{\max}, \quad \forall i \geq 0, \quad (4.71)$$

c'est à dire

$$\mathbb{E}[x_e(k+i/k)^T \hat{K}^T \hat{K} x_e(k+i/k)] \leq u_{\max}, \quad \forall i \geq 0, \quad (4.72)$$

ce que peut être écrit

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix}^T \hat{K}^T \hat{K} \begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix} \right) \leq u_{\max}, \quad (4.73)$$

$\forall i \geq 0$

avec

$$\mathbb{E}[x_r(k+i)x_r(k+i)]^T = C_r(k+i)C_r(k+i)^T. \quad (4.74)$$

De plus

$$\mathbb{E}[V_L(x_e(k/k))] < \gamma, \quad \forall i \geq 0. \quad (4.75)$$

c'est à dire

$$\text{Tr} \left(\begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix} \right) \leq \gamma, \quad (4.76)$$

$\forall i \geq 0$

une condition suffisante s'écrit

$$\begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix}^T \tilde{P}^{-1} \begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix} \leq I, \quad \forall i \geq 0 \quad (4.77)$$

Une condition suffisante de satisfaction de la contrainte en valeur moyenne est

$$\begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix}^T \hat{K}^T \hat{K} \begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 \\ 0 & x_m(k+i/k) & 0 \\ 0 & 0 & x_c(k+i/k) \end{bmatrix} \leq u_{\max} I. \quad (4.78)$$

$\forall i \geq 0$

A partir de (4.77) et (4.78) il vient

$$\hat{K}^T \hat{K} - u_{\max} \tilde{P}^{-1} \leq 0 \quad (4.79)$$

soit

$$\tilde{P}^{1/2} \hat{K}^T \hat{K} \tilde{P}^{1/2} \leq u_{\max} I \quad (4.80)$$

ce qui permet d'obtenir la même condition (4.48) qui fournit donc l'inégalité matricielle linéaire (4.29) à inclure dans le problème d'optimisation.

Il est important de noter que cette contrainte n'assure pas la satisfaction de $\|u(k+i/k)\|_2 \leq u_{\max}$. Cette condition qui porte sur l'espérance mathématique peut néanmoins correspondre à une valeur de μ suffisamment proche de 1 du fait qu'elle est

une condition suffisante pour (4.71). Les calculs portant sur la contrainte de sortie sont similaires à ceux développés précédemment, et conduisent à l'inégalité (4.30).

Tout comme pour le paragraphe 4.2.3, il est nécessaire de "propager", dans cette stratégie de contrôle prédictif, la matrice de covariance de l'état. Ainsi, si C_r est la matrice de covariance de l'état à l'instant k (c'est-à-dire celle fixée dans le problème d'optimisation), à l'instant $k+1$ pour l'optimisation suivante la matrice de covariance à considérer s'écrit:

$$C_r(k+1) = (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))C_r(k)(\hat{A} + \hat{B}\hat{K}(k))^T \quad (4.81)$$

Il est clair que cette propagation ne conserve pas la structure de $C_r(k)$ donnée à l'instant initial k . Cela importe peu pour la procédure de calcul et l'on pourrait continuer le processus de calcul en utilisant ces covariances propagées depuis la matrice initiale choisie. Toutefois, ceci aurait l'inconvénient majeur de définir ainsi une procédure complètement boucle ouverte où ne seraient pas considérées les mesures et la connaissance de l'état du compensateur. Il est donc proposé de recalculer, à chaque itération, la partie de $C_r(k+1)$ relative à x_c et x_m en fonction des variables à disposition.

La faisabilité et la stabilité sont déterminés comme précédemment. Il est à noter que dans l'établissement de ces propriétés, ce sont les variables itérées par simulation qui sont considérées et non, celles mesurées en temps réel.

4.5.2 Utilisation d'un observateur

Le processus à commander étant linéaire, invariant dans le temps et, dans ce chapitre, où le modèle est non incertain, il est possible, avec l'hypothèse d'observabilité de la paire (A, C) (hypothèse simplificatrice) de faire la synthèse d'un observateur à partir des mesures de sortie et de la connaissance des entrées de commande. Ainsi, un observateur plein état s'écrit-il

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + Ko[C\hat{x}(k) - y(k)], \quad (4.82)$$

Sous l'hypothèse d'observabilité il est bien connu qu'il est possible de faire la synthèse d'un gain Ko de telle sorte que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - \hat{x}(k)\|_2 = 0. \quad (4.83)$$

Tout aussi bien, un observateur d'ordre réduit pourrait être déterminé avec des hypothèses moins contraignantes, portant sur l'observabilité de la partie du vecteur d'état non mesuré. L'estimation du vecteur d'état global est alors la concaténation du sous vecteur estimé réellement et du sous vecteur mesuré.

Un schéma de l'utilisation d'un observateur dans l'approche de commande prédictive est présenté ci-dessous.

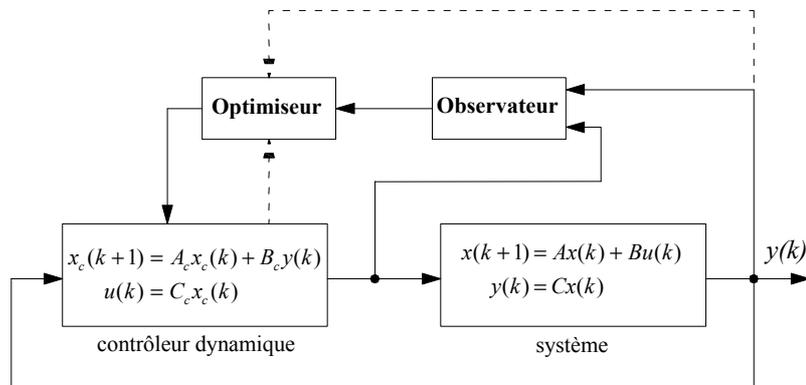


Figure 4.2. Schéma du système contrôlé avec observateur.

A chaque itération le block optimisation résout un problème où est déterminé le compensateur en fonction de mesures instantanés et d'estimation.

4.5.2.1 Plusieurs schémas sont possibles

Le premier schéma qui vient à l'esprit est celui qui répète celui du principe de séparation où observation et synthèse d'un gain de retour d'état stabilisant se réalisent de manière distincte. Dans un tel schéma il est logique de penser aux travaux de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), où est déterminé un gain de retour d'état sous contraintes d'amplitude sur la commande et sur la sortie (dans une telle option, sont supprimés dans la Figure 4.2 les traits en pointillés). Il est ainsi facile de voir que, quoique l'optimisation tienne compte des contraintes, celles-ci ne sont pas rigoureusement respectées par le signal de commande réellement appliqué sur le système et, par conséquent, il n'y a aucune raison pour que la sortie se maintienne dans la fourchette désirée. Simplement, peut-on dire que ces contraintes seront respectées asymptotiquement, au fur et à mesure, que s'améliorera, dans le temps, l'estimé sur l'état.

Dans ces conditions, la démonstration de la stabilité devient en général chose impossible mais, asymptotiquement, si le signal de commande respecte effectivement ses contraintes, le schéma de commande est stabilisant puisque résultant d'un observateur stable suivi d'un retour d'état stabilisant.

Un autre schéma, qui découle directement de l'extension de la première partie de ce chapitre, consiste en la détermination d'un compensateur dynamique selon:

$$\min \gamma \tag{4.84}$$

sous

$$\begin{bmatrix} Y & I & Y\hat{x}(k) + Vx_c(k) \\ I & X & \hat{x}(k) \\ (Y\hat{x}(k) + Vx_c(k))^T & \hat{x}(k)^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (4.85)$$

(4.28), (4.29) et (4.30)

Pour ce schéma, sont valides les mêmes remarques que précédemment concernant la faisabilité et la stabilité de la structure de commande définie, et, comme précédemment, il est possible de dire qu'asymptotiquement, (si la violation des contraintes durant le transitoire n'a pas d'effet "catastrophique" sur le comportement ultérieur du processus) le schéma proposé est stabilisant.

Une autre variante des deux premiers schémas est d'utiliser, pour la phase d'optimisation, la partie du vecteur d'état mesurée x_m en lieu et place du sous vecteur correspondant à l'estimation de x ou de x_e . A part l'intérêt (heuristique) de l'utilisation de cette information "temps réel" exacte, rien n'est ajouté concernant les propriétés de satisfaction des contraintes.

4.6 Exemples numériques

Deux exemples sont présentés pour illustrer l'application de la méthodologie proposée dans le Théorème 4.1. Le calcul est effectué en utilisant la toolbox LMI de Matlab®.

4.6.1 Premier exemple (système du 2^{me} ordre)

Considérons le système du second ordre à temps discret extrait de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), auquel quelques modifications ont été faites pour pouvoir appliquer la méthode proposée dans ce chapitre.

Le système, auquel est ajoutée une équation de sortie, est représenté par les équations d'état suivantes:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

La condition initiale du système est $x(0) = [0.05 \ 0]^T$ et celle du contrôleur dynamique $x_c(0) = [0 \ 0]^T$, on choisit $Q = I$ et $R = 0.00002$, et on supposera que l'état non mesuré a une valeur contenue dans l'intervalle suivant:

$$-0.1 \leq x_2 \leq 0.1.$$

Après avoir exécuté l'algorithme proposé avec les valeurs pour les contraintes: $u_{\max} = 1$ et $y_{\max} = 0.25$, on obtient le comportement suivant pour la réponse du système:

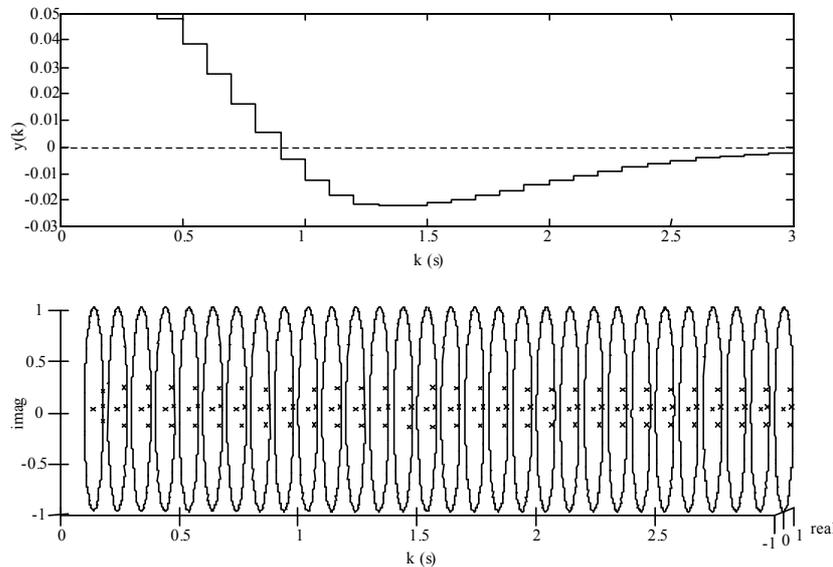


Figure 4.3. Réponse temporelle et situation de pôles du système à boucle fermé.

Dans la Figure 4.3, on montre simultanément la localisation des pôles du système pour les différents moments d'échantillonnage. (vérification du fait qu'à chaque instant la loi obtenue est bien stabilisante).

Il peut être vérifié que pendant les premiers moments (réponse transitoire), les pôles du système bouclé présentent une grande mobilité, tandis qu'ils restent presque fixes une fois que le système atteint l'état d'équilibre.

Ensuite on montrera l'efficacité de la méthodologie proposée, pour le cas où non seulement on souhaite trouver un contrôleur dynamique qui stabilise le système, mais on souhaite en outre remplir certaines spécifications de performance, en plaçant les pôles du système en boucle fermée dans une certaine région du cercle unitaire.

On résout le même problème que précédemment et on souhaite placer les pôles du système en boucle fermée dans le cercle de rayon 0.25 et centré au point $0.5+0j$.

Dans la Figure 4.4 est représentée la réponse du système contrôlé et on montre simultanément la localisation des pôles du système bouclé pour les différents instants d'échantillonnage. On a également représenté le disque qui doit contenir les pôles.

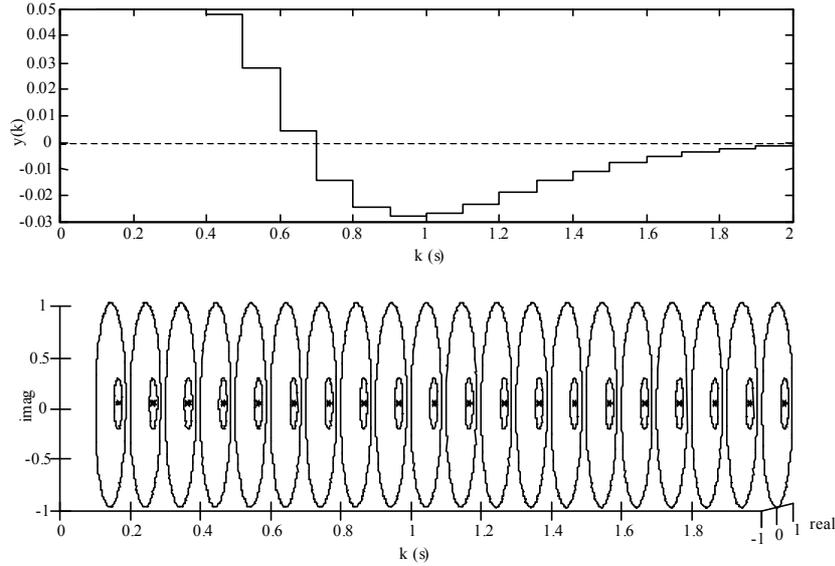


Figure 4.4. Réponse temporelle et situation de pôles du système dans disque spécifié.

On peut conclure que, par la stratégie de conception proposée, à chaque itération, tous les pôles du système bouclé sont situés dans le cercle de rayon 0.25 et centré au point $0.5+0j$, ce qui était l'objectif de conception. On observe ici une réduction du temps de convergence de la sortie du système, par rapport à la réponse obtenue dans le cas précédent (Figure 4.3).

4.6.2 Second exemple (système d'ordre quatre)

L'exemple suivant correspond à un système du quatrième ordre encore extrait de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) et de Cuzzola, Geromel et Morari (2002). Tout comme l'exemple précédent, il a été légèrement modifié pour pouvoir appliquer la méthode proposée dans cette partie du travail.

Le système est composé de deux masses et d'un ressort dont l'équivalent discret (obtenu en utilisant la méthode d'Euler du premier ordre avec un période d'échantillonnage 0.1 s) est donné par:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 \frac{K}{m_1} & 0.1 \frac{K}{m_1} & 1 & 0 \\ 0.1 \frac{K}{m_2} & -0.1 \frac{K}{m_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \frac{K}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

où m_1 et m_2 sont les deux masses et K est la constante de raideur du ressort. Les variables d'état x_1, x_2 représentent la position des deux masses, tandis que x_3, x_4 sont les vitesses.

La méthodologie est appliquée en considérant les valeurs suivantes: $m_1 = m_2 = K = 1$. Les conditions initiales du système sont $x(0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ et celles du contrôleur dynamique sont $x_c(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Sont en outre utilisés les paramètres $Q = I$, $R = 1$ et la variable associée à la contrainte sur le contrôle est $u_{\max} = 1$. On suppose que les états non mesurés ont une valeur contenue dans l'intervalle suivant:

$$-0.5 \leq x_3, x_4 \leq 0.5.$$

Dans la Figure 4.5, est fourni le comportement des réponses (y_1 et y_2) du système bouclé obtenu en appliquant la méthodologie proposée.

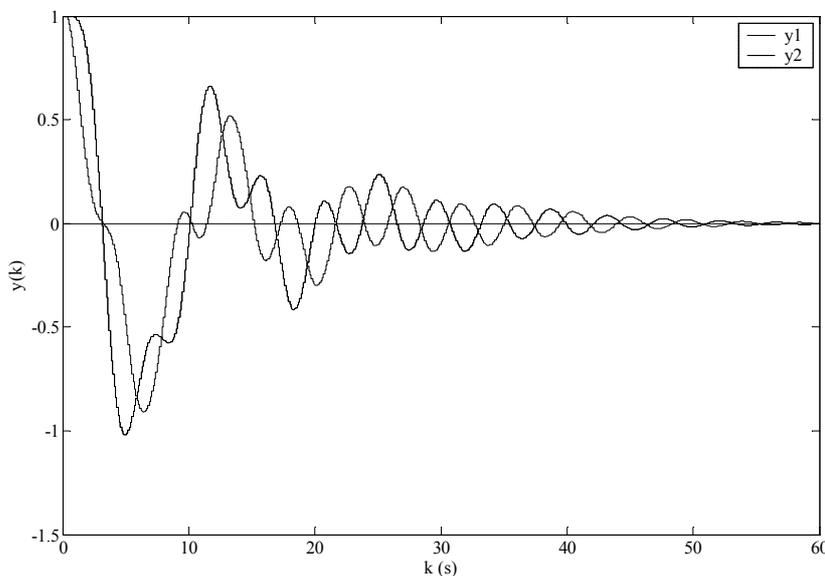


Figure 4.5. Réponse temporelle des sorties du système.

On observe un décroissance à zéro compatible bien sûr avec la propriété de stabilité.

Dans la Figure 4.6 on illustre dans un seul diagramme, la localisation des pôles du système bouclé pour chaque instant d'échantillonnage, c'est-à-dire, on représente la

localisation des pôles du système en boucle fermé, en superposant tous les pôles depuis $k=0$ jusqu'à $k=50$ s.

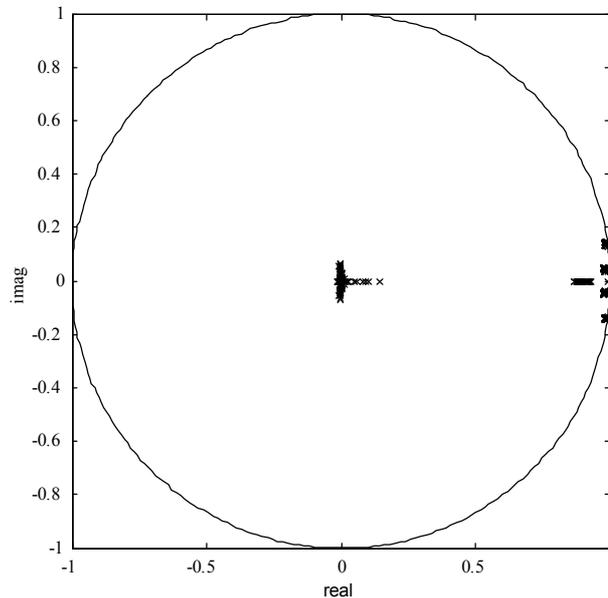


Figure 4.6. Situation de pôles du système à boucle fermé.

Tous les pôles du système sont trouvés effectivement dans le cercle unitaire pour toute la période de simulation (depuis $k=0$ jusqu'à $k=50$ s), et, par conséquent, on vérifie qu'à chaque itération est défini un contrôleur stabilisant.

Finalement, la Figure 4.7 montre la réponse du système en boucle fermée en utilisant des contrôleurs qui localisent les pôles du système dans un cercle de rayon 0.5 et centré au point $0.5+0j$. On observe un décroissance à zéro compatible bien sûr avec la propriété de stabilité.

Enfin dans le Figure 4.8, on illustre la situation respective des pôles pour le même temps de simulation. Tous les pôles pour chaque instant d'échantillonnage, sont représentés dans le même diagramme. Aussi, outre le cercle unitaire, on montre le disque à l'intérieur duquel sont placés les pôles.

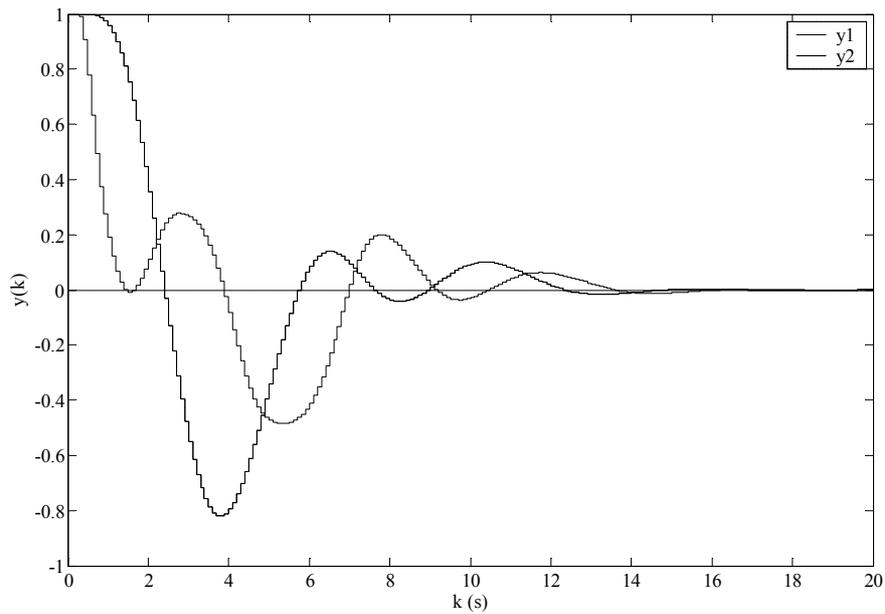


Figure 4.7. Réponse temporelle par localisation de pôles.

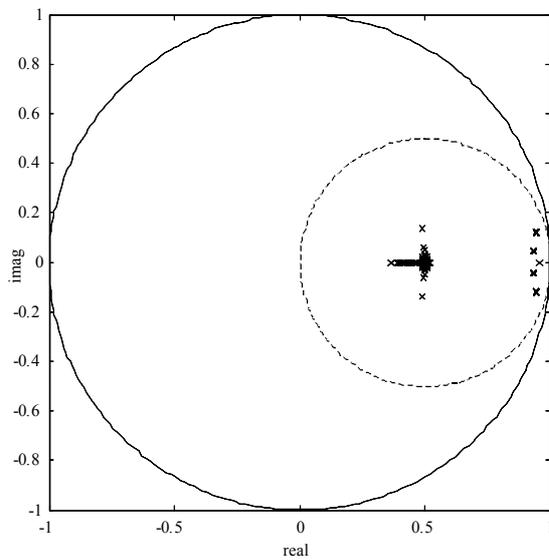


Figure 4.8. Situation de pôles du système dans cercle spécifié.

La stratégie de conception proposée, à chaque itération, place les pôles du système en boucle fermée dans le disque souhaité. De cette manière, on observe qu'est améliorée la performance de la réponse du système. Les sorties convergent en un temps approximatif de 15 s, bien réduit en comparaison avec les 60 s obtenues dans le cas précédent (Figure 4.5).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une méthode qui permet d'effectuer la conception d'un contrôleur dynamique avec des contraintes sur la commande et la sortie, pour systèmes nominaux. La procédure s'appuie sur la méthodologie de commande prédictive, c'est-à-dire, à chaque instant d'échantillonnage, on recalcule les paramètres du contrôleur, en résolvant un problème d'optimisation convexe basé sur des inégalités matricielles linéaires (LMI).

Les contraintes sur l'entrée et la sortie ont été incorporées dans la conception comme des LMIs additionnelles dans le problème d'optimisation. Pour cela, on a utilisé le concept d'ellipsoïde invariant. Le contrôleur assure la stabilité du système en boucle fermée.

Le problème de synthèse de contrôleur dynamique proposé dans ce chapitre, est formulé comme un problème de programmation LMI, résultant de la convexité du problème. Ainsi on peut déterminer le contrôleur en utilisant des routines de résolution de LMI (la toolbox LMI de Matlab®, par exemple).

La conception du contrôleur est basée sur la mesure en ligne de la sortie du système et l'intervalle d'appartenance fixé a priori des états qui ne sont pas mesurés.

Bien que la procédure ait été développée pour les systèmes nominaux, compte tenu du fait que les états non mesurés ont été caractérisés de manière polyédrique (polytope d'incertitude propagé), on a résolu un problème d'optimisation pour chacun des états possibles du système définis dans leur domaine d'incertitude.

Il est possible de prendre en compte des contraintes multiples au problème d'optimisation à condition que celles-ci puissent être exprimées sous forme de LMI. Ceci a été illustré en traitant le cas de placement de pôles dans un disque.

L'utilisation de la méthodologie d'horizon mobile, c'est-à-dire, le recalcul du contrôleur dynamique à chaque temps d'échantillonnage, a permis d'obtenir une bonne performance en boucle fermée en présence de perturbations, qui dans ce cas, sont données par l'ignorance de la valeur des états non mesurés. Ceci est dû au fait que, à chaque itération, de nouvelles mesures sont prises en compte pour la mise à jour des calculs des matrices du contrôleur dynamique.

Chapitre 5

MPC robuste basé LMIs

Dans ce chapitre est proposée une extension de la méthodologie de conception de contrôleurs pour systèmes certains fournie du chapitre précédent, au cas de systèmes incertains. Il est fait la synthèse d'un contrôleur dynamique robuste pour systèmes discrets en utilisant la stratégie de commande prédictive (MPC), basé sur des inégalités matricielles linéaires (LMI).

L'incertitude est du type bornée en norme, une extension est proposée pour le cas d'incertitude polytopique. La méthodologie s'inspire des résultats montrés dans le travail de Colmenares *et al.* (2000). Cette technique de conception est illustrée au moyen de deux exemples numériques.

5.1 Introduction

L'utilité pratique des contrôleurs prédictifs, est partiellement limitée à la capacité de résoudre le problème d'optimisation en temps réel, car, à chaque instant d'échantillonnage, doivent être recalculés les paramètres du contrôleur à l'aide d'un problème d'optimisation.

Pour la détermination d'un contrôleur robuste, où sont explicitement prises en compte des incertitudes dans le modèle et dans le cas d'incertitudes polytopiques, la demande de calcul croît significativement avec le nombre de sommets de l'ensemble incertain, lequel croît exponentiellement avec le nombre de paramètres incertains indépendants dans le modèle du système.

Conscients de ce problème, les chercheurs ont commencé à étudier la possibilité de calculs numériques rapides pour la solution du problème d'optimisation associé à la méthodologie de commande prédictive.

En ce sens, on peut trouver plusieurs travaux comme celui Wan et Kothare (2003), où on utilise le concept "d'ellipsoïde invariant asymptotiquement stable" pour développer un algorithme MPC robuste. L'approche est composée de deux parties: une procédure hors ligne où l'algorithme calcule un ensemble de lois de commande explicites, qui

correspondent à un ensemble "d'ellipsoïdes invariants asymptotiquement stables" construits les uns à l'intérieur des autres dans l'espace d'état; et une procédure, qui est effectuée en ligne, consiste à déterminer l'état du système (sur la base d'une norme) et choisir la loi de commande (ou contrôleur) adéquate dans le tableau produit pendant le calcul hors de ligne. Cette méthodologie permet de manier une grande classe de descriptions d'incertitude avec garantie de stabilité robuste du système en boucle fermé, et avec une réduction substantielle du calcul en ligne.

Étant donnée la demande relativement élevée de calcul requis, la stratégie présentée ci-dessous ne peut voir son application qu'à des systèmes dynamiques relativement lents et des processus de taille modeste. Toutefois, par une procédure semblable à celle développée dans le travail Wan et Kothare (2003), la méthodologie peut être utilisée pour produire, hors ligne, un tableau donnant une séquence de contrôleurs à utiliser postérieurement en ligne pour fournir le contrôleur adéquat suivant l'état du système.

5.2 Position du problème

Beaucoup de considérations pour la conception du contrôleur dans ce chapitre, sont les mêmes que pour le cas certain et par conséquent elles ne seront pas répétées ici comme, par exemple, la sélection de la fonction objectif et la caractérisation des états non mesurés.

On considère le système linéaire à temps discret incertain décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + DF_1E)x(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et $y(k) \in \mathfrak{R}^q$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie. $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ et $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ sont respectivement les matrices du système, celles de commande et de sortie. En outre, il est supposé que la paire (A, B) est stabilisable et la paire (A, C) est détectable. Ces conditions sont faites pour assurer que les LMI établies ci-dessous possèdent effectivement une solution.

La matrice inconnue $F_1 \in \mathfrak{R}^{nd \times ne}$ représente l'incertitude -bornée en norme- du modèle [Petersen (1987)], et satisfait:

$$F_1^T F_1 \leq I. \quad (5.2)$$

Les matrices $D \in \mathfrak{R}^{n \times nd}$ et $E \in \mathfrak{R}^{ne \times n}$ de valeurs connues, spécifient comment le modèle nominal est affecté par l'incertitude F_1 . Avec une sélection adéquate de ces matrices, il est possible de représenter des incertitudes dans tout élément du système.

Le problème consiste à déterminer à chaque itération d'échantillonnage k , une loi de commande linéaire qui stabilise le système incertain (5.1) tout en cherchant à minimiser un critère quadratique avec contraintes, par l'emploi d'un contrôleur dynamique qui s'écrit:

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c(k) + B_c y(k) \\ u(k) &= C_c x_c(k) \end{aligned} \quad (5.3)$$

où $x_c(k) \in \mathfrak{R}^n$ représente l'état du contrôleur, et les matrices $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times q}$ et $C_c \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ constituent les matrices du contrôleur dynamique.

Le schéma du contrôleur proposé, est le même que celui pour le cas nominal (voir figure 4.1) et contrairement au MPC classique pour lequel l'optimiseur calcule directement la loi de commande, dans ce cas agit directement sur les matrices du contrôleur A_c, B_c, C_c .

5.2.1 Modèle mathématique du système incertain étendu

Le système en boucle fermé formé par les équations (5.1) et (5.3) peut être représenté de manière équivalente par le système étendu suivant:

$$\begin{aligned} x_e(k+1) &= (\hat{A} + \hat{D}F_1\hat{E})x_e(k) \\ y(k) &= \hat{C}x_e(k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}, \quad \hat{C} = [C \quad 0] \in \mathfrak{R}^{q \times 2n}, \\ \hat{D} &= \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n \times nd}, \quad \hat{E} = [E \quad 0] \in \mathfrak{R}^{ne \times 2n}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

et

$$x_e(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2n}. \quad (5.6)$$

5.2.2 Fonction de coût

Tout comme pour le cas nominal, on considère une fonction objectif d'horizon infini. En exprimant celle-ci en fonction des variables d'état du système étendu (5.4) on a:

$$J_\infty(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_e(k+i/k)^T \tilde{Q} x_e(k+i/k) \right), \quad (5.7)$$

où

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & C_c^T R C_c \end{bmatrix}, \quad Q > 0, \quad R > 0. \quad (5.8)$$

Tout comme le cas nominal, on considère la fonction quadratique suivante:

$$V_L(x_e(k/k)) = x_e(k/k)^T P x_e(k/k), \quad P > 0. \quad (5.9)$$

A chaque instant d'échantillonnage k , on satisfait l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \Delta V_L(x_e(k+i/k)) &= V_L(x_e(k+i+1/k)) - V_L(x_e(k+i/k)) \leq \\ &- (x_e(k+i/k)^T Q x_e(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k)), \quad \forall F_1 : F_1^T F_1 \leq I, \end{aligned} \quad (5.10)$$

et si la fonction objectif (5.7) est définie correctement, c'est-à-dire, $V_L(x_e(\infty/k)) = 0$, en sommant (5.10) depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$, on obtient:

$$V_L(x_e(k/k)) \geq J_\infty(k). \quad (5.11)$$

Alors, l'algorithme consiste à synthétiser une loi de commande qui minimise la fonction quadratique (5.9), laquelle représente un borne supérieur de la fonction objectif (5.7).

5.2.3 Caractérisation des états non mesurés

Tout comme le cas nominal, on partitionne le vecteur d'état du système $x(k)$ sous la forme:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_r(k) \\ x_m(k) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n, \quad (5.12)$$

où $x_m(k) \in \mathfrak{R}^p$ représente les états mesurés, et $x_r(k) \in \mathfrak{R}^{n-p}$ les états non mesurés qui seront caractérisés pour des valeurs extrêmes définissant un domaine d'appartenance:

$$x_{ri}^{\min} \leq x_r(k) \leq x_{ri}^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, n-p. \quad (5.13)$$

En suivant une analyse semblable au cas nominal, l'état du système est défini par:

$$\chi_j(k) = \begin{bmatrix} x_{rj} \\ x_m(k) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad l = 2^{n-p}, \quad (5.14)$$

De cette manière, tout $\chi \in \Omega = Co\{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l\}$, c'est à dire:

$$\chi = \sum_{i=1}^l \lambda_i \chi_j, \quad \lambda \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \lambda : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1 \right\}. \quad (5.15)$$

5.3 Conception du contrôleur robuste quadratique

Le théorème suivant donne les conditions d'existence du contrôleur souhaité.

Théorème 5.1. Soient $\chi(k) = \chi(k/k)$ et $x_c(k) = x_c(k/k)$ les valeurs de l'état du système (5.1) et du contrôleur (5.3) à chaque instant d'échantillonnage k , le système incertain à temps discret défini par (5.1), est asymptotiquement stabilisé par un contrôleur dynamique par retour de sortie du type (5.3), tout en minimisant une borne supérieure du coût quadratique sous contraintes, si à chaque instant d'échantillonnage ($k = 0, 1, \dots, \infty$), il existe des matrices $F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $Z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $V \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, des matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et le scalaire ε solutions du problème suivant:

$$\min \gamma, \quad (5.16)$$

sous

$$\begin{bmatrix} Y & I & Y\chi_j(k/k) + Vx_c(k/k) \\ I & X & \chi_j(k/k) \\ (Y\chi_j(k/k) + Vx_c(k/k))^T & \chi_j(k/k)^T & \gamma \varepsilon I \end{bmatrix} > 0, \quad j = 1, \dots, l, \quad (5.17)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA+FC & Z & 0 & 0 & 0 & YD \\ I & X & A & AX+BL & 0 & 0 & 0 & D \\ A^T Y + C^T F^T & A^T & Y & I & E^T & Q^{1/2} & 0 & 0 \\ Z^T & XA^T + L^T B^T & I & X & XE^T & XQ^{1/2} & L^T R^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & E & EX & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q^{1/2} & Q^{1/2} X & 0 & \varepsilon^{-1} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{1/2} L & 0 & 0 & \varepsilon^{-1} I & 0 \\ D^T Y & D^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.18)$$

□

Remarque 5.1. Les variables $\gamma, \varepsilon, X, Y, L, F, Z$ dans le problème d'optimisation devraient être dénotées $\gamma_k, \varepsilon_k, X_k, Y_k, L_k, F_k, Z_k$ pour souligner qu'elles sont calculées à chaque instant k . Pour alléger les notations, on omet les indices.

Dans les sections suivantes est détaillée la démonstration du Théorème 5.1.

5.3.1 Contrôleur robuste stabilisant

La condition (5.18) est celle qui garantit que l'on obtiendra un contrôleur robuste stabilisant entre les instants k et $k+1$. Pour démontrer cette condition, on rappelle quelques définitions effectuées dans le chapitre précédent:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

et

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Avec (5.4) et (5.9) portés dans (5.10) on obtient:

$$(\hat{A} + \hat{D}\hat{F}\hat{E})^T P(\hat{A} + \hat{D}\hat{F}\hat{E}) - P + \tilde{Q} < 0 \quad (5.21)$$

qui doit être vrai $\forall F_1 : F_1^T F_1 \leq I$.

Une condition suffisante s'écrit:

$$\hat{A}^T (P^{-1} - \varepsilon \hat{D}\hat{D}^T)^{-1} \hat{A} - P + \varepsilon^{-1} \hat{E}^T \hat{E} + \tilde{Q} < 0. \quad (5.22)$$

où ε est un scalaire.

En appliquant le complément de Schur, l'inégalité précédente peut être exprimée:

$$\begin{bmatrix} P^{-1} - \varepsilon \hat{D}\hat{D}^T & \hat{A} \\ \hat{A}^T & P - \varepsilon^{-1} \hat{E}^T \hat{E} - \tilde{Q} \end{bmatrix} > 0. \quad (5.23)$$

Définissant:

$$\hat{P} = \varepsilon^{-1} P^{-1} \quad (5.24)$$

et après quelques manipulations, l'inégalité (5.23) peut être exprimée par:

$$\begin{bmatrix} \hat{P} & \hat{A}\hat{P} & 0 & 0 & \hat{D} \\ \hat{P}\hat{A}^T & \hat{P} & \hat{P}\hat{E}^T & \hat{P}\tilde{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \hat{E}\hat{P} & I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^{1/2}\hat{P} & 0 & \varepsilon^{-1}I & 0 \\ \hat{D}^T & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (5.25)$$

Multipliant l'inégalité (5.25) à gauche par \hat{T}_3^T et à droite par \hat{T}_3 , avec:

$$\hat{T}_3 = \text{blockdiag}[T \quad T \quad I \quad I \quad I] \quad (5.26)$$

il vient:

$$\begin{bmatrix} T^T \hat{P}T & T^T \hat{A}\hat{P}T & 0 & 0 & T^T \hat{D} \\ T^T \hat{P}\hat{A}^T T & T^T \hat{P}T & T^T \hat{P}\hat{E}^T & T^T \hat{P}\tilde{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \hat{E}\hat{P}T & I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^{1/2} \hat{P}T & 0 & \varepsilon^{-1}I & 0 \\ \hat{D}^T T & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (5.27)$$

En utilisant (5.5), (5.8), (5.19) et (5.20) dans (5.27), et en définissant les variables intermédiaires:

$$F = VB_c,$$

$$L = C_c U^T,$$

$$M = VA_c U^T,$$

$$Z = YAX + FCX + YBL + M,$$

(5.28)

on obtient la condition (5.18). ■

5.3.2 Fonction objectif et ellipsoïde initial

La minimisation de (5.9) qui représente la borne supérieure de la fonction objectif (5.7), est écrite:

$$\min \gamma \quad (5.29)$$

sous

$$x_e(k/k)^T P x_e(k/k) < \gamma \quad (5.30)$$

où γ est une scalaire non négatif.

En utilisant la définition (5.24) et le complément de Schur, l'inégalité précédente s'exprime comme:

$$\begin{bmatrix} \hat{P} & x_e(k/k) \\ x_e(k/k)^T & \gamma \varepsilon I \end{bmatrix} > 0. \quad (5.31)$$

Multipliant l'inégalité précédente à gauche par \hat{T}_1^T et à droite par \hat{T}_1 , où:

$$\hat{T}_1 = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

on a:

$$\begin{bmatrix} Y & I & Yx(k/k) + Vx_c(k/k) \\ I & X & x(k/k) \\ (Yx(k/k) + Vx_c(k/k))^T & x(k/k)^T & \gamma I \end{bmatrix} > 0. \quad (5.33)$$

L'inégalité précédente est à satisfaire $\forall \chi \in \Omega$, condition de dimension infinie. Comme Ω est un polytope et que (5.33) est linéaire par rapport x et x_c , cette condition se réduit à son test sur les sommets seulement conduisant alors aux LMI (5.17). ■

5.4 Construction du contrôleur robuste

À partir des matrices X, Y, L, F, Z obtenues par résolution du problème d'optimisation posé dans le Théorème 5.1, il est possible de déterminer le contrôleur dynamique qui garantit la stabilité du système en boucle fermé.

Du changement de variables suggéré en (5.28), il est possible de déterminer les matrices du contrôleur dynamique (A_c, B_c, C_c) ; toutefois il est nécessaire de connaître la valeur des matrices U, V .

En suivant une procédure semblable à celle développée dans le chapitre précédent, on obtient des matrices de transfert du contrôleur dynamique:

7. $A_c = (I - YX)^{-1}M$.
8. $B_c = (I - YX)^{-1}F$.
9. $C_c = L$.

Remarque 5.2. Il faut encore souligner que pour sa représentation entrée-sortie, le contrôleur dynamique est déterminé uniquement par la valeur des matrices X, Y, L, F, Z , et est indépendant de la valeur des matrices U, V . •

Remarque 5.3. A chaque instant d'échantillonnage, pour l'obtention des matrices du contrôleur dynamique (solution du Théorème 5.1), on emploie la valeur de l'état du contrôleur à cet instant. Celui-ci est fixé à zéro à la première itération, $x_c(0) = 0$, et ensuite il prend la valeur déduite de l'équation (5.3). •

5.5 Procédure de calcul du contrôleur robuste

Le problème posé dans le Théorème 5.1 n'est pas linéaire étant donné la présence du terme $\gamma \epsilon$ dans la contrainte (5.17) associée à celle du terme ϵ^{-1} dans (5.18). Toutefois, il existe des approches qui proposent une solution à de tels problèmes et notamment par recherche mono dimensionnelle, voir par exemple, dans Iwasaki et Skelton (1995).

La condition (5.18) permet de garantir l'obtention d'un contrôleur robuste stabilisant. Comme celle-ci est une condition nécessaire, elle peut être résolue de manière séparée.

Cette seule inégalité est linéaire par rapport aux variables $\epsilon^{-1}, X, Y, L, F, Z$ et, par conséquent, peut être résolue par les méthodes de solution de LMIs.

Il est donc possible théoriquement d'obtenir la valeur maximale de ϵ^* pour la garantie de la stabilité robuste. Alors en utilisant le résultat de Petersen (1987), il peut être assuré que pour tout ϵ dans l'intervalle $(0, \epsilon^*)$, la LMI (5.18) possède une solution. A contrario, à l'extérieur de cet intervalle, aucune solution n'est possible.

Une fois que l'intervalle faisable pour ϵ est déterminé, on calcule les matrices du contrôleur dynamique par la solution du problème d'optimisation posé dans le Théorème 5.1, en chaque point d'une distribution choisie sur l'intervalle $(0, \epsilon^*)$.

On garde ensuite la solution correspondant à la valeur de γ la plus faible. La solution retenue sera d'autant meilleure que sera retenu un grand nombre de points dans l'ensemble $(0, \epsilon^*)$, ceci bien sûr au détriment du temps de calcul.

Cette procédure de conception peut être résumée au moyen de l'algorithme suivant:

5.5.1 Algorithme

Pour chaque instant k .

Pas 1

En utilisant uniquement la restriction (5.18), calculer le maximum ϵ^* pour lequel il y a stabilité robuste.

Pas 2

Produire un ensemble de n valeurs de ϵ uniformément distribué entre 0 et ϵ^* :
 $\Xi = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$.

Pas 3

Pour chaque ϵ_i ($i=1,2,\dots,n$) de l'ensemble Ξ , résoudre le problème d'optimisation posé dans le Théorème 5.1.

Pas 4

Des n solutions obtenues, choisir celle qui correspond au minimum γ^* .

Remarque 5.4. La valeur de n dans le Pas 2 de l'algorithme, est adaptée à la taille du système qu'on souhaite contrôler. Ceci est dû au fait que le problème d'optimisation doit être résolu n fois à chaque temps d'échantillonnage.

Remarque 5.5. Tout comme dans le cas nominal, toute solution admissible à l'instant k qui satisfait le problème d'optimisation posé dans le Théorème 5.1, est aussi solution admissible pour tout temps $t > k$ (voir Lemme 4.2).

5.6 Contrôleur dynamique robuste: incertitude polytopique

Il est possible d'étendre la procédure développée dans le chapitre 4 et dont le résultat est le Théorème 5.1, au cas avec incertitude polytopique.

Soit le système linéaire à temps discret incertain décrit par:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (5.34)$$

où l'incertitude en A, B, C est de type polytopique convexe définie par:

$$A_g = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad DA_g = Co \{A_{g1}, A_{g2}, \dots, A_{gN}\}, \quad (5.35)$$

où

$$A_g = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_{gj}, \quad : \alpha \in \Gamma, \quad \Gamma = \left\{ \alpha : \alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \right\}. \quad (5.36)$$

On souhaite trouver à chaque instant d'échantillonnage k , une loi de commande linéaire qui stabilise le système (5.34), par l'emploi d'un contrôleur décrit par (5.3).

Théorème 5.2. soient $\chi(k) = \chi(k/k)$ et $x_c(k) = x_c(k/k)$ les valeurs de l'état du système (5.34) et du contrôleur (5.3) à chaque instant d'échantillonnage k , le système incertain à temps discret défini par (5.34), est asymptotiquement stabilisé par un contrôleur dynamique par retour de sortie du type (5.3), tout en minimisant une borne supérieure du coût quadratique sous contraintes, si à chaque instant d'échantillonnage ($k = 0, 1, \dots, \infty$), il existe des matrices $F \in \mathfrak{R}^{n \times q}$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $V \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et des matrices symétriques définies positives $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ solutions du problème suivant:

$$\min \gamma \quad (5.37)$$

sous

$$\begin{bmatrix} Y & I & Y\chi_j(k) + Vx_c(k) \\ I & X & \chi_j(k) \\ (Y\chi_j(k) + Vx_c(k))^T & \chi_j(k)^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad j=1,2,\dots,l, \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & YA_i + FC_i & \tilde{Z}_i + M & 0 & 0 \\ I & X & A_i & A_i X + B_i L & 0 & 0 \\ (YA_i + FC_i)^T & A_i^T & Y & I & 0 & Q^{1/2} \\ (\tilde{Z}_i + M)^T & (A_i X + B_i L)^T & I & X & L^T R^{1/2} & XQ^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & R^{1/2} L & \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & Q^{1/2} & Q^{1/2} X & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.39)$$

$$\forall i=1,2,\dots,l \text{ où } \tilde{Z}_i = YA_i X + FC_i X + YB_i L$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & 0 \\ I & X & L^T \\ 0 & L & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (5.40)$$

$$\begin{bmatrix} Y & I & A_i^T C_i^T \\ I & X & XA_i^T C_i^T + L^T B_i^T C_i^T \\ C_i A_i & C_i A_i X + C_i B_i L & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i=1,2,\dots,l. \quad (5.41)$$

□

La présence de variables d'optimisation apparaissant bilinéairement dans \tilde{Z}_i , ne permet pas de résoudre ce problème directement en utilisant les outils de résolution LMIs. Afin de déterminer le compensateur, on utilise un algorithme par décomposition croisée, similaire à celui présenté en Geromel, Bernussou et Oliveira (1999) et étendu au cas discret dans Courties (1999).

La synthèse de contrôleurs robustes prédictifs au moyen de cette approche peut apparaître seulement d'intérêt théorique étant donné la charge élevée de calcul requis et qui doit être effectué en temps réel et à chaque instant d'échantillonnage. Seules des dynamiques lentes voire très lentes pourront être susceptibles d'un tel traitement.

5.7 Exemples numériques

Les exemples numériques considérés ensuite, sont ceux étudiés dans le chapitre précédent, extraits de Kothare, Balakrishnan et Morari (1996). Ont été faites quelques

modifications pour appliquer la méthode décrite dans ce chapitre. Les simulations ont été effectuées en utilisant Matlab®, et pour le calcul du contrôleur on utilise la toolbox LMI.

5.7.1 Premier exemple (système du 2^{me} ordre)

Soit le système incertain représenté par les équations d'état suivantes:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.99 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} F_1 \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0787 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

La condition initiale du système $x(0) = [0.05 \ 0]^T$ et celle du contrôleur dynamique est $x_c(0) = [0 \ 0]^T$, on choisit $Q = I$ et $R = 0.00002$. Il est supposé que l'état non mesuré est contenu dans l'intervalle suivant:

$$-0.1 \leq x_2 \leq 0.1.$$

En suivant la méthodologie proposée, le maximum ε^* (valeur au delà laquelle le système n'est plus quadratiquement stabilisable par retour de sortie dynamique) est calculé $\varepsilon^* = 2.3077$. A chaque instant on calcule les matrices du contrôleur dynamique, solutions de problème d'optimisation, pour quelques dizaines de points de l'intervalle $\varepsilon \in (0, 2.3077)$ et on retient celles qui correspondent au γ^* le plus faible.

Dans la Figure 5.1 la réponse temporelle de la sortie du système nominal ($F_1 = 0$) commandé est donnée. On vérifie simultanément, pour différents instants d'échantillonnage, que la localisation des pôles du système en boucle fermée, pour des valeurs de F_1 uniformément distribués entre -1 et 1 est bien effectuée à l'intérieur du cercle unité (preuve qu'à chaque instant est calculé un contrôleur stabilisant).

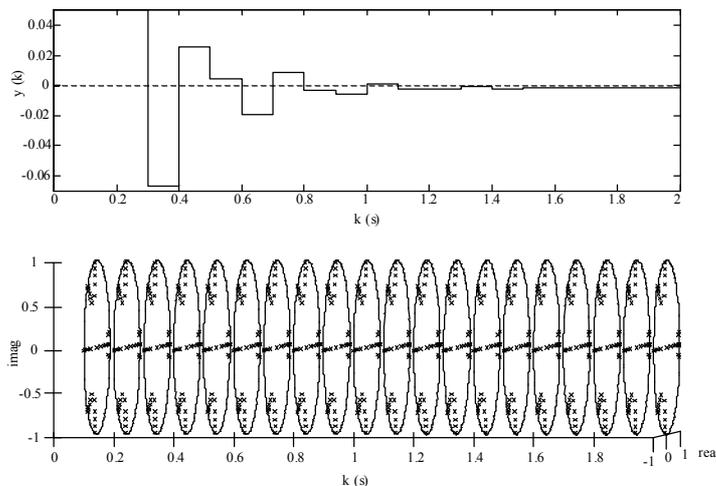


Figure 5.1. Réponse temporelle du système nominal et la situation de pôles du système à boucle fermée avec F_1 entre -1 et 1 .

On observe sur la figure précédente que le transitoire est de l'ordre de vingt itérations (2 s).

Afin de mieux apprécier la localisation des pôles du système contrôlé dans le cercle unitaire, dans la Figure 5.2 on montre ceux-ci dans un seul diagramme. On a superposé tous les temps d'échantillonnage compris entre $k = 0$ et $k = 2$ s.

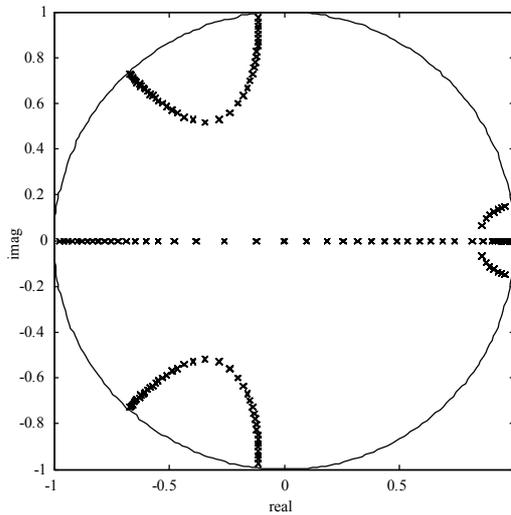


Figure 5.2. Localisation de pôles du système à boucle fermée pour k entre 0 et 2 s, et F_I entre -1 et 1 .

Il peut être observé que pour tout k , les pôles du système en boucle fermée se trouvent bien inscrits dans le cercle unitaire.

Dans la Figure 5.3 est donnée la réponse temporelle du système commandé pour le système nominal ($F_I = 0$) et pour les deux systèmes "extrêmes" ($F_I = -1$ et $F_I = 1$).

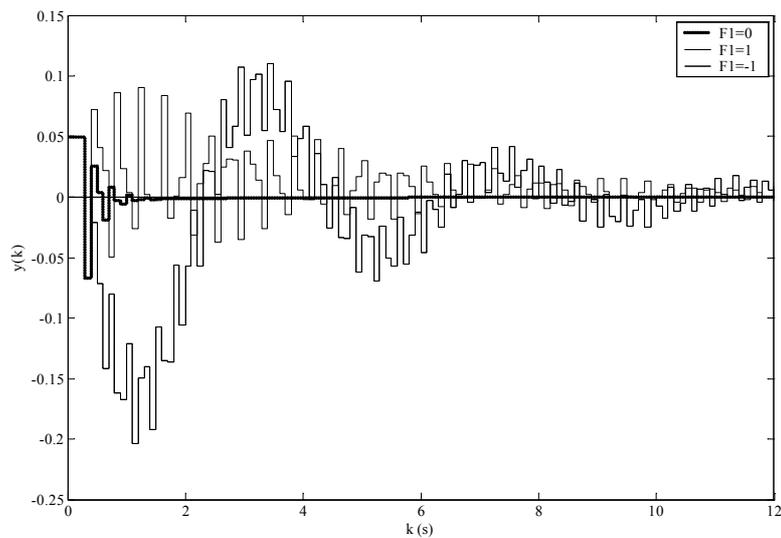


Figure 5.3. Réponse temporelle du système contrôlé pour $F_I = -1, 0, 1$.

Comme il était attendu, on vérifié que l'on obtient bien une stratégie stabilisante sur le système incertain pour les représentations possibles en boucle fermé.

Dans la Figure 5.4 on illustre encore la réponse temporelle du système pour le cas nominal ($F_1 = 0$) et pour les deux systèmes extrêmes ($F_1 = -1$ et $F_1 = 1$) pour un contrôleur non robuste, déterminé seulement à partir du modèle nominal. Pour la synthèse de ce contrôleur, on a utilisé la procédure développée dans le chapitre précédent.

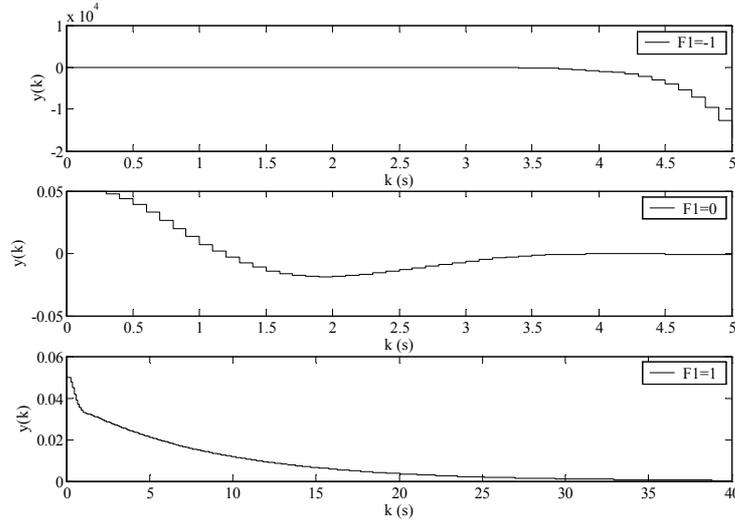


Figure 5.4. Réponse temporelle du système (pour $F_1 = -1, 0, 1$) avec contrôleur calculé pour le système nominal.

Il peut être constaté que ce contrôleur, conçu pour le cas nominal, ne peut garantir la stabilité du système pour toutes les représentations possibles du système dans son domaine d'incertitude. Spécialement, pour le cas de $F_1 = -1$, on observe un comportement instable.

Ceci illustre l'importance d'inclure l'incertitude du système pendant l'étape de conception du contrôleur, pour garantir que celui-ci soit robuste.

5.7.2 Second exemple (système d'ordre quatre)

Soit le système incertain représenté par les équations d'état suivantes:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} F_1 [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] \right) \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

et la condition initiale du système est $x(0) = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$.

On choisit pour le contrôleur dynamique un état initial $x_c(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ et pour le critère les paramètres $Q = I$, $R = 1$.

On supposera que les états non mesurés auront une valeur contenue dans l'intervalle

$$-0.5 \leq x_3, x_4 \leq 0.5.$$

En suivant la méthodologie proposée, le maximum ε^* pour lequel le problème a une solution est $\varepsilon^* = 0.3202$. On met en œuvre l'algorithme 5.5.1.

Sur la Figure 5.5 est donné le comportement des sorties du système commandé pour le cas nominal ($F_1 = 0$).

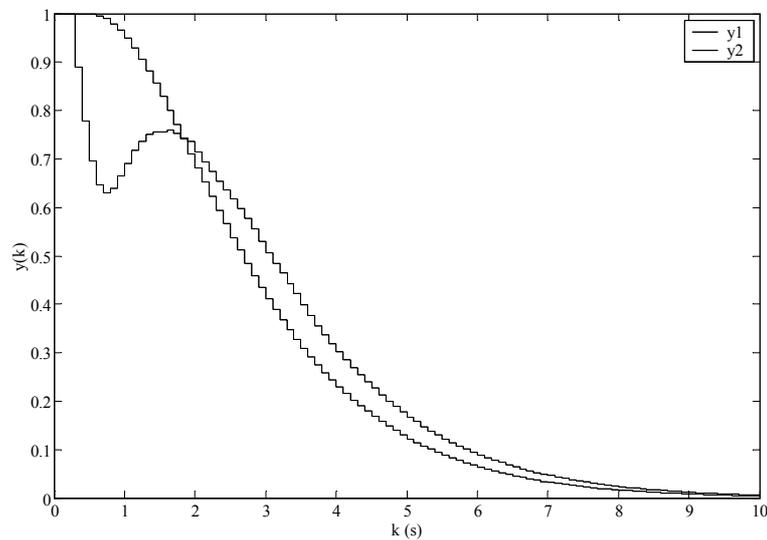


Figure 5.5. Réponse temporelle des sorties du système nominal commandé.

Le contrôleur conçu par la méthodologie proposée garantit la stabilité, le temps de réponse est approximativement de 10 s (100 itérations).

Dans la Figure 5.6 on montre une superposition de la localisation des pôles du système bouclé pour l'intervalle de temps compris entre $k = 0$ et $k = 10$ s et pour des valeurs de F_1 uniformément distribuées entre -1 et 1.

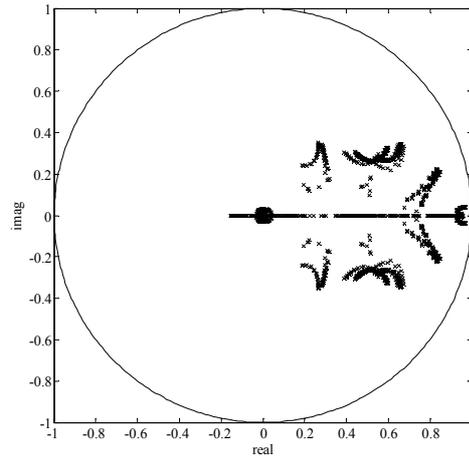


Figure 5.6. Localisation de pôles du système à boucle fermé pour k entre 0 et 10 s, et F_I entre -1 et 1 .

Tous les pôles du système sont trouvés effectivement dans le cercle unitaire pour toute la période de simulation.

Sur les Figure 5.7 et Figure 5.8 sont données les réponses temporelles des sorties du système commandé pour le système nominal et pour les deux systèmes extrêmes ($F_I = -1$ et $F_I = 1$).

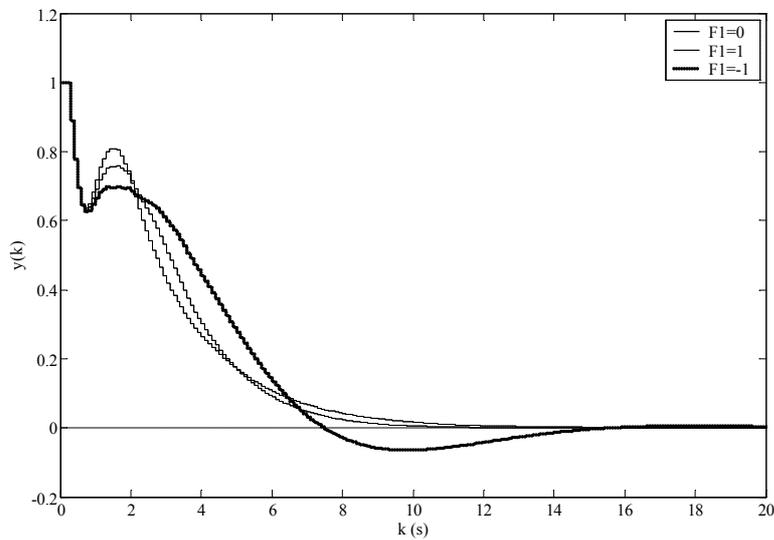


Figure 5.7. Réponse temporelle de la sortie y_1 pour $F_I = -1, 0, 1$

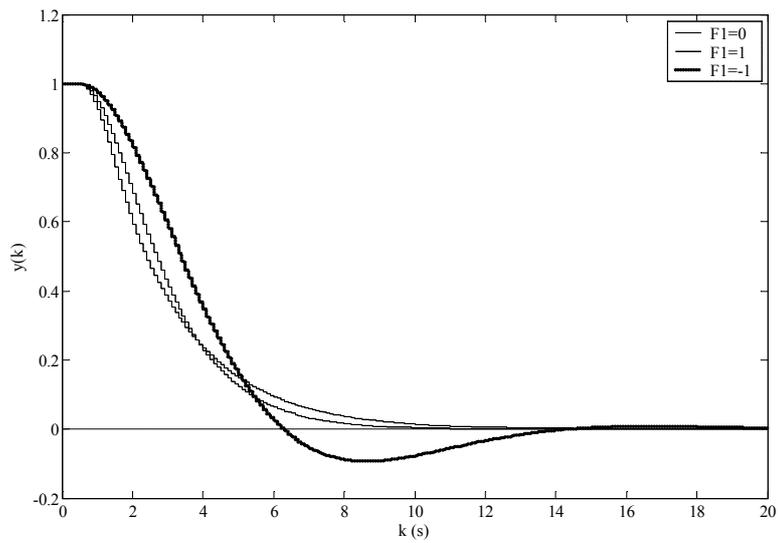


Figure 5.8. Réponse temporelle de la sortie y_2 pour $F_1 = -1, 0, 1$

Il peut être vérifié un comportement stable pour les réalisations choisies dans le domaine d'incertitude.

Une synthèse a été conduite sur le même système, le même critère mais avec une localisation des modes dans cercle de rayon 0.5 et centré en $0.5+0j$. Sur la Figure 5.9 sont tracées les réponses temporelles pour le système nominal ($F_1 = 0$), où l'on peut constater une légère amélioration du transitoire.

La Figure 5.10 montre la localisation réalisée (résultats cumulés pour tous les instants compris entre $k = 0$ et $k = 12$ s et des valeurs de F_1 uniformément distribuées entre -1 et 1).

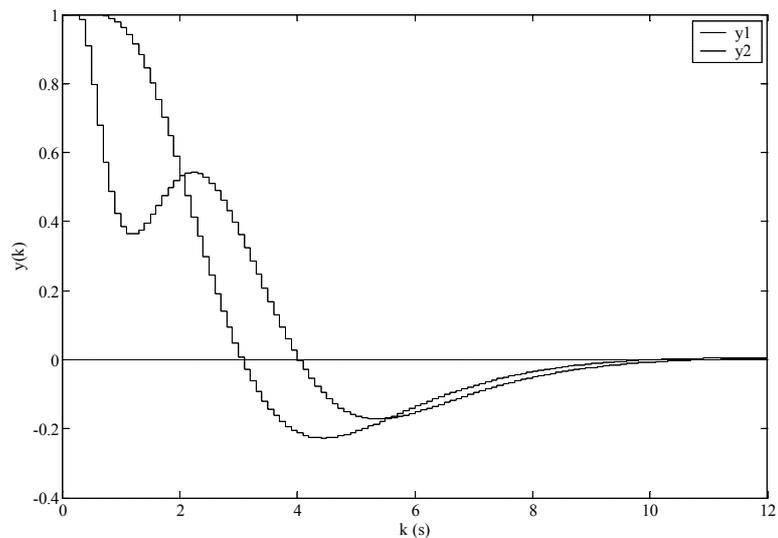


Figure 5.9. Réponse temporelle des sorties du système nominal avec contrôleur de localisation de pôles.

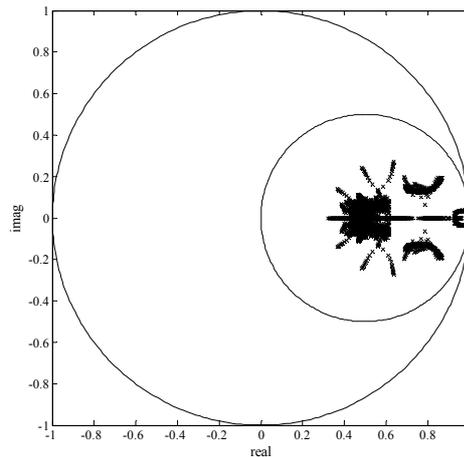


Figure 5.10. Situation de pôles du système à boucle fermé pour k entre 0 et 12 s, et F_l entre -1 et 1 .

De l'observation de la Figure 5.10, il peut être constaté qu'effectivement les pôles du système en boucle fermé, pour toutes les représentations possibles dans le domaine d'incertitude, sont situés dans le disque souhaité.

On peut aussi apprécier une petite réduction dans le temps de réponse de la sortie du système, en comparaison avec celle obtenue dans le cas précédent (Figure 5.5).

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre une extension du chapitre précédent au cas de systèmes incertains a été faite avec une méthode qui permet d'effectuer la synthèse d'un contrôleur dynamique pour systèmes discrets incertains.

Tout comme pour le cas nominal, pour déterminer le contrôleur robuste, seulement la sortie et les valeurs extrêmes des états non mesurés, ont été utilisées. La solution est obtenue par minimisation d'une borne supérieure du coût pour toutes les réalisations du système dans son domaine d'incertitude.

Pour la conception du contrôleur on a obtenu un ensemble d'inégalités matricielles. Dû au fait que celles-ci n'étaient pas linéaires, on n'a pas pu utiliser directement les outils de solution de LMIs. Toutefois dans le cas borné en norme, la non linéarité provenant d'un produit de scalaire on a pu proposer, par recherche monodirectionnelle sur un de ces scalaires à approcher la solution en résolvant un nombre fini de problèmes LMI. Ceci conduit, bien sûr, à une augmentation de volume et, donc, de temps de calcul ce qui fait qu'on ne puisse réellement envisager l'application de l'approche qu'à des systèmes dynamiques relativement lents, et de taille raisonnable. Ceci est également vrai pour le cas d'incertitude structurée de type polytopique où la complexité est renforcée par le fait que l'on doit résoudre des problèmes BMI.

Chapitre 6

MPC robuste basé LMI's (modèle entrée-sortie)

Dans ce chapitre, est reprise la synthèse d'un contrôleur robuste prédictif (méthodologie MPC) à partir d'une modélisation entrée-sortie incertaine. A chaque instant d'échantillonnage, on effectue le calcul de la commande par la minimisation d'une borne supérieure d'une fonction objectif d'horizon infini avec l'aide d'inégalités linéaires matricielles (LMI).

A partir du modèle entrée-sortie, est écrit un modèle "d'état" où les états sont définis en fonction de la sortie actuelle et d'un nombre de sorties et de commandes antérieures. La commande est obtenue alors comme une fonction des mesures actuelles et de mesures ou signaux d'entrée connus et s'affranchit, dans ce cas, de toute estimation ou de toute hypothèse à effectuer sur les états non mesurés, comme il est nécessaire dans la modélisation d'état "classique".

La méthodologie est illustrée au moyen de deux exemples numériques.

6.1 Introduction

Le modèle de départ considéré dans ce chapitre est un modèle type transfert (entrée-sortie) sur lequel sera définie une incertitude de type intervalle sur tout ou partie des coefficients intervenant dans le transfert. Un modèle d'état est déterminé à partir du transfert (Kailath. 1980), modèle observable et avec incertitude polytopique. Le modèle présente l'avantage de la connaissance de l'état global constitué d'états mesures et de signaux de sortie ou d'entrée antérieures. Il est ainsi possible d'utiliser des algorithmes de conception de contrôleurs de retour d'états MPC robustes. Il en existe plusieurs dans la bibliographie, par exemple celui proposé dans Kothare, Balakrishnan et Morari (1996), et qui a été la base pour la conception des méthodes développées dans les chapitres précédents.

Dans l'approche quadratique classique (celle utilisée par Kothare, Balakrishnan et Morari 1996), le problème d'optimisation, de type coût garanti, est conduit avec une

matrice "de Lyapunov" unique pour toutes les réalisations du système dans son domaine d'incertitude. Des travaux récents (De Oliveira, Bernussou et Geromel, 1999) ont permis de réduire le conservatisme de l'approche quadratique en définissant des conditions moins restrictives dites (selon les auteurs) avec fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres, ou avec relations augmentées, faisant intervenir des variables d'écart. La réduction du conservatisme est dû au fait qu'avec ces nouvelles conditions, il y a un découplage formel entre la matrice de Lyapunov et les matrices qui définissent le gain de commande.

Dans le cadre de l'approche MPC qui est l'objet de la thèse, ce type de résultats a été déjà utilisé dans Cuzzola, Geromel et Morari (2002), mais de manière erronée car appliquant des résultats valables pour des systèmes incertains invariant dans le temps au cas de systèmes incertains variant dans le temps. C'est néanmoins l'approche qui sera poursuivie avec la modélisation d'état découlant de la représentation entrée-sortie.

Sera également présentée une extension du calcul de la commande pour le cas de systèmes variants dans le temps, pour cela on utilisera les résultats montrés en Mao (2003) qui se base les résultats De Oliveira, Bernussou et Geromel (1999) et Daafouz et Bernussou (2001).

6.2 Position du problème

Soit le système linéaire incertain discret décrit par le transfert suivant:

$$y(k) = \alpha(z^{-1})^{-1} \beta(z^{-1}) z^{-1} u(k), \quad (6.1)$$

où $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ et $y(k) \in \mathfrak{R}^q$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système, et

$$\begin{aligned} \alpha(z^{-1}) &= I_q + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_{n_a} z^{-n_a} \\ \beta(z^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_{n_b} z^{-n_b} \end{aligned} \quad (6.2)$$

où α_i sont des matrices $q \times q$ et β_j des matrices $q \times m$. Pour chacune de ces matrices est défini un domaine d'incertitude polytopique Γ .

$$\alpha_i \in \Gamma_{\alpha_i} ; \beta_j \in \Gamma_{\beta_j} \quad (6.3)$$

où

$$\Gamma_{\alpha_i} := Co\{\alpha_{i1} \quad \alpha_{i2} \quad \dots \quad \alpha_{iN_{\alpha_i}}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n_a \quad (6.4)$$

et

$$\Gamma_{\beta_j} := Co\{\beta_{j1} \quad \beta_{j2} \quad \dots \quad \beta_{jN_{\beta_j}}\}, \quad j = 1, 2, \dots, n_b. \quad (6.5)$$

L'objectif de conception consiste à trouver en chaque instant d'échantillonnage k , une loi de commande linéaire qui stabilise le système incertain (6.1), par la minimisation d'un

critère quadratique sous contraintes, qui sera défini ultérieurement, et en utilisant uniquement la sortie du système.

La Figure 6.1, montre le schéma de commande proposé. Comme il peut être observé, la stratégie correspond au cas MPC classique où l'optimiseur calcule directement, à chaque instant d'échantillonnage k , la loi de commande.

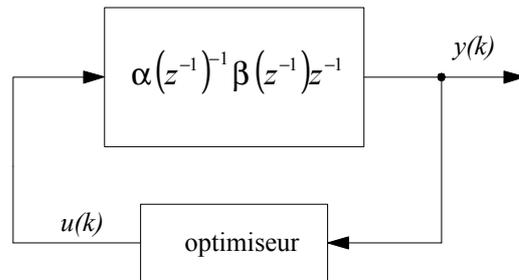


Figure 6.1. Schéma du système commandé proposé.

6.2.1 Représentation d'états (équivalents)

Le système décrit par l'équation (6.1) peut être exprimé par l'équation aux différences suivante:

$$y(k) + \sum_{i=1}^{na} \alpha_i y(k-i) = \sum_{i=1}^{nb+1} \beta_{i-1} u(k-i). \quad (6.6)$$

Une manière d'obtenir une forme d'espace d'état pour le modèle précédent est en définissant le vecteur d'état à partir des entrées et des sorties passées (Camacho et Bordons, 1998 et Maciejowski, 2002):

$$\tilde{x}(k) = [y(k)^T \ y(k-1)^T \ \dots \ y(k-na+1)^T \ u(k-1)^T \ u(k-2)^T \ \dots \ u(k-nb-1)^T]^T, \quad (6.7)$$

alors la représentation d'état équivalente est définie par:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) \end{aligned} \quad (6.8)$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} &= \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{na-1} & -\alpha_{na} & \beta_1 & \cdots & \beta_{nb-1} & \beta_{nb} \\ I_q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_q & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & 0 \end{bmatrix}, \\
 \tilde{B} &= [\beta_0^T \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ I_m \ 0 \ \cdots \ 0]^T, \\
 \tilde{C} &= [I_q \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0]
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Le domaine d'incertitude est un domaine polyhedral:

$$[\tilde{A} | \tilde{B}] \in \Omega \tag{6.10}$$

où

$$\Omega := \text{Co}\{[\tilde{A}_1 | \tilde{B}_1], [\tilde{A}_2 | \tilde{B}_2], \dots, [\tilde{A}_N | \tilde{B}_N]\}. \tag{6.11}$$

Les sommets \tilde{A}_i, \tilde{B}_i sont définis comme combinaison des sommets de Γ_{α_i} et Γ_{β_j} . N est le nombre de ces sommets défini en fonction des $(n_{\alpha_i}, i = 1, 2, \dots, n_a)$, $(n_{\beta_j}, j = 1, 2, \dots, n_b)$. Ainsi, le couple $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ est une combinaison linéaire convexe des sommets:

$$\lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^N \lambda_j = 1, [\tilde{A} | \tilde{B}] = \sum_{j=1}^N \lambda_j [\tilde{A}_j | \tilde{B}_j]. \tag{6.12}$$

L'avantage de la sélection d'état indiquée dans (6.7) est que, les entrées et les sorties passées sont connues.

Le problème de synthèse du contrôleur se définit par la détermination, à chaque instant d'échantillonnage, d'une loi de commande, par retour d'état $[u(k) = K_C(k)\tilde{x}(k)]$ pour le nouveau système équivalent $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$.

6.2.2 Fonction objectif

Tout comme dans les chapitres précédents, on considérera une fonction objectif d'horizon infini:

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{x}(k+i/k)^T Q \tilde{x}(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k)), \quad Q > 0, R > 0 \tag{6.13}$$

et une fonction quadratique:

$$V_L(i, k) = \tilde{x}(k+i/k)^T S(k) \tilde{x}(k+i/k), \quad S(k) > 0 \quad (6.14)$$

Une borne supérieure de la fonction de coût $J_\infty(k)$ est obtenue, comme précédemment en vérifiant l'inégalité suivante:

$$V_L(i+1, k) - V_L(i, k) \leq -\left(\tilde{x}(k+i/k)^T Q \tilde{x}(k+i/k) + u(k+i/k)^T R u(k+i/k)\right), \quad (6.15)$$

$$\forall [\tilde{A} \mid \tilde{B}] \in \Omega$$

En sommant (6.15) depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$, on obtient

$$\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \Omega \quad J_\infty(k) \leq V_L(0, k). \quad (6.16)$$

où

$$V_L(0, k) = \tilde{x}(k/k)^T S(k) \tilde{x}(k/k). \quad (6.17)$$

L'algorithme à définir est celui de la détermination d'une loi de commande de retour d'état qui assure la décroissance de $V_L(0, k)$ en satisfaisant l'équation (6.15) (ceci quelque soit la réalisation de \tilde{A}, \tilde{B} dans le domaine d'incertitude)

6.2.3 Définition de contraintes

Les restrictions sur l'entrée ($u(k)$) et la sortie ($y(k)$), sont définies, comme précédemment par:

$$\|u(k+i/k)\|_2 \leq u_{\max}, \quad i \geq 0 \quad (6.18)$$

et

$$\|y(k+i/k)\|_2 \leq y_{\max}, \quad i \geq 1. \quad (6.19)$$

6.3 Conception du contrôleur quadratique

Le théorème suivant donne les conditions d'existence du contrôleur souhaité.

Théorème 6.1. *Le système incertain de temps discret (6.1) est robustement stabilisable, tout en minimisant une borne supérieure du coût quadratique sous contraintes, s'il existe les matrices $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ et $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et des matrices symétriques définies positives $\tilde{S}_j \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ solutions du problème suivant:*

$$\min \gamma \quad (6.20)$$

sous

$$\begin{bmatrix} \tilde{S}_j & \tilde{x}(k/k) \\ \tilde{x}(k/k)^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad (6.21)$$

$$\begin{bmatrix} G+G^T-\tilde{S}_j & G^T\tilde{A}_j^T+Y^T\tilde{B}_j^T & G^T\hat{Q}^{1/2} & Y^TR^{1/2} \\ \tilde{A}_jG+\tilde{B}_jY & \tilde{S}_j & 0 & 0 \\ \hat{Q}^{1/2}G & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \forall j=1,\dots,N, \quad (6.22)$$

$$\begin{bmatrix} G+G^T-\tilde{S}_j & Y^T \\ Y & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \forall j=1,\dots,N, \quad (6.23)$$

$$\begin{bmatrix} G+G^T-\tilde{S}_j & (\tilde{A}_jG+\tilde{B}_jY)^T\tilde{C}^T \\ C(\tilde{A}_jG+\tilde{B}_jY) & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \forall j=1,\dots,N. \quad (6.24)$$

□

La matrice de retour d'état est donnée par $K_C(k) = YG^{-1}$.

Remarque 6.1. Les variables $\gamma, Y, G, \tilde{S}_j$ dans le problème d'optimisation devraient être dénotées $\gamma_k, Y_k, G_k, \tilde{S}_{j,k}$ pour souligner qu'elles sont calculées à chaque instant k . Pour alléger les notations, on a omis les indices.

•

Remarque 6.2. Au moment $k=0$, on peut assigner pour la condition initiale des entrées u (dans le vecteur d'état \tilde{x}), toute valeur dans l'intervalle $[0, u_{\max}]$ garantissant la faisabilité.

•

Dans les sections suivantes est détaillée la démonstration du Théorème 6.1.

6.3.1 Fonction objectif et ellipsoïde initial

Pour une réalisation de la paire incertaine (\tilde{A}, \tilde{B}) , c'est à dire, pour une réalisation du vecteur des paramètres λ_j , la fonction quadratique $V_L(i, k)$ est:

$$V_L(i, k) = \tilde{x}(k+i/k)^T \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j S_j \right] \tilde{x}(k+i/k). \quad (6.25)$$

Ainsi la minimisation de γ sous les contraintes (6.21) ($\tilde{S}_j = \gamma S_j^{-1}$) et le fait que ces contraintes soient linéaires par rapport à \tilde{S}_j conduit à:

$$V_L(0, k) = \tilde{x}(k/k)^T \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j S_j \right] \tilde{x}(k/k) < \gamma \quad (6.26)$$

ce qui définit sur \tilde{x} un ellipsoïde invariant. ■

6.3.2 Contrôleur robuste stabilisant

L'élément {1.1} de l'inégalité (6.22) implique:

$$G + G^T - \tilde{S}_j > 0. \quad (6.27)$$

Du au fait que $\tilde{S}_j > 0$ alors G est de rang plein, donc:

$$(G - \tilde{S}_j)^T \tilde{S}_j^{-1} (G - \tilde{S}_j) \geq 0 \quad (6.28)$$

ou manière équivalente

$$G^T \tilde{S}_j^{-1} G \geq G^T + G - \tilde{S}_j > 0 \quad (6.29)$$

En prenant en considération (6.29) et $Y = K_c(k)G$, (6.22) implique:

$$\begin{bmatrix} G^T \tilde{S}_j^{-1} G & G^T (\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k))^T & G^T Q^{1/2} \gamma^{-1/2} & G^T K_c(k)^T R^{1/2} \gamma^{-1/2} \\ (\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k))G & \tilde{S}_j & 0 & 0 \\ \gamma^{-1/2} Q^{1/2} G & 0 & I & 0 \\ \gamma^{-1/2} R^{1/2} K_c(k)G & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.30)$$

laquelle est équivalente à:

$$\begin{aligned} & \text{diag}(\gamma^{-1/2} G^T, \gamma^{1/2} \tilde{S}_j, I, I) \\ & * \begin{bmatrix} \gamma \tilde{S}_j^{-1} & (\tilde{A}_j^T + K_c(k)^T \tilde{B}_j^T) \gamma \tilde{S}_j^{-1} & Q^{1/2} & K_c(k)^T R^{1/2} \\ \gamma \tilde{S}_j^{-1} (\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k)) & \gamma \tilde{S}_j^{-1} & 0 & 0 \\ Q^{1/2} & 0 & I & 0 \\ R^{1/2} K_c(k) & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ & * \text{diag}(\gamma^{-1/2} G^T, \gamma^{1/2} \tilde{S}_j, I, I) > 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

de $S_j = \gamma \tilde{S}_j^{-1}$ on a:

$$\begin{bmatrix} S_j & (\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k))^T S_j & Q^{1/2} & K_c(k)^T R^{1/2} \\ S_j (\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k)) & S_j & 0 & 0 \\ Q^{1/2} & 0 & I & 0 \\ R^{1/2} K_c(k) & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \forall j = 1, \dots, N, \quad (6.32)$$

En appliquant le complément de Schur à l'inégalité il vient

$$(\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k))^T S_j (\tilde{A}_j + \tilde{B}_j K_c(k)) - S_j + Q + K_c(k)^T R K_c(k) < 0, \quad (6.33)$$

ce qui satisfait la condition (6.15). ■

6.3.3 Contraintes sur l'entrée et sur la sortie

Pour tous les systèmes $[\tilde{A}_j | \tilde{B}_j], \forall j=1,2,\dots,N$, qui représentent les sommets de l'ensemble polyédrique Ω (voir (6.11)), doivent être satisfaites les contraintes sur l'entrée et sur la sortie.

6.3.3.1 Contraintes sur l'entrée

A l'instant k , on considère la contrainte de type norme euclidienne $\|u(k+i/k)\|_2 \leq u_{\max}, i \geq 0$. La contrainte est imposée à l'instant actuel ($i=0$) et sur l'horizon de contrôle futur ($i > 0$), (même si l'on emploie seulement le premier élément du vecteur de contrôle $u(k/k) = u(k)$):

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|u(k+i/k)\|_2^2 &= \max_{i \geq 0} \|K_C(k)\tilde{x}(k+i/k)\|_2^2 \\ &\leq \max_{z \in \mathcal{E}} \|K_C(k)z\|_2^2 \\ &= \lambda_{\max} \left(\tilde{S}^{1/2} K_C(k)^T K_C(k) \tilde{S}^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

En exprimant l'inégalité précédente sous forme de LMI, on a:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{S} K_C(k)^T \\ K_C(k) \tilde{S} & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (6.35)$$

Si l'inégalité précédente est multipliée à gauche par $blockdiag[G^T S^{-1}, I]$ et à droite par $blockdiag[S^{-1}G, I]$, on a:

$$\begin{bmatrix} G^T \tilde{S}^{-1} G & G^T K_C(k)^T \\ K_C(k) G & u_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (6.36)$$

En utilisant $Y = K_C(k)G$ et (6.29) dans l'inégalité précédente, on obtient la condition (6.23).

La condition précédente doit être remplie pour toute réalisation de \tilde{S} associée à un système dans l'ensemble incertain. \tilde{S} peut être obtenue comme la combinaison convexe des matrices $\tilde{S}_j, (j=1,\dots,N)$ associée à chaque sommet du polytop.

■

6.3.3.2 Contraintes sur la sortie

A l'instant k , on considère la contrainte de type norme euclidienne $\|y(k+i/k)\|_2 \leq y_{\max}, i \geq 1$, on a:

$$\begin{aligned} \max_{i \geq 0} \|y(k+i+1/k)\|_2^2 &= \max_{i \geq 0} \|\tilde{C}(\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k))\tilde{x}(k+i/k)\|_2^2, \quad i \geq 0 \\ &\leq \max_{z \in \mathbb{E}} \|\tilde{C}(\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k))z\|_2^2, \\ &= \lambda_{\max} \left(\tilde{S}^{1/2} (\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k))^T \tilde{C}^T \tilde{C} (\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k)) \tilde{S}^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (6.37)$$

En exprimant l'inégalité précédente sous forme de LMI, on a:

$$\begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{S} (\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k))^T \tilde{C}^T \\ \tilde{C} (\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k)) \tilde{S} & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (6.38)$$

Si l'inégalité précédente est multipliée à gauche par $blockdiag[G^T S^{-1}, I]$ et à droite par $blockdiag[S^{-1}G, I]$, on a:

$$\begin{bmatrix} G^T \tilde{S}^{-1} G & G^T (\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k))^T \tilde{C}^T \\ \tilde{C} (\tilde{A} + \tilde{B}K_c(k)) G & y_{\max}^2 I \end{bmatrix} > 0, \quad (6.39)$$

En utilisant $Y = K_c(k)G$ et (6.29) dans l'inégalité précédente, on obtient la condition (6.24).

La condition précédente doit être remplie pour toute réalisation de \tilde{S} associée à un système dans l'ensemble incertain. \tilde{S} peut être obtenue comme la combinaison convexe des matrices $\tilde{S}_j, (j = 1, \dots, N)$ associée à chaque sommet du polytop.

■

Remarque 6.3. Si on considère que les matrices $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ du système (6.8) sont variantes dans le temps, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(k)\tilde{x}(k) + \tilde{B}(k)u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}\tilde{x}(k) \end{aligned} \quad (6.40)$$

$\forall k (\tilde{A}(k), \tilde{B}(k)) \in \Omega$; alors la condition (6.22) du Théorème 6.1, doit être remplacée par :

$$\begin{bmatrix} G + G^T - \tilde{S}_j & G^T \tilde{A}_j^T + Y^T \tilde{B}_j^T & G^T \hat{Q}^{1/2} & Y^T R^{1/2} \\ \tilde{A}_j G + \tilde{B}_j Y & \tilde{S}_i & 0 & 0 \\ \hat{Q}^{1/2} G & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall j = 1, \dots, N, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (6.41)$$

Pour plus de détails, se référer à: Mao (2003), Oliveira, Bernussou et Geromel (1999) et Daafouz et Bernussou (2001).

•

6.4 Exemples numériques

Deux exemples numériques sont présentés pour illustrer les résultats du chapitre. Les simulations ont été effectuées en utilisant Matlab®, et pour le calcul de la commande on utilise la toolbox de LMI.

6.4.1 Premier exemple (système SISO)

L'exemple monovariante suivant du quatrième ordre, correspond au système "benchmark" dans Kothare, Balakrishnan et de Morari, 1996 (utilisé dans les chapitres précédents), et qui est composé de deux masses et un ressort comme il est illustré dans la Figure 6.2.

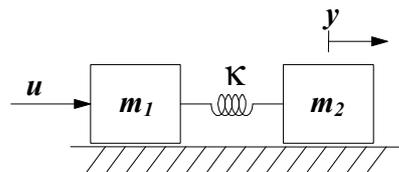


Figure 6.2. Système deux masse- ressort.

Le système incertain est représenté par la fonction de transfert suivante:

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{(0.0001\kappa)z^{-4}}{1 - 4z^{-1} + (6 + 0.2\kappa)z^{-2} - (4 + 0.4\kappa)z^{-3} + (1 + 0.2\kappa)z^{-4}}.$$

On supposera que l'incertitude sur κ a une valeur contenue dans l'intervalle: $0.75 \leq \kappa \leq 1.25$. En outre, seront utilisés les paramètres suivants $Q = I$, $R = 1$ et on considère qu'à l'instant initial le système a une valeur de sortie de $y(k) = 0.25, \forall k < 0$ et une valeur d'entrée $u(k) = 0, \forall k < 0$; avec cette considération, on obtient la condition initiale des états du système $\tilde{x}(0) = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

On exécute l'algorithme proposé avec les valeurs de contraintes suivantes: $u_{\max} = 1$ et $y_{\max} = 1$.

Dans la Figure 6.3 est donnée la réponse temporelle du système commandé pour le système nominal ($\kappa(k) = 1$) et pour les deux systèmes "extrêmes" ($\kappa = 0.75$ et $\kappa(k) = 1.25$).

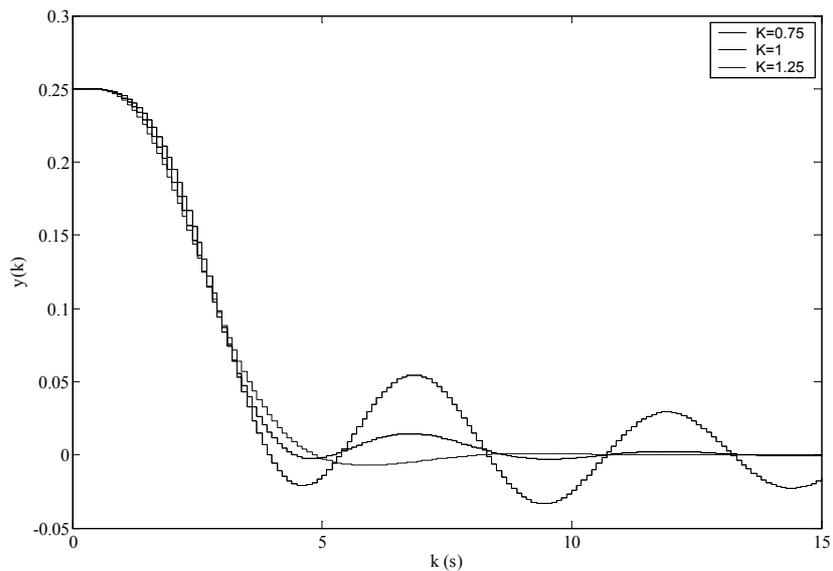


Figure 6.3. Réponse temporelle de la sortie du système pour $\kappa=0.75, 1, 1.25$.

Il peut être vérifié un comportement stable pour les réalisations choisies dans le domaine d'incertitude.

6.4.2 Second exemple (système MIMO)

L'exemple multivariable suivant correspond à un système emprunté dans Camacho et Bordons (1998) à auquel il a été fait une légère modification pour pouvoir appliquer la méthode proposée. Le système consiste en un réacteur chimique avec chemise de refroidissement. La décomposition d'un produit A en un autre produit B se produit dans le réacteur (voir Figure 6.4.). La réaction est exothermique et par conséquent la température doit être contrôlée par circulation d'eau à travers la chemise de refroidissement qui entoure les parois du réservoir. L'objectif est de régler la température dans le réservoir (T_R) et la concentration du produit en sortie (C_A).

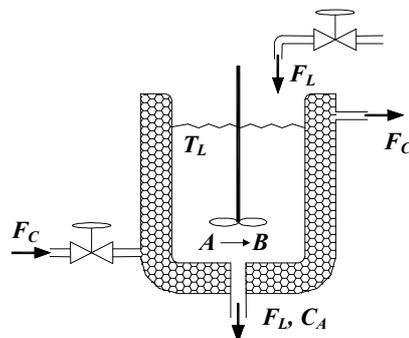


Figure 6.4. Réacteur.

Le modèle est décrit par la matrice de transfert suivante:

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.0420\kappa z^{-1}}{1-0.958z^{-1}} & \frac{0.4758\kappa z^{-1}}{1-0.9048z^{-1}} \\ \frac{0.0582\kappa z^{-1}}{1-0.9418z^{-1}} & \frac{0.1445\kappa z^{-1}}{1-0.9277z^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix}.$$

où les variables manipulées u_1 et u_2 sont les flux d'alimentation (F_L) et le flux de refroidissement dans la chemise (F_C) respectivement. Les variables contrôlées y_1 et y_2 sont la concentration du produit en sortie (C_A) et la température dans le réacteur (T_R) respectivement.

On supposera que l'incertitude a une valeur contenue dans l'intervalle: $0.5 \leq \kappa \leq 2$. En outre, sont utilisés les paramètres suivants $Q = I$, $R = 1$ et la condition initiale des états du système est fixée à $\tilde{x}(0) = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$.

On exécute l'algorithme proposé avec les valeurs de contraintes suivantes: $u_{\max} = 1$ et $y_{\max} = 1$.

La matrice $A(z^{-1})$ peut être obtenue en construisant une matrice diagonale dont les éléments sont égaux au plus petit commun multiple des dénominateurs de chaque ligne:

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 1-1.8629z^{-1} + 0.8669z^{-2} & 0 \\ 0 & 1-1.8695z^{-1} + 0.8737z^{-2} \end{bmatrix}$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.0420\kappa - 0.0380\kappa z^{-1} & 0.4758\kappa - 0.4559\kappa z^{-1} \\ 0.0582\kappa - 0.0540\kappa z^{-1} & 0.1445\kappa - 0.1361\kappa z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Dans les Figure 6.5 et Figure 6.6 sont données les réponses temporelles du système commandé pour le système nominal ($\kappa(k) = 1$) et pour les deux systèmes "extrêmes" ($\kappa = 0.5$ et $\kappa = 2$).

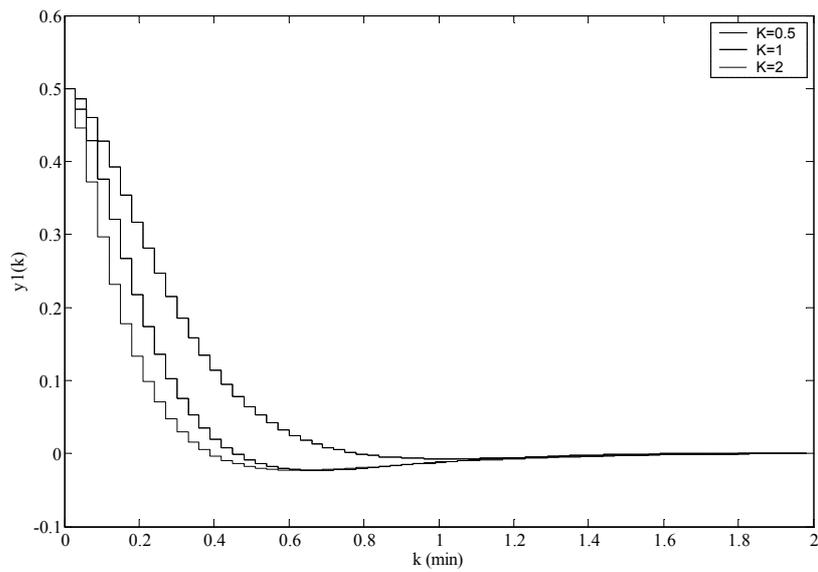


Figure 6.5. Réponse temporelle de la sortie y_1 pour $\kappa=0.5, 1, 2$.

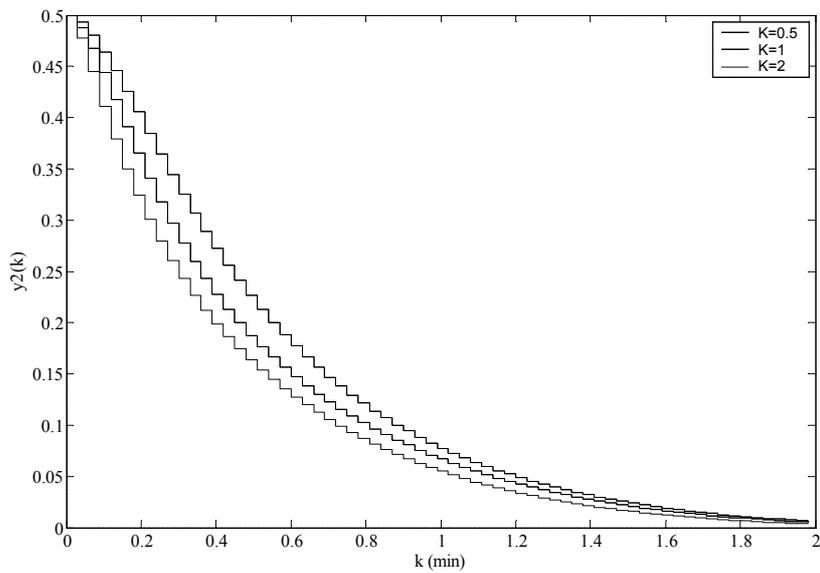


Figure 6.6. Réponse temporelle de la sortie y_2 pour $\kappa=0.5, 1, 2$.

Il peut être vérifié un comportement stable et semblable pour les réalisations choisies dans le domaine d'incertitude, ce qui est en accord avec la synthèse robuste effectuée.

Le Figure 6.7 montre la réponse de la borne supérieure de la fonction objectif qui est décroissante, comme attendu.

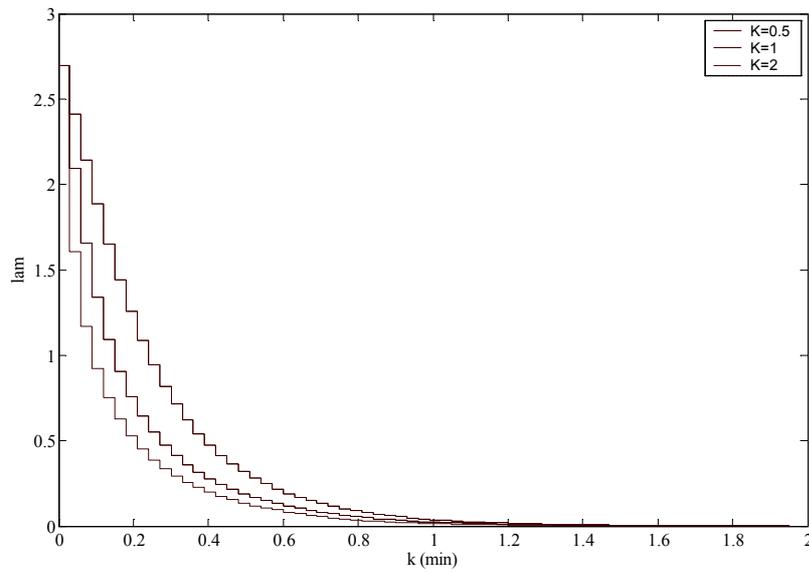


Figure 6.7. Réponse de la borne supérieure de la fonction objectif.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre a été présentée une méthode qui permet d'effectuer la conception d'un contrôleur MPC de retour de sortie pour systèmes discrets incertains, à incertitude polytopique.

La nouvelle condition de stabilité permet d'éviter l'inconvénient de devoir déterminer une seule matrice de Lyapunov pour tout le domaine d'incertitude.

L'efficacité de la méthode proposée a été vérifiée au moyen de deux exemples numériques. Par simulation, est vérifié le bon comportement du système de commande.

Conclusions générale

Durant ces dernières années la méthodologie de commande prédictive a connu un développement important, et comme il a été rappelé dans ce travail, ceci est dû au fait que sa formulation permet d'inclure de manière explicite des contraintes sur les variables du système pendant la conception du contrôleur. En outre, la commande prédictive est facile à implanter et simple à comprendre par des personnes avec de faibles connaissances en commande.

De plus, comme il a été expliqué dans le chapitre introductif, cette méthodologie présente la vertu de pouvoir être appliquée à des systèmes avec dynamique difficile, par exemple, ceux à comportement de phase non minimale ou instables; il permet en outre de traiter des systèmes multivariables et non linéaires, et incorpore de manière naturelle la compensation par anticipation "feedforward" et compensation de systèmes avec de grands retards.

Autre domaine d'actualité de grand intérêt et d'importance durant ces dernières années, a été la théorie de conception de contrôleurs robustes satisfaisant des exigences de stabilité et de performance pour un système, c'est-à-dire, de contrôleurs qui maintiennent ces exigences, non seulement pour les valeurs nominales, mais également pour les situations où le système est à modélisation incertaine et soumis à de fortes perturbations.

Ce travail, se situe à l'interface de ces deux théories, puisque y sont développées des techniques de maîtrise de systèmes linéaires incertains sur la base de la méthodologie de commande prédictive.

La synthèse passe par l'utilisation des inégalités linéaires matricielles (LMI) puisqu'il existe des algorithmes puissants et des programmes commerciaux, qui permettent d'obtenir la solution du problème en un temps polynomial, parfois comparable à ce qui est nécessaire pour obtenir la solution analytique d'un problème semblable. Ceci fait que l'optimisation par la solution de LMI puisse être faite en ligne ce qui s'avère essentiel pour l'approche MPC. En outre, cette formulation permet d'utiliser beaucoup de résultats de problèmes de commande robuste développés sous le sceau de la théorie de LMIs.

Il existe beaucoup de travaux de commande prédictive qui résolvent le problème de stabilisation de systèmes linéaires incertains avec retour d'états, toutefois, peu sont ceux qui traitent du cas de retour de sortie, pourtant très important au plan pratique. En effet il n'est pas toujours possible d'avoir accès aux états, et, ce travail a été consacré au développement de stratégies qui permettent de résoudre le problème de commande prédictive robuste quand l'état global n'est pas accessible à la mesure.

La synthèse des contrôleurs est réalisée à partir de la mesure à chaque pas de la sortie du processus à commander associée à une connaissance supposée, a priori, sur les états non mesurés, connaissance de type incertitude avec la définition du domaine d'appartenance initial ou connaissance de type statistique (moyenne, variance) sur les états non mesurés initiaux.

Sont présentées des approches systématiques pour la synthèse de contrôleurs prédictifs de retour de la sortie.

Dans tous les cas, on calcule la loi de commande par minimisation d'une borne supérieure de la fonction objectif d'horizon infini avec des restrictions sur l'entrée et la sortie. La conception est réduite à la solution d'un problème d'optimisation convexe à base d'inégalités matricielles linéaires, il est montré que stratégie proposée assure la stabilité du système.

Dans le chapitre quatre, le calcul de la loi de commande a été faite, pour le cas de systèmes sans incertitude sur ses paramètres, et avec une hypothèse de domaine d'incertitude polyédrique, pour les états non mesurés. Est obtenu un problème analogue à celui de la commande robuste. L'analyse de la stabilité est de type stabilité quadratique qui est liée à l'existence d'une matrice de Lyapunov commune à toutes les représentations possibles du système incertain.

Dans le chapitre cinq, on a développé une procédure semblable à ce qui précède a été développé mais, pour le cas de systèmes avec incertitude paramétrique.

L'incertitude des systèmes est d'abord modélisée sous la forme bornée en norme ce qui permet de décrire une grande quantité d'incertitudes, de façon convexe. Le problème d'optimisation associé demande une recherche monodimensionnelle pour du minimum, recherche qui, bien sûr, altère la rapidité de l'algorithme.

Pour le cas d'incertitudes polyédriques, à chaque itération est défini un problème de minimisation soumis à des restrictions bi linéaires, ce qui fait qu'il n'est pas possible d'utiliser directement des techniques d'optimisation LMI pour la synthèse du contrôleur. Toutefois, le problème peut être résolu de manière itérative (ILMI). La conséquence de ceci est que le cas d'incertitude polytopique conduit à des volumes de calcul qui sont relativement pénalisants, pour une utilisation en ligne et ne sont raisonnablement envisageables que dans des cas de dynamique très lente ou dans le cas d'un faible nombre de paramètres incertains.

Ainsi, la méthodologie expliquée dans ce travail constitue une contribution au secteur de commande prédictive robuste.

Le dernier chapitre, est consacré à la synthèse d'un contrôleur robuste prédictif à partir d'une modélisation entrée-sortie incertaine; à partir de celle-ci s'écrit un modèle "d'état" où les états sont définis en fonction de la sortie actuelle et d'un nombre de sorties et de commandes passées. Ceci permet de s'affranchir de toute estimation ou de toute hypothèse à effectuer sur les états non mesurés. Il est ainsi possible d'utiliser des algorithmes de conception de contrôleurs MPC robustes par retour d'état.

Un algorithme est développé qui s'appuie sur des conditions récentes de fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres et qui conduit à des résultats moins conservatifs qu'avec l'approche quadratique. Avec la nouvelle condition on obtient des matrices de Lyapunov associées à chaque sommet du polytope d'incertitude, ceci permet d'éviter l'inconvénient de devoir utiliser une seule matrice de Lyapunov pour tout le domaine d'incertitude (hypothèse classique quadratique).

Les approches proposées permettent d'inclure de manière relativement aisée, des spécifications de performances sous forme de LMI (placement pôles, contraintes H_2 , H_∞ , etc.).

Des résultats d'expérimentation numérique montrent la viabilité de l'approche proposée.

Le domaine de la commande prédictive est un domaine toujours très vivant et de nombreuses contributions sont faites régulièrement, preuve aussi que les perspectives sont nombreuses. Pour ce qui concerne ce travail deux propositions nous paraissent intéressantes pour la suite.

La première concerne l'extension de l'idée de modélisation du chapitre 6 au cas de modélisation espace d'état (et non à partir d'une représentation entrée-sortie). Il est très probable que ce type de développement conduisant à une commande par retour d'état étendu équivalente à une commande par retour de sortie pour le modèle initial puisse être étendu sous l'hypothèse d'observabilité.

L'expression des contraintes sur la commande et la sortie sous forme de inégalités linéaires matricielles est une opération où intervient un fort degré de conservatisme, de suffisance. Une manière de diminuer cela serait de décomposer l'horizon d'optimisation en une première période (courte, de quelques échantillons) suivie d'une partie traitée conventionnellement par approche quadratique comme dans Kothare, Balakrishnan et Morari (1996) pour le cas retour d'état et comme dans les chapitres 4 ou 5 pour le cas de retour de sortie. Sur l'horizon court, il devrait être possible d'utiliser pour chaque échantillon des matrices de Lyapunov différentes permettant une meilleure évaluation des ellipsoïdes invariants à chaque itération de l'algorithme prédictive conduisant à une meilleure prise en compte des contraintes (qui bien sûr doivent être moins "dures" à

satisfaisant au fur et à mesure que le temps passe). Ceci constitue la deuxième piste de recherche ultérieure.

Références bibliographiques

- Alizadeh, F., Haeberly, J-P. A. et Overton, M. L. (1998). Primal-Dual Interior-Point Methods for Semidefinite Programming: Convergence Rates, Stability and Numerical Results. *SIAM Journal on Optimization*, vol 8, pags. 746-768.
- Allwright, J. C. et Papavasiliou G. C. (1992). On linear programming and robust model-predictive control using impulse-responses. *Systems & Control Letters.*, vol 18, pags. 159-164.
- Anderson, B. et Moore, J. (1990). *Optimal control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, USA.
- Åström, K. J. et Wittenmark, B. (1989). *Adaptive Control*, Addison Wesley, USA.
- Barmish, B.R. (1983). Stabilization of Uncertain Systems via Linear control, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 28, pags. 848-850.
- Barmish, B.R. (1985). Necessary and Sufficient Conditions for the Quadratic Stability of an Uncertain System, *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 46, No. 4, pags. 399-408.
- Bemporad, A., Morari, M., Dua, V. et Pistikopoulos, E. N. (2002). The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, vol. 38, pags. 3-20.
- Bernussou, J., Peres, P. L. et Geromel, J. C. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain system, *System & Control Letters*, vol. 13, pp. 65-72.
- Bernussou, J. (1996). *Commande robuste*, Hermès, France.

- Bitmead, R. R., Gevers, M. et Wertz, V. (1990). *Adaptive Optimal Control*. Prentice Hall, USA.
- Blanchini, F. (1999). Set invariance in control. *Automatica*, vol 35, pags. 1747-1767.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, vol 15.
- Camacho, E. F. et Bordons, C. (1998). *Model Predictive Control in the process industry*. Springer, London.
- Campo, P. J. et Morari, M. (1986). ∞ -norm formulation of model predictive control problems. *Proceedings of the American Control Conference*, Seattle, pags. 339-343.
- Campo, P. J. et Morari, M. (1987). Robust model predictive control. *Proceedings of the American Control Conference*, Minneapolis, pags. 1021-1026.
- Chang, S. S. L. et Peng, T. K. C. (1972). Adaptive guaranteed cost control systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 17, pags. 474-483.
- Chmielewski, D. et Manousiouthakis, V. (1996). On constrained infinite-time linear quadratic optimal control. *System & Control Letters*, vol. 29, pags. 121-130.
- Clarke, D. W. et Mohtadi, C. (1989). Properties of Generalized Predictive Control. *Automatica*, vol. 25, pags. 859-875.
- Clarke, D. W., Mohtadi, C. et Tuffs, P. S. (1987). Generalized Predictive Control. Part I. The Basic Algorithm, *Automatica*, vol. 23, pags. 137-148
- Clarke, D. W., Mosca, E. et Scattolini, R. (1991). Robustness of an Adaptive Predictive Controller. *Proceedings of the 30th Conferences on Decision on Control*, pags. 979-984, Brighton, England.
- Clarke, D. W. et Scattolini, R. (1991). Constrained Receding-Horizon Predictive Control. *Proceedings IEE, Part D*, vol. 138, pags. 347-354.
- Colmenares, W., Tadeo, F., Granado, E., Pérez, O. et Del Valle, F. (2000). H2 Guaranteed Cost Control of Discrete Linear Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, vol 6, pags. 425-437.
- Courties, Ch. (1999). *Sur la commande robuste et L.P.V. de systèmes a paramètres lentement variables*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse, France.

- Cutler, C. R. et Ramaker, B. C. (1980). Dynamic Matrix Control – a Computer Control Algorithm. *Proceedings of the Automatic Control Conference*, San Francisco.
- Cuzzola, F., Geromel, J. C. et Morari, M. (2002). An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, vol. 38, pags. 1183-1189.
- Daafouz, J. et Bernussou, J. (2001). Parameter-dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*, vol. 43, pags. 355-359.
- Dahleh, M. et Diaz, I. (1995). *Control of uncertain Systems*, Prentice Hall, Inc., USA.
- De Keyser, R. M. C. (1988). A Gentle Introduction to Model Based Predictive Control. *Proceedings of the International Conference on Control Engineering and Signal Processing*, Peru.
- De Keyser, R. M. C. et Van Cauwenberghe, A. (1979). A self-tuning multistep predictor application. *Automatica*, vol. 15, pags. 167-174.
- De Keyser, R. M. C., Van de Velde, Ph. G. A. et Dumortier, F. G. A., (1988). A Comparative Study of Self-adaptive Long-range Predictive Methods. *Automatica*, vol. 24, pags. 149-163.
- De Oliveira, M. C., Bernussou, J. et Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, vol. 37, pags. 261-265.
- Doyle, J. C., Francis, B. et Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, USA.
- Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P.P. et Francis, B.A. (1989). State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 34, pags. 831-847.
- Doyle, J., Packard, A. et Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs, and μ . *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, pags. 1227-1232, Brighton.
- Furuta, K. et Kim, S. B. (1987). Pole assignment in a specified disk. , *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 32, pags. 423-427.
- Gahinet, P. et Apkarian, P. (1994). A linear inequality approach to H_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, pags. 421-448.

- Garcia, G. et Bernussou, J. (1995). Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pags. 184-189.
- Garcia, G. Bernussou, J. et Camozzi, P. (1996). Disk pole location for uncertain systems through convex optimization, *International journal of robust and nonlinear control*, vol. 6, pags. 189-199.
- Garcia, G. Daafouz, J. et Bernussou, J. (1996). Output feedback disk pole assignment for systems with positive real uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, pags. 1385-1391.
- García, C. E., Prett, D. M. et Morari, M. (1989). Model Predictive Control: Theory and Practice – a Survey. *Automatica*, vol. 25, pags. 335-348.
- Geromel, J., Bernussou, J. et Oliveira, M. (1999). H_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, pags. 1449-1454.
- Geromel, J. C., Peres, P. et Bernussou, J. (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems., *SIAM journal of Control and Optimizations*, vol. 29, pags. 381-402.
- Geromel, J. C., Peres, P. et Souza, S. R. (1992). H_2 guaranteed cost control for uncertain continuous time linear systems. *Systems and Control Letters*, vol. 19, pags. 23-27.
- Granado, E., Colmenares, W., Bernussou, J. et Garcia, G. (2001). Control por realimentación de la salida usando LMI's basado en MPC. *Proceedings of the III Coloquio de Automatización y Control CAC2001*, Purto Ordaz, Venezuela.
- Granado, E., Colmenares, W., Bernussou, J. et Garcia, G. (2002). LMI based MPC. *Proceedings of the 15th IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona, España.
- Granado, E., Colmenares, W., et Pérez, O. (1996). Síntesis de Controladores utilizando el criterio de estabilidad de Lyapunov. *Proceedings of the 7^o Congreso Latinoamericano de Control Automático*, Argentina.
- Greco, C., Menga, G., Mosca, E. et Zappa, G., (1984). Performance Improvement of Self Tuning Controllers by Multistep Horizons: the MUSMAR approach. *Automatica*, vol. 20, pags. 681-700.

- Hahn, W (1963). *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*. Prentice Hall, USA.
- Hollot, C. et Barmish, B.R. (1980). Optimal quadratic stabilizability of uncertain linear systems. *Proceedings of the 18th Allerton Conference on Communication and Computing*, Illinois, USA, pags. 697-706.
- Iwasaki, T. et Skelton, R. E. (1995). The XY-centering Algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed-order control design. *International Journal of Control*, vol. 62 pags. 1257-1272.
- Jury, E. (1971). Inners, approach to some problems of system theory. *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 16, pags. 233-240.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall, USA.
- Kothare, M., Balakrishnan, V. et Morari, M. (1996). Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, vol. 32, pags. 1361-1379.
- Kouvaritakis, B., Rossiter, J. A. et Chang, A. O. T. (1992). Stable Generalized Predictive Control: An Algorithm with Guaranteed Stability. *Proceedings IEE, Part D*, vol. 139, pags. 349-362.
- Kucera, V. (1991). *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Prentice Hall International, UK.
- Kuvsec-Biasizzo, K., Skrjane, I. et Matko, D. (1997). Fuzzy predictive control of highly nonlinear pH process. *Computers & Chemical Engineering*, vol. 21, pags. 613-618.
- Kwakernaak, H. and Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, Willey, USA.
- La Salle, J. et Lefschetz, S. (1973). *Stability of Liapunov's Direct Method*, Academic Press, USA.
- Lee, J. W., Kwon, W. H. et Choi, J. (1998). On stability of constrained receding horizon control with finite terminal weighting matrix. *Automatica*, vol. 34, pags. 1607-1612.
- Lemos, J. M. et Mosca, E., A (1985). Multipredictor-based LQ self-tuning Controller. *Proceedings of the IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, York, UK, pags. 137-141.
- Ljung, L. (1987). *System Identification. Theory for the user*. Prentice-Hall, USA.
- Maciejowski, J. (2002). *Predictive Control: with constraints*. Pearson Education Limited, London.

- Mao, W. J. (2003). Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, vol. 39, pags. 1109-1112.
- Megías, D., Serrano, A. et de Prada, C. (2000). Min-Max constrained quasi-infinite horizon model Predictive Control using linear programming. *Proceedings of the International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Pisa, Italia.
- Morari, M. (1994). Model predictive control: Multivariable control technique of choice in the 1990s?, book: *Advances in Model-Based Predictive Control*. Oxford University Press, Publié par Clarke, D. W.
- Mosca, E. et Zhang, J. (1992). Stable Redesign of Predictive Control. *Automatica*, vol. 28, pags. 1229-1233.
- Nesterov, Y. et Nemirovsky, A. (1994). Interior-point polynomial methods in convex programming, *Studies in Applied Mathematics*. SIAM.
- Petersen, I. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems, *Systems and Control Letters*, vol. 8, pags. 351-357.
- Petersen, I. et McFarlane, D. C. (1994). Optimal guaranteed cost and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 39, pags. 1971-1977.
- Ramírez, D. R. et Camacho, E. F. (2001). On the piecewise linear nature of Min-Max Model Predictive Control with bounded uncertainties. *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, Florida USA.
- Rawlings, J., Meadows, E. S. et Muske, K. R. (1994). Non linear model predictive control: a Tutorial and Survey. *Proceeding of International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Kyoto, Japan.
- Rawlings, J. et Muske, K. (1993). The Stability of Constrained Receding Horizon Control. *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 38, pags. 1512-1516.
- Richalet, J., Abu el Ata-Doss, S., Arber, C., Kuntze, H. B., Jacobash, A. et Schill, W. (1987). Predictive Functional Control. Application to fast and accurate robots. *Proceedings of the 10th IFAC Congress*, Munich.
- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. et Papon, J. (1976). Algorithmic Control of Industrial Processes. *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Tbilisi, URSS.

- Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. et Papon, J. (1978). Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes. *Automatica*, vol. 14, pags. 413-428.
- Rossiter, J. A., Gossner, J. R. et Kouvaritakis, B. (1996). Infinite Horizon Stable Predictive Control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 41 (10), pags. 1522-1527.
- Sánchez-Peña, R. S. et Sznaier, M. (1998). *Robust Systems theory and applications*, John wiley & sons, inc, USA.
- Sastry et Bodson (1990). *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*, Printice-Hall international Editions, USA.
- Scokaert, P. O. M. (1997). Infinite horizon generalized predictive control, *International Journal of control*, vol. 66, no. 1, pp. 161-175.
- Scokaert, P. O. M. et Rawlings, J. (1998). Constrained linear quadratic regulation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 43, pags. 1163-1169.
- Scherer, C., Gahinet, P. et Chilali, M. (1997). Multiobjective output feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 42, pags. 896-911.
- Söeterboek, R. (1992). *Predictive Control. A unified approach*. Prentice-Hall, USA.
- Vandenbergh, L. et Boyd, S. (1995). Primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities. *Mathematical Programming*, vol. 69, pags. 205-236.
- Wan, Z. et Kothare, M. (2003). An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, vol 39, pags. 837-846.
- Ydstie, B. E. (1984). Extended Horizon Adaptive Control. *Proceedings of the 9th IFAC World Congress*, Budapest, Hungary.
- Younce, R., et Rohrs, Ch. (1992). Identification with Non parametric Uncertainty, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 37, pags. 715-728.
- Zafiriou, E. (1990). Robust Model Predictive Control of Processes with Hard Constraints, *Comput. and Chem. Eng.*, vol. 14, pags. 359-371.
- Zafiriou, E. et Marchal, A. L. (1991). Stability of SISO Quadratic Dynamic Matrix Control with Hard Output Constraints, *AIChE J.*, vol. 37, pags. 1550-1560.
- Zamarreño, J. M. et Vega, P. (1999). Neural predictive control. Application to a highly non-linear system. *Engineering Application of Artificial Intelligence*, vol. 12, pags. 149-158.

- Zheng, Z. Q. et Morari, M. (1993). Robust stability of constrained model predictive control. *Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, USA, pages. 379-383.
- Zhou, K., Doyle, J. et Glover, K. (1996). Robust and optimal control. Prentice Hall, USA.
- Zhou, K. (1998). *Essentials of Robust control*, Prentice Hall, USA.
- Zhou, K. et Khargonekar, P. (1988). Robust stabilization of linear system with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and Control Letters*, vol. 10, pages. 17-20.

Commande prédictive à base de programmation semi définie

RESUME: Dans ce travail sont présentées quelques approches pour la synthèse de contrôleurs robustes avec information partielle sur l'état (retour de sortie) dans le cas de systèmes à temps discret. Dans le cadre de commande prédictive, la synthèse découle de la minimisation à chaque instant d'échantillonnage, d'une borne supérieure d'un coût quadratique évalué sur un horizon temporel infini. Le problème d'optimisation qui inclut des contraintes sur l'état et la commande est formulé comme un problème de programmation semi définie à base d'inégalités matricielles linéaires. Deux voies générales sont poursuivies: l'une basée sur le concept d'ellipsoïde invariant et synthèse de compensateur dynamique de retour de sortie, l'autre basée sur une formulation étendue permettant la résolution d'un problème de retour d'état équivalent à celui du retour de sortie.

MOTS CLES: Commande prédictive; Commande robuste; Retour de sortie; Optimisation; Inégalités matricielles linéaires.

Predictive Control based on semi-define programming

ABSTRACT: This work develops some approaches for the synthesis of partial information robust output feedback controllers in discrete time systems. In the framework of predictive control the synthesis follows the minimization, at each sampling time, of an upper bound for a quadratic cost associated with an infinite time horizon. The optimization problem which takes into account state and control constraints is described in terms of a semi definite programming one including linear matrix inequalities. Two general approaches are investigated: the first one is based on invariant ellipsoidal concept with dynamic output control, the second one makes use of an extended formulation where the initial output feedback control is translated in terms of extended state feedback control.

KEY WORDS: Predictive control; Robust control; Output feedback; Optimization; Linear matrix inequalities.

